Ali Nesin

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye. . .

Ali Nesin

Aksiyomatik Kümeler Kuramı I

Sayıların İnşası

İçindekiler

Önsöz 1

I Doğal Sayılar **5**

1 Biraz Felsefe, Biraz Mantık **7**
1.1 Model ve Teori 7
1.2 Doğa ve Matematik 9
1.3 Gerçek Nedir Ne Değildir? 11
1.4 Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır? 16

2 Temel Sorular **21**
2.1 Doğal Sayılardan Ne İstiyoruz? 21
2.2 Doğal Sayılar Ne Olmalı? 25
2.3 Plan Program 28
2.4 İzleyeceğimiz Yöntem Üzerine 29

3 İlk Aksiyomlar ve İlk Sayılar **31**
3.1 Russell Paradoksu 31
3.2 Giriş 34
3.3 Kümeler Kuramının Alfabesi ve Dili 35
3.4 Boşküme ve Küme Eşitliği 36
3.5 İki Elemanlı Küme 39
3.6 Kümelerin Bileşimi 41
3.7 Küçük Doğal Sayılar ve Ardıllık 43
3.8 Kusurlu Bir Toplama Tanımı Denemesi 45

4 Daha Fazla Kümeler Kuramı Aksiyomu **51**
4.1 Altkümeler 51
4.2 Tanımlı Altküme Aksiyomu 53
4.3 Altkümeler Kümesi Aksiyomu 56

5 Temel Kavramlar **61**

5.1 Kartezyen Çarpım I 61
5.2 Fonksiyon 65
5.3 Küme Ailesi 68
5.4 Kartezyen Çarpım II 69

6 Temellendirme Aksiyomu **71**

7 Doğal Sayılar Yapısı I **77**
7.1 Tümevarımsal Kümeler 78
7.2 $(\mathbb{N}, S, 0)$ Yapısı ve Tümevarımla Kanıt 81

8 Kümeler Kuramının Kullandığımız Aksiyomları **85**

9 Doğal Sayılarda Toplama, Çarpma ve Sıralama **89**
9.1 Toplama 89
9.2 Toplamanın Özellikleri 96
9.3 Çarpma 100
9.4 Çarpmanın Özellikleri 101
9.5 Sıralama 103
9.6 İyisıralama 105
9.7 Tümevarımla Kanıta Yeniden Ziyaret 106
9.8 Kalanlı Bölme 108
9.9 Onluk Tabanda Doğal Sayılar 109
9.10 Tümevarımla Kanıta Yeniden Ziyaret 114

10 Tümevarımla Tanım **117**
10.1 Tümevarımla Tanım 117
10.2 Bir Uygulama: Doğal Sayıların Biricikliği 123

11 Doğal Sayılar Yapısı II **127**
11.1 Peano Aritmetiği 127
11.2 Üs Alma ve Diğer Fonksiyonlar 130

12 Biraz Formel Mantık **133**
12.1 Alfabe 133
12.2 Kümeler Kuramının Formülleri 134
12.3 Peano Aritmetiği'nin Formülleri 139

II Tamsayılar ve Kesirli Sayılar **141**

13 Tamsayılar Yapısı **143**
13.1 Sayıları Yaratmaya Giriş 143

13.2 Tamsayılar Kümesine Doğru 145
13.3 Küme Olarak $\mathbb{Z}$ 150
13.4 Toplama 151
13.4.1 Toplamanın Tanımı 151
13.4.2 Toplamanın Özellikleri 154
13.5 Çarpma 157
13.5.1 Çarpmanın Tanımı 157
13.5.2 Çarpmanın Özellikleri 160
13.5.3 Toplama ve Çarpmayla İlgili Özellik 161
13.6 Sıralama 163
13.6.1 Sıralamanın Tanımı 163
13.6.2 Sıralamanın Özellikleri 165
13.6.3 Sıralamayla İşlemlerin İlişkisi 166
13.7 Doğal Sayıları Tamsayılara Gömmek 168
13.8 Kesip Yapıştırma ya da Özdeşleştirme 172
13.9 Nihayet Yılların $\mathbb{Z}$'si 173

14 Kesirli Sayılar Kümesi $\mathbb{Q}$ 175
14.1 Kesirli Sayılar Kümesi 175
14.2 Toplama ve Çıkarma 179
14.3 Çarpma ve Bölme 181
14.4 Sıralama 183
14.5 Tamsayıları Kesirli Sayılara Gömme 185
14.6 Kesirli Sayılarda Üs Alma 187
14.7 On Tabanında Kesirli Sayılar 188
14.7.1 Özel Kesirli Sayılar 189
14.7.2 Genel Durum 190

15 Halkalar ve Cisimler 193
15.1 Toplamanın Özellikleri 194
15.2 Çarpmanın Özellikleri ve Halka Kavramı 197
15.3 Tamlık Bölgeleri ve Cisimler 204
15.4 Kartezyen Çarpım ve Althalka 205
15.5 Sıralı Halkalar ve Cisimler 208

16 Gerçel Sayılar Konusuna Girmeden Önce 215
16.1 Sayıları Yaratmaya Devam Ediyoruz 215
16.1.1 Yaptıklarımız ve Yapacaklarımız 215
16.1.2 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'yi Yaratmak 216
16.1.3 Ya Diğer Eksik Sayılar? 220
16.2 $\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi 221
16.3 Kesirli Sayılar Kümesinin Kusurları 225

17 Kesirli Sayı Dizileri **231**
17.1 Diziler . . . 231
17.2 Dizilerle İşlemler . . . 232
17.3 Sınırlı Diziler . . . 234
17.4 Zamanla Sabitleşen Diziler . . . 236
17.5 Yakınsak Diziler . . . 237
17.5.1 Yakınsaklık . . . 237
17.5.2 Tanımın Tartışması . . . 240
17.5.3 Limitin Biricikliği . . . 241
17.6 Yakınsak Dizilerle Dört İşlem ve Sıralama . . . 245
17.6.1 Yakınsak Diziler ve Toplama . . . 245
17.6.2 Yakınsak Diziler ve Çıkarma . . . 247
17.6.3 Yakınsak Diziler ve Çarpma . . . 248
17.6.4 Yakınsak Diziler ve Mutlak Değer . . . 251
17.6.5 Yakınsak Diziler ve Sıralama . . . 252
17.6.6 Sıfıra Yakınsayan Diziler . . . 253
17.6.7 Bölme . . . 254
17.6.8 Sıralama . . . 256
17.7 Yakınsaklık/Iraksaklık Örnekleri . . . 257
17.8 Yakınsaklık Alıştırmaları . . . 262

18 Kesirli Temel Diziler **265**

19 Altdiziler **275**

20 Onluk Tabanda Kesirli Sayılar (2) **279**

III Gerçel Sayılar **287**

21 Gerçel Sayılar Kümesi **289**

22 Gerçel Sayılarda Dört İşlem **295**

23 Gerçel Sayılarda Sıralama **305**
23.1 Cebirsel Tanım Tartışması . . . 305
23.2 Analitik Tanım Tartışması . . . 306
23.3 Matematiksel Tanım . . . 307
23.4 $<$ İlişkisi Bir Tamsıralamadır . . . 310
23.5 Gerçel Sayılarda Tek Bir Sıralama Vardır . . . 313

24 $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{R}$'ye Gömmek **317**

25 $\mathbb{R}$'nin Tamlığı ve $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ **323**
25.1 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 328

26 Sınırlı ve Artan Diziler **329**

27 İki Yakınsak Gerçel Dizi Örneği **333**

28 En Küçük Üstsınır **337**

29 Gerçel Sayıların Üsleri **341**

30 Yakınsak Gerçel Dizi Örnekleri ve Alıştırmalar **347**
30.1 Yakınsak Gerçel Dizi Alıştırmaları 348

31 Sıralı Halkalarda Yakınsaklık ve Tamlık **351**
31.1 Diziler ve Yakınsaklık 351
31.2 Arşimet Cisimleri 353
31.3 Yakınsak Diziler Halkası 354
31.4 Temel R-Dizileri Halkası 356

32 $\mathbb{R}$'nin Biricikliği **359**

33 Dedekind Kesitleri **365**
33.1 İşlemler, Sıralama ve Her Şeyin Kanıtı 366

IV Ekler **373**

34 Bölüm Cisimleri ve Yerelleştirme **375**
34.1 Örnekler 375
34.2 Amaç 376
34.3 Arayış 377
34.4 Plan 379
34.5 Matematiksel Tanımlar 380
34.6 En Küçük Ne Demek? 383

35 Ore Bölgeleri ve Halkaları **387**

36 Sonsuz Küçük Eleman **395**
36.1 Arşimet Özelliği 395
36.2 ϵ Cebirsel Olamaz 399

Kaynakça **401**

Simge Dizini **403**

Dizin **405**

Önsöz

Matematikçilerin sürekli hesap yapan, koca koca sayıların kareköklerini hesaplayan ya da küplerini filan alan tuhaf insanlar oldukları zannedenler vardır. Oysa hiç de öyle değildir. Rastgele bir matematik kitabında sayfa numaralarından başka neredeyse hiç sayı yoktur, olduğunda da bu sayılar çoğu zaman 0, 1, $\sqrt{2}$, π gibi çok bilindik birkaç sayıdır. Matematikçiler genellikle teker teker sayıların kendileriyle değil, olsa olsa sayıları simgeleyen x ve y gibi simgelerle ya da (daha ziyade) sayı kümeleriyle uğraşırlar.

Sayılar elbette matematiğin en temel nesnelerindendir. Tarihsel olarak sayılar, belki geometriden hemen sonra, matematiğin gelişmesinde en çok rol oynayan nesnelerdir.

Bu kitapta doğal sayılar kümesini, tamsayılar kümesini, kesirli sayılar kümesini ve gerçel (reel) sayılar kümesini matematiksel olarak ve matematiğin ta en başından başlayarak inşa edeceğiz. Sadece sayı kümelerini değil, bu kümeler üzerine tanımlanmış toplama ve çarpma işlemlerini ve hepimizin ilkokuldan beri "bildiği" $\leq$ sıralamasını da, yani "sayı sistemlerini" matematiksel olarak inşa edeceğiz.

Bir önceki paragraftaki "inşa edeceğiz" terimine dikkatinizi çekerim. Sayılara zaten var olan nesneler olarak değil, yaratılması gereken nesneler olarak ele alacağız. Bunu derken, "sayılar bizden bağımsız vardır" ya da "yoktur" gibi felsefi bir görüş beyan etmiyoruz, sadece sayılara karşı takınacağımız tavırdan bahsediyoruz.

Sayıları teker teker tanımlayamayacağımız bariz, çok sayı var ve hepsini teker teker tanımlayacak kadar uzun değil hayat. Sayıları teker teker tanımlamak yerine, hepsini birden aynı anda tanımlayacağız; başka seçeneğimiz de yok zaten. Yani sayıları tanımlamak yerine sayı kümelerini tanımlayacağız. Sayıları da, tanımladığımız bu sayı kümelerinin elemanları olarak tanımlayacağız. Bu basit fikir aslında modern matematiğin en önemli katkılarından biridir: Kümeler elemanlardan daha önemlidir, daha önceliklidir.

Lavoisier'nin ünlü yasasına göre, ki bu düşünceyi ilk olarak MÖ 400'lerde yaşamış Anaksagoras dile getirmiştir, yoktan bir şey var edemeyeceğimize göre, bu inşaları yapabilmek için bazı varsayımlarda bulunmamız lazım. Bu tür varsayımlara matematikte aksiyom adı verilir. Önce kümeler kuramının en

doğal, doğruluğu en su götürmez, en masum aksiyomlarını temel alarak 0, 1, 2, 3 gibi birkaç doğal sayı inşa edeceğiz. Ama daha sonra, sonsuz bir kümenin varlığını söyleyen bir aksiyomu kabul ederek tüm doğal sayılar kümesini, yani tüm doğal sayıları tek bir hamleyle inşa edeceğiz. Tamsayılar, kesirli sayılar ve gerçel sayılar ardından gelecek. Sadece yıllar boyunca aşina olduğumuz (ya da aşina olduğumuzu sandığımız) sayı sistemlerini inşa etmekle kalmayacağız, bu birinci ciltte aynı zamanda matematiğin temeli olan kümeler kuramının en basit aksiyomlarını da göreceğiz. (Daha sofistike aksiyomları bir sonraki cilde bırakacağız.) Ve sözünü ettiğimiz inşaları yapmak için ne kadar aksiyoma ihtiyacımız varsa o kadar aksiyom kullanacağız, ne bir fazla ne bir eksik.

Sayı sistemlerinin nasıl inşa edildiğini bilmeden de matematik yapılabilir, nitekim yapılıyor da. Ama bu kitapta (ve bir sonraki cilt olan [Ne1]'de) işlenen konuların derin olduklarına, matematiğe felsefi hatta metafizik bir boyut kattıklarına, dolayısıyla bu konuları bilmenin ufuk açacağına, çap genişleteceğine, mutluluk getireceğine inanıyorum. Ne de olsa, bizim dışımızda bir biçimde var olan sayıları sadece zihinsel olanaklarımızla bir kez daha yaratıyoruz. (Sayıların varlığı konusuna ileride değineceğim.)

Bu kitap aksiyomatik kümeler kuramının birinci kitabı olarak addedilebilir. Aksiyomatik kümeler kuramında bir adım daha ileri gitmek ve matematik için daha fazla tehlike arzedebilecek aksiyomlarla tanışmak için bu kitabın ikinci cildi [Ne1] okunmalıdır.

Bir önceki paragraftaki "daha fazla tehlike arzedebilecek" sözleri bilinçli yazılmıştır: Bu kitapta açıklanan masum aksiyomların bile matematikte bir çelişkiye yol açmayacağı kanıtlanamamıştır; aksine bu aksiyomlardan bir çelişki çıkmayacağının, yani matematik teorisinin tutarlı olduğunun kanıtlanamayacağı kanıtlanmıştır. İkinci ciltteki aksiyomlar çok daha tehlikelidir. Bir defa daha tekrarlayayım: İnşa ettiğimiz matematiğin çelişkisiz olduğunu matematikte kanıtlayamayız. Tabii bunun kanıtlanamaması matematikte illa bir çelişki olduğu anlamına gelmez. Çelişki olabilir de olmayabilir de. Eğer çelişki bulursak matematiğin (aksiyomlarının) çelişkili olduğunu anlarız, ama matematiğin (aksiyomlarının) çelişkiye yol açmayacağını hiçbir zaman anlayamayacağız. Bu kitabın yazarının düşüncesine göre ne bu kitapta açıklanan aksiyomlardan ne de [Ne1]'de açıklanan ek aksiyomlardan bir çelişki çıkmaz. Bu tabii sadece bir inançtır, matematiksel bir kesinlik değildir. Ama birazdan bu düşüncemin gerekçelerini açıklamaya çalışacağım.

Her ne kadar okurdan fazla bir önbilgi talep etmiyorsak da, hatta teorik olarak hiçbir bilgi talep etmiyorsak da, kimi zaman okurdan belli bir matematiksel olgunluk bekleyebiliriz. Önbilgi talep etmiyoruz derken de abartmayalım, okur bu kitaba el atmadan önce sezgisel kümeler kuramını mutlaka büyük ölçüde içselleştirilmiş olmalıdır. Türkçe kitap olarak bu konuda [Ne2]'yi önerebiliriz.

Okura şu bilgi de gerekli olabilir: Özellikle ilk bölümlerde okunan her satır hak ettiği ölçüde hemen anlaşılamayabilir. İlk yüz küsur sayfanın bütünü okunduğunda ilk yirmi sayfada yazılanlar daha bir anlam kazanacaktır. Mesela belki gereksiz yere uzun bulunabilecek Altbölüm 1.3 kitap ilerledikçe daha bir anlam kazanacaktır, tekrar tekrar okunmalı. Yani elinizdeki kitap emeğinizin karşılığını anında vermeyebilir. Okurdan sabır rica ediyorum. Sabrının ve emeğinin mükâfatını alacağına dair hiçbir kuşkum yok.

Bu kitabı yazarken (özellikle başlarda, kitapta neler yapacağımı özetlerken) en büyük sorunum okura kitabın hiçbir aşamasında yalan söylemek istememem oldu. Daha doğrusu istedim, aklımdan geçti, bir iki denemede de bulundum ama daha sonra gönlüm razı gelmedi. Bunun bariz bir tehlikesi de var ve o tehlikeye düştüğüme eminim: Okura yalan söylemek istemezken konuyu anlaşılmaz, hatta içinden çıkılmaz bir hâle dönüştürmüş de olabilirim, hatta ilk bölümler galiba biraz öyle oldu. Bu yüzden okurdan sabır rica ediyorum. Üçüncü bölümde alışık olduğu matematik kitabı biçemini bulmaya başlayacak ve ilk sayfaları daha iyi anlayacaktır. Yine de itiraf edeyim ki bazı satırları hakkıyla anlamak için çok az ve çok temel düzeyde de olsa Model Teorisi bilgisi gerekebilir ama o bölümleri atlamanın hiçbir sakıncası yoktur. Eğitimde "anlamayı öğrenme"nin öneminden bahsedilir; bu kitapta da anlamayı bilmek önemli olacak tabii, ama ayrıca anlamamayı bilmek de önemli olacak! Size zor ve anlaşılmaz gelen yerleri bir defa okuduktan sonra geçin.

Yalnızca kümeler kuramı ve sayıların inşası yok bu kitapta, ayrıca (gerektiği kadar) analiz ve cebir de var. Kitabın sonuna da bazı okurların ilgilenebileceği ekler koydum.

Bu kitabın içeriği, 1996'da kurulduğundan beri ve emekli olduğum 2022 yılına kadar İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde birinci sınıf matematik öğrencilerine verdiğim ve daha sonra Matematik Dünyası dergisinde kaleme aldığım Aksiyomatik Kümeler Kuramı ders notlarından oluşmuştur. Tabii yazıların eli yüzü düzgün bir kitap hâline gelmesi için gereken düzenlemeleri yapmak gerekti, ancak pek başarılı olamadığımı itiraf etmeliyim. Dergi yazıları doğal olarak tekrar içerir, o tekrarları asgariye indirmeye çalıştım. Yıllarımı aldı! Okurun hoşgörüsüne sığınarak yapabildiğim kadarını yayımlıyorum.

Teşekkür. Kitabı LaTeX'e aktaran Aslı Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin'e ne kadar teşekkür etsem azdır. Bundan neredeyse 30 yıl kadar önce bu dersi alan eski öğrencim Sonat Süer birkaç kademede bu kitabın ortaya çıkmasında yardımcı oldu. Ebru Nayir kitabın önemli bir kısmını satır satır okuyarak birçok hatayı ve anlatım bozukluğunu giderdi. Sonat'a ve Ebru'ya da çok teşekkürler.

Dediğim gibi bu iki cilt, İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde birinci sınıf matematik öğrencilerine verdiğim iki dönemlik bir dersin içeriğinden oluşmaktadır. Matematik eğitimine öyle ya da böyle bulaşmış biri böyle bir dersin birinci

sınıflar için pek standart olmadığını, hatta hiç uygun olmadığını düşünebilir. Hatta birçok üniversitede buna izin verileceğini bile sanmıyorum, ne izin verilmesi, teklif edilmesi bile düşünülemez. Artık... Ama bundan yaklaşık yarım yüzyıl önce, Anglosakson eğitim sisteminin dünyaya egemen olmadığı, Bolonya süreci gibi eğitimi tekdüzeleştiren saçmalıkların hüküm sürmediği yıllarda Fransa'da eğitim görme şansına eriştim. Bourbaki ve Sovyetler Birliği'nde basılan kitapları okuyarak kendimi yetiştirdim. Zihinsel gelişimin yavaş yavaş ve öğrenciyi sarsmadan olamayacağına kanaat getirdim. Özellikle matematik eğitiminde soyut düşünceye erken geçilmesi gerektiğini düşünenlerdenim. Belki bir iki zaiyat dışında, bu eğitim felsefemden öğrencilerimin alabildiğine yararlandığına inanıyorum. Bana bu dersleri verme olanağı tanıyan Bilgi Üniversitesi kurucularından Oğuz Özerden'e ve Yiğit Ekmekçi'ye güvenlerinden ve üniversitede sağladıkları özgürlük ortamından dolayı minnettarım.

Tabii öğrencilerime de çok teşekkür ederim, en çok da onlar teşekkürü hak ediyorlar, ne de olsa en çok acıyı onlar çekti.

Ali Nesin
2011-2026

Kısım I

Doğal Sayılar

1. Biraz Felsefe, Biraz Mantık

1.1 Model ve Teori

Biz insanlar dünyayı, doğayı, evreni, etrafımızda ne var ne yok her şeyi zihnimizle anlarız. Başka çaremiz de yok. Şöyle yaparız: Tecrübelerimizden yararlanarak, anlamak istediğimiz olayın ya da nesnenin zihnimizde bir modelini oluştururuz.

Mesela bir binanın Richter ölçeğinde kaç derecelik depreme dayanıklı olduğunu anlamak için binayı sarsmayız. Binayı oluşturan kumdan, demirden, çimentodan ve binanın zemininden numuneler alıp herbirinin kalitesine bir değer veriririz (çünkü kumun, demirin, çimentonun, zeminin de zihnimizde birer modeli vardır) ve binanın mimari yapısını ve jeolojiyi de göz önünde bulundurarak masa başına geçip hesap kitap yaparak binanın dayanabileceği depremin şiddetini buluruz, daha doğrusu tahmin ederiz. Bulduğumuz aslında gerçekten binanın dayanma gücü değildir, modelimizin dayanma gücüdür. Modelimiz ne kadar gerçeğe uygunsa, doğru sonuca o kadar yaklaşırız.

Ama tabii gerçek çok ama çok karmaşık olduğundan, gerçeği oluşturan tüm öğeleri kale almamız mümkün değildir. Bu yüzden gerçeği olabildiğince basitleştirmeye çalışırız. Mesela çok karmaşık bir ilişkiler yumağı olan ekonomiyi anlamak için önemli olduğunu sandığımız cari açık, enflasyon, faiz, döviz kurları, işsizlik, istihdam, dış borç gibi birkaç veriyle yetinmeye çalışabiliriz. Meteoroloji için ise Balkanlar, Kafkaslar, Akdeniz ve Sahra'yla yetinebiliriz. Eğer az sayıda veri gerçeği yaklaşık da olsa anlamada yeterli değilse, başa çıkamayacağımız kadar çok sayıda veriye ihtiyacımız varsa, o zaman bilgisayarda simülasyon yaparız. Ama her durumda illa ki anlamak istediğimiz şeyin zihinsel bir modelini oluşturmak zorundayız. İnsan ilişkileri de öyle değil midir? "Doğumgününü unutursam kızar" diye düşündüğümüz kişinin zihnimizde bir modelini oluşturmuşuzdur. (Doğumgününü unutmuşsanız ve üzülmemişse modeliniz yanlış demektir!)

Model, basitleştirilmiş ve hatta idealize edilmiş gerçektir. Model hiçbir zaman tam gerçeği yansıtamaz. Ama çoğunlukla sadece kabul edilebilir ölçüde yanlıştırlar. Mesela uçaklar patır patır düşmez, ilaçlar çoğu zaman iyileştirir, telefonlar genellikle doğru numarayı arar. Eğer bir modelin gerçeği istediğimiz

kadar iyi kavrayamadığı anlaşılırsa genellikle (ama her zaman değil[1]) model yırtılıp atılmaz, ufak tefek değişikliklerle model daha işe yarar bir hâle getirilir.

Yukarıda, anlamak istediğimiz şeyin bir modelini yaratırız dedik. Bu tam doğru değil. Aslında modelden ziyade anlamak istediğimiz şeyin teorisini kurarız. Model daha somut bir evrendir, teori ise bir modele hükmeden formüllerden ve ilişkilerden oluşur. Mesela enflasyon, faiz ve döviz kurları arasındaki cebirsel bir ilişki ekonomi teorisinin bir parçası olabilir. Bilindiği üzere (ya da birçok ekonomistin kabul ettiği gibi ve en azından ülkemizde) döviz arttıkça ve faiz düştükçe enflasyon artar. Enflasyona e, faize f, döviz kuruna da d diyelim (doların d'si!). Aralarındaki cebirsel ilişkinin (doğru ya da yanlış) bir c sabiti için $d/f = ce$ olduğu düşünülebilir. Bu formül bir teoridir ya da teorinin bir parçasıdır. Aralarındaki ilişki $d/f^2 = c\sqrt{e}$ formülü de olabilirdi, bu da bir başka teori olur. Tabii c zamana ve coğrafyaya göre de değişebilir, hatta bir sabitten ziyade istihdamın bir fonksiyonu da olabilir. Bizim dışımızda ve bizden bağımsız var olan gerçek ekonominin kurduğumuz teorinin bir modeli olduğunu varsayarız ve hesaplarımızı, ekonomik tahminlerimizi ona göre yaparız. Teori gerçek ekonomiyi (kabul edilebilir bir hatayla) açıkladığı sürece sorun olmaz, açıklayamadığı, kötüsü teori sapıttığı zaman teoriyi değiştirmek ya da teorinin geçerli olduğu koşulları belirtmek zorunda kalırız, mesela kabul edilmiş bir ekonomi teorisi, doğal afet ya da savaş gibi stresli zamanlarda geçerli olmayabilir.

Daha hayatın içinden bir örnek alalım. Diyelim bir genç kız evlenmek istiyor ve müstakbel kocasından beklentilerini bir kâğıda sıralıyor. "Sağlıklı olsun, çalışkan olsun, temiz olsun, zeki olsun, komik olsun, çok fakir olmasın, kötü alışkanlıkları olmasın, boyu posu şöyle olsun, yaşı başı şu kadar olsun, bana bayılsın" gibi. Listeyi çok uzatırsa evde kalır! (Daha bilimsel olması için genç kızın her bir özelliğe bir puan vermesi gerekir.) Bu bir teoridir. Şimdi bu koşullara uyan her erkek bu teorinin bir modelidir[2].

Matematik ise her şeyin teorisidir, diğer tüm teorileri mümkün kılan bir uğraş alanıdır.

Bir matematikçi matematiksel bir yapının ya da bir modelin içinde doğduğunu varsayar, daha doğrusu mesleği gereği varsaymak zorundadır. Hemen tüm matematik de kümeler kuramına indirgenebileceğinden, matematikçiler aslında kümeler kuramının bir modelinde doğduklarına inanırlar. Bu modeli anlamamızı sağlayacak teori nedir? Nasıl bir teori, hangi önermelerden oluşmuş bir teori bu evrene hükmeder? Bu iki ciltte bu son sorunun olası bir cevabını sunacağız, yani her şeyin teorisi hakkında ahkâm keseceğiz. Az buz iş değil!

[1] Mesela ışığı dalga teorisiyle ya da parçacık (foton) teorisiyle açıklayabiliriz.

[2] Ama mesela listede "çalışkan olsun" ve "sabahları yatak keyfi yapsın" koşulları varsa teori muhtemelen çelişkilidir ve modeli yoktur.

1.2 Doğa ve Matematik

Matematik aslında gerçekle tam olarak uyuşmaz, uyuşması da beklenmez[3]. Gerçek (en azından bizim algıladığımız gerçek) mükemmel değildir, kusurludur, eksikleri gedikleri vardır. Matematik gerçeğin idealize edilmiş "mükemmel" bir versiyonudur.

Mesela doğada gerçek anlamda nokta yoktur, ne de olsa nokta 0 boyutludur ve biz de 0 boyutlu bir nesneyi algılayamayız. Gökyüzündeki yıldızlar bir noktayı andırsa da onlar aslında devasa güneşlerdir. Ama fiziksel olarak olmasa da **potansiyel olarak** noktanın var olduğunu düşünebiliriz: Bir çember alın mesela ve çemberin yarıçapını sürekli küçülttüğünüzü düşünün, çember küçüldükçe giderek daha fazla noktayı andıracaktır, atomik boyutlara getirdiğimizi düşünsek bile çember hiçbir zaman nokta olamayacaktır. Demek ki noktanın kendisi fiziksel olarak olmasa da potansiyel olarak var, sürekli küçülen bir çember zihinsel dünyamızın noktasına yakınsar.

Doğada (geometrik anlamda) doğru da yoktur, çünkü doğru bir boyutludur, kalınlığı yoktur yani ve sonsuza kadar uzayıp gider. Siz hiç sonsuza kadar uzayıp giden bir şey gördünüz mü, üstelik bir boyutlu bir şey? Ama mesela ufuk çizgisi doğruyu andırır. Aslında ufuk çizgisi bir boyutlu değildir, denizle gökyüzü arasında sürekli bir etkileşim vardır, ufuk çizgisi daha çok bir buhar tabakasıdır, çok ince olduğu için bize bir boyutlu gibi görünür, ayrıca sonlu uzunluktadır da. O ufuk çizgisini zihninizde daha daha inceltin ve daha daha uzatın. Böylece doğru kavramına yaklaşmış olursunuz. Yani doğru kavramı zihinsel bir kavramdır ve doğada sadece potansiyel olarak vardır.

Bir başka örnek: 0,123456789101112131415161 7... metre uzunluğunda bir ip kesemezsiniz, çünkü fiziksel uzunluğu sonsuza dek bölemezsiniz. Yukarıdaki virgülden sonra sonsuza kadar uzanan sayı (ya da uzunluk) zihinsel bir varlıktır, gerçek hayatta tam karşılığı yoktur. Bu sayı gerçek hayatta olsa olsa potansiyel olarak vardır. Yani bu sayı aslında ideal bir sayıdır, gerçekte olmayan, sadece potansiyel olarak var olan bir sayının matematiksel gösterimidir.

π sayısını somut bir çemberin, mesela bir bisiklet tekerinin çevresini ölçüp aynı tekerin çapına bölerek elde edemezsiniz, bu yöntemle olsa olsa π'ye yakın bir sayı bulursunuz. İsterseniz deneyin, 100 kişi bu yöntemle π sayısını virgülden sonra 6 basamağa kadar hesaplamaya çalışsın, eminim hemen herkes farklı sonuçlar bulacaktır. π sayısı ve bir önceki paragrafta ele aldığım sayı zihinsel nesnelerdir. π sayısı

$$3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582 09\ldots$$

[3]Bu aşamada akla Zenon paradoksları geliyor. Zenon paradoksları matematikle algıladığımız gerçek ile içinde yaşadığımız evrenin birbirinden ne kadar farklı olduklarını âdeta gözümüze sokuyor.

gibi bir sayıdır ve bu hesap tamamen zihinsel olarak ve masa başında yapılmıştır, ölçüp biçerek değil. Pi sayısı, zihinsel çemberin uzunluğunun zihinsel çapının uzunluğuna oranıdır.

Doğada düzgün altıgene en çok arı petekleri benzer. Ama hiçbir arı peteği düzgün altıgen değildir. Her şeyden önce düzgün altıgenin kenarları tek boyutludur, oysa arı petekleri mumdan yapılmıştır, kusurları vardır. Düzgün altıgen, o arı peteklerinin (zihinsel) ortalaması ve mükemmel hâlidir. Arılar düzgün altıgen yapmaya çalışırlar ama ellerinden ancak bu kadarı gelmektedir. Düzgün altıgen de doğada potansiyel olarak vardır.

İlkokulda saymayı fasulyelerle öğrendik. Sıramızın üstündeki fasulyelere bir fasulye daha eklediğimizde fasulye sayısı 1 artıyordu. Bir fasulye daha eklesek... Ne kadar fasulyemiz olursa olsun, bir fasulye daha ekleyince fasulye sayımız 1 artıyor. Bu artışın durması için hiçbir neden yok, dünyadaki tüm fasulyeler bitmiş olsa bile bir fasulye daha eklediğimizi **düşünebiliriz**. Buradan sonsuzluk fikri doğar. Sonsuzluk da gerçek hayatta sadece potansiyel olarak vardır. (Gerçekten varsa da benim onu deneylemem mümkün değil.) "Artı bir" işlemi bize sonsuzluk kavramını fısıldar.

Daha çarpıcı bir örnek vermek istiyorum. Bir bozuk parayla yazı-tura oyunu oynayalım. Tura geldiğinde oyun bitecek, kaç defada tura gelirse o kadar puan alıyoruz. Para adil de olabilir hileli de, ama illa ki tura gelme olasılığı pozitif olsun (yani paranın iki yüzü de yazı olmasın). Bir koşulum daha var: Oyun boyunca para değişmesin, hep aynı parayla oynayın. Aslında parayı her attığımızda, yere çarpan para değişir çünkü içindeki atomlar ve moleküller yer değiştirirler. Hatta her avcumuza aldığımızda vücut ısımızdan dolayı para değişir. Sürekli değişen paranın hiç değişmediğini varsayalım[4]. Soru şu: Bu oyun hep biter mi, yani sonsuza kadar tura gelmemesi, hep yazı gelmesi mümkün mü? Diyelim bu soruyu deney yaparak yanıtlamaya karar verdik. Cevabı bulmak için oyunu kaç defa oynamamız lazım? Oyunu bir milyon kere oynasak ve her seferinde oyun bitse, bu, oyunun hep biteceği anlamına gelmez ki. Ayrıca oyunu oynadığımızda oyunun sonsuza kadar sürmesi mümkün mü? Sonsuza kadar süren bir oyunu deneyimlemek mümkün mü? Oysa matematiksel olarak sorunun cevabını bulabiliriz: Bu oyun yüzde yüz olasılıkla hep biter (ve ortalama iki hamlede biter), "sürekli yazı" diye bir olay vardır ama gerçekleşme olasılığı 0'dır, ama bu cevabı ancak zihinsel olarak ve matematikle bulabiliriz. Deney yaparak cevabı bulmaya kalkışmak bile saçmalığın ta kendisi. Zaten sorunun kendisi deneyi dışlıyor.

Birinci bölümde matematik zihinseldir demiştik. Bu bölümde matematiğin doğada "potansiyel olarak" olduğunu söylemeye çalıştık. Doğada matematiğin kendisi olmasa da, fikri var! Doğa bize matematiği fısıldar. Matematikçinin ve bilim insanının görevi o fısıltıyı duymak ve zihinsel olarak yorumlamaktır.

[4]Zihinsel olmaya, yani matematik yapmaya başladık...

1.3 Gerçek Nedir Ne Değildir?

Gerçek var mıdır, varsa benden bağımsız mıdır ve ona nasıl ulaşırım? Ulaştığım ya da ulaştığımı sandığım gerçeği başkalarıyla nasıl paylaşırım, başkalarını nasıl ikna ederim? "Anlamak" ne demektir? Bir şeyi nasıl anlarız ve anladığımızı nasıl anlarız? Bazı verilerden bir başka sonuç nasıl ve hangi kurallarla çıkarılır? Bu kurallara nasıl karar veririz ve ne kadar güvenebiliriz? Kanıt nedir? Kanıtlanan şey illa doğru olmak zorunda mıdır? Hatta "doğru" ne demektir? Bu ve benzeri soruları hiç olmazsa arada bir kendine sormayan, yanıtlarını sorgulamayan matematikçinin matematiğin derinliğini tam olarak kavrayabildiğini söyleyemeyiz.

Her matematikçi bu soruların yanıtını vermelidir ya da bilmelidir demiyoruz, çünkü bu soruların bazıları ya da hepsi kesin yanıtı olmayan çok derin felsefi ya da metafizik sorular da olabilir ama yine de matematikçi bu konularda zaman zaman düşünüp konuyu en azından kendi kendine tartışması gerekir. Ne de olsa matematikçi (bir anlamda) doğruyu bulduğuna, gerçeğe ulaştığına inanır, doğru mantıkla, doğru akıl yürütmeyle yanlış yapamayacağını ve böylece gerçeğe yaklaştığını düşünür. Gerçek hakkında doğru bir şeyler söylediğini iddia eden matematikçinin elbette gerçek ve doğru hakkında düşünmesi gerekir. Bu da ister istemez yukarıdaki soruları sordurtur.

Ahmet'in ya da Ayşe'nin gerçeği (ya da doğrusu) farklı olabilir, Ahmet ve Ayşe olayları farklı yaşayabilirler. Gerçek, kişiden kişiye değiştiği gibi coğrafyadan coğrafyaya da değişir: Türkiye'nin gerçeğiyle ABD'nin gerçeği bir olamaz. Gerçek, kişiye ve coğrafyaya göre değiştiği gibi zamana göre de değişir: Ortaçağ'ın gerçeğiyle bugünün gerçeği bir değildir.

Bunlar herkesin bildiği, kıraathanede bile duyabileceğimiz beylik sözler. Herhâlde bunlardan söz edeceğimi sanmıyorsunuz bir matematik kitabında! Matematik, coğrafyadan, zamandan ve kişiden bağımsız olarak gerçeği yakaladığını iddia eder ya da iddia etmek ister. Matematik, insanlığın ortak aklı olmak ister.

Gerçeğin ve doğrunun kişiye, coğrafyaya ve tarihe göre değişeceğini söylerken, sözünü ettiğimiz gerçeğin ya da doğrunun ne olduğunu biliyor muyuz? Gerçek ya da doğru üzerine herhangi bir söz edebilmek için önce bu kavramların ne olduklarını bilmeliyiz. Tanımı bilinmeyen bir kavram üzerine ne söylenebilir ki?

Neyse ki bu kitapta dışımızdaki gerçekten pek sözetmeyeceğiz. Bu kitapta, tamamen zihinsel ve soyut bir dünya, matematiksel adıyla bir "teori" yaratacağız, bizim dışımızdaki (ne idüğü belirsiz) gerçeği yansıttığına inandığımız, bizim dışımızdaki doğruyu yansıttığını düşündüğümüz, belki de yansıttığını umduğumuz bir teori...

5 sayısını yarattığımızda "5 budur" iddiasında bulunmayacağız, sadece 5'i böyle tanımlamak istediğimizi söyleyeceğiz.

Matematik (yani yaratacağımız teori) bizim dışımızdaki dünyaya çok da yabancı olmamalı, ne de olsa matematikle teknolojik harikalar yaratıyoruz, internet çalışıyor, uçaklar uçuyor, cep telefonları çalışıyor... Buradan matematiğin bizim dışımızdaki dünyayı az çok anladığını çıkarabiliriz. (Ama bir dakika, belki de biz matematikle gerçeğin kendisini değil, gerçeği nasıl kavrarsak gerçeğin işimize yarayacağını anlıyoruz... Geçelim...)

Bu konular çok zordur, hatta imkânsızdır ama düşünmesi zevklidir. Daha sonra arada bir kıyısından köşesinden bulaşmak üzere şimdilik ara verelim. Akılda tutulması gereken şey matematiğin zihinsel bir uğraş olduğudur, o kadar zihinseldir ki ölçüp biçme gibi pratik uğraşlarla hiçbir ilgisi yoktur. Tabii saf matematikten bahsediyoruz, uygulamalı matematikten değil.

Demokrasi en iyi yönetim biçimidir tümcesini ele alalım. Bu tümce ne kadar doğrudur? Böyle bir ifadenin doğru olması için her şeyden önce "demokrasi"nin tanımlanması gerekir. Demokrasi tanımlandıktan sonra "yönetim biçimi" tanımlanmalı. Arkasından "en iyi" tamlaması tanımlanmalı. Ancak tüm bu tanımlar yapıldıktan sonra "demokrasi en iyi yönetim biçimidir" tümcesi kanıtlanabilir ya da aksine yadsınabilir. Ne de olsa anlamı anlaşılmayan bir cümle kanıtlanamaz. (Ama bunun için de "kanıt"ın ne demek olduğu bilinmeli. "Kanıt" kavramı tanımlandıktan sonra "kanıtlanan" önermelerin doğru oldukları gösterilmeli, çünkü "kanıtlamak" ile "doğru olmak" eşdeğer kavramlar olmayabilir! Bu ağır konuyu da geçelim.) İşimiz hayli zor yani!

Tabii bir başkası, "benim 'demokrasi', 'yönetim biçimi' ve 'en iyi' tanımlarım farklı" deyip sizin gerçek diye sunduğunuz önermeyi reddedebilir. Hatta kanıt yönteminizi de reddedebilir. Ama siz de buna karşı, "Bu kavramlara benim verdiğim tanımlarla ve benim kanıtlama yöntemimle önerme doğrudur" diyebilirsiniz. Eğer kanıtınız doğruysa kimse buna karşı çıkamaz. (Kanıtın ne olduğu, bir kanıtta hangi akıl yürütmelerin yapılabileceği de gerçeğin ne olduğu konusuyla yakından ilişkili bir sorudur.)

"Demokrasi"nin tanımı ne olmalıdır tartışması da kendi başına ilginç bir sorudur belki ama tahmin edersiniz ki bu konuda "toplumsal bir kavramın tanımı nasıl olmalıdır, böyle bir tanımın özellikleri neler olmalıdır?" problematiğine girmek istemiyorum. Konumuz matematik. Matematiksel kavramların tanımı konusuna ucundan değinmek lazım. Ülkemizde eğitim sistemi hakkında sürekli konuşulur. İyidir denir, kötüdür denir, buna da şükür denir, ama bir eğitim sisteminin ne olduğu ya da ne olması gerektiği konusunda pek kimse pek düşünmez. Kendi başına bir "eğitim sistemi" yoktur. Eğitim sistemini biz insanlar yaratırız ve (bilinçli ya da bilinçsiz) bir amaca hizmet amacıyla yaratırız. Eğitim sisteminin amacı ya da amaçları belirlenmeden eğitim sisteminin iyiliği ya da kötülüğü hakkında bir söz söylenemez. Asıl soru, var olan eğitim sisteminin belirlenen (ya da belirlenmiş olması gereken) amaçlara ulaşıp ulaşmadığıdır ya da bu konuda ne kadar başarılı olduğudur.

Matematiksel tanımlar da tam olarak böyle yapılır. Önce amaç belirlenir; ardından o amaca hizmet edecek tanım yapılır, hatta amaca uyan nesne yaratılır. Örneğin doğal sayıların başat amacı saymak ve toplama çarpma gibi işlemler yapmaktır. Sayıları bu amaca hizmet edecek biçimde yaratmalı ya da tanımlamalıyız. 2'yi, 4'ü, toplamayı ve çarpmayı nasıl tanımladığımızın pek önemi yoktur aslında, yeter ki $2 + 2 = 4$ gibi doğru olmasını istediğimiz eşitlikler kanıtlanabilsin.

Yukarıda tanımdan ve kanıttan sözettik. Ancak kullanılan sözcüklerin tanımları verildikten ve tümcenin ya da önermenin anlamı iyice anlaşıldıktan sonra tümcenin kanıtlanabileceğini söyledik. Kanıt kavramı üzerine daha çok yoğunlaşmak amacıyla anlamının bilindiğinden kuşku duyulmayan bir tümceyi ele alalım: *Ankara Türkiye'nin başkentidir*. Bu tümcenin doğru olduğundan kuşkumuz yok herhâlde. Ankara'nın, Türkiye'nin ve "başkent"in tanımları belli. Peki nasıl kanıtlarsınız doğru olduğunu bildiğiniz bu tümceyi? "Anayasa'da öyle yazıyor" demeniz yeterli midir? Eğer "başkent"in tanımında böyle yazıyorsa yeterlidir elbet. Ben de size "gösterin o zaman Anayasa'yı" derim. Diyelim Anayasa'yı buldunuz, doğru sayfayı açıp önüme koydunuz. "Nereden belli bunun gerçek Anayasa olduğu" diye sorabilirim size. O zaman birlikte Ankara'ya gideriz, TBMM tutanaklarına bakarız. Milletvekillerinin imzaları orada, hepsi Ankara'yı başkent ilan etmişler. Bu kez "nereden belli bu imzaların sahte olmadığı?" diye sorarım size... Hatta gittiğimiz yerin Ankara olduğu, girdiğimiz binanın Meclis olduğu nereden belli?

Hiçbir biçimde Ankara'nın Türkiye'nin başkenti olduğunu doğruluğundan hiç kuşku duyulmayacak biçimde kanıtlayamazsınız. Tüm Türkiye, hatta tüm dünya tek bir ağızdan "Ankara Türkiye'nin başkentidir" diye bağırsa, gene de ikna olmam. Büyük bir olasılıkla öyledir, Ankara gerçekten Türkiye'nin başkentidir ama yüzde yüz ikna edilemem. Belki benim tuhaf bir hastalığım vardır, bu öyle bir hastalıktır ki, Türkiye'nin başkentinin Ankara olmadığını öğrendiğim anda ağzımdan köpükler saçarak yerlerde debelene debelene öleceğim... Herkes bunu biliyor ama ben bilmiyorum... İsterseniz paranoya deyin, ama içime öyle bir kuşku düşüverdi birden. Öleceğimi bildiğinizden ve ölmemi istemediğinizden bana numara yapıyorsunuz, bana oyun oynuyorsunuz. Çocukluğumdan beri kandırılmışım... Benim için özel gazeteler basılmış, özel haritalar çizilmiş... Hâlâ daha kandırıyorsunuz... Yutmam!

Siz de annenizin babanızın sizi çöpten bulmadığına yüzde yüz ikna edilemezsiniz! İçinde yaşadığımız fiziksel dünyada, yani bildiğimiz hayatta matematiksel kesinlikte kanıt yoktur.

Elinize bir elma alın. Bu elmayı bırakırsanız ne olur? Elma düşer. Öyle mi? Nereden biliyorsunuz elmanın düşeceğini?

Bırakırsınız elmayı, elma gerçekten düşer.

– İşte, dersiniz bana, elma düştü.

Gerçekten de elma düştü. Gözlerimle gördüm. Haklıymışsınız.

– Peki... Bir daha bıraksanız ne olur acaba?

– Gene düşer elbet!

– Nereden belli?

– Çünkü hep düştü!

– Biliyorum hep düştüğünü, ama bundan sonra ne olacak acaba?

– Gene düşecek...

– Nereden biliyorsunuz hep düşeceğini?

– Bugüne kadar hep düştü, bundan sonra da hep düşecek...

– Bugüne kadar elmanın hep düşmesi bundan sonra da elmanın hep düşeceği anlamına gelmez ki!

– Gelir...

– Neden?

– Çünkü aynı koşullarda tekrarlanan deneyler aynı sonuçları verir...

– Neden?

– Bu bir ilkedir, fizik ilkesi! Bunu da mı bilmiyorsun!

– Biliyorum ya da bilmiyorum... Ama siz nereden biliyorsunuz bu ilkeyi? Bu ilkeye göre ben hiç ölmeyeceğim, çünkü bugüne dek hiç ölmedim!

– Ama koşullar değişiyor. Yarınki sen bugünkü sen olmayacaksın ki... Bugünün koşullarında ölmeyen biri, yarının değişen koşullarında ölebilir.

– Sanki bugün düşen elmanın koşulları yarın da geçerli olacak... Aynı koşullarda tekrarlanan deneylerin hep aynı sonuçlar doğurduğunu varsaysak bile aynı koşullar hiç tekrarlanmadığından bu ilke pek bir işe yaramaz. Dolayısıyla elmanın da hep yere düşeceğini kanıtlayamazsınız...

Yanlış anlaşılmasın. Bırakılan elmanın yere düşeceğini ben de sizin gibi biliyorum ama şeytanın avukatlığını yapıp (düşmeyeceğini değil) düşmeyebileceğini ileri sürebilirim. Burada bir önermenin doğruluğundan nasıl emin olabileceğimizi sorguluyorum.

Bir gün bir içki masasında bu konulardan söz ederken, hatta önümüzdeki şişenin var olup olmadığından bile emin olamayacağımızı söylerken, bir arkadaşım,

– Şimdi, dedi, kafana bi' geçiririm bu şişeyi, anlarsın şişenin gerçek olup olmadığını!

Çok komik! Ben dahil hepimiz güldük. Konunun derinliğine yakışan ciddiyete geçtiğimizde şöyle yanıtladım arkadaşımı:

– Kafama bir şey geçirmişsindir ve ben sersemlemişimdir. Bundan benim kuşkum olmayabilir. Ama, bir, kafama gerçekten şişe mi geçirdin? İki, kafama gerçekten bir şişe geçirmiş olsan bile, bunu başkalarına kanıtlayabilir miyiz? Senin bu eylemini filme alıp cümle âleme göstersek bile, filmin sahte olduğunu öne sürüp inanmayanlar olabilir. Saddam'ın yakalandığına bile inanmayanlar var, sahtesinin yakalandığını öne sürüyorlar! Başkasını ikna edemediğin bir

önerme doğru ya da gerçek addedilebilir mi? Doğru, başkasını ikna edebildiğin ölçüde doğrudur!

Bu son söylediğim doğrunun bir tanımı olabilir mi? Felsefi anlamda bilmiyorum ama matematiksel anlamda "doğru", istisnasız herkesi (belli kabuller çerçevesinde tabii) ikna edebileceğimiz önermedir.

Sanırım Descartes'ın "Düşünüyorum demek ki varım" akıl yürütmesinden söz etmenin tam yeri. Modern felsefenin kurucusu sayılan Descartes, var olduğundan kuşku duyar. Belki bir rüyadadır, belki hayal görüyordur, belki Tanrı ya da tanrılar onu kandırıyorlardır. Var olduğunu, hiç kuşku duymayacağı biçimde, duyularından bağımsız olarak ispatlamak ister. Bunun için de her şeyden kuşku duymalıdır, herhangi bir gerçeği önbilgi olarak kabul etmemelidir. Yani Descartes hiçten yola çıkarak bir gerçeğe, var olduğunun kanıtına ulaşmak istemektedir. *Tabula rasa* yapmıştır, yani "levhayı" (beynini) tamamen silmiştir. Descartes tüm bunları aklından geçirirken, birden, emin olduğu tek şeyin her şeyden kuşku duyduğu olduğunu anlar. Kuşku duyuyordur, yani düşünüyordur. Demek ki bir şey var ki düşünüyor (ya da kuşku duyuyor). Olmasa düşünemez ki, düşünme eylemini ancak bir varlık yapabilir. Buradan da meşhur, "Düşünüyorum demek ki varım", Latincesiyle *cogito ergo sum* önermesi doğar[5].

Descartes'ın akıl yürütmesi gerçekten şaşırtıcı, çünkü hiçbir önbilgi kabul etmeden bir gerçeğe ulaşıyor...

Ama bir dakika... Descartes gerçekten bir gerçeğe mi ulaşıyor? Hiçbir varsayım yapmadan üstelik. Descartes'ın varlığından kim emin? Descartes emin! Ya bizler? Acaba bizler de Descartes'ın varlığından Descartes'ın kendisi kadar emin miyiz? Aynen Descartes'ın sunduğu gerekçelerden dolayı doğrusu ben Descartes'ın varlığından emin olamıyorum. Ya Descartes beni kandırıyorsa, ya gerçekten düşünmüyorsa, ya da ya Descartes benim rüyamdaysa ve gerçekten yoksa, nereden biliyorum Descartes'ın düşündüğünü? O söylüyor diye mi? Descartes'a ya da kendine Descartes diyen kişiye neden güveneyim ki? Bu akıl yürütmeyle Descartes kendi varlığından emin olabilir belki ama bize var olduğunu kanıtlayamaz. Çünkü Descartes'ın akıl yürütmesinde **ben**, yani **benlik** önplandadır. **Ben** kuşku duyuyorum... **Ben** düşünüyorum... Oysa ben Descartes değilim ki! Bu yüzden Descartes'ın (bu çok değerli) argümanı benim için geçerli değil. Kanıtın amacı sadece ikna olmak değildir, ayrıca başkalarını da ikna edebilmektir.

Descartes'ın fikrinden devam edelim. Descartes kendi varlığını kendine kanıtladı belki ama bizi ikna edemedi. Matematikle hemen hemen tüm diğer uğraş dalları arasındaki en önemli farktır bu. Matematik ortak akıldır. Matematik aklı başında olan (ve matematiğin aksiyomlarını, kanıt yöntemlerini

[5]Birçok kişinin sandığı gibi Descartes burada "düşünmem sayesinde varım, düşünmeseydim var olmayacaktım, önce düşünce sonra varlık" demiyor; sadece "düşünmem sayesinde var olduğumu anlayabiliyorum" diyor.

kabul eden) herkesi ikna eder.

Sonuç olarak bizim dışımızda bir dünya olduğu bariz. Mesela Descartes bize insanın kendi varlığını (başkalarına değil ama) kendine kanıtlayabileceğini gösterdi. Demek ki orada biri var ki bize bir şey öğretiyor...

Hepimiz -ayrı ayrı- böyle bir dünyanın varlığından eminiz. Etrafımız Descartes ya da elma diye adlandırdığımız bazı tuhaf şeylerle dolu. Bizim dışımızda bir dünya (ya da evren) var da, o dünya nedir ve nasıl anlaşılır? Zaten anlamak ne demektir ki? Bizim dışımızda olan bir şeyi nasıl (kısmen de olsa) anlayabiliriz ki?

Şurası kesin, anlamak zihinsel bir uğraştır. Ancak zihnimizle anlayabiliriz.

Bizim dışımızdaki dünyayı tam olarak anlamamız imkânsızdır. Biz ancak bu anlaşılmaz dünyanın daha başa çıkılır bir kopyasını zihnimizde kurarak dünyayı anlamaya çalışabiliriz. Yani gerçek gerçeğe (her ne demekse ve her neyse!) ulaşamayız belki ama zihinsel bir gerçeklik kurarak gerçek gerçeğe ulaşmaya çalışabiliriz ya da ulaştığımızı iddia edebiliriz. Kurduğumuz dünyanın bu kopyası sayesinde uçağa binebildiğimize göre ve uçaklar genellikle düşmediğine göre, bu iddiamız tamamen yanlış değil.

Anlaşılabilir ve başkasına aktarılabilir tek bir gerçek vardır, o da matematiksel gerçektir. Bu anlamda başka gerçek yoktur, olamaz. Matematiksel gerçeği de sadece zihnimizde algılarız. Zorunlu olarak...

Bu ve bir sonraki ciltte [Ne1] okuyacaklarınız çağımızın matematikçilerinin gerçek gerçeği zihinlerinde nasıl canlandırdığıyla ilgilidir.

Önümüzdeki birkaç bölümde doğal sayıları, toplamayı ve çarpmayı inşa edeceğiz ve örneğin, $2 + 2 = 4$ "gerçeği"ni matematikçilerin nasıl anlamlandırdıklarını ve nasıl kanıtladıklarını göreceğiz. Daha sonra başka sayı sistemlerini inşa edeceğiz. Bir sonraki ciltte bildiğimiz sayılar dünyasını biraz aşacağız, bir tür sonsuz sayılarla ilgileneceğiz.

Şaşırtıcı bir dünyanın sizleri beklediğine dair güvence verebilirim.

1.4 Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır?

Bu kitapta sayıları "anlayacağız". İlk olarak doğal sayılardan başlayacağız. "Sayıları anlamak" deyince, sanki bizim dışımızda bir yerde, çok belirgin ve fiziksel bir biçimde sayılar var da biz onları anlamak istiyoruz gibi bir anlam çıkabilir.

"Anlamak" üzerine düşünelim biraz. Anlamak ne demektir? Neyi, nasıl ve ne dereceye kadar anlayabiliriz? Anlama çeşitleri nelerdir? Bu tür sorularla ilgileneceğiz bu altbölümde. Derin felsefe...

"Sayıları anlamak"la "zürafaları anlamak" arasında bir ayrım var mı? Var gibi... Zürafalar orada. Karşımdalar. Otluyorlar, geziniyorlar, koşuşturuyorlar. Görüyorum onları. Zürafaların sindirim sistemini anlamaya çalışabilirim

örneğin. Çünkü o sindirim sistemi orada. Benden bağımsız bir biçimde var.

Oysa sayılar ortalıkta görünmüyor. Ben hiç beş görmedim hayatımda, bundan sonra da görmeyeceğim. Şimdiye kadar kimse "çok güzel bir beş geçti kapımın önünden" dememiştir, çünkü beş geçmez, beş yürümez, beş kırılmaz, beş uçmaz, beş susamaz, acıkmaz, yaşlanmaz ve ölmez... Beş hiçbir şey yapmaz! Oysa zürafa bir şeyler yapar...

Zürafa orada. Bu çok belli. Oysa beş'in ne kadar orada olduğu pek belli değil.

Zürafayı alır karşıma incelerim, ama ya beş'i?

Her ne kadar "beş zürafa" bir anlam ifade ediyorsa da, tek başına "beş"in ne anlama geldiği o kadar belli değil.

"Beş zürafa" bir anlam ifade ediyor mu dedim? Yanıldım galiba... "Bir zürafa"nın anlamı ve hatta fiziksel varlığı bile tartışılabilir, çünkü o "bir zürafa" durmadan değişmektedir. O durmadan değişen zürafaya sanki hiç değişmezmiş, sanki sabit bir varlıkmış gibi "zürafa" denmesi tam gerçeği yansıtmaz. Her zürafa bir diğerinden farklıdır ve her zürafa her an değişir. "Bir zürafa" değil, durmadan değişen zürafalar vardır! Hatta daha doğmamış zürafalar bile vardır! Dolayısıyla aslında "zürafa" da bir kavramdır. "Zürafa", "zürafa" adını verdiğimiz durmadan değişen varlıkların ortak adıdır. "Zürafa" sanıldığından daha soyut bir şeydir.

Peki zürafa bir kavramsa, "beş zürafa" ne demektir? Aynı kavramdan beş tane olur mu? Galiba "beş zürafa", "zürafa kavramının kapsamına giren varlıkların beş tanesi" anlamına geliyor... O varlıklar da durmadan değiştiklerinden tümüyle kavrayamayacağımız, bütünüyle algılayamayacağımız şeyler. Birini bile kavrayamazken biz beşinden sözediyoruz...

Hayvan zürafa ölür, kavram zürafa ölmez. Hayvan zürafa durmadan değişir, kavram zürafa hiç değişmez. Hayvan zürafayla kavram zürafayı birbirine karıştırmamak lazım. Kavram zürafa beş'e daha yakın.

Konu gittikçe karmaşıklaşıyor ve içinden çıkılmaz bir hâl alıyor.

Neyse ne!.. Sonuç olarak zürafa ne de olsa zürafadır. Oradadır. Yadsınamaz bir biçimde, ya da çok zor yadsınır bir biçimde... Oysa sayılar bir zürafa kadar orada değiller.

Sayıları göremiyoruz diye sayılar yok diyebilir miyiz? Belli ki sayılar var. Bakın, sözünü ediyorum şimdi ve anlaşıyoruz. Sayılar, hiçbir yerde olmasalar bile beynimizde varlar. Zihinsel bile olsalar varlar. Zürafalarla aynı düzlemde değil belki ama "beş" de var. Descartes yazsaydı bu satırları, "beş'i düşünüyorum demek ki beş var" derdi. Haklı olarak...

Çoğu insanın bir elinde beş parmak vardır. Bunu herkes bilir. Demek ki hepimizin uzlaştığı bir beş kavramı var. İçinde "beş" geçen bu önermeyi hepimiz anlıyoruz ve doğru buluyoruz. Demek ki "beş"e ortak bir anlam verebiliyoruz. Tüm insanların beş'e ortak bir anlam vermeleri, herhâlde ancak beş'in bizden bağımsız bir biçimde var olmasıyla mümkün olabilir.

Kaldı ki, beş kavramı birbiriyle hiç ilişkisi olmamış uygarlıklar tarafından birbirinden bağımsız olarak da bulunmuştur. Demek ki bizim dışımızda bir yerde var bu "beş"... Öyle olmalı... Beş var ki, biraz düşünebilen her uygarlık belli bir seviyeye gelince beş'i kavrıyor ve kavram olarak benimsiyor.

Akıllı uzaylılar varsa, onlar da beş kavramını bir süre sonra yaratırlar/bulurlar. Mutlaka... Öyle sanıyorum. Beş kavramı sadece dünyamıza özgü değil. Tüm evrende, doğada, her yerde olan bir kavram.

Galiba "beş" salt zihinsel değil... O da orada, bizim dışımızda bir yerde. Tam nerede bilmiyorum ama oralarda bir yerlerde bir "beş" olmalı. Beş'in kendisi olmasa ("beş'in kendisi" ne demekse!) bile beş kavramı benim dışımda bir yerde var. Sadece düşünce olarak var -başka türlü var olamaz- ama var... (Benden bağımsız düşünce olabilir mi doğada? Felsefi soruların şahı!) Var ki hepimiz anlaşıyoruz beş konusunda. Bence tabii...

Belki de doğa bana "beş beş beş" diye fısıldıyor ve ben beynimi kullanarak o beş kavramını yaratıyorum/buluyorum.

Sayıları anlamak gibi son derece masum bir uğraş bizi varlık ve yokluk gibi çok derin felsefi sorulara götürdü...

Sorularıma tam yanıt veremedim. Birtakım çıkarımlarda bulunup sayıların orada bir yerde oldukları sonucunu çıkardım ama bu çıkarımlarımdan ben de pek emin değilim, yüzde yüz ikna olmadım, ben ikna olsam da sizi ikna edemiyor olabilirim.

Matematik dünyasından çok çıktık...

Kesin yanıtını bulamadığımız sorularla zaman harcamayıp devam edelim.

Doğada var ya da yok, beş'i anlamak istiyorum. Beş'i anlamak için önce beş'in ne olduğunu bilmeliyim. Yani beş'i tanımlamalıyım.

Bir deneme yapalım: Beş'i bir elin parmak sayısı olarak tanımlayalım. Bir an için bu tanımı kabul edip beş'i anlamaya çalışalım...

Beş'i tanımladıktan sonra beş'i anlamak ne demektir sorusu geliyor akla. Beş'in nesini anlayacağım? Beş'i tek başına değil, beş'in öbür sayılarla olan ilişkisini anlamak istiyorum. Örneğin $5+3$'ü bulmak istiyorum. "Üç parmak"ı da tanımladığımızı varsayarak, $5+3$ sayısını beş parmağın yanına öbür elin üç parmağı daha geldiğinde elde edilen parmak sayısı olarak tanımlayabiliriz.

Nitekim beş parmağınızın yanına öbür elinizin üç parmağını getirseniz sekiz parmak elde edersiniz. Deneyin göreceksiniz. Tekrar tekrar deneyin, hep aynı sonucu, "sekiz parmak" sonucunu alacaksınız. Ancak bir sorun var burada. Deneyerek gördüğünüzü kanıtlayamazsınız. Beş elmayla üç elmayı yanyana koyduğunuzda sekiz elma elde edeceğinizi hiçbir zaman kanıtlayamazsınız. Çünkü önermeniz deneye bağlı. O deneyin sonsuza kadar aynı sonucu vereceğini kanıtlayamazsınız. Dikkatinizi çekerim: Beş elmayla üç elmayı yanyana koyarsanız sekiz elma elde etmezsiniz demiyorum, sadece bu önermenizi kanıtlayamazsınız diyorum. Fiziksel deneyler matematiksel anlamda kanıt sayılmazlar. "Beş elmanın yanına üç elma daha koyarsam sekiz elma elde ederim"

önermesi olsa olsa (yapılmış) her bir deney için kanıtlanır, tüm genelliğiyle, gelecekte yapılacak deneyler için kanıtlanamaz. "Böyle gelmiş böyle gider" geçerli bir kanıt yöntemi değildir. En azından matematikte...

Oysa matematik kanıtlar. $5 + 3 = 8$ eşitliğini kanıtlamalıyız... Kanıtlamadan olmaz.

Ayrıca "beş"i bir eldeki parmak sayısı olarak tanımlasam, çok çok büyük sayıları nasıl tanımlayacağım? Hatta genel olarak "sayı" kavramının kendisini nasıl tanımlayacağım? Bir, iki, üç, dört, beş tanımlandı. Altıyı da tanımladık, yediyi de... Günün birinde durmam gerekecek, sonsuza kadar sayı tanımlayamam... Neyse ki sayıları teker teker tanımlamakla sayı kavramını (ya da sayı kümelerini) tanımlamak arasında bir ayrım vardır. Bu ayrım sayesinde sayıları tanımlayabileceğiz, tüm sayıları aynı anda tanımlamak, sayıları teker teker tanımlamaktan daha kolay; yanlış söyledim: Tüm sayıları aynı anda tanımlamak mümkün ama sayıları teker teker tanımlamak mümkün değil çünkü hayat o kadar uzun değil.

Ne yapacağız?

Önce şunu yapacağız: Günlük dilde kullandığımız ve aslında ne demek olduğunu tam olarak bilmediğimiz beş'le bu kitapta tanımlayacağımız beş'i birbirinden ayıracağız. İkincisi matematiksel beş olacak. Matematiksel beş'in sizin elinizin parmak sayısıyla hiçbir ilgisi olmayacak, ya da çok az ilgisi olacak.

Yepyeni bir beş kavramı tanımlayacağız. Matematiksel olarak...

Nasıl yapacağız bunu?

Nasıl yapacağımız hiç önemli değil! Beş'i nasıl tanımladığımızın hiç mi hiç önemi olmayacak. Beş'i, üç'ü, sekiz'i ve toplamayı öyle tanımlayacağız ki $5 + 3 = 8$ eşitliği doğru olacak. Önemli olan, sayıları ve işlemleri nasıl tanımladığımız değil, tanımladığımız sayı ve işlemlerin istediğimiz özellikleri sağlamaları... İşte bu, matematiği matematik yapan niteliklerin en önemlilerinden biridir. Daha doğrusu modern matematiği modern matematik yapan budur. Matematikte kavramların nasıl tanımlandıkları değil, kavramların hangi özellikleri sağladığı önemlidir.

Matematiğin bu bakış açısı sadece sayılar için değil, her kavram için geçerlidir. Noktaların, doğruların, düzlemlerin nasıl tanımlandıkları önemli değildir, nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar, önemli olan bu kavramların istediğimiz özellikleri sağlamalarıdır.

İlk birkaç bölümde sıfır, bir, iki, üç gibi birkaç doğal sayıyı teker teker tanımladıktan sonra, ileriki bölümlerde genel olarak doğal sayı kümesini tanımlayacağız. Bu daha zor olacak.

İşte böyle... Doğal sayıları ve toplamayı tanımlayacağız. Tanımımız bize $2 + 2 = 4$ eşitliğini verecek. Ayrıca

$$x + y = y + x$$

eşitliğini de verecek. Çarpmayı da tanımlayacağız. Göreceğiz ki

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

eşitliği geçerli. Tabii $2 \times 2 = 4$ gibi eşitlikleri de kanıtlayacağız.

Görüldüğü gibi okurun bilmediği şeyler kanıtlanmayacak bu kitapta. (Bir sonraki ciltte okurun daha önce bilmediği konulara dalacağımızı sanıyorum.) Yani kanıtladığımız olgular değil bu kitapta önemli olan. Önemli olan yöntem, konuya yaklaşım, düşünme biçimi, tanımların ve kanıtların nasıl yapıldığı vs.

2. Temel Sorular

2.1 Doğal Sayılardan Ne İstiyoruz?

Doğal sayıları, yani 0, 1, 2, 3, ... gibi sayıları anlamak istiyoruz. Elbette doğal sayıları anlamak için önce doğal sayıların tanımını vermeliyiz. Tanım olmadan matematik olmaz! Ama tanımı vermeden önce de doğal sayıların nesini anlamak istediğimizi bilmeliyiz. Çünkü tanımı ona göre yapacağız[1].

Herhâlde, en azından bir doğal sayıdan sonra hangi doğal sayının geleceğini (verilen doğal sayının ***ardılını***), yani bir sonraki doğal sayıyı bilmek istiyoruz, bir başka deyişle, eğer x sayısı verilmişse $x+1$ sayısını bulabilmek ve

$$x \mapsto x+1$$

fonksiyonunun özelliklerini bilmek istiyoruz. Tabii bir de 0 sayısını bilmeliyiz, ki saymaya bir yerden başlayabilelim. Sonra, sanırım doğal sayıları toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz; toplamayı ve çarpmayı anlamadan olmaz. Ta ilkokuldan beri başımızın eti yendi toplam ve çarpım tablolarını ezberlememiz için... Ayrıca örneğin

$$x(y+z) = xy + xz$$

eşitliğini kanıtlayabilmek istiyoruz. Hatta, 5^3 gibi, bir sayının üssünü almayı da becerebilmeliyiz. Ayrıca hangi sayının küçük, hangi sayının büyük olduğunu da anlamalıyız, örneğin $x^2 \geq x$ önermesini doğal sayılar için kanıtlayabilmeliyiz.

Doğal sayılarla ilgili anlamak istediklerimizi sırayla yazalım: 0 sayısı, $x+1$ işlemi, toplama, çarpma, üs alma işlemleri ve sıralama ilişkisi.

Sıralamadan başlayalım. Doğal sayılardaki $x \leq y$ sıralamasını toplama cinsinden yazabiliriz:

> $x \leq y$ sıralaması ancak ve ancak $x+z=y$ *eşitliğini sağlayan bir* z *doğal sayısı varsa geçerlidir*

ya da daha matematiksel bir dille,

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists z\ (x+z=y). \tag{1}$$

[1] Bu son cümle önemli!

Görüldüğü gibi sıralamayı toplamadan hareketle elde ettik[2]. Dolayısıyla, eğer toplamayı anlarsak sıralamayı da anlarız. Böylece anlamak istediklerimizin listesinden sıralamayı silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini, toplamayı, çarpmayı ve üs almayı anlamak istiyoruz.

Sıralamayı toplamayla elde edebildik. Şimdi üs almaya bakalım.

$$y^0 = 1 \text{ ve } y^{x+1} = y^x \cdot y \tag{2}$$

eşitliklerinden, çarpmayı ve $x+1$ işlemini biliyorsak üs almanın belirlendiğini anlarız. Nitekim, örneğin bu iki eşitlikten örneğin şu çıkar:

$$\begin{aligned} 2^3 = 2^{2+1} = 2^2 \cdot 2 = 2^{1+1} \cdot 2 = (2^1 \cdot 2) \cdot 2 \\ = (2^{0+1} \cdot 2) \cdot 2 = ((2^0 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2 = ((1 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2. \end{aligned}$$

Demek ki çarpmayı biliyorsak, en sağdaki $((1 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2$ çarpımını yapıp 2^3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Böylece anlamak istediklerimizin listesinden üs almayı da silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini, toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz.

Sıra geldi çarpmaya... Çarpmayı da toplama cinsinden yazabiliriz:

$$y \cdot 0 = 0 \text{ ve } y(x+1) = yx + y \tag{3}$$

eşitlikleri çarpmayı tamamen belirler. Nitekim, bu iki eşitliği kullanarak ve toplama işlemini bildiğimizi varsayarak, örneğin $2 \cdot 3$ işleminin sonucunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 = 2 \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot (1+1) + 2 \\ = (2 \cdot 1 + 2) + 2 = (2 \cdot (0+1) + 2) + 2 \\ = ((2 \cdot 0 + 2) + 2) + 2 = ((0+2)+2) + 2. \end{aligned}$$

Toplamayı biliyorsak, en sağdaki $((0+2)+2)+2$ işlemini yapıp $2 \cdot 3$ işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki çarpmayı da bilmek istediklerimizin listesinden silebiliriz. Artık sadece $x + 1$ işlemini ve toplamayı anlamak istiyoruz.

Şimdi de toplamaya bakalım. Eğer $x+1$ işlemini yapabiliyorsak, toplamayı da yapabiliriz. Nitekim

$$x + 0 = x \text{ ve } x + (y+1) = (x+y) + 1 \tag{4}$$

eşitlikleri (ya da formülleri) sayıları toplamamızı sağlar. Örneğin, bu iki eşitliği kullanarak,

$$2 + 3 = 2 + (2+1) = (2+2) + 1 = (2 + (1+1)) + 1 = ((2+1)+1) + 1$$

[2](1) formülünün sağındaki önermedeki z bir doğal sayıdır. Doğal sayılardan sözedilen durumlarda, tüm x, y, z gibi simgeler doğal sayı anlamına gelecek. Kümelerden sözettiğimizde ise x, y, z gibi simgeler küme anlamına gelecek. Neyin ne anlama geldiği konunun gelişinden belli olmalı.

eşitliğini kanıtlayabiliriz. Eğer x verildiğinde $x+1$ işlemini yapabiliyorsak, o zaman $((2+1)+1)+1$ işlemini yapıp $2+3$ işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki toplamayı da bilmek istediklerim listesinden silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini anlamak istiyoruz.

Geriye fazla bir şey kalmadı. Toplamayı, çarpmayı, üs almayı, sıralamayı anlamak için 0 sayısını ve $x+1$ işlemini anlamalıyız. $x+1$ işleminin özellikleri bize toplamanın, çarpmanın, üs almanın, sıralamanın tanımını (ve umut edelim ki tüm özelliklerini) verecek. Demek ki doğal sayıları (özellikle 0 sayısını) ve $x+1$ işlemini tanımlamak ilk hedefimiz olmalı.

Ama ana soru şu: Toplamanın, çarpmanın, üs almanın ve sıralamanın özelliklerini kanıtlayabilmek için $x+1$ işleminin hangi özelliklerini bilmeliyiz? İşte önemli ve canalıcı soru bu. Bu soruyu bir sonraki altbölümde ele alacağız.

Bir nokta önemli: $x \mapsto x+1$ işlemini anlamak için 1 diye bir sayıyı anlamak gerekmiyor. Biz sadece "artı bir" işleminden sözediyoruz, 1 sayısından sözetmiyoruz. Belki de "artı bir" değil, tek kelimeyle yazıp "artıbir" işleminden/fonksiyonundan sözetmeliydik. Bundan sonra $x+1$ yerine $S(x)$, hatta daha sade olarak Sx yazalım ve "artı bir" yerine "bir sayının ardılı" ifadesini kullanalım. Böylece kafa karıştıran 1'den kurtulmuş oluruz. Daha sonra, ileride, Sx'i, toplamayı ve 1'i tanımladığımızda Sx'in gerçekten $x+1$'e eşit olduğunu göreceğiz. Eğer $x+1$ yerine Sx yazarsak, (4)'teki formüller,

$$x+0=x \text{ ve } x+Sy=S(x+y) \tag{4}$$

şeklini alırlar.

Aşağıdaki notların bazıları bazı okurlara anlaşılmaz gelebilir, bu okurlar notları bir defa okuyup geçsinler.

Notlar

2.1. Yukarıdaki satırlarda okuru yanlış yönlendirmiş olabiliriz. "Artı bir" fonksiyonunun canalıcı bir konumda olduğu doğru. "Artı bir" fonksiyonunu tanımlamadan toplamayı ve çarpmayı tanımlayamayacağımız da doğru. "Artı bir" fonksiyonunun toplamayı ve çarpmayı belirlediği de doğru. Bütün bunlar doğru, ancak, genel kanının aksine, sadece "artı bir" fonksiyonu (aslında çok şaşırtıcı bir biçimde) toplamayı ve çarpmayı tanımlamaya yetmez[3], ayrıca kümeler kuramının kavramlarını da kullanmalıyız[4]. Toplama ve çarpma **tanımlandıktan** sonra, "artı bir" fonksiyonunun toplama ve çarpmayı **belirlediğini** göstereceğiz.

2.2. Yukarıda söylediklerimize biraz daha açıklık getirmeye çalışalım. Eğer S'yi (yani "artı bir fonksiyonunu) biliyorsak (4) eşitliklerinin toplamayı belirlediği bariz olmalı. Nitekim biraz yukarıda (4) eşitliklerini kullanarak $2+3=5$ eşitliğini kanıtladık. Ama (4) eşitlikleri toplamayı tanımlamaya yetmiyor. Belirlemek ya da betimlemek başka, tanımlamak

[3]Tanımlamak ile belirlemek arasında ince bir ayrım vardır.

[4]Daha bilgili okura: Peano aksiyomları, 0 sayısının ve "artı bir" fonksiyonunun temel özelliklerinden ibaret değildir, ayrıca toplama ve çarpmanın temel özelliklerini de içerir. İlerideki sayfalarda bu dediğimizi daha anlamlı kılmaya gayret edeceğiz.

başka. Zaten (4) eşitlikleri ancak toplama tanımlanmışsa anlamlıdır, toplama tanımlanmamışsa yazılamazlar bile! İleride, (4) eşitliklerini sağlayan bir işlem tanımlayacağız ve bu işleme toplama adını vereceğiz.

2.3. Eğer toplamayı biliyorsak (3) eşitliklerinin çarpmayı belirlediği belli, ama (3) eşitliklerinden çarpma işleminin varlığı kanıtlanamaz. Bir önceki paragrafta toplama ve (4) eşitlikleri için söylediklerimizin hepsini çarpma ve (3) eşitlikleri için de söyleyebiliriz.

2.4. Toplama ve çarpmayı tanımlayabilmek için kümeler kuramına ve aksiyomlarına başvurmak, dolayısıyla $\in$ (elemanı olmak ilişkisi) simgesini kullanmak zorundayız, sadece $x+1$ (yani Sx) işlemi yeterli olmaz, ayrıca kümeler kuramını kullanmalıyız. İleride bu konudan daha ayrıntılı söz edeceğiz. Ama bu altbölümde, hiçbir şey yapmadıysak en azından (x bir doğal sayıyken) $x \mapsto x+1$ işleminin önemini ortaya koyduk. Üstüne basarak tekrarlıyorum: Tanım meselesini bir yana bırakırsak, doğal sayıları ve doğal sayıların aritmetiğini anlamak için öncelikle $x \mapsto Sx$, yani "bir sayının ardılı" işlemini anlamalıyız; bu işlemi anlamadan daha fazla ilerleyemeyeceğimiz anlaşılmış olmalı. Dediğimiz gibi S işlemini tanımladıktan sonra kümeler kuramını kullanarak toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayacağız.

2.5. Konuya biraz aşina olanlar için son paragrafta sözünü ettiğimiz tanımlanabilme problemini biraz daha açalım. Presburger'ın bir teoremine göre, doğal sayılarda toplamayla ve (altkümelerle değil) doğal sayılarla (doğal sayılar kümesinin elemanlarıyla yani) ilgili her türlü soru'nun doğru olup olmadığı bir bilgisayar programı yardımıyla anlaşılabilir. Eğer çarpma işlemi toplamadan hareketle tanımlanabilseydi, o zaman toplama ve çarpmayla ilgili tüm soruların da bir bilgisayarla yanıtlanabilir olması gerekirdi, ki Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi'nden bunun böyle olmadığını biliyoruz. Demek ki çarpma sadece toplamadan hareketle, dolayısıyla S'den hareketle de tanımlanamaz, kümeler kuramı gibi daha kapsamlı bir teoriye ihtiyaç vardır.

2.6. S fonksiyonundan hareketle sıralamanın tanımlanamayacağı biraz model teorisi bilgisiyle oldukça kolay anlalabilir. Bunun için, S'nin teorisinin bir modelinin,

$$x < Sx$$

önermesini sağlayan iki farklı tamsıralamasını bulmak yeterli. Bu model, $\mathbb{Z}$'lerin farklı sıralandığı (mesela ikinci $\mathbb{Z}$'nin elemanları birinci $\mathbb{Z}$'nin elemanlarından daha büyük olsun) $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}$ kümesi olarak alınabilir.

2.7. Öte yandan sıralamanın toplama yardımıyla tanımlanabileceği bariz:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists z\ x + z = y.$$

Buradaki x, y ve z doğal sayılardır.

2.8. Eğer n, 5 ya da 7 ya da 10 milyon gibi aşina olduğumuz sabit bir n doğal sayısıysa, "bir sayıya n ekleme" işlemi, yani $f_n(x) = x + n$ fonksiyonu, "artıbir" fonksiyonuyla tanımlanabilir elbette, bunun için "artıbir" fonksiyonunu n defa uygulamak yeterlidir, ne de olsa $S^n = f_n$ eşitliği geçerlidir. Ama her x ve **her** y için $f(x, y) = x + y$ değerini veren bir f fonksiyonu S ve 0 ile tanımlanamadığı gibi, S, 0 ve sıralama ile de tanımlanamaz (bkz. Karlis Podnieks'in `http://www.ltn.lv/gt3.html`♯BM31 sayfası). Bir başka deyişle, yaygın bir inancın tersine,

$$x + 0 = x \text{ ve } x + Sy = S(x + y)$$

formülleri $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısında toplama fonksiyonunu tanımlamaz.

2.9. Benzer sorun $(\mathbb{N}, 0, S, +)$ ve çarpma için de yaşanır: Bu yapı da çarpmayı tanımlamamıza izin vermez. Ama bu tanımlanamama sorunu ilelebet devam etmez. $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ yapısında $n!$, n^m, n'inci asal gibi tüm aritmetiksel fonksiyonlar tanımlanabilir. Yani

$$(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$$

aşamasından sonra bir sorun yaşanmaz, daha doğrusu yaşanmayacağı sanılıyor. Bu konuya ileride biraz daha fazla eğileceğiz.

2.10. Bu satırların pek bir anlam ifade etmediği okurlar lütfen kitabı okumaya devam etsinler. Zamanla derin anlamlar ifade edebilir.

2.2 Doğal Sayılar Ne Olmalı?

Önceki altbölümde söylemiştik: Bundan böyle $x + 1$ yerine Sx yazacağız[5], çünkü $x + 1$ işleminin 1'le ilgili bir işlem olduğu gibi aslında pek de yanlış olmayan ama başlangıçta bizi yanlış yönlendirebilecek bir fikre saplanmak istemiyoruz. Henüz tanımlamadığımız Sx'e x'in ***ardılı*** adını vereceğiz.

Bir önceki altbölümde, doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı, üs almayı ve sıralamayı tanımlayabilmek için

$$x \mapsto Sx$$

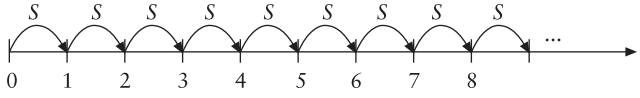
kuralıyla tanımlanan "artı bir" ya da "ardılı" işlemini anlamanın tam yeterli olmasa da, neredeyse yeterli olduğunu, en azından gerekli olduğunu gördük. Buna ilaveten bir de 0 sayısının tanımını bilmeliyiz.

Uzunca bir süre -yalan da olsa- sadece S işleminin toplama ve çarpmayı tanımlamaya yeterli olduğunu varsayalım, ki tüm enerjimizi S fonksiyonuna verelim. Zaten S'yi tanımlamadan bir adım ileri gidemeyeceğimizi biliyoruz.

Burada, şu soruyu sorup yanıtlamaya çalışacağız: "Ardılı" işleminin tam olarak hangi özelliklerini bilmeliyiz ki diğer tüm özelliklerini bu özellikleri varsayarak kanıtlayabilelim? Yani doğal sayılarda tanımlanan $x \mapsto x + 1$ işleminin "özü" nedir? Bu soruyu birçok ünlü matematikçi, mantıkçı ve filozof sormuştur. Biz burada Dedekind ve Peano'nun izinden yürüyeceğiz.

Bu bölümde önce doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin ne olduğunu bildiğimizi varsayıp, S fonksiyonunun başat özelliklerini bulacağız. $\mathbb{N}$ kümesinin ve S fonksiyonunun tanımının "ne olması gerektiğini" bölümün en sonunda göreceğiz.

S'nin doğal sayılara etkisinin resmini aşağıda çizdik.



İlk Özellik. Her şeyden önce S, doğal sayılar kümesinden gene doğal sayılar kümesine giden bir fonksiyondur[6], daha doğrusu olmalıdır.

[5] Bu S, "sonraki" anlamına gelen İngilizce "successor" ve Fransızca "successeur" sözcüklerinin baş harfidir; rastlantı, Türkçe "sonraki" sözcüğününün de başharfidir!

[6] Henüz doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımlamadık. Fonksiyon kavramını da tanımlamadık. Bunları daha sonraki bölümlerde yapacağız. Şimdilik, $\mathbb{N}$ diye bir kümemizin olduğunu varsayıp (moda tabirle) sezgisel takılıyoruz. Yani düşünüyoruz. Bölümün sonunda $\mathbb{N}$ kümesinin

Ayrıca, S birebir bir fonksiyondur, yani eğer x ve y doğal sayıları için

$$Sx = Sy$$

eşitliği geçerliyse, o zaman $x = y$ eşitliği de geçerlidir. Bir başka deyişle ardılları eşit olan sayılar eşittir.

Peki S, örten[7] midir, yani her doğal sayı, bir doğal sayının ardılı mıdır? Hayır değildir. 0 sayısı hiçbir doğal sayının ardılı değildir. Ama S fonksiyonu neredeyse örtendir, örten olmasına ramak kalmıştır: 0 dışında her sayının bir öncesi vardır ve 0 dışında her sayı kendisinden hemen önce gelen sayının ardılıdır[8]. Yani S fonksiyonu $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden ve 0 değerini hiç almayan birebir bir fonksiyondur, daha doğrusu öyle olmalıdır.

İkinci Özellik. S fonksiyonunun tümevarımla kanıta olanak sağlayan bir başka önemli özelliği daha vardır. Anlatalım: A, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olsun. Eğer 0, A'nın bir elemanıysa ve A'dan seçilmiş her x elemanı için x'in ardılı olan Sx elemanı da A'daysa o zaman $A = \mathbb{N}$ olur. Bir başka deyişle, $\mathbb{N}$'nin, 0'ı içeren ve içerdiği her elemanın ardılını da içeren her A altkümesi $\mathbb{N}$'ye eşittir, yani,

i. $0 \in A$, ve

ii. her $x \in A$ için, $Sx \in A$

ise o zaman

$$A = \mathbb{N}$$

olur. Nitekim, bu iki koşulu sağlayan bir A kümesi alalım. 0'ın A'da olduğunu (i)'den dolayı biliyoruz. (ii)'de x yerine 0 alırsak, $0 \in A$ olduğundan, 0'ın ardılı olan $S0$ sayısının, yani 1'in de A'da olduğunu anlarız. (ii)'de bu kez x yerine 1 alalım; demek ki 1'in ardılı $S1$, yani 2 de A'da. Şimdi, (ii)'de x yerine 2 alalım, böylece 3'ün de A'da olduğunu görürüz. Bunu böyle sürdürürsek, 4, 5, 6, ... sayılarının, ve zamanla (!) her doğal sayının A'da olduğunu anlarız.

Yukarıda verdiğimiz bir kanıt değildir, sadece doğal sayıların ve S fonksiyonunun ne olması gerektiği konusunda yol gösterici niteliğinde bir akıl yürütmedir. Çünkü doğal sayıları matematiksel olarak henüz tanımlamadık ve tanımlamadığımız bir nesne hakkında herhangi bir şey kanıtlayamayız. Şimdilik sadece doğal sayılar kümesinin ve artıbir fonksiyonunun ne menem şeyler olması gerektiğini anlamaya çalışıyoruz.

---

ne olması gerektiğini göreceğiz. $\mathbb{N}$ kümesinin ne olması gerektiğini gördükten sonra böyle bir kümenin varlığını kanıtlamalıyız. Bunu da daha sonraki bölümlerde yapacağız. Okur şimdilik lise yıllarındaki bilgiyle idare etsin, ileride her şey matematiksel olarak tanımlanacak.

[7] $f\colon X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in Y$ için $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa, f fonksiyonuna ***örten*** denir.

[8] S'nin neredeyse örten olduğunu S'nin diğer özelliklerini kullanarak kanıtlayacağız ileride, dolayısıyla bu özellik S'nin karakteristik özelliklerinden sayılmayacak.

Bu iki özelliğin S'nin ve $\mathbb{N}$'nin özünü teşkil ettiğine inanılıyor, yani bunlar S'nin ve $\mathbb{N}$ kümesinin "karakteristik özellikleri"dir. Bu iki özellik, doğal sayılar kümesini tanımlamamıza yeterli olacaktır. İleride göreceğiz.

Doğal sayılar yapısı sadece bir küme değildir. Tanımda $\mathbb{N}$ adı verilen bir küme vardır, ama bir de ayrıca sıfır adı verilen ve 0 simgesiyle gösterilen bir eleman ve S ile gösterilen $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon da vardır. Yani aslında "doğal sayılar kümesi" $\mathbb{N}$ değil, "***doğal sayılar yapısı***" $(\mathbb{N}, 0, S)$ tanımlanmalıdır. Bu yapıyı daha sonra toplama ve çarpma işlemleriyle zenginleştireceğiz ve işte o zaman doğal sayılar yapısını tam olarak elde etmiş olacağız. Ama uzunca bir süre $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısıyla yetineceğiz. (Henüz $(\mathbb{N}, 0, S)$ seviyesine gelmedik, $\mathbb{N}$ kümesini bile tanımlamadık.)

Doğal sayılarla ilgili gerçekleri bünyesinde barındıran bir aksiyom sistemi ve bu aksiyomların doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ evreni ya da daha yaygın tabiriyle modeli yaratmak istiyoruz. Bir sonraki bölümde bu amaca yöneleceğiz. (Konu şimdilik karmaşık gibi görünse de birkaç bölüm sonra açıklığa kavuşacağını umuyoruz; okumaya devam edin.)

Şimdilik, doğal sayılar "yapısı" (kümesi değil), hemen aşağıda açıklayacağımız P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsüdür. Buradaki $\mathbb{N}$ bir kümedir. 0, $\mathbb{N}$'nin bir elemanıdır. S ise, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur.

> **P1.** *S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve 0 değerini hiç almayan birebir bir fonksiyondur.*
>
> **P2.** Eğer A, *doğal sayılar kümesi* $\mathbb{N}$*'nin*,
>
> **i.** $0 \in A$
>
> *ve*
>
> **ii.** $x \in A$ *ise* $Sx \in A$
>
> *özelliklerini sağlayan bir altkümesiyse o zaman* $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Biçimsel dilde P1 şöyle yazılır:

$$\forall x \forall y \, (Sx = Sy \to x = y) \wedge \forall x \, Sx \neq 0.$$

Formülün ilk kısmı S'nin birebir olduğunu, ikinci kısmı ise 0 değerini almadığını söylüyor. Birazdan S'nin 0 dışında tüm değerler aldığını kanıtlayacağız.

P2 ise biçimsel dilde şöyle yazılır:

$$\forall A \, ((A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in A \wedge \forall x \, (x \in A \to Sx \in A)) \to A = \mathbb{N}).$$

P1 ve P2'den S'nin neredeyse örten olması gerektiği oldukça kolay biçimde çıkar:

Önsav 2.1. P1 *ve* P2 *özelliklerini sağlayan bir* $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *fonksiyonu,* 0 *dışında tüm değerleri alır, yani* $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *olur.*

Kanıt: P2'de $A = \{0\} \cup S(\mathbb{N})$ alalım. P2'nin her iki önkoşulu da A için bariz biçimde sağlandığından, $A = \mathbb{N}$ olur. P1'de söylenen $0 \notin S(\mathbb{N})$ ile birlikte istediğimizi elde ederiz. □

Her şeyi kümeler kuramında yapacağımızdan, tam ne istediğimizi daha doğru biçimde şöyle ifade edelim: Öyle bir

a. $\mathbb{N}$ kümesi,

b. $\mathbb{N}$'nin 0 adını vereceğimiz bir elemanını ve

c. bir $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu

bulacağız ki, elde edilen $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı P1 ve P2 özelliklerini sağlayacak.

P1 ve P2 özelliklerini sağlayan $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsü var mıdır? Evet vardır! Vardır da nerededir? Kitabın bundan sonraki ilk birkaç bölümünde bunun öyküsünü okuyacaksınız. Yukarıdaki özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısını hep birlikte var edeceğiz. Sabırla. Bununla yetinmeyip doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayıp bunların çok bilinen temel özellikleri sağladığını kanıtlayacağız.

Bu arada henüz kümenin ne anlama geldiğini bilmediğimiz gibi, fonksiyonun da ne demek olduğunu bilmediğimize dikkatinizi çekerim. Yani yukarıdaki tartışma bir matematik tartışması değil, daha çok bir metamatematik sohbetidir. Bir başka deyişle kitap henüz başlamadı!

2.3 Plan Program

Bir sonraki bölümde kümeler kuramının en temel, en basit aksiyomlarından yararlanarak birkaç doğal sayı ve bu doğal sayıları toplayıp çarpmayı öğreneceğiz. Asıl konu anlatımı daha sonra başlayacak.

Bölüm 7'te P1 ve P2 özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı inşa edeceğiz. Ama bunu yapmak için kümeler kuramına ihtiyacımız olacak ve bunu da Bölüm 4'te göstereceğiz.

Bölüm 9'da bu yapıda toplama ve çarpma işlemlerini ve sıralamayı tanımlayacağız ve bunların temel özelliklerini ortaya koyacağız. Toplama ve çarpma için kümeler kuramına ihtiyacımız olacak, ama sıralamayı toplamayı kullanarak tanımlayabileceğiz.

Bölüm 11'de, P1 ve P2 özelliklerini sağlayan doğal sayı yapısının bir anlamda biricik olduğunu göstereceğiz, yani P1 ve P2 özelliklerini sağlayan iki doğal sayı yapısının, elemanlarının adları dışında, birinin diğerinden farkı olmadığını göstereceğiz, sanki biri "sıfır bir iki üç ve artı" gibi Türkçe, diğeri "zero one two three ve plus" gibi İngilizce. Böylece doğal sayılar yapısının bir

anlamda doğal bir yapı olduğu, P1 ve P2'nin doğal sayılara pek fazla hareket alanı tanımadığı anlaşılacak[9]. Yolumuz uzun yani.

Dikkat ederseniz, P2, altkümelerle ilgili bir önermedir. (Oysa P1 elemanlarla ilgilidir.) Mantıkçıların (büyük çoğunluğu dememek için) önemli bir kısmı kendilerine göre haklı nedenlerden altkümelerden sözeden teorilerden hoşlanmazlar, altkümeler yerine elemanlarla ilgili önermelerden oluşan teorileri tercih ederler. İleride, Bölüm 11'de P1 ve P2'yi ($\in$ simgesini ve kümeler kuramını tamamıyla) terkedip, sadece elemanlardan sözeden ve 0, S, $+$ ve $\times$ simgelerini kullanan ve aritmetiği **büyük ölçüde** (ama tam olarak değil) yansıttığı düşünülen Peano Aksiyomları'nı listeleyeceğiz.

Kısa Tarihçe. Doğal sayılarla ilgili birçok olgunun "artıbir" işlemi ve "tümevarım"la kanıtlanabildiğini ilk olarak 1860'larda Hermann Grassman farketmiştir. 1888'de Richard Dedekind doğal sayıları aşağı yukarı bu bölümde yaptığımız gibi aksiyomlaştırmıştır. 1889'da bu aksiyomların biraz daha rafine bir versiyonu İtalyan matematikçi Giuseppe Peano tarafından **Yeni Bir Yöntemle Aritmetiğin İlkeleri** adlı kitabında yayımlanmıştır. Ama daha sonra Peano Aksiyomları adı ileride sözünü edeceğimiz (Bölüm 11) bir başka aksiyom sistemine verilmiştir. Bu bölümdeki P1 ve P2 aksiyomlarına ***Dedekind-Peano Aksiyomları*** adı verilebilir.

2.4 İzleyeceğimiz Yöntem Üzerine

Dediğimiz gibi, öncelikli olarak, P1 ve P2 önermelerinin doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı inşa edeceğiz. Bu yapıyı daha sonra $(\mathbb{N}, S, +, \times, 0)$ yapısına genişleteceğiz ama ilk amacımız P1 ve P2 önermelerinin doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı bulmak. Her şeyi kümeler kuramında yapacağız. Doğal sayılar kümesi (ya da topluluğu) $\mathbb{N}$ **gerçekten** bir küme olacak, ama S fonksiyonu da, 0 sayısı da birer küme olacak. Matematiksel her nesne bir küme olacak, sayılar da, fonksiyonlar da, çizgeler de... Tüm matematiği kümeler kuramının içinde inşa edeceğiz.

Demek ki önce kümeler kuramını kurmalıyız, yani kümeler kuramının aksiyomlarını belirlemeliyiz. Bunu çok dikkatli yapacağız. Çok da dikkatli yapmak zorundayız, çünkü aksi hâlde karşımıza paradokslar, yani çelişkiler çıkabilir. Matematiğin dayandığı kümeler kuramının çelişki barındırması hiç de hoş olmaz, güvendiğimiz dağlara kar yağmış olur.

[9]Konuyla daha aşina olan okur için not: Ama Peano Aritmetiği için aynı şeyi söyleyemeyeceğiz. Peano Aritmetiğinin aksiyomlarını sağlayan ama izomorf olmayan farklı yapılar vardır. Aradaki fark şu: P1 ve P2 sadece elemanlardan değil, altkümelerden bahsediyorlar, oysa Peano Aritmetiği sadece elemanlardan bahseder.

Konuyla daha daha aşina olan okurlar için: Kümeler kuramının verilmiş bir modelinde doğal sayı yapısı biriciktir, farklı modellerde farklı özellikleri olan doğal sayı yapısı olabilir.

Bu ciltte yer alan tüm aksiyomlar oldukça doğal olacak. Bir sonraki ciltte doğallığı tartışmalı olan aksiyomlar tanıtacağız.

1800'lerin sonunda ve 1900'lerin başında matematikte (ve felsefeciler hemen farkına varmasa da herhâlde felsefede de) en önemli sorulardan biri, matematiğin çelişkili olup olmadığı sorusuydu. Frege ve Hilbert bu konuya ilgi duyan iki ünlü matematikçiydi. Matematikte çelişki olmadığı kanıtlanmalıydı. Bunun yapılabilmesi için de matematiğin sezgilerimizden bağımsız bir hâle getirilip biçimselleştirilmesi ve aksiyomlaştırılması gerekiyordu.

Matematik, örneğin Öklid'in aksiyomlarında bulunan "bir doğru sonsuza kadar uzatılırsa" gibi sezgilere seslenen tümcelerden arınmalıydı ki çelişki barındırmadığı kanıtlanabilsin.

Alman mantıkçı ve matematikçi Frege 19'uncu yüzyılın sonlarına doğru en azından aritmetiği sağlam temellere oturtma uğraşına soyundu. Ama 1900'lerin başında Bertrand Russell kümeler kuramında bir paradoks, yani bir çelişki buldu. Daha önce (bir sonraki ciltte göreceğimiz) Burali-Forti paradoksu diye adlandırılan bir paradoks vardı ama nedense bu paradoks matematiği ve matematikçileri pek sarsmamıştı. Bertrand Russell'ın paradoksuyla birlikte, Frege'nin yıllarını verdiği matematiği biçimselleştirme uğraşı (daha doğrusu sayı kavramını mantığa indirgeme uğraşı) büyük bir yenilgiye uğramışa benziyordu.

Birazdan açıklayacağımız Russell paradoksu bayağı bir gürültü kopardı matematik ve bilim dünyasında, çünkü matematiğin güvenirliği sarsılmıştı, daha bir gün öncesine kadar doğruluğundan kuşku duymadığımız, bu yüzden de baştacı ettiğimiz matematikte çelişki vardı. Bunun üzerine, kümeler kuramının (ve matematiğin) aksiyomatik bir hâle getirilmesi gerektiği apaçık belli oldu ve bu amaçla çelişkilerden ve paradokslardan muaf olduğu düşünülen, özellikle Russell Paradoksu'nu bertaraf eden, yani onu paradoks olmaktan çıkaran (hatta teoreme dönüştüren) birçok kuram geliştirildi. Bu kuramlardan en kabul göreni ZFC adı verilen kuramdır. ZFC'yi bu ve bir sonraki ciltte açıklayacağız.

Matematik tarihinin kuşkusuz en heyecanlı zamanlarıydı. Bu kadar ilginç bir konuyu burada kesmekten üzüntü duyuyorum ama aksi hâlde bu kitaba hiç başlayamayacağım!

3. İlk Aksiyomlar ve İlk Sayılar

Oldukça uzun süren felsefeyi ve öntartışmayı geride bırakıp matematiğe odaklanalım. Asıl kitabın bu bölümle başladığını söylemek çok yanlış olmaz.

3.1 Russell Paradoksu

Bertrand Russell'ın ünlü paradoksuyla başlıyoruz.

Tüm kümeleri içeren bir kümenin var olduğunu varsayalım. Bu kümeye X adını verelim. Varsayımımıza göre X bir küme ve X her kümeyi bir eleman olarak içeriyor. X de bir küme olduğundan $X \in X$ olur elbette.

X'in bazı kümeleri kendi kendisinin elemanı olabilirler. Örneğin X, yukarıda gördüğümüz gibi, kendi kendisinin elemanı olan kümelerden biridir.

X'in bazı kümeleri de aksine kendi kendisinin elemanı olmazlar. Örneğin doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, bir doğal sayı olmadığından, kendi kendisinin bir elemanı değildir.

Şimdi, kendi kendisinin elemanı olmayan kümelerden oluşan kümeyi alalım:

$$Y = \{x : x \notin x\}$$

olsun. Tanımdan dolayı, bir x kümesinin Y'de olması için yeter ve gerek koşul x'in kendi kendisinin elemanı olmamasıdır. Daha matematiksel ve simgesel olarak, her x kümesi için,

$$x \in Y \Leftrightarrow x \notin x$$

önermesi geçerlidir. Bu önerme her x kümesi için geçerli olduğundan, özel olarak Y kümesi için de geçerlidir. Dolayısıyla, yukarıdaki önermede x yerine Y koyarsak doğru bir önerme elde ederiz:

$$Y \in Y \Leftrightarrow Y \notin Y.$$

Bu son önermenin ne dediğine bakalım: Y, Y'nin bir elemanıysa Y, Y'nin bir elemanı olamaz ve Y, Y'nin bir elemanı değilse, Y, Y'nin bir elemanı olur... Bu, bariz bir çelişkidir.

Bu sorunu çözmenin tek bir yolu vardır, o da Y'yi küme olmaktan men etmektir! Nitekim, sorun nasıl çözülürse çözülsün, eninde sonunda Y'yi bir biçimde küme olmaktan men ederek çözülür. Hatta, Bertrand Russell paradoksunun Y'nin küme olmadığını kanıtladığını söyleyebiliriz, çünkü Y'nin bir küme olduğunu varsayarak bir çelişki elde ediyoruz.

Sorun sadece Y'de değildir. Sorun aslında X'tedir. X bir kümeyse, Y'nin bir küme olmasını engellemek insafsızlık olur. Dolayısıyla Y'den önce X'in bir küme olmasını engellemek gerekmektedir.

Bertrand Russell paradoksundaki yöntemi kullanarak, her x kümesi için x'in elemanı olmayan bir eleman (ya da bir küme) bulabiliriz. Bulalım:

Teorem 3.1. *Eğer x bir kümeyse, x'te bulunmayan bir eleman vardır. Daha spesifik olarak*

$$\{z \in x : z \notin z\}$$

kümesi x'in bir elemanı değildir. Dolayısıyla tüm kümeleri eleman olarak içeren bir küme olamaz.

Kanıt: x kümesini kanıt boyunca sabitleyelim.

$$a = \{z \in x : z \notin z\}$$

tanımını yapalım. a, x'in kendi kendisinin elemanı olmayan z elemanlarından oluşuyor. Demek ki her z için,

$$z \in a \Leftrightarrow (z \in x \text{ ve } z \notin z). \tag{1}$$

Bu önerme her z için geçerli olduğundan, özel bir durum olarak a için de geçerlidir[1]:

$$a \in a \Leftrightarrow (a \in x \text{ ve } a \notin a). \tag{2}$$

Şimdi, çelişki elde etmek amacıyla, bir an için,

$$a \in x$$

önermesinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman (2) önermesinden doğru olduğunu varsaydığımız $a \in x$ önermesini atabiliriz[2]. Demek ki

$$a \in a \Leftrightarrow a \notin a$$

[1] Burada, her kümenin elemanlarının da küme olduğunu ve a'nın bir küme olduğunu varsaydığımızı anlamış olmalı. İleride aksiyomlarda göreceğimiz üzere bu iki varsayım da doğrudur.

[2] "Hava güzelse ve $2 \times 2 = 4$ ise sinemaya gideceğim" önermesi, bu kitapta da kanıtlayacağımız üzere "$2 \times 2 = 4$" önermesi zaten doğru olduğundan, "Hava güzelse sinemaya gideceğim" anlamına gelir!

önermesi doğrudur. Yani a, ancak ve ancak kendisinin bir elemanı değilse kendisinin bir elemanıdır! Çelişki. Dolayısıyla $a \in x$ önermesi doğru olamaz. Teoremin ikinci cümlesi şimdi aşikâr olmalı. □

Bu teorem bize, altbölümün başında tüm kümeler topluluğu olarak tanımladığımız X'in bir küme olamayacağını söylüyor, çünkü her küme X'in elemanı. Yukarıdaki teoremin güzelliği, her x kümesinde olmayan bir elemanın varlığını kanıtlaması değil, bunu zaten Russell paradoksundan biliyorduk, teorem aynı zamanda x'in elemanı olmayan tanımı açık açık yazılmış bir küme buluyor; daha açık olarak, eğer

$$\alpha(x) = \{z \in x : z \notin z\}$$

ise, teorem, $\alpha(x) \notin x$ önermesini, yani

$$\{z \in x : z \notin z\} \notin x$$

önermesini kanıtlıyor.

Sorun ne yazık ki sadece X'te de değildir. X'i bir küme olmaktan men etsek bile başka paradokslar bulunabilir. X gibi "çok çok fazla" elemanı olan toplulukların tümünü kümelik vasfından arındırmak gerekmektedir.

Yanlış anlaşılmasın, X diye bir topluluğun varlığını inkâr etmiyoruz. X elbette vardır (en azından zihinsel olarak) ve var olan bir şeye yok diyemeyiz. X vardır ama elimizden geldiğince (küme kavramının uygun bir tanımını bularak) X'in bir küme olmasını engellemeliyiz, çünkü aksi hâlde bir çelişki elde ederiz. Yani "küme" kavramı eskiden olduğu (ve hâlen liselerde öğretildiği) gibi herhangi bir topluluk olarak tanımlanmamalı, her topluluk bir küme olmamalı, sadece "küme" olmayı hak eden topluluklar küme olmalı.

Ana fikir şu: Bir an için elimizde "topluluk"lardan oluşan bir "evren"in olduğunu varsayalım. Bu bölümde ve daha ileride tanımlayacağımız aksiyomları kullanarak bu toplulukların bazılarının küme olduğunu kanıtlayabileceğiz (bazen de bazı kümeleri var olmaya zorlayacağız, mesela boşküme var olmaya zorladığımız kümelerden biri olacak, doğal sayılar kümesini de neredeyse var olmaya zorlayacağız). Çelişki elde ederek de evrenin bazı topluluklarının küme olmadığını kanıtlayacağız. Bir de iki arada bir derede kalan topluluklar olacak, yani küme olup olmadığını bilmediklerimiz, hiç bilemeyeceklerimiz, ama zaten onlardan hiç bahsetmeyeceğiz. Mesela yukarıda tüm kümeler topluluğunun, yani X'in bir küme olmadığını kanıtladık; dolayısıyla aksiyomlarımız X'in küme olmasına izin vermemeli. Bu arada, konu açılmışken, (eğer en az bir evren varsa) birden çok evrenin olması gerektiğini de laf arasında belirtelim.

Bunun nasıl yapıldığını bu ve bir sonraki ciltte göreceğiz. Bir yandan ZFC'yi kurarken (yani aksiyomlarını yaratırken), diğer yandan sayıları ve sayı kümelerini inşa edeceğiz. Bu ciltte kümeler kuramının en basit aksiyomları yer

alacak. Bir sonraki ciltte ise kümeler kuramının çok daha tartışmalı (ayrıca heyecanlı ve tehlikeli) aksiyomlarından söz edeceğiz.

Artık matematiğe başlayabiliriz.

3.2 Giriş

Her topluluğu küme olarak adlandırmanın matematikte çelişki yarattığını yukarıda gördük (Bertrand Russell Paradoksu). Demek ki daha dikkatli olmalıyız, önümüze çıkan her topluluğa küme dememeliyiz. Ne tür toplulukların küme olacağına dikkatlice seçilmiş aksiyomlarla karar vermeye çalışacağız.

Doğal sayıları matematiksel olarak tanımlamak istiyoruz. Bu ve sonraki birkaç bölümde, doğal sayıları tanımlamak için ne kadar kümeler kuramı gerekiyorsa o kadar kümeler kuramı sunacağız. Sunacağımız aksiyomlar, ilkokuldan beri aşina olduğumuz $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ gibi diğer sayı kümelerini ve bu sayı kümeleri üstündeki toplama, çarpma, çıkarma, bölme gibi basit fonksiyonları tanımlamak için de yeterli olacak.

Bu bölümde sadece ilk birkaç doğal sayıyı (0'dan 7'ye kadar olan doğal sayıları) tanımlayacağız. Doğal sayıların hepsini tanımlamak biraz daha zaman alacak. Tanımladığımız bu birkaç doğal sayıda toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayıp $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ eşitliklerini kanıtlayacağız.

Kümeler nasıl var olacak? Kümelere "var olun!" diyeceğiz ve kümeler var olacak. Kümelere "var olun!" emrini aksiyomlarla vereceğiz. Ama bunu yaparken, Russell paradoksunda olduğu gibi bütün kümeleri içeren bir kümenin ya da bizi çelişkiye sürükleyebilecek bir başka kümenin varlığının da kanıtlanamamasına dikkat etmeye çalışacağız. Bilinen çelişki ve paradokslar, tüm kümeler kümesi gibi "çok büyük" kümelerin varlığından kaynaklandığından, çok fazla eleman içeren toplulukların küme olmamasına özen göstermeye çalışacağız; aksiyomlar (ellerinden geldiğince) buna izin vermeyecek.

Aksiyomlar, bir iki istisna dışında, "bu bir kümeyse, şu da bir kümedir" biçiminde olacak, yani var olan kümelerden bazı belirlenen yöntemlerle yeni kümeler elde edeceğiz. Böylece, çelişkiye yol açan "çok büyük" kümeleri var etmeyeceğimizi umuyoruz.

Kümeler konusu farklı biçimlerde aksiyomlaştırılabilir. Bu aksiyom sistemlerinin en ünlüsü, en fazla kabul göreni ve en çok kullanılanı bu iki ciltte açıklayacağımız ZFC adıyla bilinenidir. ZFC, Zermelo'nun Z'si, Fraenkel'in F'si ve Seçim Aksiyomu'nun "seçim"inin frenkçeleri olan *Choice* ya da *Choix* gibi Latince kökenli sözcüklerin C'sidir. Fraenkel'in yanısıra, adı geçmese de, bir sonraki cildin konusu olacak olan aksiyomlarda Skolem'in de katkısı vardır; Skolem'i zikretmeden geçmeyelim.

ZFC dışındaki sistemlerin en bilineni Von Neumann, Gödel ve Bernays'in bulduğu ve kısaca GB olarak bilinen aksiyom sistemidir. Ama biz bu kitap-

larda sadece ZFC'yi açıklamakla yetineceğiz. Aslında bu ilk ciltte daha ziyade Zermelo'nun önerdiği aksiyomların bazılarından (daha doğrusu o aksiyomların biraz değiştirilmiş hâllerinden) söz edeceğiz.

3.3 Kümeler Kuramının Alfabesi ve Dili

Dilimiz, matematiğin standart alfabesini içerecek. Bunlar

$$\exists,\ \forall,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (,\ ),\ =,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

simgeleridir. ($\rightarrow$, $\wedge$ gibi simgelerin sezgisel anlamları için Önermeler Mantığı [Ne3] adlı kitabımıza bakabilirsiniz.) Bu simgeleri (bir anlamda harfleri) formüllerimizde (cümlelerimizde) kullanmaya hakkımız var. Ama v_0, v_1 gibi simgeler yerine, alışık olduğumuz üzere, x, y, z, a, b, n, α, β, $\aleph$, $\mathcal{U}$ gibi başka harfler de kullanma hakkını saklı tutuyoruz; amacımız yazacağımız formüllerin (matematiksel cümlelerin) daha anlaşılır olmasını sağlamak.

Bir başka not daha: Dileseydik yukarıdaki simgelerden bazılarını atabilirdik. Örneğin $\exists$ ve $\forall$ simgelerinden sadece biri işimizi görür, ya da $\wedge$ ve $\vee$ simgelerinden birini seçip diğerini kalanlar yardımıyla tanımlayabiliriz. $\rightarrow$ ve $\leftrightarrow$ simgeleri de diğerleri yardımıyla tanımlanabilir. Kümelere özgü olmayan bu teknik konuya fazla girmeyeceğiz; zor olduğundan değil, konumuza daha hızlı bir giriş yapmak istediğimizden, okuru teknik ayrıntılara boğmak istemediğimizden. Bu konuda daha fazla bilgi isteyen okur hemen şimdi Altbölüm 12.2'yi okuyabilir, ama bence hiç gerek yok.

Bunlara ilaveten kümeler kuramının formüllerinde bir de özel bir simge kullanılır: "İçindelik" ya da "elemanı olmak" simgesi olan bir tür epsilon işareti, $\in$. Açıklayalım.

ZFC kümeler kuramı, iki terimi olduğu gibi hiç tanımlamadan kabul eder: Bunlar "küme" ve "elemanı olmak" terimleridir. Küme bir "nesne" adıdır, daha doğrusu bir nesne türüdür, tanımlanmamış bir sıfattır da diyebiliriz. "Elemanı olmak" ise iki küme arasındaki doğru ya da yanlış olabilecek bir ilişkidir. Eğer x kümesi y kümesinin elemanıysa bu, $x \in y$ olarak yazılır. Aksi hâlde $x \notin y$ yazılır. Bir başka deyişle, $x \notin y$, $\neg(x \in y)$ önermesinin kısaltılmış şeklidir.

Dikkat: Kümenin ne demek olduğunu ve "elemanı olmanın" anlamını matematiksel olarak açıklamıyoruz; matematiksel açıklamaları yoktur. Dolayısıyla anlaşılacak ya da anlaşılmayacak herhangi bir şey de yoktur! Küme ve elemanı olmak kavramlarını tanımsız kabul edeceğiz. Tabii bu kavramların psikolojik, pedagojik, sezgisel, felsefi, sosyolojik açıklamaları, tanımlamaları, betimlemeleri yapılabilir, bu semantik açıklamaları [Ne2]'de elimizden geldiğince yapmaya çalıştık, ama bu kitapta biraz daha sentetik (yani biçimsel) olmaya

çalışacağız. Her kuram tanımsız terimler içermek zorundadır, aksi hâlde teoriyi yazmaya başlayamayız bile! Bu tanımsız terimler, kuramın bir nevi yapı taşlarıdır.

Bazı okurlara tuhaf geleceğini sandığım bir şey söyleyeyim şimdi: Elemanlar da küme olacak[3]. Her şey küme olacak... Elemanlar da, 0, 1, 2, $\sqrt{2}$ ve π gibi sayılar da, fonksiyonlar da, toplama ve çarpma işlemleri de, $\leq$ sıralaması da... ZFC kümeler kuramının tüm nesneleri kümedir. Tabii bu matematiğin biçimsel dünyasında böyle olacak, yoksa matematik yaparken ve düşünürken eskisi gibi hislerimizi, sezgilerimizi, algılarımızı devreye sokacağız.

Bazen küme olmayan topluluklardan söz edeceğiz, ama bunu ZFC kümeler kuramında değil, ZFC kümeler kuramı **hakkında** konuşurken yapacağız, yani matematik yaparken değil, metamatematik yaparken.

Bazı kümeler bazı kümelerin elemanı olacak, "elemanı olmak" her ne demekse... Bazı kümeler de bazı kümelerin elemanı olmayacak.

"Küme" ve "elemanı olmak" kavramlarının hiçbir resmî ya da matematiksel anlamı olmayacak ama bu kavramları siz gene de sezgisel olarak istediğiniz gibi yorumlayabilirsiniz. Yorum serbest... İsterseniz "elemanı olmak" tanımsız kavramını "çocuğu olmak" olarak yorumlayın, yani "$y \in x$" tümcesini "y, x'in çocuğu" olarak yorumlayın[4], bu size kalmış bir şey... Biz yorum yapmıyoruz.

3.4 Boşküme ve Küme Eşitliği

Bütün bunları yazıyoruz ama elimizde henüz hiç küme yok.

Aksiyomları teker teker sıralamaya başlamadan önce bir konuya daha parmak basmak gerekiyor. Matematiğin

$$\begin{aligned}
&x = x,\\
&x = y \to y = x,\\
&(\alpha \wedge \beta) \to \alpha,\\
&\alpha \vee \neg\alpha,\\
&(\varphi(x) \wedge x = y) \to \varphi(y)
\end{aligned}$$

gibi (aslında herkesin bildiği ama pek az kimsenin biçimsel olarak bir yerde yazılı gördüğü) mantıksal aksiyomları da vardır. Bu bölümde ya da bu iki ciltte bu aksiyomlardan değil, kümeler kuramının aksiyomlarından sözedeceğiz.

[3] Kümeler kuramının (en azından bu kitapta sözedeceğimiz kümeler kuramının) tüm varlıkları kümedir.

[4] Ama bu yorumla kümeler kuramının vereceğimiz aksiyomları doğru olmaz, meesela hiç çocuğu olmayanlar boşküme olurlar ve birden fazla boşküme olur. Öte yandan birden fazla boşkümenin olamayacağını (aksiyomların yardımıyla tabii) ileride kanıtlayacağız. Yani "elemanı olma"nın bu yorumu pek uygun değil.

Başlıyoruz... Matematiğin daha en başındayız... Elimizde hiç küme yok... Kümeleri yavaş yavaş var edeceğiz.

Şimdi kümeler kuramının ilk aksiyomunu ve onunla birlikte matematiğin ilk kümesini sunuyoruz:

Aksiyom 3.2 (Boşküme Aksiyomu)**.** *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Bu aksiyomu, matematiksel simgelerle

$$\exists x \forall y \; y \notin x$$

olarak yazarız. Yani (kötü bir Türkçeyle) "öyle bir x vardır ki, her y için, y, x'in elemanı değildir". Bu x, daha sonra boşküme adını vereceğimiz kümedir. Bu aksiyomdan önce evrenimizde herhangi bir kümenin olup olmadığını bilmiyorduk, ama artık biliyoruz. Hiçbir eleman içermeyen bir küme varmış. Belki başka kümeler de vardır, ama biz bilmiyoruz.

Yukarıdaki aksiyom, hiç elemanı olmayan bir kümenin varlığını söylüyor. Yani öyle bir x kümesi vardır ki diyor, y hangi küme olursa olsun, $y \notin x$ olur.

Şimdi soru şu: Hiç elemanı olmayan kaç küme vardır? Bir? İki? Üç? Sonsuz sayıda? Ya da böyle bir soru sormaya hakkımız var mı? Hiç elemanı olmayan kümelerden bir ya da birkaç tane olup olmaması bizim elimizde mi?

Hiç elemanı olmayan (iki değil) tek bir küme olduğunu kanıtlamaya çalışalım, bakalım başaracak mıyız? Bence başaramayacağız... Deneyelim ama:

Teorem 3.3. *Hiç elemanı olmayan tek bir küme vardır.*

Kanıt: x_1 ve x_2 hiç elemanı olmayan iki küme olsun. x_1'in x_2'ye eşit olduğunu göstermek istiyoruz... Tekrar edelim: x_1'in x_2'ye eşit olduğunu göstermek istiyoruz... İki kümenin birbirine eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz...

Ama şimdiye kadar iki kümenin ne zaman birbirine eşit olduklarına dair herhangi bir şey söylemedik ki... Kümenin ne demek olduğunu bilmiyoruz ki iki kümenin eşitliği hakkında bir şey bilebilelim...

Kanıtımıza ara verip biraz konuyu tartışalım.

Eğer iki küme birbirine eşitse o iki kümenin aynı elemanları vardır, yani birinde olan bir eleman diğerinindedir de; yani, her x_1, x_2 ve y kümesi için,

$$x_1 = x_2 \to (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)$$

önermesi ya da her x_1 ve x_2 kümesi için,

$$x_1 = x_2 \to \forall y \; (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)$$

doğrudur. Bu, matematiğin dayanağı ve temeli olan matematiksel mantığın kolay bir sonucudur: $x_1 = x_2$ ise, x_1 ile ilgili her doğru önerme (örneğimizde $y \in x_1$ önermesi) x_1 yerine x_2 alırsak da doğrudur (örneğimizde $y \in x_2$ önermesi).

İki eşit kümenin aynı elemanları olduğunu biliyoruz, bu bariz, ama aynı elemanları olan iki kümenin eşit olduğunu henüz bilmiyoruz. Bir sonraki aksiyom, eşitlik için **gerekli** olan bu koşulun aynı zamanda **yeterli** olduğunu söylüyor:

Aksiyom 3.4 (Küme Eşitliği Aksiyomu)**.** *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Bu aksiyom, matematiğin biçimsel dilinde, her x_1 ve x_2 kümeleri için,

$$(\forall y\ (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$$

olarak yazılır, yani

$$\forall x_1 \forall x_2\ ((\forall y\ (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)) \rightarrow x_1 = x_2)$$

demektedir. (Yukarıdaki önermelerde parantezlerin rastgele serpiştirilmediğine dikkatinizi çekeriz!)

Bu aksiyom, bir kümenin elemanları tarafından belirlendiğini söylüyor. İki kümenin farklı tanımları olabilir ya da biri yeşil biri kırmızı olabilir ya da birini bir ovalle diğerini bir kare olarak resmetmiş olabiliriz, ama farketmez, eğer bu iki küme aynı elemanlara sahipse eşitlerdir, bu elemanları farklı sıralamış olsak bile. Örneğin $\{a, b\}$ ve $\{b, a\}$ olarak gösterilen kümeler birbirine eşittir. $\{a, a\}$ ile $\{a\}$ kümeleri de eşittir. Aynı şekilde $\{x \in \mathbb{N} : x^2 = x\}$ kümesi $\{0, 1\}$ kümesine eşittir[5].

Şimdi Teorem 3.3'ün kanıtına devam edebiliriz:

Teorem 3.3'ün Kanıtının Devamı: Hiç elemanı olmayan iki küme aldık, x_1 ve x_2. Bu iki kümenin birbirine eşit olduklarını kanıtlamak istiyoruz. Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre her ikisinin de aynı elemanlara sahip olduğunu göstermek gerekiyor, yani birinden alınan rastgele bir elemanın diğerinin de elemanı olduğunu göstermeliyiz. Bu doğru olmasaydı, yani iki kümeden birinde diğerinde olmayan bir eleman olsaydı, o zaman iki kümeden birinde (diğerinde olmayan) bir eleman olacaktı. Oysa kümelerde eleman yok... Dolayısıyla birinde olup da diğerinde olmayan bir eleman da olamaz. Bir çelişki. Demek ki hiç elemanı olmayan tek bir küme var. □

Matematiğin biçimsel dilinde Teorem 3.3 şöyle yazılır:

$$(\exists x \forall y\ (y \notin x)) \wedge (\forall x_1 \forall x_2\ (\forall y\ (y \notin x_1 \wedge y \notin x_2) \longrightarrow x_1 = x_2)).$$

Madem ki hiç elemanı olmayan tek bir küme var, o zaman bu kümeye bir ad verebiliriz. Hiç elemanı olmayan kümeye ***boşküme*** adını verelim. Boşküme $\emptyset$ simgesiyle gösterilir.

[5] $\mathbb{N}$, 0 ve 1 ileride tanımlanacak. Sadece örnek vermek amacıyla onlardan bahsettik.

Bundan böyle $\emptyset$ simgesini formüllerimizde (bir kısaltma olarak) kullanmakta bir sakınca görmeyeceğiz. İçinde $\emptyset$ geçen her formül gerçekten de sayfa 35'de listelenen simgelerle ve $\in$ simgesiyle ifade edilebilir. Örneğin $x = \emptyset$ formülü $\forall y\ y \notin x$ demektir, ya da $\emptyset \in x$ formülü

$$a \in x \wedge \forall z\ z \notin a$$

demektir. İçinde $\emptyset$ simgesi bulunan her önerme, kümeler kuramının orijinal alfabesinde yazılmış (parametresiz) bir önermeye (mantıksal olarak) denktir. Örneğin Teorem 3.3'ü artık biçimsel olarak şöyle yazabiliriz:

$$\forall x\ ((\forall y\ y \notin x) \longrightarrow x = \emptyset).$$

Buraya kadar sadece tek bir kümenin varlığını gösterdik, $\emptyset$, onu da bir aksiyomun yardımıyla yaptık. Başka kümeler de vardır belki evrende, ama bundan şimdilik hiçbir biçimde emin olamayız.

Şimdi ilk sayımız olan 0'ı tanımlayalım:

Tanım 3.5. $0 = \emptyset$.

Bu tanımladığımız 0 matematiksel 0'dır, günlük yaşamda kullandığımız 0 değil. Örneğin, "0'ın 0 elemanı vardır" tümcesindeki birinci 0 matematiksel 0'dır, ikincisiyse Türkçe 0'dır. Biraz önce tanımladığımız matematiksel 0'a ***sıfır*** adını vereceğiz. Çocukluğumuzdan beri bildiğimiz sıfıra da sıfır demeye ve bu sıfırı da 0 diye yazmaya devam edeceğiz. Günlük konuşma diliyle matematik dilini ayırdetmek lazım. 0'lardan biri matematiksel, diğeri hayatımızın bir parçası. Bu iki farklı kavramı ayırdetmek için yapay yollara sapmayacağız, okurun bu ayrımı kendi başına yapabileceğini düşünüyoruz.

3.5 İki Elemanlı Küme

0'ı tanımladık. Şimdi 1'i tanımlama işine soyunalım.

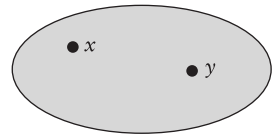
Eğer 0'ın sıfır elemanı varsa, 1'in de bir elemanı olması tercih edilir! Ve 1'in yegâne elemanı da olsa olsa bu ana kadar var olan yegâne küme olan 0 olmalı, başka ne olabilir ki! 1'i $\{0\}$ olarak tanımlamak istiyoruz ama böyle bir kümenin varlığından emin değiliz. Hemen bu sorunumuzu hâlledelim:

Aksiyom 3.6 (İki Elemanlı Küme Aksiyomu)**.** *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre, sadece ve sadece x ve y kümelerini eleman olarak içeren tek bir küme vardır. Eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bu kümeyi

$$\{x, y\}$$

olarak yazarız. Eğer $x = y$ ise, $\{x, y\}$ yerine $\{x\}$ yazarız, çünkü Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre iki defa x yazmak mürekkep israfıdır.



{x, y} kümesinin temsili şekli

Demek ki

$$\forall t\ (t \in \{x,\ y\} \longleftrightarrow (t = x \vee t = y)).$$

İki elemanlı küme aksiyomu matematiğin biçimsel dilinde şöyle ifade edilir:

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ (t \in z \longleftrightarrow (t = x \vee t = y)).$$

Bundan böyle formüllerimizde $\{x,\ y\}$ simgeler dizisini (kısaltma olarak) kullanma hakkını kendimizde bulacağız (ama galiba bu hakkı hiç kullanmayacağız). Bu simge dizisinin bulunduğu her formül, eğer istenirse kümeler kuramının orijinal alfabesinde yazılabilir.

