0.1 Giriş

17'nci yüzyılın ikinci yarısında Newton'la Leibniz birbirinden bağımsız olarak diferansiyel analizi keşfettiklerinde matematik ve fizik bambaşka bir boyuta geçmekle kalmadı aynı zamanda sarsıldı da. Diferansiyel analizin keşfinde kullanılan güçlü yöntem sadece o günün değil, bugünün ölçütlerinde de tüyler ürperticiydi. Diferansiyel analiz sadece matematiksel değil, düşünsel anlamda da kabul edilemez bir kavrama başvuruyordu: Dünyamıza ait olmaması gereken, daha doğrusu ait olmadığını düşündüğümüz "sonsuz küçük" kavramına.

Felsefe dünyasının pek sarsıldığını söyleyemeyiz belki ama en azından hareketlendiğini söylemek pek yanlış olmaz. Bunu şuradan anlıyoruz ki, filozoflar sonsuz küçüğe direnmişler, varlığını reddetmekle yetinmişler (Leibniz'i tenzih ederim), ama buna karşılık matematikçiler, en azından birkaç on yıl boyunca, sonsuz küçük kavramını anlamlandırmaya çalışmışlardır.

Sonsuz küçük kavramıyla limit kavramını ya da (bölünemeyen, parçalanamayan) atom ya da nomad kavramlarını karıştırmamak lazım. Bu kavramlar birbirleriyle tamamen ilgisiz kavramlar olmasa da aynı şey değiller. $\lim 1/n = 0$ eşitliğini kanıtlamak ya da bir integral bulmak için (illa) sonsuz küçük kavramına başvurmak zorunda değiliz. Atomlar ve nomadlar ikiye bölünemezler ama sonsuz küçükler ilelebet ikiye bölünebilirler, hatta her sonsuz küçükten daha sonsuz küçük elemanlar bile vardır! (Örneğin ϵ sonsuz küçükse, ϵ^2 daha da sonsuz küçüktür!)

Şöyle bir örnek verelim. Çemberi düzgün n-genlerin limiti olarak görmekle çemberi düzgün sonsuzgen olarak görmek arasında bir fark var. (Her şeyden önce ikincisi anlamlı bile değildir!)

Dolayısıyla sonsuz küçük kavramının iki bin küsur yıl önce eski Yunan'da, örneğin Demokritos'ta, Zenon'da, Arşimet'te belirdiği söylenince doğrusu pek inanmıyorum. Olsa olsa ilkçağlarda sonsuz küçük düşüncesinin kırıntıları, kıvılcımları belirmiştir.

Limit almak oldukça doğal ve fiziksel sezgiyle kolaylıkla açıklanabilecek bir işlem. Ama sonsuz küçük öyle değil. Sonsuz küçük, daha doğrusu pozitif sonsuz küçük, her pozitif gerçel sayıdan küçük ama gene de pozitif bir "sayı" anlamına geliyor. Fiziksel olarak böyle bir sayının, uzunluğun ya da ölçünün varlığını kanıtlamak imkânsız.

Sonsuz küçük sayıyı, mutlak değeri 0'dan büyük, ama pozitif her gerçel sayıdan küçük bir sayı olarak algılamak lazım. Böyle bir sayı gerçel sayı olamaz elbette. Ama neredeyse olacakmış... Çünkü 1/2'den küçük ama 0'dan büyük bir gerçel sayı vardır, hem de bir sürü vardır, örneğin 1/3. 1/3'ten de küçük pozitif sayılar vardır, 1/4 bunlardan biridir. 1/4'ten de küçük pozitif bir gerçel sayı bulabiliriz. 1/5'ten de... n doğal sayısı ne kadar büyük olursa olsun, $1/n$'den küçük ama gene de pozitif bir sayı bulabiliriz, örneğin

$$\frac{1}{n+1}$$

sayısı. Eğer **verilmiş** her pozitif sayıdan küçük pozitif sayı varsa, her pozitif sayıdan küçük pozitif bir şey de olmalı sanki. Bu evrende olmasa da daha ideal bir başka evrende olmalı... İşte bu yazıda o daha ideal evreni inşa edeceğiz.

Sonsuz küçük sayıları hayal etmek için şöyle bir senaryo kuralım: 0'ın etrafında bir hale düşünün, sonsuz küçükler halesi. Bu haleyi her gerçel sayının etrafına taşıyın. Biz bu haleyi göremiyoruz belki ama uzaydan gelen ve görme duyuları bizimkilerden çok çok çok daha fazla gelişmiş olan uzaylılar görüyorlar. Allah bize bu kadarını vermiş, sonsuz küçükleri göremiyoruz! Sonsuz küçükleri içeren bir evren keşfettikten sonra, tabii bu evrende toplama ve çarpma yapabilmek, bu evrende sayıların sinüsünü, kosinüsünü filan alabilmek gerekiyor. Hiç de kolay bir uğraş değil.

Sonsuz küçük sayıları şöyle de hayal edebiliriz: 1'i 2'ye bölün. Bulduğunuz sayıyı, yani 1/2'yi tekrar 2'ye bölün. Bulduğunuz sayıyı tekrar 2'ye bölün ve bu işlemi sonsuza dek sürdürün, yalnız işlemi sonsuza dek sürdürdüğünüzde sonucun 0 çıkacağına inanmayın, sonsuz küçük bir sayı bulabileceğinizi hayal edin. Ya da şu diziye bakın:

$$0,1,\ 0,01,\ 0,001,\ 0,0001,\ 0,00001,\ldots$$

Bu dizi limitte 0'a gitmesin de, virgülden sonra sonsuz tane 0'ı olan ama bu sonsuz tane 0'dan sonra 1 gelen bir "sayıya" gitsin...

Zaten sonsuz küçükleri matematiksel olarak keşfetmenin hiç de kolay olmadığı, ifade edilişinden aşağı yukarı 300 yıl sonra, ta 1961'de bulunmasından anlaşılıyor.

Had safhada muğlak bir fikir olan sonsuz küçük düşüncesini kullanarak matematiğe ve fiziğe ve diğer tüm pozitif bilimlere olağanüstü güçlü bir kapı açmak rahatsız edici bir şey. Böylesine ciddi bir ilerlemenin sağlam matematiksel temellerinin olmaması hiçbir biçimde hoşgörüyle karşılanamaz.

