Fonsiyonel Analizin Kısa Tarihi

Şafak Alpay
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
safak@metu.edu.tr

Birkaç yıldır Nesin Matematik Köyü'nde anlattığım fonksiyonel analiz derslerinin tarihsel arka planını öğrencilerimle paylaşmak istedim; ama zaman darlığı nedeniyle fırsat bulamamıştım. Bu yazı bu amaçla yazılmıştır. Olanağı sağladıkları için dernek yöneticilerine teşekkür ederim.

19. yy kavramların, tanımların ve kanıtların tam anlamıyla açıklık ve mükemmelliğe kavuştuğu yıllardır. Yüzyıl başında Cauchy ile başlayan akım, yüzyıl sonlarında Weierstrass ile devam etmiştir. Gerçel sayıların aksiyomatik yapısının ortaya çıkması, Dedekind ve Cantor'un bu yöndeki çalışmaları analizin temelini oluşturmuştur.

20. yy matematiğinin gelişmesinin ana unsuru, izlenen aksiyomatik yöntem ve bütüncül bakış açısı ile yapıların (vektör uzayları, gruplar vb.) ele alınması olmuştur. İzlenen yöntemle yapıların daha iyi anlaşılması, kanıtları kolaylaştırmış, konuları birleştirmiş ve uygulamaların önünü açmıştır.

19. yy ortalarına kadar sayılar, noktalar, eğriler ve fonksiyonlar ayrı ayrı ele alınıyordu. Çok geçmeden bunlarda yapılan cebirsel işlemlerin gözden kaçırılmayacak denli ortak özelliklerinin farkına varıldı. Kümeler kuramındaki gelişmeler yüzyıl sonuna doğru soyut gruplar kuramına yol açtı ve bu kuram önemli çalışmaların odağı oldu.

20. yy başında analizde benzeri gelişmeleri göremesek de, M. Frechet'nin 1906 tarihli doktora tezinde soyut metrik uzayların ele alındığını ve Öklid uzaylarından bildiğimiz komşuluk, limit ve süreklilik kavramlarının bu yeni uzaylara genişletilebileceği öğrenildi.

Düzgün yakınsama kavramını, bu kavramı 1841'de ortaya atan Weierstrass'a borçluyuz. Weierstrass'ın 1885'te kanıtladığı polinomların sürekli fonksiyonlar içinde düzgün yoğun olması fonksiyon uzaylarına yeni bir statü kazandırdı. 1883'te kanıtlanan Ascoli-Arzela Teoremi, sürekli fonksiyonlar içinde kompakt (bir anlamda küçük denebilecek) kümeleri betimliyordu.

19. yy'da ele alınan problemlerin bir çoğu integral denklemler (içinde integral olan denklemler olarak okuyun) olarak anılan denklemlerin çözümü ile ilgiliydi. Örneğin, Fourier'in 1811'de ele aldığı

$$f(x) = \int_0^\infty \cos(xt)y(t)dt$$

veya Abel'in 1822'de çalıştığı

$$f(t) = \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}dt, \quad f(0) = 0$$

denklemleri verilen f fonksiyonu için, denklemi sağlayan y fonksiyonunun arandığı denklemlerdi.

20. yy başlarında bu tür denklemler tek tek ele alınıp çözümler aranırken, yüzyıl sonunda genel çözümler aranır oldu. Tam metrik uzaylarında, büzülme özelliği olan fonksiyonların sabit noktaları olduğu ve bu noktanın tekliğini veren teoremle integral denklemlerin, hepsini olmasa bile, bir çoğunu çözebildiğimizi 3. sınıf derslerinde öğreniyoruz [1]. 1895'te Maire le Roux, 1896'da Vita Volterra integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğine dair makaleler yazdılar. Volterra $k(x,t) = k(t,x)$ koşulunu sağlayan $k(x,t)$ fonksiyonları için

$$y(x) = f(x) + \beta \int_0^x k(x,t)y(t)dt$$

denklemini çalıştı. Yani, verilen f ve k için denklemi sağlayan y fonksiyonlarını aradı.

