Ali Nesin

1956'da bla bla ...

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye...

Ali Nesin

Analiz II

İçindekiler

Önsöz 1

I Süreklilik ve Limit **3**

1 Süreklilik **5**
1.1 Tanım ve Tanımın Tartışması 5
1.2 Örnekler 11
1.3 Sürekli Fonksiyonları Bileştirmek ve Kısıtlamak 19
1.4 Süreklilik Üzerine Notlar 25

2 Fonksiyonlarla İşlemler ve Süreklilik **27**
2.1 Fonksiyonlarla İşlemler 27
2.2 Toplama ve Süreklilik 29
2.3 Çarpma ve Süreklilik 30
2.4 Polinomiyal Fonksiyonlar ve Süreklilik 34
2.5 Bölme ve Süreklilik 36
2.6 Sıralama ve Süreklilik 39
2.7 Max, Min, Mutlak Değer ve Süreklilik 40
2.8 Bileşke ve Süreklilik 42
2.9 Tuhaf Bir Fonksiyonun Süreksizliği* 44

3 Sürekliliğin Derinlikleri **53**
3.1 Diziler ve Süreklilik 53
3.2 Aradeğer Teoremi 56
3.3 Sürekli Fonksiyonların Uç Değerleri 67

4 Limit **71**
4.1 Matematiksel Tanıma Giriş 72
4.2 Yoğunlaşma Noktası 74
4.3 Nihayet Limit Tanımı 76
4.4 Limitin Aritmetiği 81
4.5 Sıralama ve Limit 85
4.6 Bileşke ve Limit 88

5 Limit Üzerine Daha Fazla **91**
5.1 Sağdan ve Soldan Limit 91
5.2 Limitler ve Sonsuzlar 97
5.2.1 Sonsuzda Limit 98
5.2.2 Eksi Sonsuzda Limit 104
5.2.3 Sonsuza Iraksamak 105
5.3 Monoton Fonksiyonlar, Limit ve Süreklilik 112

6 Sürekli Fonksiyon Genişletmek ve Üs Almak **117**
6.1 Sürekli Fonksiyon Genişletmek 117
6.2 Gerçel Sayılarda Üs Almaya Doğru 123
6.3 Gerçel Sayılarda Üs Alma 125
6.4 Bernoulli Eşitsizlikleri 129
6.5 Üs Almanın Sürekliliği 132

II Fonksiyonlarda Yakınsaklık **135**

7 Fonksiyon Dizilerinin Noktasal Yakınsaması **137**

8 Fonksiyon Dizilerinin Düzgün Yakınsaması **143**
8.1 İlk Tanım ve Örnekler 143
8.2 Düzgün Yakınsaklığın Düzgün Tanımı 151
8.3 Fonksiyonların Süpnormu 155
8.4 Fonk X Üzerine Mesafe 157
8.5 Fonk X Uzayında Yakınsaklık 160
8.6 Düzgün Yakınsaklığın Aritmetiği 163
8.7 Cauchy Dizileri 165
8.8 Sınırlı Fonksiyonlar Kümesi $\ell^\infty(X)$ 167
8.9 Sürekli Fonksiyonlar Kümesi $\mathcal{C}(X)$ 170

9 Weierstrass M-Testi ve Sonuçları **175**
9.1 Kuvvet Serileri 175
9.2 Fonksiyonların Sonsuz Toplamı 176
9.3 Weierstrass M-Testi 177
9.4 Trigonometrik Fonksiyonlar ve Pi Sayısı 180

III Değişik Konular **189**

10 İç ve Dışbükey Fonksiyonlar **191**
10.1 Tanım 191
10.2 Dışbükeylik ve Süreklilik 196
10.3 Dışbükey Fonksiyonların Çarpımı 197

10.4 Ters Fonksiyonun Bükeyliği 199
10.5 Üs Almanın Bükeyliği 200
10.6 Yerel/Global Minimum/Maksimum 205

11 Logaritma ve Üs Alma **211**
11.1 exp Fonksiyonu 211
11.2 Doğal Logaritma 212
11.3 Üs Alma Üzerine 216
11.4 Başka Tabanlarda Logaritma 218

12 Eşitsizlikler Geçidi **221**
12.1 Jensen Eşitsizliği ve Sonuçları 221
12.2 Young Eşitsizliği 224
12.3 Hölder ve Cauchy-Schwarz Eşitsizlikleri 226
12.4 Minkowski Eşitsizliği 228
12.5 Mahler Eşitsizliği 229
12.6 α'ıncı Mertebeden Ortalama 230

IV Weierstrass Yoğunluk Teoremi **235**

13 Genelleştirilmiş Binom Açılımı **237**

14 Tıkız Kümeler **251**
14.1 Açık Kümeler 251
14.2 Süreklilik 252
14.3 Tıkızlık 253
14.4 Uç Değerler 257
14.5 Düzgün Süreklilik 258

15 Dini Teoremi ve Bir Uygulaması **263**
15.1 Dini Teoremi 263
15.2 $\sqrt{t}$'ye Düzgün Yakınsayan Polinomlar 265

16 Weierstrass Yoğunluk Teoremi **267**
16.1 Weierstrass Yoğunluk Teoremi 267
16.2 Bernstein Polinomları 271

V Ekler **275**

17 Exp ve Logaritma - *Yusuf Ünlü* **277**

18 Harmonik Seri, Euler-Mascheroni Sabiti ve Asallar - *Tosun Terzioğlu* **283**

19 Abel Yakınsaklık Teoremi **287**

20 Lebesgue Sayısı **291**

21 $\ln(1+x)$ **Fonksiyonunun Kuvvet Serisi** - *Yusuf Ünlü* **293**

22 Biçimsel Kuvvet Serileri **299**
22.1 Polinomlar 300
22.2 Biçimsel Kuvvet Serileri 302
22.3 Toplama ve Çarpma 305
22.4 Tersinir Biçimsel Kuvvet Serileri 308
22.5 Bileşke 311
22.6 Modülo X^n 316
22.7 Değerlendirmek 318
22.8 Türev 321
22.9 Uygulamalar 327
22.9.1 Exp ve Ln 327
22.9.2 Genelleştirilmiş Binom Açılımı 328
22.10 Laurent Serileri 330

23 Darboux Fonksiyonları - *Zafer Ercan, Uğur Gül, Mine Menekşe* **333**

Kaynakça **340**

Önsöz

Birinci ciltte, gerçel sayılar kümesinin, daha doğrusu $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0, 1)$ yapısının tanımından, daha doğrusu aksiyomlarından yola çıkmış ve gerçel dizi ve serileriyle devam etmiştik.

Bu ciltte önce fonksiyonlarda süreklilik ve limit kavramlarını işleyeceğiz. Süreklilikle ilgili en önemli sonuçlar 3'üncü bölümde. Bu önemli sonuçlara bir de Teorem 4.3'ü eklemek lazım.

Ardından fonksiyon dizilerinde yakınsaklık konusuna oldukça ayrıntılı bir biçimde gireceğiz. Kanıtlanan iki önemli teoremi özellikle vurgulamak isterim: Weierstrass M-testi (Teorem 9.1) ve Weierstrass Yoğunluk Teoremi (Teorem 16.1). Kanıtı oldukça kolay olan birincisi uygulamada çok yararlıdır. Kanıtı çok daha zor olan ikincisinin ise teorik önemi daha fazladır. Ayrıca π sayısının matematiksel tanımının kitabın heyecanlı bölümlerinden biri olduğunu düşünüyorum (Altbölüm 9.4).

Bir önceki cilt, daha çok dizi ve serilerle ilgili olduğundan çok daha fazla hesap yapmaya müsaitti, dolayısıyla bir öğrenci için daha keyifliydi. Eğlenceyi bu ciltte devam ettirmek çok isterdim; elimden geleni yaptım ama matematiği ucuz eğlenceye kurban etmek istemedim! Süreklilik çok çok önemli ama ne yazık ki pek eğlenceli bir konu değildir. Öte yandan soyut matematiğin zevkine varmış bir öğrencinin ikinci kısımdan itibaren keyif almaya başlayacağını umuyorum.

Üçüncü kısım kısmen ya da tamamen atlanarak ve gerektiğinde bu kısma dönerek kitap bir dönemlik bir ders olarak okutulabilir.

Öğrencilerin ve uygulamacıların çok daha eğlenceli bulduğu türev ve integral konularını üçüncü cilde sakladık.

Bu ilk basımda illa ki birçok eksiklik, hata, yanlış ifade, anlatım bozukluğu, alıştırma ve örnek eksikliği olacaktır; tecrübem bu yönde. Her türlü katkı şükranla karşılanacak ve anılacaktır.

Yazılarını kitabın sonuna ek olarak koymama izin veren Zafer Ercan, Uğur Gül, Mine Menekşe, Tosun Terzioğlu ve Yusuf Ünlü'ye, sayfalar tutan düzeltme, öneri, alıştırma ve daha birçok değerli katkısıyla kitabı zenginleştiren Yusuf Ünlü'ye (bir defa daha), kanıtlayamadığım eşitsizliklerde hızır gibi imdadıma yetişen Görkem Özkaya ve Serdar Boztaş'a, kitabı sabırla satır satır okuyup yanlışları düzelten Ali Törün dostuma ve öğrencilerim Türkü Özlüm Çelik, Uğur Doğan, Ali Derya Nesin, Dilek Tefenlili, Özge Ülkem ve adları buraya sığmayacak daha birçok öğrencime ve meslektaşıma, emektar asistanlarım Aslı Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin'e ve son olarak bu ders notlarını yazmam için bana gereken ortamı sağlayan, desteği veren ve sabrı gösteren eşim Özlem Beyarslan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ali Nesin
NMK, 29 Temmuz 2012
anesin@bilgi.edu.tr

Kısım I

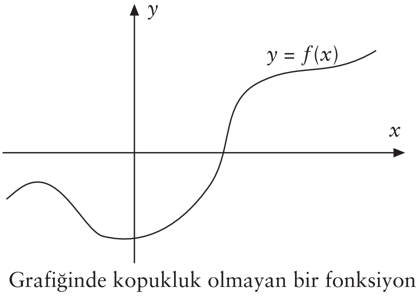
Süreklilik ve Limit

1. Süreklilik

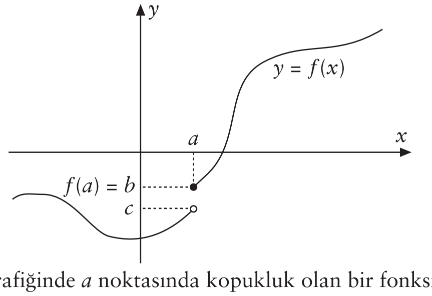
1.1 Tanım ve Tanımın Tartışması

Bu kitapta ele alacağımız süreklilik kavramı sadece matematiksel analizin değil, matematiğin de en önemli ve en temel kavramlarından biridir. Konuya önce sezgisel bir giriş yapalım. Matematiksel tanımı daha sonra vereceğiz.

Bazı fonksiyonların grafiğinde kopukluk yoktur, bazılarında ise tam tersine kopukluk vardır.



Grafiğinde kopukluk olmayan bir fonksiyon



Grafiğinde a noktasında kopukluk olan bir fonksiyon

Birinci örnekte kopukluk yokken ikinci örnekte a noktasında bir kopukluk, ani bir sıçrama var.

Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz, ama şimdilik sezgi kazandırmak amacıyla söyleyelim: Birinci örnekteki gibi fonksiyonlara ***sürekli*** denir. İkinci örnekteki fonksiyon ise a noktasında ***süreksizdir***, orada bir kopukluk, bir sıçrama, bir sıradışılık vardır.

İnsanlar süreklilikten daha çok hoşlanırlar. Süreklilik olağan durumdur, anlaşılması, başa çıkması daha kolaydır. Deprem gibi, uçurumdan yuvarlanmak gibi, basınç düşmesi gibi, olağan koşulların sürekliliğinin bozulduğu durumlar ölümcül olabilir.

Atomun varlığı kanıtlandığından beri maddenin sürekli olmadığını, aslında varlıktan çok yokluk olduğunu biliyoruz. Öte yandan makroskopik düzeyde maddenin sürekli olduğunu varsaymak -bu varsayım yanlış da olsa- maddeyi (ve hareketini) algılamamızda kolaylık sağlar.

Her ne kadar saniye, dakika, gün ve hafta gibi parçalara ayırsak da, zamanın da sürekli olduğunu varsayarız. Örneğin, insan duyularıyla algılanamayacak bir süre için bir elmanın kaybolup tekrar var olabileceği, hatta tüm evrenin donup tekrar harekete geçtiği düşüncesi bize pek inandırıcı gelmez. Ama neden olmasın!

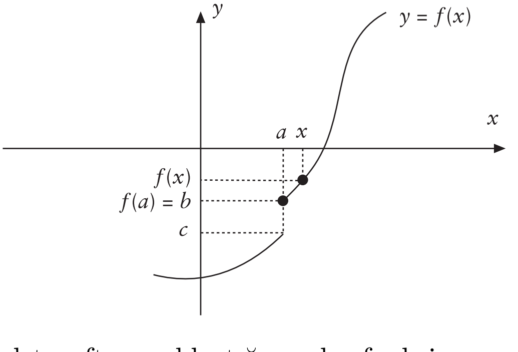
Velhasılı kelam, evren sürekli de süreksiz de olsa, sürekliyi anlamak daha kolaydır, o kadar ki, gerekirse yalan söyleyerek süreksizi sürekliymiş gibi addetmek bizi gerçeğe daha çok ve daha çabuk yaklaştırır.

Sezgisel olarak kolayca algılanabilen süreklilik/süreksizlik kavramını matematikselleştirmek pek o kadar kolay olmamıştır. Sürekliliğin doğru düzgün matematiksel bir tanımını vermek 19'uncu yüzyılda Cauchy'ye nasip olmuştur.

Tam matematiksel tanımı sunmadan önce sezgilerimize biraz daha matematiksel bir biçim vermeye çalışalım.

"Süreksiz" diye nitelendirdiğimiz ikinci fonksiyona dikkatlice bakalım. Belli ki sorun a noktasında. Bu noktada fonksiyon b değerini alıyor. Peki a çok az değiştiğinde fonksiyonun aldığı değer ne oluyor?

Eğer x, a'nın sağında (yani a'dan daha büyük) ama a'ya çok yakınsa, $f(x)$, $f(a)$'nın yani b'nin çok yakınındadır. Hatta x'i a'nın sağında ve x'e çok çok yakın alarak, $f(x)$ değerini $f(a)$'ya dilediğimiz kadar yaklaştırabiliriz. x, a'ya sağdan ne kadar yakın olursa, şekilden de anlaşılacağı üzere, $f(x)$ değeri $f(a)$'ya o kadar yakın olur.

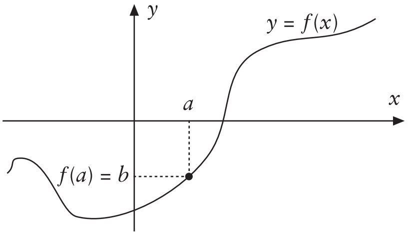


Öte yandan a'ya sol taraftan yaklaştığımızda, fonksiyonun değerleri $f(a)$'ya, yani b'ye değil, b'den uzakta olan c'ye çok yaklaşır; a'ya soldan istediğimiz kadar sokulalım, fonksiyonun aldığı değerler b'ye çok çok yaklaşamaz.

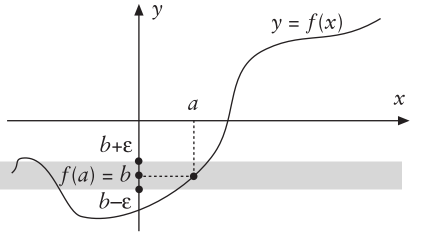
İlk fonksiyonda böyle bir sorun olmaz. x yavaş yavaş değiştiğinde, $f(x)$ de yavaş yavaş değişir. İkinci fonksiyonda ise x, a'nın solundan sağına ya da sağından soluna geçerken bir sıçrama yaşanır.

Sürekliliğin matematiksel tanımını vermenin zamanı geldi.

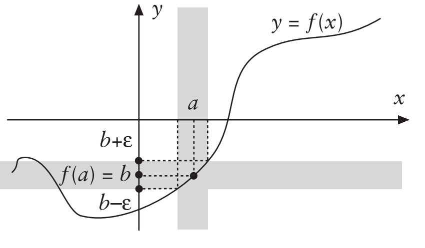
A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f'nin a noktasında sürekli olmasının matematiksel tanımını vereceğiz. $b = f(a)$ olsun. Aşağıdaki şekillerden takip edelim.



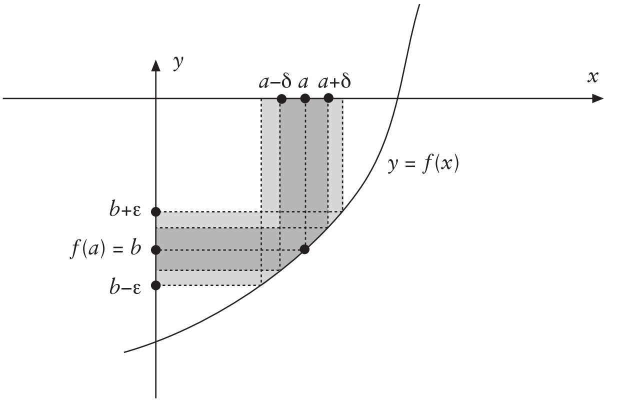
Herhangi bir $\epsilon > 0$ alalım. ϵ'u çok çok küçük (ama pozitif) bir gerçel sayı olarak algılayalım. Ve y ekseninde $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ aralığına ve o aralığın belirlediği yatay şeride bakalım:



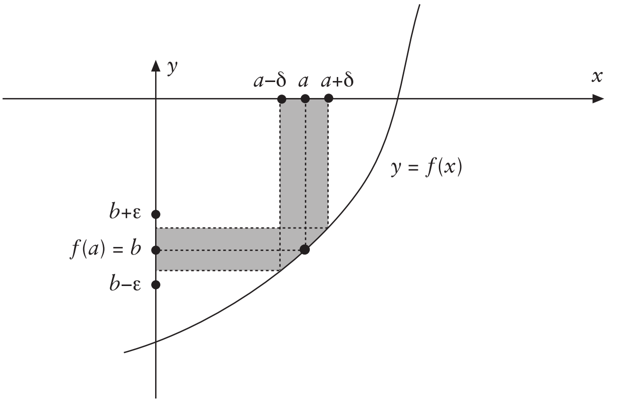
Bu yatay şerit fonksiyonun grafiğini çeşitli yerlerden keser ve bu kesişimler a'nın civarında bir bölge belirler:



a civarında grafiğe daha yakından bakalım:



Şekilden de görüleceği üzere, öyle bir $\delta > 0$ sayısı var ki, $(a-\delta, a+\delta)$ aralığının f fonksiyonu altında imgesi $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ aralığının içine düşer. Sadeleştirilmiş şekil aşağıda:



İşte "a'da sürekliliğin" tanımı aynen bunu ifade edecek, tek bir farkla ki

$(a-\delta, a+\delta)$ *aralığının* f*-imgesi* $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ *aralığının içine düşer*

yerine

$(a-\delta, a+\delta) \cap A$ *kümesinin* f*-imgesi* $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ *aralığının içine düşer*

demeliyiz, çünkü f fonksiyonu $(a-\delta, a+\delta)$ aralığının tüm noktalarında tanımlı olmayabilir. Matematiksel tanımı artık verelim:

Tanım. *$a \in A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,*

$$f((a-\delta, a+\delta) \cap A) \subseteq (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

*içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, f fonksiyonuna a**'da sürekli** denir.*

Aynı tanımı kümeler yerine elemanlarla ifade edebiliriz:

Tanım. *$a \in A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,*

$$\textit{Her } x \in A \textit{ için, eğer } |x - a| < \delta \textit{ ise } |f(x) - f(a)| < \epsilon \textit{ olur}$$

*önermesinin doğru olduğu bir $\delta > 0$ sayısı varsa, o zaman f fonksiyonuna a**'da sürekli** denir.*

İki tanım arasında bir ayrım olmadığı belli, çünkü $|x - a| < \delta$ koşuluyla $x \in (a - \delta, a + \delta)$ koşulu arasında bir ayrım yoktur.

Tanımı şöyle de yazabiliriz:

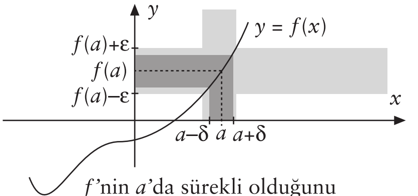
Tanım. *Bir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında **sürekli** olması için, her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki, her $x \in A$ için,*

$$(\star) \qquad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

önermesi doğru olsun. Tanımı daha simgesel olarak yazmak yararlı olabilir:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \;\; (|x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)\,.$$

Tanımın Tartışması. Fonksiyonun a'da sürekli olduğunu kanıtlamak için, verilen her $\epsilon > 0$ sayısı için $(\star)$ koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulmalıyız. Bu δ sayısı ϵ'a ve a'ya göre değişebilir ama x'ten bağımsızdır. Tekrar edelim: f fonksiyonu, $a \in X$ noktası ve $\epsilon > 0$ sayısı veriliyor ve $(\star)$ koşulunun **her** $x \in A$ için sağlandığı x'ten **bağımsız** bir $\delta > 0$ aranıyor. Bu nokta kesinlikle gözden kaçmamalı.



f'nin a'da sürekli olduğunu kanıtlamak için: ε verilmiş, δ'yı bul

Tanımı tartışmaya devam edelim. Eğer verilmiş bir $\epsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ sayısı $(\star)$ koşulunu sağlıyorsa, δ'dan küçük pozitif δ_1 sayıları da $(\star)$ koşulunu aynı ϵ için sağlar. Yani verilmiş bir ϵ için $(\star)$ koşulunu sağlayan tek bir δ yoktur ve eğer $(\star)$ koşulunu sağlayan bir δ varsa, istersek ve içimizden öyle geçiyorsa ya da gerekliyse, δ'yı 1'den, 1/2'den, 1/100'den ve istediğimiz herhangi pozitif bir sayıdan küçük seçebiliriz.

Gene de bulunacak δ'nın verilen ϵ'a göre değiştiğini belirtelim: Genelde, ϵ küçüldükçe, δ da küçülmek zorundadır. Nitekim eğer (ϵ, δ) çifti $(\star)$ koşulunu sağlıyorsa ve eğer $\epsilon_1 < \epsilon$ ise, o zaman (ϵ_1, δ) çifti $(\star)$ koşulunu artık sağlamayabilir, çünkü bunun için δ yeterince küçük olmayabilir, δ'yı daha da küçük seçmek zorunda kalabiliriz. Bu yüzden bazen δ yerine δ_ϵ yazmak yerinde olabilir. Hatta δ, a'ya göre de değişebileceğinden, δ yerine $\delta_{a,\epsilon}$ da yazılabilir.

Bir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olduğunu kanıtlamak için, önce herhangi bir pozitif ϵ sayısı seçilir. Sonra, $x \in A$ için,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiği araştırılır. Bunun için genellikle,

$$|f(x) - f(a)|$$

ifadesiyle oynanır. Amaç, bu ifadeyle oynayarak, ifadeyi, bir biçimde, içinde $|x - a|$ bulunan bir ifadeden daha küçük olarak ifade etmektir.

Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyona ***sürekli*** fonksiyon denir.

Sürekli fonksiyonların ne derece güçlü özellikleri olduklarını göstermek için hemen çok önemli bir teorem kanıtlayalım. (Bu basit kanıtı Ayşe Uyar'dan öğrendim.)

Teorem 1.1. *$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır*[1].

Kanıt: $a \geq b$ ise kanıtlayacak bir şey yok. Bundan böyle $a < b$ varsayımını yapalım.

$$S = \{c \in [a, b] : f \text{ fonksiyonu } [a, c] \text{ üzerine sınırlı}\}$$

tanımını yapalım. $a \in S$ olduğundan $S \neq \emptyset$. Demek ki $c = \sup S$ var. Şimdi amacımız c'nin b'ye eşit olduğunu kanıtlamak. Diyelim $c < b$. Fonksiyon c'de sürekli olduğundan, öyle bir $0 < \delta$ vardır ki, her $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ için

$$|f(x) - f(c)| < 1,$$

yani

$$-1 + f(c) < f(x) < 1 + f(c) \tag{1}$$

olur (sürekliliğin tanımında $\epsilon = 1$ aldık). Elbette δ'yı $b - c$'den küçük seçebiliriz; öyle yapalım. O zaman her $x \in [c, c + \delta]$ için

$$-1 + f(c) < f(x) < 1 + f(c)$$

[1] Yani $f([a, b])$ kümesi $\mathbb{R}$'nin sınırlı bir altkümesidir, yani $f([a, b]) \subseteq [A, B]$ içindeliğinin doğru olduğu A ve B sayıları vardır.

olur, yani f fonksiyonu $[c, c+\delta]$ üzerinde sınırlıdır. Buradan $a < c$ çıkar. δ'yi bir de ayrıca $c-a$'dan da küçük seçelim. (1)'den dolayı f'nin $[c-\delta/2, c+\delta/2]$ kapalı aralığında sınırlı olduğu anlaşılır. Ama f zaten $[a, c-\delta/2]$ aralığında sınırlı. Demek ki f fonksiyonu bu iki aralığın bileşimi olan $[a, c+\delta/2]$ aralığında da sınırlı, ki bu da $c+\delta/2 \in S$ demektir. S'de c'den büyük bir eleman bulduk, çelişki. □

Sürekliliğin tanımından hemen çıkan ve yukarıdaki kanıtta kullandığımız şu olguyu da not edelim:

Sonuç 1.2. *Eğer bir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $c \in A$ noktasında sürekliyse, o zaman f fonksiyonu c'nin bir komşuluğunda sınırlıdır, yani bir $\delta > 0$ sayısı için $(c-\delta, c+\delta) \cap A$ kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlıdır.* □

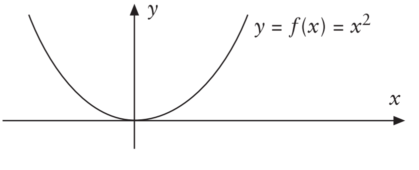
İleride sürekli fonksiyon altında bir aralığın imgesinin gene bir aralık olduğunu, ayrıca kapalı bir aralığın imgesinin de kapalı bir aralık olduğunu kanıtlayacağız.

1.2 Örnekler

Öğretici olması açısından çok basit olmayan, ama gene de çok çok zor olmayan örnekler sunmadan önce, a noktasının tanım kümesinde olmak zorunda olduğunu anımsatalım (yoksa $f(a)$'dan sözedemeyiz bile!) Eğer a noktası fonksiyonun tanım kümesinde değilse, fonksiyon bu noktada ne süreklidir ne de süreksiz, soru gündeme gelmez bile!

Örnekler

1.1. *$f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonu süreklidir.* (Burada $A = \mathbb{R}$ alınıyor.)



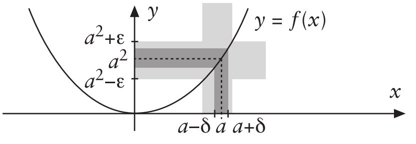
Kanıt: $a \in \mathbb{R}$ olsun. Rastgele bir pozitif ϵ sayısı seçelim. ϵ sayısını çok küçük bir sayı olarak algılayalım. Şimdi, $x \in A$ için,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini araştıralım; bakalım x'in a'ya belli bir $\delta > 0$ mesafesinden daha yakın olması bu eşitsizliğin sağlanması için yeterli oluyor mu, böyle bir δ var mı. Bunun için $|f(x)-f(a)|$ ifadesiyle oynayacağız. Oynayalım:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x-a||x+a|.$$

Sağ taraftaki $|x-a|$ ifadesi hoşumuza gidiyor, çünkü x sayısını $|x-a|$ çok küçük olacak şekilde seçersek, $|x-a||x+a|$ ifadesinin de çok küçük olma (ϵ'dan küçük olma) ihtimali var ve bizim istediğimiz de tam bu. Ama eğer $|x+a|$ çok artarsa, o zaman $|x-a||x+a|$ ifadesini istediğimiz kadar küçültemeyebiliriz. Demek ki $|x+a|$ ifadesinin çok artmadığını, belli bir sayı tarafından üstten sınırlandığını kanıtlamalıyız. $|x+a| \leq |x|+|a|$ olduğundan, $|x|$ sayısını üstten sınırlı tutmak yeterli. Eğer x herhangi bir gerçel sayıysa, bu doğru değil elbet, ama x'i a'ya yakın seçeceğimizi unutmayalım.



ε verilmiş, δ'yı bulmalıyız.
Eğer öyle bir δ varsa, aynı özelliği sağlayan 1'den küçük bir δ vardır.
İstersek, işimize geliyorsa, δ'yı 1'den küçük bulmaya çalışabiliriz.

$|x|$ sayısını üstten sınırlamak için, -ileride bu sözü tutmak üzere- bulacağımız δ'yı 1'den küçükeşit alacağımız sözünü verelim. (Yukarıdaki şekil böyle bir seçim yapabileceğimizi açıklamaya çalışıyor.) O zaman, x'i,

$$|x-a| < \delta \leq 1$$

olacak biçimde seçmiş olacağız ve bu seçimle,

$$|x| = |(x-a)+a| \leq |x-a|+|a| < 1+|a|$$

ve

$$|x+a| \leq |x|+|a| < 1+2|a|$$

olur. Başladığımız hesaba bu eşitsizlik ışığında devam edelim:

$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |x-a||x+a| < |x-a|(1+2|a|).$$

Demek ki $|f(x)-f(a)|$ ifadesinin ϵ'dan küçük olması için

$$|x-a|(1+2|a|)$$

ifadesinin ϵ'dan küçük olması yeterli. Dolayısıyla $|x-a|$'yı $\frac{\epsilon}{1+2|a|}$ sayısından küçük seçersek işimiz iş. Ama bir dakika! $|x-a|$'nın sadece $\frac{\epsilon}{1+2|a|}$ sayısından küçük olması yetmez, söz verdiğimiz üzere 1'den de küçükeşit olmalı. Yani eğer

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{1+2|a|}, 1\right\}$$

olarak seçersek, o zaman $|x-a| < \delta$ eşitsizliğinden (yukarıdaki hesaplara devam ederek)

$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |x-a||x+a| < |x-a|(1+2|a|) < \delta(1+2|a|) \leq \epsilon$$

eşitsizliği çıkar.

Bu kanıtı toparlayıp vasat bir analiz kitabında yazıldığı biçimiyle gösterelim: $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun.

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{1+2|a|}, 1\right\}$$

olsun. δ, elbette pozitif bir sayı. Ve son olarak, $x \in \mathbb{R}$ elemanı $|x-a| < \delta$ eşitsizliğini sağlasın. Böylece

$$|x+a| = |(x-a)+2a| \leq |x-a|+2|a| \leq \delta+2|a| \leq 1+2|a|$$

ve

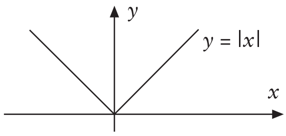
$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |x-a||x+a| < \delta(1+2|a|) \leq \frac{\epsilon}{1+2|a|}(1+2|a|) = \epsilon$$

buluruz, tam istediğimiz gibi. □

Kanıtın çok çok kolay olmadığı doğru ama işte matematik böyle bir şey.

Yukarıdaki kanıtta kullanılan yöntem sadece $x \mapsto x^2$ fonksiyonu için değil, herhangi bir $p(X)$ polinomu için $x \mapsto p(x)$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonların sürekliliğini göstermekte de işe yarar, nitekim $X-a$ polinomu $p(X)-p(a)$ polinomunu böler ve yukarıdaki yöntem basit bir biçimde bu genel duruma da uyarlanabilir.

1.2. *$a \in \mathbb{R}$ sabit bir eleman olsun. $x \mapsto |x-a|$ sürekli bir fonksiyondur.*



Kanıt: Fonksiyonun sürekli olduğu yukarıda çizdiğimiz grafiğinden de belli ama biz gene de matematiksel olarak kanıtlayalım. $f(x) = |x-a|$ tanımını yapalım. f fonksiyonunun verilmiş herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olduğunu kanıtlayalım. Bir $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer $|x-c| < 0$ ise $|f(x)-f(c)| < \epsilon$ olacak. Bu amaçla $|f(x)-f(c)|$ ifadesiyle oynayalım. Amacımız, $|f(x)-f(c)|$ ifadesinin ϵ'dan küçük olması için x'in c'ye ne kadar yakın olması gerektiğini bulmak. Hesap bu sefer çok daha basit:

$$|f(x)-f(c)| = ||x-a|-|c-a|| \le |(x-a)-(c-a)| = |x-c|.$$

Demek ki eğer $\delta = \epsilon$ alırsak, $|x-c| < \delta$ olduğunda,

$$|f(x)-f(c)| = ||x-a|-|c-a|| \le |(x-a)-(c-a)| = |x-c| < \delta = \epsilon$$

oluyor. Kanıtımız tamamlanmıştır.

Alıştırmalar

1.3. $f(x) = x^2+3x-7$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.4. $f(x) = x^3$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden f fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.5. $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ bir polinom olsun. $x \mapsto p(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu kanıtlayın. İpucu: Bir $q(X) \in \mathbb{R}[X]$ için $p(X)-p(a) = (X-a)q(X)$ olur.

1.6. $f(x) = \frac{1}{x}$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.7. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

Sürekli olmayan bir fonksiyon örneği verelim. Verelim ama önce bir noktada sürekli olmamanın ne demek olduğunu daha yakından irdeleyelim. Bir iki sayfa önce, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olması için,

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\ \ (|x-a| < \delta \longrightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon)\,.$$

önermesinin doğru olması gerektiğini söylemiştik. Bu önermenin tam tersini, yani zıddını yazalım. Bunun için basit mantık kullanacağız. Yukarıdaki önermenin zıddı,

$$\exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in A\ \neg\,(|x-a| < \delta \longrightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon)$$

önermesidir[2], yani

$$\exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in A\ \ (|x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \epsilon)$$

önermesidir. Yani bir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında sürekli olmaması için öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı olmalıdır ki, hangi $\delta > 0$ sayısı alınırsa alınsın,

$$|x-a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan ama

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

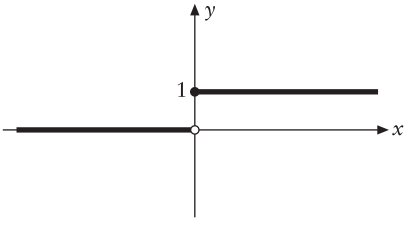
eşitsizliğini sağlamayan bir $x \in A$ noktası olmalıdır.

Örneklerle her şeyin daha açık olacağından kuşkumuz yok! Belki sosyoloji kitapları dışında hemen her kitapta bulunan standart bir örnek verelim.

Örnekler

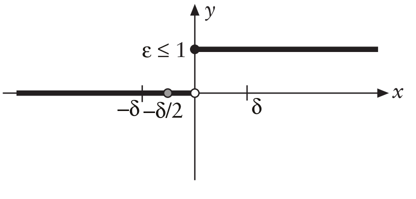
1.8. $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } x \geq 0 \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } x < 0 \textit{ ise} \end{cases}$ *formülüyle tanımlanmış* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonunun sürekliliğini tartışın.*

Tartışma: f, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye gider ve grafiği şöyledir:



Grafikten de anlaşılacağı üzere, bu fonksiyon 0 dışında her noktada süreklidir, sadece 0 noktasında süreksizdir. Bu söylediklerimizi matematiksel olarak kanıtlayalım.

Sav 1. *Fonksiyon $a = 0$ noktasında sürekli değildir.*



Kanıt: Sayfa 9'daki ($\star$) koşulunun hiçbir $\delta > 0$ için doğru olmadığı bir $\epsilon > 0$ bulmak gerekiyor. Yukarıdaki şekilden takip edin. $\epsilon = 1$ olsun. Aslında ϵ sayısını $0 < \epsilon \leq 1$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olarak alabiliriz. Şimdi $\delta > 0$ ne olursa olsun (daha doğrusu, ne kadar küçük olursa olsun), $x = -\delta/2$ alırsak,

$$|x-a| = |-\delta/2 - 0| = |-\delta/2| = \delta/2 < \delta$$

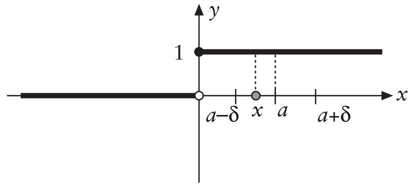
[2] $\neg$, kendisinden sonra gelen önermenin tam tersini iddia eder. Mesela $\neg(x = y)$ önermesi $x \neq y$ demektir. Bazen $\neg\alpha$ yerine α' yazılır.

olur ama

$$|f(x) - f(a)| = |f(-\delta/2) - f(0)| = |0 - 1| = 1 \geq \epsilon$$

olur, yani $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ eşitsizliği doğru olmaz.

Sav 2. *Eğer $a \neq 0$ ise fonksiyon a noktasında süreklidir.*



Kanıt: $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Sayfa 9'daki ($\star$) koşulunun bir $\delta > 0$ tarafından sağlandığını göstermemiz gerekiyor. $\delta = |a|/2$ olsun. x,

$$|x - a| < \delta$$

koşulunu sağlasın. O zaman,

$$\frac{-|a|}{2} = -\delta < x - a < \delta = \frac{|a|}{2},$$

yani

$$a - \frac{|a|}{2} < x < a + \frac{|a|}{2}$$

olur. Bundan, eğer $a < 0$ ise,

$$x < a + \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} < 0,$$

ve eğer $a > 0$ ise,

$$0 < \frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} < x$$

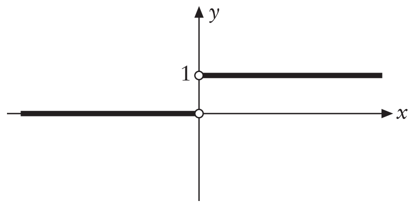
bulunur. Yani a ile x'in işaretleri aynıdır, biri pozitifse diğeri de pozitif, biri negatifse diğeri de negatif olur. Dolayısıyla $f(x) = f(a)$ olur, yani

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır: Eğer $a \neq 0$ ise ve $\epsilon > 0$ verilmişse, $\delta = \frac{|a|}{2}$ olsun; her $x \in (a - \delta, a + \delta)$ için $|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$ olur.

Bu örneği hafifçe değiştireceğiz, fonksiyonun kuralı aynı olacak ama tanım kümesi bu sefer $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ olacak.

1.9. $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } x > 0 \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } x < 0 \textit{ ise} \end{cases}$ *formülüyle tanımlanmış $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.*



Kanıt: Kanıt aynen bir önceki kanıt gibidir, ama tabii a'yı bu sefer 0 seçemeyiz, çünkü fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesidir. f, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye gider.
Bu örneğin bir de şu dikkate şayan özelliği vardır: $x_n = (-1)^n/n$ formülüyle tanımlanmış dizi bir Cauchy dizisi olduğu halde, imgesi olan $(f(x_n))_n$ dizisi bir Cauchy dizisi değildir. □

Şimdi ilk bakışta şaşırtıcı, ikinci bakışta doğal gelebilecek bir sonuç kanıtlayalım.

1.10. *$\mathbb{Z}$'den $\mathbb{R}$'ye giden herhangi bir fonksiyon süreklidir.*
Kanıt: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. $a \in \mathbb{Z}$, herhangi bir tamsayı olsun. Ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. δ'yı $0 < \delta \leq 1$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olarak seçelim, örneğin $\delta = 1/2$ olsun. O zaman eğer $x \in \mathbb{Z}$ ise ve x sayısı $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlıyorsa, $x = a$ olmak zorundadır çünkü iki farklı tamsayı arasındaki fark 1'den küçük olamaz. Demek ki, bu durumda,

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$$

olur. □
Bu örnekteki fonksiyonu her noktada sürekli kılan, değişik tamsayılar arasındaki mesafenin 1'den küçük olamayacağıdır. Daha doğrusu, her tamsayının yeterince küçük bir "komşuluğu"nda bir başka tamsayının bulunamayacağıdır. Bu fikri aşağıdaki ilk alıştırmalarda sömüreceğiz.

Alıştırmalar

1.11. $A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ olsun. $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.12. A, yukarıdaki gibi olsun. $B = A \cup \{0\}$ olsun. $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin 0'da sürekli olması için, $\lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0)$ eşitliğinin yeter ve gerekli olduğunu kanıtlayın.

1.13. A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. $a \in A$, A'dan ***ayrık*** bir eleman olsun, yani

$$(a - \alpha, a + \alpha) \cap A = \{a\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha > 0$ sayısı olsun. A'dan $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun a'da sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.14. A, $\mathbb{R}$'nin ***ayrık*** bir altkümesi olsun, yani her $a \in A$ için, $(a - \delta, a + \delta) \cap A = \{a\}$ eşitliğini sağlayan bir $\delta > 0$ olsun. (Burada δ, a'ya göre değişebilir.) A'dan $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.15. $f(x) = [x]$ ($= x$'in tamkısmı) formülüyle tanımlanmış. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu hangi noktalarda sürekli değildir?

1.16. $\mathbb{R}$'nin sonlu bir altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.17. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden sürekli bir fonksiyonun sabit olması gerektiğini kanıtlayın.

1.18. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun ama imgesi sonlu olsun. f'nin sabit bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın.

1.19. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Sabit bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $|f(x) - f(y)| \leq a|x - y|$ eşitliğinin her x, $y \in \mathbb{R}$ için sağlandığını varsayalım. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.20. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Sabit bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $|f(x) - f(y)| \leq a|g(x) - g(y)|$ eşitliğinin her x, $y \in \mathbb{R}$ için sağlandığını varsayalım. Eğer g sürekliyse f'nin de sürekli olduğunu kanıtlayın.

Klasik örneklerle devam edelim:

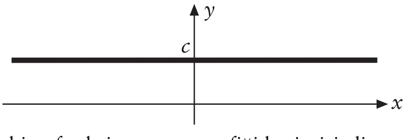
Örnekler

1.21. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin \mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$ *formülüyle tanımlanmış* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$*'nin hiçbir noktasında sürekli değildir.*

Kanıt: Bu fonksiyon nasıl sürekli olsun ki, fonksiyon zırt pırt 0 ve 1 değerlerini alıyor ve başka da değer almıyor. Biçimsel kanıtı okura bırakıyoruz. Bir ipucu verelim $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümelerinin her ikisi de $\mathbb{R}$'de yoğundurlar, yani boşküme olmayan herhangi bir açık aralıkta hem kesirli hem de kesirli olmayan sayılar vardır. □

Kolay (hatta bu aşamada biraz fazla kolay) ama önemli birkaç örnek geliyor son olarak:

1.22. *Sabit bir fonksiyon süreklidir.*



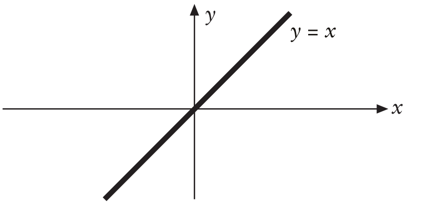
Sabit c fonksiyonunun grafiği kesintisizdir, dolayısıyla bu fonksiyon her noktada süreklidir.

Kanıt: f sabit bir fonksiyon olsun. $\epsilon > 0$ ve $\delta > 0$ ne olursa olsunlar, hep

$$|f(x) - f(a)| = 0 < \epsilon$$

olur. Demek ki f süreklidir. □

1.23. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ *formülüyle tanımlanan ve* (*birim fonksiyon olarak da bilinen*) *özdeşlik fonksiyonu* $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *süreklidir.*



Özdeşlik fonksiyonu $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$'nin grafiği çapraz doğrudur ve her doğru gibi bu grafik kesintisizdir. Dolayısıyla, sezgisel bir bakış açısıyla, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ fonksiyonu her noktada sürekli olmalıdır.

Kanıt: Özdeşlik fonksiyonunun $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ kuralıyla tanımlanmış $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olduğunu anımsatırız. $a \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $\delta = \epsilon > 0$ alalım. O zaman $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan her $a \in \mathbb{R}$ için,

$$|\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x) - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(a)| = |x - a| < \delta = \epsilon$$

olur; bu da istediğimizi kanıtlar.