İlginç bir biçimde ya da anlaşılır bir biçimde en sert muhalefet matematikçilerden değil filozoflardan geldi. Öncelikle Berkeley'den. Çok daha sonra, Bertrand Russel sonsuz küçükleri gereksiz, yanlış ve çelişkili olarak nitelendirmiştir[1]. Matematikçiler de muhalefet ettiler ama onlar en azından ortaya çıkan değerin farkındaydılar ve aksaklığı gidermek için bir çaba gösterdiler. Ne de olsa matematikçiler kendilerine sunulan bu kapıdan girebilmek için can atıyorlardı. Matematikçiyiz diye matematikçileri kayırmayalım, sıradışı düşüncelere daha açık olması beklenen Cantor bile sonsuz küçük düşüncesini

[1] Bertrand Russell'ın söylediği her şeyden kuşku duymak gerektiğine giderek daha fazla inanıyorum!

matematiğin kolera mikrobu olarak nitelendirmiştir. Gerçekten de uzunca bir süre sonsuz küçük kavramı kitaplardan kaybolmuştu, ama gene de matematikçiler, özellikle diferansiyel geometriciler, örneğin Sophus Lie ve Elie Cartan, düşünürken sonsuz küçüğe başvuruyorlardı. Teoremlerini sonsuz küçükle kanıtladıktan sonra sonsuz küçükten kurtuluyorlar ve makalelerini deli saçması fikirlerden muaf tutarak yazıyorlardı!

Aslında düşünce tarihi açısından son derece ilginç bir süreç.

Ortada matematiksel bir değer varsa mutlaka bunun arkasında sağlam mantıksal ve matematiksel temellere oturtulabilen bir yapı olmalı. Eğer deli saçması bir fikirle bir gerçek keşfederseniz, inanın ki o fikri kimsenin karşı koyamayacağı sağlam temellere dayandırabilirsiniz. Bugün bunu az çok anladık ama o günlerde böyle bir his yoktu. Örneğin Cardano dördüncü dereceden denklemleri çözmek için karesi -1 olan bir "sayı"ya başvurduğunda, kanıtından sonra, "biliyorum, bu yaptığım doğru değil, hatta saçmasapan bir şey ama ne yapalım ki doğru cevabı veriyor" gibilerinden özür mahiyetinde bir iki satır yazmıştı. Karmaşık sayılar daha sonra matematiksel olarak inşa edildi. Muhtemelen ilk kez kullanıldığında negatif sayılar için de benzer kuşkular dile getirilmişti ama elimde buna dair bir delil yok.

Şöyle bir şey tasavvur edin: Kimsenin reddedemeyeceği, herkesin ikna olduğu bir gerçek keşfediyorsunuz ama bu gerçeği başkalarına ve hatta kendinize anlatmak için, ejderha gibi, anka kuşu gibi masal yaratıklarına başvuruyorsunuz... Biraz abarttık belki ama diferansiyel analiz keşfedildiğinde durum bundan pek farklı değildi.

Sorun sadece sonsuz küçük bir sayı yaratmak olsaydı, bu sorun kolaylıkla halledilebilirdi. Sonsuz küçük sayıları bir sonraki bölümde yaratacağız ve hatta bunlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi işlemler yapabileceğiz. Esas sorun, sonsuz küçük bir $\epsilon > 0$ sayısı için $\sin\epsilon$, $\exp\epsilon$, ϵ^ϵ gibi değerleri tanımlayabilmekte. Bu çok daha zor bir uğraştır ve Abraham Robinson'un 1961'de başardığı ve bizim bu yazıda açıklayacağımız aynen budur.

Benzer düşünceyi doğal sayılar için de geliştirebiliriz. 2'ye bölünen 0'dan farklı bir sayı var, hem de sonsuz tane var. 4'e bölünen de 0'dan farklı bir sayı da var. 8'e, 16'ya bölünen de var. Her n için 1'e, 2'ye, 2^2'ye, …, 2^n'ye bölünen 0'dan farklı bir sayı vardır. Peki tüm 2^n sayılarına bölünen 0'dan farklı bir sayı var mıdır? Doğal sayılarda yoktur tabii, ama bir başka sistemde olabilir mi?

0.2 İdealler ve Filtreler

I herhangi bir göstergeç kümesi ve $(K_i)_i$ herhangi bir cisim ailesi olsun. Bizi daha çok I'nın sonsuz olduğu durum ilgilendirecek ama şimdilik böyle bir varsayım yapmayacağız. Yazının büyük bir bölümü için $I = \mathbb{N}$ alınmasında bir sakınca yoktur, hatta anlaşılabilirlik açısından yararı bile vardır.

Bu bölümde amacımız $\prod_I K_i$ halkasının ideallerini bulmak, hatta sınıflandırmak. Bu halkanın ideallerini K_i cisimlerinden bağımsız biçimde, sadece I'yı kullanarak betimleyeceğiz. Böylece, eğer $(L_i)_i$ bir başka cisim ailesiyse, $\prod_I K_i$ ile $\prod_I L_i$ halkalarının idealleri arasında birebir bir eşleme olduğunu göreceğiz. Sonuç olarak halkalar kuramına ait olan "idealleri sınıflandırmak" problemi tamamen kümeler kuramına indirgenecek.

$A \lhd \prod_I K_i$ bir ideal ve $a = (a_i)_i \in A$ olsun. a elemanını $\prod_I K_i$ halkasının elemanlarıyla çarparak A'nın başka elemanlarını elde edebiliriz, ve a'yı çarpacağımız elemanı dikkatlice seçerek a'nın 0 olmayan a_i koordinatlarını K_i'nin dilediğimiz elemanlarına dönüştürebiliriz; öte yandan bu yöntemle a'nın 0 olan koordinatları hiç değişmezler, hep 0 kalırlar. Bu basit gözlemden hareketle şu tanımları yapalım:

$a = (a_i)_i \in \prod_I K_i$ için,

$$Z(a) = \{i \in I : a_i = 0\} \subseteq I$$

olsun.

Notlar ve Örnekler

0.1. $Z(0) = I$ ve $Z(1) = \emptyset$ olur.

0.2. $\prod_I K_i$ halkasının tersinir elemanları, ne eksik ne fazla, $Z(a) = \emptyset$ eşitliğini sağlayan a elemanlarıdır.

0.3. $Z(ab) = Z(a) \cup Z(b)$ eşitliği ve $Z(a) \cap Z(b) \subseteq Z(a+b)$ içindeliği bariz olmalı.

Şimdi de bir $A \lhd \prod_I K_i$ ideali için

$$F(A) = \{Z(a) : a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(I)$$

tanımını yapalım. $F(A)$, I'nın bir altkümeler kümesidir (aynen bir topolojinin açık altkümelerinin kümesi gibi).

Notlar ve Örnekler

0.4. $F(0) = \{I\}$ ve $F\left(\prod_I K_i\right) = \mathcal{P}(I)$ olur.