Volterra ve Fredholm'un integral denklem çözümlerine dair dört makalesi Hilbert'in dikkatini çekti ve o da konuyla ilgili altı makale yazdı. 1906'da yazdığı dördüncü makalede kompact dönüşümlerin spektral analizinin temellerini atarak, bugün Hilbert uzaylarında spektral analiz olarak anılan kuramı keşfetmiş oldu.

f ve $k(x,t)$ fonksiyonlarının sürekli alındığı Fredholm denklemi için, homojen

$$y(t) = \beta \int_a^b k(x,t)y(t)dt$$

denkleminin özdeğerlerinin gerçel sayılar ve sıralanabilir olduğunu kanıtladı. Bu denklemin özfonksiyonlarını da bularak, bunların birbirlerine dik olduklarını ve homojen denklemin çözümleri olduklarını gösterdi.

Hilbert'in öğrencisi Erhard Schmidt 1905'teki doktora tezinde Hilbert'in integral denklemler kuramını basitleştirdi. 1908 tarihli makalesinde yer verdiği geometrik yaklaşımla soyut Hilbert uzaylarının yolunu açtı. Schmidt'in l^2 uzaylarındaki çalışmaları iç çarpım ve normlu uzay kavramlarını kullanıyordu; Cauchy-Schwarz ve Bessel eşitsizlikleri ile l^2 uzayının tam olduğunu kanıtladı. Gram-Schmidt dikleştirme yöntemini ve dik projeksiyon kavramlarını elde etti.

Diğer önemli bir katkı da Henri Lebesgue'in 1902 tarihli doktora tezinden geldi. Emile Borel'in ölçümler hakkındaki çalışmaları üzerine inşa ettiği yeni integral kavramı Riemann integralinden daha genel ve güçlüydü. Daha zayıf koşullarda limit ve integral yer değiştirebiliyordu ki bu Riemann integralinde sadece düzgün yakınsamanın olduğu durumlarda doğruydu. Buradan da $L^p, 1 < p < \infty$ uzayları elde edildi. 1907'de F. Riesz ve E. Ficher kareleri integrallenebilir (Lebesgue anlamında) fonksiyonlardan oluşan $L^2[a,b]$ uzayının -L^2 normunda- tam ve l^2 dizi uzayıyla aynı olduğunu kanıtladılar. Aynı yıl Frechet ve Riesz birbirlerinden habersiz $L^2[a,b]$ uzayı üzerindeki sürekli ve doğrusal gerçel değerli dönüşümleri, yani bu uzayın dualini betimlediler. Riesz daha sonra bunu soyut Hilbert uzayına genişletti. 1920'de Riesz $[a,b]$ aralığı üzerindeki sürekli gerçel değerli fonksiyonların, $C[a,b]$ uzayının dualini, Stieltjes integrali marifetiyle buldu. F. Riesz'in $1 < p < \infty$ için $L^p[a,b]$ uzayları üzerindeki integral denklemler çalışması soyut normlu uzaylar üzerinde doğrusal, sürekli dönüşümlerin çalışmasına ve yeni bir araştırma alanının açılmasına yol açtı. Riesz dönüşümlerin devriklerini, devriklerin normunun dönüşümün kendi normuyla aynı olduğu gibi temel nitelikleri buldu. Yine Riesz'in 1918'de yazdığı kompakt dönüşümler makalesi kuvvetli bir çalışmaydı. Bu çalışmada Hilbert'in çalışmalarını genel Banach uzaylarına genişletti. Bu dönüşümlerden kompakt olanların spektral analizini verdi ve çalışmalar 1930'da J. Schauder tarafından genişletildi.

Banach uzaylarına adını veren Stefan Banach, bu uzayları 1920 tarihli doktora tezinde çalıştı. Hans Hahn ve Helly de benzeri çalışmaları dizi uzayları için yaptılar. N. Wiener, 1923'te kompleks sayılar cismi üzerinde de Banach uzayları çalışılabileceğini gösterdi. Bu çalışmaların önemli bir sonucu Sabit Nokta Teoremi'ydi [1]. Genel topolojideki buluşlar normlu uzayların zayıf topolojilerinin de çalışılmasına yol açtı ve bu konudaki önemli bir sonuç olan dual uzayın kapalı birim küresinin zayıf$*$ topolojisinde kompakt olduğu, İstanbullu bir rum olan L. Alaoğlu tarafından kanıtlandı. Normlu uzaylar bir vektör uzayı ve vektörlerin boyunu veren pozitif gerçel sayı değerli bir fonksiyondan ibarettir. Bu fonksiyonun özelliği verdiği metrik uzay yapısında cebirsel işlemlerinin, yani toplama ve sayılarla çarpma işlemlerinin sürekli olmasıdır. Buradan yine normlu uzaylarda olduğu gibi bir vektör uzayı ve cebirsel işlemleri sürekli kılan bir topolojiyle donanmış uzaylar kavramı doğdu ki bu yeni uzaylarda herhangi bir noktadaki komşuluklar sıfırın komşuluklarının ötelemeleriyle elde ediliyor. Bu uzaylara topolojik vektör uzaylarının kısaltması olarak TVU diyelim. Normlu uzaylarda (üçgen eşitsizliğinin bir sonucu olarak) kürelerin konveks kümeler olması (yani içinde alınan keyfi iki noktayı birleştiren doğru parçasının tamamıyla küre içinde kalması) önemli bir özelliktir. Bir TVU'da sıfırın komşuluklarının konveks kümelerden oluşan bir bazı varsa bu uzaylara yerel konveks uzaylar denir ki bu uzayların ilk farkına varan John von Neuman (1935) olmuştur.