Yukarıdaki aksiyomda $x = y = 0$ alırsak, $\{0\}$ kümesinin varlığını göstermiş oluruz ve böylece 1'i de $\{0\}$ kümesi olarak tanımlama hakkını elde ederiz.

Tanım 3.7. $1 = \{0\}$.

Yukarıda tanımlanan 1 kümesine ***bir*** adını vereceğiz.

Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre $1 \neq 0$ olur, çünkü $0 \in 1$ ama $0 \notin 0$, yani birinde diğerinde olmayan bir eleman var.

Eğer $x = 0$, $y = 1$ alırsak, o zaman İki Elemanlı Küme Aksiyomu'ndan $\{0,\ 1\}$ kümesinin varlığı anlaşılır ve ***iki*** adını vereceğimiz 2'yi de bu küme olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 3.8. $2 = \{0, 1\}$.

Aynı aksiyomdan $\{0, 2\}$ ve $\{1, 2\}$ kümelerinin de varlığı anlaşılır. Bundan da $\{\{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ kümesinin varlığı çıkar. Bu aksiyom sayesinde bir ve iki elemanlı sonsuz sayıda küme yaratabiliriz, ama üç elemanlı bir küme yaratamayız.

Daha önce $\{\{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ diye bir şey (bir topluluk) vardı, yok değildi, ama küme adına hak kazanmamıştı. İki Elemanlı Küme Aksiyomu bu şeye küme payesini veriyor.

0'ın sıfır tane, 1'in de bir tane elemanı olduğundan, $0 \neq 1$. Dolayısıyla 2'nin iki elemanı var ve $0 \neq 2$, $1 \neq 2$. Yakında tanımlayacağımız diğer küçük doğal sayıların da birbirinden farklı oldukları aynen böyle, Küme Eşitliği Aksiyomu'nun yardımıyla kolaylıkla kanıtlanabilir.

İki Elemanlı Küme Aksiyomu sayesinde elde edilen tüm kümelerin en fazla iki elemanı olduğundan, yukarıda verdiğimiz üç aksiyom $\{0,\ 1,\ 2\}$ kümesinin varlığını kanıtlamaya yeterli değildir. Böyle bir kümenin varlığını kanıtlamak

için yeni bir aksiyoma, Bileşim Aksiyomu'na ihtiyacımız var. Bileşim Aksiyomu'nu verdiğimizde ve kabul ettiğimizde, varlığını bildiğimiz $\{0, 2\}$ ve $\{1, 2\}$ kümelerinin bileşimini alıp $\{0, 1, 2\}$ kümesini elde edeceğiz.

3.6 Kümelerin Bileşimi

[Ne2]'de iki ya da daha çok kümenin bileşimini almayı sezgisel olarak açıkladık. Yalnız kümelerin bileşimini alırken dikkatli olmak gerekir, yanlış bir bileşimin küme olduğunu iddia etmek bizi çelişkiye götürebilir; bu tehlikeden [Ne2]'de bahsetmemiştik. Nitekim, ortaöğrenimde ve hatta bazen daha yüksek seviyelerde bile, bileşim alınırken gözden kaçan ince bir nokta vardır: Kümelerin bileşiminin bir küme olduğunu kanıtlayabilmek için bileşimi alınan kümelerin de bir küme oluşturması gerekir, yoksa bileşim küme olmayabilir (ama olabilir de!). Örneğin tüm kümelerin bileşimini alırsak tüm kümeler topluluğunu elde ederiz ki tüm kümeler topluluğunun bir küme olmadığını biliyoruz, demek ki tüm kümelerin bileşimini alırsak bir küme elde etmeyiz. İleride buna benzer başka örneklerin de olduğunu göreceğiz.

Örneğin a, b, c kümelerinin bileşiminden bir **küme** olarak söz edebilmek için

$$\{a, b, c\}$$

diye bir küme olmalıdır. Eğer $\{a, b, c\}$ diye bir küme yoksa, a, b ya da c'nin elemanlarından oluşan

$$a \cup b \cup c$$

topluluğunun küme olduğunu söyleyemeyiz, bu bileşim bir topluluk olur ama küme olmayabilir. Ama birazdan, başka aksiyomları kabul ettiğimizde, her a, b ve c için $\{a, b, c\}$ diye bir kümenin varlığını kanıtlayabileceğiz ve dolayısıyla $a \cup b \cup c$ diye bir küme olacak. Ancak a, b ve c gibi üç kümenin bileşimini almak yerine, sonsuz sayıda kümenin bileşimini almak istersek, o zaman beklenmedik sorunlarla karşılaşabiliriz.

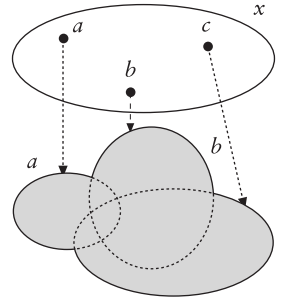
Bir sonraki aksiyomla, bir kümenin elemanlarının bileşimini alıp (elemanların da birer küme olduklarını anımsayın) yeni bir küme elde etme olanağı sağlayacağız. Aksiyomu yazmadan önce tam ne istediğimizi biraz daha açık bir biçimde açıklayalım.

x, aşağıdaki resimdeki gibi bir küme olsun. x'in birtakım elemanları var, diyelim x'in üç elemanı var: a, b ve c. Eleman sayısı sonsuz da olabilir, biz sadece üç elemanlı bir küme aldık. Her eleman gibi bu a, b, c elemanları da birer küme. Resimde a, b ve c hem bir eleman olarak (bir nokta), hem de bir küme olarak resmedilmiş (gri yumurtalar). İşte bir sonraki aksiyomla, x kümesini oluşturan bu a, b, c elemanlarının (ya da kümelerinin) bileşimini alarak yeni bir küme elde etmenin yolunu açacağız. Bu bileşim, x'in elemanlarının (a, b ve c'nin yani) elemanlarından oluşacak.

Yani aksiyom (çok kötü bir Türkçeyle) şunu diyecek: x hangi küme olursa olsun, öyle bir y **kümesi** vardır ki, her z kümesi için,

$$z \in y \text{ ancak ve ancak } z \in t \text{ ve } t \in x \text{ koşullarını sağlayan bir } t \text{ varsa}$$

önermesi doğrudur.



{a, b, c} kümesinin öğelerinin bileşimi

Eğer bir kümenin elemanlarını o kümenin çocukları olarak yorumlarsak, bir kümenin elemanlarının bileşiminin elemanları, bileşimi alınan kümenin torunları olur. Resimde, a, x'in bir çocuğu; eğer z de a'nın bir çocuğuysa, yani z, x'in bir torunuysa, o zaman z, x'in elemanlarının bileşiminin bir elemanı olacak. Bu metaforla, x'in elemanlarının bileşimi x'in torunlarından oluşan küme demektir.

Aksiyom 3.9 (Bileşim Aksiyomu)**.** *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Bu aksiyom matematiksel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \longleftrightarrow \exists t\, (z \in t \wedge t \in x)).$$

Bu kümeye x'in (elemanlarının) ***bileşimi*** adı verilir[6]. Küme Eşitliği Aksiyomu'ndan dolayı bu bileşim biriciktir, çünkü ne de olsa bileşimi elemanlarının ne olduğunu söyleyerek tanımladık. x'in bileşimi

$$\cup x \text{ ya da } \bigcup_{t \in x} t$$

olarak yazılır. Eğer x'in sonlu sayıda elemanı varsa, daha alışık olduğumuz yazılımı kullanabiliriz:

$$\cup\{a, b, c\} = a \cup b \cup c,$$
$$\cup\{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\} = \{0, 1\} \cup \{0, 2\} \cup \{1, 2\} = \{0, 1, 2\}.$$

[6]Kesişim için özel bir aksiyoma ihtiyacımız yok. Bir sonraki bölümde kesişimin varlığını (bir başka aksiyomun yardımıyla) kanıtlayacağız. Bkz. Teorem 4.2.

Elbette $\cup\{a\} = a$ olur.

Şimdi, yukarıdaki aksiyomları kullanarak $\{0, 1, 2\}$ diye bir kümenin varlığını kanıtlayabiliriz:

i. $0 = \emptyset$ olduğundan, Aksiyom 3.2'ye göre 0 bir kümedir.

ii. $1 = \{0\}$ olduğundan, Aksiyom 3.6 ve i'e göre 1 bir kümedir.

iii. $2 = \{0, 1\}$ olduğundan, Aksiyom 3.6, i ve ii'ye göre 2 bir kümedir.

iv. Aksiyom 3.6 ve iii'e göre $\{2\}$ bir kümedir.

v. Aksiyom 3.6, iii ve iv'e göre $\{2, \{2\}\}$ bir kümedir.

vi. Aksiyom 3.9'a göre, $\cup\{2, \{2\}\}$, yani

$$2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

bir kümedir.

3.7 Küçük Doğal Sayılar ve Ardıllık

Doğal sayıları tanımlamaya devam edelim:

Tanım 3.10. $3 = \{0, 1, 2\}$.

Tanım 3.11. $4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Tanım 3.12. $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Bunların her birinin birer küme olduğunu kanıtlamak zor değildir ve birazdan kanıtlayacağız.

Bu tanımları sürdürüp 6'yı, 7'yi, 8'i tanımlayabiliriz. Ama tüm doğal sayıları tek tek tanımlamaya yeterince zamanımız olmadığına göre, bir yerde durup, genel bir tanım vermenin yollarını aramalıyız. Sonraki bölümlerde bunu yapacağız. Şimdilik küçük doğal sayılarla yetinelim.

Bu tanımlara bir kez daha dikkatlice bakalım:

$$\begin{aligned}
5 &\overset{3.12}{=} \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} \overset{3.11}{=} 4 \cup \{4\},\\
4 &\overset{3.11}{=} \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} \overset{3.10}{=} 3 \cup \{3\},\\
3 &\overset{3.10}{=} \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} \overset{3.8}{=} 2 \cup \{2\},\\
2 &\overset{3.8}{=} \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} \overset{3.7}{=} 1 \cup \{1\},\\
1 &\overset{3.7}{=} \{0\} = \emptyset \cup \{0\} \overset{3.5}{=} 0 \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Özetle:

$$\begin{aligned}
5 &= 4 \cup \{4\},\\
4 &= 3 \cup \{3\},\\
3 &= 2 \cup \{2\},\\
2 &= 1 \cup \{1\},\\
1 &= 0 \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi "bir sayının ardılı" (her ne demekse!), o sayıyla sadece o sayıdan oluşan kümenin bileşimi. Örneğin 5 sayısı, 4 kümesiyle sadece 4 elemanından oluşan $\{4\}$ kümesinin bileşimi.

Yukarıdaki yöntemi 5'e uygulayıp 6'yı tanımlayalım:

Tanım 3.13. $6 = 5 \cup \{5\}$.

Bakalım elemanlarıyla yazınca 6 ne oluyor:

$$6 \overset{3.13}{=} 5 \cup \{5\} \overset{3.12}{=} \{0,1,2,3,4\} \cup \{5\} = \{0,1,2,3,4,5\},$$

yani:

Önsav 3.14. $6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. □

6 da kendisinden önce gelen sayılar kümesi oldu.

Eğer x bir kümeyse, $S(x)$'i ya da daha sade yazılımıyla Sx'i şöyle tanımlayalım:

Tanım 3.15. $Sx = x \cup \{x\}$.

Her şey küme olmak zorunda olduğundan, x bir kümeyse, Sx de bir küme olmalı. Hemen kanıtlayalım bunu:

Teorem 3.16. *x bir kümeyse Sx de bir kümedir.*

Kanıt: Üç adımda kanıtlayacağız:

a. x bir küme olduğundan İki Elemanlı Küme Aksiyomu'na göre $\{x\}$ bir kümedir.

b. x ve $\{x\}$ birer küme olduğundan, gene İki Elemanlı Küme Aksiyomu'na göre $\{x, \{x\}\}$ bir kümedir.

c. Bileşim Aksiyomu'na ve (b)'ye göre $\cup\{x, \{x\}\}$ topluluğu, yani $x \cup \{x\}$, yani Sx bir kümedir. □

Dikkat ederseniz, x, Sx'in hem elemanı hem de altkümesidir, çünkü ne de olsa Sx kümesi, x kümesine x elemanı ekleyerek elde edilmiştir. Bu ilginç özellik ileride çok işimize yarayacak.

Bundan böyle formüllerimizde S simgesini de bir kısaltma olarak kullanma hakkını kendimizde göreceğiz. İçinde S bulunan her önerme, kümeler kuramının orijinal alfabesinde yazılmış bir önermeye denktir. Örneğin $y \subseteq Sx$ önermesi[7],

$$\forall z\, (z \in y \longrightarrow (z \in x \vee z = x))$$

önermesine denktir. $Sx \subseteq y$ önermesi de

$$\forall z\, ((z \in x \vee z = x) \longrightarrow z \in y)$$

önermesine denktir.

[7]Her ne kadar altküme kavramını matematiksel olarak Altbölüm4.1'de tanımlayacaksak da eline bu kitabı almış her okurun altkümenin tanımını bildiğini sanıyoruz.

Eğer n tanımlanmış bir "doğal sayıysa", Sn'ye n'nin ***ardılı*** adını verelim. Yukarıda da görüldüğü üzere, 6, 5'in ardılı.

6'nın ardılı, tanımı gereği $S6$'dır:

$$S6 \overset{3.15}{=} 6 \cup \{6\} \overset{3.13}{=} \{0,1,2,3,4,5\} \cup \{6\} = \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

Bundan böyle $S6$'ya 7 adını verelim.

Tanımlarımızı özetleyelim.

$$S0 = 1,\ S1 = 2,\ S2 = 3,\ S3 = 4,\ S4 = 5,\ S5 = 6,\ S6 = 7.$$

Dikkat edilirse henüz genel bir doğal sayı kavramı tanımlamadık. Bunu daha sonraki bölümlerde yapacağız. Şimdilik şu kavramları tanımladık:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ ve } Sx.$$

Notlar

3.1. Bu altbölümdeki yöntemle, ömrünüz yettiği sürece istediğiniz kadar doğal sayı tanımlayabilirsiniz ama tüm doğal sayıları tanımlayamazsınız.

3.2. Bileşim aksiyomunu kullanarak, sabitlenmiş her n doğal sayısı için n elemanlı bir küme inşa edebiliriz. Örneğin 100 elemanlı bir küme inşa edebiliriz. Ama henüz "her n doğal sayısı için, n elemanlı bir küme vardır" önermesini kanıtlayamayız çünkü henüz "doğal sayı" kavramını tanımlamadık.

3.3. Dikkat ederseniz, yukarıdaki örneklerde her (doğal) sayı kendisinden büyük doğal sayıların hem elemanı hem de altkümesi, mesela hem $5 \in 7$ hem de $5 \subseteq 7$. Bu güzelliğin meyvelerini ileride yiyeceğiz.

3.4. Tanımladığımız her doğal sayının kendisinden küçük doğal sayılar kümesi olarak tanımlandığını gözlemleyin, 0 bile! 0'dan küçük doğal sayı olmadığından 0 boşküme olarak tanımlanmıştır. Mesela $5 = \{0,1,2,3,4\}$.

3.5. Son iki not tabii ki doğal sayıların özünde olan özellikler değil, doğal sayıların tanımıyla ilgili özellikler, ama hoş özellikler, alabildiğine yararlanacağız.

3.6. Doğal sayıların bu tanımını von Neumann'a borçluyuz.

3.8 Kusurlu Bir Toplama Tanımı Denemesi

Henüz bir n doğal sayısı için, $Sn = n + 1$ eşitliğini kanıtlayamayız. Çünkü ne doğal sayının tanımını yaptık ne de $+$ diye bir işlem tanımladık. Toplamayı tanımlamaya çalışalım. Yaptıklarımız matematiksel olarak pek caiz olmasa da, daha sonra yapacaklarımızın daha kolay anlaşılmasını sağlayacağına inanıyoruz. Zaten pek çok kitapta da bu kusurlu tanım verilir. Önce $n + 0$ işlemini tanımlayalım:

Tanım 3.17. $n + 0 = n$.

Dikkat: Bu tanımdan $0 + n = n$ eşitliği çıkmaz. Şimdilik kanıtlayamayız bu eşitliği. Ama daha sonra, doğal sayıların ve toplamanın gerçek tanımını verdiğimizde kanıtlayacağız.

Bir sayıyı ya da bir şeyi 0'la (sağdan) toplamayı yukarıdaki tanımda öğrendik. Toplamayı tanımlamaya devam edelim. Bir sonraki tanım sayesinde, $n+m$ işleminin sonucunu biliyorsak, $n+Sm$ işleminin sonucunu da bileceğiz, yani m doğal sayısıyla ya da kümesiyle ya da şeyiyle (sağdan) toplamasını biliyorsak, m'nin ardılı olan Sm ile de (sağdan) toplamasını bildiğimizi göreceğiz:

Tanım 3.18. *Eğer $n + m$ kümesi tanımlanmışsa, $n + Sm$ kümesi $S(n + m)$ olarak tanımlanır*[8]*. Yani*

$$n + Sm = S(n + m).$$

Şimdi Sn'nin ta başından beri istediğimiz gibi $n + 1$ demek olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 3.19. $Sn = n + 1$.

Kanıt: $1 = S0$ olarak tanımlandığından, $n + 1 = n + S0 \overset{3.18}{=} S(n + 0) \overset{3.17}{=} Sn$ olur. □

Şimdi artık yukarıdaki tanımdaki $n + Sm = S(n + m)$ eşitliği

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

anlamına geliyor.

[8] Tanım 3.18 çok sorunlu.

1. Her şeyden önce ne tanımlıyoruz, nasıl bir nesne tanımlıyoruz? "Toplama" dediğimiz şey nedir? Bir fonksiyon mu? Fonksiyonsa, o fonksiyonun tanım kümesi ne? Buradaki n ve m neyi temsil ediyorlar, hangi kümenin elemanları?

2. Bu tanımın geçerli olması için bir şeyin kontrol edilmesi gerekmektedir. Bu tanımın kabul edilebilir bir tanım olması için özellikle gözden uzak tutmaya çalıştığımız bir olgu var ve bu olgu tanımın geçerli olduğunun gösterilmesi için kanıtlanmalıdır. Sorun şu: $Sm = Sm'$ ise elbette $n + Sm = n + Sm'$, yani $S(n + m) = S(n + m')$ olmalı. Ama bu doğru mu? Bir başka deyişle

$$Sm = Sm' \longrightarrow S(n + m) = S(n + m')$$

önermesi doğru mu? Aksi hâlde, $n+m$ tanımlı olsa bile $n+Sm$ iyi tanımlı değildir. Eksikliği Bölüm 6'de açıklayıp gidereceğiz. Şöyle yapacağız: Her m ve m' doğal sayısı için, eğer $Sm = Sm'$ ise $m = m'$ eşitliğini kanıtlayacağız ve böylece bu sorun giderilmiş olacak.

3. "Eğer $n + m$ tanımlanmışsa" diye başladık tanıma. Tanımlanmış olmak ne demek ki? Böyle bir sıfat matematikte yoktur.

Ama + işlemini sadece tanımladığımız 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarına uygularsak yukarıda işaret ettiğimiz sorunların hepsi yok olur.

Sonraki bölümlerde çok daha dikkatli olacağız, şimdilik bu kusurlu tanımla idare edelim. Sözünü ettiğimiz nedenlerden dolayı + simgesini tüm genelliğiyle şimdilik formüllerimizde kullanmayacağız. $n+m$ yazdığımızda, n ve m sayılarının 1'den 7'ye kadar olan sayılar olduğunu varsayacağız.

Yukarıdaki teoremi 0'a, 1'e, 2'ye ve tanımladığımız diğer sayılara uygularsak şu sonuçlar çıkar:

$$\begin{array}{rcl} 0+1 &=& S0 = 1 \\ 1+1 &=& S1 = 2 \\ 2+1 &=& S2 = 3 \\ 3+1 &=& S3 = 4 \\ 4+1 &=& S4 = 5 \\ 5+1 &=& S5 = 6 \\ 6+1 &=& S6 = 7 \end{array}$$

Artık $2 + 2 = 4$ eşitliğini kanıtlama zamanı geldi:

Teorem 3.20. $2 + 2 = 4$.

Kanıt: Basit bir hesap: $2 + 2 = 2 + S1 \overset{3.18}{=} S(2 + 1) \overset{3.19}{=} S(S2) = S3 = 4$. İstediğimiz eşitlik kanıtlanmıştır. □

Kanıtladığımız $2 + 2 = 4$ eşitliğinin elmalarla ya da tavşanlarla hiçbir ilgisi olmadığına dikkatinizi çekerim. Aslında var, yok değil: $2 + 2 = 4$ eşitliği, elmalarla olan ilişkimizden esinlenerek bulundu, çevremizde elma ve armut gibi nesneler olmasaydı bu eşitliğin farkına bile varmayabilirdik, ama tanımları ve kanıtları yaşamdan tamamen kopuk bir ortamda yaptık. $2 + 2 = 4$ eşitliğini hayattan koparıp tamamen soyut ve zihinsel bir dünyaya taşıdık.

Şimdi çarpmaya geçelim. Önce 0'la çarpmayı öğreneceğiz, ardından, bir sayıyı m'yle sağdan çarpmayı ve toplamayı bildiğimizi varsayarak, o sayıyı Sm ile sağdan çarpmayı öğreneceğiz.

Tanım 3.21. $n \cdot 0 = 0$.

Tanım 3.22. *Eğer $n \cdot m$ ve $n \cdot m + n$ tanımlanmışsa,*

$$n \cdot Sm = n \cdot m + n$$

olarak tanımlanır[9].

Bazen $n \cdot m$ yerine nm ya da $n \times m$ yazacağız.

Teorem 3.19 ve yukarıdaki tanımdan

$$n(m + 1) = nm + n$$

eşitliği çıkar.

Şimdi $n \cdot 1 = n$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:

$$n \cdot 1 = n \cdot S0 \overset{3.22}{=} n0 + n \overset{3.21}{=} 0 + n = \ldots$$

[9]Toplama için çıtlattığımız sorun çarpmanın tanımında da var. Bu sorunları Bölüm 9'da gidereceğiz.

Takıldık. Çünkü $0+n=n$ eşitliğini henüz bilmiyoruz. Bizim bildiğimiz sadece $n+0=n$ eşitliği, $0+n=n$ eşitliği değil. $0+n=n$ eşitliğini daha sonra kanıtlayacağız, şimdi kanıtlayamayız. Bu eşitliği şimdilik kanıtlayamayız ama $1\cdot 1=1$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

Teorem 3.23. $1\cdot 1=1$.

Kanıt: $1\cdot 1=1\cdot S0 \overset{3.22}{=} 1\cdot 0+1 \overset{3.21}{=} 0+1=0+S0=S(0+0)=S(0)=1$. □

Şimdi $2\cdot 2=4$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:

$$2\cdot 2=2\cdot S1 \overset{3.22}{=} 2\cdot 1+2.$$

Demek ki sonuca ulaşmak için önce $2\cdot 1=2$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım:

$$2\cdot 1=2\cdot S0 \overset{3.22}{=} 2\cdot 0+2 \overset{3.21}{=} 0+2.$$

Demek ki daha önce $0+2=2$ eşitliğini kanıtlamamız gerekiyormuş:

$$0+2=0+S1 \overset{3.18}{=} S(0+1) \overset{3.19}{=} S(S0)=S1=2.$$

Şimdi artık $2\times 2=4$ eşitliği kanıtlanmıştır. Teoremi ve kanıtını bir defa daha ama bu sefer derli toplu bir hâlde yazalım.

Teorem 3.24. $2\times 2=4$.

Kanıt: Hesaplar şöyle:

$$\begin{aligned} 2\cdot 2 &= 2\cdot S1 \overset{3.22}{=} 2\cdot 1+2=2\cdot S0+2 \overset{3.22}{=} (2\cdot 0+2)+2 \\ &\overset{3.21}{=} (0+2)+2=(0+S1)+2 \overset{3.18}{=} S(0+1)+2 \overset{3.19}{=} S(S0)+2 \\ &= S1+2=2+2 \overset{3.20}{=} 4. \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Özet. Bu bölümde 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 sayılarını, Sx'i ve (en azından bu sayılarla) + ve × işlemlerini tanımlayıp $2+2=4$ ve $2\times 2=4$ eşitliklerini kanıtladık. Görüldüğü gibi tanımlarımızın elmalarla armutlarla, alet edevatla, deneyle, dış dünyayla hiçbir ilgisi yok. Her şey zihinsel ve en soyut düzeyde.

Yine de yukarıda yapılanlarda önemli bir eksik var: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarını teker teker tanımladık. Tanımlanacak daha çok sayı var... Ömür biter, sayılar bitmez! Bütün sayıları teker teker tanımlayamayız. Matematik sonlu zaman içinde yapılmalı. Bu sorunun üstesinden geleceğiz. Doğal sayıları teker teker değil, hepsini birden, daha doğrusu doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi bir anda, tek bir hamlede yaratacağız. Her şey zamanla...

Bir uyarı daha: Bu bölümde yapılanlar matematiksel olarak sorunludur. "Toplama" denen işlemin ne olduğunu, iyi tanımlanıp tanımlanmadığını kanıtlamadık. Yapılanlar yanlış değil, ancak matematiksel temelden yoksunlar. İleride bu sorunu gidereceğiz tabii.

Alıştırmalar

3.7. a_1, a_2, a_3 küme olsunlar. $\{a_1, a_2, a_3\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. Genel olarak $a_1, \ldots, a_n$ kümeyse $\{a_1, \ldots, a_n\}$ topluluğunun küme olduğunu kanıtlayın. Bu son sorunun matematiksel anlamını tartışın. (Soru şimdilik verilmiş her n doğal sayısı için doğru ama her n doğal sayısı için doğru değil! Yani bu soruyu (bu aşamada) kanıtlamak için sonsuz tane kanıt yapmalı, her n için farklı bir kanıt... İleride "tümevarımla kanıt" yöntemini gördüğümüzde, "her n doğal sayısı için, her $a_1, \ldots, a_n$ için $\{a_1, \ldots, a_n\}$ bir kümedir" önermesini kanıtlayabileceğiz.)

3.8. Yukarıdaki alıştırmayı kullanarak "sonlu sayıda" (yani 2 tane, 3 tane, 50 tane) kümenin bileşiminin bir küme olduğunu kanıtlayın. ("Sonlu sayı"nın ne demek olduğunu henüz bilmediğimize dikkatinizi çekerim.)

3.9. $\cup\emptyset = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın.

3.10. $4 + 3 = 7$ ve $3 + 4 = 7$ eşitliklerini kanıtlayın.

3.11. $3 \cdot 2 = 6$ ve $2 \cdot 3 = 6$ eşitliklerini kanıtlayın.

3.12. n^m işlemini ve 8 sayısını bu bölümdeki (sakat) yöntemle tanımlayıp $2^3 = 8$ eşitliğini kanıtlayın.

Giuseppe Peano (1858-1932)

Bugün ilkokulda bile öğretilen $\cup$, $\cap$, $\subseteq$, $\in$, $\emptyset$ gibi simgeleri borçlu olduğumuz Giuseppe Peano bir çiftçi ailesinin çocuğuydu. Giuseppe önce köy okuluna gitti. Sonra her gün $5 + 5 = 10$ km'lik yolu göze alarak kasaba okuluna devam etti. Avukat ve papaz olan ağabeyi (daha çok köylerde geçerli olan Katolik geleneğine göre en büyük kardeş papaz olmak zorundadır) kardeşinin yeteneğini görünce onu lise sınavlarına soktu. Sınavı kazanıp liseden sonra Torino Üniversitesi'nde (daha sonra mühendisliğe geçmek üzere) matematik okuyan Peano, üçüncü yılında sınıfının birincisiydi, çünkü sınıfta başka öğrenci yoktu, diğerleri matematiği bırakıp mühendisliğe geçmişlerdi! Peano'nun okul arkadaşlarının adlarını bugün kimse bilmez! Çağının çok ilerisinde bir matematik anlayışına sahipti Giuseppe Peano. Gelişmiş analitik yeteneğiyle diğerlerinin makalelerinde yanlış bulmasıyla ünlüydü. Analizden mantığa birçok önemli buluşları olmuştur. Birçok tarihçi tarafından matematiksel mantığın kurucusu olarak kabul edilir.

Doğal sayıların bugün bilinen (ve bu kitapta açıklayacağımız) matematiksel tanımını ilk bulan Giuseppe Peano, dilbilime de meraklıydı. Bilindiği gibi Esperanto tamamıyla yapay, dilbilgisi oldukça kolay, bol bol Latinceden esinlenmiş insan buluşu bir dildir. Kelime anlamı "umut eden" olan Esperanto, Polonyalı Zamenhof (1859-1917) tarafından henüz bir lise öğrencisiyken 1878'de bulunmuş ve yeni bir dil olarak ilk kez 1887'de yayımlanmıştır. Zamenhof'un

amacı insanların bu evrensel dilde konuşarak değil, yazışarak anlaşmalarıydı. 1903'te Peano, Zamenhof gibi, Latinceyi sadeleştirerek "bükümsüz Latince" demek olan *Latino sine flexione* yapay dilini bulmuştur. *Latine sine flexione*, Latince sözcükleri korumuş, ancak ekleri ve çekimleri (yani "flexione/büküm"leri) tamamıyla kaldırmıştır, çünkü bükümler bir dili zorlaştıran elemanlardır. Bir kızılderili dili olan Navajo dili o kadar bükümlü ve zordur ki, ABD, İkinci Dünya Savaşı'nda şifre olarak bu dili kullanmıştır. Navajo dilinde Waşakotyatawitşerahekvhtha mesela, "ona bir kadın vücudunu çirkinleştiren üste giyilen şeyler yaptı" anlamına gelir... Örneğin İngilizce görece az bükümlü dil olduğundan öğrenmesi oldukça kolaydır.

Latine sine Flexione'yi

`http://www.geocities.com/Athens/Olympus/2948/index2.html`

adresinden öğrenebilirsiniz.

4. Daha Fazla Kümeler Kuramı Aksiyomu

Sayıların inşasına bir müddet ara verip, doğal sayılar kümesini inşa etmek için bir sonraki bölümde gerekecek olan minimum kümeler kuramını geliştireceğiz. Mesela henüz fonksiyon kavramının matematiksel tanımını bilmiyoruz, oysa toplama ve çarpma gibi işlemler birer fonksiyondurlar. Kartezyen çarpımın da matematiksel tanımını vermedik. Matematiğin bu önemli kavramlarını tanımlamamız lazım. Bu da biraz zaman alacak.

Geçen bölümde ilk dört aksiyomu yazmıştık:

Aksiyom 3.2 (Boşküme Aksiyomu) *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Aksiyom 3.4 (Küme Eşitliği Aksiyomu) *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Aksiyom 3.6 (İki Elemanlı Küme Aksiyomu) *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

Aksiyom 3.9 (Bileşim Aksiyomu) *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Bu aksiyomlara birkaç yeni aksiyom daha ekleyeceğiz. Bu bölümde ekleyeceğimiz aksiyomlara "ilkokul seviyesinde" aksiyomlar diyebiliriz.

4.1 Altkümeler

Eğer x kümesinin her elemanı y kümesinin bir elemanıysa x kümesine y kümesinin ***altkümesi*** adı verilir ve bu durum simgesel olarak

$$x \subseteq y$$

diye gösterilir. Bazen, bu durumda y kümesi x kümesini ***kapsar*** diyeceğiz. Ender de olsa, y'ye x'in ***üstkümesi*** dendiği olur.

Demek ki $x \subseteq y$ önermesinin geçerli olması için,

$$\forall z \, (z \in x \to z \in y)$$

önermesi geçerli olmalıdır. Dolayısıyla küme eşitliği aksiyomuna göre $x = y$ eşitliğinin geçerli olması için $x \subseteq y$ ve $y \subseteq x$ kapsamalarının geçerli olması gerek ve yeter koşuldur. Bu ve

$$(x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \rightarrow x \subseteq z$$

ve

$$x = y \longrightarrow (x \subseteq y \wedge y \subseteq x)$$

gibi önermelere okurun aşina olduğunu varsayıyoruz.

Eğer $x \subseteq y$ ama $x \neq y$ ise x'e y'nin ***özaltkümesi*** denir ve bu durumu $x \subset y$ olarak göstereceğiz. Boşkümenin özaltkümesi yoktur.

Ama dikkat, altküme öncelikle bir küme olmalıdır. Bir kümenin küme olmayan alttoplulukları olabilir, doğal sayılar kümesinin bile (ama bu kitapta böyle bir örnek veremeyeceğiz).

Bundan böyle formüllerimizde $\subseteq$ simgesini bir kısaltma olarak kullanacağız: $x \subseteq y$ simgeleri

$$\forall z \, (z \in x \longrightarrow z \in y)$$

önermesi yerine kullanılacak.

Boşküme her kümenin altkümesidir. Bunu kanıtlayalım. x herhangi bir küme olsun. Boşkümenin x'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Yani boşkümenin her elemanının x'in bir elemanı olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Diyelim ki bu doğru değil, yani diyelim ki boşkümede x'te olmayan bir eleman var. Ama hani boşkümede hiç eleman yoktu! Hiç elemanı olmayan boşkümede x'te olmayan bir eleman olabilir mi? Olamaz elbet. Demek ki boşkümenin her elemanı x'in bir elemanıymış, yani boşküme x'in bir altkümesiymiş... Kanıtımız bitmiştir!

Boşküme, her kümenin altkümesi olan yegâne kümedir. Bu da boşkümeyi ayrıcalıklı kılan bir başka özelliktir. (Diğer özellik, boşkümenin sıfır adet elemanı olan yegâne küme olmasıdır.)

Şimdi ilk bakışta tuhaf gelebilecek bir teorem kanıtlayalım: Boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Kanıtın püf noktası boşkümenin hiç eleman içermemesidir. Tanımı gereği hiç eleman içermeyen boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Bunu kanıtlayalım. Diyelim ki savımız yanlış, yani boşkümenin her elemanı 1'e eşit değil... O zaman boşkümede 1'e eşit olmayan bir eleman vardır. Ama hani boşkümede hiç eleman yoktu? Hiç elemanı olmayan boşkümede 1'e eşit olmayan bir eleman olabilir mi? Elbette olamaz. Demek ki boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Bu paragrafta yazılanlar, $\emptyset \subseteq \{1\}$ önermesinin kanıtından başka bir şey değildir.

Bu kanıtın bir benzeri, boşkümenin her elemanının 2'ye eşit olduğunu da kanıtlar. Yani boşkümenin her elemanı hem 1'e hem de 2'ye eşittir, hatta hatta π'ye ve $\sqrt{2}$'ye de eşittir... Neyse ki boşkümenin hiç elemanı yok... Olsaydı, $1 = 2 = \pi = \sqrt{2}$ gibi saçmasapan eşitlikler kanıtlamış olacaktık!

Boşkümenin her elemanı istediğimiz tüm özellikleri sağlar. Boşkümenin her elemanı sarıdır, yeşildir, uzundur, aynı zamanda kısadır da (yeter ki özellik kümeler kuramının dilinde ifade edilebilsin). Mesela boş bir sınıfın tüm öğrencileri çalışkandır, ayrıca hepsi haylazdır da... Hiç elemanı olmayan boşkümenin her elemanı tüm özellikleri ve eşitlikleri sağlar. Bunu boşkümenin hiç elemanı olmamasına borçluyuz.

Alıştırmalar

4.1. Eğer $x \in x$ ise $\{x\} \subseteq x$ olduğunu kanıtlayın[1].

4.2. Eğer $x \in y \in x$ ise $\{x, y\} \subseteq x \cup y$ olduğunu kanıtlayın.

4.2 Tanımlı Altküme Aksiyomu

Aksiyomu yazmakla başlayalım, gereken açıklamaları daha sonra yapacağız.

Aksiyom 4.1 (Tanımlı Altküme Aksiyomu)**.** *x bir küme ve $\varphi(z)$ kümeler kuramının dilinde yazılmış bir özellik*[2] *olsun. O zaman x'in $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanları bir küme oluşturur.*

Bir iki örnekle bu aksiyomu açıklamaya çalışalım. Diyelim doğal sayılar kümesi diye bir kümenin varlığını biliyoruz. Ve diyelim çift sayı olma özelliğini kümeler kuramının dilinde ifade edebildik, yani öyle bir $\varphi(z)$ formülü bulduk ki, her z doğal sayısı için, $\varphi(z)$ formülünün doğru olması için gerek ve yeter koşul z'nin bir çift sayı olması. O zaman yukarıdaki aksiyoma göre, çift doğal sayılardan oluşan bir küme vardır.

Mesela Teorem 3.1'de, $\{z \in x : z \notin z\}$ kümesinden sözetmiştik. Bu küme bu aksiyomun yardımıyla, $\varphi(z)$ formülü "$z \notin z$" formülü olarak alınarak bulunmuştur.

"Kümeler kuramının dilinde ifade etme"nin ne demek olduğuna pek takılmayın şimdilik. Aşağı yukarı şu anlama gelir:

$$\exists,\ \forall,\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ \longrightarrow,\ \longleftrightarrow,\ (,\ ),\ =,\ \in$$

ve x, y, z gibi değişkenleri kullanarak sonlu uzunlukta "anlamlı" bir simgeler dizisiyle ifade edilebilmek[3].

[1] Hiçbir kümenin kendi kendisinin elemanı olmaması gerektiğini düşünebilirsiniz ama şu ana kadar gördüğümüz aksiyomlarla bunu kanıtlayamayız. Hatta $x = \{x\}$ bile olabilir. Bu konuya sayfa 71'daki Temellendirme Aksiyomu'nda değineceğiz.

[2] Yani içinde z değişkeni bulunan bir formül. Bölüm 12'da "formül" kavramının matematiksel tanımını vereceğiz. Şimdilik okurun bu kavramı sezgisel olarak bildiğini varsayıyoruz.

[3] $\Longrightarrow$ ile $\longrightarrow$ simgeleri arasında şöyle bir ayrım yapıyoruz: Birincisi günlük dildeki "demek ki"nin ya da "ise"nin kısaltılmış hâlidir. İkincisi ise formel (yani anlamsız, sadece biçimsel, frenkçesiyle sentaktik) dilde kullanılan simgedir. Tabii ki ikincisinde de, birincisinde olduğu gibi "demek ki" anlamı kastedilmiştir.

Bu aksiyomla varlığı söylenen küme, elbette, x kümesinin bir altkümesidir çünkü elemanları x'in ($\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z) elemanlarından oluşuyor.

Ayrıca aksiyomda varlığı söylenen bu küme, küme eşitliği aksiyomuna göre biriciktir, ne de olsa elemanları aksiyom tarafından belirleniyor. Biricik olan bu kümeyi,

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

olarak yazarız. $\varphi(z)$, bu kümeyi tanımlayan formüldür[4].

Dikkat edilirse, tanımlı altküme aksiyomu, $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan **tüm** elemanların bir küme oluşturduğunu söylemiyor. Yani,

$$\{z : \varphi(z)\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu söylemiyor. Aksiyom sadece x'in (altını çiziyoruz: x'in) $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanlarının bir küme oluşturduğunu söylüyor. Yani yeni kümemizin elemanlarını x ile kısıtladık. Bu kısıtlama sayesinde Russell Paradoksu'nu engellemiş olduğumuzu özellikle vurgulamak isterim.

Tanımlı küme aksiyomu, biçimsel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))).$$

Yukarıdaki y kümesinin "x'in, φ formülü tarafından tanımlanmış altkümesi" olduğu söylenir. Yalnız burada atladığımız çok önemli bir ayrıntı var, $\varphi(z)$ her formül olamaz: $\varphi(z)$ formülünde y'nin serbest değişken olarak bulunmaması gerekir; bir başka deyişle, eğer y, $\varphi(z)$ formülünde beliriyorsa, $\exists$ ya da $\forall$ niceleyicilerin kapsamında olması gerekir. Bir örnekle aksi hâlde başımıza neler geleceğini gösterelim. $\varphi(z)$ formülü

$$z \notin y$$

olsun. O zaman tanımlı küme aksiyomu

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin y))$$

olur. Buradaki x herhangi bir kümedir. x'i sabitleyelim ama boşküme almayalım. Demek ki aksiyoma göre her z için,

$$z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge z \notin y)$$

[4]İleri seviyede bir dipnot: Dilimizde $\exists$, $\vee$ gibi sonlu sayıda simge olduğundan ve formüllerimizin uzunluğu sonlu olduğundan, eğer x sonsuzsa, x'in bir formül tarafından tanımlanamayan altkümeleri mutlaka vardır. İkinci ciltte açıklayacağımız kardinal konusunu bilen biri için bunun kanıtı kolaydır: x'in tanımı olan altkümeleri elbette formül sayısı kadardır, formüllerin kardinalitesi de (parametreleri de dahil edersek) x'in kardinalitesi olan $|x|$ kadardır; öte yandan x'in altküme sayısı $2^{|x|}$ kadardır, $|x|$'ten daha büyük bir kardinalite. Yani x'in altkümelerinin çoğunluğu tanımı olmayan, dolayısıyla bir formülle betimlenemeyen altkümelerdir. Şaşırtıcı ama gerçek. Kümeler kuramına yeni başlayan biri bu satırları gözardı edebilir.

önermesini sağlayan bir y kümesi var. Şimdi z'yi x'in bir elemanı olarak alalım, yani "$z \in x$" formülü doğru olsun. O zaman

$$z \in y \leftrightarrow z \notin y$$

önermesi doğru olur, ki da bariz bir çelişkidir.

Bundan böyle tanımlı bir altkümeyi formüllerimizde bir kısaltma olarak kullanacağız. Örneğin

$$y \subseteq \{z \in x : \varphi(z)\}$$

formülü aslında,

$$\forall z\,(z \in y \longrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$$

anlamına gelir.

Bu aksiyomu kullanarak, boş olmayan bir kümenin elemanlarının kesişiminin bir küme olduğunu gösterebiliriz:

Teorem 4.2 (Kesişim)**.** *x, boş olmayan bir küme olsun. Elemanları, x'in elemanlarının ortak elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Kanıt: Tanımlı altküme aksiyomunu x'in bir x_0 elemanına uygulayacağız. x boşküme olmadığından, x'in bir elemanı vardır. Bu elemanlardan herhangi birini seçelim ve seçtiğimiz bu elemana x_0 diyelim. $\varphi(z)$ özelliğimiz de

$$\forall t\,(t \in x \rightarrow z \in t)$$

olsun. $\varphi(z)$, z'nin, x'in tüm t elemanlarının elemanı olduğunu söylüyor, dolayısıyla $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan her z elemanı zorunlu olarak x_0 kümesinin de bir elemanıdır. Dolayısıyla, tanımlı altküme aksiyomundan dolayı küme olduğunu bildiğimiz

$$\{z \in x_0 : \varphi(z)\}$$

topluluğu, aslında x'in tüm elemanlarının ortak elemanlarından oluşur. □

Bu teoremle varlığı kanıtlanan kümeye x'in elemanlarının ***kesişimi*** adı verilir ve bu küme

$$\cap x \text{ ya da } \bigcap_{t \in x} t$$

olarak gösterilir. Tanım gereği,

$$z \in \cap x \Leftrightarrow \text{ her } t \in x \text{ için } z \in t$$

olur. Ama x'in boşküme olmaması gerektiği hiçbir zaman unutulmamalı, zira yukarıdaki formülde $x = \emptyset$ alırsak ve $\cap\emptyset$'nin bir küme olduğunu varsayarsak, o zaman

$$z \in \cap\emptyset \Leftrightarrow \text{ her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi doğru olur ve sağdaki

$$\text{her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi her z için doğru olduğundan (boşkümenin her elemanı her özelliği sağlar, örneğin z'yi eleman olarak içerir, aksi hâlde boşkümede o özelliği sağlamayan bir t elemanı olurdu, bkz. sayfa 53), $\cap\emptyset$ tüm z kümelerini içerirdi, yani kümeler kümesi olurdu ki böyle bir kümenin olmadığını Russell paradoksu sayesinde biliyoruz (bkz. sayfa 31). Nitekim kanıtımızda da x'in boşküme olmadığını, x'ten bir x_0 elemanı seçerek kullandık[5].

Bundan böyle $\cap$ simgesini de formüllerimizde kısaltma olarak kullanacağız. İsteyen, bu simgeyi kullanmadan da formülleri yazabilir ama hayat o zaman acılı olur.

Alıştırmalar

4.3. x ve y birer kümeyse, $x \setminus y$ topluluğunun da bir küme olduğunu kanıtlayın (bkz. Altbölüm 9.5), yani

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \leftrightarrow (t \in x \wedge t \notin y))$$

önermesini kanıtlayın.

4.4. x ve y birer kümeyse, $x \Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$ tanımını yapalım. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayın:

a. $x \Delta y$ topluluğu bir kümedir.
b. $x \Delta y = (x \setminus b) \cup (y \setminus a)$.
c. $x \Delta y = y \Delta x$.
d. $(x \Delta y) \Delta z = x \Delta (y \Delta z)$.
e. $x_1 \Delta \cdots \Delta x_n$ kümesi, tek sayıda x_i'nin elemanı olan elemanlardan oluşur.

Notlar

4.5. Aslında Tanımlı Altküme Aksiyomu tek bir aksiyom değildir, her $\varphi(z)$ formülü için ayrı bir aksiyomdur, yani aslında "Tanımlı Altküme Aksiyomu"ndan değil, "Tanımlı Altküme Aksiyom Şeması"ndan bahsetmemiz gerekirdi. Yani bu altbölümde sonsuz sayıda aksiyom kabul ettik. Bu kitapta açıklayacağımız ZFC kümeler kuramı sonlu sayıda aksiyom tarafından ifade edilemez. Öte yandan, GB adıyla bilinen (ama bu ciltlerde sözünü etmeyeceğimiz) Gödel-Bernays-Von Neumann kümeler kuramının sonlu sayıda aksiyomu vardır.

4.3 Altkümeler Kümesi Aksiyomu

Daha önce kabul edilmiş aksiyomlarla, bir kümenin altkümelerinden oluşan topluluğun bir küme olduğunu kanıtlayamayız, bir aksiyom olarak kabul et-

[5]Bazı durumlarda "evrensel bir küme" olabilir, yani bir problemde ortaya çıkan ya da çıkabilecek tüm kümeleri içeren (çoğu zaman devasa) bir küme. Mesela okul müdürü için, öğrencilerden, öğretmenlerden, idarecilerden, müstahdemden oluşan küme evrensel küme olabilir. Ya da konumuz iskambil kâğıtlarıysa, evrensel kümemiz 52 elemandan oluşabilir. Ya da konumuz şehirlerse, evrensel kümemiz şehirlerden oluşabilir. Bu gibi durumlarda $\cap\emptyset$ kesişimini evrensel küme olarak tanımlayabiliriz. Bu kitapta hiç böyle bir şey yapmayacağız.

meliyiz:

Aksiyom 4.3 (Altkümeler Kümesi Aksiyomu)**.** *Bir kümenin altkümeleri bir küme oluşturur.*

Eğer x bir kümeyse x'in altkümelerinden oluşan kümeyi $\wp(x)$ olarak göstereceğiz. Örneğin $x = \{0, 1, 2\}$ kümesiyse, $\wp(x)$'in, biri boşküme, diğeri x olmak üzere toplam 2^3, yani 8 tane elemanı vardır.

Demek ki tanım gereği, her x ve z kümeleri için,

$$z \in \wp(x) \Leftrightarrow z \subseteq x.$$

Eğer $\subseteq$ simgesini kullanmak istemiyorsak, bu önerme

$$z \in \wp(x) \longleftrightarrow \forall t\ (t \in z \rightarrow t \in x)$$

olarak yazılır. Demek ki Altkümeler Kümesi Aksiyomu biçimsel dilde,

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\ (z \in y \longleftrightarrow \forall t\ (t \in z \rightarrow t \in x))$$

olarak yazılır. Burada varlığı söylenen y, $\wp(x)$ kümesidir.

Eğer x bir kümeyse, $\wp(\wp(x))$ ve $\wp(\wp(\wp(x)))$ gibi topluluklar da bir kümedir tabii.

Bundan böyle $\wp$ simgesini formüllerimizde bir kısaltma olarak kullanacağız. Bu simgeyle yazılmış her formül, kümeler kuramının orijinal dilinde yazılmış bir formüle dönüştürülebilir; öte yandan formüllerde kısaltma kullanmazsak, formüller anlamı anlaşılamayacak kadar komplike ve uzun bir görünüme bürünürler. Hatta bu kısaltmalarla bile formel formüllerin anlamı kolay kolay anlaşılamayabilir. Bu yüzden matematik kitaplarında formel matematiksel formüller değil, olabildiğince düzyazı kullanılır.

Notlar

4.6. ZFC kümeler kuramının bu ciltte açıklanacak olan aksiyomlarıyla, her x kümesi için,

$$\{x, \wp(x), \wp(\wp(x)), \wp(\wp(\wp(x))), \ldots\}$$

topluluğunun bir küme olduğu gösterilemez. Bunun için bir sonra ciltte açıklayacağımız Yerleştirme Aksiyomu gerekmektedir. Sanırım $x = \emptyset$ için bile bunu Yerleştirme Aksiyomunu kullanmadan göstermek mümkün olmayabilir.

4.7. Şu ana kadar 6 aksiyom kabul ettik. (Ama Aksiyom 4.1, aslında sonsuz sayıda aksiyom içeriyor.) Bu aksiyomları sıralayalım.

Aksiyom 3.2 (Boşküme Aksiyomu) *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Aksiyom 3.4 (Küme Eşitliği Aksiyomu) *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Aksiyom 3.6 (İki Elemanlı Küme Aksiyomu) *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

Aksiyom 3.9 (Bileşim Aksiyomu) *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Aksiyom 4.1 (Tanımlı Altküme Aksiyomu) *x bir küme ve $\varphi(z)$ kümeler kuramının dilinde yazılmış bir özellik olsun. O zaman x'in $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanları bir küme oluşturur*[6].

Aksiyom 4.3 (Altkümeler Kümesi Aksiyomu) *Bir kümenin altkümeleri bir küme oluşturur.*

Şimdi, bu aksiyomlardan hareketle sonsuz bir kümenin varlığını kanıtlayamayacağımızı ve aynı zamanda bu aksiyom sisteminin tutarlı olduğunu, yani bu aksiyom sisteminden bir çelişki elde edemeyeceğimizi göstereceğiz. Bu aksiyom sisteminin (yani yukarıdaki 6 aksiyomun her birinin) doğru olduğu ve herbirinin sonlu sayıda eleman içeren "küme" adını vereceğim topluluklardan oluşan bir evren inşa edeceğiz[7].
Kümelerden (daha doğrusu küme adını verdiğimiz nesnelerden) oluşacak olan ama henüz inşa etmediğimiz evrenimize E diyelim. E bir topluluk olacak elbette, Bertrand Russell Paradoksu'na göre $E \in E$ olamaz.
E'yi yavaş yavaş, giderek büyüyen kümelerin (ya da toplulukların ya da küçük evrenlerin, nasıl isterseniz) bileşimi olarak inşa edeceğiz. Birinci aksiyomla (Aksiyom 3.2 ile) başetmek kolay, adına boşküme diyeceğimiz ve $\emptyset$ simgesiyle göstereceğimiz herhangi bir nesne alalım. Bu nesne Aksiyom 3.2'de sözü edilen boşküme olacak elbette. İlk aksiyomu sağlamak için $\emptyset \in E$ olmalı.

$$E_0 = \{\emptyset\}$$

olsun. Aksiyom 3.4 zaten yeni bir küme yaratmıyor, hatta tam tersine küme sayısını düşürüyor bile diyebiliriz. Kümeleri bu aksiyom doğru olacak biçimde yaratacağız. Aksiyom 3.6, 3.9, 4.1 ve 4.3 eski kümelerden yeni kümeler yaratıyor. Bu aksiyomların yarattığı kümeleri E'ye eklemeliyiz.
$n = 0$ ise E_{4n}'yi yarattık. Şimdi (okurun lise yıllarından bildiğini varsaydığımız) tümevarımla, E_{4n}'yi yarattığımızı varsayıp, evrenin

$$E_{4n+1} \subseteq E_{4n+2} \subseteq E_{4n+3} \subseteq E_{4n+4}$$

parçalarını yaratalım:

$$\begin{aligned}
E_{4n+1} &= E_{4n} \cup \{\{x, y\} : x, y \in E_{4n}\} \\
E_{4n+2} &= E_{4n+1} \cup \{\cup x : x \in E_{4n+1}\} \\
E_{4n+3} &= E_{4n+2} \cup \{y : \text{bir } x \in E_{4n+2} \text{ için } y, x\text{'in tanımlı bir altkümesi}\} \\
E_{4n+4} &= E_{4n+3} \cup \{\wp(x) : x \in E_{4n+3}\}
\end{aligned}$$

olsun[8]. Birazdan burada kullanılan tüm x'lerin sonlu sayıda eleman içerdiklerini kanıtlayacağımızdan, $\wp(x)$'in anlamı çok belli; örneğin x'te 5 eleman varsa, $\wp(x)$'in tahmin ettiğimiz 2^5 tane elemanı vardır. Yine bu nedenden, E_{4n+3}'ün tanımından "tanımlı" kelimesini atıp,

$$E_{4n+3} = E_{4n+2} \cup \{y : \text{bir } x \in E_{4n+2} \text{ için } y, x\text{'in bir alttopluluğu}\}$$

[6]Var olduğunu söylediğimiz bu kümeye y dersek, y, $\varphi(z)$'nin içinde serbest bir değişken olarak bulunmamalı, bknz. sayfa 54.

[7]Normalde kümeler kuramının bir yapısını ya da modelini ya da evrenini (adı önemli değil) oluşturmak iki şey tanımlamak lazım: Evrenin elemanlarını ve $\in$ içindelik ilişkisini, yani evrenin her iki x ve y elemanı için $x \in y$ ilişkisinin ne zaman doğru olduğunu tanımlamak lazım. Bu ikincisi çok bariz olacağından biz sadece evrenin elemanlarına odaklanacağız.

[8]Aslında E_n'lerle birlikte $\in$ ikili ilişkisini de tümevarımla tanımlamamız lazımdı, ama çok bariz olduğundan yapmıyoruz.

olarak değiştirebilirdik.
Dikkat edilirse, eğer $n \leq m$ ise

$$E_n \subseteq E_m$$

olur ve

E_{4n+1}, E_{4n}'deki kümeleri ve E_{4n}'nin iki elemanlı altkümelerini
E_{4n+2}, E_{4n+1}'deki kümeleri ve bu kümelerin elemanlarının bileşimini
E_{4n+3}, E_{4n+2}'deki kümeleri ve bu kümelerin tanımlı altkümelerini
E_{4n+4}, E_{4n+3}'teki kümeleri ve bu kümelerin altkümeler kümelerini

içerir, dolayısıyla

E_{4n+1}, E_{4n}'deki kümeleri ve E_{4n}'nin iki elemanlı altkümelerini
E_{4n+2}, E_{4n}'deki kümeleri ve bu kümelerin elemanlarının bileşimini
E_{4n+3}, E_{4n}'deki kümeleri ve bu kümelerin tanımlı altkümelerini
E_{4n+4}, E_{4n}'deki kümeleri ve bu kümelerin altkümeler kümelerini

içerir, dolayısıyla E_{4n+4}, E_{4n}'deki kümeleri ve

E_{4n}'nin iki elemanlı altkümelerini
E_{4n}'deki kümelerin elemanlarının bileşimini
E_{4n}'deki kümelerin tanımlı altkümelerini
E_{4n}'deki kümelerin altkümeler kümelerini

içerir.
Şimdi E tüm bu E_n'lerin bileşimi olsun:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

E'nin yukarıdaki tüm aksiyomları sağladığını kanıtlayalım. Birinci aksiyomun sağlandığı belli. İkinci aksiyomu ihlal edecek bir şey söylemedik. Geri kalan aksiyomların sağlandığını gösterelim. $x \in E$ olsun. O zaman bir n için $x \in E_n$ olur. Ama $E_n \subseteq E_{4n}$ olduğu için $x \in E_{4n}$ olur. Biraz önceki listeden anlaşılacağı üzere E_{4n+4} (dolayısıyla E de), x'in

iki elemanlı altkümelerini
elemanlarının bileşimini
tanımlı altkümelerini
altkümeler kümesini

içerir. Böylece E'nin şu ana kadar yazdığımız tüm aksiyomları sağladığını gösterdik. Aksiyomları sağlayan somut bir kümeler evreni bulduk. Dolayısıyla bu aksiyomlardan hareketle bir çelişki kanıtlayamayız, aksi hâlde aksiyomları sağlayan bir evren bulamazdık.
Şimdi de E'deki her kümenin sonlu olduğunu kanıtlayalım. Bunun için iki önerme kanıtlayacağız:
(1) E_n'de sonlu sayıda eleman vardır, diyelim a_n tane ve
(2) E_n'nin her elemanında sonlu sayıda eleman vardır ve bu sayı sınırlıdır, diyelim E_n'nin her elemanının en fazla b_n tane elemanı vardır.
Kanıtlara başlıyoruz:
E_0'da tek bir küme var, $\emptyset$, onun da sıfır tane elemanı var. Demek ki $a_0 = 1$ ve $b_0 = 0$.
Kanıtın devamını "tümevarımla" yapacağız.
Eğer $4n = 0$ ise istediğimizi kanıtladık. Şimdi (1) ve (2)'yi E_{4n} için varsayalım; o zaman E_{4n+1}'in (tanımından dolayı) en fazla $a_{4n} + a_{4n}^2$ tane elemanı vardır ve bu elemanların her birinin en fazla $\max\{b_{4n}, 2\}$ tane elemanı vardır.

Şimdi E_{4n+1} için savımızın doğru olduğunu varsayalım. Pek zorlanmadan görüleceği üzere, E_{4n+2}'nin eleman sayısı en fazla $2a_{4n+1}$ olabilir. Varsayımımıza göre, E_{4n+1}'de a_{4n+1} tane küme var ve her birinin en fazla b_{4n+1} tane elemanı var. Demek ki E_{4n+1}'in elemanlarının bileşimi en fazla $a_{4n+1}b_{4n+1}$ tane eleman içerebilir. Bundan da E_{4n+2}'deki kümelerin en fazla $\max\{b_{4n+1},\, a_{4n+1}b_{4n+1}\}$ tane elemanı olduğu çıkar.

Şimdi E_{4n+2} için savımızın doğru olduğunu varsayalım, yani E_{4n+2}'de a_{4n+2} tane küme var ve her birinin en fazla b_{4n+2} tane elemanı var. E_{4n+3}'ün kümeleri E_{4n+2}'nin kümelerine bu kümelerin (tanımlı ya da tanımsız farketmez bu durumda) altkümeleri eklenerek elde edilmiş. E_{4n+2}'nin her kümesinin en fazla $2^{b_{4n+2}}$ tane altkümesi vardır. Demek ki E_{4n+3}'te E_{4n+2}'den en fazla $a_{4n+2}2^{b_{4n+2}}$ tane daha fazla küme vardır. Demek ki E_{4n+3}'te sonlu sayıda küme var. E_{4n+3}'e eklenen yeni elemanlar, E_{4n+2}'nin elemanlarının altkümeleri olduğundan, bu elemanların da eleman sayısı sınırlı olduğundan, E_{4n+3}'e eklenen yeni kümeler de sonludur.

Şimdi E_{4n+3} için savımızın doğru olduğunu varsayalım. E_{4n+3}'de a_{4n+3} tane küme var ve her birinin en fazla b_{4n+3} tane elemanı var. Bariz biçimde E_{4n+4}'te en fazla $2a_{4n+3}$ tane küme olabilir ve bu kümelerin eleman sayısı en fazla $2^{b_{4n+3}}$ olabilir.

Böylece ilk altı aksiyomumuzun bir "model"ini bulduk, yani aksiyomları sağlayan somut bir evren. Bu evrenin her kümesi sonlu olduğundan, ilk altı aksiyomdan hareketle sonsuz bir kümenin (mesela doğal sayı kümesinin) varlığını kanıtlayamayız (kanıtlayabilseydik E dahil her modelde sonsuz bir küme olurdu.)

Alıştırmalar

4.8. Eğer $y \in x \in E_n$ ise, bir $m < n$ doğal sayısı için $y \in E_m$ olduğunu kanıtlayın.

4.9. Yukarıdaki kanıtta hesap hataları olduğunu iddia edenler oldu; varsa düzeltin.

4.10. Yukarıda inşa edilen evrendeki hiçbir kümenin kendi kendisinin elemanı olamayacağını kanıtlayın.

4.11. Yukarıda yaptığımız inşayı adına a diyeceğimiz bir "şey" için $E_0 = \{\emptyset, a\}$ ile başlayarak yapın, ama inşa boyunca $a = \{a\}$ eşitliğinin doğru olmasına çalışın. Başarmamanız için hiçbir neden yok. Demek ki verdiğimiz aksiyomlarla $\forall x\ x \notin x$ önermesini kanıtlayamayız. Bunun için ileride açıklayacağımız Temellendirme Aksiyomu'na ihtiyacımız var.

5. Temel Kavramlar

5.1 Kartezyen Çarpım I

Okur lise yıllarında "(x, y) ikilisi" ya da "çifti" kavramını öğrenmiştir. Mesela düzlemdeki her noktayı (bir koordinat sistemi sabitleyerek) $(x,\ y)$ gibi bir sayı ikilisiyle (ya da çiftiyle) gösterebiliriz ve düzlemin her noktası bir ve sadece bir tek sayı ikilisine tekabül eder ve bunun tersi de doğrudur: Her sayı ikilisi düzlemin bir ve sadece bir tek noktasına tekabül eder. Benzer biçimde, içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayda da ortak bir noktada kesişen ama aynı düzlemde yer almayan üç doğru ve bu doğrular üstünde birim uzunluklar ve yönler seçilirse, uzayın her noktası (x, y, z) sayı üçlüsüyle gösterilebilir. İşte bu altbölümde $(x,\ y)$ ve $(x,\ y,\ z)$ gibi nesnelerin matematiksel tanımını vereceğiz. Tabii ki x, y, z birer küme olmalı. Her şey gibi (x, y) ikilisi de bir küme olacak.

(x, y) ikilisinin bizi ilgilendiren tek bir özelliği vardır, o da şu: Eğer $(x, y) = (z, t)$ ise $x = z$ ve $y = t$ olmak zorundadır. İkilinin ***karakteristik özelliği*** denilen bu özellik dışında (x, y) ikilisinin hiçbir özelliği bizi matematiksel anlamda ilgilendirmez. Dolayısıyla (x, y) ikilisini matematiksel olarak tanımlamak için bu özelliği sağlayan matematiksel bir nesne bulmak yeterlidir. (x, y) ikilisi nasıl tanımlanırsa tanımlansın, bu karakteristik özelliği sağlamalıdır. Bir başka deyişle (x, y) ikilisi varlığını bu karakteristik özelliğe borçludur[1].

x ve y iki eleman (ya da iki küme) olsun.

$$\{\{x\},\ \{x,\ y\}\}$$

kümesini ele alalım. (Şimdiye kadar verdiğimiz aksiyomlara göre bunun gerçekten bir küme olduğundan emin olun.) Bu tür kümelerin şu özelliği vardır:

Önsav 5.1. *Eğer* $\{\{x\},\ \{x,\ y\}\} = \{\{z\},\ \{z,\ t\}\}$ *ise o zaman* $x = z$ *ve* $y = t$ *olur.*

[1] Matematiksel nesneler, varlıklarını onları var eden özelliklere (ya da ihtiyaçlara) borçludur. Matematiksel anlamda, nesnenin kendisinin ne olduğu değil, nesnenin karakteristik özelliği (varoluş nedeni) önemlidir. Ama tabii tanımda, hayatımızı kolaylaştırıp güzelleştirecek estetik, sadelik, doğallık, işlevsellik gibi özellikler istemeye hakkımız var.

Tanım verildikten ve arzulanan karakteristik özellik kanıtlandıktan sonra, tanımın ne olduğu unutulabilir.

Kanıt: $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ eşitliğini varsayalım. $x = y$ ve $x \neq y$ durumuna göre kanıtı iki parçaya ayıracağız. Önce $x \neq y$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x\}$ kümesinin bir, $\{x, y\}$ kümesinin ise iki elemanı vardır. Demek ki bu kümeler birbirine eşit olamazlar; dolayısıyla eşitliğin solundaki

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

kümesinin iki elemanı vardır. Dolayısıyla eşitliğin sağındaki

$$\{\{z\}, \{z, t\}\}$$

kümesinde de iki eleman olmak zorundadır, yani $\{z\} \neq \{z, t\}$, yani $z \neq t$ olmalıdır. Her iki kümede de ikişer eleman olduğunu ve bu elemanların birinin bir elemanlı, diğerinin ise iki elemanlı bir küme olduğunu kanıtladık. Eşitliğin sol tarafındaki

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{x\}$ kümesi, eşitliğin sağ tarafındaki

$$\{\{z\}, \{z, t\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{z\}$ kümesine eşit olmalı: $\{x\} = \{z\}$, yani $x = z$. Aynı nedenden $\{x, y\} = \{z, t\}$ olmalı. $x = z$ olduğundan

$$\{y\} = \{x, y\} \setminus \{x\} = \{z, t\} \setminus \{z\} = \{t\}$$

olur ve bundan da $y = t$ çıkar.

Eğer $x = y$ ise, o zaman

$$\{\{x\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$$

olur, dolayısıyla sağ taraftaki $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ kümesinin (aynen sol taraftaki küme gibi) tek elemanı vardır ve bu eleman $\{x\}$ elemanıdır: $\{z\} = \{z, t\} = \{x\}$. Buradan da $x = z = t$ çıkar. □

Bu önsav sayesinde (x, y) ***çiftini*** ya da ***ikilisini*** $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi olarak tanımlayabiliriz. Öyle yapalım; tanım gereği

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

olsun. Bundan böyle formüllerimizde (x, y) gibi simgeleri (kısaltma olarak) kullanacağız. Yukarıdaki önsavı zenginleştirdiğimiz dile çevirelim:

Teorem 5.2. $(x, y) = (z, t)$ *eşitliğinin geçerli olması için yeter ve gerek koşul* $x = z$ *ve* $y = t$ *eşitlikleridir.* □

Şimdi de $X \times Y$ kümesini $x \in X$ ve $y \in Y$ için, (x, y) biçiminde yazılan elemanlar kümesi olarak tanımlayabiliriz:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\},$$

yeter ki bu topluluk bir küme olsun. Şimdi bunu kanıtlamaya girişiyoruz.

Önsav 5.3. i. *Eğer $x \in X$ ve $y \in Y$ ise $(x, y) \in \wp(\wp(X \cup Y))$ olur.*
ii. *Eğer $\alpha = (x, y)$ ise,*

$$x = \cap\cap\alpha \text{ ve } y = (\cup\cup\alpha \setminus \cap\cap\alpha) \cup (\cap\cup\alpha)$$

olur, yani α ikilisi, x ve y'yi kümeler kuramının bir formülüyle tanımlar.

Kanıt: $x, y \in X \cup Y$ olduğundan, $\{x\}$, $\{x, y\} \in \wp(X \cup Y)$ olur. Demek ki, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \wp(X \cup Y)$ olur. Demek ki, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(X \cup Y))$ olur. Birinci kısım kanıtlanmıştır.

(ii) için önce $\cap\alpha = \{x\}$ ve $\cup\alpha = \{x, y\}$ eşitliklerinin farkına varalım. Demek ki $\cap\cap\alpha = x$, $\cup\cup\alpha = x \cup y$, $\cap\cup\alpha = x \cap y$. Buradan kolaylıkla istediğimiz eşitliklere ulaşırız. □

x'e (x, y) ikilisinin ***birinci izdüşümü***, y'ye de ***ikinci izdüşümü*** denir.

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x \text{ ve } \mathrm{pr}_2(x, y) = y$$

yazılır. Formüllerimizde $\mathrm{pr}_1(x)$ gibi ifadeleri kullanmakta bir sakınca olamaz, tam tersine formülleri kısalttığından ve anlaşılır kıldığından yararı olur.

Bu önsav ışığında X ve Y kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımını tanımlayabiliriz: $X \times Y$ ***kartezyen çarpımı***

$$\{\alpha \in \wp(\wp(X \cup Y)) : \exists x\, \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge \alpha = (x, y))\}.$$

kümesi olarak tanımlanmıştır. Bunun bir küme olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. Kanıtta elbette Aksiyom 4.3 ve 4.1 kullanılmalı.

Bundan böyle $X \times Y$ gibi ifadeleri formüllerimizde kısaltma olarak kullanacağız.

İleride kartezyen çarpımın tanımını değiştireceğiz. Fonksiyonları tanımlayabilmek için şimdilik bu geçici tanıma ihtiyacımız var.

Notlar

5.1. $X \times Y$ kümesine, ünlü Fransız matematikçisi ve filozofu Descartes'a (dekart diye okunur) atfen, X ve Y kümelerinin ***kartezyen çarpımı*** denir. Ama yukarıda verdiğimiz

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

tanımı Polonyalı matematikçi Kuratowski'nindir. Önsav 5.1'i doğrulayan başka kümeler de oluşturabilirsek, o zaman kartezyen çarpımın başka tanımlarını da verebiliriz. Örneğin,

$$\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

kümesi de bu özelliği sağlar. Dolayısıyla

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

tanımını da yapabilirdik.
Farklı tanımlar yapmak mümkündür, ama en kabul edileni verdiğimiz Kuratowski'nin tanımıdır. Bu konuda bkz. aşağıdaki 4.3 ve sonraki alıştırmalar.

5.2. (x, y) ikilisinin tanımında Önsav 5.1'in esas alınması önemli bir felsefi olguya işaret eder: Matematiksel kavramların nasıl tanımlandıkları ya da ne oldukları hiç önemli değildir, önemli olan özellikleridir. Yani matematikte aslolan nesne değil özelliktir. Bu dediğimiz sadece ikili kavramı için değil, nokta, doğru, sayı gibi tüm matematiksel kavramlar için de geçerlidir. Bu da matematiğin üst seviyede zihinsel bir uğraş olduğunu gösterir.

Alıştırmalar

5.3. $\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\} = \{\{\{z\}, \emptyset\}, \{t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın. Demek ki isteseydik $(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$ tanımını yapabilirdik.

5.4. $\{\{\emptyset, x\}, \{\{\emptyset\}, y\}\} = \{\{\emptyset, z\}, \{\{\emptyset\}, t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın.

5.5. İkili tanımını ilk kez Norbert Wiener 1914'te önermiştir. Önerisi şöyleydi:

$$(a, b) := \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}.$$

Bu tanımla Önsav 5.1'in doğru olduğunu kanıtlayın, yani Wiener'in tanımını kabul ederek

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

önermesini kanutlayın. Bu tanımla, eğer A ve B iki kümeyse, $A \times B$ topluluğunun da bir küme olduğunu kanıtlayın.

5.6. Aşağı yukarı Wiener ile aynı tarihte (1914), Felix Hausdorff şu tanımı önerdi:

$$(a, b) := \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}.$$

Bu tanımla Önsav 5.1'in doğru olduğunu kanıtlayın. Bu tanımla, eğer A ve B iki kümeyse, $A \times B$ topluluğunun da bir küme olduğunu kanıtlayın.

5.7. 1921'de Kazimierz Kuratowski ikilinin genel olarak kabul edilmiş ve bizim de kabul ettiğimiz tanımını önerdi:

$$(a,\ b) :=\ \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}.$$

5.8. Diyelim

$$(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$$

tanımını önerdik. Bu tanım önerisi doğru olabilir mi?

5.9. Diyelim

$$(a, b) := \{\{0, a\}, \{1, b\}\}$$

tanımını önerdik. Bu tanım önerisi doğru olabilir mi?

5.10. Eğer X ya da Y boşkümeyse $X \times Y$'nin de boşküme olduğunu kanıtlayın.

5.11. $\cup\cup(X \times Y) = X \cup Y$ eşitliğini kanıtlayın.

5.12. $a = \{a\}$ eşitliğini sağlayan bir a kümesi olduğunu varsayalım. $a \times a = a$ eşitliğini kanıtlayın.

5.13. $X \times Y$ kümesinin her elemanının 1 ya da 2 elemanlı bir küme olduğunu gözlemleyin. Dolayısıyla $\emptyset \notin X \times Y$.

5.14. A herhangi bir küme olsun. $A_0 = A$ ve her n doğal sayısı için

$$A_{n+1} = A_n \cup (A_n \times A_n)$$

olsun[2].

$$X := \bigcup_n A_n$$

topluluğunun bir küme olduğunu varsayalım[3].

$$X = (X \times X) \cup A$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer A'nın elemanları en az 3 elemanlı kümelerse $(X \times X) \cap A = \emptyset$ olur elbette.

Şimdi de üç kümenin kartezyen çarpımını tanımlayalım. Bunun için iki seçeneğimiz var: X, Y, Z kümelerinin kartezyen çarpımı $(X \times Y) \times Z$ ya da $X \times (Y \times Z)$ olarak tanımlanabilir, seçim sizin! Tabii (x, y, z) elemanı da aynı biçimde $((x, y), z)$ ya da $(x, (y, z))$ olarak tanımlanmalı. Her iki tanım da işimizi görür, hangi tanımın kabul edildiği hiç önemli değildir, çünkü her iki durumda da aşağıdaki önerme doğru olur:

Önsav 5.4. *Eğer* $(x, y, z) = (x', y', z')$ *ise o zaman* $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ *olur.*

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

İleride $X \times Y$ ve $X \times Y \times Z$ kavramlarının tanımını değiştirip, çok daha doğal ve basit bir tanım vereceğiz.

Notlar

5.15. $X \times Y = Y \times X$ eşitliği için $X = Y$ yeter ve gerek koşuldur.

5.16. $X \times (Y \times Z)$ ile $(X \times Y) \times Z$ kümeleri birbirine eşit değildir.

5.17. Altbölüm 5.4'te $X \times Y$ ve $X \times Y \times Z$ tanımlarımızı değiştireceğiz. Ama bu değişiklik için önce fonksiyon tanımını görmemiz gerekir.

5.2 Fonksiyon

Sunduğumuz kümeler kuramında her nesne, her şey, her varlık bir küme olacak. Tabii ki fonksiyonlar da küme olarak tanımlanacaklar. Fonksiyonun sezgisel anlamını [Ne2]'de açıklamıştık. Burada fonksiyonun formel tanımını vereceğiz. Fonksiyonu küme olarak tanımlamanın hilesi şu: [Ne2]'de açıklandığı üzere, sezgisel anlamda fonksiyon, tanım kümesi, değer kümesi ve grafiği tarafından belirlenir. Biz de fonksiyonu böyle bir üçlü olarak tanımlayacağız.

X ve Y birer küme olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımında bir ***grafik***, $X \times Y$'nin şu özelliğini sağlayan bir G altkümesidir:

[2]Doğal sayıların henüz tanımlanmadığını görmezden gelin.

[3]Bu ciltte verilen aksiyomlarla bu topluluğun bir küme olduğu kanıtlanamaz. Ancak gelecek ciltte verilecek olan Yerleştirme Aksiyomu'yla bu topluluğun bir küme olduğu kanıtlanabilir.

Her $x \in X$ için, $(x, y) \in G$ içindeliğini
sağlayan bir ve bir tane $y \in Y$ vardır.

X'ten Y'ye giden bir ***fonksiyon***, $X \times Y$ kartezyen çarpımının bir G grafiği için (X, Y, G) biçiminde yazılan bir üçlüdür.

Eğer $f = (X, Y, G)$ bir fonksiyonsa, X'e f'nin ***tanım kümesi***, Y'ye f'nin ***değer kümesi***, G'ye de f'nin ***grafiği*** adı verilir. Eğer $x \in X$ için, $(x, y) \in G$ ise, bu y (verilmiş x için) biricik olduğundan,

$$f(x) = y$$

ya da daha basit olarak

$$fx = y$$

yazabiliriz[4]. y'ye f'nin x'te aldığı ***değer*** denir. Çoğu zaman bir $f = (X, Y, G)$ fonksiyonu, G'den hiç sözedilmeden,

$$f : X \longrightarrow Y$$

olarak gösterilir. Eğer $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan y'yi x cinsinden ifade eden bir "kural" bulabilirsek, o zaman G'yi bu kuralla belirleyebiliriz. $f(x) = y$ eşitliğini bazen

$$f : x \mapsto y$$

olarak göstereceğiz. Bu tür popüler yazılım biçimleriyle okurun aşina olduğunu varsayıyoruz.

Eğer (X, Y, G) üçlüsü bir fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise, o zaman (X, Y_1, G) üçlüsü de bir fonksiyondur. Demek ki X ve G, Y'yi belirlemeye yetmiyor. Öte yandan, G grafiği X'i belirler; yani eğer (X, Y, G) ve (X_1, Y_1, G) birer fonksiyonsa, o zaman $X = X_1$ olmak zorundadır. (Neden?)

Birebir ve örten fonksiyonlar, eşleme ve eşleşmeler, özdeşlik fonksiyonları, fonksiyonların bileşkesi gibi kavramlar aynen [Ne2]'deki gibi tanımlanırlar.

Önsav 5.5. *X ve Y birer küme olsun. X'ten Y'ye giden tüm fonksiyonlar bir küme oluşturur.*

Kanıt: Kanıtı okura bırakıyoruz. □

X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesi

$$\mathrm{Fonk}(X, Y),\ {}^{X}Y \text{ ya da } Y^{X}$$

olarak yazılır. Biz birinciyi ve üçüncüyü tercih edeceğiz.

[4]Bazen $x^f = y$ olarak da yazılır. Hatta İngiltere gibi trafiğin soldan aktığı ülkelerde xf yazılır ve bu yazılımın bayağı avantajları vardır.

Notlar ve Örnekler

5.18. X ve Y birer küme olsun. G, $H \subseteq X \times Y$ iki grafik olsun. Eğer $G \subseteq H$ ise $G = H$ eşitliğini kanıtlayın.

5.19. X ve Y birer küme olsun.

$$G_1 = \{(\alpha, x) \in (X \times Y) \times X : \mathrm{pr}_1(\alpha) = x\}$$

olsun. O zaman $(X \times Y, X, G_1)$ örten bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, tahmin edileceği üzere,

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$$

olarak yazılır ve ***birinci izdüşüm fonksiyonu*** olarak bilinir. Benzer şekilde ***ikinci izdüşüm fonksiyonu***

$$\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$$

fonksiyonu da tanımlanabilir.

5.20. Eğer (X, Y, G) ve (X_1, Y_1, G) birer fonksiyonsa, o zaman $X = \mathrm{pr}_1(G) = X_1$ olmak zorundadır.

5.21. Eğer (X, Y, G) bir fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise (X, Y_1, G) de bir fonksiyondur.

5.22. X bir küme olsun.

$$G = \{(x, y) \in X \times X : y = x\}$$

bir grafiktir ve bize I_X olarak göstereceğimiz X'ten X'e giden özdeşlik fonksiyonunu verir.

5.23. X ve Y birer küme ve $b \in Y$ olsun. O zaman

$$s_b : x \mapsto b$$

kuralı bize X'ten Y'ye giden bir fonksiyon belirler (sabit b fonksiyonu). Bu fonksiyonun grafiği

$$G = \{(x, y) \in X \times Y : y = b\} = X \times \{b\}$$

kümesidir.

Alıştırmalar

5.24. X bir küme olsun. $\mathrm{Fonk}(X, 2)$ ile $\wp(X)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

5.25. X bir küme olsun. X'ten $\wp(X)$'e giden örten bir fonksiyon olmadığını gösterin.

5.26. X, Y ve Z birer kümeyse $\mathrm{Fonk}(X \cup Y, Z)$ ile $\mathrm{Fonk}(X, Z) \times \mathrm{Fonk}(Y, Z)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

5.27. X, Y ve Z birer kümeyse $\mathrm{Fonk}(X \cup Y, Z)$ ile

$$\{(f, g) \in \mathrm{Fonk}(X, Z) \times \mathrm{Fonk}(Y, Z) : \forall t\ (t \in X \cap Y) \Rightarrow f(t) = g(t))\}$$

kümesi arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

5.28. $\mathrm{Fonk}(X \times Y, Z)$ ile $\mathrm{Fonk}(Y, \mathrm{Fonk}(X, Z))$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

5.29. $\mathrm{Fonk}(Z, X) \times \mathrm{Fonk}(Z, Y)$ ile $\mathrm{Fonk}(Z, X \times Y)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

5.3 Küme Ailesi

Sezgisel Tanım. Doğal sayıların karelerinden oluşan $(0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$ sayı dizisi aslında özel bir "aile" örneğidir. Bu diziyi (ya da aileyi) $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ olarak gösteririz. Bir aile, bir dizinin genelleştirilmiş hâlidir; bir dizide "göstergeç kümesi" olarak $\mathbb{N}$ alınır, bir ailede göstergeç kümesi herhangi bir küme olabilir.

I bir küme olsun. I'nın her i elemanı için bir X_i kümesi verilmiş olsun. Bu durumda

$$(X_i)_{i\in I}$$

türünden bir "nesne"ye ***küme ailesi*** adı verilir.

Bunun pek bir tanıma benzemediğinin farkındayım, matematiksel tanım da böyle değil zaten. Matematiksel tanımı birazdan vereceğim.

I kümesine ***göstergeç kümesi*** ya da ***endeks kümesi*** adı verilir.

$(X_i)_{i\in I}$ nesnesinin nasıl bir şey olduğunu anlamak için en doğrusu örnek vermektir sanırım.

Notlar ve Örnekler

5.30. Doğal sayıları bildiğimizi varsayalım bir an.

$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & \{0\} \\ X_1 & = & \{1, 2\} \\ X_2 & = & \{2, 3, 4\} \\ X_3 & = & \{3, 4, 5, 6\} \\ X_4 & = & \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{array}$$

ve genel olarak her n doğal sayısı için

$$X_n = \{n, \ldots, 2n\}$$

tanımlarını yapalım. Bu durumda, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir küme ailesidir. Bunun bir aile olduğunu kanıtlamak için, birazdan göreceğimiz üzere, ($\mathbb{N}$'nin bir küme olduğunu varsayarak) $\{(n, X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ topluluğunun bir küme ($\mathbb{N} \times \wp(\mathbb{N})$ kümesinin bir altkümesi) olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Okura bırakıyoruz.

5.31. Gerçel (reel) sayıları bildiğimizi varsayalım bir an. Her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$X_r = (r, \infty)$$

olsun (açık aralık). Bu durumda $(X_r)_{r\in\mathbb{R}}$ bir küme (ya da açık aralık) ailesidir. Bunun bir aile olduğunu kanıtlamak için, birazdan göreceğimiz üzere, ($\mathbb{R}$'nin bir küme olduğunu varsayarak) $\{(r, X_r) : r \in \mathbb{R}\}$ topluluğunun bir küme (yani $\mathbb{R} \times \wp(\mathbb{R})$ kümesinin bir altkümesi) olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Okura bırakıyoruz.

5.32. A, doğal sayıların bir altkümesinden doğal sayılar kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun. B, A'nın sonsuz altkümelerinden oluşan küme olsun. C, B'den doğal sayılara giden fonksiyonlar kümesi olsun. D, C'nin sonlu altkümelerinden oluşan küme olsun... Her $d \in D$ için, $X_d = \{d, |d|, \emptyset\}$ (ya da başka bir şey!) olsun. O zaman $(X_d)_{d\in D}$ bir ailedir... (Çok anlamaya çalışmayın, rahatlayın diye özellikle karmaşıklaştırdık!)

Bir küme ailesi, sezgisel anlamda, **formel**, yani **biçimsel** bir nesnedir, yani $(X_i)_{i\in I}$ ile $(Y_j)_{j\in J}$ küme ailelerinin eşit olması için $I = J$ ve her $i \in I$ için

$X_i = Y_i$ olmalı. Bu arada X_i'lerin bazılarının, hatta hepsinin bile, birbirine eşit olabileceklerini belirtelim.

Tabii "küme ailesi" yerine, "fonksiyon ailesi", "doğru ailesi" gibi tabirler de kullanabiliriz. Mesela

$$\ell_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$$

ise, $(\ell_{m,b})_{m>0,\, b\in\mathbb{Z}}$ iki boyutlu düzlemin bir doğru ailesidir.

Eğer I kümesi önemli değilse ya da konunun gelişinden ne olduğu anlaşılıyorsa, $(X_i)_{i\in I}$ yerine $(X_i)_i$ yazılabilir.

Birazdan gerçek matematiksel tanımı vereceğiz ama bir "küme ailesi"nin anlamı özünde burada verdiğimiz anlamdır, tek bir farkla ki $\{(i, X_i) : i \in I\}$ topluluğu bir küme olmalıdır.

Matematiksel Tanım. I bir küme olsun. $\mathcal{X}$ bir küme olsun. Bir

$$X : I \longrightarrow \mathcal{X}$$

fonksiyonuna ***küme ailesi*** denir! (Ünlem gerekiyordu!) Yani bir küme ailesi sadece bir fonksiyon. Eğer $i \in I$ için $X(i)$ yerine X_i yazarsak, bir küme ailesi (yukarıdaki gibi) $(X_i)_{i\in I}$ olarak yazılır. Elbette, $(X_i)_{i\in I}$ ile $(Y_j)_{j\in J}$ küme ailelerinin eşit olması için $I = J$ ve her $i \in I$ için $X_i = Y_i$ olmalıdır, çünkü fonksiyonların bu özelliği var. Ayrıca fonksiyonun imgesi bir küme olduğundan, $\mathcal{X}$'in

$$\{X_i : i \in I\}$$

topluluğu bir kümedir; dolayısıyla $\cup_{i\in I} X_i$ topluluğu da bir kümedir.

$\mathcal{X}$ kümesinin buradaki yegâne işlevi, her $i \in I$ için X_i elemanını içermesidir. Bu özelliği içermesi koşuluyla, $\mathcal{X}$ yerine herhangi bir başka kümeyi alabilirdik; en ekonomik olanı $\{X_i : i \in I\}$ kümesi elbette.

Madem küme ailesi sadece bir fonksiyon, neden fonksiyon demiyoruz da küme ailesi diyoruz? Çünkü kendimizi psikolojik olarak hazırlamak istiyoruz, görmek istediğimiz nesne aslında bir fonksiyon değil, bir "aile".

"Küme ailesi" denen şey özünde ilk verdiğimiz tanımdır, ama bu tanımı matematiğin soğuk kalıplarına sokabilmek için "fonksiyon" kavramından geçmek zorunda kaldık.

5.4 Kartezyen Çarpım II

Sezgisel Tanım. $(X_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi olsun. Bu ailenin kartezyen çarpımı

$$\Pi_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i\}$$

kümesidir (ki bunun bir küme olduğu bile belli değil!)

Eğer X_i'lerden en az biri boşkümeyse, $\Pi_{i\in I}X_i$ kartezyen çarpımı da boşküme olur.

Matematiksel Tanım. $(X_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi olsun. $\mathcal{Y} = \cup_{i\in I}X_i$ tanımını yapalım. Bu ailenin kartezyen çarpımı,

$$\prod_{i\in I} X_i := \{f \in \text{Fonk}(I, \mathcal{Y}) : \text{ her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $f(i)$ yerine x_i yazarsak ve f fonksiyonunu $(x_i)_{i\in I}$ olarak gösterirsek, o zaman sezgisel tanıma ulaşmış oluruz.

Eğer bir $i \in I$ için $X_i = \emptyset$ ise, $\prod_{i\in I} X_i = \emptyset$ olur. Ama hiçbir $i \in I$ için X_i boşküme değilse de $\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımının boşküme olmadığını şimdilik kanıtlayamayız, çünkü tanımda belirtilen

$$\text{Her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i$$

özelliğine sahip bir fonksiyonun varlığını kanıtlayamayabiliriz. Tabii X_i kümelerinin ortak bir c elemanı varsa sorun olmaz, sabit c fonksiyonu kartezyen çarpımın bir elemanı olur. Ya da I sonluysa da bir sorun olmaz. Ama genel olarak kartezyen çarpımın en az bir elemanının olduğunu şimdiye kadar gördüğümüz aksiyomlarla kanıtlayamayız. İkinci ciltte Seçim Aksiyomu ile bu sorunun üstesinden geleceğiz ve o zaman (ve ancak o zaman) eğer her $i \in I$ için $X_i \neq \emptyset$ ise, $\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımının boşküme olmadığını kanıtlayabileceğiz.

Eğer $I = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ise, $\prod_{i\in I} X_i$ yerine genellikle

$$X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$$

yazarız. Ama bu yazılım biçimi Altbölüm 5.1'deki yazılımla çakışıyor... Eski tanımı unutalım. Bundan böyle X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımını, yani $X \times Y$ kümesini $2 = \{0, 1\}$ kümesinden $X \cup Y$ kümesine giden, ama 0'daki değeri X'te, 1'deki değeri Y'de olan fonksiyonlar kümesi olarak görelim. Altbölüm 5.1'deki "iki kümenin kartezyen çarpımı" tanımını fonksiyon kavramını kullanmak için kullandık; işi bitti, artık unutabiliriz.

Eğer X_i kümeleri birbirine eşitse, mesela hepsi X'e eşitse, $\prod_I X$ ya da X^I ya da ${}^I X$ yazarız.

Alıştırmalar

5.33. X, hiçbiri boşküme olmayan ikişer ikişer ayrık kümeler kümesi olsun. $\text{Fonk}(\cup X, Z)$ ile $\prod_{Y\in X} \text{Fonk}(Y, Z)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

5.34. Yukarıdaki olguyu ikişer ikişer ayrık olmayan kümelerden oluşan bir kümeye nasıl genişletebilirsiniz?

6. Temellendirme Aksiyomu

Bölüm 3'te toplamayı şu iki formülle tanımlamıştık, daha doğrusu tanımlamaya çalışmıştık: $x+0 = x$, ve eğer $x+y$ biliniyorsa, $x+Sy = S(x+y)$. Anımsatırız: Sx, $x \cup \{x\}$ anlamına geliyordu.

Diyelim ki $x + \beta$ toplamını hesaplamak istiyorsunuz... Düşünüyorsunuz... Kısa bir zaman içinde β'nın Sy'ye eşit olduğunu anlıyorsunuz. Hemen ardından da, tanımdan,

$$x + \beta = x + Sy = S(x + y)$$

eşitliklerini çıkarıyorsunuz. Şimdi $x + y$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Yani

$$x + \beta = S(x + y)$$

sonucunu buldunuz. Her şey yolunda. Şimdilik... Ertesi gün bu buluşunuzu bir arkadaşınıza göstermek istiyorsunuz. Ne var ki kanıtınızı unutmuşsunuz. Kanıtınızı unutmuşsunuz ama kafanız yerinde. Gene düşünüyorsunuz. Kısa bir zaman içinde β'nın Sz'ye eşit olduğunu anlıyorsunuz. Bir önceki gün β'nın Sy olduğunu bulmuştunuz ama bunu unutmuşsunuz, bugün β'yı Sz olarak buldunuz... Tabii bunun böyle olması için $Sy = Sz$ olmalı. Demek öyle, neden olmasın!.. Aynen bir önceki gün olduğu gibi hesaplıyorsunuz:

$$x + \beta = x + Sz = S(x + z).$$

Şimdi $x + z$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Ve işte bulduğunuz sonuç:

$$x + \beta = S(x + z)$$

Bir önceki gün $x+\beta$ sayısını $S(x+y)$ olarak hesaplamıştınız, bugünse $S(x+z)$ olarak... Toplamın dünden bugüne değişmemesi gerekir elbet, yani

$$S(x + y) = S(x + z)$$

eşitliği doğru olmalı. Eğer bu eşitlik doğru değilse, toplamanın verilen tanımı kabul edilemez.

İşte bu yüzden toplamanın tanımının geçerli ve kabul edilebilir bir tanım olması için en azından aşağıdaki teoremin kanıtlanması gerekmektedir[1].

[1] Ki bu bile yetmez.

Teorem 6.1. *$Sy = Sz$ ise $S(x + y) = S(x + z)$.*

Eğer y bir doğal sayıysa[2], Sy, $y + 1$ anlamına geleceğinden, aslında

$$Sy = Sz$$

eşitliğinden $y = z$ eşitliğinin çıkmasını istiyoruz. Yani aslında aşağıdaki teoremi kanıtlamak istiyoruz:

Teorem 6.2. *$Sy = Sz$ ise $y = z$.*

Teorem 6.1 elbette Teorem 6.2'nin bir sonucudur. Bundan böyle amacımız Teorem 6.2'yi kanıtlamak olacak.

Teorem 6.2'u kanıtlayabilir miyiz? Bunu kanıtlayamasak da kanıtlamaya ne kadar yaklaşabiliriz? Yani $Sy = Sz$ ise, y ile z arasında nasıl bir ilişki vardır? Önce bu soruyu yanıtlayalım:

Teorem 6.3. *Eğer $Sy = Sz$ ise ya $y = z$ ya da $y \in z \in y$ olur.*

Kanıt: $Sy = Sz$ olsun. Demek ki

$$y \cup \{y\} = z \cup \{z\}.$$

Şimdi, $y \in \{y\}$ olduğundan, y, bu eşitliğin solundaki $y \cup \{y\}$ kümesinin bir elemanı. Demek ki y sağdaki $z \cup \{z\}$ kümesinin de bir elemanı. Dolayısıyla ya $y \in z$ ya da $y \in \{z\}$. İkinci şıkta $y = z$ olmak zorunda. Sonuç olarak ya $y \in z$ ya da $y = z$.

Aynı nedenden[3] ya $z \in y$ ya da $z = y$.

Demek ki $y \neq z$ ise $y \in z$ ve $z \in y$ olmalı. Teorem kanıtlanmıştır. □

Şimdi $y \in z \in y$ seçeneğini (bir kümenin kendisinin bir elemanının elemanı olma seçeneğini) ortadan kaldırırsak Teorem 6.3'ten Teorem 6.2 çıkar, dolayısıyla Teorem 6.1 de kanıtlanmış olur ve toplamanın tanımında farkettiğimiz sorun giderilmiş olur. Ne yazık ki bu seçeneği ortadan kaldırmak bedelsiz değildir. Bu ana kadar gördüğümüz aksiyomlarla $y \in z \in y$ durumunu engelleyemeyiz.

Bir küme, bir elemanının elemanı olabilir mi? (Bir insan kendi kendisinin torunu olabilir mi?) Daha doğrusu olmalı mı?

Hatta bir küme kendi kendisinin elemanı olabilir mi?

Bir başka soru: $x \in y \in z \in x$ ilişkilerini sağlayan x, y, z kümeleri var mıdır? Daha doğrusu bu tür kümelerin var olması doğru mudur? Böyle bir durumun olamayacağını gösteremiyorsak, böyle bir durumun olmaması için bir aksiyom kabul etmeli miyiz?

[2]Ki daha doğal sayı kavramını tanımlamadık. Sadece geçen bölümde 0, 1, 2 gibi birkaç doğal sayıyı tanımladık.

[3]Yukarıdaki kanıtta y ile z'nin yerlerini değiştirin.

Aksiyom kabul etmek, son tahlilde felsefi bir eylemdir, ya da inanca ilişkindir. Doğanın yasalarının ne olduğunu, evrenin hangi kurallarla yönetildiğini düşündüğümüzle ilgili bir soru.

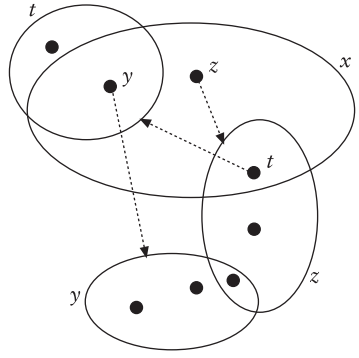
$$x \in x$$
$$x \in y \in x$$
$$x \in y \in z \in x$$
$$x \in y \in z \in t \in x$$

türünden ilişkileri sağlayan kümelerin olmaması gerektiğini düşünebiliriz, çünkü genellikle bir kümenin tanımlanması için o kümenin elemanlarının bilinmesi gerektiğini düşünürüz. Yukarıdaki örneklerin herbirinde x'in elemanlarından birinin bilinmesi için x kümesinin bilinmesi gerekiyor. Genelde $x \in x$ gibi "saçma" bir durumun olmaması gerektiği düşünülür.

Kümeler kuramının diğer aksiyomlarıyla yukarıdaki durumların olamayacağı gösterilemez. Bunun için şu aksiyoma ihtiyaç vardır:

Aksiyom 6.4. Temellendirme Aksiyomu[4]**.** *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'in $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.*

Bir örnek ve bir "karşıörnekle" temellendirme aksiyomunu açıklamaya çalışalım.



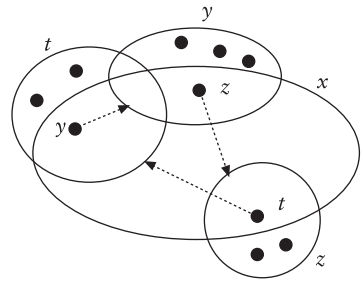
Yukarıdaki şekildeki x kümesinde üç eleman var: y, z ve t. Bu üç elemanın herbiri birer küme. Şekilde bu üç eleman hem bir eleman olarak (noktayla), hem de bir küme olarak (ovalle) gösterilmiş. x'in bu üç elemanıyla x'i teker teker kesiştirelim:

$$t \in x \cap z \neq \emptyset,$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset,$$
$$x \cap y = \emptyset.$$

[4]İngilizcesi "Axiom of Regularity" ya da "Axiom of Foundation".

Demek ki x'in üç elemanından sadece y'nin x'le kesişimi boşküme. Temellendirme Aksiyomu, boş olmayan her x kümsesinde böyle bir y elemanının mutlaka olması gerektiğini söylüyor. (Eğer x'ten y elemanını atıp $\{z, t\}$ kümesine bakarsak, bu sefer de t elemanının $\{z, t\}$ kümesi için Temellendirme Aksiyomu'nun gereklerini yerine getirdiği görülür. Son olarak t'yi de atarsak, z elemanı $\{z\}$ kümesinin Temellendirme Aksiyomu'nun gereklerini yerine getiren elemanıdır.)

Öte yandan aşağıdaki şekildeki gibi bir durum temellendirme aksiyomuna göre olmamalı.



Burada da x'in üç elemanı var: y, z ve t. Ancak,

$$t \in x \cap z \neq \emptyset,$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset,$$
$$z \in x \cap y \neq \emptyset.$$

Bu durum Temellendirme Aksiyomu'yla çelişir. Temellendirme Aksiyomu'nun doğru olduğu bir "model"de böyle bir x kümesi olamaz.

Temellendirme Aksiyomu'ndan sözünü ettiğimiz sonuçları çıkarabiliriz.

Sonuç 6.5. *Eğer a bir kümeyse, $a \notin a$.*

Kanıt: a bir küme olsun. Diyelim ki a kendi kendisinin bir elemanı, yani $a \in a$. Şimdi x kümesini sadece a'dan oluşan küme olarak tanımlayalım, yani

$$x = \{a\}$$

olsun. Temellendirme Aksiyomu'na göre x kümesinde

$$x \cap y = \emptyset$$

eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır. Ama x kümesinin tek bir elemanı var, o da a. Demek ki $y = a$ olmalı. Dolayısıyla

$$x \cap a = \emptyset$$

olmalı. Ama a, hem x'in hem de a'nın bir elemanı, yani $a \in x \cap a$. Bu bir çelişkidir. Demek ki "$a \in a$" önermesi yanlış, yani $a \notin a$. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 6.6. *Eğer a ve b birer kümeyse, ya $a \notin b$ ya da $b \notin a$.*

Kanıt: Bir çelişki elde etmek amacıyla, yanıtlamak istediğimiz sonucun yanlış olduğunu varsayalım. Demek ki

$$a \in b \in a$$

ilişkilerini sağlayan a ve b kümelerinin varlığını varsayıyoruz.

$$x = \{a, b\}$$

olsun. Temellendirme Aksiyomu'na göre x'te

$$x \cap y = \emptyset$$

eşitliğini sağlayan bir y elemanı olmalı. Ama x'in sadece iki elemanı var: a ve b. Demek ki y, ya a ya da b olmak zorunda.

Eğer $y = a$ ise, o zaman $b \in x \cap a = x \cap y = \emptyset$, çelişki.

Eğer $y = b$ ise, o zaman, $a \in x \cap b = x \cap y = \emptyset$, çelişki. □

Sonuç 6.7. *Eğer a, b ve c birer kümeyse, ya $a \notin b$ ya $b \notin c$ ya da $c \notin a$.*

Kanıt: Okura alıştırma. Yukarıdaki kanıtlara çok benzer. □

Şimdi Sonuç 6.6'dan Teorem 6.3, Teorem 6.3'ten Teorem 6.2, Teorem 6.2'den Teorem 6.1 çıkar. Madem ki Teorem 6.1 doğru, şimdi artık hiç çekinmeden[5], eğer

$$x + y$$

tanımlanmışsa,

$$x + Sy = S(x + y)$$

eşitliğini $x + Sy$'nin tanımı olarak verebiliriz.

Notlar

6.1. X bir küme olsun ve şu özelliği olsun: Her $x \in X$ için $Sx \in X$. (Şimdilik böyle bir kümenin olup olmadığını bilmiyoruz. Ama yakında yeni bir aksiyomla bu özelliği sağlayan en az bir kümenin var olduğunu söyleyeceğiz. Şimdilik böyle bir kümenin olduğunu varsayalım.) O zaman

$$S : x \mapsto Sx$$

kuralı, X'ten X'e giden bir fonksiyon tanımlar. Bir başka deyişle her $x \in X$ için, X kümesinde Sx'in tanımına uyan tek bir küme vardır. Daha formel olmak gerekiyorsa,

$$G = \{(x, y) \in X \times X : y = Sx\}$$

bir grafiktir ve (X, X, G) bir fonksiyondur. Ama bu fonksiyon Temellendirme Aksiyomu doğru değilse birebir olmayabilir.

[5] Aslında çekinmemiz gereken başka sorunlar da var ama en azından (bir aksiyom yardımıyla da olsa) bu sorunu hallettik. İleride bu sorunu Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmadan (ve toplama işlemini doğal sayılara kısıtlayarak) çok daha radikal bir biçimde halledeceğiz.

6.2. **Bütün Bunlar Gereksiz!** Bir tanım ve bir aksiyom için bunca gürültü patırtıdan sonra, aslında doğal sayılarda (hatta bildiğimiz diğer sayı kümelerinde de) toplamayı tanımlamak için Temellendirme Aksiyomu'na gereksinim olmadığını söyleyeceğim...
Temellendirme Aksiyomu (ya da benzeri bir aksiyom) olmadan Teorem 6.3'ün kanıtlanamayacağı doğru. Öte yandan biz Teorem 6.3'ü tüm kümeler için değil, doğal sayılar için kanıtlamak istiyoruz. Nitekim Teorem 6.3 doğal sayılar için Temellendirme Aksiyomu'na gerek kalmadan kanıtlanabilir, kanıtlayacağız da. Ama böyle bir teorem kanıtlamak için önce doğal sayının ne demek olduğunu bilmemiz lazım. Oysa biz daha böyle bir tanım yapmadık. Bir sonraki bölümde doğal sayıları tanımlayacağız. Doğal sayıları tanımlamak içinse kümeler kuramına bir aksiyom daha katmamız gerekecek. Bunu da bir sonraki bölümde yapacağız. Doğal sayılar kümesini tanımladıktan sonra, Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmadan, Teorem 6.3'ü her küme için olmasa da doğal sayılar için kanıtlayabileceğiz.

6.3. Uygulamalı ve temel matematikte Temellendirme Aksiyomu'na hiç ihtiyaç yoktur. Temellendirme Aksiyomu'na sadece bazı Kümeler Kuramcıları ihtiyaç duyar.

7. Doğal Sayılar Yapısı I

Bölüm 3'te 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 sayılarını tanımladık. Ama, her sayıyı teker teker tanımlamaya zamanımız yok, ne de olsa sonsuz sayıda sayı var. Bu yaklaşımla sayıların sonunu getiremeyiz. Demek ki başka bir yaklaşım gerekiyor.

Bütün sayıları tek bir hamlede tanımlayabiliriz miyiz? Evet. Bu bölümde doğal sayıları teker teker değil, bir bütün olarak tanımlayacağız, yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tek bir hamlede tanımlayacağız[1].

Önce doğal sayılar kümesinin karakteristik özelliği üzerine düşünelim, çünkü doğal sayılar kümesi karakteristik özelliği sayesinde var olacak.

Her şeyden önce 0 bir doğal sayı olmalı[2]. En küçük doğal sayı 0'dır[3]. Sonra... Eğer x bir doğal sayıysa $x+1$ de bir doğal sayı olmalı. Hatırlarsanız $x+1$ yerine Sx yazıyorduk. Bu arada Sx'in tanımını anımsatalım:

$$Sx = x \cup \{x\}.$$

Ama bu iki özellik yetmez. Bu iki özelliği sağlayan birçok küme olabilir. Mesela çok daha ileride tanımladığımız reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ bu özelliği sağlar. Negatif olmayan reel sayılar kümesi de bu özelliği sağlar. Kesirli sayılar kümesi de... Paydasında 3'ün kuvvetleri olan kesirli sayılar kümesi de... Doğal sayılar kümesini biricik yapan, onun varolmasını sağlayan bir başka özellik daha olmalı. Biz yine de ilk iki özelliği yazalım:

(i) 0 bir doğal sayı olmalı, yani $0 \in \mathbb{N}$ olmalı.

(ii) $x \in \mathbb{N}$ ise $Sx \in \mathbb{N}$ olmalı.

Bu iki özelliği sağlayan kümelere tümevarımsal küme diyeceğiz. Doğal sayılar kümesi bu iki özelliği sağlayan en küçük küme olmalıdır. Matematiksel ayrıntılar birazdan.

---

[1] Bakış açımızı doğal sayılardan doğal sayılar kümesine çevirdiğimize dikkat edin, çok doğal sayı var ama bir tek doğal sayı kümesi var. Matematik tarihinde devrim yaratan bir bakış açısıdır.

[2] 0'ı boşküme olarak tanımladığımızı anımsatalım: $0 = \emptyset$.

[3] Bir zamanlar en küçük doğal sayının 1 olduğunu kabul edenler vardı ama o zamandan bu zamana çok zaman geçti...

7.1 Tümevarımsal Kümeler

Şimdilik sonsuz elemanı olan bir kümenin varlığını bilmiyoruz. Böyle bir küme olabilir de olmayabilir de, ama bu aşamada ne böyle bir kümenin olduğunu ne de olmadığını kanıtlayabiliriz[4]. Sonsuz kümelerin varlığından emin olmak için bir aksiyoma daha ihtiyacımız olacak. Önce bir tanım:

Tanım 7.1. *"$0 \in z$" ve her y için, "$y \in z \to Sy \in z$" koşullarını sağlayan z kümelerine* ***tümevarımsal*** *denir.*

Yani bir kümenin tümevarımsal olması için 0 o kümenin bir elemanı olmalı ve, kümenin her y elemanı için, Sy de kümenin bir elemanı olmalı.

Demek ki, eğer z tümevarımsal bir kümeyse, 0 ve ardılları, yani

$$0,\ S0,\ SS0,\ SSS0,\ \ldots$$

elemanları, yani

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

"doğal sayıları" da z'nin elemanları olmalı. Yani (henüz tanımlamadığımız) her doğal sayı her tümevarımsal kümenin elemanı olmalı.

Bu yazdıklarımızdan şöyle bir fikir oluşabilir: $SSS\ldots S0$ gibi (n tane S'den ve bir 0'dan oluşan) elemanlardan oluşan bir küme yaratsak, var etsek, yani

$$\{0, S0, SS0, SSS0, \ldots\}$$

topluluğu bir küme olsa, o zaman bu kümeye doğal sayılar kümesi adını veririz ve işimiz biter. Ama matematikte "anlarsın ya" anlamına gelen üç nokta imi kullanarak küme tanımlanamaz. (Tanım olarak sunulursa da kümenin üç nokta kullanmadan da tanımlanacağı bilinir.) Eskiden, 19'uncu yüzyıl ve öncesinde bu tür tanımlar kabul edilebilirdi belki, ama artık yasak, en azından matematiksel mantık kitaplarında. Saf matematikte "işte hep böyle sonsuza kadar devam ederiz" gibi sonsuz bir zamana referans veren, dolayısıyla muğlak olan tanımlar, argümanlar kabul edilemez.

Tümevarımsal bir kümenin sonsuz olması gerektiğini şimdiye kadar sezmiş olmanız lazım.

Yaratacağımız doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ tümevarımsal bir küme olmalı. Ayrıca biraz düşününce (örneğin $\mathbb{N}$'de tümevarımla kanıtın geçerli olmasını istediğimiz göz önüne alınınca) $\mathbb{N}$'nin en küçük tümevarımsal küme olması gerektiği anlaşılıyor. Zaten biraz yukarıda her doğal sayının her tümevarımsal kümenin

[4]Öte yandan, bu aşamada, yani yukarıdaki aksiyomlarla sonsuz sayıda elemanı olan bir kümenin varlığını kanıtlayamayacağımızı kanıtlayabiliriz, kanıtladık da, Not 4.7'de kanıtladık. Sonsuz bir kümenin varlığını kanıtlayamamak, sonsuz bir kümenin olmadığı anlamına gelmez, kümeler kuramının bazı modellerinde sonsuz kümeler olabilir.

elemanı olması gerektiğini görmedik mi? Demek ki en küçük tümevarımsal kümenin varlığını kanıtlayıp $\mathbb{N}$'yi bu küme olarak tanımlamalıyız.

Ancak bu aşamaya kadar yazdığımız aksiyomlardan sonsuz bir kümenin varlığı kanıtlanamayacağından tümevarımsal bir kümenin varlığı da kanıtlanamaz. Bunun için yepyeni bir aksiyoma ihtiyacımız var.

Aksiyom 7.2. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. *Tümevarımsal bir küme vardır.*

Biçimsel dilde bu aksiyom şöyle yazılır:

$$\exists x\ (0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \longrightarrow Sy \in x)).$$

Şimdi tümevarımsal kümelerin kesişiminin tümevarımsal olduğunu kanıtlayalım, yeter ki kesişimini alacağımız kümeler topluluğu bir küme olsun.

Önsav 7.3. *x, elemanları tümevarımsal küme olan ve boş olmayan bir küme olsun. O zaman $\cap x$ tümevarımsal bir kümedir.*

Kanıt: Öncelikle, x bir küme olduğundan ve $x \neq \emptyset$ olduğundan, $\cap x$ topluluğunun bir küme olduğunu belirtelim (Teorem 4.2).

x'in her elemanı tümevarımsal olduğundan, 0, x'in her elemanının bir elemanıdır. Yani $0 \in \cap x$ olur. Demek ki $\cap x$ kümesi tümevarımsal küme tanımının ilk koşulunu sağlıyor.

Şimdi $\cap x$ kümesinin ikinci koşulu sağladığını gösterelim. $y \in \cap x$ olsun. Demek ki y, x'in her elemanının bir elemanı. x'in her elemanı tümevarımsal olduğundan, Sy de x'in her elemanının bir elemanıdır, yani $Sy \in \cap x$ olur. □

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin tanımını vermeye neredeyse hazırız, ama önce $\mathbb{N}$'nin ne olması gerektiği üzerine biraz daha düşünelim.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, her şeyden önce tümevarımsal bir küme olmalı. Çünkü 0 bir doğal sayı ve eğer y bir doğal sayıysa, $y+1$ anlamına gelecek olan Sy de bir doğal sayı olmalı.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ tümevarımsal bir küme olmalı ama hangi biri olmalı, çünkü çok tümevarımsal küme var, hatta ibadullah var[5]. Örneğin varlığını henüz kanıtlamadığımız (ama bu kitapta kanıtlayacağımız) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[0, \infty)$, $\frac{1}{2}\mathbb{N}$ kümeleri de tümevarımsal, ama doğal sayılardan çok daha fazla eleman içeriyorlar. $\mathbb{N}$ elbette en küçük tümevarımsal küme olmalı, daha doğrusu $\mathbb{N}$ tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olmalı, çünkü $\mathbb{N}$, **sadece ve**

[5]O kadar çok tümevarımsal küme vardır ki tüm tümevarımsal kümelerden oluşan bir küme yoktur. Örneğin, ikinci ciltte tanımlayacağımız her limit ordinal tümevarımsal bir kümedir ama Burali-Forti Paradoksu'na göre limit ordinaller bir küme oluşturmazlar, hatta ordinallerin tümü bir kümenin içinde eleman olarak bulunamaz.

sadece 0'dan ve 0'a S işlemini tekrar tekrar (ama sonlu kez, "sonlu" her ne demekse!) uygulayarak elde ettiğimiz elemanlardan oluşmalı. Yani

$$\mathbb{N} = \{0,\ S0,\ SS0,\ SSS0,\ \ldots\}$$

olmalı. (Bu yazılım her ne demekse! Hiçbir anlamı yok aslında ama sanırım biraz yalan konunun daha iyi anlaşılmasını sağlıyor.)

Bir önceki önsavdan ve kanıtından da anlaşılacağı üzere, en küçük tümevarımsal küme (yani $\mathbb{N}$ kümesi), eğer varsa, ki olduğunu kanıtlayacağız birazdan, tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi olmalı. Ancak tüm tümevarımsal kümeler topluluğu bir küme olmayabilir (değildir hatta), o zaman da tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi bir küme olmayabilir. Ama olacak! Bir sonraki teoremde bunu kanıtlayacağız.

Ne kadar açıklayıcı olduğunu pek kestiremediğim bu satırlardan sonra tüm tümevarımsal kümelerin kesişiminin bir küme olduğunu gösterelim (ve hemen ardından $\mathbb{N}$'nin tanımını verelim).

Teorem 7.4. *En küçük bir tümevarımsal küme vardır, yani tüm tümevarımsal kümelerin altkümesi olan tümevarımsal bir küme vardır.*

Kanıt: Tümevarımsal Küme Aksiyomu'ndan dolayı en az bir tümevarımsal küme olduğunu biliyoruz. Adına a diyeceğimiz tümevarımsal bir kümeyi sabitleyelim. a'nın tüm tümevarımsal altkümelerini kesiştireceğiz ve elde ettiğimiz nesne bir küme olacak ve üstelik en küçük tümevarımsal küme olacak.

$b = \wp(a)$ olsun. Altkümeler Kümesi Aksiyomu'ndan (Aksiyom 4.3) b'nin bir küme olduğunu biliyoruz. $\varphi(z)$ özelliği,

$$0 \in z \wedge \forall u\ (u \in z \to Su \in z)$$

olsun. Belli ki $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan her z kümesi tümevarımsaldır ve her tümevarımsal küme bu özelliği sağlar. Şimdi, Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan (Aksiyom 4.1)

$$\{z \in b : \varphi(z)\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu biliyoruz. Bu kümeye c adını verelim:

$$c = \{z \in b : \varphi(z)\} = \{z \subseteq a : z \text{ tümevarımsal}\}.$$

$a \in c$ olduğundan $c \neq \emptyset$. Şimdi,

$$\mathbb{N} = \cap c$$

tanımını yapalım. Önsav 4.2 sayesinde $\mathbb{N}$ bir kümedir. $\mathbb{N}$ kümesi, a'nın tüm tümevarımsal altkümelerinin kesişimi olarak tanımlandı, Önsav 7.3'e göre $\mathbb{N}$ tümevarımsal bir kümedir.

Şimdi $\mathbb{N}$'nin en küçük tümevarımsal küme olduğunu yani tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. t, herhangi bir tümevarımsal küme olsun. $\mathbb{N}$'nin t'nin bir altkümesi olduğunu kanıtlayacağız. Hem t hem de a tümevarımsal olduklarından, Önsav 7.3'e göre $a \cap t$ kümesi a'nın tümevarımsal bir altkümesidir. Demek ki $a \cap t$, c'nin bir elemanıdır, dolayısıyla $\mathbb{N}$'yi elde etmek için kesişimini aldığımız kümelerden biridir. Bundan da $\mathbb{N} \subseteq a \cap t$ çıkar. Öte yandan $a \cap t \subseteq t$. Demek ki $\mathbb{N} \subseteq t$. □

Teorem 7.4'ün İkinci Kanıtı: a tümvarımsal bir küme olsun. O zaman

$$\{z \in a : z, \text{ tümevarımsal her kümenin elemanı}\}$$

istediğimiz kesişimdir. Tek yapmamız gereken "z, tümevarımsal her kümenin elemanı" koşulunu dilimizde yazılmış bir formülle ifade etmek; bu da oldukça kolay. □

7.2 $(\mathbb{N}, S, 0)$ Yapısı ve Tümevarımla Kanıt

Yukarıda varlığı kanıtlanan kümeye ***doğal sayılar kümesi*** adını vereceğiz ve bu kümeyi $\mathbb{N}$ simgesiyle göstereceğiz. $\mathbb{N}$'nin elemanlarına ***doğal sayı*** denir. Şimdi artık "doğal sayı"nın matematiksel anlamını biliyoruz.

Dikkat ederseniz doğal sayıları teker teker değil, hepsini birden aynı anda tanımladık, yani doğal sayılar kümesini tanımladık. Daha önceki bölümlerdeki yöntemle bu yöntem arasında radikal bir fark var.

$\mathbb{N}$ tümevarımsal bir küme olduğundan, $0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Sn \in \mathbb{N}$. S'nin $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Daha biçimsel şekliyle,

$$G = \{(x, Sx) : x \in \mathbb{N}\}$$

ise, $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, G)$ üçlüsünün Altbölüm 5.2'te verilen tanımıyla bir fonksiyon olduğunu göstermek istiyoruz. Bu üçlünün bir fonksiyon olduğunu kanıtlamak için, G topluluğunun bir küme olduğunu ve G'nin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kartezyen çarpımının bir grafiği olduğunu kanıtlamak yeterli. Birincisi doğruysa ikincisi bariz olduğundan, G'nin bir küme olduğunu kanıtlamak yeterli. Bu topluluk aynen şu topluluğa eşittir:

$$\{\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists x\ (x \in \mathbb{N} \wedge \alpha = (x, Sx))\}.$$

Eğer "$\exists x\ (x \in \mathbb{N} \wedge \alpha = (x, Sx))$" dizisinin bir formül olduğuna ikna olmuşsanız (aksi hâlde Bölüm 12'u okuyun!), bu topluluğun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin bir altkümesi olduğu Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan çıkar.

$(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsünü tanımladık. 0, $\mathbb{N}$'nin bir elemanı ve S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon. Şimdi bu sistemin (ya da matematiksel yapının) bazı temel özelliklerini kanıtlayacağız.

Doğal sayılar kümesinin en önemli özelliği "tümevarımla kanıt"a imkân tanımasıdır, zaten tümevarımla kanıt mümkün olsun diye özellikle tanımlanmıştır.

Teorem 7.5. *Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi,*
i. $0 \in A$, *ve*
ii. *Her $x \in \mathbb{N}$ için $x \in A$ ise $Sx \in A$*
özelliklerini sağlıyorsa $A = \mathbb{N}$ olur.

Kanıt: Kanıt çok bariz, çünkü (i) ve (ii) koşulları A'nın tümevarımsal bir küme olduğunu söylüyor, ama $\mathbb{N}$ en küçük tümevarımsal küme olduğundan $A = \mathbb{N}$ elde ederiz. □

Teorem 7.6 (Tümevarımla Kanıt İlkesi I)**.** *$\varphi(x)$, herhangi bir formül olsun*[6]*. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \to \varphi(Sn))) \to \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Kanıt: $\varphi(0)$'ın doğru olduğunu ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$'nin de doğru olduğunu varsayalım. Amacımız her n doğal sayısı için $\varphi(n)$'nin doğruluğunu kanıtlamak.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$$

olsun, yani A, φ'yi sağlayan doğal sayılardan oluşsun. Varsayıma göre $0 \in A$. Gene varsayıma göre, $n \in A$ ise, $Sn \in A$. Teorem 7.5'ten istediğimiz çıkar. □

Teorem 7.6'yı kullanabilmek için, 0'ın φ özelliğini sağladığını göstermeye ***başlangıç adımı*** adı verilir. Eğer $x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı φ'yi sağlıyorsa, Sx'in de φ'yi sağladığını göstermeye de ***tümevarım adımı*** denir. Eğer bu iki kanıt yapılırsa, o zaman her n doğal sayısının φ formülünü sağladığı gösterilmiş olur. Okurun tümevarımla kanıt yapmada belli bir olgunluk seviyesine ulaştığını varsayıyoruz.

[6] Yani $\varphi(x)$, matematiğin $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\neg$ gibi mantıksal simgeleriyle, parantezlerle, x, y, z gibi değişkenlerle, $=$ ve $\in$ simgeleriyle yazılmış sonlu uzunlukta ve "anlamlı bir cümle". Tabii formüllerimizde S, $\subseteq$, $\wp$, $\cup$, $\mathbb{N}$ gibi kısaltmalar da kullanabiliriz. Ayrıca formüllerimizde sabit kümeler de kullanabiliriz (bunlara parametre denir). Mesela a bir kümeyse,

$$\forall y\ \exists z\ (y \neq \emptyset \longrightarrow (Sa = x \cap z \wedge x \in SSy))$$

bir formüldür. Bu formülde x serbest bir değişkendir (y ve z bağlı değişkenlerdir), dolayısıyla formülün doğruluğu ya da yanlışlığı ancak x spesifik bir küme olarak alındığında anlaşılabilir. $\varphi(x)$ gösterimi formülde tek serbest değişkenin x olduğunu söyler, diğer değişkenler (eğer varsa) $\exists$ ve $\forall$ gibi simgelerle bağlanmış demektir. Ama kümeler kuramına yeni başlayan okur, şimdilik, $\varphi(x)$'in x üzerine anlamlı bir Türkçe cümle olduğunu varsayabilir, mesela $\phi(x)$'in, "ilk x doğal sayının toplamı $x(x-1)/2$'dir" gibi bir cümle olduğunu varsayabilir.

Önsav 7.7. *S fonksiyonu, 0 dışında tüm değerleri alır, yani $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*

Kanıt: S fonksiyonu elbette 0 değerini alamaz, çünkü $0 = \emptyset$ ve Sn kümesi en azından n'yi içerdiğinden boşküme değil. Şimdi, 0 dışında her doğal sayının bir doğal sayının S'si olduğunu gösterelim. Teorem 7.6'daki $\varphi(n)$ formülünü

$$n = 0 \vee \exists m\ n = Sm$$

olarak alalım. 0 sayısı elbette $\varphi(n)$ formülünü sağlıyor. Şimdi $\varphi(n)$'nin sağlandığını varsayıp $\varphi(Sn)$'nin sağlandığını gösterelim. $\varphi(Sn)$ ne diyor?

$$Sn = 0 \vee \exists m\ Sn = Sm$$

diyor. Birinci kısım, yani $Sn = 0$ kısmı tabii ki doğru olamaz, $\varphi(Sn)$'nin doğru olması için formülün ikinci kısmı doğru olmalı. $Sn = Sm$ eşitliğini sağlayan bir m var mı? Tabii ki var, m'yi n'ye eşit almak yeterli. □

Tümevarımla Kanıt İlkesi (Teorem 7.6 ve 7.5) çok önemlidir. Bu ilkeyi kullanmadan doğal sayılarla ilgili herhangi bir şey söylemek neredeyse imkânsızdır, hemen her aşamada kullanacağız.

Şimdi $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısıyla ilgili önemli bir teorem kanıtlayalım.

Teorem 7.8. *S fonksiyonu birebirdir. Yani n ve m doğal sayıları için $Sn = Sm$ ise $n = m$ olur.*

Bu teorem aslında aynen Teorem 6.2, ama Teorem 6.2'u kanıtlamak için Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmıştık. Bu sefer Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmadan (ama kendimizi sadece doğal sayılara kısıtlayarak) aynı sonucu kanıtlayacağız.

Bu teoremi kanıtlamak için biraz uğraşacağız. (Temellendirme Aksiyomu kullanılmadan kanıtlanan) Teorem 6.3'i anımsatmakta yarar var: Eğer $Sn = Sm$ ise, ya $n = m$ ya da $n \in m \in n$ olur. Dolayısıyla teoremimizi kanıtlamamız için ikinci şıkkı, yani $n \in m \in n$ şıkkını elememiz gerekiyor. Temellendirme Aksiyomu bunu zaten yasaklıyor, bkz. Sonuç 6.6, ama biz Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmak istemiyoruz, mecbur kalsaydık kullanmaktan kaçınmazdık, ama ihtiyacımız yok. (İleride, Temellendirme Aksiyomu'nun doğal sayılar kümesi için zaten doğru olduğunu anlayacağız.)

Önce bir önsav kanıtlayalım.

Önsav 7.9. *Eğer $m \in n \in \mathbb{N}$ ise, $m \subseteq n$ olur*[7].

[7]Bu önsavın doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin özüyle yakından uzaktan hiçbir ilgisi yok, sadece tanımıyla ilgisi var. Eğer doğal sayıların ya da doğal sayılar kümesinin tanımını başka türlü verseydik bu önsav doğru olmayabilirdi ve istediklerimizi kanıtlamakta zorlanırdık, belki de hiç başaramazdık. Tanım deyip de geçmemek lazım...

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise, n boşkümedir ve boşkümenin her elemanı her özelliği sağlar, mesela boşkümenin her elemanı boşkümenin bir altkümesidir, aynen teoremin dediği gibi.

Şimdi önermeyi n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. $m \in Sn$ olsun. Ama $Sn = n \cup \{n\}$ olduğundan ya $m \in n$ ya da $m = n$ olmalı. Birinci durumda tümevarım varsayımından dolayı $m \subseteq n$ olur, ama $Sn = n \cup \{n\}$ olduğundan $n \subseteq Sn$ olur; buradan da $m \subseteq Sn$ çıkar. İkinci durumda ise tabii ki $m = n \subseteq Sn$ olur. □

Teorem 7.8'in Kanıtı: Eğer $Sn = Sm$ ve $n \neq m$ ise, Teorem 6.3'den dolayı, $n \in m \in n$ olur, demek ki bir önceki sonuca göre $n \subseteq m \subseteq n$ ve dolayısıyla $n = m$ olur. □

Notlar

7.1. $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ olsun. Önsav 7.7'ye göre bir $m \in \mathbb{N}$ için $Sm = n$ olur ve Teorem 7.6'ya göre bu m sayısı biriciktir. Her ne kadar doğal sayılarda çıkarma işlemini henüz tanımlamadıysak da, eğer istersek bu m sayısını $n - 1$ olarak gösterebiliriz.