0.5. Biraz daha ilginç bir örnek şu: $J \subseteq I$ olsun. $A_J = \left\{a \in \prod_I K_i : j \in J \Rightarrow a_j = 0\right\}$ olsun. A_J bir idealdir. Hatta tek üreteçli bir idealdir. Nitekim,

$$\delta_{J,j} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } j \notin J \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } j \in J \text{ ise} \end{cases}$$

ise A_J ideali $\delta_J = (\delta_{J,j})_j$ elemanı tarafından üretilir. $F(A_J)$ kümesinin J'nin üstkümelerinden oluştuğunu görmek zor değildir.

0.6. Çok daha ilginç ve önemli bir örnek: $A = \oplus_I K_i$ olsun. Bu bir idealdir. $F\left(\oplus_I K_i\right)$ kümesi I'nın tümleyeni sonlu olan altkümelerinden oluşur. Bu örnek ancak I sonsuzsa ilginçtir, aksi halde $F(\oplus_I K_i) = F(\prod_I K_i) = \mathcal{P}(I)$ olur. İlerde ihtiyacımız olacağından, I sonsuz olduğunda buna özel bir ad verelim:

$$\mathcal{F}_0 = F(\oplus_I K_i) = \{J \subseteq I : I \setminus J \text{ sonlu}\}.$$

Yukardaki tanım bize bir

$$F : \left\{ \prod_I K_i \text{ halkasının özidealleri} \right\} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(I))$$

fonksiyonu verir. Bu fonksiyonun birebir olduğunu kanıtlamak zor değildir ve birazdan kanıtlayacağız, ama örten olması beklenemez. İlk amacımız F fonksiyonunun imgesini bulmak. Bu amaçla, bir A özideali için $\mathcal{F} = F(A)$ kümesinin sağladığı özellikleri gözden geçirelim:

F1. *$I \in \mathcal{F}$ ama $\emptyset \notin \mathcal{F}$.*
Kanıt: $0 \in A$ olduğundan, $I = Z(0) \in \mathcal{F}$. Eğer bir $a \in \prod_I K_i$ için $Z(a) = \emptyset$ ise a tersinir olur ve I özideal olduğundan a'yı içeremez.

F2. *$X, Y \in \mathcal{F}$ ise $X \cap Y \in \mathcal{F}$.*
Kanıt: $a, b \in A$ için $X = Z(a)$ ve $Y = Z(b)$ olsun. $\delta_{I \setminus X}$ tanımını yukardaki örnekten anımsayalım. Kolayca görüleceği üzere $Z(a + \delta_{I\setminus X} b) = Z(a) \cap Z(b)$ olur. $a + \delta_{I\setminus X} b$ elemanı da A idealinde olduğu için, istediğimiz kanıtlanmış olur.

F3. *$X \in \mathcal{F}$ ve $X \subseteq Y \subseteq I$ ise $Y \in \mathcal{F}$.*
Kanıt: Nitekim eğer $a \in A$ için $Z(a) = X$ ise, $Z(\delta_Y a) = Y$ olur.

$\mathcal{P}(I)$ kümesinin yukardaki F1, F2, F3 sağlayan bir $\mathcal{F}$ altkümesine I ***üzerine filtre*** adı verilir. Eğer I sonsuzsa yukarda tanımladığımız $\mathcal{F}_0$ da bir filtredir elbette; bu filtreye ***Fréchet filtresi*** adı verilir.

F1, F2, F3 özellikleri, $\mathcal{F}$'deki altkümelerin I'nın "çok büyük "ya da olasılıkları/ölçümleri 1 olan altkümeleri olarak algılanabileceğini söylüyor. Nitekim böyle algılarsak, F1, I'nın büyük ama boşkümenin büyük olmadığını söylüyor; F3, X büyükse, X'i içeren kümelerin de büyük olduğunu söylüyor; F2 ise X ve Y büyükse, $X \cap Y$'nin de büyük olacağını söylüyor. Bu nitelemeyi en çok hakeden filtre elbette Fréchet filtresidir, ne de olsa elemanları I'nın tümleyeni sonlu olan, yani gerçekten büyük altkümeleri.

Demek ki her özideal bir filtre veriyor. Peki her filtre bir özidealden mi gelir? Evet. Şimdi bunu görelim: Eğer $\mathcal{F}$, I üzerine bir filtreyse,

$$A(\mathcal{F}) = \left\{ a \in \prod_I K_i : Z(a) \in \mathcal{F} \right\}$$

olsun. $A(\mathcal{F})$'nin bir özideal olduğunu kanıtlamak zor değildir. Böylece

$$A : \{I \text{ üzerine filtreler}\} \longrightarrow \left\{ \prod_I K_i \text{ halkasının özidealleri} \right\}$$

fonksiyonunu elde ederiz. Bu fonksiyonla biraz önce tanımlanan

$$F : \left\{ \prod_I K_i \text{ halkasının özidealleri} \right\} \longrightarrow \{I \text{ üzerine filtreler}\}$$

fonksiyonunun birbirinin tersi fonksiyonlardır. Ayrıca A ve F fonksiyonları altküme olma ilişkisi uyumludur yani,

$$A_1 \leq A_2 \Leftrightarrow F(A_1) \subseteq F(A_2)$$

ve

$$F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow A(F_1) \leq A(F_2)$$

olur. Bunları kanıtlamak hiç zor değildir[2].

Son söylediğimizin özel bir durumu olarak,

$$A \lhd \prod_I K_i \text{ maksimal idealdir} \Leftrightarrow F(A) \text{ maksimal filtredir}$$

eşdeğerliliğini elde ederiz. Maksimal filtrelere ***ultrafiltre*** adı verilir.

Bu aşamada tek üreteçli ideallerin ne tür filtrelere karşılık geldiklerini bulmak yararlı olacaktır. Eğer $a = (a_i)_i \in \prod_I K$ için, $A = \langle a \rangle = a \prod_I K_i$ tek üreteçli bir idealse,

$$J = \{i \in I : a_i = 0\}$$

olsun. Bu durumda, $A = a \prod_I K_i = \delta_J \prod_I K_i = A_J$ olur ve $F(A)$ filtresi J'nin üstkümelerinden oluşur. Tek üreteçli ideallerin başat filtrelere tekabül ettiklerini gördük. Biz daha çok başat olmayan filtrelerle ilgileneceğiz.

I'nin boş olmayan bir J altkümesinin üstkümelerinden oluşan filtreye, yani $\mathcal{F}_J$ filtresine ***başat filtre*** diyelim. J küçüldükçe $\mathcal{F}_J$ büyür ve $|J| = 1$ olduğunda, $\mathcal{F}_J$ ultrafiltre olur.