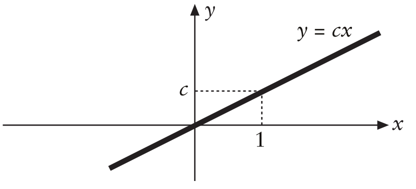
1.24. *Her* $c \in \mathbb{R}$ *için,* $x \mapsto cx$ *ve* $x \mapsto c + x$ *sürekli fonksiyonlardır.*

Kanıt: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x + c$ formülüyle tanımlanmış olsun. f'nin her noktada sürekli olduğunu kanıtlayalım. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel sayı olsun. $\epsilon > 0$ olsun. $\delta = \epsilon$ alalım. O zaman, $|x - a| < \delta$ ise,

$$|f(x) - f(a)| = |(x + c) - (a + c)| = |x - a| < \delta = \epsilon$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. □

Çarpmaya geçmeden önce ileride çok önemli olacak bir noktaya parmak basalım. Genellikle, bulunan δ sayısı a ve ϵ sayılarına göre değişir. δ'nın ϵ'dan bağımsız olması neredeyse imkânsızdır da yukarıdaki bazı örneklerde olduğu gibi δ, a'dan bağımsız olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda çok güçlü bir süreklilik sözkonusudur ve buna ***düzgün süreklilik*** adı verilir.



Çarpmaya gelelim. $c \in \mathbb{R}$ olsun. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = cx$ formülüyle tanımlanmış olsun. f'nin her noktada sürekli olduğunu kanıtlayalım. Eğer $c = 0$ ise, sabit 0 fonksiyonunu elde ederiz ve bu fonksiyonun (düzgün) sürekli olduğunu Örnek 1.22'den biliyoruz. (Eğer $c = 1$ ise de fonksiyonun sürekli olduğunu Örnek 1.23'ten biliyoruz.) Bundan böyle $c \neq 0$ varsayımını yapalım. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel sayı olsun. $\epsilon > 0$ olsun. $\delta = \epsilon/|c|$ olsun. O zaman, eğer $|x - a| < \delta$ ise,

$$|f(x) - f(a)| = |cx - ca| = |c||x - a| < |c|\delta = \epsilon$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Demek ki bu fonksiyon da süreklidir, üstelik düzgün süreklidir.

1.25. Sürekliliğin ne kadar güçlü bir özellik olduğunu göstermek için ileride kanıtlayacağımız sonuçlardan iki örnek verelim: 1. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden her sürekli fonksiyon sabit bir fonksiyondur (bkz. Alıştırma 3.13.) 2. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli ve birebir her f fonksiyonunun tersi de $f(\mathbb{R})$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli bir fonksiyondur (bkz. Sonuç 5.25).

Alıştırmalar

1.26. $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığını gösterin.

1.27. $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösterin.

1.28. $f(x) = 1/x$ kuralıyla verilmiş $f : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığını gösterin.

1.29. $\alpha > 0$ olsun. $f(x) = 1/x$ kuralıyla verilmiş $f : [\alpha, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.30. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\sum a_n$ mutlak yakınsak bir diziyse,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta(x - x_n)$$

formülüyle tanımlanan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun iyi tanımlandığını ve eğer her n için $a \neq x_n$ oluyorsa f'nin a'da sürekli olduğunu gösterin.

1.3 Sürekli Fonksiyonları Bileştirmek ve Kısıtlamak

Bundan sonraki altbölümlerdeki sonraki sonuçlar matematikte "folklor" olarak nitelendirilir, bir anlamda herkesin bildiği ama kitaplarda çoğu zaman yazılmayan, yazılsa da üstünde fazla durulmayan sonuçlar. Şöyle bir okuyup geçebilirsiniz.

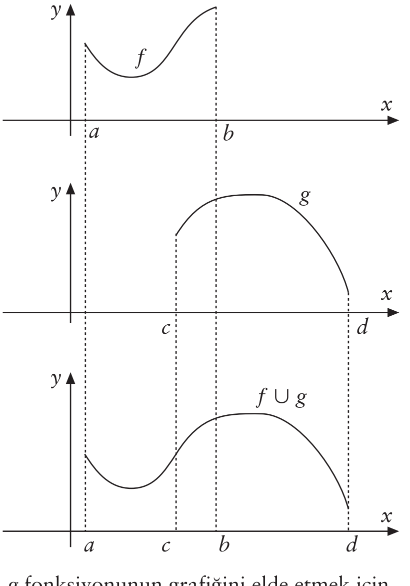
Fonksiyonların Bileşimi. İki sürekli fonksiyonu yapıştırarak (ya da bileştirerek) her zaman sürekli bir fonksiyon elde etmeyiz. Örneğin Örnek 1.8'deki fonksiyon iki sürekli fonksiyonun birleşimidir (hangileri?) ama elde edilen fonksiyon sürekli değildir. Örnek 1.21'de de aynı sorun vardır. Öte yandan Örnek 1.9'daki gibi bazı durumlarda yapıştırılarak elde edilen iki sürekli fonksiyon sürekliliği korur:

Teorem 1.3. *$a < b$ ve $c < d$ olsun. $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ iki sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca her $x \in (a, b) \cap (c, d)$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğinin doğru olduğunu varsayalım, o zaman,*

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } x \in (a, b) \text{ ise} \\ g(x) & \text{eğer } x \in (c, d) \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanan $f \cup g : (a, b) \cup (c, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. $a = -\infty$ ya da $d = \infty$ ise de aynı önerme doğrudur.

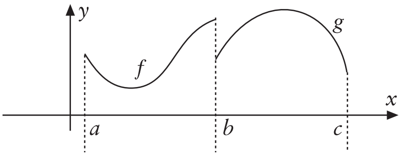
Kanıt: Okura bırakılmıştır. (Bkz. aşağıdaki şekil ya da Alıştırma 1.31.) □



$f \cup g$ fonksiyonunun grafiğini elde etmek için, f ve g fonksiyonlarının grafiklerini birleştirmek yeterlidir.

Elde edilen $f \cup g$ fonksiyonunun grafiğinin f ve g fonksiyonlarının grafiğinden nasıl elde edileceği yukarıdaki şekilde gösteriliyor.

Önermenin, Örnek 1.9'daki gibi, $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$ olduğu zaman da doğru olduğuna dikkatinizi çekeriz. Örneğin $b = c$ olduğunda. Bu dediğimiz, ince ama önemli bir ayrıntıdır.



Eğer f, (a, b) aralığının her noktasında sürekliyse ve g, (b, c) aralığının her noktasında sürekliyse, o zaman $f \cup g$ fonksiyonu $(a, b) \cup (b, c)$ kümesinin her noktasında süreklidir. b noktası $f \cup g$ fonksiyonunun tanım kümesinde olmadığı için b noktasındaki süreksizlik intibaı aldatıcıdır.

Ayrıca fonksiyonların tanım aralıklarını kapalı da alabilirdik, önerme gene doğru olurdu. Bunun özel bir hali $f(b) = g(b)$ eşitliğini sağlayan

$$f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ve } g : [b, c) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının yapıştırılmasıyla elde edilen fonksiyondur. Öte yandan aynı önerme Örnek 1.8'de görüldüğü gibi (a, b) ve $[b, c)$ aralıkları için yanlıştır.

(a, b) ve (c, d) yerine $\mathbb{R}$'nin bambaşka altkümelerini alırsak da teorem yanlış olur (bkz. Örnek 1.21). Ama aşağıdaki gibi bazı durumlarda teorem doğru olur:

Teorem 1.4. *$a \in A \subseteq \mathbb{R}$ olsun.*

$$B = \{x \in A : x \leq a\} \text{ ve } C = \{x \in A : x \geq a\}$$

tanımlarını yapalım. $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$ iki sürekli olsun. Son olarak $f(a) = g(a)$ varsayımını yapalım. Bu durumda $f \cup g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Alıştırmalar

1.31. Teorem 1.3'ü ve daha sonra söylenenleri kanıtlayın.

1.32. Teorem 1.3'ü kullanarak $f(x) = |x|$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.33. $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Diyelim her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x < y$ oluyor. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ iki sürekli fonksiyon olsun. $f \cup g : X \cup Y \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

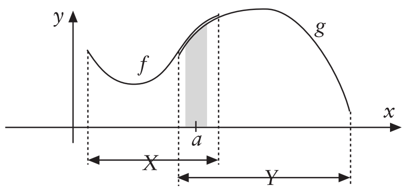
1.34. I bir göstergeç kümesi ve her $i \in I$ için $f_i : (a_i, b_i) \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $i, j \in I$ için f_i ve f_j fonksiyonlarının $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j)$ aralığında aynı değerleri aldığını varsayalım. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} f_i : \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.35. $a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. $b < a < c$ için, g fonksiyonu, f fonksiyonunun $(b, c) \cap X$ kümesine kısıtlanmışı olsun. f'nin a'da sürekli olmasıyla g'nin a'da sürekli olmasının eşdeğer olduklarını kanıtlayın.

Yerellik. Teorem 1.3'ün doğruluğu sürekliliğin "yerel" bir kavram olmasından kaynaklanmaktadır. Bu "yerellik" kavramını biraz açalım; analizde çok önemlidir.

Bir fonksiyonun belli bir a noktasında sürekli olması, sadece ve sadece o fonksiyonun a civarındaki davranışına göre değişir ve fonksiyonun a'dan uzakta neler yaptığından bağımsızdır. Aşağıdaki şekil okuru en azından görsel olarak doyurmalı. Kanıtı da cabası!

Teorem 1.5. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in X \cap Y$ olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Belli bir $\alpha > 0$ için $(a - \alpha, a + \alpha) \subseteq X \cap Y$ olduğunu ve bu aralık üstünde $f = g$ eşitliğini, yani her $x \in (a - \alpha, a + \alpha)$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini varsayalım. O zaman, eğer f ve g fonksiyonlarından biri a'da sürekliyse diğeri de a'da süreklidir.*



Eğer a noktası civarında f ve g fonksiyonları eşitse, o zaman biri a'da sürekliyse, diğeri de süreklidir.

Kanıt: Verilmiş bir $\epsilon > 0$ için bulmamız gereken δ'yı α'dan küçük seçmek yeterlidir. □

Bir sonraki teoremimiz, sürekli bir fonksiyonun kısıtlanmasının da sürekli olduğunu söyleyecek. Önce fonksiyon kısıtlanmasının ne demek olduğunu anımsatalım. f, bir A kümesinden bir Y kümesine giden bir fonksiyon olsun. B, A'nın bir altkümesi olsun. $g : B \longrightarrow Y$ fonksiyonu her $b \in B$ için,

$$g(b) = f(b)$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. Yani g'nin aldığı değerler f fonksiyonu tarafından belirlenmiş olsun. Bu durumda g fonksiyonuna f'nin ***kısıtlanışı*** adı verilir ve $g = f_{|B}$ yazılır. Duruma göre, kimi zaman da f'ye g'nin (bir) ***genişlemesi*** adı verilir.

Teorem 1.6. *$b \in B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonu b'de sürekliyse $f_{|B}$ fonksiyonu da b'de süreklidir. Dolayısıyla f fonksiyonu sürekliyse, $f_{|B}$ fonksiyonu da süreklidir.*

Kanıt: Kanıtı bundan daha kolay bir teorem zor bulunur. □

Teorem 1.7. *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $a \in A$ için*

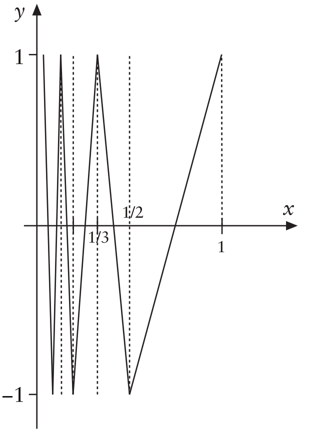
$$f_{|A\cap(a-\alpha,a+\alpha)} : A \cap (a-\alpha, a+\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu bir $\alpha > 0$ sayısı varsa o zaman f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Eğer bu özellikler her $a \in X$ için geçerliyse, f süreklidir.

Kanıt: Kanıt için sürekliliğin tanımını anlamak yeter. □

Örnekler

1.36. $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu, grafiği aşağıdaki şekildeki gibi olacak biçimde tanımlayalım.



Yani grafik, $n \in \mathbb{N}$ için $(1/n, (-1)^{n+1})$ noktalarını birleştirsin; demek ki $|f(1/n)| = 1$. Bir de $f(0) = 0$ olsun. Grafiği doğru parçası olan (dolayısıyla sürekli olan) fonksiyonların bileşimi olduğundan, Teorem 1.5'e göre, f fonksiyonu $(0, 1)$ aralığı üzerinde süreklidir, ama göreceğimiz üzere 0 noktasında sürekli değildir. Nitekim $\epsilon = 1/2$ olsun. $\delta > 0$ rastgele seçilmiş olsun. $1/n < \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ seçilsin. O zaman

$$|f(1/n) - f(0)| = |f(1/n)| = 1 > 1/2 = \epsilon$$

olur. Dolayısıyla sürekliliğin tanımı $\epsilon = 1/2$ için ihlal edilir.

1.37. **Bir Noktanın Bir Kümeye Mesafesi.** Örnek 1.2'de verilmiş bir $a \in \mathbb{R}$ için $f(x) = |x-a|$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlamıştık. Eğer $|x-a|$ sayısını x'in $\{a\}$ kümesine uzaklığı olarak algılarsak, bu olguyu aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.
$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun x ile A arasındaki ***mesafe***,

$$d(x,\, A) = \inf\{|x-a| : a \in A\} = \inf_{a\in A} |x-a|$$

olarak tanımlanır. Örneğin,

$$d(1,\, (0,1)) = d(1,\, [0,1]) = 0.$$

Bir başka örnek: Her $x \in \mathbb{R}$ için $d(x, \mathbb{Q}) = 0$ olur. Eğer $A = \{a\}$ ise, girişte dediğimiz gibi, $d(x,\, A) = |x-a|$ olur. Eğer $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sonlu bir kümeyse, $d(x, A) = \min\{d(x,a_1), \ldots, d(x,a_n)\}$ olur.
Okur, **en fazla** iki tane $a \in A$ için $d(x,A) = |x-a|$ eşitliğinin sağlandığını kanıtlayabilir.

Bu örnekte amacımız, verilmiş bir $A \subseteq \mathbb{R}$ için $x \mapsto d(x, A)$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonu anlamak.

Şu özellikler bariz olmalı:

• Eğer $x \in A$ ise, $d(x, A) = 0$. Ama $d(x, A) = 0$ ise, x elemanı A'da olmak zorunda değildir. Öte yandan eğer A kapalı bir aralıksa,

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$$

eşdeğerliliği geçerlidir.

• Eğer $A \subseteq B$ ise, $d(x, A) \geq d(x, B)$.

• Eğer $a \in A$ ve $y \in \mathbb{R}$ ise, $d(x, A) \leq |x - a| \leq |x - y| + |y - a|$ olduğundan

$$d(x, A) - |x - y| \leq |y - a|$$

olur. Demek ki

$$d(x, A) - |x - y| \leq \inf_{a \in A} |y - a| = d(y, A)$$

ve

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$$

olur. Simetriden dolayı aynı şekilde

$$d(y, A) - d(x, A) \leq |x - y|$$

olur. Demek ki,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

olur. Bu da

$$x \mapsto d(x, A)$$

kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir (bkz. Alıştırma 1.19). Bu arada A'yı tek elemanlı bir küme alırsak, $a \in \mathbb{R}$ için,

$$x \mapsto |x - a|$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun da sürekli olduğunu görürüz.

Gelecekte gerekecek bu sonuçları not edelim:

Önsav 1.8. *$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için x ile A arasındaki* mesafe*,*

$$d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\} = \inf_{a \in A} |x - a|$$

olarak tanımlansın. O zaman $x \mapsto d(x, A)$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyon süreklidir. Bunun özel bir durumu olarak, $a \in \mathbb{R}$ için,

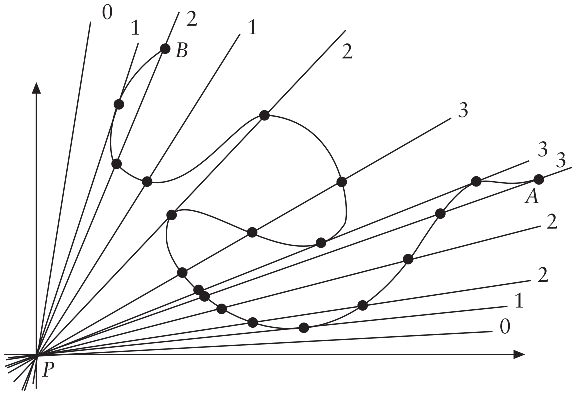
$$x \mapsto |x - a|$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon da süreklidir. $a = 0$ bunun daha da özel ama önemli bir halidir. □

1.38. **Doğal ama Süreksiz Bir Fonksiyon.** Düzlemde güzel (yani sürekli!) bir eğri ve bir de bir P noktası alalım. P'den geçen doğrular eğriyi bazı noktalarda keser. $f(\alpha)$, yatay doğruyla α derecelik bir açı yapan doğrunun eğriyi kestiği nokta sayısı olsun. Örneğin, aşağıdaki resimdeki örnekte,

$$f(0) = f(90) = 0.$$

Doğrular P civarında yavaş yavaş döndüğünde, f sıçramalar yapar. Bu sıçramalar genellikle doğrunun eğriye teğet olduğu açılarda meydana gelir. Burada, doğal biçimde tanımlanmış ama sürekli olmayan bir fonksiyon sözkonusudur. Hülasa, her doğal fonksiyon sürekli olmak zorunda değildir.



Alıştırmalar

1.39. $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanan $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu önce sadece tanıma başvurarak, sonra da bu bölümdeki sonuçları kullanarak kanıtlayın.

1.40. f, $(0, 1) \cup (2, 3)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden ve $f(x) = x$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin grafiğini çizin. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.41. f, $(0, 2)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden, $(0, 1)$ aralığı üzerinde $f(x) = x$ ve $[1, 2)$ aralığı üzerinde $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin grafiğini çizin. f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.42. $r \in \mathbb{R}$ olsun ve $f_r : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \geq r \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < r \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Hangi $r \in \mathbb{R}$ sayıları için f_r süreklidir?

1.43. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun ve her x için $f(x) = f(-x)$ olsun. Eğer f, a'da sürekliyse, $-a$'da da sürekli olduğunu kanıtlayın. Bundan f, a'da sürekli değilse $-a$'da da sürekli olamayacağını çıkarın. Aynı şeyi $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon için de yapın.

1.44. Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq f(x) \leq |x|$ eşitsizliğini sağlayan her fonksiyonun 0'da sürekli olduğunu kanıtlayın.

1.45. $a \in V \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a \in I \subseteq V$ koşulunu sağlayan açık bir I aralığı varsa V'ye a'nın ***komşuluğu*** adı verilir.
Şimdi $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin a'da sürekli olması için,

$f(a)$'nın her V komşuluğu için, $f^{-1}(V)$ kümesi a'nın bir komşuluğudur

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

1.46. A, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olsun. $a \in A$ olsun. A'nın, bir $\epsilon > 0$ için, $A \cap (a-\epsilon, a+\epsilon)$ altkümesini içeren V altkümelerine a'nın A'***da komşuluğu*** ya da A-***komşuluğu*** adı verilir. Demek ki a'nın A-komşuluğu, a'nın (bir önceki soruda tanımlanan) bir komşuluğuyla A'nın kesişimidir. Şimdi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin a'da sürekli olması için,

$f(a)$'nın $\mathbb{R}$'de her V komşuluğu için, $f^{-1}(V)$ kümesi a'nın A'da bir komşuluğudur

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

1.4 Süreklilik Üzerine Notlar

Süreklilik konusunda ileriki bölümlerde daha derinleşeceğiz. Şimdilik sürekliliğin oldukça basit özelliklerinden sözedelim.

1. Sürekliliği, $\mathbb{R}$'nin bir A altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar için tanımladık. Oysa, tanıma bakılırsa fonksiyonun illa $\mathbb{R}$'ye değil, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesine gitmesi yeterli, nitekim tanımda fonksiyonun varış kümesini hiç kullanmadık, tek kullandığımız, değerlerin gerçel sayılar olmasıydı. Yani A ve B, $\mathbb{R}$'nin altkümeleriyse ve $f : A \longrightarrow B$, A'dan B'ye giden bir fonksiyonsa, sürekliliği bu f fonksiyonu için de tanımlayabiliriz, aynı tanımı kabul edelim, olsun bitsin. Bundan böyle sürekliliğin $\mathbb{R}$'nin bir altkümesinden gene $\mathbb{R}$'nin bir altkümesine giden fonksiyonlar için tanımlandığını kabul edeceğiz.

2. Eğer $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekliyse ve $f(A) \subseteq C \subseteq \mathbb{R}$ ise, her $x \in A$ için $g(x) = f(x)$ kuralıyla tanımlanan $g : A \longrightarrow C$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

3. Eğer $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu bir $a \in A$ noktasında sürekliyse ve $a \in C \subseteq A$ ise, her $x \in C$ için

$$\left(f_{|C}\right)(x) = f(x)$$

kuralıyla tanımlanan $f_{|C} : C \longrightarrow B$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir. Bunu biliyoruz (Teorem 1.6).

Öte yandan, $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse ve $a \in C \subseteq A$ ise, $f_{|C} : C \longrightarrow B$ fonksiyonu a noktasında pekâlâ sürekli olabilir. Nitekim f ne olursa olsun, $C = \{a\}$ ise $f_{|C}$ fonksiyonu a'da süreklidir! (Bkz. Alıştırma 1.14.) Biraz daha sofistike bir örnek verelim: f, Örnek 1.8'deki fonksiyon olsun $A = \mathbb{R}$, $a = 0$ ve $C = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ olsun, ya da $C = [0, \infty)$ olsun, farketmez. Bu durumda $f_{|C}$ fonksiyonu 0'da süreklidir.

4. $f : A \longrightarrow B$ herhangi bir fonksiyon ve $C = \{a \in A : f, a\text{'da sürekli}\}$ olsun. O zaman $f_{|C}$ fonksiyonu süreklidir.

5. Süreklilik Çeşitleri. Verdiğimiz süreklilik tanımı Cauchy'nin olduğu için bazen sürekli yerine ***Cauchy-sürekli*** denir. Sürekliliğin başka adlarla anılan başka tanımları vardır; örneğin ***Heine-süreklilik***. Heine-sürekli bir fonksiyon yakınsak bir diziyi yakınsak bir diziye götürür. Bizi ilgilendiren durumda bu iki kavram arasında bir fark olmadığını göreceğiz.

Kullanılan bir başka Cauchy-sürekliliği kavramı daha vardır: Cauchy dizilerini Cauchy dizilerine götüren bir fonksiyona da bazen ***Cauchy-sürekli*** denir. Eğer $X \neq \mathbb{R}$ ise, sürekli fonksiyonlar Cauchy-sürekli olmayabilirler. Örneğin Örnek 1.9'daki fonksiyon süreklidir ama Cauchy-sürekli değildir. Öte yandan $X = \mathbb{R}$ ise Cauchy-sürekli bir fonksiyon sürekli olmak zorundadır (Teorem 4.18).

2. Fonksiyonlarla İşlemler ve Süreklilik

Okur mutlaka eğitim hayatı boyunca $x^2/2 + \sin x$ türünden ifadelere rastlamıştır. Bu ifade aslında $x^2/2$ ile $\sin x$ fonksiyonlarının toplamını simgelemektedir. Görüldüğü gibi sadece sayılar değil, fonksiyonlar da toplanabilir, hatta çarpılabilir. Bu bölümde süreklilikle toplama ve çarpma gibi fonksiyon işlemleri arasındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

Önce fonksiyonlarla işlemin dikkatli bir tanımını verelim. Daha sonra bu işlemlerle süreklilik arasındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

2.1 Fonksiyonlarla İşlemler

Eğer X herhangi bir kümeyse ve $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyonsa, gene X'ten $\mathbb{R}$'ye giden $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu şu kuralla tanımlanır:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Yani $f + g$ fonksiyonunun bir $x \in X$ elemanındaki imgesini bulmak için f ve g'nin x'te aldıkları değerler toplanır.

Bölüme girişte bir örnek verdik. Bir örnek daha verelim.

$$f(x) = x^3 + 2x \text{ ve } g(x) = \sqrt{x}$$

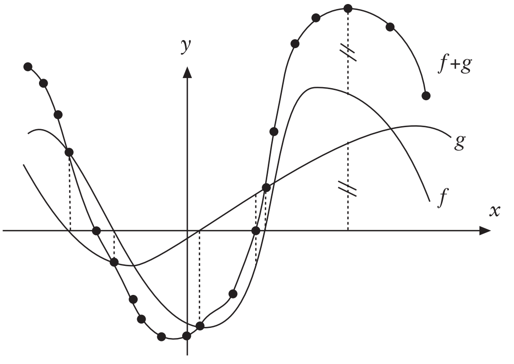
olsun. Fonksiyonların tanım kümesi olan X'i de tanımlamalıyız. $X = [1, \infty)$ olsun (mesela!) Değer kümesi $\mathbb{R}$ olsun. O zaman, $f + g : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 2x + \sqrt{x}$$

olarak tanımlanır.

Birleşme özelliği, yani $(f+g)+h = f+(g+h)$ eşitliği bariz olmalı. Sabit 0 fonksiyonu tabii ki işlemin etkisiz elemanıdır. f fonksiyonunun toplama işlemi için tersi de, her $x \in X$ için $(-f)(x) = -f(x)$ formülüyle tanımlanan $-f$ fonksiyonudur.

Eğer $X = \mathbb{R}$ ise ve f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmişse, $f+g$ fonksiyonunun grafiğini çizmek oldukça kolaydır. Aşağıdaki şekildeki gibi yapılır.



Fonksiyonları çarpabiliriz de. Eğer f ve g yukarıdaki gibi X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyonsa, gene X'ten $\mathbb{R}$'ye giden $f \cdot g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu şu kuralla tanımlanır:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

Yani bu sefer $f(x)$ ve $g(x)$ değerlerini toplayacağımıza çarparız.

Birleşme özelliği gene geçerli: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. Ayrıca sabit 1 fonksiyonu çarpma işleminin etkisiz elemanı. Öte yandan her fonksiyonun çarpma işlemi için tersi yok, bir $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tersi olması için, f'nin hiç 0 değerini almaması lazım (ve gerek). Nitekim eğer $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, hiç 0 değerini almayan bir fonksiyonsa, o zaman her f fonksiyonunu g'ye bölebiliriz:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Örneğin $X = \mathbb{R}$ ve $g(x) = 1 + x^2$ olabilir ve o zaman,

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$$

fonksiyonunu elde ederiz. Ama mesela $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ özdeşlik fonksiyonunun çarpma için tersi yoktur, çünkü özdeşlik fonksiyonu 0'da 0 değerini alır.

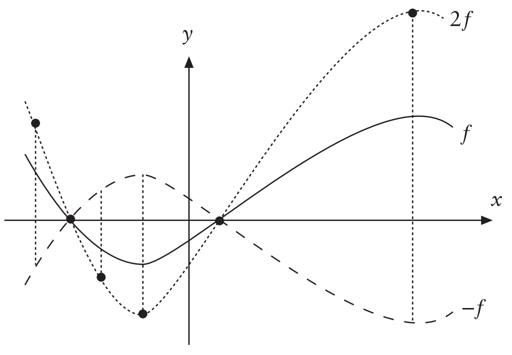
Değerleri gerçel sayı olan bir f fonksiyonunu sabit bir a sayısıyla çarpabiliriz de:

$$(af)(x) = a \cdot f(x).$$

Eğer $a = -1$ ise, $-f$ fonksiyonu $(-1)f$ fonksiyonuna eşittir:

$$((-1)f)(x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x) = (-f)(x).$$

Aşağıda f'nin grafiğinden $2f$ ve $-f$'nin grafiğinin nasıl elde edilebileceğini görüyorsunuz.



Bu bölümde, süreklilikle fonksiyonların toplama ve çarpma gibi işlemleri arasındaki ilişkiyi göreceğiz. Tahmin edilebileceği gibi, süreklilik bu işlemler altında bozulmuyor. Toplamadan başlayalım.

2.2 Toplama ve Süreklilik

Teorem 2.1. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları a noktasında sürekli olsun. O zaman $f + g$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $\epsilon > 0$, herhangi pozitif bir sayı olsun.

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)|$$

sayısının ε'dan küçük olması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini bulacağız. Bunun için bu ifadeyle oynayıp, ifadenin içine, x'i a'ya yakın alarak küçültebileceğimizi bildiğimiz

$$|f(x) - f(a)| \text{ ve } |g(x) - g(a)|$$

ifadelerini sokuşturmalıyız. Hesaplarımıza başlıyoruz:

$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \\ &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|.\end{aligned}$$

En sağdaki terimi ϵ'dan küçük yapabilirsek işimiz iş. Ama bu çok kolay, çünkü f ve g fonksiyonları a'da sürekli olduklarından,

$$|f(x) - f(a)| \text{ ve } |g(x) - f(a)|$$

terimlerini, x'i a'ya çok yakın seçerek $\varepsilon/2$'den küçük yapabiliriz. Nitekim, öyle bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in X$ elemanı (ya da sayısı) $|x - a| < \delta_1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \delta_2$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Bu kanıtı kitaplarda yazdığı gibi yazalım:

Kanıt: $\epsilon > 0$, herhangi pozitif bir sayı olsun. f fonksiyonu a'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \delta_1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. g fonksiyonu da a'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \delta_2$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| \\
&= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\
&\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

2.3 Çarpma ve Süreklilik

Toplamayla başladık, çarpmayla devam edelim. Nasıl iki sürekli fonksiyonun toplamı da sürekli oluyorsa, iki sürekli fonksiyonun çarpımı da sürekli olur. Ama kanıt biraz daha zordur.

Teorem 2.2. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve f, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları a noktasında sürekli olsun. O zaman $f \cdot g$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $\epsilon > 0$, herhangi bir pozitif sayı olsun.

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)|$$

sayısının ϵ'dan küçük olması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini bulacağız. Bunun için bu ifadeyle oynayıp, ifadenin içine, x'i a'ya yakın alarak küçültebileceğimizi bildiğimiz $|f(x) - f(a)|$ ve $|g(x) - g(a)|$ ifadelerini bir biçimde sokuşturmalıyız. Hesaplarımıza başlıyoruz:

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\
&= |f(x)(g(x) - g(a)) + (f(x) - f(a))g(a)| \\
&\leq |f(x)(g(x) - g(a))| + |(f(x) - f(a))g(a)| \\
&= |f(x)||g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)||g(a)|.
\end{aligned}$$

En alttaki terimi ϵ'dan küçük yapabilirsek işimiz iş... Demek ki

$$|f(x)||g(x) - g(a)| \text{ ve } |f(x) - f(a)||g(a)|$$

terimlerinin **her ikisini birden** $\epsilon/2$'den küçük yapabilirsek istediğimize ulaşırız.

$$|f(x) - f(a)||g(a)|$$

terimini küçültmek o kadar zor değil, çünkü $|g(a)|$ sabit bir sayı ve x'i a'ya yeterince yakın seçerek $|f(x)-f(a)|$'yı istediğimiz kadar küçültebiliriz. Nitekim eğer $\delta_1 > 0$ sayısı, $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta_1$ eşitsizliğini sağladığında,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2|g(a)|}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)||g(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Ama burada bir hata var, bu akıl yürütme $g(a) = 0$ ise geçerli değildir, çünkü bu durumda $|g(a)|$'ya bölemeyiz ve

$$\frac{\epsilon}{2|g(a)|}$$

ifadesinden bahsedemeyiz. Çok önemli değil, bunun da üstesinden geliriz: ϵ sayısını $|g(a)|$'ya böleceğimize $|g(a)| + 1$'e bölelim: $\delta_1 > 0$ sayısını, her $x \in X$ elemanı için

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2(|g(a)| + 1)}$$

önermesi sağlanacak biçimde seçelim. O zaman,

$$|f(x) - f(a)||g(a)| < \frac{\epsilon|g(a)|}{2(|g(a)| + 1)} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Böylece ikinci terimi küçülttük. Sıra birinci terime geldi, yani

$$|f(x)||g(x) - g(a)|$$

terimine. Burada $|g(x)-g(a)|$ terimini küçültebiliriz ama eğer en baştaki $|f(x)|$ terimi çok büyürse, bu iki terimin çarpımını dilediğimiz kadar küçültemeyebiliriz. Bu yüzden $|f(x)|$'in çok büyüyemeyeceğini, sınırlı kalacağını kanıtlamamız lazım; en azından, küçük de olsa, a'nın etrafındaki bir aralıkta f sınırlı kalmalı. Bu, yeni bir teoremi gerektirecek kadar önemli bir sonuçtur. (Teorem 2.2'nin kanıtına daha sonra devam edeceğiz.)

Teorem 2.3. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ olsun ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekli olsun. O zaman öyle bir $\alpha > 0$ sayısı vardır ki, f fonksiyonu $X \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ aralığında sınırlıdır, yani $f(X \cap (a - \alpha, a + \alpha))$ kümesi sınırlıdır.*

Kanıt: Sürekliliğin tanımındaki ϵ sayısını 1'e eşit alalım. O zaman öyle bir $\alpha > 0$ sayısı vardır ki, $x \in X$ elemanı $|x - a| < \alpha$ eşitsizliğini sağladığında, yani $x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$ olduğunda,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon = 1$$

olur, yani

$$f(x) \in (f(a) - 1, f(a) + 1)$$

olur. Bu da istediğimizi kanıtlar. □

Teorem 2.2'nin Kanıtının Devamı: Anımsarsanız

$$|f(x)||g(x) - g(a)|$$

terimini $\epsilon/2$ sayısından küçük yapmak istiyorduk ama çok büyüyebilecek olan $|f(x)|$ teriminden rahatsız olmuştuk. Neyse ki Teorem 2.3'e göre, öyle bir $\alpha > 0$ sayısı vardır ki, f fonksiyonu $X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$ aralığında sınırlıdır, diyelim her $x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$ elemanı için

$$|f(x)| < M$$

olur. Bu arada M'nin 0 olamayacağına, pozitif olmak zorunda olduğuna dikkatinizi çekeriz. Demek ki her $x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$ elemanı için

$$|f(x)||g(x) - g(a)| < M|g(x) - g(a)|$$

eşitsizliği geçerli. Şimdi işimiz kolaylaştı. g fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır ki, $|x-a| < \delta_2$ eşitsizliği sağlandığında,

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2M}$$

eşitsizliği de sağlanır.

Kanıtın sonuna geldik: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \alpha\}$ olsun. O zaman $\delta > 0$ olur ve $|x-a| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ elemanı için, $|x-a| < \alpha$ olduğundan,

$$|f(x)||g(x) - g(a)| < M|g(x) - g(a)|$$

olur ve $|x - a| < \delta_2$ olduğundan,

$$|f(x)||g(x) - g(a)| < M|g(x) - g(a)| < \epsilon/2$$

olur. Böylece $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için,

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olur ve Teorem 2.2 kanıtlanır. Kanıtı aşağıda toparladık. □

Teorem 2.2'nin Toparlanmış Kitabi Kanıtı: $\epsilon > 0$, herhangi pozitif bir sayı olsun.

1. f fonksiyonu a'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \delta_1$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2(|g(a)| + 1)}$$

olur.

2. f fonksiyonu da a'da sürekli olduğundan, Teorem 2.3'e göre, öyle $\alpha > 0$ ve $M > 0$ sayıları vardır ki, eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \alpha$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman, $|f(x)| < M$ olur.

3. g fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, $|x - a| < \delta_2$ eşitsizliğini sağladığında,

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2M}$$

eşitsizliği de sağlanır.

Final: Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \alpha\}$ olsun. Eğer $x \in X$ elemanı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman,

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| &= |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \\
&= |f(x)(g(x) - g(a)) + (f(x) - f(a))g(a)| \\
&\leq |f(x)||g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)||g(a)| \\
&\leq M|g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)|(|g(a)| + 1) \\
&\leq M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2(|g(a)| + 1)}(|g(a)| + 1) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 2.4. *Eğer f fonksiyonu sürekliyse, her n doğal sayısı için, f^n fonksiyonu da süreklidir.*

Kanıt: Tanım gereği, f^0, sabit 1 fonksiyonudur, dolayısıyla süreklidir. Gerisi tümevarımla Teorem 2.2'den çıkar. □

Bir Sabitle Çarpma. Bir fonksiyonu sabit bir b sayısıyla da çarpabiliriz. O zaman da süreklilik bozulmaz:

Sonuç 2.5. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. O zaman bf fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $g(x) = b$ olarak tanımlansın. O zaman $g \cdot f = bf$ olduğundan, istediğimiz sonuç, Teorem 2.2'den çıkar. □

Çıkarma. Sürekli bir fonksiyon sürekli bir fonksiyondan çıkarılınca da süreklilik bozulmaz.

Sonuç 2.6. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. O zaman $f - g$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: Teorem 2.1 ve Sonuç 2.5'ten, eğer $b \in \mathbb{R}$ ise $f + bg$ fonksiyonu da a noktasında sürekli olduğu çıkar. Şimdi $b = -1$ alalım. □

2.4 Polinomiyal Fonksiyonlar ve Süreklilik

Bu paragrafta yukarıda kanıtladıklarımızın sonuçlarına katlanacağız.

Eğer $p(T)$ katsayıları gerçel sayılar olan bir polinomsa, yani

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$$

gerçel sayıları için

$$p(T) = p_0 + p_1T + p_2T^2 + \cdots + p_nT^n$$

biçiminde bir ifadeyse, o zaman, p polinomu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve

$$x \mapsto p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$$

kuralıyla tanımlanan bir fonksiyon verir. (T değişkeni yerine x sayısı konulur.) Bu fonksiyonu p ile göstermek bir hatadır ama çoğu matematikçi bu hatayı çoğu zaman bile bile yapar. (Ama kimi durumlarda polinomlarla polinomların tanımladığı fonksiyonları birbirinden ayırmak elzem olabilir.) Bir polinom tarafından tanımlanan fonksiyonlara ***polinomiyal fonksiyonlar*** denir.

$$f(x) = x^2$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon polinomiyaldir, ve elbette T^2 polinomu tarafından tanımlanmıştır. Özdeşlik fonksiyonu Id de polinomiyaldir, T polinomu tarafından tanımlanmıştır. Sabit fonksiyonlar da polinomiyaldirler, sabit polinomlar tarafından tanımlanmışlardır.

Gerçel katsayılı polinomlar kümesi $\mathbb{R}[T]$ olarak simgelenirler.

Sonuç 2.7. *Polinomiyal fonksiyonlar her noktada süreklidir.*

Kanıt: Örnek 1.22 ve 1.23'ten dolayı sabit fonksiyonlar ve T polinomu tarafından verilen özdeşlik fonksiyonu süreklidir. Gerisi yukarıda kanıtlanan sonuçlardan kolayca çıkar. (Aslında daha matematiksel olmak istiyorsak, önce n üzerine tümevarımla T^n tarafından verilen polinomiyal fonksiyonların sürekli olduğunu, ardından polinomların dereceleri üzerine tümevarımla polinomiyal fonksiyonların sürekli olduğunu kanıtlamak gerekir.) $\square$

Sonuç 2.8. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. $p(T) \in \mathbb{R}[T]$ olsun. O zaman $x \mapsto p(f(x))$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: Çok basit. Okura bırakılmıştır. (Sonuç 2.4'e göre her n doğal sayısı için $x \mapsto f(x)^n$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon a noktasında süreklidir.) $\square$

Örnek 2.1. Polinomiyal fonksiyonların sürekli olduklarını kanıtladık. Burada polinomiyal bir fonksiyon olmayan exp fonksiyonunun sürekli olduğunu göstereceğiz. (exp'in polinomiyal bir fonksiyon olmadığının kanıtı için bkz. [N4, Örnek 10.18].)

exp fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayabilmek için fonksiyonun tanımını bilmek gerekir elbette. Tanımı anımsatalım [N4]:

$$\exp x = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum \frac{x^i}{i!}.$$

Teorem 2.9. exp *sürekli bir fonksiyondur.*

Kanıt: Önce fonksiyonun $a = 0$ noktasında sürekli olduğunu kanıtlayalım. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı seçelim. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, $|x| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|\exp x - \exp 0| < \epsilon,$$

yani

$$|\exp x - 1| < \epsilon$$

olacak. $|\exp x - 1| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlanması için $|x|$'in ne kadar küçük olması gerektiğini, yani δ'nın ne olması gerektiğini bulalım.

$$\begin{aligned}|\exp x - 1| &= \left|\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} - 1\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^i}{i!} = |x| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{i-1}}{i!} \le |x| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= |x| \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x|^i}{i!}\right) = |x| \exp |x|.\end{aligned}$$

Demek ki exp kesin artan bir fonksiyon olduğundan [N4, Sonuç 10.14], $|x| < 1$ ise, $\exp x < \exp 1 = e$ ve dolayısıyla

$$|\exp x - 1| \leq |x| \exp |x| < e|x|$$

olur. Demek ki $\delta = \min\{1, \epsilon/e\}$ alırsak, $|x| < \delta$ olduğunda,

$$|\exp x - 1| < e|x| \leq \epsilon$$

olur. Böylece exp fonksiyonunun 0'da sürekli olduğu kanıtlandı.

Şimdi herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ alalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ seçelim. $\exp a \neq 0$ olduğundan,

$$|\exp x - \exp a| = \exp a \times \left|\frac{\exp x}{\exp a} - 1\right| = \exp a \times |\exp(x-a) - 1|$$

olur. $\delta > 0$ sayısını, $|y| < \delta$ olduğunda

$$|\exp y - 1| < \frac{\epsilon}{\exp a}$$

olacak biçimde seçelim. O zaman, bir önceki hesaplara devam edersek, $|x - a| < \delta$ olduğunda,

$$|\exp x - \exp a| = \exp a \times \left|\frac{\exp x}{\exp a} - 1\right| = \exp a \times |\exp(x-a) - 1| < \epsilon$$

çıkar ve böylece exp'in a noktasında sürekli olduğu kanıtlanmış olur. □

Alıştırmalar

2.2. $q \geq 0$ bir kesirli sayı olsun. $x \mapsto x^q$ olarak tanımlanmış $\mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın. İpucu: $x^{n/m} = (x^{1/m})^n$ olduğundan, $q = 1/m$ alabiliriz. Bu aşamada [N4, Örnek 3.6] yararlı olabilir.

2.3. $\exp(\exp x) = 1$ denkleminin çözümü var mıdır?

2.4. $\exp(\exp x) = e$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

2.5. sin ve cos fonksiyonlarının sürekli olduklarını kanıtlayın. (Trigonometrik fonksiyonların tanımı için bkz. [N4].)

2.5 Bölme ve Süreklilik

Şimdi bölmeye gelelim. $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f,\ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a noktasında sürekli iki fonksiyon olsun. f/g fonksiyonunun a'da sürekli olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Ama bu fonksiyon,

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

kuralıyla tanımlandığından, böyle bir fonksiyonun var olması için g'nin X'in her noktasında 0'dan değişik olması gerekir. Öyle olduğunu varsayalım.

Ayrıca f/g fonksiyonu f ile $1/g$ fonksiyonlarının çarpımı olduğundan Teorem 2.2'ye göre $1/g$'nin sürekli olduğunu kanıtlamamız yeterlidir. Böylece f'den kurtulmuş olduk. Kanıtımıza başlayalım:

$\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| < \epsilon$$

olsun. Eşitsizliğin solundaki ifadeyle oynamaya başlayalım:

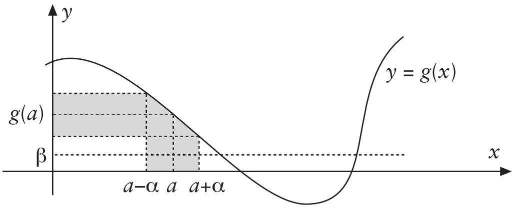
$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|}.$$

Sağdaki ifadenin ϵ'dan küçük olması için x'in a'ya ne kadar yakın olması gerektiğini bulacağız. g fonksiyonu a'da sürekli olduğundan, x'i a'ya yeterince yakın seçerek, paydaki $|g(a) - g(x)|$ ifadesini istediğimiz kadar küçük yapabiliriz. Ya paydadaki ifade? Paydaki $|g(a)|$ bir sorun teşkil etmiyor, ne de olsa 0'dan değişik ve sabit bir sayı. Ama $|g(x)|$ potansiyel bir tehlike, çünkü x'i aldığımız aralıkta $|g(x)|$ sayısı çok çok küçülebilir ve

$$\frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|}$$

ifadesini ayyuka çıkarabilir. Bunu engelleyebilir miyiz? Yani eğer $g(a) \neq 0$ ise ve g fonksiyonu a noktasında sürekliyse, a'nın küçük de olsa bir "komşuluğunda" g'nin 0'dan "uzak olduğunu" kanıtlayabilir miyiz? Evet!