7.2. Teorem 7.5 ile Teorem 7.6'nın bu hâli arasında bir fark yok aslında, biri diğerine denk. Nitekim Teorem 7.6'da $\varphi(x)$ formülünü $x \in A$ formülü olarak alırsak hemen Teorem 7.5'i elde ederiz. Teorem 7.6 varlığını iki nedene borçlu: Birincisi uygulamada daha fazla kullanılır. İkincisi ise Altbölüm 9.10'de, Teorem 7.6'yı $\in$ simgesini içermeyen ama $+$, $\times$ ve S simgelerini içeren daha kısıtlı bir dilde yazılmış $\varphi(x)$ formüllerine uygulayacağız.

7.3. Önsav 7.9 doğal sayıların "özü"yle ilgili değildir. Eğer doğal sayıları başka türlü tanımlasaydık bu önsav doğru olmayabilirdi. Ama Teorem 7.8 ya da Teorem 7.6 doğal sayıların özüyle ilgilidir, bu teoremlerin doğru olmadığı bir yapıya doğal sayılar yapısı adını vermek absürt olurdu, gerçeklikle ilgili tüm sezgilerimizle çelişirdi.

7.4. Böylece Teorem 7.6, Önsav 7.7 ve Teorem 7.8'in doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı bulmuş olduk. İleride $\mathbb{N}$'de toplama, çarpma ve sıralamayı tanımlayacağız ve başat özelliklerini kanıtlayacağız. Bölüm 11'de, adına Peano Aksiyomları denen, Teorem 7.6'yı kısmen, Önsav 7.7'yi ve Teorem 7.8'i de içeren bir "aksiyom" sistemini tanıtacağız.

7.5. Doğal sayılar kümesini, Teorem 7.6, Önsav 7.7 ve Teorem 7.8 doğru olacak biçimde tanımlamak Dedekind'in fikridir ama daha çok Peano'nun olarak bilinir. Fikri Dedekind'de bulduğunu Peano'nun kendisi ifade etmiştir.

Alıştırmalar

7.6. 0 dışında her doğal sayının 0'ı eleman olarak içerdiğini kanıtlayın.

7.7. Her n doğal sayısı için $n \notin n$ önermesini kanıtlayın.

7.8. Her n ve m doğal sayısı için $m \in n$ ise $m \subset n$ olduğunu kanıtlayın.

7.9. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \subset \mathbb{N}$ önermesini kanıtlayın.

7.10. $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ önermesini kanıtlayın.

8. Kümeler Kuramının Kullandığımız Aksiyomları

Daha önceki bölümlerde kümeler kuramının birkaç aksiyomunu verdik. O aksiyomları (metinde yer aldığı sırayla değil, bir başka sırayla) yazalım:

A1. Boşküme Aksiyomu. Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.

A2. Eşitlik Aksiyomu. Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.

A3. Tanımlı Altküme Aksiyomu. Eğer $\varphi(y)$ bir özellikse ve x bir kümeyse, x'in sadece ve sadece $\varphi(y)$ özelliğini sağlayan y elemanlarını eleman olarak içeren bir küme vardır.

A4. Bileşim Aksiyomu. Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.

A5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.

A6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. Eğer x bir kümeyse, eleman olarak sadece ve sadece x'in altkümelerini içeren bir küme vardır.

A7. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. Tümevarımsal bir küme vardır.

Bunlara ek olarak bir de bu kitapta hiç kullanmayacağımız şu aksiyom var:

A8. Temellendirme Aksiyomu. Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'te $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.

Temellendirme Aksiyomu'nun ardındaki düşünce şu: Bir kümeyi anlamak için kümenin elemanlarını anlamak zorundayız diye düşünürüz, ne de olsa her küme elemanları tarafından belirleniyor, dolayısıyla her kümenin elemenları kümeden daha basit olmalı, hepsi olmasa da x'in elemanlarından en az biri x'ten daha basit olmalı. Mesela eğer x kümesi kendisinin bir elemanı olsaydı o zaman x'i anlamak için x'i anlamak zorunda kalırdık... Buna benzer kısa döngüleri engellemek için Temellendirme Aksiyomu kabul edilir.

Bu aksiyomdan aslında Altbölüm 6'de bahsetmiştik. Hatta o aksiyomu kullanarak bir iki genel sonuç da kanıtlamıştık ama kanıtladığımız o sonuçların bize gerektiği kadarını Temelleme Aksiyomu'nu kabul etmeden kanıtlayabileceğiz. Temellendirme Aksiyomu daha çok kümeler kuramcıları tarafından, daha ele avuca sığan, daha anlaşılır, daha basit bir evrende yaşadığımızı var-

sayabilmek için kabul edilir; bizim ve kanıtlayacağımız teoremlerin böyle bir ihtiyacımız olmayacak.

Notlar

8.1. A3 tek bir aksiyom değildir, bir aksiyom ailesidir, her $\varphi(y)$ özelliği için bize ayrı bir aksiyom verir. Yani üçüncü aksiyom, aksiyomdan ziyade bir "aksiyom şeması"dır. A8'i isterseniz yok sayabilirsiniz, hiç kullanmayacağız. Standart matematikte de pek kullanılmaz. Uygulamalı matematikte, lisede filan, hatta üniversite eğitiminde bile hiç kulanılmaz.

8.2. İlk dört aksiyomla $\emptyset$'den başka bir kümenin olduğu kanıtlanamaz çünkü sadece boşkümeden oluşan $\{0\}$ evreni (yani sadece boşkümenin olduğu evren) ilk dört aksiyomu sağlar.

8.3. A7 olmadan sonsuz elemanlı bir kümenin olduğu kanıtlanamaz. Bunu Not 4.7'de görmüştük.

8.4. Kümeler kuramının başka aksiyomları da vardır. O aksiyomları ve ne işe yaradıklarını [Ne1]'de göreceğiz. Bu ders notlarının sonuna kadar A1-A7 aksiyomları bize yetecek.

8.5. A3 ve A7'den A1 çıkar.

8.6. Bir sonraki ciltte [Ne1] sunacağımız Yerleştirme Aksiyomu'ndan yararlanarak A5 kanıtlanabilir.

8.7. Bu aşamada $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \dots\}$ diye bir kümenin varlığının kanıtlanabileceğini hiç sanmıyorum. Bunun için ikinci ciltte bahsedeceğimiz aksiyomları beklemek lazım.

8.8. İlk 7 aksiyomu kümeler kuramının en temel, en "olmazsa olmaz" aksiyomları olarak kabul edebilirsiniz. Fizikten mühendisliğe, ekonomiden biyokimyaya kadar her türlü matematiksel uygulamada sadece bu aksiyomlara gerek duyulur. Standart temel matematikte de sadece bu aksiyomlardan yararlanılır, türev, integral gibi konuları işleyen basit analizde mesela. A8 ve ikinci ciltte açıklayacağımız aksiyomlar, tabiri caizse, matematikçilerin bir nevi şımarıklıklarıdır; ya da şöyle söyleyeyim: Bu aksiyomlar, matematikçilerin, çalıştıkları evrenin daha kolay anlaşılır, daha düzenli, daha evcil, daha istedikleri gibi olması için yarattıkları varsayımlardır; sonuç olarak ne kadar aksiyom, o kadar teorem! Son yıllarda, Rudolf von Bitter Rucker (matematikçi, bilgisayar bilimcisi ve bilimkurgu yazarı) tarafından ortaya artılan "cep kümeler kuramı"nda kümeler evreni çok çok basite indirgenmiştir.

8.9. **Ernst Zermelo (1871-1953).** Alman matematikçi. Aksiyomatik kümeler kuramının en önemli kurucularından biridir. Babası üniversitede öğretim üyesi olduğundan, akademik kariyere yönelmesi ailesi tarafından teşvik edilmiştir. Üniversitede matematik, fizik ve felsefe okumuştur. Akademik yaşamına analizle başlamış, uygulamalı matematiğe ve fiziğe yönelmiş, daha sonra o zamanlar matematiğin hiç kuşkusuz en önemli merkezi olan Göttingen'e geçince, Hilbert'in etkisiyle kümeler kuramına ilgi duymuş ve 1904'te her kümenin iyisıralanacağını kanıtlamıştır, yani herhangi bir X kümesinde öyle bir $<$ ikili ilişkisi vardır ki,

i. X'in herhangi iki farklı x ve y elemanı karşılaştırılabilir, yani ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$ olur, ama x kendisiyle karşılaştırılamaz, yani $x < x$ doğru değildir.

ii. Eğer $x, y, z \in X$ ise ve $x < y$ ve $y < z$ ise, o zaman $x < z$ olur.

iii. X'in boş olmayan her altkümesinin $<$ ilişkisi için bir en küçük elemanı vardır.

Zermelo, Skolem ve Fraenkel'in aksiyom sisteminde (ZFC'de) sonsuz sayıda aksiyom vardır. Montague 1961'de bu sistemin sonlu sayıda aksiyoma indirgenemeyeceğini kanıtlamıştır. Gödel, Bernays ve von Neumann'ın bulduğu aksiyom sistemi (GB) sonludur ve her iki sistemde de kümelerle ilgili aynı sonuçların kanıtlanacağı biliniyor. Ancak GB siteminde küme olmayan sınıflardan da söz edildiğinden, sonlu olmasına karşın, bir anlamda GB sistemi ZFC'den daha karmaşıktır ve daha kapsamlıdır diyebiliriz. Bir başka deyişle, ZFC sisteminin dili $\forall$, $\vee$, $=$ gibi standard matematik simgeleri dışında sadece

$\in$ simgesini kullanırken, GB sistemi $\in$ simgesi dışında, küme olmayan topluluklardan sözedebilmek için ikinci bir simge daha kullanmaktadır.

Aslında Hilbert daha çok Cantor'un şu sorusuyla ilgileniyordu: Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yle de, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yle de arasında eşleşme olmayan sonsuz bir gerçel sayı kümesi var mıdır? Hilbert bu soruyu o kadar önemli buluyordu ki, 1900'de Paris'te yaptığı ünlü konuşmada, bu soruyu sorular listesinin en başına almıştı. Bu soruya yaklaşabilmek için de, daha kolay bir soru olarak addettiği, Zermelo'ya iyisıralanma sorusunu sormuştu. Hilbert haklıydı, Cantor'un sorusu çok daha zordur. Kurt Gödel 1940'ta Cantor'un sorusunun olumsuz yanıtı olduğunu varsaymanın (eğer matematik çelişkisizse) matematiği çelişkiye götürmeyeceğini kanıtladı. 1963'te Paul Cohen, Cantor'un sorusunun olumlu yanıtı olduğunu varsaymanın da matematiği çelişkiye götürmeyeceğini kanıtladı. Dolayısıyla Cantor'un sorusu ne olumlu ne de olumsuz olarak kanıtlanabilir; kümeler kuramının kimi evreninde (modelinde) doğru, kimindeyse yanlıştır.

Zermelo'nun kanıtının bugün Seçim Aksiyomu [bkz. SKK] diye adlandırılan bir aksiyoma dayanması matematik dünyasında hiç hoş karşılanmadı. 1908'de yoğun eleştirilere yanıt olarak aynı teoremin bir başka kanıtını yayımladığı makalesinde Zermelo, Seçim Aksiyomu'nu daha incelikli bir biçimde kullanarak kanıtını daha kabul edilir bir biçimde sunmuştu.

Zermelo, Russell paradoksuna benzer paradokslar keşfetmesiyle, kümeler kuramını aksiyomatik olarak inşa etmek istedi. Uzun uğraşlarına karşın bulduğu sistemin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamadı (bunu kanıtlamanın imkânsız olduğunu bugün Gödel sayesinde biliyoruz), gene de bulgularını 1908'de yayımladı. Zermelo'nun aksiyomları, bugün kabul edilen kümeler kuramı aksiyomlarının çoğunluğunu teşkil eder. Skolem ve Fraenkel 1922'de bu aksiyomlara ek yaparak bugün matematikçilerin çoğunluğu tarafından kabul edilen kümeler kuramını kurmuşlardır.

Zermelo 1935'te Hitler rejimine tepki olarak akademik yaşamdan çekilmiştir. Savaştan sonra tekrar profesörlüğe getirilmesini istemiş ve kendisine 1946'da onursal profesör unvanı verilmiştir.

9. Doğal Sayılarda Toplama, Çarpma ve Sıralama

Geçen bölümde, Teorem 7.6, Önsav 7.7 ve Teorem 7.8'in doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ matematiksel yapısının varlığını kanıtlamıştık. Anımsayalım:

Teorem 7.6 [Tümevarımla Kanıt İlkesi I] *$\varphi(x)$, kümeler kuramının herhangi bir formülü olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n \ (\varphi(n) \to \varphi(Sn))) \to \forall n \, \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Önsav 7.7 *S fonksiyonu, 0 dışında tüm değerleri alır, yani $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ olur.*

Teorem 7.8 *S fonksiyonu birebirdir. Yani n ve m doğal sayıları için $Sn = Sm$ ise $n = m$ olur.*

"Doğal sayı sistemi" ya da yapısı, yukarıda sıralanan üç özelliği sağlayan, ama bunun dışında (yakında söz edeceğimiz) başka özellikleri de sağlayan matematiksel bir yapı olarak tanımlanır. Bu bölümde $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısına toplamayı $(+)$, çarpmayı $(\times)$ ve sıralamayı $(\leq)$ ekleyip, bunların hepimizin orta öğretim yıllarından bildiği eşitlikleri ve ilişkileri sağladığını göstereceğiz[1].

9.1 Toplama

Toplamayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,

$$n + 0 = n$$

[1] Önemli ve derin bir nokta: Toplamayı, çarpmayı ya da sıralamayı $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısında tanımlayamayız; illa ki kümeler kuramına başvumamız lazım. Yeri geldiğinde buna biraz daha açıklama getirmeye çalışacağım. Ama doğal sayılarda sıralama ilişkisi toplama işlemi kullanarak tanımlanabilir: Doğal sayılarda $x < y$ önermesinin geçerli olması için, $x + z = y$ eşitliğinin bir $z \neq 0$ doğal sayısı için sağlanması yeter ve gerek koşuldur.

ve $n + (m + 1) = (n + m) + 1$, yani

$$n + Sm = S(n + m)$$

eşitliklerini kullanacağız[2].

Tanım Denemesi. n ve p iki doğal sayı olsun. Bu iki sayının toplamını gene bir doğal sayı olarak tanımlayacağız. Tanımlayacağımız toplamı $n + p$ olarak yazacağız. Eğer $p = 0$ ise $n+p$ doğal sayısı n olarak tanımlanır. Eğer $p \neq 0$ ise, Önsav 7.7 ve Teorem 7.8'den dolayı bir ve bir tek $m \in \mathbb{N}$ için, $p = Sm$ eşitliği doğrudur; bu durumda $n+p$ toplamı $S(n+m)$ doğal sayısı olarak tanımlanır. Bir başka deyişle toplamanın tanımı şöyle olmalıdır:

$$\begin{aligned} n + 0 &= n, \\ n + Sm &= S(n + m). \end{aligned}$$

Bu tanım iki soruna gebe.

Çözümü Kolay Bir Sorun. Altbölüm 6'de ortaya koyduğumuz sorun burada da belirir: Eğer $Sm = Sm_1$ ise, $n + Sm = n + Sm_1$ eşitliği geçerli midir? Aksi halde vermeye çalıştığımız toplamanın tanımı geçersizdir. Bu sorunu çözmek o kadar zor değildir, sorunu çözmek için Temellendirme Aksiyomu'na bile gerek yoktur. Nitekim, Teorem 7.8'den dolayı $Sm = Sm_1$ ise $m = m_1$ olur ve dolayısıyla

$$n + Sm = S(n + m) = S(n + m_1) = n + Sm_1$$

olur.

Daha Ciddi Bir Sorun. Tanımda genellikle gözden kaçan çok daha ciddi bir sorun var: Yukarıdaki tanımdan (daha doğrusu tanım denemesinden), her n ve m sayısı için

$$n + m$$

diye bir sayısının gerçekten tanımlandığı çıkmaz. Eğer $m = 0$ ise, $n + m$ toplamının n'ye eşit olması gerektiğini biliyoruz, burada bir sorun yok. Ama eğer $m \neq 0$ ise, önce, m'yi bir m' doğal sayısı için Sm' olarak yazmak gerekir:

$$n + m = n + Sm' = S(n + m').$$

(Önsav 7.7'ye göre öyle bir m' var.) Şimdi $n + m'$ sayısını hesaplamak lazım. Eğer $m' = 0$ ise sorun yok: $n + m' = n + 0 = n$. Ancak eğer $m' \neq 0$ ise, $n + m'$ sayısını hesaplayabilmek için, $m' = Sm''$ eşitliğini sağlayan bir m'' doğal sayısı bulunmalı. Öyle bir m'' sayısının olduğunu biliyoruz. Bulalım öyle bir m'' sayısı. Şimdi,

$$n + m' = n + Sm'' = S(n + m'')$$

[2]Son eşitliğin n ve m cinsinden simetrik olmadığını farkedelim, önemlidir.

eşitliklerinden, $n + m''$ sayısını hesaplamak gerektiği anlaşılır. Eğer $m'' = 0$ ise gene bir sorun yok, ama eğer $m'' \neq 0$ ise, $n + m''$ sayısını hesaplamak için $m'' = Sm'''$ eşitliğini sağlayan bir m''' sayısı bulmalı. Şimdi,

$$n + m'' = n + Sm''' = S(n + m''')$$

çıkar. $n + m'''$ toplamını hesaplamalıyız. Eğer $m'' = 0$ ise gene bir sorun yok, ama eğer $m'' \neq 0$ ise... Bu böylece devam eder. Ta ki 0'a rastlayana dek... Eğer rastlarsak tabii...

"Sonlu bir zaman sonra" 0'a rastlasak $n + m$ toplamını tanımlayabileceğiz **belki** ama "sonlu bir zaman sonra" deyimine bir anlam vermek ya da yorumlamak için kümeler kuramını kullanmalıyız.

Yukarıda verdiğimiz tanım denemesinin $n + m$ diye bir sayının varlığını tanımladığını m üzerine tümevarımla kanıtlanabileceği düşünülebilir. Ama **ancak** matematiksel dille yazılabilen formüllerin bir kanıtı olabilir, matematiksel olmayan bir önermenin kanıtı olamaz ve dilimizde + diye bir simge olmadığından "$n + m$ diye bir sayı vardır" cümlesi matematiksel değildir. Hatta tam tersine, öyle bir simgeyi yaratabileceğimizi kanıtlamaya çalışıyoruz. Benzer şekilde, "$n + m$ ifadesi tanımlıdır" diye bir ifade de yoktur matematikte. Ayrıca yukarıda tanımlanmaya çalışılan + "şeyi"nin ne olduğu belirsizdir. Bir fonksiyonsa, fonksiyon olarak tanımlanmalı. Zaten öyle de yapacağız. Bu bölümde $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden ve yukarıdaki iki özelliği sağlayan bir $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayacağız.

Bu ve bu tür ince sorunların farkında olmadan da matematik yapılır, yapılmaz değil, yapılıyor da, ama matematiğin bu ince noktalarından haberdar olmak insana bir başka keyif verir, bir başka boyut katar, hayat kalitesini artırır.

Yukarıdaki başarısız tanım denemesi, aslında doğal sayıları teker teker toplamaya çalışıyor, önce 0 ile toplama, sonra 1 ile toplama, ardından 2 ile toplama... Tüm doğal sayılara 5 ekleme işlemi yukarıdaki tanımla yapılabilir, yani $n \mapsto n + 5$ işlemi $n \mapsto S(S(S(S(Sm))))$ ile tanımlanabilir. Ama **her** m doğal sayısı için $n \mapsto n + m$ işlemini bu yöntemle tanımlayamayız. Birazdan, **tüm** doğal sayıları toplamayı, tek bir hareketle, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir t fonksiyonu olarak tanımlayacağız. Böylece her n ve m doğal sayısı için $n + m$ doğal sayısını t fonksiyonunun (n, m) ikilisinde aldığı değer olarak tanımlanacak. Yani $n + m$ toplamı $t(n, m)$ olarak tanımlanacak.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon, aslında $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$, yani $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir T grafiği için $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \mathbb{N}, T)$ üçlüsüdür. Amacımız (henüz tanımlanmamış) toplama fonksiyonunun T grafiğini bulmak ve böylece toplamayı tanımlamak.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin aşağıdaki T1 ve T2 özelliklerini sağlayan bir X altkümesine ***toplamsal*** diyelim.

T1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in X$,
T2. Eğer $(n, m, p) \in X$ ise, o zaman $(n, Sm, Sp) \in X$.

Eğer toplama fonksiyonunun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon olmasını istiyorsak, bu fonksiyonun grafiği elbette toplamsal bir küme olacaktır.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi toplamsaldır elbette. Demek ki en azından bir küme toplamsal. En küçüğünü bulacağız. Göreceğimiz üzere en küçük toplamsal küme bir fonksiyonun grafiği olacak ve bu fonksiyona toplama adını vereceğiz.

Alıştırmalar

9.1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(2, 0, 1)\}$ kümesinin toplamsal olduğunu kanıtlayın.
9.2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(2, 1, 4)\}$ kümesinin toplamsal olmadığını kanıtlayın.
9.3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(2, 0, 3), (2, 1, 4)\}$ kümesinin toplamsal olduğunu kanıtlayın.
9.4. $(1, 1, 3)$ üçlüsünü içermeyen en büyük toplamsal kümenin varlığını kanıtlayın ve bu kümeyi bulun.
9.5. Her toplamsal kümenin $(2, 3, 5)$ üçlüsünü içermek zorunda olduğunu kanıtlayın.

T1, $n + 0 = n$ demek istiyor ama başka bir m için $(n, 0, m) \in X$ ise bu isteği tam olarak yerine gelemiyor. Yani eğer $n \in \mathbb{N}$ verilmişse, $(n, 0, n) \in X$ olmalı ama başka bir $m \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, m) \in X$ olmamalı, ki $n+0$ toplamı hem n'ye hem de m'ye eşit olmasın.

Aynı şekilde T2, $n + m = p$ ise, $n + Sm = Sp$ eşitliğini istiyorum diyor, ama Sp'den farklı q için $(n, Sm, q) \in X$ oluyorsa bu isteğini pek gerçekleştiremiyor. Kısaca söylemek gerekirse, bizim istediğimiz X toplamsal kümesinde her n, $m \in \mathbb{N}$ için $(n, m, p) \in X$ özelliğini sağlayan bir p olmalı ama **tek bir** p olmalı.

Eğer ilkokuldan beri sezgisel olarak bildiğimiz toplama işlemini $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman bu fonksiyonun grafiği, yani

$$\{(n, m, n + m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi toplamsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi bu grafik en küçük toplamsal küme olmalı (yani her toplamsal kümenin altkümesi olmalı).

Toplamsal kümelerin kesişimi toplamsal olduğundan (bunun kolay kanıtını bir sonraki teoremde göreceğiz), tüm toplamsal kümelerin kesişimi de toplamsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük toplamsal kümedir. En küçük toplamsal kümeye T diyelim.

Teorem 9.1. *Tüm toplamsal kümelerin kesişimi gene toplamsal bir kümedir. Bu en küçük toplamsal kümeye T diyelim. T, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir grafiğidir, yani her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in T$ ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır.*

Ayrıca, eğer bu biricik p'ye $n+m$ adını verirsek, her n ve m için,

$$n+0 = n$$
$$n+Sm = S(n+m)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: T, tüm toplamsal kümelerin kesişimi olsun.

a. T Toplamsal Bir Kümedir: $n \in \mathbb{N}$ olsun. Tanıma göre, $(n, 0, n)$ tüm toplamsal kümelerde olduğundan, tüm toplamsal kümelerin kesişimdedir de, yani T'dedir. Dolayısıyla T, T1'i sağlıyor. Şimdi $(n, m, p) \in T$ olsun. Demek ki (n, m, p) tüm toplamsal kümelerde. Demek ki (n, Sm, Sp) de tüm toplamsal kümelerde. Dolayısıyla $(n, Sm, Sp) \in T$. Demek ki T kümesi T2'yi de sağlıyor.

Şimdi T'nin bir fonksiyonun grafiği olduğunu gösterelim. Yani her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in T$ önermesini sağlayan bir ve bir tane $p \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim. Önce p'nin varlığını, sonra da biricikliğini gösterelim.

b. Varlığın Kanıtı: Daha genel olan şu önermeyi kanıtlayacağız: *Eğer X bir toplamsal kümeyse (mesela T ise), o zaman her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in X$ ilişkisini sağlayan bir $p \in \mathbb{N}$ vardır.*

X rastgele bir toplamsal küme olsun. Varlığı m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Kanıtlayacağımız $\varphi(m)$ önermesi şu:

$$\forall n \, \exists p \, (n, m, p) \in X.$$

Başlangıç Adımı. $m = 0$ olsun. n herhangi bir doğal sayı ise, $(n, 0, n) \in X$ önermesinin doğruluğunu biliyoruz. Demek ki $p = n$ alabiliriz. Bundan da $\varphi(0)$'ın doğruluğu çıkar.

Tümevarım Adımı. Şimdi $m \in \mathbb{N}$ olsun ve $\varphi(m)$ önermesini doğru varsayıp $\varphi(Sm)$ önermesini kanıtlayalım. $n \in \mathbb{N}$ sabitlensin. $\varphi(m)$ önermesini varsaydığımızdan, öyle bir p vardır ki,

$$(n, m, p) \in X.$$

olur. Ama X toplamsal olduğundan, o zaman

$$(n, Sm, Sp) \in X$$

önermesi de sağlanır. $\varphi(Sm)$ önermesi kanıtlanmıştır.

Demek ki her n ve her m için $(n, m, p) \in X$ içindeliğini sağlayan bir p vardır.

c. Biricikliğin Kanıtı: Şimdi, verilmiş n ve m doğal sayıları için,

$$(n, m, p) \in T$$

içindeliğini sağlayan p doğal sayısının biricikliğini kanıtlayalım. Biricikliği de m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Tümevarımla kanıtlayacağımız $\psi(m)$ önermesi şu:

$$\forall n\, \forall p\, \forall p'\, (((n, m, p) \in T \wedge (n, m, p') \in T) \to p = p').$$

Başlangıç Adımı. Önce $\psi(0)$ önermesini kanıtlayalım. $n_0 \in \mathbb{N}$ rastgele bir doğal sayı olsun. T toplamsal olduğundan, $(n_0, 0, n_0)$ üçlüsünün T'de olduğunu biliyoruz. Bir de ayrıca, bir çelişki elde etmek umudu ve amacıyla, $p \neq n_0$ için $(n_0, 0, p)$ üçlüsünün de T'de olduğunu varsayalım.

$$T' = T \setminus \{(n_0, 0, p)\}$$

tanımını yapalım. $T' \subset T$ olduğundan, T' toplamsal bir küme olmamalı; ama öyle olduğunu kanıtlayacağız!

Bir $n \in \mathbb{N}$ sabitleyelim. Elbette $(n, 0, n) \in T$. Ama $p \neq n_0$ olduğundan, $(n, 0, n) \neq (n_0, 0, p)$, yani

$$(n, 0, n) \in T \setminus \{(n_0, 0, p)\} = T'$$

olmalı. Demek ki T' kümesi T1 özelliğini sağlıyor.

Şimdi (n, m, p) üçlüsünün T' kümesinde olduğunu varsayalım. $T' \subseteq T$ olduğundan, $(n, m, p) \in T$ olur. T toplamsal olduğundan, $(n, Sm, Sp) \in T$ olur. Ama $Sm \neq 0$ olduğundan (Önsav 7.7),

$$(n, Sm, Sp) \neq (n_0, 0, p).$$

Demek ki,

$$(n, Sm, Sp) \in T \setminus \{(n_0, 0, p)\} = T'.$$

T2 özelliğinin de T' için doğru olduğunu kanıtladık. Yani T' toplamsal bir küme. Bir çelişki. $\psi(0)$ önermesi kanıtlanmış oldu.

Tümevarım Adımı. $m_0 \in \mathbb{N}$ olsun ve $\psi(m_0)$ önermesini varsayıp $\psi(Sm_0)$ önermesini kanıtlayalım. n_0 rastgele bir doğal sayı olsun. Kanıtın birinci kısmından dolayı, bir p_0 doğal sayısı için

$$(n_0, m_0, p_0) \in T$$

önermesi doğrudur. T toplamsal olduğundan,

$$(n_0, Sm_0, Sp_0) \in T$$

önermesi de doğrudur. Bir çelişki elde etmek amacıyla bir

$$(\star) \qquad p_1 \neq Sp_0$$

için,

$$(n_0, Sm_0, p_1) \in T$$

önermesini varsayalım.

$$T' = T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\}$$

olsun. $T' \subset T$ olduğundan, T' toplamsal bir küme olmamalı; ama öyle olduğunu kanıtlayacağız!

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in T$. Ama $Sm_0 \neq 0$ olduğundan, $(n, 0, n) \neq (n_0, Sm_0, p_1)$, yani $(n, 0, n) \in T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\} = T'$ olmalı. Demek ki T' kümesi T1 özelliğini sağlıyor.

Şimdi (n, m, p) üçlüsünün T' kümesinde olduğunu varsayalım. $T' \subseteq T$ olduğundan, $(n, m, p) \in T$ olur. T toplamsal olduğundan,

$$(n, Sm, Sp) \in T$$

olur.

Bir an için $(n, Sm, Sp) = (n_0, Sm_0, p_1)$ eşitliğini varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} n &= n_0, \\ Sm &= Sm_0, \\ Sp &= p_1 \end{aligned}$$

olur. İkinci eşitlik, Teorem 7.8'den dolayı $m = m_0$ eşitliğini verir. Demek ki

$$(n_0, m_0, p) = (n, m, p) \in T.$$

Ama aynı zamanda,

$$(n_0, m_0, p_0) \in T.$$

$\psi(m_0)$ önermesini doğru varsaydığımızdan, bundan,

$$p = p_0$$

ve dolayısıyla

$$p_1 = Sp = Sp_0$$

çıkar. $(\star)$ ile çeliştik. Demek ki

$$(n, Sm, Sp) \neq (n_0, Sm_0, p_1).$$

Yani

$$(n, Sm, Sp) \in T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\} = T'$$

olur.

T' kümesinin toplamsal olduğunu kanıtladık. Bu da elde etmek istediğimiz nihai çelişkidir.

d. Son olarak, teoremin en sonundaki iki eşitliğin doğru olduğunu kanıtlayalım.

$(n, 0, n) \in T$ olduğundan, teoremin önermesindeki tanıma göre, $n + 0 = n$ olmalı.

Gene tanıma göre, $(n, m, n + m) \in T$ önermesinin doğruluğunu biliyoruz. T toplamsal olduğundan, bundan $(n, Sm, n + Sm) \in T$ çıkar. Yani $n + Sm = S(n + m)$. □

Kanıt belki uzun ve meşakkatli ama her şey yerli yerine oturdu. Bundan böyle doğal sayılardan ve doğal sayıların toplamından matematiksel anlamda sözedebiliriz. Toplamanın karakteristik özellikleri şunlar: Her n ve m doğal sayısı için,

$$n + 0 = n \tag{1}$$

ve

$$n + Sm = S(n + m). \tag{2}$$

Bundan sonra doğal sayılarda toplamanın sadece bu iki özelliğini kullanacağız, tanımını unutabilirsiniz!

9.2 Toplamanın Özellikleri

0'ın toplamanın sağdan etkisiz eleman olduğunu biliyoruz: $n + 0 = n$. Şimdi 0'ın soldan da etkisiz eleman olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 9.2 (Etkisiz Eleman)**.** *Her $m \in \mathbb{N}$ için, $0 + m = m$ olur.*

Kanıt: Önsavdaki eşitliği m üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Başlangıç Adımı. Önsavı $m = 0$ için kanıtlamalıyız, yani $0 + 0 = 0$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama bunun doğru olduğunu tanımdan biliyoruz. (Yukarıdaki (1) eşitliğinde $n = 0$ alın.)

Tümevarım Adımı. Önsavın m için doğru olduğunu varsayıp, yani

$$0 + m = m$$

eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), teoremin Sm için doğru olduğunu, yani $0 + Sm = Sm$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Tek bir satırla kanıtlayabiliriz bunu:

$$0 + Sm = S(0 + m) = Sm.$$

Birinci eşitlik (2)'den, ikinci eşitlik tümevarım varsayımından ileri geliyor. □

Bu sonuç (her $m \in \mathbb{N}$) için $0 + m = m + 0$ eşitliğini veriyor. Birazdan, değişme özelliği adı verilen (her $n, m \in \mathbb{N}$) için $n + m = m + n$ eşitliğini kanıtlayacağız.

1'in $S0$ olarak tanımlandığını anımsatırız. Teorem 9.1'deki eşitliklerden dolayı, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$Sn = S(n + 0) = n + S0 = n + 1,$$

yani Sn, beklendiği üzere, $n + 1$ sayısına eşit:

$$Sn = n + 1.$$

İlk bakışta gereksiz görülebilecek aşağıdaki önsavın yegâne işlevi bir sonraki teoremin kanıtında kullanılmak olacak! Masa başında önce Teorem 9.4'ü kanıtlamaya çalıştık. Tıkandığımız yerde Önsav 9.3'e ihtiyacımız olduğunu gördük. Tabii kitabı yazarken, akademik dürtülerden dolayı düşünme sürecini tersine çevirdik. Eğer okur önce Teorem 9.4'ü kanıtlamaya çalışırsa, Önsav 9.3'ün gerekliliğini görecektir.

Önsav 9.3. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $m + Sn = Sm + n$.*

Kanıt: n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise,

$$m + Sn = m + S0 = S(m + 0) = Sm = Sm + 0 = Sm + n$$

ve bu durumda kanıt tamam.

Şimdi, her m için, $m + Sn = Sm + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), her m için,

$$m + SSn = Sm + Sn$$

eşitliğini kanıtlayalım:

$$m + SSn = S(m + Sn) = S(Sm + n) = Sm + Sn.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Artık toplamanın değişme özelliğini kanıtlayabiliriz.

Teorem 9.4 (Değişme Özelliği)**.** *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n + m = m + n$.*

Kanıt: m üzerinden tümevarım yapacağız.

Birinci Adım: Eğer $m = 0$ ise, (1)'den ve Önsav 9.2'den, $n + 0 = n = 0 + n$ çıkar.

Tümevarım Adımı: Önsavın m için doğru olduğunu, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $n + m = m + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), önsavı Sm için kanıtlayacağız, yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n + Sm = Sm + n$$

eşitliğini kanıtlayacağız:

$$n + Sm = S(n + m) = S(m + n) = m + Sn = Sm + n.$$

Bu eşitlik silsilesinde, soldan sağa sırasıyla, (2)'yi, tümevarım varsayımını, tekrar (2)'yi ve Önsav 9.3'ü kullandık. □

Notlar

9.6. $n + m = m + n$ eşitliğini elbette tümevarımla kanıtlayacağız ama n üzerine mi yoksa m üzerine mi tümevarım yapacağız? $m + n = n + m$ eşitliği n'ye ve m'ye göre simetrik olduğundan, tümevarımı n ya da m üzerine yapmak eşdeğer olmalı, yani birini seçerek karşılaşılan zorluklara diğerini seçerek de karşılaşmalıyız. Yukarıdaki kanıtta m üzerine tümevarım yapmayı seçtik. Ama felsefi olarak bu yöntemin başarıya ulaşmaması lazım, n'den nasıl vazgeçebiliriz ki? Nitekim m üzerine tümevarım yetmedi ve kanıtın sonunda Önsav 9.3'ü kullandık. Bu arada Önsav 9.3'ü n üzerine tümevarımla kanıtladığımıza dikkatinizi çekerim, o önsavı m üzerine tümevarımla kanıtlayamazdık. Yani n kendini hatırlattı, ben de varım dedi, illa ki kendini göstermesi gerekiyordu.

Teorem 9.5 (Birleşme Özelliği)**.** *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

$$(n + m) + p = n + (m + p).$$

Kanıt: p üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız[3].

Başlangıç Adımı. Eğer $p = 0$ ise,

$$(n + m) + p = (n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0) = n + (m + p)$$

ve bu durumda kanıt tamam.

Tümevarım Adımı. Kanıtı doğrudan veriyoruz:

$$\begin{aligned}(n + m) + Sp &= S((n + m) + p) = S(n + (m + p)) \\ &= n + S(m + p) = n + (m + Sp).\end{aligned}$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

[3] n ya da m üzerine tümevarımla kanıtlayamazsınız. Toplamanın tanımında $n + m$ ifadesinin m'sine ayrıcalık tanıdık.

Teorem 9.5'e göre, toplama yaparken parantez koymak gereksizdir.

$$(n+m)+p \text{ ve } n+(m+p)$$

yerine $n+m+p$ yazabiliriz. Aynı şey dört ya da daha fazla doğal sayı toplarken de geçerlidir. (Bu son dediğimiz tümevarımla kanıtlanır ve kanıt sanıldığı kadar kolay değildir. Bkz Bourbaki.)

Önsav 9.6 (Sadeleşme, birinci adım)**.** *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, eğer $n+m=n$ ise $m=0$'dır.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n=0$ ise Önsav 9.2 istediğimizi verir. Şimdi önermenin n için (her m için) doğru olduğunu varsayalım. Diyelim $Sn+m=Sn$. O zaman, toplamanın değişme özelliğine göre,

$$Sn = Sn+m = m+Sn = S(m+n) = S(n+m)$$

olur. Teorem 7.8'den dolayı

$$n = n+m$$

olur ve tümevarım varsayımından $m=0$ sonucuna varırız. □

Teorem 9.7 (Sadeleşme)**.** *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, eğer $n+m=n+p$ ise $m=p$ olur.*

Kanıt: p üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $p=0$ ise, istediğimiz Önsav 9.6'dan çıkar. Şimdi teoremin p için doğru olduğunu varsayalım. Diyelim

$$n+m = n+Sp.$$

Eğer $m=0$ ise, Önsav 9.6'dan dolayı $Sp=0$ olur, ki bu mümkün değildir. Demek ki $m \neq 0$. Dolayısıyla bir $m' \in \mathbb{N}$ için $Sm'=m$ olur. Bundan,

$$S(n+m') = n+Sm' = n+m = n+Sp = S(n+p)$$

çıkar. Bundan ve Teorem 7.8'den $n+m'=n+p$ eşitliği bulunur. Tümevarım varsayımından dolayı $m'=p$ elde ederiz. Yani $m=Sm'=Sp$. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

9.7. n ve m doğal sayıları için $n+m=0$ ise $n=m=0$ eşitliklerini kanıtlayın.

9.8. Her doğal sayısının bir n doğal sayısı için ya $n+n$ biçiminde ya da $n+n+1$ biçiminde yazılabileceğini ama iki biçimde birden (farklı n'ler olabilir) yazılamayacağını kanıtlayın.

9.9. Her n ve m doğal sayıları için $n+p=m$ ya da $m+p=n$ eşitliğini sağlayan bir p doğal sayısının varlığını kanıtlayın. Her iki eşitlik birden (belki ayrı p'ler için) ne zaman sağlanır?

9.3 Çarpma

Çarpmayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,

$$n \times 0 = 0$$

ve

$$n \times (m + 1) = (n \times m) + n$$

eşitliklerini kullanacağız. (Toplamayı daha önceden tanımladığımız için çarpmanın tanımında toplamayı kullanabiliriz.)

Tanım Denemesi. n ve m iki doğal sayı olsun. Eğer $m = 0$ ise $n \times m$ doğal sayısı 0 olarak tanımlanır. Eğer $m \neq 0$ ise, o zaman, bir ve bir tek $m' \in \mathbb{N}$ için, $m = Sm'$ eşitliği doğrudur ve bu durumda $n \times m$ sayısı $n \times m' + n$ olarak tanımlanır[4]. Bir başka deyişle çarpmanın tanımı şöyle olmalıdır:

$$\begin{aligned} n \times 0 &= 0 \\ n \times Sm &= (n \times m) + n. \end{aligned}$$

Toplamada da olduğu gibi, çarpmanın tanımını böyle yaparsak önemli bir matematiksel hata yapmış oluruz. Bu tanımla $n \times m$ çarpımının her zaman var olduğunu kanıtlayamayız.

Bu sorun'un altından şöyle kalkılır: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir X altkümesine ***çarpımsal*** diyelim.

Ç1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, 0) \in X$,
Ç2. Eğer $(n, m, p) \in X$ ise, o zaman $(n, Sm, p + n) \in X$.

Örneğin $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi çarpımsaldır. Demek ki en az bir çarpımsal küme var.

Eğer çarpmayı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman çarpmanın grafiği yani

$$\{(n, m, n \times m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi çarpımsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi çarpmanın grafiği en küçük çarpımsal küme olmalı (yani her çarpımsal kümenin altkümesi olmalı). Dolayısıyla çarpma işleminin tanımını, çarpma fonksiyonunun grafiğini (en küçük çarpımsal küme olarak) tanımlayarak yapacağız.

Çarpımsal kümelerin kesişimi gene çarpımsal olduğundan (bunun kanıtı kolay), tüm çarpımsal kümelerin kesişimi de çarpımsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük çarpımsal kümedir. En küçük çarpımsal kümeye P diyelim.

[4] $n \times m' + n$, alışageldiği üzere $(n \times m') + n$ anlamına gelmektedir.

Teorem 9.8. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in P$ ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır. Ayrıca, eğer bu p'ye $n \times m$ adını verirsek, her n ve m için,*

$$n \times 0 = 0 \text{ ve } n \times Sm = (n \times m) + n$$

olur.

Kanıt: Kanıtı okura alıştırma olarak bırakıyoruz, aynen Teorem 9.1 gibi kanıtlanır. İleride daha genel bir sonuç olan Teorem 10.1'i kanıtlayacağız. □

Bilindiği üzere çoğu zaman $n \times m$ yerine $n \cdot m$, hatta daha ziyade çok daha basit olarak nm yazılır.

9.4 Çarpmanın Özellikleri

Şimdi çarpmayla ilgili savlarımızı kanıtlayabiliriz. Bunun için toplamayı ve toplamanın özelliklerini kullanacağız elbet. Toplamanın özelliklerini Altbölüm 9.2'de kanıtladık. Bunları kullanırken artık referans vermeyeceğiz.

Önsav 9.9 (Yutan Eleman)**.** *Her $m \in \mathbb{N}$ için, $0 \times m = 0$.*

Kanıt: m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Başlangıç adımı bariz. Tümevarım adımı:

$$0 \times Sm = (0 \times m) + 0 = 0 + 0 = 0.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Önsav 9.10 (Etkisiz Eleman)**.** *Her $m \in \mathbb{N}$ için, $1 \times m = m = m \times 1$.*

Kanıt: İkinci eşitlik doğrudan çıkıyor:

$$m \times 1 = m \times S0 = (m \times 0) + m = 0 + m = m.$$

Birinci eşitliği m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Başlangıç adımı kolay. Tümevarım adımı:

$$1 \times Sm = (1 \times m) + 1 = m + 1 = Sm.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 9.11 (Değişme Özelliği)**.** *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $nm = mn$.*

Kanıt: m üzerine tümevarımla kanıtlamaya çalışalım. Başlangıç adımı gene kolay. Tümevarım adımı:

$$n \cdot Sm = nm + n = mn + n = \cdots$$

Başaramadık. En sağdaki ifadenin $Sm \cdot n$'ye eşit olduğunu kanıtlamak istedik ama sonunu getiremedik. Demek ki

$$mn + n = Sm \cdot n$$

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor.

Önsav 9.12. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $mn + n = Sm \cdot n$.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. (Bir defa daha m üzerine tümevarımla kanıtlama çabası başarısızlıkla sonuçlanmaya mahkûmdur.) $n = 0$ için bir zorlukla karşılaşmıyoruz. Şimdi önsavı n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. m herhangi bir doğal sayı olsun.

$$\begin{aligned} m \cdot Sn + Sn &= S(m \cdot Sn + n) = S((mn + m) + n) = S(Sm \cdot n + m) \\ &= Sm \cdot n + Sm = Sm \cdot Sn. \end{aligned}$$

(İlk satırın son eşitliğinde tümevarım varsayımını kullandık.) İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Bu önsavla birlikte Teorem 9.11 de kanıtlanmıştır. □

Teorem 9.13 (Dağılma Özelliği)**.** *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

$$n(m + p) = nm + np$$

olur.

Kanıt: Eğer $p = 0$ ise, eşitliğin her iki tarafında da nm elde ederiz. Şimdi teoremi p için varsayıp Sp için kanıtlayalım:

$$n(m + Sp) = n \cdot S(m + p) = n(m + p) + n = nm + np + n = nm + n \cdot Sp.$$

Kanıt bitmiştir. □

Teorem 9.14 (Birleşme Özelliği)**.** *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, $(nm)p = m(np)$ olur.*

Kanıt: p üzerine tümevarımla. Eğer $p = 0$ ise, her iki ifade de 0'a eşittir. Geri kalan kısım da kolay:

$$(nm)Sp = (nm)p + nm = n(mp) + nm = n(mp + m) = n(m \cdot Sp).$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 9.15 (Sıfırçarpansızlık)**.** *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için $nm = 0$ ise ya n ya da $m = 0$ olur.*

Kanıt: Eğer $m \neq 0$ ise, bir p doğal sayısı için $m = Sp$ olur. Demek ki,

$$0 = nm = n \cdot Sp = np + n.$$

Alıştırma 9.7'ye göre $n = 0$. □

Alıştırmalar

9.10. $nm = 1$ ise $n = m = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

9.11. $nm = 2$ ise ya $n = 2$ ve $m = 1$ olduğunu ya da tam tersi $n = 1$ ve $m = 2$ olduğunu kanıtlayın.

9.12. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve $f(0) = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(Sn) = 2f(n)$ eşitliklerini sağlayan bir fonksiyonun varlığını kanıtlayın.

9.5 Sıralama

Bu altbölümde, ilkokuldan beri bildiğimiz $\leq$ ve $<$ sıralamalarını tanımlayacağız.

Tanım 9.16. *n ve m iki doğal sayı olsun. Eğer $n+p=m$ eşitliğini sağlayan bir p doğal sayısı varsa, o zaman $n \leq m$ yazılır ve bu durumda n, m'den* ***küçükeşit*** *denir.*

$0+n=n$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq n$ olur; yani 0, $\mathbb{N}$'nin en küçük elemanıdır.

Eğer $n \leq m$ ise, ama $n \neq m$ ise, bu durumda $n < m$ yazılır ve n, m'den ***mutlak küçük*** ya da m, n'den ***mutlak büyük*** denir. Elbette

$$n < m \Leftrightarrow \exists p\, (p \neq 0 \wedge n+p=m)$$

ve her n doğal sayısı için $n < n+1 = Sn$.

Teorem 9.17 (Sıralama)**.** $\leq$ *ilişkisi bir sıralamadır, yani her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

i. $n \leq n$.

ii. $n \leq m$ *ve* $m \leq n$ *ise* $n = m$.

iii. $n \leq m$ *ve* $m \leq p$ *ise* $n \leq p$.

Kanıt: i'nin doğruluğu çok belli. ii'yi kanıtlayalım. Varsayımlar altında,

$$n+p=m \text{ ve } m+q=n$$

eşitliklerini sağlayan p ve q doğal sayıları vardır. Buradan,

$$n+(p+q)=(n+p)+q=m+q=n$$

çıkar; Önsav 9.6'ya göre $p+q=0$ olmalı. Alıştırma 9.7'ye göre de $p=q=0$ olmalı. iii'ün kanıtı daha da kolay: Varsayımlara göre a ve b doğal sayıları için,

$$n+a=m \text{ ve } m+b=p$$

olur. Demek ki,

$$n+(a+b)=(n+a)+b=m+b=p,$$

yani $n \leq p$. □

Teorem 9.18 (Sıralama)**.** *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

i. $n \not< n$.

ii. $n < m$ *ve* $m < p$ *ise* $n < p$.

Kanıt: Bir önceki teoremden ve mutlak küçüklüğün tanımından çıkar. □

Teorem 9.19 (Tamsıralama)**.** *Tanımladığımız $\leq$ ilişkisi bir tamsıralamadır, yani Teorem 9.17'deki özellikler dışında şu önerme de doğrudur: Her $n, m \in \mathbb{N}$ için, ya $n \leq m$ ya da $m \leq n$. Demek ki her $n, m \in \mathbb{N}$ için,*

$$n < m,\ n = m,\ m < n$$

önermelerinden biri (ve sadece biri) doğrudur.

Kanıt: n üzerine tümevarımla. Eğer $n = 0$ ise sorun yok. Şimdi teoremi n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. m bir doğal sayı olsun. Eğer $m \leq n$ ise o zaman $m \leq n < Sn$ olur ve sorun kalmaz. Eğer $n < m$ ise, öyle bir $p \neq 0$ vardır ki,

$$n + p = m$$

olur. $p \neq 0$ olduğundan, bir p' için $Sp' = p$ olur. Demek ki,

$$m = n + p = n + Sp' = n + p' + 1 = (n + 1) + p' = Sn + p'.$$

Demek ki $Sn \leq m$. Son önermenin kanıtını okura bırakıyoruz. □

Önsav 9.20. *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için,*
i. $m < Sn \Leftrightarrow m \leq n$.
ii. $m < n \Leftrightarrow Sm \leq n$.
iii. [Ayrık Sıralama]. *$m < n < Sm$ sıralaması sağlanamaz.*
iv. *Eğer $m < Sn$ ise ya $m < n$ ya da $m = n$ olur.*

Kanıt: i. ($\Rightarrow$) $m < Sn$ olduğundan, $m + p = Sn$ eşitliğini sağlayan bir $p \neq 0$ vardır. $p \neq 0$ olduğundan bir $r \in \mathbb{N}$ için $p = Sr$ olur ve

$$S(m + r) = m + Sr = m + p = Sn$$

ve $m + r = n$ olur. Demek ki $m \leq n$.

($\Leftarrow$) $m \leq n$ ise $n < Sn$ olduğundan, $m < Sn$ olur.
ii. $m < n$ olsun. Demek ki bir $p \neq 0$ doğal sayısı için $m + p = n$. Ama $p \neq 0$ olduğundan bir $r \in \mathbb{N}$ için $p = Sr$ olur. Demek ki

$$n = m + p = m + Sr = m + (r + 1) = (m + 1) + r = Sm + r.$$

Böylece $Sm \leq n$ sıralaması kanıtlanmış olur. Diğer yön bariz.
iii. $m < n < Sm$ ise, ii'den $Sm \leq n$ ve i'den $n \leq m$ çıkar ve bu ikisinden $Sm \leq m$ elde ederiz, çelişki.
iv. Birinci kısımdan hemen çıkar, zaten önermeler aynı şeyi söylüyor. □

Son olarak toplama ve çarpmanın sıralamayla olan ilişkilerini irdelemek gerekiyor. Bunların kanıtlarını alıştırma olarak okura bırakıyoruz.

Teorem 9.21 (Toplamayla Uyum)**.** *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, $n < m$ ancak ve ancak $n + p < m + p$ ise ve $n \leq m$ ancak ve ancak $n + p \leq m + p$ ise* □

Teorem 9.22 (Çarpmayla (bir yere kadar) Uyum)**.** *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, eğer $0 < p$ ise, $n < m$ ancak ve ancak $n \times p < m \times p$. Ayrıca eğer $0 < p$ ise, $n \leq m$ ancak ve ancak $n \times p \leq m \times p$.* □

Bu altbölümün son sonucu olarak, bu ders notlarında pek bir işimize yaramayacak, ama bir sonraki ciltte önemli olacak bir sonuç kanıtlayacağız.

Önsav 9.23. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n < m$ ancak ve ancak $n \in m$ ise*[5]*.*

Kanıt: Eğer $n < m$ ise, Önsav 9.20.ii'den $Sn \leq m$ çıkar. Önsav 7.9'dan da

$$n \in n \cup \{n\} = Sn \subseteq m$$

bulunur.

Diğer yönü m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $m = 0 = \emptyset$ ise sorun yaratacak bir n bulamayız. Şimdi önermeyi m için varsayıp Sm için kanıtlayalım. $n \in Sm = m \cup \{m\}$ olsun. Eğer $n = m$ ise $n < Sm$ olur ve kanıt biter. Aksi hâlde $n \in m$ olur ve tümevarımla $n < m$ bulunur; demek ki $n < Sm$. □

Önsav 9.23 sayesinde, doğal sayılarda mutlak sıralamayı

$$n < m \Leftrightarrow n \in m$$

olarak da tanımlayabilirdik, ama bunu özellikle yapmak istemedik çünkü kümeler kuramından olabildiğince kaçınmak istiyoruz.

9.6 İyisıralama

Geçen altbölümde doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi $\leq$ ilişkisiyle tamsıraladık (Teorem 9.17 ve 9.19): Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,

i. $n \leq n$,
ii. $n \leq m$ ve $m \leq n$ ise $n = m$,
iii. $n \leq m$ ve $m \leq p$ ise $n \leq p$,
iv. Ya $n \leq m$ ya da $m \leq n$

olur. Ayrıca sıralamanın toplama ve çarpmayla uyum içinde olduğunu biliyoruz (Teorem 9.21 ve 9.22):

v. $n \leq m$ ancak ve ancak $n + p \leq m + p$ ise.
vi. $n \leq m$ ve $0 \neq p$ ancak ve ancak $n \times p \leq m \times p$ ise.

[5]Bu sonucun tabii doğal sayıların özüyle ya da doğasıyla bir ilgisi yok. Eğer doğal sayıları başka türlü tanımlamış olsaydık bu sonuç doğru olmazdı.

Bu tamsıralamanın önemli, önemliden de öte, çok çok önemli bir özelliği daha vardır: Boş olmayan her doğal sayı kümesinin en küçük elemanı vardır, mesela en küçük asal sayı 2'dir, 2020'den büyük ve 6'ya tam bölünen en küçük doğal sayı 2022'dir. İşte o teorem:

Teorem 9.24 (İyisıralama Teoremi)**.** $\mathbb{N}$*'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır, yani* $\leq$ *ilişkisi* $\mathbb{N}$*'yi iyisıralar.*

Kanıt: $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ ve M, X'in altsınırları kümesi olsun olsun:

$$M = \{m \in \mathbb{N} : \text{ her } x \in X \text{ için } m \leq x)\}.$$

Elbette $0 \in M$. Ayrıca $x \in X$ ise, $Sx \notin M$ çünkü ne de olsa Sx, x'ten küçükeşit değil. Demek ki $M \neq \mathbb{N}$. Dolayısıyla bir $m \in M$ için $Sm \notin M$ olur çünkü aksi hâlde M tümevarımsal bir küme olur ve $M = \mathbb{N}$ olurdu. $m \in M$ olduğundan, m, X'in her elemanından küçükeşit. Eğer m, X'te olmasaydı, m, X'in her elemanından mutlak küçük olurdu, yani Sm, X'in her elemanından küçükeşit olurdu (Önsav 9.20.ii), yani $Sm \in M$, ama bu da m'nin seçimiyle çelişiyor. Dolayısıyla $m \in X$ ve m, X'in en küçük elemanı. □

Teorem 9.24'ün İkinci Kanıtı: $X \subseteq \mathbb{N}$, en küçük elemanı olmayan bir küme olsun. X'in boşküme olduğunu göstereceğiz.

$$Y = \{n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : (x < n \longrightarrow x \notin X)\}$$

olsun. Önce n üzerine tümevarımla $n \in Y$ önermesini (yani $Y = \mathbb{N}$) önermesini kanıtlayalım. 0'dan küçük doğal sayı olmadığından, $0 \in Y$. Şimdi önermenin n için doğru olduğunu varsayıp Sn için kanıtlayalım. Eğer Sn sayısı Y'de olmasaydı, Sn'den küçük bir doğal sayı Y'de olurdu. Ama tümevarım varsayımımıza göre bu sayı n'den küçük olamaz. Demek ki n olmalı (Önsav 9.20.iv). Ama o zaman da n, X'in en küçük elemanı olurdu, çelişki. Demek ki $Y = \mathbb{N}$. Şimdi kanıtın sonunu getirebiliriz: Eğer $n \in X$ olsaydı, $n + 1 \notin Y$ olurdu, yine bir çelişki. □

Sonuç 9.25. *Eğer bir* $\varphi(x)$ *formülü bir doğal sayısı için yanlışsa, o zaman* φ*'nin yanlış olduğu en küçük bir doğal sayı vardır.*

Kanıt: Bu sonuç bir önceki teoremin doğrudan bir sonucu. Bunu görmek için, bir önceki teoremde $X = \{n \in \mathbb{N} : \neg\varphi(n)\}$ almak yeterli. □

9.7 Tümevarımla Kanıta Yeniden Ziyaret

Bu altbölümün konusu yeni bir "tümevarımla kanıt ilkesi" kanıtlamak. Artık içinde $+$ ve $\times$ simgeleri olan formülleri de tümevarımla kanıtlayabileceğiz.

$\varphi(x)$, matematiğin mantıksal simgeleri olan $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\longrightarrow$, $=$, parantezler ve x, y, z, x_1, y_3 gibi değişkenler dışında sadece 0, S, $+$ ve $\times$ simgeleri kullanılarak yazılmış (anlamlı) bir formül olsun[6]. $\varphi(x)$ formülünde tek serbest değişken x olsun; diğer değişkenler (eğer varsa) $\exists$ ya da $\forall$ niceleyicilerinin kapsamında olsun.

Teorem 9.26 (Tümevarımla Kanıt İlkesi I)**.** *$\varphi(x)$ yukarıdaki gibi bir formül olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$[\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \rightarrow \varphi(Sn))) \rightarrow \forall n\ \varphi(n)]$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Kanıt: Teorem 7.6'nın özel bir durumu. □

Şimdi ikinci bir "tümevarımla kanıt ilkesi" açıklayacağız.

Sonuç 9.25 (ya da isterseniz Teorem 9.24 ama biz Sonuç 9.25'i tercih ederiz) bize yeni bir kanıt yönteminin kapısını açıyor. Diyelim doğal sayılar hakkında $\forall n\ \varphi(n)$ önermesini kanıtlamak istiyoruz. φ'nin her doğal sayı için doğru olmadığını varsayalım. O zaman Sonuç 9.25'e göre φ'nin doğru olmadığı en küçük bir doğal sayı vardır. Diyelim n, φ'nin doğru olmadığı en küçük doğal sayı. O zaman φ, n'den küçük sayılar için doğrudur ama n için yanlıştır. Bundan bir çelişki elde edilmeye çalışılır.

Biraz daha açalım. Kanıtlamak istenen önerme, daha önce olduğu gibi sadece n'den küçük tüm doğal sayılar için doğru olduğu varsayılıp, önerme n için kanıtlanır. Eğer bu yapılabilirse, o zaman önerme her n doğal sayısı için doğrudur.

Bu kanıt yöntemi tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesidir. Biçimsel olarak bu çeşitlemeyi şöyle ifade ederiz (parantez enflasyonundan dolayı $\varphi(n)$ yerine φn yazdık):

$$[\forall n\ ((\forall i\ (i < n \rightarrow \varphi i) \rightarrow \varphi n))] \rightarrow \forall n\ \varphi n.$$

Bu formülün ne dediğinin anlaşılması belki biraz zor olabileceğinden şöyle açıklayalım: Her n doğal sayısı için,

$$\forall i\ (i < n \rightarrow \varphi(i)) \rightarrow \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ önermesi doğrudur.

Tümevarımın bu ikinci versiyonunda başlangıç adımına ihtiyaç yoktur, çünkü $n = 0$ ise, 0'den küçük doğal sayı olmadığından, φ önermesi 0'dan küçük her doğal sayı için doğrudur. Dolayısıyla önerme 0 için de doğrudur.

Bu söylediklerimizi not edelim:

[6] Dikkat edilirse kümeler kuramına özgü olan $\in$ simgesi listede yok...

Teorem 9.27 (Tümevarımla Kanıt II)**.** *$\varphi(x)$, matematiğin mantıksal simgeleri dışında sadece 0, S, $+$ ve $\times$ simgeleri kullanılarak yazılmış bir formül olsun.*

Eğer her n doğal sayısı ve n'den küçük her i doğal sayısı için $\varphi(i)$ doğrulandığında $\varphi(n)$ da doğrulanıyorsa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n, \overline{y})$ doğrudur. Bir başka deyişle, eğer her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(\forall i\,(i < n \to \varphi(i))) \to \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her

$$\forall n\ \varphi(n)$$

formülü doğrudur. Daha anlaşılmaz bir biçimde söylemek gerekirse,

$$\forall n\ [\forall i\,(i < n \to \varphi(i, \overline{y})) \to \varphi(n)] \to \forall n\ \varphi(n)$$

formülü doğrudur.

Buna bazen "güçlü tümevarım yöntemi" denir.

9.8 Kalanlı Bölme

Tümevarımla kanıtın bu versiyonunu kullanarak doğal sayılarda kalanlı bölme işleminin (örneğin $23 = 7 \times 3 + 2$) yapılabileceğini kanıtlayalım.

Teorem 9.28. [Doğal Sayılarda Kalanlı Bölme] *n ve m iki doğal sayı olsun, ama $m \neq 0$ olsun. O zaman öyle bir ve bir tane q ve r doğal sayı çifti vardır ki, $n = mq + r$ ve $r < m$ olur.*

Kanıt: Önce q ve r doğal sayılarının varlığını kanıtlayalım. Bunu n üzerine tümevarımla (ama tümevarımla kanıt yönteminin ikinci versiyonuyla) kanıtlayacağız. Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ alabiliriz. Şimdi $n \geq m$ olsun ve teoremin n'den küçük sayılar için doğru olduğunu varsayalım. p doğal sayısı $m + p = n$ eşitliğini sağlasın. $p < n$ olduğundan, teorem p için doğru. Demek ki bir q_0 ve $r_0 < m$ doğal sayı çifti için $p = mq_0 + r_0$ eşitliği doğru.

$$n = m + p = m + mq_0 + r_0 = m(q_0 + 1) + r_0.$$

olur. $q = q_0 + 1$ ve $r = r_0$ olsun.

$$n = m(q_0 + 1) + r_0 = mq + r$$

ve

$$r = r_0 < m$$

olur. q ve r'nin varlığını böylece n için de kanıtlamış olduk.

Şimdi q ve r'nin biricikliğini kanıtlayalım. Diyelim

$$mq + r = mq_0 + r_0 \text{ ve } r, r_0 < m.$$

$q = q_0$ ve $r = r_0$ eşitliklerini kanıtlayacağız. $q = q_0$ eşitliğini kanıtlamak yeterli (Teorem 9.7). Diyelim $q < q_0$. O zaman bir $q_1 \geq 1$ için $q + q_1 = q_0$ olur. Demek ki,

$$mq + r = mq_0 + r_0 = m(q + q_1) + r_0 = mq + mq_1 + r_0$$

ve dolayısıyla

$$r = mq_1 + r_0$$

olur. Ama $1 \leq q_1$ sıralamasından,

$$m \leq mq_1 \leq mq_1 + r_0 = r < m$$

çıkar, ki bariz bir çelişkidir. Demek ki $q = q_0$. Buradan da $r = r_0$ çıkar. □

9.9 Onluk Tabanda Doğal Sayılar

Sayıları onluk tabanda, yani 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakamlarıyla (toplam on adet rakamla) yazarız. Bunu ta en küçük yaşlarımızdan beri yaptığımız için, sayıların onluk tabanda yazılmış olarak yaratıldığına inanıp bir sayıyı onluk tabanda yazmanın matematiksel anlamı hakkında pek düşünmeyiz, hatta bir sayının gerçek anlamını unutup sayının onluk tabandaki yazılımını sayının tanımı zannederiz.

Çocuk yaşlarımızda kaç yaşında olduğumuz sorulduğunda, örneğin, üç parmağımızı gösterip "üç" deriz, çünkü o yaşlarda "üç"ün gösterdiğimiz parmak sayısı olduğunu gayet iyi biliriz. Ama daha sonra okula gittiğimizde "üç sayısı" birden parmaktan soyutlanıp "3" simgesine bürünüverir, "yedi bin dört yüz otuz altı" sayısı da (daha önceleri ne idüğü belirsiz olan) 7436 oluverir. Sayıların asıl anlamını unutup gösterimlerini sayı sanmaya başlarız. Aslında gerçek 7436 sayısı, örneğin, 7436 adet çakıl taşının sayısının onluk tabanda yazılmış biçimidir ve sadece bir gösterimdir, sayının kendisi değildir.

Diyelim ilkel bir insana sayıları on tabanında yazmayı öğreteceksiniz. Önce 10'a kadar saymasını ve 0'dan 9'a kadar olan rakamları öğretmelisiniz. Sonra önüne bir kamyon dolusu çakıltaşı koyun. Diyelim 7436 adet çakıltaşı var. (Gerçek 7436 sayısı buradaki çakıltaşı sayısıdır, 7436 gösterimi değildir!) 7436 tane çakıltaşı var ama bu sayıyı ne siz biliyorsunuz ne de ilkel insan. Şimdi ilkel insandan bu çakıltaşları onarlık öbeklere ayırmasını isteyin. Bunu yaptığında 743 adet 10'luk öbek elde edecektir, bir de tam bir öbeğe tamamlayamadığı 6 adet çakıltaşı artacaktır. O 6'yı bir yere not etsin:

ve kalan 6 çakıltaşını doğaya, görünmeyecek bir yere fırlatsın. Şimdi, ilkel insandan önündeki onluk öbeklerden gene onluk öbekler yapmasını isteyin. Böylece herbiri yüz çakıltaşı barındıran öbekler elde edecektir tabii. 743 öbekten 74 tane (her biri yüz çakıltaşlık) onluk öbek çıkacaktır, ama geriye 3 adet (onluk) öbek kalacaktır. O 3'ü de daha önce not ettiği 6'nın soluna not etsin. Böylece

$$36$$

bulur. Kalanları (30 adet çakıltaşı) doğaya fırlatsın. Sonra, 74 (yüzlük) öbekten 10'luk öbekler yapsın; 7 adet (binlik) öbek elde edecektir, ama tam bir öbeğe tamamlayamadığı 4 (yüzlük) öbek kalacaktır. Bu 4'ü de daha önceki 36'nın soluna yazıp

$$436$$

elde etsin. Son olarak 7 adet (binlik) öbeği onluk öbeklere ayırmasını isteyin. Size şaşkın şaşkın bakacaktır muhtemelen ama eğer 0'ı iyi öğrenmişse 0 adet (onbinlik) öbek elde ettiğini ve geriye tam bir öbeğe tamamlayamadığı 7 adet (binlik) öbek kaldığını anlayacaktır. O yediyi de daha önceki 436'un soluna yazsın. Şimdi

$$7436$$

gösterimini elde edecektir. İlkel insan isterse devam edebilir: Önünde kalan 0 adet çakıltaşı öbeğini onluk öbeklere ayırabilir, kalan hep 0 olacaktır. O zaman

$$\ldots 00007436$$

gösterimini elde eder. Ama bildiğiniz gibi "soldaki sıfırlar" sayılmaz ve bu sayı sadece 7436 olarak yazılır.

Yukarıda aslında ilkel insan sayıyı hep 10'a bölüp kalanı yazıyordur, yani şu prosedürü izliyordur:

$$\begin{array}{r|l} 7436 & 6 \\ 743 & 3 \\ 74 & 4 \\ 7 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Aslında yapılan doğal sayılarda kalanlı bölmedir:

$$\begin{array}{rcr} 7436 & = & 743 \times 10 + 6 \\ 743 & = & 74 \times 10 + 3 \\ 74 & = & 7 \times 10 + 4 \\ 7 & = & 0 \times 10 + 7 \\ 0 & = & 0 \times 10 + 0 \\ 0 & = & 0 \times 10 + 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots \end{array}$$

Yukarıdan aşağıya doğru beliren kalanları soldan sağa doğru yazarız ve 7436 yazılımına erişiriz.

Birazdan kanıtlayacağımız üzere, her doğal sayı on tabanında tek bir biçimde yazılır.

Bu altbölümde yaptığımız, 10 yerine 1'den büyük herhangi bir doğal sayı için de yapılabilir. Bilgisayarlarda 2 tabanı kullanılır, biliyorsunuzdur. 2 tabanında rakamlar sadece 0 ve 1'dir. Genel olarak b tabanında rakamlar 0'dan $b-1$'e kadar olan doğal sayılardır.

Teoriye ilkokul aritmetiğinden başlayalım. Örneğin (onluk tabanda yazılmış) 7436 sayısı aslında,

$$7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

sayısıdır.

$$7436 = 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

eşitliği aslında "7436" ifadesinin tanımıdır.

Birazdan kanıtlanacağı üzere, her A doğal sayısı, belli bir n doğal sayısı ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ "rakam"ları için,

$$A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

biçiminde yazılabilir[7]. Eğer bir de ayrıca $A > 0$ varsayımını yaparsak, a_n'yi pozitif olacak biçimde seçebiliriz ve bu durumda,

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

rakamları biricik olur. Her a_n rakamı biricik olduğundan, A'nın ***onluk tabanda gösterimi***

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

olarak sorunsuz bir biçimde tanımlanabilir. Bu sonucu kanıtlayalım:

[7]Buradaki $n-1$ ve üç nokta kullanımı için özür dilerim!

Teorem 9.29. *Her A doğal sayısı, belli bir n doğal sayısı ve*

$$a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, 9\}$$

rakamları için,

$$A = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

olarak yazılabilir. Eğer bir de ayrıca $A > 0$ varsayımını yaparsak, n'yi a_n pozitif olacak biçimde seçebiliriz ve bu durumda $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{n-1},\, a_n$ rakamları biriciktir.

Kanıt: Önce a_i rakamlarının varlığını A doğal sayısı üzerine tümevarımla kanıtlayalım; biricikliği daha sonra kanıtlayacağız. Eğer $A < 10$ ise $n = 0$ ve $a_0 = A$ alabiliriz. Bundan böyle $A \geq 10$ sıralamasını ve teoremin A'dan küçük pozitif doğal sayılar için doğru olduğunu varsayalım.

A'yı 10'a bölelim: Belli bir B ve $0 \leq r < 10$ "kalanı" için,

$$A = 10B + r$$

olur [Teorem 9.28]. Ama $B < A$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre, belli bir m doğal sayısı ve

$$b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_{m-1},\, b_m \neq 0$$

rakamları için,

$$B = b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A &= 10B + r = 10(b_m 10^m + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0) + r \\ &= b_m 10^{m+1} + \cdots + b_1 10^2 + b_0 10^1 + r. \end{aligned}$$

Demek ki $n = m + 1$ ve

$$a_{m+1} = b_m,\, a_m = b_{m-1},\, \ldots,\, a_1 = b_0,\, a_0 = r$$

tanımlarını yaparsak $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \neq 0$ rakamlarının varlığı kanıtlanmış olur.

Şimdi de bu rakamların biricikliğini kanıtlayalım. $A > 0$ olsun ve diyelim

$$\begin{aligned} A &= a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 \\ &= b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0. \end{aligned}$$

Burada a_i ve b_j sayıları 0'dan 9'a kadar rakamlardır. $a_n \neq 0$ ve $b_m \neq 0$ eşitsizliklerini varsayalım. $n = m$ ve her i için $a_i = b_i$ eşitliklerini kanıtlayacağız.

Önce $n = m$ eşitliğini kanıtlayalım. Diyelim $n > m$. O zaman,

$$\begin{aligned} A &= b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0 \\ &\leq 9\,(10^m + 10^{m-1} + \cdots + 10^1 + 10^0) \\ &= 9\,(10^{m+1} - 1)/9 = 10^{m+1} - 1 < 10^{m+1} \leq 10^n \leq A, \end{aligned}$$

ve bu da bir çelişkidir. Demek ki $n = m$. (Yukarıdaki hesaplarda bir yerde Teorem 9.25'i kullandık.)

Şimdi $a_n = b_n$ eşitliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayalım. Genelliği bozmadan $a_n > b_n$ varsayımını yapabiliriz. O zaman,

$$A - b_n 10^n = (a_n - b_n)10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

olur. Ama ayrıca ($m = n$ olduğundan),

$$A - b_n 10^n = b_{n-1}10^{n-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

eşitliği doğru. Demek ki her iki eşitliğin de sağ tarafındaki sayılar birbirine eşit. Ama $a_n - b_n > 0$ ve $n > n - 1$ olduğundan, böyle bir durumun mümkün olmadığını bir önceki paragrafta gördük.

Demek ki $a_n = b_n$. Şimdi $a_n 10^n$ ve $b_n 10^n$ sayılarını sadeleştirerek,

$$a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

ile

$$b_{n-1}10^{n-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

sayılarının eşitliğini buluruz. Buradan tümevarımla her $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için $a_i = b_i$ çıkar. □

Burada 10 için yaptığımızı 1'den büyük herhangi bir doğal sayı için yaparız. Mesela 177 sayısı iki tabanında 10110001 olarak gösterilir, çünkü

$$177 = 1 + 2^4 + 2^5 + 2^7.$$

Alıştırmalar

9.13. Niye doğal sayıları 1 tabanında yazmayı tercih etmeyiz?

9.14. 7436 sayısını 2 ve 6 tabanlarında yazın.

9.15. 11 tabanı için 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve (10 anlamında) $\star$ rakamlarını kullanalım, yani $\star$ simgesi 10 anlamına gelsin. Bu tabanda bildiğimiz (yani 10 tabanında yazılmış) 11

sayısı $\star 0$ olarak yazılır. On tabanında 27 olarak yazılan sayı da 11 tabanında 25 olarak yazılır. Birkaç örnek aşağıda:

10 tabanında	11 tabanında
10	$\star$
11	10
12	11
20	19
21	$1\star$
22	20
32	$2\star$
33	30
43	$3\star$
99	90
100	91
110	$\star 0$
115	$\star 5$
119	$\star 0$
120	$\star\star$
121	100
$10 \times 11^2 + 10 \times 11 + 10 = 1330$	$\star\star\star$
1331	1000
11^5	100000
$11^5 + 10$	$10000\star$
$11^5 + 11$	100010
$11^5 + 11^3$	101000

7436 sayısını 11 tabanında yazın.

9.16. 7436 sayısını 12 tabanında yazın. (tabii 11 "rakamı" için bir simge uydurmalısınız.)

9.17. Sümerliler 60 tabanında yazarlardı. Tabii bunun için 0'dan 59'a kadar 60 "rakam"a ihtiyaçları vardı. 60 simgeyi ezberlemek zor olduğundan bu 60 adet rakamı 10 tabanında yazarlardı. (Sümerliler 0 rakamı yerine boşluk bırakırlardı. İki adet sıfır için daha fazla boşluk bırakırlardı, üç adet için biraz daha fazla ve tabii bu karışıklığa neden olurdu. Bu bilgiler 40 küsur yıl önce okuduğum ve adını anımsamadığım bir kitaptan, yanlış da olabilir...) Sümerliler gibi yaparak 1234567 sayısını 60 tabanında yazın. (Rakamların arasına bir nokta koyabilirsiniz.)

9.10 Tümevarımla Kanıta Yeniden Ziyaret

Bu altbölümün konusu Teorem 7.6'nın uygulama alanını genişletmek ve bunun dışında yeni bir "tümevarımla kanıt ilkesi" kanıtlamak. Artık içinde $+$ ve $\times$ simgeleri olan formülleri de tümevarımla kanıtlayabileceğiz. Ama önce bir "formül"le ne demek istediğimize açıklık getirelim.

$\varphi(x)$, matematiğin mantıksal simgeleri olan $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\longrightarrow$, $=$, parantezler ve x, y, z, x_1, y_3 gibi değişkenler dışında sadece 0, S, $+$ ve $\times$ simgeleri kullanılarak yazılmış (anlamlı) bir formül olsun[8]. $\varphi(x)$ formülünde tek serbest

[8]Dikkat edilirse kümeler kuramına özgü olan $\in$ simgesi listede yok...

değişken x olsun; diğer değişkenler (eğer varsa) $\exists$ ya da $\forall$ niceleyicilerinin kapsamında olsun.

Teorem 9.30 (Tümevarımla Kanıt İlkesi I)**.** *$\varphi(x)$ yukarıdaki gibi bir formül olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$[\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \to \varphi(Sn))) \to \forall n\ \varphi(n)]$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Kanıt: Teorem 7.6'nın özel bir durumu. □

Şimdi ikinci bir "tümevarımla kanıt ilkesi" açıklayacağız.

Sonuç 9.25 (ya da isterseniz Teorem 9.24 ama biz Sonuç 9.25'i tercih ederiz) bize yeni bir kanıt yönteminin kapısını açıyor. Diyelim doğal sayılar hakkında $\forall n\ \varphi(n)$ önermesini kanıtlamak istiyoruz. φ'nin her doğal sayı için doğru olmadığını varsayalım. O zaman Sonuç 9.25'e göre φ'nin doğru olmadığı en küçük bir doğal sayı vardır. Diyelim n, φ'nin doğru olmadığı en küçük doğal sayı. O zaman φ, n'den küçük sayılar için doğrudur ama n için yanlıştır. Bundan bir çelişki elde edilmeye çalışılır.

Biraz daha açalım. Kanıtlamak istenen önerme, daha önce olduğu gibi sadece n'den küçük tüm doğal sayılar için doğru olduğu varsayılıp, önerme n için kanıtlanır. Eğer bu yapılabilirse, o zaman önerme her n doğal sayısı için doğrudur.

Bu kanıt yöntemi tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesidir. Biçimsel olarak bu çeşitlemeyi şöyle ifade ederiz (parantez enflasyonundan dolayı $\varphi(n)$ yerine φn yazdık):

$$[\forall n\ ((\forall i\ (i < n \to \varphi i) \to \varphi n))] \to \forall n\ \varphi n.$$

Bu formülün ne dediğinin anlaşılması belki biraz zor olabileceğinden şöyle açıklayalım: Her n doğal sayısı için,

$$\forall i\ (i < n \to \varphi(i)) \to \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ önermesi doğrudur.

Tümevarımın bu ikinci versiyonunda başlangıç adımına ihtiyaç yoktur, çünkü $n = 0$ ise, 0'den küçük doğal sayı olmadığından, φ önermesi 0'dan küçük her doğal sayı için doğrudur. Dolayısıyla önerme 0 için de doğrudur.

Bu söylediklerimizi not edelim:

Ama bazen formüllerimizde "parametreler" kullanmak isteyebiliriz, yani çalıştığımız bir modelin elemanlarının formüllerimizde yer almasını isteyebiliriz. Eğer 5 gibi bir elemanı kullanacaksak, sorun olmaz, parametreye hiç gerek yok, 5 yerine $SSSSS(0)$ yazabiliriz, ama bir modelde sonlu sayıda (sonlu sayı

her ne demekse!) S'yi 0'a uygulayarak elde edemeyeceğimiz elemanlar olabilir ve bu elemanları parametre olarak formüllerimizde kullanmak isteyebiliriz.

$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$, ya da kısaca $\varphi(x, \overline{y})$, matematiğin mantıksal simgeleri olan $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\longrightarrow$, $=$, parantezler ve x, y, z, x_1, y_3 gibi değişkenler dışında sadece 0, S, $+$ ve $\times$ simgeleri kullanılarak yazılmış (anlamlı) bir formül olsun[9]. Serbest değişkenler $x, y_1, \ldots, y_n$ arasından olsun (başka olmasın). Ayrıca $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ olsun. $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ formülünde her $i = 1, \ldots, k$ için, y_i yerine a_i koyalım ve elde edilen ifadeyi $\varphi(x, a_1, \ldots, a_k)$ olarak gösterelim. $\varphi(x, a_1, \ldots, a_k)$ formülünde artık $a_1, \ldots, a_k$ "parametreleri" de var.

Teorem 9.31 (Tümevarımla Kanıt İlkesi I)**.** *$\varphi(x, \overline{y})$ yukarıdaki gibi bir formül olsun. Her $\overline{y}$ için, eğer*

1. *$\varphi(0)$ doğruysa ve*
2. *her n doğal sayısı için, $\varphi(n, \overline{y})$ doğru olduğunda $\varphi(Sn, \overline{y})$ de doğruysa,*

o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n, \overline{y})$ doğrudur. Bir başka deyişle,

$$\forall \overline{y}\, [\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall n\, (\varphi(n, \overline{y}) \rightarrow \varphi(Sn, \overline{y}))) \rightarrow \forall n\, \varphi(n, \overline{y})]$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Teorem 9.32 (Tümevarımla Kanıt II)**.** *$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$, matematiğin mantıksal simgeleri dışında sadece 0, S, $+$ ve $\times$ simgeleri kullanılarak yazılmış bir formül olsun. Simge sayısından tasarruf etmek için $y_1, \ldots, y_k$ yerine $\overline{y}$ yazalım.*

Eğer her n doğal sayısı ve n'den küçük her i doğal sayısı için $\varphi(i, \overline{y})$ doğrulandığında $\varphi(n, \overline{y})$ da doğrulanıyorsa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n, \overline{y})$ doğrudur. Bir başka deyişle, eğer her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(\forall i\, (i < n \rightarrow \varphi(i, \overline{y}))) \rightarrow \varphi(n, \overline{y})$$

önermesi doğruysa, o zaman her

$$\forall n\, \varphi(n, \overline{y})$$

formülü doğrudur. Daha anlaşılmaz bir biçimde söylemek gerekirse,

$$\forall \overline{y}\, [\forall n\, [\forall i\, (i < n \rightarrow \varphi(i, \overline{y})) \rightarrow \varphi(n, \overline{y})] \rightarrow \forall n\, \varphi(n, \overline{y})]$$

formülü doğrudur.

Buna bazen "güçlü tümevarım yöntemi" denir.

[9]Dikkat edilirse kümeler kuramına özgü olan $\in$ simgesi listede yok. Amaç kümeler kuramını terkedip aritmetiği geçmek.

10. Tümevarımla Tanım

10.1 Tümevarımla Tanım

Toplamayla çarpma fonksiyonlarının varlığının kanıtlandığı Teorem 9.1 ve 9.8'i genelleştireceğiz.

Hepimiz biliyoruz ki, $x + y$ sayısı x'e y defa 1 ekleyerek, yani x'e y defa S fonksiyonu uygulanarak elde edilmiştir.

Aynı şekilde xy sayısı, x'in kendisiyle y defa toplanmasıyla elde edilir.

İşte bu bölümde "aynı işlemi bir sayıya defalarca uygulama"nın ne demek olduğunu göreceğiz. Örneğin, x'i kendisiyle y defa çarparak x^y elde ederiz.

X ve Y iki doğal sayı kümesi olsun. Teorem, eğer

$$\psi : X \to Y \text{ ve } \varphi : X \times Y \to Y$$

iki fonksiyonsa, her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \psi(x) \\ f(x,1) &= \varphi(x, \psi(x)) \\ f(x,2) &= \varphi(x, \varphi(x, \psi(x))) \\ f(x,3) &= \varphi(x, \varphi(x, \varphi(x, \psi(x)))) \end{aligned}$$

gibi eşitlikleri sağlayan bir $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ fonksiyonu olduğunu söyleyecek ve bu teorem sayesinde fonksiyonlarımızı tümevarımla tanımlayabileceğiz.

Teorem 10.1. [**Tümevarımla Tanım Teoremi**] *X ve Y birer küme olsun.*

$$\psi : X \to Y \text{ ve } \varphi : X \times Y \to Y$$

iki fonksiyon olsun. O zaman her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} &f(x,0) = \psi(x), \\ &f(x,Sn) = \varphi(x, f(x,n)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir ve bir tek

$$f : X \times \mathbb{N} \to Y$$

fonksiyonu vardır.

Kanıta başlamadan önce teoremin toplamayı ve çarpmayı nasıl tanımladığını ve bir başka uygulamasını daha görelim.

Toplama. Teoremde $X = Y = \mathbb{N}$, $\psi = \mathrm{I}_X$ (özdeşlik fonksiyonu) ve $\varphi = S \circ \mathrm{pr}_2$, yani $\varphi(x, n) = Sn$ olarak alalım. O zaman elde edilen fonksiyon,

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x, \\ f(x, Sn) &= \varphi(x, f(x, n)) = S(f(x, n)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen toplamanın sağlaması gerektiği eşitliklerdir ($f(x, n)$ yerine $x + n$ yazınca hemen görülüyor). Şimdi teorem sayesinde $x + y = f(x, y)$ tanımını yapabiliriz.

Çarpma. Teoremde $X = Y = \mathbb{N}$, $\psi = s_0$ (sabit 0 fonksiyonu) ve φ'yi yukarıda varlığı (bir kez daha) kanıtlanan toplama fonksiyonu olarak alalım, yani $\varphi(x, n) = n + x$ olarak alalım. (Özellikle $x + n$ yerine $n + x$ yazdık.) O zaman elde edilen fonksiyon,

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 0, \\ f(x, Sn) &= \varphi(x, f(x, n)) = f(x, n) + x \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen çarpmanın sağlaması gerektiği eşitliklerdir. Şimdi teorem sayesinde $xy = f(x, y)$ tanımını yapabiliriz.

Üs Alma. n ve m iki doğal sayıysa, n^m sayısı okullarda m tane n'nin çarpımı olarak tanımlanır genellikle:

$$n^m = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m \text{ tane}}.$$

Bu tanıma $n^0 = 1$ de eklenmelidir, çünkü sıfır tane n'yi çarpmak anlamsızdır[1]. Ama tabii n^m ifadesinin bu tanımı falsoludur çünkü "m tane" ifadesini simgeleyen matematiksel bir simge yok elimizde. Zaten bu bölümün amacı da "bir işlemi bir sayıya m defa uygulama"nın matematiksel olarak mümkün olduğunu göstermek. Daha doğru bir tanım şöyledir:

$$n^0 = 1 \text{ ve her } m \in \mathbb{N} \text{ için } n^{m+1} = n \times n^m.$$

Ama bunun da niye gerçek bir tanım olduğu kuşkulu çünkü bu tanımdan hareketle her x ve y doğal sayısı için x^y sayısının tanımlandığını anlamak mümkün değil (bu tür sorunlardan geçmişte uzun uzadıya bahsetmiştik). n^m sayısını yukarıdaki teoremi kullanarak tanımlayabiliriz. Bunun için $X = Y = \mathbb{N}$ alalım; $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sabit 1 fonksiyonu olsun, yani her $x \in \mathbb{N}$ için $\psi(x) = 1$

[1]Bu kitapta $0^0 = 1$ olarak tanımlanacak. Ama bazı durumlarda 0^0 ifadesini tanımsız bırakmak gerekir.

olsun ve son olarak $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu da çarpma olsun, yani her $x, y \in \mathbb{N}$ için $\varphi(x, y) = xy$ olsun. Teoremi bu fonksiyonlara uygularsak, elde edilen fonksiyon,

$$f(x, 0) = 1,$$
$$f(x, Sn) = \varphi(x, f(x, n)) = xf(x, n)$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen kuvvet almanın sağlaması gerektiği eşitliklerdir. Şimdi $x^n = f(x, n)$ tanımını yapabiliriz.

Tümevarımla Tanım Teoremi'nin Kanıtı: Her $x \in X$, $y \in Y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $(X \times \mathbb{N}) \times Y$ kartezyen çarpımının,

$$(x, 0, \psi(x)) \in G \tag{1}$$

ve

$$(x, n, y) \in G \to (x, Sn, \varphi(x, y)) \in G \tag{2}$$

koşullarını sağlayan bir G altkümesine bu kanıtlık "güzel küme" diyelim. En az bir güzel küme vardır: $(X \times \mathbb{N}) \times Y$. Güzel kümelerin kesişiminin gene güzel bir küme olduğunu kanıtlamak zor değildir. Tüm güzel kümelerin kesişimine G diyelim. G en küçük güzel kümedir, yani tüm güzel kümelerin altkümesidir. Şimdi G'nin bir grafik olduğunu, dolayısıyla $X \times \mathbb{N}$'den Y'ye giden bir fonksiyon tanımladığını kanıtlayacağız. G'nin tanımladığı bu fonksiyona f dersek, f elbette teoremde istenen eşitlikleri sağlar. Ayrıca, f'nin biricikliği de bariz olur: g teoremde söylendiği gibi bir fonksiyonsa, g'nin grafiği, diyelim G', güzel bir küme olur, dolayısıyla G'yi içerir ama iki grafik ancak eşitlerse biri diğerini içerebilir.

Her $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$ için

$$(x, n, y) \in G$$

koşulunu sağlayan bir $y \in Y$ olduğunun kanıtı n üzerine tümevarımla kolay. Verilmiş $(x_0, n_0) \in X \times \mathbb{N}$ için, yukarıdaki $(x_0, n_0, y_0) \in G$ koşulunu sağlayan $y_0 \in Y$ elemanının biricikliğini kanıtlayalım. Bunu da n_0 üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Başlangıç Adımı. $n_0 = 0$ varsayımını yapalım.

$$(x_0, 0, \psi(x_0)) \in G$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca bir $y_0 \neq \psi(x_0)$ için,

$$(x_0, 0, y_0) \in G$$

eşitliğini varsayalım. $G' = G \setminus \{(x_0, 0, y_0)\}$ olsun. G' kümesinin de güzel bir küme olduğunu kanıtlayarak bir çelişki elde edeceğiz.

Önce, yukarıda (1) olarak işaretlediğimiz birinci koşulla başa çıkalım. $x \in X$ olsun.

$$(x, 0, \psi(x)) \in G$$

içindeliğini biliyoruz. Ama $(x, 0, \psi(x))$ üçlüsü $(x_0, 0, y_0)$ üçlüsüne eşit olamaz yoksa $x = x_0$ ve $\psi(x) = y_0$ olur ve varsayımımızla çelişen $\psi(x_0) = \psi(x) = y_0$ eşitliğini elde ederiz. Demek ki $(x_0, 0, \psi(x_0)) \in G'$. İkinci koşulla başa çıkalım: $(x, n, y) \in G'$ olsun. Demek ki $(x, n, y) \in G$. Dolayısıyla $(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G$. Ama $(x, Sn, \varphi(x, y))$ üçlüsü $(x_0, 0, y_0)$ üçlüsüne eşit olamaz yoksa $Sn = 0$ olurdu. Demek ki $(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G'$.

Tümevarım Adımı. $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı,

"her $x \in X$ için $(x, n_0, y) \in G$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane $y \in Y$ vardır"

özelliğini sağlasın. Aynı özelliği Sn_0 için gösterelim. $x_0 \in X$ rastgele bir doğal sayı olsun. Tümevarım varsayımına göre, bir ve bir tek $y_0 \in Y$ için

$$(x_0, n_0, y_0) \in G$$

olur. Demek ki,

$$(x_0, Sn_0, \varphi(x_0, y_0)) \in G.$$

Diyelim $\varphi(x_0, y_0)$ sayısına eşit olmayan bir $y_1 \in Y$ için

$$(x_0, Sn_0, y_1) \in G$$

oluyor. Şimdi G' kümesini şöyle tanımlayalım:

$$G' = G \setminus \{(x_0, Sn_0, y_1)\}.$$

G' kümesinin güzel olduğunu kanıtlayarak G'nin en küçük güzel küme olmasıyla çelişeceğiz. Önce birinci koşulun sağlandığını gösterelim. Her $x \in X$,

$$(x, 0, \psi(x)) \in G$$

olduğundan, ve $(x, 0, \psi(x)) \neq (x_0, Sn_0, y_1)$ olduğundan (çünkü $Sn_0 \neq 0$), $(x, 0, \psi(x)) \in G'$ olur.

Gelelim ikinci koşula. $x \in X$, $y \in Y$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(x, n, y) \in G'$$

koşulunun sağlandığını varsayalım. $G' \subseteq G$ olduğundan

$$(x, n, y) \in G$$

ve dolayısıyla

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G$$

olur. Eğer

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) = (x_0, Sn_0, y_1)$$

olsaydı,

$$\begin{aligned} x &= x_0, \\ Sn &= Sn_0, \\ \varphi(x, y) &= y_1 \end{aligned}$$

olurdu. Demek ki

$$n = n_0.$$

Bunlardan,

$$(x_0, n_0, y) = (x, n, y) \in G$$

çıkar. Ama aynı zamanda

$$(x_0, n_0, y_0) \in G.$$

Demek ki, tümevarım varsayımına göre,

$$y = y_0.$$

Buradan

$$\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x, y) = y_1$$

buluruz. Çelişki. Demek ki

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \neq (x_0, Sn_0, y_1)$$

Yani

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G \setminus \{(x_0, Sn_0, y_1)\} = G'.$$

Böylece G' kümesinin güzel olduğunu kanıtladık. Bu da elde etmek istediğimiz nihai çelişkidir. □

Bu teoremin önemli bir sonucu vardır: Eğer $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n(x_0)$ değerini alan bir $h : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu vardır:

Sonuç 10.2. *X bir küme, $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ bir eleman olsun. O zaman,*

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots\}$$

topluluğu, daha doğrusu

$$\{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$$

topluluğu bir kümedir. Daha doğru bir ifadeyle, öyle bir ve bir tane $h : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu vardır ki, $h(0) = x_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $h(Sn) = f(h(n))$ olur.

Kanıt: Bu sonucun standart kanıtı, X'in x_0'ı içeren ve f altında kapalı tüm altkümelerinin kesişimini almaktır (X, bu tür altkümelerden biridir), yani aslında Teorem 10.1'in kanıtını bu duruma uyarlamaktır. Ama biz doğrudan Teorem 10.1'den yararlanacağız.

$\psi : X \to X$ fonksiyonu, her $x \in X$ için

$$\psi(x) = x_0$$

olarak tanımlansın, yani sabit x_0 fonksiyonu olsun. $\varphi : X \times X \to X$ fonksiyonu da

$$\varphi(x, y) = f(y)$$

olarak tanımlansın. Teorem 10.1'e göre,

$$\begin{aligned} g(x, 0) &= \psi(x) = x_0, \\ g(x, Sn) &= \varphi(x, g(x, n)) = f(g(x, n)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$g : X \times \mathbb{N} \to X$$

fonksiyonu vardır. Kanıt için gerekmez ama, n üzerine tümevarımla, $g(x, n)$ değerinin x'ten bağımsız olduğu kanıtlanabilir.

$$u : \mathbb{N} \to X \times \mathbb{N}$$

fonksiyonu

$$u(n) = (x_0, n)$$

kuralıyla tanımlansın.

$$h = g \circ u : \mathbb{N} \to X$$

olsun. O zaman,

$$h(0) = (g \circ u)(0) = g(u(0)) = g(x_0, 0) = x_0,$$

ve

$$\begin{aligned} h(Sn) &= (g \circ u)(Sn) = g(u(Sn)) = g(x_0, Sn) \\ &= f(g(x_0, n)) = f(g(u(n))) = f((g \circ u)(n)) = f(h(n)) \end{aligned}$$

olur. $h(\mathbb{N})$, varlığı kanıtlanmak istenen kümedir. □

Alıştırmalar

10.1. $x \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\{1, x, x^2, x^4, x^8, \dots\}$$

daha doğru bir ifadeyle

$$\{x^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın.

10.2. $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın.

10.3. $x \in \mathbb{N}$ olsun. $x_0 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x^{x_n}$ "tanım"larını yapalım. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın.

10.4. X bir doğal sayı kümesi, $a \in X$, ve $\psi : X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$f(0) = a$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(Sn) = \psi(f(n))$$

eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayın.

10.5. X bir küme ve $\alpha : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Yukarıdaki alıştırmadan yararlanarak,

$$f(n) = \alpha^n = \alpha \circ \cdots \circ \alpha \ \ (n \text{ defa})$$

eşitliğini sağlayan bir

$$f : \mathbb{N} \to \mathrm{Fonk}(X, X)$$

fonksiyonun varlığını kanıtlayın. ($\alpha^0 = \mathrm{I}_X$ olarak tanımlanmıştır.) Bundan

$$\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$$

ve her $x \in X$ için,

$$\{\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

topluluklarının küme olduklarını çıkarsayın.

10.6. $f(n) = n!$ kuralının $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon tanımladığını kanıtlayın.

10.2 Bir Uygulama: Doğal Sayıların Biricikliği

Önceki bölümlerde aşağıdaki P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ üçlüsünün varlığını kanıtladık.

P1. $0 \in \mathbb{N}$ *ve* $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *birebir bir fonksiyondur ve her* $x \in \mathbb{N}$ *için* $Sx \neq 0$ *olur.*

P2. *Eğer* $A \subseteq \mathbb{N}$ *altkümesi* 0*'ı içeriyorsa ve içerdiği her* n *için* Sn*'yi de içeriyorsa o zaman* $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Şimdi soru şu: Bu özellikleri sağlayan kaç tane $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı (ya da üçlüsü) vardır?

Bir sürü bulunabilir tabii. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ sayısı yerine $(n, 0)$ yazabiliriz, daha matematiksel bir dilde anlatalım:

$\mathbb{N}$ yerine $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \times \{0\}$ alınabilir,
0 yerine $0' = (0, 0)$ alınabilir ve
$S' : \mathbb{N}' \longrightarrow \mathbb{N}'$ fonksiyonu $S'(n, 0) = (Sn, 0)$ kuralıyla tanımlanabilir.

O zaman $(\mathbb{N}', S', 0')$ üçlüsü de P1 ve P2 özelliklerini sağlar. Ama $(\mathbb{N}, S, 0)$ ile $(\mathbb{N}', S', 0')$ birbirlerine o kadar benzerler ki, bunları "gerçekten" iki ayrı yapı olarak kabul etmek istemeyiz. Sanki biri Türkçe, diğeri İngilizce, birinde sıfır

dediğimiz elemana diğerinde "zero" diyoruz, birinde ardılı diyoruz, diğerinde "successor". Yani bir sözlükle birinden diğerine geçiş yapabiliriz. Bu bölümde P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısının "özünde" biricik olduğunu kanıtlayacağız, yani bu iki özelliği sağlayan tüm yapılar birbirlerine çok benzerler, birini anlarsak diğer hepsini anlamış oluruz.

$\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}'$ birer küme, $0 \in \mathbb{N}$, $0' \in \mathbb{N}'$ ve $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ve $S' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ birer fonksiyon olsun. Eğer

$$f(0) = 0'$$

ve her $x \in \mathbb{N}$ için

$$f(Sx) = S'(f(x))$$

eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ eşlemesi varsa, $(\mathbb{N},\ 0,\ S)$ ve $(\mathbb{N}',\ 0',\ S')$ üçlülerine ***eşyapısal*** ya da ***izomorf*** denir. f eşlemesine de ***eşyapısallık*** ya da ***izomorfi*** adı verilir.

İzomorfi, tabiri caizse, ki caizdir, iki yapı arasında bir sözlüktür. Diyelim biz $(\mathbb{N}', 0', S')$ yapısına aşinayız. Bir de elimizde f var. Tabii f'nin ters fonksiyonu olan f^{-1} de var. (Yani yukarıdaki metaforla, hem Türkçe-İngilizce, hem de İngilizce-Türkçe sözlük var.) Ve diyelim karşı taraf bize, $a \in \mathbb{N}$ için $S(a)$'nın kaç olduğunu sordu. Sözlük yardımıyla bunu anladığımız dile, yani $S'(f(a))$'ya çevririz. f'yi ve S' fonksiyonlarını bildiğimiz için bu çeviri işinde bir zorluk yaşamayız. Ardından cevap olarak $f^{-1}(S'(f(a)))$'yı veririz. Bu gerçekten de doğru cevaptır, çünkü

$$S(a) = f^{-1}(S'(f(a)))$$

olur.

Teoremin kanıtının anafikri oldukça basit: $\mathbb{N}$'nin 0 elemanını $0'$ elemanına götürmek zorundayız ve eğer $n \in \mathbb{N}$ elemanı $n' \in \mathbb{N}'$ elemanına gitmişse, Sn elemanı $S'(n')$ elemanına gitmek zorunda. **Marifet, bunu gerçekleştiren bir fonksiyon bulmakta yatıyor.**

Teorem 10.3 (Dedekind)**.** $(\mathbb{N}, 0, S)$ *ve* $(\mathbb{N}', 0', S')$ *üçlüleri* P1 *ve* P2 *özelliklerini sağlasın*[2]*. O zaman* $(\mathbb{N}, 0, S)$ *ve* $(\mathbb{N}', 0', S')$ *üçlüleri eşyapısaldırlar ve birinden diğerine giden tek bir eşyapı eşlemesi vardır.*

Kanıt: Teorem 10.1'de $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}'$, $\psi = s_{0'}$ (sabit $0'$ fonksiyonu) ve $\varphi(x, y) = S'y$ alalım. φ'nin değerinin birinci koordinattan bağımsız olduğuna dikkatinizi çekerim. f, anılan teoremde bulunan fonksiyon olsun:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$$

[2]İkincisi muadil özellikleri sağlayacak elbette: P1 ve P2'de $\mathbb{N}$, 0 ve S simgelerine $'$ işaretini ekleyin.

ve

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \psi(x) = 0', \\ f(x,Sn) &= \varphi(x, f(x,n)) = S'(f(x,n)) \end{aligned}$$

olur. f'nin değerinin birinci koordinattan bağımsız olduğu n üzerine tümevarımla gösterilebilir. Dolayısıyla f'yi ikinci koordinatın fonksiyonu olarak görebiliriz. Böylece bulunan

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$$

fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f(0) &= 0', \\ f(Sn) &= S'(f(n)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar. Böylece istenen eşitlik kanıtlanmış oldu.

Şimdi f'nin birebir ve örten olduğunu kanıtlayalım.

0'dan başka $0'$ değerini alan $\mathbb{N}$'nin bir başka elemanı daha olmadığını anlamak oldukça kolay: Eğer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, bir $m \in \mathbb{N}$ için $n = Sm$ olur ve o zaman da

$$f(n) = f(Sm) = S'(f(m)) \neq 0'$$

olur.

Eğer $m \in \mathbb{N}'$ (tümevarım varsayımından dolayı) tek bir $n \in \mathbb{N}$ tarafından vuruluyorsa, o zaman $S'm$'nin de Sn tarafından vurulduğunu kanıtlamak zor değil:

$$f(Sn) = S'(f(n)) = S'm.$$

Demek ki f örten bir fonksiyon. Eğer ayrıca

$$f(p) = S'm$$

ise, bir önceki paragrafa göre, $p = 0$ olamaz ve bir $q \in \mathbb{N}$ için $p = Sq$ olur. Dolayısıyla

$$S'(m) = f(p) = f(Sq) = S'(f(q))$$

olur ve P1'den dolayı $m = f(q)$, yani $f(n) = f(q)$ bulunur. Tümevarım varsayımından $n = q$ çıkar. Demek ki f birebir bir fonksiyon.

Şimdi f'den başka bir eşyapı eşlemesi olmadığını kanıtlayalım. Diyelim g de böyle bir eşyapı eşlemesi. O zaman $g^{-1} \circ f$ bileşkesi $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir eşyapı eşleşmesi olur. Demek ki $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir eşyapı eşleşmesinin $\mathrm{I}_{\mathbb{N}}$ olduğunu kanıtlamalıyız. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bir eşyapı eşleşmesi olsun. $h(n) = n$ eşitliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

$h(0)$'ın 0 olması gerektiğini yukarıda gördük. ($\mathbb{N}'$ yerine $\mathbb{N}$ alın.) Ayrıca $h(n) = n$ ise $h(Sn) = S(h(n)) = S(n)$ olur. n üzerine tümevarım istediğimizi kolayca verir. □

Notlar

10.7. (Arife not) Dikkat ederseniz P1 elemanlardan bahsediyor ama P2 altkümelerden bahsediyor. Yukarıdaki teorem, P1 ve

> **P'2. (Teorem 5.6.)** *$\varphi(x)$, x doğal sayısıyla ilgili bir önerme olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\phi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur.*

önermelerini sağlayan $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı için yanlıştır. Nitekim (model teorisinin en temel teoremlerinden biri olan) Lowenheim-Skolem Teoremi (altkümelerden değil) elemanlardan bahseden her tutarlı teorinin olası her kardinalitede bir modeli olduğunu söyler.

10.8. (Arife not) Burada kanıtlanan teorem, kümeler kuramının her modelinde[3] doğrudur (tabii), yani kümeler kuramının hangi modelini alırsak alalım, o modeldeki doğal sayılar yapısı özünde biriciktir. Kümeler kuramının farklı modellerinin doğal sayılar yapısı birbirinden çok farklı olabilir ama.

[3]Kümeler kuramının bir modeli, kümeler kuramının aksiyomlarının doğru olduğu bir yapıdır.

11. Doğal Sayılar Yapısı II

11.1 Peano Aritmetiği

Geçen bölümlerde $(\mathbb{N}, S, 0, +, \times)$ "matematiksel yapısını" tanımladık. Burada,

$\mathbb{N}$ bir kümedir,
0, $\mathbb{N}$ kümesinin bir elemanıdır,
$S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyondur,
$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyondur
$\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyondur.

Bu yapı hakkında birçok sonuç kanıtladık. Kanıtladığımız şu sonuçlara özellikle dikkat çekmek istiyoruz:

PA1. (Önsav 7.7) *S fonksiyonu 0 değerini almaz.*

PA2. (Teorem 7.8) *S fonksiyonu birebirdir.*

PA3. (Teorem 9.27) *$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ formülü, S, 0, $+$, $\times$ ve mantıksal simgeler*[1] *kullanılarak yazılmış bir cümle olsun. Simge sayısından tasarruf etmek için $y_1, \ldots, y_k$ yerine $\overline{y}$ yazalım. Eğer her $\overline{y}$ için,*

1. *$\varphi(0, \overline{y})$ doğruysa ve*
2. *her n doğal sayısı için, $\varphi(n, \overline{y})$ doğru olduğunda $\varphi(Sn, \overline{y})$ önermesi de doğruysa,*

o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n, \overline{y})$ doğrudur. Bir başka deyişle,

$$\forall \overline{y}\, [(\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall n\, (\varphi(n, \overline{y}) \rightarrow \varphi(Sn, \overline{y}))) \rightarrow \forall n\, \varphi(n, \overline{y})]$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

PA4. (Teorem 9.1) *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n + 0 = n$ ve $n + Sm = S(n + m)$ olur.*

PA5. (Teorem 9.8) *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n \times 0 = 0$ ve $n \times Sm = (n \times m) + n$ olur.*

[1] Matematiğin mantıksal simgeleri $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, parantezler ve değişkenlerdir.

Bir teori, aksiyom adı verilen önermelerden oluşur. Yukarıdaki PA1, PA2, PA3, PA4 ve PA5 de bir teori oluşturur. Adına ***Peano Aritmetiği*** denir, kısaca **PA** olarak zikredilir. Ama dikkat, PA3, tek bir aksiyom değildir, her φ formülü için ayrı bir aksiyomdur. Burada amaç, kümeler kuramından kurtulup, aritmetiği aritmetiğin kendi dilinde (toplama ve çarpmayla) ifade etmektir. Böylece aritmetikle uğraşan biri kümeler kuramıyla uğraşmak zorunda kalmaz... Aslında bunun mümkün olmadığını biliyoruz (notlara bakınız) ve mantıkçılar dışında hemen hiçbir matematikçi kendisini PA ile kısıtlamaz.

Notlar

11.1. Peano aksiyomlarının doğal sayıların, yani aritmetiğin özünü oluşturduğu düşünülür ama bu doğru değildir. Nitekim Gödel'in 1931'de kanıtladığı Eksiklik Teoremi'nden beri, kümeler kuramının aritmetikten (Peano Aritmetiğinden mesela) daha güçlü olduğu biliniyordu, örneğin kümeler kuramı sayesinde aritmetiğin tutarlı olduğu (yani aritmetiğin aksiyomlarından bir çelişki çıkmayacağı) kanıtlanabilir[2], ama aritmetik kendi kendisinin tutarlı olduğunu kanıtlayamaz. Bir sonraki notta bu konuya devam edeceğiz.

11.2. Jeff Paris ve Leo Harrington, 1977'de kümeler kuramında kanıtlanabilen ama Peano aritmetiğinde kanıtlanamayan ve bir önceki notta sözü edilen önermeden çok daha aritmetiksel (ve doğal) bir görünümü olan bir önerme bulmuşlardır. **Güçlendirilmiş Sonlu Ramsey Teoremi** adı verilen önerme şöyle: *Her n, k, $m > 0$ doğal sayıları için, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, eğer $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ ise, S'nin n elemanlı alkümelerini 1'den k'ya kadar numaralandırılmış boyalarla nasıl boyarsak boyayalım, o zaman S'nin en az m elemanlı öyle bir Y altkümesi vardır ki, Y'nin n elemanlı altkümelerinin hepsi aynı renge boyanmıştır, ayrıca Y'nin eleman sayısı Y'nin en küçük elemanından daha az değildir.* (Her ne kadar bu önerme altkümelerden bahsediyorsa da, önermenin altkümelerden hiç bahsetmeden ve yalnızca toplama ve çarpma kullanarak ifade edileceği biliniyor.) Paris ve Harrington, bu önermeyi varsayarsak, Peano aritmetiğinin kendisinin tutarlı olduğunu kanıtlayacağını göstererek (bir önceki notta sözü edilen Gödel'in teoreminden dolayı) Peano aritmetiğinin bu önermeyi kanıtlayamayacağını göstermişlerdir.

11.3. Toplamanın S'den hareketle ve çarpmanın S'den ve toplamadan hareketle (kümeler kuramı, yani $\in$ simgesi kullanmadan) tanımlanamayacağı biliniyor. Öte yandan üs almak ve faktoriyel gibi aritmetiğin ilgi alanına giren fonksiyonlar toplama ve çarpmadan hareketle tanımlanabilir. Aritmetiğin ilgi alanına giren tüm fonksiyonların toplama ve çarpmadan hareketle tanımlanabileceği inancı yaygındır.

11.4. Doğal sayılardan doğal sayılara giden ama toplama ve çarpmayla tanımlanamayan fonksiyonlar da vardır. Bunların en tanınmışı Ackermann fonksiyonudur.

Geçmişte Bölüm 9.6'ya kadar kanıtladığımız birçok sonuç PA aksiyom sisteminde de kanıtlanabilir. İşte bu sonuçların bir listesi:

Teorem 11.1. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

i. *Eğer $n \neq 0$ ise, $Sx = n$ eşitliğini sağlayan bir x vardır.*

ii. [Değişme Özelliği]. $n + m = m + n$.

iii. [Birleşme Özelliği]. $(n + m) + p = n + (m + p)$.

iv. [Sadeleşme]. *Eğer $n + m = n + p$ ise $m = p$ olur.*

[2] Aslında önceki sayfalarda yaptığımız tam da buydu: Aritmetiğin bir modelini kümeler kuramından hareketle inşa ettik.

v. [**Etkisiz Eleman**]. $1 \times m = m = m \times 1$.

vi. [**Değişme Özelliği**]. $n \times m = m \times n$.

vii. [**Birleşme Özelliği**]. $(n \times m) \times p = n \times (m \times p)$.

viii. [**Dağılma Özelliği**]. $n \times (m + p) = n \times m + n \times p$.

ix. [**Sıfırçarpansızlık**]. *$nm = 0$ ise ya $n = 0$ ya da $m = 0$ olur.*

x. [**Sıralama**]. *"$x \leq y \Leftrightarrow \exists z\ x + z^2 = y$" formülüyle tanımlanmış $\leq$ ikili ilişkisi bir tamsıralamadır, yani*

x.i. $n \leq n$.

x.ii. *$n \leq m$ ve $m \leq n$ ise $n = m$.*

x.iii. *$n \leq m$ ve $m \leq p$ ise $n \leq p$.*

x.iv. *Ya $n \leq m$ ya da $m \leq n$ olur .*

xi. *$n < m$ ancak ve ancak $n + p < m + p$ ise.*

xii. *Eğer $n < m$ ve $0 < p$ ise, o zaman $n \times p < m \times p$.*

xiii *n ile Sn arasında bir doğal sayı yoktur.*

xiv. *$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ formülü, S, 0, $+$, $\times$ ve mantıksal simgeler kullanılarak yazılmış bir cümle olsun*[3]*. Ayrıca $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ olsun. Simge sayısından tasarruf etmek için $y_1, \ldots, y_k$ yerine $\overline{y}$ ve $a_1, \ldots, a_k$ yerine $\overline{a}$ yazalım. $\varphi(x, \overline{a})$ cümlesi bir doğal sayı için yanlışsa (ya da doğruysa), o zaman $\varphi(x, \overline{a})$ formülünün yanlış (ya da doğru) olduğu en küçük bir doğal sayı vardır.*

xv. *$\varphi(x, \overline{y})$ ve $\overline{a}$ yukarıdaki gibi olsun. Eğer her x için*

$$\forall y\ (y < x \longrightarrow \varphi(y, \overline{a})) \longrightarrow \varphi(x, \overline{a})$$

formülü doğruysa, o zaman $\forall x\ \varphi(x, \overline{a})$ formülü doğrudur.

Kanıt: Sadece xiv numarayı kanıtlayıp, diğerlerini okura alıştırma olarak bırakacağız. $\varphi(x, \overline{a})$ yerine kısaca $\varphi(x)$ yazalım. Diyelim $\varphi(x)$ formülünün yanlış olduğu en küçük doğal sayının olmadıüğını varsayalım. Bu durumda $\varphi(x)$ formülünün her x için doğru olduğunu kanıtlayacağız.

$\psi(x)$ formülünü şöyle tanımlayalım:

$$\forall y\ (y < x \longrightarrow \varphi(y)).$$

Bu formülü x üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $\psi(0)$ elbette doğru, ne de olsa 0'dan küçük doğal sayı yok. Şimdi $\psi(x)$'in doğru olduğunu varsayıp $\psi(Sx)$ formülünün doğru olduğunu kanıtlayalım. Eğer Sx'ten küçük bir y doğal sayısı için $\varphi(y)$ yanlış olsaydı, bu y doğal sayısı tümevarım varsayımından dolayı x'ten küçük olamazdı, demek ki (xiii)'e göre x'e eşit olmak zorunda olurdu, ama o zaman da x, φ formülünün yanlış olduğu en küçük doğal sayı olurdu, çelişki. Demek ki $\psi(x)$ formülü her x doğal sayısı için doğru.

Şimdi teoremimizin kanıtını bitirelim: Diyelim φ formülü bir n doğal sayısı için yanlış. $x = n + 1$ olsun. O zaman $\psi(x)$ yanlış olur. Çelişki. □

[3] Cümle ya da formülün matematiksel tanımı için bkz. Bölüm 12.

11.2 Üs Alma ve Diğer Fonksiyonlar

Üs alma ya da faktoriyel fonksiyonları PA'da, yani toplama ve çarpma işlemleriyle tanımlanabilir mi?

Toplama ve çarpma işlemlerini kullanarak, iki sayının ebob ve ekok'unu tanımlamak zor değil, hatta 1'den n'ye kadar olan sayıların ekok'unu bile tanımlamak mümkün. Okur bunu bu aşamada bir çırpıda yapabilir. Ama mesela $n!$ ya da n^m fonksiyonunu tanımlamak mümkün mü?

Bölüm 10'de $n!$ ve n^m fonksiyonlarının **kümeler kuramında** tanımlandığını gördük, ama acaba toplama ve çarpmayla (yani çok daha kısıtlı olan Peano Aritmetiği'nde) tanımlanabilir mi?

0 ve S simgelerini ve PA1, PA2 ve PA3 aksiyomlarını kullanarak toplamanın tanımlanamadığını söyledik[4] ve bu sorunu gidermek için dilimize, 0 ve S dışında $+$ diye bir fonksiyon simgesi ekledik ve buna ilaveten bir de PA4 aksiyomunu kabul ettik.

Çarpmanın da 0, S ve $+$ simgelerini ve PA1, PA2, PA3 ve PA4 aksiyomlarını kullanarak tanımlanamadığını söyledik[5] ve bu sorunu gidermek için dilimize $\times$ diye bir fonksiyon simgesi daha ekledik ve PA5 aksiyomunu kabul ettik.

Toplama ve çarpmadan sonra akla ilk gelen bir sonraki aşamaya geçelim: $(n, m) \to n^m$ formülüyle "tanımlanan" (hepimizin bildiği üs alma) fonksiyonunun varlığı, 0, S, $+$ ve $\times$ simgelerini ve PA1, PA2, PA3, PA4 ve PA5 aksiyomlarını kullanarak tanımlayabilir miyiz? Önceki iki paragrafa bakarak üs alma fonksiyonun PA'da tanımlanamayacağını düşünmek doğaldır. Ama öyle değil, üs alma fonksiyonu bu simge ve aksiyomlarla tanımlanabiliyor. Hatta faktoriyel ve n-inci asal fonksiyonları da tanımlanabilir. Sayılar kuramının tüm "doğal" fonksiyonlarının PA'da tanımlanabileceği düşünülüyor[6].

Genel yöntemden bir başka yerde sözedebiliriz. Meraklı okur [Po] kitabına bakabilir mesela. Gelecekte PA ile pek ilgilenmeyeceğimizden, sadece üs almanın PA'da nasıl tanımlandığını görelim:

$r(u, v)$ sayısı, u sayısı $v + 1$'e bölündüğünde kalan olsun. PA'da kolaylıkla

$$r(u, v) = x$$

anlamına gelebilecek bir formül yazabiliriz (okura alıştırma). Şimdi aşağıda tanımlanan (ve tek bir satıra sığdıramadığımız) $\varphi(n, m, x)$ formülüne bakalım:

$$\begin{aligned} \exists u \exists v \quad & [r(u, v) = 1 \wedge \\ & r(u, (m+1)v) = x \wedge \\ & \forall i \, (1 \leq i \leq m \longrightarrow r(u, (i+1)v) = r(u, iv)n)]. \end{aligned}$$

[4] PA3'ü 0 ve S ile yazılan formüllere kısıtlamak gerekir.

[5] PA3'ü 0, S ve $+$ ile yazılan formüllere kısıtlamak gerekir.

[6] Ama "doğal"ın matematiksel tanımını bilmediğimizden bu önermeyi matematiksel olarak kanıtlayamayız.

Bu formülün ancak ve ancak $x = n^m$ ise doğru olduğunu kanıtlayalım:

Önce koşulları sağlayan u ve v'nin varlığını varsayalım. Her $i = 0, 1, \ldots, m$ için,

$$a_i = r(u, (i+1)v)$$

tanımını yapalım. Bu tanımdan, $a_0 = 1$ ve $a_{i+1} = a_i n$ eşitlikleri çıkar. Demek ki, tümevarımla her i için, $a_i = n^i$ ve $p = a_m = n^m$ olur.

Şimdi formülde $p = n^m$ alalım ve u ve v'nin varlığını kanıtlayalım. Ama bu kanıt için biraz soyut cebir bilmek lazım, özellikle Çin Kalan Teoremi'ni. Soyut cebir bilmeyenler bu kanıtı atlayabilirler.

Biraz hazırlık yapmamız gerekecek.

Önce, her $m > 0$ için, m'den küçükeşit her pozitif doğal sayının böldüğü bir w_m sayısının varlığını kanıtlayalım[7]. Bunu m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $m = 1$ için, $w_1 = 1$ ya da w_1'i herhangi bir doğal sayı almak yeterli. Diyelim m için koşulu sağlayan w_m sayısı bulduk. $w_{m+1} = w_m(m+1)$ olsun. $m+1$'den küçük her pozitif doğal sayı w_{m+1}'i böler[8].

Yukarıdaki gibi bir w_m sayısı seçelim ve $v_m = w_m + 1$ tanımını yapalım. v_m'nin bölenleri m'den mutlak büyük olmak zorundadır.

Şimdi istediğimizin kanıtına geçebiliriz. Öyle u ve v bulmak istiyoruz ki,

$$\begin{aligned} u &\equiv 1 \mod (v+1) \\ u &\equiv n \mod (2v+1) \\ u &\equiv n^2 \mod (3v+1) \\ &\cdots \\ u &\equiv n^m \mod ((m+1)v+1) \end{aligned}$$

olsun. $v = v_m$ seçelim. Eğer $1 \le i < j \le m+1$ ise $iv+1$ ve $jv+1$'in aralarında asal olduğunu iddia ediyoruz. p, her ikisini de bölen bir asal sayı olsun. O zaman p asalı, aralarındaki farkı da, yani $(j-i)v$ sayısını da böler. Ama v ile p aralarında asallar. Demek ki p asalı $j-i$ sayısını böler. Ama $1 \le j-i \le m$ olduğundan, bu, v'nin seçimiyle çelişir. Şimdi Çin Kalan Teoremi'ni uygulayarak istediğimiz u'yu bulabiliriz.

Alıştırmalar

11.5. Sadece ve sadece $x = n!$ iken doğru olan bir $\varphi(n, x)$ formülü bulun. (Formül tabii toplama ve çarpma kullanılarak yazılabilmeli, yoksa $x = n!$ de işi görürdü!)

Notlar

11.6. Kitabın devamında Peano Aritmetiği'ne atıf yapmayacağız. Hiç çekinmeden kümeler kuramının tüm gücünü kullanacağız.

Bundan sonraki notlar matematiksel mantıkta ve model teoride donanımlı olanlar için yazılmıştır.

[7] $w_m = m!$ işi görür tabii ama henüz $m!$ sayısının tanımını yapmadık.

[8] Dikkat, burada $m \mapsto w_m$ diye bir fonksiyon tanımlamıyoruz, sadece her m sayısı için istediğimiz özelliği sağlayan bir w_m sayısının varlığını kanıtlıyoruz.

11.7. Toplamanın 0 ve S'den hareketle tanımlanacağını varsayalım. O zaman sıralama da $\leq$ de 0 ve S'den hareketle tanımlanabilirdi. Şimdi $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısının teorisinin "nonstandart" bir modelini alalım. Bu modeli (elbette $x < Sx$ önermesi doğru olacak biçimde) iki farklı biçimde sıralayacağız. $\mathbb{N}$'ye benzemek zorunda olan standart kısmı bildiğimiz gibi sıralayalım, $x < Sx$ önermesi doğru olmak zorunda olduğundan başka bir seçeneğimiz de yok zaten. Nonstandart kısımlar $\mathbb{Z}$'nin kopyalarına benzerler. $\mathbb{Z}$'nin en az 2 kopyasının olduğunu varsayalım ve her kopyayı kendi içinde bildiğimiz gibi sıralayalım. Diyelim $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Z}_1$ ve $\mathbb{Z}_2$ adını verdiğimiz sadece iki kopyası var. Şimdi modeli $\mathbb{N} < \mathbb{Z}_1 < \mathbb{Z}_2$ ya da $\mathbb{N} < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_1$ olmak üzere iki farklı biçimde sıralayabiliriz. Ama $\mathbb{Z}_1$ ile $\mathbb{Z}_2$'nin yerlerini değiştiren tahmin edilen fonksiyon S'ye saygı duyar ama sıralamaya saygı duymaz. Demek ki sıralama S'den ve 0'dan hareketle tanımlanamaz.

11.8. Presburger'ın bir teoremine göre toplamayla ilgili doğru olan her önerme kanıtlanabilir, üstelik bir bilgisayar programı yardımıyla kanıtlanabilir, öte yandan Gödel'in ikinci eksiklik teoremine göre toplama ve çarpmayla ilgili doğal sayılarda doğru ama bu aksiyomlarla (hatta daha fazlasıyla da) kanıtlanamayan bir önerme vardır. Demek ki çarpma işlemi, 0, S ve $+$ yardımıyla tanımlanamaz.

11.9. Bölüm 7 ve 9'da ZF kümeler kuramından hareketle PA'nın bir modelini (yani PA aksiyomlarının geçerli olduğu bir $\mathbb{N}, S, +, \times, 0)$ yapısı bulduğumuza göre, ZF kümeler kuramının PA'da çelişki olmadığını kanıtlamış olduk. Yani mantığın diliyle

$$ZF \vdash \mathrm{Con}(PA).$$

Gödel'e göre, PA, kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamaz ama. Demek ki ZF PA'dan daha güçlüdür. Biz bu kitaplarda ZF'yi esas alacağız. (Zaten ikinci cildin konuları PA'ya hiçbir biçimde sığdırılamaz.)

12. Biraz Formel Mantık

Altbölüm 4.2'de, Tanımlı Altküme Aksiyomu'nu açıklarken, tam olarak ne olduğunu söylemeden "kümeler kuramının dilinde yazılmış formül"lerden sözettik. Önceki bölümlerde de "0 ve S kullanılarak yazılmış bir değişkenli formül"lerden ya da "0, S, $+$ ve $\times$ kullanılarak yazılmış bir değişkenli formül"lerden sözettik. Bu bölümde formülün ne demek olduğunu, pek pedagojik olmaya çalışmadan, kısaca açıklamaya çalışacağız. Konumuz mantık olmadığı için açıklamayı biraz üstünkörü yapacağımızı itiraf etmeliyim, okurun sezgi kazanması bizim için yeterli olacak. Konu hakkında daha ayrıntılı bilgi sahibi olmak isteyen [CK], [Po], [Mar] gibi mükemmel kaynaklara, hatta herhangi bir model teori ya da matematiksel mantık kitabına başvurabilir. Bu iki cildin içeriğinin anlaşılması için, bol parantezli ve bol dipnotlu bu bölümün pek zaruri olmadığını da ekleyelim. Okur şimdilik şöyle bir okuyup geçsin.

12.1 Alfabe

Her dilde olduğu gibi matematikçede de bir tümce yazmak için her şeyden önce bir alfabeye ihtiyaç vardır. Matematikçenin temel alfabesi şu simgelerden oluşur:

$$\exists,\ \wedge,\ \neg,\ (,\ ),\ =,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

Kullanılan diğer $\forall$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ gibi mantıksal simgeler yukarıdakilerin yardımıyla tanımlanabilirler, dolayısıyla onları alfabeye eklemenin gereği yoktur[1], ama tabii bu kısaltmaları kullanmazsak formüller işin içinden çıkılamayacak kertede anlaşılmaz olabilirler, bu yüzden formüllerimizde her türlü kısaltmayı kullanacağız.

v_0, v_1, v_2, ... simgelerine (harflerine) ***değişken*** adı verilir.

Her ne kadar v_0, v_1, v_2, ... değişken simgeleri yüzünden alfabemiz sonsuz gibi görünse de, bu aldatıcıdır. Değişkenleri sadece v ve | simgeleriyle elde

[1] Aslında "Polonya notasyonu" denilen bir yazım biçimi kullanırsak parantezlere de gerek yoktur.

edebiliriz:

$$\begin{array}{lll} v_0 & \text{yerine} & v, \\ v_1 & \text{yerine} & v|, \\ v_2 & \text{yerine} & v||, \\ & \ldots & \end{array}$$

yazarsak, sonsuz adet değişken simgesini ikiye indirebiliriz (ama bunu yapmayacağız tabii, hatta daha anlaşılır olmak için, v_i yerine x, y, z, P, ℓ, α, κ, ζ gibi ifade gücü daha yüksek simgeler kullanacağız).