Notlar ve Örnekler

0.7. Eğer $\emptyset \neq J \subseteq I$ ise

$$A(\mathcal{F}_J) = \left\{ a \in \prod_I K_i : j \in J \Rightarrow a_j = 0 \right\}$$

olur.

0.8. $\prod_I K_i \ / \ A(\mathcal{F}_J) \simeq \prod_J K_j$ olur.

0.9. Eğer $\mathcal{F}$ filtresi sonlu bir altküme içeriyorsa ve J bu sonlu altkümelerin en küçüğüyse, o zaman $\mathcal{F} = \mathcal{F}_J$ olur.

0.10. Eğer I sonsuzsa Fréchet filtresini içeren hiçbir filtre başat olamaz.

---

[2]Bunları Kochen 1961'de kanıtlamıştır. *Ultraproducts in the theory of models*, Ann. of Math. 79, 338-359

Böylece $\prod_I K_i$ halkasının her idealini I'nın adına filtre denilen özel altküme kümeleri tarafından betimlemiş olduk ve konu K_i cisimlerinden ve hatta cebirden bağımsız bir hale geldi.

Note: Herhangi bir halkada maksimal ideallerin varlığı Seçim Aksiyomu'na denktir. Öte yandan burada herhangi bir halkadan değil, $\prod_I K_i$ halkasından söz ediyoruz. Bu halkaların tek üreteçli olmayan maksimal idealleri elbette Seçim Aksiyomu kullanılarak kanıtlanabilir ama daha zayıf bir aksiyom da yeter. İlerde bu konudan biraz daha fazla sözedeceğiz.

0.3 Filtreye Bölmek

Bir halkayı bir özidealine bölerek adına bölüm halkası denilen yeni bir halka elde edilir. Demek ki $A \lhd \prod_I K_i$ verisinden $\prod_I K_i/A$ bölüm halkasını elde ederiz. Gelenek olduğu üzere, $\prod_I K_i/A$ bölüm halkasının $x \in \prod_I K_i$ elemanına tekabül eden elemanını $\overline{x}$ olarak göstereceğiz.

Şimdi bir $\mathcal{F}$ filtresi için $A = A(\mathcal{F})$ olsun (elbette $\mathcal{F} = F(A)$ olmalı) ve $\prod_I K_i/A$ halkasında iki elemanın eşitliğinin anlamını sadece $\mathcal{F}$ filtresini kullanarak, yani kümeler kuramı dilinde yazalım. $x, y \in \prod_I K_i$ için,

$$\begin{array}{rcl} \overline{x} = \overline{y} & \Leftrightarrow & x - y \in A = A(\mathcal{F}) \Leftrightarrow Z(x-y) \in \mathcal{F} \\ & \Leftrightarrow & \{i \in I : x_i - y_i = 0\} \in \mathcal{F} \\ & \Leftrightarrow & \{i \in I : x_i = y_i\} \in \mathcal{F} \end{array}$$

olur. Böylece $\prod_I K_i/A$ bölüm halkasında $\overline{a} = \overline{b}$ eşitliğini sadece ve sadece göstergeçlere başvurarak yazdık. İşin özüne inecek olursak, eğer $\mathcal{F}$ bir filtreyse, $\prod_I K_i$ kümesi üzerine,

$$x \equiv y \Leftrightarrow \{i \in I : x_i = y_i\} \in \mathcal{F}$$

olarak tanımlanan ikili ilişki bir denklik ilişkisidir.

Şimdi şaşırtıcı bir şey söyleyeceğiz: Bu tanımın bir denklik ilişkisi vermesinin K_i cisimleriyle filan hiçbir ilgisi yoktur. Nitekim eşdeğerliğin sağ tarafında toplama ya da çarpma gibi cisme dair herhangi bir ibare yok. "Modülo A" denklik ilişkisi tamamıyla kümeler kuramı seviyesine indi (ya da yükseldi!) Denklik sınıflarını gene $\overline{x}$ olarak yazalım.

Yukarda yaptığımızı alabildiğine sömürmeye çalışalım, çünkü belli ki burada değerli bir şey yapıldı. $(X_i)_i$, boş olmayan kümelerden oluşan herhangi bir küme ailesi ve $\mathcal{F}$ bir filtre olsun. $\prod_I X_i$ üzerine şu ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$$x \equiv y \Leftrightarrow \{i \in I : x_i = y_i\} \in \mathcal{F}.$$

Bunun bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlamak zor değildir. Denklik sınıflarının kümesi

$$\prod_I X_i/\mathcal{F} \text{ ya da } \prod_{\mathcal{F}} X_i$$

olarak gösterilir.

Notlar ve Örnekler

0.11. $I = \mathbb{N}$, K_i karakteristiği 2 olmayan bir cisim ve $\mathcal{F}$ bir filtre olsun. Eğer $a = ((-1)^i)_i$ ise, $\prod_{\mathcal{F}} K_i$ bölüm kümesinde,

$$\overline{x} = \overline{(1)_i} \Leftrightarrow 2\mathbb{N} \in \mathcal{F}$$

ve

$$\overline{x} = \overline{(-1)_i} \Leftrightarrow 2\mathbb{N} + 1 \in \mathcal{F}$$

olur. Eğer $\mathcal{F}_0$ Fréchet filtresiyse, ikisi de olmaz.

0.12. Eğer $\emptyset \neq J \subseteq I$ ise $\prod_{\mathcal{F}_J} X_i$ ile $\prod_J X_j$ kümeleri arasında bir eşleme vardır.

X_i'lerin her biri bir K_i cismi olduğunda, yani her biri üzerinde bazı özellikleri sağlayan toplama ve çarpma adı verilen işlemler tanımlandığında, bu işlemler $\prod_{\mathcal{F}} K_i$ bölüm kümesi üzerine şöyle yansıyor: Eğer $x = (x_i)_i \in \prod_I K_i$ için $\overline{x} \in \prod_{\mathcal{F}} K_i$ yazılımı x'e tekabül eden elemanı simgeliyorsa,

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} = \overline{(x_i + y_i)_i}$$

ve

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y} = \overline{(x_i \cdot y_i)_i}\,.$$

Acaba benzer tanımlar K_i cisimleri yerine sıralı halkalar, çizgeler, gruplar gibi başka yapılar alındığında da yapılabilir mi?