Önsav 2.10. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$, ve $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. Eğer $g(a) \neq 0$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ vardır ki, her $x \in X \cap (a - \alpha, a + \alpha)$ için, $|g(x)| > \beta$ olur.*



Eğer $g(a) > 0$ ise, $g(x)$, a merkezli belli bir aralıkta belli bir $\beta > 0$ sayısından daha büyüktür.

Kanıt: Aslında kanıtın anafikri oldukça açık. g fonksiyonu a'da sürekli olduğundan, a'ya yakın noktalarda $g(x)$, $g(a)$'ya çok yakındır. Ama $g(a) \neq 0$ olduğundan, a'ya çok yakın noktalarda $g(x)$'i 0'dan uzak tutabiliriz. Biçimsel kanıta geçelim:

Gerekirse g yerine $-g$ alarak $g(a)$'nın pozitif olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, sürekliliğin tanımındaki ϵ sayısını $g(a)/2$ olarak alabiliriz. O zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in X$ için

$$|g(x) - g(a)| < \frac{g(a)}{2},$$

demek ki

$$\frac{-g(a)}{2} < g(x) - g(a) < \frac{g(a)}{2},$$

olur ve bundan da,

$$\frac{g(a)}{2} < g(x)$$

çıkar. Şimdi $\alpha = \delta$ ve $\beta = g(a)/2$ alalım. □

$1/g$'nin a'da sürekli olduğunun kanıtına kaldığımız yerden devam edelim. α ve β pozitif sayıları Önsav 2.10'daki gibi olsun. Eğer bulacağımız δ'yı α'dan küçükeşit seçmeyi kabullenirsek,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|} < \frac{|g(a) - g(x)|}{\beta|g(a)|}$$

olur. İşimiz çok kolayladı. $\delta_1 > 0$, her $x \in X \cap (a - \delta_1, a + \delta_1)$ için,

$$|g(x) - g(a)| < \epsilon\beta|g(a)|$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayı olsun. g fonksiyonu a'da sürekli olduğundan böyle bir δ_1 vardır. Demek ki $\delta = \min\{\alpha, \delta_1\}$ olarak seçersek, her $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$ için,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}\right| = \frac{|g(a) - g(x)|}{|g(x)||g(a)|} < \frac{|g(a) - g(x)|}{\beta|g(a)|} < \epsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır. Kanıtladığımız teoremi yazalım:

Teorem 2.11. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ise, o zaman f/g fonksiyonu da a noktasında süreklidir.* □

Sonuç 2.12. *$f(T)$, $g(T) \in \mathbb{R}[T]$ ve $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ise, o zaman, $x \in X$ için*

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon her noktada süreklidir.

Kanıt: Teorem 2.11'den ve Sonuç 2.7'den çıkar. □

Sonuç 2.13. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun.*

$$Y = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$$

olsun. $a \in Y$ varsayımını yapalım. O zaman

$$\frac{f}{g} : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

Kanıt: Teorem 2.11 ve Teorem 1.6'dan çıkar. □

2.6 Sıralama ve Süreklilik

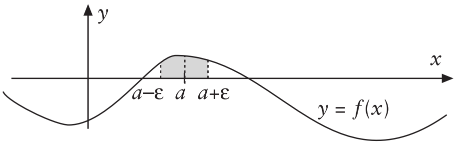
Eğer $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları, her $x \in X$ için $f(x) < g(x)$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu durumda,

$$f < g$$

yazarız. Bu bir sıralamadır ama eğer $|X| \neq 1$ ise tamsıralama değildir, yani birbirleriyle karşılaştırılamayan fonksiyonlar olabilir.

Süreklilikle, tanımladığımız bu fonksiyon sıralaması arasında da bir ilişki vardır.

Sonuç 2.14. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekli olsun. Eğer $g(a) > 0$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ sayısı vardır ki, her $x \in X \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ için, $g(x) \geq \frac{g(a)}{2}$ olur, dolayısıyla $X \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ kümesi üzerinde g fonksiyonu hep pozitif değerler alır.*



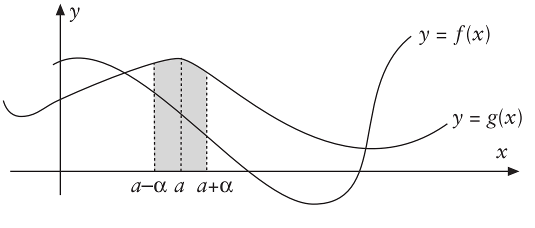
Kanıt: Önsav 2.10'un kanıtından çıkar. □

Elbette aynı sonuç "pozitif" yerine "negatif" sıfatı için de geçerlidir.

Sonuç 2.15. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekli olsun. Eğer $g(a) \neq 0$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ sayısı vardır ki, g fonksiyonu $X \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ kümesinde hiç 0 olmaz.* □

Sonuç 2.14'ü daha da genelleştirebiliriz.

Sonuç 2.16. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan iki fonksiyon olsun. Eğer $f(a) < g(a)$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, her $x \in X \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ için $f(x) < g(x)$ olur.*



Kanıt: Sonuç 2.6'ya göre a noktasında sürekli olan $g - f$ fonksiyonuna Sonuç 2.14'ü uygulamak yeterlidir. □

Sonuç 2.17. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekli olsun. Eğer $f(a) < c$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, her $x \in X \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ için $f(x) < c$ olur.*

Kanıt: Sonuç 2.16'yı f'ye ve sabit c fonksiyonuna uygulamak yeterli. □

Benzer sonucu da yazalım:

Sonuç 2.18. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekli olsun. Eğer $f(a) > c$ ise, öyle bir $\alpha > 0$ vardır ki, her $x \in X \cap (a-\alpha, a+\alpha)$ için $f(x) > c$ olur.* □

Alıştırma 2.6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her x için $f(x^2) = f(x)$ eşitliğini varsayalım. f'nin sabit bir fonksiyon olduğunu gösterin.

2.7 Max, Min, Mutlak Değer ve Süreklilik

Eğer $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonsa, $|f|$ fonksiyonunu

$$|f|(x) = |f(x)|$$

formülüyle tanımlayalım. Buradaki X herhangi bir küme olabilir ama bizi daha çok X'in $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olduğu durum ilgilendiriyor.

Teorem 2.19. *Eğer f fonksiyonu sürekliyse, $|f|$ fonksiyonu da süreklidir.*

Kanıt: $||f(x)| - |f(a)|| \le |f(x) - f(a)|$ olduğundan, verilmiş bir $\epsilon > 0$ için $\delta > 0$ sayısı f için işe yarıyorsa, $|f|$ için de işe yarar. □

f, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. $f \vee g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu, her $x \in X$ için,

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

olarak tanımlayalım. Benzer şekilde, $f \wedge g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun, her $x \in X$ için,

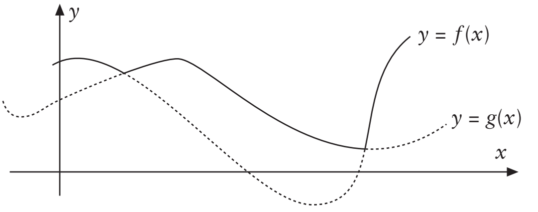
$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

olarak tanımlayalım. Tabii bir kez daha X'in $\mathbb{R}$'nin altkümesi olduğu durumla ilgileceğiz.

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} \text{ ve } \min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$$

olduğundan, bir önceki teoremden hemen şu çıkar:

Teorem 2.20. *Eğer f ve g fonksiyonları sürekliyse, $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonları da süreklidir.* □



$f \vee g$ fonksiyonu düz çizgiyle,
$f \wedge g$ fonksiyonu kesik çizgiyle belirtilmiştir.

Alıştırmalar

2.7. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f \cdot f$ (çarpım) fonksiyonu sürekliyse, f fonksiyonu da sürekli midir?

2.8. Eğer $2f + 3g$ ve $3f + 2g$ fonksiyonları sürekliyse, f ve g fonksiyonlarının da sürekli olduklarını kanıtlayın.

2.9. $f(x) = \sqrt{x}$ formülüyle tanımlanmış $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli midir?

2.10. $f(x) = 3x^2 - 7e^{-x} + 6xe^x - \sin x$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

2.11. Aşağıdaki fonksiyon sürekli midir?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & \text{eğer } x \neq -3 \text{ ise} \\ -5 & \text{eğer } x = -3 \text{ ise} \end{cases}$$

2.12. $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Fonk$(X, \mathbb{R})$ kümesi üzerine tanımlanmış olan

$$f \equiv g \Leftrightarrow f - g$$

sürekli ikili ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın.

2.13. Eğer p ve q birbirine asal iki tamsayıysa, $f(p/q) = |p|+|q|$ olsun. Bu kuralla tanımlanmış olan $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunun hiçbir noktada sürekli olmadığını kanıtlayın.

2.14. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ yukarıdaki gibi olsun. $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu, $g(x) = 1/f(x)$ kuralıyla tanımlansın. g fonksiyonun hiçbir noktada sürekli olmadığını kanıtlayın.

2.15. $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu yukarıdaki gibi olsun. $h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu şu kuralla tanımlansın:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

h'nin 0'da sürekli olduğunu kanıtlayın. Aynı şeyi $x = 0$ yerine bir başka $x = a$ sayısında yapsanız, h fonksiyonu a'da da sürekli olur mu?

İlgilenenlere Cebir Notu. $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. X'ten $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar kümesi Fonk$(X, \mathbb{R})$, bölümün girişinde tanımladığımız toplama ve çarpma altında "değişmeli bir halka"dır. Bu halkanın tersinir elemanları, hiçbir noktada 0 olmayan fonksiyonlardır.

Yukarıda kanıtladıklarımızdan, eğer $a \in X$ sabit bir sayıysa, a'da sürekli olan fonksiyonlar kümesinin, Fonk$(X, \mathbb{R})$ halkasının bir althalkası olduğu çıkıyor. Bu althalkayı $\mathcal{C}_a(X)$ olarak gösterelim. Teorem 2.11'e göre $\mathcal{C}_a(X)$ halkasının tersinir elemanları hiçbir noktada 0 olmayan ve a'da sürekli olan fonksiyonlardır.

Fonk$(X, \mathbb{R})$ aynı zamanda bir vektör uzayıdır da: Nitekim iki fonksiyonu toplayabiliriz ve bir fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin bir elemanıyla (bir sabitle) çarpabiliriz. $\mathcal{C}_a(X)$, ayrıca Fonk$(X, \mathbb{R})$ vektör uzayının bir altuzayıdır.

Demek ki Fonk$(X, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ cismi üzerine bir "cebir"dir. $\mathcal{C}_a(X)$ bu cebirin bir altcebiridir. Aynı şeyleri sürekli fonksiyonlar kümesi $\mathcal{C}(X)$ için de söyleyebiliriz.

2.8 Bileşke ve Süreklilik

Önceki altbölümlerde fonksiyonlarla yapılan toplama, çarpma, çıkarma ve bölme gibi işlemlerin sürekliliği etkilemediğini görmüştük. Fonksiyonlarla yapılan bir başka işlem daha vardır: Bileşke almak. Anımsatalım:

$f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyonsa, g ve f'nin ***bileşkesi*** olarak adlandırılan $g \circ f : X \longrightarrow Z$ fonksiyonu, her $x \in X$ için,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

olarak tanımlanmıştır. Örneğin, $X = Y = Z = \mathbb{R}$ ise ve f ve g fonksiyonları

$$f(x) = x + 1 \text{ ve } g(x) = x^2$$

olarak tanımlanmışsa,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

ve

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

olur.

Burada dikkat edilmesi gereken şey, f fonksiyonunun değer kümesinin g fonksiyonunun tanım kümesi olması gerekliliğidir, yoksa $g \circ f$ fonksiyonundan söz edilemez. Öte yandan, eğer

$$f : X \longrightarrow Y \text{ ve } g : Y_1 \longrightarrow Z$$

iki fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise, $g(f(x))$ değeri hesaplanabileceğinden, matematikçiler gene de

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

fonksiyonunu, her $x \in X$ için, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ olarak tanımlamakta bir sakınca görmezler.

Teorem 2.21. *$X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$, $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer f fonksiyonu a noktasında ve g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekliyse, o zaman $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon,$$

yani

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlansın. Bu da oldukça akla yakın, çünkü f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, x, a'ya yakınken $f(x)$, $f(a)$'ya yakındır ve g fonksiyonu $f(a)$'da sürekli olduğundan, $f(x)$, $f(a)$'ya yakın olduğunda, $g(f(x))$, $g(f(a))$'ya yakındır. Dolayısıyla x, a'ya yakınken $g(f(x))$, $g(f(a))$'ya yakın olur. Bu fikri uygulayalım.

g, $f(a)$'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer $y \in Y$ sayısı $|y - f(a)| < \delta_1$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|g(y) - g(f(a))| < \epsilon$$

olur. Bu bir.

İkincisi: f, a'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1$$

olur. (Sürekliliğin tanımında ϵ yerine δ_1 alın.)

Şimdi bu ikisini birleştirelim. $x \in X$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlasın, o zaman,

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1$$

olur ve bu sayede,

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$$

olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Sonuç 2.22. *Sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir.* □

Sonuç 2.8'i yukarıdaki teoremden çıkarabiliriz:

Sonuç 2.23. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, a noktasında sürekli olan bir fonksiyon olsun. $p(T) \in \mathbb{R}[T]$ olsun. O zaman*

$$x \mapsto p(f(x))$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon da a noktasında süreklidir.

Kanıt: Sonuç 2.7'ye göre polinomiyal fonksiyonlar süreklidir. Şimdi Teorem 2.21'i uygulayalım. □

Alıştırmalar

2.16. $a \in \mathbb{R}$, $p(T) \in \mathbb{R}[T]$ ve $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $p(a)$ noktasında sürekli olsun. O zaman $x \mapsto f(p(x))$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon da a noktasında süreklidir.

2.17. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekliyse ve $f(x) = f(-x)$ ise f'nin $-a$'da da sürekli olduğunu kanıtlayın.

2.18. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekliyse ve $f(-x) = -f(x)$ ise f'nin $-a$'da da sürekli olduğunu kanıtlayın.

2.19. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekliyse ve $g(x) = f(-x)$ olarak tanmımlanmışsa, g'nin $-a$'da sürekli olduğunu kanıtlayın.

2.20. $f(x) = x \exp(x^3 + x + 1)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

2.9 Tuhaf Bir Fonksiyonun Süreksizliği*

Bu altbölümde, $\mathbb{Q}$'den $\mathbb{Q}$'ye giden, hiçbir noktada sürekli olmayan ama herhangi bir noktada aldığı değeri 0'a değiştirirsek o noktada sürekli olan bir f fonksiyonunu ele alacağız. Altbölümün sonunda bu tür fonksiyonlar inşa etmenin çok kolay bir yolunu göreceğiz. Amacımız sürekliliğin daha iyi anlaşılması; yeni kavramlar belirmeyecek.

Fonksiyonun tanımı şöyle: $a \in \mathbb{Q}$ olsun. O zaman,

$$a = \frac{p}{q}$$

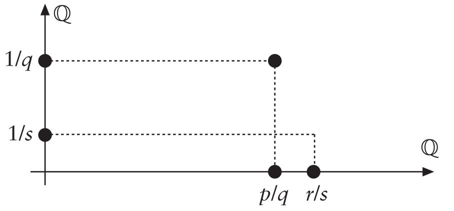
eşitliğini sağlayan birbirine asal bir p tamsayısı ve pozitif bir q doğal sayısı vardır. Bu p ve q sayıları biriciktir elbet, yani aynı a sayısı için bu koşulları sağlayan iki değişik p ve q çifti yoktur. Dolayısıyla $f(a)$'yı,

$$f(a) = \frac{1}{q}$$

olarak tanımlayabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned}
&f(0) = f(0/1) = 1/1 = 1,\\
&f(1) = f(2) = f(5) = 1,\\
&f(-5) = f(-5/1) = 1/1 = 1,\\
&f(3/7) = f(2/7) = 1/7,\\
&f(-9/8) = 1/8.
\end{aligned}$$

İşte bu fonksiyonun sürekliliğini tartışacağız. Soracağımız soru şu: Bu fonksiyon hangi kesirli sayılarda süreklidir?



Tartışacağımız fonksiyon matematiğin klasik fonksiyonlarından olmadığı için, amacımız sadece ve sadece süreklilik kavramıyla daha içli dışlı olmamızı sağlamak.

Soruya üç farklı yöntemle yaklaşacağız. Birinci yöntemimiz oldukça ilkel olacak, herkesin aklına ilk gelen düşüncenin peşine düşeceğiz, doğrudan sürekliliğin tanımını uygulayacağız. İkinci yöntemimiz ise (çok değil) birazcık daha kavramsal olacak ve bu yaklaşım sayesinde sorunun yanıtını ve yanıtın kanıtını çok daha çabuk bulacağız. Birinci yöntem doğrudan elemanlara odaklaşacak, ikinci yöntem ise altkümelere. Elemanlara odaklanarak sonucu tahmin etmek bile zor olacak. Oysa altkümelere odaklanınca sonucu tahmin etmek ve tahmini kanıtlamak işten bile olmayacak. Böylece okurun ikinci yöntemin değerini göreceğini umuyoruz.

Sorunun yanıtını iki değişik yöntemle bulduktan sonra, bölümün en sonunda o ana kadar yaptığımız her şeyi çok çok basitleştiren bir olgu ortaya koyacağız. Böylece soyut matematiğin değerinin ortaya çıkacağını umuyoruz.

Birinci Yaklaşım. $a \in \mathbb{Q}$ olsun. f'nin a'da sürekli olup olmadığını anlamaya çalışıyoruz.

$$f(x) = f(-x)$$

olduğundan, a yerine gerekirse $-a$'yı alarak a'nın negatif olmadığını varsayabiliriz (Alıştırma 2.17).

Bundan böyle, elli defa aynı şeyi tekrarlamamak için, r/s gibi bir ifade yazdığımızda, otomatik olarak r ve s'nin birbirine asal birer doğal sayı olduklarını varsayacağız; bu yazılımda s elbette 0 olamaz.

a'yı p/q biçiminde yazalım. Demek ki

$$f(a) = \frac{1}{q}.$$

f fonksiyonunun a'da sürekli olması için, her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalı ki,

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| < \delta \tag{1}$$

olduğunda, yani

$$\frac{p}{q} - \delta < \frac{r}{s} < \frac{p}{q} + \delta$$

olduğunda,

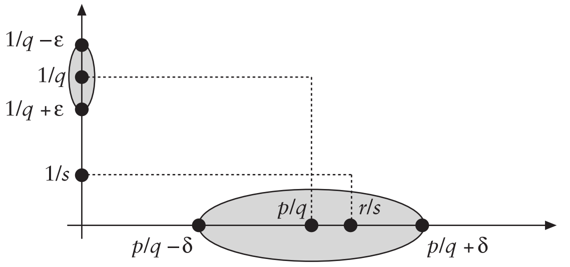
$$\left|\frac{1}{q} - \frac{1}{s}\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f\left(\frac{r}{s}\right)\right| < \epsilon \tag{2}$$

olsun. Bu mümkün müdür? Her $\epsilon > 0$ sayısı için böyle bir $\delta > 0$ sayısı bulabilir miyiz?

Pek kolay bir soru değil... Düşünelim...

Soru özetle şu: r/s sayısı $a = p/q$ sayısına yakın olduğunda, $1/s$ sayısı $1/q$ sayısına yakın olmak zorunda mıdır?

Eğer (1)'i sağlayan r/s kesirli sayısının s'sini istediğimiz kadar büyük alabilirsek (bu durumda, (1)'in sağlanması için r'nin de büyük ama s'ye asal alınması gerekir), o zaman $1/s$ çok küçük olur, 0'a çok yakın olur ve pozitif bir sabit sayı olan $1/q$ sayısından uzaklaşır ve (2) sağlanmaz. (Aşağıdaki şekle bakınız.)



Verilmiş bir p/q ve $\delta > 0$ için, $(p/q - \delta, p/q + \delta)$ aralığındaki r/s sayılarının (r ve s birbirine asal) paydalarının (s'lerin) üstsınırı var mıdır? Böyle bir üstsınır yoksa, s'yi çok büyük seçerek $1/s$'yi çok küçültebiliriz ve böylece $1/s$, $1/q$'dan uzaklaşır; yani f sürekli olmaz.

Galiba f sürekli değil, en azından sürekli olmama olasılığı yüksek gibi bir his belirmiş olmalı içimizde.

Paydası belli bir n doğal sayısını geçmeyen kesirli sayılar kümesine bakalım. Bu kümeye A_n diyelim. A_n'nin elemanlarının paydalarında

$$1, 2, \ldots, n$$

sayılarından biri olabilir; ama paydada hangisi olursa olsun, payı ve paydayı gerekli sayıyla çarparak paydayı her zaman $n!$ sayısına eşitleyebiliriz. Yani

$$A_n \subseteq \frac{1}{n!}\mathbb{Z}$$

olur. Dolayısıyla eğer bir kesirli sayıyı,

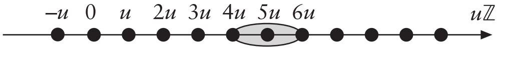
$$\frac{1}{n!}\mathbb{Z}$$

kümesinin dışında seçecek olursak, o zaman o sayı A_n'de olamaz, sayının paydası n'yi, hatta $n!$'i aşar ve f'nin o sayıdaki değeri $1/n$'den küçük olur. f'nin süreksizliğinin kanıtının anafikrini bulduk.

$u > 0$ için $u\mathbb{Z}$ biçiminde yazılan bir kümenin iki farklı elemanı arasındaki mesafe u'dan küçük olamaz elbet. Dolayısıyla eğer $a \in u\mathbb{Z}$ ise,

$$(a - u, a + u) \cap u\mathbb{Z} = \{a\}$$

olmalı. Şekil aşağıda.



$a \in u\mathbb{Z}$ ise $(a - u, a + u)$ aralığında $u\mathbb{Z}$ kümesinden yegâne sayı a'dır.

Yukarıdaki paragrafta yazılanların özel bir durumunu irdeleyelim. $a = p/q$ eşitliğini anımsayalım. $n = 2q$ ve $u = 1/n!$ olsun. O zaman,

$$a = \frac{p}{q} \in A_q \subseteq A_n \subseteq u\mathbb{Z}$$

olduğundan,

$$(a-u, a+u) \cap u\mathbb{Z} = \{a\}$$

olur. Eğer $0 < v \leq u$ ise de

$$(a-v, a+v) \cap u\mathbb{Z} = \{a\}$$

olur. Bunu aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.

Şimdi f'nin $a = p/q$ noktasında sürekli olmadığını kanıtlayabiliriz.

$$\epsilon = \frac{1}{2q}$$

olsun. $\delta > 0$ herhangi bir sayı olsun.

$$v = \min\{u, \delta\} > 0$$

olsun. Herhangi bir

$$x \in (a-v, a+v) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{a\})$$

seçelim. $\mathbb{Q}$, yoğun bir sıralama olduğundan böyle bir x vardır. Elbette

$$|a - x| < v \leq \delta$$

olur. Öte yandan, yukarıda bulduklarımızdan dolayı, $x \neq a$ sayısı $u\mathbb{Z}$ kümesinde olamaz, dolayısıyla $u\mathbb{Z}$'nin bir altkümesi olan A_n'de de olamaz. Sonuç: x'in paydası $n = 2q$'den büyük olmalı, yani

$$f(x) < \frac{1}{2q} = \frac{f(a)}{2} < f(a)$$

ve dolayısıyla

$$|f(a) - f(x)| = f(a) - f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} = \frac{1}{2q} = \epsilon$$

olur. Demek ki f, a noktasında sürekli değilmiş.

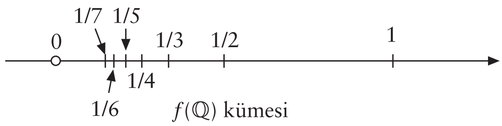
Hatta bu yapılanlardan, sanki f'nin a'da sürekli olması için $f(a)$'nın 0'a eşit olması gerekirmiş gibi güçlü bir his belirmiş olmalı.

İkinci Yaklaşım. Yukarıdaki yaklaşımda elemanlarla biraz fazla haşır neşir olduk. Bu sefer elemanlar yerine kümeleri ön plana çıkaracağız.

f'nin görüntülerinin kümesine bakalım:

$$f(\mathbb{Q}) = \left\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

$f(\mathbb{Q})$ kümesinin şekli hemen aşağıda.



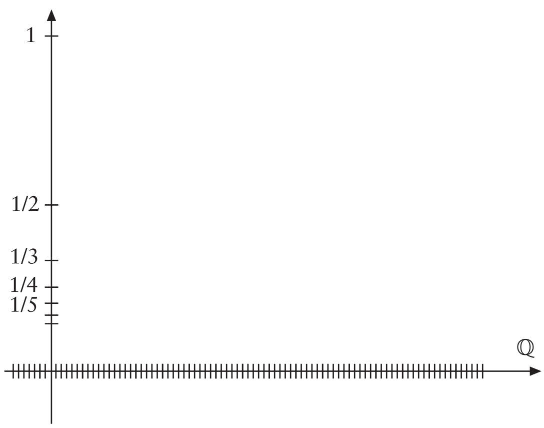
Bu küme ayrık bir kümedir, yani her $a \in f(\mathbb{Q})$ için,

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap f(\mathbb{Q}) = \{a\}$$

eşitliğini sağlayan yeterince küçük (ama pozitif) bir ϵ vardır. (ϵ, a'ya göre değişir.) Örneğin $1/3$ ile $1/4$ arasında kümenin bir başka elemanı yoktur. Genel olarak, $\frac{1}{n}$ ile $\frac{1}{n+1}$ sayıları arasında kümeden bir başka eleman yoktur.

Oysa tanım kümesi olan $\mathbb{Q}$, ayrık olmaktan oldukça uzak, tam tersine yoğun sıralamalı bir kümedir. Bunun bazı sonuçlarının olması gerekir.

Aşağıdaki şekil, f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini temsil ediyor. Tanım kümesi sık dokunmuş, değer kümesi ise ayrık bir küme.



Şimdi herhangi bir $a \in \mathbb{Q}$ alalım. $f(a)$ sayısı, ayrık bir küme olan $f(\mathbb{Q})$'nün bir elemanı. Demek ki

$$(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \cap f(\mathbb{Q}) = f(a)$$

eşitliğini sağlayan bir $\epsilon > 0$ sayısı var. Eğer f sürekli olsaydı,

$$f(a-\delta, a+\delta) \subseteq (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

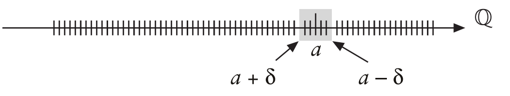
içindeliği sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı olurdu. Yani,

$$f(a-\delta, a+\delta) = \{f(a)\}$$

olurdu, yani f fonksiyonu, a merkezli bir açık aralıkta hep aynı değeri, $f(a)$ değerini alırdı ve bir sabit olurdu, yani bu aralıktaki kesirli sayıların paydaları hep aynı olurdu! Böyle bir şeyin imkânsız olduğu belli: Paydası n olan kesirli sayılar kümesi

$$\frac{1}{n}*, \mathbb{Z}$$

kümesinin bir altkümesidir ve bu son küme ayrık olduğundan (noktaları arasındaki mesafe $1/n$'den küçük olamaz), paydası n olan kesirli sayılar kümesi de ayrık bir kümedir ve boşküme dışında açık bir aralık içeremez.



Eğer *f* fonksiyonu *a* noktasında sürekli olsaydı, bir δ > 0 için, (*a* + δ, *a* − δ) aralığındaki kesirli sayıların paydaları hep aynı olurdu...

Demek ki f fonksiyonu a'da sürekli olamaz.

Yaklaşımların Karşılaştırılması. Aslında aralarında pek bir fark yok. Her iki yaklaşım da sürekliliğin tanımından yola çıkıyor. Ancak ikinci yaklaşımda elemanlardan çok altkümelere yoğunlaşıyoruz ve neredeyse sihirli bir biçimde kanıt çok daha kolay oluyor.

İkinci yaklaşımın anafikri şu basit teoremde gizli:

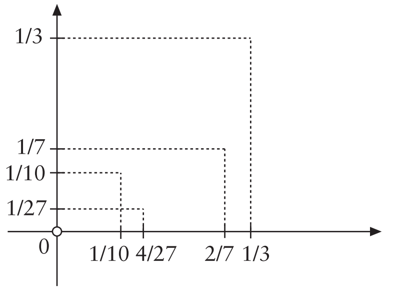
Teorem 2.24. *Eğer bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında sürekliyse, o zaman $f(a)$ noktasını içeren her açık aralığın önimgesi a'yı içeren açık bir aralık içerir.*

Bundan daha genel bir teorem doğrudur:

Teorem 2.25. *Eğer bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in X$ noktasında sürekliyse, o zaman $f(a)$ noktasını içeren her açık aralığın önimgesi a'yı içeren açık bir aralığın X'le kesişimini içerir.*

Bu teoremin kolay kanıtını şimdilik okura bırakıyoruz. Dördüncü ciltte [N5] topoloji konusunu işlediğimizde bu ve benzer teoremleri dikkatlice kanıtlayacağız.

Yapay Bir Süreksizlik. Ele aldığımız fonksiyon, değerlerini hep $(0, 1]$ aralığında alıyor ama ne sürekli artıyor ne de sürekli azalıyor. Fonksiyon oldukça kaotik bir yapıda gibi görünüyor. Ama verilmiş herhangi bir $\epsilon > 0$ için, fonksiyonun ϵ'dan büyük değer aldığı elemanlar oldukça ender, fonksiyonumuz genellikle çok küçük değerler alıyor.



f fonksiyonunun değer kümesine bir defa daha göz atalım:

$$f(\mathbb{Q}) = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\}.$$

Her $n > 0$ doğal sayısı için, f'nin $1/n$'den büyükeşit değerler aldığı $x \in \mathbb{Q}$ sayılarının kümesine bakalım. Bu x sayıları, $0 < s \leq n$ ve $r \in \mathbb{Z}$ için, r/s biçiminde yazılırlar, bunlar da daha önce gördüğümüz gibi

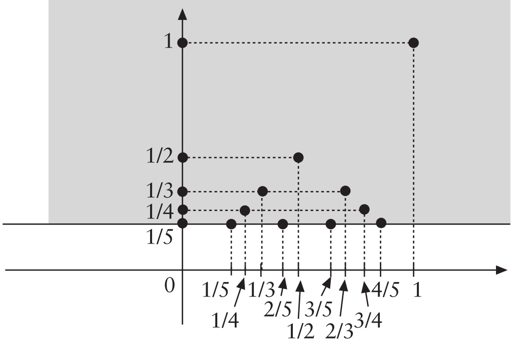
$$\frac{1}{n!}\mathbb{Z}$$

kümesinin elemanlarıdır, yani

$$\left\{ x \in \mathbb{Q} : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \subseteq \frac{1}{n!}\mathbb{Z}$$

olur. Örneğin, $n = 5$ ise, $f(x) \geq 1/5$ eşitsizliğini sağlayan $[0,\ 1)$ aralığındaki sayılar,

$$0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$



sayılarıdır. $f(x) \geq 1/5$ eşitsizliğini sağlayan tüm sayılar ise bu sayılara bir tamsayı eklenerek elde edilir. Ama bizim asıl dikkat çekmek istediğimiz nokta, tüm bu sayıların,

$$\frac{1}{5!}\mathbb{Z}$$

kümesinde oldukları ve bu son kümenin elemanları arasında en az $1/5!$ kadar, oldukça küçük belki ama gene de sabit bir sayıdan büyük bir mesafenin olduğudur.

Genel olarak, $\epsilon > 0$ ne olursa olsun,

$$\{x \in \mathbb{Q} : f(x) \geq \epsilon\}$$

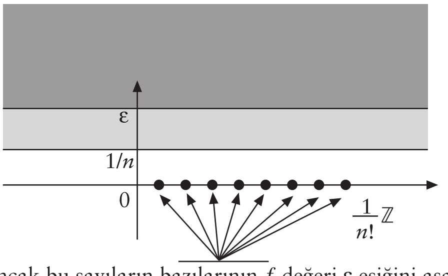
kümesinin farklı elemanları arasındaki mesafe belli bir $\delta > 0$ sayısının altına düşmüyor. Bunun doğru olduğunu görmek için n'yi

$$\frac{1}{n} \leq \epsilon$$

eşitsizliği sağlanacak kadar büyük ve δ'yı pozitif ama

$$\delta < \frac{1}{n!}$$

eşitsizliğini sağlayacak kadar küçük seçmek yeterli.



Ancak bu sayıların bazılarının f değeri ε eşiğini aşabilir. Diğerlerinin f değeri ε'dan küçük olmak zorunda.

Demek ki fonksiyonun değerlerinin "bayağı bir çoğunluğu" çok küçük sayılar. Her $a \in \mathbb{Q}$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki, her $x \in \mathbb{Q}$ için

$$0 < |x - a| < \delta$$

olduğunda,

$$|f(x) - 0| = f(x) < \epsilon$$

olur. Nitekim, eğer $\epsilon > 0$ verilmişse ve $a = p/q$ ise, δ'yı a sayısının

$$\frac{1}{q!}\,\mathbb{Z} \setminus \{a\}$$

kümesine uzaklığından, yani

$$\inf\left(\left\{\left|a - \frac{n}{q!}\right| : n \in \mathbb{Z}\right\} \setminus \{0\}\right)$$

sayısından daha küçük seçmek yeterli. Bu da bize tam şunu söylüyor: Eğer f'nin a'daki değeri 0 olsaydı, o zaman f fonksiyonu a noktasında sürekli olurdu. Bir başka deyişle, f ile sadece a noktasında ayrışan

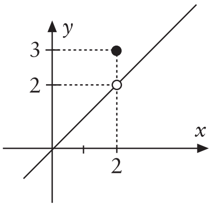
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } x \neq a \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = a \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan g fonksiyonu a'da süreklidir. Yani f fonksiyonunun a noktasındaki süreksizliği "tamir edilebilir" bir süreksizliktir. Bu noktada fonksiyonu 0 olarak tanımlamak yeterli.

Bu şuna benziyor:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } x \neq 2 \text{ ise} \\ 3 & \text{eğer } x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. h'nin grafiği şöyle:



Fonksiyon 2'de süreksiz, ama bu süreksizlik sadece bir şanssızlık gibi duruyor; h'nin 2'deki değerini 3'ten 2'ye değiştirirsek, fonksiyon her yerde sürekli olur.

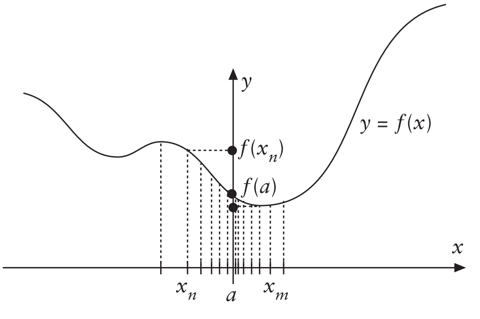
Yukarıdaki f ile bu h arasındaki fark, h'nin sadece tek bir noktada süreksiz olması; oysa f her yerde süreksiz!

Alıştırma 2.21. $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{Q}$ üzerinde f'ye eşit olsun, diğer noktalarda 0 olsun. k hangi noktalarda süreklidir?

3. Sürekliliğin Derinlikleri

3.1 Diziler ve Süreklilik

Bir a noktasında sürekli olan bir f fonksiyonu ele alalım. Eğer x noktası a'ya çok yakınsa, $f(x)$ noktası da $f(a)$'ya çok yakındır. Dolayısıyla eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa,



$(f(x_n))_n$ dizisinin de $f(a)$'ya yakınsamasını beklemeye hakkımız var. Nitekim öyle de olur. Hatta bunun tersi de doğrudur: Bu özelliği olan her fonksiyon a noktasında süreklidir. Yani aşağıdaki teorem sürekliliğin bir başka tanımı olarak da algılanabilir.

Teorem 3.1. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki iki koşul eşdeğerdir:*
a. *f fonksiyonu a'da süreklidir.*
b. *X'in a'ya yakınsayan her $(x_n)_n$ dizisi için, $(f(x_n))_n$ dizisi $f(a)$'ya yakınsar.*

Kanıt: (a $\Rightarrow$ b). Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olmak üzere, a'ya yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ve herhangi bir $\epsilon > 0$ alalım. Pozitif δ sayısını, her $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X$ için,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak biçimde seçelim; f sürekli olduğundan böyle bir δ vardır. Ayrıca N sayısını, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \delta$$

olacak biçimde seçelim; $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından böyle bir N vardır. O zaman, her $n > N$ için, önce

$$|x_n - a| < \delta,$$

sonra da

$$|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$$

olur. Demek ki $(f(x_n))_n$ dizisi $f(a)$'ya yakınsar.

(b $\Rightarrow$ a). f'nin a'da sürekli olmadığını varsayalım. O zaman öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki, $\delta > 0$ ne olursa olsun, X'te,

$$|x - a| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan ama

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlamayan, yani

$$|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir x vardır. Demek ki her $n > 0$ doğal sayısı için, X'te,

$$|x_n - a| < 1/n \text{ ve } |f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan bir x_n vardır (bir önceki cümlede $\delta = 1/n$ alın). Buradan, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsadığı ama $(f(x_n))_n$ dizisinin $f(a)$'ya yakınsamadığı anlaşılır. Bir çelişki. □

Sonuç 3.2. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için şu iki koşul eşdeğerdir:*
a. *f fonksiyonu süreklidir.*
b. *$x_n \in X$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$ ise $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ olur.* □

Yani "limit alma"yla "f-değerini alma" birbiriyle değişen işlemlerdir.

Öte yandan, eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse, f sürekli bile olsa, $(f(x_n))_n$ bir Cauchy dizisi olmayabilir. Örneğin $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman f fonksiyonu süreklidir (bkz. Örnek 1.9). Şimdi $x_n = (-1)^n/n$ olsun. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisidir çünkü $\mathbb{R}$'de ($\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kümesinde değil!) limiti vardır (ve bu limit 0'dır.) Ama $(f(x_n))_n$ dizisi

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

dizisidir ve elbette Cauchy dizisi değildir.

Örnekler

3.1. $\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = 1$.
Kanıt: $e^{1/n} = \exp(1/n)$ eşitliğini biliyoruz. Ve exp fonksiyonu her noktada olduğu gibi 0'da da sürekli. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \exp 0 = 1.$$

3.2. $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n+1}{n}} = e^2$.
Kanıt: Aynen yukarıdaki gibi. □

3.3. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının sürekli olduklarını Alıştırma 2.5'te gördük, ileride de göreceğiz (Sonuç 9.5). Aşağıdaki örneklerde sin ve cos fonksiyonlarının sürekliliğini kullanacağız.
$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$ olur çünkü $\sin 0 = 0$ ve $\cos 0 = 1$ olduğundan, istediğimiz eşitlik Örnek 3.1'deki gibi çıkar.
$\lim_{n\to\infty} \exp\sin\frac{1}{n} = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \exp\cos\frac{1}{n} = e$ olur. Nitekim teoremi $\exp\circ\sin$ ve $\exp\circ\cos$ sürekli fonksiyonlarına uygulayabileceğimiz gibi (Sonuç 2.22'ye göre sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir), önce sin ve cos sonra exp fonksiyonuna uygulayabiliriz. İkincisi için exp fonksiyonunun 1 noktasında sürekliliğini kullanmak gerekir.
$\lim_{n\to\infty} \exp\sin\frac{n\pi}{3n+2} = \sqrt{e}$ olur.
Burada örnek olarak verdiğimiz limitleri limitin tanımına başvurarak kanıtlamak deveye hendek atlatmak kadar zor olabilir; bu da Sonuç 3.2'nin ne kadar güçlü olduğunu gösterir.

3.4. *$A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow A$ artan bir fonksiyon ve $c \in A$ sayısı $f(x) = x$ denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a_0 \in A$ sayısı $a_0 \le c$ ve $a_0 \le f(a_0)$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman, terimleri her $n \ge 0$ için $a_{n+1} = f(a_n)$ formülüyle tanımlanmış dizi yakınsaktır. Ayrıca eğer f sürekliyse ve c, $f(x) = x$ denkleminin en küçük çözümüyse, dizinin limiti c'ye eşittir.*
Kanıt: $a_0 \le c$ olduğundan, her n için $a_n \le c$ eşitsizliği kolaylıkla elde edilir, nitekim tümevarımla $a_{n+1} = f(a_n) \le f(c) = c$ olur. Ayrıca varsayıma göre $a_0 \le a_1$ olduğundan, bu eşitsizliğe f fonksiyonunu n defa uygulayarak $a_n \le a_{n+1}$ elde ederiz; yani $(a_n)_n$ dizisi artandır. Artan ve c tarafından üstten sınırlı olduğundan, $(a_n)_n$ dizisi yakınsaktır [N4, Teorem 7.1]. Şimdi f'nin sürekli olduğunu varsayalım. Limite a dersek, $a_{n+1} = f(a_n)$ eşitliğinin her iki tarafının limitini alarak ve f'nin sürekliliğini kullanarak $a = f(a)$ elde ederiz. Ayrıca $a_n \le c$ olduğundan $a \le c$ olur. Bundan da son önerme çıkar. □

3.5. Yukarıdaki sonucu $f(x) = \frac{t+x^2}{2}$ fonksiyonuna uygulayalım. Buradaki t sayısı $(0, 1)$ aralığında alınmış herhangi bir sayı olabilir. f elbette artan bir fonksiyondur. $f(x) = x$ denkleminin iki çözümü vardır ve $c = 1-\sqrt{1-t}$ denklemin en küçük çözümüdür. $a_0 = 0$ olsun. O zaman $a_1 = f(a_0) = f(0) = t/2 > 0 = a_0$ olur. f sürekli ve artan olduğundan bir önceki teoremi bu duruma uygulayıp $1 - \sqrt{1-t}$ sayısına yakınsayan kesirli bir sayı dizisi buluruz. Tabii bu sayede 0 ile 1 arasındaki her sayıya yakınsayan kesirli bir sayı dizisi bulunur.

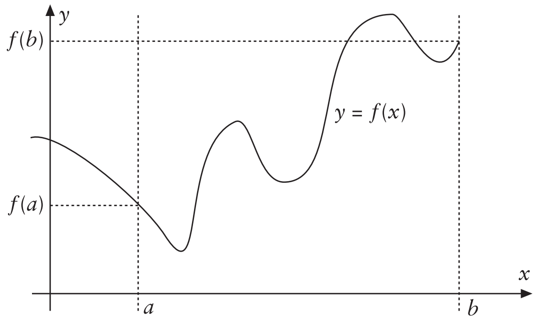
Alıştırmalar

3.6. ([Ba]'dan) g fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. $0 < r < 1$ sabit bir sayı olsun. Her $x \in [a, b]$ için, $|g(x)| \le r\,|g(t)|$ eşitsizliğini sağlayan bir $t \in [a, b]$ olduğunu varsayalım. g'nin sabit 0 fonksiyonu olduğunu kanıtlayın.

3.7. $a < b$ ve $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Her $x \in [a, b]$ için $|f(y)| \le \frac{1}{2}\,|f(x)|$ eşitliğini sağlayan bir $y \in [a, b]$ olduğunu varsayalım. Bir $c \in [a, b]$ için $f(c) = 0$ olduğunu gösterin.