Matematiğin bu temel alfabesi dışında her matematiksel teorinin kendine özgü simgeleri vardır. Örnekler aşağıda.

Bu iki ciltte açıklayacağımız ZFC kümeler kuramının kendine özgü tek bir simgesi vardır[2]: $\in$.

Peano Aritmetiği'nin kendine özgü dört simgesi vardır: 0, S, $+$ ve $\times$.

Bir nokta-doğru geometrisinin kendine özgü üç simgesi vardır: "ben bir noktayım" anlamına $\mathcal{P}$ (yani $\mathcal{P}(x)$, "x bir noktadır" anlamına gelecek) "ben bir doğruyum" anlamına $\mathcal{L}$ ve "P noktası ℓ doğrusunun üstünde" anlamına I (yani $I(x, y)$, "x ve y'nin biri nokta diğeri doğrudur ve nokta olanı doğru olanının üstündedir" anlamına gelecek).

Biraz soyut matematik görmüşler için başka örnekler verebiliriz: Halkalar kuramının alfabesi 0, 1, $+$ ve $\times$ simgelerinden oluşur. Sıralı halkalar kuramının alfabesi 0, 1, $+$, $\times$ ve $\leq$ simgelerinden oluşur. Ama biz sadece kümeler kuramı ve Peano Aritmetiği'yle ilgileneceğiz.

Sonuç olarak, matematiğin temel simgelerine sadece $\in$ simgesini ekleyerek (ZFC) kümeler kuramının tüm matematiksel formüllerini yazabiliriz.

Yukarıdaki simgeler dışında formüllerimizde eğer dilersek "parametreler" de kullanabiliriz. Örneğin reel sayıları çalışırken formüllerimizde, meşhur π sayısını temsilen (örneğin c_π diye) bir simge kullanmak isteyebiliriz, buna hakkımız olmalı.

12.2 Kümeler Kuramının Formülleri

Formülün tanımı basitten karmaşığa doğru verilir (bir nevi tümevarım). Önce, adına "atomik" denen en basit formülleri tanımlayacağız (ilk iki tanım), sonra atomik formüllerin yardımıyla elde edilen daha karmaşık formülleri.

1. Her i ve j için, $v_i = v_j$ bir formüldür.

2. Her i ve j için, $v_i \in v_j$ bir formüldür.

[2]NBG olarak adlandırılan von-Neumann-Bernays-Gödel kümeler kuramında küme olmayan toplulukları betimlemek için bir de ayrıca "x bir sınıftır ya da topluluktur" anlamına kullanılan bir simge daha vardır. GB'de ya da ZFC'de kümeler hakkında kanıtlanan her önerme diğerinde de kanıtlanabilir, yani kümeler açısından her ikisi de eşdeğerdir.

3. Eğer φ matematiksel bir formülse, $\neg(\varphi)$ de bir formüldür.

4. Eğer φ ve ψ formüllerse, $(\varphi) \wedge (\psi)$ de bir formüldür.

5. Eğer φ bir formülse, her i doğal sayısı için, $\exists v_i\ (\varphi)$ de bir formüldür.

6. Bir simgeler dizisi ancak yukarıdaki kurallar uygulanarak sonlu sayıda adımda yazılmışsa bir formüldür[3].

Bazen parantez kullanmak gereksiz olabilir. Mesela bazen $(\varphi) \wedge (\psi)$ yerine $\varphi \wedge \psi$ yazmak yeterli olabilir. Bu durumlarda, formülleri kısaltmak adına, parantez kullanmayacağız. Ama mesela $\neg\ \alpha \wedge \beta$ hem $(\neg a) \wedge \beta$ hem de $\neg(\alpha \wedge \beta)$ anlamına gelebileceğinden burada parantez kullanmak düşünülebilir.

Yukarıdaki simgelerle yazılan formüller çok karmaşık olabileceklerinden bazı kısaltmalar yapılır. Birkaç örnek verelim:

1. Gereksiz parantezler yazılmaz. Bundan böyle biz de yazmayacağız.

2. $\varphi \vee \psi$ formülü $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formülünün kısaltılmışıdır.

3. $\varphi \to \psi$ formülü $\neg\varphi \vee \psi$ formülünün kısaltılmışıdır.

4. $\varphi \leftrightarrow \psi$ formülü $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır.

5. $\forall x\ \varphi$ formülü $\neg(\exists x\ \neg\varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır.

6. $\neg(x = y)$ formülü yerine $x \neq y$ yazılır.

7. $\neg(x \in y)$ formülü yerine $x \notin y$ yazılır.

8. $\exists! v\ \varphi(v)$ formülü "φ'yi doğrulayan bir ve bir tek v var" anlamına yazılır, yani
$$\exists v\ (\varphi(v) \wedge \forall w\ (\varphi(w) \to v = w))$$
olarak.

9. $\emptyset$, $\subseteq$, $\subset$, $\not\subseteq$, $\wp(x)$, $\cup x$, $\cap x$, $\{x, y\}$, $\mathbb{N}$ gibi simgeler ve daha niceleri de kısaltma olarak kullanılabilirler.

Bir (serbest) değişkenli formül, $\exists$ (ya da $\forall$) simgesinin kapsamına girmemiş tek bir değişken barındıran matematiksel bir tümcedir. Formüle "özellik" de diyebiliriz. Örneğin, "en az bir elemanı var" yani "boşküme değil" özelliği (ya da formülü) şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ y \in x.$$

[3]Demek ki her formül sonlu sayıda simgeden oluşur.

(Bu özellik $x \neq \emptyset$ olarak kısaltılır.) Bu formüldeki y bir değişkendir ancak sessiz bir değişkendir, $\exists$ niceleyicisi tarafından sesi kesilmiştir ($\exists$ ve $\forall$ simgelerine mantıkta varlıksal ve evrensel niceleyici adı verilir).

Örneğin "x'in sadece bir elemanı var" özelliği şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ (z \in x \to z = y)).$$

(Bu özellik $\exists y\ x = \{y\}$ olarak da kısaltılabilir.)

"Boşküme x'in elemanıdır" özelliği şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ z \notin y).$$

(Bu da $\emptyset \in x$ olarak kısaltılır.)

Yukarıdaki üç özellik de x değişkeninin özelliğidir. Bu özelliklerin x'le ilgili olduğunu iyice belirtmek için φ yerine $\varphi(x)$ yazmak kolaylık sağlar.

Sayfa 85'de verdiğimiz aksiyomlarda serbest değişken yoktur ve bu formüller (kısaltmalar kullanılarak ve işlevi olmayan gereksiz parantezleri atarak) şöyle yazılır:

A1. Boşküme Aks.: $\exists x\ \forall y\ y \notin x$.
A2. Eşitlik Aks.: $\forall x\ \forall y\ (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$.
A3$_{\varphi(z)}$. Tanımlı Altküme Aks.: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$.
A4. Bileşim Aks.: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists t\ (t \in y \leftrightarrow (t \in x \wedge z \in t)))$.
A5. İki Elemanlı Küme Aks.: $\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$.
A6. Altkümeler Kümesi Aks.: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.
A7. Tümevarımsal Küme Aks.: $\exists x\ (0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \longrightarrow Sy \in x))$.
A8. Temellendirme Aks.: $\forall x\ (x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y\ (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$.

Bu liste bir ***teori*** örneğidir. Bir teori, içinde serbest değişkenler barındırmayan formüllerden (serbest değişkeni olmayan formüllere ***cümle*** denir[4]) oluşur. Bu formüllere (teorinin) ***aksiyom***(ları) adı verilir. Bir teorinin modeli, o teoriyi oluşturan aksiyomların "doğru olduğu" bir evrendir[5]. Örneğin Not 4.7'de ZFC kümeler kuramının ilk altı aksiyomunun bir modelini yarattık[6]. Bir teorinin birkaç farklı modeli olabilir, hatta bir önerme bazı modellerde

[4] "Önerme" de diyebiliriz.

[5] "Doğru olma"nın tanımı için biraz bekleyin.

[6] Tüm 8 aksiyomun bir modelinin olduğu bilinmiyor ve bilinemeyeceği de Gödel tarafınfan kanıtlanmıştır. Gödel'in bu teoremi, yukarıdaki 8 aksiyomdan (aslında A3 yüzünden sonsuz sayıda aksiyom var) bir çelişki ya da bir paradoks elde edemeyeceğimizin kanıtlanamayacağı anlamına gelir. Matematikçiler, kümeler kuramının bir modelinin olduğunu, yani matematiğin çelişkisiz olduğunu varsayarlar, aksi hâlde matematik yapmak anlamsız olurdu! Öte yandan genel kanı, eğer bir paradoks varsa, aksiyomları biraz rötuşlayarak o paradoksun giderileceği yönünde. Bu satırların yazarı ZFC'de çelişki olmadığına inanıyor; ama bu sadece bir inanç tabii.

doğru, bazı modellerde yanlış olabilir; bu tür önermeler teoride (yani teorinin aksiyomlarından hareketle) kanıtlanamazlar, çünkü kanıtlanabilselerdi her modelde doğru olurlardı.

"Doğru olmak" ile "kanıtlanabilir olmanın" farklı kavramlar olduğu yirminci yüzyılın ilk yarısında anlaşılmıştır. Bu tabii mantıkta (ve muhtemelen felsefede de) önemli bir gelişmedir. Bir teorem bir teoride (teorinin aksiyomları varsayılarak) kanıtlanır ve kanıtlanan her teorem teorinin her modelinde doğrudur[7]. "Doğruluk" kavramı ise modellerde (ya da yapılarda) anlamlıdır. Mesela $\exists x\ x^2 + 1 = 0$ ya da $\exists x\ x^2 = 1 + 1$ cümleleri bazı yapılarda doğru bazı yapılarda yanlıştır. Yine de (ve neyse ki!) "doğru olmak" ile "kanıtlanabilir olmak" arasında çok sıkı bir bağ vardır, ama bu bağ hiç bariz değildir, (bir önceki dipnotta açıkladığımız gibi) bir kanıta ihtiyacı vardır: "teorinin her modelinde doğru olmak" ile "kanıtlanabilirlik" eşdeğer kavramlardır, biri doğruysa diğeri de doğrudur, bir başka deyişle, bir teorinin her modelinde doğru olan bir önermenin teorinin aksiyomlarıyla kanıtlanabileceği matematiksel mantığın önemli ve derin teoremlerinden biridir; Gödel tarafından 1929'da kanıtlanmıştır.

Yukarıda "bir cümlenin bir modelde (ya da bir yapıda) doğru olmasından" bahsettik. Bu kavrama da açıklık getirelim:

Formülü, birtakım simgelerden (harflerden) oluşan anlamsız (ama belli kurallara uyan) bir dizi olarak tanımladık. Bu formüllere bir anlam vermek ve ne zaman doğru olduklarını anlamak istiyoruz. Tabii formülde serbest değişkenler varsa[8], formülün doğruluğu ya da yanlışlığı serbest değişken yerine konan elemanlara göre değişir[9], dolayısıyla bir formülün doğruluğu ya da yanlışlığı ancak bir "yapı"da (mesela kümeler kuramının bir modelinde) anlamlıdır. "Bir yapıda doğruluğun" tanımı aşağıda:

1. $v_i = v_j$ formülü sadece v_i ve v_j yerine spesifik birer küme konduğunda doğru olabilir. a ve b birer küme olsun (yani yapının iki elemanı olsun). $v_i = v_j$ formülü (a, b) ikilisinde ancak ve ancak $a = b$ ise doğrudur. Yani "$v_i = v_j$" formülü "v_i, v_j'ye eşittir" olarak yorumlanır.

2. $v_i \in v_j$ formülü sadece v_i ve v_j yerine spesifik birer küme konduğunda doğru olabilir. a ve b birer küme olsun (yani yapının iki elemanı olsun). $v_i \in v_j$ formülü (a, b) ikilisinde ancak ve ancak $a \in b$ ise doğrudur. Yani "$v_i \in v_j$" formülü "v_i, v_j'nin bir elemanıdır" olarak yorumlanır.

[7]Kanıtın ve "doğru olma"nın matematiksel tanımları verildiğinde, bu söylediğimizin doğruluğu çok bariz olur, her teorem her modelde doğru olmalıdır, yani evde yapılan hesap her çarşıya uymalıdır. Bunun tersi, yani "bir hesap her çarşıda doğru sonuçlar veriyorsa, o zaman bu hesabın her çarşıda doğru sonuçlar vereceğinin bir kanıtı vardır" önermesi doğrudur ama doğruluğunun hiç de kolay olmayan bir kanıta ihtiyacı vardır.

[8]Yani $\forall$ ve $\exists$ kapsamına alınmamış değişkenler. Örneğin "$\forall x\ x \notin y$" formülünde sadece y serbest değişkendir.

[9]Mesela $x^2 = x$ formülü reel sayılarda sadece $x = 0$ ya da $x = 1$ ise doğrudur.

3. $\neg\varphi$ formülü "φ doğru değil" olarak yorumlanır, yani ancak φ yanlışsa $\neg\varphi$ doğrudur[10].

4. $\varphi \wedge \psi$ formülü "hem φ hem ψ doğru" olarak yorumlanır.

5. $\exists v_i\ \varphi$ formülü "φ'yi doğrulayan en az bir eleman var" olarak yorumlanır[11].

Bunlardan kısaltılmış formüllerin de doğruluğunu anlayabiliriz. Birkaç örnek verelim:

1. $\varphi \vee \psi$ formülü $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "φ ya da ψ'den en az biri doğru" (ikisi birden de doğru olabilir) olarak yorumlanmalıdır.

2. $\varphi \to \psi$ formülü $\neg\varphi \vee \psi$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "eğer φ doğruysa ψ de doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

3. $\varphi \leftrightarrow \psi$ formülü $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "φ'nin doğru olması için gerek ve yeter koşul ψ'nin doğru olmasıdır" olarak yorumlanmalıdır.

4. $\forall x\ \varphi$ formülü $\neg(\exists x\ \neg\varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "her x için φ doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

5. $\neg(x = y)$ formülü yerine $x \neq y$ yazılır ve bu formül a ve b kümelerinde ancak a, b'ye eşit değilse doğrudur.

6. $\neg(x \in y)$ formülü yerine $x \notin y$ yazılır ve bu formül a ve b kümelerinde ancak a, b'nin bir elemanı değilse doğrudur.

7. $\exists! v\ \varphi(v)$ formülü "$\varphi(v)$'yi doğrulayan bir ve bir tek a var" ise doğrudur.

Bazen formüllerimizde "parametreler" kullanmak isteyebiliriz. Açıklayalım. E kümeler kuramının bir modeli olsun. Sayfa 134'de atomik formülün tanımını vermiştik (1 ve 2 numaralı tanımlar). Eğer a ve b, E'nin iki elemanıysa, yani iki kümeyse, atomik formüllere

$$a = b,\ v_i = a,\ a \in v_i,\ v_i \in a,\ a \in b$$

formüllerini de ekleyelim. Böylece dilimiz ve formüllerimiz zenginleşmiş olur.

[10] Bu anlaşma sayesinde serbest değişkeni olmayan her cümle teorinin bir modelinde ya doğrudur ya da yanlıştır, ama tabii aynı cümle bazı modellerde doğru, bazı modellerde yanlış olabilir.

[11] Son üç kalemde parametrelerden sözetmedik, ama parametrelere ihtiyaç olabilir tabii. Mesela $\exists x\ (x \in y \cap z)$ formülünün doğruluğu yanlışlığı y ve z'ye göre değişir; y ve z yerine yapıdan elemanlar koymak gerekir; yani $\exists x\ (x \in y \cap z)$ formülü bir (b, c) ikilisinde doğru ya da yanlış olabilir; eğer $b \cap c = \emptyset$ ise yanlış, aksi hâlde doğrudur. Daha dikkatli bir tanım için model teorisi kitaplarına bakmalısınız.

12.3 Peano Aritmetiği'nin Formülleri

Tanım neredeyse aynı ama önce Peano Aritmetiği'nin terimlerini tanımlamamız gerekiyor[12].

1. Her v_i bir terimdir.
2. 0 bir terimdir.
3. Eğer N, Peano Aritmetiğinin bir modeliyse, N'nin her a elemanı için a'yı simgeleyen bir simge (mesela c_a diye bir simge[13]) alfabeye eklenir ve bu simgelerin her biri bir terim olarak kabul edilir. Bu simgelere parametre denir.
4. Eğer t ve s birer terimse $S(t)$, $(t)+(s)$ ve $(t)(s)$ de birer terimdir[14].

Örneğin, eğer a ve b Peano Aritmetiğinin bir modelinin elemanlarıysa,

$$(c_b v_1 v_1 v_3 + v_2 + SSS(0))(v_5 + v_4) + c_a c_a c_a$$

bir terimdir. Görüldüğü üzere terimler polinomlara benzeyen ifadelerdir.

Şimdi Peano Aritmetiği'nin formüllerini tanımlayabiliriz:

1. Eğer t ve s birer terimse, $t = s$ bir formüldür. (Bunlara atomik formül denir.)
2. Eğer φ bir formülse, $\neg(\varphi)$ de matematiksel bir formüldür.
3. Eğer φ ve ψ formüllerse, $(\varphi) \wedge (\psi)$ de bir formüldür.
4. Eğer φ bir formülse, her i doğal sayısı için, $\exists v_i\ (\varphi)$ de bir formüldür.

Bir önceki altbölümde tanımlanan kısaltmalar ve onların benzerleri burada da yapılabilir.

Altbölüm 11.1'de sıralanan PA1, PA2, PA3, PA4, PA5 önermeleri bu dilde yazılmış bir teoridir, ve adına Peano Aritmetiği adı verilir. Kümeler kuramının çelişkisiz olduğunu kabul ederek, önceki bölümlerde Peano Aritmetiğinin bir modelini yaratmıştık: $\mathbb{N}$. Nasıl yapmıştık? $\mathbb{N}$'yi tüm tümevarımsal kümelerin

[12] Kümeler kuramının terimleri sadece v_i değişkenleridir ve formüllerimizde parametreleri kullanmak istersek kümeler kuramının bir modelininin elemanlarını simgeleyen simgelerdir. Çok basit olduğundan önceki altbölümde kümeler kuramının terimlerini tanımlama gereğini duymadık.

[13] Bir önceki kalemde de "0 bir terimdir" yerine aslında "c_0 bir terimdir" dememiz gerekirdi. Burada vurgulamak istediğimiz nokta, bir anlamı olan (yani semantik olan) elemanla elemanı simgeleyen (anlamsız yani sentaktik olan) simge arasında bir fark yaratmak

[14] Gerçek hayatta gereksiz parantezler atılmalı...

kesişimi olarak tanımlamıştık. Ama kümeler kuramının her modelinde farklı tümevarımsal kümeler olabileceğinden, $\mathbb{N}$, içinde çalışılan kümeler kuramının modeline göre değişebilir. Yaptığımız inşa, kümeler kuramın her modelinde bir tek $\mathbb{N}$ veriyor, ama farklı modellerde farklı $\mathbb{N}$'lere yol açabilir[15].

Bir formülün doğruluğu ve yanlışlığı kümeler kuramındakine benzer şekilde tanımlanır. Ayrıntılara girmek istemiyoruz ama okur şunu bilsin ki, matematisel bir yapıda bir önermenin ya da formülün ya da cümlenin tanımı çocukluğundan beri sezgileriyle öğrendiği "doğruluk yanlışlık" kavramlarından farklı bir şey değildir.

Öte yandan kümeler kuramının bir modelinde Peano Aritmetiğinin farklı modelleri olabilir. Evet, inşa ettiğimiz $\mathbb{N}$ yapısı kümeler kuramının bir modelinde biricik, ama aynı modelde PA aksiyomlarını sağlayan farklı modeller olabilir, nitekim olduğu biliniyor da. Diğer modellere "nonstandart" ya da sıradışı modeller denir.

Bu bölümü sonuna kadar okumuşsanız sizi kutlamak gerekir! Arada bir okuyun, zamanla anlam kazanabilir. Ama [CK], [Po], [Mar] referanslarından birini okumak daha doğru olur.

[15]Bu da "sonlu olmanın" mutlak bir kavram olmadığı, "sonluluk" kavramının kümeler kuramının modelinden modeline değişebileceği anlamına gelir, yani bir modelde sonlu olan bir küme, bir başka modelde sonsuz olabilir! Bir başka deyişle sonluluk kavramının ilahi (tartışmasız demek istiyoruz) bir tanımı yoktur. Tuhaf ama böyle.

Kısım II

Tamsayılar ve Kesirli Sayılar

13. Tamsayılar Yapısı

13.1 Sayıları Yaratmaya Giriş

Önceki bölümlerde birkaç aksiyomdan yola çıkarak 0, 1, 2, 3, 4 gibi sayıları içeren doğal sayılar kümesini matematiksel olarak yarattık. Sadece doğal sayıları değil, doğal sayılarda toplama ve çarpma işlemlerini ve bildiğimiz "küçükeşittir" sıralamasını da yarattık. Sonra da, doğal sayılarla ilgili

$$\begin{aligned} 2+2 &= 2\times 2 = 4, \\ x+y &= y+x, \\ xy &= yx, \\ x(y+z) &= xy+xz \end{aligned}$$

gibi "bilinen" eşitlikleri ve

$$\begin{aligned} &2 \leq 4, \\ &x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \end{aligned}$$

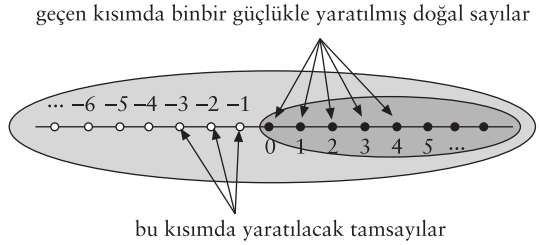
gibi en temel önermeleri kanıtladık.

Doğal sayıları yaratmak için boşkümenin varlığı da dahil olmak üzere, çok değil, yedi "doğal", yani aklı başında herhangi birinin doğruluğundan en küçük bir kuşku duymayacağı aksiyomdan yararlanmıştık. Kimsenin o aksiyomları görüp de "bu kadar da olmaz" deyip saçını başını yolacağını sanmıyorum; kanıtlamadan kabul ettiğimiz (ne de olsa aksiyomlar!) bu aksiyomların her biri diğerinden doğaldı, her biri "bu da doğru değilse ne doğrudur" dedirtecek türden önermelerdi. O aksiyomların arasında belki en heyecan verici olanı tümevarımsal bir kümenin varlığını söyleyen aksiyomdu, diğerleri kreş seviyesinde banal aksiyomlardı.

Doğal sayılarda toplama ve çarpma işlemleri vardır ama çıkarma işlemi yoktur. 5'ten 3'ü çıkarmak neyse de, doğal sayılarda 3'ten 5'i çıkaramayız, çünkü -2'yi henüz yaratmadık.

Bir sonraki altbölümde, doğal sayılardan hareketle, -3, -2, -1, 0, 1, 2 gibi tamsayıları ve bunların kümesini, yani $\mathbb{Z}$ kümesini matematiksel olarak yara-

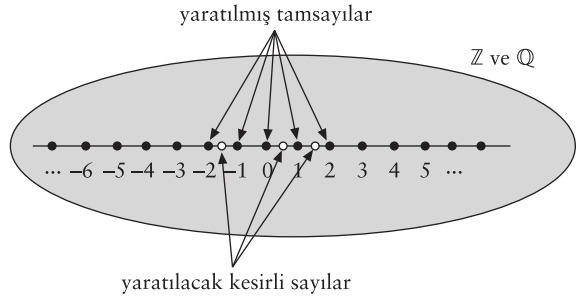
tacağız (ya da tanımlayacağız). Daha sonraki altbölümlerde bu sayılarda toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı, bir de ayrıca doğal sayılarda olmayan çıkarmayı tanımlayıp bunların ilkokuldan beri bildiğimiz özelliklerini kanıtlayacağız.



$\mathbb{N}$ *ve* $\mathbb{Z}$ *kümeleri*

Ama yaratacağımız tamsayılar da kusursuz olmayacak. Tamsayılarda çıkarma işlemi yapılabilir ama bölme yapılamaz. 6'yı 3'e bölmek neyse de, tamsayılarda 3'ü 6'ya bölemeyiz, çünkü 1/2 kesirli sayısını henüz yaratmadık.

Tamsayıları tanımlayıp temel özelliklerini kanıtladıktan sonra, bu sefer tamsayılardan hareketle kesirli sayıları (yani $-1/3$, $-2/7$, $-3/9$, $1/2$, 1, 2 gibi sayıları ve bunların kümesini, yani $\mathbb{Q}$ kümesini) yaratacağız ya da - bizim açımızdan aynı anlama gelir - tanımlayacağız. Sadece kesirli sayıları tanımlamakla yetinmeyeceğiz, kesirli sayılarda, toplamayı, çarpmayı, çıkarmayı ve sıralamayı, bir de ayrıca tamsayılarda olmayan bölmeyi tanımlayıp bunların ilkokuldan beri bildiğimiz özelliklerini kanıtlayacağız.



Bütün bunları doğal sayıları temel alarak yapacağız. Yani doğal sayıları bildiğimizi varsayacağız, ki biliyoruz. Ama kitabın bu kısmını anlamak için kitabın daha önceki bölümlerini hatmetmek ya da anlamış olmak gerekmez. Doğal sayılarla ilgili ilkokul bilgimiz yeterli olacak.

Tamsayılarla ilgili özellikleri kanıtlarken doğal sayıların özelliklerine ihtiyaç duyacağız. Eğer şansımız yaver giderse bu özelliklerin her biri geçmiş sayfalarda kanıtlanmış olmalı. Şansımız yaver gitmezse, o zaman geçmiş bölümlere geri dönüp doğal sayıların gereksinilen özelliği kanıtlanmalı. Ama, daha önce

de dediğimiz gibi, bu kısmı okurken okur doğal sayıların varlığını ve özelliklerini çantada keklik olarak görebilir.

Matematiksel nesneleri tanımlarken bir noktaya dikkat etmeliyiz. Kabul ettiğimiz matematiksel evrende her nesne bir küme olmalı. Örneğin bu kitabın bir yerinde 0 sayısını Ø (boşküme) olarak tanımlamıştık. Sonra,

$$1 = \{0\},$$
$$2 = \{0, 1\},$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$

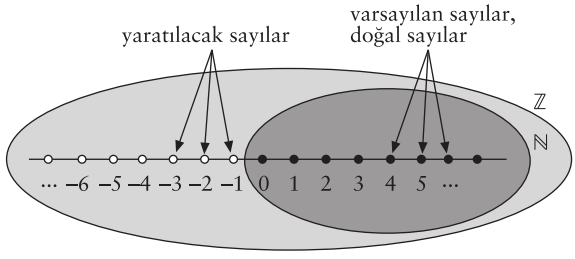
tanımlarını vermiştik ve bunların her biri bir kümedir bilindiği gibi. Aslında doğal sayıları teker teker değil, tümünü birden bir küme olarak tanımlamıştık, yani $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini tanımlamıştık. Ama dikkat, doğal sayılar kümesini

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

eşitliğiyle değil, çok daha rafine bir yöntemle tanımlamıştık; yukarıdaki eşitlik üç noktanın varlığından dolayı matematiksel bir tanım olamaz. İlgilenenler geçmiş bölümleri okusunlar.

13.2 Tamsayılar Kümesine Doğru

Doğal sayılardan yola çıkıyoruz. Sadece doğal sayılardan değil, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerine tanımlanmış olan toplama ve çarpma işlemlerinden ve $\leq$ sıralamasından yola çıkıyoruz. Ama bu altbölümde sadece toplamaya gerek duyacağız.



Amacımız, $\mathbb{N}$ kümesini çıkarma işlemi yapılacak biçimde genişletmek, çünkü $\mathbb{N}$'de her sayıdan her sayıyı çıkaramayız, örneğin 3'ten 5'i çıkaramayız, -2 diye bir sayı yok $\mathbb{N}$'de, daha doğrusu $5 + x = 3$ denkleminin $\mathbb{N}$'de çözümü yoktur.

Her $a, b \in \mathbb{N}$ için, $a + x = b$ denkleminin çözülebileceği $\mathbb{N}$'den daha büyük bir küme yaratacağız. Bu yeni kümede de $\mathbb{N}$'deki gibi toplama ve çarpma işlemleri ve $\leq$ diye adlandıralacağımız bir sıralama olacak. Ama bu iki işlemi

ve sıralamayı daha sonra tanımlayacağız; hele bir tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'yi tanımlayalım.

Bu dediğimizi olabilecek en ekonomik biçimde yapmak istiyoruz, yani $\mathbb{N}$ kümesinden daha büyük bir küme bulacağız, ama $\mathbb{N}$'ye sadece çıkarma işlemini yapmak için gerekli elemanları ekleyeceğiz, $\mathbb{N}$'ye gereksiz yere daha fazla eleman eklemek istemiyoruz. Daha açık olarak ifade edelim: $\mathbb{Z}$'yi bulmak isterken çıkarma işleminin yapılabildiği, örneğin, $\mathbb{Q}$'yü, $\mathbb{R}$'yi ya da (polinomlar kümesi) $\mathbb{Z}[X]$'i bulmak istemiyoruz.

Her $a, b \in \mathbb{N}$ için, $b + x = a$ denkleminin çözülebileceği bir küme yaratmak istiyoruz dedik. Ayrıca bu denklemin tek bir çözümünün olmasını istiyoruz. Çözümü bulduktan sonra bu çözüme $a - b$ diyeceğiz. Örneğin, -2 sayısı

$$5 + x = 3$$

denkleminin çözümü olacak. Şimdilik böyle bir sayımız yok ama pek yakında olacak.

Daha sonra tanımlanacak olan bu $a - b$ elemanını şimdilik (a, b) ikilisi olarak gösterelim. Daha henüz $a - b$ diye bir elemanımız yok ama (a, b) diye bir ikilimiz var! Birinci deneme olarak, $a - b$'yi, yani $b + x = a$ denkleminin çözümünü (a, b) ikilisi olarak gösterelim. Yani

$$a - b = (a, b)$$

tanımını yapalım. Örneğin,

$$-2 = (3, 5).$$

Yalnız burada bir noktaya dikkat etmek gerekir. -2 sadece

$$5 + x = 3$$

denkleminin değil, ayrıca

$$6 + x = 4 \text{ ve } 7 + x = 5$$

denklemlerinin de çözümüdür, yani tüm bu çözümler birbirine eşit olmalıdır, yani, yukarıdaki tanımı kabul edecek olursak,

$$(3, 5) = (4, 6) = (5, 7)$$

eşitlikleri doğru olmalıdır. Ama bu eşitlikler bariz biçimde yanlışlar. Demek ki yukarıdaki tanım doğru bir tanım olamaz.

Ne yapmalı?

Şimdi bu elemanları eşit kılmanın bir yöntemini göstereceğiz. Bunu yapmanın çok çok kolay bir yöntemi var: "eşit" yerine "denk" diyeceğiz[1]... $(3, 5)$,

[1]Matematikte bu genel bir yöntemdir, eşit olmasını istediğimiz ama eşit olmayan elemanlara "denk" deriz ve elemanlar yerine elemanların denklik sınıflarını ele alırız.

$(4,6)$ ve $(5,7)$ ikilileri eşit olmayacaklar, olamazlar da zaten, çünkü eşit değiller, ama "denk" olacaklar! Bu elemanların denk olduklarını da eşitlik simgesi olan $=$ simgesine bir çizgi daha ekleyerek göstereceğiz:

$$(3,5) \equiv (4,6) \equiv (5,7).$$

Genel tanımı verelim şimdi. a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$a - b = c - d$$

ise, (a,b) ikilisinin (c,d) ikilisine ***denk*** olduğunu söyleyeceğiz ve bunu,

$$(a,b) \equiv (c,d)$$

olarak yazacağız. Demek ki tanım gereği,

$$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a - b = c - d.$$

Ama bir dakika... Bizim doğal sayılarda çıkarma gibi bir işlemimiz yok ki

$$a - b = c - d$$

koşulunu koşabilelim. Çıkarmadan sözedemeyiz bile, çünkü henüz öyle bir işlem yok. Biz de zaten bu olmayan çıkarma işlemini tanımlamak istemiyor muyduk? Çıkarmayı tanımlarken çıkarmadan sözetmek doğru değil. Yapmamız gereken,

$$a - b = c - d$$

koşulunu çıkarma kullanmadan ifade etmek. Bu da oldukça basit: Bu koşul yerine, ilkokuldan beri ona eşdeğer olduğunu bildiğimiz

$$a + d = c + b$$

koşulunu koşalım...

Denklik ilişkisi tanımımız şöyle: a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için

$$a + d = c + b$$

ise (a,b) ikilisinin (c,d) ikilisine denk olduğunu söyleyeceğiz ve bunu,

$$(a,b) \equiv (c,d)$$

olarak göstereceğiz. Demek ki tanım gereği,

$$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a + d = c + b.$$

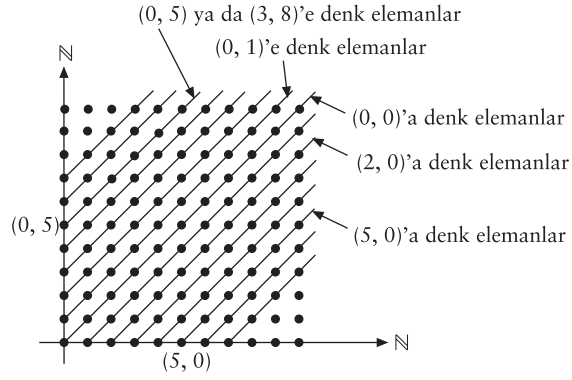
Dileyen aşağıdaki denkliklerin doğru olduklarını tanıma başvurarak teker teker kontrol edebilir.

$$(0,0) \equiv (1,1) \equiv (2,2) \equiv (3,3) \equiv \dots$$
$$(1,0) \equiv (2,1) \equiv (3,2) \equiv (4,3) \equiv \dots$$
$$(2,0) \equiv (3,1) \equiv (4,2) \equiv (5,3) \equiv \dots$$
$$(3,0) \equiv (4,1) \equiv (5,2) \equiv (6,3) \equiv \dots$$
$$(0,1) \equiv (1,2) \equiv (2,3) \equiv (3,4) \equiv \dots$$
$$(0,2) \equiv (1,3) \equiv (2,4) \equiv (3,5) \equiv \dots$$
$$(0,3) \equiv (1,4) \equiv (2,5) \equiv (3,6) \equiv \dots$$

Örneğin, $(3,8)$'e denk elemanlar, $(0,5)$, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,8)$, $(4,9), \dots$ elemanlarıdır, yani şu kümenin elemanlarıdır:

$$\{(0,5),\ (1,6),\ (2,7)\} \cup \{(3+n, 8+n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Genel resim şöyle:



İlk sonucumuzu kanıtlayalım.

Önsav 13.1. $\equiv$ *ilişkisi* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *kümesi üzerine bir denklik ilişkisidir, yani her* $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *için,*
i. $(a,b) \equiv (a,b)$*,*
ii. $(a,b) \equiv (c,d)$ *ise* $(c,d) \equiv (a,b)$*,*
iii. $(a,b) \equiv (c,d)$ *ve* $(c,d) \equiv (e,f)$ *ise* $(a,b) \equiv (e,f)$
önermelerini sağlar.

Kanıt: **i.** Tanıma göre $a+b = a+b$ eşitliği kanıtlanmalı...
ii. $(a,b) \equiv (c,d)$ varsayımı, tanıma göre,

$$a+d = c+b$$

eşitliğinin doğru olduğunu söylüyor. Biz ise $(c,d) \equiv (a,b)$ denkliğini yani

$$c + b = a + d$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Bu durumda da kanıtlayacak bir şey yok.

iii. $(a,b) \equiv (c,d)$ ve $(c,d) \equiv (e,f)$ varsayımları, sırasıyla,

$$a + d = c + b \text{ ve } c + f = e + d$$

diyor. Bu iki eşitliği varsayarak, $(a,b) \equiv (e,f)$ denkliğini, yani

$$a + f = e + b$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Varsaydığımız eşitlikleri kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(a+f)+(d+c) &= (a+d)+(c+f)\\ &= (c+b)+(e+d)\\ &= (e+b)+(d+c).\end{aligned}$$

Yukarıdaki birinci ve sonuncu eşitlik, doğal sayılarla ilgili bölümde kanıtlanan sonuçlar. Demek ki,

$$(a+f)+(d+c) = (e+b)+(d+c).$$

Doğal sayılarda sadeleştirebileceğimizi bildiğimizden, yukarıdaki eşitlikte sağ taraflarda bulunan $d+c$ terimlerini sadeleştirerek, istenen

$$a + f = e + b$$

eşitliğini buluruz. □

Eğer $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ise, önsav, tam tamına, her α, β, $\gamma \in X$ için,

i. $\alpha \equiv \alpha$,
ii. $\alpha \equiv \beta$ ise $\beta \equiv \alpha$,
iii. $\alpha \equiv \beta$ ve $\beta \equiv \gamma$ ise $\alpha \equiv \gamma$

diyor. Herhangi bir X kümesi üzerine bu önermeleri sağlayan bir $\equiv$ ikili ilişkisine ***denklik ilişkisi*** adı verildiğini biliyoruz [Ne2]. Demek ki Önsav 13.1, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\equiv$ ikili ilişkisinin bir denklik ilişkisi olduğunu söylüyor.

Denklik ilişkisi kavramı matematiğin en önemli kavramlarından biridir. [Ne2] adlı kitabımızda bu konuya hakettiği önem ve değer verilmiştir. Bu konuda eksiği olan okur bu aşamada o kitapta ilgili bölüme bakmalıdır.

Her denklik ilişkisinde denklik sınıfları vardır. Bir (a,b) ikilisinin denklik sınıfını $[(a,b)]$ yerine daha basit olarak $[a,b]$ olarak gösterelim. Tanım gereği

(bkz. [Ne2]) $[a, b]$ kümesi, (a, b) elemanına denk olan elemanlardan oluşan kümedir:

$$\begin{aligned}[a, b] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) \equiv (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + y = x + b\}.\end{aligned}$$

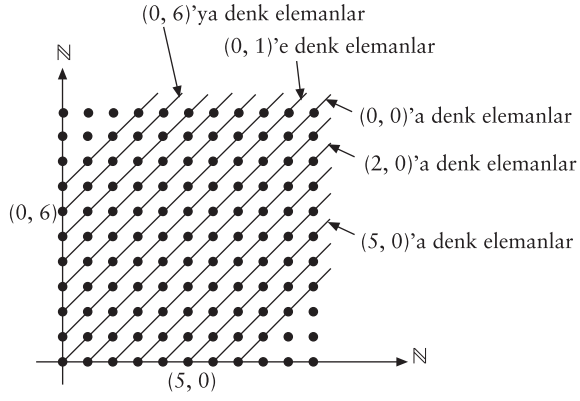
Ve a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ için,

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow (a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

olur. Örneğin,

$$\begin{aligned}[1, 6] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x + 5\} = [0, 5], \\ [2, 6] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x + 4\} = [0, 4], \\ [6, 6] &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x\} = [0, 0].\end{aligned}$$

Bu üç sınıf ileride sırasıyla -5, -4 ve 0 anlamına gelecek. Kaçınılmaz olarak $[2, 7]$ de -5 anlamına gelecek. Bu denklik ilişkisinin her denklik sınıfı aşağıdaki resimdeki gibi çapraz doğruların üstündeki noktalardan oluşur.



Şimdi artık $\mathbb{Z}$'yi en azından küme olarak tanımlayabiliriz. $\mathbb{Z}$'nin toplama, çıkarma, çarpma gibi işlemleri ve sıralaması birazdan tanımlanacak.

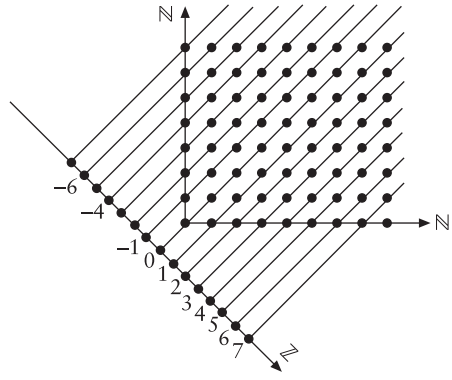
13.3 Küme Olarak $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ kümesini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ kümesi olarak tanımlıyoruz. Yani,

$$\mathbb{Z} = \{[a, b] : (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

$\mathbb{Z}$'nin elemanlarına ***tamsayı*** adı verilir.

$\mathbb{Z}$'nin her elemanı, yani her tamsayı demek ki $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesi. Bu, beklenmedik bir şey, çünkü $\mathbb{N}$ beklenildiği gibi $\mathbb{Z}$'nin bir altkümesi olmadı. Ama ileride her şey yoluna girecek ve $\mathbb{N}$'yi $\mathbb{Z}$'nin bir altkümesi olarak göreceğiz, biraz sabır. Sezdiğimiz ya da ilkokulda öğrendiğimiz $\mathbb{Z}$'yi nasıl bulacağımızı merak eden sabırsız okura aşağıdaki şekli sunalım, belki bir upucu olur:



Bu $\mathbb{Z}$ kümesinde toplama, çarpma, çıkarma işlemlerini ve sıralama ilişkisini tanımlayacağız. Her şeyi tanımladıktan ve en temel özelliklerini ortaya serdikten sonra $\mathbb{Z}$'nin elemanlarının yazım biçimini değiştirip yıllardan beri aşina olduğumuz $\mathbb{N}$'yi içeren $\mathbb{Z}$'yi bulacağız.

Alıştırmalar

13.1. $a, x \in \mathbb{N}$ ise $[a + x, a] = [x, 0]$ ve $[a, a + x] = [0, x]$ eşitlizliklerini kanıtlayın.

13.2. Eğer $a \geq b$ iki doğal sayıysa, bir x doğal sayısı için $[a, b] = [x, 0]$ eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlayın.

13.3. Her tamsayısının bir x doğal sayısı için ya $[x, 0]$ ya da $[0, x]$ biçiminde yazılabileceğini kanıtlayın.

13.4. x ve y doğal sayılarsa ve $[x, 0] = [0, y]$ ise $x = y = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

13.4 Toplama

13.4.1 Toplamanın Tanımı

$\mathbb{Z}$'den α ve β elemanları alalım. $\mathbb{Z}$'nin tanımına göre, a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

eşitlikleri geçerlidir. α ile β'nın, yani $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin toplamını tanımlamak istiyoruz. Gelecekte, $[a, b]$'nin $a - b$ ve $[c, d]$'nin $c - d$ anlamına geleceğini defalarca söylemiştik. Demek ki $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin toplamı $\mathbb{Z}$'nin,

$$(a - b) + (c - d),$$

sayısı ya da ona eşit olan

$$(a+c)-(b+d)$$

sayısı anlamına gelecek eleman olmalı, yani $\mathbb{Z}$'nin,

$$[a+c, b+d]$$

elemanı olmalı. Dolayısıyla, planlarımıza göre,

$$\alpha = [a,b] \text{ ve } \beta = [c,d]$$

ise,

$$\alpha + \beta = [a+c, b+d]$$

elemanı olarak tanımlanmalı.

Mükemmel bir plan. Ancak bu planda şöyle bir sorun olabilir. Diyelim Ayşe'yle Bülent'e yukarıdaki plana göre α ve β tamsayılarını toplama görevi verildi. Ayşe, evinde

$$\alpha = [a,b] \text{ ve } \beta = [c,d]$$

olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayılarını buldu ve toplamı

$$[a+c, b+d]$$

olarak sundu. Tanımı en az Ayşe kadar iyi bilen Bülent de aynı şeyi yaptı ama Bülent, Ayşe'nin bulduğu a, b, c ve d doğal sayılarından başka doğal sayılar buldu. Diyelim Bülent,

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c' ve d' doğal sayılarını buldu ve toplamı

$$[a'+c', b'+d']$$

olarak sundu. Elbette Ayşe'nin sunduğu $\alpha+\beta$ toplamıyla Bülent'in sunduğu $\alpha+\beta$ toplamı eşit olmalı, yoksa tanımımızda bir sorun var demektir, yani planımızın başarıya ulaşması için

$$[a+c, b+d] = [a'+c', b'+d']$$

eşitliği geçerli olmalı.

Planımızın gerçekten mükemmel olduğunu ve başarıya ulaşacağını kanıtlayalım.

Bu arada, biraz felsefi düşünürsek, planımızın başarıya ulaşmasının kaçınılmaz olduğunu anlarız, çünkü tanımları çok doğal yaptık, tamsayılar kümesini de, tamsayıları toplamayı da tam tanımlanması gerektiği gibi tanımladık.

Önsav 13.2. *a, b, c, d ve a', b', c', d' doğal sayılar olsun. Eğer*

$$[a,b] = [a',b'] \text{ ve } [c,d] = [c',d']$$

ise, o zaman,

$$[a+c, b+d] = [a'+c', b'+d']$$

olur.

Kanıt: Varsayımlara göre,

$$a + b' = a' + b \text{ ve } c + d' = c' + d$$

eşitlikleri doğru. $[a+c, b+d] = [a'+c', b'+d']$ eşitliğini, yani

$$(a+c) + (b'+d') = (a'+c') + (b+d)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Eğer varsayılan iki eşitliği altalta yazıp toplarsak

$$(a+b') + (c+d') = (a'+b) + (c'+d),$$

yani

$$(a+c) + (b'+d') = (a'+c') + (b+d),$$

elde ederiz. Önsav kanıtlanmıştır. □

Artık toplamayı hiç çekinmeden yukarıda önerildiği gibi tanımlayabiliriz:

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d].$$

Alıştırmalar

13.5. $[3,5] + [4,2] = [0,0]$ eşitliğini gösterin.

13.6. $[7,5] + x = [0,0]$ denklemini çözün.

13.7. $[7,5] + x = [1,3]$ denklemini çözün.

13.8. $[7,5] + (x+x) = [1,3]$ denklemini çözebilir misiniz?

13.9. a, $b \in \mathbb{N}$ olsun. $[a,b] + [a,b] = [2a, 2b]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.10. α, $\beta \in \mathbb{Z}$ olsun. $\alpha + \beta = \alpha$ ise $\beta = [0,0]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.11. a, $b \in \mathbb{N}$ olsun. $[a,b] + [b,a] = [0,0]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.12. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $[x,y] + [y,0] = [x,0]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.13. $\mathbb{Z}$'de $\alpha + \alpha = [1,0]$ denkleminin çözülemeyeceğini kanıtlayın. ($\alpha + \alpha = 2\alpha$ eşitliğinin şimdilik bir anlamı olmadığını belirtirim. İleride bir anlamı olacak ama. Önce $[2,0]\alpha$'nın, sonra da 2α'nın tanımını yapacağız.) Hangi a ve b doğal sayıları için $\mathbb{Z}$'de $\alpha + \alpha = [a,b]$ denklemi çözülebilir?

13.4.2 Toplamanın Özellikleri

Toplamanın temel özelliklerini irdeleyelim.

Önsav 13.3. i. [Birleşme Özelliği] *Her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ *için,*

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

olur.

ii. [Etkisiz Elemanın Varlığı] $[0,0]$ *toplamanın* ***etkisiz elemanı****dır, yani her* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *için,* $\alpha + [0,0] = [0,0] + \alpha = \alpha$ *olur.*

iii. [Ters Elemanın Varlığı] *Her* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *için,* $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0,0]$ *eşitliğini sağlayan bir* $\alpha' \in \mathbb{Z}$ *vardır; nitekim* $\alpha = [a,b]$ *ise* $\alpha' = [b,a]$ *alınabilir.*

Kanıt: i. Önce

$$\alpha = [a,b],\ \beta = [c,d],\ \gamma = [e,f]$$

olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım ve kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solunu ve sağını bu doğal sayılar cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \gamma &= ([a,b] + [c,d]) + [e,f] \\ &= [a + c, b + d] + [e,f] \\ &= [(a + c) + e,\ (b + d) + f]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= [a,b] + ([c,d] + [e,f]) \\ &= [a,b] + [c + e, d + f] \\ &= [a + (c + e), b + (d + f)].\end{aligned}$$

Demek ki

$$[(a + c) + e, (b + d) + f] = [a + (c + e), b + (d + f)]$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama eşitlik sadece sınıflar düzeyinde değil, elemanlar düzeyinde de geçerli:

$$\begin{aligned}(a + c) + e &= a + (c + e), \\ (b + d) + f &= b + (d + f);\end{aligned}$$

çünkü a, b, c, d, e, f doğal sayılar ve doğal sayılarda birleşme özelliğini biliyoruz.)

ii. $\alpha = [a,b]$ olacak biçimde a ve b doğal sayılarını seçelim ve hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\alpha + [0,0] &= [a,b] + [0,0] = [a + 0, b + 0] = [a,b] = \alpha. \\ [0,0] + \alpha &= [0,0] + [a,b] = [0 + a, 0 + b] = [a,b] = \alpha.\end{aligned}$$

iii. a ve b doğal sayıları için, $\alpha = [a, b]$ olsun.

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 0]$$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha' \in \mathbb{Z}$ bulacağız. α, $a - b$ anlamına geleceğinden, α' elemanının $b-a$ anlamına gelecek olan $[b, a]$ olması gerektiğini seziyoruz. Nitekim, $\alpha' = [b, a]$ olsun ve hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha' &= [a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [a + b, a + b],\\ \alpha' + \alpha &= [b, a] + [a, b] = [b + a, a + b] = [a + b, a + b],\end{aligned}$$

Demek ki, her $c \in \mathbb{N}$ için, $[c, c] = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlamalıyız ama bu

$$c + 0 = 0 + c = c$$

eşitliğinden hemen çıkar. □

Önsavdaki üç özelliği sağlayan $(\mathbb{Z}, +, [0, 0])$ türünden bir yapıya ***grup*** denir. Demek ki Önsav 13.3, $(\mathbb{Z}, +, [0, 0])$ yapısının bir grup olduğunu söylüyor.

Önsav 13.4. *Bir grupta* (*dolayısıyla* $\mathbb{Z}$*'de de*)

i. [Sadeleşme] $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ *ise,* $\beta = \gamma$ *olur.*

ii. [Etkisiz Elemanın Biricikliği] *Eğer bir* α *ve* β *için* $\alpha + \beta = \alpha$ *ise* $\beta = [0, 0]$ *olur.*

iii. [Ters Elemanın Biricikliği] *Verilmiş bir* α *için,* α'*, Önsav 13.3.iii'teki eşitliği sağlıyorsa, yani* $\alpha + \alpha' = [0, 0]$ *ise ve* $\alpha + \beta = [0, 0]$ *ise,* $\beta = \alpha'$ *olur.*

Kanıt: i. α', α tamsayısı için Önsav 13.3.iii'ü sağlasın, yani $\alpha' + \alpha = [0, 0]$ olsun. O zaman aynı önsava göre,

$$\begin{aligned}\beta &= [0, 0] + \beta = (\alpha' + \alpha) + \beta = \alpha' + (\alpha + \beta)\\ &= \alpha' + (\alpha + \gamma) = (\alpha' + \alpha) + \gamma = [0, 0] + \gamma = \gamma\end{aligned}$$

olur.

ii. Bir öncekinden çıkar: $\alpha + \beta = \alpha = \alpha + [0, 0]$.

iii. (i)'den çıkar: $\alpha + \beta = [0, 0] = \alpha + \alpha'$.

□

Önsav 13.3.ii ve 13.4.ii'den dolayı, $[0, 0]$ elemanına toplamanın ***etkisiz elemanı*** adını verme hakkına sahibiz. Önsav 13.3.iii ve 13.4.iii'ten dolayı, $\alpha \in \mathbb{Z}$ elemanının tersini $-\alpha$ olarak yazıp bu elemana α'nın ***toplamsal tersi*** adını verebiliriz. Önsav 13.3.iii'ten dolayı $[a, b]$ elemanının tersi $[b, a]$ elemanıdır, yani

$$-[a, b] = [b, a]$$

olur. Buradan,

$$-[a, a] = [a, a]$$

ve

$$-(-\alpha) = \alpha$$

eşitlikleri çıkar, ama son eşitlik Önsav 13.3.iii'ten de çıkar: α, α' elemanının tersiyse, α' elemanı da α'nın tersidir!

Grubumuzun işleminin (toplamanın yani) değişmeli olduğunu da kanıtlayalım.

Önsav 13.5. *Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ olur.*

Kanıt: $\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$ olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayıları bulalım ve hesaplayalım:

$$\alpha + \beta = [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] = [c + a, d + b] = [c, d] + [a, b] = \beta + \alpha.$$

Kanıt bitmiştir. □

Önsav 13.5'teki eşitliği sağlayan bir gruba ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** ya da ***Abel grubu*** denir.

$\mathbb{Z}$'de çıkarma işlemini tanımlayalım: Her a, b, c, d doğal sayıları için,

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + [d, c] = [a + d, b + c]$$

olsun. Ya da grupların diliyle, her α, β tamsayıları için,

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

olsun. Buradaki $-\beta$, β tamsayısının toplamsal tersidir. Böylece $\mathbb{Z}$'de çıkarma işlemini tanımlamış olduk.

Benzer şekilde,

$$-\alpha + \beta = (-\alpha) + \beta$$

ve

$$-\alpha - \beta = (-\alpha) + (-\beta)$$

elemanları da tanımlanır.

Alıştırmalar

13.14. Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $-(\alpha + \beta) = -\beta - \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

13.15. Her a, $b \in \mathbb{N}$ için $[a, 0] + [b, 0] = [a + b, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.16. Hangi $a \in \mathbb{N}$ için, $\alpha + \alpha = [a, 0]$ denklem $\mathbb{Z}$'de çözülebilir?

13.17. Hangi $[a, b]$ için $\alpha + \alpha = [a, b]$ denklemi $\mathbb{Z}$'de çözülebilir?

13.18. Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $-(\alpha + \beta) = (-\beta) + (-\alpha) = -\alpha - \beta = -\beta - \alpha$ eşitliklerini kanıtlayın.

13.19. Eğer (α, α') ve (β, β') tamsayı ikilileri Önsav 13.3.iii'ü sağlıyorsa, yani mesela $\alpha + \alpha' = [0, 0]$ oluyorsa, (α', α) ve $(\alpha + \beta, \alpha' + \beta')$ ikililerinin de Önsav 13.3.iii'ü sağladığını kanıtlayın.

13.5 Çarpma

13.5.1 Çarpmanın Tanımı

Tamsayılarda toplama dışında bir de çarpma işlemi var tabii. Bu bölümde çarpmayı tanımlayacağız. Toplama için yaptığımız akıl yürütmeyi çarpma için de yapalım.

$\mathbb{Z}$'den iki α ve β elemanı alalım. $\mathbb{Z}$'nin tanımına göre, a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

eşitlikleri geçerlidir. α ile β'nın, yani $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin çarpımını tanımlamak istiyoruz. Gelecekte, $[a, b]$'nin $a - b$ ve $[c, d]$'nin $c - d$ anlamına geleceğini söylemiştik. Demek ki $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin çarpımı $\mathbb{Z}$'nin,

$$(a - b)(c - d)$$

ya da

$$(ac + bd) - (ad + bc)$$

anlamına gelecek elemanı olmalı, yani $\mathbb{Z}$'nin,

$$[ac + bd, ad + bc]$$

elemanı olmalı. Demek ki, planlarımıza göre,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

ise,

$$\alpha\beta = [ac + bd, ad + bc]$$

elemanı olarak tanımlanmalı.

Mükemmel bir plan daha... Ancak bu planda şöyle bir sorun olabilir. Diyelim Ayşe'yle Bülent'e yukarıdaki plana göre α ve β tamsayılarını çarpma görevini verdim. Ayşe, evinde

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayılarını buldu ve çarpımı

$$[ac + bd, ad + bc]$$

olarak sundu. Tanımı en az Ayşe kadar iyi bilen Bülent de aynı şeyi yaptı ama Bülent, Ayşe'nin bulduğu a, b, c ve d doğal sayılarından başka doğal sayılar buldu. Diyelim Bülent,

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c' ve d' doğal sayılarını buldu ve çarpımı

$$[a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olarak sundu. Elbette Ayşe'nin sunduğu $\alpha\beta$ çarpımıyla Bülent'in sunduğu $\alpha\beta$ çarpımı birbirine eşit olmalı, yoksa tanımımızda bir sorun var demektir, yani,

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olmalı.

Dolayısıyla sunduğumuz toplama tanımının geçerli olması için aşağıdaki sonuç doğru olmalı.

Önsav 13.6. *a, b, c, d ve a', b', c', d' doğal sayılar olsun. Eğer*

$$[a, b] = [a', b'] \text{ ve } [c, d] = [c', d']$$

ise, o zaman,

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olur.

Kanıt: Varsayımlara göre,

$$a + b' = a' + b \text{ ve } c + d' = c' + d \tag{1}$$

eşitlikleri doğru.

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

eşitliğini, yani

$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc \tag{2}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Unutmayalım ki yukarıdaki eşitlik $\mathbb{N}$'de geçerli ve $\mathbb{N}$'de çıkarma ve bölme işlemleri yok. Dolayısıyla bu eşitliği çıkarma ve bölmeye başvurmadan kanıtlamalıyız.

Çıkarma işlemini kullanmadan bu eşitliği kanıtlamak hiç de kolay değil. Okurun vereceğimiz kanıtı okumadan kanıtlamaya çalışmasını öneririm. Plansız programsız yola koyulursa başarma olasılığı çok düşük olacaktır.

Şu kanıt planını yapalım: (1)'deki eşitlikleri kullanarak, (2) eşitliğinde bulunan a'ları ve c'leri yok edelim. Bunun için her iki tarafa da ne kadar terim eklemek gerekirse ekleyelim. Her iki taraftan da a'yı ve c'yi yok edersek, eşitlik doğruysa karşımıza özdeş bir eşitlik çıkmalı.

a ve c'nin bulunduğu terimleri sıralayalım:

$$ac, ad, bc$$

Önce, a'ya ve c'ye göre "ikinci dereceden" bir terim olan en soldaki ac'yi yok etmeye çalışalım.

$$ac + (ad' + b'c + b'd') = (a + b')(c + d') = (a' + b)(c' + d)$$

eşitliğini göz önüne alarak, kanıtlamak istediğimiz eşitliğin her iki tarafına da

$$ad' + b'c + b'd'$$

terimini ekleyelim. Böylece eşitliğin solundaki ac kaybolacak; ancak eşitliğin sağ tarafında içinde a ve c barındıran ad' ve $b'c$ terimleri belirecek. Ama bunlar a ve c'ye göre birinci dereceden terimler olduklarından, bunlardan kurtulmak, ac'den kurtulmaktan daha da kolay olacak. Bu eklemeyi yaptığımızda, içinde a ve c barındıran

$$ad, bc, ad', b'c$$

terimleri kalacak. Örneğin birincisinden kurtulmak için her iki tarafa da $b'd$ eklemek yeterli, çünkü böylece ad'nin olduğu tarafta,

$$ad + b'd = (a + b')d = (a' + b)d$$

eşitliğini kullanabileceğiz. İçinde a ve c barındıran yukarıda sıralanan terimlerin her biri için, sırasıyla,

$$b'd, bd', b'd', b'd'$$

(iki kez $b'd'$) ekleyelim. Daha önceki $ad' + b'c + b'd'$ terimini de hesaba katalım. Böylece, her iki tarafa da,

$$ad' + b'c + b'd' + b'd + bd' + b'd' + b'd'$$

terimini, yani

$$ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd'$$

terimini eklememiz gerektiğini görürüz. Bu terimi ekleyelim, a'yı ve c'yi yok eden hesapları yapalım ve bakalım iki tarafta da aynı şeyi elde ediyor muyuz.

Önce sol tarafı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&(ac + bd + a'd' + b'c') + (ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd') \\
&\quad = (ac + ad' + b'c + b'd') + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c' \\
&\quad = (a + b')(c + d') + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c' \\
&\quad = (a' + b)(c' + d) + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c'.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi hiç a ve c kalmadı. Benzer işlemi sağ taraf için de yapalım.

$$\begin{aligned}
&(a'c' + b'd' + ad + bc) + (ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd') \\
&\quad = a'c' + b'd' + (ad + b'd) + (bc + bd') + (ad' + b'd') + (b'c + b'd') + b'd' \\
&\quad = a'c' + b'd' + (a + b')d + b(c + d') + (a + b')d' + b'(c + d') + b'd' \\
&\quad = a'c' + b'd' + (a' + b)d + b(c' + d) + (a' + b)d' + b'(c' + d) + b'd'
\end{aligned}$$

Sağ tarafta da hiç a ve c kalmadı. Şimdi bu a'sız ve c'siz terimler birbirine eşit, hatta özdeş olmalı. Nitekim kolayca görüleceği üzere öyleler. Doğal sayılarda sadeleştirmeyi bildiğimizden, eklediğimiz

$$ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd'$$

terimlerini sadeleştirip istediğimiz

$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc$$

eşitliğine kavuşuruz. Nihayet! □

Önsav sayesinde,

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc]$$

işlemini (çarpımını) vicdanımız rahat tanımlayabiliriz. Artık $\mathbb{Z}$'de sadece toplama değil, bir de çarpma işlemimiz var. Çarpma işlemi $\alpha\beta$ olarak gösterildiği gibi, kimileyin $\alpha \times \beta$ ya da $\alpha \cdot \beta$ olarak da gösterilir.

Alıştırmalar

13.20. $[3, 5][5, 3] = [0, 4]$ eşitliğini gösterin.

13.21. $[3, 4][2, 3]$ hangi tamsayıya eşittir?

13.22. $[3, 4][1, 3] = \alpha + \alpha$ denkleminin tamsayılarda çözümü var mıdır?

13.23. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha[1, 0] = \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

13.24. Her $[a, b] \in \mathbb{Z}$ için, $[a, b][0, 1] = [b, a]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.25. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \alpha[0, 1] = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.26. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha[0, 0] = [0, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

13.27. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \alpha = [2, 0]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

13.28. $[a, b][c, d] = \alpha + \alpha$ denkleminin tamsayılarda çözümü olması için $[a, b] = \alpha + \alpha$ ya da $[c, d] = \alpha + \alpha$ denkleminin çözümü olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın. (Yani iki tamsayının çarpımının çift olması için iki tamsayıdan birinin çift olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.)

13.5.2 Çarpmanın Özellikleri

Önsav 13.7. i. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ için, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ olur.*

ii. $[1, 0]$ *çarpmanın* ***etkisiz elemanı****dır, yani her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için,*

$$\alpha\,[1, 0] = [1, 0]\,\alpha = \alpha$$

olur.

iii. *Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\beta = \beta\alpha$ olur.*

Kanıt: Birincisi biraz uzun olabilecekse de kanıtlar son derece basit. Aynen Önsav 13.3'ün kanıtındaki gibi her şey, $\mathbb{Z}$ kümesinin ve $\mathbb{Z}$'de çarpmanın

tanımlarından ve doğal sayıların daha önceki bölümlerde kanıtlanan özelliklerinden çıkar. (Eğer doğal sayıların kanıtlamayı unuttuğumuz bir özelliği varsa, okur toplamanın tanımına başvurarak bu özelliği kolaylıkla kanıtlayabileceğini umuyoruz.) □

13.5.3 Toplama ve Çarpmayla İlgili Özellik

Toplamayla çarpmayı harmanlayan tek bir özellik vardır: Şimdi kanıtlayacağımız ***dağılma özelliği***. (Bir de toplamayla çarpmayı ilgilendiren $[0,0] \neq [1,0]$ özelliği vardır ama bu diğerinin yanında pek sönük kalıyor.)

Önsav 13.8. $[1,0] \neq [0,0]$ *ve her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ *için,*

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ ve } (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

olur.

Kanıt: $[1,0] \neq [0,0]$, yani $(1,0) \not\equiv (0,0)$ önermesini kanıtlamak çok kolay, tanımdan hemen çıkar. Eşitliklere geçelim. Çarpma değişmeli olduğundan iki eşitlikten birini kanıtlamak yeterli; birincisine odaklanalım.

$$\alpha = [a,b],\ \beta = [c,d] \text{ ve } \gamma = [e,f]$$

olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını seçelim ve kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solunu ve sağını bu doğal sayılar cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma) &= [a,b]([c,d]+[e,f]) = [a,b][c+e,d+f] \\ &= [a(c+e)+b(d+f), a(d+f)+b(c+e)]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\alpha\gamma &= [a,b][c,d]+[a,b][e,f] \\ &= [ac+bd, ad+bc]+[ae+bf, af+be] \\ &= [ac+bd+ae+bf, ad+bc+af+be].\end{aligned}$$

Demek ki

$$[a(c+e)+b(d+f), a(d+f)+b(c+e)] = [ac+bd+ae+bf, ad+bc+af+be]$$

eşitliği kanıtlanmalı, ki eğer doğal sayıların özelliklerini bildiğimizi varsayarsak bu çok bariz bir şey. □

Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ için, geçmişte aşina olduğumuz,

$$\begin{aligned}&(-\alpha)(\beta-\gamma) = \alpha\gamma - \alpha\beta, \\ &(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta, \\ &(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)\end{aligned}$$

gibi eşitliklerin kanıtını okura bırakıyoruz.

Alıştırmalar

13.29. Eğer α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için $\alpha\beta = [0,0]$ ise, o zaman $\alpha = [0,0]$ ve $\beta = [0,0]$ eşitliklerinden en az birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.

13.30. Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\beta = [1,0]$ ise

$$\alpha = \beta = [1,0] \text{ ya da } \alpha = \beta = [0,1]$$

eşitliklerinden birinin doğruluğunu kanıtlayın.

13.31. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\beta = [2,0]$ denkleminin çözümlerini bulun.

13.32. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [1,0]$ denkleminin çözümlerini bulun.

13.33. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [0,1]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

13.34. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [2,0]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

13.35. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [4,0]$ denkleminin çözümlerini bulun.

13.36. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha + \alpha + [1,0] = [0,0]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

13.37. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha + \alpha + [0,6] = [0,0]$ denkleminin tüm çözümlerini bulun.

Önsav 13.3.i, ii, iii, 13.4, 13.7 ve 13.8'de kanıtladıklarımızı özetleyelim:

Teorem 13.9 (Özet)**.** $(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ *yapısı şu özellikleri sağlar: Her* α*,* β*,* $\gamma \in \mathbb{Z}$ *için,*

T1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
T2. $\alpha + [0,0] = [0,0] + \alpha = \alpha$.
T3. $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0,0]$ *eşitliğini sağlayan bir* $\alpha' \in \mathbb{Z}$ *vardır.*
T4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
Ç1. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
Ç2. $\alpha[1,0] = [1,0]\alpha = \alpha$.
Ç4. $\alpha\beta = \beta\alpha$.
TÇ1. $[1,0] \neq [0,0]$.
TÇ2. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. □

Teoremdeki özellikleri sağlayan bir yapıya ***değişmeli halka*** denir. Demek ki $(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ değişmeli bir halkadır.

Bu bölümün sonunda $[0,0]$ yerine 0, $[1,0]$ yerine 1 yazacağız ve o zaman T2 ve Ç2 daha doğal gözükecek.

$(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ halkasının her halkada bulunmayan bir özelliği vardır: $[0,0]$'a eşit olmayan iki elemanın çarpımı $[0,0]$ olamaz. (Bkz. Alıştırma 13.29) Bu tür halkalara ***bölge*** (İngilizcesi *domain*) adı verilir.

Notlar

13.38. Önce özelliklerin adlarından sözedelim:

T : Toplamayla ilgili,
Ç : Çarpmayla ilgili

demektir. TÇ, toplama ve çarpmayla ilgili özellik anlamına gelir.

13.39. T1 ve Ç1 özellikleri toplamanın ve çarpmanın ***birleşmeli*** bir işlem olduğunu söylüyor. Açık açık yazılmamış ama teoremden toplamanın ve çarpmanın birer işlem olduğu anlaşılıyor, yani α, $\beta \in \mathbb{Z}$ ise, $\mathbb{Z}$'de $\alpha + \beta$ ve $\alpha\beta$ olarak yazılan elemanlar vardır.

13.40. T2, $[0,0]$ elemanının toplamanın, $[1,0]$ elemanının da çarpmanın ***etkisiz elemanı*** olduğunu söylüyor. Açık açık yazılmamış ama teorem aslında $[0,0]$ ve $[1,0]$ elemanlarının $\mathbb{Z}$'de olduğunu da ima ediyor.

13.41. T4 ve Ç4, toplamayla çarpmanın değişmeli işlemler olduğunu söylüyor.

13.42. T3'teki α', α'ya göre değişir ama verilmiş bir α için bu özelliği sağlayan bir tane α' vardır. α' elemanı $-\alpha$ olarak yazılır.

13.43. Ç3 unutulmamıştır! Tam Ç3 olmasa da Ç3'ün çok benzeri bir özellik ileride tanımlayacağımız kesirli sayılar için doğru olacaktır.

13.44. T1, T2 ve T3 önermelerini sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, [0,0])$ yapısına ***grup*** denir. Bu yapı bir de T4'ü sağlarsa yapıya ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** denir. Teoremi sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ yapısına ***değişmeli*** ya da ***komütatif halka*** denir. Alıştırma 13.29'daki özelliği sağlayan değişmeli halkalara ***bölge*** denir. Demek ki

$$(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$$

yapısı bir bölgedir.

13.6 Sıralama

13.6.1 Sıralamanın Tanımı

Tamsayılarda toplama ve çarpma dışında bir de bir tamsıralama vardır. Bu altbölümde $\mathbb{Z}$'deki tamsıralamayı tanımlamayacağız.

$[a,b] \leq [c,d]$ sıralamasının, çocukluğumuzdan beri aşina olduğumuz tamsayılarda

$$a - b \leq c - d$$

anlamına geleceğini defalarca söyledik. Ama sıralamanın tanımını

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow a - b \leq c - d$$

olarak veremeyiz çünkü $a-b \leq c-d$ sıralaması doğal sayılarla ilgili bir önerme ve doğal sayılarda çıkarma işlemimiz yok. Buna benzer bir sorunla daha önce karşılaşmıştık. $a - b \leq c - d$ sıralamasının $a + d \leq c + b$ sıralamasına denk olduğunu lise yıllarından biliyoruz. Bu son sıralamada sadece doğal sayılar ve toplama var. Şimdi $\mathbb{Z}$'de sıralamanın tanımını önerebiliriz:

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow a + d \leq c + b.$$

Ama daha önce iki kez yaptığımız gibi, bu tanımın geçerli bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Nitekim gene şöyle bir sorun olabilir: Ayşe'yle Bülent'e α ve β tamsayılarını verip bunlardan hangisinin diğerinden daha büyük olduğunu sorabiliriz. Bu sorunun yanıtını bulmak için Ayşe,

$$\alpha = [a,b] \text{ ve } \beta = [c,d]$$

olacak biçimde a, b, c, d doğal sayılarını bulur ve

$$a + d \text{ ile } c + b$$

doğal sayılarını karşılaştırır. Bülent de aynı yönteme başvurur (zaten başka yöntem de yok.) Ama Bülent, Ayşe'nin seçtiği a, b, c, d doğal sayılarını seçmek zorunda değil, Bülent

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c', d' doğal sayılarını seçip ve

$$a' + d' \text{ ile } c' + b'$$

doğal sayılarını karşılaştırabilir. Tanımın geçerli olması için Ayşe'yle Bülent'in karşılaştırmaları uyumlu olmak zorundadır, yani Ayşe, örneğin,

$$a + d \leq c + b$$

sonucunu bulmuşsa, Bülent de

$$a' + d' \leq c' + b'$$

sonucunu bulmalıdır. Şimdi bunu kanıtlayalım.

Önsav 13.10. *Her a, b, c, d, a', b', c', $d' \in \mathbb{N}$ için, eğer $[a, b] = [a', b']$ ve $[c, d] = [c', d']$ ise,*

$$a + d \leq c + b \Leftrightarrow a' + d' \leq c' + b'.$$

Kanıt: Durum simetrik olduğundan sadece $\Rightarrow$ istikametini kanıtlamak yeterli. Demek ki,

$$\begin{aligned} a + b' &= a' + b \\ c + d' &= c' + d \\ a + d &\leq c + b \end{aligned}$$

önermelerini kabul edip $a'+d' \leq c'+b'$ önermesini kanıtlamalıyız. Kanıtlanacak önermenin sağına ve soluna $b + c$ eklersek dilediğimizi elde edeceğiz:

$$\begin{aligned} (a' + d') + (b + c) &= (a' + b) + (c + d') = (a + b') + (c' + d) \\ &= (a + d) + (b' + c') \leq (c + b) + (b' + c') \\ &= (b' + c') + (b + c). \end{aligned}$$

Şimdi $b + c$'leri sadeleştirip (doğal sayılarla bunu yapabileceğimizi biliyoruz) istenen $a' + d' \leq c' + b'$ eşitliğini elde ederiz. □

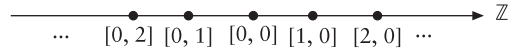
Ancak bu önsavdan sonra gönül rahatlığıyla

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow a + d \leq c + b$$

tanımını verebiliriz.

Alıştırmalar

13.45. $[0,3] < [0,2] < [0,1] < [0,0] < [1,0] < [2,0] < [3,0]$ sıralamalarını kanıtlayın. (Burada, $\alpha < \beta$ ifadesi, $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha \neq \beta$ anlamına gelmektedir.)



13.46. Her n doğal sayısı için,

$$[n,0] \leq \alpha \leq [n+1,0]$$

sıralamasını sağlayan bir α tamsayısının olmadığını kanıtlayın.

13.47. Her n doğal sayısı için, $[0,n+1] < \alpha < [0,n]$ sıralamalarını sağlayan bir α tamsayısının olmadığını kanıtlayın.

13.6.2 Sıralamanın Özellikleri

Hemen yukarıda tanımladığımızın gerçekten bir sıralama olduğunu, hatta bir tamsıralama olduğunu gösterelim.

Önsav 13.11. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ için,*

i. $\alpha \leq \alpha$.

ii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \alpha$ *ise* $\alpha = \beta$.

iii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \gamma$ *ise* $\alpha \leq \gamma$.

iv. Ya $\alpha \leq \beta$ ya $\beta \leq \alpha$.

Kanıt: Tahmin edildiği üzere her şey tanımlardan ve doğal sayıların bilinen özelliklerinden çıkacak.

$$\alpha = [a,b],\ \beta = [c,d],\ \gamma = [e,f]$$

olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım.

i. Bu, $a+b = a+b$ eşitliğinden çıkıyor!

ii. Varsayımlara göre

$$a+d \leq c+b \text{ ve } c+b \leq a+d.$$

Demek ki $a+d = c+b$. Yani $[a,b] = [c,d]$.

iii. Varsayımlara göre

$$a+d \leq c+b \text{ ve } c+f \leq e+d.$$

Bu iki sıralamayı taraf tarafa toplarsak,

$$(a+d)+(c+f) \leq (c+b)+(e+d),$$

yani

$$(a+f)+(d+c) \leq (b+e)+(d+c)$$

elde ederiz. Şimdi soldaki $d+c$'leri sadeleştirebilmemiz gerekiyor. Bunu da Teorem 9.21'de yaptık, daha doğrusu okura alıştırma olarak bıraktık.

iv. $a+d \leq c+b$ ve $c+b \leq a+d$ sıralamalarından birinin doğru olduğunu kanıtlamamız gerekiyor ki doğal sayılarla ilgili olan bu önermeyi biliyoruz. □

Tamsayıların tamsıralanması sayesinde tamsayıları soldan sağa doğru sıralanmış biçimde temsil edebiliriz. Sağdaki tamsayıların soldakilerden daha büyük oldukları varsayılır. Tamsayılardaki sıralama "ayrık" bir sıralamadır. Her tamsayıdan hemen sonra gelen bir tamsayı ve hemen önce gelen bir tamsayı vardır. Nitekim eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [1,0]$, α'dan daha büyüktür ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı yoktur ve $\alpha + [0,1]$, α'dan daha küçüktür ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı yoktur. (Bunu Önsav 9.20.iii ile karşılaştırın.) Bu $\alpha + [1,0]$ ve $\alpha + [0,1]$ sayıları ileride sırasıyla $\alpha + 1$ ve $\alpha - 1$ anlamına gelecekler. Aşağıdaki alıştırmalarda okurdan bunu kanıtlamasını istiyoruz.

Alıştırmalar

13.48. Eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [1,0]$ tamsayısının α'dan daha büyük olduğunu ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı olmadığını kanıtlayın.

13.49. Eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [0,1]$ tamsayısının α'dan daha küçük olduğunu ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı olmadığını kanıtlayın.

13.50. $\mathbb{Z}$'de en büyük ve en küçük elemanların olmadığını kanıtlayın.

13.51. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\alpha \geq [0,0]$ sıralamasını kanıtlayın.

13.52. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\alpha \geq \alpha$ sıralamasını kanıtlayın.

13.6.3 Sıralamayla İşlemlerin İlişkisi

Şimdi herhangi bir sayıyla toplamanın ve $[0,0]$'dan büyük (yani ***pozitif***) bir sayıyla çarpmanın sıralamaya saygı duyduğunu (yani işlem uygulanan elemanların sıralamasını bozmayacağını) kanıtlayalım.

Önsav 13.12. *$\alpha \leq \beta$ ve γ üç tamsayı olsun.*
i. $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.
ii. *Eğer* $\gamma \geq [0,0]$ *ise,* $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Kanıt: $\alpha = [a,b]$, $\beta = [c,d]$, $\gamma = [e,f]$ olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayıları bulalım. Varsayıma göre $a + d \leq c + b$.

i. $\alpha + \gamma$ ve $\beta + \gamma$ tamsayılarını a, b, c, d, e, f doğal sayıları cinsinden yazalım.

$$\alpha + \gamma = [a,b] + [e,f] = [a+e, b+f],$$
$$\beta + \gamma = [c,d] + [e,f] = [c+e, d+f].$$

İstediğimiz $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ sıralamasının doğru olması için,

$$(a+e) + (d+f) \leq (c+e) + (b+f),$$

yani

$$(a+d) + (e+f) \leq (c+b) + (e+f),$$

sıralamasının doğru olması gerekiyor. Varsayıma göre $a + d \leq c + b$ sıralaması doğru olduğundan, bu son sıralama da doğrudur (Teorem 9.21).

ii. Varsayımdaki $\gamma \geq [0,0]$ sıralaması $e \geq f$ demektir; $a+d \leq c+b$ sıralaması dışında bir de bunu aklımızda tutalım, her ikisini de kullanacağız.

$\alpha+\gamma$ ve $\beta+\gamma$ tamsayılarını a, b, c, d, e, f doğal sayıları cinsinden yazalım.

$$\alpha\gamma = [a,b][e,f] = [ae+bf, af+be],$$
$$\beta\gamma = [c,d][e,f] = [ce+df, cf+de].$$

İstediğimiz $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ sıralamasının doğru olması için,

$$(ae+bf)+(cf+de) \leq (ce+df)+(af+be),$$

yani

$$(a+d)e+(b+c)f \leq (b+c)e+(a+d)f$$

sıralamasının doğru olması gerekiyor. $e \geq f$ olduğundan, bir g doğal sayısı için,

$$e = f+g$$

eşitliği doğrudur. Bunu kullanarak kanıtlamak istediğimiz sıralamadaki e'yi yok edelim:

$$(a+d)(f+g)+(b+c)f \leq (b+c)(f+g)+(a+d)f,$$

sıralamasını kanıtlamalıyız. Sıralamanın sağında ve solunda

$$(a+b+c+d)f$$

terimleri var. Demek ki,

$$(a+d)g \leq (b+c)g$$

sıralamasını kanıtlamalıyız. Ama $a+d \leq c+b$ sıralamasını biliyoruz... İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 13.13 (Özet)**.** $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, [0,0], [1,0])$ *yapısı Teorem 13.9'daki özelliklerden başka şu özellikleri de sağlar: Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ *için,*

S1. $\alpha \leq \alpha$.
S2. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \alpha$ *ise* $\alpha = \beta$.
S3. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \gamma$ *ise* $\alpha \leq \gamma$.
S4. *Ya* $\alpha \leq \beta$ *ya* $\beta \leq \alpha$.
TS. *Eğer* $\alpha \leq \beta$ *ise* $\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$.
ÇS. *Eğer* $\alpha \leq \beta$ *ve* $\gamma \geq [0,0]$ *ise,* $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

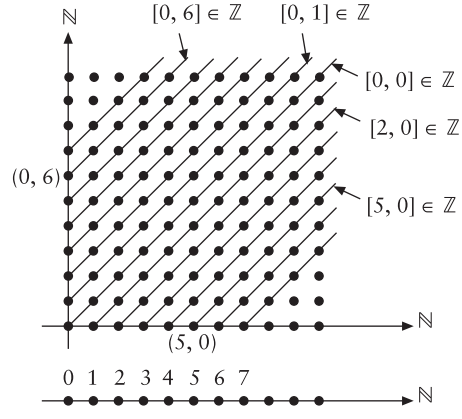
Notlar

13.53. Önce özelliklerin adları:
T: Toplamayla ilgili,
Ç: Çarpmayla ilgili,
S: Sıralamayla ilgili
demektir. Örneğin TS, toplama ve sıralamayla ilgili özellik anlamına gelir.

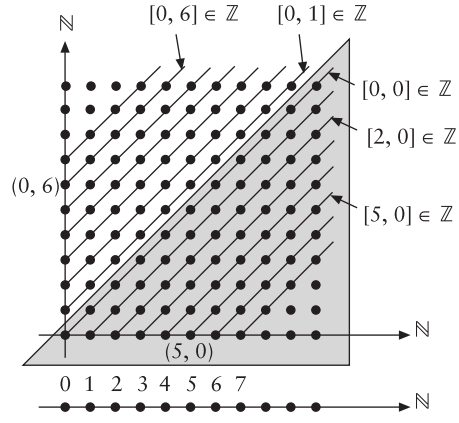
13.54. T1, T2, T3, T4, S1, S2, S3, TS'yi sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \leq, [0,0])$ yapısına ***sıralı abelyen grup*** adı verilir. Teorem 13.9 ve 13.13'ü sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, [0,0], [1,0])$ yapısına da ***sıralı halka*** denir. Sıralı halkalar bölge olmak zorundadırlar (Neden?)

13.7 Doğal Sayıları Tamsayılara Gömmek

İlkokuldan beri bize her doğal sayının bir tamsayı olduğu öğretilmiştir: Her doğal sayı bir tamsayıdır; doğal sayılar, tam tamına 0'dan büyükeşit tamsayılardır... demiştir öğretmen. Ama burada yaptığımız inşada hiç de öyle değil, hiçbir doğal sayı bir tamsayı değil, çünkü her tamsayı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesi (bkz. aşağıdaki şekil) ve hiçbiri $\mathbb{N}$'nin bir elemanı değil. Yani $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ilişkisi doğru olmadığı gibi, tam tersine, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ ilişkisi doğru. Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere...



Bu sorunu ileride çözeceğiz ve $\mathbb{N}$ kümesi gerçekten $\mathbb{Z}$'nin altkümesi olacak; ama tabii bunun için $\mathbb{Z}$'yi ya da $\mathbb{N}$'yi (ikisinden birini) değiştirmemiz gerekecek. Şimdilik sorunu çözme yolunda bir adım atalım ve $\mathbb{Z}$'nin içinde $\mathbb{N}$'ye çok benzeyen bir altküme bulalım. Sadece küme olarak değil, toplama ve çarpma işlemleri ve sıralamalarıyla birlikte, $\mathbb{Z}$'nin bulduğumuz bu altkümesiyle $\mathbb{N}$ birbirine çok benzeyecekler.



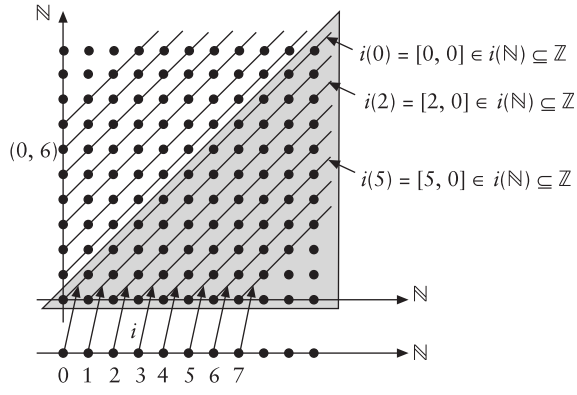
$x \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{Z}$'nin $[x, 0]$ elemanının ileride $x - 0$, yani x anlamına geleceğini söylemiştik. Demek ki aslında $\mathbb{Z}$'nin hangi altkümesinin $\mathbb{N}$'ye benzeyeceğini de söylemişiz: $\mathbb{Z}$'nin yukarıda üçgensel gri alan olarak gösterilen $\{[x, 0] : x \in \mathbb{N}\}$ altkümesi $\mathbb{N}$'ye çok benzeyecek.

$\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden ve

$$i(x) = [x, 0]$$

kuralıyla tanımlanan i fonksiyonu ele alalım. Bu i fonksiyonunun bir "gömme" olduğunu, yani toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyon olduğunu kanıtlayacağız birazdan.

Önce sezgi kazanmak amacıyla fonksiyonu resmedelim.

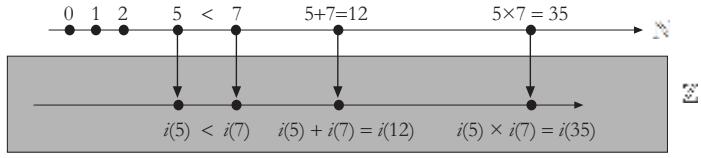


Önsav 13.14. *i, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden, toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyondur; yani her $x, y \in \mathbb{N}$ için,*

$$\begin{aligned} &i(x + y) = i(x) + i(y), \\ &i(xy) = i(x)i(y), \\ &x < y \Leftrightarrow i(x) < i(y) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $i(\mathbb{N}) = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ olur.

Önsavın ilk cümlesinin resmi aşağıda:



Kanıt: Önce i'nin birebir olduğunu kanıtlayalım. $x, y \in \mathbb{N}$ için, $i(x) = i(y)$ olsun. Demek ki $[x, 0] = [y, 0]$, yani $x + 0 = y + 0$, yani $x = y$. Böylece i'nin birebir olduğu kanıtlanmış oldu. Eşitliklerin kanıtı da oldukça biçimsel:

$$i(x + y) = [x + y, 0] \text{ ve } i(x) + i(y) = [x, 0] + [y, 0] = [x + y, 0].$$

Demek ki $i(x + y) = i(x) + i(y)$. Diğer önermeler de benzer şekilde kanıtlanır. □

Önsav, $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$ yapısıyla $(i(\mathbb{N}), +, \times, \leq)$ yapısının birbirine çok benzediğini, aralarındaki tek farkın elemanlarının adları olduğunu söylüyor. $\mathbb{N}$'de x dediğimize $i(\mathbb{N})$'de $i(x)$ diyoruz. Bu, Ali'ye Veli, Ayşe'ye Fatma demek gibi bir şey... Ya da beş yerine *five*, artı yerine *plus* demek gibi bir şey. Teşbihte hata olmazmış. Bu benzerlik yüzünden i'ye ***gömme*** adı verilir. Gerçekten de i fonksiyonu $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$ yapısını bir anlamda $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ yapısının içine gömüyor.

$\mathbb{Z}$'nin $i(\mathbb{N})$ altkümesi toplama ve çarpma işlemleri altında kapalıdır elbet ama $\mathbb{Z}$'nin bu özelliğe sahip başka altkümeleri de vardır. Örneğin $\mathbb{Z}$'nin kendisi, ama bunun dışında

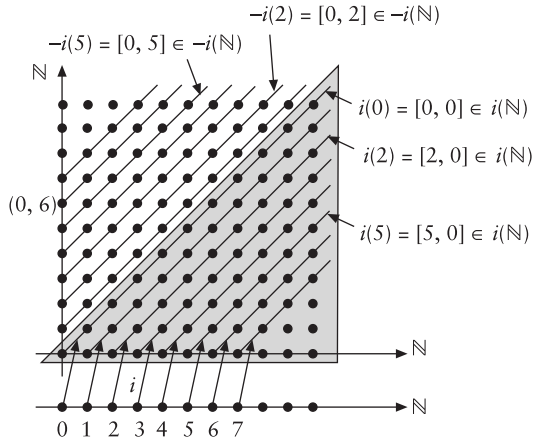
$$\{[2x, 0] : x \in \mathbb{N}\} \text{ ve } \{[x, 0] : x \in \mathbb{N} \text{ ve } x > 5\}$$

altkümeleri de toplama ve çarpma altında kapalıdır. Ama $i(\mathbb{N})$ altkümesi gene de $\mathbb{Z}$'nin belli bir özelliğe sahip biricik altkümesidir. Örneğin, $i(\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}$'nin, $[0, 0]$ ve $[1, 0]$ elemanlarını içeren ve toplama altında kapalı en küçük altkümesidir. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

i fonksiyonunun doğallığına ikna etmek amacıyla okura şu sonucu sunalım:

Önsav 13.15. *Eğer i, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden ve toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir fonksiyonsa, o zaman ya her $x \in \mathbb{N}$ için $i(x) = [0, 0]$ olur ya da her $x \in \mathbb{N}$ için $i(x) = [x, 0]$ olur.* □

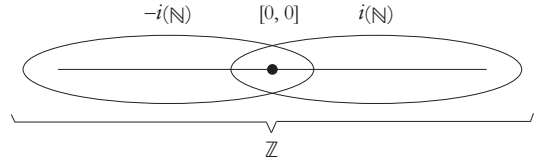
Konumuzun candamarını teşkil etmediğinden bu önsavı kanıtlamayıp okura bırakıyoruz. Daha canalıcı sonuçlarımız var. Bir sonraki önsav, ileride, $\mathbb{Z}$'nin, doğal sayılarla doğal sayıların eksilerinden oluştuğunu söyleyecek. Önsavın kanıtına geçmeden önce aşağıdaki resmi incelemenizi özellikle öneririz.



Önsav 13.16. *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}),\\
&i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = [0,0],\\
&i(\mathbb{N}) = \{[a,b] \in \mathbb{Z} : a \geq b\},\\
&-i(\mathbb{N}) = \{[a,b] \in \mathbb{Z} : a \leq b\}.
\end{aligned}$$

İşte önsavın resmi:



Kanıt: İlk eşitlikle başlayalım. Elbette $i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$. Diğer yönü kanıtlayalım. $[a,b] \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \geq b$ ise bir $x \in \mathbb{N}$ için $a = b + x$ olur, buradan da

$$[a,b] = [x,0] = i(x) \in i(\mathbb{N})$$

çıkar. Eğer $a \leq b$ ise, yukarıda yaptıklarımızdan,

$$[a,b] = -[b,a] \in -i(\mathbb{N})$$

çıkar.

İkincisi çok kolay: Eğer $x, y \in \mathbb{N}$ için $i(x) = -i(y)$ ise, $[x,0] = [0,y]$ olur, yani $x + y = 0 + 0 = 0$ olur. Bu da $x = y = 0$ demektir.

Son iki eşitlik bu aşamada çok kolay olmalı □

Demek ki $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{N}$'ye çok benzeyen $i(\mathbb{N})$ kümesinin elemanlarından ve bu kümenin elemanlarının eksilerinden oluştuğunu kanıtladık. Şimdilik

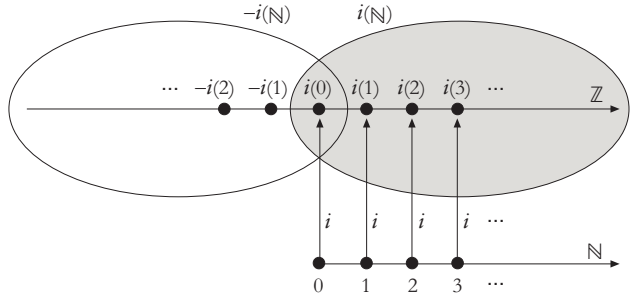
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$$

eşitliklerimiz yok ama bunun yerine bu eşitliklere çok benzeyen

$$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \text{ ve } i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = \{[0,0]\}$$

eşitliklerimiz var.

Bir sonraki altbölümde, gözümüzü karartıp $i(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{N}$'yi "özdeşleştireceğiz". Şimdilik genel resim şöyle:

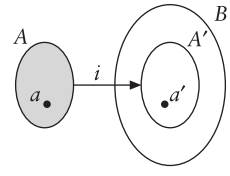


13.8 Kesip Yapıştırma ya da Özdeşleştirme

Bu ve bundan sonraki altbölümlerde $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin ayrık kümeler olma sorununu çözeceğiz. $\mathbb{N}$'yi aslında $\mathbb{Z}$'nin içinde altküme olarak bulmak istiyoruz ama şimdiye kadar yaptıklarımızdan, tam tersine, $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin ayrık kümeler oldukları çıkıyor. Bu üzücü duruma son vereceğiz.

Bunu "kesip yapıştırma" yöntemiyle yapacağız. Matematikte çok sık kullanılan ve adına "özdeşleştirme" denilen "kesip yapıştırma" yöntemini açıklayalım şimdi. Daha sonra esas konumuza geri döneceğiz.

A ve B iki küme olsun. B'de A'ya "çok benzeyen" bir A' altkümesi olsun. "Çok benzemek"ten tam kastımızı açıklamayacağız, ama bu en azından A ile A' arasında bir eşleme var anlamına gelir.

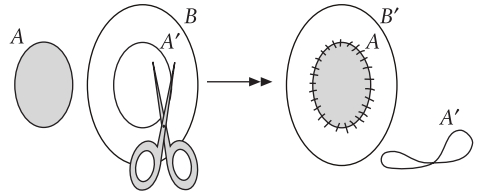


Duruma göre, A ve A' kümeleri arasında bir eşlemenin varlığından daha fazlasını da isteyebiliriz, ama aralarında en az bir eşlemenin olması şart. Bu eşlemeye i adını verelim. Bu i eşlemesini kullanarak, A kümesini B kümesinin A' altkümesi olarak görmek istiyoruz, daha doğru bir deyişle, her $a \in A$ için, B'nin $i(a)$ elemanı yerine a yazmak istiyoruz. Matematikte bu "A ile A' kümelerini i ile özdeşleştirmek" olarak ifade edilir. Bu bölümde bunun tam ne anlama geldiğini ve nasıl yapılacağını açıklayacağız. Özdeşleştirme aşağı

yukarı şöyle yapılır: A' kümesi B kümesinden çıkarılır ve yerine kendisine çok benzeyen A kümesi yapıştırılır ya da aşağıdaki şekildeki gibi dikilir. Böylece B kümesinden A' kaybolur ve yerine A gelir. Bunu matematiksel olarak yapmak oldukça kolay: B kümesi yerine,

$$B' = (B \setminus A') \cup A$$

kümesi almak yeterli.



Okurun aşina olduğunu düşündüğümüz bir örnek verelim. Bir polinom

$$r_0 + r_1 X + \cdots + r_n X^n$$

biçiminde bir ifadedir. Diyelim r_i katsayılarını reellerden, yani $\mathbb{R}$ kümesinden aldık. Burada n, herhangi bir doğal sayı olabilir. Eğer $r_n \neq 0$ ise n'ye polinomun derecesi adı verilir. Derecesi 0 olan polinomlar

$$r_0$$

biçiminde yazılırlar. Bunları reel sayı olarak görmek âdettendir, ama tabii aslında reel sayı değildirler, polinomdurlar, derecesi 0 olan polinomdurlar. Derecesi 0 olan polinomları reel sayı olarak görmenin hiçbir sakıncası yoktur ve hatta hayatı kolaylaştırdığı için faydası bile vardır. Dolayısıyla reel sayılar derecesi 0 olan polinomlarla özdeşleştirilirler.

Aslında özdeşleştirme çok basit bir konudur, anlaşılacak bir yanı yoktur (ve bu yüzden anlaşılmayabilir!) ama işte bazen böyle en basit konular zihinde soru işaretleri uyandırabilirler. Sinek küçüktür ama mide bulandırır misali.

A ile B'nin A' kümesi i vasıtasıyla özdeşleştirildikten sonra A' kümesinin $i(a)$ elemanı yerine a yazılır.

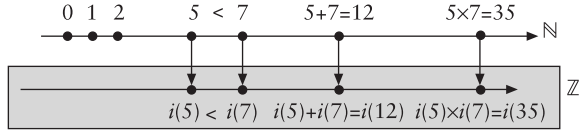
Bir önceki bölümdeki $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu da aynen böyle bir fonksiyon: Birebir, toplamaya ve çarpmaya ve sıralamaya saygı duyuyor. Birazdan yukarıdaki "kes yapıştır" yöntemiyle $\mathbb{N}$ ile $i(\mathbb{N})$'yi özdeşleştireceğiz.

13.9 Nihayet Yılların $\mathbb{Z}$'si

i gömmesini kullanarak $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin $i(\mathbb{N})$ altkümesini özdeşleştireceğiz ve insanlığın yüzyıllardır bildiği, hissettiği, kullandığı $\mathbb{Z}$'ye kavuşacağız.

Bundan böyle her $x \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{Z}$'nin $i(x) = [x, 0]$ elemanını x olarak yazacağız. Böylece $\mathbb{N}$'yi $\mathbb{Z}$'nin içinde bulacağız. Yapay bir biçimde olsa da...

Böyle yapmakla $\mathbb{N}$'deki toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı değiştirmemiş olacağız, örneğin $5 + 7$ toplamı eski $\mathbb{N}$ yapısında 12 yapıyorsa, $\mathbb{Z}$'de de 12 yapacak, çünkü i toplamaya saygı duyuyor. Eski şeklimizi bellek tazelemek için yeniden gösterelim:



Demek ki artık $[0, 0] = i(0)$ elemanı yerine 0, $[1, 0] = i(1)$ elemanı yerine 1, $[2, 0] = i(2)$ elemanı yerine 2, $[0, 1] = -i(1)$ elemanı yerine -1, $[0, 2] = -i(2)$ elemanı yerine -2 yazacağız.

Önsav 13.16'da kanıtladığımız

$$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \text{ ve } i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = \{[0, 0]\}$$

eşitlikleri şimdi artık

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$$

eşitlikleri halini almış oldu.

Teorem 13.13'te

$$(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, [0, 0], [1, 0])$$

yapısının sıralı bir halka olduğunu kanıtlamıştık. Artık, doğal sayıları da içeren

$$(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, 0, 1)$$

sıralı halkasından sözedeceğiz.

$\mathbb{Z}$ Halka Yapısının Karakteristik Özelliği. Ne dediği anlaşıldığında aşağıdaki teoremin kanıtı çok kolaydır. Kanıtlamadan ve anlamını anlatmadan geçiyoruz ama buraya kadar dikkatle okuyan okurun anlayacağını ümit ediyoruz.

Teorem 13.17. *Pozitif elemanları doğal sayılar yapısına eşyapısal olan her sıralı halka $\mathbb{Z}$'ye eşyapısaldır.* □

Teorem 13.17'nin önermesine $\mathbb{Z}$'nin karakteristik özelliği diyebiliriz.

14. Kesirli Sayılar Kümesi $\mathbb{Q}$

Giriş. Bir önceki uzun bölümde tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$'yi matematiksel olarak tanımlayıp var etmiştik.

Tamsayılarda, doğal sayılarda tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine ek olarak bir de çıkarma işlemi yapılabilir. Bunu biliyoruz. Zaten tamsayıları sadece çıkarma yapabilelim diye özellikle yaratmıştık/icat etmiştik/keşfetmiştik/tanımlamıştık.

Tamsayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapılabilir ama bölme işlemi yapılamaz, örneğin tamsayılarda 2, 3'e bölünmez, bölme yapabilmek için kesirli sayılara geçmek zorundayız.

Bu bölümde kesirli sayıları matematiksel anlamda var edeceğiz. Bunu tamsayıları kabullenerek yapacağız. Yani tamsayıları ve tamsayılarda tanımlanmış olan toplama, çıkarma ve çarpmanın temel özelliklerini bildiğimizi varsayıp, ki biliyoruz, kesirli sayılar kümesini tanımlayacağız. Ardından kesirli sayılar kümesi üzerine, adına toplama, çıkarma, çarpma ve bölme diyeceğimiz dört işlem tanımlayacağız. Bunlara ek olarak bir de kesirli sayılar üzerinde bir sıralama tanımlayacağız.

Yöntemimiz ve kanıtlarımız bir önceki bölümdeki yöntem ve kanıtlara çok benzediğinden, bu bölümde o kadar ayrıntıya girmeyeceğiz, kanıtların bir çoğunu okura alıştırma olarak bırakacağız.

Kullanacağımız yöntem sadece tamsayılara değil, başka halkalara da uygulanabileceğinden, kitabın sonundaki Ek 34'de çok daha genel bir yöntem göstereceğiz. O bölümde sadece tamsayılarla değil, birçok bakımdan tamsayıları andıran genel bazı matematiksel yapılarla uğraşacağız.

14.1 Kesirli Sayılar Kümesi

Bir an için kesirli sayıları bildiğimizi varsayalım. Zaten sezgisel olarak kesirli sayıları biliyoruz. Bunlar, $2/3$ gibi, $-9/6$ gibi ya da $5/1$ gibi sayılardır. İlkokuldan beri bildiğimiz üzere, her kesirli sayı, a ve b tamsayıları için a/b biçiminde yazılır.

a ve b tamsayıları var elimizde ama a/b diye bir sayı yok henüz. a ve b

tamsayılarından yola çıkarak, matematiksel yöntemlerle a/b diye matematiksel bir nesne yaratacağız. Tamsayılarda "a bölü b" diye bir kavram olmadığından, tanımı "a/b, a bölü b olsun" şeklinde veremeyiz. Biraz daha özen göstermeliyiz.

Bir an için, a/b'yi (a, b) ikilisi olarak tanımlayalım. Ama o zaman, $2/3 = 4/6$ eşitliğinden dolayı,

$$(2, 3) = (4, 6)$$

eşitliği doğru olmalı, ki bu son eşitliğin doğru olmadığını biliyoruz.

Madem ki $(2, 3)$ ikilisinin $(4, 6)$ ikilisine eşit olmasını istiyoruz ama maalesef değil, o zaman biz de "eşit olmalı" yerine "denk olsunlar" deriz... Birazdan

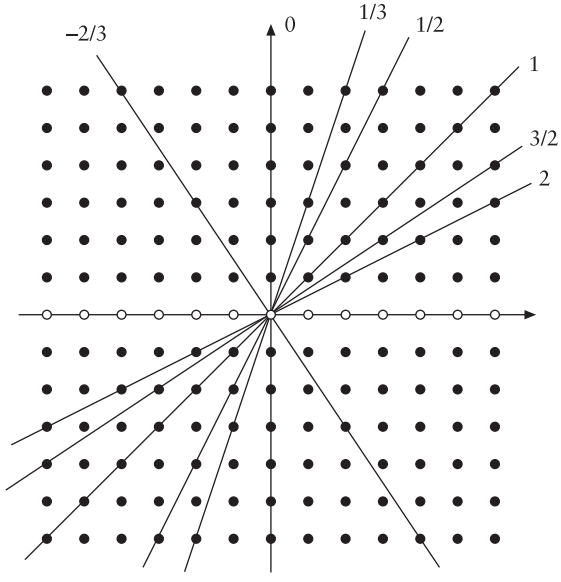
$$(2, 3), (4, 6), (6, 9), (-2, -3)$$

gibi tamsayı ikililerinin "birbirine denk" olduklarını söyleyeceğiz.

Aşağıdaki şekilde her doğrunun üstündeki noktalar birbirlerine "denk"tir. Örneğin, birazdan tanımı verdiğimizde,

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), (-1, -2), (-2, -4)$$

ikililerinden her biri diğerlerine denk olacaklar. İleride, aşağıda gördüğünüz doğruların (üstündeki noktalardan oluşan kümelerin) her biri bir kesirli bir sayı olacak, daha doğrusu bir kesirli bir sayı olarak tanımlanacak.



Yalnız bir şeye dikkat etmek gerekiyor: a/b kesirli sayısında, $b \neq 0$ olduğundan, b'nin 0'a eşit olmadığı (a, b) ikilileriyle çalışmalıyız.

Matematiksel tanıma giden sürece girelim. İkinci koordinatı 0 olmayan tamsayı ikilileri arasında şöyle bir ikili ilişki tanımlamak istiyoruz:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a/b = c/d.$$

Ama sağ taraftaki eşitlik, "a bölü b" gibi kesirli sayıların varlığını varsayıyor. Henüz varolmayan bir şeyden sözedemeyiz. Buna da bir çözüm bulmalıyız. "$a/b = c/d$" eşitliğini kesirli sayılardan sözetmeden ifade etmeliyiz, ama bu çok kolay, ilkokuldan beri bildiğimiz üzere,

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc.$$

Demek ki ikinci koordinatı 0 olmayan tamsayı ikilileri arasında, $\equiv$ simgesiyle göstereceğimiz ikili ilişkiyi,

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

olarak tanımlayabiliriz.

Tanım. *$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ olsun. X üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini, X'in her (a, b), $(c, d) \in X$ ikilisi için,*

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

olarak tanımlayalım.

Örneğin, verilmiş bir $b \neq 0$ için,

$$(0, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow c = 0,$$
$$(b, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow c = d.$$

(Ve tabii bir de d'nin 0 olmaması gerekir.) Ayrıca her $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için,

$$(a, b) \equiv (ax, bx) \text{ ve } (0, 1) \equiv (0, x).$$

Önsav 14.1. *$\equiv$ ikili ilişkisi $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ kümesi üzerine bir denklik ilişkisidir. Yani, her (a, b), (c, d), $(e, f) \in X$ için,*
i. $(a, b) \equiv (a, b)$
ii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ise* $(c, d) \equiv (a, b)$
iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ve* $(c, d) \equiv (e, f)$ *ise* $(a, b) \equiv (e, f)$
olur.

Kanıt: Bu ifadeleri kanıtlamak için, $\equiv$ ilişkisinin tanımına ve tamsayıların kanıtladığımız (ya da bildiğimiz ya da kolaylıkla kanıtlayabileceğimiz) özelliklerine başvurmak gerekiyor.
i. Tanıma bakılırsa, $(a, b) \equiv (a, b)$ ifadesi tam tamına, $ab = ba$ anlamına geliyor. Tamsayılar arasındaki bu eşitliği de Teorem 13.9'dan biliyoruz. (Bundan sonra tamsayılarla ilgili önermeler için referans vermeyeceğiz. Bunlar ya önceki sayfalarda kanıtlanmışlardır ya da kolaylıkla kanıtlanabilirler.)
ii. Çok kolay.
iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ ve $(c, d) \equiv (e, f)$ denklikleri

$$ad = bc$$

ve

$$cf = de$$

anlamına gelir. Bu eşitlikleri kullanarak, $(a, b) \equiv (e, f)$ denkliğini, yani

$$af = be$$

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor. Bildiğimiz iki eşitliği altalta yazıp çarpalım:

$$adcf = bcde$$

elde ederiz. Çiftlerin ikinci koordinatları 0 olmadığından, $d \neq 0$. Dolayısıyla her iki taraftan da d'leri sadeleştirip $acf = bce$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi c'leri sadeleştirmek kaldı. Eğer $c \neq 0$ ise sorun yok, bu sadeleştirmeyi yapabiliriz ve istediğimiz $af = be$ eşitliğini elde ederiz. Bundan böyle $c = 0$ eşitliğini varsayalım. Bu durumda, $ad = bc$ ve $cf = de$ eşitliklerinden $ad = 0 = de$ elde ederiz. $d \neq 0$ olduğundan, bu eşitliklerden, $a = 0 = e$ elde ederiz. Demek ki hem $af = 0$ hem de $be = 0$, yani $af = be$. İstediğimizi kanıtladık. □

Bu önsavdan sonra denklik sınıflarından ve $X/\equiv$ bölüm kümesinden sözedebiliriz. Bunların ne olduklarını anımsatalım. $(a, b) \in X$ için, (a, b)'nin denklik sınıfını $[(a, b)]$ olarak değil, daha basit bir yazılımla $[a, b]$ olarak göstereceğiz:

$$[a, b] = \{(x, y) \in X : ay = bx\}.$$

Bu arada, sık sık kullanılacak olan,

$$[a, b] = [c, d] \Leftrightarrow ad = bc$$

eşitliği de unutulmamalıdır. Dikkat ederseniz, her $x \in X$ için, $[x]$, X'in bir altkümesidir. Bölüm kümesini de anımsatalım:

$$X/\equiv = \{[x] : x \in X\}.$$

Şimdi kesirli sayılar kümesinin tanımını verebiliriz.

Tanım. $\mathbb{Q} = X/\equiv$.

Bundan böyle, her $a \in \mathbb{Z}$ ve her $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, $[a, b]$ denklik sınıfına ***kesirli sayı*** diyeceğiz. $\mathbb{Q}$ da elbette ***kesirli sayılar kümesi*** olacak.

İleride, henüz değil ama, $[a, b]$ sınıfını, alışık olduğumuz üzere, a/b olarak yazacağız.

Kesirli sayılar kümesini tanımladıktan sonra, sıra, kesirli sayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini tanımlamaya geldi. Bunlara ek olarak bir de sıralamayı tanımlamalıyız.

Kanıtların birçoğunu okura bırakacağız. Okur $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ matematiksel yapısıyla ilgili temel her şeyi bildiğini varsayabilir.

Toplamayla çıkarmadan başlayalım.

14.2 Toplama ve Çıkarma

$[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarını ele alalım. Bu iki kesirli sayıyı toplayacağız. $[a, b]$'nin a/b, $[c, d]$'nin c/d anlamına geldiğini biliyoruz. İlkokulda öğrendiğimiz kesirli sayı toplamasına göre,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

olmalı. Demek ki, $[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarının toplamını $[ad + bc, bd]$ olarak tanımlamalıyız:

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd].$$

Tabii daha önce bu tanımın geçerli bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Bundan da önce, eğer (a, b) ve $(c, d) \in X$ ise,

$$(ad + bc, bd) \in X$$

olmalı; yani eğer b ve d, 0'a eşit değillerse, bd de 0'a eşit olmamalı; ama bunu Alıştırma 13.29'dan biliyoruz.

Tanımın geçerli olması için, bunun dışında bir de şu kanıtlanmalı: Eğer

$$[a, b] = [a', b'] \text{ ve } [c, d] = [c', d']$$

ise, yani $ab' = ba'$ ve $cd' = dc'$ ise,

$$[a, b] + [c, d] = [a', b'] + [c', d']$$

eşitliği geçerli olmalı, yani,

$$[ad + bc, bd] = [a'd' + b'c', b'd']$$

olmalı, yani,

$$(ad + bc, bd) \equiv (a'd' + b'c', b'd')$$

olmalı, yani,

$$(ad + bc)b'd' = bd(a'd' + b'c')$$

olmalı, ki birbirine eşit kesirli sayıların toplamı birbirine eşit olsun... Demek ki kanıtlamamız gereken önsav şu:

Önsav 14.2. *Her a, c, a', $c' \in \mathbb{Z}$ ve b, d, b', $d' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için,*

$$ab' = ba' \text{ ve } cd' = dc'$$

ise,

$$(ad + bc)b'd' = bd(a'd' + b'c')$$

olur.

Kanıt: Son derece basit olan bu önsavın kanıtını okura bırakıyoruz. □

Bu önsav sayesinde toplamayı,

$$[a,b]+[c,d]=[ad+bc,bd]$$

olarak tanımlayabiliriz. Şimdi toplamanın en temel özelliklerini kanıtlamalıyız. Örneğin, ileride 0 olarak yazacağımız $[0,1]$ kesirli sayısı toplamanın etkisiz elemanı olmalı, yani, her $\alpha\in\mathbb{Q}$ için,

$$\alpha+[0,1]=[0,1]+\alpha=\alpha$$

olmalı. İleride a/b anlamına gelecek olan $[a,b]$ elemanının ***toplamsal tersi***, ileride $-a/b$ anlamına gelecek olan $[-a,b]$ elemanı olmalı, yani

$$[a,b]+[-a,b]=[0,1]$$

olmalı. Her şey yolunda gidecek.

Önsav 14.3. i. *Her α, β, $\gamma\in\mathbb{Q}$ için, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.*
ii. $[0,1]$ *toplamanın* ***etkisiz elemanı****dır, yani her $\alpha\in\mathbb{Q}$ için,*

$$\alpha+[0,1]=[0,1]+\alpha=\alpha.$$

iii. *Her $\alpha\in\mathbb{Q}$ için, $\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha=[0,1]$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha'\in\mathbb{Q}$ vardır. Eğer $\alpha=[a,b]$ ise $\alpha'=[-a,b]$ olmak zorundadır.*
iv. *Her α, $\beta\in\mathbb{Q}$ için, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.*

Kolay kanıtı okura bırakıyoruz.
$\alpha\in\mathbb{Q}$ verildiğinde, Önsav 14.3.iii'teki α' elemanı biriciktir, nitekim,

$$\alpha+\alpha'=\alpha''+\alpha=[0,1]$$

ise, Önsav 14.3.i ve ii'den dolayı,

$$\alpha'=[0,1]+\alpha'=(\alpha''+\alpha)+\alpha'=\alpha''+(\alpha+\alpha')=\alpha''+[0,1]=\alpha''$$

olur.

Önsav 14.3.iii'te varlığı söylenen ve biraz önce biricik olduğunu kanıtladığımız eleman α' olarak değil de $-\alpha$ olarak yazılır ve adına α'nın ***toplamsal tersi*** denir. Önsav 14.3.iii'e bakınca, α', α'nın toplamsal tersiyse, α'nın da α' elemanının toplamsal tersi olduğu görülür, çünkü

$$\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha=[0,1]$$

eşitliği α ve α' elemanlarına göre simetrik. Demek ki α'nın toplamsal tersinin toplamsal tersi α'dır, bir başka deyişle,

$$-(-\alpha)=\alpha$$

olur. Bunu şöyle de görebiliriz: Önsav 14.3.iii'e göre $\alpha = [a, b]$ ise

$$-\alpha = [-a, b]$$

olur ve gene aynı nedenden,

$$-(-\alpha) = [-(-a), b] = [a, b] = \alpha$$

olur. $-[0, 1] = [0, 1]$ eşitliği de kolay.

Kesirli sayılarda çıkarmayı tanımlayabiliriz: Her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ için,

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

tanımını yapalım. $-\alpha \pm \beta$ eleman(lar)ını da $(-\alpha) + (\pm\beta)$ olarak tanımlayabiliriz. Bu tanımdan sonra,

$$-(-\alpha + \beta) = \alpha - \beta$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak işten bile değildir.

14.3 Çarpma ve Bölme

Toplamadan sonra çarpmayı tanımlamalıyız. Bunun da nasıl yapılması gerektiği belli olmalı:

$[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarını ele alalım. Bu iki kesirli sayıyı çarpacağız. $[a, b]$'nin a/b ve $[c, d]$'nin c/d anlamına geldiğini biliyoruz. İlkokulda öğrendiğimiz kesirli sayı çarpmasına göre,

$$a/b \times c/d = ac/bd$$

olmalı. Demek ki, $[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarının çarpımını $[ac, bd]$ olarak tanımlamalıyız:

$$[a, b][c, d] = [ac, bd].$$

$bd \neq 0$ olmadığından, ikinci koordinatta sorun yaşamıyoruz.

Gene her zamanki gibi bu tanımın gerçek bir tanım olduğu kanıtlanmalı. Yani şu önerme kanıtlanmalı:

$(a, b) \equiv (a', b')$ ve $(c, d) \equiv (c', d')$ ise o zaman $(ac, bd) \equiv (a'c', b'd')$ olur.

Bunun kanıtı çok basittir ve okura bırakılmıştır. Böylece kesirli sayıları çarpabiliriz. Tanımın hemen ardından çarpmanın tahmin edilen özellikleri kanıtlanmalı. Kanıtları yine okura bırakıyoruz.

Önsav 14.4. i. *Her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ *için,* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
ii. $[1,1]$ *çarpmanın* ***etkisiz elemanıdır****, yani her* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *için,*

$$\alpha[1,1] = [1,1]\alpha = \alpha.$$

iii. $[1,1] \neq [0,1]$.
iv. *Her* α, $\beta \in \mathbb{Q}$ *için,* $\alpha\beta = \beta\alpha$. □

Bu özelliklerin aynılarının $\mathbb{Z}$ ve çarpma için de geçerli olduklarını gördük. Ama çarpmanın kesirli sayılara özgü özel bir özelliği var: $[0,1]$ dışında her kesirli sayının çarpımsal tersi vardır:

Önsav 14.5. *Her* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{[0,1]\}$ *için,* $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha = [1,1]$ *eşitliğini sağlayan bir* $\alpha' \in \mathbb{Q}$ *vardır. Eğer* $\alpha = [a,b]$ *ise* $\alpha' = [b,a]$ *olmak zorundadır.* □

Önsav 14.4 ve 14.5'i kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Önsav 14.5'in ikinci kısmı ileride, a/b'nin çarpımsal tersinin b/a anlamına geldiğini söyleyecek. Laf açılmışken,

$$[a,b] = [a,1][1,b]$$

eşitliğinin ileride önem kazanacağını, $[a,b]$ kesirli sayısını a/b olarak yazmamızı sağlayacağını söyleyelim.

$\alpha \in \mathbb{Q}$ verildiğinde, Önsav 14.5'teki α' elemanı biriciktir, nitekim,

$$\alpha\alpha' = \alpha''\alpha = [1,1]$$

ise, Önsav 14.4.i ve ii'den dolayı,

$$\alpha' = [1,1]\alpha' = (\alpha''\alpha)\alpha' = \alpha''(\alpha\alpha') = \alpha''[1,1] = \alpha''$$

olur. Bu eleman α' olarak değil de α^{-1} olarak yazılır ve adına α'nın ***çarpımsal tersi*** denir. Önsav 14.3.ii'ye bakınca, α', α'nın çarpımsal tersiyse, α'nın da α' elemanının çarpımsal tersi olduğu görülür, çünkü

$$\alpha\alpha' = \alpha'\alpha = [1,1]$$

eşitliği α ve α' elemanlarına göre simetriktir. Demek ki α'nın çarpımsal tersinin çarpımsal tersi α'dır, bir başka deyişle,

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$$

olur. Bu eşitliği Önsav 14.5'in ikinci yarısına bakınca da görürüz:

$$([a,b]^{-1})^{-1} = [b,a]^{-1} = [a,b].$$

Bu aşamada kolaylıkla bölmeyi tanımlayabiliriz. Eğer α, $\beta \in \mathbb{Q}$ ise ve

$$\beta \neq [0,1]$$

ise, "α bölü β"yı $\alpha\beta^{-1}$ olarak tanımlayalım.

Bir de çarpmanın toplamaya göre dağıldığını kanıtlamak gerekiyor.

Önsav 14.6. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.* □

Bunun da kanıtını okura bırakıyoruz. Her zaman olduğu gibi $\mathbb{Q}$'da toplama ve çarpmanın tanımlarına ve bu işlemlerin $\mathbb{Z}$'de bilinen özelliklerine inmek gerekir.

Önsav 14.3, 14.4, 14.5, 14.6'daki özellikleri sağlayan bir yapıya ***cisim*** denir. Demek ki $(\mathbb{Q}, +, \times, [0,1], [1,1])$ yapısı bir cisimdir.

Alıştırmalar

14.1. α, $\beta \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha\beta = [0,1]$ ise, ya $\alpha = [0,1]$ ya da $\beta = [0,1]$ eşitliklerinden birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.

14.2. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha + \alpha = [2,1]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

14.3. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $-\alpha = [-1,1]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

14.4 Sıralama

Sıra sıralamaya geldi... Bilindiği gibi,

$$a/b \leq c/d \Leftrightarrow ad \leq bc$$

önermesi doğru **değildir**, bunun doğru olması için b ve d'nin pozitif olmaları gerekir. Eğer doğru olsaydı kesirli sayılarda sıralamayı

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow ad \leq bc$$

olarak tanımlardık. Bu sorunu çözmek kolay:

$$[a,b] = [-a,-b]$$

eşitliği doğru olduğundan, bir $[a,b]$ kesirli sayının b "koordinatını" (ya da paydasını!) her zaman pozitif seçebiliriz. Şöyle bir yöntem izleyelim: $b \in \mathbb{Z}$ için, ε_b, b'nin işareti olsun, yani,

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 1 & \text{eğer } b > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } b = 0 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } b < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Her u, $v \in \mathbb{Z}$ için, $\varepsilon_{uv} = \varepsilon_u\varepsilon_v$ eşitliğine dikkatinizi çekeriz. Ayrıca her $[a,b] \in \mathbb{Z}$ için,

$$[a,b] = [\varepsilon_b a, \varepsilon_b b]$$

ve $\varepsilon_b b > 0$ olur. Demek ki sıralamanın tanımı şöyle verilmeli:

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow \varepsilon_b\varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b\varepsilon_d bc.$$

Daha tanım tamamlanmadı ama. Tanımın geçerli olması için kanıtlanması gereken bir şey daha var. Önerilen tanımın geçerli bir tanım olması için, sağ taraftaki koşulun a, b, c ve d'ye göre değil, $[a,b]$ ve $[c,d]$'ye göre değişmesi gerekir. Yani şu önsav kanıtlanmalı.

Önsav 14.7. *Her a, c, a', $c' \in \mathbb{Z}$ ve b, d, b', $d' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, eğer*

$$[a,b] = [a',b'] \text{ ve } [c,d] = [c',d']$$

ise, o zaman,

$$\varepsilon_b\varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b\varepsilon_d bc \Leftrightarrow \varepsilon_{b'}\varepsilon_{d'} a'd' \leq \varepsilon_{b'}\varepsilon_{d'} b'c'$$

olur.

Kanıt: Önermedeki simetriden dolayı, $\varepsilon_b\varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b\varepsilon_d bc$ sıralamasını varsayıp $\varepsilon_{b'}\varepsilon_{d'} a'd' \leq \varepsilon_{b'}\varepsilon_{d'} b'c'$ sıralamasını kanıtlamak yeterli. $\varepsilon_d d$ yerine d yazarsak ve benzer değişimi $\varepsilon_b b$, $\varepsilon_{d'} d'$ ve $\varepsilon_{b'} b'$ için yaparsak, $\varepsilon_b = \varepsilon_d = \varepsilon_{d'} = \varepsilon_{b'} = 1$ eşitliklerini ve b, d, b' ve d' tamsayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz. Böylece varsayımlarımız

$$ab' = ba',\ cd' = c'd,\ ad \leq bc$$

şeklini alır. Son sıralamanın her iki tarafını da $b'd'$ ile çarparsak,

$$adb'd' \leq bcb'd'$$

elde ederiz. Soldaki ab' ve sağdaki cd' yerine sırasıyla ba' ve $c'd$ koyarsak istediğimizi elde ederiz. □

Yukarıdaki önsav, $\mathbb{Q}$ kümesi üzerine, $\leq$ ikili ilişkisinin

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow \varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc.$$

koşuluyla tanımlanabileceğini gösterir. Şimdi bu ikili ilişkinin ***yoğun*** bir tamsıralama olduğunu kanıtlamak gerekiyor.

Önsav 14.8. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ için,*
i. $\alpha \leq \alpha$.
ii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \alpha$ *ise* $\alpha = \beta$.
iii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\beta \leq \gamma$ *ise* $\alpha = \gamma$.
iv. *Ya* $\alpha \leq \beta$ *ya da* $\beta \leq \alpha$.
v. *Eğer* $\alpha < \beta$ *ise* $\alpha < \delta < \beta$ *sıralamalarını sağlayan bir* $\delta \in \mathbb{Q}$ *vardır. Eğer* $\alpha = [a,b]$ *ve* $\beta = [c,d]$ *ise,* $\delta = [ad+bc, 2bd]$ *alınabilir.*

Bu önsavın kanıtı da çok kolaydır ve okura alıştırma olarak bırakılmıştır. v'teki "$\alpha < \beta$" önermesi $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha \neq \beta$ anlamına gelmektedir elbette. Ayrıca gene v'teki $\delta = [ad + bc, 2bd]$ eşitliği daha sonra $\delta = (\alpha + \beta)/2$ anlamına gelecektir. v özelliğini sağlayan bir tamsıralamaya ***yoğun tamsıralama*** adı verilir.

Toplamanın ve $[0, 1]$'den büyük her sayıyla çarpmanın sıralamayı koruduğunu kolaylıkla kanıtlayabiliriz.

Önsav 14.9. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ için,*
i. *$\alpha \leq \beta$ ise $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.*
ii. *$\alpha \leq \beta$ ve $[0, 1] \leq \gamma$ ise $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.* □

Önsav 14.8.i, ii, iii, iv ve 14.9.i ve ii'yi sağlayan bir cisme ***sıralı cisim*** adı verilir.

Alıştırmalar

14.4. $(\mathbb{Q}, \leq)$ sıralamasının ilk ve son elemanı olmadığını kanıtlayın.

14.5. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha^2 \geq [0, 1]$ sıralamasını kanıtlayın.

14.6. Her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı için, eğer $\alpha \leq [0, 1]$ ve $\beta \leq [0, 1]$ ise $\alpha\beta \geq [0, 1]$ olduğunu kanıtlayın.

14.7. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için,

$$[0, 1] \leq \alpha \leq [1, 1] \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \alpha$$

önermesini kanıtlayın.

14.5 Tamsayıları Kesirli Sayılara Gömme

İlkokuldan beri bildiğimiz gibi her tamsayı bir kesirli sayıdır, yani $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ilişkisi geçerlidir. Oysa bu bölümde verdiğimiz tanımda $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ arasında böyle bir ilişki yok. Hatta tam tersine bu iki küme kesişmiyor bile. Her kesirli sayıyı

$$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

kümesinin bir altkümesi olarak tanımladık ve bunların hiçbiri $\mathbb{Z}$'nin bir elemanı değil. Eski alışkanlıklarımıza dönebilmemiz için, $\mathbb{Z}$'yi $\mathbb{Q}$'nün bir altkümesi olmasını sağlamalıyız. Bunun için $\mathbb{Q}$'nün tanımını hafifçe değiştireceğiz.

Lise yıllarından, her a tamsayısının $a/1$'e eşit olması gerektiğini bildiğimizden, her a tamsayısını $[a, 1]$ kesirli sayısı olarak görmenin bir yolunu bulmalıyız. Bunu daha önce de kullandığımız kesip yapıştırma ya da başka adıyla özdeşleştirme yöntemiyle (bkz. Altbölüm 13.8) yapacağız.