Diyelim X_i kümelerinin her birinin üzerine ikili bir işlem tanımlanmış. Daha popüler olduğundan ikili işlemi örnek olarak alıyoruz, birli (mesela x^2 işlemi), üçlü (mesela $xy + z$ işlemi), dörtlü işlemler de ele alabilirdik. Sözgelimi $I = \mathbb{N}$, $X_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ ve X_i üzerine "modülo i" toplama ya da çarpma tanımlanmış olabilir. X_i kümeleri üzerine tanımlanmış ikili işlemi $f_i(x, y)$ olarak gösterelim. Bilindiği gibi bu işlemler $\prod_I X_i$ kartezyen çarpımları üzerine de doğal olarak bir işlem tanımlar: $f(x, y) = (f_i(x_i, y_i))_i$. Bu işleme **koordinatsal** ya da **noktasal işlem** denebilir. Şimdi soru şu: $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ kümesinde

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{(f_i(x_i, y_i))_i}$$

tanımını yapmaya hakkımız var mı? Bir başka deyişle,

$$\{i \in I : x_i = x_i'\} \in \mathcal{F} \text{ ve } \{i \in I : y_i = y_i'\} \in \mathcal{F}$$

ise,

$$\{i \in I : f_i(x_i, y_i) = f_i(x_i', y_i')\} \in \mathcal{F}$$

olur mu? Evet olur! Çünkü

$$\{i : x_i = x_i'\} \cap \{i : y_i = y_i'\} \in \mathcal{F}$$

kümesi (F2),

$$\{i \in I : f_i(x_i, y_i) = f_i(x_i', y_i')\}$$

kümesinin bir altkümesi olur (F3).

Şimdi diyelim X_i kümeleri üzerinde ikili bir ilişki var, mesela bir sıralama, sözgelimi her $i \in I$ için $X_i = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{N}$ olabilir ve ikili ilişki bildiğimiz sıralama olabilir. X_i üzerine tanımlanmış bu ikili ilişkiyi $R_i(x, y)$ olarak gösterelim. Acaba $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesi üzerine bu R_i ikili ilişkilerini yansıtan bir ikili ilişki tanımlayabilir miyiz? En doğal tanım şu:

$$R(\overline{x}, \overline{y}) \Leftrightarrow \{i \in I : R_i(x_i, y_i)\} \in F.$$

Ancak bunun geçerli bir tanım olması için şu sorunun yanıtlanması gerekir:

$$\overline{x} = \overline{x'} \text{ ve } \overline{y} = \overline{y'}$$

ve

$$\{i \in I : R_i(x_i, y_i)\} \in \mathcal{F}$$

ise

$$\{i \in I : R_i(x'_i, y'_i)\} \in \mathcal{F}$$

olur mu? Evet ve kanıt son derece basit.

Bazen X_i yapısında 0 ya da 1 gibi, daha doğrusu 0_i ya da 1_i gibi sabitler olur. Bu sabitlere de $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesinde anlamlandırabiliriz, örneğin 0'ın $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesindeki anlamı şudur: $\overline{(0_i)_i}$.

Böylece X_i'leri matematiksel bir yapı yapan işlem, ilişki ve sabitler $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesi için de tanımlanmışlardır. Sözgelimi X_i'lerin her biri sıralı bir halkaysa, $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesi üzerine toplama ve çarpma işlemleri, $\leq$ ikili ilişkisi ve 0 ve 1 elemanları tanımlanmıştır. Ama henüz $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesinin X_i'ler gibi sıralı bir halka olduğunu söylemedik.

Notlar ve Örnekler

0.13. $I = \mathbb{N}$ ve $\mathcal{F}_0$ Fréchet filtresi olsun. Eğer $a = (2^{i!})_i$ ise, $\overline{a} \in \prod_{\mathcal{F}_0} \mathbb{Z}$ elemanının her n için n'inci kökü vardır.

0.14. I ve $\mathcal{F}_0$ bir önceki örnekteki gibi olsun. p_i, i'inci asalı temsil etsin. Eğer $p = (p_i)_i$ ise, $\overline{p} \in \prod_{\mathcal{F}_0} \mathbb{N}$ elemanı $\prod_{\mathcal{F}_0} \mathbb{N}$ kümesinin tersinir olmayan hiçbir elemanına bölünmez.

0.15. $\mathbb{R}$ üzerine tanımlanmış olan sinüs fonksiyonu, yukarda açıklanan yöntemle $\prod_{\mathcal{F}} \mathbb{R}$ kümesinde şöyle tanımlanır: Her $a = (a_i)_i \in \prod_I \mathbb{R}$ için, $\sin \overline{a} = \overline{(\sin a_i)_i}$. Benzer tanım cos için de yapılır. Her $x, y \in \prod_I \mathbb{R}$ için, $\sin^2 x + \cos^2 x = \overline{(1)_i}$ olur.

0.16. $I = \mathbb{N}$ ve $X_i = \mathbb{R}$ olsun. Her X_i üzerine doğal sıralamayı alalım. $\prod_{\mathcal{F}_0} \mathbb{R}$ yapısının $a = \overline{((-1)^i)_i}$ elemanıyla $b = \overline{((-1)^{i+1})_i}$ elemanı karşılaştırılamaz. Ama birazdan göreceğimiz üzere eğer $\mathcal{F}$ bir ultrafiltreyse, o zaman $\prod_{\mathcal{F}} \mathbb{R}$ yapısında bu iki elemandan biri diğerinden büyük olur; daha açık olalım: Bu elemanlar $\overline{(-1)_i} < \overline{(1)_i}$ elemanlarına eşittir; hangisinin hangisine eşit olduğu $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ içindeliğinin doğruluğuna ve yanlışlığına göre değişir.

0.17. Her şey yukardaki gibi olsun. $\epsilon_i = 1/(i+1)$ ve $\epsilon = \overline{(\epsilon_i)_i}$, $0 = \overline{(0)_i}$ ve $1 = \overline{(1)_i}$ olsun. O zaman $0 < \epsilon$ ve her n doğal sayısı için $n\epsilon = \epsilon + \cdots + \epsilon < 1$ olur. Görüldüğü üzere $\prod_{\mathcal{F}} \mathbb{R}$ yapısı Arşimet özelliğini sağlamaz.

0.4 Łoś Teoremi

Şimdi diyelim X_i'lerin hepsi sıralı bir halka ya da sıralı bir cisim. Örneğin X_i'lerin hepsi hepimizin her gün birkaç kez karşılaştığı $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0, 1)$ sıralı cismi olabilir, hatta daha da komplike bir yapı olan

$$(\mathbb{R}, +, \times, \leq, \sin, \exp, \ln, 0, 1, \pi)$$

olabilir. X_i'lerin sıralı halka yapan toplama ve çarpma işlemlerini, sıralama ilişkisini ve 0 ve 1'i yukardaki gibi tanımlayalım. Böylece $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesi üzerine $+$ ve $\times$ işlemlerini, $\leq$ ikili ilişkisini ve 0 ve 1 elemanlarını tanımlayabiliriz.