3.2 Aradeğer Teoremi

Sürekli bir f fonksiyonu düşünelim. Tanım kümesinde bulunan iki a ve b sayısı için $a < b$ ve $f(a) < f(b)$ olsun. Bu fonksiyonun temsilî grafiğini çizelim:



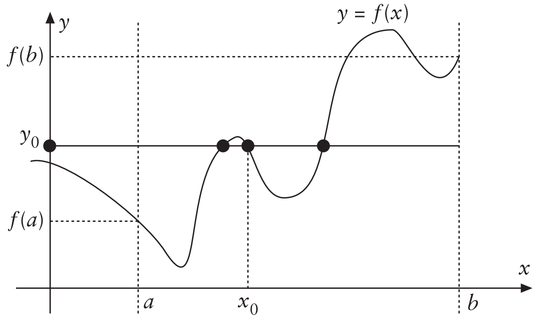
Fonksiyonun grafiğinin düzlemde nasıl bir eğri çizdiğini tam olarak bilemeyiz elbet ama bu eğrinin, düzlemin $(a, f(a))$ noktasından $(b, f(b))$ noktasına kadar **kesintisiz** olarak gittiğini biliyoruz. Dolayısıyla fonksiyonun grafiği, $y = f(a)$ ile $y = f(b)$ yatay doğruları arasında kalan her yatay doğruyu kesmeli. Demek ki hangi

$$y_0 \in (f(a), f(b))$$

elemanını seçersek seçelim,

$$f(x_0) = y_0$$

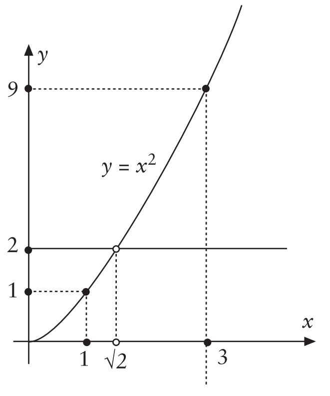
eşitliğini sağlayan en az bir $x_0 \in (a, b)$ noktası olmalı. Aşağıda temsilî bir resim çizdik.



Doğruluğunu yukarıda, matematiksel olarak olmasa da sezgisel olarak açıkladığımız bu olguya ***aradeğer teoremi*** adı verilir. Teoremi kanıtlamadan önce teoreme karşıörnekler verelim!

Örnekler

3.8. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ kuralı tarafından tanımlanmış olsun. Polinomiyal olduğundan, f'nin sürekli olduğunu biliyoruz (Sonuç 2.7). Temsilî grafiği aşağıda.



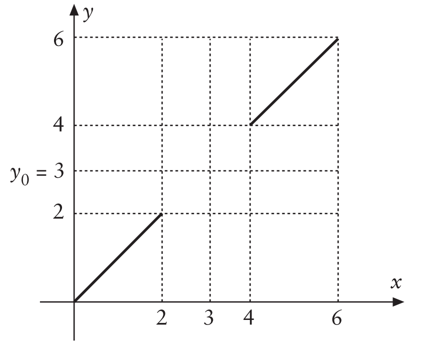
Şimdi $a = 1$, $b = 3$ olsun. O zaman $f(a) = 1 < 9 = f(b)$ olur. Şimdi bu iki değer arasında olan $y_0 = 2$ sayısını ele alalım. Yukarıda söylenenlere inanacak olursak, $a = 1$ ile $b = 3$ arasında

$$x_0^2 = f(x_0) = 2$$

eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in \mathbb{Q}$ olmalı. Ama bunun doğru olmadığını biliyoruz, çünkü $\sqrt{2}$, kesirli bir sayı değildir! Demek ki Aradeğer Teoremi $\mathbb{Q}$ için yanlış.

Bir başka karşıörnek daha:

3.9. f, $(0, 2) \cup (4, 6)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. f'nin grafiği aşağıda.



f süreklidir (Örnek 1.23 ya da Teorem 1.6). $a = 1$ ve $b = 5$ olsun. O zaman

$$f(1) = 1 < 5 = f(5)$$

olur. Şimdi bu iki değer arasında olan $y_0 = 3$ sayısını ele alalım. Gene $f(x) = 3$ eşitliğini sağlayan bir x noktası yoktur (çünkü $x = 3$ tanım kümesinde değildir.)

Buradaki sorun da fonksiyonun $[1,\ 5]$ aralığında değil de $(0,\ 2) \cup (4,\ 6)$ kümesinde tanımlanmış olması.

Her iki örnekte de sorun, fonksiyonun tanım kümesinde "delik"lerin olması. Birincisinde $\sqrt{2}$ tanım kümesinde değil, ikincisinde ise $[2, 4]$ aralığı tanım kümesinde değil. Sürekli fonksiyonlar sürekli olduklarından, iki değer aldıklarında bu iki değerin arasındaki tüm değerleri alırlar, yeter ki tanım kümesinde delikler bulunmasın!

Aradeğer Teoremi'nin sınırlarını çizdik. Şimdi teoremi yazıp kanıtlayalım.

Teorem 3.3 (Aradeğer Teoremi)**.** *$a \le b$ olmak üzere $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki tüm değerleri alır.*

Kanıt: Gerekirse f yerine gene sürekli olan $-f$ fonksiyonunu alarak,

$$f(a) \le f(b)$$

eşitsizliğini varsayabiliriz. (Teoremi $-f$ için kanıtlarsak, teoremin f için de kanıtlanacağına kendinizi ikna edin.)

$$f(a) \le y_0 \le f(b)$$

eşitsizliğini sağlayan bir y_0 alalım. Eğer $y_0 = f(a)$ ya da $y_0 = f(b)$ ise bu durumda önerme doğrudur. Bundan böyle

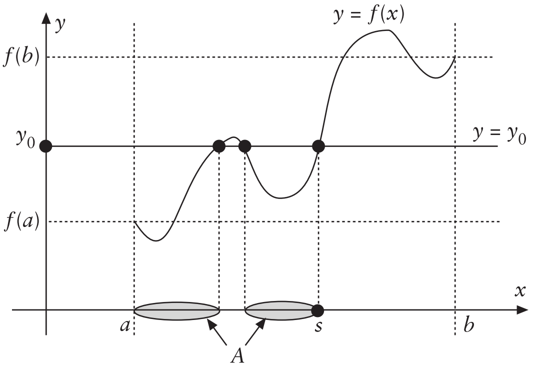
$$f(a) < y_0 < f(b)$$

eşitsizliklerini varsayalım.

A kümesi şöyle tanımlansın:

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) \le y_0\}.$$

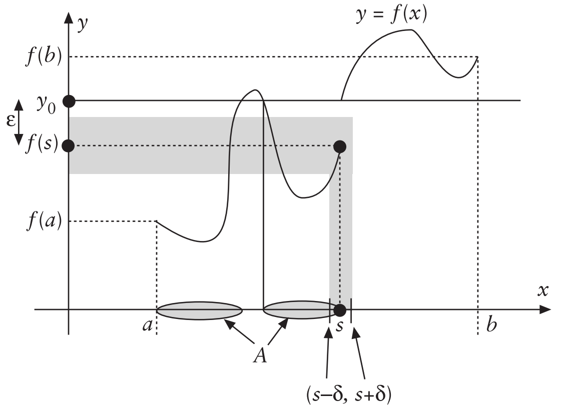
A boşküme değildir çünkü a, A'nın bir elemanıdır. Ayrıca A kümesi b tarafından üstten sınırlıdır. Demek ki A'nın bir en küçük üstsınırı vardır.



Bu üstsınıra s diyelim: $s = \sup A$. (Karşıörnek 3.8'de de görüldüğü üzere $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{Q}$'de çalışsaydık, böyle bir s olmayabilirdi, demek ki gerçel sayılarda çalışıyor olmamız önemli.)

$f(s) = y_0$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için önce $f(s) \ge y_0$, sonra $f(s) \le y_0$ eşitsizliğini kanıtlayacağız.

Sav 1. $f(s) \ge y_0$.
Sav 1'in Kanıtı: Diyelim $f(s) < y_0$. Bu varsayımdan bir çelişki elde edeceğiz. Çelişkinin nereden kaynaklanacağını aşağıdaki şekilde göstermeye çalıştık. Kanıt okunurken bir yandan da göz ucuyla aşağıdaki şekle bakılmalıdır.



$s = b$ olsa, o zaman $y_0 < f(b) = f(s) < y_0$ gibi bir saçmalık elde ederiz. Demek ki $s < b$ olmalı.

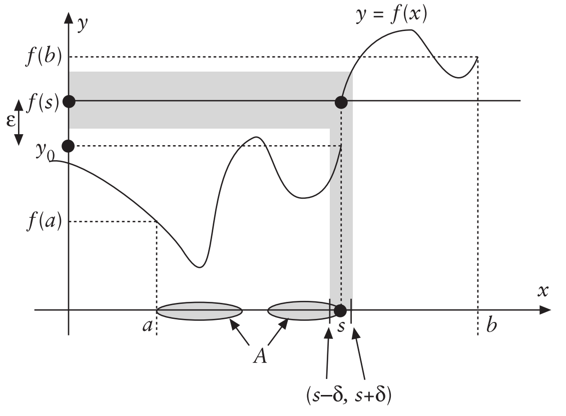
Sav'ın kanıtının anahtarı Sonuç 2.17'de. Bu sonuçta X yerine $[a, b]$ aralığını, a yerine s elemanını ve c yerine y_0 elemanını alalım: $f(s) < y_0$ eşitsizliğini ve f sürekli olduğundan, her $x \in (s - \delta, s + \delta) \cap [a, b]$ elemanı için,

(1) $$f(x) < y_0$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ sayısı olduğunu buluruz. Ama $b > s$ olduğundan, $(s, s+\delta) \cap [a, b] \neq \emptyset$ olur. Bu kesişimden bir x elemanı alırsak, (1)'den dolayı, $f(x) < y_0$ olur. Öte yandan $x > s = \sup A$ olduğundan, $x \notin A$ olur ve dolayısıyla $f(x) > y_0$ eşitsizliği sağlanır. Çelişki.

Teoremin yarısı kanıtlandı, diğer yarısını kanıtlayalım.

Sav 2. $f(s) \leq y_0$.
Sav 2'nin Kanıtı: Gene bir çelişki elde etmek amacıyla $f(s) > y_0$ eşitsizliğini varsayalım. Çelişkinin nereden kaynaklanacağını bir sonraki şekilde göstermeye çalıştık.



$s = a$ olsa, o zaman $y_0 > f(a) = f(s) > y_0$ gibi bir saçmalık elde ederiz. Demek ki $a < s$ olmalı.

Sav'ın kanıtının matematiksel özü Sonuç 2.18'de. Bu sonuçta, X yerine $[a, b]$, a yerine s ve c yerine y_0 alalım: $f(s) > y_0$ ve f sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, her $x \in (s-\delta, s+\delta) \cap [a, b]$ için,

$$f(x) > y_0$$

olur. $s > a$ ve $s = \sup A$ olduğundan, $(s-\delta, s) \cap A \neq \emptyset$ olur. Bu kesişimden bir x seçelim. O zaman hem $f(x) > y_0$ hem de ($x \in A$ olduğundan), $f(x) \leq y_0$ olur. Gene çelişki. Kanıtımız tamamlanmıştır. $\square$

Aradeğer Teoremi analizin en önemli teoremlerinden biridir. Birkaç sonucunu irdeleyelim.

Sonuç 3.4. *$a \leq b$ olmak üzere, $[a, b] \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer y_0 sayısı $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaysa, $f(c) = y_0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in [a, b]$ vardır.*

Kanıt: Teoremi f'nin $[a, b]$ aralığına kısıtlanmışına uygulamak yeterli. (Teorem 1.6'ya göre f'nin kısıtlanışı da süreklidir.) $\square$

Sonuç 3.5 (Bolzano Teoremi)**.** *Eğer sürekli bir fonksiyon bir aralıkta hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa 0 değerini de alır.*

Kanıt: $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ ise, Sonuç 3.4'e göre a ile b arasında $f(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir c vardır. $\square$

Bölümün en başında verdiğimiz ikinci örnek, "aralık" sözcüğünü attığımızda Sonuç 3.5'in doğru olmadığını gösteriyor.

Her ne kadar Bolzano teoremi (Sonuç 3.5), aradeğer teoreminin özel bir hali gibi duruyorsa da, Bolzano teoreminden hareketle aradeğer teoremini kanıtlamak mümkündür. Bu kanıtı verelim:

(Bolzano Teoremi ⇒ Aradeğer Teoremi): $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ olsun. Sürekli olduğunu bildiğimiz

$$g(x) = f(x) - y_0$$

fonksiyonunu ele alalım. O zaman $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ olur. Bolzano Teoremi'ne göre a ile b arasında $g(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir c vardır. g'nin tanımına geri dönersek, $f(c) = y_0$ bulunur. $\square$

Teoremin sonuçlarını irdelemeye devam edelim. Önce polinomlarla ilgili birkaç önemli sonuç verelim.

Sonuç 3.6. *Derecesi tek olan gerçel katsayılı bir polinomun gerçel sayılarda bir kökü vardır.*

Kanıt: p, tek dereceli bir polinom olsun. p'yi başkatsayısına bölerek, p'nin başkatsayısının 1 olduğunu varsayabiliriz. O zaman $\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$ olur [N4, Sonuç 12.12]. Demek ki, yeterince büyük bir $b \in \mathbb{R}$ için $p(b) > 0$ olur. p'nin derecesi tek olduğundan $\lim_{n\to\infty} p(-n) = -\infty$ eşitliğini de kanıtlamak zor değil. Demek ki bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $p(a) < 0$ olur. Sonuç 3.5'e göre p'nin (a ile b arasında) bir kökü vardır. □

Örnekler

3.10. $x^5 - \pi x^4 + \sqrt{2}x^3 - 100x + e = 0$ eşitliğini sağlayan bir gerçel sayı vardır.

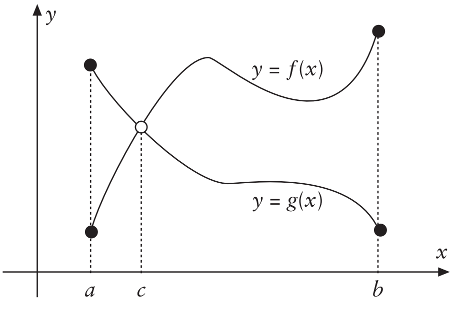
3.11. İleride Aradeğer Teoremi'ni kullanarak sin ve cos fonksiyonlarının değer kümesinin $[-1, 1]$ kapalı aralığı olduğunu kanıtlayacağız (Sonuç 9.13).

Sonuç 3.7. *$\mathbb{R}[X]$'in indirgenemez bir polinomunun derecesi ya 1 ya da çift olmak zorundadır*[1]*.*

Kanıt: Eğer $f \in \mathbb{R}[X]$, derecesi tek olan bir polinomsa, Sonuç 3.6'ya göre f'nin bir kökü vardır. Bu köke a diyelim. O zaman $X - a$ polinomu f'yi böler (en temel cebir bilgisi gerekiyor burada). f indirgenemez olduğundan, bundan, bir $b \in \mathbb{R}$ için $f(X) = b(x - a)$ çıkar. Yani f'nin derecesi 1'dir. □

Bir sonraki teorem, kesişmeleri gereken fonksiyon grafiklerinin gerçekten kesiştiklerini söyleyecek:

Sonuç 3.8. *f ve $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer $f(a) \leq g(a)$ ve $f(b) \geq g(b)$ eşitsizliklerini sağlayan a ve b gerçel sayıları varsa $f(c) = g(c)$ eşitliğini sağlayan bir c gerçel sayısı vardır.*

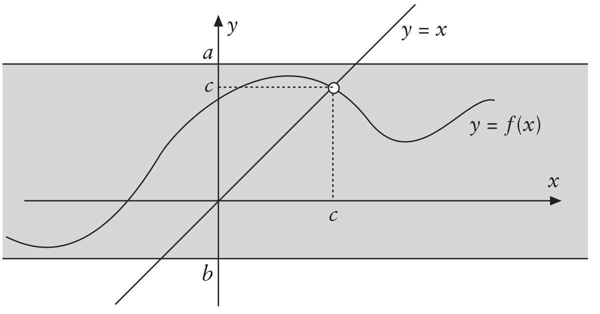


Kanıt: Sonuç 3.5'i sürekli olduğunu bildiğimiz $h = f - g$ fonksiyonuna ve a ve b noktalarına uygulamak yeterli. □

Şimdi sınırlı ve sürekli $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sabit noktaları olduğunu kanıtlayalım.

[1]Aslında Cebirin Temel Teoremi'ne göre, $\mathbb{R}[X]$ halkasının indirgenemez (ya da asal) polinomlarının derecesi 1 ya da 2 olmak zorundadır. Derecesi 2 olan indirgenemez polinomlar da elbette diskriminantı 0'dan küçük olanlardır.

Sonuç 3.9. *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, üstten ve alttan sınırlı sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman bir c sayısı için $f(c) = c$ olur.*



Kanıt: $a = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ ve $b = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ olsun. O zaman her $x \in \mathbb{R}$ için $b \leq f(x) \leq a$ olur.

$$g(x) = f(x) - x$$

olsun. g'nin sürekli olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitsizliklerden dolayı $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ olur. Şimdi Sonuç 3.5'i g'ye uygularsak, $g(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir c sayısının varlığını görürüz. g'nin tanımından da $f(c) = c$ çıkar. □

Yukarıdaki sonucun bir benzeri için Alıştırma 3.14'e bakınız.

Aradeğer teoreminin güçlü sonuçlarını görmeye devam edelim.

Teorem 3.10. *Bir aralığın sürekli bir fonksiyon altında imgesi de bir aralıktır.*

Kanıt: $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $I \subseteq X$ bir aralık olsun. $f(I)$ kümesinin de bir aralık olduğunu kanıtlayacağız.

Eğer $\alpha < \beta$, $f(I)$ kümesinden iki elemansa α ve β arasındaki her γ elemanın $f(I)$ kümesinde olduğunu kanıtlamamız yeterli. a, $b \in I$ için, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ olsun. O zaman, Aradeğer Teoremi'ne göre a ile b arasında $f(c) = \gamma$ eşitliğini sağlayan bir c sayısı vardır. Bu c sayısı elbette I aralığındadır, yani $\gamma = f(c) \in f(I)$. □

Dikkat: Eğer yukarıda I sınırlı bir aralık bile olsa, $f(I)$ sınırsız bir aralık olabilir. Örnek: $I = (0, 1)$ ve $f(x) = 1/x$. Öte yandan kapalı ve sınırlı bir aralığın sürekli bir fonksiyon altında imgesi kapalı ve sınırlı bir aralıktır. Bunu yakında Teorem 3.12 olarak göreceğiz.

$I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer I'nın her $x < y$ elemanı için $f(x) \leq f(y)$ oluyorsa, f'ye ***artan*** fonksiyon denir. Eğer I'nın her $x < y$ elemanı için $f(x) < f(y)$ oluyorsa, f'ye ***kesin artan*** fonksiyon denir. Benzer tanımlar azalan ve kesin azalan fonksiyonlar için de yapılır. Artan ya da azalan fonksiyonlara ***monoton*** fonksiyon denir. Ayrıca kesin artan ya da kesin azalan fonksiyonlara, ***kesin monoton*** fonksiyon adı verilir.

Sonuç 3.11. *Eğer I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve birebir bir fonksiyonsa f kesin monoton bir fonksiyondur.*

Kanıt: Aralıktan iki nokta seçelim: a_1 ve a_2. Diyelim $a_1 < b_1$. Diğer durum benzer olduğundan, genelliği bozmadan $f(a_1) < f(b_1)$ varsayımını yapabiliriz. Fonksiyonun her yerde artan olduğunu göstereceğiz. Aralıktan iki nokta daha seçelim: $a_2 < b_2$. Amacımız $f(a_2) < f(b_2)$ eşitsizliğini göstermek[2]. Şu tanımları yapalım:

$$\alpha(t) = ta_2 + (1-t)a_1 \text{ ve } \beta(t) = tb_2 + (1-t)b_1.$$

Elbette her $t \in [0, 1]$ için

$$a_1 \leq \alpha(t) < \beta(t) \leq b_2$$

olur, dolayısıyla $\alpha(t)$, $\beta(t) \in I$ olur.

$$g(t) = f(\beta(t)) - f(\alpha(t))$$

tanımını yapalım. Sürekli fonksiyonların bileşimi olduğu için g sürekli bir fonksiyondur. $\alpha(t) < \beta(t)$ olduğundan ve f birebir olduğundan, g fonksiyonu 0 değerini alamaz. Demek ki g işaret değiştiremez, ya $g > 0$ ya da $g < 0$ olmalı. Ama

$$g(0) = f(b_1) - f(a_1) > 0.$$

Demek ki $g > 0$. Dolayısıyla $g(1) > 0$. Bu da aynen $f(a_2) < f(b_2)$ demek. □

Alıştırmalar

3.12. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f'nin görüntüsü sonlu bir kümeyse f'nin sabit bir fonksiyon olduğunu gösterin.

3.13. $a < b$ ve $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \in \mathbb{Q}$ varsayımını yapalım. f'nin sabit bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın.

3.14. $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ sürekli bir fonksiyon ise $f(x) = x$ eşitliğini sağlayan bir x sayısının varlığını kanıtlayın.

3.15. I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton artan ve sabit olmayan bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekli olmasıyla $f(I)$ kümesinin bir aralık olmasının eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

3.16. $n > 0$ bir doğal sayı ve $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ olsun. $a = b^n$ eşitliğini sağlayan bir $b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ sayısının varlığını aradeğer teoremiyle kanıtlayın, yani $a^{1/n}$ sayısının varlığını kanıtlayın.

Aralıklar ve (birebir) sürekli fonksiyonlar arasındaki yakın ilişki için bkz. Altbölüm 5.3.

[2]Eğer çelişki elde etmek amacıyla $f(a_2) > f(b_2)$ varsayımını yaparsak ya $b_2 < a_1$ olmalı ya da $b_1 < a_2$. (Neden?) $f(a_i)$ ve $f(b_i)$ değerlerinin de birbirlerine göre olası konumlarını dikkate alırsak, istediğimiz çelişkiye belki kolayca ama pek şık olmayan bir biçimde varabiliriz. Ucuzluğu tercih etmedik!

Darboux Fonksiyonları. Her sürekli fonksiyonun "aradeğer özelliği" ni sağladığını kanıtladık. Aradeğer özelliği de sürekli fonksiyonların en önemli özelliklerinden biridir, hatta başlıcasıdır. Peki aradeğer özelliğini sağlayan her fonksiyon sürekli midir? Yani eğer I bir aralıksa ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $a, b \in I$ için $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri a ile b arasında bir noktada alıyorsa o zaman f illa ki sürekli olmak zorunda mıdır? Üzülerek söylüyoruz ki değildir. Bunun standart örneği $I = \mathbb{R}$ için,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon aradeğer özelliğini sağlar ama 0'da sürekli değildir.

Aradeğer teoremini sağlayan fonksiyonlara bazen ***Darboux fonksiyonları*** denir. Yukarıdaki sonuçların bazıları sadece sürekli fonksiyonlar için değil, Darboux fonksiyonları için de geçerlidir. Bu sonuçların bazılarını aşağıdaki alıştırmalarda bulacaksınız.

Alıştırmalar

3.17. Teorem 3.10'un şu daha genel halini kanıtlayın: I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir Darboux fonksiyonu ise $f(I)$ bir aralıktır.

3.18. I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon olsun. Eğer $f(I)$ bir aralıksa f'nin bir Darboux fonksiyonu olduğunu kanıtlayın.

3.19. $I = [0, 2]$ ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ 3 - x & \text{eğer } 1 < x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla belirlensin. $f(I)$ kümesinin bir aralık olduğunu ama Darboux fonksiyonu olmadığını kanıtlayın.

3.20. I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir Darboux fonksiyonu olsun. $J \subseteq I$ bir aralık olsun. $f_{|J} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ bir Darboux fonksiyonu mudur?

3.21. I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin bir Darboux fonksiyonu olması için her $J \subseteq I$ altaralığı için $f(J)$'nin de bir aralık olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

3.22. I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulların eşdeğer olduğunu kanıtlayın:
a. f Darboux ve birebir.
b. f kesin monoton ve $f(I)$ bir aralık.
Bu durumda $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun da Darboux ve kesin monoton olduğunu kanıtlayın.

Darboux fonksiyonlarıyla ilgili daha fazla bilgi için bkz. Bölüm 23.

Aradeğer Teoremi'nin Popüler Matematik Uygulamaları

Bu ekte Aradeğer Teoremi'nin birkaç uygulamasını vereceğiz ama daha önceki bölümlerde olduğumuz kadar matematiksel olmayacağız.

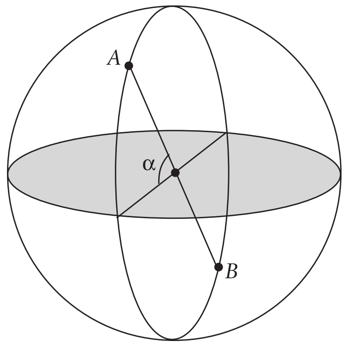
Popüler Teorem 1. *Yeryüzünde, herhangi bir anda, yeryüzünün tam diğer tarafındaki noktayla aynı hava basıncında olan en az bir nokta vardır.*

Kanıt: Aşağıdaki şekilden takip edin. Herhangi bir meridyen ve bu meridyeni kesen ve dünyanın merkezinden geçen herhangi bir doğru ele alalım. Bu doğru meridyenimizi A ve B uç noktalarında kessin. $f(A)$ ve $f(B)$, bu noktalardaki hava basıncı olsun. Meridyenin ekvator düzlemiyle yaptığı açı α derece ise,

$$g(\alpha) = f(A) - f(B)$$

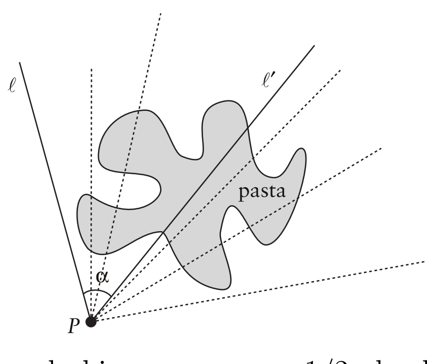
olsun.

α değiştikçe, yani doğru, dünyanın merkezi etrafında meridyenimizi hep kesecek biçimde döndüğünde, $g(\alpha)$ değişir ama sürekli değişir, yani g, $[0, 360)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden sürekli bir fonksiyondur. Meridyen 180 derece döndüğünde bu değer eksisine dönüşür, çünkü o zaman A noktası B noktası, B noktası da A noktası olur. Aradeğer teoreminden dolayı, α ile $\alpha + 180$ arasında $g(\beta) = 0$ eşitliğini sağlayan bir β açısı vardır. Demek ki, ekvator düzlemiyle bu β açısını yapan doğru, meridyenimizi, $f(A) = f(B)$ eşitliğini sağlayan A ve B uç noktalarında keser. □

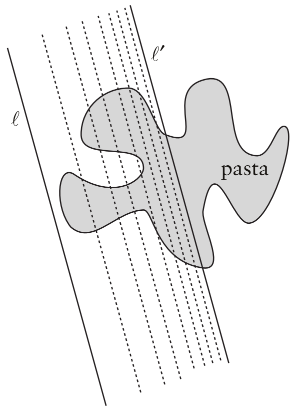


Popüler Teorem 2. *Şekli şemali ne olursa olsun, bir pasta tek bir bıçak darbesiyle iki eşit parçaya bölünebilir.* □

Birinci Kanıt: Pastayı kesmeyen bir ℓ doğrusu seçelim. (Bkz. aşağıdaki şekil. Pastayı sınırlı seçtik.) Pasta sınırlı olduğundan böyle bir doğru vardır. Bu doğru üstünde ve pastanın dışında bir P noktası seçelim. Doğruyu P noktasını sabit tutarak döndürürsek, doğru pastayı bir zaman sonra kesmeye başlar, pastayı iki parçaya ayırır. Bu parçalardan birinin hacmi 0'dan başlayarak artar, ta ki bu parça pastanın tamamı olana dek. Pastanın ve maddenin sürekli olduğunu varsayarsak, bu artış, doğrunun ℓ ile yaptığı α açısına göre sürekli olarak değişir. Pastanın toplam hacmine 1 dersek, doğrunun kestiği parçalardan biri 0 hacimden 1 hacme kadar sürekli artar, dolayısıyla bir zaman sonra 1/2 olmak zorundadır.



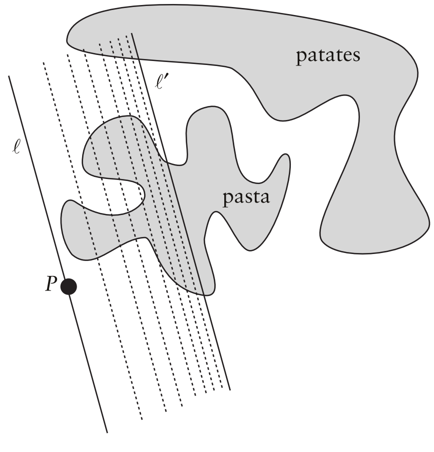
İkinci Kanıt: Gene pastayı kesmeyen bir ℓ doğrusu seçelim ve bir sonraki şekilden takip edelim. ℓ doğrusunu pastanın olduğu yöne doğru kaydıralım (öteleyelim).



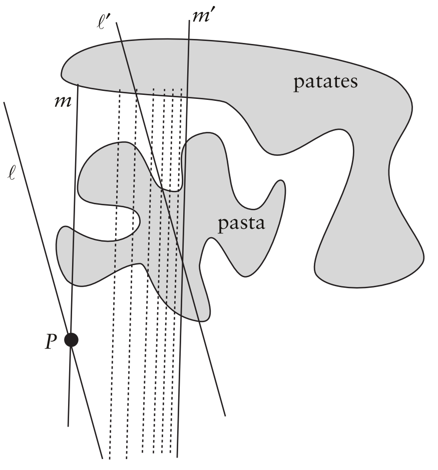
Kanıt bir önceki kanıt gibi devam eder. Bu kanıtta başlangıçta aldığımız doğrunun pastayı kesmemesi koşulunun gereksiz olduğuna dikkatinizi çekeriz, çünkü pasta sınırlı olduğundan, her doğru yeterince ötelenirse pastayı kesmez.

Popüler Teorem 3. *Tek bir bıçak darbesiyle hem bir pasta hem de bir patates aynı anda iki eşit parçaya bölünebilir.*

Kanıt: Herhangi bir P noktası ve bu noktadan geçen herhangi bir ℓ doğrusu seçelim. ℓ'yi öteleyerek pastayı iki eşit parçaya bölebileceğimizi biliyoruz. Pastayı tam ortadan ikiye bölen bu doğru, patatesi muhtemelen iki eşit parçaya ayırmamıştır. Şimdi P noktasını sabit alarak ℓ doğrusunu hafifçe döndürelim.



Elde ettiğimiz yeni doğruya m adını verip, aynen yukarıdaki gibi, m'yi öteleyerek pastayı iki eşit parçaya ayıralım. Bu da patatesi iki eşit parçaya ayırmayabilir. Doğruları P noktası etrafında döndürmeye devam edelim. Açı değiştikçe, pastayı iki eşit parçaya ayıran doğrular patatesi de değişik oranlarda bölecek.



Pastayı iki eşit parçaya bölen doğruların ℓ doğrusuyla yaptıkları açılar 0 dereceden 180 dereceye kadar değişebileceğinden pastayı iki eşit parçaya bölen doğrulardan birinin patatesi iki eşit parçaya böleceğini kanıtlamak zor değil: Bir doğru patatesi 3'e 4 oranında bölüyorsa, 180 derece döndürülmüş doğru patatesi 4'e 3 oranında böler, dolayısıyla belli bir açıda patates iki eşit parçaya (3,5 - 3,5 oranında!) bölünmeli. □

Örnek 3.23. (Popüler düzeyde) Yukarıdaki kesimlerde bıçak dikey tutulmuş ve pasta dikey darbelerle kesilmişti. Dikey olmayan kesimlere de izin verirsek, hareket özgürlüğümüz 2'den (bir nokta etrafında döndürmek ve düzlemde ötelemek) 3'e çıkar (bir nokta etrafında döndürmek, düzlemde ötelemek ve bıçağın masanın düzlemiyle yaptığı açıyı değiştirmek) ve böylece hem pastayı hem patatesi hem de bir tabak makarnayı tek bir bıçak darbesiyle eşit parçalara ayırabiliriz.

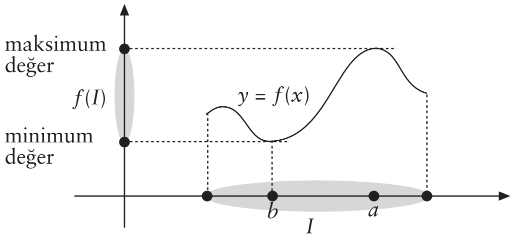
3.3 Sürekli Fonksiyonların Uç Değerleri

Aradeğer Teoremi'nden, bir aralığın sürekli bir fonksiyon altındaki imgesinin gene bir aralık olduğunu biliyoruz; bunu Teorem 3.10'da kanıtlamıştık. Bu altbölümde kapalı ve sınırlı bir aralığın sürekli bir fonksiyon altındaki imgesinin gene kapalı ve sınırlı bir aralık olduğunu göreceğiz. Bundan da sürekli bir fonksiyonun kapalı ve sınırlı bir aralıkta uç değerlerini (infimum ve supremum değerlerini) aldığı anlaşılır. Bu, matematiksel analizin çok kullanılan, hem teoride hem de pratikte sık sık başvurulan teoremlerden biridir.

Teorem 3.12 (Uç Değer Teoremi)**.** *$I \subseteq \mathbb{R}$, kapalı ve sınırlı bir aralık olsun. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman öyle $a, b \in I$ sayıları vardır ki, her $x \in I$ için*

$$f(b) \le f(x) \le f(a)$$

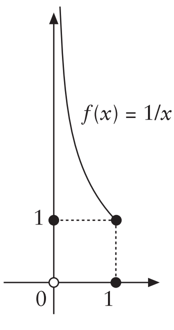
olur. Yani $f(b) = \inf f(I) = \min f(I)$ *ve* $f(a) = \sup f(I) = \max f(I)$ *eşitliklerini sağlayan* $a,\, b \in I$ *sayıları vardır. Bir başka deyişle sürekli bir fonksiyon kapalı bir aralıkta maksimum ve minimum değerlerini alır. Gene bir başka deyişle kapalı ve sınırlı bir aralığın sürekli bir fonksiyon altındaki imgesi gene kapalı ve sınırlı bir aralıktır.*



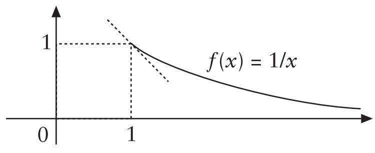
Sürekli bir fonksiyon, kapalı ve sınırlı bir I aralığında hem minimum hem de maksimum değerlerini alır. Aradeğer Teoremi'nden dolayı, fonksiyon bu uç değerler arasındaki her değeri de alır. Yani $f(I)$ da kapalı ve sınırlı bir aralıktır.

Teoremi kanıtlamadan önce yukarıda sözünü ettiğimiz önemli sonucunu yazalım:

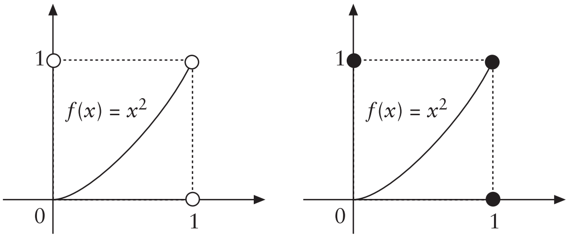
Teoremin kapalı olmayan aralıklarda yanlış olduğunu farkedelim. Nitekim $(0,1]$ aralığı üstünde tanımlanmış olan $f(x) = 1/x$ fonksiyonu süreklidir ama üstten sınırlı değildir, değer kümesi $[1,\infty)$ aralığıdır.



Teorem, kapalı ama sınırsız aralıklarda da yanlıştır. Örneğin yukarıdaki gibi $f(x) = 1/x$ kuralıyla tanımlanan $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun imgesi kapalı olmayan $(0,1]$ aralığıdır.



Oldukça aydınlatıcı bir örnek de şu: $(0,1)$ aralığında $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon, değerlerini gene $(0,1)$ aralığında alır. Bu fonksiyonun değerleri 1'e çok



yaklaşırlar ama hiç 1 olmazlar (bkz. üstte, soldaki grafik.) Fonksiyon, 0 ile 1 arasında her değeri alır ama 1 değerini almaz. Bunun nedeni fonksiyonun tanım kümesinin $(0,1)$ açık aralığı olmasıdır. Oysa tanım kümesini $[0,1]$ kapalı aralığı olarak tanımlasaydık, fonksiyon maksimum değerini 1'de alacaktı: $1^2 = 1$ (bkz. üstte, sağdaki grafik.)

Teorem 3.12'nin Kanıtı: Kapalı ve sınırlı aralığa I, sürekli fonksiyona da f diyelim. $f(I)$'nın bir aralık olduğunu biliyoruz (Teorem 3.10).

Önce fonksiyonun, yani görüntü kümesi $f(I)$'nin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayalım. $f(I)$'nın üstten sınırlı olmadığını varsayalım. O zaman her n doğal sayısı için, $f(x_n) > n$ eşitsizliğini sağlayan bir $x_n \in I$ bulunur. Elbette

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$$

olur.

Bu aşamada, sınırlı her dizinin yakınsak bir altdizisi olduğunu söyleyen Bolzano-Weierstrass Teoremi'ne [N4, Teorem 9.4] ihtiyacımız olacak. Bolzano-Weierstrass Teoremi'ne göre I aralığı tarafından sınırlanmış olan $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. Bu altdiziye $(x'_n)_n$ adını verelim. $(f(x_n))_n$ sonsuza ıraksadığından, bu dizinin bir altdizisi olan $(f(x'_n))_n$ dizisi de sonsuza ıraksar [N4, Alıştırma 8.14]. Ama f sürekli olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x'_n\right) \in \mathbb{R}$$

olur (Teorem 3.1) ki bu bir çelişkidir.

Demek ki f, yani $f(I)$ kümesi üstten sınırlı. Aynı nedenden $-f$ de üstten sınırlı. Bu da f alttan sınırlı demektir. Böylece $f(I)$ kümesinin sınırlı bir aralık olduğunu kanıtladık.

Şimdi c, $f(I)$'nın en küçük üstsınırı olsun. c'nin $f(I)$'da olduğunu kanıtlayacağız. c, $f(I)$'nın en küçük üstsınırı olduğundan, $f(I)$ kümesinde c'ye yakınsayan bir $(y_n)_n$ dizisi vardır. Her n için $y_n \in f(I)$ olduğundan, $y_n = f(x_n)$ eşitliğini sağlayan $x_n \in I$ vardır. Bolzano-Weierstrass Teoremi'ne göre I aralığı tarafından sınırlanmış olan $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. Bu altdiziye $(x'_n)_n$ ve limitine de a diyelim. $I = [u, v]$ olsun. Her n için $u \le x'_n \le v$ olduğundan, Sandviç Teoremi'ne göre [N4, Teorem 5.1], $u \le a \le v$, yani

$a \in [u, v] = I$ olur. Hesap zamanı geldi:

$$c = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(a) \in f(I).$$

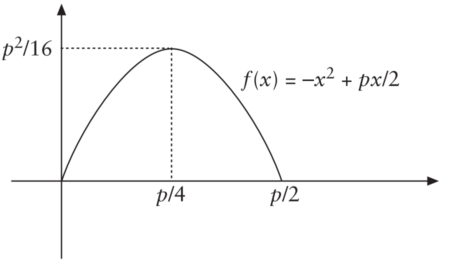
Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Teorem 3.12'nin Yarısının Bir Başka Kanıtı: K, kapalı bir aralık ve sürekli bir $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun. $f(K)$'nın sınırlı olmadığını varsayalım. Bir $b \in \mathbb{R}$ sabitleyelim. Her n doğal sayısı için öyle bir $x_n \in K$ elemanı bulalım ki, $d(f(x_n), b) \geq n$ olsun. K kapalı bir aralık olduğundan, Bolzano-Weierstrass teoremine göre $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır [N4, Teorem 9.4]. Bu yakınsak altdiziye $(x_{n_k})_k$ diyelim. Limitine de x diyelim. O zaman, f sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned}|f(x) - b| &= \left|f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) - b\right| = \left|\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right), b\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left|f\left(x_{n_k}\right) - b\right| \geq \lim_{k\to\infty} n_k = \infty.\end{aligned}$$

Bir çelişki. □

Teorem 3.13 (Popüler Teorem)**.** *Sabit uzunlukta bir telle, en büyük alanı kaplayacak bir dikdörtgen yapılabilir. Telin uzunluğu p ise bu en büyük alan $p^2/16$'dır.*



Kanıt: Telin uzunluğu p olsun. Çevresi p olan bir dikdörtgenin bir kenarı x ise, diğer kenarı $p/2 - x$'tir; dolayısıyla alanı

$$f(x) = x\left(\frac{p}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{px}{2}$$

olur. x'in değeri 0 ile $p/2$ arasında değiştiğine göre, f fonksiyonunu $[0, p/2]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon olarak görebiliriz. f sürekli olduğundan, bölümde kanıtlanan teoreme göre, kapalı ve sınırlı olan bu aralıkta f en büyük değerini alır.

$$f\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{p^2}{16}$$

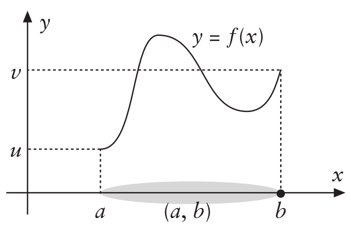
olduğundan, bu en büyük değer $p^2/16$'dan küçük olamaz. Hatta fonksiyonun grafiği bir parabol olduğundan, fonksiyon en büyük değeri, 0 ile $p/2$ olan iki kökünün tam ortasında, yani $x = p/4$ için alır. □

4. Limit

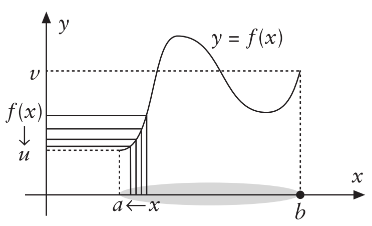
Bir önceki ciltte $(x_n)_n$ dizisinin (n sonsuza giderken) limitini tanımlamış ve oldukça uzun bir bölümünü bu kavrama ayırmıştık [N4, Bölüm 4].

Bu bölümde benzer bir limit kavramı tanıtacağız. Eğer f bir fonksiyonsa, "x, a'ya yaklaşırken $f(x)$'in limiti" ne demektir? Burada, x, a'ya çok çok çok yaklaştığında, $f(x)$'in belli bir sayıya çok çok çok yakın olup olamayacağı, oluyorsa hangi sayıya çok çok çok yakın olacağı sorularını irdeleyeceğiz.

Grafiği aşağıdaki gibi olan bir $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düşünelim. Bu fonksiyon (a, b) açık aralığında tanımlanmış ama a ve b noktalarında tanımlanmamış, yani $f(a)$ ve $f(b)$ diye bir değer yok. Öte yandan grafiğe bakınca görülüyor ki aslında $f(a)$ değerinin u olarak, $f(b)$ değerinin de v olarak tanımlanması gerekirmiş... Ne olmuşsa olmuş, bir aksilik olmuş ve f'nin a ve b'deki değerleri atlanmış...



Yukarıdaki örnekte neden $f(a)$'nın u olarak tanımlanması gerektiğini düşünüyoruz? Çünkü (a, b) aralığındaki bir x sayısı a'ya çok çok yakınken $f(x)$ değeri de u'ya çok çok yakın oluyor. x'i, sanki bir film izliyormuş gibi, a'ya doğru hareket ettirdiğinizde, $f(x)$'in u'ya doğru hareket ettiğini ve x, a'ya yaklaştıkça $f(x)$'in de u'ya yaklaştığını göreceksiniz. Bu filmi aşağıda izleyebilirsiniz.

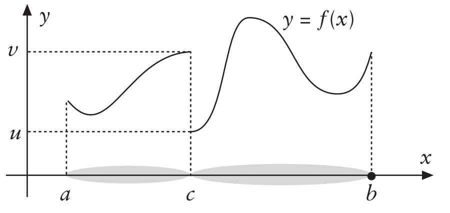


x, a'ya çok yaklaştığında, $f(x)$, u'ya çok yaklaşıyor

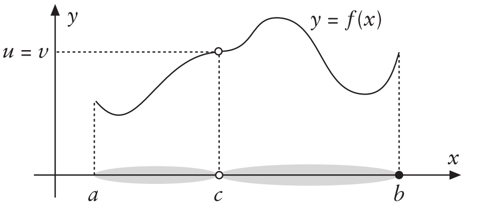
Bir başka örneğe bakalım. $a < c < b$ olsun.

$$f : [a, b] \setminus \{c\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

grafiği aşağıdaki gibi olan bir fonksiyon olsun. Fonksiyon c noktasında tanımlanmamış. Oysa fonksiyon c'nin solunda ve sağında tanımlanmış.



x, c'ye soldan yaklaştığında, $f(x)$ değeri v'ye yaklaşıyor; ama x, c'ye sağdan yaklaştığında, $f(x)$ değeri u'ya yaklaşıyor. $u \neq v$ olduğundan, bu durumda x, c'ye yaklaştığında, $f(x)$'in sabit bir sayıya yaklaştığını söyleyemiyoruz. Bu durumda f'nin c'de tanımlanmamış olması doğal karşılanabilir. Ama eğer $u = v$ olsaydı (yani fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olsaydı), o zaman f fonksiyonunun c'deki değerini doğal olarak u olarak tanımlayabilirdik.