Önsav 14.10. *Her $a \in \mathbb{Z}$ için, $\mathbb{Q}$'nün $i(a)$ elemanı,*

$$i(a) = [a, 1] \in \mathbb{Q}$$

olarak tanımlanmış olsun. O zaman i, $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Q}$'ye giden birebir bir fonksiyondur ve toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya saygı duyar, yani her a, $b \in \mathbb{Z}$ için,
i. $i(a+b) = i(a) + i(b)$
ii. $i(ab) = i(a)i(b)$
iii. $a \leq b$ *ise* $i(a) \leq i(b)$ *olur.*
Ayrıca, her $[a,b] \in \mathbb{Q}$ *için,* $[a,b] = i(a)i(b)^{-1}$ *eşitliği geçerlidir.* □

Önsava göre, $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ matematiksel yapısıyla, $(i(\mathbb{Z}), +, \times, \leq)$ matematiksel yapısı arasında, elemanların adları dışında hiçbir fark yok. Birinde olan biten, i fonksiyonu sayesinde diğerine taşınabilir.

Bundan böyle, $\mathbb{Q}$'nün $i(\mathbb{Z})$ altkümesinin $i(a)$ elemanı yerine sadece a yazacağız. Bir başka deyişle, $i(\mathbb{Z})$ ile $\mathbb{Z}$'yi özdeşleştireceğiz. Böylece, yukarıda kanıtlanan

$$[a,b] = i(a)i(b)^{-1}$$

eşitliği

$$[a,b] = ab^{-1}$$

şeklini alır. Böylece, ta ilkokuldan beri bildiğimiz,

$$\mathbb{Q} = \{ab^{-1} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

eşitliği geçerli olur. Bundan böyle her kesirli sayıyı $a \in \mathbb{Z}$ ve $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, ab^{-1} olarak ya da a/b olarak yazabiliriz, aynen ilkokul öğretmenimizin öğrettiği gibi...

Teorem 14.11. $\mathbb{Q}$*, bir Arşimet cismidir, yani* $\mathbb{Q}$*'nün her* β *ve her pozitif* α *sayısı için,* $n\alpha > \beta$ *sıralamasını sağlayan bir* n *doğal sayısı vardır.*

Kanıt: Eğer $\beta \leq 0$ ise, $n = 1$ almak yeter. Bundan böyle $\beta > 0$ olsun. α yerine α/β alarak, β'nın 1'e eşit olduğunu varsayabiliriz. (Yani kanıtanacak sıralamanın her iki tarafını da β'ya bölelim.) m, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için, $\alpha = m/n$ yazalım. O zaman,

$$n\alpha = n \times m/n = m \geq 1.$$

Dolayısıyla $(n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq 1 + \alpha > 1$. □

Kitabın sonundaki Ek 36'te Arşimet özelliğini sağlamayan sıralı cisimler göreceğiz.

Bundan böyle kesirli sayılarla ilgili basit tüm özellikleri bildiğimizi varsayacağız. Örneğin,

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

formülüyle tanımlanan ***mutlak değer*** fonksiyonunu ve kanıtlaması kolay şu başat özelliklerini bildiğimizi varsayacağız: Her x, $y \in \mathbb{Q}$ için

$$\begin{aligned}
&(1) \quad |x| \geq 0,\\
&(2) \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\\
&(3) \quad |x| = |-x|,\\
&(4) \quad |xy| = |x||y|
\end{aligned}$$

ve meşhur ***üçgen eşitsizliği*** olarak bilinen

$$(5) \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

sıralaması. Bunun dışında, kanıtlaması gene kolay olan

$$\begin{aligned}
&(6) \quad |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y,\\
&(7) \quad x \leq |y| \Leftrightarrow -|y| \leq x \leq |y|,\\
&(8) \quad x \leq |y| \Leftrightarrow (-x \leq |y| \text{ ve } x \leq |y|)
\end{aligned}$$

özellikleri önemlidir. Gelecekte şu sonuca ihtiyacımız olacak:

Önsav 14.12. *Her $x, y \in \mathbb{Q}$ için, $||x| - |y|| \leq |x - y|$ olur.*

Kanıt: Üçgen eşitsizliğinden,

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|$$

ve dolayısıyla

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

elde ederiz. x ile y'nin yerlerini değiştirerek benzer şekilde,

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

elde ederiz. Bu ikisinden ve (8)'den istediğimiz sonuç çıkar. □

14.6 Kesirli Sayılarda Üs Alma

Kitabımızın konusu aritmetik ya da sayılar kuramı olmadığı için kesirli sayılarla yapılan diğer işlemleri uzun uzun anlatmayacağız, hatta üs almadan başka bir konuya değinmeyeceğiz, ona da kısaca değineceğiz, çünkü bir sonraki altbölümde gerekecek.

q bir kesirli sayı olsun. Bir n doğal sayısı için q^n ifadesi tümevarımla şöyle tanımlanır:

$$q^0 = 1$$

ve

$$q^{n+1} = q^n q.$$

Sayfa 182'da q^{-1}'i, q sayısının çarpımsal tersi olarak tanımlamıştık. Şimdi bu tanımı genelleştireceğiz. Eğer $n < 0$ bir tamsayıysa

$$q^n = (q^{-n})^{-1}$$

olarak tanımlanır. Tanımdaki eşitliğin sağındaki $(q^n)^{-1}$, q^n sayısının çarpımsal tersidir.

Bu tanım biraz tuhaf, çünkü $n = -1$ alırsak, q^{-1} sayısının yeni bir tanımını vermiş oluyoruz, ama sorun olmayacak, nitekim eğer tanımda $n = -1$ alırsak, tanımın solunda yeni bir q^{-1} belirir; neyse ki soldaki ve sağdaki q^{-1}'ler eşittir.

Bu arada 0^0 sayısını 1 olarak tanımladığımıza dikkatinizi çekerim. Analiz kitaplarında 0^0 haklı gerekçelerle tanımsız bırakılır.

Alıştırmalar

14.8. $q^1 = q$ eşitliğini kanıtlayın.

14.9. $q^2 = q \times q$ eşitliğini kanıtlayın.

14.10. $q^3 = q \times q \times q$ eşitliğini kanıtlayın.

14.11. $q^{-2} = q^{-1} \times q^{-1}$ eşitliğini kanıtlayın.

14.12. Her n tamsayısı ve her $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ için $(q_1 q_2)^n = q_1^n q_2^n$ eşitliğini kanıtlayın.

14.13. Her n ve m tamsayısı ve her $q \in \mathbb{Q}$ için $q^n q^m = q^{n+m}$ eşitliğini kanıtlayın. (Önce $m \in \mathbb{N}$ iken kanıtlayın.)

14.14. Her n ve m tamsayısı ve her $q \in \mathbb{Q}$ için $(q^n)^m = q^{nm}$ eşitliğini kanıtlayın.

14.15. Eğer $q, n \in \mathbb{N}$ ise burada tanımlanan q^n ile sayfa 118'de tanımlanan q^n kavramlarının uyum içinde olduğunu kanıtlayın, yani her iki tanımın da aynı sonucu verdiğini kanıtlayın.

14.16. $q \in \mathbb{Q}$ ve $n > 0$ bir doğal sayı olsun. $q^n \in \mathbb{Z}$ ise $q \in \mathbb{Z}$ olduğunu gösterin.

14.7 On Tabanında Kesirli Sayılar

Altbölüm 9.9'de doğal sayıları onluk tabanda yazmasını görmüştük. Şimdi kesirli sayıları onluk tabanda yazmayı göreceğiz. Bu bölümde değil ama bu kitapta 0,99999... ifadesine anlam vereceğiz. Birçok kişi bu ifadeyi, anlamını bilmeden yazar ve kullanır. Anlamını öğrendiğimizde, çok şaşırtan ve merak edilen ve sorgulanan 0,99999... = 1 eşitliğini matematiksel olarak kanıtlayabileceğiz. Sadece 0,99999... ifadesini değil, ileride 0,172172172172... ifadesini de anlamlandıracağız. Bu da bir kesirli sayı olacak. Gerçel sayıları öğrendiğimizde,

$$0{,}12345678910111213141516171819\ldots$$

gibi ifadeleri de anlamlandıracağız. Tahmin edileceği üzere bir gerçel sayı olacak bu son ifade. Ama gerçel sayıları henüz tanımlamadığımızdan, bırakın bu ifadenin bir gerçel sayı olduğunu kanıtlamayı, "bu bir gerçel sayıdır" diyemeyiz bile, anlamsız bir ifade olur.

14.7.1 Özel Kesirli Sayılar

Teorem 9.29 doğal sayılar içindi. Bilindiği gibi birçok kesirli sayı da benzer bir gösterimle, ama bir virgül ilave edilerek ifade edilebilir. Örneğin,

$$\begin{array}{ll} 1/2 = 0{,}5 & 7/2 = 3{,}5 \\ 1/4 = 0{,}25 & 7/4 = 1{,}75 \\ 1/5 = 0{,}2 & 7/5 = 1{,}4 \\ 1/8 = 0{,}125 & 7/8 = 0{,}875 \\ 1/10 = 0{,}1 & 7/10 = 0{,}7 \\ 1/16 = 0{,}0625 & 7/16 = 0{,}4375 \\ 1/20 = 0{,}05 & 7/20 = 0{,}35 \end{array}$$

Bu sayıları 10'un sonlu sayıda kuvvetlerinin toplamı olarak ifade edebiliriz. İşte birkaçı:

$$\begin{aligned} 1/2 &= 5 \times 10^{-1} \\ 1/4 &= 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} \\ 73/2 &= 3 \times 10^{1} + 6 \times 10^{0} + 5 \times 10^{-1} \\ 7/8 &= 8 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Dikkat ederseniz yukarıdaki sayıların paydalarında sadece 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20 gibi 2 ve 5'in kuvvetlerinin çarpımları var. Eğer paydada örneğin sadeleşmeyen bir 3 ya da 7 varsa o zaman kesirli sayının açılımı sonlu olamaz. Sözgelimi,

$$\begin{aligned} 1/3 &= 0{,}33333333333333333\ldots, \\ 1/7 &= 0{,}142857142857142857\ldots \end{aligned}$$

ve bu sayılar, yukarıdakilerinin aksine, 10'un sonlu sayıda kuvvetleri cinsinden yazılamaz. Zaten eşitliklerin sağındaki virgülden sonra sonsuz rakamlı ifadeler (şimdilik) anlamsız ifadelerdir, çünkü bu ifadeler aslında sonsuz sayıda sayının toplamını simgelemektedir ve sonsuz sayıda sayıyı toplamanın ne demek olduğunu (henüz) bilmiyoruz.

Şimdilik

$$\frac{a}{2^n 5^m}$$

biçiminde yazılan sayıların sonlu bir ondalık açılımı olduğunu kanıtlayalım. Diğerlerini daha ileriki bölümlerde ele alacağız.

Teorem 14.13. *u ve v iki pozitif doğal sayı olsun. v'nin 2 ve 5'ten başka asal böleni olmasın. O zaman,*

$$\frac{u}{v} = a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m$$

eşitliğinin geçerli olduğu $n \geq m$ tamsayıları ve $a_n, \ldots, a_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ rakamları vardır. Ayrıca eğer $a_n \neq 0$ ve $a_m \neq 0$ varsayımlarını yaparsak o zaman $a_n, \ldots, a_m$ katsayıları biriciktir.

Bunun tersi de doğrudur: Eğer $n \geq m$ tamsayılarsa ve $a_n, \ldots, a_m$ rakamları verilmişse, $a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m$ sayısı, bir u doğal sayısı ve 2 ve 5'ten başka asal böleni olmayan bir v doğal sayısı için u/v biçiminde yazılır.

Kanıt: Teoremdeki n ve m sayılarının negatif olabileceklerine dikkatinizi çekerim. (Hatta, eğer $u < v$ ise, n, ve elbette m de, negatif olmak zorundadır ve eğer u/v bir doğal sayı değilse, m negatif olmak zorundadır.)

İkinci paragrafın kanıtı son derece basit:

$$a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m$$

ifadesinin paydaları eşitleyip u/v biçiminde yazalım. Eğer $m \geq 0$ ise $v = 1$ alabiliriz. Ama eğer $m < n$ ise paydada ancak 10'un bir kuvveti olabilir. Demek ki paydanın 2 ve 5'ten gayri asal böleni olamaz.

Şimdi teoremin birinci kısmını kanıtlayalım. u ve v'yi uygun bir doğal sayıyla çarparak v'nin 10^k biçiminde yazılmış bir doğal sayı olduğunu varsayabiliriz. Şimdi Teorem 9.29'u kullanarak u'yu 10'luk tabanda yazarsak, u/v'yi teoremde istenen şekilde ifade edebiliriz.

Katsayıların biricikliğini göstermek kaldı.

$$a_n 10^n + \cdots + a_m 10^m = b_{n'} 10^{n'} + \cdots + b_{m'} 10^{m'}$$

eşitliğini varsayalım. 10'un yeterince büyük bir kuvvetiyle çarparsak m ve m' sayılarının (yani beliren tüm kuvvetlerin) doğal sayı olduklarını varsayabiliriz. Şimdi sonuç Teorem 9.29'dan çıkar. □

14.7.2 Genel Durum

İlkokulda ve lisede 18'i nasıl 7'ye böldüğümüzü anımsayalım. Bölmeye şöyle başlarız:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \hline & \end{array}$$

İlk iş olarak 18'de en fazla kaç tane 7 olduğuna bakarız. 2 tane vardır. Sonra 2'yle 7'yi çarpıp 18'den çıkarırız. Kalan 4'tür:

$$\begin{array}{rl|l} & 18 & 7 \\ \hline - & 14 & 2 \\ \hline & 4 & \end{array}$$

Bu aynen Teorem 9.28'de yapılan bölmedir. Bölme işlemine devam edelim.

Bu aşamada 4'ün sağına bir 0 ve 2'nin sağına bir virgül konulur ve aynı işlem devam ettirilir:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \hline -\ 14 & 2{,}5 \\ \hline 40 & \\ -\ 35 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Yukarıda aslında 180'i 7'ye bölüp çıkan sonucu 10'a böldük. İşlem, (virgül koyma dışında) dilendiği kadar tekrarlanabilir.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \hline -\ 14 & 2{,}571 \\ \hline 40 & \\ -\ 35 & \\ \hline 50 & \\ -\ 49 & \\ \hline 10 & \\ -\ 7 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Yaptığımız şu: Teorem 9.28'de kanıtladığımız kalanlı bölmeyi sırasıyla 18'e, 180'e, 1800'e, 18.000'e uygulayıp çıkan sonucu 1'e, 10'a, 100'e, 1000'e bölüyoruz ve bunu böylece (sonsuza kadar!) devam ediyoruz.

En sondaki kalan hep 7'den küçük olduğu için $(0, 1, 2, 3, 4, 5$ ya da $6)$ en fazla 7 adımda kalan, daha önce bulunan kalanlardan biri olacak ve o zaman bir döngüye girilecektir. Ama 0 belirir belirmez daha sonra kalanlar hep 0 olacağından, kalan sayılar en fazla 6 adımda tekrarlanmak zorundadır.

Bu işlemler matematiksel olarak şu işlemlere tekabül ederler:

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \times 7 + 4 \\ 180 &= 25 \times 7 + 5 \\ 1800 &= 257 \times 7 + 1 \\ 18000 &= 2571 \times 7 + 3 \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \times 7 + 4 \\ 18 &= 2,5 \times 7 + 5/10 \\ 18 &= 2,57 \times 7 + 1/100 \\ 18 &= 2,571 \times 7 + 3/1000 \end{aligned}$$

Devam edersek,

$$18 = 2{,}571428 \times 7 + 4/1.000.000$$

buluruz. Bu aşamada, virgülden sonraki 571428 sayıları tekrarlanır. Örneğin, 13'üncü adımda

$$18 = 2{,}571428571428 \times 7 + 4/10^{12}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$18/7 \approx 2{,}571428571428$$

aşağıyukarılığı olarak da yazılabilir. Tekrarlanan 571428 dizisini ne kadar çok yazarsak, aşağıyukarılık o kadar eşitliğe yaklaşır. Okullarda bu, "sonsuzda eşitlik olur" düşüncesiyle,

$$18/7 = 2{,}571428571428571\ldots$$

olarak yazılır. Gerçekten de "sonsuzda eşitlik olur". Bunu ileride anlamlandırıp kanıtlayacağız.

Bu yöntemle, her $a/b > 0$ kesirli sayısı virgülden bir zaman sonra en fazla $b-1$ basamakta tekrarlanan sayılar olarak yazılabilir. Örneğin,

$$71{,}932525252525\ldots$$

kesirli bir sayıdır. İleride bu sayının a/b biçiminde nasıl yazılacağını göreceğiz. Yanıt,

$$71{,}932525252525\ldots = 712132/9900$$

olur. Öte yandan virgülden bir zaman sonra tekrarlanmayan sayılar kesirli sayı olamazlar. Bunu da ileride kanıtlayacağız.

15. Halkalar ve Cisimler

Geçmişte halkalardan biraz sözettik. Mesela tamsayılar ve kesirli sayılar kümeleri $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$, toplama ve çarpma işlemleriyle birer halkadır. Bu ciltte ileride inşa edeceğimiz $\mathbb{R}$ de bir halka olacak. Bu yüzden bu ara bölümde halka kavramına yoğunlaşacağız.

Bu bölümde bazı örneklerde okurun $\mathbb{R}$'yi bildiğini varsayabiliriz. Ama tabii ki $\mathbb{R}$ sadece örnek vermek amacıyla ve matematiğe halel getirmeyecek biçimde kullanılacak. Okur, birazdan tanımlayacağımız "halka" kavramını okurken, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gibi sayı kümelerini, lise yıllarından aşina olduğunu sandığımız $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ gibi polinom kümelerini ve $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modüler sayı kümelerini aklında tutmalıdır. Bu kümelerin herbiri, bildiğimiz $+$, $\times$, 0, 1 aksesuvarlarıyla birlikte birer halka örneğidir. Bu yapıları bilmek bu bölümü anlamak için teorik olarak zorunlu değildir ama pratikte öyle olmuyor tabii...

Okurun karşılaşacağı içinde toplama ve çarpma diye adlandırılan işlemlerin olduğu hemen her yapının bir halka olduğunu söylemek çok çok yanlış olmayacaktır, sadece biraz yanlış olacaktır. Mesela $\mathbb{N}$ kümesi önceki sayfalarda tanımladığımız toplama ve çarpmayla bir halka olmaz; tek bir kusuru vardır: Elemanların toplamsal tersi yoktur.

Bir halka her şeyden önce bir kümedir, ama bir halka sadece bir kümeden ibaret değildir elbet, yoksa küme kavramından gayri bir kavram elde etmezdik. Bir halkada, ayrıca, 0 (***sıfır***) ve 1 (***bir*** ya da ***çarpmanın etkisiz elemanı***) adı verilen iki özel eleman vardır. Dikkat: Halkanın bu 0 ve 1 elemanları bizim bildiğimiz 0 ve 1 tamsayıları olmayabilirler. Hatta halkanın hiçbir elemanı sayı olmayabilir. Eğer halkamıza R adını verirsek, bu elemanlara belki de 0 ve 1 yerine 0_R ve 1_R adını vermek daha doğru olurdu, ki bazen öyle yapacağız, çünkü bunlar sayıların değil, R'nin "sıfır"ı ve "bir"idir.

Bir halkada ayrıca ***toplama*** ve ***çarpma*** adı verilen, ama çocukluğumuzdan beri alışık olduğumuz toplama ve çarpmayla hiçbir ilgisi olmayabilecek iki de işlem vardır. Bu işlemler de $+$ ve $\times$ olarak gösterilirler. Toplama ve çarpma $R \times R$ kümesinden R kümesine giden birer fonksiyondur. Eğer $(x, y) \in R \times R$ ise, toplama ve çarpma işlemlerinin (fonksiyonlarının) bu elemanlardaki sonucu sırasıyla $x + y$ ve $x \times y$ olarak yazılırlar. Hemen hemen her zaman $x \times y$ yerine xy yazacağız. Ama 1×1 yerine 11 yazmamaya özen göstereceğiz! Bu

tür karışıklıkları engellemek amacıyla bazen xy yerine $x \cdot y$ yazacağız.

Çoğu kez bu hataya düşüldüğünden yinelemekte yarar var: Adına toplama ve çarpma dediğimiz bu işlemler (fonksiyonlar) bizim aşina olduğumuz toplama ve çarpmayla ilgisi olmayabilir. Sözgelimi bir halkada x^y ya da x/y ya da $x \leq y$ gibi ifadeler anlamlı olmayabilir. Bu yüzden bu toplama ve çarpma işlemlerine $+$ ve $\times$ olarak yazmak yerine belki de $+_R$ ve $\times_R$ olarak yazmayı yeğlemeliydik belki ama öyle yapmayacağız, yazılımı hantallaştırmak istemiyoruz, okurun dikkatli olduğunu varsayacağız.

Demek ki bir halka, bir R kümesinden, bu kümenin 0 ve 1 adı verilen iki elemanından ve $R \times R$ kartezyen çarpımından R kümesine giden ve adına toplama $(+)$ ve çarpma $(\times)$ denilen iki fonksiyondan (işlemden) oluşan bir $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisidir. Tanım bu kadarla kalmıyor tabii. Bu $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin halka adına hak kazanması için birtakım özelliklere sahip olması gerekmektedir. Bir halkanın sahip olması gereken bu özellikleri üç grupta toplayacağız:

Toplama ve 0'la ilgili özellikler: T1, T2, T3, T4.

Çarpma ve 1'le ilgili özellikler: Ç1, Ç2, Ç4.

Hem toplama hem de çarpmayla ilgili iki özellik: D ve E.

Bir şey daha ekleyelim: Bu bölümde ***değişmeli*** halkaları (yani $xy = yx$ eşitliğinin sağlandığı halkaları) tanıtacağız ama genellikle halkalar değişmeli olmak zorunda değildir.

Tanım biraz zaman alacak.

15.1 Toplamanın Özellikleri

$(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin bir halka olması için $(R, +, 0)$ üçlüsünün şu özellikleri sağlaması gerekir (ama yetmez!)

T1 [Birleşme Özelliği]. *Her x, y, $z \in R$ için, $x + (y + z) = (x + y) + z$.*
T2 [Etkisiz Eleman]. *Her $x \in R$ için, $0 + x = x + 0 = x$.*
T3 [Ters Elemanın Varlığı]. *Her $x \in R$ için, $x + y = y + x = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $y \in R$ vardır.*
T4 [Değişme Özelliği]. *Her x ve $y \in R$ için, $x + y = y + x$.*

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $(R, +, 0)$ yapısına ***grup*** denir. Eğer ayrıca T4 sağlanıyorsa, yapıya ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** ya da ***Abel grubu*** denir.

T1, bir halkanın elemanları toplanırken paranteze gerek olmadığını söylüyor. Üç eleman için geçerli olan bu özellik dört eleman için de geçerlidir. Örneğin x, y, z, t elemanları bu sırayla toplanırken işlemlerin hangi sırayla

yapıldıkları önemli değildir. Sözgelimi,

$$\begin{aligned}(x+y)+(z+t) &= (x+(y+z))+t = ((x+y)+z)+t \\ &= (x+y)+(z+t) = x+((y+z)+t) \\ &= x+(y+(z+t)).\end{aligned}$$

Bu eşitliklerin herbiri T1 özelliği birkaç kez kullanılarak kanıtlanabilir. Dolayısıyla x, y, z, t elemanların toplamını parantezsiz olarak $x+y+z+t$ biçiminde yazabiliriz, parantezlerin işlevi kalmamıştır. Biz de bundan böyle çok özel bir neden olmadıkça elemanları toplarken parantez kullanmayacağız, doğrudan $x+y+z+t$ yazacağız.

T4 özelliğini kullanarak, toplarken x, y, z ve t'nin yerlerinin de önemli olmadığını anlarız. Örneğin, $x+y+z+t = z+x+t+y$.

Önsav 15.1 (Sadeleştirme)**.** *Eğer bir grubun x, a ve b elemanları*

$$x+a = x+b$$

eşitliğini sağlıyorsa $a = b$ olur.

Kanıt: y elemanı, x için T3 özelliğini sağlayan bir eleman olsun. Demek ki $y+x = 0$. Şimdi hesaplayalım:

$$a = 0+a = (y+x)+a = y+(x+a) = y+(x+b) = (y+x)+b = 0+b = b.$$

istediğimiz kanıtlanmıştır. □

0 elemanı T2 özelliğini sağlayan yegâne elemandır, nitekim eğer grubun her x elemanı için $x+0' = x$ oluyorsa, bu eşitlikte x yerine 0 koyarak,

$$0 = 0+0' = 0'$$

elde ederiz. Biricik olduğunu kanıtladığımız bu 0 elemanına ***sıfır*** ya da toplamanın ***etkisiz elemanı*** denir.

Önsav 15.1'den, bir grupta, her x için T3 özelliğini sağlayan tek bir y elemanının olduğu anlaşılır, nitekim eğer

$$x+y = 0 = x+z$$

ise, Önsav 15.1'e göre $y = z$ olur. Madem ki, $x+y = 0$ eşitliğini sağlayan tek bir y var, (x'e bağımlı olan, yani x değiştikçe değişen) bu y elemanına bir ad verebiliriz. Bundan böyle $x+y = 0$ özelliğini sağlayan y elemanını $-x$ olarak gösterelim. $-x$ elemanına x'in ***toplamsal tersi*** denir, "eksi x" olarak okunur.

0'ın toplamsal tersi 0'dır elbette, ne de olsa T2'den dolayı $0+0 = 0$ eşitliği geçerli. Demek ki $-0 = 0$.

Bundan böyle

$$\begin{array}{lll} x+(-y) & \text{yerine} & x-y, \\ (-x)+y & \text{yerine} & -x+y \\ (-x)+(-y) & \text{yerine} & -x-y \end{array}$$

yazacağız.

Bir halkada bir de ayrıca 1 diye bir eleman olduğundan, -1 diye de bir eleman vardır. Ama bazen -1 elemanı 1'e eşit olabilir, mesela $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ halkasında (ya da grubunda). Ama $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ halkasında $-1 = 3$ olur.

Önsav 15.2. i. $-(x+y) = -y-x = -x-y$.
ii. $-(x-y) = y-x = -x+y$.
iii. $-(-x) = x$.

Kanıt: T3 önermesi x ve y'ye göre simetrik olduğundan, x, y'nin tersiyse, y de x'in tersidir. Bundan (iii) çıkar. Bunu şöyle de gösterebiliriz: $-x$, x'in tersi olduğundan ve $-(-x)$, $-x$'in tersi olduğundan, hem x hem de $-(-x)$ elemanları $-x$'in tersidir. Demek ki $x = -(-x)$ olur.

(ii) için

$$(x-y)+(y+(-x)) = 0$$

eşitliğini kanıtlamalıyız ki, bu da toplamanın birleşme özelliğinden hemen çıkıyor. İkinci eşitlik sadece değişme özelliği tabii.

(i) için $(x+y)+((-y)+(-x)) = 0$ eşitliğini kanıtlamak yeterli. Bu da gayet basit. □

Bu aşamada, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in R$ için, nx ifadesini "n tane x'in toplamı" olarak tanımlamaya çalışabiliriz. Elbette tanım için tümevarıma başvuracağız:

$$0x = 0 \text{ ve } (n+1)x = nx + x.$$

Ayrıca

$$(-n)x = n(-x)$$

eşitliğiyle bu tanımı negatif tamsayılara genişletebiliriz. Bu tanımları kabul ederek

$$\begin{aligned} n(x \pm y) &= nx \pm nm \\ n(mx) &= (nm)x \end{aligned}$$

gibi eşitlikler kanıtlanabilir (kanıtları okura bırakıyoruz). Ama tüm bunları biraz daha ileride yapacağız.

15.2 Çarpmanın Özellikleri ve Halka Kavramı

Halkalarda toplama dışında bir de çarpma işlemi vardır. Bir $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin bir halka olması için $(R, \times, 1)$ üçlüsünün sağlaması gereken özellikleri hemen aşağıda Ç1, Ç2, Ç4 olarak sıralayacağız..

Alışageldiği üzere, çarpma işlemini yazarken $\times$ simgesini kullanmayacağız, $a \times b$ yerine ab, bazen de $a \cdot b$ yazacağız.

Ç1 [Birleşme Özelliği]. *Her x, y, $z \in R$ için, $x(yz) = (xy)z$.*
Ç2 [Etkisiz Eleman]. *Her $x \in R$ için, $1x = x1 = x$.*
Ç4 [Değişme Özelliği]. *Her x ve $y \in R$ için, $xy = yx$.*

Ç1 özelliğine göre, bir halkanın birçok elemanı çarpıldığında parantezler gereksizdir. Bundan böyle biz de çok gerekmedikçe parantez kullanmayacağız. Ç4 özelliğine göre de halkanın elemanlarının hangi sırayla çarpıldığı önemsizdir. Mesela $(xy)((zt)u)$ yerine $xyztu$ ya da $utxzy$ yazabiliriz.

Ç2 özelliğini sağlayan tek bir 1 elemanı vardır: Nitekim eğer $1'$ bu özelliği sağlayan bir başka eleman olsaydı, $1 = 1 \times 1' = 1'$ olurdu. 1'e halkanın (çarpma için) ***etkisiz elemanı*** ya da ***bir***'i denir.

Genellikle halkalarda Ç4 özelliği aranmaz ve Ç4 özelliğini sağlayan halkalara ***değişmeli halka*** denir. Biz bu kitapta "halka" ifadesini hep değişmeli halka anlamında kullanacağız[1].

Toplamayla Çarpmayı Harmanlayan Özellik. Yukarıda sadece toplamayla ya da sadece çarpmayla ilgili özellikleri gördük. Şimdi, toplamayla çarpma arasındaki ilişkiyi ortaya koyan özellikleri açıklayalım:

D [Dağılma Özelliği]. *Her x, y, $z \in R$ için, $x(y + z) = xy + xz$.*
E. $1 \neq 0$.

Halkanın Tanımı. Artık (değişmeli) halka kavramını tanımlayabiliriz. Bir R kümesinde, yukarıdaki T1, T2, T3, T4, Ç1, Ç2, Ç4, D ve E özelliklerini sağlayan iki işlem (ki bu işlemler genellikle $+$ ve $\times$ olarak yazılırlar) ve iki eleman (ki bu elemanlar genellikle 0 ve 1 olarak yazılırlar) tanımlanmışsa, o zaman R kümesine ***halka*** adı verilir. Daha matematiksel bir deyişle: R bir küme olsun. Ayrıca R'de adına 0 ve 1 diyeceğimiz iki eleman olsun. Ve ayrıca $+$ ve $\times$, $R \times R$'den R'ye giden iki fonksiyon olsun. Eğer $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisi yukarıda zikrettiğimiz T1, T2, T3, T4, Ç1, Ç2, Ç4 ve D özelliklerini sağlıyorsa, o zaman $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisine kısaca ***halka*** denir. Okura rahatlık sağlaması açından bir $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin halka olması için sağlaması gereken özellikleri aşağıda sıralıyoruz:

[1] Bazen Ç2'den de vazgeçilir; hatta Ç1'den de vazgeçildiği ve yerine Ç1'i andıran bir başka eşitlik kabul edildiği bile olur, örneğin "Lie" ya da "Jordan" halkalarında.

T1 [Birleşme Özelliği]. *Her* $x, y, z \in R$ *için,* $x + (y + z) = (x + y) + z$.
T2 [Etkisiz Eleman]. *Her* $x \in R$ *için,* $0 + x = x + 0 = x$.
T3 [Ters Elemanın Varlığı]. *Her* $x \in R$ *için,* $x + y = y + x = 0$ *eşitliklerini sağlayan bir* $y \in R$ *vardır.*
T4 [Değişme Özelliği]. *Her* x *ve* $y \in R$ *için,* $x + y = y + x$.
Ç1 [Birleşme Özelliği]. *Her* $x, y, z \in R$ *için,* $x(yz) = (xy)z$.
Ç2 [Etkisiz Eleman]. *Her* $x \in R$ *için,* $1x = x1 = x$.
Ç4 [Değişme Özelliği]. *Her* x *ve* $y \in R$ *için,* $xy = yx$.
D [Dağılma Özelliği]. *Her* $x, y, z \in R$ *için,* $x(y + z) = xy + xz$.
E. $1 \neq 0$.

Notlar ve Örnekler

15.1. Genel kabul gören tanımda bir halkada çarpma değişmeli olmak zorunda değildir. Biz aslında "değişmeli halka" tanımını verdik.

15.2. Literatürde birçok farklı halka kavramı vardır. Mesela bazıları halkada çarpma işleminin birleşme özelliğinin doğru olmasını şart koşmaz. Kimileri de çarpmanın etkisiz elemanı olması koşulundan vazgeçer. Genel olarak, üstünde toplama ve çarpmaya "benzeyen" işlemlerin olduğu bir yapıya halka adı verilir. Bir halkadan neler istendiği matematikçinin ilgi alanına göre değişir. Hatta aynı matematikçi farklı makale ve kitaplarında farklı halka kavramlarını kullanabilir, yeter ki ta en başta "halka"dan ne kastettiğini açıklasın. (Öte yandan grup kavramı matematikçiden matematikçiye değişmez, orada bir konsensüs sağlanmıştır.) Bizim halkalarımız hep değişmeli olacak ve çarpmanın hep etkisiz elemanı olacak.

15.3. Elemanlarının toplamsal tersi olmadığından (aşina olduğumuz toplama ve çarpmayla), $\mathbb{N}$ bir halka değildir.

15.4. Çarpma işleminin etkisiz elemanı olmadığından (aşina olduğumuz toplama ve çarpmayla ve bizim halka tanımımıza göre), $2\mathbb{Z}$ bir halka değildir.

15.5. **Rahatsız Edici Bir Örnek.** $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 2, 4\}$ kümesi modüler (modülo 6) sayılardaki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır. Bu halkanın etkisiz elemanı 4'tür. $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ de bir halkadır. Bu çok daha genel bir olgudur: Eğer iki pozitif doğal sayı ise, $n\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ kümesi, modülo nm toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır[2]. Eğer n ve m aralarında asalsa ve k sayısı, m sayısı $nk - 1$ sayısını bölecek biçimde seçilmişse (Bézout Önsavı'na göre öyle bir k vardır), o zaman nk elemanı bu halkanın (çarpma için) etkisiz elemanıdır. Bu olguyu okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

15.6. Bir halkanın elemanlarının her zaman sayı olmadığını gösteren bir örnek verelim. A, boş olmayan herhangi bir küme olsun. $R = \wp(A)$, A'nın altkümeleri kümesi olsun. Eğer x, $y \in R$ ise, yani x ve y, R'nin birer altkümesiyse,

$$x + y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$$
$$x \times y = x \cap y$$
$$0 = \emptyset$$
$$1 = X$$

olsun. $(R, +, \times, 0, 1)$ bir halkadır (ayrıntıları okura bırakıyoruz.) Bu halkada, her x için, $x^2 = x$ ve $x + x = 0$ eşitlikleri geçerlidir. Görüldüğü gibi, bu halkanın elemanları sayı değil, A'nın altkümeleri.

[2]Soyut cebir bilenler için dipnot: Eğer n ve m aralarında asalsa $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ halkasına izomorftur.

15.7. Fonksiyonlardan oluşan bir halka örneği verelim. X herhangi bir küme olsun. R de herhangi bir halka olsun, mesela $R = \mathbb{Z}$ olabilir. O zaman X'ten R'ye giden fonksiyonlar kümesi $\mathrm{Fonk}(X, R)$ (fonksiyonların "değer değer" toplanması ve çarpılması işlemleri altında) bir halka olur. Mesela $\mathrm{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bir halkadır; bu halkanın türevi olan (ya da sürekli olan) fonksiyonları da bir halka oluşturur. $\mathrm{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kümesinin 0'da 0 değerini alan fonksiyonlar kümesi (toplama ve çarpma altında kapalıdır ama) bir halka oluşturmaz. Neden?

15.8. Bir halkada $xy = 0$ ise illa x ya da y elemanlarından biri 0 olmak zorunda değil, mesela $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkasında $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{0}$ olur. Aynı şekilde, $x \neq 0$ ve $xy = xz$ ise illa $y = z$ olmak zorunda değil, mesela yine $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkasında $\overline{2} \times \overline{0} = \overline{2} \times \overline{3}$ olur ama $\overline{0} = \overline{3}$ eşitliği doğru değildir.

15.9. Bir halkada toplama değişmeli olmak zorundadır, yani istersek T4'ü halkanın tanımından atabiliriz. Bunu kanıtlayalım. x, y bir halkanın iki elemanı olsun. Şu işlemleri yapalım:

$$(x+y)(1+1) = (x+y)\cdot 1 + (x+y)\cdot 1 = x+y+x+y$$

ve

$$(x+y)(1+1) = x(1+1) + y(1+1) = x\cdot 1 + x\cdot 1 + y\cdot 1 + y\cdot 1 = x+x+y+y.$$

Demek ki

$$x+y+x+y = x+x+y+y.$$

Önsav 15.1'i kullanarak baştaki x'leri ve sondaki y'leri sadeleştirerek[3] $y + x = x + y$ eşitliğini elde ederiz. Kanıt dikkatle incelenirse şu sonucu elde ettiğimiz görülür: $(R, +, \times)$ *iki adet ikili işlemli bir yapı olsun. Eğer toplamanın birleşme ve soldan ve sağdan sadeleşme özellikleri varsa ve çarpmanın etkisiz elemanı varsa ve çarpma toplamaya sağdan ve soldan dağılıyorsa, o zaman toplama değişmeli olmak zorundadır.*

Dağılma özelliğinin sonuçlarını irdeleyelim.

Önsav 15.3. *R bir halka olsun. x, $y \in R$ için aşağıdaki önermeler doğrudur:*
i. $x0 = 0$.
ii. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ *ve* $(-x)(-y) = xy$.
iii. $(-1)y = -y$.
iv. $(-1)^2 = 1$. (*Burada* $(-1)^2$*, tahmin edileceği üzere* $(-1)(-1)$ *anlamına gelmektedir.*)

Kanıt: i. $x\,0 + 0 = x\,0 = x(0+0) = x\,0 + x\,0$ eşitliğinden ve Önsav 15.1'den $x0 = 0$ çıkar.
ii. $xy + (-(xy)) = 0 = 0y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$. Dolayısıyla, Önsav 15.1'den $(-x)y = -(xy)$ çıkar. İkinci eşitlik birincisinden ve değişme özelliğinden çıkar. Son eşitlik bunlardan çıkar.
iii. Yukarıda x yerine 1 koyarsak sonuç çıkar.
iv. Yukarıda y yerine -1 koyarsak sonuç, Önsav 15.2.iii'ten çıkar. □

(E) koşulu aslında halkanın tek bir elemandan ibaret olmadığını söylüyor. Nitekim halkanın tek bir elemanı varsa elbette $0 = 1$ olmalı. Ve $0 = 1$ ise, Önsav 15.3.i'e göre, her $r \in R$ için $r = r1 = r0 = 0$ olur.

[3] Önsav 15.1'in kanıtında T4'ü (ve hatta Ç4'ü) kullanmadık.

Bazı İncelikler. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Her n doğal sayısı için, x'i kendisiyle n kez toplayabiliriz. Bu toplamı nx olarak gösterelim. Daha matematiksel olarak, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in R$ için, R'nin nx elemanını n üzerine tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$0x = 0 \text{ ve } (n+1)x = nx + x.$$

Bu paragrafta halkanın etkisiz elemanını 1 yerine 1_R simgesiyle gösterelim, yoksa 1'ler karışabilir. n herhangi bir doğal sayı olsun. Bir üstteki paragrafta x yerine 1_R alacak olursak, R'nin $n1_R$ elemanını buluruz: $n1_R$, halkanın 1_R elemanı kendisiyle n kez toplanarak bulunmuştur. Bu elemana n_R diyelim: $n_R = n1_R$. Ama dikkat bir halkada $n_R = 0_R$ eşitliği geçerli olabilir, mesela $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasında.

Halkanın n_R elemanına, n doğal sayısının "halkadaki imgesi" adını verebiliriz, ama bir karışıklığın olmayacağını varsayarak buna gerek görmeyeceğiz.

Şimdi soru şu: Her $x \in R$ için acaba R halkasının $n_R x$ elemanı nx'e eşit mi? Dağılma özelliği sayesinde bu soruya olumlu yanıt verebiliyoruz:

$$nx = x + \cdots + x = 1_R x + \cdots + 1_R x = (1_R + \cdots + 1_R)x = n_R x.$$

(Bu eşitliği aslında n üzerinden tümevarımla kanıtlamak daha doğru olurdu.)

Demek ki nx ile $n_R x$ arasında bir ayrım gözetmeye gerek yok. Bundan sonra n_R yerine (sanki bir doğal sayıymış gibi) n yazacağız.

Bir halkada nx diye bir elemanın varlığını yukarıda gördük: x'in kendisiyle n kez toplanmasıyla elde edilen eleman. Demek ki $-(nx)$ diye de bir eleman var: nx'in toplama için tersi. Ayrıca $n(-x)$ diye de bir eleman var: $-x$'in kendisiyle n kez toplanmasıyla elde edilen eleman. Acaba bu iki eleman birbirine eşit mi? Evet:

$$nx + n(-x) = n(x + (-x)) = n0 = 0,$$

dolayısıyla $n(-x) = -(nx)$.

Bundan böyle $(-n)x$ elemanını $n(-x)$ ya da $-(nx)$ olarak tanımlayacağız ve bu elemanı $-nx$ olarak yazacağız.

Demek ki her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $x \in R$ için bir $nx \in R$ elemanı tanımladık. Şu özellikleri kanıtlamak, bazen meşakkatli olsa da, oldukça kolaydır: Her n, $m \in \mathbb{Z}$ ve her x, $y \in R$ için,

$$\begin{aligned} n(x \pm y) &= nx \pm ny, \\ (n \pm m)x &= nx \pm mx, \\ n(mx) &= (nm)x = m(nx), \\ (nx)(my) &= (nm)(xy). \end{aligned}$$

Birkaç Eşitlik. Bir halkada bir elemanın doğal sayı kuvvetlerini alabiliriz:

$$\begin{aligned} x^0 &= 1, \\ x^1 &= x, \\ x^2 &= x \times x, \\ x^3 &= x \times x \times x. \end{aligned}$$

Genel olarak ve daha matematiksel olarak, kuvvet alma, n üzerine tümevarımla

$$x^0 = 1 \text{ ve } x^{n+1} = x^n \times x$$

olarak tanımlanır.

Eğer x ve y bir halkanın birer elemanıysa ve $n > 0$ bir tamsayıysa,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliği herhâlde en çok bilinen ve kanıtı oldukça kolay eşitliklerdendir. Eğer n bir tek sayıysa, y yerine $-y$ alıp,

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliğini buluruz.

Bir halkanın her x ve y elemanı için ve her $n > 0$ doğal sayısı için,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak zor değildir[4].

Tersinir Elemanlar. Bir halkada, verilmiş bir a elemanı için, $ab = 1$ eşitliğini sağlayan bir b elemanı varsa a'ya ***tersinir eleman*** ya da ***birim eleman*** denir. Verilmiş bir a için, bu eşitliği sağlayan en fazla bir b elemanı olabilir (hiç olmayabilir de). Nitekim $ab = ac = 1$ ise, o zaman $c = c1 = c(ab) = b(ac) = b1 = b$. Dolayısıyla tersinir bir a elemanı için $ab = 1$ eşitliğini sağlayan b elemanını a^{-1} olarak gösterebiliriz. a^{-1} elemanına a'nın ***çarpımsal tersi*** ya da kısaca ***tersi*** denir. Elbette eğer a tersinirse ve b, a'nın tersiyse, b de tersinirdir ve b'nin tersi a'dır, yani $(a^{-1})^{-1} = a$ olur (bkz. Önsav 15.5.ii). $1 \times 1 = 1$ olduğundan, 1 tersinirdir ve tersi gene 1'dir: $1^{-1} = 1$.

Tersinir elemanlar kümesi R^* olarak gösterilir:

$$R^* = \{x \in R : \text{ bir } y \in R \text{ için } xy = 1\}.$$

[4]Yalnız burada küçük bir uyarı yapmak zorundayız: $\binom{n}{i}$ sayısı önce doğal sayılarda (alışık olduğumuz gibi) hesaplanmalıdır, ardından çıkan doğal sayının halkadaki imgesini almalıyız, çünkü halkada $1/i!$ ya da $1/(n-i)!$ gibi elemanlar olmayabilir, yani $i!$ ve $(n-i)!$ elemanları halkada tersinir olmayabilir.

Örneğin $\mathbb{Z}$ halkasının tersinir elemanları 1 ve -1'dir ve başka da yoktur. Öte yandan, $\mathbb{Z}$ halkasında tersinir olmayan 2 sayısı, $\mathbb{Q}$ halkasında tersinirdir. $\mathbb{R}[X]$ polinom halkasının tersinir elemanları, 0 olmayan sabit polinomlardır (okura alıştırma). 0 elemanı hiçbir halkada tersinir değildir. Öte yandan 1 ve -1 her halkada tersinirdir; her ikisi de kendi kendilerinin tersidir (Önsav 15.3.iv).

Kolayca konbtrol edileceği üzere, bir R halkasının tersinir elemanlar kümesi R^* çarpma işlemi altında bir gruptur.

Önsav 15.4. **i.** *$x \in R^*$ ise ve $xy = 0$ ise o zaman $y = 0$ olur.*
ii. *$x \in R^*$ ise ve $xy = xz$ ise o zaman $y = z$ olur.*

Kanıt: (i), Önsav 15.3.i'den çıkar: $y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$. (ii) de şu kolay hesaptan çıkar: $y = 1y = (xx^{-1})y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz) = (xx^{-1})z = 1z = z$. □

Önsav 15.5. *R bir halka olsun.*
i. *$x, y \in R^*$ ise $xy \in R^*$ ve $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ olur.*
ii. *$x \in R^*$ ise $x^{-1} \in R^*$ ve $(x^{-1})^{-1} = x$ olur.*

Kanıt: **i.** Hemen hesaplayalım:

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = x1x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

Demek ki xy tersinirdir ve $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ olur. İkinci eşitlik sadece değişme özelliği tabii.
ii. $x^{-1}x = 1$ olduğundan, x^{-1} elemanı da tersinirdir ve $(x^{-1})^{-1} = x$ olur. □

Eğer bir halkanın bir x elemanı tersinirse o zaman x'in negatif kuvvetleri de $x^{-n} = (x^{-1})^n$ olarak tanımlanır. Aşağıdaki önermelerin kanıtını okura bırakıyoruz.

Önsav 15.6. *x ve y bir halkanın elemanları olsun.*
i. *Her n ve m doğal sayısı için $(x^n)^m = x^{nm}$ olur. Eğer x tersinirse eşitlik her n ve m tamsayısı için de geçerli.*
iii. *Her n doğal sayısı için $(xy)^n = x^n y^m$ olur*[5]*. Eğer x ve y tersinirse eşitlik her n tamsayısı için de geçerli.* □

Notlar ve Örnekler

15.10. $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.
15.11. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
15.12. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
15.13. $\mathbb{R}[X]^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =$ sıfır olmayan sabit polinomlar kümesi.
15.14. $\mathbb{Z}[X]^* = \{1, -1\}$.

[5]Sadece değişmeli halkalarda geçerli bu eşitlik, ama bizim halkalarımız değişmeli.

15.15. Eğer $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ise, $R[X]$ polinom halkasında $(\overline{1} - \overline{2}X)(\overline{1} + \overline{2}X) = \overline{1}$ olduğundan, $1 - 2X \in R[X]^*$ olur. Genel olarak, eğer $I = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N}\ r^n = 0\}$ ise, $R[X]^* = R^* + I[X]$ olur (ama bunu kanıtlamak çok çok kolay değildir).

Alıştırmalar

15.16. $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olsun. $R[X]^*$ kümesini bulun. (İpucu: $(1 + 2f(X))(1 - 2f(X)) = 1$.)

15.17. Eğer R bir ***bölgeyse***, yani 0'a eşit olmayan iki elemanın çarpımı hiçbir zaman 0 olmuyorsa, $R[X]^* = R^*$ eşitliğini kanıtlayın.

15.18. $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ olsun. $R[X]^*$ kümesini bulun.

15.19. p herhangi bir asal sayı olsun. $\mathbb{Q}_{\langle p \rangle}$, paydası p'ye bölünmeyen kesirli sayılar kümesi olsun. Yani,

$$\mathbb{Q}_{\langle p \rangle} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p, b\text{'yi bölmez}\}$$

olsun. Kolayca görüleceği üzere, $\mathbb{Q}_{\langle p \rangle}$ (kesirli sayıların bildiğimiz toplaması ve çarpması altında) bir halkadır. $\mathbb{Q}^*_{\langle p \rangle}$ kümesini bulun.

15.20. R herhangi bir halka olsun. $x, y \in R$ için $\sim$ ikili ilişkisini şöyle tanımlayalım: $x \sim y \Leftrightarrow x \in R^* y$. Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin. Bu anlamda birbirine denk olan elemanların bölünebilirlik açısından birbirinden farkı yoktur: Eğer ikisinden biri bir z elemanına bölünüyorsa diğeri de bölünür ve eğer ikisinden biri bir elemanı bölüyorsa diğeri de böler.

Bölünebilme. R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $ax = b$ eşitliğini sağlayan bir $x \in R$ varsa, o zaman a, b'yi ***böler*** denir ve bu $a|b$ olarak yazılır. Tanımdan da anlaşılacağı üzere her halkada 0, 0'ı böler!

Eğer halkada $ax = b$ eşitliğini sağlayan tek bir x elemanı varsa, o zaman bu eleman

$$x = b/a$$

yazılır. Eğer bu denklemi sağlayan birden fazla x varsa, b/a diye bir elemandan sözetmeyiz. Demek ki tanıma göre bir halkada $0/0$ diye bir elemandan sözedemeyiz çünkü $1 \times 0 = 0 \times 0 = 0$ eşitlikleri geçerlidir.

Kolayca görüleceği üzere $1/a$ diye bir elemanın olması demek tam tamına $a \in R^*$ demektir. Ama halkada b/a diye bir elemanın olması a'nın tersinir olmasını gerektirmez, nitekim $\mathbb{Z}$ halkasında $15/3$ diye bir eleman vardır ama $1/3$ diye bir eleman yoktur.

Tanımlar göz önüne alındığında aşağıdaki önsavın kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

Önsav 15.7. *R bir halka olsun.*
i. *Her eleman 0'ı böler.*
ii. *R^* kümesinin her elemanı R'nin her elemanını böler. Demek ki 1 her elemanı böler ve tabii her $r \in R$ için, $r/1 = r$ olur.*
iii. *Eğer $u \in R^*$ ise, her x için $xu|x$ olur. Dolayısıyla her $x \in R$ için, $x|x$ olur.*
iv. *Her x, y, $z \in R$ için, $x|y$ ve $y|z$ ise $x|z$ olur.*

v. *x, $y \in R$ için, "$x \sim y$" cümlesi $x \in yR^*$ anlamına gelsin. $\sim$ ilişkisi bir denklik ilişkisidir. Bu durumda x ve y elemanlarına bağlantılı elemanlar denir. Bağlantılı elemanların bölünebilirlik açısından birbirlerinden farkı yoktur:*

Eğer $x \sim y$ ve $x|z$ ise $y|z$ olur.
Eğer $x \sim y$ ve $z|x$ ise $z|y$ olur. □

Eğer bir halkada $x \sim y$ ise x ve y'ye ortak adı verilir[6]. Önsavın son maddesine göre, ortak elemanların aynı bölünebilme özellikleri vardır, yani bölünebilme açısından iki ortak eleman arasında bir fark yoktur. "Ortak olmak" mutlak bir kavram değildir, halkaya göre değişir, bu yüzden $x \sim y$ yerine $x \sim_R y$ yazmak tercih edilebilir. Meselaa $\mathbb{Z}$'de 3 ve 5 ortak değildir ama $\mathbb{Q}$ halkasında bu iki sayı ortaktır. Aslında $\mathbb{Q}$ halkasında 0'dan farklı herhangi iki sayı ortaktır.

Notlar ve Örnekler

15.21. Bir halkada "x, y'yi böler" ilişkisi neredeyse bir yarısıralamadır:

$$x|x$$
$$x|y \text{ ve } y|z \text{ ise } x|z$$

olur. Ancak $x|y$ ve $y|x$ ise $x = y$ olmak zorunda değildir.

15.22. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ halkasında,

$$2 \times 3 = 6 = 2 \times 9$$

olduğundan, bu halkada $6/2$ diye bir elemandan sözetmeyiz, hatta $2/2$ diye bir elemandan da sözetmeyiz. Öte yandan, $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$'de $6/2$ diye bir elemandan sözedebiliriz, çünkü $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ halkasında sadece $x = 3$ elemanı $2x = 6$ eşitliğini sağlar.

15.23. R sonlu bir halka olsun. Diyelim $a, b \in R$ için b/a diye bir eleman olduğunu, yani $ax = b$ denkleminin halkada tek bir çözümü olduğunu kabul edelim; bu çözüme de x diyelim. Bu durumda $a \in R^*$ olur. Bunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\varphi(r) = ar$$

kuralıyla tanımlanmış $\varphi : R \longrightarrow R$ fonksiyonuna bakalım. Eğer bu fonksiyon birebirse, örten olmak zorundadır, dolayısıyla bu durumda bir $r \in R$ için $ar = \varphi(r) = 1$, yani $a \in R^*$ olur. Şimdi bu fonksiyonun birebir olduğunu kanıtlayalım. Diyelim r, $s \in R$ için $ar = as$, yani $a(r - s) = 0$. Ama o zaman hem x ve $x + (r - s)$ elemanları $ax = b$ denkleminin çözümleri olur. Varsayımımıza göre $r - s = 0$, yani $r = s$ olmalı.
Sonsuz halkalarda, örneğin $\mathbb{Z}$'de bu yanlıştır.

15.3 Tamlık Bölgeleri ve Cisimler

Bir halkada $xy = 0$ eşitliği ancak x ya da $y = 0$ iken geçerli olabiliyorsa, o halkaya ***tamlık bölgesi*** ya da kısaca ***bölge*** adı verilir. Örneğin $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi değildir, çünkü

$$\overline{2} \times \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$$

[6] İngilizcesi "associate".

olur ve ne $\overline{2}$ ne de $\overline{3}$ elemanı $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$'de $\overline{0}$'dır. Bu örnekten de kolayca anlaşılacağı üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul n doğal sayısının asal olmasıdır.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer tamlık bölgesidir. Eğer R bir tamlık bölgesiyse, $R[X]$ ve $R[X,Y]$ gibi polinom halkaları da tamlık bölgeleridir.

Tamlık bölgelerinde sadeleştirme yapılabilir, yani bir tamlık bölgesinde

$$a \neq 0 \text{ ve } ab = ac$$

ise $b = c$ olur, çünkü $ab = ac$ ise (D)'den dolayı $a(b-c) = 0$ olur ve bir tamlık bölgesinde olduğumuzdan $b - c = 0$, yani $b = c$ buluruz.

0 dışında her elemanı tersinir olan halkalara ***cisim*** denir. Yani bir R halkasının cisim olması için $R^* = R \setminus \{0\}$ eşitliği gerekir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer cisimdir, ama $\mathbb{Z}$ ve polinom halkalarının hiçbiri bir cisim değildir. Önsav 15.3.v'e göre her cisim bir tamlık bölgesidir.

Alıştırmalar

15.24. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının bir cisim olması için n'nin asal olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

15.25. $d \in \mathbb{N}$ bir tamkare olmasın, örneğin $d = 2$ olabilir.

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

olsun. Bu alıştırmada ileride inşa edeceğimiz gerçel sayıları okurun bildiğini varsayıyoruz. Bildiğimiz toplama ve çarpma altında $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ bir halkadır. Bunun kanıtlanması oldukça kolaydır. $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasının ayrıca bir cisim olduğunu kanıtlayın.

15.26. Sonlu bir tamlık bölgesinin bir cisim olduğunu kanıtlayın.

15.27. Bir tamlık bölgesinde eğer $x|y$ ve $y|x$ ise $x \sim y$ olduğunu kanıtlayın. (Bkz. Önsav 15.7.v)

15.4 Kartezyen Çarpım ve Althalka

Kartezyen Çarpım. R ve S birer halka olsun. $R \times S$ kartezyen çarpımını ele alalım:

$$R \times S = \{(r, s) : r \in R, s \in S\}.$$

Bu küme üstünde şu işlemleri tanımlayalım:

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s')$$
$$(r, s)(r', s') = (rr', ss').$$

Bu işlemlere **terim terim (ya da taraf tarafa) toplama** ve **çarpma** adı verilir. Bu iki işlem altında $R \times S$ bir halkadır. Bu $R \times S$ halkasının toplama ve çarpma işlemlerinin etkisiz elemanları sırasıyla $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ elemanlarıdır.

İki halkanın kartezyen çarpımı yerine istediğimiz kadar halkanın kartezyen çarpımını alabiliriz. I bir küme olsun. I'yı bir göstergeç kümesi olarak

görelim. Her $i \in I$ için R_i bir halka olsun. Her R_i halkasının kendine özgü toplama ve çarpma işlemleri ve her iki işlemin de etkisiz elemanları elemanları var. Bunların hepsini kolaylık olsun (sanki aynı şeylermiş gibi) aynı simgelerle gösterelim. Kartezyen - çarpımın tanımı şöyle:

$$\prod_I R_i = \left\{ r : I \to \bigcup_I R_i : \text{ her } i \in I \text{ için } r(i) \in R_i \right\}.$$

$\prod_I R_i$ kümesi, fonksiyonların noktasal toplaması ve çarpması altında bir halka olur (bkz. [SKK]). Toplamanın etkisiz elemanı $r(i) = 0_{R_i}$ formülüyle tanımlanmış fonksiyon, çarpmanın etkisiz elemanı $r(i) = 1_{R_i}$ formülüyle tanımlanmış fonksiyondur. Burada bütün R_i'ler birbirine eşit de olabilir.

Althalka. R bir halka ve S, R'nin bir altkümesi olsun. Eğer

$$S + S \subseteq S,\ SS \subseteq S \text{ ve } 1 \in S$$

ise, S'nin R'nin bir ***althalkası*** olduğunu söyleriz ve bunu $S \leq R$ olarak gösteririz. Bu durumda S gerçekten, R'in toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte (daha doğrusu o işlemlerin $S \times S$'ye kısıtlanışlarıyla) bir halka olur. Bu arada $1 \in S$ koşulu önemlidir, es geçmeyelim; mesela $R \times \{0\}$ kümesi toplama ve çarpma altında kapalıdır ve bu işlemlerle bir halkadır ama etkisiz elemanları aynı olmadığından ($R \times \{0\}$ halkasının etkisiz elemanı $(1, 0)$, $R \times R$ halkasının etkisiz elemanı $(1, 1)$'dir), $R \times R$ halkasının bir althalkası değildir.

Örneğin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$'in bir althalkasıdır: $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Kolayca kanıtlanacağı üzere, eğer $R \leq S$ ise, $0_R = 0_S$ olur. Elbette $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ ve her R halkası için $R \leq R[X] \leq R[X, Y]$. Ama $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin bir althalkası değildir. Eğer $n \neq m$ ise $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$'nin hiçbir zaman bir althalkası olamaz, hatta bu iki kümenin ortak elemanları bile yoktur!

$R \leq S$ ve $r, r' \in R$ olsun. r elemanı r' elemanını R'de bölmeyebilir, ama S'de bölebilir. Örneğin 2 sayısı 5'i $\mathbb{Z}$'de bölmez ama $\mathbb{Q}$'de böler. Ya da R'de tersinir olmayan bir eleman S'de tersinir olabilir. Örneğin 2 sayısı $\mathbb{Z}$'de tersinir değildir ama $\mathbb{Q}$'de tersinirdir. Bir başka deyişle tersinir olmak, bölmek gibi kavramlar ve tanımlayacağımız daha birçok kavram mutlak kavramlar değildir, içinde bulunduğumuz halkaya göre değişirler. Bu yüzden hangi halkada düşündüğümüzü belirtmek için, karışıklık olmasın diye, "R'de böler", "R'de tersinirdir" denir.

Sıfırbölenler. Bir halkada, bir $y \neq 0$ için $xy = 0$ eşitliği sağlanabiliyorsa, o zaman halkanın x elemanına ***sıfırbölen*** adı verilir. 0 her zaman sıfırbölendir. Tersinir bir eleman sıfırbölen olamaz. Sıfır dışında sıfırböleni olmayan halkalara ***tamlık bölgesi*** adı vermiştik. Eğer $R \leq S$ ise R'de sıfırbölen bir eleman S'de de sıfırbölendir elbette.

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenleri 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 elemanlarıdır. Genel olarak, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenleri n'yle ortak böleni olan elemanlardır (diğerleri de tersinir elemanlardır.)

Sıfırbölenlerin toplamı sıfırbölen olmak zorunda değildir. Örneğin 2 ve 3 elemanları $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$'de sıfır bölendir, ama toplamı olan $2+3$, yani 5 bu halkada bir sıfırbölen değildir, hatta tersinirdir.

Sıfırbölen olmayan bir eleman sadeleştirmeye izin verir: Eğer a sıfırbölen değilse (yani $ax = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa) ve eğer $ab = ac$ ise, o zaman $b = c$ olur. Nitekim,

$$a(b-c) = ab - ac = 0$$

eşitliğinden, $b - c = 0$ ve $b = c$ elde edilir.

Alıştırmalar

15.28. $(R \times S)^* = R^* \times S^*$ eşitliğini kanıtlayın. İki halkanın kartezyen çarpımının hiçbir zaman bir tamlık bölgesi olamayacağını kanıtlayın.

$$\left(\prod_I R_i\right)^* = \prod_I R_i^*$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer I sonsuzsa,

$$\bigoplus_I R_i = \left\{ r \in \prod_I R_i : \text{ sadece sonlu sayıda } i \in I \text{ için } r(i) \neq 0 \right\}$$

kümesi, toplama ve çarpma altında kapalı olmasına rağmen hiçbir zaman $\prod_I R_i$ halkasının bir althalkası olamaz, neden?

15.29. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasında ne zaman bir (a, b) elemanı bir (c, d) elemanını böler?

15.30. R ve S birer halka olsun. $(R \times S)[X]$ polinom halkasının elemanları

$$\sum_i (r_i, s_i) X^i$$

biçiminde yazılırlar. (Toplam sonlu olmak zorunda tabii ki, yoksa yazdığımız bir polinom olmaz.) $R[X] \times S[X]$ halkasının elemanları da

$$\left(\sum_i r_i X^i, \sum_i s_i X^i\right)$$

biçiminde yazılır.

$$\varphi : (R \times S)[X] \to R[X] \times S[X]$$

fonksiyonu,

$$\varphi\left(\sum_i (r_i, s_i) X^i\right) = \left(\sum_i r_i X^i, \sum_i s_i X^i\right)$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon olsun. φ'nin birebir ve örten olduğunu, etkisiz elemanı etkisiz elemana götürdüğünü ve toplama ve çarpmaya saygı duyduğunu, yani her p, $q \in (R \times S)[X]$ için,

$$\varphi(p+q) = \varphi(p) + \varphi(q)$$
$$\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$$

eşitliklerini kanıtlayın.

15.31. R bir halka olsun. $e \in R$, $e^2 = e$ eşitliğini sağlasın. Bu tür elemanlara idempotent adı verilir.

$$Re = \{re : r \in R\}$$

kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Re'nin bir halka olduğunu kanıtlayın (e, bu halkanın etkisiz elemanıdır.)

$$f = 1 - e$$

olsun. $f^2 = f$ eşitliğini kanıtlayın. $R = Re + Rf$ ve $Re \cap Rf = \{0\}$ eşitliklerini kanıtlayın. Şimdi

$$\varphi : R \to Re \times Rf$$

fonksiyonu $\varphi(r) = (re, rf)$ olarak tanımlansın. φ'nin birebir ve örten olduğunu, etkisiz elemanı etkisiz elemana götürdüğünü ve toplama ve çarpmaya saygı duyduğunu kanıtlayın[7].

15.32. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkasının idempotent elemanlarını, yani $x^2 = x$ eşitliğini sağlayan elemanlarını bulun. Aynı şeyi $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ için yapın. Bulduklarınızı $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasına genelleştirmeye çalışın.

15.33. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenlerinin n'yle ortak böleni olan elemanların sınıfları olduğunu kanıtlayın.

15.34. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ ve $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[X]$ polinom halkalarının sıfırbölenlerini bulun.

15.35. Bir R halkasında, belli bir n doğal sayısı için, $x^n = 0$ eşitliğini sağlayan elemanlara ***sıfırkuvvetli*** ya da ***nilpotent eleman*** denir. Sıfırkuvvetli elemanlar sıfırbölendir elbet. Sıfırkuvvetli elemanların toplamlarının da sıfırkuvvetli olduğunu kanıtlayın. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırkuvvetli elemanlarını bulun.

15.36. R ve S birer halka olsun. $R \times S$ halkasının sıfırbölen ve sıfırkuvvetlilerini bulun.

15.37. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ polinom halkasının tersinir elemanlarını bulun. (Çok kolay olmayabilir...)

15.5 Sıralı Halkalar ve Cisimler

Geçen bölümlerde $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkalarında toplama ve çarpmayla uyumlu bir sıralama tanımlamıştık. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkalarına bu yüzden ***sıralı halka*** denir.

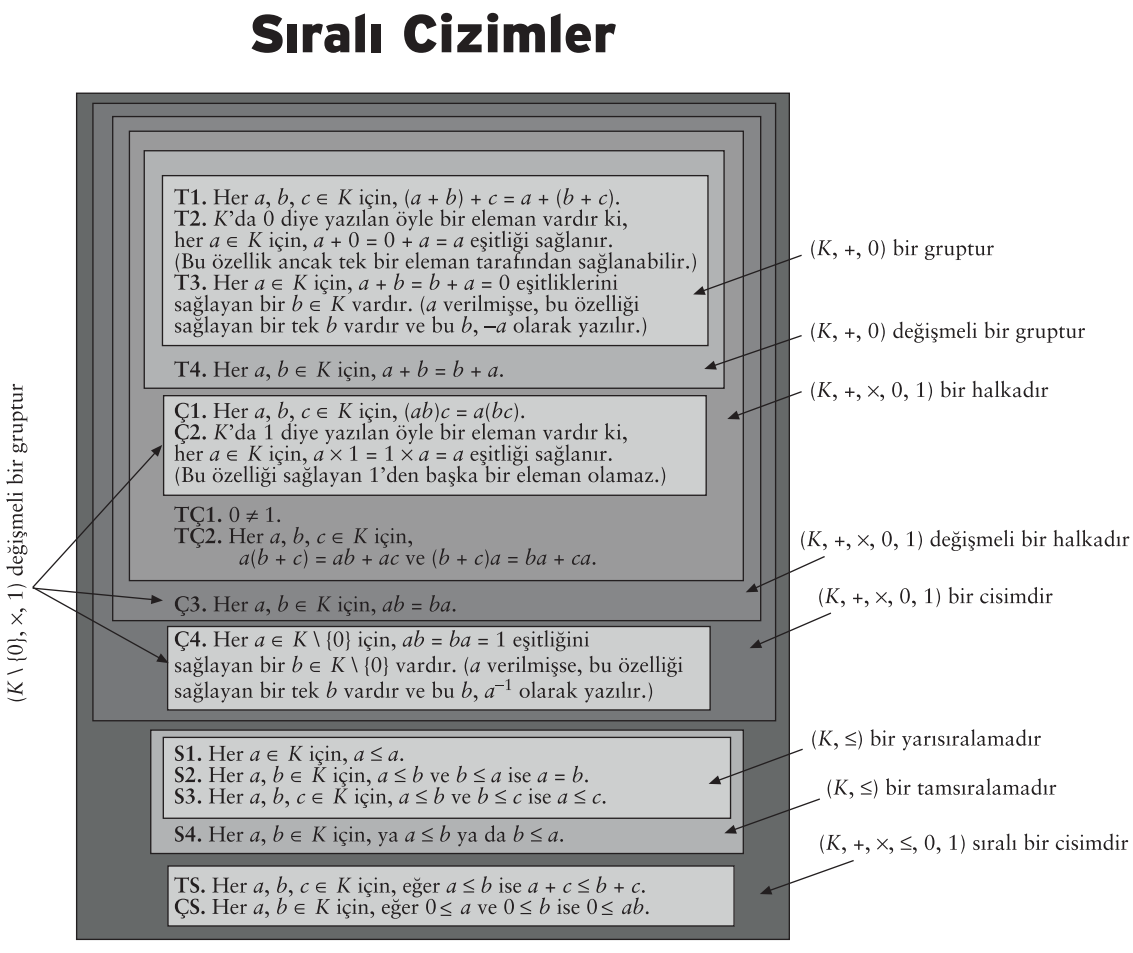
Bir halkanın ***sıralanabilir*** olması demek, o halka üzerinde TO ve CO'yu sağlayan (bkz. aşağıdaki şema) bir tamsıralamanın olması demektir. Bir sonraki sayfadaki şekildeki listedeki özelliklerin Ç4 dışında hepsini sağlayan bir

$$(R, +, \times, \leq, 0, 1)$$

yapısına ***sıralı halka*** adı verilir. Eğer ayrıca Ç4 de sağlanıyorsa, yapıya ***sıralı cisim*** denir. İleride $\mathbb{R}$'yi sıralı bir cisim olarak inşa edeceğiz. İlginç bir sıralı halka örneği için Ek 3'ü boş zamanınızda okuyabilirsiniz.

Hangi halkaların sıralanabilir olduğu ve bir halkanın üstünde kaç farklı tamsıralamanın olduğu önemli bir sorudur. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$'nün üstünde tek bir tamsıralama olduğunu oldukça çabuk kanıtlayacağız.

[7] Bilenler için bir not: R iki halkanın kartezyen çarpımına "izomorftur": $R \simeq Re \times Rf$. Eğer R değişmeli değilse, e'yi R'nin merkezinde almak gerekir. Halkanın bu tür elemanlarına ***tekkuvetli*** ya da ***idempotent*** adı verilir.



Notlar ve Örnekler

15.38. Teoriye geçmeden önce birkaç sıralı halka örneği verelim. Her şeyden önce sıralı bir R halkasının her althalkası, R'nin sıralamasıyla birlikte sıralı bir halkadır. (Örneğin, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$'nün bir althalkasıdır. $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$'nin bir althalkasıdır.) Büyük halkanın sıralaması, bedavadan küçük halkanın bir sıralamasını verir.

15.39. Eğer R sıralı bir halkaysa, $R[X]$ polinom kümesini çok farklı biçimlerde kolaylıkla sıralanabilir; bunun için R'nin hangi elemanlarının X'ten küçük (ya da büyük) olduğuna karar vermek yeterlidir; hatta dilenirse X, R'nin bütün elemanlarından daha büyük olabilir (sonsuz büyük), ya da R'nin her pozitif sayısından küçük olabilir (sonsuz küçük). Bu fikri Bölüm 36'de sömüreceğiz.

15.40. Sıralı cisim tanımından Ç3'ü kaldırırsak ***sıralı halka*** kavramını elde ederiz.

Sıralı bir R halkasında bir $\varepsilon > 0$ elemanı alalım. ε elemanını küçük bir eleman olarak düşünün. ε, 2ε, 3ε, 4ε, ... elemanları bir zaman sonra bütün elemanları aşar mı? Yani her $A \in R$ için, $n\varepsilon > A$ sıralamasını sağlayan bir n doğal sayısı var mıdır? $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ halkalarında bu sorunun yanıtı olumludur.

Ama her halkada bu böyle değildir. Sorunun yanıtının olumlu olduğu halkalara ***Arşimet halkası*** denir.

Önsav 15.8. *$(R, +, \times, \leq, 0, 1)$ sıralı bir halka olsun. Her a, b, $c \in R$ için,*
i. *$a \leq b$ ise $-b \leq -a$ ve $0 \leq a$ ise $-a \leq 0$.*
ii. *$a < b$ ise $a + c < b + c$.*
iii. *$a \leq b$ ve $0 \leq c$ ise $ac \leq bc$.*
iv. *$-1 < 0$.*
v. *$0 < 1$.*
vi. *$a^2 \geq 0$.*
vii. *Karelerin toplamı negatif olamaz.*
viii. *-1, karelerin toplamı olarak yazılamaz.*
ix. *$ab = 0$ ise ya $a = 0$ ya da $b = 0$ olur. Yani R bir **bölgedir**.*
x. *Karelerin toplamının 0 etmesi için, karesi alınıp toplanan her elemanın 0 olması gerekir. Yani $r_1^2 + \cdots + r_n^2 = 0$ ise, her i için $r_i = 0$ olmalı.*
xi. *a'nın çarpımsal tersi a^{-1} varsa ve $a > 0$ ise, $a^{-1} > 0$'dır.*
xii. *Sonlu sayıda 1'in toplamı pozitiftir ve toplam 0 edemez, dolayısıyla sıralı bir halka sonsuz olmak zorundadır.*

Kanıt: i. $a \leq b$ sıralamasının her iki tarafına $-a$ eklersek, TO'dan, $0 \leq b - a$ elde ederiz. Şimdi bu sıralamanın her iki tarafına $-b$ ekleyelim. İlk önerme kanıtlandı. İkinci önerme bundan çıkar.
ii. Eğer $a + c \geq b + c$ olsaydı c'leri sadeleştirerek (yani her iki tarafa $-c$ ekleyerek) $a \geq b$ elde ederdik.
iii. Eğer $a \leq b$ sıralamasının her iki tarafına $-a$ eklersek, TO'dan, $0 \leq b - a$ elde ederiz. Şimdi ÇO'dan, $0 \leq c(b-a) = cb - ca$ elde ederiz. Bu elde ettiğimiz $0 \leq cb - ca$ sıralamasının her iki tarafına ca eklersek $ca \leq cb$ elde ederiz, yani $ac \leq bc$.
iv. Eğer $0 < -1$ olsaydı, her iki tarafa da 1 ekleyerek, $1 < 0$ elde ederdik. Öte yandan, $0 < -1$ sıralamasının ÇO'dan dolayı $0 = 0(-1) \leq (-1)(-1) = 1$ sıralamasını verir, çelişki.
v. Yukarıda kanıtlanan $-1 < 0$ sıralamasının her iki tarafına da 1 ekleyelim.
vi. Eğer $a \leq 0$ ise, $0 \leq -a$. Buradan ve ÇO'dan,

$$0 \leq (-a)(-a) = a^2$$

çıkar. Eğer $a \geq 0$ ise, doğrudan ÇO'dan $a^2 \geq 0$ elde ederiz.
vii ve **viii** maddeleri vi, iv'ten ve TO'dan çıkar.
ix. a ve b'nin 0 olmadıklarını varsayalım. i'e göre, ya a ya da $-a$ pozitiftir. Ve aynı şey b için de geçerlidir. Dolayısıyla $(\pm a)(\pm b)$, yani $\pm ab$ sayılarından biri pozitif olmak zorundadır. Demek ki $ab \neq 0$.
x. n, $r_i \neq 0$ olmak üzere, $r_1^2 + \cdots + r_n^2 = 0$ eşitliğinin sağlandığı en küçük pozitif doğal sayı olsun. Her i için $r_i \neq 0$ olmalı. Basit bir hesap yapalım:

$$r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2 = -r_n^2.$$

i, vi ve vii'den dolayı, $r_n^2 = 0$ olmalı. ix'dan dolayı $r_n = 0$. Bu bir çelişkidir.
xi. $a^{-1} < 0$ ise o zaman $-a^{-1} > 0$ ve iii'ten dolayı,

$$-1 = (-a^{-1})a > 0$$

ve bu da iv'le çelişir.
xii. Halkada n tane 1'in toplamına (sanki tamsayıymış gibi) n diyelim. ii ve v sayesinde, tümevarımla, $0 < n < n + 1$ sıralaması kanıtlanabilir. Geri kalan her şey bundan çıkar. □

Sonuç 15.9. *$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkaları üzerine tek bir sıralama vardır.*

Kanıt: $\mathbb{Z}$ üzerine tek bir sıralama olduğu Önsav 15.8.v'ten hemen çıkar. $\mathbb{Z}$'nin sıralaması $\mathbb{Q}$'nün sıralamasını belirlediğinden, $\mathbb{Q}$'nün sıralaması da biriciktir. Nitekim $\mathbb{Q}$ üzerine verilmiş bir $<$ halka sıralaması, bir önceki sonuçtan dolayı $\mathbb{Z}$ üzerine bildiğimiz sıralamayı verir ve $\mathbb{Q}$'nün her elemanını a ve $b > 0$ tamsayıları için a/b biçiminde yazabiliriz. Elbette, a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ ve b, $d > 0$ için

$$a/b < c/d \Leftrightarrow ad < bc$$

olur. İstediğimizi kanıtladık. □

Sonuç 15.10. *Sıralı her halka $\mathbb{Z}$'nin bir kopyasını içerir. Sıralı bir cisim ise $\mathbb{Q}$'nün bir kopyasını içerir.*

Kanıt: $i(0) = 0_R = 0$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, $i(n)$, R'nin 1 elemanının kendisiyle n kez toplamı olsun. Yani $i(n) = n_R$ olsun. Önsav 15.8.xii'nin kanıtına göre, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$i(n) < i(n + 1)$$

olur.

Eğer $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ise,

$$i(n) = -i(-n)$$

olsun. i, $\mathbb{Z}$'den R'ye giden ve toplamaya ve çarpmaya saygı duyan birebir bir fonksiyondur. (Neden?) Sonuç 15.9'a göre, i, sıralamaya da saygı duyar. $i(\mathbb{Z})$, R'de $\mathbb{Z}$'nin bir kopyasıdır.

İkinci önerme birincisinden çıkar. □

Bu sonucu sağlayan (yani $\mathbb{Z}$'nin bir kopyasını içeren) halkalara ***karakteristiği*** 0 ***olan*** halkalar denir. Demek ki sıralı bir halkanın karakteristiği 0'dır.

Sıralı halkaların en başat özelliklerini kanıtladık. Şimdi hangi halkaların sıralanabileceği sorusuna eğilelim.

Önsav 15.8.x'a göre, karelerin toplamı -1 olabilen halkalar sıralanamaz. Ve Önsav 15.8.ix'a göre sıralanabilen halkalar bölgedirler. Peki, karelerin toplamı -1 olmayan bölgeler sıralanabilir mi? Evet ve bunu birazdan (neredeyse)

kanıtlayacağız. (Bu tür halkalara ***biçimsel gerçel*** ya da ***sıralanabilir halka*** denir.)

Pozitif Koni. R, sıralı bir halka olsun. P de R'nin pozitif elemanlarının kümesi olsun:

$$P = \{r \in R : r > 0\}.$$

P'ye ***pozitif koni*** adı verilir. Pozitif koni sıralamayı tamamıyla belirler, çünkü, elbette,

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in P$$

önermesi doğrudur. P'nin çok bariz biçimde şu özellikleri vardır:

- $0 \notin P$,
- P toplama ve çarpma altında altında kapalıdır,
- P, 0 dışında tüm elemanların karelerini içerir.

Üstelik P, R'nin toplama altında kapalı olan ve 0'ı içermeyen en büyük altkümelerinden biridir, çünkü eğer P'den daha büyük bir Q altkümesi bu üç özelliği sağlasaydı, o zaman Q'de P'de olmayan bir a elemanı olurdu. $a \neq 0$ ve hatta $a \notin P$ olduğundan $a < 0$ olmalıdır. O zaman $-a > 0$ ve dolayısıyla $-a \in P \subseteq Q$ ve $0 = -a + a \in Q$ olur, çelişki.

Şimdi, eğer R bir bölgeyse, yukarıdaki üç özelliği sağlayan en büyük bir P altkümesinin olmasının R'nin sıralanacağı anlamına geldiğini göstereceğiz.

Teorem 15.11. *R, -1'in karelerin toplamı olarak yazılamadığı bir bölge olsun. P, R'nin toplama ve çarpma altında kapalı, 0'ı (eleman olarak) içermeyen ama R'nin 0 dışındaki tüm karelerini içeren bir altkümesi olsun. Ayrıca P, R'nin bu koşulları sağlayan en büyük altkümesi olsun. O zaman,*

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P \text{ ya da } a = b$$

olarak tanımlanan $\leq$ ikili ilişkisi R'yi sıralar.

Kanıt: O1'in doğru olduğu çok belli. O2'yi kanıtlayalım. $a \leq b$ ve $b \leq a$ olsun ama $a \neq b$ olsun. O zaman, $\leq$ ilişkisinin tanımına göre, $b-a$ ve $a-b$ elemanları P'dedir. Demek ki toplamları olan 0 da P'dedir. Çelişki. O3'ün doğruluğu P'nin toplama altında kapalı olmasından çıkar: $a = b$ ya da $b = c$ ise, sorun yok. Aksi taktirde, $b - a$ ve $c - b$ elemanları P'dedir. Bu iki elemanı toplarsak $c-a$ elemanının P'de olduğu, yani $a < c$ olduğu çıkar. TO'nun kanıtı çok kolay. ÇO'ya gelelim: Eğer $ab = 0$ ise sorun yok. Aksi taktirde a ve b elemanları P'de olduğundan, ab de P'dedir. Şimdi son olarak O4'ü kanıtlayalım. Aslında, O4,

$$R = P \cup \{0\} \cup (-P)$$

diyor. Bunu kanıtlamalıyız. Yani her $a \in R$ elemanı,

$$a \in P,\ a = 0,\ -a \in P$$

koşullarından birini sağlamalıdır. Bir a elemanının bu koşullardan hiçbirini sağlamadığını varsayalım.

$$P' = P \cup \{0\}$$

ve

$$Q = (P' + P'a) \setminus \{0\} = \{p_0 + p_1 a : p_0, p_1 \in P \cup \{0\}\} \setminus \{0\}$$

kümesini ele alalım. P' toplama altında kapalı olduğundan Q de toplama altında kapalıdır. Ayrıca, p_1'i 0'a eşit alarak, P'nin Q'nün altkümesi olduğu anlaşılır. Dahası, $p_0 = 0$ ve $p_1 = 1 = 1^2$ olarak alırsak, P'de olmayan a'nın Q de olduğunu görürüz. Demek ki Q, P'den daha büyük bir küme.

Q'nün çarpma altında da kapalı olduğunu iddia edip kanıtlıyorum. P' kümesinin çarpma altında kapalı olduğuna dikkatinizi çekerim. Q'den herhangi iki eleman alalım: $p_0 + p_1 a$ ve $p_2 + p_3 a$. Buradaki tüm p_i'ler P' kümesindeler. Şimdi,

$$(p_0 + p_1 a)(p_2 + p_3 a) = (p_0 p_2 + p_1 p_3 a^2) + (p_0 p_3 + p_1 p_2)a$$

çarpımına göz atalım. Bir bölgede olduğumuzdan çarpım 0 olamaz. Ayrıca, varsayıma göre, $a^2 \in P \subseteq P'$ olduğundan,

$$p_0 p_2 + p_1 p_3 a^2,\ p_0 p_3 + p_1 p_2 \in P'$$

olmalı. Demek ki $(p_0 + p_1 a)(p_2 + p_3 a) \in Q$.

Ama hani P, R'nin teoremde verilen koşulları sağlayan en büyük altkümesiydi? Bir çelişki. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Aşağıdaki sonuç, [Ne1] kitabında göreceğimiz Zorn Önsavı (ya da Seçim Aksiyomu) kullanılarak kanıtlanabilir. Bilgi olarak sunuyoruz. Kanıtın nasıl olabileceği bir önceki teoremden anlaşılması lazım.

Olgu. *Bir bölgenin sıralanabilir olması için* -1*'in karelerin toplamı olmaması gerek ve yeter koşuldur.* □

Aşağıdaki alıştırmalarda sıralı bir halkada çalışıyoruz.

Alıştırmalar

15.41. Her a, b, c için, $a < b$ ve $0 > c$ ise $ac > bc$ olacağını kanıtlayın.

15.42. Eğer $a \geq 0$ ise, $|a| = a$ olsun ve eğer $a \leq 0$ ise, $|a| = -a$ olsun. $|a|$ elemanına a'nın ***mutlak değeri*** adı verilir. Her a ve b için

$$|a| \cdot |b| = |ab|,$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

ve

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

önermelerini kanıtlayın.

15.43. $d(x,\, y) = |x - y|$ olsun. Her x, y, z için aşağıdaki önermeleri kanıtlayın:

$$d(x,\, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
$$d(x,\, y) = d(y,\, x),$$
$$d(x,\, y) \leq d(x,\, z) + d(z,\, x).$$

15.44. $a, r \in R$ olsun.

$$B(a, r) = \{x \in R : d(a, x) < r\}$$

olsun. Bu tür kümelere açık top diyelim. Açık topların bileşimlerine de açık küme diyelim. R'nin ayrıca şu özelliği olsun: Her $0 < r \in R$ için $0 < x < r$ sıralamalarını sağlayan bir $x \in R$ vardır. İki açık kümenin kesişiminin de bir açık küme olduğunu kanıtlayın. Açık kümelerin bileşimi (bariz biçimde) bir açık küme olduğundan, bu açık kümeler R üzerine bir topoloji tanımlarlar.

15.45. [Topoloji bilenlere] Sıralı bir R halkasında, yukarıdaki metrikle, $R \times R$'den R'ye giden

$$(a, b) \mapsto a - b \text{ ve } (a, b) \mapsto ab$$

fonksiyonlarının sürekli olduğunu kanıtlayın. Demek ki R, topolojik bir halkadır. Topolojik bir halkada topolojinin verdiği yakınsaklık kavramı vardır. Kesirli sayılarda ve (gelecekte inşa edeceğimiz) $\mathbb{R}$'de tanımlanan (ve tanımlayacağımız) yakınsaklık kavramı, aynen topolojik uzaylarda tanımlanan yakınsaklıktır. Bir cismin Arşimet cismi olması için yeter ve gerek koşul, $(1/n)_n$ dizisinin limitinin olmasıdır (o zaman bu limit zorunlu olarak 0 olur.) Bütün bunları kanıtlayın.

16. Gerçel Sayılar Konusuna Girmeden Önce

16.1 Sayıları Yaratmaya Devam Ediyoruz

16.1.1 Yaptıklarımız ve Yapacaklarımız

Kitabın ilk kısmında 0, 1, 2, 3 gibi doğal sayıları ve bu doğal sayıların kümesi olan $\mathbb{N}$'yi yarattık. Sadece $\mathbb{N}$'yi yaratmakla kalmadık, ayrıca $\mathbb{N}$'de toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımladık. Bütün bunları yapmak için kümeler kuramından yararlandık; daha açıkçası en temel kümeler kuramını bu sayıları yaratmak için özellikle kurduk.

Doğal sayıların önemli bir kusuru bir sayıdan bir başka sayının her zaman çıkarılamamasıdır. Örneğin, doğal sayılarda 3'ten 5'i çıkaramazsınız. Doğal sayıların bu zaafını gidermek için, geçen kısımda, $\mathbb{N}$'den hareket ederek ve cebir maharetiyle $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini yaratmıştık. Ayrıca $\mathbb{Z}$'de toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini ve sıralamayı tanımlamışık.

Tamsayıların da bir kusuru var. Tamsayılarda bölme yapılamaz, örneğin 3'ü 5'e bölemeyiz. Tamsayıların bu zaafını gidermek için, gene geçen kısımda, $3/5$, $-2/7$ gibi kesirli sayıları ve bu sayıların kümesi olan $\mathbb{Q}$ kümesini yarattık. Sadece $\mathbb{Q}$ kümesini yaratmakla kalmadık, bu küme üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini ve sıralamayı da tanımladık. (0'a bölmeyi tanımlayamadık elbet!) Kesirli sayıları yaratmak için tamsayılardan yola çıktık ve cebirsel yöntemler kullandık.

Ancak kesirli sayıların da önemli bir kusuru var. Örneğin, $x^2 = 2$ denkleminin kesirli sayılarda çözümü yoktur. Bunun kanıtı [SKK]'da bulunabilir[1].

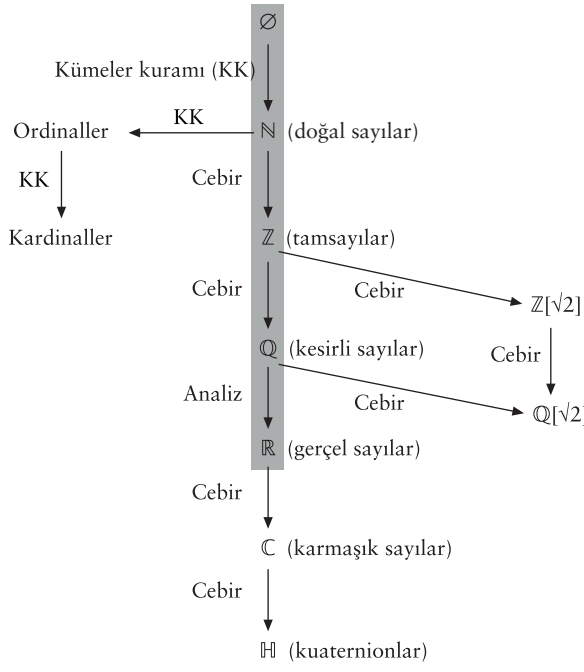
[1]Bu önermenin iki az bilinen kanıtını verelim. Şu kanıtı Roman Kossak'tan öğrendim: Diyelim $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a^2 = 2b^2$. Şimdi a ve b sayılarını 3 tabanında yazalım. Bu a ve b sayılarının 0 olmayan son rakamı (yani 0'a eşit olmayan en sağdaki rakam) ya 1 ya da 2 olmalı. Kareler alındığında a^2 ve b^2 sayılarının 0 olmayan son rakamının 1 olur. Demek ki a^2'nin 0 olmayan son rakamı 1, öte yandan $2b^2$'ninki 2'dir, dolayısıyla a^2 sayısı $2b^2$ sayısına eşit olamaz.

Bu kanıttan esinlenerek şöyle de bir kanıt yapılabilir: $a^2 = 2b^2$ eşitliğini modülo 3 sayılarda ele alalım. Kareler modülo 3 sadece 0 ya da 1 olabilir. $a^2 = 2b^2$ eşitliğinden de a^2 ve b^2'nin

Bir sonraki kısımda gerçel sayıları yaratacağız, hepsini birden ve tek bir hamlede. Bu arada tabii ki gerçel sayıları yaratırken $\sqrt{2}$ de otomatik olarak yaratılmış olacak. Bir sonraki altbölümde, tüm reel sayıları yaratmadan, sadece cebirsel yöntemler kullanarak $\sqrt{2}$'yi yaratacağız. $\sqrt{2}$'yi yaratmakla kalmayacağız, $\sqrt{2}$'yi içeren bir sistemde toplama, çarpma ve hatta bölme yapacağız.

Aşağıdaki şemada sayı yaratmanın kronolojisini bulacaksınız.

Sayıların Yaratılış Süreci



Kardinaller dışında aşağı doğru indikçe sayı kümeleri büyür.
[AKK]'da göreceğimiz her kardinal bir ordinaldir.
Kuaternionlardan daha büyük oktonionlar vardır.

16.1.2 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'yi Yaratmak

$\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmamasının doğurduğu tekil sorunu gidermek o kadar zor değildir ve bu kısa altbölümde $\sqrt{2}$'yi içeren $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sıralı halkasını matematiksel olarak yaratarak bu sorunu gidereceğiz. Ama sorun sadece $\sqrt{2}$'nin $\mathbb{Q}$'de yokluğu değil, kesirli olmayan o kadar çok gerçel sayı var ki... Bu sorunu ileri bir tarihe atıp şimdilik sadece $\sqrt{2}$'yi var edelim.

Elimizde sadece $\mathbb{Q}$ halkası var. Sadece $\mathbb{Q}$ halkasını ve en temel kümeler kuramını kullanarak $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasını var edeceğiz... Yaratmadan önce bu hal-

0 modülo 3 olduğu anlaşılır. Demek ki a ve b sayıları 3'e bölünüyor. Tümevarımla kanıt biter. Bu son kanıt $3k+2$ türünden yazılan doğal sayıların da $\mathbb{N}$'de karekökünün olmadığını kanıtlar.

kanın sonunda nasıl bir şey olacağını, sanki $\sqrt{2}$'nin ne olduğunu biliyormuşçasına, önceden söyleyelim,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

olacak. Henüz yaratmadığımız $\mathbb{R}$ kümesinin bir altkümesi olan bu küme, toplama, çarpma ve çıkarma altında kapalıdır. Hatta eğer $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ise $1/\alpha$ sayısı da $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesindedir. Nitekim, kolayca kontrol edilebileceği üzere, eğer a ve b'den en az biri 0'dan farklıysa,

$$(a + b\sqrt{2}) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\sqrt{2} \right) = 1$$

olur, yani

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\sqrt{2}$$

olur. Bu eşitliğin çıkış noktası, kanıtlaması kolay olan, her ikisi de 0 olmayan $a, b \in \mathbb{Q}$ sayıları için,

$$(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \neq 0$$

önermeleridir.

$\sqrt{2}$ sayısını yaratmaya başlıyoruz.

İlk Yöntem. Bu yöntem kitabın önceki sayfalarında tamsayıları ve kesirli sayıları yaratmak için kullandığımız yöntemlerin çok benzeri olacak.

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesine eşit olsun... Amacımız, sezgisel olarak bildiğimiz ama henüz matematiksel olarak var olmayan $a + b\sqrt{2}$ sayısını (a, b) ikilisi olarak görmek. Örneğin $\sqrt{2}$ sayısı $(0, 1)$ elemanına eşit olacak. Her a kesirli sayısını da $(a, 0)$ olarak göreceğiz. Şimdi $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d),\\ (a, b)(c, d) &= (ac + 2bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Bu tanımları, lise yıllarından bildiğimiz,

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2},\\ (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) &= (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\end{aligned}$$

eşitliklerinden esinlenerek yaptık. Örneğin,

$$(0, 1)^2 = (2, 0).$$

("Kare almak" demek bir sayıyı kendisiyle çarpmak demektir elbet.) Bir de şu eşitliğe bakalım:

$$(a,\, b) = (a,\, 0) + (0,\, b) = (a,\, 0) + (b,\, 0)(0,\, 1).$$

Eğer $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesinin $(x,\, 0)$ türünden yazılan elemanlarını $i(x)$ olarak kısaltırsak, $(0,\, 1)$ elemanını da $\sqrt{2}$ olarak yazarsak ($\sqrt{2}$'yi yarattık!), yukarıdaki

$$(a,\, b) = (a,\, 0) + (b,\, 0)(0,\, 1)$$

eşitliği,

$$(a,\, b) = i(a) + i(b)\sqrt{2}$$

hâlini alır. Daha bitmedi... Bir de $i(x)$ elemanını x olarak kısaltırsak, bu en son eşitlik,

$$(a,\, b) = a + b\sqrt{2}$$

hâlini alır ve böylece, tüm $a,\, b \in \mathbb{Q}$ için, $a + b\sqrt{2}$ sayılarını yaratmış oluruz...

Hangi hakla $i(x)$ yerine x yazıyoruz diye sorabilir okur haklı olarak. Kolayca görüleceği üzere, her $a,\, b \in \mathbb{Q}$ için

$$\begin{aligned} i(a) + i(b) &= i(a + b), \\ i(a)i(b) &= i(ab) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli ve ayrıca $i(a) = (a, 0)$ kuralıyla verilmiş

$$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

fonksiyonu birebir. Bütün bunlar, a ve b kesirli sayılarını toplayıp çarpmayla, yeni yarattığımız $i(a)$ ve $i(b)$ elemanlarını toplayıp çarpmak arasında pek bir ayrım olmadığını gösterir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ ile $i(\mathbb{Q})$ kümelerini "özdeşleştirebiliriz". (Bkz. Bölüm 13.8.)

Toplama ve çarpma verildiğinden, artık $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinde (yani aslında $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesinde) çıkarma ve bölmeyi de tanımlayabiliriz. Bu tanımları okura bırakıyoruz. Ama sıralamayı tanımlayalım:

$$a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$$

önermesi, elbette,

$$0 \leq (c - a) + (d - b)\sqrt{2}$$

önermesi doğruysa doğru olmalı. Demek ki

$$0 \leq x + y\sqrt{2}$$

önermesini tanımlamak yeterli. Bunu da şöyle tanımlayalım (biraz meşakkatli, biliyorum):

$$0 \leq x + y\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0 \text{ ise ya da} \\ x \geq 0,\ y \leq 0 \text{ ve } 2y^2 \leq x^2 \text{ ya da} \\ x \leq 0, y \geq 0 \text{ ve } x^2 \leq 2y^2 \text{ ise} \end{cases}$$

Bu sıralama aslında (henüz varlığını bilmediğimiz) $\mathbb{R}$'nin standart sıralamasının $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ althalkasına kısıtlanışıdır.

Artık $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesini, bu küme üstündeki dört işlemi ve sıralamayı biliyoruz. Bu tanımlarla, ortaokul bilgilerinizle doğru olacağını tahmin ettiğiniz her türlü ifadeyi kanıtlayabilirsiniz.

Dileyen okur bu tanımla $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinin sıralı bir cisim olduğunu kanıtlayabilir.

Tuhaf ama gerçek: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesini yukarıda tanımlanan toplama ve çarpmayla sıralı bir cisim yapan bir başka sıralama daha vardır. Bu yeni sıralamada $\sqrt{2} < 0$ olur! Açıklayalım: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'den $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'ye giden şu fonksiyona bakalım:

$$\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

fonksiyonu her $a,\ b \in \mathbb{Q}$ için,

$$\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

formülüyle tanımlansın. φ fonksiyonu bir eşleşmedir ve $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasının toplamasını ve çarpmasını ve çarpmanın etkisiz elemanını (1'i yani) etkilemez, yani, her

$$\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

için,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + \beta) &= \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \\ \varphi(\alpha\beta) &= \varphi(\alpha)\varphi(\beta), \\ \varphi(1) &= 1 \end{aligned}$$

olur. Şimdi φ'yi kullanarak $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ üzerine (gerçel sayılardan bulaşan) "doğal" sıralamayı değiştirebiliriz: Her $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ için,

$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\alpha)$$

olarak tanımlayalım. $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}],\ +,\ \times,\ \prec)$ yapısı da sıralı bir cisim olur ve $\sqrt{2}$ bu sıralamada negatif olur.

$\sqrt{2}$'yi Yaratmanın Modern Yöntemi. Katsayıları kesirli sayı olan polinomlardan oluşan $\mathbb{Q}[X]$ halkasını ele alalım. Yalnız polinomlarda X^2'yi her gördüğümüzde 2 yazalım, yani X^2'nin 2'ye eşit olduğunu varsayalım. Mesela,

$$X^3 = X^2X = 2X$$

olur. Benzer şekilde,

$$3/2 + 4X + 3X^2 - (7/2)X^3 + X^4 = 3/2 + 4X + 6 - 7X + 4 = 23/2 - 3X$$

olur. Kolayca anlaşılacağı üzere, eğer X^2'nin 2'ye eşit olduğuna karar verirsek (ve bu kararımızın sonuçlarına katlanırsak), her "polinom" (polinom değiller aslında, polinomlarda X^2 hiçbir sayıya eşit olmaz) bir ve bir tek a ve b kesirli sayı çifti için

$$a + bX$$

biçiminde yazılır. Bu yeni varlıkları toplayıp çarpmak kolaydır:

$$(a + bX) + (c + dX) = (a + c) + (b + d)X$$

ve

$$(a + bX)(c + dX) = ac + (ad + bc)X + bdX^2 = (ac + 2bd) + (ad + bc)X.$$

Okurun tahmin etmiş olacağı gibi X'e $\sqrt{2}$'ye eşitmiş gibi davranıyoruz. Aslında burada X'e $-\sqrt{2}$'ye eşitmiş gibi de davranıyoruz[2].

X^2'nin 2'ye eşit olduğu (polinomlar demeye dilim varmıyor), polinomsu şeylerin kümesi bir halkadır. Bu halka $\mathbb{Q}[X]/\langle X^2\rangle$ olarak gösterilir. Bu halkanın $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasından (elemanlarının adları dışında) hiçbir farkı yoktur. Bu tür halkalara izomorf halkalar denir.

16.1.3 Ya Diğer Eksik Sayılar?

$\sqrt{2}$'nin kesirli sayı olmama sorununu ve benzer sorunları çözmek için, kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'den çok çok daha büyük bir küme olan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi yaratacağız.

Sorun sadece 2'nin karekökünü yaratmak olsaydı, $\mathbb{R}$'den çok daha küçük olan

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a,\, b \in \mathbb{Q}\}$$

cismi işimizi görürdü ve $\mathbb{R}$'yi yaratmak yerine, yaratması çok daha kolay olan ve cebirsel yöntemlerle yaratılabilen $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ cismini yaratmamız yeterli olurdu.

Sadece $\sqrt{2}$'yi değil, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $5^{1/3}$ gibi sayıları, hem de dördünü birden cebirsel yöntemlerle yaratmak da oldukça kolaydır.

Hatta π sayısını ve, n herhangi bir tamsayı olmak üzere, π^n sayılarının hepsini de cebirsel yöntemlerle kolaylıkla yaratabiliriz. n bir kesirli sayı olmak üzere π^n sayılarının hepsini birden yaratmak biraz daha fazla uğraş gerektirir

[2] $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasında toplama ve çarpma işlemleriyle $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$ elemanlarını ayırdedemeyiz, yani toplama ve çarpma işlemleriyle ifade edilen her özellik biri için doğruysa diğeri için de doğrudur (çünkü $\sqrt{2}$'yi $-\sqrt{2}$'ye götüren bir halka otomorfisi vardır).

ve bu yöntem daha az bilinir ama bu da cebirsel yöntemlerle mümkündür. (Toplama ve çarpma işlemlerini tanımlamak oldukça kolaydır ama bu sayı cisimlerini sıralamak çok daha zordur. Ayrıca hemen hemen her zaman bu sayı cisimleri üzerine birden fazla sıralama vardır.)

Demek istediğimiz şu: Kesirli sayıların en büyük kusuru $\sqrt{2}$ gibi bir sayının olmaması değildir. Kesirli sayıların çok daha büyük bir kusuru vardır. Eğer $\sqrt{2}$'nin olmaması, komşunun bahçesinden elma çalmaksa, $\mathbb{Q}$'nün asıl büyük suçu banka soymaktır! Gerçel sayıları yaratarak bu kusuru gidermeye çalışacağız.

Bu büyük kusur öylesine ciddi bir kusurdur ki, telafi etmek için cebir yetmez, analize başvurmak gerekir.

16.2 $\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi

$\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmadığını biliyoruz. $\sqrt{2}$, kesirli bir sayı değildir ama kesirli sayılarla $\sqrt{2}$'ye dilediğimiz kadar yaklaşabiliriz. Örneğin $\sqrt{2}$'yle

$$1{,}41421356237$$

kesirli sayısı arasındaki fark 0,0000000001'den küçüktür. Dilersek, $\sqrt{2}$'ye uzaklığı en fazla 0,00000000000000000000001 olan kesirli bir sayı bulabiliriz. Bulacağız da.

Bu bölümde, gittikçe $\sqrt{2}$'ye daha fazla yaklaşan ve "sonsuzda $\sqrt{2}$ olmaya meyilli" olan bir kesirli sayı dizisini ele alacağız. Hemen bu diziyi tanımlayalım.

$(x_n)_n$ dizisinin terimlerini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$(*) \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

Eğer uygun bir x_0 verilmişse, bu tanım sayesinde tüm x_n'leri hesaplayabiliriz. Örneğin eğer $x_0 = 1$ ise,

$$x_3 = \frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$$

buluruz ki, bu, Mezopotamyalıların, daha iyisini bilmediklerinden, $\sqrt{2}$ yerine kullandıkları değerdir. Pek de fena bir değer değildir aslında:

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2{,}00694444\ldots$$

Eğer $x_0 = 0$ alırsak,

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 2/1 = 2 \\ x_2 &= 4/3 = 1{,}3333333\ldots \\ x_3 &= 10/7 = 1{,}4285714285714\ldots \\ x_4 &= 24/17 = 1{,}4117647058823\ldots \\ x_5 &= 58/41 = 1{,}4146341463414\ldots \\ x_6 &= 140/99 = 1{,}4141414141414\ldots \end{aligned}$$

buluruz. Bu dizinin giderek $\sqrt{2}$'ye daha çok yaklaştığını, hiçbir zaman tam olarak $\sqrt{2}$'ye eşit olmasa da dizinin terimleriyle $\sqrt{2}$'ye istediğimiz kadar yaklaşabileceğimizi göstereceğiz. Örneğin, belli bir aşamadan sonra tüm x_n'ler $\sqrt{2}$'ye en fazla milyarda 1 uzaklıktadırlar; bunun için n'yi 18 ya da daha büyük seçmenin yeterli olduğunu göreceğiz. Seçtiğimiz $\varepsilon > 0$ sayısı ne kadar küçük olursa olsun, bir zaman sonra - yani belli göstergeçten sonra- tüm x_n'ler $\sqrt{2}$'ye en fazla bu ε mesafesi kadar uzaklıkta olurlar. Matematikte bu olgu "$(x_n)_n$ dizisi $\sqrt{2}$'ye ***yakınsar***" olarak ifade edilir. Ders notlarının son kısmında yakınsama kavramına özel yer ayıracağız. Bu bölümü ısınma hareketleri olarak telakki edebilirsiniz.

Eğer diziyi hesaplamaya $x_0 = -1$ ile başlamaya kalkışırsak, bir sonraki terimi hesaplamak için $x_0 + 1$'e yani 0'a bölmek zorunda olduğumuzdan, diziyi devam ettiremeyiz. Aynı şekilde, eğer $x_0 = -3/2$ ise $x_1 = -1$ olur ve bu sefer de x_2'yi hesaplayamayız. Ama eğer $x_0 \geq 0$ ise, tümevarımla kolayca görüleceği üzere, her $x_n \geq 0$ olur ve dizinin her terimini hesaplayabiliriz. Bu dizinin, seçilmiş her $x_0 \geq 0$ (kesirli) sayısı için $\sqrt{2}$'ye yaklaştığını göstereceğiz. Daha doğrusu, henüz $\sqrt{2}$ diye bir sayıyı icat etmediğimizden, x_n'lerin karelerinin giderek 2'ye yakınsadığını göstereceğiz. Yakınsamanın ne demek olduğunu henüz bilmediğimizden, tam matematiksel olamayacağız ama gene de okur gerçeği hissedecek diye umuyoruz.

$|2 - x_n^2|$ sayılarına bakalım. Önce,

$$\left|2 - x_{n+1}^2\right| = \left|2 - \left(\frac{x_n + 2}{x_n + 1}\right)^2\right| = \left|2 - \frac{x_n^2 + 4x_n + 4}{x_n^2 + 2x_n + 1}\right| = \frac{\left|x_n^2 - 2\right|}{(x_n + 1)^2}$$

eşitliğinin farkına varalım. Eğer $1 \leq x_n$ önermesini kanıtlayabilirsek, o zaman $(x_n + 1)^2 \geq 4$ olur ve yukarıdaki sıralamalardan,

$$|2 - x_{n+1}^2| \leq \frac{|2 - x_n^2|}{4}$$

çıkar ve böylece 2'yle x_n^2 arasındaki farkın her adımda, bir önceki farkın 4'te 1'inden daha küçük olacağı anlaşılmış olur. Tabii bu da aradaki farkın n büyüdükçe 0'a yaklaşacağı anlamına gelir.

Şimdi x_n'nin 1'den büyük olduğunu kanıtlayalım diyeceğim ama bu dediğim, eğer $x_0 < 1$ seçilirse, en azından $n = 0$ için doğru olmaz. Öte yandan, eğer $x_0 > -1$ ise, o zaman $x_0 + 1 > 0$ olur ve (*) tanımından kolayca kanıtlanacağı üzere, $n \geq 1$ için tüm x_n'ler 1'den büyük olurlar. (Çünkü paydaki $x_n + 2$ sayısı her zaman paydadaki $x_n + 1$'den daha büyüktür.) Böylece

$$|2 - x_{n+1}^2| \leq \frac{|2 - x_n^2|}{4}$$

sıralaması kanıtlanmış olur. Demek ki,

$$|2 - x_n^2| \leq \frac{|2 - x_{n-1}^2|}{4} \leq \frac{|2 - x_{n-2}^2|}{4^2} \leq \ldots \leq \frac{|2 - x_0^2|}{4^n}$$

yani

$$|2 - x_n^2| \leq \frac{|2 - x_0^2|}{4^n}$$

sıralamasını buluruz. Örneğin, $x_0 = 1$ alırsak,

$$|2 - x_n^2| \leq 1/4^n$$

buluruz, ki fena bir aşağıyukarılık değil. Buradan, eğer bir an için $\sqrt{2}$ sayısının varlığını bildiğimizi varsayarsak,

$$|\sqrt{2} - x_n| < |\sqrt{2} - x_n||\sqrt{2} + x_n| = |2 - x_n^2| \leq 1/4^n,$$

yani

$$|\sqrt{2} - x_n| < 1/4^n$$

buluruz. Eğer $n = 2m$ alacak olursak,

$$|\sqrt{2} - x_{2m}| < 1/4^{2m} = 1/16^m < 1/10^m$$

buluruz. Örneğin, eğer $\sqrt{2}$'ye kesirli bir sayıyla milyarda 1'den daha az bir yanlışla yaklaşmak istiyorsak, $x_0 = 1$ ve $m = 9$ seçip x_{18}'i hesaplayabiliriz:

$$x_{18} = \frac{9369319}{6625109} = 1{,}414213562\ldots$$

Aslında $\sqrt{2}$'ye 18'inci terimden çok daha çabuk milyarda 1 kadar yaklaşırız, yukarıdaki sıralamalarda oldukça hoyrat davrandık, daha ince bir yaklaşım daha doğru sonuçlar verir.

Burada önemli olan nokta şu: Eğer x_0'ı kesirli bir sayı seçersek, hesaplanabilen her x_n elbette kesirli bir sayı olur. x_n kesirli sayısının payını ve paydasını hesaplamanın kolay bir yolu var:

$$p_{n+1} = p_n + 2q_n$$
$$q_{n+1} = p_n + q_n$$

olarak tanımlarsak,

$$x_n = p_n/q_n$$

formülüyle tanımlanan dizi (*) eşitliğini sağlar (alıştırma). Yukarıda bulduğumuz

$$x_{18} = \frac{9369319}{6625109}$$

için $p_0 = q_0 = 1$ aldık ve p_n ve q_n'leri $n = 18$'e kadar teker teker hesapladık.

Limit Kavramını Bilenlere Not: Yukarıdaki tanımla verilen $(x_n)_n$ dizisi eğer bir sayıya yakınsıyorsa, bu sayı $\pm\sqrt{2}$ olmak zorundadır. Nitekim, eğer limite x dersek ve (*) tanımında, x_{n+1} ve x_n yerine x koyarsak,

$$x = \frac{x+2}{x+1}$$

elde ederiz ve buradan da önce,

$$x(x+1) = x+2$$

ve sadeleştirdikten sonra da,

$$x^2 = 2$$

çıkar. Demek ki x ya $\sqrt{2}$ ya da $-\sqrt{2}$ olabilir.

Aslında, $x_0 = -\sqrt{2}$ dışında, dizinin hesaplanabildiği tüm x_0 değerleri için limit ancak $\sqrt{2}$ olabilir. Bunun pek o kadar kolay olduğunu sanmadığımız kanıtını okura bırakıyoruz. Bir başka ilginç alıştırma da dizinin hesaplanamayacağı tüm x_0 değerlerini bulmak. Sonuç çok hoş çıkıyor.

Alıştırmalar

16.1. Aynı şeyi $\sqrt{2}$ yerine $\sqrt{3}$ için yapmaya çalışın, örneğin $|x - \sqrt{3}| < 10^{-9}$ sıralamasını sağlayan bir x kesirli sayısı bulun. Çok var tabii, ama siz birini bulun.

Notlar

16.2. **Karekök İşareti.** $\surd$ işaretinin tarihi 1525'e uzanır. Bu simgeye benzer bir simge, köklü sayılar için Alman matematikçi Christoff Rudolff (1499-1545) tarafından **Coss** adlı kitabında kullanılmıştır.

Coss, Almanca dilinde yayımlanmış ilk cebir kitabıdır.

Coss, *cosa*'dan gelir. Cosa da, "bilinmeyen" anlamına kullanılan "şey"in Latincesidir. Cebircilere uzunca bir zaman bu yüzden "kosistler" denirdi. Cebire de "kosik sanat" denmiştir.

16.3. **$\sqrt{2}$'nin Öyküsü.** Yunanlı filozof Aristo'ya (MÖ 384-322) göre, $\sqrt{2}$'nin kesirli olmadığını ilk kez MÖ 430 yıllarında Pisagor anlamıştır. Pisagor olmasa da, bu buluşun bir felsefe ekolü olan Pisagorcular tarafından bulunduğu kesin. Bu buluş Pisagorcuların felsefesinin ve inancının temelini yıkıyordu. Pisagorculara göre var olan her şeyin temeli doğal sayılardı ve her şey (örneğin her uzunluk) doğal sayılar ya da doğal sayıların doğal sayılara bölünmesiyle (yani kesirli sayılarla) ifade edilebilirdi. Ama iki kenarı 1 uzunluğunda olan bir diküçgenin hipotenüsünün uzunluğu $\sqrt{2}$'ydi ve $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildi. Bu yüzden Pisagorcular uzunca bir süre $\sqrt{2}$'nin kesirli olmadığını bir sır olarak saklamışlardır... diye bir söylenti vardır.

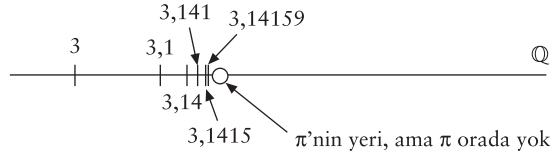
16.3 Kesirli Sayılar Kümesinin Kusurları

Bir önceki altbölümde, kesirli bir sayı olmayan $\sqrt{2}$'ye çok çok yaklaşan bir kesirli sayılar dizisi bulmuştuk. Bu kesirli sayı dizisi, $\sqrt{2}$'ye erişmek için elinden geleni yapıyordu. Hatta "sonsuzda" $\sqrt{2}$ olmak için yanıp tutuşuyordu ama $\sqrt{2}$ orada olmadığı için (çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değil) sonsuzda bile $\sqrt{2}$ olamıyordu...

Sadece $\sqrt{2}$'ye değil, herhangi bir gerçel sayıya yakınsamaya çalışan bir, hatta birden çok kesirli sayı dizisi bulabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ x_1 &= 3{,}1 \\ x_2 &= 3{,}14 \\ x_3 &= 3{,}141 \\ x_4 &= 3{,}1415 \\ x_5 &= 3{,}14159 \\ &\dots \end{aligned}$$

dizisi belli ki π sayısına yakınsamak üzere yola çıkmıştır ama hiçbir zaman π sayısına eşit olamayacaktır, "sonsuzda" bile, çünkü π kesirli bir sayı değildir[3] ve orada yoktur! Bu dizi sürekli olarak artıyor ve giderek daha fazla π'ye yaklaşıyor ve sonsuzda olmak istediği yere yeterince yaklaşınca, bir de bakıyor ki o sayı orada yok! Çünkü dünyası $\mathbb{Q}$'den ibaret! Hicran!



Kesirli sayıların yukarıdaki gibi bir resmini yaparsak, π'nin olması gerektiği yerde bir delik görürüz. $\sqrt{2}$'nin yerinde de yeller esiyordur. Kesirli sayılarda daha birçok delik vardır. Hatta kesirli sayılarda kesirli sayıdan çok daha fazla delik vardır!

İşte kesirli sayılar kümesinin en ciddi kusuru bu deliklerin varlığı ve çokluğudur, yaratılması için cebirin yeterli olamayacağı kadar çokturlar. Notların geri kalan bölümünde kesirli sayıların deliklerini doldurarak gerçel sayıları elde edeceğiz.

Daha kolay anlaşılan bir örnek verelim:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

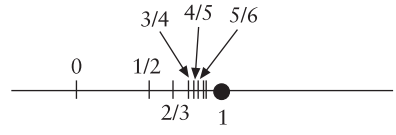
[3] π'nin kesirli sayı olmadığını kanıtlamak $\sqrt{2}$'nin kesirli sayı olmadığını kanıtlamaktan daha zordur.

dizisi 0'a giderek daha çok yaklaşır, yaklaşmaktan da öte, 0'ın burnunun dibine girer (ama mesela -1'e de yaklaşır ama -1'in burnunun dibine girmez) ve ileride tanımlayacağımız anlamda $\mathbb{Q}$'da 0'a yakınsar. Ama $\mathbb{Q}$ yerine 0'ı atıp $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kümesinde ya da $(0, 1]$ aralığında çalışırsak, bu dizi 0'a yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapar ama, 0 orada olmadığından, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ya da $(0, 1]$ kümesinde 0'a yakınsayamaz... Burada sorun dizide değildir, dizi bir sayıya "yakınsamak" için elinden geleni yapıyordur, sorun ele alınan kümededir, kümede 0'ın olması gereken yerde bir delik vardır.

Kesirli sayıların bir başka kusurunu da bulalım. Şu kesirli sayı kümesini ele alalım:

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}.$$

Bu kümede, $n \in \mathbb{N}$ için, $n/(n+1)$ biçiminde yazılan kesirli sayılar bulunuyor. A'nın her sayısı 1'den küçükeşit elbet; 2'den de küçükler. Bu yüzden 1 ve 2'nin A'nın ***üstsınırı*** oldukları söylenir. A'nın katrilyonlarca, hatta daha da fazla, sonsuz tane üstsınırı vardır: 1'den büyükeşit her sayı A'nın bir üstsınırıdır. Ama 1'in bu üstsınırlar arasında bir ayrıcalığı vardır: 1, A'nın üstsınırlarının en küçüğüdür.



Bir A sayı kümesinin üstsınırlarının en küçüğüne ***en küçük üstsınır*** denir ve bu sayı $\sup A$ ya da eküs A olarak yazılır (biz birinci yazılımı tercih edeceğiz). Yukarıdaki örnekte, $\sup A = 1$. Bunun matematiksel kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

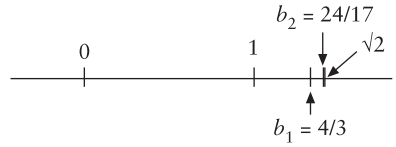
Şimdi, $b_0 = 0$ olmak üzere,

$$b_{n+1} = \frac{3b_n + 4}{2b_n + 3}$$

ilişkisiyle tanımlanmış $(b_n)_n$ kesirli sayı dizisini ele alalım. Dizinin ilk dört terimini yazalım:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 4/3 \\ b_2 &= 24/17 \\ b_3 &= 140/99 \end{aligned}$$

Dikkat ettiyseniz (etmediyseniz de kolayca kanıtlayabilirsiniz) b_n, geçen altbölümde tanımlanan x_{2n}'ye eşit. Dolayısıyla $(b_n)_n$ dizisi de $(x_n)_n$ dizisi gibi (henüz olmayan!) $\sqrt{2}$'ye yakınsamaya çalışır.



Ayrıca $(b_n)_n$ dizisi sürekli artan bir dizidir. (Alıştırma. Önce tümevarımla $b_n^2 < 2$ sıralamasını kanıtlayın, ardından, $b_n < b_{n+1}$ sıralamasını.) Şimdi,

$$B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}$$

olsun. B'deki her eleman $\sqrt{2}$'den küçüktür, dolayısıyla $\sqrt{2}$, B'nin bir üstsınırıdır. $\sqrt{2}$'nin B'nin en küçük üstsınırı olduğu da kolaylıkla kanıtlanır:

$$\sup B = \sqrt{2}.$$

Kanıtın tek zorluğu $\sqrt{2}$'nin henüz var olmayışıdır! Bu zorluktan kaçınmak istiyorsanız, geçen bölümde yaptığımız gibi, $(b_n)_n$ dizisinin karesinin 2'ye yakınsadığını kanıtlayabilirsiniz.

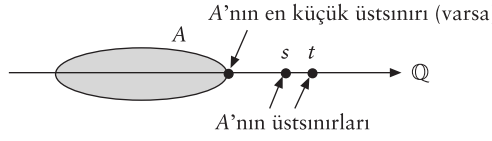
Ama $\sqrt{2}$ yoksa, B'nin en küçük üstsınırının $\sqrt{2}$ olduğunu söyleyebilir miyiz?

En küçük üstsınır tanımımızda bir sorun var. "Üstsınır" ve "en küçük üstsınır" kavramları mutlak kavramlar değildir, göreceli kavramlardır. $\mathbb{Q}$'de üstsınırla (henüz tanımlamadığımız) $\mathbb{R}$'de üstsınır aynı şey demek değildir. $\sup B$ yazmak yerine kavramın göreceliğini gösteren $\sup_{\mathbb{Q}} B$ ve $\sup_{\mathbb{R}} B$ yazmak gerekirdi.

B'nin $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınırı $\sqrt{2}$'dir. Ama B'nin $\mathbb{Q}$'de en küçük üstsınırı yoktur. Yani $\sup_{\mathbb{R}} B = \sqrt{2}$'dir ama $\sup_{\mathbb{Q}} B$ yoktur! Çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir.

Üstsınır ve en küçük üstsınır tanımlarımızı gözden geçirelim:

$A \subseteq \mathbb{Q}$ ve $s \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer her $a \in A$ için, $a \leq s$ sıralaması doğruysa, s'ye A'nın ($\mathbb{Q}$'de) ***üstsınırı*** denir. Eğer s, A'nın bir üstsınırıysa, s'den büyük her t kesirli sayısı da A'nın bir üstsınırıdır elbette.



Örneğin, 1 ve 1'den büyük her sayı hem $(0, 1)$ hem de $[0, 1]$ aralığının üstsınırıdır. Öte yandan $\mathbb{Z}$'nin ne $\mathbb{Z}$'de ne de $\mathbb{Q}$'de üstsınırı vardır. Her kesirli sayı boşkümenin bir üstsınırıdır. (Neden?) Üstsınırların en küçüğüne, eğer varsa, olmayabilir çünkü, ($\mathbb{Q}$'de) ***en küçük üstsınır*** adı verilir.

Yani $s \in \mathbb{Q}$ sayısının A'nın en küçük üstsınırı olması için, önce A'nın bir üstsınırı olması, sonra bu en küçük üstsınırın A'nın her üstsınırından küçükeşit

olması gerekir. Eğer bir kümenin en küçük üstsınırı varsa, bu en küçük üstsınır ancak bir tane olabilir: Nitekim eğer s ve t birer en küçük üstsınırsa, s en küçük üstsınır, t de bir üstsınır olduğundan, $s \leq t$ olmak zorundadır; aynı nedenden $t \leq s$ olmak zorunda; demek ki $s = t$ olmak zorundadır. Öet olarak: Bir kümenin en küçük üstsınırı varsa biricik olmak zorundadır.

Bir $A \subseteq \mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'deki en küçük üstsınırı $\sup_{\mathbb{Q}} A$ olarak gösterilir. Ama dikkat! $\sup_{\mathbb{Q}} A$ olmayabilir; olduğunda da A'nın bir elemanı olabilir de olmayabilir de. Örneğin

$$\sup_{\mathbb{Q}}(0,1) = 1 \notin (0,1)$$

ama

$$\sup_{\mathbb{Q}}(0,1] = 1 \in (0,1].$$

Yukarıdaki paragraflarda $\mathbb{Q}$'leri silip yerine $\mathbb{R}$ yazarsanız, $\mathbb{R}$'de üstsınır ve $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınır kavramlarını elde edersiniz. (Tabii $\mathbb{R}$'nin ne demek olduğunu sezgisel olarak bildiğinizi varsayıyoruz burada, matematiksel olarak $\mathbb{R}$ henüz tanımlanmadı.)

Bir altkümenin en küçük üstsınırı olması için, her şeyden önce altkümenin üstsınırı olmalıdır. Üstsınırı olmayan bir kümenin en küçük üstsınırı da olamaz.

Şimdi canalıcı soruyu soralım: Üstsınırın olması en küçük üstsınır olması için yeterli midir? Yanıt olumsuz: Mesela boşkümenin üstsınırı vardır ama en küçük üstsınırı yoktur! Peki aynı soru boş olmayan kümeler için doğru mu? Belli ki $\mathbb{Q}$ halkasında bu doğru değil. Yukarıdaki B kümesinin üstsınırı var, örneğin 2, B'nin bir üstsınırıdır, ama B'nin $\mathbb{Q}$ halkasında en küçük üstsınırı yok.

Yani $\mathbb{Q}$'de üstten sınırlı ama en küçük üstsınırı olmayan altkümeler vardır. Bu, $\mathbb{Q}$'nün büyük kusurlarından biridir ve tahmin edileceği gibi bir önceki büyük kusura eşdeğerdir. Bu iki kusurdan biri düzeltilirse, diğeri de kendiliğinden düzelir.

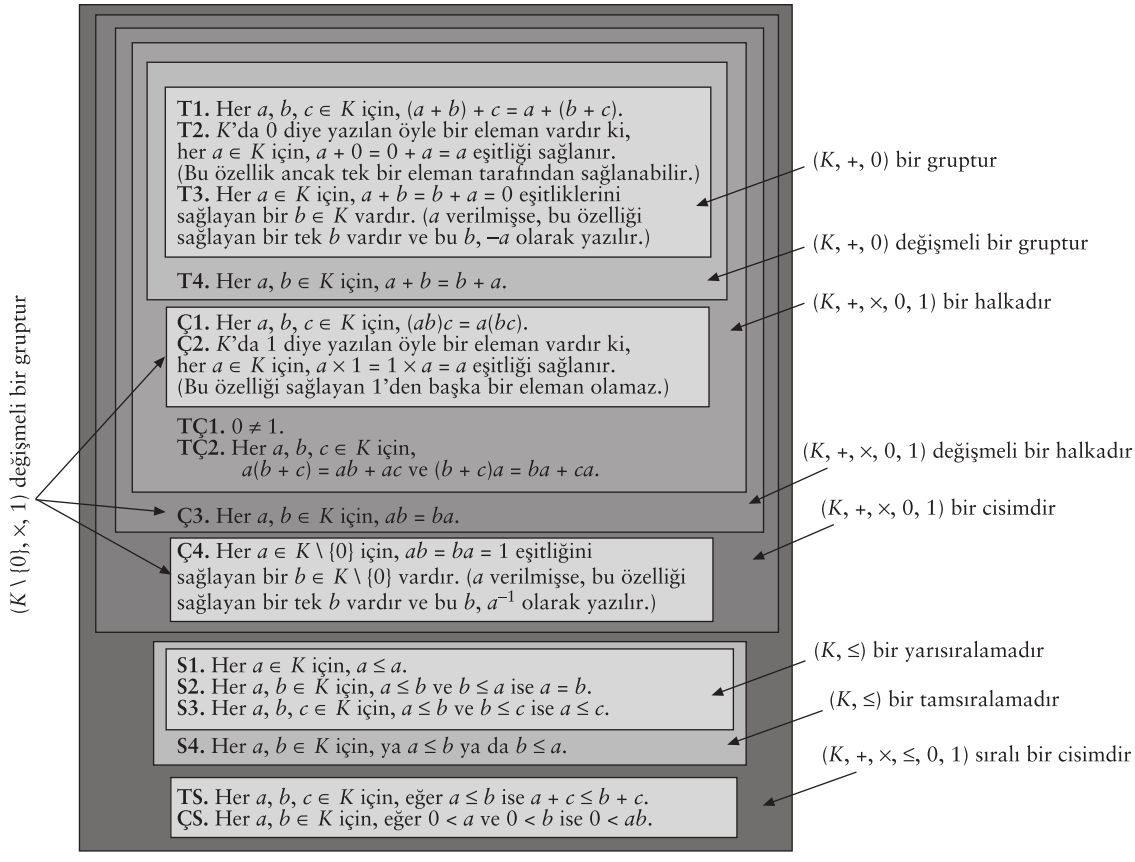
Öte yandan boş olmayan bir altkümenin $\mathbb{R}$'de üstsınırının olması, en küçük üstsınırının da olması anlamına gelir. Yani $\mathbb{R}$'de üstten sınırlı olan ve boşküme olmayan her altkümenin en küçük üstsınırı vardır. Tabii $\mathbb{R}$'yi henüz tanımlamadığımızdan bunu şu an kanıtlayamayız. $\mathbb{R}$'yi tanımladığımızda ilk işimiz bu önemli olguyu kanıtlamak olacak.