Tanımlamak bir şey, tanımlanan şeylerin bazı özellikleri sağlaması başka şey. Mesela

$$x(y + z) = xy + xz$$

eşitliği X_i'lerin her birinde geçerli ama acaba $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesinde de geçerli mi? Yanıt olumludur; kanıtı da çok kolaydır, yazmak yeterli. Ya da X_i'lerin her birinde geçerli olan

$$(x \leq y \wedge 0 \leq z) \Rightarrow xz \leq xy$$

önermesi $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesinde de geçerli midir? Yanıt gene olumlu. Hatta eğer her X_i bir halkaysa $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ bölüm kümesi de bir halka olur. Ancak, eğer X_i'ler hepsi cisim olsa bile, $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ yapısının cisim olduğu doğru olmayabilir, nitekim $\prod_I X_i$ halkası ancak maksimal ideallere bölünürse bir cisim verir. Dolayısıyla tüm X_i kümelerinde geçerli olan

$$x \neq 0 \Rightarrow \exists y \; xy = 1$$

önermesinin $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ yapısında geçerli olması için $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olması gerekir. Bu durumda $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ yapısına **ultraçarpım** denir.

Bir başka soru: Eğer X_i'lerin her birinde bir $\leq_i$ sıralaması varsa, $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ üzerinde tanımlanan $\leq$ ikili ilişkisi de bir sıralama olur mu? Evet, ama ne yazık ki tamsıralamalar tamsıralama vermeyebilir. $\prod_{\mathcal{F}} X_i$ üzerinde de bir tamsıralama elde etmek için $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olması gerekir. Łoś teoremi bu koşulun yeterli olduğunu ve çok daha fazlasını birçok matematikçiye belki yabancı gelebilecek bir dilde söyler:

Teorem 0.1 (Łoś)**.** *$\mathcal{L}$, fonksiyon simgelerinden, ilişki simgelerinden ve sabit simgelerinden oluşan bir dil olsun. I bir göstergeç kümesi ve her $i \in I$ için M_i bir $\mathcal{L}$-yapısı olsun. $\mathcal{F}$, I üzerine bir ultrafiltre olsun. $\phi(x, y, \ldots, z)$ bu dilde yazılmış sonlu uzunlukta bir formül olsun. O zaman her $a, b, \ldots, c \in \prod_I M_i$ için*

$$\prod_{\mathcal{F}} M_i \models \phi[\overline{a}, \overline{b}, \ldots, \overline{c}] \Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \phi[a_i, b_i, \ldots, c_i]\} \in \mathcal{F}$$

olur.

ϕ formülünde hiç özgür değişken olmayabilir tabii. Bu durumda a, b, c elemanlarına ihtiyaç yok.

Teorem günlük dilde aşağı yukarı şunu söylüyor: Bir formülün $\prod_{\mathcal{F}} M_i$ yapısında doğru olması için bu formülün **hemen hemen her** $i \in I$ **için** M_i yapısında doğru olması gerek ve yeter koşuldur. Buradaki "hemen hemen her" tabiri ultrafiltreye referans vermektedir.

Bütün M_i'ler birbirine eşit olduğu zaman, ki bizi ilgilendiren durum da bu, teorem çok daha ilginç bir hal alır:

Sonuç 0.2. *$\mathcal{L}$, I, $\mathcal{F}$ ve $\phi(x, y, \ldots, z)$ yukardaki gibi olsun. M bir $\mathcal{L}$-yapısı olsun. O zaman her $a, b, \ldots, c \in \prod_I M$ için,*

$$\prod_{\mathcal{F}} M \models \phi[\overline{a}, \overline{b}, \ldots, \overline{c}] \Leftrightarrow \{i \in I : M \models \phi[a_i, b_i, \ldots, c_i]\} \in \mathcal{F}$$

olur.

Bu sonucu da daha gündelik dilde yazmaya çalışalım: M'de (altkümelerle değil) elemanlarla ilgili her formül M'nin ultraçarpımlarında da geçerlidir ve bunun tersi de doğrudur. Örneğin eğer M tamsıralı bir cisimse, M'nin ultraçarpımları da tamsıralı bir cisimdir.

Bütün M_i'ler birbirine eşit yapılar olduğunda daha da ilginç bir şey olur: M yapısı $\prod_{\mathcal{F}} M$ yapısının içine doğal olarak gömülür: $m \in M$ ise,

$$i(m) = \overline{(m)_i}$$

tanımını yapalım. Böylece tanımlanan

$$i : M \longrightarrow \prod_{\mathcal{F}} M$$

fonksiyonu birebir olur ve $\mathcal{L}$'deki fonksiyonlarla, ilişkilerle ve sabitlerle uyumlu olur, yani birebir bir homomorfizmadır. Bu gömme kullanılarak M'yi $\prod_{\mathcal{F}} M$ yapısının bir altyapısı olarak görebiliriz. Alışkanlık olduğu üzere $M \leq \prod_{\mathcal{F}} M$ yazılır. Ama bundan daha genel bir şey doğru olduğundan $M \leq \prod_{\mathcal{F}} M$ yerine $M \prec \prod_{\mathcal{F}} M$ yazılımı tercih edilir. (Bu çok daha genel olan şeyden bu yazıda sözetmemeyi tercih ediyoruz. Ama okur yukarda tanımlanan i fonksiyonunun bir gömmeden çok daha fazla özelliği olduğunu aklında tutsun.)

Notlar ve Örnekler

0.18. P, asal doğal sayılar kümesi olsun. Her $p \in P$ için F_p, karakteristiği p olan bir cisim olsun. $\mathcal{F}$, P üzerine başat olmayan bir ultrafiltre olsun. O zaman $\prod_{\mathcal{F}} F_p$ karakteristiği 0 olan bir cisimdir. Bundan şu sonuç çıkar, halkaların doğal dilinde, tam tamına karakteristiği 0'dan büyük olan cisimleri betimleyen bir aksiyom sistemi yazılamaz. Şu sonuç da çıkar: Karakteristiği 0 olan cisimleri betimleyen sonlu bir aksiyom sistemi yoktur.

0.19. Cebirsel kapalı cisimlerin ultra çarpımı cebirsel kapalıdır. Her p asalı için $\tilde{\mathbb{F}}_p$, p elemanlı $\mathbb{F}_p$ cisminin cebirsel kapanışı olsun. $\mathcal{F}$, asallar kümesi üzerine başat olmayan bir ultrafiltreyse, $\prod_{\mathcal{F}} \tilde{\mathbb{F}}_p$, karakteristiği 0'dır ve cebirsel kapalıdır.