Okur belki de yukarıdaki tartışmayla süreklilik arasında bir bağ olacağını tahmin etmiştir. Doğru tahmin!

4.1 Matematiksel Tanıma Giriş

Yukarıdaki altbölümde limit kavramına sezgisel bir giriş yapmak istedik. Limitin tam matematiksel tanımına yine de hazır değiliz. Önce süreklilik kavramına biraz değişik bir gözle bakalım.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olmasının tanımını anımsayalım: Bir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ noktasında ***sürekli*** olması için gerek (ve yeter) koşul şudur:

Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ için, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ olsun.

Edebi dile çevirecek olursak, bu tanım, x, a'ya çok yakın olduğunda, $f(x)$, $f(a)$'ya çok yakındır diyor. Koşul $x = a$ için hep doğru olduğundan, x'i a'dan değişik almanın bir mahsuru yok, öyle yapalım: Bir $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $a \in A$ elemanında ***sürekli*** olması için gerek (ve yeter) koşul şudur:

Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A \setminus \{a\}$ için, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ olsun.

Bu noktada bir artistlik yapacağız, hem de en âlâsından! Sürekliliğin bu son tanımında a'yı illa f fonksiyonunun tanım kümesinde almayalım da, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir elemanı olarak alalım, bakalım başımıza neler gelecek? Başımıza pek bir şey gelmez, çünkü eğer $a \notin A$ ise $f(a)$'dan söz edemeyiz ve yukarıdaki merkezlenen italik yazıda beliren $|f(x) - f(a)|$ ifadesi anlamsız olur, anlamsız olmaktan öte yazılamaz bile! Madem öyle, biz de tanımdaki $f(a)$ yerine $\mathbb{R}$'nin herhangi bir b elemanını koyarız! O zaman yukarıdaki koşul şöyle yazılır:

Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A \setminus \{a\}$ için, $|f(x) - b| < \epsilon$ olsun.

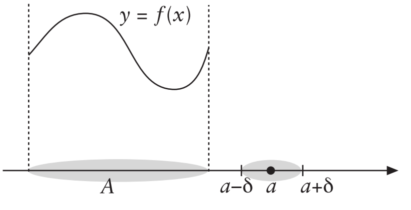
f fonksiyonuyla ve a ve b noktalarıyla ilgili anlamlı bir koşul elde ettik. Koşul, sezgisel olarak şunu söylüyor: x, a'ya çok yaklaştığında ama a'dan değişik olduğunda, $f(x)$, b'ye çok yaklaşır. Koşulu şöyle de ifade edebiliriz: Eğer x'i a'ya yeterince yakın ama a'dan değişik alırsak, $f(x)$'i b'ye istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz.

Bu koşulu biçimsel olarak şöyle yazabiliriz:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ ((x \in A \setminus \{a\} \wedge |x - a| < \delta) \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$

Eğer $a \in A$ ise ve b yerine $f(a)$ yazarsak, bu aynen f'nin a'da sürekli olduğunu söyler.

İşte, "x, a'ya yakınsarken $f(x)$'in limiti b'dir" cümlesinin tanımının yukarıdaki gibi olmasını istiyoruz.



Eğer bir $\delta > 0$ için, $(a-\delta, a+\delta) \cap A \subseteq \{a\}$ oluyorsa her b sayısı f'nin a'da limiti olur.

Ama bu tanım teşebbüsünde küçük bir sorun var, o da şu (yukarıdaki şekilden takip edin): Eğer a noktası A kümesinin "uzağındaysa", yani a'nın belli bir *komşuluğunda* $A \setminus \{a\}$ kümesinde hiç eleman yoksa, yani bir $\delta > 0$ sayısı için,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\}) = \emptyset$$

oluyorsa, gene bir başka deyişle, bir $\delta > 0$ için,

$$(a-\delta, a+\delta) \cap A \subseteq \{a\}$$

oluyorsa, o zaman, $|x-a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in A \setminus \{a\}$ elemanı bulunamayacağı için, yukarıdaki tanım teşebbüsüne göre, x, a'ya yakınsarken her b sayısı f'nin bir limiti olur! (Boşkümenin her elemanı her koşulu sağlar, dolayısıyla boşkümenin her x elemanı $|f(x) - b| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlar.) Bu yüzden tanımdaki a'nın her $\delta > 0$ için,

$$(a-\delta, a+\delta) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

koşulunu sağlaması gerekir ki her b sayısı limit olmasın ve "limit" denen şey biricik olsun ve bir işe yarasın.

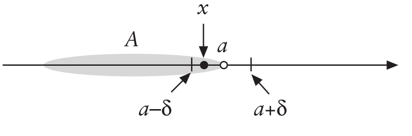
Yukarıdaki koşulu sağlayan bir a elemanına A'nın ***yoğunlaşma*** ya da ***limit noktası*** denir. Limit kavramını ele almadan önce yoğunlaşma noktası kavramına göz atalım.

4.2 Yoğunlaşma Noktası

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\delta > 0$ için,

$$(a-\delta, a+\delta) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

ise a'ya A'nın ***yoğunlaşma noktası*** ya da ***limit noktası*** adı verilir.



A'nın yoğunlaşma noktası A'da olabilir de olmayabilir de. Örnekler aşağıda.

Örnekler

4.1. $\mathbb{Z}$'nin yoğunlaşma noktası yoktur.

4.2. Eğer $r \neq 0$ ise $r\mathbb{Z}$'nin yoğunlaşma noktası yoktur.

4.3. Sonlu bir kümenin yoğunlaşma noktası yoktur.

4.4. $(0,1)$ açık aralığının yoğunlaşma noktaları kümesi $[0,1]$ kapalı aralığıdır.

4.5. $[0,1]$ kapalı aralığının her noktası kendisinin bir yoğunlaşma noktasıdır. Bu kümenin başka da yoğunlaşma noktası yoktur.

4.6. $(0,1) \cup (1,2)$ kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi $[0,2]$ kapalı aralığıdır.

4.7. $\mathbb{Q}$ kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi $\mathbb{R}$'dir.

4.8. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesinin yoğunlaşma noktaları kümesi $\mathbb{R}$'dir.

Alıştırmalar

4.9. $A = \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ve $A \cup \{0\}$ kümelerinin tek bir yoğunlaşma noktası vardır: 0. Kanıtlayın.

4.10. Eğer her kesirli sayı bir kümenin yoğunlaşma noktasıysa, her gerçel sayının bu kümenin bir yoğunlaşma noktası olduğunu kanıtlayın.

4.11. Eğer B, A'nın yoğunlaşma noktalarından oluşan kümeyse, B'nin her yoğunlaşma noktasının B'de olduğunu kanıtlayın.

4.12. $\{1/n + 1/m : n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ kümesinin yoğunlaşma noktalarının 0 ve bir $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sayısı için $1/n$ biçiminde yazılan sayılar olduğunu kanıtlayın.

Eğer A üstten sınırlı değilse, bazen ∞'un A'nın bir "yoğunlaşma noktası" olduğunu söylemek işimize gelecek. Benzer şekilde eğer A alttan sınırlı değilse, $-\infty$'un A'nın bir "yoğunlaşma noktası" olduğunu söyleyeceğiz.

Yoğunlaşma noktası kavramı analizin en önemli kavramlarından biridir. İleride daha sık sözedeceğiz bu kavramdan. Okurun kavramı daha iyi hissetmesi için, yoğunlaşma noktalarıyla ilgili, yakın zamanda ihtiyacımızın olmayacağı önemli bir sonuç kanıtlayalım.

Önsav 4.1. *a'nın A'nın bir yoğunlaşma noktası olması için gerek ve yeter koşul, A'da a'ya yakınsayan ve terimleri birbirinden farklı olan bir dizinin bulunmasıdır.*

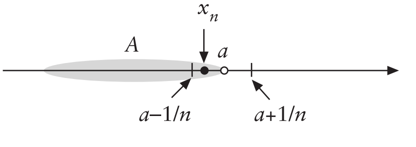
Kanıt: ($\Rightarrow$) Eğer $a = \pm\infty$ ise kanıt kolay. Bundan böyle $a \in \mathbb{R}$ varsayımını yapalım. Demek ki her pozitif n doğal sayısı için,

$$A_n = (a - 1/n, a + 1/n) \cap (A \setminus \{a\})$$

olsun. A_n sonsuz bir kümedir, çünkü aksi halde a yoğunlaşma noktası olamazdı. Her A_n kümesinden bir x_n elemanı alalım. O zaman elbette

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olur. Ama $(x_n)_n$ dizisinin terimleri birbirinden farklı olmayabilir. Bunu engellemek için A_n'nin sonsuz olduğunu kullanalım: A_n'den eleman seçeceğimize $A_n \setminus \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ kümesinden bir eleman seçelim.



Şöyle de kanıtlayabiliriz. Her $n \geq 0$ için,

$$0 < |x_{n+1} - a| < \frac{|x_n - a|}{2}$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_n \in A$ elemanları bulabiliriz. Bunu şöyle yaparız: $x_0 \in A$ herhangi bir eleman olsun. x_n sayılarını tümevarımla bulacağız. x_n'nin bulunduğunu varsayalım. $\delta = |x_n - a|/2$ olsun. Tümevarım varsayımından dolayı $\delta > 0$ olur. a, A kümesinin bir yoğunlaşma noktası olduğundan,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

olur. Şimdi x_{n+1} elemanını bu kümeden seçelim. İstediğimiz koşul sağlanır. Tümevarımla, her $n > i$ için,

$$0 < |x_n - a| < \frac{|x_i - a|}{2^{n-i}}$$

eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanır. Buradan x_n'lerin birbirinden farklı olduğu anlaşılır. Ayrıca, $i = 0$ için,

$$0 < |x_n - a| < \frac{|x_0 - a|}{2^n}$$

elde edilir. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olur.

($\Leftarrow$) Şimdi A'da a'ya yakınsayan ve terimleri değişik olan bir dizinin varlığını varsayalım. Böyle bir $(x_n)_n$ dizisi alalım. $\delta > 0$ herhangi bir sayı olsun.

$$(a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\})$$

kümesinin boş olmadığını kanıtlamamız gerekiyor. Ama bu kümede $(x_n)_n$ dizisinin bir terimi olmalı! Önsavımız kanıtlamıştır. $\square$

Alıştırma 4.13. $S \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı ve yoğunlaşma noktası olan bir küme olsun. $\mathcal{L}(S)$, S'nin yoğunlaşma noktalarından oluşan küme olsun. $\mathcal{L}(S)$'nin üstten sınırlı olduğunu gösterin. $\sup \mathcal{L}(S) \in \mathcal{L}(S)$ içindeliğini kanıtlayın; yani $\sup \mathcal{L}(S)$'nin S'nin en büyük yoğunlaşma noktası olduğunu kanıtlayın.

4.3 Nihayet Limit Tanımı

Şimdi artık limit kavramının matematiksel tanımını verebiliriz.

Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}$ bir gerçel sayılar kümesi olsun. $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası olsun. $b \in \mathbb{R}$ olsun. Ve nihayet $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$(a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\})$$

kümesinin her x elemanının,

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağladığı (kümeden seçilen x'ten bağımsız) bir $\delta > 0$ sayısı varsa, o zaman, "x, a'ya giderken $f(x)$'in ***limiti*** b'dir" ya da "$f(x)$'in a'da limiti b'dir" denir. Yani x, a'ya giderken $f(x)$'in limitinin b olması için, her pozitif ϵ sayısı için öyle bir pozitif δ sayısı olmalı ki,

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (A \setminus \{a\})$$

koşulu,

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

eşitsizliğini gerektirmeli.

Bu koşul daha simgesel olarak şöyle yazılır:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ (0 < |x - a| < \delta \longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$

Bir noktanın altını çizmek gerekir: "x, a'ya giderken" demek, "x, a'ya çok yaklaşırken ama x, a'ya **eşit olmadan** a'ya yaklaşırken" demektir; çünkü f fonksiyonu a'da tanımlı olmayabilir (olabilir de ama olmayabilir de).

Örnek 4.14. Örneğin $a = 0$ ve

$$f(x) = \frac{\exp x - 1}{x}$$

olabilir. Bu örnekte f fonksiyonu 0'da tanımlı değildir, ama göreceğimiz üzere 0'da limiti vardır ve bu limit 1'dir. Bunu kanıtlamak için önce $f(x)$'i bir kuvvet serisi olarak bulalım. Eğer $x \neq 0$ ise

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} x^i/i! - 1}{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} x^i/i!}{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$$

olur. $x = 0$ ise en soldaki ifadenin (f fonksiyonunun yani) neye eşit olduğu anlamsız bir soru, çünkü $x = 0$ için ifade (fonksiyon) tanımlı değil. Ama sağdaki ifadeyi $x = 0$ için değerlendirebiliriz ve 1 buluruz. Buradan, x, 0'a giderken soldaki ifadenin limitinin 1 olduğu tahmin edilebilir ve nitekim öyledir de. Bunu kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer $0 \neq |x| < \delta$ ise

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| < \epsilon$$

olacak. Bu son eşitsizliğin geçerli olması için x'in ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Yukarıdaki hesaplardan,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^i}{(i+1)!} = |x| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x|^{i-1}}{(i+1)!} \\ &= |x| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x|^i}{(i+2)!} \leq |x| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x|^i}{i!} = |x| \exp |x| \end{aligned}$$

çıkar. En sondaki ifadeyi ϵ'dan küçük yapmalıyız. Bulmakla mükellef olduğumuz δ'yı 1'den küçük almaya sözverirsek, exp fonksiyonu artan olduğundan, $\exp |x| < \exp 1 = e$ ve dolayısıyla

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \exp |x| < |x| e$$

olur. Demek ki en soldaki ifadenin ϵ'dan küçük olması için bir de ayrıca

$$|x| < \frac{\epsilon}{e}$$

olmalı. Şimdi $\delta = \min\{1, \epsilon/e\}$ olsun. Yukarıdaki hesaplardan görüleceği üzere eğer $|x| < \delta$ ise,

$$\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| < |x|e \leq \frac{\epsilon}{e}e = \epsilon$$

olur.

Örnek 9.4'te bu limiti çok daha teorik bir kapsamda düşünerek bulacağız.

Alıştırmalar

4.15. Aşağıdaki limitleri kanıtlayın:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0,\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \cos x = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4.16. $\sin x$, $\cos x$ ve $\exp x$'in kuvvet serisi olarak açılımlarına bakarak yukarıdaki alıştırmalara benzer alıştırmalar bulun.

Şimdi limitin -olduğunda, limit olmayabilir çünkü- tek olduğunu kanıtlayalım:

Önsav 4.2. *x, a'ya giderken bir fonksiyonun limiti en fazla bir sayı olabilir. Yani x, a'ya giderken bir fonksiyonun iki farklı limiti olamaz.*

Kanıt: $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası olsun. Diyelim x, a'ya giderken f'nin limiti hem b hem de c oluyor ve $b \neq c$. Kanıtın anafikri şu: x, a'ya çok yakınken, $f(x)$ hem b'ye hem de c'ye yakın olamaz. Nitekim $\epsilon = |b-c|/2 > 0$ olsun. δ_b ve δ_c pozitif sayıları, her $x \in A$ için,

$$0 < |x-a| < \delta_b \longrightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

ve

$$0 < |x-a| < \delta_c \longrightarrow |f(x) - c| < \epsilon$$

önermelerini sağlasınlar. $\delta = \min\{\delta_b, \delta_c\}$ olsun. a, A'nın bir yoğunlaşma noktası olduğundan, A'da $0 < |x-a| < \delta$ eşitsizliklerini sağlayan bir x vardır. O zaman,

$$|b-c| = |(b-f(x)) + (f(x)-c)| \leq |b-f(x)| + |f(x)-c| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |b-c|$$

olur ve bu bir çelişkidir. □

Yukarıdaki önsav sayesinde, x, a'ya giderken $f(x)$'in limiti b ise, b'nin biricik olduğunu biliyoruz; dolayısıyla, gönül rahatlığıyla

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

yazabiliriz.

Bölümün girişinde yaptığımız tartışmadan şu önemli sonuç çıkar:

Teorem 4.3. *$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer a, A'nın bir yoğunlaşma noktası değilse, o zaman f, a'da süreklidir. Eğer a, A'nın bir yoğunlaşma noktasıysa, f'nin a noktasında sürekli olması için*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

eşitliği yeter ve gerek koşuldur. □

Bu teoremle birlikte okur Alıştırma 1.13'e bir defa daha bakmalı.

Teorem 3.1'den ve Teorem 4.3'ten şu sonuçlar çıkar:

Sonuç 4.4. *$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$, A'nın bir yoğunlaşma noktası olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.*
a. *f, a noktasında süreklidir.*
b. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
c. *A'nın a'ya yakınsayan her $(x_n)_n$ dizisi için, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ eşitliği sağlanmalıdır.* □

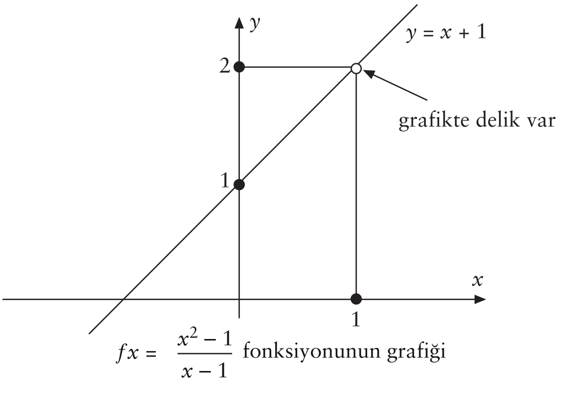
Sonuç 4.5. *$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.*
a. *f süreklidir.*
b. *A'nın A'da olan her a yoğunlaşma noktası için $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ olur.*
c. *A'nın bir elemanına yakınsayan A'nın her $(x_n)_n$ dizisi için,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

eşitliği sağlanmalıdır. □

Örnekler

4.17. Şu formülle tanımlanan fonksiyona bakalım: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Ama bir fonksiyonu tanımlamak için fonksiyonun kuralını vermek yetmez, bir de ayrıca fonksiyonun tanım ve değer kümelerini de vermek gerekir. (Tanım kümesi değer kümesinden biraz daha önemlidir.) Bu formülle tanımlanan fonksiyonun tanım kümesi 1'i içermeyen herhangi bir sayı kümesi olabilir; çünkü fonksiyon 1'de tanımlı değildir. Biz, f fonksiyonunu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$'den $\mathbb{R}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak göreceğiz. Bu fonksiyon aslında (kesirli ifadeyi sadeleştirerek), $f(x) = x + 1$ formülüyle de verilebilirdi (ama $x \neq 1$ koşuluyla!) Fonksiyonun grafiği şöyle:



$fx = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiği

1 sayısı $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ kümesinin bir yoğunlaşma noktasıdır. Dolayısıyla, her ne kadar fonksiyon 1'de tanımlı değilse de, x, 1'e giderken fonksiyonun limitini almaya çalışabiliriz:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)$$

Sayfa 77'de altını çizerek söylediğimizi anımsayın: *Bir noktanın altını çizmek gerekir: "x, a'ya giderken" demek, "x, a'ya çok yaklaşırken ama x, a'ya eşit olmadan, a'ya yaklaşırken" demektir; çünkü f fonksiyonu a'da tanımlı olmayabilir (olabilir de ama olmayabilir de), yani a sayısı f'nin tanım kümesinde olmayabilir.*
Nitekim burada $a = 1$ ve bu sayı f'nin tanım kümesinde değil.
$g(x) = x + 1$ formülüyle tanmlanan ve $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden g fonksiyonu, polinomiyal bir fonksiyon olduğundan, süreklidir. Dolayısıyla, Sonuç 4.4'e göre, x, 1'e giderken $g(x)$'in limiti $g(1)$, yani $1 + 1 = 2$'dir. Sonuç olarak:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = \lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2.$$

Yukarıdaki örnek belki kolaydı ve kolay bir örneği biraz fazla ayrıntısıyla açıklamış olabiliriz. Ama bunun yararlı olduğuna inanıyoruz.

4.18. Aşağıdaki limiti bu bölümde yaptıklarımızdan yararlanarak hesaplayalım:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+5} = \frac{2+3}{2+5} = \frac{5}{7}.$$

Bir başka önemli nokta daha: Çoğu zaman, yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir fonksiyonun değil, bir ifadenin limiti alınır. Yani fonksiyonun tanım kümesi belirtilmez. Bu bazen soruna yol açabilir, çünkü fonksiyonun limiti fonksiyonun tanım kümesine göre de değişebilir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x > 0 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanmış bir fonksiyonun 0'daki limiti fonksiyonun tanım kümesine göre değişir. Tanım kümesi $(-\infty, 0)$ ise limit -1'dir, tanım kümesi $(0, \infty)$ ise limit 1'dir, tanım kümesi $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ise limit yoktur. Tanım kümesi $\mathbb{R}\setminus(-1, 1)$ ise limitten söz edemeyiz bile.

Bir polinom sürekli bir fonksiyon verdiğinden, aşağıdaki sonuçlar kolaydır.

Sonuç 4.6. *$P(T) \in \mathbb{R}[T]$ bir polinomsa ve $a \in \mathbb{R}$ ise, $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ olur.* □

Sonuç 4.7. *$P(T)$, $Q(T) \in \mathbb{R}[T]$ iki polinomsa, $a \in \mathbb{R}$ ise ve $Q(a) \neq 0$ ise, o zaman*

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

olur. □

4.4 Limitin Aritmetiği

Bu altbölümde limit almayla toplama ve çarpma gibi işlemler arasındaki ilişkileri irdeleyeceğiz. Her şey dilediğimiz ya da dilenmesi gerektiği gibi olacak,

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$$

ve

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x)g(x)$$

gibi eşitlikler, eşitliğin sol tarafındaki ifadeler anlamlı olduklarında, doğru olacaklar. (Bu, sağ taraftaki ifade de anlamlı olacak anlamına gelir.)

Not. Teorem 4.3'ten dolayı f ve g fonksiyonları, a'da sürekli olduğunda bu eşitlikler doğrudur elbet, ama bu eşitlikler a noktası f ve g'nin tanım kümesinde olmasa da geçerlidir.

Altbölümün devamında devamlı aynı şeyi tekrarlamamak için şu tanımları yapıyoruz: $A \subseteq \mathbb{R}$, bir gerçel sayılar kümesi. $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası ve f ve g, A'dan $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon.

Teorem 4.8. *Eğer f ve g'nin a'da limitleri varsa o zaman $f+g$ ve $f\cdot g$ fonksiyonlarının da a'da limitleri vardır ve*

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}(f+g)(x)$$

ve

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ve $\lim_{x\to a} f(x) = c$ olsun. Önce daha kolay olan toplamadan başlayalım. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. b, f'nin a'da limiti olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, $(a-\delta_1, a+\delta_1)\cap A$ kümesinin her x elemanı

$$|f(x)-b| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca c, g'nin a'da limiti olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, $(a-\delta_2, a+\delta_2)\cap A$ kümesinin her x elemanı

$$|g(x)-c| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliğini sağlar. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Elbette $\delta > 0$ olur. Şimdi $(a-\delta, a+\delta)\cap A$ kümesinin her x elemanı için,

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(b+c)| &= |(f(x)-b)+(g(x)-c)|\\ &\le |f(x)-b| + |g(x)-c|\\ &< \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

olur ve birinci eşitlik böylece kanıtlanmış olur.

İkinci Eşitlik. Bu bizi birincisinden biraz daha fazla uğraştıracak. Resmî kanıtı daha sonraya bırakıp tartışalım. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ arıyoruz ki, eğer $|x-a| < \delta$ ise,

$$|f(x)g(x) - bc| < \epsilon$$

olsun. Bu $|f(x)g(x) - bc|$ ifadesiyle oynayıp

$$|f(x)g(x) - bc| < \epsilon$$

eşitsizliğinin geçerli olması için x'in a'nın ne kadar yakınında olması gerektiğini bulalım. Bunun için elbette a'da sürekli olduklarını bildiğimiz f ve g fonksiyonlarını hesapların içine sokmalıyız. Hesaplara başlayalım:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - bc| &= |f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc|\\ &\le |f(x)g(x) - f(x)c| + |f(x)c - bc|\\ &= |f(x)||g(x) - c| + |f(x) - b||c|.\end{aligned}$$

En alttaki

$$|f(x)||g(x) - c| + |f(x) - b||c|$$

ifadesinin ϵ sayısından küçük olmasını istiyoruz. Toplanan iki terimin her birini $\epsilon/2$ sayısından küçük yapabilirsek o zaman toplam ϵ'dan küçük olur. İfadenin sağındaki $|f(x) - b||c|$ terimi bu açıdan bir sorun teşkil etmiyor, çünkü ne de olsa c, x'ten bağımsız sabit bir sayı ve f'nin a'daki limiti b olduğundan, $|f(x)-b|$ sayısını $\frac{\epsilon}{2|c|}$'den küçük olacak biçimde seçebiliriz; o zaman, $|f(x)-b||c|$ terimi de $\frac{\epsilon}{2}$'den küçük olur. (Eğer $c = 0$ ise, $\epsilon/2c$ diye bir şey yoktur ama eğer $c = 0$ ise en sağdaki ifade zaten kaybolur. Eğer c'nin 0 olup olmamasıyla uğraşmak istemiyorsak, yukarıda merkezlenen ifadede $|c|$ yerine $|c| + 1 > 0$ sayısını koyup, x'i $|f(x)-b|$ sayısı $\frac{\epsilon}{2(|c|+1)}$'den küçük olacak biçimde seçebiliriz. Birazdan akıl yürütmelerimizi özetlediğimizde aynen bunu yapacağız.) Sağdaki $|f(x)||g(x) - c|$ terimi daha problematik çünkü, $|g(x) - c|$'yi küçültmemize rağmen, x değiştikçe $|f(x)|$ sayısı sınırsız büyürse çarpım çok küçük olmayabilir. Demek ki $f(x)$'in c civarında sınırlı olduğunu kanıtlamalıyız. Önce bunu kanıtlayalım, daha sonra teoremin resmî kanıtını veririz.

Teorem 4.9. *Eğer f'nin a'da limiti varsa o zaman f, a'nın bir komşuluğunda sınırlıdır; yani öyle $\delta > 0$ ve M sayıları vardır ki, eğer $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ ise, $|f(x)| < M$ olur.*

Kanıt: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olsun. Limitin tanımında $\epsilon = 1$ alalım. Dolayısıyla öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ ise, $|f(x) - b| < \epsilon = 1$ yani $b - 1 < f(x) < b + 1$ olur. Eğer $M = \max\{|b-1|, |b+1|\}$ ise, bu söylediğimizden $|f(x)| < M$ çıkar. □

Böylece Teorem 4.8'in kanıtı biter. Bütün bu yaptıklarımızı toparlayıp daha düzgün bir biçimde yazalım:

Teorem 4.8'in İkinci Kısmının Resmî Kanıtı: $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.
a. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, öyle bir pozitif $\delta_1 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \cap A$ ise,

$$|f(x) - b| < \frac{\epsilon}{2(|c|+1)}$$

olur. Dolayısıyla bu durumda,

$$|f(x) - b||c| < \frac{\epsilon}{2(|c|+1)}|c| = \frac{\epsilon}{2}\frac{|c|}{|c|+1} \le \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

olur.
b. Ayrıca, gene $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, Teorem 4.9'a göre, öyle $\delta_2 > 0$ ve $M > 0$ sayıları vardır ki, eğer $x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \cap A$ ise,

$$|f(x)| < M \tag{2}$$

olur.
c. $\lim_{x\to a} g(x) = c$ olduğundan, öyle bir pozitif $\delta_3 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in (a-\delta_3, a+\delta_3) \cap A$ ise,

$$|g(x) - c| < \frac{\epsilon}{2M} \tag{3}$$

olur.
d. Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ ve $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ olsun. O zaman (1, 2, 3) eşitsizliklerinden dolayı,

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - bc| &= |f(x)g(x) - f(x)c + f(x)c - bc| \\
&\le |f(x)g(x) - f(x)c| + |f(x)c - bc| \\
&= |f(x)||g(x) - c| + |f(x) - b||c| \\
&\le M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

olur. Teorem 4.8 kanıtlanmıştır. □

Sonuç 4.10. *Eğer f'nin a'da limiti varsa ve $r \in \mathbb{R}$ herhangi bir gerçel sayıysa, o zaman rf fonksiyonunun da a'da limiti vardır ve*

$$\lim_{x\to a} rf(x) = r \lim_{x\to a} f(x)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Teorem 4.8'de $g(x) = r$ alarak çıkar. Bir başka kanıt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

olsun. Eğer $r = 0$ ise her şey ortada. Bundan böyle r'nin 0 olmadığını varsayalım. Limitin tanımına göre, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A$ için

$$|f(x) - b| < \frac{\epsilon}{|r|}$$

olur, demek ki,

$$|rf(x) - rb| = |r||f(x) - b| < |r|\frac{\epsilon}{|r|} = \epsilon$$

olur. □

Bu sonucun bariz bir sonucu:

$$\lim_{x \to a}(-f(x)) = -\lim_{x \to a} f(x);$$

tabii eğer sağdaki ifadenin anlamı varsa, yani sağdaki limit varsa.

Örnek 4.19. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2+x-6}{x^2+3x-10}\right)^2$.

Kanıt: Örnek 4.18 ve Teorem 4.8'den dolayı sonuç $(5/7)^2 = 25/49$ bulunur. □

Teorem 4.8'e benzer bir sonuç $1/f$ fonksiyonu için de geçerlidir:

Teorem 4.11. *Eğer* $\lim_{x\to a} f(x)$ *varsa ve* 0 *değilse o zaman* $\lim_{x\to a} 1/f(x)$ *limiti de vardır ve*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}$$

eşitliği geçerlidir.

Bu teoremi kanıtlamadan önce Teorem 4.9'un bir benzerini kanıtlamalıyız.

Teorem 4.12. *Eğer* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* a*'da limiti varsa ve bir* $c \in \mathbb{R}$ *için,* $\lim_{x\to a} f(x) > c$ *oluyorsa, o zaman öyle bir* $\delta > 0$ *sayısı vardır ki, her* $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\}$ *için* $f(x) > c$ *olur.*

Kanıt: $\lim_{x\to a} f(x) = b > c$ olsun. $\epsilon = b - c > 0$ olsun. O zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\}$ ise,

$$|f(x) - b| < \epsilon,$$

yani $-\epsilon < f(x) - b$ ve $c = b - \epsilon < f(x)$ olur. □

Elbette benzer teorem "$<$" eşitsizlik imi için de geçerlidir.

Teorem 4.11'in kanıtında yukarıdaki teoremi $c = 0$'a uygulayacağız.

Teorem 4.11'in Kanıtı: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olsun. Sonuç 4.10'a göre, gerekirse f yerine $-f$ alarak, b'nin pozitif olduğunu varsayabiliriz. $\epsilon > 0$ olsun.

a. $\lim_{x\to a} f(x) = b > b/2$ olduğundan, Teorem 4.12'ye göre öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, eğer $x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) \cap A \setminus \{a\}$ ise,

$$f(x) > \frac{b}{2}$$

olur.

b. Öte yandan, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A \setminus \{a\}$ ise,

$$|f(x) - b| < \frac{b^2\epsilon}{2}$$

olur.

Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Elbette $\delta > 0$ olur. Eğer

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A \setminus \{a\}$$

ise, yukarıdaki iki paragrafı kullanarak,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - f(x)|}{|b||f(x)|} < \frac{|b - f(x)|}{b^2/2} < \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon$$

buluruz. □

4.5 Sıralama ve Limit

Bir önceki altbölümde sıralamayla ilgili bir sonuç kanıtladık, daha doğrusu kanıtlamak zorunda kaldık: Bu bölümde de yardımımıza yetişecek olan Teorem 4.12'yi kanıtladık. Bu bölümde Teorem 4.12'ye eşitsizlikle ilgili başka sonuçlar ekleyeceğiz.

f, g, A ve a, bir önceki bölümdeki gibi olsun: $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ sayısı A'nın bir yoğunlaşma noktası ve $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon. Eğer bir $\delta > 0$ için her $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap A$ elemanı

$$f(x) \leq g(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman "***a'nın bir komşuluğunda*** $f \leq g$" denir.

Teorem 4.13. *Eğer* $\lim_{x\to a} f(x)$ *ve* $\lim_{x\to a} g(x)$ *varsa ve* a*'nın bir komşuluğunda* $f \le g$ *ise o zaman,*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

olur.

Kanıt: a'nın bir komşuluğunda $f \le g$ olduğundan, tanım gereği, öyle bir $\delta_1 > 0$ sayısı vardır ki, her $x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \cap A \setminus \{a\}$ için

$$f(x) \le g(x)$$

olur.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x) = c$$

olsun. $b \le c$ eşitsizliğini göstermek istiyoruz. Bir an için, $b > c$ varsayımını yapalım.

$$d = \frac{b+c}{2}$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{x\to a} g(x) = c < d < b = \lim_{x\to a} f(x)$$

olur. Teorem 4.12'ye göre, öyle bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır ki, eğer

$$x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \cap A \setminus \{a\}$$

ise,

$$d < f(x)$$

olur. Gene Teorem 4.12'ye göre (daha doğrusu Teorem 4.12'nin bir benzerine göre), öyle bir $\delta_3 > 0$ sayısı vardır ki, eğer $x \in (a-\delta_3, a+\delta_3) \cap A \setminus \{a\}$ ise,

$$g(x) < d$$

olur.

Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ ise, her $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\}$ için

$$f(x) > d > g(x)$$

olur. Bu da $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\}$ iken $f(x) \le g(x)$ gerçeğiyle çelişir. □

Teorem 4.14 (Sandviç Teoremi)**.** *h, A'da tanımlı ve gerçel sayılarda değer alan bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ ve } \lim_{x\to a} g(x)$$

limitleri varsa ve eşitlerse ve a*'nın bir komşuluğunda* $f \le h \le g$ *ise o zaman,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

olur.

Kanıt: Eğer $\lim_{x\to a}(h(x) - f(x))$ limiti olduğunu ve bu limitin 0'a eşit olduğunu gösterirsek, o zaman

$$h(x) = (h(x) - f(x)) + f(x)$$

olduğundan, Teorem 4.8'e göre, $\lim_{x\to a} h(x)$ limiti vardır ve

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}(h(x) - f(x)) + \lim_{x\to a} f(x) = 0 + \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

olur. Demek ki

$$\lim_{x\to a}(g(x) - f(x)) = 0$$

eşitliğinden ve a'nın bir komşuluğunda

$$0 \le h - f \le g - f$$

eşitsizliklerinden hareketle

$$\lim_{x\to a}(h(x) - f(x))$$

limitinin olduğunu ve bu limitin 0'a eşit olduğunu kanıtlamamız gerekiyor.

Bütün fonksiyonları $-f$ ile öteleyerek $f = 0$ varsayımını yapabiliriz. Bu varsayımla

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

olur ve amacımız

$$\lim_{x\to a} h(x) = 0$$

eşitliğini göstermeye dönüşür. Bu amaçla rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı alalım.

$\lim_{x\to a} g(x) = 0$ olduğundan öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, $(a-\delta_1, a+\delta_1) \cap A \setminus \{a\}$ kümesindeki her x elemanı için,

$$-\epsilon < g(x) < \epsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

a'nın bir komşuluğunda $0 \le h \le g$ olduğundan öyle bir $\delta_2 > 0$ sayısı vardır ki, $(a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A \setminus \{a\}$ kümesindeki her x elemanı için,

$$0 \le h(x) \le g(x)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Elbette $\delta > 0$ olur. δ'nın seçiminden dolayı her $x \in (a - \delta_2, a + \delta_2) \cap A \setminus \{a\}$ elemanı için,

$$0 \le h(x) \le g(x) < \epsilon,$$

yani $-\epsilon \le h(x) < \epsilon$ sağlanır. Böylece $\lim_{x\to a} h(x) = 0$ eşitliği kanıtlanmış oldu. $\square$

Sonuç 4.15. *Yukarıdaki varsayımlara ilaveten $a = \sup A$ ve f'nin sınırlı olduğu varsayımını yapalım. Eğer f artansa $\lim_{x\to a} f(x) = \sup f(A)$, eğer f azalansa $\lim_{x\to a} f(x) = \inf f(A)$ olur.*

Kanıt: Sonucu artan fonksiyonlar için kanıtlamak yeterli. $b = \sup f(A)$ olsun. Teorem 4.13'ü $g(x) = b$ sabit fonksiyonuna uygularsak $\lim_{x\to a} f(x) \le b$ eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi rastgele bir $c < b = \sup f(A)$ sayısı alalım. O zaman bir $d \in A$ için $c < f(d)$ olur. Ayrıca f artan olduğundan A'daki her $x > d$ için $c < f(x)$ olur. Teorem 4.13'ü bu sefer $A \cap (d, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlanmış $g(x) = c$ sabit fonksiyonuna uygularsak $c \le \lim_{x\to a} f(x)$ elde ederiz. Bu eşitsizlik her $c < b$ için doğru olduğundan, $b \le \lim_{x\to a} f(x)$ eşitsizliğini buluruz. □

Örnek 4.20. $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow [-1, 1]$ bir fonksiyon olsun. Mesela f, Örnek 1.36'daki gibi bir fonksiyon olabilir. $g(x) = xf(x)$ tanımını yapalım. Her $x \in X$ için,

$$-|x| \le |g(x)| \le |x|$$

olduğundan, sandviç teoremine göre $\lim_{x\longrightarrow 0} g(x) = 0$ olur.

Alıştırmalar

4.21. Eğer $\lim_{x\to a} f(x)$ varsa o zaman $\lim_{x\to a} |f(x)|$ limitinin de olduğunu ve

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right|$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlayın.

4.22. $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$ ile $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ eşitliklerinin eşdeğer olduklarını kanıtlayın. (Birinin limiti varsa ve 0'a eşitse, diğerinin de vardır ve o da 0'a eşittir.) Ama eşdeğerliğin 0 dışında bir sayı için doğru olmadığını bir karşıörnekle gösterin.

4.23. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki yakınsak dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olsun. $(c_n)_n$, terimleri her n için,

$$a_n - b_n \le c_n \le a_n + b_n$$

eşitsizliğini sağlayan bir dizi olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ eşitliğini kanıtlayın.

4.6 Bileşke ve Limit

Bu altbölümde, limit ile fonksiyonların bileşkesi arasındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

Teorem 4.16. *$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Ayrıca $f(A) \subseteq B$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ve f'nin a'nın bir komşuluğunda birebir olduğunu varsayalım*[1]*. Eğer $\lim_{x\to b} g(x) = c$ ise*

$$\lim_{x\to a} g(f(x))$$

limiti vardır ve c'ye eşittir.

[1]Kanıttan da anlaşılacağı üzere, eğer f, a'nın bir komşuluğunda en fazla bir defa b değerini alıyorsa da teorem geçerlidir.

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. $\lim_{x\to b} g(x) = c$ olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki her $x \in (b-\delta_1, b+\delta_1) \cap B \setminus \{b\}$ için,

$$g(x) \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$$

olur. Ayrıca $\lim_{x\to a} f(x) = b$ olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\}$ için,

$$f(x) \in (b-\delta_1, b+\delta_1)$$

olur. f, a'nın bir komşuluğunda birebir olduğundan, f, a'nın bu komşuluğunda b değerini en fazla bir kez alabilir. $\delta > 0$ sayısını, $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\}$ ise $f(x) \neq b$ olacak kadar küçük seçebiliriz. Şimdi $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap A \setminus \{a\}$ ise, önce,

$$f(x) \in (b-\delta_1, b+\delta_1) \cap B \setminus \{b\}$$

olur; sonra da, ilk paragraftan dolayı

$$g(f(x)) \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Teorem 4.17. *A, $B \subseteq \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Ayrıca $f(A) \subseteq B$ ve $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ve g fonksiyonu b'de sürekli olsun. O zaman*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$$

olur.

Kanıt: g sürekli olduğundan, $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(b)$ olur. □

Alıştırmalar

4.24. Limit tanımını uygulayarak, $\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7$ eşitliğini kanıtlayın.

4.25. $\lim_{x\to 2}(3x^2+4x-5)$ limitini bulun.

4.26. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = 3$ eşitliğini kanıtlayın.

4.27. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^2-x-6}$ limitini bulun.

4.28. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{eğer } x \geq 3 \text{ ise} \\ 4x+1 & \text{eğer } x < 3 \text{ ise} \end{cases}$ olsun. $\lim_{x\to 3} f(x)$ limitini bulun.

4.29. Aşağıdaki limitleri bulun.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+4},\ \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{x-4},\ \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{2+4x-x^2},$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{2x^2-3x-35}{x-5},\ \lim_{x\to -3} \frac{x^3+9x^2}{x^3+8x^2-4x-57}.$$

4.30. $a > 0$ olsun. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}$ limitini bulun. $a = 0$ ise limit var mıdır?

4.31. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x)-1}{x} = 2$ eşitliğini kanıtlayın.
4.32. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(3x)-1}{2x}$ limitini bulun.
4.33. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$ eşitliğini kanıtlayın.

Cauchy-Sürekli Fonksiyonlar. Cauchy dizilerini Cauchy dizilerine götüren bir fonksiyona bazen ***Cauchy-sürekli*** denir. Eğer $X \neq \mathbb{R}$ ise, sürekli fonksiyonlar Cauchy-sürekli olmayabilirler. Örneğin Örnek 1.9'daki fonksiyon süreklidir ama Cauchy-sürekli değildir. Öte yandan $X = \mathbb{R}$ ise Cauchy-sürekli bir fonksiyon sürekli olmak zorundadır.

Teorem 4.18. *Cauchy-sürekli bir fonksiyon süreklidir.*

Kanıt: Nitekim, eğer $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsıyorsa, bir Cauchy dizisidir. O zaman,

$$x_0,\ x,\ x_1,\ x,\ x_2,\ x,\ x_3,\ x,\ x_4,\ \ldots$$

dizisi de Cauchy'dir ve limiti x'tir. f fonksiyonu Cauchy-sürekli olduğundan,

$$f(x_0),\ f(x),\ f(x_1),\ f(x),\ f(x_3),\ f(x),\ f(x_4),\ f(x),\ \ldots$$

dizisi Cauchy'dir. İçinde sabit $f(x)$ dizisi barındırdığından, bu Cauchy dizisi $f(x)$'e yakınsar. Demek ki $f(x)$'e yakınsayan bu dizinin bir altdizisi olan $(f(x_n))_n$ dizisi de $f(x)$'e yakınsar. Teorem 4.3'e göre f süreklidir. $\square$

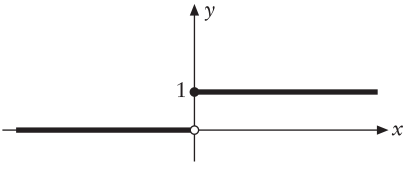
5. Limit Üzerine Daha Fazla

5.1 Sağdan ve Soldan Limit

Örnek 1.8'e bir daha bakalım:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu fonksiyonun grafiği şöyle:

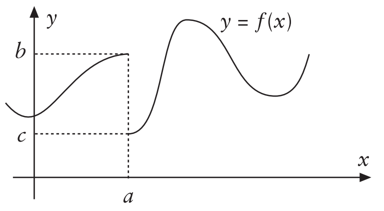


Fonksiyon 0'da sürekli değil ama belli ki bu fonksiyon 0'da o kadar da kötü davranmıyor; fonksiyon 0 dolayında soldan 0'a sağdan da 1'e yakınsıyor... Bu söylediğimizi birazdan matematikselleştireceğiz.

Öte yandan, kesirli sayılarda 1 değerini alan, kesirli olmayan sayılarda 0 değerini alan fonksiyon, 0'da (ve diğer noktalarda da) sürekli olmamakla kalmıyor, bir önceki fonksiyondan çok daha vahşice davranıyor.