Son olarak, eğer $A \subseteq \mathbb{Q}$ ise, kesirli bir sayının $\sup_{\mathbb{Q}} A$ olması için gerek ve yeter koşulları görelim.

Önsav 16.1. *$A \subseteq \mathbb{Q}$ ve $s \in \mathbb{Q}$ ise s'nin A'nın en küçük üstsınırı olması için,*
1. *Her $a \in A$ için, $a \leq s$,*
2. *Her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için, $s - \varepsilon < a$ sıralamasını sağlayan bir $a \in A$ vardır*
koşulları gerek ve yeter koşullardır.

Kanıt: Birinci koşul s'nin A'nın bir üstsınırı olduğunu söylüyor. İkinci koşul da s'den küçük hiçbir sayının A'nın bir üstsınırı olmadığını söylüyor. Demek ki iki koşul birden s'nin A'nın en küçük üstsınırı olduğunu söylüyor. □

Sıralı Cizimler



Gerçel Sayıları Belirleyen Özellikler. Kesirli sayıların iki önemli kusurunu ortaya koyduk. Kitabın bundan sonrasında bu iki kusuru düzelterek gerçel sayıları yaratacağız.

Kesirli sayıların birinci kusuru $\sqrt{2}$, π gibi sayıların olmamasıydı. Bu sayıların yerleri boş, oralarda delikler var... Gene de bu olmayan sayılara kesirli sayılarla istediğimiz kadar yaklaşabiliriz, o olmayan sayıya ulaşmak için can atan kesirli sayı dizileri bulabiliriz. Bunu gördük.

Kesirli sayıların ikinci kusuru ise üstten sınırlı ve boş olmayan her kesirli sayı kümesinin bir en küçük üstsınırının olmamasıydı. Bazı kesirli sayı kümelerinin en küçük üstsınırları vardır, ama hepsinin yoktur. Geçen bölümde bunlara örnekler gördük.

Bu iki kusurdan birini giderirsek, diğeri de kendiliğinden giderilmiş olur.

Birinci kusuru gidermek için bir yere yakınsamaya can atan diziler kullanılır. Bu tür dizilere ***temel diziler*** adı verilir. Matematiksel tanımları daha sonraki bölümlerde göreceğiz.

İkinci kusuru gidermek için de ***Dedekind kesitleri*** denilen kesirli sayı kümeleri kullanılır.

İki yöntem de birbirine matematiksel anlamda eşdeğerdir. Bir yöntemle kurulan gerçel sayılar kümesiyle diğer yöntemle kurulan gerçel sayılar kümesi arasında matematiksel olarak hiçbir ayrım yoktur. Bunu da daha sonraki bölümlerden birinde kanıtlayacağız.

Dedekind kesitleri yöntemi temel dizileri kullanan yöntemden çok daha sadedir. Ama temel diziler yöntemi de çok öğreticidir. Biz temel dizileri kullanan yöntemi seçeceğiz. Dedekind kesitlerinden bir başka bölümde sözedeceğiz.

$(\mathbb{Q}, +, \times, \leq, 0, 1)$ yapısı sıralı bir cisimdir. $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0, 1)$ yapısı da sıralı bir cisim olacak, ancak $\mathbb{Q}$'nün yukarıda sözettiğimiz kusurları olmayacak. Bu kusurları olmayan sıralı cisim, "öz itibarıyla biriciktir". Bu da kanıtlanacak.

17. Kesirli Sayı Dizileri

17.1 Diziler

Eğer X bir kümeyse, bir X-dizisi, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den X'e giden bir fonksiyondur ya da - aynı şey - $\prod_{\mathbb{N}} X$ kartezyen çarpımının bir elemanıdır. Ama biz bu kadar biçimsel düşünmeyip, diziyi her matematikçi nasıl algılıyorsa öyle algılayacağız:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

türünden doğal sayılarla endislenmiş (ya da kodlanmış) bir listeye ***dizi*** denir. x_0, x_1, x_2 elemanlarına ***dizinin terimleri*** adı verilir. Terimler belli bir X kümesinden seçilirler. Belli bir aşamada biten dizilere ***sonlu dizi*** denir ama bizim dizilerimiz hiçbir zaman sonlu olmayacaklar, yani bizim dizilerimizde her n doğal sayısı için bir x_n terimi verilmiş olacak. Ama dikkat, gene de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olabilir. Bir dizinin terimleri kesirli sayıysa, diziye ***kesirli sayılar dizisi*** denir. Bu bölümde sadece kesirli sayılar dizilerinden sözedeceğimizden, "kesirli sayılar" ibaresini kaldırıp sadece "dizi" demekle yetineceğiz.

Diziler, $x_0, x_1, x_2, \ldots$ biçiminde gösterildiği gibi daha tıkız bir yazılımla,

$$(x_n)_n$$

olarak da gösterilirler. Örneğin, $\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ dizisi,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

dizisini ifade eder. Aynı diziyi,

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

olarak da gösterebilirdik. Hatta anlaşılması daha kolay olsun diye,

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1,2,3,\ldots} \text{ ya da } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\neq 0}$$

olarak da gösterebiliriz. Kimileyin kendimizi yazının heyecanına kaptırıp yukarıdaki diziyi

$$\left(\frac{1}{n}\right)_n$$

olarak gösterirsek okur bizi bağışlasın lütfen.

Değişik dizi yazılımları matematikte sık sık kullanılır. Örneğin,

$$\left(\frac{1}{p}\right)_{p \text{ asal}}$$

yazılımı,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \cdots$$

dizisi anlamına gelir.

Kolaylık olsun diye bir $(x_n)_n$ dizisini hemen hemen her zaman x olarak kısaltacağız:

$$x = (x_n)_n.$$

Bunun gibi $y = (y_n)_n$ ve $a = (a_n)_n$ yazacağız. Bir x dizisinden sözettiğimizde de, x'in terimlerini x_n olarak yazmaya özen göstermeye çalışacağız.

Tüm terimleri eşit olan bir diziye ***sabit dizi*** adı verilir. Böyle bir dizi, bir $a \in \mathbb{Q}$ sabiti için $(a)_n$ olarak yazılabilir. Bu diziye ***sabit*** a ***dizisi*** denir. Sabit a dizisini $s(a)$ olarak göstereceğiz. Demek ki $s(a)$ dizisinin her terimi a'ya eşit, yani her n doğal sayısı için,

$$s(a)_n = a$$

eşitliği geçerlidir. Sabit 0 ve sabit 1 dizileri özellikle ve genel olarak sabit diziler özel önem arzedecek ileride.

x_n, $(x_n)_n$ dizisinin n'***inci terimi***dir. Ama 1, $(1/n)_n$ dizisinin sıfırıncı terimidir! $(1/p)_{p \text{ asal}}$ dizisinin üçüncü terimi 1/7'dir; ne 1/3'tür ne de 1/5...

n, x_n teriminin ***göstergeci***, ***belirteci*** ya da ***endisidir***.

Kesirli sayılar dizilerinden oluşan kümeye $\mathcal{D}$ adını verelim. Demek ki

$$\mathcal{D} = \text{Fonk}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}.$$

17.2 Dizilerle İşlemler

İki diziyi terim terim toplayabiliriz: $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ ise, $x + y$ dizisini,

$$x + y = (x_n + y_n)_n$$

olarak tanımlayabiliriz. Örneğin,

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} + \left(\frac{1}{p}\right)_{p \text{ asal}}$$

dizisini toplamak için, bu iki dizinin terimlerini,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

ve

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots$$

olarak sırayla yazıp aynı sırayla toplarız ve

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{8}{15}, \frac{11}{28}, \frac{16}{55}, \dots$$

dizisini elde ederiz.

Sadece toplama değil, dizilerle çıkarma ve çarpma da yapabiliriz. Tüm işlemler terim terim yapılır. Terim terim bölme yapabilmek için, bölen dizinin tüm terimleri 0'dan farklı olmalı. Ayrıca sabit 0 dizisi $s(0)$, dizileri toplamanın, sabit 1 dizisi $s(1)$ de dizileri çarpmanın etkisiz elemanıdır.

Kısacası dizi toplama ve çarpması, aynen $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden fonksiyonların noktasal toplama ve çarpmasıdır. Bkz. [SKK].

$\mathcal{D}$ kümesi toplama ve çarpma işlemleri altında ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizileriyle birlikte değişmeli bir halkadır. Yani

$$(\mathcal{D}, +, \times, s(0), s(1))$$

yapısı değişmeli bir halkadır, bir başka deyişle aşağıdaki teorem doğrudur. (Karşılaştırmak için bkz. Teorem 13.9.)

Teorem 17.1. $(\mathcal{D}, +, \times, s(0), s(1))$ *yapısı şu özellikleri sağlar: Her* a, b, $c \in \mathcal{D}$ *için aşağıdaki önermeler doğrudur.*

T1. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
T2. $a + s(0) = s(0) + a = a$.
T3. $a + a' = a' + a = s(0)$ *eşitliğini sağlayan bir* $a' \in \mathcal{D}$ *vardır.*
T4. $a + b = b + a$.
Ç1. $(ab)c = a(bc)$.
Ç2. $as(1) = s(1)a = a$.
Ç4. $ab = ba$.
TÇ1. $s(1) \neq s(0)$.
TÇ2. $a(b + c) = ab + ac$.

Kanıt: Eğer $a = (a_n)_n$ ise T3 maddesindeki $a' = (-a_n)_n$ olmak zorundadır elbette. Bu elemanı $-a$ olarak göstereceğiz (doğal olarak). $s(1)$ dizisi bu halkanın (çarpma işleminin) etkisiz elemanıdır. Bunun ve teoremin diğer maddelerinin kanıtı son derece kolaydır ve okura bırakılmıştır. Örnek olarak çarpmanın toplamaya göre dağıldığını, yani her a, b, $c \in \mathcal{D}$ için,

$$a(b + c) = ab + ac$$

eşitliğini kanıtlayalım. $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n$ ve $c = (c_n)_n$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} a(b+c) &\overset{1}{=} (a_n)_n((b_n)_n + (c_n)_n) \overset{2}{=} (a_n)_n(b_n + c_n)_n \\ &\overset{3}{=} (a_n(b_n + c_n))_n \overset{4}{=} (a_nb_n + a_nc_n)_n \overset{5}{=} (a_nb_n)_n + (a_nc_n)_n \\ &\overset{6}{=} (a_n)_n(b_n)_n + (a_n)_n(c_n)_n \overset{7}{=} ab + ac. \end{aligned}$$

Burada birinci ve yedinci eşitliklerde a, b ve c dizilerinin tanımını yazdık. İkinci ve beşinci eşitliklerde dizilerde toplamanın tanımını kullandık. Üçüncü ve altıncı eşitliklerde dizileri çarpmanın tanımını kullandık. Dördüncü eşitlikte kesirli sayılarda çarpmanın toplamaya göre dağılımını kanıtladık.

İstenen her eşitlik, $\mathbb{Q}$'deki benzer eşitliğe indirgenerek yukarıdaki örnekte olduğu gibi kolaylıkla kanıtlanabilir. □

Her halkanın olduğu gibi $\mathcal{D}$ halkasının da tersinir elemanlarını tanımlayabiliriz: Bir $y \in \mathcal{D}$ dizisi için $xy = s(1)$ eşitliğinin sağlandığı $\mathcal{D}$'nin x dizilerine $\mathcal{D}$'nin ***tersinir elemanları*** denir. D'nin tersinir elemanları kümesi $\mathcal{D}^*$ olarak yazılır. Belli ki eğer bir $x = (x_n)_n$ dizisi tersinirse, x_n terimlerinin her biri 0'dan farklı olmalıdır ve bu dizinin ***tersi*** $(1/x_n)_n$ dizisidir. Bu durumda tahmin edileceği üzere, $x = (x_n)_n$ dizisinin tersi x^{-1} olarak yazılır: $x^{-1} = (1/x_n)_n$. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^* &= \{x \in \mathcal{D} : \text{ bir } y \in \mathcal{D} \text{ dizisi için } xy = s(1)\} \\ &= \{x \in \mathcal{D} : \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dizilerle ilgili bir şeye dikkat etmek gerekir: x ve y dizileri sabit 0 dizisi olmasalar da çarpımları sabit 0 dizisi olabilir. Örneğin,

$$0, 1, 0, 1, 0, \ldots \text{ ile } 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

dizisinin çarpımı sabit 0 dizisi $s(0)$'dır.

17.3 Sınırlı Diziler

Bazı diziler üstten sınırlıdır. Örneğin,

$$0, -1, -2, -3, -4, \ldots$$

dizisi üstten sınırlıdır, terimleri belli bir sayıyı, örneğin 0'ı ya da 1'i aşamaz. Ama bu dizi alttan sınırlı değildir. Bazı diziler hem üstten hem de alttan sınırlıdır. Hem alttan hem de üstten sınırlı dizilere kısaca ***sınırlı diziler*** diyeceğiz. Sabit dizilerin hepsi sınırlı dizilerdir elbet. Dolayısıyla $s(0)$ ve $s(1)$ dizileri de sınırlı dizilerdir. $(1/n)_{n\neq 0}$ dizisi de sınırlıdır. Eğer $x_0 \in [1, 2]$ ise, Altbölüm 16.2'de tanımlanan $(x_n)_n$ dizisinin terimleri de bu aralıktadır (çok

kolay alıştırma), dolayısıyla dizi sınırlıdır. Bir $x = (x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için $(|x_n|)_n$ dizisinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur.

Sınırlı diziler kümesini $\mathcal{B}$ olarak göstereceğiz. $\mathcal{B}$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve bunun kanıtı oldukça kolaydır.

Önsav 17.2. *$\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$'nin bir althalkasıdır, yani toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizileri $\mathcal{B}$'dedir.*

Kanıt: $x = (x_n)_n$ ve $y = (x_n)_n$ iki sınırlı dizi olsun. a ve b kesirli sayıları sırasıyla $\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin birer üstsınırı olsun, yani her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|x_n| \leq a \text{ ve } |y_n| \leq b$$

olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ için,

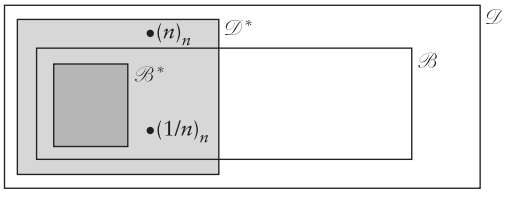
$$\begin{aligned} |x_n + y_n| &\leq |x_n| + |y_n| \leq a + b, \\ |x_n - y_n| &\leq |x_n| + |y_n| \leq a + b, \\ |x_n y_n| &= |x_n||y_n| \leq ab \end{aligned}$$

sıralamaları geçerlidir. Demek ki $x + y$, $x - y$ ve xy dizileri sınırlıdır. □

Bir $y \in \mathcal{B}$ dizisi için $xy = s(1)$ eşitliğinin sağlandığı $x \in \mathcal{B}$ dizilerine $\mathcal{B}$'nin ***tersinir elemanları*** denir ve bu elemanlardan oluşan küme $\mathcal{B}^*$ olarak yazılır. Dikkat: $\mathcal{B}$'nin bir elemanının tersinir olması için bu elemanın $\mathcal{D}$'de tersinir olması yetmez, ayrıca elemanın tersinin de $\mathcal{B}$'de olması gerekir. Yani $\mathcal{B}$'nin bir $x = (x_n)_n$ elemanının tersinir olması için, elbette her $x_n \neq 0$ olmalıdır, ama bu yeterli değildir, ayrıca bir de $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlı olmalıdır. Örneğin $(1/n)_n$ dizisi hem $\mathcal{B}$ halkasında hem de $\mathcal{D}^*$ kümesindedir ama $\mathcal{B}^*$ kümesinde değildir, çünkü bu dizinin ($\mathcal{D}^*$ halkasında) tersi olan $(n)_n$ dizisi sınırlı değildir. Yani

$$\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{D}^*$$

olur ama eşitlik doğru değildir.



$(1/x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için $(x_n)_n$ dizisinin 0'a belli bir uzaklıkta durması, çok yaklaşamaması gerekmektedir. Örneğin,

$$5, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{3}, 5, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, 5, \frac{1}{6}, 5, \ldots$$

dizisinin 0'a çok yaklaştığı anlar olmaktadır. Bu sınırlı dizi $\mathcal{D}$'de tersinirdir ama $\mathcal{B}$'de tersinir değildir, çünkü $\mathcal{D}$'deki tersi olan

$$\frac{1}{5},\ 2,\ \frac{1}{5},\ 3,\ \frac{1}{5},\ 4,\ \frac{1}{5},\ 5,\ \frac{1}{5},\ 6,\ \frac{1}{5},\ \ldots$$

dizisi sınırlı değildir.

$\mathcal{B}$ halkasının tersinir elemanlarını belirlemek güzel bir alıştırmadır. Yapalım:

Önsav 17.3. *Bir $x = (x_n)_n \in \mathcal{B}$ dizisinin $\mathcal{B}$'de tersinir olması için,*
"öyle bir pozitif δ kesirli sayısı vardır ki, her n için $|x_n| \geq \delta$"
koşulu yeter ve gerektir.

Kanıt: Dizi $\mathcal{B}^*$'daysa, $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlıdır. Demek ki bir $B > 0$ sayısı için ve her n için $|1/x_n| \leq B$ koşulu sağlanır ve $|x_n| \geq 1/B$ olur. Diğer yandan: $|x_n| \geq \delta > 0$ ise, her n için $x_n \neq 0$ olur ve $1/x_n$ diye bir kesirli sayı vardır. Koşuldan dolayı

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{\delta}$$

olur. Demek ki $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlı. □

Bu önsavdaki koşulu sağlayan dizilere 0'***dan uzak duran*** diziler diyelim. Yani $\mathcal{B}$'nin tersinir elemanları, $\mathcal{B}$'nin 0'dan uzak duran elemanlarıdır.

17.4 Zamanla Sabitleşen Diziler

Sabit diziler toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdırlar elbet: İki sabit dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da sabit dizidir, ayrıca çarpmanın etkisiz elemanı olan sabit 1 dizisi $s(1)$ de sabit bir dizidir, matematiksel söylemle sabit diziler kümesi $\mathcal{D}$ halkasının bir "althalkası"dır, hatta sabit diziler halkası $\mathbb{Q}$'ya çok çok benzeyen bir halkadır, hem küme olarak hem de işlemleriyle. Örneğin sabit a dizisiyle sabit b dizisinin toplamı sabit $a + b$ dizisidir, yani

$$s(a) + s(b) = s(a + b)$$

olur. Benzer eşitlikler çıkarma ve çarpma için de geçerlidir. Buna matematikte, $\mathbb{Q}$ halkasıyla sabit diziler halkası ***eşyapısal halkalar***dır denir. Eğer sabit diziler halkasını $\mathcal{S}$ olarak gösterirsek,

$$s : \mathbb{Q} \to \mathcal{S}$$

fonksiyonu iki halka arasında bir "eşyapı eşlemesi" ya da "izomorfi"dir, yani toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir eşlemedir ve birinin etkisiz elemanını

diğerinin etkisiz elemanına götürür. (Bu fonksiyon bir a sayısını sabit a dizisi olan $s(a)$'ya gönderir ve bu iki halka arasındaki yegâne eşyapı eşlemesidir. Neden?)

Bir de ***zamanla sabitleşen diziler*** vardır. Bu diziler ilk trilyon terimde sabit olmayabilirler ama bir zaman sonra sabitleşip tüm terimleri birbirine eşit olurlar. Yani bir $(x_n)_n$ dizisinin zamanla sabitleşen dizi olması için, öyle bir N olmalı ki, her n, $m > N$ için, $x_n = x_m$ olmalıdır.

Her sabit dizi zamanla sabitleşen dizidir elbette. Zamanla sabitleşen diziler de toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır. Bunu okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırmalar

17.1. $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ iki dizi olsun. Eğer belli N, $M \in \mathbb{N}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{N+k} = y_{M+k}$$

oluyorsa, o zaman x ve y'nin ***ortak kuyrukları*** olduklarını söyleyelim. Örneğin,

$$3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \text{ dizisiyle } 7, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

dizisinin ortak kuyrukları vardır (örneğin 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, ... kuyruğu).
$\mathcal{D}$ üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini şöyle tanımlayalım:

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \text{ ve } y\text{'nin ortak kuyrukları var.}$$

Bunun bir denklik ilişkisi olduğu bariz olmalı. $[x]$, x dizisinin denklik sınıfını simgelesin.

$$[x] \pm [y] = [x \pm y] \text{ ve } [x][y] = [xy]$$

formüllerinin $\mathcal{D}/\equiv$ kümesi üzerine $+$, $-$ ve $\times$ işlemlerini tanımladığını kanıtlayın, yani, örneğin, $[x] = [x']$ ve $[y] = [y']$ ise, $[x \pm y] = [x' \pm y']$ eşitliğini kanıtlayın. Ayrıca $[s(1)]$ çarpmanın etkisiz elemanıdır. Yani $\mathcal{D}/\equiv$ kümesi tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır.

17.2. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin sonlu olduğu $(x_n)_n$ dizilerinden oluşan kümenin $\mathcal{B}$'nin bir althalkası olduğunu kanıtlayın.

17.5 Yakınsak Diziler

17.5.1 Yakınsaklık

Geçmişte $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını fısıldadık ama kanıtlamadık. Kanıtlayamazdık da, çünkü yakınsamak kavramını henüz tanımlamamıştık. Bu bölümde matematikte çok önemli olan yakınsamak kavramını son derece dikkatli tanımlayacağız, en azından kesirli sayılardaki yakınsaklık kavramını.

Bir dizinin bir sayıya yakınsaması demek, dizinin terimlerinin belli bir göstergeçten, yani bir zaman sonra, yani belli bir terimden sonra o sayıya çok çok ama çok çok yakın olması demektir. Dizinin terimleri hiçbir zaman o

sayıya eşit olmayabilir, ama o sayıya dizinin terimleriyle **dilediğimiz kadar** yaklaşabilmeliyiz ve bu yakınlık belli bir göstergeçten sonra **hep**, yani belli bir sayıdan büyük **her** göstergeç için geçerli olmalı...

Notlar ve Örnekler

17.3. $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsaması gerektiğini çok büyük bir n sayısı alarak tahmin edebiliriz. Örneğin, $n = 999$ alırsak,

$$\frac{n}{n+1} = 0{,}999$$

buluruz; $n = 99.999$ alırsak,

$$\frac{n}{n+1} = 0{,}99999$$

buluruz; n büyüdükçe dizinin terimleri daha çok 1'e yaklaşırlar. Aslında bu dizinin terimleri 2'ye de yaklaşıyorlar, ama 1'e yaklaşmaktan da öte, 1'e yaslanıyorlar, sokuluyorlar, neredeyse 1'in içine girecekler.

Matematiksel tanımı daha sonraya bırakarak, sanki tanımı biliyormuş gibi $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını gösterelim.

Herhangi bir pozitif kesirli sayı alalım. ε (epsilon) diyelim bu sayıya. ε'u çok küçük bir sayı olarak düşünün. Zaten matematikte ε, genellikle, çok çok küçük ama gene de pozitif bir sayı anlamına gelir; aynen x'in bilinmeyen, n'nin tamsayı, p'nin asal sayı anlamına kullanıldığı gibi.

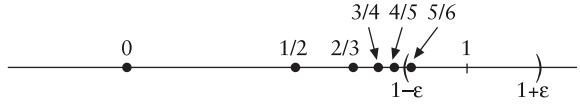
Evet... Çok çok küçük bir ε pozitif kesirli sayısı verilmiş. Öyle bir N doğal sayısı bulacağız ki, eğer $n > N$ ise, o zaman dizinin $n/(n+1)$ teriminin 1'e olan uzaklığı en fazla bu ε kadar olacak, yani her $n > N$ doğal sayısı için,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

ya da

$$\frac{n}{n+1} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

olacak. (İki koşul birbirine denktir elbette.)



Demek ki rasgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı verilmiş ve biz yukarıdaki koşulu sağlayan bir N doğal sayısı arıyoruz.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

koşulunun doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışacağız.

Örneğin $\varepsilon = 0{,}01$ ise ve n'yi 3 alırsak yukarıdaki sıralama sağlanmaz. n'yi 4, 5, 6 alırsak da sağlanmaz. $n = 99$'da tam eşitlik bulunur. Ama $n > 99$ ise sıralama sağlanır.

Eğer $|n/(n+1) - 1| < \varepsilon$ sıralamasının sol tarafında paydaları eşitleyip sadeleştirirsek, koşul,

$$\left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon.$$

hâline ya da

$$1 < \varepsilon(n+1).$$

hâline gelir. Şimdi N'yi,

$$1 < \varepsilon N.$$

sıralamasını sağlayan herhangi bir N doğal sayısı olarak seçelim. $\mathbb{Q}$, Arşimet özelliğini sağladığından (Teorem 14.11) $1 < \varepsilon N$ sıralamasını sağlayan bir N doğal sayısı vardır. N'yi bulduk. Son bir kez kontrol edelim: Eğer $n > N$ ise, o zaman

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Demek ki bu N gerçekten istediğimizi veriyor.

Şimdi bir dizinin bir sayıya yakınsamasının ne demek olduğunu matematiksel olarak tanımlayalım.

Tanım 17.4. *$(x_n)_n$ bir kesirli sayı dizisi olsun. $a \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer her pozitif ε kesirli sayısı için,*

$$(*) \qquad n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

*önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya **yakınsar** ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin **limitidir** denir. Limiti olan dizilere **yakınsak dizi** denir. Yakınsak olmayan dizilere de **ıraksak** denir.*

Aslında x_n ve a, kesirli sayılar olduklarından sadece "yakınsar" yerine "kesirli sayılarda yakınsar" dememiz gerekirdi, ama bu sayımızda hep bu kavramı kullanacağımızdan bu nitelemeye ihtiyacımız olmayacak.

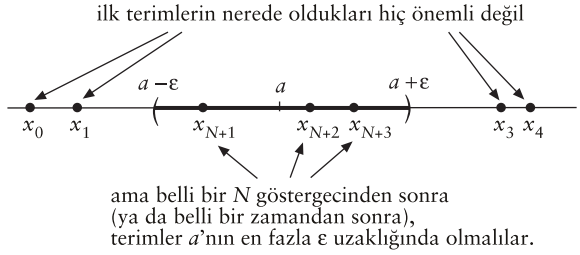
Tanıma göre, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için öyle bir N bulmalıyız ki, her $n > N$ doğal sayısı için

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

önermesi doğru olsun. Bir başka deyişle, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu olmalı (ki bir zaman sonra **hep** $|x_n - a| < \varepsilon$ olsun).

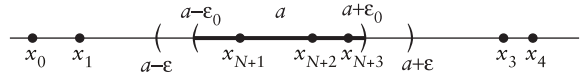


$|x_n - a| < \varepsilon$ önermesiyle $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ koşulunun aynı anlama geldiğini okura anımsatırım.

Örneklere geçmeden önce bu önemli tanım üzerine biraz kafa yoralım. Bu tanımı özümsemek çok önemlidir. Okur, tanımın, sezgileriyle algıladığı "yakınsama"nın anlamını matematiksel olarak anladığına ikna olmalıdır, dolayısıyla aşağıda yazılanları laf ebeliği olarak nitelemeyip dikkatle okumalıdır.

17.5.2 Tanımın Tartışması

Eğer belli bir $\varepsilon_0 > 0$ için $(*)$ önermesini doğrulayan bir N sayısı bulmuşsak, bu ε_0'dan büyük ε'lar için de $(*)$ önermesi aynı N ile doğrudur. Örneğin, $\varepsilon_0 = 0{,}001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, ε_0'dan daha büyük olan $\varepsilon = 0{,}003$ için de $N = 10.000$ yeter. Dolayısıyla marifet $(*)$ önermesini küçük ε'lar için doğrulamaktır.



Eğer ε_0 için N yetiyorsa, ε_0'dan büyük bir ε için de N yeter.

Yani buradaki ε çok çok küçük (ama gene de pozitif) bir kesirli sayı olarak algılanmalıdır.

Tanımdaki N sayısı, ε'a göre değişir: ε küçüldükçe N'yi daha büyük almak zorunda kalabiliriz. Yani ε ne kadar küçükse, x_n terimlerinin $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığına düşmesi zorlaşır ve gecikebilir. Örneğin, $\varepsilon_0 = 0{,}001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, $\varepsilon_1 = 0{,}00001$ için artık $N = 10.000$ yetmeyebilir, N'yi daha büyük, örneğin 100.000 almak gerekebilir.

N'nin ε'a bağımlı olduğunu görsel olarak göstermek için, kimileyin N yerine N_ε yazılır.

Eğer bir ε için, (*) önermesini sağlayan bir N_ε doğal sayısı bulunmuşsa, tabii ki bu N_ε sayısından büyük N'ler de (*) önermesini sağlarlar.

Bir dizinin yakınsak olması dizinin ilk terimlerinden bağımsız bir özelliktir, örneğin ilk 1 milyar terimin kaç olduğu dizinin yakınsaklığını zerre kadar ilgilendirmez. Dizinin yakınsaklığı, dizinin sadece kuyruğuyla ilgili bir özelliktir.

Dikkat: Bir dizinin a'ya yakınsaması için, amaç, verilmiş her $\varepsilon > 0$ için (*) önermesini sağlayan en küçük N doğal sayısını bulmak değildir. Böyle bir en küçük N doğal sayısı vardır elbette ama çoğunlukla bulması ya da ifade etmesi çok zordur. Amaç sadece (*) önermesini sağlayan bir N'nin olduğunu bulmaktır. Bu önemli. Bir dizinin bir sayıya yakınsadığını kanıtlamak işte bu yüzden zordur. ε verildiğinde, (*) önermesini doğrulayan tek bir N doğal sayısı olsaydı (rüyada mesela!), eminim kanıtlar çok daha kolay olurdu. Ama maalesef N'yi seçmekte bayağı bir özgürlüğümüz var. İşte bu özgürlüktür çoğu zaman matematiği zorlaştıran, yaratıcılık gerektiren ve heyecanlı kılan.

Önemli bir nokta daha: Tanımda $n > N$ yerine $n \geq N$ ve $|x_n - a| < \varepsilon$ yerine $|x_n - a| \leq \varepsilon$ veya $|x_n - a| < \varepsilon/2$ de yazabilirdik, kavram değişmezdi. Bu, belki küçük bir ayrıntıdır, ama okurun neden böyle olduğunu anlamasında çok yarar vardır. Gerekirse saatlerini versin bu ince noktaya, değer çünkü.

Birçok yakınsama örneği vereceğiz birazdan. Ama şimdi bir yakınsama kanıtının nasıl yapılacağını görelim.

Diyelim $(x_n)_n$ kesirli sayı dizisinin a kesirli sayısına yakınsadığını göstermek istiyorsunuz. Demek ki her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için bir şey kanıtlamanız

gerekiyor. O zaman hemen rastgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçin. Yani kanıtınız,

$$\varepsilon > 0 \textit{ herhangi bir kesirli sayı olsun}$$

cümlesiyle başlamalıdır. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

koşulunun sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacaksınız. N'yi kafadan atarak hemen bulmaya çalışmayın, genellikle başaramazsınız.

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

koşulunun doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmak için $|x_n - a|$ ifadesiyle oynamalısınız. Örneklerle her şey daha açık olacak.

17.5.3 Limitin Biricikliği

Eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

yazılır. İnce bir ayrıntı: Buradaki ∞ simgesinin tek başına anlamı yoktur. Burada anlamı olan ve bir anlam verilen,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ifadesinin tümü birdendir ve bu, "n sonsuza giderken x_n'nin limiti vardır ve bu limit a'dır" ya da "n sonsuza giderken x_n dizisi a'ya gider" diye okunur.

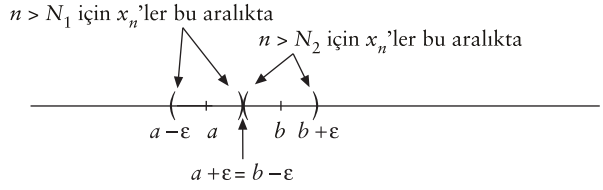
Bir de "$\lim_{n\to\infty} x_n$" ifadesine bir anlam verdik, bu "$(x_n)_n$ dizisinin limiti" anlamına gelir. Ancak $\lim_{n\to\infty} x_n$ ifadesini gönül rahatlığıyla kullanabilmemiz için bir dizinin en fazla **bir** sayıya yakınsadığını kanıtlamamız gerekmektedir:

Önsav 17.5. *Bir dizi en fazla bir sayıya yakınsayabilir.*

Kanıt: Hem a hem de b kesirli sayılarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, eğer $a \neq b$ ise, $(x_n)_n$ dizisinin terimlerinin hem a'ya hem de b'ye aynı zamanda çok çok yakın olamayacağını kullanacağız elbette.

Aşağıdaki resimden izleyelim. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım.

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$$



Ve can alıcı soru: $n > \max\{N_1, N_2\}$ için x_n nerede?

olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

sıralaması doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \varepsilon$$

sıralaması doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayısı olsun, mesela $N_1 + N_2 + 1$ olsun, ya da $\max\{N_1, N_2\} + 1$ olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &= |a - x_n| + |b - x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|, \end{aligned}$$

yani $|a - b| < |a - b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir sayı kendinden küçük olamaz! □

Yukarıdaki önsavın izniyle, eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman a'ya $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti*** adı verilir ve daha önce dediğimiz gibi bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olarak gösterilir.

Önsav 17.6. *Sabit a dizisi a'ya yakınsar. Daha genel olarak, zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği sayıya yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ dizisi zamanla sabitleşen bir dizi olsun. Yani belli bir göstergeçten sonra, diyelim M göstergecinden sonra hep a olsun: Eğer $n > M$ ise $x_n = a$. Bu dizinin a'ya yakınsadığını göstereceğiz. Rastgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçelim. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

sıralamasının sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacağız. Ama N'yi M almak yeterli. Nitekim, eğer $n > M$ olursa,

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

olur. □

Arşimet Özelliği,

$$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

eşitliğinin kanıtının özünü oluşturur. Nitekim, eğer $\varepsilon > 0$ rasgele bir kesirli sayıysa, N doğal sayısı $1 \leq N\varepsilon$ koşulunu sağlayacak biçimde seçilsin. Şimdi, her $n > N$ göstergeci için,

$$1/n < 1/N \leq \varepsilon$$

olur.

Neredeyse aynı kanıt $\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$ eşitliğini de kanıtlar: Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için, aynen yukarıdaki N'yi seçelim:

$$1/n^2 \leq 1/n < 1/N \leq \varepsilon$$

olur. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} 1/2n = 0$ eşitliği de kanıtlanır.

Notlar ve Örnekler

17.4. Biraz daha zor bir limit alıştırması olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini gösterelim. Eşitliğin doğruluğunu kanıtlamadan önce, eşitliğin neden olması gerektiğini anlayalım. Pay, $n-3$'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, sondaki -3'ün esamesi bile okunmaz. Bir trilyonerin servetinden 3 lira eksilse ne çıkar ki!.. Bu yüzden $n-3$ yerine n yazabiliriz. Paydaya bakalım şimdi. Payda, n^2+n-5'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, n^2, n'den o kadar büyüktür ki, $n-5$ onun yanında çok küçük kalır. Dolayısıyla, n çok büyük olduğunda n^2+n-5 yerine n^2 alabiliriz. Böylece paya n, paydaya n^2 yazarsak,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Bir Excel tablosu yaparak bu iki sayının birbirine ne kadar yakın olduklarını görebilirsiniz.

17.5. Yukarıda yaptığımız tam bir matematiksel kanıt değil. Şimdilik en azından. Ama daha sonra bu akıl yürütmeyi matematiksel bir kanıt hâline dönüştüreceğiz. Limitin 0 olduğunu şöyle de tahmin edebilirdik.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5}$$

ifadesinin her terimini n^2'ye bölelim.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2}$$

elde ederiz. n çok büyük olduğunda, sağ taraftaki $3/n^2$, $1/n$ ve $5/n^2$ terimleri o kadar küçük sayılardır ki (bunu biraz önce kanıtlamıştık), bu sayılar yerine 0 yazarsak fazla hata yapmamış oluruz! Böylece,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2} \approx \frac{0-0}{1+0-0} = 0$$

elde ederiz.

Bu da şimdilik pek matematiksel değil. (İleride olacak ama.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayalım: Her zamanki gibi pozitif bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçerek başlıyoruz. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > N$ için,

$$\left| \frac{n-3}{n^2+n-5} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

olacak. Yani yukarıdaki önermenin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Soldaki ifadeyle oynayacağız. Soldaki ifadeyi büyüteceğiz ama bunu yaparken, n'yi büyüterek elde edeceğimiz yeni ifadeyi dilediğimiz kadar küçültebileceğimize emin olacağız. (Bu son cümle önemli!) Hesaplara başlıyoruz. Önce n'yi 3'ten büyük alırsak hem pay hem de payda pozitif olur ve mutlak değer işaretinden kurtuluruz:

$$\left| \frac{n-3}{n^2+n-5} - 0 \right| = \frac{n-3}{n^2+n-5}$$

Eğer paydaki $n-3$ yerine n yazarsak daha büyük bir ifade buluruz elbet:

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5}$$

Şimdi sağdaki ifadenin ε'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Sağdaki ifadeyi büyütmeye devam ediyoruz, ama çok az büyüteceğiz.

Eğer n'yi 5'ten büyük alırsak, paydadaki $n-5$ pozitif olur ve o $n-5$'i silersek payda küçüleceğinden ifade büyür:

$$\frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2}.$$

En sağdaki ifade $1/n$'ye eşit. Demek ki n'yi, $1/n$ sayısı ε'dan küçük olacak biçimde seçmek yeterli. Bunun da Arşimet Özelliği sayesinde mümkün olduğunu biliyoruz (Teorem 14.11). Şimdi dört satırlık kanıtımızı yazabiliriz:

$\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $N > 5$ sayısı $1 < N\varepsilon$ koşulunu sağlasın. Şimdi, her $n > N$ için,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Alıştırmalar

17.6. $x_n = (-1)^n$ formülüyle tanımlanan $(x_n)_n$ dizisinin limitinin olamayacağını kanıtlayın.

17.7. Eğer bir dizi yakınsaksa, bu diziyle aynı kuyruğa (bkz. Altbölüm 17.4 Alıştırmalar) sahip dizilerin de yakınsak olduğunu ve limitlerinin hep aynı olduğunu kanıtlayın.

17.8. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

17.9. $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-3}{n^2+n-5})^n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

17.10. $b_0 = 1$ ve

$$b_{n+1} = \frac{3b_n + 4}{2b_n + 3}$$

formülüyle tanımlanmış $(b_n)_n$ dizisinin karesinin 2'ye yakınsadığını kanıtlayın. (Bkz. Altbölüm 16.2.)

17.11. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n-3}{3n^2+2n-52} = \frac{4}{3}$ eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayın.

17.6 Yakınsak Dizilerle Dört İşlem ve Sıralama

Yakınsak diziler kümesini $\mathcal{Y}$ ile gösterelim. Bu bölümde $\mathcal{Y}$ kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve kimi zaman da bölme işlemlerini yapabileceğimizi göstereceğiz. Önce toplamadan başlayalım. Dizilerimiz hep kesirli sayı dizileri olacak.

17.6.1 Yakınsak Diziler ve Toplama

İlk teoremimiz, limit alma işleminin dizileri toplama işlemine dağıldığını söyleyecek: $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$.

Teorem 17.7. *$\mathcal{Y}$ kümesi toplama altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin toplamı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_n + y_n)_n$ dizisi $a + b$ sayısına yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

olur.

Kanıt: Önce kanıtın felsefesinden sözedelim, bu önemli. Yani tam matematiksel kanıt yapmadan kanıtın anafikrini anlatmaya çalışalım.

Kanıtın uzunluğuna aldanmasın okur, kanıt kısacıktır. Ama uzun uzun anlatıyoruz...

Varsayıma göre $(x_n)_n$ dizisini a'ya dilediğimiz kadar yaklaştırabiliyoruz. Gene varsayıma göre, $(y_n)_n$ dizisini b'ye dilediğimiz kadar yaklaştırabiliyoruz. Dolayısıyla $(x_n + y_n)_n$ dizisini $a + b$'ye dilediğimiz kadar yaklaştırabilmemiz gerekir...



Bir daha deneyelim: Varsayıma göre, yeterince büyük n'ler için, x_n terimi a'ya çok yakın olabiliyor. Gene varsayıma göre, yeterince büyük n'ler için, y_n terimi b'ye çok yakın olabiliyor. Dolayısıyla, yeterince büyük n'ler için, $x_n + y_n$ terimi $a + b$'ye çok yakın olabilmeli...

Yukarıda söylenenlerin okuru aydınlattığını umarak matematiksel kanıta geçelim. Kanıtımız her zamanki gibi başlayacak: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun...

$(x_n + y_n)_n$ dizisinin $a+b$ sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

olsun. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek, $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukarıdaki önermeye bir biçimde

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Tekrar:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

önermesinin sağlanması için n'nin ne kadar büyük seçilmesi gerektiğini bulacağız. Her zaman olduğu gibi sol taraftaki ifadeyle oynayacağız. O ifadeden birazcık daha büyük bir ifade bulacağız. Bulduğumuz bu büyük ifadeyi (1) Varsayımlarımızı kullanacağımız biçimde, (2) n'yi yeterince büyük seçerek dilediğimiz kadar küçülteceğimizden emin olacağımız biçimde seçeceğiz. Başlayalım:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|.$$

Şimdi, $|(x_n + y_n) - (a + b)|$ ifadesi yerine,

$$|x_n - a| + |y_n - b|$$

ifadesini ε'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Eğer,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

ifadelerinin her birini $\varepsilon/2$'den küçük yaparsak, toplamları ε'dan küçük olur. Ama bunu yapmasını zaten biliyoruz, çünkü $(x_n)_n$ dizisinin limiti a, $(y_n)_n$ dizisinin limiti b...

$(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir N_2 doğal sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Biz her iki önermenin birden doğru olmasını istediğimizden, n'yi hem N_1'den hem de N_2'den büyük almalıyız. Dolayısıyla, eğer $N = \max\{N_1, N_2\}$ ise, $n > N$ olduğunda, n, hem N_1'den hem de N_2'den büyük olur ve yukarıdaki iki önermenin ikisi birden doğru olur. Şimdi Teorem 17.7'nin birkaç satırlık kanıtı yazabiliriz:

Teorem 17.7'nın Kanıtı: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Aynı kanıt yöntemini toplama yerine çıkarma işlemine de uygulayabiliriz.

17.6.2 Yakınsak Diziler ve Çıkarma

Teorem 17.8. *$\mathcal{Y}$ kümesi çıkarma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin farkı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_n - y_n)_n$ dizisi $a - b$ sayısına yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (a - b)| &= |(x_n - a) + (b - y_n)| \leq |x_n - a| + |b - y_n| \\ &= |x_n - a| + |y_n - b| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Aynı önerme, ama bu sefer değişik bir kanıtlama yöntemiyle çarpma için de geçerli.

17.6.3 Yakınsak Diziler ve Çarpma

Teorem 17.9. *$\mathcal{Y}$ kümesi çarpma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin çarpımı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_n y_n)_n$ dizisi ab sayısına yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

olur.

Kanıt: $(x_n y_n)_n$ dizisinin ab sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, herhangi bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçildiğinde, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_n y_n - ab| < \varepsilon$$

olsun. Bir başka deyişle, $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$ önermesinin geçerli olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışmalıyız. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukarıdaki önermeye bir biçimde $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Her zamanki gibi sol taraftaki $|x_n y_n - ab|$ ifadesiyle oynamalıyız. Bu ifadeyi hafifçe büyüterek, işin içine

$$|x_n - a|$$

ve $|y_n - b|$ ifadelerini sokmalıyız. Bunu yapmak için matematikte sık sık kullanılan ufak bir hile vardır. İşte o hile:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\le |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|. \end{aligned}$$

Şimdi en sağdaki $|x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|$ toplamını ε'dan küçük yapmalıyız. Ama bu mümkün müdür? Her iki

$$|x_n||y_n - b| \text{ ve } |x_n - a||b|$$

terimini de $\varepsilon/2$'den küçük yapabilirsek, o zaman bunların toplamları da ε sayısından küçük olur ve kanıtımızı başarıyla tamamlamış oluruz.

Önce görece kolay olan $|x_n - a||b|$ terimini (n'yi yeterince büyük yaparak) $\varepsilon/2$'den küçük yapalım. Bunun için, $|x_n - a|$ terimini $\varepsilon/2|b|$'den küçük yapmak yeterli. Ama dikkat, eğer $|b| = 0$ ise, $|b|$'ye bölemeyiz... Hiç önemli değil! Bu sorunun çözümü gayet basit:

$$|x_n - a||b| < |x_n - a|(1 + |b|)$$

olduğundan, $|x_n - a|$ terimini

$$\frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$$

den küçük yapmak yeterli! Bunu yapabilir miyiz? Evet! Bu sayı 0'dan büyük kesirli bir sayı olduğundan, öyle bir N_1 sayısı vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}$$

önermesi doğrudur.

Şimdi $|x_n||y_n - b|$ terimini de $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalışmalıyız.

$$|y_n - b|$$

terimini istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu yetmez. Çünkü bu terimin yanına yapışmış bir de $|x_n|$ terimi var. Eğer $|x_n|$ çok artarsa, o zaman bu terimi, küçüldüğünü bildiğimiz $|y_n - b|$ terimiyle çarptığımızda, çarpımın çok küçüleceğinden emin olamayız. Örneğin, $|y_n - b|$ terimi $1/n$ gibi küçülebilir ama $|x_n|$ terimi n gibi artabilir. O zaman da çarpımları olan

$$|x_n||y_n - b|$$

terimi n büyükken 1 civarında dolanır durur ve hiçbir zaman $\varepsilon/2$ kadar küçülemez. (ε'un küçük bir sayı olduğunu unutmayın.)

Neyse ki böyle bir sorunla karşılaşmayız, çünkü birazdan kanıtlayacağımız üzere, $(x_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır (Teorem 17.10) ve dizinin her $|x_n|$ terimi belli bir B kesirli sayısından küçüktür. (Bu B sayısı elbette 0'dan büyük olmalıdır.) Demek ki (eğer Teorem 17.10'u doğru kabul edersek),

$$|x_n||y_n - b| < B|y_n - b|$$

önermesi geçerlidir. Şimdi en sağdaki $B|y_n - b|$ ifadesini $\varepsilon/2$'dan küçük yapmak yeterlidir. $B|y_n - b|$ ifadesini $\varepsilon/2$'den küçük yapmak için ise de, $|y_n - b|$ ifadesini

$$\frac{\varepsilon}{2B}$$

den küçük yapmak yeterlidir. Bunu başarabiliriz! Ne de olsa bu sayı pozitif bir kesirli sayıdır ve $|y_n - b|$ sayısı yeterince büyük n'ler için bu sayının altına iner: Öyle bir N_2 sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2B}$$

önermesi doğrudur. Demek ki,

$$|x_n|.|y_n - b| < B|y_n - b| < B\frac{\varepsilon}{2B} = \frac{\varepsilon}{2}$$

önermesi geçerlidir.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

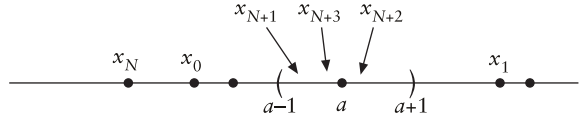
$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \le |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| < B|y_n - b| + |x_n - a||b| \\ &< B|y_n - b| + |x_n - a|(1 + |b|) < B\frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}(1 + |b|) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Aşağıda tamamlayacağımız ufak bir eksiklik dışında kanıtımız bitmiştir. □

Teorem 17.10. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Yani $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}$ olur.*

Kanıt: Kanıtın anafikri çok basit: Eğer bir dizi a'ya yakınsıyorsa, bu dizinin terimleri a'dan pek uzakta olamazlar... Şimdi teoremi matematiksel olarak kanıtlayalım.

Bir a sayısına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. Yakınsamanın tanımında ε'u 1'e eşit alalım. 1, 0'dan büyük bir kesirli sayı olduğundan buna hakkımız var. O zaman dizinin terimleri belli bir N göstergecinden sonra $(a-1, a+1)$ aralığına düşer, yani her $n > N$ için, $x_n \in (a-1, a+1)$ olur. Geriye sonlu sayıda x_0, x_1, ..., x_N terimi kalır. Bunlar da sınırlı bir aralığa sığarlar elbette.



Daha biçimsel olalım ve

$$\begin{aligned}A &= \min\{x_0, x_1, \ldots, x_N, a\} - 1, \\ B &= \max\{x_0, x_1, \ldots, x_N, a\} + 1\end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. O zaman her x_n terimi (A, B) aralığına düşer. Demek ki dizi sınırlıdır. □

Böylece Teorem 17.9'in de kanıtı tamamlandı.

İlk üç teorem, $s(1) \in \mathcal{Y}$ olgusuyla birlikte ($s(1)$, sabit 1 dizisidir ve $\mathcal{Y}$'nin çarpma işleminin etkisiz elemanıdır), yakınsak diziler kümesi $\mathcal{Y}$'nin bir halka olduğunu söylüyor, hatta bu üç teorem $\mathcal{Y}$'nin, tüm diziler halkası $\mathcal{D}$'nin bir althalkası olduğunu söylüyor. Teorem 17.10 da, ayrıca, $\mathcal{Y}$'nin sınırlı diziler halkası $\mathcal{B}$'nin bir althalkası olduğunu söylüyor. Althalkalık $\le$ işaretiyle gösterilir. Demek ki,

$$\mathcal{Y} \le \mathcal{B} \le \mathcal{D}$$

ilişkilerini kanıtladık.

17.6.4 Yakınsak Diziler ve Mutlak Değer

Önsav 17.11. *Eğer $x = (x_n)_n$ yakınsak bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$$

olur.

Kanıt: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ eşitliğini kanıtlayacağız. Her zaman olduğu gibi bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçelim. Her $n > N$ için,

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon$$

önermesinin geçerli olduğu bir N doğal sayısı (göstergeci) bulacağız. Bunun için Önsav 14.12'yi kullanacağız:

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

Demek ki $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ önermesini elde etmek için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

önermesini elde etmek yeterli. Nitekim,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olduğundan, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

önermesi geçerlidir. Demek ki, $n > N$ için (Önsav 14.12),

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon.$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

17.12. Şu önermeyi kanıtlayın: $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $a \in \mathbb{Q}$ ise $(ax_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = a \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

17.13. Eğer $(|x_n|)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(x_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

17.14. $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $k \in \mathbb{N}$ ise $(x_n^k)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k$$

eşitliğini kanıtlayın.

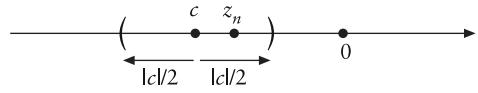
17.15. $f(X)$, katsayıları kesirli sayı olan bir polinom olsun. $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa $f(x_n))_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$ eşitliğini kanıtlayın.

17.6.5 Yakınsak Diziler ve Sıralama

Yakınsak dizilerle bölme arasındaki ilişkiyi irdelemeden önce yakınsak dizilerle sıralama arasındaki ilişkiyi irdeleyelim.

Önsav 17.12. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra $x_n \geq y_n$ sıralaması hep sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olur.*

Kanıt: Eğer $z_n = x_n - y_n$ tanımını yaparsak, Teorem 17.8'e göre, "$(z_n)_n$ *dizisi c*'ye *yakınsasın. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep $z_n \geq 0$ sıralaması sağlanıyorsa, o zaman $c \geq 0$ olur*" önermesini kanıtlamanın yeterli olduğunu görürüz. Tam tersine, c'nin negatif olduğunu varsayalım. Demek ki $c = -|c|$.



Varsayıma göre öyle bir N_0 vardır ki her $n > N_0$ için,

$$z_n \geq 0$$

olur. Ayrıca, $(z_n)_n$ dizisi c'ye yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki her $n > N_1$ için,

$$|z_n - c| \leq \frac{|c|}{2}$$

olur. Bunu görmek için, yakınsamanın tanımında $\varepsilon = |c|/2 > 0$ almak yeterli. Demek ki,

$$\frac{-|c|}{2} \leq z_n - c \leq \frac{|c|}{2}.$$

Dolayısıyla $z_n \leq c + |c|/2$. Şimdi n, hem N_0'dan hem de N_1'den büyük bir göstergeç olsun. O zaman,

$$z_n \leq c + \frac{|c|}{2} = -|c| + \frac{|c|}{2} = \frac{-|c|}{2} < 0,$$

çelişki. □

Alıştırmalar

17.16. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için $x_n \geq y_n$ sıralaması sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olduğunu kanıtlayın.

17.17. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri a'ya yakınsasınlar. Eğer belli bir N'den büyük n göstergeçleri için $x_n \leq z_n \geq y_n$ sıralaması sağlanıyorsa, o zaman $(z_n)_n$ dizisinin yakınsadığını ve limitinin a olduğunu kanıtlayın. (Sandviç Teoremi)

17.6.6 Sıfıra Yakınsayan Diziler

Bölmeye geçmeden önce bir de 0'a yakınsayan dizilere bakalım. Bu dizilerin kümesine $\mathcal{Y}_0$ diyelim. $\mathcal{Y}_0$ kümesi de toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalıdır ama çarpmanın etkisiz elemanı olan $s(1)$ dizisini içermediğinden (bizim bu terime verdiğimiz anlamda) halka değildir. Bu dezavantajına karşın $\mathcal{Y}_0$ kümesinin bir üstünlüğü vardır: $\mathcal{Y}_0$ kümesi $\mathcal{B}$ kümesini çarpmayla yutar!

Önsav 17.13. *0'a yakınsayan bir diziyle sınırlı bir dizinin çarpımı 0'a yakınsar. Yani* $\mathcal{B}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$. *(Aslında eşitlik geçerli tabii.)*

Kanıt: $(x_n)_n$, 0'a yakınsayan, $(y_n)_n$ de sınırlı bir dizi olsun. $(x_n y_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayacağız. Kanıtımıza, artık alışık olduğumuz sözlerle başlayalım: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir N bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_n y_n| < \varepsilon$$

olsun, yani

$$|x_n||y_n| < \varepsilon$$

olsun. $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsadığından, yeterince büyük n göstergeçleri için $|x_n|$ sayısının çok küçüleceğini biliyoruz. Ama araya bir de $|y_n|$ girmiş. Eğer $|y_n|$ çok büyürse, $|x_n||y_n|$ sayısını küçültmekte zorlanabiliriz. Neyse ki $|y_n|$'ler çok büyüyemezler, çünkü varsayıma göre $(y_n)_n$ dizisi sınırlı. Bu olguyu kullanmalıyız kanıtımızda.

B, $|y_n|$'lerin bir üstsınırı olsun: Her n için,

$$|y_n| < B.$$

B'nin 0 olamayacağına dikkatinizi çekerim. Şimdi, her n için,

$$|x_n||y_n| \leq B|x_n|.$$

Dolayısıyla, $B|x_n|$'yi ε'dan küçük yapmak yeterli, o zaman $|x_n||y_n|$ otomatik olarak ε'dan küçük olur; bunun için de $|x_n|$'yi ε/B sayısından küçük yapmak yeterli ve bunu da başarabiliriz: $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsayan bir dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, eğer $n > N$ ise, $|x_n| < \varepsilon/B$ dir. Dolayısıyla, her $n > N$ için,

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < B|x_n| < \frac{B\varepsilon}{B} = \varepsilon.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Bir R halkasının, çıkarma altında kapalı, boş olmayan ve $RI \subseteq I$ ve $IR \subseteq I$ içindeliklerini sağlayan I altkümelerine R'nin ***ideali*** adı verilir ve bu durum $I \lhd R$ olarak gösterilir. Demek ki $\mathcal{Y}_0 \lhd \mathcal{B}$.

17.6.7 Bölme

Şimdi $\mathcal{Y}$'nin tersinir elemanlarını bulalım. Yani öyle yakınsak dizileri bulalım ki, belki bir başka yakınsak diziyle çarpınca sonuç sabit 1 dizisi, yani $s(1)$ olabilsin. Demek ki belli bir $(y_n)_n$ yakınsak dizisi için,

$$(x_n)_n(y_n)_n = s(1)$$

eşitliğini sağlayan $(x_n)_n$ yakınsak dizilerini arıyoruz. Böyle bir $(y_n)_n$ dizisi varsa $x_n y_n = 1$ olmalı, yani her n için $x_n \neq 0$ ve $y_n = 1/x_n$ olmalı. Sonuç: Her terimi 0'dan farklı olan hangi $(x_n)_n$ yakınsak dizileri için, $(1/x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu bulmalıyız. Cevap aşağıda:

Teorem 17.14. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisinin her terimi 0'dan farklıysa ve dizi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

olur. Ayrıca eğer $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(1/x_n)_n$ dizisi ıraksaktır. Daha simgesel bir ifadeyle

$$\mathcal{Y}^* = \{x = (x_n)_n \in \mathcal{Y} : \text{ her } n \text{ için } x_n \neq 0 \text{ ve } x \notin \mathcal{Y}_0\} = (\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0) \cap \mathcal{D}^*$$

olur.

Kanıt: Eğer $x = (x_n)_n \in \mathcal{Y}^*$ ise, her n için $x_n \neq 0$ olması gerektiği bariz. $y = (y_n)_n \in \mathcal{Y}^*$, x'in tersi olsun. Eğer a ve b sırasıyla x ve y dizilerinin limitiyse, o zaman Teorem 17.9'e göre,

$$1 = \lim s(1) = \lim x_n y_n = \lim x_n \lim y_n = ab,$$

dolayısıyla $b \neq 0$.

Şimdi $x \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0$, "her n için $x_n \neq 0$" koşulunu sağlasın. x'in tersinir olduğunu, yani $(1/x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Eğer $a \neq 0$ sayısı $(x_n)_n$ dizisinin limitiyse, $1/a$ sayısının $(1/x_n)_n$ dizisinin limiti olduğunu göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir N bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

olsun. $|1/x_n - 1/a|$ ifadesiyle oynayarak, bu ifadenin ε'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Oynamaya başlayalım:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|}.$$

Sağdaki ifadenin payını dilediğim kadar küçük yapabilirim, çünkü $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyor, burada bir sorun yok. Paydadaki a sabit bir sayı, bu da sorun yaratmaz. Ama x_n sorun yaratabilir, çünkü eğer x_n çok küçülürse, o zaman ifade çok büyüyebilir ve ifadenin ε'dan küçük olduğunu kanıtlayamayız. Teoremin doğru olması için $|x_n|$'ler belli bir pozitif sayıdan küçük olmamalı. Bu doğrudur ve $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmamasından kaynaklanır ama gene de bir kanıta ihtiyacı vardır. Bir sonraki önsavda bunu kanıtlayacağız.

Bir sonraki önsava göre, öyle bir $\delta > 0$ var ki, her n için, $|x_n| > \delta$ olur. Şimdi yukarıdaki hesabı bir adım daha devam ettirebiliriz:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta}$$

Şimdi en sağdaki ifadenin ε'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulalım. Bu ifadenin ε'dan küçük olması için, $|a - x_n|$, $\varepsilon|a|\delta$'dan küçük olmalı ve $\varepsilon|a|\delta > 0$ olduğundan bunu yapabiliriz: N, her $n > N$ için,

$$|a - x_n| < \varepsilon|a|\delta$$

önermesini sağlayan bir sayı olsun. Şimdi N'den büyük her n için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta} < \frac{\varepsilon|a|\delta}{|a|\delta} = \varepsilon.$$

Bir sonraki önsavı da kanıtlarsak kanıtımız tamamen tamamlanmış olacak. □

Önsav 17.15. i. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisi 0'a yakınsamıyorsa, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ önermesinin sağlandığı bir N doğal sayısı ve bir $\delta > 0$ vardır.*
ii. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisi 0'a yakınsamıyorsa ve her terimi 0'dan farklıysa, her n için, $|x_n| > \delta$ önermesinin sağlandığı bir $\delta > 0$ vardır.*

Kanıt: Önsav 17.11'e göre, $(x_n)_n$ yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alıp $x_n \geq 0$ sıralamasını varsayabiliriz. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. Önsav 17.12'ye ve varsayıma göre $a > 0$ olmalı. Eğer $\varepsilon = a/2$ alırsak, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < a/2$$

önermesini, yani

$$-a/2 < x_n - a < a/2$$

sıralamasını sağlayan bir N'nin olduğunu görürüz. Demek ki, $n > N$ için,

$$a - a/2 < x_n$$

sıralaması sağlanır. Şimdi $\delta = a/2$ alırsak, birinci kısmı kanıtlamış oluruz. İkinci kısma geçelim. Yukarıdaki δ yerine,

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_1|}{2}, \ldots, \frac{|x_N|}{2}, \frac{a}{2}\right\}$$

alalım. Varsayımdan dolayı $\delta > 0$ ve a'nın, N'nin ve δ'nın tanımlarından dolayı, her n için, $|x_n| > \delta$. □

17.6.8 Sıralama

Teorem 17.16 (Sandviç Teoremi)**.** *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \leq y_n \leq z_n$ sıralamalarının belli bir M göstergecinden sonra doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı elemana yakınsıyorsa, $(y_n)_n$ dizisi de bu elemana yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri a'ya yakınsasınlar. $(y_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız, yani $\varepsilon > 0$, herhangi bir pozitif sayıysa, her $n > N$ için,

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

önermesinin doğru olduğu bir N sayısı bulacağız. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

önermesinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için $|y_n - a|$ ifadesiyle oynayacağız. Hesaplarda rahat etmek için $n > M$ alalım. Bu kısıtlama yetmeyecek ama bu sayede, hiç olmazsa,

$$\begin{aligned} |y_n - a| &= |a - x_n + x_n - y_n| \leq |a - x_n| + |x_n - y_n| \\ &= |a - x_n| + (y_n - x_n) \leq |a - x_n| + (z_n - x_n) \\ &\leq |a - x_n| + |z_n - a| + |a - x_n| = 2|a - x_n| + |z_n - a| \end{aligned}$$

sıralamasını elde ederiz. Demek ki en sondaki ifadeyi ε'dan küçük yapmak yeterli. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için

$$|x_n - a| = |a - x_n| < \varepsilon/3$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için

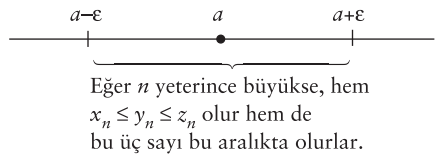
$$|a - z_n| < \varepsilon/3$$

olur. Şimdi $N = \max\{M, N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$|y_n - a| = 2|a - x_n| + |z_n - a| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

elde ederiz.

İkinci Kanıt: Bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. a, $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizilerinin limiti olsun. O zaman büyük n'ler için, hem $a - \varepsilon < x_n$



hem de $z_n < a + \varepsilon$ olur. Demek ki belki biraz daha büyük n'ler için

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

olur. Bu büyük n'ler için $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, yani $|y_n - a| < \varepsilon$ olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

17.7 Yakınsaklık/Iraksaklık Örnekleri

Bu altbölümde birçok yakınsak ve ıraksak dizi örneği vereceğiz. En kolay ıraksak dizilerden başlayalım.

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

dizisi elbette ıraksaktır, yani hiçbir kesirli sayıya yakınsamaz, çünkü dizi sınırlı değildir (Teorem 17.10). Ama bunu tanımı kullanarak kanıtlayalım, faydasını göreceğiz.

Önce yakınsaklığın tanımını anımsayalım: $(x_n)_n$ dizisinin bir a (kesirli) sayısına yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n : |x_n - a| \ge \varepsilon\}$$

kümesinin sonlu olması gerekir. Demek ki dizinin ıraksak olması için yukarıdaki özelliğin **her** $a \in \mathbb{Q}$ için yanlış olması gerekir, yani her $a \in \mathbb{Q}$ için, öyle bir $\varepsilon > 0$ olmalı ki,

$$\{n : |x_n - a| \ge \varepsilon\}$$

kümesi sonsuz olsun.

Iraksaklığın tanımını böylece daha matematikselleştirdikten sonra, 0, 1, 2, 3, ... doğal sayı dizisinin ıraksak olduğunu matematiksel olarak kanıtlayalım. Burada, $x_n = n$ olarak almalıyız elbette. Herhangi bir a ve $\varepsilon > 0$ alalım. Aslında ε rastgele olmak zorunda değil ama bu örnekte rastgele bir ε işimizi görür. Dileyen okur $\varepsilon = 1$ alabilir. Bir N doğal sayısı için $N \ge a + \varepsilon$ sıralaması doğrudur (Arşimet Özelliği, Teorem 14.11). Demek ki, her $n \ge N$ için,

$$x_n = n \ge N \ge a + \varepsilon,$$

yani

$$x_n - a \ge \varepsilon > 0.$$

Dolayısıyla,

$$N, N+1, N+2, N+3, \ldots$$

sayılarının hepsi $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir ve bu küme sonsuzdur. Doğal sayı dizisinin ıraksak olduğu kanıtlanmıştır.

Şimdi de

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

dizisinin ıraksak olduğunu kanıtlayalım. Bu dizi, $x_n = (-1)^n$ formülüyle tanımlanabilir. Herhangi bir a alalım. Eğer $a = 1$ ise $\varepsilon = 1$ alalım, o zaman bütün tek sayıların $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesinde olduğu görülür. Eğer $a = -1$ ise gene $\varepsilon = 1$ alalım, bu kez bütün çift sayılar $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir. Eğer $a \neq \pm 1$ ise, o zaman ε, $|a+1|/2$ ve $|a-1|/2$ sayılarının en küçüğü olsun. Bu sefer her doğal sayı $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir.

Alıştırmalar

17.18. $A \subseteq \mathbb{Q}$ sonlu bir küme olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in A$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

17.19. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \mathbb{Z}$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

Şimdi verilmiş bir x_0 için,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

formülüyle tanımlanan dizinin kesirli sayılarda yakınsak olamayacağını kanıtlayalım. Diyelim dizi a kesirli sayısına yakınsıyor. Dizinin karesinin 2'ye yakınsadığını Bölüm 16.2'de görmüştük. Demek ki,

$$a^2 = (\lim x_n)^2 = \lim x_n^2 = 2.$$

Ama karesi 2 olan bir kesirli sayı yoktur. Çelişki. Demek ki bu dizi kesirli sayılarda yakınsamaz.

Dikkat ederseniz, bu örnekte dizinin yakınsak olmadığını daha önceki örneklerdeki gibi göstermedik, Teorem 17.9 gibi güçlü bir sonuç kullandık. Çünkü bu dizi yakınsak dizilere çok benzer ve dizinin ıraksaklığının daha önceki gibi doğrudan bir kanıtı yoktur.

Yakınsak dizi örneklerine geçelim.

Geçmişte $(1/n)_n$ dizisinin limitinin 0 olduğunu kanıtlamıştık. (Ama dikkat! $(1/n)_n$ dizisinin $\mathbb{Q}$'de limiti 0'dır. $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kümesinde bu dizinin limiti yoktur!) Çok daha genel bir sonuç geçerlidir:

Teorem 17.17. *$p(X)$, $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ iki polinom olsun. $q(X) \neq 0$ olsun. Eğer $\deg p \leq \deg q$ ise $(p(n)/q(n))_n$ dizisi yakınsaktır. Eğer $\deg p < \deg q$ ise*

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = 0$$

olur. Eğer $\deg p = \deg q$ *ise ve* a *ve* b *sırasıyla* p *ve* q *polinomlarının başkatsayısıysa,*

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = a/b$$

olur. Eğer $\deg p > \deg q$ *ise dizi ıraksaktır.*

Kanıt: $\deg p = d$, $\deg q = e$ olsun. p ve q polinomlarını,

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_dX^d,$$
$$q(X) = q_0 + q_1X + q_2X^2 + \cdots + q_eX^e$$

olarak yazalım. Burada $p_d = a \neq 0$ ve $q_e = b \neq 0$'dır.

$d \leq e$ varsayımı altında $p(n)/q(n)$ ifadesinin payını ve paydasını n^e'ye bölelim:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{p_0 + p_1n + \cdots + p_dn^d}{q_0 + q_1n + \cdots + q_en^e}$$
$$= \frac{p_0/n^e + p_1/n^{e-1} + \cdots + p_d/n^{e-d}}{q_0/n^e + q_1/n^{e-1} + \cdots + q_{e-1}/n + q_e}$$

Eğer $e > d$ ise payın tüm p_i/n^{e-i} terimlerinin limiti 0'dır; paydanın limiti ise q_e'dir; dolayısıyla limit $0/q_e = 0$'dır.

Eğer $e = d$ ise payın limiti $p_d = a$'dır; paydanın limiti ise gene $q_e = b$'dir; dolayısıyla limit a/b'dir.

Eğer $e < d$ ise, o zaman yukarıda görüldüğü gibi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{p(n)} = 0$$

olmalı. $((q(n)/p(n))_n$ dizisini $p(n)$'nin artık 0 olamayacağı n'den başlatalım, açık açık söylemedik ama $(p(n)/q(n))_n$ dizisi de $q(n)$'nin 0 olamayacağı n'den başlıyor.) Eğer $(p(n)/q(n))_n$ dizisinin limiti olsaydı, 0'la bu dizinin çarpımı 1 olmak zorunda olurdu! Demek ki $(p(n)/q(n))_n$ dizisinin limiti olamaz. □

$(r^n)_n$ biçiminde yazılan bir diziye ***geometrik dizi*** denir. Geometrik dizilerin yakınsaklığına karar vermek oldukça kolay:

Teorem 17.18. *r bir kesirli sayıysa $(r^n)_n$ dizisi ancak $r \in (-1, 1]$ iken yakınsak olabilir. Eğer $r = 1$ ise limit 1'dir. Eğer $r \in (-1, 1)$ ise limit 0'dır.*

Kanıt: Eğer limit varsa, limitin 0 ya da 1 olması gerektiği şöyle anlaşılır: Öncelikle $(r^n)_n$ ve $(r^{n+1})_n$ dizilerinin kuyrukları aynı olduğundan, ikisinin de limiti aynıdır, dolayısıyla limite a dersek,

$$a = \lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = r \lim_{n\to\infty} r^n = ra.$$

olur. Demek ki $a = ra$ ve eğer $a \neq 0$ ise $r = 1$. Ama bu akıl yürütme limitin olduğunu göstermez.

Teoremin kanıtında şu önsava gereksinim duyacağız:

Önsav 17.19 (Bernoulli Eşitsizliği)**.** *Eğer $s > -1$ ise, her n doğal sayısı için, $(1+s)^n \geq 1+ns$ olur.*

Önsavın Kanıtı: Eğer $n = 0$ ise bir eşitlik sözkonusu. Şimdi önermeyi n için varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. Aşağıdaki hesapta $1 + s > 0$ sıralamasını kullandığımıza dikkat etmelisiniz:

$$\begin{aligned}(1+s)^{n+1} &= (1+s)^n(1+s) \geq (1+ns)(1+s) \\ &= 1 + (n+1)s + ns^2 \geq 1 + (n+1)s.\end{aligned}$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Eğer $s \geq 0$ ise aynı olguyu binom açılımını kullanarak, çok daha basit bir biçimde tek satırda da kanıtlayabilirdik:

$$(1+s)^n = 1 + ns + \binom{n}{2}s^2 + \cdots + s^n \geq 1 + ns.$$

Teoremin kanıtına devam edelim. $r \in (-1, 1)$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Eğer $r = 0$ ise, kanıtlayacak fazla bir şey kalmıyor, bundan böyle r'nin 0 olmadığını varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. $s = -1 + 1/|r|$ olsun. Tabii ki $s > -1$. (Hatta $s > 0$.) Buradan

$$|r| = \frac{1}{1+s}$$

çıkar. N doğal sayısı, $1/s < N\varepsilon$ biçimde seçilmiş olsun (Arşimet Özelliği). Şimdi, her $n > N$ için,

$$|r^n| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+s}\right)^n = \frac{1}{(1+s)^n} \leq \frac{1}{1+ns} < \frac{1}{ns} < \frac{1}{Ns} < \varepsilon$$

olur. $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ eşitliği kanıtlanmıştır.

Şimdi r'nin 1'den büyük olduğunu varsayalım. $s = r - 1 > 0$ olsun. O zaman Önsav 17.19 ve Arşimet Özelliği'ne göre

$$(r^n)_n = ((1+s)^n)_n$$

dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak olamaz (Teorem 17.10).

Eğer $r < -1$ ise, $n = 2m$ çift olduğunda, $r^n = r^{2m} = (r^2)^m$ sayıları bir önceki paragrafa göre üstten sınırlı değildirler. Dolayısıyla $(r^n)_n$ dizisi sınırlı değildir ve yakınsak olamaz. □

Eğer (henüz inşa etmediğimiz) $\mathbb{R}$ elimizde olsaydı, Teorem 17.18'i çok daha basit biçimde kanıtlayabilirdik.

Şimdi de geometrik dizinin elemanları toplayarak elde ettiğimiz,

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_1 &= 1 + r, \\ s_2 &= 1 + r + r^2, \\ s_2 &= 1 + r + r^2 + r^3, \\ &\cdots \\ s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n, \end{aligned}$$

dizisine bakalım. Bu dizinin limiti analizde çok çok temeldir.

Teorem 17.20. *r bir kesirli sayı olsun. Yukarıda tanımlanan $(s_n)_n$ dizisi ancak ve ancak $r \in (-1, 1)$ iken yakınsak olabilir ve bu durumda limit*

$$\frac{1}{1-r}$$

olur.

Kanıt: Eğer $r \neq 1$ ise,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

eşitliğini geçmişte kanıtlamıştık. Dolayısıyla eğer $r \in (-1, 1)$ ise sonuç bir önceki teoremden çıkar. Eğer $r = 1$ ise, $s_n = n$ olduğundan, dizi sınırlı değildir ve ıraksar. Eğer $r = -1$ ise s_n kâh 0, kâh 1 olur ve yakınsamaz. Yukarıdaki formül, eğer r, $[-1, 1]$ aralığında değilse dizinin sınırlı olamayacağını, dolayısıyla yakınsak da olamayacağını gösteriyor. □

Notlar ve Örnekler

17.20. Son olarak, her $r \in \mathbb{Q}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$$

eşitliğini kanıtlayalım. Alıştırma 17.13'e göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı sayı olsun. L, r'den büyük herhangi bir doğal sayı olsun. Her k doğal sayısı için,

$$x_{L+k} \leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k$$

önermesini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım. $k = 0$ ise eşitlik sözkonusu. Şimdi önermeyi k için varsayıp $k + 1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} x_{L+k+1} &= \frac{r^{L+k+1}}{(L+k+1)!} = \frac{r^{L+k}}{(L+k)!}\frac{r}{L+k+1} \\ &= x_{L+k}\frac{r}{L+k+1} \leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k \frac{r}{L+k+1} \\ &\leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k \left(\frac{r}{L+1}\right) = x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Önermeyi kanıtladık. Öte yandan $0 < r/(L+1) < 1$ ve Teorem 17.18'e göre önermenin en sağındaki teriminin k sonsuza giderken limiti 0'dır. Demek ki öyle bir K vardır ki, her $k > K$ için,

$$\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < \frac{\varepsilon}{x_L}$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi $N = K + L$ olsun. Her $n > N$ için, $k = n - L > K$ tanımıyla,

$$x_n = x_{L+k} \leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k < x_L \frac{\varepsilon}{x_L} = \varepsilon$$

elde ederiz. İstediğimizi kanıtladık. □

Pek kolay olmadı değil mi? Evet, limit bulmak her zaman kolay değildir, hatta bazen çok çok zor olabilir. Özellikle eğer elimizde $\mathbb{R}$ gibi güçlü bir cisim yoksa.
Okur, haklı olarak yukarıdaki kanıtı nasıl düşündüğümüzü sorabilir. Yılların deneyimi elbette...
Kanıtı nasıl yaptığımızı anlatmaya çalışalım.
x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki var:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Bunu bir adım daha götürürsek,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}x_{n+1} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n$$

elde ederiz. Ama buradan da,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n < \left(\frac{r}{n+1}\right)^2 x_n$$

elde ederiz. Bu aşamada,

$$x_{n+k} \leq \left(\frac{r}{n+1}\right)^k x_n$$

önermesini tahmin edip kanıtlamak zor değil. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$\frac{r}{n+1}$$

sayısı 1'den küçük olur ve Teorem 17.18'e göre önermenin sağ tarafı k büyüdükçe küçülür. Bizim istediğimiz de buydu zaten. Gerisi, okurun ustalaşması gerektiği teknik ayrıntı.

17.8 Yakınsaklık Alıştırmaları

Alıştırmalar

17.21. Şu limitleri bulun:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + r^2 + \cdots + r^{2n}),$$
$$\lim_{n\to\infty} r^{2n}/n!$$

17.22. $\lim_{n\to\infty} nr^n$ limiti hangi r'ler için vardır ve kaçtır? İpucu: Teorem 17.18'de kullanılan yöntemi deneyin, yalnız oradaki olgu yerine, her $s > 0$ için,

$$(1+s)^n \geq 1 + ns + n(n-1)s^2/2$$

olgusunu kullanın.

17.23. Sabit bir k doğal sayısı için aynı soruyu $(n^k r^n)_n$ dizisi için yanıtlayın.

17.24. $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n) = 1$ ve

$$\lim_{n\to\infty}(1/2 - 1/4 + \cdots + (-1)^{n+1}/2^n = 1/3)$$

eşitliklerini kanıtlayın.

17.25. $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ dizisinin sınırsız olduğunu, dolayısıyla ıraksak olduğunu kanıtlayın.

17.26. Her n için, $1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2 \leq 2$ önermesini kanıtlayın.
İpucu: Toplamın 2 yerine $2 - 1/n$'den küçük olduğunu kanıtlayın!

17.27. Her n için, $(1 + 1/n)^n < 3$ önermesini kanıtlayın. $((1 + 1/n)^n)_n$ dizisinin artan bir dizi olduğunu kanıtlayın.

17.28. Her n için $x_n \neq 0$ ve sabit bir $r \in (0, 1)$ için, $|x_{n+1}/x_n| \leq r$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

17.29. $(a_n)_n$ herhangi bir dizi olsun. $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ olsun. Eğer $(s_n)_n$ dizisi yakınsaksa, $(a_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

17.30. Bir $n > 0$ doğal sayısı için,,

$$v(n) = \max\{m : 2^m \leq n\}$$

tanımını yapalım. $\lim_{n\to\infty} v(n)/n = 0$ önermesini kanıtlayın.

17.31. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ bir polinom olsun. $(p(x_n))_n$ dizisinin $p(a)$'ya yakınsadığını gösterin.

17.32. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X)$, $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ iki polinom olsun. $q(a) \neq 0$ olsun. $(p(x_n)/q(x_n))_n$ dizisinin $p(a)/q(a)$'ya yakınsadığını gösterin.
Not: $q(x_n) = 0$ olduğunda bölmede sorun olacaktır ama bu baş edemeyeceğimiz bir sorun değildir: $q(a) \neq 0$ olduğundan, $q(x_n)$'nin 0 olduğu n göstergeçlerinin sayısı sonlu olmalıdır. Dizi, $q(x_n)$'nin 0 olduğu göstergeçlerden sonra başlasın.

17.33. Eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve her n için $x_n \neq 0$ ise, $(x_n/x_{n+1})_n$ dizisi 1'e yakınsamak zorunda mıdır? Kanıtlayın ya da karşıörnek bulun.

17.34. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki ayrı limite yakınsayan iki dizi olsun. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin sonlu olduğunu kanıtlayın.

17.35. $x_{n,m} = n/(n+m)$ olsun.

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} x_{n,m}\right) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} x_{n,m}\right)$$

limitlerini hesaplayın.

17.36. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki dizi olsun.

$$z_n = \begin{cases} x_{n/2} & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ y_{(n-1)/2} & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için, $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinin yakınsak olması ve aynı sayıya yakınsamalarının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

17.37. $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ ise, $(a_n)_n$ dizisinin limiti mutlaka olmalı mıdır?

17.38. Eğer $a_n \geq 0$, $a \geq 0$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$ ise, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eşitliğini kanıtlayın.
17.39. $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$ ve $(a_{7n+1})_n$ dizileri yakınsak ise $(a_n)_n$ dizisi de yakınsak mıdır?
17.40. $q \in \mathbb{Q}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n/n = q$ eşitliğini sağlayan a_n doğal sayıları var mıdır?

18. Kesirli Temel Diziler

Kesirli sayı dizileriyle çalışmaya devam ediyoruz. Geçmişte (henüz var olmayan) $\sqrt{2}$'ye yakınsamak isteyen bir kesirli sayı dizisi örneği verdik. Eğer $\sqrt{2}$ orada olsaydı, bu dizi **kesirli sayılar kümesinde** $\sqrt{2}$'ye yakınsayacaktı, ama $\sqrt{2}$ kesirli sayı olmadığından bu dizinin **kesirli sayılar kümesinde** $\sqrt{2}$'ye yakınsadığını söyleyemeyiz.

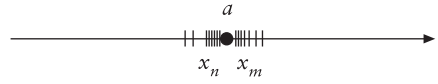
İleride, gerçel sayıları yarattığımız zaman, $\sqrt{2}$'yi de yaratmış olacağız ve o zaman bu dizi **gerçel sayılar kümesinde** gerçekten $\sqrt{2}$'ye yakınsayacak. Ama şimdilik bunu söylemek için çok erken.

Dizinin $\sqrt{2}$'ye yakınsamamasının suçu dizide değil. Dizi, $\sqrt{2}$'ye yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapıyor ama $\sqrt{2}$ olmadığından hüsrana uğruyor ve $\sqrt{2}$'ye yakınsamıyor.

Daha dramatik bir örnek verelim. $(1/n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını biliyoruz. Bu yakınsama kesirli sayılar cismi $\mathbb{Q}$'de gerçekleşiyor, yani evrenimiz $\mathbb{Q}$. Şimdi evreni değiştirelim, $\mathbb{Q}$ cisminden 0'ı atıp $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ evreninde çalışalım. Dizimizin terimleri bu yeni evrende tabii ki. Dizi bu yeni evrende yakınsamak için elinden geleni ardına koymuyor, gereken her şeyi yapıyor, safları giderek sıklaştırıyor, ancak yeni evrende 0 olmadığı için yakınsayamıyor, yeni evrenimizde $(1/n)$ dizisi ıraksaktır!

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, bir sayıya yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapan kesirli sayılar dizisine ***temel dizi*** denir. Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz.

Yakınsak bir $(x_n)_n$ dizisi alalım. Diyelim bu dizi a (kesirli) sayısına yakınsıyor. Demek ki x_n terimlerini istediğimiz kadar a'ya yaklaştırabiliriz. Dolayısıyla giderek daha fazla a'ya yaklaşan bu terimler giderek birbirlerine yaklaşırlar, safları sıklaştırırlar, birbirlerine daha daha sokulurlar...



Bu fikri daha matematiksel olarak ifade edelim. $\varepsilon > 0$, herhangi bir (kesirli) sayı olsun. O zaman, belli bir N göstergecinden sonra, x_n terimlerinin a'ya

uzaklığı en fazla $\varepsilon/2$ olur. Dolayısıyla bu göstergeçten sonra terimlerin birbirlerine uzaklığı en fazla ε olur. Nitekim, eğer n, $m > N$ ise,

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m| \\ &= |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Bu özelliği sağlayan bir diziye ***temel dizi*** denir. Tam tanımı matematiksel olarak ifade edelim: $(x_n)_n$ bir kesirli sayılar dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***temel dizi*** denir. Yani $(x_n)_n$ dizisinin temel dizi olması için, her $\varepsilon > 0$ için, dizinin terimleri arasındaki mesafenin bir zaman sonra (yani belli bir göstergeçten sonra) **hep** ε'dan küçük olması gerekir.

Biraz üstte şu teoremi kanıtladık:

Teorem 18.1. *Yakınsak diziler temel dizidirler.* □

Ama her temel dizi yakınsak değildir. Örneğin, "$\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" altbölümünde (Altbölüm 16.2) tümevarımla tanımladığımız

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

dizisi ($x_0 > -1$ ise örneğin) birazdan kanıtlayacağımız üzere temeldir ama bildiğimiz gibi hiçbir (kesirli) sayıya yakınsamaz.

Bu dizinin temel dizi olduğunu kanıtlayalım. Eğer $-1 \leq x_0$ ise, tanımdan, her n için $1 \leq x_n$ çıkar. Şimdi bunu ve Altbölüm 16.2'de kanıtladığımız

$$|x_n^2 - 2| \leq 1/4^n$$

eşitsizliğini kullanacağız. Eğer $n \geq m$ ise,

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &\leq 2|x_n - x_m| = (1+1)|x_n - x_m| \\ &\leq (x_n + x_m)|x_n - x_m| = |x_n^2 - x_m^2| \\ &= |(x_n^2 - 2) + (2 - x_m^2)| \leq |x_n^2 - 2| + |x_m^2 - 2| \\ &\leq 1/4^n + 1/4^m = 2/4^m = 1/2^{2m-1}.\end{aligned}$$

Eğer $1/2^{2m-1}$ sayısını dilediğimiz kadar küçültebilirsek, yukarıdaki hesap,

$$|x_n - x_m|$$

sayısını da çok küçültebileceğimizi gösteriyor. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. m'yi $1/2^{2m-1} < \varepsilon$ olacak biçimde seçebilirsek, o zaman dizinin temel

dizi olduğu kanıtlanmış olacak. Bunu da yapabiliriz, çünkü Teorem 17.18'de gördüğümüz üzere, $1/2^k = (1/2)^k$ sayılarının limiti k sonsuza giderken 0'dır, yani k'yi yeterince büyük seçersek $1/2^k$ sayıları ε'dan daha küçük yapabiliriz. N doğal sayısı, $1/2^N < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçilsin. O zaman, $n \geq m > N$ için,

$$|x_n - x_m| \leq 1/2^{2m-1} \leq 1/2^m < 1/2^N < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece $(x_n)_n$ dizisinin temel bir dizi olduğu kanıtlanmış olur.

Bu bölümde işte bu temel dizileri irdeleyeceğiz.

Not: Gerçel sayıları var etmiş olsaydık ve temel dizinin tanımındaki ε'u gerçel sayı alabilseydik, temel diziye ***Cauchy dizisi*** adını verecektik. Temel dizilerle Cauchy dizileri arasında bu çok ince ama önemli bir ayrım vardır.

Karekök Almak. $(x_n)_n$ dizisi $x_0 = 1$ ve $n \leq 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$$

olarak tanımlansın. $(x_n)_n$, temel bir dizidir. (Alıştırma.) Aslında bu dizinin karesi 2'ye yakınsar, yani $(x_n)_n$ dizisi henüz icat etmediğimiz $\sqrt{2}$'ye yakınsamak için can atar. İşte kesirli bir sayı olmayan

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730\ldots$$

sayısının bu dizi sayesinde elde edilen yaklaşık kesirli değerleri:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= 3/2 = 1{,}5\\
x_2 &= 17/12 = 1{,}41666\ldots\\
x_3 &= 577/408 = 1{,}41421568627451\ldots\\
x_4 &= 1{,}41421356237469\ldots\\
x_5 &= 1{,}41421356237309\ldots
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi dizi $\sqrt{2}$'ye oldukça çabuk yakınsıyor.

$\sqrt{S}$'ye her seferinde en az iki ondalık basamak yaklaşan bir dizi bulmak için, x_0'ı herhangi pozitif bir sayı alın. (x_0'ı $\sqrt{S}$'ye yakın olduğunu tahmin ettiğiniz bir sayı almanın bir sakıncası yoktur!) ve

$$x_{n+1} = \frac{x_n + S/x_n}{2}$$

olarak tanımlayın.

Temel diziler kümesine $\mathcal{C}$ adını verelim. (Cauchy'nin $\mathcal{C}$'si.) Teorem 18.1'e göre,

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}.$$

Şimdi her temel dizinin sınırlı olduğunu kanıtlayalım. Nitekim temel dizilerin terimleri bir zaman sonra birbirlerine çok yakın olduklarından, temel dizilerin sınırlı olması akla yatkındır.

Teorem 18.2. *Her temel dizi sınırlıdır, yani* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

Kanıt: $(x_n)_n$ bir temel dizi olsun. Tanımdaki ε'u, örneğin, 1 seçelim. Demek ki, öyle bir N göstergeci var ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Demek ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - x_{N+1}| < 1;$$

bir başka deyişle,

$$x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1.$$

Şimdi

$$b = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} + 1\}$$

ve

$$a = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} - 1\}$$

olsun. O zaman, her n için,

$$a \leq x_n \leq b$$

olur. □

Bu bölümün bundan sonrasında, temel diziler kümesi $\mathcal{C}$'nin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu, yani bir halka olduğunu kanıtlayacağız ve bu halkanın birkaç temel özelliğini ortaya koyacağız.

Teorem 18.3. $\mathcal{C}$ *çıkarma altında kapalıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki temel dizi olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her n, $m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - y_m| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer n, $m > N$ ise, hem n, $m > N_1$ hem de n, $m > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|(x_n - y_n) - (x_m - y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_m - y_n)| \\ &\leq |x_n - x_m| + |y_m - y_n| \\ &= |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Sonuç 18.4. *$\mathcal{C}$ toplama altında kapalıdır.*

Kanıt: Bir önceki teorem gibi kanıtlayabiliriz. Ama çok daha genel bir sonuç vardır: Bir halkanın çıkarma altında kapalı olan her altkümesi toplama altında da kapalıdır:

$$x + y = x - ((x - x) - y).$$

Kanıt bitmiştir. □

Teorem 18.5. *$\mathcal{C}$ çarpma altında kapalıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki temel dizi olsun. $(x_n y_n)_n$ dizisinin temel dizi olduğunu kanıtlayacağız. $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir N göstergeci bulmalıyız ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n y_n - x_m y_m| < \varepsilon$$

olsun. Her zamanki gibi $|x_n y_n - x_m y_m|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadenin ε'dan küçük olması için n ve m sayılarının ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız. Elbette büyük n ve m'ler için,

$$|x_n - x_m| \text{ ve } |y_n - y_m|$$

ifadelerinin küçük olduklarını kullanacağız. Bu yüzden,

$$|x_n y_n - x_m y_m|$$

ifadesinde bir biçimde $|x_n - x_m|$ ve $|y_n - y_m|$ ifadelerini bulmalıyız. İşte o hesap:

$$\begin{aligned}|x_n y_n - x_m y_m| &= |(x_n y_n - x_n y_m) + (x_n y_m - x_m y_m)| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m y_m| \\ &= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|.\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $|x_n y_n - x_m y_m|$ ifadesini ε'dan küçük yapmak yerine,

$$|x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|$$

ifadesini ε'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Bunun için,

$$|x_n||y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m||y_m|$$

ifadelerinin her birini $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalışacağız. n ve m göstergeçlerini yeterince büyük seçerek $|y_n - y_m|$ ve $|x_n - x_m|$ terimlerini dilediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu ifadelere, tehlikeli olabilecek $|x_n|$ ve $|y_m|$ ifadeleri yapışmış. Eğer bu ifadeler çok büyürse, $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalıştığımız

$$|x_n||y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m||y_m|$$

ifadeleri küçülemeyebilir. Ama neyse ki Teorem 18.2'de temel dizilerin sınırlı olduklarını kanıtlamıştık. Demek ki, öyle A ve B sayıları vardır ki, her n için,

$$|x_n| < A \text{ ve } |y_n| < B$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece,

$$|x_n||y_n - y_m| < A|y_n - y_m|$$

ve

$$|x_n - x_m||y_m| < B|x_n - x_m|$$

eşitsizliklerini buluruz. Şimdi

$$A|y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m|B$$

ifadelerini $\varepsilon/2$'den küçük yapmalıyız, yani

$$|y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m|$$

ifadelerini sırasıyla $\varepsilon/2A$ ve $\varepsilon/2B$ sayılarından küçük yapmalıyız, ki bu da o kadar zor değil. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ temel dizi olduklarından, öyle N_1 ve N_2 göstergeçleri vardır ki, her $n, m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$$

ve her $n, m > N_2$ için,

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

olur. Böylece $N = \max\{N_1, N_2\}$ alırsak kanıt biter ama yaptıklarımızı toparlamakta yarar var:

Kısa Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, Teorem 18.2'ye göre sınırlıdır, yani öyle bir A sayısı vardır ki, her n için,

$$|x_n| < A$$

eşitsizliği geçerlidir. Aynı nedenden, öyle bir B sayısı vardır ki, her n için,

$$|y_n| < B$$

eşitsizliği geçerlidir. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, öyle bir N_1 göstergeci vardır ki, her n, $m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, her

$$n, m > N_2$$

için,

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Şimdi, her n, $m > N$ için,

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |(x_n y_n - x_n y_m) + (x_n y_m - x_m y_m)| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m y_m| \\ &= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m| \\ &< A|y_n - y_m| + B|x_n - x_m| \\ &< A\left(\frac{\varepsilon}{2A}\right) + B\left(\frac{\varepsilon}{2B}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Sonuç 18.6. *$\mathcal{C}$ bir halkadır.* □

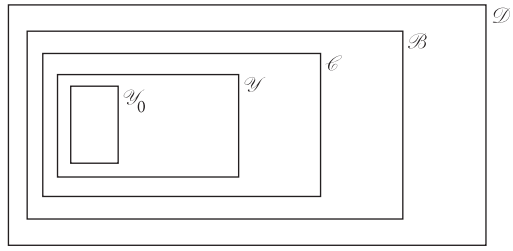
Sonuç 18.7. *$\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{C}$'nin bir idealidir. Yani*
i. $\emptyset \neq \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{C}$,
ii. $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$,
iii. $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$.

Kanıt: (i) bariz. (ii), Teorem 17.8'den çıkar. (iii), Teorem 17.10'dan çıkar:

$$\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}.$$

Demek ki, Önsav 17.13'ye göre, $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{B}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$. □

Durumu bir şemayla özetleyelim:



$\mathscr{Y}_0 \lhd \mathscr{Y} \leq \mathscr{C} \leq \mathscr{B} \leq \mathscr{D}$
$\mathscr{D}$: Tüm diziler halkası
$\mathscr{B}$: Sınırlı diziler halkası
$\mathscr{C}$: Temel diziler halkası
$\mathscr{Y}$: Yakınsak diziler halkası
$\mathscr{Y}_0$: 0'a yakınsayan diziler ($\mathscr{B}$'nin ideali)

Temel Dizilerde Bölme. $\mathcal{C}$ halkasının bölme altında "olabildiğince" kapalı olduğunu kanıtlayalım son olarak. Önce üç hazırlık sonucuna ihtiyacımız olacak.

Önsav 18.8. *Eğer* $(x_n)_n \in \mathcal{C}$ *ise* $(|x_n|)_n \in \mathcal{C}$.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ herhangi eleman olsun.

$$\big||x_n| - |x_m|\big| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için doğru olduğu bir N arıyoruz. Varsayıma göre,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için doğru olduğu bir N doğal sayısı var. Böyle bir N doğal sayısı alalım. Şimdi $\big||x| - |y|\big| < |x - y|$ eşitsizliğinden, her n, $m > N$ için

$$\big||x_n| - |x_m|\big| < |x_n - x_m| < \varepsilon$$

çıkar ve önsav kanıtlanır. □

Şimdi biraz tuhaf bir önerme sunalım:

Önsav 18.9. $(x_n)_n$ *bir temel dizi ve* $a \in \mathbb{Q}$ *olsun. Eğer*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < a\} \text{ ve } \{n \in \mathbb{N} : x_n > a\}$$

kümeleri sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ *dizisi* a*'ya yakınsar.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq a - \varepsilon\}$ kümesi sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin terimlerinin arası hiçbir zaman sürekli ε'dan küçük olamaz ve bu da dizinin temelliğiyle çelişir. Demek ki, belli bir N_1 göstergeci için, eğer $n > N_1$ ise, $x_n > a - \varepsilon$. Benzer nedenden, belli bir N_2 göstergeci için, eğer $n > N_2$ ise, $x_n < a + \varepsilon$. Demek ki $n > \max\{N_1, N_2\}$ için, $|x_n - a| < \varepsilon$. □

Sonuç 18.10. i. *Eğer $(x_n)_n$ bir temel diziyse ve 0'a yakınsamıyorsa, öyle bir N doğal sayısı ve $\delta > 0$ vardır ki, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ olur.*
ii. *Eğer $(x_n)_n$ temel dizisi 0'a yakınsamıyorsa ve her terimi 0'dan değişikse, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, her n için, $|x_n| > \delta_1$ olur.*

Kanıt: Önsav 18.8'e göre, $(x_n)_n$ dizisi yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alarak, her n belirteci için $x_n \geq 0$ varsayımını yapabiliriz.

Dizi 0'a yakınsamadığından, öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \varepsilon\}$$

kümesi sonsuzdur. Eğer sonucumuz yanlış olsaydı,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < \varepsilon\}$$

kümesi de sonsuz olurdu; ama bir önceki önsava göre, o zaman dizinin limiti ε olmak zorundadır ve bu durumda $\delta = \varepsilon/2$ elemanı ilk önermeyi doğrular. (Neden?) İkinci kısım için

$$\delta_1 = \min\{|x_0|/2, \ldots, |x_{N-1}|/2, \delta\} > 0$$

alalım. □

Alıştırmalar

18.1. Artan ve üstten sınırlı bir dizinin temel olduğunu kanıtlayın.

18.2. Kanıtlayın: Eğer $(x_n)_n$ bir temel diziyse ve 0'a yakınsamıyorsa, öyle bir N doğal sayısı ve $\delta > 0$ vardır ki, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ olur.

18.3. $\mathcal{C}$ halkasının tersinir elemanlarını bulun.

18.4. Kanıtlayın: Eğer $(x_n)_n \in \mathcal{C}$ ise $(|x_n|)_n \in \mathcal{C}$.

Şimdi $\mathcal{C}$'de ne zaman bölme yapılabileceğini, yani $(x_n)_n \in \mathcal{C}$ ise, $(1/x_n)_n$ dizisinin ne zaman $\mathcal{C}$'de olduğunu bulabiliriz. Her şeyden önce hiçbir x_n teriminin 0 olmaması gerekiyor, ki bu terimlerin tersini alabilelim. Ama bu yetmez, ayrıca bir de $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmaması gerekir.

Teorem 18.11. *$(x_n)_n \in \mathcal{C}$ ise ve her x_n terimi 0'dan farklı ise ve $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de $\mathcal{C}$'dedir. Bir başka deyişle, $\mathcal{C}$'nin tersinir elemanları kümesi,*

$$\mathcal{C}^* = \{(x_n)_n \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Y}_0 : \text{her } n \text{ için } x_n \neq 0\}$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ verilmiş bir eleman olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her $n, m > N$ için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| < \varepsilon$$

olacak. $|1/x_n - 1/x_m|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|}$$

Sağdaki ifadeyi çok küçük (yani ε'dan küçük) yapmak istiyoruz. Payda bulunan $|x_n - x_m|$ ifadesini dilediğimiz kadar küçük yapabileceğimizi biliyoruz. Bu iyiye işaret. Ancak eğer paydada bulunan $|x_n||x_m|$ ifadesi de çok küçülürse, o zaman

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} < \frac{|x_n - x_m|}{\delta^2}$$

ifadesini çok küçük yapamayız. Demek ki $|x_n|$ elemanlarının çok küçülemeyeceğini göstermeliyiz. Ama bu tam tamına Sonuç 24.2... Bu sonuca göre öyle bir $\delta > 0$ elemanı vardır ki, her n için $|x_n| > \delta$'dır. O zaman,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} < \frac{|x_n - x_m|}{\delta^2} < \varepsilon$$

elde ederiz. En sağdaki terimi ε'dan küçük yapmak istiyoruz. Bundan daha kolay bir şey yok: Eğer n, m'yi yeterince büyük alırsak, diyelim N'den büyük, o zaman, $|x_n - x_m| < \varepsilon\delta^2$ olur ve böylece n, $m > N$ için, buluruz. □

Alıştırmalar

18.5. Eğer $(x_n)_n$ dizisi temel bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin de temel bir dizi olduğunu kanıtlayın.

18.6. Temel dizilerin altdizilerinin de temel dizi olduğunu kanıtlayın.

18.7. $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ olsun. $(x?n)_n$ dizisinin temel bir dizi olmadığını kanıtlayın.

19. Altdiziler

Herhangi bir kesirli sayı dizisi ele alalım:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

ve bu dizinin içinden göstergeci çift olan terimleri seçelim:

$$x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots$$

Bu ikinci dizi, birincisinin altdizisidir. Bir başka altdizi, göstergeci asal olan terimlerden seçilebilir:

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

Ya da dizinin ilk birkaç terimini silip ilk dizinin bir başka altdizisini elde edebiliriz:

$$x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$$

Öte yandan,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

dizisi yukarıdaki ilk dizinin bir altdizisi olmayabilir, çünkü göstergeçler artan bir biçimde seçilmemiş, ilk iki terimde terslik var.

$$x_3, x_3, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

de bir altdizi olmayabilir.

Tanımı hissettirdikten sonra matematikselleşelim. Bir $(x_n)_n$ dizisi ve sürekli artan, yani her k için $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi verilmiş olsun. O zaman, $(x_{n_k})_k$ dizisine $(x_n)_n$ dizisinin ***altdizisi*** adı verilir. Tanımı şöyle de verebiliriz: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mutlak artan bir fonksiyon olsun. $(x_{f(n)})_n$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir.

Eğer $y_k = x_{n_k}$ tanımını yaparsak, $(x_{n_k})_k = (y_k)_k$ olur ve böylece alışık olduğumuz $(y_k)_k$ yazılımına kavuşuruz.

Bir başka deyişle, bir altdizi, bir

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$$

dizisinden bazı terimlerin atılmasıyla elde edilen bir dizidir. Örneğin, yukarıdaki diziden bazı terimleri silerek

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$$

altdizisini, yani $x_1, x_2, x_4, x_6, \dots$ altdizisini elde ederiz.

Eğer şansımız yaver gider de, $x_3 = x_0$ ya da $x_3 = x_1$ olursa, o zaman,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \dots$$

dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi olur, yoksa olmaz.

Altdizilerde sık sık kanıtı çok basit olan (k üzerine tümevarım) şu olgu kullanılır: Sürekli artan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi için, $k \leq n_k$. İlk teoremimizde bunu kullanacağız.

Teorem 19.1. *Temel bir dizinin her altdizisi temeldir.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir temel dizi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. Öyle bir N var ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Şimdi eğer k, $\ell > N$ ise $N < k \leq n_k$ ve $N < \ell \leq n_\ell$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - x_{n_\ell}| < \varepsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Teorem 19.2. *Yakınsak bir dizinin altdizisi de yakınsaktır ve iki dizi aynı limite yakınsarlar.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir a sayısına yakınsayan bir dizi olsun, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. Öyle bir N var ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Şimdi eğer $k > N$ ise $N < k \leq n_k$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Teorem 19.3. *Temel bir dizinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar. Dolayısıyla* 0*'a yakınsamayan bir dizinin ancak sonlu sayıda terimi* 0 *olabilir.*

Kanıt: Bunun kanıtı biraz daha zor.

$(x_n)_n$, bir temel dizi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin yakınsak bir altdizisi olsun, diyelim a'ya yakınsasın. $(x_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız.

$\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. $|x_n - a|$ sayısının bir zaman sonra, yani belli bir göstergeçten sonra ε'dan küçük olduğunu kanıtlayacağız. Her zaman yaptığımız gibi,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için, bir defa daha soldaki $|x_n - a|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadeyi bildiğimiz küçük ifadeler cinsinden üstten sınırlayacağız. k herhangi bir doğal sayı olsun. Üçgen eşitsizliğinden,

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$$

elde ederiz. En alttaki

$$|x_n - x_{n_k}| \text{ ve } |x_{n_k} - a|$$

ifadelerinin her birini küçültmeye çalışmalıyız. Birinci ifade $(x_n)_n$ bir temel dizi olduğundan, ikinci ifade ise $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından küçülür. Ayrıntılar önemli, ayrıntıları yazalım. Her iki ifadeyi de $\varepsilon/2$'den küçük yapacağız.

Birinci ifadeden başlayalım. $(x_n)_n$ bir temel dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ olur. Demek ki eğer $k > N$ ise, $n_k \geq k > N$ olur ve

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon/2$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci ifadeye gelelim. $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $k > N_1$ için,

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi k, hem N'den hem de N_1'den büyük herhangi bir sabit göstergeç olsun. Her $n > N$ için,

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde ederiz. □

Alıştırmalar

19.1. Her altdizisinin dizinin kendisine eşit olduğu diziler hangi dizilerdir?

19.2. Sadece iki altdizisi olan tüm dizileri bulun.

19.3. Tüm kesirli sayıları içeren bir dizi var mıdır?

19.4. Her diziyi altdizi olarak barındıran bir dizi var mıdır?

19.5. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsasın. Bu iki diziyi şu yöntemle karalım: A ve B, $\mathbb{N}$'nin $\mathbb{N} = A \cup B$ eşitliğini sağlayan iki ayrık ve sonsuz altkümesi olsun.

$$f : A \to \mathbb{N} \text{ ve } g : B \to \mathbb{N}$$

iki artan eşleme olsun. (f ve g biriciktirler.)

$$z_n = \begin{cases} x_{f(n)} & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \\ y_{g(n)} & \text{eğer } n \in B \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Böylece $(z_n)_n$ dizisini elde ederiz. Örneğin,

$$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, \ldots$$

bu yöntemle elde edilmiş bir dizidir ve burada

$$A = 2\mathbb{N}, B = 2\mathbb{N} + 1$$

alınmıştır. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için $a = b$ eşitliğinin gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

Monoton Diziler ve Altdiziler. X sıralı bir küme olsun. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Eğer her $n \leq m$ için $x_n \leq x_m$ oluyorsa, diziye ***artan*** adı verilir. Eğer her $n < m$ için $x_n < x_m$ oluyorsa, diziye ***mutlak artan*** adı verilir. Azalan ve mutlak azalan diziler benzer biçimde tanımlanır. Sabit diziler hem artan hem de azalan dizilerdir ve sadece sabit diziler hem artan hem de azalandır.

Artan ya da azalan dizilere ***monoton dizi*** denir.

Teorem 19.4. *Tamsıralı bir kümenin her dizisinin monoton bir altdizisi vardır.*

Kanıt: $(a_n)_n$, terimleri herhangi olan bir tamsıralı kümede herhangi bir dizi olsun. Eğer bir n göstergeci için, $a_n \leq a_m$ eşitsizliği n'den büyük her m göstergeci için sağlanıyorsa, n'ye, bu kanıtlık, "iyi göstergeç" diyelim. Eğer sonsuz tane iyi göstergeç varsa azalmayan bir altdizi seçmek kolaydır: $(a_k)_{k\text{iyi}}$ artan bir altdizidir. Eğer sonlu tane iyi göstergeç varsa ve N bu göstergeçlerin sonuncusuysa, her $n > N$ için, $a_n > a_m$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $m > n$ vardır. Bu durumda da azalan (dolayısıyla artmayan) bir altdizi kolaylıkla bulunur. □

20. Onluk Tabanda Kesirli Sayılar (2)

Bu bölümde 0,99999... ifadesinin matematiksel olarak ne demek olduğunu göreceğiz. İfadenin anlamını öğrendiğimizde, genellikle şaşkınlıkla karşılanan ve kuşku duyulan

$$0{,}99999\ldots = 1$$

eşitliğini matematiksel olarak kanıtlayabileceğiz.

0,99999... yerine daha tuhaf bir ifade ele alalım. Diyelim,

$$0{,}864269623810856\ldots$$

ifadesini ele aldık. Rakamların virgülden sonra nasıl devam ettiklerini bilmiyoruz. Ama bir biçimde devam ediyorlar. Bunun yerine, rakamların nasıl devam ettiği bilinen

$$0{,}12345678910111213 14\ldots$$

ifadesini de ele alabilirdik. Bu ifadeler ne demek olabilir? İşte bu konuyu irdeleyeceğiz bu bölümde.

Eğer birinci ifadeyi belli bir basamaktan sonra kesersek, elde edilen sonlu ifadenin ne demek olduğunu biliyoruz:

$$\begin{aligned}
0{,}8 &= 8 \times 10^{-1} \\
0{,}86 &= 8 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} \\
0{,}864 &= 8 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} \\
0{,}8642 &= 8 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-4} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ama sonsuza dek uzanan 0,864269623810856... ifadesinin ne anlama geldiğini henüz bilmiyoruz.

Elimizde bir $(a_n)_{n>0}$ rakam dizisi olsun. Yani her $n > 0$ için, bir

$$a_n \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ 9\}$$

rakamı olsun.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 10^{-1}, \\ x_2 &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2}, \\ x_3 &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3}, \\ &\cdots \\ x_n &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. Daha ekonomik bir yazılımla:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$

Böylece bir $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisi elde ederiz. Bu dizinin bir temel dizi olduğunu kanıtlayalım hemen.

Teorem 20.1. *Her $(a_n)_{n>0}$ rakam dizisi için yukarıda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisi temel bir dizidir.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi bir sayı olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her n, $m > N$ için, $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak. Her zamanki gibi $|x_n - x_m|$ ifadesinin ε'dan küçük olması için n ve m'nin ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız.

$|x_n - x_m| = |x_m - x_n|$ olduğundan, $n \geq m$ eşitsizliğini varsayabiliriz.

Bundan böyle bu eşitsizliği varsayacağız. $|x_n - x_m|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i} - \sum_{i=1}^{m} a_i 10^{-i}| = |\sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i}| \\ &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i} \leq \sum_{i=m+1}^{n} 9.10^{-i} = 9. \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i} \\ &= 9.10^{-m-1} \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i+m+1} = 9.10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} 10^{-j} \\ &= 9.10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} (1/10)^j = 9.10^{-m-1} \frac{1-(1/10)^{n-m}}{1-(1/10)} \\ &= 9.10^{-m-1} \frac{1-(1/10)^{n-m}}{9/10} = 10^{-m}(1-(1/10)^{n-m}) \leq 10^{-m}. \end{aligned}$$

Dördüncü satırdan beşinci satıra geçerken

$$j = i - m - 1$$

değişikliğini yaptık. Altıncı satırdan yedinci satıra geçerken, xxxxxxx Bölüm **??**'de gri alanda kanıtlanan eşitliği $a = 1/10$ için kullandık. (Hesaptaki eşitsizliklerin her biri son derece ekonomiktir: Üçüncü satırdaki eşitsizlik zorunlu bir eşitsizliktir, çünkü a_i'lerin her biri bal gibi de 9 olabilirler. İkinci ve sonuncu eşitsizlik de zorunlu, çünkü m sabit kalıp n çok büyüdüğünde (sonsuza gittiğinde),

$$1 - (1/10)^{n-m}$$

sayısı 1'e kadar dayanır.)

Şimdi 10^{-m}'yi ε'dan küçük yapmamız gerektiğini anlıyoruz.

$$-1 < 10^{-1} < 1$$

olduğundan, Teorem 17.18'e göre, öyle bir N vardır ki, her $m > N$ için,

$$10^{-m} < \varepsilon$$

olur. Aşağıdaki gri karede aynı şeyi xxxxx Teorem 17.18'yi kullanmadan kanıtlıyoruz. □

Not: Yukarıdaki teoremde ve kanıtında 10'un hiçbir önemi yok, sabit herhangi bir $b > 1$ (kesirli ya da doğal) sayısı da alınabilirdi. Ayrıca a_i'ler de sınırlı herhangi bir sayı kümesinden seçilebilirdi. b'yi 10 almak gelenekten de öte bir alışkanlık hâline gelmiştir,iki elimizde on parmağımızın olmasından kaynaklanır ve artık kültürümüzün nerdeyse ayrılmaz bir parçasıdır. Bir de b'yi 2 almak özellikle çağımızda önem kazandı.

Şimdi, eğer $(a_n)_{n>0}$ dizisi ***zamanla devirleşiyorsa***, yani her $n > N$ için, $a_{n+k} = a_n$ eşitliğini sağlayan N ve $k > 0$ doğal sayıları varsa, o zaman yukarıda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisinin bir limiti olduğunu kanıtlayalım.

Burada limitin kesirli bir sayı olduğunu söylemek istiyoruz. Gerçel sayıları tanımladığımızda, bu $(x_n)_{n>0}$ dizilerinin sadece zamanla devirleşen $(a_n)_{n>0}$ dizileri için değil, her $(a_n)_{n>0}$ dizisi için bir gerçel sayıya yakınsadığını kanıtlayacağız. Ancak şimdilik böyle bir önermeyi telaffuz bile edemeyiz. "Gerçel sayı" sözleri şimdilik bize yasak.

Notlar ve Örnekler

20.1. 3, 5, 7, 8, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, ... dizisi zamanla devirleşen bir dizidir. Bunu görmek için $N = 4$, $k = 3$ almak yeterli. ($k = 6$ da alabilirdik. $k = 3$ en küçük devirdir.)

$$\begin{aligned} x_1 &= 3.10^{-1} = 0{,}3, \\ x_2 &= 3.10^{-1} + 5.10^{-2} = 0{,}35, \\ x_3 &= 3.10^{-1} + 5.10^{-2} + 7.10^{-3} = 0{,}357, \\ x_4 &= 3.10^{-1} + 5.10^{-2} + 7.10^{-3} + 8.10^{-4} = 0{,}3578, \\ &\dots \end{aligned}$$

örneği üzerinde $(x_n)_{n>0}$ dizisinin bir kesirli sayıya yakınsadığını gösterelim.

Diziyi ilkokuldan beri alışık olduğumuz biçimde ve göze daha hoş görünsünler diye bazı terimleri atlayarak yazarsak ne yapılması gerektiğini daha kolay görürüz:

$$\begin{aligned} x_4 &= 0,3578, \\ x_7 &= 0,3578214, \\ x_{10} &= 0,3578214214, \\ &\cdots \end{aligned}$$

$(x_n)_{n>0}$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak yerine, Teorem 19.3'e göre, bu dizinin $(x_{4+3n})_n$ altdizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak yeterli.
Biraz hesap yapalım:

$$\begin{aligned} x_{4+3n} &= 0,3578 + \frac{214}{10^7} + \frac{214}{10^{10}} + \cdots + \frac{214}{10^{4+3n}} \\ &= 0,3578 + \frac{214}{10^7}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{3(n-1)}}\right) \\ &= 0,3578 + \frac{214}{10^7}\frac{1 - \frac{1}{10^{3n}}}{1 - \frac{1}{10^3}} \\ &= 0,3578 + \frac{214}{10^4}\frac{1 - \frac{1}{10^{3n}}}{999}. \end{aligned}$$

Demek ki, n sonsuza giderken $(x_{4+3n})_n$ ya da $(x_n)_{n>0}$ dizisinin limiti,

$$0,3578 + \frac{214}{10^4}\frac{1}{999}$$

kesirli sayısıdır.

Aşağıdaki teorem aynen yukarıdaki örnekteki gibi kolaylıkla kanıtlanabilir. Biçimsel kanıtı meraklı okura bırakıyoruz.

Teorem 20.2. *Eğer $(a_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi bir zaman sonra devirleşiyorsa, o zaman yukarıda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisinin $\mathbb{Q}$'de bir limiti vardır.*

Bundan böyle, yukarıdaki teoremde varlığı söylenen bu limiti

$$0,a_1a_2a_3a_4\cdots$$

olarak yazacağız:

$$0,a_1a_2a_3\cdots = \lim_{n\to\infty}(a_1 10^{-1} + \cdots + a_n 10^{-n}).$$

Eğer bir de ayrıca a_0 herhangi bir doğal sayıysa, yukarıdaki teorem,

$$(a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n})_n$$

dizisinin yani

$$(a_0,a_1a_2\cdots a_n)_n$$

dizisinin bir limiti olduğunu söylüyor. Bu limiti bundan böyle

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4\cdots$$

olarak yazacağız. Ama dikkat, burada rakam olanlar sadece a_1, a_2, a_3, $a_4, \ldots$ katsayıları, a_0 bir rakam olmayabilir, a_0 bir doğal sayı. Öte yandan a_0'ın da rakamlarla ifade edilebileceğini gördük (Teorem 9.29). a_0'ı, $t_k\cdots t_1t_0$ olarak rakamlarla ifade edersek, her pozitif kesirli sayının, sonlu tane

$$t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_k$$

rakamı ve bir zaman sonra devirli olan

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

rakamları için,

$$t_k\ldots t_1t_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

biçiminde, yani, terimleri

$$x_n = t_k10^k + \cdots + t_010^0 + a_110^{-1} + \cdots + a_n10^{-n}$$

olan dizinin limiti olarak yazılabilir.

Şimdi artık $0{,}9999\ldots$ ifadesinin ne demek olduğunu biliyoruz: Bu ifade, yukarıdaki tanıma göre,

$$x_n = 9\cdot 10^{-1} + \cdots + 9\cdot 10^{-n}$$

dizisinin limitidir. Hemen bulalım bu limiti: eşitliğinin başının ve sonunun limitlerini alırsak,

$$0{,}99999\ldots = 1$$

buluruz. Nihayet! Bu yaşa değin merak ettiğimiz eşitliği kanıtladık...

Tabii aynı şekilde, örneğin,

$$253{,}782149999\ldots = 253{,}78215$$

eşitliği de geçerlidir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Teorem 20.3. *Her pozitif kesirli sayı, t_0, t_1, $\ldots$, t_k rakamları ve zamanla devirleşen bir $(a_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi için,*

$$t_k\ldots t_0{,}a_1a_2a_3a_4\cdots$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $k > 0$ ise $t_k \neq 0$ alınabilir.

Peki, yukarıdaki $t_k \dots t_0{,}a_1a_2a_3a_4 \dots$ yazılımı ne kadar biriciktir? Yani,

$$t_k,\ \dots,\ t_0$$

ve $s_\ell,\ \dots,\ s_0$ rakamları ve zamanla devirleşen $(a_n)_{n>0}$ ve $(b_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi için,

$$t_k \dots t_0{,}a_1a_2a_3a_4 \dots = s_\ell \dots s_0{,}b_1b_2b_3b_4 \cdots$$

ise, $k = \ell$ ve her i için $t_i = s_i$ ve $a_i = b_i$ olmalı mıdır?

Yukarıda kanıtladığımız $0{,}99999 \dots = 1$, daha doğrusu

$$0{,}99999 \dots = 1{,}00000 \dots$$

eşitliğinden $a_i = b_i$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını biliyoruz.

$$9{,}99999 \dots = 10{,}00000 \dots$$

eşitliğinden de $k = \ell$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını biliyoruz. Ayrıca bir de sayının soluna istediğimiz kadar 0 koyabileceğimizi biliyoruz. Ama bu istisnalar dışında yukarıdaki yazılım biriciktir. Yani a ve s doğal sayıları için, $a/10^s$ biçiminde yazılamayan her kesirli sayı, $t_k \neq 0$ olmak üzere, tek bir biçimde

$$t_k \dots t_0{,}a_1a_2a_3a_4 \dots$$

olarak yazılabilir. $a/10^s$ biçiminde yazılan sayılar için ise iki değişik yazım biçim vardır: Biri hep 9'la diğeri hep 0'la biter... Konuyu daha fazla uzatmak istemediğimizden kanıtı es geçiyoruz.

Teorem 20.3'ün tersi de doğrudur. Bunun da kanıtını okura bırakıyoruz.

Teorem 20.4. *Eğer $(a_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi bir zaman sonra devirleşmiyorsa, o zaman yukarıda tanımlanan $(x_n)_n$ kesirli sayı dizisinin $\mathbb{Q}$'de limiti olamaz.*

Teorem 20.5. *Her k doğal sayısı için $10^k > k$ olur.*

Kanıt: k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $k = 0$ için,

$$k = 0 < 1 = 10^0 = 10^k.$$

Bir de $k = 1$ için kanıtlayalım: $k = 1 < 10 = 10^1 = 10^k$. Şimdi $k \geq 1$ olsun ve eşitsizliğin k için geçerli olduğunu varsayalım. O zaman,

$$10^{k+1} = 10 \times 10^k > 10k \geq k + 1.$$

(Son eşitsizlik, kanıtın başında teoremi neden $k = 0$ ve $k = 1$ için kanıtladığımızı göstermektedir.

Sonuç 20.6. *$\varepsilon > 0$ hangi (kesirli) sayı olursa olsun öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ için,* $10^{-n} < \varepsilon$.

Kanıt: N, $1/\varepsilon$'dan büyük bir doğal sayı olsun (Arşimet Özelliği, Teorem 14.11). O zaman, $10^N > N > 1/\varepsilon$, yani $10^{-N} < \varepsilon$. Her $n > N$ için,

$$10^{-n} < 10^{-N} < \varepsilon$$

olur.

Kısım III

Gerçel Sayılar

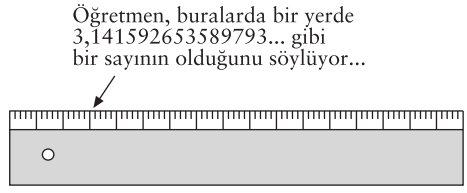
21. Gerçel Sayılar Kümesi

Nihayet gerçel sayıları tanımlayacağız. Bir sonraki bölümde gerçel sayılar üzerine dört işlemi ve sıralamayı tanımlayıp bunların özelliklerini irdeleyeceğiz.

Gerçel sayıların ne olduklarını sezgisel olarak hissediyoruz. Ayrıca ta ilkokuldan beri,

$$3,141592653589793\ldots$$

gibi sonsuza dek uzanan bir ifadenin bir gerçel sayı olduğu öğretilmiştir bize. Biz de bunu sorgulamadan kabul etmişizdir. Hatta belki de öğretmen, bu sayının, "birim uzunluğu verilmiş bir sayı doğrusunun üstünde bir uzunluğa eş düştüğünü" söylemiş bile olabilir... Bu uzunluğun hangi noktalar arasındaki mesafe olduğunu göstermeden, daha doğrusu gösteremeden...



Öğretmenin dediğine göre, 0'dan

$$3{,}141592653589793\ldots\,\mathrm{cm}$$

ötede fiziksel bir nokta varmış... Öğretmen dediğine göre öyle bir nokta olmalı... Kitaplar da öyle diyor galiba... Bunca öğretmen, bunca kitap yalan mı söyleyecek?

Yalan değil ama yanlış... Cetvel üzerinde gerçekten öyle bir fiziksel noktanın olup olmadığını hiçbir zaman bilemeyiz. Parçalanamayacak parçacıklar olduğuna göre muhtemelen de öyle bir nokta yoktur. Ayrıca fiziksel nokta diye bir şeyin de ne olduğu bilinmemektedir...

Gerçel sayının (ne olduğunu değil, bu sorunun anlamı bile olamaz!) ne olması gerektiğini işte bu bölümde öğreneceğiz.

Önce, daha sonra terkedeceğimiz bir "gerçel sayı tanımlama" yöntemini açıklayalım.

Geçen bölümde

$$3,14159215921592\ldots$$

gibi bir zaman sonra devirleşen bir ifadeye anlam vermiştik. Bu ifadeyi tam tamına, terimleri

$$x_n = 3 + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$$

olarak tanımlanan dizinin limiti olarak tanımlamıştık. Burada $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 2$, $a_7 = 1$, ... olur. Bölüm 20'da,

$$3{,}141592653589793\ldots$$

gibi sonsuza dek uzanan ve hiçbir zaman devirleşmeyen bir ifadeyi tanımlamamışsak da, terimleri

$$x_n = 3 + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$$

olarak tanımlanan dizinin temel dizi olduğu kanıtlanmıştık. Burada $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 2$, $a_7 = 6$, ... olur. (Yukarıdakinden değişik...)

Gerçel sayıları yukarıdaki temel diziler olarak tanımlayabiliriz. Bir a doğal sayısı ve bir zaman sonra sürekli 9 olmayan bir $(a_n)_n$ rakam dizisi için,

$$\left(a + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i} \right)_n$$

temel dizisini pozitif bir gerçel sayı olarak tanımlayabiliriz. (Bir zaman sonra sürekli 9 olan sayıları da kabul edersek, o zaman bu sayının başka türlü yazılan bir sayıya eşit olduğunu söylemek zorunda kalırız ve tanım zorlaşır.) Ardından, bu gerçel sayının da

$$a, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots$$

olarak yazıldığını da söyleyebiliriz. Eğer zamanla devirleşen $(a_n)_n$ rakam dizilerinden elde edilen gerçel sayıları (yani temel dizileri), dizinin limiti olan kesirli sayıyla özdeşleştirirsek, her kesirli sayıyı bir gerçel sayı olarak görebiliriz. Sonra negatif gerçel sayılar bir biçimde tanımlanabilir. (İkinci kısımda $\mathbb{N}$'den hareketle $\mathbb{Z}$'yi tanımladığımız gibi.) Ardından gerçel sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme tanımlamak gerekir... Kolay iş olmasa da bunlar yapılabilir.