Soyut normlu uzayların temelinde Hahn-Banach Teoremi vardır. Minkowski'nin Öklid uzaylarındaki çalışmaları önce Helly tarafından dizi uzaylarına genişletilmiştir. Hahn 1927 yılında transfinite tümevarımı ilk kez kullanarak alt uzaylarda tanımlı bir fonksiyoneli tüm uzaya genişletebileceğimizi, normlu bir uzayın dual ve ikinci dualini ve normlu bir uzayın ikinci dualin içine, yapısı değişmeden, gömülebileceğini gösterdi. 1929 yılında Banach, normlu bir uzayın alt uzayında tanımlı, doğrusal ve sürekli bir fonksiyonelin normunu koruyarak tüm uzaya genişletilebileceğini kanıtladı. Bugün Hahn-Banach Teoremi olarak andığımız bu teorem yerel konveks uzayların gelişmesinde önemli bir yere sahiptir.

19. yy sonlarında gelişen kümeler kuramı analizin gelişmesinde önemli olmuştur. René Baire'in 1899 yılında Öklid uzaylarında sayılabilir çoklukta, yoğun açık alt kümelerin ara kesitlerinin de yoğun olduğunu veren sonucu, çok geçmeden tam metrik uzaylara genişletildi. Bu teoreme Baire Kategori Teoremi (BKT) diyoruz.

1922 yılında Hahn Düzgün Sınırlılık İlkesi olarak bildiğimiz teoremi kanıtladı. 1927 yılında Banach ve Steinhaus BKT'yi kullanarak bu teoremin daha kolay bir kanıtını verdiler. 1929 yılında yine BKT'yi kullanarak Açık Gönderim ve Kapalı Grafik Teoremlerini kanıtladılar.

Nesin Matematik Köyü ve ODTÜ'de anlattığımız fonksiyonel analiz derslerinin kısa öyküsü böyle. Burada anlattığım konuları kanıtlarıyla birlikte [1,2] de bulabilirsiniz.

Banach ve çağdaşlarının yayımlarını yaptığı *Fundamenta Mathematica* dergisiyle 1929 yılında yayın hayatına başlayan *Studia Mathematica* çok geçmeden uluslararası üne sahip fonksiyonel analiz dergisi oldu.

Lvov kentinde yaşayan Banach, öğrencileri ve meslektaşlarıyla İskoç Kafe adlı bir mekânda buluşuyor ve öğleden sonra başlayan matematik toplantıları akşam geç saatlere kadar devam ediyordu. 1936 yılında tartıştıkları problemleri ve çözümlerini İskoç Defteri adını verdikleri defterde topladılar. 1941'de Polonya'nın Almanya tarafından işgal edilmesi üzerine saklanan defter 1956'da tercüme edilerek basıldı. Defterin 153 no'lu problemi Mazur tarafından sorulmuştu. A. Grothendieck bu problemin "yaklaşım problemine" denk olduğunu 1955'te kanıtladı. Sonrasında Per Enflo 1972 yılında Problem 153'ü olumsuz yönde çözdü. Mazur, İskoç kafenin gelenekleri doğrultusunda problemi çözen Enflo'ya canlı bir kaz hediye etti.

Kaynakça:

[1] T. Terzioğlu, *Introduction to metric spaces*, Matematik Vakfı Yayını, ODTÜ, Ankara.

[2] T. Terzioğlu, *Fonksionel Analizin Yöntemleri*, Matematik Vakfı Yayını, ODTÜ, Ankara.