Bu bölümde, ilk örneğimizde olduğu gibi, belki süreksiz ama gene de süreksiz olduğu noktalarda ele avuca gelen fonksiyonlarla uğraşacağız.

Grafiği aşağıda olan fonksiyonu ele alalım. Fonksiyon belli ki a noktasında sürekli değil, çünkü x, a'ya giderken $f(x)$ kâh b'ye kâh c'ye yakın oluyor. Daha doğrusunu söyleyelim: x, a'ya soldan yaklaşırken $f(x)$, b'ye yaklaşıyor ama x, a'ya sağdan yaklaşırken $f(x)$, c'ye yaklaşıyor. Buradan $f(x)$'in bir soldan bir de sağdan olmak üzere iki limiti olduğu düşüncesi doğabilir. Nitekim bu örnekte f'nin bir sol limiti bir de sağ limiti vardır.



Matematiksel tanımı yapmaya çalışalım: $A \subseteq \mathbb{R}$ bir gerçel sayılar kümesi ve $a \in \mathbb{R}$, A'nın bir yoğunlaşma noktası olsun. Ayrıca $b \in \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için, $(a - \delta, a) \cap A$ kümesindeki her x sayısının

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağladığı bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, "x, a'ya soldan giderken $f(x)$'in ***limiti*** b'dir" ya da "$f(x)$'in a'da ***soldan limiti*** b'dir" denir.

Ama bu tanımda bir şey eksik. Çünkü a, A'nın bir yoğunlaşma noktası olabilir ama pozitif bir δ için $(a - \delta, a) \cap A$ kümesi boşküme olabilir ve bu durumda her b sayısı f'nin a'da soldan limiti olur. Bunu kabul edilemez bir durum olarak addettiğimizden a ile A arasındaki ilişkiyi düzeltmeliyiz.

Eğer her $\delta > 0$ sayısı için $(a - \delta, a) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa, bu durumda a'ya A'nın ***soldan yoğunlaşma noktası*** diyelim. Bir başka deyişle, eğer a noktası $(-\infty,\, a) \cap A$ kümesinin yoğunlaşma noktasıysa, a'ya A'nın soldan yoğunlaşma noktası denir. Bu da, kolayca görüleceği üzere

$$\sup((-\infty,\, a) \cap A) = a$$

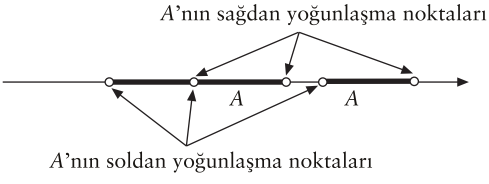
eşitliğine denktir. Benzer şekilde ***sağdan yoğunlaşma noktası*** tanımlanır; ama sağdan yoğunlaşma noktası bu sefer

$$\inf((a,\, \infty) \cap A) = a$$

eşitliğini sağlar. Örneğin 1 sayısı $(0, 1)$ aralığının soldan bir yoğunlaşma noktasıdır ama sağdan bir yoğunlaşma noktası değildir. 0, 1, 3 ve 4 noktaları

$$(0, 1) \cup (1, 2) \cup (3, 5)$$

kümesinin sağdan yoğunlaşma noktalarıdır; 1 ve 4 aynı zamanda soldan yoğunlaşma noktalarıdır.



Her soldan (ya da sağdan) yoğunlaşma noktası bir yoğunlaşma noktasıdır ama bunun tersi doğru değildir.

Şimdi tanımı verebiliriz:

Tanım: *$A \subseteq \mathbb{R}$ bir gerçel sayılar kümesi olsun. $a \in \mathbb{R}$, A'nın soldan bir yoğunlaşma noktası olsun. $b \in \mathbb{R}$ olsun. Ve nihayet $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için, $(a - \delta, a) \cap A$ kümesinin her x elemanının*

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağladığı bir $\delta > 0$ sayısı varsa, o zaman, "x, a'ya soldan giderken $f(x)$'in **limiti** *b'dir" ya da "$f(x)$'in a'da* **soldan limiti** *b'dir" denir.*

Yani x, a'ya giderken $f(x)$'in soldan limitinin b olması için, her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı olmalı ki,

$$x \in (a - \delta, a) \cap A$$

koşulu,

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

eşitsizliğini gerektirmeli. Bu koşul daha simgesel olarak şöyle yazılır:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ (0 < a - x < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon).$$

Sağdan limit benzer şekilde tanımlanır.

Sağdan ve soldan limitler daha önce gördüğümüz limit kavramından pek değişik kavramlar değildirler. Nitekim şu teorem doğrudur:

Önsav 5.1. *$A \subseteq \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ yukarıdaki tanımdaki gibi olsun. Herhangi bir $\alpha > 0$ sayısı seçelim. g fonksiyonu f fonksiyonunun $(a-\alpha, a) \cap A$ kümesine kısıtlanması olsun. O zaman, "x, a'ya soldan giderken $f(x)$'in limiti b'dir" önermesiyle $\lim_{x\to a} g(x) = b$ önermesi eşdeğer önermelerdir.*

Ayrıca eğer a, A'nın sağdan bir limit noktası değilse, "x, a'ya soldan giderken $f(x)$'in limiti b'dir" önermesiyle $\lim_{x\to a} f(x) = b$ önermesi eşdeğer önermelerdir.

Kanıt: Bariz. □

Yukarıdaki sonuç bize büyük bir rahatlık sağlar. Normal limit için kanıtladığımız birçok sonucu böylece sağdan ve soldan limitlere genişletebiliriz. Birazdan birçok uygulama örneği vereceğiz.

Aşağıdaki önsav ve teoremlerde, aksi belirtilmedikçe, bir f fonksiyonunun a'da soldan limitinden söz ediliyorsa, a'nın fonksiyonun tanım kümesinin soldan bir yoğunlaşma noktası olduğunu varsayacağız.

Önsav 5.2. *Soldan limit varsa tektir.*

Kanıt: Aynen Önsav 4.2 gibi. Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. Önsav 5.1'den de hemen çıkar. □

Önsav 5.2 sayesinde, x, a'ya soldan yaklaşırken $f(x)$'in limiti varsa, bu limiti,

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

olarak yazma hakkını kendimizde buluruz. Bu durumda, Önsav 5.1'deki tanımla

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

olur. Sağdan limit de

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

olarak gösterilir.

Önsav 5.3 (Sandviç Teoremi)**.** *f, g ve h üç fonksiyon olsun. Tanım kümelerinin kesişimine A diyelim. a sayısı A'nın soldan yoğunlaşma noktası olsun. Eğer f ve h'nin a'da soldan limitleri varsa ve bu limitler birbirlerine eşitlerse ve pozitif bir α sayısı için $(a - \alpha, a) \cap A$ kümesindeki her x sayısı,*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman g'nin de a'da soldan limiti vardır ve bu üç limit de birbirine eşittir.

Kanıt: Önsav 5.1'den ve önceki sandviç teoreminden (Teorem 4.14) çıkar. Doğrudan da kanıtlayabiliriz: f ve h'nin a'daki soldan limitlerine b diyelim. $\epsilon > 0$ rastgele olsun. $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ sayıları, tanım kümesindeki her $x \in A$ için,

$$0 < a - x < \delta_1 \to |f(x) - b| < \epsilon$$

ve

$$0 < a - x < \delta_2 \to |h(x) - b| < \epsilon$$

önermelerini sağlasın. $\delta = \min\{\alpha, \delta_1, \delta_2\}$ olsun. O zaman, $0 < a - x < \delta$ ise,

$$f(x) - b \leq g(x) - b \leq h(x) - b,$$

dolayısıyla

$$|g(x) - b| \leq \max\{h(x) - b, -(f(x) - b)\} < \epsilon$$

olur. Kanıt bitmiştir. □

Önsav 5.4. *f'nin a'da sağdan limiti varsa, $g(x) = f(-x)$ eşitliğiyle tanımlanan g fonksiyonunun $-a$'da soldan limiti vardır ve iki limit birbirine eşittir.*

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Aynı önermeler sağ ile sol terimleri değiş tokuş yapıldığında da geçerlidir elbet.

Teorem 4.8'in analogu sağ ve sol limitler için de geçerlidir.

Teorem 5.5. *Eğer f ve g'nin a'da sağdan (ya da soldan) limitleri varsa o zaman $f+g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonlarının da a'da sağdan (ya da soldan) limitleri vardır ve*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} (f+g)(x)$$

ve

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a^+} g(x)\right) = \lim_{x\to a^+} (f \cdot g)(x)$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca eğer $r \in \mathbb{R}$ ise,

$$\lim_{x\to a^+} rf(x) = r \lim_{x\to a^+} f(x)$$

olur.

Kanıt: Önsav 5.1 ve Teorem 4.8'den çıkar. İkinci önerme için Sonuç 4.10 uygulanmalı. □

Teorem 4.11'in muadili de aynı nedenden doğrudur:

Teorem 5.6. *Eğer* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *varsa ve* 0 *değilse o zaman* $\lim_{x\to a^+} 1/f(x)$ *limiti de vardır ve*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a^+} f(x)}$$

eşitliği geçerlidir. □

Teorem 5.7. *a, f fonksiyonunun tanım kümesinin soldan ve sağdan yoğunlaşma noktası olsun. f'nin a'da limiti olması için yeter ve gerek koşul, fonksiyonun o noktada soldan ve sağdan limiti olması ve bu limitlerin birbirine eşit olmalarıdır. Ayrıca bu durumda üç limit de birbirine eşittir, yani*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

olur.

Kanıt: Fonksiyonun bir noktada limiti varsa, fonksiyonun o noktada soldan ve sağdan limiti olduğu ve bu limitlerin eşit olduğu tanımlardan dolayı bariz.

Şimdi fonksiyonun a noktasında soldan ve sağdan limiti olduğunu ve bu limitlerin eşit olduklarını varsayalım. Sol ve sağ limitlere b diyelim. Fonksiyonun a'da limitinin b olduğunu kanıtlayacağız.

$\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. b, f'nin soldan limiti olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, $(a-\delta_1, a) \cap A$ kümesinin her x elemanı

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca b, f'nin sağdan limiti olduğundan, öyle bir $\delta_2 > 0$ vardır ki, $(a, a+\delta_2) \cap A$ kümesinin her x elemanı

$$|f(x) - b| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlar.

Şimdi $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Elbette $\delta > 0$ ve $(a - \delta, a + \delta) \cap A$ kümesinin her x elemanı $|f(x) - b| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlar. □

Örnek 5.1. *Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın.*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Kanıt: Kanıttan önce küçük bir ayrıntı: Burada limiti alınacak fonksiyonun tanım kümesine 0'ı dahil etmemek gerek, çünkü ifade 0'da tanımsız. Limiti almak için bir de 0'ın tanım kümesinin yoğunlaşma noktası olması gerek. Tanım kümesini $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ alabiliriz örneğin.

Limiti alınacak ifadeyle oynayalım:

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

En sağdaki ifadenin x, 0'a giderken limitini alacağız. Doğrusu pek kolaya benzemiyor. Neyse ki ifadenin soldan ve sağdan limitini alabiliriz. Önce x'in pozitif olduğunu varsayalım. O zaman,

$$1 < \frac{\exp x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp x$$

olur. Demek ki, $x > 0$ olduğunda,

$$1 < \frac{\exp x - 1}{x} < \exp x$$

elde ederiz. Ama $\exp x$, sürekli bir fonksiyon, dolayısıyla 0'da limiti var ve bu limit de $\exp 0$'a, yani 1'e eşit. Önsav 5.3'e göre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

$y = -x > 0$ olsun.

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\exp(-y) - 1}{-y} = \frac{\frac{1}{\exp y} - 1}{-y} = \frac{1}{\exp y} \frac{\exp y - 1}{y}$$

eşitliğinden, Önsav 5.4'ten ve biraz önce yapılanlardan dolayı

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{\exp y} \frac{\exp y - 1}{y} = 1 \times 1 = 1$$

elde ederiz.

Teorem 5.7'ye göre, son iki sonuçtan,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

eşitliği elde edilir. □

Alıştırmalar

5.2. $\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \exp x$ eşitliğini kanıtlayın.

5.3. $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{eğer } x \geq 3 \text{ ise} \\ 2x + 1 & \text{eğer } x < 3 \text{ ise} \end{cases}$ olsun. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 10$ ve $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$ eşitliklerini kanıtlayın.

5.4. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$ ve $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$ limitlerini bulun.

Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin üstsınırı yoksa, bazen, ∞'un A'nın soldan yoğunlaşma noktası olduğunu söyleme ihtiyacını hissedebiliriz. Benzer şeyi altsınırı olmayan kümeler ve $-\infty$ için de söyleyebiliriz, ama bu sefer sağdan yoğunlaşma noktası sözkonusu olur elbette (bkz. sayfa 75).

5.2 Limitler ve Sonsuzlar

Bu altbölümde, içinde hem limiti hem de sonsuzları barındıran kavramlardan söz edeceğiz. Örneğin,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b,\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ ve } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

gibi eşitliklerin matematiksel anlamlarını vereceğiz.

Örnek 5.5. Birinci duruma bir örnek verelim.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1}$$

formülüyle tanımlanan fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon her gerçel sayı için tanımlıdır. x çok çok büyüdüğü zaman bu fonksiyonun değerleri ne olur? Biraz düşününce anlaşılacağı üzere, x çok büyük olduğu zaman, $3x^2$ terimi paydaki

$$3x^2 - 4x + 5$$

terimine hükmeder, yani x çok büyük olduğunda, $3x^2$'nin yanında

$$-4x + 5$$

pek küçük kalır, esamesi bile okunmaz. Örneğin $x = 1000$ iken $3x^2$ sayısı 3 milyondur, ama $-4x + 5$ sayısı, mutlak değeri alındığında bile sadece 4000 dolayındadır. 3 milyonun yanında 4000'in sözü bile edilmez! x daha da büyüdükçe $3x^2$ ile $-4x + 5$ arasındaki fark astronomik olur. Benzer şey payda için de geçerlidir. Demek ki x çok çok büyük olduğunda, $f(x)$'in kabaca $3x^2/2x^2$, yani $3/2$'ye eşittir:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} \approx \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

x'e birkaç değer vererek, $f(x)$'i -örneğin Excel'de- hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&f(1) = 1{,}3333...\\
&f(2) = 1\\
&f(3) = 1{,}052631...\\
&f(10) = 1{,}31840...\\
&f(100) = 1{,}480175991...\\
&f(1.000) = 1{,}49800175..\\
&f(10.000) = 1{,}49980001...\\
&f(100.000) = 1{,}4998...\\
&f(1.000.000) = 1{,}49998...
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi x büyüdükçe $f(x)$ değeri 1,5 sayısına yani 3/2'ye çok yaklaşıyor. "x sonsuz olduğunda", $f(x)$ sanki tam 3/2 olacak! İşte bu bölümde "x sonsuz olduğunda" sözlerine anlam vereceğiz. Biz "x sonsuz olduğunda" demeyeceğiz de (çünkü olmaz öyle şey!), "x sonsuza gittiğinde" diyeceğiz.

$f(x)$'in x büyüdükçe 3/2'ye çok yakın bir değer olduğu şöyle de anlaşılabilir: Payı ve paydayı x^2'ye bölelim.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} = \frac{3 - 4/x + 5/x^2}{2 + 1/x^2} \approx \frac{3}{2}.$$

Beliren

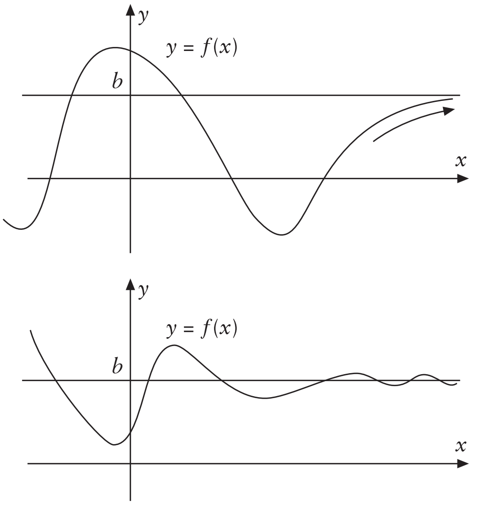
$$4/x,\ 5/x^2,\ 1/x^2$$

gibi ifadeler, beliren 3 ve 2 sayıları yanında çok küçük kalırlar, x büyüdükçe bu ifadeler 0'a çok yaklaşırlar, sonsuz diye bir gerçel sayı olsa, 0 değerini alacaklar, ama öyle bir gerçel sayı olmadığından sadece 0'a yakınsamakla yetiniyorlar.

Bütün bu söylediklerimiz edebiyata girer şimdilik. Aşağıda, tanımları matematiksel olarak vereceğiz.

5.2.1 Sonsuzda Limit

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b \in \mathbb{R}$ olsun. "x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye gider" ya da "b'ye yakınsar" cümlesinin matematiksel anlamını vereceğiz. Edebi anlamı şöyle: Eğer x'i yeterince büyük alırsak, $f(x)$'i b'ye istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz, yani $f(x)$ ile b arasındaki farkı istediğimiz kadar küçük yapabiliriz, yeter ki x belli bir sayıdan büyük olsun.



x sonsuza gittiğinde b'ye yakınsayan iki fonksiyonun grafiği

Örnek 5.5'te $b = 3/2$ ve eğer x'i 10.000'den büyük alırsak, $f(x)$ ile 3/2 arasındaki fark 0,001'i geçmez. Eğer $f(x)$ ile 3/2 arasındaki farkın 0,000001'i geçmemesini istiyorsak, o zaman x'i daha da büyük almalıyız. (Ne kadar büyük almamız gerektiğini bulmak zorunda değiliz! Yeter ki yeterince büyük aldığımızda $f(x)$'in b'ye istediğimiz kadar yakın olacağını bilelim. Öte yandan x'i ne kadar büyük almak gerektiği kendine özgü hoş bir problemdir.)

Matematiksel tanımı verme zamanı geldi: Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$x > A \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsar (ya da gider)" denir.

Birazdan kanıtlayacağımız üzere b sayısı, olduğunda, tektir; yani eğer x sonsuza gittiğinde $f(x)$ bir sayıya yakınsıyorsa, $f(x)$ ikinci bir sayıya daha yakınsayamaz. Bundan aldığımız yetkiyle,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

yazacağız.

Örnekler

5.6. $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$.
Kanıt: $f(x) = 1/x$ denklemiyle tanımlanan fonksiyonun tanım kümesini 0'ı içermeyen ve üstten sınırsız herhangi bir $X \subseteq \mathbb{R}$ olarak seçebiliriz. $\epsilon > 0$ olsun. $A = 1/\epsilon$ olsun. Eğer $x \in X$ sayısı, $x > A$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \frac{1}{A} = \epsilon$$

olur. İstediğimizi kanıtladık. □

5.7. Örnek 5.5'teki fonksiyonun x sonsuza giderken 3/2'ye yakınsadığını, yani

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} = \frac{3}{2}$$

matematiksel tanıma uygun olarak kanıtlayalım.
Kanıt: $\epsilon > 0$, verilmiş olsun. Öyle bir A bulacağız ki, her $x > A$ için,

$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanacak. (Burada $f(x)$, limiti alınacak kesirli ifadeyi simgeliyor.) Bunu yapmak için

$$\left| f(x) - \frac{2}{3} \right|$$

ifadesiyle oynayıp, bu ifadenin ϵ'dan küçük olması için A'nın ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız.

$$\left| \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{2(3x^2 - 4x + 5) - 3(2x^2 + 1)}{2(2x^2 + 1)} \right| = \left| \frac{-8x + 7}{2(2x^2 + 1)} \right| = \frac{|-8x + 7|}{2(2x^2 + 1)} \cdots$$

Bu aşamada x'i 1'den büyük almaya and içelim ki paydaki $-8x + 7$ ifadesi negatif olsun. Hesaplara kaldığımız yerden devam edelim:

$$\frac{|-8x + 7|}{2(2x^2 + 1)} < \frac{8x - 7}{2x^2 + 1} < \frac{8x}{2x^2 + 1} < \frac{8x}{2x^2} = \frac{4}{x}$$

Şimdi x'i $4/\epsilon$'dan büyük alırsak istediğimiz eşitsizliğe ulaşırız. x'i bir de ayrıca 1'den büyük almalıydık. Demek ki A sayısını $\max\{1, 4/\epsilon\}$ olarak seçebiliriz.

Alıştırmalar

5.8. Şu eşitlikleri limit tanımından hareketle kanıtlayın:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-5}{2x^2-1}=\frac{3}{2},\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+4x-5}{-2x^2+7}=\frac{-5}{2},\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+4x-5}{-2x^3+7}=0.$$

5.9. Aşağıdaki limitleri bulun ve bulduğunuz limitin ifadenin gerçekten limiti olduğunu tanımdan hareketle kanıtlayın.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+4x-5}{4x^2-1},\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+4x-5}{4x^3-1}.$$

Yukarıdaki alıştırmalarda, limiti alınan fonksiyonların her gerçel sayıda tanımlanmadığı dikkatinizi çekmiştir. Örneğin en son alıştırmada, $x = 1/4^{1/3}$ için $f(x)$ tanımsızdır. Ama ne önemi var ki!.. "x sonsuza giderken" $f(x)$'in kaça yakınsayacağı x'in çok büyük değerlerini ilgilendiren bir soru, $f(x)$'in birkaç sayıda aldığı değerden bağımsız. Örneğin, f ve g fonksiyonları belli bir B sayısından sonra eşitlerse, yani her $x > B$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa, o zaman, x sonsuza giderken $f(x)$'in limiti varsa x sonsuza giderken $g(x)$'in de limiti vardır ve bu iki limit birbirine eşittir. Bunu görmek için, tanımdaki A sayısını B'den büyük seçmek yeterli.

Demek ki aslında x sonsuza giderken $f(x)$'in limitini almak için fonksiyonun bütün $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı olması gerekmiyor, sadece tanım kümesinde x'in sonsuza gidebilmesi, yani tanım kümesinin üstten sınırlı olmaması, yani sayfa 97'de verdiğimiz tanımla ∞'un tanım kümesinin soldan bir yoğunlaşma noktası olması yeterli. Verdiğimiz tanımı genişletelim.

Tanım. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,*

$$(x \in X \ \text{ve}\ x > A) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsar (ya da gider)" denir.

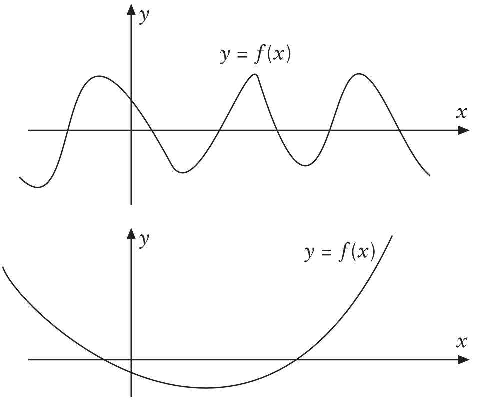
Dikkat edilirse, $X = \mathbb{N}$ olduğunda, x sonsuza gittiğinde $f(x)$'in b'ye yakınsamasıyla $(f(n))_n$ dizisinin n sonsuza gittiğinde b'ye yakınsaması aynı kavramlardır.

x sonsuza gittiğinde hiçbir sayıya yakınsamayan fonksiyon örneği vermek zor değildir. $f(x) = x$ ve $f(x) = x^2$ fonksiyonları x büyüdüğünde sürekli büyürler ve hiçbir sayıya yakınsamazlar. Ama sınırlı olup da x sonsuza gittiğinde hiçbir sayıya yakınsamayan fonksiyon örnekleri de vardır. -1 ile 1 arasında yer alan $\sin x$ fonksiyonu böyle bir örnektir (üstelik süreklidir); bunun kanıtını Altbölüm 9.4'te göreceğiz.

Belki yapay bulunabilecek bir örnek:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu alttan ve üstten sınırlıdır ama x sonsuza giderken limiti yoktur.



x sonsuza gittiğinde hiçbir sayıya yakınsamayan iki fonksiyonun grafiği

Şimdi limitin -olduğunda- bir tane olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 5.8. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsıyorsa o zaman x sonsuza gittiğinde $f(x)$ başka bir sayıya yakınsayamaz.*

Kanıt: x sonsuza gittiğinde $f(x)$ hem b'ye hem de c'ye yakınsasın ve $b \neq c$ olsun. $\epsilon = |c - b|/2$ olsun. B ve C sayıları,

$$(x \in X \text{ ve } x > B) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon/2$$

ve

$$(x \in X \text{ ve } x > C) \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon/2$$

önermelerini sağlayacak biçimde seçilsin. O zaman $x = |B| + |C| + 1$ için,

$$\text{hem } |f(x) - b| < \epsilon \text{ hem de } |f(x) - c| < \epsilon$$

olur. Demek ki,

$$2\epsilon = |b - c| \leq |b - f(x)| + |f(x) - c| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olur. Bir çelişki. □

Dolayısıyla x sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsıyorsa,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

yazabiliriz. (Birkaç tane olsaydı, limitlerden birini, örneğin en büyüğünü seçmek zorunda kalabilirdik, karekök fonksiyonunda yaptığımız gibi...)

Eğer $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ ise, X üstten sınırlı değilse ve $f : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x sonsuza giderken b'ye yakınsıyorsa, f'nin X'e kısıtlanışı olan $f_{|X}$ fonksiyonu da x sonsuza gittiğinde b'ye yakınsar. Elbette! Ama bunun tersi doğru değildir, yani x sonsuza gittiğinde f, b'ye ya da başka bir yere yakınsamadan da $f_{|X}$ fonksiyonu b'ye yakınsayabilir. Biraz önce buna bir örnek verildi,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases}$$

örneği. Öte yandan x sonsuza gittiğinde $f_{|X}$ fonksiyonu b'ye yakınsıyorsa, f fonksiyonu -eğer bir yere yakınsıyorsa- ancak b'ye yakınsayabilir.

x sonsuza giderken alınan limitlerde toplama, çarpma ve bölmede bir sorun çıkmaz, her şey aynen tahmin edildiği gibi olur.

Teorem 5.9. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstsınırlı olmayan bir küme, $r \in \mathbb{R}$ ve $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer x sonsuza gittiğinde $f(x)$ ve $g(x)$, sırasıyla b ve c'ye yakınsıyorsa o zaman x sonsuza gittiğinde*

$$f(x) \pm g(x),\ rf(x) \text{ ve } f(x)g(x)$$

fonksiyonları sırasıyla

$$b \pm c,\ rb \text{ ve } bc$$

sayılarına yakınsar. Eğer $c \neq 0$ ise ve $1/g$ fonksiyonu tanımlanmışsa, o zaman $1/g$ fonksiyonu $1/c$'ye yakınsar.

Kanıt: [N4, Teorem 5.4]'ün kanıtından pek bir farkı yok. Okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Son önerme için [N4, Teorem 5.5]'ten esinlenebilir. □

Alıştırmalar

5.10. Eğer $f(x)$ sınırlı bir fonksiyonsa,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

eşitliğini kanıtlayın.

5.11. $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. x sonsuza gittiğinde $f(x)$'in limiti olsun.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \text{ ve } \lim_{n\to\infty} f(n) = b$$

eşitliklerinin eşdeğer olduklarını kanıtlayın.

5.12. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

5.13. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1} - x) = 1/2$ eşitliğini kanıtlayın.

5.14. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+2}{5x^2+1} = \frac{3}{5}$ eşitliğini kanıtlayın. Bunu önce tanıma başvurarak, sonra da yukarıda kanıtlanan sonuçları kullanarak yapın.

5.15. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x+2}{6x^3+1}$ limitini bulun.

Bileşkeyle limitin ilişkisi biraz daha problematiktir.

Teorem 5.10. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, bir fonksiyon olsun.*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

olsun. $f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ için $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca (b'nin Y'nin bir yoğunlaşma noktası olduğunu ve)

$$\lim_{x\to b} g(x) = c$$

eşitliğini varsayalım. Bir de $f^{-1}(b)$ kümesi üstten sınırsız olduğunda $g(b) = c$ eşitliğini varsayalım. O zaman

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = c$$

olur.

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. $\lim_{x\to b} g(x) = c$ olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $y \in Y$, $0 < |y - b| < \delta$ eşitsizliklerini sağlıyorsa,

$$|g(y) - c| < \epsilon$$

olur. Öte yandan, $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ olduğundan öyle bir A vardır ki, $x > A$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in X$ için,

$$|f(x) - b| < \delta$$

olur. Eğer $f^{-1}(b)$ kümesi üstten sınırlıysa, A'yı

$$(A, \infty) \cap f^{-1}(b) = \emptyset$$

olacak kadar büyük seçelim.

Şimdi $x \in X$ sayısı $x > A$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|f(x) - b| < \delta$$

olur ve eğer $f(x) \neq b$ ise (örneğin $f^{-1}(b)$ kümesi üstten sınırlıysa), bundan,

$$|g(f(x)) - c| < \epsilon$$

çıkar. Eğer $f^{-1}(b)$ kümesi üstten sınırlı değilse, $f(x) = b$ eşitliğinin sağlandığı x noktalarında da gene

$$|g(f(x)) - c| = |g(b) - c| = 0 < \epsilon$$

olur. □

Sonuç 5.11. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, bir fonksiyon olsun.*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

olsun. $f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ içindeliklerini sağlayan bir Y kümesi için $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, b'de sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = c$$

olur. □

5.2.2 Eksi Sonsuzda Limit

Yukarıda yaptıklarımızı motamot x eksi sonsuza yakınsarken de yapabiliriz. Tanımı verelim.

Tanım. *$X \subseteq \mathbb{R}$, alttan sınırlı olmayan bir küme olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,*

$$(x \in X \text{ ve } x < A) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

*önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x eksi sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'**ye yakınsar** (ya da **gider**)" denir.*

x, eksi ya da artı sonsuza yakınsadığındaki limitler arasında çok yakın bir ilişki vardır.

Teorem 5.12. *$X \subseteq \mathbb{R}$, alttan sınırlı olmayan bir küme ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki iki önerme eşdeğerdir:*
a. *x, eksi sonsuza gittiğinde, $f(x)$, b'ye yakınsar.*
b. $\lim_{x\to\infty} f(-x) = b$.

Kanıt: Çok bariz. □

Bu teorem sayesinde, bir önceki bölümde kanıtladıklarımızdan aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Sonuç 5.13. *$X \subseteq \mathbb{R}$, alttan sınırlı olmayan bir küme olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, bir fonksiyon olsun. Eğer x eksi sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsıyorsa, o zaman, x eksi sonsuza gittiğinde $f(x)$ başka bir sayıya yakınsayamaz.*

Kanıt: Ya aynen Önsav 5.8'deki gibi kanıtlanır ya da Teorem 5.9 ve Önsav 5.8 kullanılır. □

Dolayısıyla eğer x eksi sonsuza gittiğinde $f(x)$, b'ye yakınsıyorsa

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

yazabiliriz.

Sonuç 5.14. *Teorem 5.9, x, eksi sonsuza giderken de geçerlidir.* □

Alıştırmalar

5.16. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -1$ eşitliğini kanıtlayın.

5.17. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = -1/2$ eşitliğini kanıtlayın.

5.2.3 Sonsuza Iraksamak

Bazen bir fonksiyon belli bir noktaya yaklaştığında sınırsız biçimde büyüyebilir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon x, 0'a çok yakınken çok büyür. Bu durumda, "x, 0'a giderken $f(x)$ sonsuza ıraksar (ya da gider)" deriz.

Biçimsel tanım şöyle:

Tanım. *$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a, X'in bir yoğunlaşma noktası olsun. Eğer her A için,*

$$(x \in X \ \text{ve}\ 0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow f(x) > A$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa, o zaman, x, a'ya giderken $f(x)$ ***sonsuza ıraksar*** *(ya da* gider*) ya da f'nin a*'***da limiti sonsuzdur*** *denir ve bu*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

olarak yazılır.

Eksi sonsuza ıraksamayı da tanımlayalım:

Tanım. *$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a, X'in bir yoğunlaşma noktası olsun. Eğer her A için,*

$$(x \in X \ \text{ve}\ 0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow f(x) < A$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, x, a'ya giderken $f(x)$ ***eksi sonsuza ıraksar*** *(ya da* ***gider****) denir ya da $f(x)$'in a*'***da limiti eksi sonsuzdur*** *denir ve bu*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

olarak yazılır.

Eğer bir fonksiyonun a'daki limiti ∞ ise, a'daki limit başka bir sayı ya da $-\infty$ olamaz elbette.

Sonsuza ıraksamak, aynen yakınsamak gibi toplama ve çarpma işlemleriyle uyumludur.

Teorem 5.15. $\lim_{x\to a} f(x)$ *ve* $\lim_{x\to a} g(x)$ *ya bir gerçel sayı ya da* $\pm\infty$ *olsun, yani* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ *kümesinde olsunlar.* $\overline{\mathbb{R}}$ *kümesinde toplamayı, çarpmayı ve bölmeyi şöyle tanımlayalım:*

$+$	$-\infty$	s	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
r	$-\infty$	$r+s$	∞
∞		∞	∞

$\times$	$-\infty$	$s<0$	0	$s>0$	∞
$-\infty$	∞	∞		$-\infty$	$-\infty$
$r<0$	∞	rs	0	rs	$-\infty$
0		0	0	0	
$r>0$	$-\infty$	rs	0	rs	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$		∞	∞

$\div$	$-\infty$	$s<0$	0	$s>0$	∞
$-\infty$		0	0	0	
$r<0$	∞	s/r	0	s/r	$-\infty$
0					
$r>0$	$-\infty$	s/r	0	s/r	∞
∞		0	0	0	

(sütun/sıra)

(*Boş hanelerde işlem tanımlanmamıştır.*) Eğer $*$ *işlemi, toplama, çarpma ya da bölme işlemlerinden birini simgeliyorsa ve*

$$\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) * \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

işlemi yukarıdaki tablolarda tanımlanmışsa, o zaman,

$$\lim_{x\to a} (f(x) * g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) * \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

olur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Sonuç 5.16. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *ise ve* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *bir gerçel sayıysa,*

$$\lim_{x\to a} rf(x) = r \lim_{x\to a} f(x)$$

eşitliği sağlanır. □

Sonuç 5.17. $f : X \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon ve* a, X*'in bir yoğunlaşma noktası olsun. O zaman,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to a} -f(x) = -\infty$$

ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

önermeleri doğrudur. □

İkinci önermedeki $\Rightarrow$ imi $\Leftrightarrow$ imiyle değiştirilemez; örneğin

$$f(x) = x$$

fonksiyonu x, 0'a giderken 0'a gider ama $1/x$ fonksiyonu x, 0'a giderken sonsuza gitmez.

Öte yandan, $f(x) = 1/x$ fonksiyonu x sağdan 0'a giderken sonsuza, soldan 0'a giderken de eksi sonsuza yakınsar. Bu terimleri de tanımlayalım:

Tanım. *$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a, X'in soldan bir yoğunlaşma noktası olsun. Eğer her A için,*

$$(x \in X \text{ ve } 0 < a - x < \delta) \Rightarrow f(x) > A$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, o zaman, x, a'ya soldan giderken $f(x)$ ***sonsuza ıraksar*** *(ya da* ***gider****) denir ve bu*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

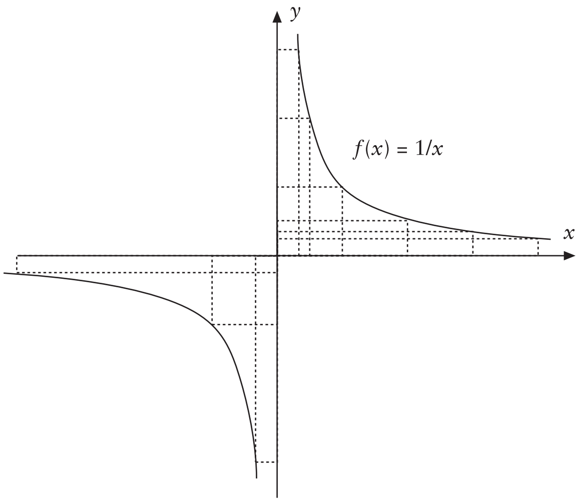
olarak yazılır.

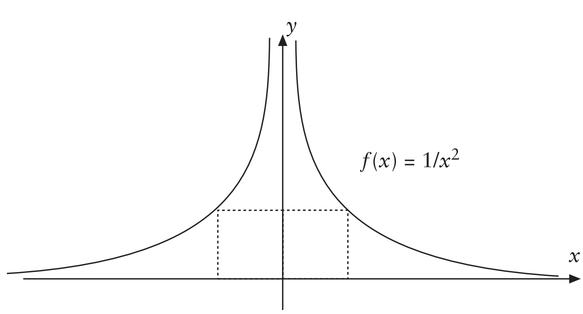
Diğer $\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$ tanımlarını vermeyi ve bu tanımlar için Teorem 5.9'un muadilini kanıtlamayı okurlara bırakıyoruz.

Örnek 5.18. Örneğin,

$$\lim_{x \to 0^-} 1/x = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} 1/x = \infty, \quad \lim_{x \to 0^-} 1/x^2 = \infty, \quad \lim_{x \to 0^+} 1/x^2 = \infty$$

olur. $f(x) = 1/x$ ve $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıda.





Sonsuzda $f(x)$'in Sonsuza Iraksaması: Son olarak,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

ifadesine bir anlam verelim. Sadece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

ifadesini tanımlamak yeterli diye düşünüyoruz.

İfadenin sezgisel anlamı açık olmalı: x çok çok çok büyüdüğünde $f(x)$'in de çok çok çok büyüdüğü anlamına gelir.

Örnekler

5.19. $\lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} x^2 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$.

5.20. Bir başka örnek daha:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 4x + 2}{6x^3 + 1} = \infty.$$

İşte tanım:

Tanım. *$X \subseteq \mathbb{R}$, üstten sınırlı olmayan bir küme olsun. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, bir fonksiyon olsun. Eğer her B sayısı için,*

$$(x \in X \text{ ve } x > A) \Rightarrow f(x) > B$$

*önermesini sağlayan bir A sayısı varsa, o zaman, "x **sonsuza gittiğinde** $f(x)$ **sonsuza ıraksar** (ya da **gider**)" denir. Bu durumda,*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

yazarız.

Diğer $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ tanımlarını ve tanımların toplama, çarpma ve bölmeyle uyumlu olduklarını kanıtlamayı ve aşağıdaki sonuçları okura bırakıyoruz.

Teorem 5.18. *$f \neq 0$ ve $g \neq 0$ iki polinom olsun. a ve b bu polinomların başkatsayısıysa, $\epsilon = ab/|ab| = \pm 1$ olsun.*

$$\begin{array}{l} \textit{Eğer } \deg f < \deg g \textit{ ise } \lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0, \\ \textit{Eğer } \deg f > \deg g \textit{ ise } \lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \epsilon\infty, \\ \textit{Eğer } \deg f = \deg g \textit{ ise } \lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = a/b \end{array}$$

olur. □

Sandviç Teoremi'nin uygun versiyonu da bu tür limitler için geçerlidir:

Teorem 5.19. *f ve g, tanım kümeleri üstten sınırlı olmayan iki fonksiyon olsun. Eğer $f \leq g$ ve $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ise $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ olur.* □

Örnekler

5.21. $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ olur çünkü eğer $x \geq 0$ ise

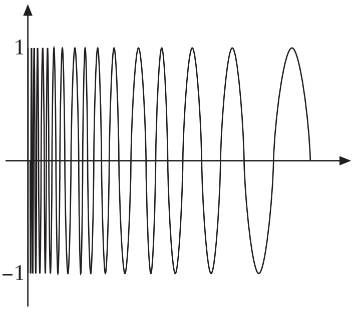
$$\exp x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x$$

olur ve istediğimiz Teorem 5.19'dan çıkar.

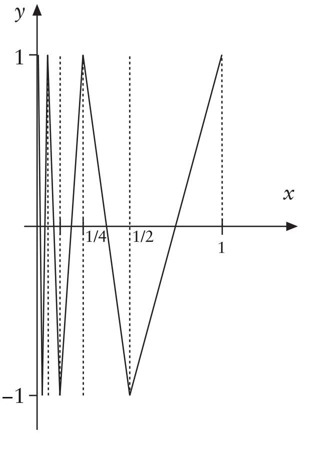
5.22. Benzer şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} = \infty$ eşitliği de kanıtlanır, yani exp fonksiyonu tüm polinomlardan daha hızlı sonsuza gider.

5.23. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıysa, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(-x)$ limitlerinden biri $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümesinde varsa, o zaman diğeri de vardır ve limitler birbirine eşittirler.

5.24. $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\lim_{x\to a^+} f(x)$ limiti olmak zorunda değil. Mesela $f(x) = 1/x$ kuralıyla tanımlanmış $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ olur. Ama bundan çok daha dramatik örnekler de var. $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu x değişkeni 0'a yaklaştıkça -1 ile 1 arasında giderek daha sık inip çıksın. Örneğin $f(x) = \sin(1/x)$ böyle bir fonksiyondur.



Ama sin fonksiyonuyla ya da f'nin grafiğiyle herkes haşır neşir olmayabilir. Bu örneği biraz değiştirelim: Eğer $n > 0$ tekse, f'nin grafiği $(1/n, 1)$ noktasıyla $(1/(n+1), -1)$ noktasına bağlayan doğru parçası olsun. Eğer $n > 0$ çiftse, f'nin grafiği $(1/n, -1)$ noktasıyla $(1/(n+1), 1)$ noktasına bağlayan doğru parçası olsun. Grafik aşağıdaki gibi, 1'e yaklaştıkça sıklaşıyor.



Görüldüğü üzere x, 0'a giderken $f(x)$ değeri -1 ile 1 arasında inip çıkıyor. Öte yandan Sonuç 5.21'de aynı sorunun monoton fonksiyonlarda yaşanmadığını göreceğiz.

5.25. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ise $\lim_{x\to\infty} 1/f(x) = 0$ eşitliğini kanıtlamak zor değildir, nitekim eğer $f(x)$ alabildiğine büyüyorsa, x'i yeterince büyük alarak $1/f(x)$'i istediğimiz kadar 0'a yakın yapabiliriz. Buradan ve önceki örneklerden

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} 1/\exp x = 0$$

bulunur.

5.26. Yukarıdaki örneklerin sonucu olarak exp fonksiyonunun $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R}^{>0}$ arasında bir eşleme olduğu çıkar. Nitekim $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ ve $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ olduğundan, aradeğer teoremine (Teorem 3.3) göre exp fonksiyonu 0'dan büyük her değeri alır. Ayrıca kesin artan olduğundan [N4, Sonuç 10.14], exp birebir bir fonksiyondur.

5.27. Bir önceki örneği kullanarak $a \geq 0$ ve $r \in \mathbb{R}$ için a^r tanımı şöyle yapılabilir: Önce $a = e^b$ eşitliğini sağlayan bir b bulunur ve $a^r = e^{br} = \exp br$ tanımı yapılır. Birçok kitapta da a^r sayısı bu yöntemle tanımlanır. Buradan da $x \mapsto a^x$ fonksiyonunun sürekli olduğu hemen çıkar. Ama biz bu kitapta a^r sayısını tanımlamak için başka bir yöntem kullanacağız (bkz. Bölüm 6).

Alıştırmalar

5.28. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ ise, $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

5.29. Eğer $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ve g sınırlıysa, $\lim_{n\to\infty} (f(x) + g(x)) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

5.30. Sonuç 5.16 ve 5.17'yi $a = \infty$ için kanıtlayın.

5.31. Aşağıdaki limitleri bu bölümdeki yöntemleri kullanarak bulun.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^4 + 4x + 2}{6x^3 + 1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{-6x^2 + 4x + 2}{6x^3 + 1},$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^3 + 4x + 2}{4x^3 + 1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2 + 4x + 2}{10x^2 + 1}$$

5.32. $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ ve $\lim_{x\to\infty} \exp(-x) = 0$ eşitliklerini kanıtlayın.

5.33. Aşağıdaki limitleri bulun.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\exp x - 3}{5\exp x + 7} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2\exp x - 3}{5\exp 2x + 7},$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\exp(-x) - 3}{5\exp(-x) + 7}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{4\exp 3x - \exp x}{7\exp 3x + \exp 2x}$$

5.34. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-12}{x^3-3x-2}$ limitini bulun.