Tüm bunlar matematiksel olarak son derece geçerlidir. Ancak biz böyle yapmayacağız. Çünkü bu yöntem 10 tabanını ön plana çıkarır ve 10'a haketmediği bir yer verir. Ayrıca bu yöntemle toplama çarpma gibi işlemleri

tanımlamak oldukça meşakkatlidir. Biraz daha kuramsal ve soyut olacağız ama işlemler çok daha rahat ve şık tanımlanacak.

Her gerçel sayının kesirli bir temel dizinin limiti olduğunu artık hissetmiş olmalıyız. (Yoksa hissizsiniz demektir!) Buradan hareketle bir gerçel sayıyı kesirli bir temel dizi olarak tanımlamaya kalkışabiliriz. Ama aynı gerçel sayıya yakınsayan birçok temel dizi olabilir. Örneğin,

$$3, 3{,}1, 3{,}14, 3{,}141, 3{,}1415, 3{,}14159, 3{,}141592, \ldots$$

artan temel dizisiyle,

$$4, 3{,}2, 3{,}15, 3{,}142, 3{,}1416, 3{,}14160, 3{,}141593, \ldots$$

temel azalan dizisi aynı gerçel sayıya (henüz olmayan π'ye sanki!) yakınsarlar. Demek ki her temel diziyi bir gerçel sayı olarak tanımlarsak, aynı gerçel sayıdan binlerce olur!

Bu iki temel diziyi aynı gerçel sayı olarak tanımlamak lazım. Bunu yapmanın yöntemini biliyoruz, geçmişte gördük. Eşit gerçel sayıları simgelemesi gereken, yani gelecekte (gerçel sayılar tanımlandıklarında) aynı gerçel sayıya yakınsayacak olan iki temel dizi eşit değil de ***denk*** olsun...

Anımsarsanız temel diziler kümesini $\mathcal{C}$ harfiyle simgelemiştik. $\mathcal{C}$ kümesi üzerinde şöyle bir ikili ilişki tanımlamaya kalkışalım: $(x_n)_n$, $(y_n)_n \in \mathcal{C}$için,

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Güzel bir deneme... Ancak başarısız, çünkü

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

diye bir sayı (limit) henüz olmayabilir. (Gerçel sayıları daha tanımlamadığımızı anımsayın. Tüm derdimiz de bu sayıları var etmek zaten.) Örneğin yukarıda örnek olarak verdiğimiz dizinin limiti yoktur çünkü π kesirli bir sayı değildir.

İleride, gerçel sayılar tanımlandığında, aynı anlama gelecek bir başka tanım bulmalıyız.

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \ ?$$

Soru işareti yerine şu anki matematiksel bilgimizle ifade edebileceğimiz bir koşul bulmalıyız ve bu koşul, ileride anlamı olacak olan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğiyle aynı anlamda olmalı. Ama bu çok basit... Yukarıdaki

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliği yerine,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

yazalım... Bu ifade, ileride, $\lim_{n\to\infty} x_n$ ya da $\lim_{n\to\infty} y_n$ olduğunda dilediğimiz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğiyle aynı anlamda olacak. Zaten öyle hissetmiyor muyuz?

Artık resmi tanımı verebiliriz: $(x_n)_n$, $(y_n)_n \in \mathcal{C}$ temel dizileri için, $\equiv$ ikili ilişkisini

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

olarak tanımlayalım. Bir başka deyişle, $\equiv$ ikili ilişkisi, x, $y \in \mathcal{C}$ temel dizileri için,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{Y}_0$$

olarak tanımlansın. Bu arada, $\mathcal{Y}_0$'ın Bölüm 17.6.6'da 0'a yakınsayan kesirli sayı dizileri kümesi olarak tanımlandığını da anımsayalım.

Şimdi bu ikili ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 21.1. *Yukarıda tanımlanan $\equiv$ ikili ilişkisi bir denklik ilişkisidir. Yani her x, $y \in \mathcal{C}$ temel dizisi için,*
i. $x \equiv x$,
ii. $x \equiv y$ *ise* $y \equiv x$,
iii. $x \equiv y$ *ve* $y \equiv z$ *ise* $x \equiv z$.

Kanıt: Kanıtımızda $\mathcal{Y}_0$'ın $\mathcal{C}$ halkasının bir ideali olduğunu, yani Sonuç 18.7'de kanıtlanan,
a. $s(0) \in \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{C}$,
b. $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$,
c. $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$
olgularınu kullanacağız. ($s(0)$, sabit 0 dizisidir.) Bu da ideal kavramının önemini gösterir... diyeceğiz ama bu kanıtta (c)'nin hiç önemi olmayacak. (c) ileride önem kazanacak. (i), doğrudan (a) özelliğinden çıkar.

(ii)'yi kanıtlayalım. Varsayıma göre $x - y \in \mathcal{Y}_0$. demek ki, (a) ve (b)'ye göre,

$$y - x = s(0) - (x - y) \in \mathcal{Y}_0,$$

yani $y \equiv x$.

Gelelim (iii)'ün kanıtına... Varsayıma göre,

$$x - y \in \mathcal{Y}_0 \text{ ve } y - z \in \mathcal{Y}_0.$$

(b)'den dolayı, $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{Y}_0$, yani $x \equiv z$. □

Her $a \in \mathcal{C}$ temel dizisi için,

$$[a] = \{x \in C : a \equiv x\}$$

olsun. $\mathcal{C}$'nin bu altkümesine a'nın sınıfı denir.

$\mathcal{C}/\mathcal{Y}_0$ ya da eski yazılımla $\mathcal{C}/\equiv$, sınıfların kümesi olsun:

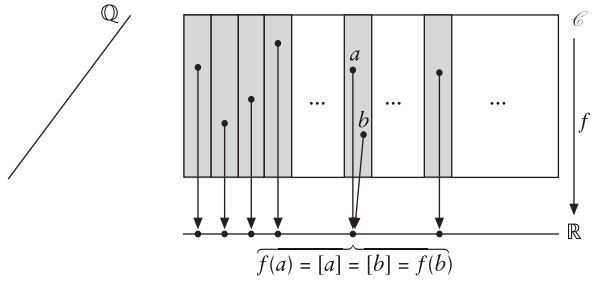
$$\mathcal{C}/\mathcal{Y}_0 = \mathcal{C}/\equiv = \{[a] : a \in \mathcal{C}\}$$

olsun. Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi işte bu küme olarak tanımlayacağız:

$$\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{Y}_0 = \mathcal{C}/\equiv = \{[a] : a \in \mathcal{C}\}.$$

Bir sonraki bölümde gerçel sayılarda dört işlemi ve sıralamayı tanımlayacağız. Bir de ayrıyeten kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{R}$'nin içine gömeceğiz.

$\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ şimdilik ayrık kümeler. Resim aşağıda.



C, *kesirli temel dizilerden oluşan küme.*
ℝ *ise* **C** *'nin denklik sınıflarından oluşan küme.*

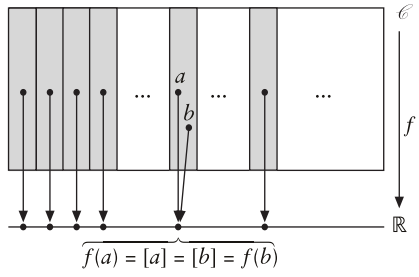
$\mathcal{C}$'nin içindeki gri kutular denklik sınıflarını temsil ediyor. Bu denklik sınıflarının her biri $\mathbb{R}$'nin bir elemanı, yani bir gerçel sayı. Bir sonraki bölümde sözünü edeceğimiz f fonksiyonu da $\mathcal{C}$'nin her elemanını o elemanının sınıfına götüren fonksiyon.

22. Gerçel Sayılarda Dört İşlem

Bir $a \in \mathcal{C}$ temel dizisini (tüm diziler $\mathbb{Q}$-dizileridir) $[a]$ gerçel sayısına götüren $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım:

$$f(a) = [a].$$

Bu fonksiyon elbette örtendir. İşte resmi:



f fonksiyonunu kullanarak, eskiden $\mathcal{C}$ üzerine tanımladığımız toplama, çarpma, çıkarma ve bölme işlemlerinin benzerlerini $\mathbb{R}$ üzerine tanımlayacağız. Yapacağımız iş özetle şu: Diyelim $\mathbb{R}$ üzerine toplamayı tanımlamak istiyoruz. $\mathbb{R}$'den toplamak istediğimiz iki eleman alalım, bu elemanlara r ve s diyelim. Elemanların $\mathcal{C}$'de birer f-önimgesini bulalım ve sırayla onlara a ve b diyelim. Demek ki

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s.$$

Şimdi a ve b temel dizilerini $\mathcal{C}$'de toplayıp $a + b$ temel dizisini elde edebiliriz. Ve son olarak bu toplamın f imgesini alıp

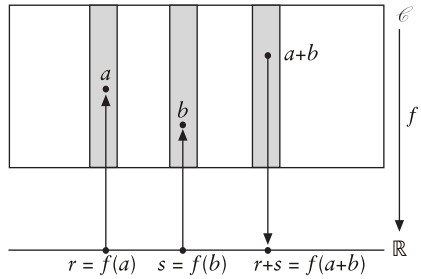
$$f(a + b) \in \mathbb{R}$$

elemanını bulabiliriz. $r + s$ toplamını,

$$r + s = f(a + b)$$

olarak tanımlamayı öneriyoruz, çünkü ne de olsa $a + b$ dizisi de $\mathcal{C}$'de.

ℝ'den **C** 'ye çık, topla ve tekrar ℝ'ye in:

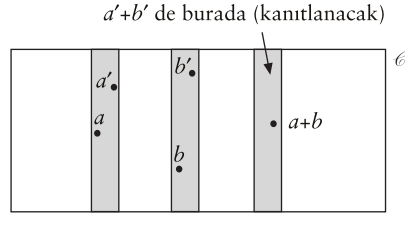


ℝ'de toplamanın tanımı:
1) $r, s \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun.
2) $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitliğini sağlayan $a, b \in \mathbf{C}$ dizilerini bul.
3) $r + s$'yi $f(a + b)$ olarak tanımla.

Ancak, r ve s gerçel sayıları verildiğinde,

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s$$

eşitliklerini sağlayan birden çok a ve b vardır; tanımın geçerli olması için bu eşitliği sağlayan tüm a ve b'lerin aynı $f(a + b)$ sonucunu verdiğini kanıtlamalıyız. Bunu kanıtlayacağız.



Çarpmayı da benzer yöntemle tanımlayacağız. Her halkada olduğu gibi çıkarma toplama tarafından, bölme de çarpma tarafından belirlenecek. ℝ'de sıralamayı tanımlamak, çok değil, birazcık daha zordur. Ardından, tanımlanan bu işlemlerin ve sıralamanın tahmin edilen özellikleri sağladığını ve sonuçta sıralı bir cisim (Bölüm 14.4 ve 15.5) bulduğumuzu ve bu sıralı cisimde ℚ'nün kusurlarının (Bölüm 16.3) olmadığını kanıtlayacağız.

Toplama. Yukarıda gördüğümüz gibi, ℝ'de toplamanın önerdiğimiz tanımının geçerli olması için şu önsav kanıtlanmalı:

Önsav 22.1. *$a, b, a', b' \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ ise*

$$[a + b] = [a' + b']$$

eşitliği doğrudur.

Kanıt: Varsayıma göre $a - a' \in \mathcal{Y}_0$ ve $b - b' \in \mathcal{Y}_0$. Dolayısıyla,

$$(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in \mathcal{Y}_0$$

dir, yani $[a + b] = [a' + b']$ eşitliği doğrudur. □

Şimdi artık, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayıları için,

$$[a] + [b] = [a + b]$$

tanımını huzur içinde yapabiliriz, çünkü bu tanım, $\mathcal{C}$'de seçilen a ve b'ye göre değil, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayılarına göre değişmektedir. Eğer bu önsav doğru olmasaydı,

$$[a] = [a'] \text{ ve } [b] = [b']$$

eşitlikleri doğru olmasına karşın,

$$[a] + [b] = [a'] + [b']$$

eşitliği doğru olmayabilirdi ve o zaman da toplama işleminin tanımı geçerli olmazdı. Toplamayı tanımladıktan sonra toplamanın özelliklerine gelelim.

Önsav 22.2. $(\mathbb{R}, +, [s(0)])$ *değişmeli bir gruptur, yani,*
T1. *Her* r, s, $t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r + s) + t = r + (s + t)$.
T2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + [s(0)] = [s(0)] + r = r$.
T3. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + s = s + r = [s(0)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R}$ *vardır.*
T4. *Her* r, $s \in \mathbb{R}$ *için* $r + s = s + r$.

Kanıt: $\mathbb{R}$'deki bu eşitlikleri kanıtlamak için f fonksiyonunu kullanıp $\mathcal{C}$'ye çıkacağız. Bu eşitliklerin $\mathcal{C}$'de de geçerli olduğunu kullanıp tekrar f ile $\mathbb{R}$'ye ineceğiz.
T1. a, b, $c \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$, $s = [b]$, $t = [c]$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}(r + s) + t &= ([a] + [b]) + [c] = [a + b] + [c] \\ &= [(a + b) + c] = [a + (b + c)] \\ &= [a] + [b + c] = [a] + ([b] + [c]) = r + (s + t).\end{aligned}$$

T2. $a \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun. O zaman,

$$r + [s(0)] = [a] + [s(0)] = [a + s(0)] = [a] = r.$$

$[s(0)] + r = r$ eşitliği benzer biçimde kanıtlanır.
T3. $a \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun. Eğer $a = (a_n)_n$ ise,

$$b = -a = (-a_n)_n \in \mathcal{C} \text{ ve } s = [b]$$

olsun. İstenen $r+s = s+r = [s(0)]$ eşitliğinin sağlandığını sınamak zor değildir.
T4. a, $b \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$, $s = [b]$ olsun. O zaman,

$$r + s = [a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a] = s + r$$

olur. □

Önsav 2'nin Ardından:
a. $T1$'e göre gerçel sayıları toplarken parantez kullanmaya gerek yoktur, örneğin, $(r + s) + t$ yerine $r + s + t$ ve $(r + s) + (t + u)$ yerine $r + s + t + u$ yazabiliriz.
b. $\mathbb{R}$'de $T2$ özelliğini sağlayan bir ve tek bir eleman vardır (***toplamanın etkisiz elemanı*** denir bu elemana) ve bu eleman, $T2$'nin söylediği gibi $[s(0)]$ olur. Gelecekte $[s(0)]$ yerine 0 yazacağız ama şimdi değil. Öte yandan daha şimdiden $[s(0)]$ yerine $0_{\mathbb{R}}$ yazmak fena bir fikir değildir, öyle de yapacağız.
c. Eğer $r \in \mathbb{R}$ verilmişse, $T3$'teki $r+s = s+r = [s(0)] = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini sağlayan bir ve tek bir $s \in \mathbb{R}$ vardır. Bu elemanı $-r$ olarak göstereceğiz. Kanıtta da görüldüğü üzere, $a \in \mathcal{C}$ için, $-[a] = [-a]$.
d. $\mathbb{R}$'de çıkarmayı iki değişik biçimde tanımlayabiliriz:

$$r - s = r + (-s)$$

olarak ya da $r = [a]$, $s = [b]$ için

$$r - s = [a - b]$$

olarak. İkisi de aynı kapıya çıkar ancak ikinci tanımın geçerli olması için Önsav 22.2'ye benzer bir sonucun kanıtlanması gerekmektedir. Benzer şekilde

$$-r - s \text{ ve } -r + s$$

işlemlerini de tanımlayabiliriz.

$$-(r - s) = -r + s = s - r$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak kolaydır.

Ama dikkat, toplarken paranteze gerek yoksa da çıkarırken parantezleri korumak gerekir. Aksi davranışın bırakın üniversiteye girişi, bale okuluna girişi bile engellediği bilinmektedir.
e. Her grupta olduğu gibi $\mathbb{R}$'de de sadeleştirme yapılabilir. Örneğin,

$$r + s = r + t$$

ise $s = t$ olur. Aynı şekilde $r + s = r$ ise $s = [s(0)] = 0_{\mathbb{R}}$ olur.

f. $[a] + [b] = [a + b]$ formülü, yani

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

formülü,

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun $(\mathcal{C}, +, s(0))$ grubundan $(\mathbb{R}, +, [s(0)])$ grubuna giden bir ***eşyapı fonksiyonu*** (homomorfizma) olduğunu söylüyor. Eşyapı fonksiyonunun anlamını bilmeyenlere: Toplamaya (ya da bir başka işleme) uyumlu olan, yani $f(a + b) = f(a) + f(b)$ eşitliğini sağlayan bir gruptan bir başka gruba giden f fonksiyonlarına verilen addır.

Çarpma. Çarpmayı da aynı yöntemle tanımlayacağız. $\mathbb{R}$'den r ve s elemanlarını alalım. r ve s'nin $\mathcal{C}$'de f-önimgelerini bulalım. Bu önimgelere a ve b diyelim. Demek ki

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s.$$

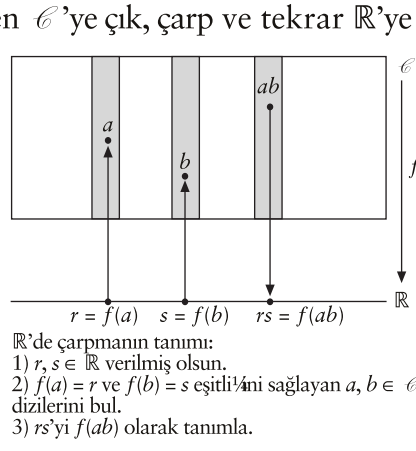
Şimdi a ve b temel dizilerini $\mathcal{C}$'de çarpıp $ab \in \mathcal{C}$ dizisini elde edebiliriz. Son olarak bu çarpımın f imgesini alıp $f(ab) \in \mathbb{R}$ bulabilir ve rs çarpımını,

$$rs = f(ab)$$

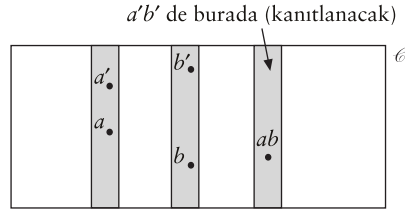
olarak tanımlamayı uygun bulabiliriz. Yani $a, b \in \mathcal{C}$ için,

$$[a][b] = [ab]$$

tanımını yapmak istiyoruz.



Ancak r ve s verildiğinde, $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitliğini sağlayan birden çok a ve b vardır; tanımın geçerli olması için bu eşitliği sağlayan tüm a ve b'lerin aynı $f(ab)$ sonucunu verdiğini kanıtlamalıyız.



Önsav 22.3. *a, b, a', $b' \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ ise $[ab] = [a'b']$ eşitliği doğrudur.*

Kanıt: Varsayıma göre $a - a' \in \mathcal{Y}_0$ ve $b - b' \in \mathcal{Y}_0$. Dolayısıyla,

$$(ab - a'b') = (a - a')b + a'(b - b') \in \mathcal{Y}_0$$

dir (Önsav 17.13), yani $[ab] = [a'b']$ eşitliği doğrudur. □

Şimdi artık, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayıları için,

$$[a][b] = [ab]$$

tanımını huzur içinde yapabiliriz, çünkü bu tanım, $\mathcal{C}$'de seçilen a ve b'ye göre değil, $\mathbb{R}$'de seçilen $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayılarına göre değişmektedir. Eğer bu önsav doğru olmasaydı,

$$[a] = [a'] \text{ ve } [b] = [b']$$

eşitlikleri doğru olmasına karşın,

$$[a][b] = [a'][b']$$

eşitliği doğru olmayabilirdi ve o zaman da çarpma işleminin tanımı geçerli olmazdı.

Kimi zaman $[a][b]$ yerine $[a] \times [b]$ ya da $[a] \cdot [b]$ yazacağız.

Önsav 22.4. *Şu özellikler doğrudur:*
Ç1. *Her r, s, $t \in \mathbb{R}$ için, $(rs)t = r(st)$.*
Ç2. *Her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.*
Ç3. *Her $0_{\mathbb{R}} \neq r \in \mathbb{R}$ için, $rs = sr = [s(1)]$ eşitliğini sağlayan bir $0_{\mathbb{R}} \neq s \in \mathbb{R}$ vardır.*
Ç4. *Her r, $s \in \mathbb{R}$ için $rs = sr$.*

Kanıt: Aynen bir önceki kanıt gibi. $\mathbb{R}$'deki bu eşitlikleri kanıtlamak için f fonksiyonunu kullanıp $\mathcal{C}$'ye çıkacağız. Bu eşitliklerin $\mathcal{C}$'de de geçerli olduğunu kullanıp tekrar f ile $\mathbb{R}$'ye ineceğiz.
Ç1, **Ç2**, **Ç4**. Önsav 22.2'nin $T1$, $T2$ ve $T4$'ün kanıtıyla aynı olduğundan kanıtı okura bırakıyoruz.

Ç3. $a = (a_n)_n \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun.$\mathcal{Y}_0 = [s(0)] = 0_{\mathbb{R}} \neq r = [a]$ olduğundan, a, $\mathcal{Y}_0$'da değildir, yani 0'a yakınsayamaz. Teorem 19.3'e göre her $n > N$ için $a_n \neq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N göstergeci vardır.

$$b_n = \begin{cases} a_n^{-1} & \text{eğer } n > N \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n \leq N \text{ ise} \end{cases}$$

ve $b = (b_n)_n$ olsun. Teorem 18.11'e göre b bir temel dizidir. O zaman ab dizisi bir zaman sonra sabit 1 dizisi olur ve dolayısıyla limiti 1'dir. Demek ki $ab - s(1)$ dizisi 0'a yakınsar, yani $\mathcal{Y}_0$'dadır. Demek ki, $[a][b] = [ab] = [s(1)]$ olur. □

Sonuç 22.5. $(\mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}, \times, [s(1)])$ *değişmeli bir gruptur, yani,*

Ç1. *Her* r, s, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ *için,* $(rs)t = r(st)$.
Ç2. *Her* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ *için,* $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.
Ç3. *Her* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ *için,* $rs = sr = [s(1)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ *vardır.*
Ç4. *Her* r, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ *için* $rs = sr$.

Sonuç 22.5 ve Önsav 22.4'ün Getirdikleri:
a. Ç1'e göre gerçel sayıları çarparken parantez kullanmaya gerek yoktur, örneğin, $(rs)t$ yerine rst ve $(rs)(tu)$ yerine $rstu$ yazabiliriz.
b. $\mathbb{R}$'de Ç2 özelliğini sağlayan bir ve tek bir eleman vardır (çarpmanın etkisiz elemanı denir bu elemana) ve bu eleman da Ç2'nin söylediği gibi $[s(1)]$'dir. Gelecekte $[s(1)]$ yerine 1 yazacağız ama şimdilik değil. Öte yandan daha şimdiden $[s(1)]$ yerine $1_{\mathbb{R}}$ yazmak fena bir fikir değildir.
c. Eğer $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ verilmişse, Ç3'teki $rs = sr = 1_{\mathbb{R}}$ eşitliğini sağlayan bir ve tek bir $s \in \mathbb{R}$ vardır. Bu elemanı s^{-1} olarak göstereceğiz. Kanıtta da görüldüğü üzere, $a \in \mathcal{C}$ için, tam olarak $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ olmasa da bu eşitlik gerçek'ten çok çok uzak değil.
d. $\mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$'de bölmeyi

$$r/s = rs^{-1}$$

olarak tanımlayabiliriz.

$$r^{-1}s^{-1} = (rs)^{-1},$$
$$(r^{-1})^{-1} = r$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak kolaydır.
e. Her grupta olduğu gibi $\mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ grubunda da sadeleştirme yapılabilir. Örneğin, $rs = rt$ ise ve $r \neq 0_{\mathbb{R}}$ ise $s = t$ olur. Bu, s ya da t, $0_{\mathbb{R}}$'ye eşitse de geçerlidir. Aynı şekilde $rs = r$ ise ve $r \neq 0_{\mathbb{R}}$ ise $s = 1_{\mathbb{R}}$ olur.

Toplama ve Çarpma. Yukarıda, önce sadece toplamayı ilgilendiren, ardından sadece çarpmayı ilgilendiren özellikleri bulduk. Şimdi bu bölümde, hem toplamayı hem de çarpmayı harmanlayan özelliği bulacağız.

Önsav 22.6. *Gerçel sayılarda çarpma toplamaya göre dağılır, yani her* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r+s)t = rt + st$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Her zamanki gibi $\mathcal{C}$'ye çıkıp $\mathcal{C}$'de benzer eşitliği kullanarak kanıtlanır. Ayrıntılar okura bırakılmıştır. □

Bunun bir sonucu olarak, her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}r = 0_{\mathbb{R}}$$

eşitliği doğrudur. Nitekim,

$$r0_{\mathbb{R}} = r(0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}) = r0_{\mathbb{R}} + r0_{\mathbb{R}}$$

ve buradan da sadeleştirerek, $r0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$ bulunur.

Teorem 22.7. $(\mathbb{R}, +, \times, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ *yapısı bir cisimdir, yani şu özellikler sağlanır:*
T1. *Her* $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r+s)+t = r+(s+t)$.
T2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + [s(0)] = [s(0)] + r = r$.
T3. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + s = s + r = [s(0)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R}$ *vardır.*
T4. *Her* $r,\ s \in \mathbb{R}$ *için* $r + s = s + r$.
Ç1. *Her* $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ *için,* $(rs)t = r(st)$.
Ç2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.
Ç3. *Her* $0_{\mathbb{R}} \neq r \in \mathbb{R}$ *için,* $rs = sr = [s(1)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $0_{\mathbb{R}} \neq s \in \mathbb{R}$ *vardır.*
Ç4. *Her* $r,\ s \in \mathbb{R}$ *için* $rs = sr$.
D. *Her* $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r+s)t = rt + st$.

Kanıt: Çoktan kanıtlandı bile... □

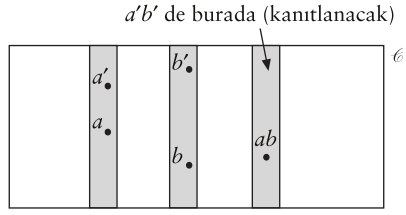
Son olarak, $f(a) = [a]$ kuralıyla tanımlanan

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

örten fonksiyonuna bir defa daha bakalım. Bu fonksiyon şu özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} f\,(a+b) &= f(a+b), \\ f\,(ab) &= f(ab), \\ f\,(s(0)) &= 0_{\mathbb{R}}, \\ f\,(s(1)) &= 1_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikler, f fonksiyonunun $\mathcal{C}$ halkasından $\mathbb{R}$ halkasına (aslında cismine) giden bir eşyapı fonksiyonu olduğunu söylüyor. Resim aşağıda.



Tabii bu arada $\mathcal{C}$'nin bir cisim olmadığını ama $\mathbb{R}$'nin bir cisim olduğunu unutmayalım. (Arife Not: Halkalar kuramınının basit bir sonucuna göre, $\mathbb{R}$'nin cisim olması $\mathcal{Y}_0$'ın $\mathcal{C}$'nin maksimal ideali olduğu anlamına gelir.)

Bir sonraki bölümde $\mathbb{R}$ üzerine bir sıralama tanımlayacağız. Sıralamayı tanımladıktan sonra, $(\mathbb{R}, +, \times, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, <)$ yapısının sıralı bir cisim olduğunu göreceğiz.

Alıştırmalar

22.1. Eğer $n = 0$ ya da 1 ise $n_{\mathbb{R}}$'nin ne olduğunu biliyoruz. Eğer $n \geq 1$ bir doğal sayıysa, $n_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ sayısını tümevarımla şöyle tanımlayalım (bkz. Bölüm 15.2):

$$(n+1)_{\mathbb{R}} = n_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}}.$$

$(-n)_{\mathbb{R}}$ sayısını da $(-n)_{\mathbb{R}} = -(n_{\mathbb{R}})$ olarak tanımlayalım. Böylece her $n \in \mathbb{Z}$ için $n_{\mathbb{R}}$ sayısını tanımlamış olduk.

$$(n+m)_{\mathbb{R}} = n_{\mathbb{R}} + m_{\mathbb{R}},$$
$$(nm)_{\mathbb{R}} = n_{\mathbb{R}} m_{\mathbb{R}}$$

eşitlikleri kanıtlayın.

Üs Almak. Dikkat ederseniz gerçel sayılarda üs almayı tanımlamadık. Bir n tamsayısı ve bir x gerçel sayısı için x^n sayısını tanımlamak hiç zor değildir. Bir $x > 0$ gerçel sayısı ve bir q kesirli sayısı için x^q sayısı da biraz zahmetle de olsa oldukça rahat biçimde tanımlanabilir. Ama bir $x > 0$ ve y gerçel sayıları için x^y gerçel sayısını tanımlamak hiç kolay değildir. Bu tanım değişik biçimlerde yapılabilir (Cauchy dizileriyle, serilerle, ln fonksiyonunun tersi olarak). Bu konuya da geleceğiz. Ama analiz dersinde.

23. Gerçel Sayılarda Sıralama

Matematiği bir iki sayfa erteleyerek, gerçel sayılarda sıralamayı nasıl tanımlayabileceğimizi tartışacağız önce. Doğal ve basit gibi görünen tanım denemelerinin zorluklarından sözettikten sonra $\mathbb{R}$'de sıralamanın matematiksel tanımını verip özelliklerini irdeleyeceğiz.

23.1 Cebirsel Tanım Tartışması

Gerçel sayılar kümesinde sıralamayı cebirsel olarak tanımlamak mümkündür ve cebirsel tanım olabilecek en basit düzeydedir: $r \leq s$ ilişkisini "$s - r$ gerçel sayısı $\mathbb{R}$'de bir karedir" (yani bir gerçel sayının kendisiyle çarpımıdır) olarak tanımlayalım.

Tanım basit ama sadece tanımı vermek yetmiyor, tanımın istenen özellikleri sağladığını da göstermek gerekiyor. Örneğin, bu tanımı kabul ederek,

$$r \leq s \text{ ve } s \leq t \text{ ise } r \leq t$$

önermesini kanıtlamak isterseniz, düşünmeye başladıktan çok kısa bir süre sonra,

$$\text{Her } a \text{ ve } b \text{ için, } a^2 + b^2 \text{ bir karedir}$$

önermesini kanıtlamak zorunda olduğunuzu görürsünüz. Oysa bu son ifade her cisimde doğru olmadığından, bunu kanıtlamak için gerçel sayıların tanımına inmemiz gerekiyor. Bu sorunu yoketmenin bir yolu, gerçel sayılarda $\leq$ eşitsizliğini, belki biraz daha karmaşık bir biçimde,

$$r \leq s \Leftrightarrow s - r \text{ karelerin toplamıdır}$$

olarak tanımlamaktır. Nitekim bu yeni tanımla,

$$r \leq s \text{ ve } s \leq t \text{ ise } r \leq t$$

önermesini kanıtlamak çok kolaydır, gerçel sayıların tanımına gitmeden kanıtlanabilir, çünkü bu her halkada ve cisimde doğrudur (karelerin toplamının toplamı da bir kare toplamıdır). Bunu kanıtlamak kolay ama bu sefer de

$$r \leq s \text{ ve } s \leq r \text{ ise } r = s$$

önermesini kanıtlarken sorun çıkar. Bu önermeyi kanıtlamak için, kolayca görülebileceği gibi

$$\textit{karelerin toplamı } 0\text{'}\textit{sa}, \textit{toplanan her kare } 0\text{'}\textit{dır}$$

önermesini kanıtlamak gerekiyor. Bu da pek o kadar kolay bir şey değildir ve gene gerçel sayıların tanımına inmek gerekir. (Sonlu cisimlerde ve $\mathbb{C}$'de bu önerme yanlıştır örneğin.)

Önerdiğimiz bu yöntemi izleyebilirdik. Biz analize daha yakın bir tanımı tercih edeceğiz.

Sıralamayı tanımlamak için pozitif sayıları tanımlamanın yeterli olduğunu görelim. Nitekim, eğer $r \geq 0$ eşitsizliğini tanımlamışsak, o zaman, $r \leq s$ eşitsizliğini $s - r \geq 0$ olarak tanımlayabiliriz. Demek ki hangi gerçel sayıların 0'dan büyükeşit olarak tanımlanması gerektiğini anlamalıyız.

Ama tabii biz yukarıdaki gibi 0 yazamayız, 0 henüz bir gerçel sayı değil, sadece bir kesirli sayı. 0 yerine şimdilik $0_{\mathbb{R}}$, yani $[s(0)]$ yazmamız gerekir. İleride, küçük bir hileye başvurarak

$$0 = 0_{\mathbb{R}} = [s(0)]$$

varsayımını yapabileceğiz.

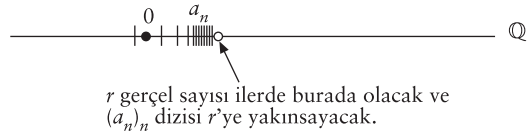
Bütün bunların aslında bu kadar zor olmaması gerekiyor, çünkü ileride kanıtlayacağımız üzere, $\mathbb{R}$ üzerine tek bir sıralama vardır.

23.2 Analitik Tanım Tartışması

r, herhangi bir gerçel sayı olsun. Diyelim $(a_n)_n \in \mathcal{C}$ için

$$r = [(a_n)_n].$$

Sezgimizi artırmak için söyleyelim: r'yi ileride $(a_n)_n$ dizisinin limiti olarak görmeyi başaracağız. (an)n kesirli sayı dizisi aslında r'ye yakınsamak amacıyla yola çıkıyor ama r orada olmadığı için yakınsayamıyor.

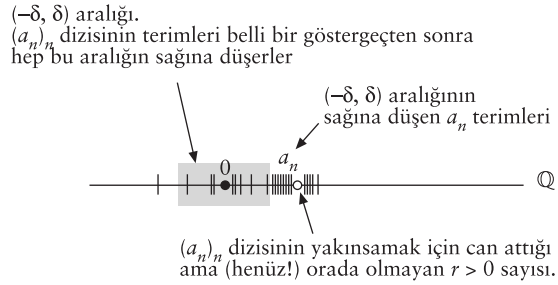


r'nin $0_{\mathbb{R}}$'den büyük eşit olmasının ne demek olması gerektiğini anlamaya çalışıyoruz. a_n'ler kesirli sayı olduklarından ve kesirli sayılarda sıralamayı bildiğimizden, a_n'nin 0'dan büyük eşit olmasının ne demek olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin bir tanımını vermeliyiz.

"$r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin geçerli olması için her n için $a_n \geq 0$ olmalı" demek, ilk deneme için fena olmasa da başarısızdır, çünkü örneğin ilk birkaç a_i terimi -1'e ve diğerleri de 1'e eşitse, o zaman $r = 1_{\mathbb{R}} > 0_{\mathbb{R}}$ olur, ve r'nin pozitif olması gerekir. Yani önerilen koşul yeterlidir ama illa gerekli değildir.

"$r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin geçerli olması için belli bir göstergeçten sonra hep $a_n \geq 0$ olmalıdır" demek biraz daha doğru olur ama bu da başarıya ulaşmaz, çünkü $a_n = -1/n$ alırsak, o zaman her n için $a_n < 0$ olur ama $r = 0_{\mathbb{R}} \geq 0_{\mathbb{R}}$ olur, yani bu koşul da yukarıdaki gibi $r \geq 0_{\mathbb{R}}$ koşulu için yeterlidir ama gerekli değildir.

$r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin tanımını vermek yerine $r > 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin tanımını vermek görece daha kolaydır, çünkü pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizinin terimleri (0'a yakınsayan bir dizinin terimlerinin aksine) **bir zaman sonra** 0'dan uzak durmak zorundadır, belli bir pozitif kesirli sayının altına inemez, yani 0'a istenildiği kadar yak



laşamaz. Tabii bizim $(a_n)_n$ dizimiz aslında r'ye yakınsamıyor (şimdilik en azından) ama hiç olmazsa yakınsarmış gibi yapıyor ve yakın gelecekte gerçekten yakınsayacak.

$(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamayan bir temel dizi olsun. Sonuç 18.10.i'e göre bu dizi zamanla 0'dan uzak durur, yani öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci vardır ki, her $n > N$ için

$$\delta < |a_n|$$

olur. Ayrıca r de pozitif olduğundan a_n bir zaman sonra pozitif olmalı ve

$$\delta < |a_n|$$

eşitsizliğinden öte,

$$\delta < a_n$$

eşitsizliği geçerli olmalı. İşte bizi tanıma götüren bu fikir olacak.

23.3 Matematiksel Tanım

Tanım. a bir gerçel sayı olsun. Bir $(a_n)_n$ temel dizisi için

$$a = [(a_n)_n]$$

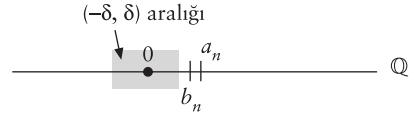
yazalım. Eğer her $n > N$ için,

$$\delta < a_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve bir N göstergeci varsa, o zaman, a'nın ***pozitif*** olduğunu söyleyeceğiz. Yani a'nın ***pozitif*** olmasi için bir $\delta > 0$ kesirli sayısı için, sonlu tanesi hariç a_n'lerin hepsi δ'dan büyük olmalıdır.

Her zaman olduğu gibi bu tanımın geçerli olması için kontrol etmemiz gereken önemli bir nokta var; o da şu: Ola ki bir başka $(b_n)_n$ temel dizisi için $a = [(b_n)_n]$ olur ve yukarıdaki tanımı $(a_n)_n$'ye uyguladığımızda a pozitif çıkar da, aynı tanımı $(b_n)_n$'ye uyguladığımızda a pozitif çıkmaz. (Acele etmeyin, henüz negatiflik kavramını tanımlamadık!) Bu durumun olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Kanıtlayalım hemen.

Önsav 23.1. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ aynı gerçel sayıyı temsil eden iki temel dizi olsun, yani $[(a_n)_n] = [(b_n)_n]$ olsun. Eğer her $n > N_a$ için $\delta_a < a_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_a > 0$ kesirli sayısı ve bir N_a göstergeci varsa, o zaman, her $n > N_b$ için $\delta_b < a_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_b > 0$ kesirli sayısı ve bir N_b göstergeci vardır.*



Kanıt: Kanıtın fikri açık olmalı: Eğer $(a_n)_n$ dizisi 0'dan uzaksa ve $(b_n)_n$ dizisi $(a_n)_n$ dizisine çok "yakınsa", o zaman $(b_n)_n$ dizisi de 0'dan uzaktır. Bu fikri kullanmak için önce şu eşitsizliğin farkına varalım:

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n \geq -|b_n - a_n| + a_n = a_n - |b_n - a_n|.$$

Eğer n göstergeci, $a_n > \delta_a$ ve $|b_n - a_n| < \delta_a/2$ olacak şekilde seçilirse, bu eşitsizliğe göre,

$$b_n \geq a_n - |b_n - a_n| > \delta_a - \delta_a/2 = \delta_a/2$$

olur ve önsav kanıtlanır. Daha biçimsel olalım:

δ_a ve N_a önsavda söylendiği gibi olsun. Varsayıma göre,

$$(b_n - a_n)_n$$

dizisi 0'a yakınsıyor. Demek ki belli bir M göstergeci için, eğer $n > M$ ise

$$|b_n - a_n| < \delta_a/2$$

olur. Şimdi $N_b = \max\{N_a, M\}$ olsun. O zaman her $n > N_b$ için,

$$\begin{aligned} b_n &= (b_n - a_n) + a_n > -|b_n - a_n| + a_n \\ &= a_n - |b_n - a_n| > \delta_a - \delta_a/2 = \delta_a/2 \end{aligned}$$

olur. Demek ki $\delta_b = \delta_a/2$ olarak alabiliriz. □

Şimdi artık gönül rahatlığıyla yukarıdaki "pozitiflik" tanımını kabul edebiliriz ve buradan hareketle gerçel sayılarda sıralamayı tanımlayabiliriz. Eğer a ve b iki gerçel sayıysa ve $a - b$ pozitifse, a'nın b'den ***daha büyük*** olduğunu söyleyeceğiz ve bunu $a > b$ olarak kısaltacağız. Demek ki,

$$a > b \Leftrightarrow a - b \text{ pozitifse.}$$

Bu tanımda $b = 0_{\mathbb{R}}$ olarak alırsak, beklenildiği gibi,

$$a > 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow a \text{ pozitifse}$$

önermesini elde ederiz. Eğer tanımda $a = 0_{\mathbb{R}}$ alırsak,

$$0_{\mathbb{R}} > b \Leftrightarrow -b \text{ pozitifse}$$

önermesini elde ederiz.

Demek ki tanıma göre, $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ temel dizileri için, $[(a_n)_n] > [(b_n)_n]$ ancak ve ancak

$$\textit{her } n > N \textit{ için } \delta < a_n - b_n \textit{ eşitsizliğinin sağlandığı bir}$$

$$\delta > 0 \textit{ kesirli sayısı ve bir } N \textit{ göstergeci varsa.}$$

Gelenek olduğu üzere, $a < b$ yerine kimileyin $b > a$ yazacağız ve b'nin a'dan *daha büyük* olduğunu söyleyeceğiz.

Gerçel sayılarda tanımladığımız $>$ ilişkisini, kesirli sayılarda tanımlanan $>$ sıralamasıyla karıştırmamak gerekir. Şimdilik ikisi ayrı şeyler, aralarındaki tek ilişki yukarıda verdiğimiz tanımda verilmiş. $[(a_n)_n] > [(b_n)_n]$ yazdığımızda, biraz önce tanımladığımız gerçel sayılardaki $>$ ilişkisinden sözediyoruz. Oysa $\delta < a_n - b_n$ ya da $n > N$ yazdığımızda δ, a_n, b_n, n ve N sayıları kesirli sayılardır ve buradaki $<$ simgesi kesirli sayılar kümesinde geçmişte tanımladığımız ve burada her şeyini bildiğimizi varsaydığımız olağan sıralamadır. Gerçel sayılarda tanımlanan $>$ ilişkisinin bir sıralama olup olmadığını henüz bilmiyoruz ama sanki birazdan bileceğiz gibi bir his var içimde:

23.4 $<$ İlişkisi Bir Tamsıralamadır

Bir önceki altbölümde tanımladığımız ilişkinin bir tamsıralama olduğunu kanıtlayalım, yani
S1. Hiçbir r için, $r < r$ ilişkisi doğru olamaz;
S2. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ve $s < t$ ise $r < t$'dir;
S3. Her r ve s için, ya $r < s$ ya $r = s$ ya da $s < r$
önermelerinin doğru olduğunu gösterelim.

Teorem 23.2. *Bir önceki altbölümde tanımlanan $<$ ilişkisi $\mathbb{R}$'yi tamsıralar.*

S1'in Kanıtı: $r < r$ önermesi ancak ve ancak $0_{\mathbb{R}} > 0_{\mathbb{R}}$ ise doğru olabileceğinden, $0_{\mathbb{R}}$'nin pozitif olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Her n için $a_n = 0$ alırsak, $0_{\mathbb{R}} = [(a_n)_n]$ olduğundan, pozitifliğin tanımında $a_n = 0$ alabiliriz. Sorumuz şu: Her $n > N$ için, $\delta < a_n = 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve bir N göstergeci var mı? Yok tabii! Demek ki $0_{\mathbb{R}}$ pozitif olamaz.

S2'nin Kanıtı: $r < s$ ve $s < t$ olsun. Demek ki $s - r$ ve $t - s$ gerçel sayıları pozitif. Eğer iki pozitif sayının toplamının da pozitif olduğunu kanıtlarsak, o zaman bu iki sayının toplamı olan

$$(s - r) + (t - s) = t - r$$

sayısının da pozitif olduğunu, yani $t > r$ ilişkisini kanıtlamış oluruz.

Şimdi iki pozitif sayının toplamının pozitif olduğunu kanıtlayalım. $a > 0$ ve $b > 0$ olsun. $a = [(a_n)_n]$, $b = [(b_n)_n]$, $\delta_a > 0 N_a$, $\delta_b > 0$ ve N_b de önsavda söylendiği gibi olsun. Ayrıca $N = \max\{N_a, N_b\}$ ve $\delta = \delta_a + \delta_b > 0$ olsun. O zaman $n > N$ için,

$$a_n + b_n > \delta_a + \delta_b = \delta$$

olur. Gerçel sayılarda toplamanın tanımına göre,

$$a + b = [(a_n)_n] + [(b_n)_n] = [(a_n + b_n)_n]$$

olduğundan, $a + b$'nin pozitif olduğu böylece kanıtlanmış oldu.

S3'ün Kanıtı: Bu biraz daha zor. $s - r$ yerine a yazarsak, her a gerçel sayısı için,

$$a > 0_{\mathbb{R}}, a = 0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}} > a$$

önermelerinden birinin doğru olduğunu kanıtlamamız gerektiğini anlarız. ($O1$ ve $O2$'ye göre bu üç önermeden sadece ve sadece biri doğru olabilir.)

Bu üç önermeden ikisinin yanlış olduğunu varsayıp üçüncüsünü kanıtlamak gerekir. Birinciyle üçüncünün yanlış olduğunu varsayıp $a = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini kanıtlayalım. (En simetrik olanını seçtik.)

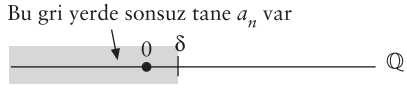
$a = [(a_n)_n]$ yazalım. $a = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini yani

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

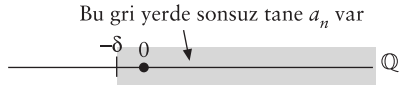
Varsayıma göre $a > 0_{\mathbb{R}}$ önermesi yanlış olduğundan, $>$ ilişkisinin tanımına göre,

Hangi $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci seçilirse seçilsin, $a_n \leq \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n > N$ vardır. Bir başka deyişle $\delta > 0$ kesirli sayısı ne olursa olsun, $a_n \leq \delta$ eşitsizliğinin sağlayan sonsuz tane n vardır.



$0_{\mathbb{R}} > a$ önermesi, $>$ ilişkisinin tanımına göre, $-a > 0_{\mathbb{R}}$ anlamına geldiğinden ve $-a = [(-a_n)_n]$ olduğundan,

Hangi $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci seçilirse seçilsin, $-a_n \leq \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n > N$ vardır. Bir başka deyişle $\delta > 0$ kesirli sayısı ne olursa olsun, $a_n \geq -\delta$ eşitsizliğinin sağlayan sonsuz tane n vardır.



Bu bilgilerin dışında bir de $(a_n)_n$ dizisinin bir temel dizi olduğunu biliyoruz. Bütün bunlardan $(a_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olduğunu kanıtlamalıyız.

Yukarıdaki bilgilere dayanarak, öyle bir mutlak artan

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

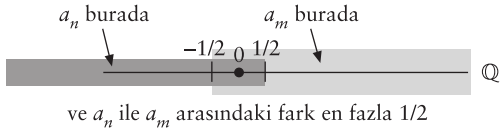
doğal sayısı dizisi bulacağız ki, her k için,

$$-1/k < a_{n_k} < 1/k$$

olacak. Bu da Sandviç Teoremi'ne göre (Teorem 17.16), $(a_{n_k})_k$ altdizisinin 0'a yakınsadığı anlamına gelir. Ama o zaman da Teorem 19.3'e göre $(a_n)_n$ dizisi de 0'a yakınsar ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olur.

Mutlak artan $(n_k)_k$ doğal sayı dizisini bulalım.

Önce n_1'i bulalım. Yukarıdaki şekilden takip edebilirsiniz.



$(a_n)_n$ bir temel dizi olduğundan öyle bir N vardır ki, n, $m > N$ için,

$$|a_n - a_m| < 1/2$$

olur. Varsayımlara göre öyle n, $m > N$ var ki,

$$a_n \leq 1/2 \text{ ve } a_m \geq -1/2$$

olur. Şimdi

$$-1 < -\frac{1}{2} \leq a_m = a_m - a_n + a_n \leq |a_m - a_n| + a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

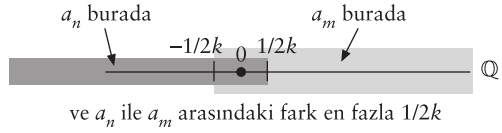
olur, yani $-1 < a_m < 1$. Demek ki $n_1 = m$ seçersek istediğimiz olur. Şimdi, her $i = 1, 2, \cdots, k-1$ için,

$$-1/i < a_{n_i} < 1/i$$

olacak biçimde $n_1 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$ göstergeçlerini bulduğumuzu varsayalım.

$$-1/k < a_{n_k} < 1/k$$

eşitsizliğini sağlayan ve n_{k-1}'den büyük bir n_k göstergeci bulacağız. Aşağıdaki şekilden takip edebilirsiniz. $(a_n)_n$ bir temel



dizi olduğundan öyle bir N vardır ki, n, $m > N$ için,

$$|a_n - a_m| < 1/2k$$

olur. Varsayımlara göre öyle n, $m > \max\{N, n_{k-1}\}$ vardır ki,

$$a_n \leq 1/2k \text{ ve } a_m \geq -1/2k$$

olur. Şimdi

$$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{2k} \leq a_m = a_m - a_n + a_n \leq |a_m - a_n| + a_n < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

olur, yani $-1/k < a_m < 1/k$. Demek ki $n_k = m$ seçersek istediğimiz olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Her zaman olduğu gibi, α, β gerçel sayıları için, "$\alpha \leq \beta$", "ya $\alpha < \beta$ ya da $\alpha = \beta$" anlamına gelecek. Elbette, Teorem 23.2'ye göre, $\alpha \leq \beta$ ifadesi ancak ve ancak $\beta < \alpha$ ifadesi yanlışsa doğrudur.

Sıralamayla işimiz bitmedi. Toplama ve çarpmanın sıralamayı koruduğunu da kanıtlamamız gerekiyor.

Teorem 23.3. *a, b ve c üç gerçel sayı olsun.*
i. *Eğer $a < b$ ise $a + c < b + c$'dir.*
ii. *Eğer $a < b$ ve $c > 0$ ise $ac < bc$'dir.*

Kanıt: i. Çok kolay.
ii. Bu da oldukça kolay. $b - a$ yerine d yazarsak,

$$d > 0 \text{ ve } c > 0 \text{ ise } cd > 0$$

önermesini kanıtlamamız gerektiğini anlarız. Kanıtlayalım.

$$d = [(d_n)_n] \text{ ve } c = [(c_n)_n]$$

olsun. Varsayıma göre, her $n > N_d$ için $\delta_d < d_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_d > 0$ kesirli sayısı ve bir N_d göstergeci vardır. Ve her $n > N_c$ için $\delta_c < c_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_c > 0$ kesirli sayısı ve bir N_c göstergeci vardır.

Şimdi, $\delta = \delta_c\delta_d$ ve $N = \max\{N_c, N_d\}$ alalım. Her $n > N$ için,

$$c_n d_n > \delta_c\delta_d = \delta$$

olur. □

Sonuç 23.4. *$\mathbb{R}$, sıralı bir cisimdir.* □

Alıştırmalar

23.1. Her $n, m \in \mathbb{R}$ için "$n_{\mathbb{R}} \leq m_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow n \leq m$" önermesini kanıtlayın. ($n_{\mathbb{R}}$'nin tanımı için bkz Bölüm 22'ün sonundaki alıştırma ya da Bölüm 15.2.)

23.2. Her sıralı halkada olduğu gibi $\mathbb{R}$'de de mutlak değer fonksiyonunu tanımlayabiliriz:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

23.3. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için, şu özellikleri kanıtlayın:
i. $|x| \geq 0$.
ii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
iii. $|-x| = |x|$.
iv. $|xy| = |x||y|$.
v. [Üçgen Eşitsizliği] $|x + y| \leq |x| + |y|$.
vi. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
vii. $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$.

23.5 Gerçel Sayılarda Tek Bir Sıralama Vardır

Okur, matematiksel olmasa da, dayatmayla da olsa, gerçel sayılarda her pozitif sayının bir karekökü olduğunu biliyordur, yani her pozitif gerçel sayı bir karedir. Dolayısıyla gerçel sayılarda sıralamayı toplama ve çarpmanın yardımıyla tanımlayabiliriz:

$$x \leq y \Leftrightarrow y = z^2 + x \text{ eşitliğini sağlayan bir } z \text{ varsa}$$

ya da,

$$x < y \Leftrightarrow y = z^2 + x \text{ ve } z \neq 2z \text{ilişkilerini sağlayan bir } z \text{ varsa}$$

Kesirli sayılarda ise her sayı bir kare değildir, örneğin 2'nin karekökü kesirli bir sayı değildir ama her kesirli sayı dört kesirli sayının karelerinin toplamıdır. (Üç kare yetmez. Neden dört karenin yettiğinin kanıtını sayılar kuramıyla ilgili bir başka kitapta görürüz.) Dolayısıyla kesirli sayılarda da sıralama toplama ve çarpmanın yardımıyla tanımlanabilir:

$$x \leq y \Leftrightarrow y = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + x \text{ eşitliğini sağlayan bir } z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ varsa}$$

Bu, daha genel bir olgunun tezahürüdür. Bir cismin olası sıralamaları büyük ölçüde cismin kareleri ve karelerin sonlu toplamları tarafından belirlenir. Anlatalım.

Sonuç 23.4 sıralı bir cisimden sözediliyor, her şeyden önce bir cisimdir. Sıralı bir cisimde ayrıca bir de bir tamsıralama, yani,

O1. Hiçbir r için, $r < r$ ilişkisi doğru olamaz;

O2. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ve $s < t$ ise $r < t$'dir;

O3. Her r ve s için ya $r < s$ ya $r = s$ ya da $s < r$

özelliklerini sağlayan ikili bir $<$ ilişkisi olmalıdır ve bu tamsıralama toplama ve çarpmayla uyum içinde olmalıdır, yani,

TO. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ise $r + t < s + t$'dir;

ÇO. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ise ve $t > 0$ ise, $rt < st$'dir özelliklerini sağlamalıdır.

Bir cisim üzerine değişik sıralamalar olabilir. Örneğin,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

kümesi, gerçel sayılardan oluşan bir cisimdir. (Neden bir cisimdir? Toplama, çarpma, çıkarma kolay da, cisimde bölme yapılabileceğini kontrol etmek gerek) ve bildiğimiz sıralama dışında bir de,

$$a + b\sqrt{2} \prec c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a - b\sqrt{2} < c - d\sqrt{2}$$

formülüyle tanımlanan $\prec$ sıralaması vardır. (Alıştırma. Bir cismin her eşyapı dönüşümü cisim üzerindeki bir sıralamayı bir başka sıralamaya dönüştürür. Bir cismin olası sıralama sayısı ilginç bir problemdir.)

Sıralı bir K cisminde $x > 0$ eşitsizliğini sağlayan elemanlara ***pozitif elemanlar*** denir. Pozitif elemanlar kümesine P dersek, K'nin P altkümesi şu özellikleri sağlar:

a. P toplama ve çarpma altında kapalıdır,

b. $0, -1 \notin P$,

c. $K = P \cup \{0\} \cup -P$.

(Kolayca görüleceği üzere, c koşulu, P'yi, K'nin, ilk iki koşulu sağlayan en büyük altkümesi yapıyor.)

Bu özellikleri sağlayan her $P \subseteq K$ altkümesi K cisminde bir sıralama belirler ve P, bu sıralamanın negatif olmayan elemanları kümesi olur. Nitekim, P verilmişse, sıralamayı

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in P$$

olarak tanımlamak yeterlidir.

Bir başka deyişle, K üzerine bir sıralama vermekle K'nin yukarıdaki özelliklerini sağlayan bir P altkümesini vermek arasında bir ayrım yoktur.

Sıralı bir cisimde her kare negatif olmayan bir elemandır. Nitekim eğer $x > 0$ ise ÇO'ya göre $x^2 > 0$; eğer $x < 0$ ise, TO'ya göre, $-x > 0$ ve

$$x^2 = (-1)^2 x^2 = ((-1)x)^2 = (-x)^2 > 0.$$

Dolayısıyla sıralı bir cisimde karelerin toplamı da TO'ya göre negatif olamaz, yani karelerin toplamı P'dedir. Karelerin sonlu toplamlarından oluşan kümeye A dersek, her sıralama için, $A \subseteq P$ olur. Eğer bir cisimde A, yukarıdaki a, b ve c özelliklerini sağlıyorsa, yani P'yi A'ya eşit alabiliyorsak, o zaman bu cisimde tek bir sıralama vardır ve o sıralama da şöyle verilir:

$$a < b \Leftrightarrow b - a \text{ sonlu sayıda karenin toplamıysa.}$$

Demek ki $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ cisimleri üzerinde tek bir sıralama vardır. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'de iki değişik sıralama olduğundan, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'nin her $\alpha > 0$ sayısı gene $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'den sonlu tane elemanın karesinin toplamı değildir. Eğer T bağımsız bir değişkense, T'nin sırasını kesirli olmayan herhangi bir gerçel sayıyla ya da $+\alpha$ ya da $-\alpha$'da belirleyerek, $\mathbb{Q}(T)$ cismini sayılamaz sonsuzlukta farklı biçimlerde sıralayabiliriz.

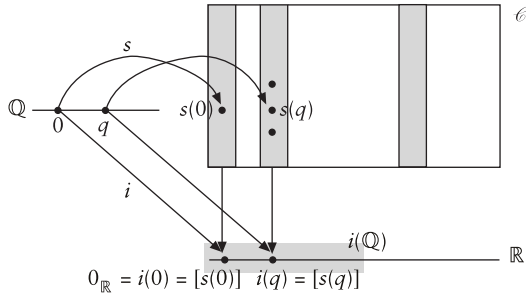
24. $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{R}$'ye Gömmek

Her kesirli sayı bir gerçel sayı olmalı, öyle öğrendik. Ama şimdilik hiçbir kesirli sayı bir gerçel sayı değil. Nitekim, bir gerçel sayı, temel bir kesirli sayı dizisinin sınıfı ve dolayısıyla hiçbir zaman bir kesirli sayı olamaz.

Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu şu kuralla tanımlayalım: $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$i(q) = [s(q)].$$

($s(q)$'nün sabit q dizisi olduğunu anımsayın.)

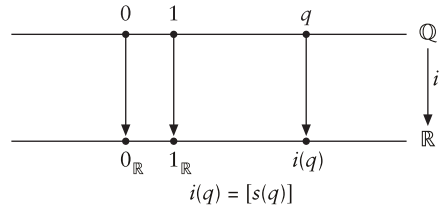


$i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{R}$'de bir "kopyası" olduğunu kanıtlayacağız. Yani $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen bir althalkası olacak ve i, dört işleme ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyon olacak. Ayrıca $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olacak. Bütün bunları yavaş yavaş kanıtlamaya başlayalım.

Önsav 24.1. *$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dört işleme ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyondur: q, $q' \in \mathbb{Q}$ için,*

$$\begin{aligned}
&i(q + q') = i(q) + i(q'),\\
&i(q - q') = i(q) - i(q'),\\
&i(qq') = i(q)i(q'),\\
&i(q/q') = i(q)/i(q') (\textit{eğer } q' \neq 0 \textit{ ise}),\\
&q < q' \Leftrightarrow i(q) < i(q'),\\
&i(0) = 0_{\mathbb{R}},\\
&i(1) = 1_{\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

Yani (matematiksel deyişle) i sıralı bir halka gömmesidir.



Kanıt: Birebirlik: q, $q' \in \mathbb{Q}$ için, $i(q) = i(q')$ olsun. Demek ki,

$$[s(q)] = [s(q')],$$

yani

$$s(q - q') = s(q) - s(q') \in \mathcal{Y}_0$$

ve

$$0 = \lim_{n\to\infty} s(q - q') = q - q'$$

ve $q = q'$.

Toplamaya Saygı:

$$i(q + q') = [s(q + q')] = [s(q) + s(q')] = [s(q)] + [s(q')] = i(q) + i(q').$$

Çarpmaya Saygı: $i(qq') = [s(qq')] = [s(q)s(q')] = [s(q)][s(q')] = i(q)i(q')$.

Etkisiz Elemanlara Saygı: $i(0) = [s(0)] = 0_{\mathbb{R}}$ ve $i(1) = [s(1)] = 1_{\mathbb{R}}$.

Yukarıdakilerden i'nin çıkarmaya ve bölmeye de saygı duyduğu çıkar. Bunların kanıtını okura bırakıyoruz.

Sıralamaya Saygı: $q < q'$ olsun ve $i(q) < i(q')$ eşitsizliğini kanıtlayalım. i çıkarmaya saygı duyduğundan, $q' - q$ yerine t yazarak,

$$t > 0 \text{ ise } i(t) > 0_{\mathbb{R}},$$

yani,

$$t > 0 \text{ ise } [s(t)] > 0_{\mathbb{R}}$$

önermesini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. $t > 0$ bir kesirli sayı olsun. Bölüm 23'teki $<$ sıralaması tanımında $\delta = t/2$ ve $N = 0$ (ya da başka bir şey) alırsak, $[s(t)]$'nin pozitif olduğunu görürüz.

Şimdi $i(q) < i(q')$, yani $[s(q)] < [s(q')]$ olsun ve $q < q'$ eşitsizliğini kanıtlayalım. $<$ sıralamasının tanımına göre, bir $\delta > 0$ kesirli sayısı için $q + \delta < q'$. Demek ki $q < q'$. □

Alıştırmalar

24.1. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $i(n) = n_{\mathbb{R}}$ eşitliğini kanıtlayın. $n_{\mathbb{R}}$'nin tanımı için bkz. Bölüm 22'nin sonundaki alıştırma ya da Bölüm 15.2.

Sonuç 24.2. *$q \in \mathbb{Q}$ için, $i(-q) = -i(q)$ ve $i(|q|) = |i(q)|$.*

Kanıt: Önsav 24.1'den, $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$i(-q) = i(0 - q) = i(0) - i(q) = 0_{\mathbb{R}} - i(q) = -i(q),$$

yani $i(-q) = -i(q)$ çıkar. i'nin mutlak değere saygı duyduğu da çıkar:

$$i(|q|) = i(\max\{q, -q\}) = \max\{i(q), i(-q)\} = \max\{i(q), -i(q)\} = |i(q)|.$$

(Bkz. Alıştırma 2. İkinci eşitlik i'nin sıralamaya saygı duymasının bir sonucudur.) □

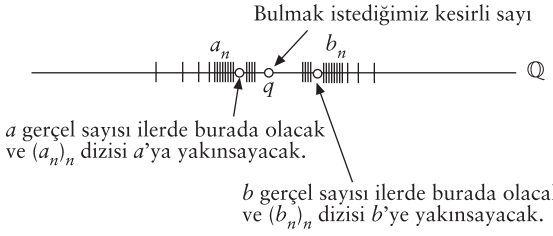
Sonuç 24.3. *$i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'nin bir althalkasıdır ve i, $\mathbb{Q}$ ve $i(\mathbb{Q})$ halkaları arasında bir (sıralı halka) eşyapı eşlemesidir.*

Eşyapı eşlemesinin ne demek olduğunu bilmeyen okura: Aynen Önsav 24.1'de söylenenleri sağlayan bir eşleme demektir.

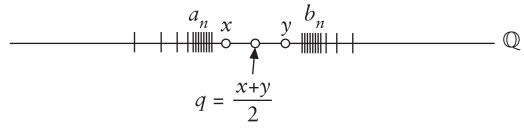
Bölümün bundan sonrasında $i(\mathbb{Q})$ althalkasının $\mathbb{R}$'de ***yoğun*** olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 24.4. *$i(\mathbb{Q})$ althalkası $\mathbb{R}$'de yoğundur, yani herhangi iki gerçel sayı arasında $i(\mathbb{Q})$ althalkasından bir eleman vardır.*

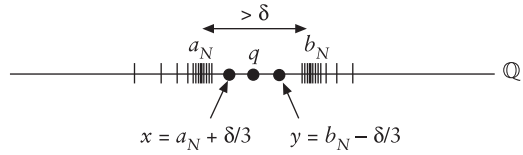
Kanıt: $a < b$ iki gerçel sayı olsun. $a < i(q) < b$ eşitsizliklerini sağlayan kesirli bir q sayısı bulmak istiyoruz. $a = [(a_n)_n]$ ve $b = [(b_n)_n]$ olacak biçimde iki kesirli temel sayı dizisi seçelim. Kanıtın nasıl olması gerektiği konusunda bir fikir sahibi olabilmek için, hayal gücümüzü kullanarak a'yı b'yi sırasıyla $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerini limiti olarak görelim.



Şu planı öneriyoruz. 1) Öyle bir x kesirli sayısı bulalım ki, bir zaman sonra a_n'ler x'ten küçük olsunlar. 2) Öyle bir y kesirli sayısı bulalım ki, bir zaman sonra b_n'ler y'den büyük olsunlar. 3) $x < y$ olsun. 4) $q = (x+y)/2$ alalım (x'le y'nin orta noktası) ve $a < i(q) < b$ eşitsizliklerini kanıtlayalım.



Aşağıdaki resim kanıtın fikrini resimlemeye çalışıyor, o resimden kanıtı takip etmeye çalışın.

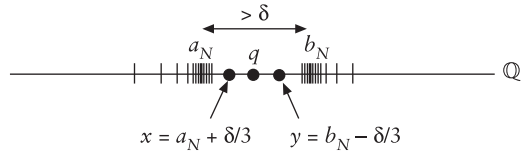


$a < b$ olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N_1 göstergeci vardır ki, $n > N_1$ için $a_n + \delta < b_n$ olur.

$(a_n)_n$ temel bir dizi olduğundan, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, $n, m > N_2$ için $|a_n - a_m| < \delta/3$ olur.

$(b_n)_n$ temel bir dizi olduğundan, öyle bir N_3 göstergeci vardır ki, $n, m > N_3$ için $|b_n - b_m| < \delta/3$ olur.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2, N_3\} + 1$ ve $x = a_N + \delta/3, y = b_N - \delta/3$ olsun. Elbette x ve y birer kesirli sayıdırlar.



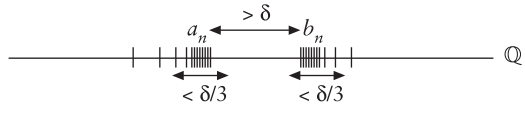
$n > N$ için, $a_n < x$ eşitsizliğini kanıtlayalım:

$$a_n = a_N + a_n - a_N \leq a_N + |a_n - a_N| < a_N + \delta/3 = x.$$

Ve $n > N$ için, $y < b_n$ eşitsizliğini kanıtlayalım.

$$b_n = b_N + b_n - b_N \geq b_N - |b_n - b_N| > b_N - \delta/3 = y.$$

Şimdi de $x < y$ eşitsizliğini kanıtlayalım. Daha iyisini



bile yapabiliriz: $x + \delta/3 < y$ eşitsizliğini bile kanıtlayabiliriz:

$$\begin{aligned} y - x &= (b_N - \delta/3) - (a_N + \delta/3) \\ &= b_N - a_N - 2\delta/3 > \delta - 2\delta/3 = \delta/3 > 0. \end{aligned}$$

Şimdi $q = (x + y)/2$ olsun, yani x'le y'nin orta noktası.

$$a < i(q) < b$$

eşitsizliklerini kanıtlamamız gerekiyor. Sadece $a < i(q)$ eşitsizliğini kanıtlayacağız, diğeri çok benzer.

Öyle bir $\delta_1 > 0$ ve M bulmalıyız ki, her $n > M$ için $a_n + \delta_1 < q$ olmalı.

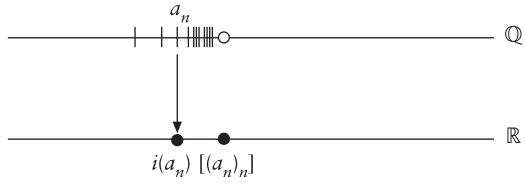
Önce $q - x = (y - x)/2 > (\delta/3)/2 = \delta/6$ eşitliğinin farkına varalım. Şimdi $\delta_1 = \delta/6$ ve $N = M$ alırsak istediğimizi buluruz: Her $n > N$ için,

$$a_n + \delta_1 < x + \delta_1 = x + \delta/6 < q.$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Son olarak, daha sonra ihtiyaç duyacağımız bir sonuç kanıtlayalım.

Önsav 24.5. *Eğer $(a_n)_n$ azalmayan bir temel diziyse o zaman her n için $i(a_n) \leq [(a_n)_n]$.*



Bu sonuç aşağıdaki daha genel önsavın bir sonucudur. (Neden? Not: Önsav 24.5'in ifadesindeki $i(a_n)$ terimindeki n ile $[(a_n)_n]$ terimindeki n'lerin işlevleri ayrı. Birincisindeki n sabit bir göstergeç, ikincisindeki ise bir değişken. Birincisini m yaparsanız rahat edersiniz.)

Önsav 24.6. *Eğer $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ temel dizilerse ve belli bir göstergeçten sonra $a_n \leq b_n$ ise o zaman $[(a_n)_n] \leq [(b_n)_n]$ olur.*

Kanıt: Eğer $c_n = a_n - b_n$ alınırsa, aşağıdaki önsavın kanıtlanmasının yeterli olduğu görülür. □

Önsav 24.7. *Eğer $(c_n)_n$ bir temel diziyse ve belli bir göstergeçten sonra $c_n \leq 0$ ise o zaman $[(c_n)_n] \leq 0_{\mathbb{R}}$ olur.*

Kanıt: $[(c_n)_n] > 0_{\mathbb{R}}$ varsayımını yapalım. O zaman öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı vardır ki, belli bir göstergeçten sonra $\delta < c_n$ olur ki bu da $c_n \leq 0$ varsayımıyla çelişir. □

25. $\mathbb{R}$'nin Tamlığı ve $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Bu bölümde, $\mathbb{R}$'de bir sayıya yakınsamaya meyilli her $\mathbb{R}$-dizinin gerçekten bir gerçel sayıya yakınsadığını göstereceğiz.

$\mathbb{Q}$ cisminde bunun doğru olmadığını görmüştük, örneğin $\sqrt{2}$'ye yakınsamak isteyen, ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığı için yakınsayamayan kesirli bir sayı dizisinin varlığını göstermiştik: Terimleri pozitif kesirli sayılar olan öyle bir $(a_n)_n$ temel dizisi bulmuştuk ki, karelerin limiti 2'ydi, yani $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 2$ idi ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığından dizinin kendisi hiçbir kesirli sayıya yakınsamıyordu.

"$\mathbb{R}$'de yakınsamaya meyilli dizi" demek, temel $\mathbb{R}$-dizisi demektir. Alışılmış tanım şöyle: $(x_n)_n$ bir $\mathbb{R}$-dizisi olsun. Eğer $\mathbb{R}$'nin her pozitif ϵ sayısı için, N'den büyük her n, $m > N$ sayısının

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağladığı bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***temel*** $\mathbb{R}$-dizisi denir. ($\mathbb{R}$'de mutlak değerin tanımı ve özellikleri için bkz. Bölüm 23.5, Alıştırma 2.) Yani bir $(x_n)_n$ gerçel sayı dizisinin temel $\mathbb{R}$-dizisi olması için, her pozitif ϵ gerçel sayısı için, öyle bir N göstergeci olmalı ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanmalı. Eğer bu tanımda $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{Q}$ alınırsa, temel $\mathbb{Q}$-dizisinin tanımı elde edilir.

Temel $\mathbb{R}$-dizilerine de matematikte geleneksel olarak ***Cauchy dizileri*** denir ve biz de bu terminolojiyi kullanacağız, ama temel $\mathbb{Q}$-dizilerine temel $\mathbb{Q}$-dizileri demeye devam edeceğiz.

$\mathbb{R}$'de bir dizinin limitinin ne demek olduğunu da tanımlayalım: $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her pozitif $\epsilon \in \mathbb{R}$ için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya ***yakınsar*** ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin ***limitidir*** denir. Böyle bir diziye ***yakınsak dizi*** denir, aksi hâlde diziye ***ıraksak*** denir.

Alıştırmalar

25.1. $(x_n)_n$, x'e yakınsayan bir gerçel sayı dizisiyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin $|x|$'e yakınsadığını gösterin.

25.2. Bir gerçel sayı dizisinin en fazla bir gerçel sayıya yakınsayabileceğini kanıtlayın. (Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ hakkı doğar.)

25.3. Kesirli sayı dizileriyle ilgili teoremleri gerçel sayı dizilerine uyarlayıp kanıtlayın.

25.4. "$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x| \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$" önermesini kanıtlayın.

Şu önemli ve sık sık kullanılacak kanıtlarda: $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan (Teorem 24.4), tanımlardaki ϵ'u $i(\mathbb{Q})$ althalkasından seçebiliriz. Nitekim eğer $(x_n)_n$ gerçel sayı dizisi,

$$\textit{her } \epsilon > 0_{\mathbb{R}} \textit{ gerçel sayısı için, öyle bir } N \textit{ vardır ki, her } n,\ m > N \textit{ için,} \\ |x_n - x_m| < \epsilon \textit{ olur}$$

özelliğini sağlıyorsa, o zaman elbette $(x_n)_n$ dizisi,

$$\textit{her } q > 0 \textit{ kesirli sayısı için, öyle bir } N \textit{ vardır ki, her } n,\ m > N \textit{ için,} \\ |x_n - x_m| < i(q) \textit{ olur}$$

özelliğini de sağlar. Tersine, eğer $(x_n)_n$ dizisi yukarıdaki ikinci özelliği sağlıyorsa ve $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ herhangi bir gerçel sayıysa, $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, $0 < i(q) < \epsilon$ eşitsizliklerini sağlayan pozitif bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır ve ikinci özelliğe göre her n, $m > N$ için, $|\alpha_n - \alpha_m| < i(q) < \epsilon$ eşitsizliklerinin sağlandığı bir N vardır.

Aynı şey yakınsaklık kavramı için de geçerlidir.

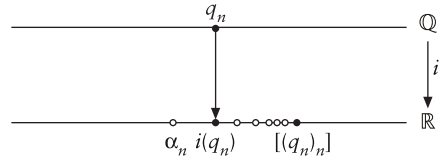
İşte bu bölümde kanıtlayacağımız ana teorem:

Teorem 25.1. $\mathbb{R}$*'de her Cauchy dizisinin bir limiti vardır. Matematiksel jargonla söylemek gerekirse,* $\mathbb{R}$ ***tamdır****.*

Bu teorem sayesinde, bir gerçel sayı dizisinin yakınsak olduğunu anlamak için illa dizinin limitini bulmaya gerek kalmayacak.

Kanıtımızın planı şöyle: Bir $(\alpha_n)_n$ Cauchy dizisi verilmiş olsun.

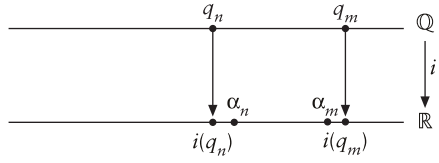
Birinci Adım: Teorem 24.4'e göre $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğundur. Demek ki her α_n gerçel sayısının "çok çok yakınında" $i(\mathbb{Q})$'den bir eleman bulabiliriz.



Bu elemana $i(q_n)$ diyelim. $q_n \in \mathbb{Q}$ elbette. $i(q_n)$, α_n gerçel sayısına $i(1/n)$ kadar yakın olsun, yani,

$$|\alpha_n - i(q_n)| < i(1/n)$$

olsun. $(\alpha_n)_n$ dizisiyle uğraşacağımıza, çok daha makul bir gerçel sayı dizisi olan $(i(q_n))_n$ dizisiyle uğraşacağız.



İkinci Adım: $i(q_n)$ sayısı α_n'ye de çok yakın olduğundan, $(i(q_n))_n$ dizisinin de aynen $(\alpha_n)_n$ dizisi gibi bir Cauchy dizisi olduğunu kolaylıkla kanıtlayacağız.

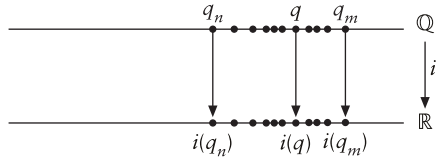
Üçüncü Adım: Bir önceki adımdan $(q_n)_n$ dizisinin temel bir $\mathbb{Q}$-dizisi olduğu çıkacak. Demek ki $[(q_n)_n]$ bir gerçel sayıdır.

Dördüncü Adım: Ardından $(i(q_n))_n$ dizisinin $[(q_n)_n]$ gerçel sayısına yakınsadığını kanıtlayacağız.

Beşinci Adım: Dördüncü adımdan $(\alpha_n)_n$ dizisinin $[(q_n)_n]$ gerçel sayısına yakınsadığı çıkacak ve teorem kanıtlanacak.

Kanıtta bir yerde $(i(1/n))_n$ gerçel sayı dizisinin $0_{\mathbb{R}}$ sayısına yakınsadığını kanıtlamamız gerekecek. Bunu hemen yapalım, hatta daha genel bir şey kanıtlayalım.

Önsav 25.2. *$(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi q kesirli sayısına yakınsıyorsa, $(i(q_n))_n$ gerçel sayı dizisi $i(q)$ gerçel sayısına yakınsar.*



Kanıt: $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ herhangi bir gerçel sayı olsun. Teorem 24.4'e göre,

$$0_{\mathbb{R}} < i(e) < \epsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan bir e kesirli sayısı vardır. Önsav 24.1'e göre $e > 0$'dır. $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi q kesirli sayısına yakınsadığından, öyle bir N göstergeci vardır ki, her $n > N$ için, $|q_n - q| < e$ olur. Her iki tarafın da i-imgesini alırsak, Sonuç 24.2'den, $|i(q_n) - i(q)| < i(e) < \epsilon$ bulunur. □

Sonuç 25.3. $\lim_{n\to\infty} i(1/n) = 0_{\mathbb{R}}$.

Kanıt: Kanıttan ziyade açıklamalara ihtiyacımız var. Önsava göre,

$$\lim_{n\to\infty} i(1/n) = i\left(\lim_{n\to\infty} 1/n\right) = i(0) = 0_{\mathbb{R}}.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 1'in Kanıtı: İlk adımdan başlayalım: $n > 0$ bir doğal sayı olsun. Demek ki $1/n > 0$ ve $i(1/n) > 0_{\mathbb{R}}$'dir. $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan (Teorem 24.4), $\alpha_n - i(1/n)$ ile $\alpha_n + i(1/n)$ arasında $i(\mathbb{Q})$'den bir eleman vardır. Bu elemana, $q_n \in \mathbb{Q}$ için, $i(q_n)$ diyelim. Demek ki,

$$\alpha_n - i(1/n) < i(q_n) < \alpha_n + i(1/n),$$

yani $-i(1/n) < i(q_n) - \alpha_n < i(1/n)$, dolayısıyla $|i(q_n) - \alpha_n| < i(1/n)$.

Birinci adım tamamlandı. (Eksikliğini hissediyorsanız $q_0 = 0$ alabilirsiniz.) Sıra ikinci adımda.

İkinci Adım: *$(i(q_n))_n$ bir Cauchy dizisidir.*

$\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ olsun. Öyle bir N göstergeci bulacağız ki, her n, $m > N$ için, $|i(q_n) - i(q_m)| < \epsilon$ olacak. Bunun için, $(\alpha_n)_n$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ve $i(q_n)$'yi de istediğimiz kadar α_n'ye yaklaştıracağımızı kullanacağız.

$$|i(q_n) - i(q_m)|$$

ifadesiyle oynayıp

$$|i(q_n) - i(q_m)| < \epsilon$$

eşitliğinin geçerli olması için n ve m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. $|i(q_n) - i(q_m)|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned} |i(q_n) - i(q_m)| &< |i(q_n) - \alpha_n + \alpha_n - \alpha_m + \alpha_m - i(q_m)| \\ &\leq |i(q_n) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - i(q_m)| \\ &\leq i(1/n) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/m). \end{aligned}$$

(İkinci satırdaki eşitsizlik için bkz. Bölüm 23.5, Alıştırma 2.) Demek ki, $i(1/n)$, $|\alpha_n - \alpha_m|$, $i(1/m)$ ifadelerinin her birini $\epsilon/3$'ten küçük yaparsak istediğimiz olur. N_1, her n, $m > N_1$ için,

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\epsilon}{3}$$

eşitsizliğinin sağlandığı göstergeç olsun. $(\alpha_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan böyle bir göstergeç vardır. Sonuç 25.3'e göre, $(i(1/n))_n$ gerçel sayı dizisinin $0_{\mathbb{R}}$ sayısına yakınsadığından, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$i(1/n) < \frac{\epsilon}{3}$$

olur. Şimdi N, hem N_1'den hem de N_2'den büyükeşit herhangi bir doğal sayı olsun, mesela $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. O zaman, her n, $m > N$ için,

$$\begin{aligned} |i(q_n) - i(q_m)| &< i(1/n) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/m) \\ &< i(1/N) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/N) \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

Üçüncü Adım: $(q_n)_n$ *temel bir dizidir.*

$\epsilon > 0$ herhangi bir kesirli sayı olsun. O zaman $i(\epsilon) > 0_{\mathbb{R}}$'dir. İkinci adıma göre $(i(q_n))_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $|i(q_n) - i(q_m)| < i(\epsilon)$ olur. Buradan ve Önsav 24.1'den $|q_n - q_m| < \epsilon$ çıkar.

Üçüncü adımdan, $[(q_n)_n]$ diye bir gerçel sayının varlığı çıkar.

Dördüncü Adım: $(i(q_n))_n$ dizisi $[(q_n)_n]$ *gerçel sayısına yakınsar.*

Herhangi bir $e > 0$ kesirli sayısı seçelim. Öyle bir M bulmak istiyoruz ki, her $m > M$ için

$$|[(q_n)_n] - i(q_m)| < i(e)$$

olsun. ($\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ gerçel sayısı yerine $e > 0$ kesirli sayısı seçebileceğimizi bölümün başında göstermiştik.) Öte yandan,

$$|[(q_n)_n] - i(q_m)| = |[(q_n)_n] - [s(q_m)]| = |[(q_n - q_m)_n]| = [(|q_n - q_m|)_n]$$

eşitlikleri geçerlidir ve

$$\text{“}[(|q_n - q_m|)_n] < i(e)\text{”}$$

ifadesi,

“öyle bir N göstergeci ve $d > 0$ kesirli sayısı vardır ki, $n > N$ için,

$$\text{“}|q_n - q_m| + d < e\text{”}$$

anlamına gelir. Demek ki verilmiş herhangi bir $e > 0$ kesirli sayısı için, öyle M ve N göstergeçleri ve $d > 0$ kesirli sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ ve her $m > M$ için

$$|q_n - q_m| + d < e$$

olsun. N'yi M'ye eşit bulmanın bir sakıncası olamaz elbet. İşimiz bayağı kolaylaştı: $(q_n)_n$ dizisi temel bir dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için,

$$|q_n - q_m| < e/2$$

olur. Şimdi $d = e/2$ seçelim. Her n, $m > N$ için

$$|q_n - q_m| + d < e/2 + e/2 = e$$

olur.

Beşinci Adım: $(\alpha_n)_n$ *dizisi* $[(q_n)_n]$ *gerçel sayısına yakınsar.*

Birinci adıma göre, her n için, $|i(q_n) - \alpha_n| < i(1/n)$. Ayrıca Önsav 25.2'ye (ya da Sonuç 25.3'e göre)

$$\lim_{n\to\infty} i(1/n) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Bu iki olgudan ve Sandviç Teoremi'nden (Teorem 17.16),

$$\lim_{n\to\infty} |i(q_n) - \alpha_n| = 0_{\mathbb{R}}$$

çıkar.

Şimdi $[(q_n)_n]$ gerçel sayısını α ile gösterelim ve bildiklerimizi yazalım:

a. $\lim_{n\to\infty} i(q_n) = \alpha$. (Dördüncü adım.)

b. $\lim_{n\to\infty} |i(q_n) - \alpha_n| = 0_{\mathbb{R}}$.

Sonucumuz bu iki olgudan çıkacak: $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$, herhangi bir pozitif sayı olsun.

$$|\alpha_n - \alpha|$$

sayısını belli bir göstergeçten sonra ϵ'dan küçük yapmaya çalışacağız.

$$|\alpha_n - \alpha| = |\alpha_n - i(q_n) + i(q_n) - \alpha| \leq |\alpha_n - i(q_n)| + |i(q_n) - \alpha|$$

eşitsizliğinden, $|\alpha_n - i(q_n)|$ ve $|i(q_n) - \alpha|$ sayılarını $\epsilon/2$'den küçük yapmak gerektiği anlaşılır. Varsayımlardan dolayı her ikisi de mümkün. Ana teorem kanıtlanmıştır. □

25.1 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Kesirli sayılar kümesi gerçel sayılar kümesinin bir altkümesidir... diye öğretilmiştir bize. Oysa burada inşa edildiği şekilde, hiçbir kesirli sayı bir gerçel sayı olamaz, çünkü, burada tanımlandığı biçimiyle, her gerçel sayı bir kesirli sayı kümesidir.

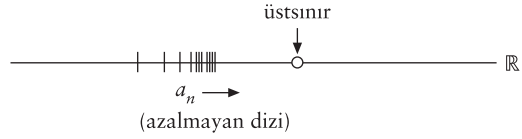
Kesirli sayıları gerçel sayı olarak görmenin birçok yolu vardır. Bu yolların en kestirmesi, kesirli sayılar kümesinin eski tanımını unutup yeni tanım olarak $i(\mathbb{Q})$'yü kabullenmektir. Bir başka yöntem, $\mathbb{R}$'nin tanımını değiştirmektir: Eğer eski $\mathbb{R}$'den $i(\mathbb{Q})$'yü çıkarıp yerine $\mathbb{Q}$'yü koyarsak, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olur:

$$\text{yeni } \mathbb{R} = (\text{eski } \mathbb{R} \setminus i(\mathbb{Q})) \cup \mathbb{Q}$$

Bölüm 13.8'te bu yöntemi ayrıntılarıyla açıklamıştık. Bundan böyle $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{Q}$'nin altkümesi olduğunu varsayacağız.

26. Sınırlı ve Artan Diziler

Bu bölümde kanıtlayacağımız teoremi, "artan ve üstten sınırlı bir gerçel sayı dizisinin üstsınıra çarpmasına ramak kalır" biçiminde özetleyebiliriz. (Üstsınır kavramını Bölüm 28'da göreceğiz.)



İşte teorem:

Teorem 26.1. *Sınırlı ve artan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin $\mathbb{R}$'de limiti vardır.*

Kanıt: Kanıtın ana fikri belli: Eğer dizi artansa ama her sayıyı aşamıyorsa, o zaman dizinin terimleri belli bir sayıyı aşmamak için giderek daha fazla birbirine sokulmalı, yani dizi bir Cauchy dizisi olmalı. Bu fikri uygulamaya sokalım.

Teoremin doğru olmadığını varsayıp bir çelişki elde edelim. $(a_n)_n$, sınırlı ve artan ama Cauchy olmayan bir dizi olsun.

$(a_n)_n$ Cauchy dizisi olmadığından, öyle bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı vardır ki, her N için,

$$|a_n - a_m| \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan n, $m > N$ vardır. Dizi arttığından, bunu şöyle de yazabiliriz: Öyle bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı vardır ki, her N için,

$$a_n - a_m \geq \epsilon$$

sağlayan $n > m > N$ vardır. Böyle bir ϵ'u sabitleyip dizinin ayyuka çıkmak zorunda olduğunu gösterelim. Yukarıdaki özelliğe (*) adını verelim.

(*) özelliğinde $N = 0$ alalım. O zaman,

$$a_{n_1} - a_{n_0} \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan $n_1 > n_0 > 0$ vardır.

(*) özelliğinde $N = n_1$ alırsak, $a_{n_3} - a_{n_2} \geq \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan

$$n_3 > n_2 > n_1$$

göstergeçleri buluruz. $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ olduğundan, $a_{n_3} - a_{n_1} \geq a_{n_3} - a_{n_2} \geq \epsilon$ olur. Özetle: $n_3 > n_1$ için,

$$a_{n_3} - a_{n_1} \geq \epsilon.$$

Ardından, (*) özelliğinde $N = n_3$ alarak, $a_{n_5} - a_{n_4} \geq \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan $n_5 > n_4 > n_3$ buluruz. $a_{n_4} \geq a_{n_3}$ olduğundan, $a_{n_5} - a_{n_3} \geq a_{n_5} - a_{n_4} \geq \epsilon$ olur: Özetle: $n_5 > n_3 > n_1$ için,

$$a_{n_5} - a_{n_3} \geq \epsilon.$$

Bunu böylece sürdürebiliriz: Eğer, her $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için,

$$a_{n_{2i+1}} - a_{n_{2i-1}} \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan

$$n_0 < n_1 < n_3 < n_5 < \ldots < n_{2k+1}$$

göstergeçleri bulunmuşsa, bir sonraki aşamada, (*) özelliğinde $N = n_{2k+1}$ alıp,

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+2}} \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan

$$n_{2k+1} < n_{2k+2} < n_{2k+3}$$

göstergeçleri bulunur. $a_{n_{2k+2}} \geq a_{n_{2k+1}}$ olduğundan,

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+1}} \geq a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+2}} \geq \epsilon$$

olur.

Şimdi $a_{n_{2k+1}}$'in k ile birlikte çok büyüdüğünü, her sayıyı aştığını gösterelim.

Önce bulduklarımızı altalta yazalım:

$$\begin{aligned} a_{n_3} - a_{n_1} &\geq \epsilon \\ a_{n_5} - a_{n_3} &\geq \epsilon \\ a_{n_7} - a_{n_5} &\geq \epsilon \\ &\ldots \\ a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+1}} &\geq \epsilon. \end{aligned}$$

Ve bunları toplayalım. Sadeleştirmelerden sonra şu kalır:

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_1} \geq (k+1)\epsilon,$$

yani

$$a_{n_{2k+3}} \geq (k+1)\epsilon + a_{n_1}$$

buluruz. Görüldüğü gibi, eğer k'yi yeterince büyük alırsak, $a_{n_{2k-1}}$ terimi her sayıyı aşar ve bu da dizinin sınırlı olmasıyla çelişir. □

Sonuç 26.2. *Sınırlı ve azalan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin $\mathbb{R}$'de limiti vardır.*

Kanıt: Eğer $(a_n)_n$, sınırlı ve azalan bir diziyse, $(-a_n)_n$, sınırlı ve artan bir dizidir, dolayısıyla Cauchy'dir. Dolayısıyla $(a_n)_n$ dizisi de Cauchy'dir. □

Alıştırmalar

26.1. Eğer $r \in (0,1)$ ise $(r^n)_n$ dizisinin azalan ve alttan sınırlı olduğunu kanıtlayın. Dizinin limitinin 0 olduğunu kanıtlayın. (**İpucu:** Limite ℓ diyelim. $(r^{2n})_n$ dizisi hem ℓ'ye hem ℓ^2'ye yakınsar. Teorem 17.18'de bunu $\mathbb{Q}$ için kanıtlamıştık, ama bu kanıt değişik.)

26.2. $(a_n)_n$ artan ve a'ya yakınsayan bir diziyse, her n için, $a_n \leq a$ eşitliğini kanıtlayın.

26.3. Teorem 26.1'in Arşimet olmayan sıralı cisimler için yanlış olduğunu gösterin.

27. İki Yakınsak Gerçel Dizi Örneği

Burada geçen bölümde kanıtladığımız teoremin birkaç uygulamasını göreceğiz. Teoremi anımsayalım: *Sınırlı ve azalmayan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin* $\mathbb{R}$*'de limiti vardır.*

Notlar ve Örnekler

27.1. Her $r \in \mathbb{R}$ için, $\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$.

Kanıt: Bunu Örnek 17.7'de $\mathbb{Q}$ için kanıtlamıştık. Burada aynı şeyi çok daha kolay biçimde $\mathbb{R}$ için yapacağız. Alıştırma 4'e göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki vardır:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Eğer n'yi yeterince büyük, diyelim N'den büyükeşit seçersek, $r/(n+1)$ sayısı 1'den küçük olur ve $x_{n+1} < x_n$ eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik her $n > N$ için doğru olduğundan, bundan, $(x_n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azalan bir dizi olduğu anlaşılır. Önsav 25.2'ye göre xxx Referans Sonuç 17.2'ye. Sonuç 17.2 yok. Önsav 17.2 var.xxx dizinin N'inci terimden sonraki kuyruğu belli bir x sayısına yakınsar; dolayısıyla dizinin kendisi de x'e yakınsar. Bu x'i bulmalıyız. Yukarıda kanıtladığımız

$$x_{n+1} = \frac{r}{n+1}x_n$$

eşitliğinin her iki tarafınının da n sonsuza giderken limitini alırsak, $x = 0.x = 0$ buluruz.

Notlar ve Örnekler

27.2. $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ vardır ve 2 ile 3 arasında bir sayıdır.

Birinci Adım. *Her* $n > 0$ *doğal sayısı ve her* $x > -1$ *için,*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Kanıt n üzerine tümevarımladır ve çok kolaydır. Zaten geçmişte Bernoulli eşitsizliği olarak kanıtlamıştık.

İkinci Adım. *Her $n > 0$ doğal sayısı için,*

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3.$$

Birinci adımda $x = 1/n$ alırsak,

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliği hemen çıkar. $(1 + 1/n)^n \leq 3$ eşitsizliği aşağıdaki dikkatli hesaptan çıkar.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \frac{1}{n^i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \\
&< 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \\
&= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^i}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Üçüncü Adım. *Her $n > 0$ doğal sayısı için,*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sağdaki ifadeyle biraz oynayalım.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı, $a = 1 + 1/n$ yazarsak, kanıtlamak istrediğimiz eşitsizlik,

$$a^n \leq \left(a - \frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine, yani

$$\frac{1}{a} \leq \left(1 - \frac{1}{an(n+1)}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine, yani

$$\frac{n}{n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine dönüşür. Ama dikkat edilirse bu aynen $x = 1/(n+1)^2$ için, birinci adımdaki eşitsizliktir bu:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \leq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Artık kanıtımız tamamlanmıştır.

Analiz kitabımızda [GA] xxx cite bu dizinin e adı verilen matematiğin ve evrenin çok önemli bir sabitine yakınsadığını göstereceğiz.

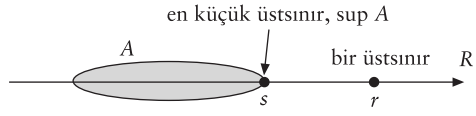
28. En Küçük Üstsınır

$\mathbb{R}$'nin tamlığını, yani $\mathbb{R}$'nin her temel dizisinin yakınsak olduğunu gösterdik. Bu, $\mathbb{Q}$'de olmayan bir özellikti. Bu bölümde $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$'de olmayan "bir başka" önemli özelliğini göstereceğiz. "Bir başka"yı tırnak içinde yazmamızın nedeni, göstereceğimiz bu yeni özelliğin aslında $\mathbb{R}$'nin tamlığına eşdeğer olması yani aslında gerçekten bir başka özellik olmaması...

Önce teoremi yazalım, teoremde geçen terimleri hemen akabinde tanımlayacağız.

Teorem 28.1. *$\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı olan her altkümesinin bir en küçük üstsınırı vardır.*

Önce teoremdeki terimleri açıklayalım. R tamsıralı bir küme olsun, örneğin $R = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{Q}$ olabilir (bildiğimiz sıralamayla). $A \subseteq R$ ve $r \in R$ olsun. Eğer her $a \in A$ için, $a \leq r$ ise, r'ye A'nın ***üstsınırı*** adı verilir. Eğer $s \in R$, A'nın üstsınırlarının en küçüğüyse, yani s, A'nın bir üstsınırıysa ve A'nın her r üstsınırı için $s \leq r$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman s'ye A'nın (R'de) ***en küçük üstsınırı*** adı verilir. Herhangi bir



A ve R için, A'nın üstsınırı olmayabilir. Ayrıca bir üstsınır olduğunda da üstsınırların en küçüğü olmayabilir. Örneğin, $A = \mathbb{Z}$ ve $R = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise, A'nın R'de üstsınırı yoktur. Eğer $R = \mathbb{Q}$ ve

$$B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

ise B'nin ($\mathbb{Q}$'de) üstsınırı vardır ama ($\mathbb{Q}$'de) en küçük üstsınırı yoktur (bkz. Alıştırma 3). Öte yandan lise yıllarından beri bilindiği üzere B'nin $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınırı vardır (ve bu en küçük üstsınır $\sqrt{2}$ diye yazılan gerçel sayıdır.) Bu bölümde bunu matematiksel olarak kanıtlayacağız.

Bir A altkümesinin en küçük üstsınırı, varsa, biriciktir elbette (neden elbette?) ve bu eleman $\sup A$ ya da eküs(A) diye yazılır. Eğer en küçük üstsınırın R'de alındığı illa belirtilmek isteniyorsa, o zaman $\sup_R A$ yazılımı yeğlenir.

Alıştırmalar

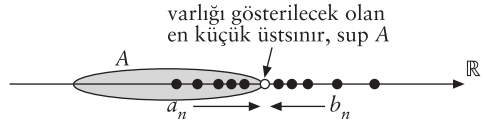
28.1. S tamsıralı bir küme ve $A \subseteq R \subseteq S$ olsun. $\sup_S A$ ve $\sup_R A$ varsa $\sup_S A \leq \sup_R A$ eşitsizliğini kanıtlayın.

28.2. Öyle tamsıralı bir S ve $A \subseteq R \subseteq S$ altkümeleri bulun ki,
- **a.** $\sup_R A$ olsun ve A'nın bir elemanı olsun.
- **b.** $\sup_R A$ olsun ama A'nın bir elemanı olmasın.
- **c.** $\sup_R A$ olmasın ama $\sup_S A$ olsun.
- **d.** $\sup_S A$ olmasın ama $\sup_R A$ olsun.

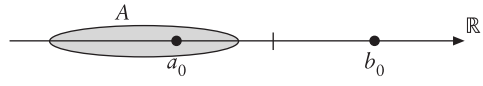
28.3. $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'de bir en küçük üstsınırı olmadığını kanıtlayın.

28.4. Bir kümenin en fazla bir tane en küçük üstsınırı olabileceğini kanıtlayın.

Teorem 28.1'in Kanıtı: A, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı bir altkümesi olsun. Amacımız, bir azalmayarak diğeri artmayarak üstsınıra yakınsayan $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri bulmak. Bu dizilerin ortak limiti A'nın üstsınırı olacak.



A boşküme olmadığından, A'dan bir a_0 elemanı alabiliriz. b_0 da A'nın bir üstsınırı olsun. Elbette $a_0 \leq b_0$.



Şimdi a_0'la b_0'ın orta noktası olan $(a_0 + b_0)/2$'ye bakalım. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırı değilse

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$
$$b_1 = b_0$$

olsun. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırıysa,

$$a_1 = a_0$$
$$b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

olsun. Bir sonraki aşamayı aynı biçimde a_0 ve b_0 yerine a_1 ve b_1'le devam ettirelim. Genel olarak,

- $b_{i+1} - a_{i+1} = (b_i - a_i)/2$,
- A'da a_i'den büyükeşit bir eleman vardır,
- b_i, A'nın bir üstsınırıdır

özelliklerini sağlayan bir

$$a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$$

dizisi bulduğumuzu varsayalım. Yukarıdaki yöntemle diziyi bir adım daha götürebiliriz: a_n ile b_n'nin orta noktası olan

$$\frac{a_n + b_n}{2}$$

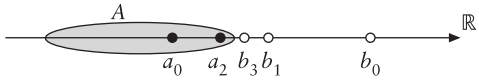
sayısına bakalım. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırı değilse o zaman

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} &= b_n \end{aligned}$$

olsun. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırıysa,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \end{aligned}$$

olsun. İstenen tüm özellikler sağlanır.



Her a_{i+1}, ya a_i'ye eşit ya da a_i ve b_i'nin orta noktası.
Her b_{i+1}, ya b_i'ye eşit ya da a_i ve b_i'nin orta noktası.

$(a_n)_n$ artan ve üstten (b_n'ler tarafından) sınırlı bir dizi olduğundan bir limiti vardır (Teorem **??**) Bu limite a adını verelim. Benzer nedenden $(b_n)_n$ dizisinin de bir limiti vardır; bu limite de b diyelim. Elbette, her n için,

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

eşitlikleri doğrudur (Alıştırma 2). Ama

$$b_{i+1} - a_{i+1} = \frac{b_i - a_i}{2}$$

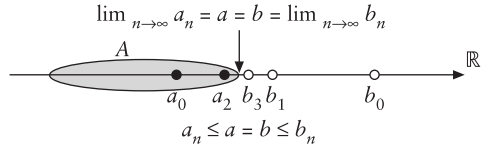
eşitliğinden dolayı, her n için,

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

eşitliği de doğrudur. Demek ki,

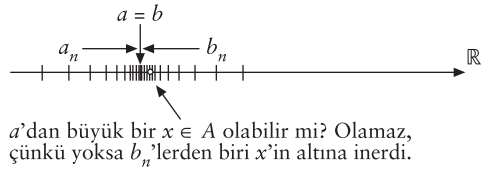
$$0 \leq b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n < \frac{b_0 - a_0}{n}$$

ve tarafların limitini alırsak, sağ taraf 0'a gittiğinden, Sandviç Teoremi'nden dolayı (Teorem 17.16) $b = a$ buluruz.

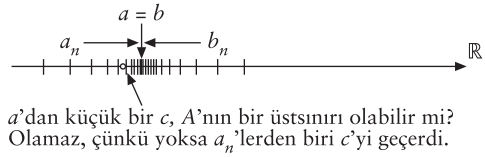


Şimdi a'nın A'nın en küçük üstsınırı olduğunu kanıtlayalım.

Her şeyden önce a, A'nın bir üstsınırı olduğunu kanıtlamalıyız. Aşağıdaki şekilden takip edin. Eğer $x \in A$, a'dan büyük olsaydı, o zaman, $(b_n)_n$ dizisi azalarak (daha doğrusu artmayarak) $b = a$'ya yakınsadığından, belli bir n için, $a \le b_n < x$ olurdu ki, b_n bir üstsınır olduğundan bu imkânsızdır.



Peki a, A'nın en küçük üstsınırı mıdır? Eğer c, a'dan küçük A'nın bir başka üstsınırı olsaydı, $(a_n)_n$ dizisi artarak (daha doğrusu azalmayarak)



a'ya yakınsadığından, belli bir n için,

$$c < a_n \le a$$

olurdu ki, bu da c'nin A'nın üstsınırı olmasıyla çatışırdı. (Çünkü A'da a_n'den büyükeşit bir eleman vardır ve bu eleman c'den de büyük olurdu...) □

Altsınır ve en büyük altsınır kavramlarını tanımlamayı ve aşağıdaki sonucu teoremden çıkarmayı okura burakıyoruz.

Sonuç 28.2. $\mathbb{R}$*'nin alttan sınırlı olan ama boş olmayan her altkümesinin bir en büyük altsınırı vardır.* □

29. Gerçel Sayıların Üsleri

Herhangi bir R halkasında, elemanların doğal sayı güçlerini alabiliriz. $r \in R$ ve pozitif bir n tamsayısı için r^n diye bir eleman tahmin edildiği gibi (n üzerine tümevarımla) şöyle tanımlanır:

$$r^1 = r,$$
$$r^{n+1} = rr^n = r^n r.$$

Yani r^n, r'nin kendisiyle n defa çarpılmasıyla elde edilen eleman anlamına gelir. Eğer $r \neq 0$ ise $r^0 = 1$ olarak tanımlanır da 0^0 bazen 1 olarak tanımlanır bazen de tanımsız olarak kabul edilir, yazarına, yazısına ve kitabına göre değişir. Biz bu yazılık $0^0 = 1$ tanımını kabul edelim. Ne yararını ne de zararını göreceğiz: Her n doğal sayısı için,

$$r^{\,0} = 1,$$
$$r^{\,n+1} = rr^n = r^n r.$$

Eğer R bir cisimse, ya da cisim olmasa da r, R'de tersinirse, o zaman $n \geq 0$ için, $r^{-n} = (r^n)^{-1} = (r^{-1})^n$ olarak tanımlanır. Bu tanımla, her n, $m \in \mathbb{Z}$ için,

$$r^{n+m} = r^n r^m$$
$$(r^n)^m = r^{nm}$$

eşitlikleri doğrudur. Bunların kanıtları çok kolay ve standarttır, dolayısıyla okura bırakılmıştır. Okurun ayrıca değişmeli her halkada geçerli olan binom açılımını bildiğini de varsayacağız. Ayrıca sıralı halkalarda,

$$0 \leq r \leq s \text{ ve } n > 0 \text{ için } 0 \leq r^n \leq s^n \text{ olur}$$

gibi standart önermeleri de varsayıyoruz.

Bu bölümdeki amacımız, bir $q \in \mathbb{Q}$ için r^q diye bir eleman tanımlamak. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $r^{1/n}$ diye bir sayı tanımlayabilirsek, o zaman,

$$r^{m/n} = (r^{1/n})^m$$

tanımını yapabiliriz. (Sahi yapabilir miyiz! Aşağıdaki gri kutucuğa bakın). $r^{m/n}$'den şimdilik vazgeçip $r^{1/n}$ diye bir eleman tanımlamaya çalışalım. Tanımı şöyle yapmayı deneyelim:

$$r^{1/n} = s \Leftrightarrow s^n = r.$$

Bu doğal tanım denemesine göre, eğer R'de $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir s varsa, $r^{1/n}$ diye bir elemanı s olarak tanımlayabiliriz. Ama acele etmeyelim, eğer R'de $s^n = r$ eşitliğini sağlayan birden çok s varsa o zaman $r^{1/n}$ diye tanımlayacağımız elemanı R'nin $s^n = r$ eşitliğini sağlayan s elemanlarının arasından seçmeliyiz. Rasgele bir seçim yapmak matematikte çoğunlukla bir sorun teşkil ettiğinden, mümkünse bu seçimi en doğal biçimde yapmak isteriz. Eğer R sıralıysa ve işimizi görecek birden çok s varsa, bu s'ler arasından en büyüğünü seçmek doğal bir seçim olarak kabul edilebilir. Örneğin, gerçel sayılarda $s^2 = 2$ eşitliğini sağlayan iki sayı vardır ve 2'nin karekökü olarak bunlardan en büyüğünü (pozitif olanını) seçeriz.

Eğer $r < 0$ ise $s^2 = r$ eşitliğini sağlayan bir s'nin olamayacağını biliyoruz (sıralı halkalarda kareler negatif olamazlar, bkz Önsav 15.8.vi., dolayısıyla eğer n çiftse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir s de olamaz. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin negatif olmayan sayılarına odaklanalım.

Teorem 29.1. *$r \geq 0$ bir gerçel sayıysa ve $n > 0$ bir doğal sayıysa, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir $s \geq 0$ gerçel sayısı vardır.*

Kanıt: Teorem $\mathbb{Q}$'de doğru olmadığından, kanıtta $\mathbb{R}$'ye özgü olan özellikleri kullanmalıyız.

Elbette $r > 0$ ve $n > 1$ varsayımlarını yapabiliriz.

Ayrıca $r \neq 1$ varsayımını da yapabiliriz.

Bir de ayrıca $r > 1$ varsayımını yapabiliriz, çünkü eğer teorem, 1'den büyük sayılar için kanıtlanmışsa, 1'den küçük sayılar için de kanıtlanmış olur. Nitekim, eğer $0 < r < 1$ ise, o zaman $1 < 1/r$'dir, dolayısıyla eğer $s^n = 1/r$ eşitliğini sağlayan bir s bulunmuşsa, $(1/s)^n = r$ eşitliği de sağlanır. Bundan böyle $r > 1$ olsun.

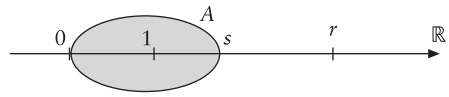
Şimdi asıl kanıta girişelim.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{\geq 0} : x^n \leq r\}$$

olsun. ($\mathbb{R}^{\geq 0}$, $\mathbb{R}$'nin negatif olmayan elemanlarının kümesidir.) $0,\ 1 \in A$ olduğundan, A boşküme olamaz. Ayrıca

$$(1 + r)^n \geq 1 + rn > 1 + r > r$$

olduğundan, A üstten sınırlıdır. Demek ki A'nın $\mathbb{R}$'de bir en küçük üstsınırı vardır. (Dolayısıyla kanıt $\mathbb{Q}$'de geçersizdir.) Bu üstsınıra s diyelim. $s^n = r$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, ne $s^n < r$ ne de $s^n > r$ eşitsizliğininin doğru olduğunu kanıtlayacağız.

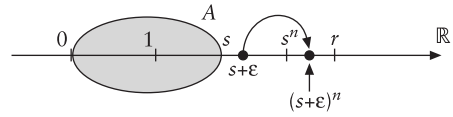


Birinci Adım: *$s^n < r$ eşitsizliği doğru olamaz.*
Kanıt: $s^n < r$ eşitsizliğini varsayalım. Öyle bir $\varepsilon > 0$ bulacağız ki,

$$(s+\varepsilon)^n \leq r$$

olacak, yani $s < s+\varepsilon \in A$ olacak, ama s, A'nın en küçük üstsınırı olduğundan bu imkânsız...

$(s+\varepsilon)^n \leq r$ eşitsizliğinin doğru olması için ε'un ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Elimizdeki tek ipucu $0 < s^n < r$ eşitsizliği. Eğer böyle bir



$\varepsilon > 0$ varsa, ε'u 1'den de küçükeşit seçebileceğimiz bariz. Bundan böyle, varlığını kanıtlamak istediğimiz ε'un 1'den küçükeşit olduğunu varsayalım. (Kafanız karışmışsa da okumaya devam edin. Özetle, $(s+\varepsilon)^n \leq r$ eşitsizliğini sağlayan 1'den küçükeşit bir ε bulacağız.) $(s+\varepsilon)^n$ ifadesiyle oynamaya başlayalım:

$$(s+\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i = s^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \leq^? r$$

Doğruluğunu bilmediğimiz $\leq$ işaretinin üstüne bir soru işareti koyduk. Demek ki,

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \leq^? r - s^n.$$

eşitsizliğini sağlayan bir ε arıyoruz. Yukarıdaki ifadenin sol tarafıyla (çok büyütmeden) oynayalım. Öncelikle $\varepsilon \leq 1$ olacağından, $\varepsilon^i \leq \varepsilon$'dur. Soldaki ifadede ε^i yerine ε koyarsak, daha büyük bir ifade buluruz ama ε sayesinde bu daha büyük ifadeyi de istediğimiz kadar küçültebiliriz.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \leq \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} \right) \leq^? r - s^n.$$

Demek ki, soru işaretli eşitsizliği sağlayan bir ε bulmak yeterli. Ama bu çok kolay,

$$\varepsilon = \frac{r - s^n}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}}$$

almak yeterli. Haaa... Unuttuk... ε'u 1'den küçükeşit yapmak gerekiyordu. O zaman, ε'u,

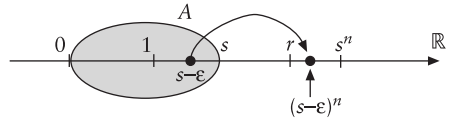
$$\frac{r-s^n}{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^{n-i}}$$

sayısıyla 1'in maksimumu seçelim. Birinci adım tamamlanmıştır.

İkinci Adım: *$s^n > r$ eşitsizliği doğru olamaz.*
Kanıt: $s^n > r$ eşitsizliğini varsayalım. Öyle bir $\varepsilon > 0$ bulacağız ki,

$$(s-\varepsilon)^n \geq r$$

olacak, ama $s-\varepsilon$, s'den küçük olduğundan, $s-\varepsilon$, A'nın bir üstsınırı olamaz, dolayısıyla $s-\varepsilon < a$ koşulunu sağlayan bir $a \in A$ olmalı ve o zaman da $r \leq (s-\varepsilon)^n < a^n \leq r$ olur ve bir çelişki elde edilir.



$(s-\varepsilon)^n \geq r$ eşitsizliğinin doğru olması için ε'un ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Elimizdeki tek ipucu $0 < r < s^n$ eşitsizliği. $(s-\varepsilon)^n$ ifadesiyle oynamaya başlayalım:

$$(s-\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}s^{n-i}\varepsilon^i = s^n + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}s^{n-i}\varepsilon^i \geq^{?} r.$$

ε'u soru işaretli yer doğru olacak biçimde seçmeye çalışacağız. Soru işaretli yeri düzenleyelim.

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i+1}s^{n-i}\varepsilon^i \leq^{?} s^n - r$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varepsilon > 0$ bulmaya çalışıyoruz. Bütün -1'leri atarsak, soldaki ifadeden daha büyük bir ifade buluruz. Ayrıca ε'u 1'den küçükeşit seçmeyi kabul edersek, ε^i'lerin yerine daha büyük olan ε koyabiliriz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i+1}s^{n-i}\varepsilon^i &\leq \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^{n-i}\varepsilon^i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^{n-i}\varepsilon = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^{n-i}\right) \leq^{?} s^n - r.\end{aligned}$$

Soru işaretli eşitsizliğin doğru olduğu bir $0 < \varepsilon \leq 1$ seçebilirmiyiz. Evet: ε,

$$\frac{s^n-r}{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}s^{n-i}}$$

sayısıyla 1'in maksimumu olsun. İkinci adım da tamamlanmış ve böylece teorem tamamen kanıtlanmıştır. □

Teorem 29.2. *r bir gerçel sayı ve $n > 0$ bir doğal sayı olsun. n tekse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek s gerçel sayısı vardır. $r > 0$ ve n çiftse, biri negatif diğeri pozitif olmak üzere $s^n = r$ eşitliğini sağlayan iki tane s gerçel sayısı vardır. $r < 0$ ve n çiftse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan gerçel sayı yoktur.*

Kanıt: Önce, $r > 0$ ise, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tane pozitif s gerçel sayısı olduğunu kanıtlayalım. Bunun için,

$$\text{“}0 < s < t \text{ ise } s^n < t^n\text{”}$$

önermesini kanıtlamak yeterli. Bu da her sıralı halkada geçerlidir ve kanıtı çok basittir.

Eğer n çiftse ve s, $s^n = r$ eşitliğini sağlıyorsa, $-s$ de aynı eşitliği sağlar. Demek ki $s^n = r$ eşitliğini sağlayan sayılar negatif ve pozitif olmak üzere eşit sayıda dağılmışlardır. Yukarıda kanıtlanandan bu eşitliği sağlayan en az iki s olduğu çıkar. Üçüncüsünün olamayacağı da yukarıdakinden çıkar.

Eğer n tekse, o zaman “$s < t$ ise $s^n < t^n$” önermesi her sıralı halkada geçerlidir ve kanıtı çok basittir. Bundan da bu durumda $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek s gerçel sayısı olduğu çıkar.

Sonuç 29.3. *$r \geq 0$ bir gerçel sayıysa $n > 0$ bir doğal sayıysa, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek pozitif s gerçel sayısı vardır.*

Biricik olan bu s sayısını $r^{1/n}$ olarak yazalım. Bu tanımda $r \geq 0$ ve $n > 0$ dır. Bir de şu tanımı yapalım: Eğer $r > 0$ ise,

$$r^{1/(-n)} = (r^{1/n})^{-1}.$$

Ve şimdi m, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ve $r > 0$ için,

$$r^{m/n} = (r^m)^{1/n}$$

tanımını yapalım. Bu tanımın geçerli bir tanım olması için sınanması gereken önerme şudur:

m, n, u, $v \in \mathbb{Z}$, n, $q \neq 0$ ise ve $m/n = u/v$ ise, o zaman,

$$(r^m)^{1/n} = (r^u)^{1/v}$$

eşitliği geçerlidir.

Bunun kanıtını meraklı okura bırakıyoruz. Böylece her $q \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı ve her $r \in \mathbb{R}^{>0}$ için, r^q gerçel sayısı tanımlanmış olur. Bu arada r^0 sayısının 1 olarak tanımlandığına dikkatinizi çekerim. Eğer $q > 0$ ise, $0^q = 0$ tanımı da yapılabilir. $0^0 = 1$ tanımının ne bir önemi ne de bir sakıncası vardır.

Teorem 29.4. *Eğer $q \neq 0$ ise, $r \mapsto r^q$ olarak tanımlanan*

$$\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu bir eşlemedir. Eğer $q > 0$ ise bu fonksiyon sıralamayı korur, yoksa ters çevirir. Ayrıca, her p, $q \in \mathbb{Q}$ ve her r, $s > 0$ için,

$$\begin{aligned} r^p r^q &= r^{p+q}, \\ (r^p)^q &= r^{pq}, \\ r^p s^p &= (rs)^p \end{aligned}$$

eşitlikleri doğrudur. □

Yukarıdaki kanıtlarda sadece ve sadece $\mathbb{R}$'nin tamlığını ve Arşimet olduğunu kullandık. Dolayısıyla çok daha genel bir teorem doğrudur.

Teorem 29.5. *Yukarıdaki teoremlerin her biri $\mathbb{R}$ yerine Arşimet özelliği olan sıralı bir tam cisimde de doğrudur. Demek ki böyle bir R cisminde*

$$\{x \in R : x \geq 0\} = \{x^2 : x \in R\}$$

eşitliği doğrudur. □

Bu arada r, $s \in \mathbb{R}^{>0}$ için, r^s diye bir sayı tanımlamadığımızı özellikle belirtiriz. Örneğin, şimdilik $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ diye bir sayı yoktur. Hatta $2^{\sqrt{2}}$ diye bir sayı da yoktur henüz, en azından bu aşamaya kadar tanımlanmamıştır.

Örneğin $\mathbb{R}$'de vuku bulan

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^{1/6})^2 = (yok)^2$$

sorunundan dolayı $r^{m/n} = (r^{1/n})^m$ tanımı sorunludur.

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$$

sorunundan dolayı $r^{m/n} = (r^m)^{1/n}$ tanımıda en hafif deyimiyle rahatsız edicidir. $x^{1/3}$ sayısı $x \mapsto x^3$ eşlemesinin tersi olarak tanımlanabilir.

30. Yakınsak Gerçel Dizi Örnekleri ve Alıştırmalar

Bu bölümde birkaç yakınsak dizi örneği daha göreceğiz. Verdiğimiz örneklerin her biri hem kendi başına hem de kullanılan yöntem açısından önemlidir.

Notlar ve Örnekler

30.1. $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$.
Kanıt: Elbette $2^{1/n} \geq 1$. Ayrıca $(2^{1/n})_n$ azalan bir dizidir. Demek ki limiti vardır ve limiti en az 1 olabilir. Bu limite ℓ diyelim. O zaman,

$$\ell = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2/2n} = (\lim_{n\to\infty} 2^{1/2n})^2 = \ell^2.$$

Bundan da, $\ell = 0$ olamayacağından, $\ell = 1$ çıkar.

30.2. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.
Kanıt: Elbette $n^{1/n} \geq 1$.
$n \geq 3$ için bu dizinin azalan olduğunu göstereceğiz.

$$(n+1)^{1/(n+1)} \leq n^{1/n} \Leftrightarrow (n+1)^n \leq n^{n+1} \Leftrightarrow (1+1/n)^n \leq n$$

mantıksal denkliklerinden ve Örnek 27'nin ikinci adımından dolayı, $n \geq 3$ için dizinin azalan olduğunu görürüz. Demek ki dizi Cauchy dizisidir ve dolayısıyla $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır. Bu limite ℓ diyelim. O zaman, bildiğimiz teoremleri ve Örnek 1'i kullanarak,

$$\begin{aligned} 1 \leq \ell &= \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (2n)^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/2n} n^{1/2n} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} 2^{1/n}\right)^{1/2} \left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^{1/2} = 1 \cdot \sqrt{\ell} = \sqrt{\ell} \end{aligned}$$

buluruz. Buradan da $\ell = 1$ çıkar.

30.3. Eğer $|x| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$. Aksi hâlde dizi ıraksaktır.
Kanıt: $|x| < 1$ olsun. x yerine $|x|$ alarak, x'in negatif olmadığını varsayabiliriz. Eğer $x = 0$ ise sorun yok. Bundan böyle $0 < x < 1$ olsun.
$\lim_{n\to\infty} n/(n+1) = 1$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$x < n/(n+1)$$

olur. Şimdi $n > N$ için,

$$(n+1)x^{n+1} = (n+1)xx^n < nx^n.$$

Demek ki dizi zamanla azalıyor. Dolayısıyla bir limiti vardır. Bu limite ℓ diyelim. Eğer $\ell \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty} nx^n = \lim_{n\to\infty} (n+1)x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (nx^{n+1} + x^{n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} nx^{n+1} + \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} nx^n x = x \cdot \lim_{n\to\infty} nx^n = x \cdot \ell.\end{aligned}$$

Demek ki $\ell = 0$.

Eğer $|x| \geq 1$ ise, dizi sınırlı olmadığından yakınsak da olamaz.

30.4. $x_0 = 1$ olsun. $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ olsun. Dizinin limitini bulun.

Yanıt: Dizinin ilginçliğini görmek için ilk birkaç terimi yazalım:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}}, \ldots$$

Eğer limit varsa, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ eşitliğinin her iki tarafın da limitini alarak, $x = \sqrt{2x}$ buluruz. Bunun karesini alalım: $x^2 = 2x$ çıkar. Bundan da $x = 0$ ya da 2 bulunur.

Dizinin artan olduğunu kanıtlayalım. $x_n < x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız, yani (dizi bariz biçimde pozitif olduğundan) $x_n^2 < 2x_n$ eşitsizliğini, yani $x_n \leq 2$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Bunu tümevarımla kanıtlayalım.

$$x_0 = 1 < 2$$

eşitsizliği belli. Şimdi $x_n < 2$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman,

$$x_{n+1} = \sqrt{(2x_n)} < \sqrt{(2 \cdot 2)} = \sqrt{4} = 2.$$

İstediğimiz kanıtlandı. Demek ki dizi artıyor ve üstten 2 tarafından sınırlı. Demek ki dizinin bir limiti var: 0 ya da 2. Dizi pozitif olduğundan ve arttığından, dizi 2'ye yakınsar.

Alıştırmalar

30.5. Yukarıdaki örneği 2 yerine herhangi bir $a \geq 0$ için yapın. Örneğin,

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}}, \ldots$$

dizisinin akibeti nedir?

30.6. $x_0 = 1$ olsun. $x_{n+1} = (2x_n)^{1/3}$ olsun. Dizinin limiti var mıdır, varsa limiti bulun.

30.1 Yakınsak Gerçel Dizi Alıştırmaları

Alıştırmalar

30.7. $a, b > 0$ iki gerçel sayıysa, $\lim_{n\to\infty}(a^n + b^n)^{1/n} = \max\{a, b\}$ eşitliğini kanıtlayın.

30.8. Limiti 0 olan ama $(a_n/a_{n+1})_n$ dizisinin yakınsak olmadığı bir $(a_n)_n$ dizisi bulun.

30.9. $-1 < r \leq 1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın. Eğer r bu aralıkta değilse dizi hakkında ne diyebilirsiniz?

30.10. $p(X), q(X) \in \mathbb{R}[X]$ iki polinom olsun. $q(X) \neq 0$ olsun. Eğer $\deg p < \deg q$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0$$

eşitliğini, eğer $\deg p = \deg q$ ise ve a ve b sırasıyla p ve q polinomlarının başkatsayısıysa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a}{b}$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer $\deg p > \deg q$ ise dizinin ıraksak olduğunu kanıtlayın.

30.11. Aşağıdaki limitleri bulun ve limitin gerçekten limit olduğunu limitin tanımından hareketle kanıtlayın.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n+2},\ \lim n\to\infty \frac{2n-1}{-n+2},\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{-n^2+2},\ \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2-2n-1}{3n^2+2}$$

30.12. Aşağıdaki limitleri hesaplayın:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-n}-n\Big).$$

30.13. Aşağıdaki eşitlikleri gösterin:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n^2+n-5}\right)^n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n^2+n-5}\right)^{\frac{n-1}{3n+2}} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^3-n-5}\right)^{\frac{n^2-1}{3n+2}} = 0.$$

(Son iki eşitlik için gerçel sayılarda kök almayı bilmelisiniz.)

30.14. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki gerçel sayı dizisi olsun. $y \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve her n için $|y_n - y| \leq |x_n|$ olsun. $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ eşitliğini kanıtlayın.

30.15. $(x_n)_n$ yakınsak bir gerçel sayı dizisi olsun.

$$y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

olsun. $(y_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğini kanıtlayın.

30.16. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olsun. $n > 2$ için,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

olsun.

30.17. Her n için $1 \leq x_n \leq 2$ eşitsizliklerini kanıtlayın.

30.18. $x_n - x_{n+1} = (-1)^n/2^{n-1}$ eşitliğini kanıtlayın.

30.19. Eğer $m > n$ ise, $|x_n - x_m| < 1/2^{n-1}$ eşitsizliğini kanıtlayın.

30.20. $(x_n)_n$ dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlayın.

30.21. $x_{n+2} - x_1 = 1 - 1/2 + 1/4 - \cdots + (-1)^n/2^n$ eşitliğini kanıtlayın ve buradan $\lim_{n\to\infty} x_n$'yi bulun.

30.22. $x_n = 1/1^2 + \cdots + 1/n^2$ olsun.

30.23. Her $n \geq 1$ için, $x_n \leq 1 - 1/n$ eşitsizliğini kanıtlayın. Buradan $(x_n)_n$ dizisinin yakınsaklığını çıkarın.

30.24. Yeterince büyük n doğal sayısı için, $n^2 \leq 2^n$ eşitsizliğini kanıtlayın. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq 1 + 1/4 + 1/9 + 1/8 = 107/72$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

30.25. x bir gerçel sayı, $x_0 = x$ ve $x_{n+1} = 1/(4 - x_n)$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi varsa ve yakınsaksa, limitin $2 \pm \sqrt{3}$ olması gerektiğini kanıtlayın. Eğer $x \in [2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$ ise limitin $2 + \sqrt{3}$ olması gerektiğini kanıtlayın. Başka x değerleri için dizinin limitini tartışın.

30.26. Eğer her n için,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $c \in [0, 1)$ varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***büzülen dizi*** adı verilir. Büzülen bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu, dolayısıyla yakınsadığını kanıtlayın.

30.27. Öyle bir $\mathbb{Q}$-dizisi bulun ki, sayılamaz sonsuzlukta Cauchy altdizisi olsun.

30.28. 0'a yakınsayan $\mathbb{Q}$-dizilerinin kardinalitesi kaçtır?

31. Sıralı Halkalarda Yakınsaklık ve Tamlık

31.1 Diziler ve Yakınsaklık

Terimleri bir X kümesinden gelen bir diziye X-dizisi adını verelim. X-dizilerinden oluşan kümeyi $\mathcal{D}(X)$ ile gösterelim.

Sıralı bir halkanın bir r elemanı için, $|r|$ elemanı, $\max\{r, -r\}$ olarak tanımlanır ve adına r'nin ***mutlak değeri*** denir. Mutlak değer tahmin edilen tüm özellikleri sağlar.