0.20. $\prod_{\mathcal{F}} \mathrm{GL}_n(K_i) \simeq \mathrm{GL}_n(\prod_{\mathcal{F}} K_i)$. Diğer cebirsel gruplar için de aynı şey olur.

0.21. I bir göstergeç kümesi ve $(K_i)_i$ bir sonlu cisim ailesi olsun. Eğer $\mathcal{F}$ başat olmayan bir ultrafiltreyse, $\prod_{\mathcal{F}} K_i$ cismine **yalancıktan sonlu cisim** adı verilir. Bu cisimler sonsuzdur ama tüm sonlu cisimlerin sağladığı halkalar kuramının dilinde yazılmış tüm önermeleri sağlarlar. Örneğin her $n > 0$ doğal sayısı için $\prod_{\mathcal{F}} K_i$ cisminin derecesi n olan bir ve bir tane tane cisim genişlemesi vardır.

0.5 Ultrafiltreler

Ultrafiltrelerin önemini gördükten sonra ultrafiltrelerle ilgili bir iki söz söyleyelim. $\mathcal{F}_J$ filtresinin ancak ve ancak $|J| = 1$ ise bir ultrafiltre olabileceğini biliyoruz. Başka ultrafiltreler var mı? Aslında I sonsuzsa, $\prod_I K$ halkasının başat olmayan maksimal idealleri olduğunu bildiğimizden, I üzerine başat olmayan maksimal filtrelerin de olması gerektiğini biliyoruz. Bu olgu ideallere başvurmadan doğrudan filtrelerle de kanıtlanır.

$\mathcal{X}$, I'nın altkümelerinden oluşan bir küme olsun. $\mathcal{X}$'i içeren bir filtre var mıdır? Eğer $\mathcal{X}$'in sonlu sayıda elemanının kesişimi boşkümeyse $\mathcal{X}$'i içeren bir filtre olamaz. Ama eğer $\mathcal{X}$'in sonlu sayıda elemanının kesişimi boşküme olmuyorsa, yani $\mathcal{X}$'in **sonlu kesişim özelliği** varsa, o zaman $\mathcal{X}$ kümesini içeren bir filtre bulmak çok kolaydır. İşte bu filtrelerin en küçüğü:

$$\{J \subseteq I : \exists n \in \mathbb{N}\ \exists X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X}\ \ X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq J\}.$$

Bunun gerçekten bir filtre olduğunu ve $\mathcal{X}$'i içeren en küçük filtre olduğunu kanıtlamak çocuk oyuncağı.

Sonlu kesişim özelliği olan $\mathcal{X}$ kümesini içeren en büyük filtreyi bulmak için Seçim Aksiyomu kullanılabilir ve kanıtı son derece basittir. Demek ki eğer I sonsuzsa Fréchet filtresini içeren ultrafiltreler vardır ve bu tür ultrafiltrelerin başat olamayacağını gördük.

Aşağıdaki kanıtı oldukça kolay olan birinci sonuç bunu kanıtlamak için neden Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç duyulduğunu söylüyor.

Önsav 0.3. ***i.*** *Bir filtrenin ultrafiltre olması için yeter ve gerek koşul her $X \subseteq I$ için filtrenin ya X'i ya da X'in tümleyenini içermesidir.*

ii. *Bir başka yeter ve gerek koşul, filtrede olan her $X \cup Y$ için ya X'in ya da Y'nin filtrede olmasıdır.*

iii. *Eğer I sonsuzsa bir ultrafiltrenin başat olmaması için yeter ve gerek koşul Fréchet filtresini içermesidir.*

Not: Buraya kadar yazdıklarımızdan sanki başat olmayan ultrafiltrelerin varlığıyla Seçim Aksiyomu birbirine denkmiş gibi bir hisse kapılmış olabilirsiniz. Bu doğru değil. Seçim Aksiyomu daha güçlüdür. Ne de olsa ultrafiltreler her halkanın değil, çok özel halkaların maksimal idealini buluyor. Ultrafiltrelerin varlığı Boole cebirlerinde asal ideallerin varlığına, ya da her kümenin tamsıralanabilir olmasına denktir. Bkz. Sonuç 0.4 ve Altbölüm 0.6.1'deki örnek.

Notlar ve Örnekler

0.22. Her ultrafiltre, sadece 0 ve 1 değerini alan sonlu toplamsal bir $\mu : I \longrightarrow \{0,1\}$ ölçümünün ölçümü 1 olan altkümeler kümesi olarak görülebilir.

0.23. I sonsuz bir küme ve $\mathcal{F}$ başat olmayan bir ultrafiltre olsun. $\tilde{\mathbb{Z}} = \prod_{\mathcal{F}} \mathbb{Z}$ tamsıralı halkasında şunlar olur:

a. $\overline{((-1)^i)_i}$ sayısı ya 1'e ya da -1'e eşittir.

b. p_i, i'inci asalsa $\overline{(p_i)_i}$ de $\tilde{\mathbb{Z}}$ halkasının bir asalıdır ve $\mathbb{Z}$'nin her p asalı için $p = \overline{(p)_i}$ asalından daha büyüktür.

c. $\overline{(i!)_i}$ elemanı her n tamsayısına bölünür.

d. $\overline{(2^i)_i}$ elemanı her n doğal sayısı için 2^n'ye bölünür; ayrıca $\tilde{\mathbb{Z}}$ halkasının sadece tek bir asalına, 2'ye bölünür.

e. $\{x \in \prod_{\mathcal{F}} \mathbb{Z} :$ her n doğal sayısı için $n < x\}$ kümesi boş değildir ve en küçük elemanı yoktur.

0.24. I sonsuz bir küme ve $\mathcal{F}$ başat olmayan bir ultrafiltre olsun. $\tilde{\mathbb{R}} = \prod_{\mathcal{F}} \mathbb{R}$ cisminde şunlar olur:

a. $\overline{(1/(i+1))_i}$ sayısı 0'dan büyüktür ama her $n > 0$ doğal sayısı için $1/n$'den küçüktür, yani "sonsuz küçüktür".

b. Eğer $0 < \epsilon$ sonsuz küçükse $1/\epsilon$ her gerçel sayıdan daha büyüktür yani sonsuz büyüktür.

c. Eğer $0 < \epsilon$ sonsuz küçükse, ϵ^2, ϵ'a göre sonsuz küçüktür. $\mathbb{R}$'yi içeren her sıralı halkada pozitif ama sonsuz küçük elemanlar olmak zorundadır.

d. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ basit bir gruptur ama $\mathrm{SO}_3(\tilde{\mathbb{R}})$ basit bir grup değildir, sonsuz küçük açılı döndürüler normal bir altgruptur. Ama $n \geq 2$ için $\mathrm{PSL}_n(\tilde{\mathbb{R}})$ basit bir gruptur.