5.35. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}, \qquad \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 8x^2 + 9x + 18}{x^2 - 5x + 6},$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{\exp x - \exp 3}{x - 3}, \quad \lim_{x\to 3} \frac{\exp 2x - \exp 6}{x - 3}.$$

5.36. a herhangi bir sayı olsun.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a + x)^3 - a^3}{x}$$

limitini bulun.

5.37. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-27}{7x+4},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+9x+18}{x^3-5x+6},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-27}{5x^3+2x-3},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+9x+18)^3}{x^6-5x^2+6}.$$

5.38. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-27}{7x+4},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2+9x+18}{-x^3-5x+6},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-27}{-5x^3+2x-3},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-2x^2+9x+18)^3}{x^6-5x^2+6},\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-27}{-5x^3+2x-3}\right)\left(\frac{5x^2-7}{2x-3}\right),$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{x-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}\right),\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x^2}-\frac{2x-5}{3x+3}\right),$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{x^2}-\frac{2x^2-5}{3x+3}\right).$$

5.39. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-27}{7x},\quad \lim_{x\to0^-}\frac{x^3-27}{7x},\quad \lim_{x\to3^-}\frac{3x^2-17}{-x^3+27},\quad \lim_{x\to3^-}\frac{x^2-1}{-x^3-27}.$$

5.40. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x},\quad \lim_{x\to0}\exp x^2,\quad \lim_{x\to0}\frac{(8-x)^{1/3}-2}{x},$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\exp(2x)-1}{\exp x-1},\quad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+34}-\sqrt{x}),\quad \lim_{x\to\infty}((x-5)^{1/3}-x^{1/5}).$$

5.41. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x^2-1},\quad \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x^2-1},\quad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1},\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}.$$

5.42. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to\infty}\exp x,\quad \lim_{x\to-\infty}\exp x,\quad \lim_{x\to-\infty}x\exp x,$$
$$\lim_{x\to0}x\exp x,\quad \lim_{x\to0^+}\exp\frac{1}{x},\quad \lim_{x\to0^-}\exp\frac{1}{x}.$$

5.43. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\exp x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\exp x}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\exp x}{x^n}\quad (n\in\mathbb{N})$$

("Eksponansiyel büyüme" tabirinin menşei bu limittir.)

5.44. $f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x} & \text{eğer } x>0 \text{ ise}\\ 3x & \text{eğer } x\le 0 \text{ ise}\end{cases}$ olarak tanımlansın. x, sonsuza, eksi sonsuza, 0^+'ya ve 0^-'ye giderken f'nin limitlerini bulun.

5.45. n bir doğal sayı olsun. $\lim_{x\to-\infty}x^n\exp x$ limitini bulun.

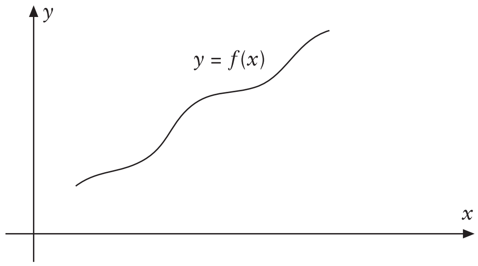
5.46. Aşağıdaki limitleri bulun.

$$\lim_{x\to-\infty}\exp(\exp x),\ \lim_{x\to\infty}\exp(\exp x),\ \lim_{x\to-\infty}\exp(1/\exp(1/x)),\ \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}.$$

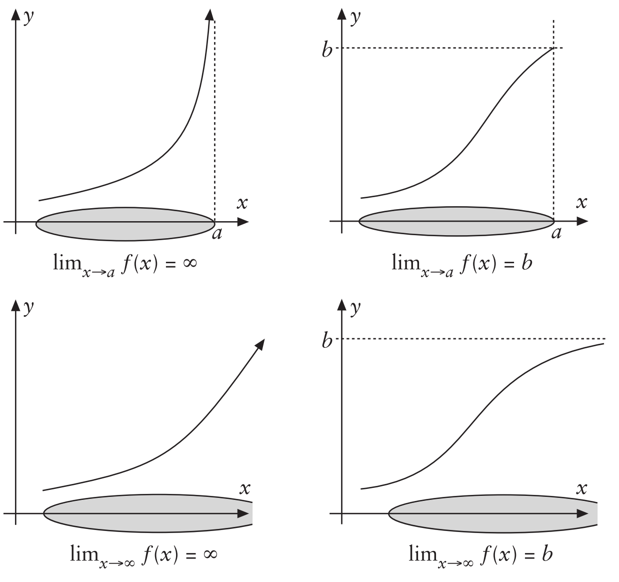
5.3 Monoton Fonksiyonlar, Limit ve Süreklilik

Örnek 5.24'te, eğer $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekliyse $\lim_{x\to a^+} f(x)$ limitinin olmayabileceğini görmüştük. Burada eğer fonksiyon monotonsa (sürekli olmasına bile gerek yok) her şeyin yolunda gideceğini göreceğiz.

Bir $I \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerine tanımlanmış artan bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düşünelim. Örneğin şöyle bir şey:



x, tanım kümesinin üstsınırına (soldan tabii ki) gittiğinde, fonksiyonun sonlu ya da sonsuz bir limiti olması -her zaman doğru olmasa da- makul bir öngörüdür. Aşağıda aklımıza hemen gelen olası dört durum görünüyor:



Artan bir fonksiyonun, x, tanım kümesinin üstsınırına gittiğinde, sonlu ya da sonsuz bir limiti var mıdır ve varsa bu limit nedir?

Her ne kadar yukarıdaki şekillerde fonksiyonlar sürekli gibi görünse de, fonksiyonların sürekli olmalarına pek gerek yok sanki. Fonksiyon sürekli de olsa süreksiz de olsa, limit olmalı gibi...

Teorem 5.20. *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a = \sup A$ olsun. Eğer f artansa* $\lim_{x\to a} f(x) = \sup f(A)$ *olur.*

Kanıt: Sonuç 4.15'in kanıtının bir benzerini yapacağız. Nitekim o kanıtta a'nın ve $\sup f(A)$'nın sonlu sayılar olduğunu neredeyse hiç kullanmamıştık. $b = \sup f(A)$ olsun. Eğer b sonluysa, Teorem 4.13'ü $g(x) = b$ sabit fonksiyonuna uygularsak $\lim_{x\to a} f(x) \le b$ eşitsizliğini elde ederiz. Eğer b sonsuzsa bu eşitsizlik elbette doğru. Şimdi rastgele bir $c < b = \sup f(A)$ sayısı alalım. O zaman bir $d \in A$ için $c < f(d)$ olur. Ayrıca f artan olduğundan A'daki her $x > d$ için $c < f(x)$ olur. Teorem 4.13'ü bu sefer $A \cap (d, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlanmış $g(x) = c$ sabit fonksiyonuna uygularsak $c \le \lim_{x\to a} f(x)$ elde ederiz. Bu eşitsizlik her $c < b$ için doğru olduğundan, $b \le \lim_{x\to a} f(x)$ eşitsizliğini buluruz. □

Sonuç 5.21. *$I \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton artan bir fonksiyon olsun.*

i. *Eğer a, I'nın soldan yoğunlaşma noktasıysa*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}$$

olur. (Eğer $a = \infty$ ise $a^- = \infty$ olsun.)

ii. *Eğer a, I'nın sağdan yoğunlaşma noktasıysa*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ a < x\}$$

olur. (Eğer $a = -\infty$ ise $a^+ = -\infty$ olsun.)

Kanıt: Birinci önermeyi kanıtlamak yeterli, ikincisi benzer. I'yı a'da keserek, yani I yerine $(-\infty, a) \cap I$ kümesini alarak $\sup I = a$ varsayımını yapabiliriz. Bu durumda sonuç Teorem 5.20'de verilmiştir. □

Benzer bir sonuç, elbette azalan fonksiyonlar için de geçerlidir.

$c \in I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon olsun.

$$f\left(c^+\right) = \begin{cases} f(c) & \text{eğer } c,\ I\text{'nın sağdan yoğunlaşma noktası değilse} \\ \lim_{x\to c^+} f(x) & \text{eğer } c,\ I\text{'nın sağdan yoğunlaşma noktasıysa} \end{cases}$$

$$f\left(c^-\right) = \begin{cases} f(c) & \text{eğer } c,\ I\text{'nın soldan yoğunlaşma noktası değilse} \\ \lim_{x\to c^-} f(x) & \text{eğer } c,\ I\text{'nın soldan yoğunlaşma noktasıysa} \end{cases}$$

tanımlarını yapalım. f monoton artan ise

$$J_f(c) = f\left(c^+\right) - f\left(c^-\right)$$

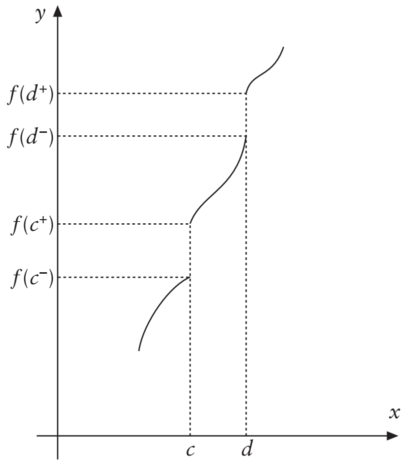
f monoton azalan ise

$$J_f(c) = f\left(c^-\right) - f\left(c^+\right)$$

olarak tanımlanır. $J_f(c)$ sayısına f'nin c'deki ***sıçraması*** denir.

Elbette f'nin bir c noktasında sürekli olması demek, aynen $J_f(c) = 0$ demektir (Teorem 5.7 ve Sonuç 4.4). Bundan da hemen şu ilginç olgu çıkar:

Sonuç 5.22. *Monoton bir fonksiyon sadece (sonlu ya da sonsuz) sayılabilir sayıda noktada süreksiz olabilir.*



Kanıt: $I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (mesela) artan bir fonksiyon olsun.

$$D = \{c \in I : \; f \text{ fonksiyonu } c\text{'de süreksiz}\}$$

olsun. Her $c \in D$ için $I_c = (f(c^-), f(c^+))$ olsun. I_c açık bir aralıktır ve uzunluğu $J_f(c) > 0$ olduğundan boşküme değildir. Ayrıca iki farklı c_1, $c_2 \in D$ için, I_{c_1} ve I_{c_2} ayrık aralıklardır. Oysa $\mathbb{R}$'de sayılabilir sayıda ayrık açık aralık olabilir[1]. □

Birazdan bir aralık üzerinde tanımlı kesin monoton bir fonksiyonun tersinin de sürekli olduğunu kanıtlayalım. Önce bir önsav:

Önsav 5.23. *$I \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon olsun. Eğer $f(I)$ da bir aralıksa f süreklidir.*

Birinci Kanıt: Şu basit olguyu kullanacağız: Boş olmayan açık bir J aralığıyla bir K aralığının kesişimi ya boşkümedir, ya sonsuzdur, ya da K tek bir noktadan oluşur.

Gerekirse f yerine $-f$ fonksiyonunu alarak, genelliği bozmadan f'nin artan olduğunu varsayabiliriz.

Diyelim f fonksiyonu $c \in I$ noktasında süreksiz. O zaman $f(c^-) < f(c^+)$ olur. f artan bir fonksiyon olduğundan $(f(c^-), f(c^+))$ açık aralığıyla $f(I)$

[1] Boş olmayan her açık aralıktan kesirli bir sayı seçersek, ayrık açık aralık sayısının kesirli sayı sayısından fazla olamayacağını görürüz.

aralığı en fazla $f(c)$ noktasında kesişebilir. Eğer kesişim tek bir noktaysa, birinci paragrafta söylediğimiz gereğince, $f(I)$ tek bir noktadan oluşuyor demektir, yani f sabit bir fonksiyondur. Bundan böyle

$$(f(c^-),\, f(c^+)) \cap f(I) = \emptyset$$

varsayımını yapalım. $f(c) \in f(I) \cap [f(c^-), f(c^+)]$ olduğundan,

$$[f(c^-), f(c^+)] \cap f(I) = \{f(c)\}$$

olur. Dolayısıyla $f(c)$ her iki aralığın da uç noktalarından biridir (birinin sağ uç noktasıysa, diğerinin sol uç noktası olmalıdır ve tam tersi). $f(c)$, $f(I)$'nın uç noktası olduğundan, f'nin monotonluğundan ya $I \subseteq (-\infty, c]$ ya da $I \subseteq [c, \infty)$ olduğu çıkar. Diyelim ikinci şıktayız; dolayısıyla $f(c^-) = f(c)$ olur. Bu durumda, f artan olduğundan, $f(I) \subseteq [f(c), \infty)$ olur. Varsayımımızdan $f(c) = f(c^-) < f(c^+)$ elde ederiz. Şimdi, $[f(c^-), f(c^+)] \cap f(I) = \{f(c)\} = \{f(c)\}$ eşitliğinden, $f(I) = \{f(c)\}$ çıkar, ki bu da f sabit fonksiyon demektir. $I \subseteq (-\infty, c]$ şıkkı da benzerdir.

İkinci Kanıt[2]**:** $f(c^-) < t < f(c^+)$ olsun. Eğer c tanım kümesinin soldan yoğunlaşma noktası değilse, $f(c) = f(c^-) < t$ olur. Aksi durumda, bir $x < c$ vardır ve $f(x) \leq f(c^-) < t$ olur. Demek ki her iki durumda da $f(x) < t$ ve $x \leq c$ eşitsizliklerini sağlayan bir $x \in I$ bulduk. Benzer şekilde $t < f(y)$ ve $c \leq y$ eşitsizliklerini sağlayan bir $y \in I$ bulunur. Demek ki

$$t \in [f(x),\, f(y)] \subseteq f(I).$$

Bu, her $t \in (f(c^-),\, f(c^+))$ için doğru olduğundan,

$$(f(c^-),\, f(c^+)) \subseteq f(I),$$

yani $(f(c^-),\, f(c^+)) = (f(c^-),\, f(c^+)) \cap f(I)$ olur. Ama $(f(c^-),\, f(c^+)) \cap f(I) \subseteq \{f(c)\}$. Demek ki $(f(c^-),\, f(c^+)) \subseteq \{f(c)\}$, bir çelişki. □

Teorem 5.24. *I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ kesin monoton ve sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman $J = f(I)$ bir aralıktır ve $f : I \longrightarrow J$ fonksiyonunun tersi olan $g : J \longrightarrow I$ fonksiyonu süreklidir.*

Kanıt: Teorem 3.10'a göre J bir aralıktır. Ayrıca g de kesin monotondur. Bir önceki önsava göre g süreklidir. □

Sonuç 5.25. *I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ birebir ve sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman $J = f(I)$ bir aralıktır ve f'nin tersi olan $g : J \longrightarrow I$ fonksiyonu süreklidir.*

[2]Bu kanıt ve yukarıdaki kanıtı temizlediği için Yusuf Ünlü'ye teşekkürler.

Kanıt: Sonuç 3.11'e göre f kesin monotondur. Teorem 3.10'a göre J bir aralıktır. Teorem 5.24'e göre g süreklidir. $\square$

Tanım kümesi bir aralık olan kesin monoton fonksiyonlar sayılabilir birkaç noktada süreksiz olabilirler ama ters fonksiyonları her yerde sürekli olmak zorunda:

Sonuç 5.26. *I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ kesin monoton bir fonksiyon olsun. O zaman f'nin tersi olan $g : f(I) \longrightarrow I$ fonksiyonu süreklidir.*

Kanıt: Her şeyden önce g'nin olduğunu görelim. Ardından g'nin de monoton olduğunu görelim. Şimdi sonuç Önsav 5.23'ten hemen çıkar. $\square$

6. Sürekli Fonksiyon Genişletmek ve Üs Almak

6.1 Sürekli Fonksiyon Genişletmek

[N4, Altbölüm 3.1]'de, her q kesirli sayısı ve her a pozitif gerçel sayısı için, adına "a'nın q'üncü kuvveti" denilen ve a^q diye yazılan bir sayı tanımlamıştık. (a^q sayısının varlığı, Aradeğer Teoremi'nden de çıkar, bkz. Alıştırma 3.16.)

$q \in \mathbb{Z}$ iken, a^q, ilkokuldan beri bildiğimiz kuvvet almaydı. $q = 1/2$ iken de a^q sayısını yıllar öncesinden öğrenmiştik: $a^{1/2} = \sqrt{a}$, yani a'nın karekökü.

Demek ki, örneğin $(\sqrt{2})^{3/5}$ diye bir sayının varlığını -tam olarak hesaplayamasak da- biliyoruz, ancak $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ diye, hatta $2^{\sqrt{2}}$ diye bir sayının varlığını henüz bilmiyoruz çünkü bir gerçel sayının $\sqrt{2}$ gibi kesirli olmayan bir kuvvetini şimdiye kadar hiç tanımlamadık[1]. İşte bu bölümde pozitif bir gerçel sayının **gerçel** bir kuvvetini almayı ve çok daha fazlasını öğreneceğiz.

Yapacağımız iş aslında oldukça basit. Eğer $a > 0$ ve r herhangi birer gerçel sayıysa ve $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi r'ye yakınsıyorsa, o zaman a^r sayısı $(a^{q_n})_n$ dizisinin limiti olacak, yani (tanım gereği)

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

olacak.

$a \in \mathbb{R}^{>0}$, sabit bir sayı olsun. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(q) = a^q$$

olarak tanımlansın. (Aslında f fonksiyonu değerlerini $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinde alır; ama bunun önemi olmayacak.) f'yi $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden (aslında $\mathbb{R}^{>0}$ kümesine giden ve gene sürekli olan) bir fonksiyona genişletmek istiyoruz. Bunu yapmak için dört olguya ihtiyacımız olacak:

[1] Bu dediğimiz tam doğru değil; [N4, Bölüm 20]'de üs alma kitabın sonunda ek olarak tanımlanmıştı. Ama Yusuf Ünlü'nün kaleme aldığı o bölüm, ikincisini elinizde tuttuğunuz bu analiz ciltlerinin dışında değerlendirilmeli.

1. $f(q) = a^q$ formülüyle tanımlanmış $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur.

2. Eğer $(q_n)_n$, terimleri kesirli sayılar olan bir Cauchy dizisiyse, $(f(q_n))_n$ de bir Cauchy dizisidir. (Her sürekli fonksiyonun bu özelliği olmayabilir; bkz. Örnek 1.9. Bu özelliği olan sürekli bir fonksiyona Cauchy-sürekli denir ve Cauchy sürekli fonksiyonlar süreklidirler. Bkz. Altbölüm 4.6.)

3. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de yoğundur, yani herhangi iki gerçel sayı arasında kesirli bir sayı vardır. Bunun bir başka eşdeğer ifadesi, her gerçel sayıya yakınsayan bir kesirli sayı dizisinin varlığıdır.

Üçüncü önermenin doğruluğunu [N4, Teorem 2.13] ya da [N4, Teorem 8.7]'den biliyoruz, ama ilk iki önermenin kanıtlanması gerekiyor. Gereksineceğimiz dördüncü önerme ise "teorem" adını fazlasıyla hakediyor:

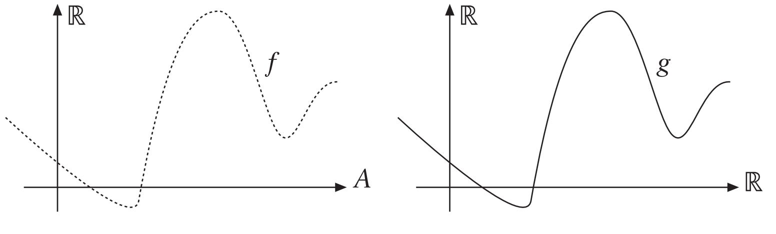
Teorem 6.1. *A, $\mathbb{R}$'nin yoğun bir altkümesi ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca terimleri A'da olan her Cauchy dizisinin imgesi de bir Cauchy dizisi olsun, yani f Cauchy-sürekli olsun. O zaman, $g_{|A} = f$ eşitliğinin sağlandığı bir ve bir tane $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. Ayrıca eğer r herhangi bir gerçel sayıysa ve terimleri A'dan olan $(a_n)_n$ sayı dizisi r'ye yakınsıyorsa, o zaman*

$$g(r) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

olur.

"A, $\mathbb{R}$'de ***yoğun***" demek, $\mathbb{R}$'nin herhangi iki farklı elemanının arasında A'dan bir eleman var demektir; ya da her $x \in \mathbb{R}$ ve her $\epsilon > 0$ için $|x - a| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ elemanı var demektir; ya da verilmiş her gerçel sayıya yakınsayan terimleri A'dan seçilmiş bir sayı dizisi var demektir.

Bir sonraki şekil teoremi görselleştiriyor.



Teoremin kanıtı bu bölümün sonuna kadar sürecek.

Teoremdeki g fonksiyonunun (eğer varsa) bir tane olduğunu kanıtlamak pek zor değil, hemen kanıtlayalım:

Teorem 6.2. *Eğer $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden iki sürekli fonksiyon $\mathbb{R}$'nin yoğun bir altkümesinde birbirlerine eşitse, o zaman bu iki fonksiyon her yerde eşittir.*

Kanıt: Eğer g_1 ve g_2, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden iki sürekli fonksiyonsa ve $\mathbb{R}$'nin yoğun bir altkümesinde birbirlerine eşitlerse, o zaman $g_1 - g_2$ olarak tanımlanan h

fonksiyonu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve $\mathbb{R}$'nin yoğun bir altkümesinde sabit 0 değeri alan bir fonksiyondur. h'nin $\mathbb{R}$ üzerinde sabit 0 değeri aldığını kanıtlamak yeterli.

h'nin 0 değeri aldığı yoğun altkümeye A diyelim. $a \in \mathbb{R}$, herhangi bir gerçel sayı olsun. A, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, terimleri A'da olan ve limiti a olan bir $(a_n)_n$ dizisi vardır. h sürekli olduğundan,

$$h(a) = h\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

olur (bkz. Teorem 3.1). □

$f(q) = a^q$ fonksiyonunun kanıtlamaya söz verdiğimiz ilk iki özelliğini kanıtlamayı bir sonraki altbölüme bırakıp Teorem 6.1'in kanıtına girişelim.

Teorem 6.1'in Kanıtı: $x \in \mathbb{R}$ olsun. A, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, terimleri A'da olan ve x'e yakınsayan bir $(a_n)_n$ dizisi vardır. $(a_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. Varsayıma göre $(f(a_n))_n$ de bir Cauchy dizisidir, dolayısıyla bu dizinin $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır. g fonksiyonunun x'teki değerini,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \tag{1}$$

olarak tanımlamak istiyoruz. Ama bunu yapmadan önce,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

değerinin, x'e yakınsayan $(a_n)_n$ dizisinin seçiminden bağımsız olduğunu, sadece ve sadece x'e göre değiştiğini kanıtlamamız gerekiyor; yani terimleri A kümesinden olan $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ Cauchy dizilerinin $\mathbb{R}$'deki limitleri eşitse (limitler x'e eşitse), o zaman

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlamalıyız, çünkü aksi halde vermek istediğimiz (1) tanımı geçersiz olur. (Dikkat, kanıtın burasında bir hinlik var.) Nitekim, $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizisi $\mathbb{R}$'de aynı limite yakınsadıklarından,

$$a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3,\ \ldots$$

dizisi de bu limite yakınsar [N4, Alıştırma 8.9]; dolayısıyla bu yeni dizi de bir Cauchy dizisidir. Varsayıma göre,

$$f(a_0),\ f(b_0),\ f(a_1),\ f(b_1),\ f(a_2),\ f(b_2),\ \ldots$$

dizisi de bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır. Bu dizinin altdizileri olan $(f(a_n))_n$ ve $(f(b_n))_n$ dizileri de zorunlu olarak bu limite yakınsarlar [N4, Teorem 8.2].

Demek ki
$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$
tanımı geçerli bir tanımdır, bu tanım, $(a_n)_n$ dizisine göre değil, sadece x'e göre değişir. $g_{|A} = f$ eşitliği, $a \in A$ için $a_n = a$ tanımını yaparsak,
$$g(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a)$$
eşitliği sayesinde bariz olduğundan, iş, g'nin sürekli olduğunu kanıtlamaya kaldı. Kanıtlayalım. $x \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun. g'nin x'te sürekli olduğunu kanıtlayacağız. Önce şu savı kanıtlayalım:

Sav. *$x \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki eğer $a \in A$ sayısı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman $|g(x) - f(a)| < \epsilon$ eşitsizliği de sağlanır.*

Sav'ın Kanıtı: x'i sabitleyelim. Diyelim sav yanlış. O zaman öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır ki, her $n > 0$ doğal sayısı için,
$$\text{hem } |x - a_n| < 1/n \text{ hem de } |g(x) - f(a_n)| \geq \epsilon$$
eşitsizliğinin sağlandığı bir $a_n \in A$ sayısı bulunur. Ama o zaman da A'nın $(a_n)_n$ dizisi x'e yakınsar ama $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ olmaz. Bu da g'nin tanımıyla çelişir. Sav kanıtlanmıştır. □

Şimdi g'nin sürekli olduğunu kanıtlayabiliriz.

Birinci Kanıt: $x \in \mathbb{R}$ olsun. $(x_n)_n$, x'e yakınsayan herhangi bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece Teorem 3.1'e göre g'nin sürekliliği kanıtlanmış olacak. Bir n göstergecini sabitleyelim. Sav'a göre, her $k > 0$ tamsayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki, eğer $a \in A$ sayısı $|x_n - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman
$$|g(x_n) - f(a)| < \frac{1}{k}$$
eşitsizliği de sağlanır. Ayrıca, A yoğun olduğundan,
$$|x_n - a_{n,k}| < \min\left\{\delta, \frac{1}{k}\right\}$$
eşitsizliğini sağlayan bir $a_{n,k} \in A$ sayısı vardır. Dolayısıyla
$$|g(x_n) - f(a_{n,k})| < \frac{1}{k}$$

olur. Şimdi $(a_{n,n})_n$ dizisine bakalım. $|x_n - a_{n,n}| < 1/n$ olduğundan, yani

$$x_n - \frac{1}{n} < a_{n,n} < x_n + \frac{1}{n}$$

olduğundan, Sandviç Teoremi'ne (Teorem 4.14) göre,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,n} = x$$

olur. Bundan ve g'nin tanımından da

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_{n,n})$$

çıkar. Öte yandan $|g(x_n) - f(a_{n,n})| < 1/n$, yani

$$f(a_{n,n}) - \frac{1}{n} < g(x_n) < f(a_{n,n}) + \frac{1}{n}$$

olduğundan, gene Sandviç Teoremi'ne (Teorem 4.14) göre,

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_{n,n}) = g(x)$$

elde edilir. Teorem 6.1 kanıtlanmıştır. □

g'nin Sürekliliğinin İkinci Kanıtı: $x \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon > 0$ olsun. $\delta > 0$, Sav'daki gibi olsun, ama δ sayısı ϵ için değil de $\epsilon/2$ için seçilmiş olsun, bir başka deyişle eğer $a \in A$ elemanı $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$|g(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlansın. Her $y \in (x - \delta/2, x + \delta/2)$ elemanı için,

$$|g(x) - g(y)| < \epsilon$$

eşitsizliğini kanıtlayarak teoremin kanıtını bitirmek istiyoruz. Diyelim bu doğru değil. O zaman

$$|x - y| < \frac{\delta}{2}$$

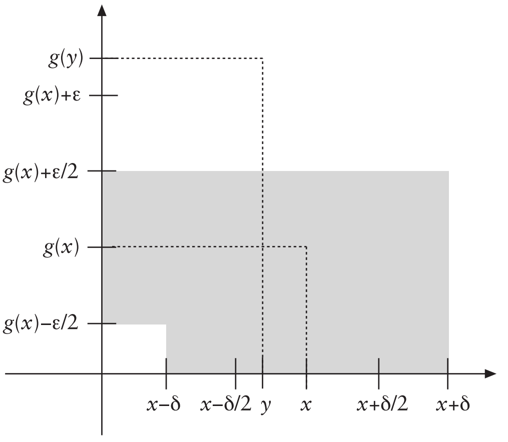
ve

$$|g(x) - g(y)| \geq \epsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan bir y elemanı vardır. Diyelim,

$$g(y) \geq g(x) + \epsilon.$$

(Bkz. aşağıdaki şekil. Diğer durumun kanıtı benzerdir.)



O zaman, eğer $a \in A$ sayısı, y'nin en fazla $\delta/2$ kadar yakınındaysa,

$$|x-a| \le |x-y| + |y-a| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

olduğundan,

$$|g(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanmalı, dolayısıyla,

$$f(a) < g(x) + \frac{\epsilon}{2} < g(x) + \epsilon \le g(y)$$

olmalı. Ama o zaman da,

$$|g(y) - f(a)| = g(y) - f(a) > g(y) - \left(g(x) + \frac{\epsilon}{2}\right) \ge g(x) + \epsilon - \left(g(x) + \frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Demek ki her $a \in A$ sayısı için, eğer

$$|y-a| < \frac{\delta}{2}$$

ise,

$$|g(y) - f(a)| \ge \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliğini kanıtladık. Bu da g'nin tanımıyla bariz bir çelişkidir. Teorem 6.1 ikinci kez kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

6.1. f ve g fonksiyonları Teorem 6.1'deki gibi olsunlar.
  i. f sabit fonksiyonsa g'nin de sabit olduğunu kanıtlayın.
  ii. f sınırlı bir fonksiyonsa g'nin de sınırlı olduğunu ve sınırların değişmediğini kanıtlayın.
  iii. f artansa g'nin de artan olduğunu kanıtlayın.

6.2 Gerçel Sayılarda Üs Almaya Doğru

Şimdi en sona bıraktığımız ilk iki önermeyi kanıtlayalım (bkz. sayfa 118).

Teorem 6.3. *$a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ sabit bir sayı olsun. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu $f(q) = a^q$ olarak tanımlansın. O zaman*
i. *f süreklidir.*
ii. *Eğer $(q_n)_n$, terimleri kesirli sayılar olan bir Cauchy dizisiyse, $(f(q_n))_n$ de bir Cauchy dizisidir.*

Teorem 6.1 ve 6.3 sayesinde, her $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ve her $b \in \mathbb{R}$ için, a^b olarak gösterilen, daha önce bildiğimiz güç alma fonksiyonuyla uyumlu olan ve b'ye göre sürekli bir fonksiyona sahip oluruz.

Teorem 6.3'ün Kanıtı: Eğer $a = 0$ ya da $a = 1$ ise her şey bariz. Bundan böyle $a \neq 0, 1$ olsun.
i. Bir an için f'nin 0'da sürekli olduğunu varsayalım. $p \in \mathbb{Q}$, herhangi bir kesirli sayı olsun. f'nin p'de de sürekli olduğunu göstereceğiz. $\epsilon > 0$ olsun. f'nin 0'da sürekli olduğunu varsaydığımızdan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $|q| < \delta$ ise,

$$|1 - a^q| = |a^0 - a^q| = |f(0) - f(q)| < \frac{\epsilon}{a^p}$$

olur. Şimdi $q \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı, $|q - p| < \delta$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman,

$$|f(p) - f(q)| = |a^p - a^q| = \left|a^p - a^{p+(q-p)}\right| = a^p|1 - a^{q-p}| < \epsilon$$

olur, yani f, p'de de süreklidir. Demek ki f'nin 0'da sürekli olduğunu kanıtlamak yeterli.

Eğer $a = 1$ ise, f, sabit 1 fonksiyonu olduğundan elbette süreklidir. Bundan böyle a'nın 1 olmadığını varsayalım.

Bir an için, eğer $a < 1$ ise f'nin sürekli olduğunu bildiğimizi varsayalım. O zaman $a > 1$ ise de f'nin sürekli olduğunu gösterelim. $a > 1$ ve $b = 1/a$ olsun. O zaman $b < 1$ olur. Demek ki varsayıma göre,

$$g(q) = b^q$$

olarak tanımlanan $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu süreklidir. Öte yandan,

$$f(q) = a^q = \left(\frac{1}{b}\right)^q = \frac{1}{b^q} = \frac{1}{g(q)}$$

olduğundan, yani $f = 1/g$ olduğundan, f de süreklidir (Teorem 2.11). Demek ki bundan böyle $0 < a < 1$ eşitsizliklerini varsayabiliriz. Varsayalım. Bu varsayımdan dolayı f fonksiyonu azalan bir fonksiyondur [N4, Teorem 3.8.vii].

f'nin 0'da sürekli olduğunu kanıtlamamız gerektiğini anımsatalım. Meşhur $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer q kesirli sayısı $|q| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $|1 - a^q| < \epsilon$ olacak. ϵ'u 1'den küçük almanın hiçbir mahsuru olamaz; öyle yapalım. Demek ki

$$0 < 1 - \epsilon < 1.$$

Dilediğimiz δ'yı önce pozitif kesirli q sayıları için bulacağız (ve bulacağımız bu δ'ya δ_1 diyeceğiz). ϵ üzerine yukarıda yaptığımız varsayımdan dolayı,

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \epsilon)^n = 0$$

olur. Dolayısıyla bir $u \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için,

$$(1 - \epsilon)^u < a$$

olur. $\delta_1 = 1/u$ olsun ve q kesirli sayısı $0 \le q < \delta_1$ eşitsizliklerini sağlasın. Demek ki,

$$1 - \epsilon < a^{1/u} = a^{\delta_1} < a^q$$

ve dolayısıyla

$$|1 - a^q| = 1 - a^q < \epsilon.$$

Bu durumda istediğimiz gibi bir δ_1 bulduk. (Bir başka deyişle f'nin 0'ın sağında sürekli olduğunu kanıtladık.)

Şimdi negatif kesirli sayıları için bir $\delta_2 > 0$ bulacağız. $\epsilon > 0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \epsilon)^n = \infty$$

olur. Dolayısıyla, öyle bir N vardır ki,

$$\frac{1}{a} < (1 + \epsilon)^N$$

olur. $\delta_2 = 1/N$ olsun. q negatif kesirli sayısı, $-q = |q| < \delta_2$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman,

$$1 - \epsilon < 1 < a^q = (1/a)^{-q} < (1 + \epsilon)^{-Nq} = (1 + \epsilon)^{-q/\delta_2} < 1 + \epsilon$$

olur [N4, Teorem 3.8.iv], yani

$$1 - \epsilon < a^q < 1 + \epsilon,$$

yani $|1 - a^q| < \epsilon$ olur.

Son olarak, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. Eğer q, $|q| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir kesirli sayıysa, q negatif de olsa, pozitif de olsa,

$$|a^q - a^0| = |a^q - 1| < \epsilon$$

olur, yani f fonksiyonu 0'da süreklidir.

ii. Şimdi, $(q_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. $(f(q_n))_n$ dizisinin de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $a \neq 0$, 1 varsayımını yapabiliriz.

$(q_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır [N4, Teorem 7.10]. Demek ki $(f(q_n))_n$ dizisi de sınırlıdır [N4, Teorem 3.8.vi ve vii]. Bu sınır 0'dan (ve elbette sonsuzdan) uzak olduğundan, yani $(f(q_n))_n$ dizisi 0'a yakınsayamayacağından (Neden? İpucu için sayfa 126'daki grafiklere bakın) $(f(q_n))_n$ ve $(1/f(q_n))_n$ dizilerinden biri Cauchy dizisiyse, diğeri de Cauchy dizisidir [N4, Alıştırma 7.60]. Dolayısıyla $a \in (0, 1)$ varsayımını yapabiliriz. Böylece f azalan bir fonksiyon olur [N4, Teorem 3.8.vi]. (f artan bir fonksiyon olsaydı da pek bir şey değişmezdi, benzer kanıt işi görür.)

$\epsilon > 0$ olsun. Her n için $f(q_n) < A$ olsun. f fonksiyonu 0'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $q \in \mathbb{Q}$ sayısı $|q| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman

$$|f(q) - 1| = |f(q) - f(0)| < \frac{\epsilon}{A}$$

olur. $(q_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $|q_n - q_m| < \delta$ olur. Şimdi hesap yapalım: n, $m > N$ için,

$$\begin{aligned}|f(q_n) - f(q_m)| &= |a^{q_n} - a^{q_m}| = a^{q_m}|a^{q_n - q_m} - 1| = a^{q_m}|f(q_n - q_m) - 1| \\ &\leq A|f(q_n - q_m) - 1| < A \times \frac{\epsilon}{A} = \epsilon\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da $(f(q_n))_n$ dizisinin Cauchy olduğunu gösterir. Teorem tamamıyla kanıtlanmıştır. □

6.3 Gerçel Sayılarda Üs Alma

Teorem 6.1'in ve yukarıda yaptıklarımızın sonucunu çıkaralım.

Sonuç 6.4. *$a > 0$ bir gerçel sayıysa, her $q \in \mathbb{Q}$ için $f_a(q) = a^q$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tane sürekli $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu vardır. Eğer r herhangi bir gerçel sayıysa ve $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi r'ye yakınsıyorsa, o zaman $f_a(r)$ sayısı $(f_a(q_n))_n$ dizisinin limitidir, yani*

$$f_a(r) = \lim_{n\to\infty} f_a(q_n)$$

olur.

Kanıt: Teorem 6.1 ve 6.3'ten hemen çıkar. □

Sonuç 6.4'te var olduğu söyleyen f_a fonksiyonunun bir r gerçel sayısındaki imgesini a^r olarak yazacağız. Demek ki,

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}.$$

Her $r > 0$ için 0^r sayısını 0 olarak tanımlayalım.

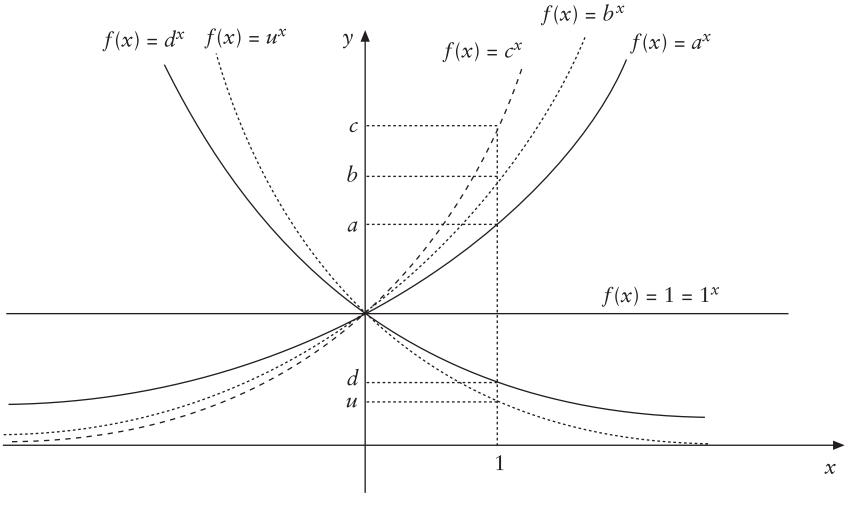
a^r sayısı "a ***üssü*** r" olarak okunur ve bu tür fonksiyonlara ***üssel fonksiyonlar*** adı verilir. Elbette eğer $r \in \mathbb{Q}$ ise, [N4, Altbölüm 3.1]'de tanımlanan a^q ile bu bölümde tanımlanan a^q aynı anlama gelirler. Bu kanıtın bir özetini Teorem 11.1'de bulabilirsiniz.

Sonuç 6.4'ten oldukça kolay biçimde, her $r \in \mathbb{R}$ için $\exp r = e^r$ eşitliği çıkar (bkz. Teorem 11.1).

Üssel fonksiyonların tahmin edilen (ve ilk ve orta öğretimde sorgulanmadan kabul ettirilen) özellikleri vardır. Bu özellikleri teker teker kanıtlayalım. Bütün bu özellikler kesirli sayılarda tanımlanan üs alma fonksiyonunun özelliklerinden ve gerçel sayılarda tanımlanan üs alma fonksiyonunun tanımından çıkacaktır.

Sonuç 6.5. *Her $a, b > 0$ ve her r, s gerçel sayıları için şu özellikler doğrudur.*
i. $a^{r+s} = a^r a^s$.
ii. $a^0 = 1^r = 1$.
iii. $1/a^r = a^{-r}$.
iv. $(a^r)^s = a^{rs}$.
v. $(ab)^r = a^r b^r$ *ve* $(a/b)^r = a^r/b^r$.
vi. *Eğer* $a > 1$ *ise* $r \mapsto a^r$ *fonksiyonu artandır,* $a < 1$ *ise azalandır.*
vii. *Eğer* $a \neq 1$ *ise* $r \mapsto a^r$ *fonksiyonu* $\mathbb{R}$ *ile* $\mathbb{R}^{>0}$ *arasında bir eşlemedir.*
viii. $0 < r$ *ve* $a < b$ *ise* $a^r < b^r$.
ix. $0 > r$ *ve* $a < b$ *ise* $a^r > b^r$.
x. *Eğer* $a > 1$ *ise* $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, *eğer* $a < 1$ *ise* $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ *olur.*

Sonucu birazdan kanıtlayacağız. Önce, çeşitli $a > 0$ sayıları için $f(x) = a^x$ fonksiyonların grafiğini çizelim:



Altbölüm 11.3'te grafiklerin gerçekten böyle olduğunu göstereceğiz.

Kanıt: $(r_n)_n$ ve $(s_n)_n$, sırasıyla r'ye ve s'ye yakınsayan kesirli sayı dizileri olsun. Kanıtta yukarıdaki f_a yazılımını kullanmak yararlı olacak:

$$f_a(r) = a^r.$$

f_a fonksiyonunun sürekli olduğunu ve eşitliklerin r ve s kesirli sayı olduklarında doğru olduklarını kullanacağız [N4, Teorem 3.8].

i. Hesap ortada:

$$\begin{aligned} f_a(r)f_a(s) &= \lim_{n\to\infty} f_a(r_n) \lim_{n\to\infty} f_a(s_n) = \lim_{n\to\infty} f_a(r_n)f_a(s_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_a(r_n + s_n) = f_a\left(\lim_{n\to\infty}(r_n + s_n)\right) = f_a(r+s) \end{aligned}$$

olur. Her eşitliğin neden doğru olduğunu okur kurcalamalıdır.

ii ve iii. Kanıt okura bırakılmıştır. Aynen yukarıdaki gibi ele alınmalı.

iv. Önce s'nin bir doğal sayı olduğunu varsayalım. O zaman, (i)'e göre (s üzerine tümevarımla), $a^{rs} = (a^r)^s$ olur, yani bu durumda eşitlik doğrudur.

Şimdi s pozitif bir kesirli sayı olsun. u, v, pozitif doğal sayılar olmak üzere $s = u/v$ yazalım. O zaman, bir önceki paragrafa göre,

$$(a^{rs})^v = a^{rsv} = a^{ru} = (a^r)^u$$

olur, yani

$$a^{rs} = (a^r)^{u/v} = (a^r)^s.$$

Demek ki s, pozitif bir kesirli sayı iken de eşitlik doğru. Eşitliğin her kesirli sayı için doğru olduğu (ii) ve (iii)'ten çıkar.

Şimdi s bir gerçel sayı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} a^{rs} &= f_a(rs) = f_a(r\lim_{n\to\infty}(s_n)) = f_a(\lim_{n\to\infty}(rs_n)) = \lim_{n\to\infty} f_a(rs_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_{a^r}(s_n) = f_{a^r}(s) = (a^r)^s \end{aligned}$$

olur. (Her adımın neden doğru olduğunu kontrol edin lütfen.)

v. Doğrudan hesap:

$$(ab)^r = \lim_{n\to\infty}(ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^r b^r.$$

İkinci eşitlik için bunu ve (iv)'ü kullanacağız:

$$(a/b)^r = \left(ab^{-1}\right)^r = a^r \left(b^{-1}\right)^r = a^r b^{-r} = a^r (b^r)^{-1} = a^r/b^r.$$

vi. $a > 1$ olsun. $r \le s$ olsun. O zaman r ve s'ye yakınsayan $(r_n)_n$ ve $(s_n)_n$ dizilerini her n için

$$r_n \le s_n$$

olacak biçimde seçebiliriz ve, $a > 1$ olduğundan,

$$f_a(r) = \lim_{n\to\infty} f_a(r_n) \leq \lim_{n\to\infty} f_a(s_n) = f(s)$$

elde ederiz. Eğer $a < 1$ ise kanıt benzerdir.

vii. $a > 1$ varsayımını yapalım. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$$

olur. $b \in \mathbb{R}^{>0}$ herhangi bir sayı olsun. O zaman n ve m doğal sayıları için,

$$a^{-m} < b < a^n$$

eşitsizlikleri sağlanır. Aradeğer teoremine göre belli bir x için $b = a^x$ olur. Demek ki f_a örtendir.