Tanım 31.1. *R sıralı bir halka olsun. $(x_n)_n \in \mathcal{D}(R)$ ve $a \in R$ olsun. Eğer her pozitif $\varepsilon \in R$ için,*

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya **topolojik yakınsar** *ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin* **topolojik limitidir** *denir.*

Eğer $R = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise, bu ders notlarında daha önce tanımlanandan değişik bir kavram elde etmeyiz. Bu yüzden "topolojik" nitelemesini kullanmayacağız.

Aslında x_n terimleri ve a elemanı bir başka halkada da olabileceklerinden, "yakınsar" yerine "R'de yakınsar" dememiz daha doğru olur. İleride bu ufacık ayrımın önemi olacak.

Demek ki $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her pozitif $\varepsilon \in R$ elemanı için öyle bir N doğal sayısı bulmalıyız ki, N'den büyük her n göstergeci için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğru olsun. Bir başka deyişle, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması demek, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin sonlu olması demektir.

Bir elemana yakınsayan dizilere ***yakınsak*** diziler denir. Yakınsak olmayan dizilere de ***ıraksak*** diziler denir. Ama dikkat: Bir dizinin yakınsaklığı R halkasına göre değişir. Öte yandan $R \leq S$ ise ve $x_n, a \in R$ ise, S'de yakınsaklık R'de yakınsaklığı gerektirir.

Bundan böyle R herhangi bir sıralı cismi simgeleyecek[1]. Birçoğunu $\mathbb{Q}$ sıralı cismi için kanıtladığımız sonuçları bu bölümde herhangi bir sıralı cisme genelleştireceğiz. Genel kanıt, $\mathbb{Q}$ için yaptığımız özel kanıta çok benzediğinde özel kanıta gönderme yapıp genel kanıtı okura paslama hakkını saklı tutacağız. İşte bu hakkı kullandığımız örnek bir önerme:

Olgu: Zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği elemana yakınsar.

Şimdi iki doğal ve önemli soru soralım:

1) Sıralı bir cisimde bir dizinin limiti (eğer varsa tabii) biricik midir?

2) R'nin $(1/n)_n$ dizisi illa 0'a yakınsar mı? (R'deki n'nin anlamı için bkz. Bölüm 15.2: $n = n_R$.)

Birinci sorunun yanıtı olumlu:

Önsav 31.2. *Sıralı bir cisimde bir dizinin limiti, eğer varsa, biriciktir.*

Kanıt: Sıralı cisme R diyelim. Hem a hem de b elemanlarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım. $\varepsilon = |a-b|/2$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayısı olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |a-x_n| + |x_n-b| \\ &= |a-x_n| + |b-x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|, \end{aligned}$$

yani $|a-b| < |a-b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir eleman kendinden küçük olamaz! □

Bu önsava dayanarak, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ yazılımını herhangi bir karmaşaya neden olmadan kullanabiliriz.

[1] Sıralı halkalarda sıfırbölen olamayacağından, sıralı halkaların bölüm cisimleri vardır (bkz. Bölüm 34) ve bölüm cisimleri de (tahmin edileceği biçimde) sıralanabilirler. Yani sıralı halkalardan sözetmek yerine sıralı cisimlerden sözetmekle herhangi bir genellik kaybetmeyiz. Sıralı halkalar için kanıtlanmak istenen önerme, halkanın bölüm cismine geçip orada kanıtlanır ve sonra halkaya geri dönülmeye çalışılır.

31.2 Arşimet Cisimleri

İkinci sorumuzu olumlu yanıtlamaya çalışalım. Bakalım başarabilecek miyiz?

R'den herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. Öyle bir N doğal sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n \geq N$ için

$$|1/n - 0| < \varepsilon$$

olsun, yani $1/n < \varepsilon$, yani $n\varepsilon > 1$ olsun. Sıralı bir cisimde olduğumuzdan

$$N\varepsilon > 1_R$$

eşitsizliğini sağlayan bir N bulmak yeterli, çünkü öyle bir n bulundu mu, her

$$n \geq N$$

için,

$$\varepsilon < 1/N \leq 1/n$$

olur. Demek ki soru şu:

Verilmiş herhangi bir pozitif $\varepsilon \in R$ için, $N\varepsilon > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir N doğal sayısı var mıdır?

Bu özelliği anımsıyor olmalısınız. $\mathbb{Q}$'nün bu özelliği sağladığını Teorem 14.11'de kanıtlamıştık. Ama her sıralı cismin bu özelliği sağlamadığını Ek 36'te göreceğiz.

Tanım. *R sıralı bir cisim olsun. Eğer her pozitif $\varepsilon \in R$ için, $N\varepsilon > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir N doğal sayısı varsa R'ye **Arşimet cismi** adı verilir.*

(Bu durumda, bir N doğal sayısı için $N\varepsilon$ biçiminde yazılan elemanlar sadece 1'i değil, R'nin her elemanını aşarlar. Neden?)

Farkına varmışsınızdır, yukarıda şu teoremi kanıtladık.

Teorem 31.3. *Sıralı bir cisimde $(1/n)_n$ dizisinin limitinin 0 olması için gerek ve yeter koşul cismin Arşimet cismi olmasıdır.*

Arşimet olmayan bir R cisminde öyle ε elemanları vardır ki, her n doğal sayısı için $n|\varepsilon| < 1$'dir, yani $|\varepsilon|$ ve katları hiçbir zaman 1'i geçemez. Bu tür elemanlara ***sonsuz küçük elemanlar*** ya da ***enfinitezimaller*** denir. 0 bir sonsuz küçüktür. 1 sonsuz küçük değildir. Sonsuz küçük elemanlar kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır (neden?) ama bölme altında kapalı değildir elbet.

Peki, sıralı bir cisimde $(1/n)_n$ dizisi 0'dan başka bir elemana yakınsayabilir mi? Bakalım... Diyelim dizi α'ya yakınsadı. Demek ki $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$|1/n - \alpha| < \varepsilon$$

olur, demek ki

$$\alpha - \varepsilon < 1/n < \alpha + \varepsilon. \tag{1}$$

n yerine $n+1$ alırsak,

$$\alpha - \varepsilon < 1/(n+1) < \alpha + \varepsilon$$

buluruz. Bundan da

$$-\alpha - \varepsilon < -1/(n+1) < -\alpha + \varepsilon. \tag{2}$$

eşitsizlikleri de geçerlidir. (1) ve (2)'yi altalta toplarsak, buluruz. Son eşitsizlikten de ε'un sonsuz küçük olamayacağı çıkar. Demek ki ε'u pozitif bir sonsuz küçük seçemeyiz, yani R'de tek sonsuz küçük 0_R'dır. Yani R Arşimet cismidir. Dolayısıyla Teorem 31.3'e göre $(1/n)_n$ dizisi 0'a yakınsar ve Önsav 31.2'e göre $\alpha = 0$'dır. Şu teoremi kanıtladık.

Teorem 31.4. *Sıralı bir cisimde $(1/n)_n$ dizisinin limitinin olması için gerek ve yeter koşul, cismin Arşimet cismi olmasıdır. Bu durumda dizinin limiti 0 olmak zorundadır.*

31.3 Yakınsak Diziler Halkası

Bu paragrafta yakınsak dizilerle neler neler yapabileceğimizi göreceğiz.

Terimleri sıralı bir R cisminden alınan yakınsak diziler kümesini $\mathcal{Y}(R)$ ile gösterelim. Standart işlemler $\mathcal{Y}(R)$ kümesi üzerine de tanımlıdır.

Olgu [Teorem 17.7, 17.8, 17.9, 17.14]. *$\mathcal{Y}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da yakınsaktır. Sabit 0 dizisi $s(0)$ ve sabit 1 dizisi $s(1)$ de $\mathcal{Y}(R)$'de olduklarından, $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{D}(R)$'nin bir althalkasıdır. Dahası,*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n),$$

olur. Ayrıca eğer $(y_n)_n$ dizisinin her terimi 0'dan değişikse ve $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ ise, o zaman $(x_n/y_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = (\lim_{n\to\infty}(x_n))/(\lim_{n\to\infty}(y_n))$$

olur.

Yukarıdaki olguyu, "limit alma işlemi toplamaya, çıkarmaya, çarpmaya ve bölmeye saygı duyar" olarak da ifade edebiliriz.

Limit alma işlemi sıralamayla da uyumludur:

Olgu [Önsav 17.12]. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep (ya da sonsuz defa) $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$'dir.*

Bir sonraki sonuç uygulamada çok yararlı olan ve sık sık başvurulan bir teoremdir.

Teorem 31.5. [Sandviç Teoremi, Teorem 17.16]. *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \leq y_n \leq z_n$ eşitsizlikleri belli bir M göstergecinden sonra doğruysa (aslında sonsuz defa doğruysa) ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı elemana yakınsıyorsa, $(y_n)_n$ dizisi de bu elemana yakınsar.*

0'a Yakınsayan Diziler. 0'a yakınsayan diziler kümesine $\mathcal{Y}_0(R)$ adını verelim.

Sonuç 31.6. *$\mathcal{Y}_0(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır. Sabit 0 dizisi $s(0)$'ı içerir ama sabit 1 dizisi $s(1)$'i içermez.*

Kanıt: Olgu **??**'in xxxxxxxxx doğrudan bir sonucudur. □

$\mathcal{Y}_0(R)$ kümesi çarpmanın etkisiz elemanı olan $s(1)$'yi içermediğinden bir halka olmaz. Ama $\mathcal{Y}_0(R)$'nin birkaç paragraf sonra sözedeceğimiz bir başka önemli özelliği vardır.

Sınırlı Diziler Halkası. Sınırlı R-dizileri kümesini $\mathcal{B}(R)$ simgesiyle göstereceğiz. $\mathcal{B}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve bunların kanıtı oldukça kolaydır.

Olgu [Önsav 5.1]. *$\mathcal{B}(R)$, $\mathcal{D}(R)$'nin bir althalkasıdır, yani $\mathcal{B}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizilerini içerir.*

Olgu [Teorem 17.10]. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Yani $\mathcal{Y}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$. Dolayısıyla $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{B}(R)$'nin bir althalkasıdır.*

Şimdilik

$$\mathcal{Y}_0(R) \subseteq \mathcal{Y}(R) \leq \mathcal{B}(R) \leq \mathcal{D}(R)$$

ilişkilerini kanıtladık. Daha neler neler olacak.

31.4 Temel R-Dizileri Halkası

Kesirli temel dizileri de genelleştirebiliriz:

Tanım 31.7. *$(x_n)_n$ bir R-dizisi olsun. Eğer R'nin her pozitif $\varepsilon > 0$ elemanı için,*

$$\text{her } n, m > N \text{ için } |x_n - x_m| < \varepsilon$$

*eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine **temel R-dizisi** denir.*

Temel diziler kümesine $\mathcal{C}(R)$ adını verelim.

Olgu [Teorem 18.1 ve 18.2]. *Yakınsak diziler temel dizilerdir ve temel diziler sınırlıdır. Yani $\mathcal{Y}(R) \subseteq \mathcal{C}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$.*

Ama yukarıda örneğini verdiğimiz gibi, her temel dizi yakınsak değildir. (Öte yandan ileride göreceğimiz üzere, gerçel sayılarda her temel dizi yakınsaktır.) Ve elbette her sınırlı dizi temel değildir.

$\mathcal{C}(R)$ de aynen $\mathcal{Y}(R), \mathcal{B}(R), \mathcal{D}(R)$ gibi toplama, çıkarma, çarpma, ve çıkarma altında kapalıdır:

Olgu [Teorem 18.3, Sonuç 18.4 ve Teorem 18.5]. *$\mathcal{C}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır, yani iki temel dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da temeldir. Demek ki, $s(0)$ ve $s(1)$ dizileri de $\mathcal{C}(R)$'de olduğundan, $\mathcal{C}(R)$ bir halkadır, $\mathcal{B}(R)$'nin bir althalkasıdır.*

Böylece artık

$$\mathcal{Y}_0(R) \subseteq \mathcal{Y}(R) \leq \mathcal{C}(R) \leq \mathcal{B}(R) \leq \mathcal{D}(R)$$

ilişkilerini biliyoruz.

$\mathcal{C}(R)$ halkası bölme altında da "olabildiğince" kapalıdır. Birazdan geleceğiz bu konuya. Önce altdizi kavramını işleyelim.

Olgu [Teorem 19.1, 19.2, 19.3]
a. *Temel bir dizinin her altdizisi temeldir.*
b. *Yakınsak bir dizinin her altdizisi yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar.*
c. *Temel bir dizinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar.*

Temel Dizilerde Bölme. $\mathcal{C}(R)$ halkasının bölme altında "olabildiğince" kapalı olduğunu kanıtlamak için birkaç temel olguya ihtiyacımız var.

Olgu [Teorem 18.11]. *$(x_n)_n \in \mathcal{C}(R)$ ise ve her x_n terimi 0'dan farklı ise ve $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de $\mathcal{C}(R)$'dedir. Bir başka deyişle, $\mathcal{C}(R)$'nin tersinir elemanları kümesi,*

$$\mathcal{C}(R)^* = \{(x_n)_n \in \mathcal{C}(R) \setminus \mathcal{Y}_0(R) : \text{ her } n \text{ için } x_n \neq 0\}$$

dir.

Her temel dizinin yakınsak olduğu sıralı halkalara (ya da cisimlere) ***tam halka*** (ya da ***tam cisim***) denir.

Teorem 31.8. *R sıralı bir cisim olsun ve şu özelliği sağlasın: "Boş olmayan ve üstten sınırlı her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır." O zaman R Arşimet cismidir ve tamdır.*

Kanıt: Benzer özellik en büyük altsınır için de geçerlidir. (Neden?) İlk olarak, üstten sınırlı her artan dizinin bir limiti olduğunu kanıtlayalım. $(a_n)_n$ böyle bir diziolsun. s bu dizinin en küçük üst sınırı olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. s **en küçük** üstsınır olduğundan ve $s-\varepsilon < s$ olduğundan $s-\varepsilon$ bir üstsınır değildir. Demek ki bir N için,

$$s - \varepsilon < a_N$$

olur, yani her $n > N$ için,

$$s - \varepsilon < a_N < a_n \leq s$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için $|s - a_n| < \varepsilon$ olur. İstediğimizi kanıtladık. Bundan, her sınırlı monoton dizinin yakınsadığı çıkar.

Şimdi herhangi bir $(a_n)_n$ temel dizisi alalım. Teorem 19.4'e göre bu dizinin monoton bir $(b_n)_n$ altdizisi vardır. Olgu xxxxx **??**'e göre $(a_n)_n$ dolayısıyla $(b_n)_n$ sınırlıdır. Yukarıda kanıtladığımıza göre $(a_n)_n$ yakınsaktır. Olgu xxxx **??**'ye göre $(a_n)_n$ dizisi de yakınsaktır. Demek ki R bir tam halkadır.

$(1/n)_n$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan, $(1/n)_n$ dizinin de limiti vardır. Teorem 31.3'e göre R bir Arşimet cismidir.

Teorem kanıtlanmıştır. □

Böylece Teorem 25.1'i bir kez daha kanıtlayabiliriz.

Sonuç 31.9. *$\mathbb{R}$ bir Arşimet cismidir ve tamdır.*

Kanıt: Teorem 31.8 ve Sonuç 28.2'den çıkar. □

xxx Referans Teorem 19.2'ye verilmiş. Sonuc 19.2 var. xxx Temel dizi ile Cauchy dizisi arasında önemli bir fark vardır. $\mathbb{R}$'de (ve bir anlamda $\mathbb{Q}$'da da) bu fark kaybolur. Fark, metrik uzaylar konusu bilindiğinde daha iyi anlaşılacaktır. Cauchy dizisi kavramında, her zaman halka kavramının özünde olmayan ve $\mathbb{R}$'de değer alan bir "metrik" ya da "mesafe" kavramı vardır. Temel dizi kavramı için ise halkanın dışına çıkmak gerekmemektedir.

32. $\mathbb{R}$'nin Biricikliği

Bu noktaya gelene kadar $\mathbb{R}$'nin birçok özelliğini kanıtladık. Bu özelliklerin bir listesini çıkaralım:

1) $\mathbb{R}$, sıralı bir cisimdir.

2) $\mathbb{R}$ tamdır, yani $\mathbb{R}$'nin her temel (ya da Cauchy) dizisi $\mathbb{R}$'de yakınsaktır.

3) $\mathbb{R}$ bir Arşimet cismidir.

Bu bölümde bu üç özelliği sağlayan $\mathbb{R}$'den başka bir cisim olmadığını kanıtlayacağız. Kanıtlayacağız ama bu yanlış... Örneğin $\mathbb{R}$'nin elemanlarının adlarını değiştirirsek, diyelim her $\alpha \in \mathbb{R}$ için α' diye yepyeni bir eleman yaratırsak, sözgelimi $\alpha' = (\alpha, 0)$ olabilir, ve bu elemanları şöyle toplayıp, çarpıp, sıralarsak:

$$\begin{aligned}
&\alpha' + \beta' = (\alpha + \beta)', \\
&\alpha'\beta' = (\alpha\beta)' \\
&\alpha' \leq \beta' \Leftrightarrow \alpha \leq \beta,
\end{aligned}$$

o zaman $\mathbb{R}' = \{\alpha' : \alpha \in \mathbb{R}\}$ kümesi aynen $\mathbb{R}$ gibi yukarıdaki özellikleri sağlayan bir cisim olur. Dolayısıyla yukarıdaki özellikleri sağlayan bir tane sıralı cisim olduğunu kanıtlayamayız, yanlış çünkü. Ama şunu kanıtlayabiliriz: Eğer R ve S, tam olan ve Arşimet özelliğini sağlayan iki sıralı cisimse,

$$\begin{aligned}
&f(x + y) = f(x) + f(y), \\
&f(xy) = f(x)f(y), \\
&f(1_R) = 1_S, \\
&x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan bir $f : R \to S$ eşlemesi vardır. Bu durumda, f'ye ***eşyapı eşlemesi*** ve R ve S cisimlerine ***eşyapısal*** denir. İki yapı arasındaki bir eşyapı eşlemesi, yapıların aslında birbirinin tıpatıp aynı olduğunu sadece elemanlarının adlarının değişik olduğunu söyler.

Teorem 32.1. *Tam olan ve Arşimet özelliğini sağlayan iki sıralı cisim eşyapısaldır. Ayrca bu iki cisim arasında tek bir eşyapı eşlemesi vardır.*

Teoremin püf noktası, böyle bir cismin içinde $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen yoğun bir altcismin varlığı ve $\mathbb{Q}$'ye benzeyen cisimlerin eşyapısal olmalarıdır.

Önce R'nin içinde $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen bir altcisim bulalım.

Önsav 32.2. *R sıralı bir cisim olsun. 0_R ve 1_R, sırasıyla toplamanın ve çarpmanın etkisiz elemanları olsunlar. $n > 0$ pozitif bir doğal sayıysa,*

$$i(n) = \underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n \text{ tane } 1_R} = n_R$$

olsun. $i(0) = 0_R$ olsun. Eğer $n < 0$ negatif bir doğal sayıysa,

$$i(n) = -i(-n) = n_R$$

olsun. O zaman, n, $m \in \mathbb{Z}$ ve $m \neq 0$ için,

$$i(n/m) = i(n)/i(m)$$

kuralıyla tanımlanan $i : \mathbb{Q} \to R$ fonksiyonu birebir bir eşyapı fonksiyonudur, yani her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ için,

$$\begin{aligned} &i(\alpha + \beta) = i(\alpha) + i(\beta), \\ &i(\alpha\beta) = i(\alpha) + i(\beta), \\ &i(1) = 1_R, \\ &\alpha \leq \beta \Leftrightarrow i(\alpha) \leq i(\beta) \end{aligned}$$

önermeleri doğrudur. Ayrıca bundan başka bu özellikleri sağlayan bir

$$i : \mathbb{Q} \to R$$

fonksiyonu yoktur.

Kanıt: Konunun heyecanını öldürmemek için (kolay olan) kanıtı vermiyoruz. □

Kimileyin $i(n)$ yerine n_R yazılır. $i(\mathbb{Q})$ yerine de $\mathbb{Q}_R$ yazmak ve $\mathbb{Q}_R$'ye "R'deki $\mathbb{Q}$" demek fena fikir değildir. Öte yandan, bir karışıklığa neden olması imkânsızsa, $i(q)$ yerine doğrudan q de yazılabilir. Bu arada, her $r \in R$ ve her pozitif $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için, nr'nin n tane r'nin toplamı olarak tanımlandığını anımsayıp, $nr = i(n)r = n_{R^r}$ eşitliğinin farkına varalım:

$$nr = r + \cdots + r = 1_{R^r} + \cdots + 1_{R^r} = (1_R + \cdots + 1_R)r = i(n)r = n_{R^r}.$$

Şimdi $i(\mathbb{Q})$'nün ana teoremin kanıtında oynayacağı önemli rolü görelim:

Önsav 32.3. *Eğer R bir Arşimet cismiyse, o zaman $i(\mathbb{Q})$, R'de yoğundur, yani R'nin her $\alpha < \beta$ elemanı için, $\alpha \leq i(q) \leq \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir q kesirli sayısı vardır.*

Kanıt: q kesirli sayısı için, $i(q)$ yerine q yazacağız.

Eğer $\alpha \leq 0 \leq \beta$ ise $q = 0$ işi görür. Eğer $0 < \alpha < \beta$ için önsavı kanıtlarsak, $\alpha < \beta < 0$ için de kanıtlamış oluruz, çünkü $\alpha < \beta < 0$ ise, $0 < -\beta < -\alpha$'dır ve eğer $-\beta < q < -\alpha$ ise, $\alpha < -q < \beta$'dır. Bundan böyle $0 < \alpha < \beta$ eşitsizliklerini varsayalım.

$\beta - \alpha > 0$ olduğundan, Arşimet özelliğine göre, $n(\beta - \alpha) > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki $1/n < \beta - \alpha$.



Bir kez daha Arşimet özelliğini kullanalım: $1/n\beta > 0$ olduğundan, $m/n\beta > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$\frac{m}{n} > \beta$$

olur. m'yi, bu eşitsizliği sağlayan en küçük doğal sayı olarak alalım. Demek ki,

$$\frac{m-1}{n} \leq \beta < \frac{m}{n}$$

eşitsizlikleri geçerli. Şimdi,

$$\alpha < \frac{m-1}{n}$$

eşitsizliğini kanıtlayacağız.



Hesapları yukarıdaki şekilden takip edebilirsiniz:

$$\frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha.$$

Böylece $\alpha < q \leq \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir $q \in \mathbb{Q}$ bulduk. Kanıtımız bitmiştir. □

Şimdi de $i(\mathbb{Q})$ ile R arasındaki yakın ilişkiyi görelim.

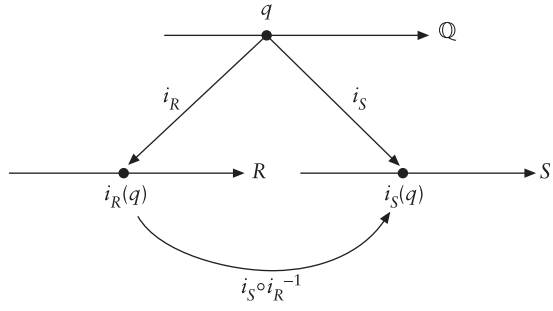
Önsav 32.4. *R'nin her elemanı, terimleri $i(\mathbb{Q})$'den olan bir dizinin limitidir.*

Kanıt: Kolaylık açısından, $i(\mathbb{Q})$ yerine $\mathbb{Q}$ yazacağız. $r \in R$ olsun. Yukarıdaki önsava göre, her pozitif n doğal sayısı için, $r-1/n$ ile $r+1/n$ arasında bir $q_n \in \mathbb{Q}$ vardır. R Arşimet özelliğini sağladığından, $(1/n)_n$ dizisinin limiti 0'dır (Teorem 31.4). O zaman Sandviç Teoremi'ne göre (Teorem 17.16), $(q_n)_n$ dizisinin limiti r'dir. □

Şimdi ana teoremin kanıtına girişebiliriz. R ve S, teoremde söylendiği gibi iki cisim olsun. i_R ve i_S, Teorem 32.1'deki xxx Referans Önsav 21.1'e verilmiş. Önsav 21.1 yok. Teorem 21.1 var.xxx $\mathbb{Q}$'nün sırasıyla R'ye ve S'ye gömmeleri olsun. R ve S'nin içinde bulunan "kesirli sayı kümelerine" sırasıyla $\mathbb{Q}_R$ ve $\mathbb{Q}_S$ adını verelim: $i_R(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_R$ ve $i_S(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_S$.

$\mathbb{Q}_R$ ile $\mathbb{Q}_S$ arasında bir eşyapı eşlemesi vardır:

$$i_S \circ i_R^{-1} : \mathbb{Q}_R \to \mathbb{Q}_S.$$



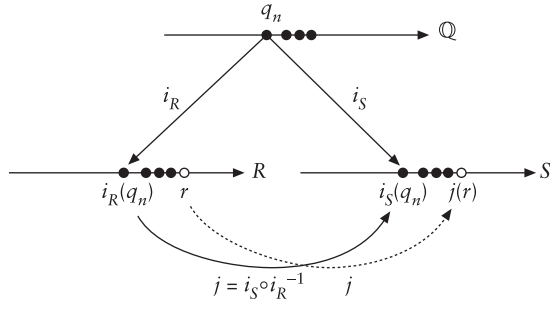
Bu eşyapı eşlemesine kısaca j adını verelim. Şimdi j'yi R'den S'ye giden bir eşyapı eşlemesine genişleteceğiz.

$r \in R$ olsun. Önsav 32.3'e göre, bir $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n) = r$$

dir. $j(r) \in S$ şöyle tanımlansın:

$$j(r) = \lim_{n\to\infty} j(i_R(q_n)) = \lim_{n\to\infty} i_S(q_n).$$



Tabii bu tanımın geçerli olması için şunların kanıtlanması gerekiyor:

1) $\lim_{n\to\infty} i_S(q_n)$ gerçekten vardır.

2) Eğer bir başka $(p_n)_n$ kesirli sayı dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} i_R(p_n) = r$$

ise, o zaman,

$$\lim_{n\to\infty} i_S(q_n) = \lim_{n\to\infty} i_S(p_n)$$

olmalıdır.

Birincisinin kanıtı kolay, çünkü i_R^{-1} ve i_S fonksiyonları $\mathbb{Q}_R$ ve $\mathbb{Q}_S$ arasında eşyapı eşlemeleridir ve elbette $\mathbb{Q}_R$'nin temel dizisini $\mathbb{Q}_S$'nin temel dizisine götürürler.

$$(i_R(q_n))_n$$

dizisi $\mathbb{Q}_R$'de yakınsak olduğundan temeldir, dolayısıyla $(i_S(q_n))_n$ dizisi $\mathbb{Q}_S$'de temeldir. Ve S tam olduğundan, bu dizinin S'de bir limiti vardır.

İkincisinin kanıtı da zor değil, $(i_R(q_n - p_n))_n$ dizisi 0_R'ye yakınsadığından, bu dizinin j imgesi olan $(i_S(q_n - p_n))_n$ dizisi de 0_S'ye yakınsar çünkü ne de olsa j, $\mathbb{Q}_R$ ile $\mathbb{Q}_S$ arasında bir eşyapı eşlemesidir.

Şimdi j'nin R'den S'ye giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak gerekir: j toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir fonksiyondur. Bunların kanıtı zor değildir. Örneğin j'nin toplamaya saygı duyduğunu gösterelim.

r ve $s \in R$ olsun. $(q_n)_n$ ve $(p_n)_n$ kesirli sayı dizileri

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n) = r$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} i_R(p_n) = s$$

eşitliklerini sağlasınlar. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n + p_n) = r + s$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} j(r+s) &= \lim_{n\to\infty} i_S(q_n + p_n) = \lim_{n\to\infty} (i_S(q_n) + i_S(p_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} i_S(q_n) + \lim_{n\to\infty} i_S(p_n)) = j(r) + j(s). \end{aligned}$$

Çarpma için de aynı akıl yürütme yapılır.

j'nin sıralamaya saygı duyduğunu doğrudan kanıtlayabiliriz ama biz çok daha ekonomik olan bir başka yöntem izleyeceğiz. Teorem 29.5'i analım: Arşimet özelliği olan her tam cisimde, negatif olmayan elemanlar tam tamına karelerdir. Dolayısıyla böyle bir cisimde şu doğrudur:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow \exists z(y - x = z^2) \Leftrightarrow \exists z(y = x + z^2).$$

Demek ki Arşimet özelliği olan bir tam cisimde, sıralama toplama ve çarpmayla ifade edilir. Dolayısıyla, Arşimet özelliği olan tam cisimler arasındaki toplamaya ve çarpmaya saygı duyan her eşleme, aynı zamanda sıralamaya da saygı duyar.

Ve j örtendir çünkü S'nin her elemanı bir $\mathbb{Q}_S$-dizisinin limitidir ve her $\mathbb{Q}_S$ dizisi j yoluyla bir $\mathbb{Q}_R$-dizisinden gelmektedir.

Şimdi son olarak R ve S arasındaki bu eşyapı eşlemesinin biricik olduğunu kanıtlayalım. Eğer φ ve ψ, R'den S'ye giden iki eşyapı eşlemesi olsaydı,

$$\theta = \varphi^{-1} \circ \psi,$$

R'den R'ye giden bir eşyapı eşleşmesi (otomorfizma) olurdu. $\theta = Id_R$ eşitliğini kanıtlamak yeterli.

$\theta(0) = \theta(0+0) = \theta(0) + \theta(0)$ olduğundan, $\theta(0) = 0$ olmak zorundadır. $\theta(1) = \theta(1 \cdot 1) = \theta(1) \cdot \theta(1)$ olduğundan, $\theta(1)$, ya 0 ya da 1 olmak zorundadır. Ama $\theta(0) = 0$ olduğundan, $\theta(1)$ de 0 olamaz. Demek ki $\theta(1) = 1$. Bundan, her n doğal sayısı için (tümevarımla) $\theta(n) = n$ çıkar. Ayrıca,

$$0 = \theta(0) = \theta(n + (-n)) = \theta(n) + \theta(-n)$$

olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta(-n) = -\theta(n)$$

olur. Demek ki, her $z \in \mathbb{Z}$ için,

$$\theta(z) = z.$$

Şimdi m, $n \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ için,

$$m = \theta(m) = \theta(n \cdot m/n) = \theta(n) \cdot \theta(m/n) = n \cdot \theta(m/n)$$

dolayısıyla,

$$\theta(m/n) = m/n.$$

θ'nın $\mathbb{Q}$ üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtladık. θ'nın R üzerine de bir özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlayacağız. $r \in R$ olsun. Diyelim $\theta(r) \neq r$, örneğin $r < \theta(r)$ olsun. $\mathbb{Q}$, R'de yoğun olduğundan (Önsav 32.3), $r \leq q \leq \theta(r)$ eşitsizliklerini sağlayan bir q vardır. Şimdi $r \leq q$ eşitsizliğine θ'yı uygulayalım. $\theta(r) \leq \theta(q) = q$ elde ederiz. Bir çelişki. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 32.5. *$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve toplamayla çarpmaya saygı duyan iki fonksiyon vardır: sabit 0 ve özdeşlik fonksiyonları.*

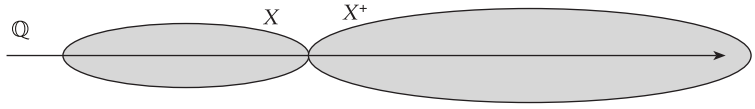
Kanıt: Sabit 0 olmayan bir θ fonksiyonu 1'i 1'e götürmek ve sıralamaya saygı duymak zorundadır (çünkü pozitif elemanlar karelerdir.) Kanıt aynen yukarıdaki gibidir. □

$(\mathbb{R}, +, \times)$ gibi özdeşlikten başka eşyapı eşlemesi olmayan yapılara matematikte ***eğilip bükülmez yapılar*** (İngilizcesi rigid) denir.

33. Dedekind Kesitleri

Geçen bölümlerde gerçel sayıları, $\mathbb{Q}$'den hareketle ve temel $\mathbb{Q}$-dizilerini kullanarak yarattık. $\mathbb{Q}$'den hareketle gerçel sayıları yaratmanın Dedekind tarafından bulunmuş daha şık bir yöntemi vardır.

Tanımın Gerekçesi. Dedekind'in yöntemi şu düşünceden kaynaklanır: Üstten sınırlı ve boş olmayan bir kesirli sayılar kümemiz olsun. X diyelim bu kümeye. X'in en küçük üstsınırını yaratmak istiyoruz. Böyle bir üstsınır $\mathbb{Q}$'de olsa da olmasa da...



X'in üstsınrları kümesine bakalım. Bu kümeyi yukarıdaki şekildeki gibi X^+ olarak gösterelim:

$$X^+ = \{s \in \mathbb{Q} : \text{ her } x \in X \text{ için } x \leq s\}.$$

Örneğin,

$$(0,1)^+ = [1,\infty) \cap \mathbb{Q},$$
$$(0,1]^+ = (1,\infty) \cap \mathbb{Q}.$$

Üstten sınırlı ve boş olmayan bir X kümesi için X^+ kümesinin hangi özellikleri var?

1) $X^+ \neq \emptyset$ çünkü X'in en az bir üstsınırı var,
2) $X^+ \neq \mathbb{Q}$ çünkü X boşküme değil,
3) Eğer $s \in X^+$ ve $s \leq t$ ise, $t \in X^+$.

Eğer bir $Y \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ kümesi

$$(*) \qquad \forall s \forall t((s \in Y \wedge t \in \mathbb{Q} \wedge s \leq t) \rightarrow t \in Y)$$

özelliğini sağlıyorsa, o zaman

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : \text{her } y \in Y \text{ için } x \leq y\}$$

kümesi için $X^+ = Y$ eşitliği doğru olur. (Alıştırma.)

X'in en küçük üstsınırı olarak X^+ kümesini aday göstermek istiyoruz. Yani üstten sınırlı ve boş olmayan her $X \subseteq \mathbb{Q}$ için X^+ kümesini bir gerçel sayı olarak tanımlamak istiyoruz. Daha açık yazalım:

$$\mathbb{R} = \{Y \subseteq \mathbb{Q} : Y \neq \emptyset, \mathbb{Q} \text{ ve } (*)\}$$

tanımını yapmak istiyoruz.

Yalnız burada küçük bir sorun var. O da şu: $(0,1)$ ve $(0,1]$ aralıklarının aynı en küçük üstsınırları var, her ikisi de 1. Oysa bu aralıkların üstsınırları kümesi $(0,1)^+$ ve $(0,1]^+$ kümeleri değişik, biri 1'i içeriyor, diğeri içermiyor. Bu iki kümeden birini tercih etmemiz lazım, yoksa $\mathbb{R}$'de iki değişik 1 elemanı olurdu! R'nin tanımına bir koşul daha ekleyelim: Y'nin en küçük elemanı yoktur, yani en büyük altsınırını (eğer varsa bu altsınır) içermez. (Böylece $(0,1)^+$ ve $(0,1]^+$ kümelerinden ikincisini seçeriz.)

En büyük altsınırını içermeyen ve (*) özelliğini sağlayan, $\mathbb{Q}$'nün $Y \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ altkümelerine ***Dedekind kesiti*** adı verilir. Örneğin, her $a \in \mathbb{Q}$ için,

$$\{q \in \mathbb{Q} : a < q\}$$

kesirli sayı aralığı bir Dedekind kesitidir. Bir Dedekind kesiti sonsuza kadar giden bir aralığa çok benzer ama kesirli sayılarda en büyük altsınırı yoksa kesirli sayılar kümesinde bir aralık değildir. Örneğin,

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ ve } x^2 > 2\}$$

bir Dedekind kesitidir ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığından, kesirli sayılar kümesinde bir aralık değildir. Öte yandan bir Dedekind kesitinin en büyük altsınırı varsa ve bu en büyük altsınır a ise, o zaman Dedekind kesiti (a, ∞) aralığı olmalıdır.

Dedekind, ***gerçel sayılar kümesi*** $\mathbb{R}$'yi Dedekind kesitleri kümesi olarak tanımlayacağız.

$\mathbb{Q}$'nün (*) özelliğini sağlayan bir $Y \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ altkümesinden, varsa en küçük altsınırını çıkarırsak bir Dedekind kesiti, yani bir gerçel sayı buluruz. Bu kolay olguyu sık sık kullanacağız bu bölümde.

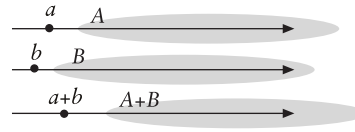
33.1 İşlemler, Sıralama ve Her Şeyin Kanıtı

Şimdi bu tanımdan hareketle, böylece tanımlanmış $\mathbb{R}$ kümesi üzerine toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayalım.

Kanıtların birçoğunu alıştırma olarak okura bırakacağız.

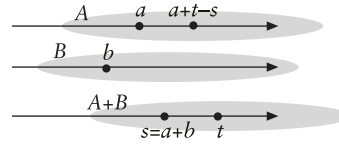
Önsav 33.1. *Eğer A, $B \in \mathbb{R}$ ise, $A + B \in \mathbb{R}$'dir.*

Kanıt: A ve B boşküme olmadıklarından, $A+B$ de boşküme değildir elbette. (2)'yi kanıtlayalım. (3)'ten dolayı her Dedekind kesiti alttan sınırlıdır. a, A'nın tüm elemanlarından daha küçük bir kesirli sayı olsun. b de B'nin tüm elemanlarından daha küçük bir kesirli sayı olsun. O zaman $A+B$ 'nin tüm elemanları



$a+b$'den daha büyüktür ve $a+b$ sayısı $A+B$ kümesinde değildir. Demek ki $A+B \neq \mathbb{Q}$. (2) de kanıtlandı.

(3)'ü kanıtlayalım. $\in A+B$ ve $s \leq t \in \mathbb{Q}$ olsun. t'nin de $A+B$ kümesinde olduğunu kanıtlayacağız.

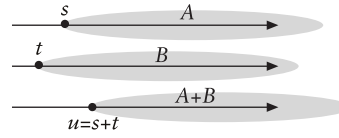


$a \in A$ ve $b \in B$ için $s = a+b$ olsun. O zaman,

$$t = s + t - s = a + b + t - s = (a + t - s) + b.$$

Ama $a \leq a+t-s$ olduğundan, $a+t-s \in A$. Demek ki, $t = (a+t-s)+b \in A+B$. (3) de kanıtlandı.

Gelelim (4)'e... $A+B$'nin bir en büyük altsınırı olduğunu ve bu en büyük altsınırın $A+B$'de olduğunu varsayalım. Bu en büyük altsınıra u adını verelim. Demek ki $s \in A$ ve $t \in B$ için $u = s+t$.



Ama o zaman s, A'nın en büyük altsınırı olur. Çünkü $s > a \in A$ olsa,

$$u = s + t > a + t \in A + B$$

olur, ki bu da u'nun $A+B$'nin en büyük altsınırı olmasıyla çelişir. Demek ki s, A'nın bir altsınırı. s, A'da olduğundan, s, A'nın en büyük altsınırıdır. □

Demek ki iki gerçel sayının toplamı da bir gerçel sayıdır. Bu iyi bir haber.

Önsav 33.2. $(\mathbb{R}, +, 0_{\mathbb{R}})$ *değişmeli bir gruptur, yani*

a. *Her* A, B, $C \in \mathbb{R}$ *için,* $A + (B + C) = (A + B) + C$.

b. $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ *bir gerçel sayıdır ve toplamanın etkisiz elemanıdır. Bu elemanı* $0_{\mathbb{R}}$ *olarak gösterelim.*

c. *Her* $A \in \mathbb{R}$ *için,* $A + B = B + A = 0_{\mathbb{R}}$ *eşitliğini sağlayan bir* $B \in \mathbb{R}$ *vardır.*

d. *Her* A, $B \in \mathbb{R}$ *için,* $A + B = B + A$.

Kanıt: İlk iki önermenin kanıtı kolay, yukarıda sözünü etmiştik. Sonuncusu daha da kolay. Üçüncüsünü kanıtlayalım. Aşağıdaki resimden izleyebilirsiniz. $A \in \mathbb{R}$ verilmiş.

$$A + B = B + A = 0_{\mathbb{R}}$$

eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R}$ bulmaya çalışıyoruz.

$$B = (-A)^+ \setminus \{\inf(-A)^+\}$$

olsun. Eğer $\inf(-A)^+$ yoksa, tanıma göre, $B = (-A)^+$ olmak zorundadır. Ayrıca, burada $-A$ şu anlama gelmektedir:

$$-A = \{q \in \mathbb{Q} : -q \in A\}.$$

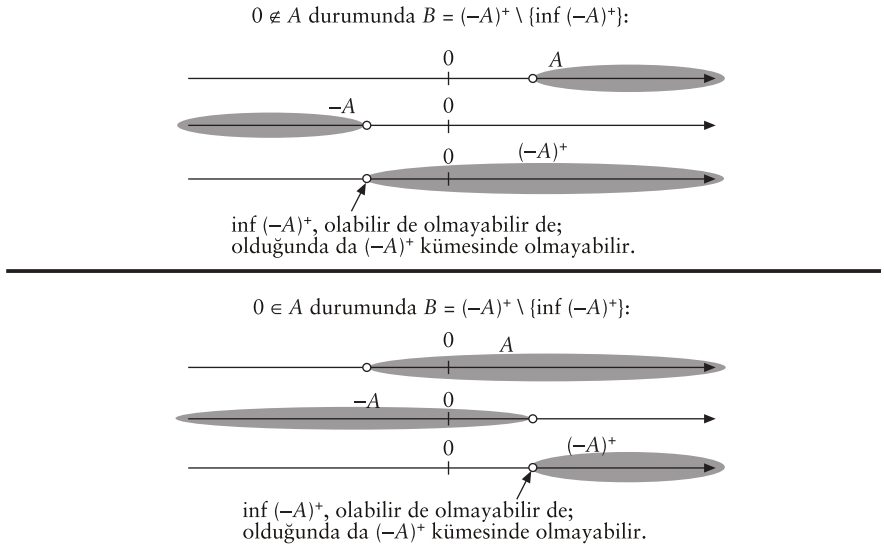
(Yani buradaki $-A$, gerçel sayı A'nın değil, küme olarak A'nın eksisidir. Gerçel sayı A'nın eksisini tanımlamak üzereyiz.) B'nin bir Dedekind kesiti olduğunu, yani bir gerçel sayı olduğunu ve $A + B = B + A = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğinin sağlandığını göstermeyi okura bırakıyoruz. □

Aşağıda c maddesinde varlığı gösterilen $B \in \mathbb{R}$, $-A$ olarak yazılır. Ancak bu $-A$, yukarıdaki kanıttaki $-A$ ile karıştırılmamalıdır. Kanıttaki $-A$ hiçbir zaman bir gerçel sayı olamaz. Bundan böyle $-A$ hep gerçel sayı $-A$ anlamına gelecek.

Her değişmeli grupta olduğu gibi $B - A$ elemanı, $B + (-A)$ anlamına gelecek.

$$A - (B - C) = A - B + C$$

gibi her değişmeli grupta geçerli olan cambazlıkları kanıtlamayı okura bırakıyoruz.



Çarpmaya gelmeden önce sıralamayı tanımlayalım. Eğer $A, B \in \mathbb{R}$ ise, $\leq$ ikili ilişkisini altküme ilişkisi olarak tanımlayalım:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Örneğin, tanımdan dolayı $\max\{A, B\} = A \cap B$. Ama dikkat, sonsuz tane gerçel sayının kesişimi boşküme olmasa bile bir gerçel sayı olmak zorunda değildir, çünkü sonsuz kesişim en küçük üstsınırı içerebilir, örneğin,

$$\bigcap_{n-1}^{\infty} \{q \in \mathbb{Q} : q > -1/n\} = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\},$$

ve solda kesişimi alınan kümelerin her biri bir gerçel sayı olmasına karşın, sağdaki - en büyük altsınırı olan 0'ı içerdiğinden - bir gerçel sayı (yani Dedekind kesiti) değildir. Ama böyle bir kesişimden - eğer boşküme değilse - içinde olma ihtimaline karşı, en büyük altsınırı atarsak, o zaman bir gerçel sayı elde ederiz. Bu, birazdan önemli olacak

Önsav 33.3. *Yukarıda tanımlanan $\leq$ ilişkisi, $\mathbb{R}$ üzerine bir tamsıralamadır, yani her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için,*
a. *$A \leq B$ ve $B \leq C$ ise $A \leq C$.*
b. *$A \leq B$ ve $B \leq A$ ise $A = B$.*
c. *$A \leq A$.*
d. *Ya $A \leq B$ ya da $B \leq A$.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Bu arada,

$$0_{\mathbb{R}} < A \Leftrightarrow 0 \in B$$

önermesinin doğruluğuna da dikkatinizi çekeriz.

Şimdi çarpmayı tanımlayalım. Çarpmanın tanımı ne yazık ki toplamanın tanımı kadar sade değil.

A, $B \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \geq 0_{\mathbb{R}}$ ise,

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlansın. Diğer durumlarda tanım şöyle:

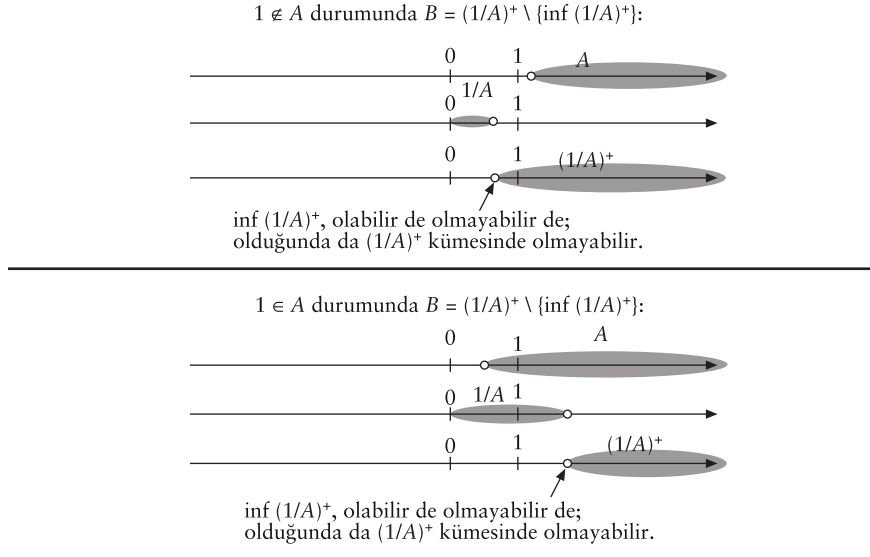
Eğer $A \leq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \geq 0_{\mathbb{R}}$ ise, $AB = -((-A)B)$.
Eğer $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \leq 0_{\mathbb{R}}$ ise, $AB = -(A(-B))$.
Eğer $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \leq 0_{\mathbb{R}}$ ise, $AB = (-A)(-B)$.

Önsav 33.4. *Eğer A, $B \in \mathbb{R}$ ise, $AB \in \mathbb{R}$'dir.*

Kanıt: Önsavı sadece $A \geq 0_{\mathbb{R}}$ ve $B \geq 0_{\mathbb{R}}$ durumu için kanıtlamak gerekiyor; diğer durumlar bundan çıkar. Bu durumu da okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Kesirli sayılar hakkında her şeyi bildiğinizi varsayabilirsiniz elbet. □

Önsav 33.5. **i.** *Her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için, $A(BC) = (AB)C$.*
ii. *$\{q \in \mathbb{Q} : q > 1\}$ bir gerçel sayıdır ve çarpmanın etkisiz elemanıdır. Bu elemanı $1_{\mathbb{R}}$ olarak gösterelim.*
iii. *Her $A \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ için, $AB = BA = 1_{\mathbb{R}}$ eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ vardır.*
iv. *Her A, $B \in \mathbb{R}$ için, $AB = BA$.*

Kanıt: İlk iki ve sonuncu önermelerin kanıtı oldukça kolay. Üçüncü önermeyi ise $A > 0_{\mathbb{R}}$ için kanıtlamak yeterli. (Neden?) Kanıtlayalım.



$A > 0_{\mathbb{R}}$ bir gerçel sayı olsun. $AB = BA = 1_{\mathbb{R}}$ eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R}$ bulmaya çalışıyoruz.

$$B = (1/A)^+ \setminus \{\inf(1/A)^+\}$$

olsun. (Bkz. yukarıdaki şekil.) Burada $1/A$ şu anlama gelmektedir:

$$1/A = \{q \in \mathbb{Q} : 1/q \in A\}.$$

(Yani gerçel sayı A'nın değil, küme olarak A'nın tersini alıyoruz. Gerçel sayı A'nın tersini tanımlamak üzereyiz.) B'nin bir Dedekind kesiti olduğunu, yani bir gerçel sayı olduğunu ve $AB = BA = 1_{\mathbb{R}}$ eşitliğinin sağlandığını göstermeyi okura bırakıyoruz. □

Sonuç 33.6. $(\mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}, \times, 1_{\mathbb{R}})$ *değişmeli bir gruptur.*

Şimdi de toplamayla çarpma arasındaki yegâne ilişki olan dağılma özelliği:

Önsav 33.7. *Her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için, $A(B + C) = AB + AC$.*

Kanıt: Son derece basit. Bir kümeden bir eleman alıp bu elemanın diğer kümede olduğunu göstermek gerekiyor. Bu da $\mathbb{Q}$'deki dağılma özelliğinden hemen çıkar. □

Sonuç 33.8. $(\mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}, +, \times, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ *bir cisimdir.*

Beklenildiği gibi $\mathbb{R}$ cismi sıralıdır:

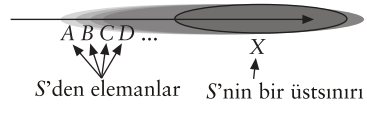
Önsav 33.9. $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ *sıralı bir cisimdir, yani her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için,*
i. *$A \leq B$ ise $A + C \leq B + C$.*
ii. *$A \leq B$ ve $0_{\mathbb{R}} \leq C$ ise $AC \leq BC$.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Şimdi $\mathbb{R}$'nin en önemli özelliğini görelim:

Önsav 33.10. *Eğer $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ ise ve S'nin bir üstsınırı varsa, o zaman S'nin en küçük üstsınırı vardır.*

Kanıt: Önsav 33.3'ten hemen önce gelen tartışma bu kanıtta önemli olacak. $S \subset \mathbb{R}$, boş olmayan ve üstsınırı olan bir altküme olsun.



$X \in \mathbb{R}$, S'nin bir üstsınırı olsun. Demek ki her $A \in S$ için, $X \subseteq A$. Dolayısıyla

$$X \subseteq \bigcap_{A \in S} A.$$

Soldaki ifadeye U diyelim:

$$U = \bigcap_{A \in S} A.$$

X'i içerdiğinden, U boşküme değil. Ama gene de U bir Dedekind kesiti, yani gerçel sayı olmayabilir, çünkü en büyük altsınırını içerebilir. $V = U \setminus \{\inf U\}$ olsun. V bir gerçel sayıdır. V'nin $\sup S$ olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. □

Demek ki Teorem 31.8'e göre $\mathbb{R}$ tamdır ve Arşimet özelliğini sağlar. Dolayısıyla Teorem 32.1'e göre geçen yazılarda tanımlanan $\mathbb{R}$'yle eşyapısaldır.

Kısım IV

Ekler

34. Bölüm Cisimleri ve Yerelleştirme

34.1 Örnekler

Bölüme örneklerle başlayalım, ne yapmak istediğimizi en iyi örneklerle anlatabileceğiz.

Notlar ve Örnekler

34.1. Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ değişmeli bir halkadır[1], ama bir cisim değildir, çünkü bir cisimde, cismin tanımı gereği, 0'a eşit olmayan her elemanın çarpımsal tersi olmalıdır ve $\mathbb{Z}$'de 0'a eşit olmayan her elemanın çarpımsal tersi yoktur. Örneğin 2'nin çarpımsal tersi olan (ya da olması gereken) $1/2$ sayısı $\mathbb{Z}$'de değildir. Daha doğru (yani daha matematiksel) bir ifadeyle, $\mathbb{Z}$'de $2x = 1$ denklemini çözemeyiz.
Öte yandan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, tamsayıları içeren bir cisimdir[2], hatta $\mathbb{Q}$, şu anlamda tamsayıları içeren cisimlerin en küçüğüdür: Tamsayıları içeren her cismin içinde $\mathbb{Q}$'nün bir "kopyası" bulunur. Bu ifadeyi yazının en sonunda daha anlamlı bir hâle getireceğiz. Şimdilik sezgilerimizle yetinelim.

34.2. $p \in \mathbb{Z}$ sabit bir asal olsun. p elbette $\mathbb{Z}$'de tersinir değildir, çünkü

$$1/p \notin \mathbb{Z}.$$

Şimdi,

$$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \{a/p^n : n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. Kolayca görüleceği üzere, $\mathbb{Z}_p$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalıdır, ayrıca 1'i de içerir, yani bir halkadır. Bu halkanın tersinir elemanları, bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\pm p^n$ biçiminde yazılan sayılardır.
$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$, belli ki, $\mathbb{Z}$'yi içeren ve p'nin tersinir olduğu "en küçük" halkadır. "En küçük halka" ifadesinin ne demek olduğunu yazının en sonunda matematiksel olarak açıklayacağız.

34.3. Katsayıları tamsayılar olan polinomları ele alalım. Bu polinomların kümesi $\mathbb{Z}[X]$ olarak yazılır.

$$\frac{X^2 + 1}{X - 1}$$

türünden ifadeler $\mathbb{Z}[X]$'te değiller. Polinom olmasalar da bu tür ifadeler matematikte sık sık kullanılırlar. "Kesirli sayılar"dan esinlenerek bu tür nesnelere ***kesirli polinom*** adını

[1] Yani her x ve y için $xy = yx$ eşitliği geçerlidir.

[2] Yani hem değişmeli bir halkadır hem de 0 dışında her elemanın çarpımsal bir tersi vardır: Her $x \neq 0$ için, $xy = 1$ eşitliğini sağlayan bir y vardır.

verelim. Bir kesirli polinom, tanımı gereği, f, $g \in \mathbb{Z}[X]$ ve $g \neq 0$ için, f/g biçiminde yazılan bir terimdir. Kesirli polinomlar kümesi $\mathbb{Q}(X)$ olarak ($\mathbb{Z}(X)$ değil!) gösterilir:

$$\mathbb{Q}(X) = \{f/g : f, g \in \mathbb{Z}[X] \text{ ve } g \neq 0\}.$$

Basit ama önemli bir olgu: Eğer $fk = gh$ ise, f/g kesirli polinomu h/k kesirli polinomuna eşittir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer

$$f/g = h/k$$

ise, $fk = gh$ eşitliği de doğrudur.
Kesirli polinomlar kümesinde toplama, çıkarma ve çarpma yapmasını okur herhâlde biliyordur:

$$f/g \pm h/k = (fk \pm gh)/gk \text{ ve } (f/g) \times (h/k) = fh/gk.$$

Böylece tanımlanan toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında, kesirli polinomlar kümesi bir halkadır. Hatta halkadan öte, bir cisimdir de: $f/g \neq 0$ ise, bu kesirli polinomun çarpımsal tersi g/f kesirli polinomudur.
Her f polinomunu $f/1$ biçiminde yazarsak, her polinomun aslında kesirli bir polinom olduğunu anlarız. (Her tamsayı da aynı zamanda kesirli bir sayıdır.)
Ne yaptık? $\mathbb{Z}[X]$ polinom halkasını $\mathbb{Q}(X)$ diye bir cismin içinde soktuk. Daha önce de $\mathbb{Z}$ halkasını benzer biçimde $\mathbb{Q}$ cisminin içine sokmuştuk.

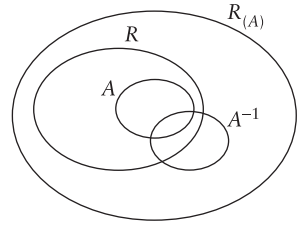
34.4. Katsayıları kesirli sayılar olan polinom halkası $\mathbb{Q}[X]$ olarak yazılır. Şu S kümesine bakalım:

$$S = \{f(X)/X^n : f \in \mathbb{Q}[X], n \in \mathbb{N}\}.$$

S, elbette $\mathbb{Q}(X)$ cisminin bir altkümesidir ve $\mathbb{Q}[X]$ halkasını içerir ($f(X)/X^n$ ifadesinde $n = 0$ alın.) Ayrıca, toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğundan S bir halkadır. Bu halkada X tersinirdir, çünkü $1/X \in S$. Dikkatle incelenecek olursa, S'nin, bir anlamda, X'in tersinir olduğu ve $\mathbb{Q}[X]$'i içeren en küçük halka olduğu kolaylıkla anlaşılır. S'de, örneğin $1 + X$ tersinir değildir. (Neden?)

34.2 Amaç

Bu örneklerden sonra yazının amacını açıklayalım. Amacımız, değişmeli bir R halkası ve bu halkanın bir A altkümesi verildiğinde, A'nın elemanlarının içinde tersinir olduğu R'yi altküme olarak içeren bir halka bulmak ve bunu en **ekonomik** biçimde yapmak. Uygulamada en çok, R'nin bir bölge olduğu, yani A'nın $R \setminus \{0\}$ olabileceği durum kullanılır.



Bulmak istediğimiz bu halkayı R_A olarak yazalım. R_A'dan özetle şunları istiyoruz:

i. R_A, R'yi içeren bir halka olsun.

ii. $R \leq R_A$ olsun. Yani her iki halkanın da etkisiz elemanları aynı olsun ve her x, $y \in R$ için, $x + y$ ve xy'nin değerleri, R'de de hesaplansa, R_A'da da hesaplansa aynı olsun.

iii. A'nın her elemanı R_A'da tersinir olsun.

iv. R_A'da sadece yukarıdaki özellikleri sağlayacak kadar eleman olsun, gereksiz elemanlar olmasın. (Bunu daha matematiksel bir biçimde de söyleyebilirdik, yazının sonunda söyleyeceğiz de.) Yukarıdaki dört örnekte R, A ve R_A şöyle:

a. $R = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ya da $A = \{\mathbb{Z}$'nin asalları $\}$ ve $R_A = \mathbb{Q}$.

b. $R = \mathbb{Z}$ ve $A = \{p\}$ ya da $A = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $R_A = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$.

c. $R = \mathbb{Z}[X]$, $A = \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ ve $R_A = \mathbb{Q}(X)$.

d. $R = \mathbb{Q}[X]$, $A = \{X\}$ ya da $A = \{X^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $R_A = S$.

34.3 Arayış

Bir an için dilediğimiz gibi bir R_A halkasının varolduğunu varsayıp bu halkanın ne menem bir şey olduğunu anlamaya çalışalım. Ancak R_A'nın ne menem bir şey olması gerektiğini anladıktan sonra R_A halkasını inşa edeceğiz.

Şunu da belirtelim ki, illa yukarıdaki özellikleri sağlayan R_A diye bir halka olmak zorunda değildir. Böyle bir R_A halkası olmayabilir de... R_A'nın varlığı ve yokluğu A'ya göre değişebilir, bazı A'lar için olabilir bazı A'lar için olmayabilir. R verildiğinde, R_A halkasının hangi A'lar için olduğunu da bulacağız.

Eğer $A = \emptyset$ ise, $R_A = R$ alırsak problemi çözmüş oluruz. Bundan böyle $A \neq \emptyset$ olsun.

Eğer $a \in A$ ise, a, R_A halkasında tersinirdir, çünkü öyle olsun istiyoruz. a'nın R_A halkasındaki tersini, alışıldığı üzere, a^{-1} ya da $1/a$ olarak gösterelim.

A'nın elemanları R_A halkasında tersinir olduklarından, A'nın hiçbir a elemanı (ne R'de ne de R_A'da) bir ***sıfırbölen*** olamaz, yani $ab = 0$ ise $b = 0$ olmak zorundadır. İşte bunun kanıtı:

$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1\dot{b} = b.$$

Demek ki 0 elemanı da A'da olamaz.

Bundan böyle A'nın hiçbir elemanının sıfırbölen olmadığını varsayalım (yoksa istediğimiz özellikleri sağlayan bir R_A halkası bulamayız.)

Eğer $r \in R$ ise, $r \in R_A$ olmalı, çünkü R_A'nın R'yi içermesini istiyoruz. Demek ki her $r \in R$ ve $a \in A$ için, R_A halkasında r ile $1/a$ elemanlarını çarpabilmeliyiz. R_A halkasında olması gereken bu çarpımı r/a olarak yazalım.

Elbette

$$r/a = ra^{-1},$$
$$a(r/a) = r$$
$$s(r/a) = (sr)/a$$

gibi eşitlikler R_A halkasında sağlanmalı.

Bir halka olduğundan, R_A'nın r/a biçiminde yazılmış elemanlarını toplayıp çarpabilmeliyiz. r/a ve s/b elemanlarının bir halkada nasıl toplanıp çarpılmaları gerektiği belli: Halkanın en basit özelliklerinden,

$$r/a \pm s/b = (rb \pm sa)/ab \text{ ve } r/a \times s/b = rs/ab$$

çıkar.

Yukarıdaki üç formüle bakarsak, a, $b \in A$ ise, ab'nin de A'da olmasının yararlarını görürüz, çünkü o zaman yukarıdaki üç işlemin herbirinin sonucunun paydasında hep A'nın elemanları olmuş olur. Zaten, eğer A çarpma altında kapalı değilse, A yerine A'nın elemanlarının tüm sonlu çarpımlarının kümesini alarak, A'nın çarpma altında kapalı olduğunu varsayabiliriz, çünkü bu sonlu çarpımlar da R_A'da tersinlenmeli. Bundan böyle A'nın gerçekten çarpma altında kapalı olduğunu varsayalım. Yeni A'nın da, eski A gibi, sıfırbölen içermediğini dikkatinize sunarım.

A artık çarpma altında kapalı olduğundan, yukarıdaki formüllerden,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu anlarız.

Bütün bunları, R_A'nın olduğunu varsayarak yaptık. Sezgilerimizle, R_A halkasının, eğer varsa, yukarıdaki gibi bir küme olması gerektiğini gördük. Demek ki R_A adayımız,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesi olmalı.

Bu, hemen hemen doğru, ama tam doğru değil, çünkü R halkası bu aday kümenin bir altkümesi olmayabilir. Nitekim, R'nin her elemanı illa belli bir $r \in R$ ve $a \in A$ için r/a biçiminde yazılmak zorunda değil. Ama 1'i de A'nın içine atarsak, yani eğer A yerine $A \cup \{1\}$ kümesini alırsak, o zaman, $r = r/1$ eşitliğinden, R'nin aday kümenin bir altkümesi olduğu anlaşılır. (Ayrıca A'nın sıfırböleni olmama ve çarpma altında kapalı olma özellikleri hâlâ korunur.)

Bundan böyle $A \subseteq R$, sıfırböleni olmayan, çarpma altında kapalı olan ve 1'i içeren bir küme olsun. O zaman R_A halkası, eğer varsa,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

olmalı. Toplama, çıkarma ve çarpma da yukarıda açıklandığı gibi olmalı.

Olmalı ama r/a diye bir eleman yok ki evrenimizde! Kendinizi tamsayıları bilen ama kesirli sayıların ne demek olduğunu bilmeyen bir çocuk yerine koyarsanız ne demek istediğimi anlarsınız. 2/3 gibi, r/a diye elemanlar yaratmalıyız, çünkü elimizde sadece r ve a diye nesneler var, r/a diye bir nesne yok.

Adına "r/a" diyeceğimiz nesneler yaratmalıyız, yaratacağız da, yaratması da kolay. Bunun için adına r/a diyeceğimiz yepyeni, daha önce olmayan soyut şeyler yaratmak yeterli!

Eğer bütün r/a elemanları birbirinden değişik olsalardı gerçekten de böyle yapardık. Ama, öyle değil, örneğin, eğer $b \in A$ ise,

$$r/a = (rb)/(ab)$$

olmak zorunda. Sözünü etmek istediğimiz sorun şu: R_A halkasının bir r/a elemanı, $s \neq r$ ve $b \neq a$ için aynı halkanın s/b elemanına eşit olmak zorunda olabilir ve o zaman soyut r/a ve s/b elemanları yaratmak bu eşitliği gözardı eder ve eşit olmaları gereken r/a ve s/b birbirine eşit olmaz... Bilmem anlatabildim mi?

R_A halkasının bir r/a elemanı ne zaman aynı halkanın bir s/b elemanına eşit olur, daha doğrusu olmak zorunda kalır? $r/a = s/b$ eşitliğini ab'yle çarparsak, R'de geçerli olan $rb = sa$ eşitliğini buluruz. Bunun tersi de doğrudur: Eğer R'de $rb = sa$ eşitliği sağlanıyorsa, o zaman R_A halkasında, bu eşitliği ab'ye bölerek, $r/a = s/b$ eşitliğinin geçerli olduğunu anlarız.

Şimdi artık R_A halkasının elemanlarının ne olması gerektiğini aşağı yukarı biliyoruz. Yukarıdaki bilgileri biçimselleştirmeliyiz, yani bildiklerimizi matematikçeye çevirmeliyiz.

34.4 Plan

Yukarıdaki uzun tartışmadan sonra R_A halkasını yaratacak planı kuralım. R_A halkasının r/a elemanlarını yaratacağız. Evrenimizde r/a diye elemanlar yok ama (r, a) ikilileri var, bunlar $R \times A$ kümesinin elemanları. R_A halkasının r/a elemanını (r, a) ikilisi olarak görmek istiyoruz.

Ama o zaman da yukarıda sözettiğimiz sorun çıkacak karşımıza: (r, a) ikilisi, (s, b) ikilisiine eşit olmayabilir ama R_A halkasında $r/a = s/b$ eşitliği boy gösterebilir. O zaman da eşit olmaları gereken (r, a) ve (s, b) ikilileri birbirine eşit olmazlar. Biz de eşit olmasını istediğimiz bu ikililere birbirine ***denk*** ikililer diyelim ve bunu $\equiv$ olarak yazalım. Matematiksel tanım az sonra.

34.5 Matematiksel Tanımlar

Nihayet matematik yapabileceğiz. Yukarıda söylenen her şeyi unutun, daha doğrusu unutmuş gibi davranın! Baştan başlıyoruz. Önce tanımlar.

R bir halka. A, R'nin çarpma altında kapalı, 1'i içeren ama 0'ı içermeyen (dolayısıyla sıfırbölen de içermeyen) bir altkümesi.

Eğer (r, a), $(s, b) \in R \times A$ ise,

$$(r, a) \equiv (s, b)$$

ilişkisini,

$$rb = sa$$

olarak tanımlayalım ve bu durumda (r, a), (s, b) elemanlarına ***birbirine denk*** diyelim. Bu denklik daha sonra $r/a = s/b$ olarak yorumlanacak, ama daha değil. Demek ki,

$$(r, a) \equiv (s, b) \Leftrightarrow rb = sa.$$

Önsav 34.1. *$R \times A$ kümesi üzerine,*

$$(r, a) \equiv (s, b) \Leftrightarrow rb = sa$$

olarak tanımlanan ilişki bir denklik ilişkisidir.

Kanıt: Önce $(r, a) \equiv (r, a)$ ilişkisini kanıtlayalım. Tanıma göre, bu, matematiğin en doğru eşitliklerinden biri olan $ra = ra$ anlamına gelir.

Şimdi $(r, a) \equiv (s, b)$ ise $(s, b) \equiv (r, a)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Bu çok kolay, okura bırakıyoruz.

Son olarak, $(r, a) \equiv (s, b)$ ve $(s, b) \equiv (t, c)$ ilişkileri geçerliyse $(r, a) \equiv (t, c)$ ilişkisini kanıtlamalıyız, yani $rb = sa$ ve $sc = tb$ ise $rc = ta$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım:

$$(rc)b = (sa)c = (sc)a = (tb)a = (ta)b$$

eşitliğinden,

$$(rc - ta)b = 0$$

elde ederiz. b, A'da olduğundan sıfırbölen olamaz. Bu eşitlikten $rc - ta = 0$, yani $rc = ta$ çıkar. □

Eğer $(r, a) \in R \times A$ ise, $[r, a]$ kümesini, (r, a) elemanının denklik sınıfı olarak tanımlayalım:

$$[r, a] = \{(s, b) \in R \times A : (r, a) \equiv (s, b)\} = \{(s, b) \in R \times A : br = as\}.$$

Her $[r, a]$'nın $R \times A$ kümesinin bir altkümesi olduğunu unutmayalım. Örneğin,

$$[1, 1] = \{[a, a] : a \in A\},$$
$$[0, 1] = \{[0, a] : a \in A\}$$

ve her $r \in R$, a, $b \in A$ için $(br, ba) \in [r, a]$

Sonuç 34.2. *$R \times A$'nın $[r, a]$ ve $[s, b]$ altkümeleri ya birbirine eşittir ya da iki ayrık kümedir. Yani her,*

$$(r, a), (s, b) \in R \times A$$

için, ya $[r, a] = [s, b]$ ya da $[r, a] \cap [s, b] = \emptyset$'dir. Ayrıca birinci şık ancak ve ancak $(r, a) \equiv (s, b)$ ise mümkündür.

R_A kümesini $(R \times A)/\equiv$ bölüm kümesi olarak tanımlayalım.

$$R_A = (R \times A)/\equiv = \{[r, a] : r \in R, a \in A\}.$$

İleride, R_A'nın r/a elemanı $[r, a]$ olarak tanımlanacak.

Daha R_A üzerine hiçbir işlem tanımlamadık, R_A henüz sadece safkan bir küme. İşlemleri şimdi tanımlıyoruz: $(r, a), (s, b) \in R \times A$ olsun.

$$[r, a] + [s, b] \text{ ve } [r, a] \times [s, b]$$

işlemlerini tanımlayacağız. Eğer $[r, a]$'nın r/a ve $[s, b]$'nin s/b anlamına geleceğini hesaba katarsak, tanımların nasıl olması gerektiği belli:

$$[r, a] + [s, b] = [rb + sa, ab]$$
$$[r, a] \times [s, b] = [rs, ab].$$

Yalnız bu tanımlarda önemli bir sorun çıkabilir. Örneğin toplamanın tanımında şöyle bir sorun çıkabilir:

$$[r, a] = [r', a'] \text{ ve } [s, b] = [s', b']$$

olabilir ve o zaman yukarıda tanımlanan $[r, a] + [s, b]$'nin $[r', a'] + [s', b']$ elemanına eşit olması gerekir, ki toplama işlemi gerçekten hakkıyla tanımlanmış bir işlem olsun, ne de olsa birbirine eşit elemanlar toplandığında toplamlar farklı çıkmamalı! Bir sonraki önsav bunun bir sorun olmadığını söylüyor:

Önsav 34.3. *(r, a), (r', a'), (s, b), $(s', b') \in R \times A$ olsun. Eğer*

$$[r, a] = [r',\ a'] \text{ ve } [s,\ b] = [s',\ b']$$

ise o zaman

$$[rb + sa,\ ab] = [r'b' + s'a',\ a'b'] \text{ ve } [rs, ab] = [r's', a'b'].$$

olur.

Kanıt: Son derece basit, sadece tanımları uygulamak yeterli. Kolay kanıtı okura bırakıyoruz. □

Artık yukarıda önerdiğimiz gibi,

$$[r,a]+[s,b]=[rb+sa,ab]$$
$$[r,a]\times[s,b]=[rs,ab].$$

toplama ve çarpma tanımlarını yapabiliriz, buna hakkımız olduğunu gördük.

Önsav 34.4. *R_A kümesi yukarıdaki işlemlerle bir halkadır. $[0,1]$ elemanı toplamanın etkisiz elemanı, $[1,1]$ ise çarpmanın etkisiz elemanıdır. $[-r,a]$ elemanı $[r,a]$ elemanının toplama için tersidir. Ayrıca eğer $a\in A$ ise, $[a,1]$ elemanı halkada tersinirdir ve bu elemanın tersi $[1,a]$ elemanıdır.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Şimdi geriye R'nin R_A halkasının bir altkümesi olduğunu kanıtlamak kalıyor. Ama bu yanlış! Hatta R ile R_A kümeleri çoğu zaman kesişmez bile.

Evet, R, R_A'nın bir altkümesi değil ama, R'ye çok benzeyen bir althalka var R_A'da: $[r,1]$ türünden yazılan elemanların kümesi R_A'nın R'ye çok benzeyen althalkasıdır. Nitekim, her r, $s\in R$ için,

$$[r,1]+[s,1]=[r+s,1]$$
$$[r,\ 1][s,1]=[rs,1].$$

Görüldüğü gibi, R'deki toplama ve çarpma işlemleri aynen R_A'nın

$$\{[r,\ 1]:r\in R\}$$

kümesine yansıyor.

Önsav 34.5. *$i:R\to R_A$ fonksiyonu $i(r)=[r,1]$ kuralıyla tanımlanmış olsun. O zaman,*
a. *i birebirdir.*
b. *i toplamaya ve çarpmaya saygı duyar, yani, her r, $s\in R$ için,*

$$i(r+s)=i(r)+i(s),$$
$$i(rs)\ \ =i(r)i(s).$$

c. *i, R halkasının etkisiz elemanını R_A halkasının etkisiz elemanına götürür.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Yukarıdaki b ve c koşullarını sağlayan bir fonksiyona halkaların ***eşyapı fonksiyonu*** adı verilir. (c koşulu küçümsenmemelidir!)

Yukarıdaki önsavı dikkate alarak, bundan böyle R'nin r elemanıyla R_A'nın $i(r)$ elemanı arasında bir fark gözetmeyeceğiz. Bir başka deyişle, R_A kümesinden $i(R)$ altkümesini kesip, onun yerine R kümesini koyacağız, yani $i(R)$'le R'yi özdeşleştireceğiz. Böylece R_A'dan $[r, 1]$ elemanını silip yerine r'yi koymuş oluruz ve R yapay yolla da olsa R_A'nın bir altkümesi olur. Bu yöntemle A'nın elemanları R_A'da tersinir oldular:

$$a^{-1} = [1, a].$$

Bunun sonucu olarak

$$[r, a] = [r, 1][1, a] = ra^{-1} = r/a$$

yazabiliriz. Demek ki,

$$R_A = \{r/a : r \in R, a \in A\},$$

tam istediğimiz gibi bir halka.

Burada açıklanması uzun sürecek geometrik nedenlerden, R_A halkasına R'nin A'da ***yerelleştirilmişi*** adı verilir. Eğer R bir bölgeyse, yani $xy = 0$ eşitliği $x = 0$ ya da $y = 0$ eşitliklerinden birini gereksindiriyorsa, bir üst halkada tersinlemek istediğimiz A kümesi yerine $R \setminus \{0\}$ alabiliriz. O zaman, R_A bir cisim olur (neden?) ve bu durumda R_A cismine R'nin ***bölüm cismi*** (field of fractions) adı verilir.

Eğer R bir bölgeyse ve $p \in R$ bir asalsa [yani her x ve y için, p, xy'yi böldüğünde p ya x'i ya da y'yi bölüyorsa, $A = R \setminus pR$ olabilir. Kolayca görüleceği üzere, $1 \in A$'dır ve p asal olduğundan, A çarpma altında kapalıdır. Örneğin eğer p, $\mathbb{Z}$'nin ya da $\mathbb{Q}[X]$'in bir asalıysa,

$$\{a/n \in \mathbb{Q} : a, n \in \mathbb{Z}, \text{ebob}(p, n) = 1\}$$

ve

$$\{a/b \in \mathbb{Q}(X) : a, b \in \mathbb{Q}[X], \text{ebob}(p, b) = 1\}$$

bu tür yerelleştirilmiş halkalardandır. Ek 2 35'da aynı şeyi değişmeli olmayan halkalar üzerinde deneyeceğiz.

34.6 En Küçük Ne Demek?

Şimdi R'nin bir bölge olduğunu varsayalım ve R'nin bölüm cisminin neden ve hangi anlamda R'yi içeren en küçük cisim olduğunu matematiksel olarak açıklayalım.

Teorem 34.6. *R bir bölge olsun ve F, R'nin yukarıda inşa edilen bölüm cismi olsun. K herhangi bir cisim ve*

$$\varphi : R \to K$$

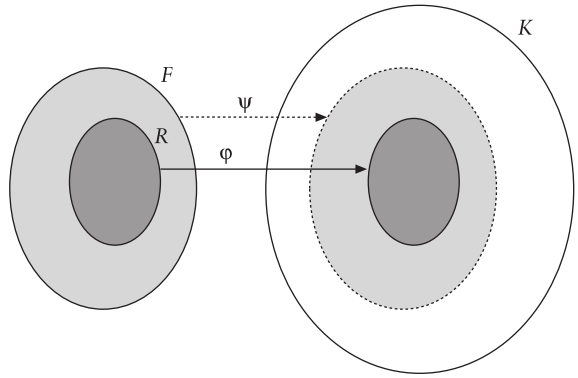
herhangi bir birebir eşyapı fonksiyonu olsun (yani φ toplamaya ve çarpmaya saygı duysun.) O zaman, her $r \in R$ için,

$$\psi(r) = \varphi(r)$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane birebir

$$\psi : F \to K$$

eşyapı fonksiyonu vardır. Ayrıca, yukarıdaki özelliği sağlayan ve R'yi içeren her F' cismi, F'ye eşyapısal olmak zorundadır.



Kanıt: Herhangi bir $\alpha \in F$ alalım. α'yı, r, $s \in R$ olmak üzere, r/s olarak yazabiliriz: $\alpha = r/s$. Demek ki $s\alpha = r$. Eğer söz edildiği gibi bir $\psi : F \to K$ eşyapı fonksiyonu varsa, o zaman,

$$\varphi(r) = \psi(r) = \psi(s\alpha) = \psi(s)\psi(\alpha) = \varphi(s)\psi(\alpha)$$

olmalı, yani,

$$\psi(\alpha) = \varphi(s)^{-1}\varphi(r)$$

olmalı, başka seçenek olamaz. Demek ki söylendiği gibi bir ψ varsa ancak bir tane olabilir. Şimdi ψ'nin varlığını kanıtlayalım. Elbette, ψ'yi şöyle tanımlayacağız: Herhangi bir $\alpha \in F$ alalım. α'yı, r, $s \in R$ olmak üzere, r/s olarak yazalım: $\alpha = r/s$. Burada s'nin 0 olamayacağına dikkatinizi çekerim. Şimdi,

$$\psi(\alpha) = \varphi(s)^{-1}\varphi(r) \in K$$

olsun. Bu tanımın matematiksel açıdan sakıncalı olmadığını gösterelim.

Her şeyden önce, $\varphi(s) \in R \leq K$. Eğer $\varphi(s) = 0$ olsaydı,

$$\varphi(s) = 0 = \varphi(0)$$

olurdu ve birebirlikten dolayı $s = 0$ olmak zorunda olurdu, ki bunun doğru olmadığını biliyoruz. Demek ki $s \neq 0$ ve K'da $j(s)$'nin tersi vardır, yani olduğundan ve K bir cisim olduğundan, $\varphi(s)^{-1}$, K'dadır. Dolayısıyla K'nın $\varphi(s)^{-1}\varphi(r)$ elemanından sözedebiliriz.) Ama bu yetmez. Tanımın gerçekten iyi bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Yani $\varphi(s)^{-1}\varphi(r)$ gerçekten K'nin bir elemanı.

Daha bitmedi. Eğer

$$\alpha = r/s = r'/s'$$

ise,

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(r) = \varphi(s')^{-1}\varphi(r')$$

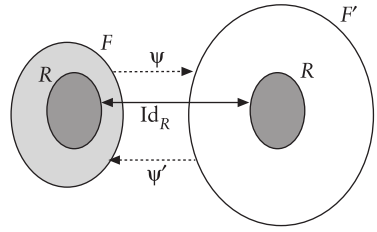
olmalı ki, ψ'nin önerilen tanımı bize çelişik sonuçlar vermesin. (Burada r, s, r', $s' \in R$ ama s, $s' \neq 0$.) Bunu hemen kanıtlayalım: R halkasında $s'r = r's$ eşitliği geçerli olduğundan, her iki tarafa da φ'yi uygularsak,

$$\varphi(s')\varphi(r) = \varphi(s)\varphi(r')$$

olmalı. Buradan da istenilen

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(r) = \varphi(s')^{-1}\varphi(r')$$

eşitliği çıkar.



Şimdi ikinci kısmı kanıtlayalım. R'yi içeren F' cismi aynen teoremin birinci kısmında belirtilen özelliğe sahip olsun. I_R, R'den R'ye giden özdeşlik fonksiyonu olsun: Her $r \in R$ için, $\mathrm{I}_R(r) = r$.

Şimdi teoremin birinci kısmında K yerine F' ve φ yerine I_R alalım. O zaman her $r \in R$ için,

$$\psi(r) = \mathrm{I}_R(r) = r$$

eşitliğini sağlayan birebir bir

$$\psi : F \to F'$$

eşyapı fonksiyonu vardır.

İkinci olarak F ile F' cisimlerinin rollerini değiştirelim. Varsayıma göre, her $r \in R$ için,

$$\psi'(r) = \mathrm{I}_R(r) = r$$

eşitliğini sağlayan birebir bir

$$\psi' : F' \to F$$

eşyapı fonksiyonu vardır.

Demek ki,

$$\psi' \circ \psi : F \to F$$

eşyapı fonksiyonu, her $r \in R$ için,

$$(\psi' \circ \psi)(r) = r$$

eşitliğini sağlar. Ama $\mathrm{I}_F : F \to F$ özdeşlik fonksiyonu da her $r \in R$ için bu eşitliği sağlar. Bu eşitliği sağlayan fonksiyonun biricikliğinden dolayı,

$$\psi' \circ \psi = \mathrm{I}_F$$

eşitliği geçerlidir. $\psi' \circ \psi$ yerine $\psi' \circ \psi : F' \to F'$ eşyapı fonksiyonunu ele alacak olursak, aynı şekilde

$$\psi' \circ \psi = \mathrm{I}_{F'}$$

eşitliğini elde ederiz. Bundan da ψ'nin birebir ve örten, yani bir eşyapı eşlemesi olduğu çıkar. □

Bölüm cisminin yukarıdaki teoremde yazılan özelliği görüldüğü gibi bölüm cisminin eşyapısallığını belirliyor. Bu özellik, "evrensel özelliklere" bir örnektir. "Evrensel özelliklere" cebirde daha çok rastlayacağız. Benzer sonuç yerelleştirilmiş R_A halkaları için de geçerlidir. Bu sonucu yazmayı ve kanıtlamayı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

35. Ore Bölgeleri ve Halkaları

Geçen bölümde, bir bölgenin bölüm cismini tanımlamış ve var etmiştik: Eğer R bir bölgeyse, R'nin 0 dışındaki elemanlarının tersinir olduğu en küçük halkayı (aslında cismi) bulmuştuk.

Bir R halkasının bölge olması için iki koşul gereklidir:

$$\text{Her } x, y \in R \text{ için } xy = yx,$$

yani halka değişmelidir, ve

Her x, $y \in R$ *için*, $xy = 0$ *ise ya* $x = 0$ *ya da* $y = 0$*'dır. Yani* 0

elemanı halkanın tek sıfırbölenidir.

Bu bölümde, Ek 34'de yaptığımızın benzerini değişmeli olmayan halkalarda yapmaya çalışacağız. Her zaman başarılı olamasak da başarılı olmamız için yeterli koşulu göreceğiz.

İkinci koşuldan vazgeçemeyiz çünkü R'nin 0 dışındaki elemanlarının daha büyük bir halkada tersinir olmaları için bu koşul illa ki gereklidir. Ama eğer birinci koşuldan vazgeçiyorsak, ikinci koşulu güçlendirmemiz gerekir. Bundan böyle, her x, y elemanı için,

$$xy = 0 \ ya \ da \ yx = 0 \ ise, \ ya \ x = 0 \ ya \ da \ y = 0\text{'}dır$$

koşulunu sağlayan R halkalarında çalışalım.

Öyle bir D halkası bulacağız ki,

1. R, D'nin bir althalkası olacak,

2. R'nin 0 dışındaki her elemanı D'de tersinir olacak[1],

3. Her $d \in D$ için $d = s^{-1}r$ koşulunu sağlayan r, $s \in R$ elemanları olacak. (s tabii ki 0 olamaz.)

Son iki özellikten D'nin 0 olmayan her d elemanının tersinir olduğu çıkar. Nitekim, eğer r, $s \in R$ için $d = s^{-1}r$ ise, $r \neq 0$ olur, dolayısıyla D'de r'nin tersi olan r^{-1} vardır ve $r^{-1}s$ elemanı D'dedir. Kolayca görüleceği üzere bu $r^{-1}s$

[1]Burada, bir $x \in D$ elemanının tersinir olması demek, hem $xy = 1$ hem de $yx = 1$ eşitliklerini sağlayan bir $y \in D$ olması demektir

elemanı d'nin tersidir. 0 olmayan her elemanının tersinir olduğu bu tür halkalara ***bölüm halkası*** denir. Bir bölüm halkasının cisim olması için çarpmanın değişkenliği yeter ve gerek koşuldur (neden?)

Yukarıdaki (3) koşulu yerine şu koşulu da alabilirdik:

3'. Her $d \in D$ için $d = rs^{-1}$ koşulunu sağlayan r, $s \in R$ elemanları olacak.

R, illa değişkenli bir halka olmadığı için (3) ve (3') koşulları birbirlerine denk olmayabilirler, yani birinin doğru olması, diğerinin de doğru olduğu anlamına gelmeyebilir, nitekim gelmez de.

D'yi inşa etmek için daha önceki bölümde kullandığımız yöntemi deneyeceğiz. D'nin $s^{-1}r$ elemanını (r, s) ikilisi olarak göstereceğiz ve $R \times R \setminus \{0\}$ kümesi üzerinde $\equiv$ ikili ilişkisini, inşa edeceğimiz D'de

$$(r, s) \equiv (t, u) \Leftrightarrow s^{-1}r = u^{-1}t$$

denkliği doğru olacak biçimde tanımlayacağız. Yalnız sağ taraftaki

$$s^{-1}r = u^{-1}t$$

koşulu henüz var olmayan ve daha sonra, ancak D'yi inşa ettiğimiz zaman var olacak olan s^{-1} ve u^{-1} elemanlarını kullanıyor. R değişkenli bir halka olduğunda, doğru olması gereken

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow ur = st$$

denkliğini kullanıp, $\equiv$ ikili ilişkisini,

$$(r, s) \equiv (t, u) \Leftrightarrow ur = st$$

olarak tanımlamıştık. Ama artık R'nin değişkenli bir halka olduğunu varsaymıyoruz. Dolayısıyla ciddi bir sorunla karşı karşıyayız. $s^{-1}r = u^{-1}t$ koşuluyla eşdeğer olan ama R'nin elemanları kullanılarak ifade edilebilen bir eşitlik arıyoruz.

$s^{-1}r = u^{-1}t$ eşitliğinde s'yi diğer tarafa geçirip hiç olmazsa s^{-1} teriminden kurtulabiliriz:

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow r = su^{-1}t.$$

Şimdi $r = su^{-1}t$ ilişkisinden R'de olup olmadığından emin olmadığımız u^{-1} terimini atmanın bir yolunu bulmalıyız. (Eğer u'nun tersi R'de olsaydık sorun olmazdı, ama u'nun tersi R'de olmayabilir.)

R değişkenli olduğunda, daha ileride, D'yi inşa ettiğimizde doğru olacak olan

$$su^{-1} = u^{-1}s$$

eşitliğini kullanmıştık. Bu sefer böyle bir eşitlik geçerli olmayabilir. Bu eşitlik yerine, s_1, $u_1 \in R \setminus \{0\}$ için,

$$su^{-1} = u_1^{-1}s_1$$

eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Daha doğrusu, bu eşitlikten ziyade, buna denk olan ama R'de geçerli olan,

$$u_1 s = s_1 u$$

eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Eğer bu koşul her

$$(u, s) \in R \times (R \setminus \{0\})$$

için sağlanıyorsa, halkaya ***sol Ore bölgesi*** adı verilir. Bu varsayım altında,

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow r = su^{-1}t \Leftrightarrow r = u_1^{-1}s_1 t \Leftrightarrow u_1 r = s_1 t$$

eşdeğerliklerine ulaşırız. Demek ki, eğer R bir sol Ore bölgesiyse, $R \times (R \setminus \{0\})$ kümesi üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini,

$(r, s) \equiv (t, u)$ ancak ve ancak

$u_1 s = s_1 u$ ve $u_1 r = s_1 t$ eşitliklerini sağlayan $u_1, s_1 \in R \setminus \{0\}$ varsa

yani

$$\exists u_1, s_1 \in R \setminus \{0\}(u_1 s = s_1 u \text{ ve } u_1 r = s_1 t)$$

olarak tanımlayıp bu tanımın değişmeli halkalarda tanımlanan benzer ilişkiyle aynı işlevi göreceğini umabiliriz.

Sol Ore koşulu, a/s ve b/u gibi elemanları toplarken paydaları eşitlememize olanak sağlayacak.

Sol Ore Koşulu: Her s, $u \in R \setminus \{0\}$ için,

$$u_1 s = s_1 u$$

eşitliğini sağlayan u_1, $s_1 \in R \setminus \{0\}$ vardır, yani

$$Rs \cap Ru \neq \{0\}$$

olur.

Önsav 35.1. *R, bir sol Ore bölgesiyse, $R \times (R \setminus \{0\})$ üzerine yukarıda tanımlanan $\equiv$ ikili ilişkisi bir denklik ilişkisidir.*

Kanıt: Önce her $r,\ s \in R \times (R \setminus \{0\})$ için, $(r,s) \equiv (r,s)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Bunun için $u_1 = s_1 = 1$ almak yeterli.

Şimdi $(r,s) \equiv (t,u)$ denkliğini varsayıp $(t,u) \equiv (r,s)$ denkliğini kanıtlayalım. $u_1,\ s_1 \in R \setminus \{0\}$,

$$u_1 s = s_1 u \text{ ve } u_1 r = s_1 t$$

eşitliklerini sağlasın. $(t,u) \equiv (r,s)$ denkliğini kanıtlamak için,

$$u_2 u = s_2 s \text{ ve } u_2 t = s_2 r$$

eşitliklerini sağlayan $u_2,\ s_2 \in R \setminus \{0\}$ bulmalıyız. Çok kolay:

$$u_2 = s_1, s_2 = u_1$$

olsun. Buraya kadar Ore koşulunu kullanmadık. Şimdi kullanacağız.

Son olarak, $(r,s) \equiv (t,u)$ ve $(t,u) \equiv (v,w)$ denkliklerini varsayıp

$$(r,s) \equiv (v,w)$$

denkliğini kanıtlayalım. Varsayıma göre,

$$u_1 s = s_1 u, u_1 r = s_1 t, w_2 u = u_2 w \text{ ve } w_2 t = u_2 v$$

eşitliklerini sağlayan $u_1,\ s_1,\ w_2,\ u_2 \in R \setminus \{0\}$ elemanları var. Ve biz de,

$$w_3 s = s_3 w, w_3 r = s_3 v$$

eşitliklerini sağlayan $w_3,\ s_3 \in R \setminus \{0\}$ elemanları arıyoruz. Ore koşulunu w_2 ve s_1 elemanlarına uygularsak, $as_1 = bw_2$ eşitliğinin geçerli olduğu $a,\ b \in R \setminus \{0\}$ elemanlarını buluruz. Şimdi hesaplayalım:

$$au_1 s = as_1 u = bw_2 u = bu_2 w$$

buluruz. Demek ki $w_3 = au_1$ ve $s_3 = bu_2$ alırsak, $w_3 s = s_3 w$ birinci eşitliğini elde ediyoruz. Bakalım $w_3 r = s_3 v$ eşitliği de doğru mu?

$$w_3 r = au_1 r = as_1 t = bw_2 t = bu_2 v = s_3 v.$$

Doğruymuş! Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Şimdi $D = (R \times (R \setminus \{0\}))/\equiv$ olsun. D üzerinde bir halka yapısı belirleyeceğiz.

D'nin bir elemanını $[r,s]$ olarak yazalım. Buradaki

$$[r,s]$$

elemanı, $R \times (R \setminus \{0\})$ kümesinin (rs) elemanının denklik sınıfıdır. İleride $[r, s]$'nin $s^{-1}r$ anlamına geleceğini biliyoruz. Eğer $a \in R \setminus \{0\}$ ise $[r, s] = [ar, as]$ eşitliğine dikkatinizi çekerim.

Önce toplamadan başlayalım. İşin özü şu:

$$s^{-1}r + t^{-1}u$$

toplamını $x^{-1}y$ olarak yazmak istiyoruz. Eğer bunu yapabilirsek, o zaman,

$$[r, s] + [t, u] = [x, y]$$

olarak tanımlayabiliriz. Demek ki,

$$x(s^{-1}r + t^{-1}u) \in R$$

olacak biçimde bir $x \neq 0$ bulmak yeterli (o zaman y elemanını $x(s^{-1}r + t^{-1}u)$ olarak alabiliriz).

$$x(s^{-1}r + t^{-1}u) = xs^{-1}r + xt^{-1}u$$

olduğundan, x'i xs^{-1}, $xt^{-1} \in R$ ilişkilerini sağlayacak biçimde seçebilirsek, sorun kalmayacak. Yani x'i $Rs \cap Rt \setminus \{0\}$ kümesinden seçmeye çalışalım. Ama böyle bir x'in olduğunu da sol Ore koşulundan biliyoruz. Şimdi tanımı yapabiliriz.

$(r, s), (t, u) \in R \times (R \setminus \{0\})$ olsun. $x \in Rs \cap Rt \setminus \{0\}$ ve
$y = x(s^{-1}r + t^{-1}u) \in R$ olsun. O zaman,

$$[r, s] + [t, u] = [x, x(s^{-1}r + t^{-1}u)]$$

olarak tanımlansın. Ama bu tanım pek o kadar güzel olmadı. R'nin bir elemanı olduğunu bildiğimiz sağ taraftaki $x(s^{-1}r+t^{-1}u)$ teriminde s^{-1} ve t^{-1} gibi R'de olmayan elemanlar gözüküyor. Bu küçük kusuru giderelim. $s_1 \neq 0$ ve $t_1 \neq 0$ için $x = t_1 s = s_1 t$ eşitliği sağlansın. Şimdi toplamayı

$$[r, s] + [t, u] = [t_1 s, t_1 r + s_1 u]$$

olarak tanımlayalım. Yalnız bu tanımın r, s, t, u, t_1, s_1 elemanlarından bağımsız olduğunu göstermek gerekir. Yani şu önsavı kanıtlamalıyız:

Önsav 35.2. *$[r, s] = [r', s']$ ve $[t, u] = [t', u']$ olsun. Ayrıca,*

$$t_1 s = s_1 t \text{ ve } t'_1 s' = s_{1'} t'$$

eşitlikleri sağlansın. O zaman,

$$[t_1 s, t_1 r + s_1 u] = [t_{1'} s', t_{1'} r' + s_{1'} u']$$

eşitliği doğrudur.

Bu önsavı kanıtlamayacağız. Okura alıştırma olarak bırakıyoruz[2]. Bu önsavdan sonra toplama, $t_1 s = s_1 t$ eşitliği sağlayan t_1, $s_1 \in R \setminus \{0\}$ elemanları için,

$$[r, s] + [t, u] = [t_1 s, t_1 r + s_1 u]$$

olarak tanımlansın.

Çarpma için de benzer şeyi yapacağız. Gene işin özüne gidelim:

$$(s^{-1} r)(u^{-1} t)$$

çarpımını $x^{-1} y$ biçiminde yazmak istiyoruz, ki

$$[r, s][t, u] = [y, x]$$

olarak tanımlayabilelim.

$$(s^{-1} r)(u^{-1} t) = s^{-1}(r u^{-1}) t$$

eşitliğinden dolayı, çarpımının en başındaki s^{-1} ile en sonundaki t'nin bir önemi yok elbet. ru^{-1} elemanını $y^{-1}x$ biçiminde yazabilirsek, işimiz biter. O zaman

$$(s^{-1} r)(u^{-1} t) = s^{-1} y^{-1} x t = (ys)^{-1} x t$$

olur ve

$$[r, s][t, u] = [xt, ys]$$

tanımını deneyebiliriz. Eğer $ru^{-1} = y^{-1}x$ ise, $yr = xu$'dur. Sol Ore koşuluna göre de R'de bu son eşitliği sağlayan x, $y \neq 0$ elemanları vardır. Şimdi çarpmayı tanımlayabiliriz:

(r, s), $(t, u) \in R \times (R \setminus \{0\})$ olsun. x, $y \in R \setminus \{0\}$ elemanları, $yr = xu$ eşitliğini sağlasın.

$$[r, s][t, u] = [xt, ys]$$

tanımını yapalım. Bir kez daha bu tanımın yasal olduğunu kanıtlamalıyız:

Önsav 35.3. *$[r, s] = [r', s']$ ve $[t, u] = [t', u']$ olsun. Ayrıca, $yr = xu$ ve $y'r' = x'u'$ eşitlikleri sağlansın. O zaman, $[xt, ys] = [x't', y's']$ eşitliği doğrudur.*

Böylece çarpmayı yukarıdaki gibi tanımlayabiliriz.

Eğer tanımda $r = t = 1$ alırsak, o zaman $x = y = 1$ alabiliriz ve

$$[1, s][t, 1] = [t, s]$$

[2]Dileyen okur John A. Beachy'nin Introductory Lectures on Rings and Modules kitabına bakabilir. London Mathematical Society, Student Texts 47 (1999) ISBN 0521 64340 6 ve 0521 64407 0.

buluruz.

Ama dikkat: Eğer tanımda $s = t = 1$ alırsak, $yr = xu$ eşitliğini sağlayan x ve y elemanları için,

$$[r, 1][1, u] = [x, y]$$

eşitliği bulunur ve $ur = ru$ doğru olmadıkça bu çarpım $[r, u]$ olmaz.

Okur bir de $[r, s][s, r]$ çarpımını hesaplasın.

$$[r, s][s, r] = [s, s] = [1, 1]$$

bulacaktır.

Bütün bunlardan sonra, artık D kümesinin bu iki işlemle birlikte bir halka olduğunu, hatta $[0, 1]$ dışında her elemanın tersinir olduğunu kanıtlayabiliriz. Ayrıca, $r \mapsto [r, 1]$ fonksiyonunun R'den D'ye giden bir halka gömmesi olduğunu kanıtlayabiliriz.

Teorem 35.4. *R bir sol Ore bölgesiyse, bu tanımlarla*

$$(D, +, \times, [0, 1], [1, 1])$$

yapısı bir halkadır. Bu halkada $[0, 1]$ toplamanın, $[1, 1]$ de çarpmanın etkisiz elemanlarıdır. Eğer $r \neq 0$ ise, D'nin her $[r, s]$ elemanı tersinirdir ve

$$[r, s]^{-1} = [s, r]$$

'dir. Ayrıca,

$$[r, s] = [1, s][r, 1] = [s, 1]^{-1}[r, 1]$$

dir. Dahası, $i(r) = [r, 1]$ kuralıyla tanımlanan

$$i : R \to D$$

fonksiyonu birebirdir, toplamaya ve çarpmaya saygı duyar ve R'nin 0 ve 1 etkisiz elemanlarını sırasıyla D'nin $[0, 1]$ ve $[1, 1]$ etkisiz elemanlarına götürür.

Eğer $i(R)$ ile R'yi özdeşleştirirsek, istediğimiz,

$$D = (R \setminus \{0\})^{-1} R$$

eşitliğini buluruz.

Son olarak bölge olmayan Ore halkalarından söz edelim. Bir R halkasında,

$$\textit{Her } y \in R \textit{ için}, xy = 0 \text{ ya da } yx = 0 \text{ ise } y = 0\text{'}dır$$

önermesini doğrulayan elemanlara (yani sıfırbölen olmayan elemanlara) ***düzgün eleman*** denir. R'nin düzgün elemanlar kümesini R_0 ile gösterelim. Yukarıda yaptıklarımızda, $R_0 = R \setminus \{0\}$ idi.

Sol Ore Koşulu: *Her* $u, s \in R_0$ *için,* $u_1 s = s_1 u$ *eşitliğini sağlayan* $u_1, s_1 \in R_0$ *vardır.*

Bu koşulu sağlayan bir halkaya ***Ore halkası*** denir. Aynen yukarıdaki yöntemle, bir R Ore halkasını, R_0'ın elemanlarının tersinir olduğu $D = R_0^{-1}R$ eşitliğini sağlayan bir D halkasının içine gömebiliriz.

36. Sonsuz Küçük Eleman

Bu bölümde, bugüne dek ancak rüyalarınızda göreceğinizi tahmin edeceğiniz bir numara gerçekleştireceğiz: 3/5, 7/9, $-4/5$ ve 3 gibi kesirli sayılara ***sonsuz küçük*** bir eleman ekleyeceğiz. Miniminnacık bir şey olacak bu sonsuz küçük eleman (ya da bu yeni "sayı"). O kadar küçük, ama o kadar küçük olacak ki, milyarda 1'den, katrilyonda 1'den ve her pozitif kesirli sayıdan daha küçük olacak.

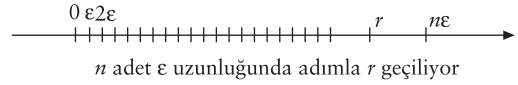
Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü içeren, ama ayrıca bir de "sonsuz küçük" bir eleman içeren yepyeni bir "sayı sistemi" yaratacağız. Bu sayı sisteminde, "sayı"ları toplayıp çıkarıp çarpabileceğiz, hatta birbirine bölebileceğiz. (Tabii ki 0'a bölemeyeceğiz!)

Sonsuz küçük elemana ϵ adını verirsek, $1/\epsilon$ gibi bir elemanımız da olacak doğal olarak. Tahmin edileceği üzere, ϵ sonsuz küçük olduğundan, $1/\epsilon$ sonsuz büyük olacak!..

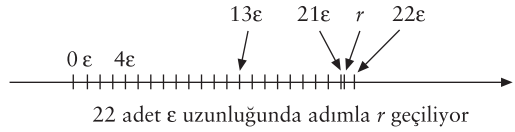
36.1 Arşimet Özelliği

Arşimet'in insanlık için yaptığı haddi hesabı olmayan iyiliklerden biri de, ne kadar küçük adımlar atarsak atalım, eğer hep aynı uzunlukta adımlar atarsak ve eğer yeterince adım atarsak, dilediğimiz kadar uzağa gidebileceğimizi anlamasıdır. Buna kısaca "sabreden derviş yol katetmiş teoremi" diyebiliriz, ama daha da kısa olarak ***Arşimet Özelliği*** adıyla bilinir.

Arşimet Özelliği. *$\epsilon > 0$ bir kesirli sayı olsun. q bir başka kesirli sayı olsun. O zaman $n\epsilon > q$ eşitliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır. Yani ϵ ne kadar küçük olursa olsun, eğer pozitifse, kendisiyle yeterince defa toplanınca her sayıyı geçer.*



Kanıt: Eğer $q \leq 0$ ise $n = 1$ almak yeterli. Şimdi $q > 0$ varsayımını yapalım. Pozitif a, b, c, d doğal sayıları için, $\epsilon = a/b$ ve $q = c/d$



olarak yazalım. O zaman, $b\epsilon = b \times a/b = a \geq 1$. Dolayısıyla

$$c(b+1)\epsilon = c(b\epsilon + \epsilon) \geq c(1+\epsilon) > c \geq c/d = q$$

Demek ki $n = c(b+1)$ almak yeterli. □

Eğer bir ϵ sayısı 0 değilse ve her n tamsayısı için, $n|\epsilon| < 1$ oluyorsa, ϵ sayısına ***sonsuz küçük*** diyelim... Arşimet Özelliği sonsuz küçük bir kesirli sayının olmadığını söylüyor!

Sonsuz küçük gerçel sayı da yoktur elbette. Ama bizim için bu önemli olmayacak, biz kesirli sayılarla çalışacağız.

Bir ϵ sayısının sonsuz küçük olmasıyla bunun mutlak değeri olan $|\epsilon|$ sayısının sonsuz küçük olması aynı şeydir tabii ki...

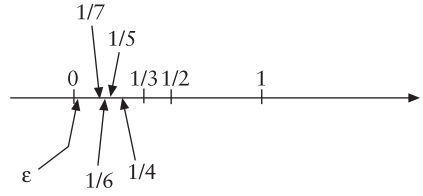
Tanıma bakılırsa, pozitif bir ϵ sayısının sonsuz küçük olması için,

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon < 1,\\ 0 < \epsilon < 1/2,\\ 0 < \epsilon < 1/3,\\ 0 < \epsilon < 1/4,\\ \ldots \end{aligned}$$

koşullarının hepsinin birden doğru olması gerekiyor. Kesirli sayılarda bu koşulların hepsini birden sağlayan bir ϵ yoktur, çünkü Arşimet Özelliği'ne göre **her** $n > 0$ doğal sayısı için,

$$0 < \epsilon < 1/n$$

koşullarının hepsini birden sağlayan kesirli (hatta gerçel) bir sayı yoktur.



Gerçekle başa çıkılmaz... Bunu dert etmeyeceğiz. Biz gene de sonsuz küçük bir sayı bulacağız. Bulduğumuz sayı kesirli (ya da gerçel) sayı olmayacak tabii. Bambaşka bir evrene geçeceğiz.

Bir şeye dikkatinizi çekerim: Yukarıda sıraladığımız sonsuz sayıdaki koşulun sonlu tanesini sağlayan bir ϵ mutlaka vardır. Örneğin, $\epsilon = 1/1001$, ilk bin koşulu sağlar (ama bu ϵ sonraki koşulları sağlamaz.)

Matematikçiler bu gibi durumlarda tüm koşulları sağlayan bir başka sistemin olduğunu hissederler. Tecrübe diye buna derler işte... Mantıkçılar ise bir başka sistemin olduğunu bilirler. Buna da bilim denir! Eğer sonsuz tane koşulun sonlu tanesi hep sağlanabiliyorsa, o zaman sonsuz tane koşulu da sağlayan bir evren olmalı! Bu ilkeye göre, yukarıdaki sonsuz koşulu sağlayan ϵ'un olduğu bir evren olmalıdır. İşte bu bölümde bu evreni bulacağız. Üstelik soyut bir buluş olmayacak bu, evren karşımızda etiyle kemiğiyle belirecek.

Önce böyle bir ϵ'un olduğu bir evrenin olduğunu varsayalım. Bakalım bu varsayımsal evren hakkında neler söyleyebileceğiz? Biraz düşünerek evrene toslayacağız.

Sonsuz küçük bir sayı içeren evrene E diyelim.

E'nin sonsuz küçük bir elemanına ϵ diyelim:

$$\epsilon \in E.$$

Ayrıca kesirli sayıların da E'de olmalarını istiyoruz. Demek ki $\mathbb{Q} \subseteq E$ olmalı.

Elbette $e \notin \mathbb{Q}$.

E'nin elemanlarını çarpabilmek istediğimizden (bölmeyi daha sonra ele alacağız), E'de sadece $\mathbb{Q}$ değil, örneğin $\mathbb{Q}\epsilon$, $\mathbb{Q}\epsilon^2$, $\mathbb{Q}\epsilon^3$ gibi altkümeler de olmalı. Bu altkümelerin elemanlarını toplayabilmeliyiz de. Yani E'de,

$$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\epsilon + \mathbb{Q}\epsilon^2 + \mathbb{Q}\epsilon^3$$

gibi altkümeler olmalı. Demek ki E'de kesirli katsayılı ve "değişkeni" ϵ olan tüm polinomlar olmalı. Eğer bölme yapmaktan vazgeçip sadece toplama, çarpma ve çıkarmayla yetinmeye razı olursak, sadece polinomlar yettiğini göreceğiz, E'de başka bir şey olmasına gerek yok.

$$E = \mathbb{Q}[\epsilon]$$

olsun. E, katsayıları kesirli olan ve değişkeni ϵ olan polinomlar kümesidir. Daha açık olarak, E'nin her f elemanı, bir n doğal sayısı ve f_0, f_1, $\cdots$,f_n kesirli sayıları için

$$f = f_0 + f_1\epsilon + \ldots + f_n\epsilon^n$$

olarak yazılırlar. (Eğer katsayıların hepsi birden 0 değilse, f'nin de 0 olamayacağının kanıtı yan sütundaki gri kutucuğun içindedir.) Burada ϵ'u tanımsız, anlamsız ve yepyeni bir terim olarak görüyoruz.

Yalnız ϵ'un sonsuz küçük olmasını istediğimizi unutmayalım. Bir de ϵ'un pozitif olmasını istiyoruz. Yani, her pozitif n doğal sayısı için,

$$0 < \epsilon < 1/n$$

olmasını istiyoruz. Dolayısıyla her pozitif $q = m/n$ kesirli sayısı için, (m ve n'yi pozitif alalım)

$$0 < \epsilon < 1/n \leq m/n = q,$$

yani

$$0 < \epsilon < q$$

olmalı.

E halkasında henüz tanımlamadığımız eşitsizliğin başka özelliklerini de irdeleyelim. Yukarıdaki eşitsizliklerin üç terimini de herhangi bir pozitif kesirli sayıyla çarparsak, q de rastgele seçildiğinden, her a, b pozitif kesirli sayısı için,

$$0 < a\epsilon < b$$

olması gerektiğini görürüz. Bunları ϵ ile çarparsak

$$0 < a\epsilon^2 < b\epsilon$$

olması gerektiği anlaşılır. Bunu böylecene devam ettirirsek, her pozitif

$$a_0, a_1, \ldots, a_k$$

kesirli sayısı için,

$$0 < a_k\epsilon^k < \cdots < a_2\epsilon^2 < a_1\epsilon < a_0$$

olması gerektiğini görürüz.

Buradan, her a_0, a_1, ..., a_k kesirli sayısı için, eğer $a_0 > 0$ ise,

$$a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \cdots + a_k\epsilon^k > 0$$

olması gerektiği çıkar. Bunu kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} -a_1\epsilon - a_2\epsilon^2 - \cdots - a_k\epsilon^k &\leq |a_1|\epsilon + \cdots + |a_k|\epsilon^k \\ &\leq |a_1|\epsilon + \cdots + |a_k|\epsilon \\ &= (|a_1| + \cdots + |a_k|)\epsilon < a_0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, eğer $a_i > 0$ ise ve i aşağıda görülen göstergeçlerin en küçüğüyse,

$$a_i\epsilon^i + \cdots + a_k\epsilon^k > 0$$

olması gerekir.

36.2 ϵ Cebirsel Olamaz

Hemen yukarıdaki satırdan, hepsi birden 0 olmayan

$$f_0, f_1, \ldots, f_n$$

kesirli sayıları için,

$$f_0 + f_1\epsilon + \cdots + f_n\epsilon^n$$

teriminin 0 olamayacağı kolaylıkla kanıtlanabilir. Yani ϵ, cebirsel bir sayı olamaz.

Şimdi E kümesinin tüm elemanlarını (polinomları) tek bir hamleyle sıralayalım.

E'den rastgele iki a ve b elemanı alalım. Bunlardan hangisinin daha büyük olması gerektiğine karar vereceğiz. Yani $a \geq b$ eşitsizliğinin mi yoksa $a \leq b$ eşitsizliğinin mi doğru olması gerektiğine karar vereceğiz. Tabii, $a \leq b$ eşitsizliği için, $b - a \geq 0$ eşitsizliği gerek ve yeter koşul olmalı. Dolayısıyla hangi polinomun hangi polinomdan daha büyükeşit olduğuna karar vermek için negatif olmayan polinomları bilmek yeterli olmalı.

Rastgele bir $f \neq 0$ polinomu alalım. Bu polinomun pozitif olup olmaması gerektiğine karar vereceğiz. Polinomu,

$$f = f_0 + f_1\epsilon + \cdots + f_m\epsilon^m$$

olarak yazalım. $f_0 = 0$ olabilir elbette. f_1 katsayısı da 0 olabilir. Ama eğer $f \neq 0$ ise, bu katsayılardan biri 0 olmamalı. fk, 0'a eşit olmayan katsayıların ilki olsun. Demek ki,

$$f = f_k\epsilon^k + \cdots + f_m\epsilon^m,$$

ve k, yukarıda beliren göstergeçlerin en küçüğü ve $f_k \neq 0$. Daha önce yaptığımız hesaplardan,

$$\begin{aligned} f > 0 &\Leftrightarrow f_k\epsilon^k + \cdots + f_m\epsilon^m > 0 \\ &\Leftrightarrow f_k + f_{k+1}\epsilon + \cdots + f_m^{\epsilon^{m-k}} > 0 \Leftrightarrow f_k > 0 \end{aligned}$$

olması gerektiğini biliyoruz. Demek ki aslında eşitsizliğin tanımını da biliyoruz:

$$f > 0 \Leftrightarrow f\text{'nin 0 olmayan ilk katsayısı } > 0.$$

Dolayısıyla, f, $g \in E$ için,

$$f > g \Leftrightarrow f - g > 0$$

tanımını yapalım. Bunun yardımıyla, tahmin edildiği gibi $\leq$ ilişkisinin de tanımını yapabiliriz.

Teorem 36.1. *Yukarıda tanımlanan $\leq$ ilişkisi $E = \mathbb{Q}[\epsilon]$ halkasını sıralı bir halkaya dönüştürür.*

Görüldüğü gibi E, $\mathbb{Q}$'nün aksine, bu sıralamayla Arşimet özelliğini sağlamaz. yani $\mathbb{Q}$'nün her pozitif α elemanı için, $n\alpha > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı olmayabilir, örneğin $\alpha = \epsilon$ için böyle bir eleman yoktur.

E'nin pozitif α, β elemanları, her $n \in \mathbb{N}$ (ya da her $n \in \mathbb{Q}$) için,

$$n\alpha < \beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, α'ya β'ya ***göre sonsuz küçük*** diyelim ve bunu

$$\alpha << \beta$$

olarak yazalım. Demek ki $\epsilon << 1$. Hatta, hangi pozitif a ve b sayılarını alırsak alalım,

$$a\epsilon << b$$

olur. ϵ^2 de ϵ'a ve 1'e göre sonsuz küçüktür ve ϵ^3 de ϵ^2'ye, ϵ'a ve 1'e göre sonsuz küçüktür.

E bir halkadır. Yani E'de toplama, çıkarma ve çarpma gibi işlemler vardır ve bu işlemler hepimizin bildiği ve tahmin ettiği özellikleri sağlarlar.

Ama E bir cisim değildir, çünkü E'de bölme yapılamaz. Bölme yapabilmek için E yerine,

$$F = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in E, g \neq 0 \right\}$$

kümesine geçmeliyiz. Burada,

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow fg_1 = f_1 g$$

eşkoşulunu anımsatırız.

$f/g = (-f)/(-g)$ eşitliğinden dolayı, F'nin her elemanı, bir $f \in E$ ve bir $g \in E$ ve $g > 0$ için f/g biçiminde yazılır. Böyle yazılmış f/g ve f_1/g_1 için,

$$\frac{f}{g} \leq \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow fg_1 \leq f_1 g$$

tanımını yapalım. Şimdi, F, üstünde toplama, çıkarma, çarpma ve (0'dan değişik bir elemanla) bölme yapılabilen ve yukarıdaki teoremi sağlayan bir nesnedir.

$\epsilon \in F$, gene sonsuz küçüktür, yani her $n > 0$ doğal sayısı için, $0 < \epsilon < 1/n$ dir. Ama $1/\epsilon$, F'nin sonsuz büyük bir elemanıdır, yani her $n \in \mathbb{Z}$ için, $n < 1/\epsilon$ eşitsizliği doğrudur.

Bütün bu yaptıklarımızı kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ yerine, mot à mot, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile yapabilirdik.

Kaynakça

[CK] Chang C. C ve Keisler H. J., **Model Theory**, 1973, North Holland.

[Mar] Marker, David, **Model Theory: An Introduction**, 2002, Springer, Graduate Texts in Mathematics.

[Ne1] Nesin, Ali, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı II**, yayımlanacak.

[Ne2] Nesin, Ali, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 3'üncü basım, Nesin Yayıncılık 2013.

[Ne3] Nesin, Ali, **Önermeler Mantığı**, Nesin Yayıncılık 2014.

[Ne4] Nesin, Ali, **Analiz I**, Nesin Yayıncılık xxxx

[Po] Poizat, Bruno, **An Introduction To Contemporary Mathematical Logic**, Springer-Verlag, New York, 2000.

Simgeler Dizini

$(X_i)_{i\in I}$, 69
-1, 196
$-\alpha$, 155
$-nx$, 200
$-x$, 195
0, 193
0_R, 193
1, 193, 197
1_R, 193
$<$, 103
R^*, 201
S, 44
$X \times Y$, 63, 70
X^I, 70
$\cdot$, 47
$\leq$, 103
$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, 217
$\mathcal{B}$, 235
$\mathcal{B}^*$, 235
$\mathcal{D}$, 232
$\mathcal{D}^*$, 234
$\mathcal{Y}$, 245
$\mathcal{Y}_0$, 253
$\mathbb{N}$, 77, 80
pr_1, 63
pr_2, 63
$\prod_I X$, 70
$\prod_{i\in I} X_i$, 70
$\subseteq$, 51
$\times$, 47
$\lhd$, 253
$\wp(x)$, 57
$\mathbb{Z}$, 150
$\{x, y\}$, 39
$\{x\}$, 39
a^{-1}, 201
$n-1$, 84
nx, 200
$s(0)$, 233
$s(1)$, 233
$s(a)$, 232
y^x, 22
$+$, 46

0, 27, 39
1, 40
2, 40
3, 43
4, 43
5, 43
6, 44
7, 45
$\in$, 35
$\notin$, 35
$\cap$, 55
$\mathrm{Fonk}(X, Y)$, 66
(x, y), 61, 62
$X \times Y$, 63
pr_1, 63
${}^X Y$, 66
$\emptyset$, 38
$\bigcup$, 42
$\cup$, 42

eküs, 226

$\mathrm{Fonk}(X, Y)$, 66

I_X, 67

$\mathbb{N}$, 27

pr_1, 67

$\mathbb{Q}$, 178

$\mathbb{R}$, 293

S, 27, 44
$S(x)$, 44
sup, 226
Sx, 44

(x, y), 61
${}^X Y$, 66

Y^X, 66

Dizin

0'a yakınsayan diziler, 253
0'dan uzak duran diziler, 236

Abel grubu, 156, 194
abelyen grup, 156, 163, 194
açık küme, 214
açık top, 214
aile, 68
aksiyom, 1, 128, 136
aksiyom şeması, 86
alfabe, 133
althalka, 206
altküme, 51
Altkümeler Kümesi Aksiyomu, 57, 58, 85, 136
Anaksagoras, 1
Arşimet cismi, 186
ardıl, 23, 25, 45
Aristo, 224
aritmetiğin aksiyomları, 128
Arşimet cismi, 353
Arşimet halkası, 210
atomik formül, 134, 139

bağlantılı elemanlar, 204
başlangıç adımı, 82
belirteç, 232
Bernays, Paul, 34, 86, 134
Bernoulli eşitsizliği, 260
Bertrand Russell Paradoksu, 30, 31–34
biçimsel gerçel halka, 212
bileşim, 42
Bileşim Aksiyomu, 42, 51, 58, 85, 136
bir, 40, 193
bir (halkada), 197
birim eleman, 201
birinci izdüşüm, 63
birleşme özelliği, 194, 197, 198
Boşküme Aksiyomu, 37, 51, 57, 85, 136
boşküme, 37, 38
böler, 203
bölge, 162, 163, 168, 203, 204, 210
bölme, 108
bölme (halkada), 203
bölmek, 206
Burali-Forti Paradoksu, 79
Burali-Forti paradoksu, 30

Cantor, Georg, 87
Cauchy dizisi, 267
cisim, 183, 205
cogito ergo sum, 15
Coss, 224
cümle, 136
çarpımsal küme, 100
çarpımsal ters, 201
çarpma, 22, 47, 100–102
çarpmanın etkisiz elemanı, 193
çift, 62

dağılma özelliği, 161, 197, 198
değişken, 133
Dedekind Teoremi, 124
Dedekind, Richard, 25
değer, 66
değer kümesi, 66
değişken, 135
değişme özelliği, 194, 197, 198
değişmeli grup, 156, 163, 194
değişmeli halka, 162, 163, 197
değişmeli işlem, 163
Descartes, René, 15, 63
dizi, 231
doğal sayılar yapısı, 27

Eşitlik Aksiyomu, 85, 136
eşyapı eşlemesi, 236
eğilip bükülmez yapılar, 364
Ekmekçi, Yiğit, 4
eksi, 195
Eksiklik Teoremi, 128
eküs, 226
elemanı olmak, 35
en küçük üstsınır, 226, 227
endeks kümesi, 68
endis, 232
eşyapısal halkalar, 236
eşyapısallık, 124

eşyapısal, 124
etkisiz eleman, 155, 160, 163, 182, 194, 195, 197, 198
etkisiz öğe, 198
evrensel küme, 56
evrensel niceleyici, 136

fonksiyon, 65–66
formül, 82, 133–140
Fraenkel, Abraham, 34, 86, 87
Frege, Gottlob, 30

Gödel, Kurt, 134
Gödel-Bernays kümeler kuramı, 134
GB aksiyom sistemi, 34, 86
geometrik dizi, 259
gerçel sayılar kümesi, 289
Gödel, Kurt, 24, 34, 86, 128, 136, 137
gömme, 169, 170
göstergeç, 232
göstergeç kümesi, 68
grafik, 65
grup, 155, 163, 194
güçlü tümevarım yöntemi, 108, 116

halka, 163, 198
Harrington, Leo, 128
Hausdorff, Felix, 64
Hilbert, David, 30, 86

I_X, 67
ıraksak dizi, 239
ideal, 253
idempotent, 208
iki, 40
İki Elemanlı Küme Aksiyomu, 39, 51, 57
ikili, 61, 62
ikinci izdüşüm, 63
iyi sıralama, 106
iyisıralama, 86, 105–106
izdüşüm, 63
izdüşüm fonksiyonu, 67
İki Elemanlı Küme Aksiyomu, 85, 136
İkinci Eksiklik Teoremi, 24
izomorf, 124, 220
izomorf (halkalar), 208
izomorfi, 124, 236

Küme Eşitliği Aksiyomu, 38, 51, 57
kapsamak, 51
karakteristik (halkanın), 211
karakteristik özellik, 61
kartezyen çarpım, 61, 63, 69–70
kartezyen çarpım (halkalarda), 206
kesirli sayı, 178
kesirli sayılar kümesi, 178
kesişim, 55
komütatif halka, 163
Korkmaz, Aslı Can, 3
Kossak, Roman, 215
Kuratowski, Kazimierz, 63, 64
kuyruk, 237, 240
küçükeşit, 103
küme, 35
küme ailesi, 68–69

Latino sine flexione, 50
Lavoisier, Antoine, 1
limit, 239, 242
Lowenheim-Skolem Teoremi, 126

model, 136
Montague, Richard, 86
mutlak büyük, 103
mutlak değer, 187, 213, 251
mutlak küçük, 103

$\mathbb{N}$, 27
Navajo, 50
Nayir, Ebru, 3
NGB, 134
niceleyici, 136
nilpotent eleman, 208
nonstandart model, 140

onluk taban, 111
ortak, 204
Öklid aksiyomları, 30
önerme, 136
özaltküme, 52
özdeşlik fonksiyonu, 67
özdeştirme, 172
Özerden, Oğuz, 4

PA, 128
parametre, 82, 134, 137–139
Paris, Jeff, 128
Peano Aksiyomları, 84
Peano Aritmetiği, 128, 139
Peano, Giuseppe, 25, 49
Pisagor, 224
Pisagorcular, 224
Podnieks, Karlis, 24
Polonya notasyonu, 133
pozitif koni, 212
pr, 67
pr_1, 63
Presburger, 24

$\mathbb{Q}$, 178

$\mathbb{R}$, 293
rakam, 111
Ramsey Teoremi, 128
Rucker, Rudy, 86
Rudolff, Christoff, 224
Russell paradoksu, 30, 87
Russell, Bertrand, 30

S, 23, 25
sabit dizi, 232
sadeleştirme, 195
sandviç teoremi, 252, 256
Seçim Aksiyomu, 34, 87
serbest değişken, 135
sıfır, 27, 39, 193, 195
sıfıra yakınsayan diziler, 253
sıfırbölen, 206
sıfırçarpan, 102
sıfırkuvvetli, 208
sınırlı diziler, 234
sıradışı model, 140
sıralama, 21, 103–105, 163
sıralanabilir, 208
sıralanabilir halka, 212, 213
sıralı abelyen grup, 168
sıralı cisim, 208
sıralı halka, 168, 208, 209
Skolem, Thoralf, 34, 86, 87
sonlu dizi, 231
sonsuz büyük, 209
sonsuz küçük, 209
standart alfabe, 35
sup, 226
Süer, Sonat, 3
Şahin, Çiğdem, 3

tam, 324
tamlık bölgesi, 204, 206
tamlık, 324
tamsayı, 150
tamsayılar, 143–174
tanım kümesi, 66
Tanımlı Altküme Aksiyomu, 53, 58, 136
tanımsız terimler, 36
taraf tarafa, 205
tekkuvvetli, 208
temel dizi, 265, 266
Temellendirme Aksiyomu, 71–76, 85, 136
teori, 128, 136
terim, 139, 231, 232
terim terim, 205
ters eleman, 194
tersinir diziler, 234
tersinir eleman, 201
tersinirlik, 206
toplama, 22, 46, 89–99
toplamsal küme, 91
toplamsal ters, 155, 180, 195
topoloji, 214
tümevarım, 82, 89, 106–116, 126
tümevarım adımı, 82
tümevarımla tanım, 117
Tümevarımsal Küme Aksiyomu, 79, 85, 136

uzak durmak, 236
üçgen eşitsizliği, 187
üs alma, 22, 118
üstküme, 51
üstsınır, 226, 227

varlıksal niceleyici, 136
von Neumann, John, 34, 45, 86, 134
von Neumann-Gödel-Bernays kümeler kuramı, 134

Wiener, Norbert, 64

yakınsak dizi, 239
yakınsamak, 222, 239
Yerleştirme Aksiyomu, 57
yoğun tamsıralama, 185

$\mathbb{Z}$, 150
zamanla sabitleşen diziler, 237
Zamenhof, Ludwik Lejzer, 49
Zermelo, Ernst, 34, 86, 87
ZFC, 30, 33–35, 86