Son olarak Önsav 0.3'nin ilginç bir sonucunu görelim.

Sonuç 0.4. *$(K_i)_i$ bir cisim ailesi olsun ve $A \lhd \prod_I K_i$ asal bir ideal olsun. O zaman A maksimal idealdir.*

Kanıt: $F(A)$'nın bir maksimal filtre olduğunu kanıtlamak gerekiyor. $X \subseteq I$ olsun. X'in ve $Y = I \setminus X$'in $F(A)$'da olmadıklarını varsayalım. O zaman $\delta_X, \delta_Y \notin A$ ama $\delta_X\delta_Y = 0 \in A$, çelişki. □

0.6 Uygulamalar

0.6.1 Gödel'in Tıkızlık Teoremi

Yukarda yaptıklarımız Gödel'in ünlü Tıkızlık Teoremi'nin şaşırtıcı ve sade bir kanıtını verir.

Teorem 0.5. *$\mathcal{L}$ bir dil ve Σ bu dilde yazılmış bir önermeler kümesi olsun. Σ'nın her sonlu Δ altkümesi için Δ'daki tüm önermelerin doğru olduğu bir M_Δ $\mathcal{L}$-yapısı olduğunu varsayalım. (yani Σ'nın sonlu altkümeleri tutarlı olsun.) O zaman Σ'nın tüm önermelerinin doğru olduğu bir $\mathcal{L}$-yapısı vardır.*

Kanıt: Σ'nın her sonlu altkümesi Δ için Δ'daki tüm önermelerin doğru olduğu bir M_Δ $\mathcal{L}$-yapısı seçelim. I, Σ'nın sonlu altkümelerinin kümesi olsun. $\mathcal{F}$, I üzerine bir ultrafiltre olsun. $M = \prod_{\mathcal{F}} M_\Delta$ yapısınının Σ'nın tüm önermelerini sağladığını kanıtlamaya **çalışalım**. Bu amaçla bir $\sigma \in \Sigma$ önermesi seçelim. Loś Teoremi'ne göre, $M \models \sigma$ olması için,

$$\{\Delta \in I : M_\Delta \models \sigma\} \in \mathcal{F}$$

olmalı. Ama

$$\{\Delta \in I : \sigma \in \Delta\} \subseteq \{\Delta \in I : M_\Delta \models \sigma\} \in \mathcal{F}.$$

Demek ki

$$\{\Delta \in I : \sigma \in \Delta\} \in \mathcal{F}$$

içindeliğini kanıtlamak yeterli. Daha doğrusu $\mathcal{F}$'yi I'nın

$$X_\sigma = \{\Delta \in I : \sigma \in \Delta\}$$

altkümelerini içerecek biçimde seçebilmek yeterli. Bunun için de

$$\{X_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$$

kümesinin sonlu kesişim özelliği olduğunu kanıtlamak yeterli. Ama

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \in X_{\sigma_1} \cap \ldots \cap X_{\sigma_n}.$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Notlar ve Örnekler

0.25. Gödel'in Tıkızlık Teoremi'ni kullanarak her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlayamayız (Tıkızlık Teoremi Seçim Aksiyomu'ndan daha zayıftır) ama Tıkızlık Teoremi'ni kullanarak her kümenin tamsıralanabileceğini kanıtlayabiliriz. Nitekim X tamsıralanacak küme olsun. Her $x \in X$ için, c_x farklı bir sabit simgesi olsun. $\mathcal{L} = \{\leq\} \cup \{c_x : x \in X\}$ olsun. Σ, $\leq$ ikili ilişkisinin bir tamsıralama olduğunu ve c_x elemanlarının birbirinden farklı olduğunu söylesin. Σ'nın her Δ sonlu altkümesi sonlu sayıda c_x simgesi içerdiğinden, Δ'daki önermelerin hepsini sağlayan (sonlu) bir küme bulabiliriz, ne de olsa sonlu kümeleri tamsıralamak kolaydır. Demek ki Tıkızlık Teoremi'ne göre Σ'daki tüm önermelerin doğru olduğu bir M tamsıralaması vardır. c_x simgelerinin M'de yorumlarıyla X kümesi arasında bir eşleme vardır ve bu eşleme kullanılarak X kümesi tamsıralanır.

0.6.2 Ax İlkesi

Eğer X sonlu bir kümeyse ve $f : X \longrightarrow X$ birebir bir fonksiyonsa, o zaman f örten bir fonksiyondur. Aynı şey, eğer cisim cebirsel kapalıysa cebirsel varyeteler üzerine tanımlanmış cebirsel (yani polinomiyal) fonksiyonlar için de geçerlidir.

Teorem 0.6 (James Ax). *K cebirsel kapalı bir cisim olsun. $X \subseteq K^n$, bazı polinomların köklerinden oluşan bir küme (yani cebirsel bir varyete) olsun. $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu polinomlarla tanımlansın, yani $p_i(x_1, \ldots, x_n) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ için $f(\overline{x}) = (p_1(\overline{x}), \ldots, p_n(\overline{x}))$ olsun. Eğer f birebirse örtendir.*

Kanıt: X kümesini ve f fonksiyonlarını tanımlayan polinomların derecelerini sabitlersek, teorem aslında halkalar kuramının dilinde yazılmış bir önermeye dönüşür. Bu önermeye σ diyelim. Tarski'nin meşhur bir teoremine göre (ki bu teorem de ultraçarpımlarla kanıtlanabilir), eğer bir önerme cebirsel kapalı bir cisimde doğruysa, aynı karakteristiğe sahip her cebirsel kapalı cisimde doğrudur. Dolayısıyla σ önermesini, verilmiş her karakteristik için, tek bir cebirsel kapalı cisimde kanıtlamak yeterli. Önce p bir asal olsun. σ önermesi elbette her $\mathbb{F}_{p^n}$ cismi için doğrudur, ne de olsa bunlar sonlu cisimler. Ama

$$\tilde{\mathbb{F}}_p = \bigcup_n \mathbb{F}_{p^{n!}}$$

olduğundan, σ önermesi p karakteristikli cebirsel kapalı bir cisim olan $\tilde{\mathbb{F}}_p$ cisminde de doğrudur. Łoś Teoremi'ne göre σ önermesi $\tilde{\mathbb{F}}_p$ cisimlerinin ultraçarpımında da doğrudur. Ama eğer alınan ultrafiltre başat değilse bu ultraçarpım karakteristiği 0 olan cebirsel kapalı bir cisimdir. $\square$