Şimdi f_a'nın birebir olduğunu kanıtlayalım. $a^r = a^s$ olsun ama $r \neq s$ olsun. Diyelim $r < s$.

$$r < p < q < s$$

eşitliklerini sağlayan p ve q kesirli sayılarını seçelim. (vi)'dan dolayı

$$a^r \leq a^p < a^q \leq a^s = a^r$$

elde ederiz. Bir çelişki.

viii. $a < b$ olsun ve r'ye yakınsayan pozitif $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi alalım. [N4, Teorem 3.8.iv]'e göre her n için $a^{q_n} < b^{q_n}$ olur. Limit alarak $a^r \leq b^r$ buluruz. Eşitliğin olamayacağını gösterelim. $c = b/a > 1$ tanımını yapalım ve $(q_n)_n$ dizisini belli bir $q < r$ kesirli sayısından büyük seçelim. O zaman [N4, Teorem 3.8.vi]'ya göre $1 = 1^q < c^q < c^{q_n}$ olur. Limit alarak $1 < c^q \leq c^r$ buluruz. Demek ki (i) ve (ii)'ye göre $1 < c^r = b^r/a^r$, yani $a^r < b^r$.

ix. $x^{-r} = 1/x^r$ olduğundan bir öncekinden çıkar.

x. $a > 1$ varsayımını yapalım. Önerme, $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ eşitliğinden ve (vi)'dan çıkar. $a < 1$ durumu için 1'den büyük olan $1/a$'yı ele alın ve birinci kısımdan yararlanın. □

Alıştırmalar

6.2. $r \in \mathbb{R}$, sabit bir sayı olsun. $g(x) = x^r$ kuralıyla tanımlanmış $g : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin. g ne zaman bir eşleşmedir?

6.3. $r > 0$ sabit bir sayı ve $(x_n)_n$ yakınsak dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n^r = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^r$$

eşitliğini kanıtlayın.

6.4. $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sabit bir sayı olsun. $(x_n)_n$, sonsuza ıraksayan bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n^r = \infty$$

eşitliğini kanıtlayın.

6.5. Eğer $a > 1$ ise, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, eğer $a < 1$ ise, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ eşitliklerini kanıtlayın.

6.6. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ limitini bulun.

6.7. [N4, Teorem 19.1]'i kesirli p sayılarından gerçel p sayılarına genelleştirin, yani şu teoremi kanıtlayın:

Teorem 6.6. *p gerçel bir sayı olsun. O zaman,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

serisi $p > 1$ ise yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

Eğer $p > 1$ ise, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ sayısı $\zeta(p)$ olarak yazılır. ζ fonksiyonu ***Riemann zeta fonksiyonu*** olarak bilinir ve matematikte (özellikle sayılar kuramında) çok önemlidir.

6.4 Bernoulli Eşitsizlikleri

Artık pozitif bir a gerçel sayısının başka bir r gerçel sayısı için r'inci üssünü almasını bildiğimize göre (yani a^r sayısının anlamını bildiğimize göre), ***Bernoulli eşitsizlikleri*** adıyla bilinen ve ileride çok yararlı olacak olan önemli eşitsizlikleri aradan çıkarabiliriz[2].

Teorem 6.7 (Bernoulli)**.** *Eğer $x \geq -1$ ve $\alpha \in [0, 1]$ ise*

$$(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x. \tag{1}$$

Eğer $x > -1$ ve $\alpha \notin [0, 1]$ ise

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \tag{2}$$

Ayrıca eğer $\alpha \neq 0, 1$ ise (1) ve (2)'de eşitlik sadece $x = 0$ için mümkündür.

Birinci Kanıt: [N4, Teorem 3.26]'da $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ ise,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \tag{AG$_n$}$$

eşitsizliğini ve eşitliğin ancak ve ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise olabileceğini kanıtlamıştık. Bu eşitsizlik kanıtımızda önemli olacak.

[2] Bu eşitsizlikleri [N4, Altbölüm 3.3]'te de ele almıştık. İleride, Sonuç 12.4'te aynı sonucu hemen hemen aynı kanıtla ama biraz daha temiz bir biçimde kanıtlayacağız.

Önce (1)'i α'nın kesirli sayı olduğu durumda kanıtlayalım. $x \geq -1$ ve $1 \leq m < n$ tamsayıları için $\alpha = m/n$ olsun. (AG_n)'yi kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= (1+x)^{m/n} = \sqrt[n]{(1+x)^m} = \sqrt[n]{(1+x)^m 1^{n-m}} \\ &\leq \frac{m(1+x)+(n-m)}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}\, x = 1 + \alpha x.\end{aligned}$$

Eşitlik sadece $1+x = 1$ ise, yani $x = 0$ ise mümkündür.

Şimdi (1)'i α bir gerçel sayı olduğunda kanıtlayalım. α gerçel sayısına yakınsayan herhangi bir $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi için, r^α sayısı,

$$r^\alpha = \lim_{n\to\infty} r^{q_n}$$

olarak tanımlanmıştı. $\alpha \in (0,1)$ olduğundan q_n kesirli sayılarını da $(0,1)$ aralığında seçebiliriz. Böylece,

$$(1+x)^\alpha = \lim_{n\to\infty} (1+x)^{q_n} \leq \lim_{n\to\infty} (1+q_n x) = 1 + \alpha x$$

olur. Şimdi eşitliğin sadece $x = 0$ için geçerli olabileceğini kanıtlayalım. Bu amaçla $\alpha < q < 1$ eşitsizliklerini sağlayan bir q kesirli sayısı seçelim. $\alpha/q < 1$ olduğundan,

$$(1+x)^{\alpha/q} \leq 1 + \frac{\alpha}{q}\, x$$

eşitsizliğini biliyoruz. Kesirli sayılar için eşitliğin sadece $x = 0$ için doğru olduğunu bildiğimizden (kanıtın ilk paragrafı), eğer $x \neq 0$ ise,

$$(1+x)^\alpha \leq \left(1 + \frac{\alpha}{q}\, x\right)^q < 1 + \alpha x$$

olur. Birinci kısmın kanıtı bitmiştir.

Sıra (2)'ye geldi. Eğer $\alpha x \leq -1$ ise sol taraf pozitif, sağ taraf negatif olamaz ve bu durumda önerme bariz. Bundan böyle $\alpha x > -1$ varsayımını yapalım.

Diyelim $\alpha > 1$. Teoremin biraz önce kanıtladığımız birinci kısmını x yerine αx'e ve α yerine $1/\alpha \in (0,1)$ sayısına uygulayalım. O zaman,

$$(1+\alpha x)^{1/\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}\, \alpha x = 1 + x$$

olur ve eşitlik ancak αx, yani $x = 0$ ise geçerli olur. Her iki tarafın da α'ıncı kuvvetini alırsak,

$$(1+\alpha x) \leq (1+x)^\alpha$$

olur ve teorem kanıtlanır.

Şimdi $\alpha < 0$ varsayımını yapalım. Öyle bir $n > 1$ doğal sayısı bulalım ki, $0 < -\alpha < n$ olsun. Demek ki $0 < -\alpha/n < 1$. Teoremin birinci kısmına göre,

$$(1+x)^{-\alpha/n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}\, x$$

olur ve eşitlik ancak $x = 0$ ise doğrudur. Demek ki,

$$(1+x)^{\alpha/n} \geq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{n} x} \geq 1 + \frac{\alpha}{n} x.$$

İki tarafın da n'inci kuvvetini alırsak, $n > 1$ olduğundan, bir önceki paragrafta kanıtladığımızdan,

$$(1+x)^{\alpha} \geq \left(1 + \frac{\alpha}{n} x\right)^n \geq 1 + \alpha x$$

elde ederiz. Teorem tamamen kanıtlanmıştır[3]. $\square$

İkinci Kanıt: [N4, Teorem 3.21]'de, her $p \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı ve her $-1 \leq x$ gerçel sayısı için, eğer $1 \leq p$ ise $1 + px \leq (1+x)^p$ ve eğer $0 < p < 1$ ise $1 + px \geq (1+x)^p$ olduğunu kanıtlamıştık. Bu eşitsizliği p yerine, r gerçel sayısına yakınsayan $(p_n)_n$ dizisinin terimlerine uygularsak ve n sonsuza giderken eşitsizliklerin limitini alırsak teoremin neredeyse tamamı kanıtlanır. Kalanın kanıtı bir önceki kanıtın son paragrafında verilmiştir. $\square$

Örnekler

6.8. $0 < \alpha < 1$ *ve* $x \geq 1$ *ise*

$$\frac{(x+1)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\alpha} < x^{\alpha-1} < \frac{x^{\alpha} - (x-1)^{\alpha}}{\alpha}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Teorem 6.7'ye göre,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\alpha} < 1 + \frac{\alpha}{x} \text{ ve } \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\alpha} < 1 - \frac{\alpha}{x}$$

çıkar. Bu eşitlikleri x^{α} ile çarparsak,

$$(x+1)^{\alpha} < x^{\alpha} + \alpha x^{\alpha-1} \text{ ve } (x-1)^{\alpha} < x^{\alpha} - \alpha x^{\alpha-1}$$

elde edilir. $\square$

6.9. $0 < \alpha < 1$ *ve* $m < n$ *doğal sayılar ise ise*

$$\frac{(n+1)^{\alpha} - m^{\alpha}}{\alpha} < m^{\alpha-1} + (m+1)^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1} < \frac{n^{\alpha} - (m-1)^{\alpha}}{\alpha}$$

olur.

Kanıt: Bir önceki problemi x yerine $m, m+1, \ldots, n$ sayılarına uygulayalım:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{(m+1)^{\alpha}-m^{\alpha}}{\alpha} & < & m^{\alpha-1} & < & \frac{m^{\alpha}-(m-1)^{\alpha}}{\alpha} \\
\frac{(m+2)^{\alpha}-(m+1)^{\alpha}}{\alpha} & < & (m+1)^{\alpha-1} & < & \frac{(m+1)^{\alpha}-m^{\alpha}}{\alpha} \\
 & & \cdots & & \\
\frac{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}{\alpha} & < & n^{\alpha-1} & < & \frac{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}{\alpha}
\end{array}$$

[3]Bu teoremi ileride bir defa daha Sonuç 12.4 olarak kanıtlayacağız. İki kanıt çok benzer olacak ama ikincisi daha temiz olacak.

ve bu eşitsizlikleri altalta toplayalım. Sağ ve sol taraflardaki sadeleştirmelerden sonra aynen istenen eşitsizlikleri buluruz. □

6.10. *Eğer*

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1.000.000}}$$

ise, x'in tamkısmını bulun.

Kanıt: Yukarıdaki problemde $m = 4$, $n = 1.000.000$ ve $\alpha = 2/3$ alırsak,

$$\frac{1.000.001^{2/3} - 4^{2/3}}{2/3} < 4^{-1/3} + 5^{-1/3} + \cdots + 1.000.000^{-1/3} < \frac{1.000.000^{2/3} - 3^{2/3}}{2/3}$$

buluruz. Sol taraf için:

$$\begin{aligned} \tfrac{1.000.001^{2/3} - 4^{2/3}}{2/3} &= \tfrac{3}{2}(1.000.001^{2/3} - 4^{2/3}) > \tfrac{3}{2}1.000.000^{2/3} - \tfrac{3}{2}\,4^{2/3} \\ &= \tfrac{3}{2}10.000 - \tfrac{3}{2}\,2^{4/3} = 15.000 - \sqrt[3]{54} > 15.000 - 4 = 14996 \end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanalım. Sağ taraf için,

$$\begin{aligned} \tfrac{1.000.000^{2/3} - 3^{2/3}}{2/3} &= \tfrac{3}{2}(10.000 - 3^{2/3}) = \tfrac{3}{2}10.000 - \tfrac{3}{2}3^{2/3} \\ &= 15.000 - \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{9} < 15.000 - \tfrac{3}{2}2 = 14.997 \end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanalım. Böylece $14.996 < x < 14.997$ buluruz ve $[x] = 14.996$ olur. □

6.5 Üs Almanın Sürekliliği

Bu altbölümde $x \mapsto x^r$ fonksiyonlarının sürekli olduklarını kanıtlayacağız.

Teorem 6.8. *$\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^r$ kuralıyla belirlenmiş üs alma fonksiyonu süreklidir.*

Kanıt: $x^{-r} = 1/x^r$ olduğundan, $x \mapsto x^r$ ve $x \mapsto x^{-r}$ fonksiyonlarından biri sürekliyse, diğeri de süreklidir. Böylece, gerekirse r yerine $-r$ alarak, $r > 0$ varsayımını yapabiliriz. Eğer $n = [r] \in \mathbb{N}$ ve $s = r - n \in [0, 1)$ ise, $x^r = x^n x^s$ olduğundan ve $x \mapsto x^n$ fonksiyonu sürekli olduğunu bildiğimizden (n bir doğal sayı çünkü), r yerine s alarak, $r \in (0, 1)$ varsayımını yapabiliriz.

Fonksiyonun önce 0'da sürekli olduğunu kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ olsun. $\delta = \epsilon^{1/r}$ olsun. Eğer $0 \leq x < \delta$ ise $x^r < \delta^r = \epsilon$ olur. Demek ki fonksiyon 0'da sürekliymiş.

Şimdi fonksiyonun 1'de sürekli olduğunu kanıtlayalım. Gene bir $\epsilon > 0$ alalım. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, $|x - 1| < \delta$, yani $1 - \delta < x < 1 + \delta$ için $|x^r - 1| < \epsilon$ olacak. δ'yı 1/2'den küçük seçmeye sözvererek $1/2 < x$ varsayımını yapabiliriz. O zaman Teorem 6.7'yi $x - 1$'e uygulayarak

$$x^r \leq 1 + r(x - 1)$$

elde ederiz. Eğer $x \geq 1$ ise, bundan

$$|x^r - 1| = x^r - 1 \leq r(x - 1) = r|x - 1|$$

çıkar ve δ'yı ϵ/r'den (ve 1/2'den) küçük almanın yettiğini görürüz. Eğer $x < 1$ ise, $1/x > 1$ olduğundan, $(1/x)^r = 1/x^r$ sayısını 1'e istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz. Bu sefer δ'yı

$$\frac{1}{x} - 1 < 2\delta \text{ ise } \frac{1}{x^r} - 1 < \epsilon$$

olacak biçimde (ve elbette sözverdiğimiz gibi 1/2'den küçük) seçelim. Şimdi eğer $1 - x < \delta$ ise,

$$\frac{1}{x} - 1 < \frac{\delta}{x} < 2\delta$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{x^r} - 1 < \epsilon$$

olur; buradan da

$$1 - x^r < \epsilon x^r < \epsilon$$

çıkar. Demek ki fonksiyon 1'de sürekliymiş.

Şimdi fonksiyonun rastgele bir $a > 0$ sayısında sürekli olduğunu gösterelim.

$$|x^r - a^r| = a^r \left| \left(\frac{x}{a}\right)^r - 1 \right|$$

olduğundan ve bir önceki paragrafta $\frac{x}{a}$ sayısını 1'e yeterince yakın alarak

$$\left| \left(\frac{x}{a}\right)^r - 1 \right|$$

sayısını istediğimiz kadar küçülteceğimizi gördüğümüzden, fonksiyon a'da da sürekli olur. Daha ayrıntılı olmak gerekirse, verilmiş bir ϵ için $\delta_1 > 0$ sayısı,

$$|x - 1| < \delta_1 \text{ ise } |x^r - 1| < \epsilon/a^r$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde seçilsin. $\delta = \delta_1 a$ olsun. Eğer $|x - a| < \delta = \delta_1 a$ ise, $|x/a - 1| < \delta_1$ ve dolayısıyla $|(x/a)^r - 1| < \epsilon/a^r$ olur; buradan da $|x^r - a^r| < \epsilon$ çıkar. □

Sonuç 6.9. *$a \in A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu a'da sürekli olsun. Ayrıca f'nin bir $\delta > 0$ için $A \cap (a - \delta, a + \delta)$ komşuluğunda negatif olmadığını varsayalım. Son olarak $r > 0$ olsun. O zaman $f^r : A \cap (a - \delta, a + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir.*

Kanıt: Teorem 6.8'den ve Teorem 2.21'den çıkar. □

Kısım II

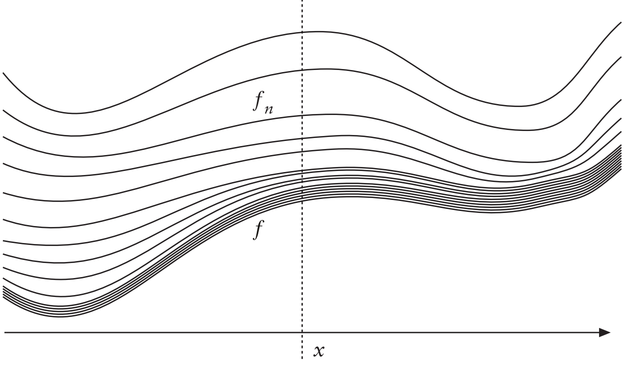
Fonksiyonlarda Yakınsaklık

7. Fonksiyon Dizilerinin Noktasal Yakınsaması

X herhangi bir küme olsun. Mesela $X \subseteq \mathbb{R}$ olabilir (ama olmayabilir de). Fonk$(X, \mathbb{R})$ ya da kısaca Fonk X, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar kümesini simgeleyecek. Fonk X kümesi üzerine toplama ve çarpma işlemleri vardır: İki fonksiyonu toplamak ya da çarpmak için, fonksiyonların değerleri toplanır ya da çarpılır. Bu işlemlere ***fonksiyonların noktasal toplamı*** ya da ***noktasal çarpımı*** adı verilir. Aynı şekilde fonksiyonları birbirinden çıkarabiliriz ve bir fonksiyonu sabit bir gerçel sayıyla çarpabiliriz.

Örnek 7.1. $X = \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ ise, $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2(x+1)$ ve $(f+g)(x) = x^2 + x + 1$ olur. Ayrıca eğer $r \in \mathbb{R}$ ise $(rf)(x) = r \cdot f(x) = rx^2$ olur.

Her n doğal sayısı için bir $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, yani Fonk(X) kümesinin bir $(f_n)_n$ dizisi verilmiş olsun. O zaman her $x \in X$ için ayrı bir $(f_n(x))_n$ sayı dizisi elde etmiş oluruz. Her $x \in X$ için bu $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti olabilir ya da olmayabilir. Diyelim her $x \in X$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti var. x'e göre değişebilecek bu limite $f(x)$ diyelim. Böylece, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinden bir $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu elde ederiz.



f fonksiyonunun bu $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limitini olduğunu söylemek herhalde kabul edilir bir tanım olur. Öyle de yapacağız. Tek farkla ki, "limit" yerine "noktasal limit" sözünü kullanmayı yeğleyeceğiz çünkü ileride fonksiyon dizileri için daha doğal bir limit kavramı bulacağız.

Biçimsel tanımı verelim: X herhangi bir küme olsun. X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer her $x \in X$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti varsa, o zaman, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanan $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***noktasal yakınsadığı*** ve f'nin $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin (noktasal) limiti olduğu söylenir. Bu durumda,

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

ya da

$$f \overset{p}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$$

yazılır. Eşitliğin üstündeki p, İngilizce noktasal anlamına gelen *pointwise* sözcüğünün p'sidir.

Bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti varsa, bu limit elbette biriciktir.

Böylece Fonk(X) kümesinde (aslını sorarsanız oldukça ilkel) bir yakınsaklık kavramı tanımlamış olduk. (İleride çok daha iyisini yapacağız.)

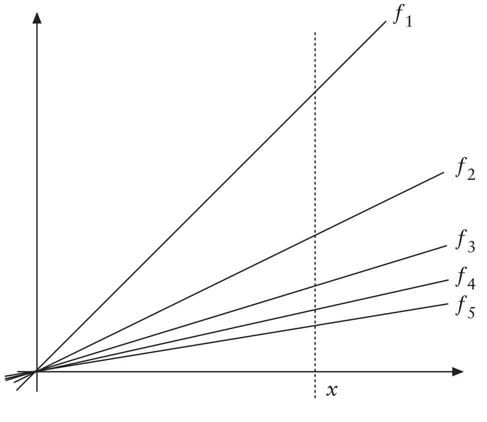
Hemen birkaç örnek verelim. Örneklerimizde X hep $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olacak ama daha önce de dediğimiz gibi öyle olmak zorunda değil.

Örnekler

7.2. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limiti sabit 0 fonksiyonuymuş. f_n fonksiyonlarının grafikleri aşağıda. Giderek yataylaşıyorlar ve en sonunda $f = 0$ fonksiyonuna yakınsıyorlar.



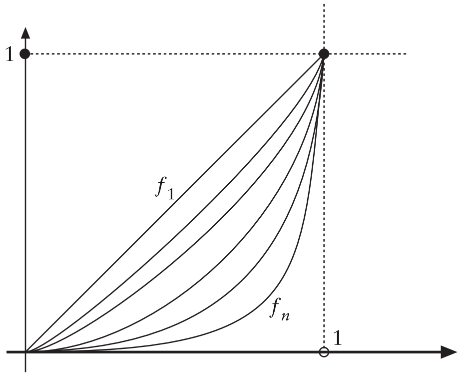
7.3. $X = [0,1]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur.



Bu örnekte, f_n fonksiyonlarının her birinin sürekli ama f fonksiyonunun (1 noktasında) süreksiz olduğuna dikkatinizi çekeriz. Demek ki sürekli bir fonksiyon dizisinin noktasal limiti sürekli olmak zorunda olmayabilir. Bu da oldukça rahatsız edici bir durum.

7.4. $X = \mathbb{R}$ ve

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{x!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olsun. O zaman, exp fonksiyonun tanımına göre, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \stackrel{p}{=} \exp x$ olur. Benzer sonuç, gene tanımlardan dolayı sin ve cos fonksiyonları için de geçerlidir:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, \quad \cos x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}.$$

7.5. Her $n > 0$ doğal sayısı için

$$f_n(x) = \frac{(2n^2 + n - 1)x + 3n - 5}{n^2}$$

olsun. O zaman, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \stackrel{p}{=} 2x$ olur.

7.6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } |x| \leq n \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

O zaman $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{p}{=} f$ olur. Demek ki her fonkiyon sınırlı fonksiyonların noktasal limiti olarak yazılabilir.

7.7. Her fonksiyonun periyodik fonksiyonların noktasal limiti olarak yazılabileceğini kanıtlayın.

Örnek 7.3'te sürekli bir fonksiyon dizisinin noktasal limitinin sürekli olmayabileceğini gördük. Daha önce de dediğimiz gibi bu oldukça rahatsız edici bir şey. İleride fonksiyonların yakınsaması kavramıyla hafifçe oynayarak bu rahatsız edici şeyden kurtulacağız ve ***düzgün yakınsaklık*** olarak adlandırılan yepyeni bir yakınsama kavramıyla sürekli bir fonksiyon dizisinin limiti sürekli olacak.

Aşağıdaki teoremin kanıtı çok basittir, benzer eşitliklerin sayı dizileri için geçerli olmasından kaynaklanır.

Teorem 7.1. *X, herhangi bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon dizisi ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{p}{=} f \ \textit{ve} \ \lim_{n\to\infty} g_n \stackrel{p}{=} g$$

ise, $(f_n + g_n)_n$, $(rf_n)_n$ ve $(f_n g_n)_n$ fonksiyon dizilerinin de noktasal limitleri vardır ve

$$\lim\nolimits_{n\to\infty}(f_n + g_n) \stackrel{p}{=} f + g,$$

$$\lim\nolimits_{n\to\infty} rf_n \stackrel{p}{=} rf$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}(f_n g_n) \stackrel{p}{=} fg$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca eğer her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ve $g_n(x) \neq 0$ ise, $(f_n/g_n)_n$ fonksiyon dizisinin de noktasal limiti vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} \stackrel{p}{=} \frac{f}{g}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Alıştırmalar

7.8. $X = [0, 1]$ ve $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} f_n$ noktasal limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu kanıtlayın. $f_n(1/n) > 1/6$ eşitsizliğini kanıtlayın.

7.9. $X = \mathbb{R}$ ve her $n < 0$ doğal sayısı için,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{eğer } 0 < x < 1/n \text{ ise} \\ 1 & \text{yoksa} \end{cases}$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 1$$

olur (yani limit, sabit 1 fonksiyonudur.)

7.10. $X = \mathbb{R}$ ve her $n > 0$ doğal sayısı için,

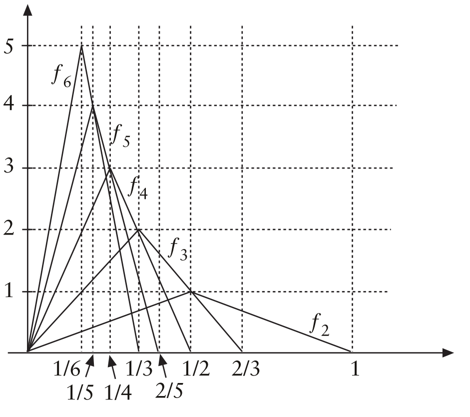
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{eğer } 0 \leq x < 1/n \text{ ise} \\ 1 & \text{yoksa} \end{cases}$$

olsun. O zaman, $(f_n)_n$ dizisinin limiti var mıdır?

7.11. $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{eğer } 0 \le x < 1/2n \text{ ise} \\ 2n - n^2 x & \text{eğer } 1/2n \le x < 2/n \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } 2/n \le x \le 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu fonksiyonların grafiklerini çizin. (Aşağıda!) Fonksiyonların limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu kanıtlayın.



Son alıştırmada da görüleceği üzere, fonksiyonların noktasal yakınsaması pek mutlu bir kavram değil: Maksimum değerleri sonsuza gidebilen bir fonksiyon dizisi noktasal olarak 0'a yakınsayabiliyor.

8. Fonksiyon Dizilerinin Düzgün Yakınsaması

8.1 İlk Tanım ve Örnekler

Bir önceki bölümde bir fonksiyon dizisinin bir başka fonksiyona noktasal yakınsamasının ne demek olduğunu gördük. Tanımı anımsatalım çünkü bu tanımı hafifçe değiştirerek çok daha güçlü bir "fonksiyon dizisi yakınsaması" kavramı elde edeceğiz:

X herhangi bir küme ve X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer her $x \in X$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti varsa, o zaman $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanan $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***noktasal yakınsadığı*** ve f'nin $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin ***noktasal limiti*** olduğu söylenir. Bu durumda,

$$f \stackrel{p}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$$

yazılır. Bir başka deyişle, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limiti olan $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n$ fonksiyonu, her $x \in X$ için,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanmıştır.

Tanımı biraz daha açacak olursak, bir $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})_n$ fonksiyon dizisinin bir $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsaması için, her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için öyle bir N olmalı ki, her $n > N$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

olsun.

Bunu simgesel olarak yazalım:

$$f \stackrel{p}{=} \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n$$

eşitliği, aynen,

$$(\forall x \in X)\ (\forall \epsilon > 0)\ \exists N\ (\forall n > N)\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

anlamına gelir.

Buradaki N sayısı x'e ve ϵ'a göre değişir. Zaten yukarıdaki matematiksel formüldeki sıralamada da $\exists N$ ifadesi

$$(\forall x \in X)\ (\forall \epsilon > 0)$$

ifadesinden sonra gelir. Yani her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için, istenen koşulu sağlayan ayrı bir N olabilir. Bu bağımlılığı göstermek için bazen N yerine $N_{x,\epsilon}$ yazılır.

N'nin ϵ'a göre değişmesi olağan çünkü ne de olsa ϵ küçüldükçe

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlamak, yani $f_n(x)$'nin $f(x)$'e ϵ kadar yakın olmasını sağlamak güçleşir: Genelde ϵ küçüldükçe bu eşitsizliğin sağlandığı n sayısını büyütmek gerekir. Pek ender durumlarda N, ϵ'dan bağımsızdır.

N'nin x'e göre değişmesi de olağan bulunabilir. Nitekim x değiştikçe

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması gecikebilir. Öte yandan bazen de gecikmez, bazı durumlarda, hatta oldukça sık rastlanan bazı durumlarda, belli bir N'den büyük n sayıları için

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

eşitsizliği **her** $x \in X$ elemanı için sağlanır. Örneğin her n için $f_n = f$ ise, yani $(f_n)_n$ dizisi sabit bir diziyse bu kesinlikle böyle olur; ama bundan çok daha heyecanlı örnekler göreceğiz. Bu durumda, $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})_n$ fonksiyon dizisinin $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir ve

$$\lim_{n \to \infty} f_n \stackrel{u}{=} f$$

yazılır. (Eşitliğin üstündeki u harfi, İngilizce düzgün demek olan *uniform* sözcüğünün u'sudur.)

Düzgün yakınsaklığın biçimsel tanımı şöyle:

$$(\forall \epsilon > 0)\ \exists N\ (\forall x \in X)\ (\forall n > N)\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Bu formülü bir önceki formülle karşılaştırmakta ve "$\forall x \in X$" simgelerinin nereden nereye geçtiğini gözlemlemekte yarar vardır.

Düzgün yakınsaklığı sözle ifade edelim: Eğer her $\epsilon > 0$ için, her $n > N$ ve her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı x'ten bağımsız bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Düzgün yakınsaklığın noktasal yakınsaklıktan şu önemli ayrımı var. Düzgün yakınsaklıkta, $(f_n(x))_n$ dizileri $f(x)$ sayılarına "**aynı hızla**" yakınsarlar. Oysa noktasal yakınsaklıkta yakınsama hızı x'e göre değişebilir. Dolayısıyla düzgün yakınsaklık, noktasal yakınsaklıktan çok daha güçlü bir kavramdır. Yakın zamanda avantajlarını göreceğiz. Noktasal yakınsamak, düzgün yakınsaklıktan çok daha kolaydır: Bir fonksiyon dizisi düzgün yakınsaksa aynı zamanda noktasal yakınsaktır ama bunun tersi doğru değildir:

Teorem 8.1. *Eğer $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa noktasal da yakınsar.*

Kanıt: Bu kadar açıklamadan sonra bu teoremin ayrıca bir kanıta ihtiyacı olduğunu sanmıyoruz: Eğer bir N her x için işimize yarıyorsa, elbette her x için bu N işimize yarar! □

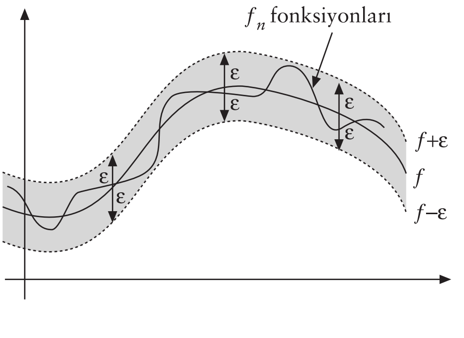
Düzgün yakınsaklık kavramını geometrik olarak da ifade edebiliriz ve böylece kavramı biraz daha sezgiselleştirebiliriz. $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi f'ye düzgün yakınsasın. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. O zaman yeterince büyük n'ler ve her x için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

eşitsizliği yani

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bir başka deyişle, yeterince büyük n'ler için f_n fonksiyonları $f - \epsilon$ ile $f + \epsilon$ arasındadır. Şekil aşağıda.



Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f'ye düzgün yakınsaması için yeter ve gerek koşul, her $\epsilon > 0$ için, f_n fonksiyonlarının bir zaman sonra $f-\epsilon$ ile $f+\epsilon$ şeridinin içine girmesidir.

Böylece Fonk(X) kümesi üzerine daha güçlü (yani gerçekleşmesi daha zor olan) bir yakınsaklık kavramı daha tanımlamış olduk. Bu yeni yakınsaklık kavramı X'in elemanlarına teker teker odaklanmaktan ziyade X kümesini bir bütün olarak ele alıyor.

Birazdan örnekler vereceğiz (geçen bölümün örneklerinin üstünden geçeceğiz) ama önce bunca açıklamadan sonra çok bariz olması gereken bir de şu önsavı aradan çıkaralım:

Önsav 8.2. *$Y \subseteq X$ iki küme olsun. $(f_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, o zaman $(f_{n|Y})_n$ fonksiyon dizisi $f_{|Y}$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.*

Kanıt: Eğer bir N her $x \in X$ için işimize yarıyorsa, elbette bu N her $x \in Y$ için de işimize yarar! □

Birazdan göreceğimiz üzere (örnekleri boldur zaten) bu teoremin tersi yanlıştır, yani $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsasa ve $(f_{n|Y})_n$ fonksiyon dizisi $f_{|Y}$ fonksiyonuna düzgün yakınsasa ve hatta Y bir biçimde X'te "yoğun" olsa bile $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsamayabilir.

Alıştırmalar

8.1. $X = Y \cup Z$ olsun. $(f_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer $(f_{n|Y})_n$ ve $(f_{n|Z})_n$ fonksiyon dizileri düzgün yakınsaksa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin de düzgün yakınsak olduğunu kanıtlayın.

8.2. Eğer X sonluysa, noktasal yakınsak her fonksiyon dizisinin düzgün yakınsak olduğunu kanıtlayın.

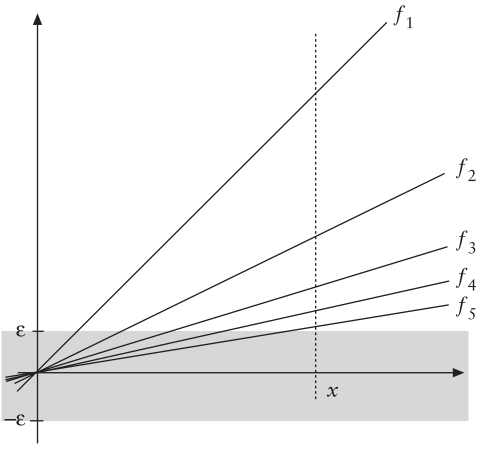
Gelelim örneklere. Bir önceki bölümün örneklerindeki noktasal yakınsaklıkların düzgün yakınsaklık olup olmadıklarını irdeleyeceğiz. Eğer dizi düzgün yakınsak değilse, fonksiyonların tanım kümesi olan X'in öyle (olabildiğince geniş) bir Y altkümesini bulacağız ki Y'ye kısıtlanmış fonksiyon dizisi düzgün yakınsak olsun.

Örnekler

8.3. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Örnek 7.2'de bu dizinin noktasal limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu gördük. Bakalım düzgün yakınsaklık var mı.

Teorem 8.1'e göre fonksiyon dizisi ancak sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsayabilir. Zaten bu bir sonraki sayfada çizdiğimiz fonksiyon grafiklerinden de bariz biçimde görülüyor.

Eğer f_n fonksiyonlarının grafiklerine bakarsak düzgün yakınsaklığın olmadığını hissederiz: Belli ki x büyüdükçe $(f_n(x))_n$ yani $(x/n)_n$ dizisi 0'a yakınsamakta gecikiyor, ya da şöyle açıklayalım: f_n'ler hiçbir zaman sabit 0 fonksiyonunun $(-\epsilon,\ \epsilon)$ şeridine girmiyor. Bunu biçimsel olarak kanıtlayalım.



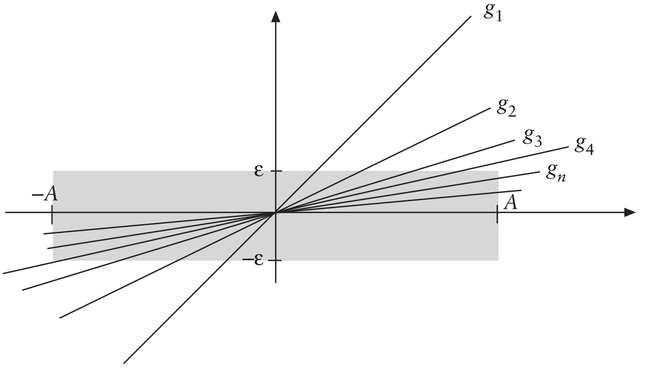
$\epsilon = 1$ olsun. Diyelim öyle bir N var ki her $n > N$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$|f_n(x) - 0| < \epsilon = 1,$$

yani $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$, yani $|x| < n$. Ama bu son eşitlikten daha saçma bir şey olamaz! Her x sayısının mutlak değeri elbette n'den küçük değildir. Demek ki düzgün yakınsaklık yok. Ama şimdi f_n fonksiyonlarını sınırlı bir aralığa kısıtlayalım, diyelim bir $A > 0$ için, fonksiyonları $[-A, A]$ aralığına kısıtladık. Bakalım neler olacak... Bu fonksiyonlara g_n diyelim:

$$g_n = f_{n|[-A,A]}.$$

$(g_n)_n$ fonksiyonlar dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayacağız. Bunun böyle olduğu aşağıdaki şekilden de anlaşılıyor: Fonksiyonlar sadece $[-A, A]$ aralığına kısıtlandığından (A çok büyük bile olsa), g_n fonksiyonları (n yeterince büyük alındığında) $(-\epsilon,\ \epsilon)$ şeridine girer. Bunu biçimsel olarak kanıtlayalım şimdi.



$\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > N$ ve her $x \in [-A, A]$ için,

$$|g_n(x) - 0| < \epsilon,$$

yani

$$\left|\frac{x}{n}\right| < \epsilon,$$

yani

$$\frac{|x|}{\epsilon} < n$$

olacak. Bu son eşitsizliğin yeterince büyük n'ler için sağlandığını görmek pek o kadar zor değil, çünkü her $x \in [-A, A]$ için $|x| < A$, dolayısıyla eğer n'yi $n > A/\epsilon$ olacak biçimde alırsak istediğimizi elde ederiz.

Daha da biçimsel kanıtı verelim: $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$N > \frac{A}{\epsilon}$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir doğal sayı seçelim, örneğin,

$$N = \left[\frac{A}{\epsilon}\right]$$

olsun. O zaman her $n > N$ doğal sayısı için, $\frac{A}{\epsilon} < N + 1 \leq n$ ve

$$|g_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{A}{n} < \epsilon$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Önsav 8.2'den dolayı f_n fonksiyonlarının $\mathbb{R}$'nin herhangi sınırlı bir altkümesine kısıtlanmışları sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsar.

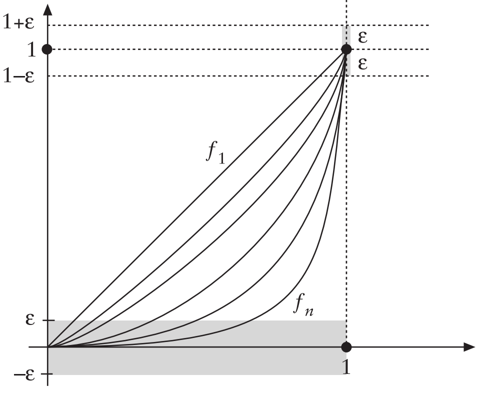
8.4. $X = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur. Dolayısıyla $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi ancak bu f fonksiyonuna düzgün yakınsayabilir.



Yakınsaklığın düzgün olmadığını kanıtlayacağız. Yukarıdaki şekilden de bunun anlaşılması lazım. Belli ki 1 mızıkçılık yapıyor. f'nin 1'de aldığı 1 değeri yüzünden, küçük bir ϵ için, f_n fonksiyonları hiçbir zaman f merkezli ϵ kalınlığındaki şeride girmiyor. Bunu biçimsel olarak kanıtlayalım.

Bu sefer $\epsilon = 1/2$ alalım. Diyelim öyle bir N var ki her $n > N$ ve her $x \in [0, 1]$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon = \frac{1}{2}$$

olsun. O zaman her $n > N$ ve her $x \in [0,1)$ için de,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon = \frac{1}{2},$$

yani

$$x^n = |x^n| < \frac{1}{2}$$

olur. Bunun özel bir hali olarak, her $x \in [0,1)$ için

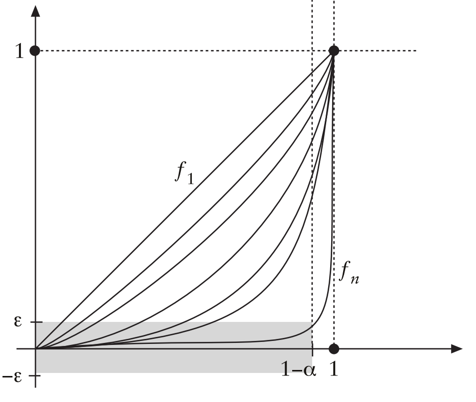
$$x^{N+1} < \frac{1}{2}$$

olur. Ama bu doğru olamaz, çünkü $g(x) = x^{N+1}$ fonksiyonu süreklidir ve x, (soldan) 1'e doğru giderken bu fonksiyonun limiti 1'dir:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} x^{N+1} = 1.$$

Dolayısıyla 1'e yeterince yakın x'ler için x^{N+1} sayısı 1'e çok yakın olmalı, yani 1/2'yi aşmalı. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi düzgün yakınsayamaz.

Şimdi bir önceki örnekte yaptığımıza çok benzer bir şey yapalım. Çok küçük ama pozitif bir α sayısı seçelim ve fonksiyonlarımızı $[0,1]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayacağımıza, $[0, 1-\alpha]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayalım. Bu durumda fonksiyon dizisinin sabit 0 dizisine düzgün yakınsadığını kanıtlayabiliriz.



Bu, yukarıdaki şekilden de anlaşılıyor. $1 - \alpha < 1$ olduğundan, n'yi yeterince büyük seçersek, f_n fonksiyonları $(-\epsilon,\ \epsilon)$ şeridinin içine girerler.

Nitekim, $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N bulacağız ki her $n > N$ ve her $x \in [0, 1-\alpha]$ için, $x^n = |f_n(x) - 0| < \epsilon$ olacak. $x^n \le (1-\alpha)^n$ olduğundan, her $n > N$ için

$$(1-\alpha)^n < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlamak yeterli. Böyle bir N bulmak mümkün müdür? Evet! Çünkü

$$0 \le 1 - \alpha < 1$$

olduğundan,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (1-\alpha)^n = 0$$

eşitliği geçerlidir, yeterince büyük her n sayısı, $(1-\alpha)^n < \epsilon$ eşitsizliğini sağlar.

8.5. $X = \mathbb{R}$ ve

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olsun. O zaman, exp fonksiyonun tanımına göre,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = \exp x$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n \stackrel{p}{=} \exp.$$

Peki düzgün yakınsaklık var mı? Yok! Nitekim eğer x'i pozitif alırsak,

$$\exp x - f_n(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \geq 0$$

olur ve $\epsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun, bu sayı x çok büyük alındığında ϵ'u aşar.

Öte yandan (daha önceki iki örnekte de olduğu gibi), eğer f_n fonksiyonlarını $\mathbb{R}$'nin sınırlı bir altkümesine kısıtlarsak, o zaman yakınsaklık düzgün olur.

Okurun bu aşamada bunu kanıtlamaya çalışmasında büyük yarar vardır. Bölüm 9'da kuvvet serileriyle ilgili çok daha genel bir sonuç kanıtlayacağımızdan, bunun kanıtını ileriye sarkıtıyoruz.

Alıştırmalar

8.6. Örnek 8.4'teki $(f_n)_n$ dizisinin $(0,1)$ açık aralığında düzgün yakınsak olmadığını kanıtlayın.

8.7. Örnek 8.5'teki $(f_n)_n$ dizisinin sınırlı her aralıkta exp fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

8.8. $f_n(x) = x^n/n$ olsun ve f_n'yi $[-1,1]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olarak görelim. $(f_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

8.9. $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin sabit 0 fonksiyonuna noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

8.10. $f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

8.11. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx^2}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

8.12. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f_n(x) = \frac{x^3}{1+nx^2}$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ dizisinin her sınırlı kümede düzgün yakınsadığını ama sınırsız kümeler üzerinde düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

8.13. $X = \wp^{<\omega}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$'nin sonlu altkümelerinden oluşan küme olsun. $x \in X$ için $|x|$, x'in eleman sayısını simgelesin ve
$$f_n(x) = \frac{|x|}{n}$$
tanımını yapalım. $\lim f_n \stackrel{p}{=} 0$ olur. $(f_n)_n$ dizisi sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsarlar mı?

8.14. $X = \wp(\mathbb{N})$ ve $x \in X$ için
$$f_n(x) = \frac{\min x}{n}$$
olsun. $(f_n)_n$ dizisi düzgün yakınsak mıdır?

8.15. $X = \wp(\mathbb{N})$ ve $x \in X$ için
$$f_n(x) = \frac{\min\{\min x, 1\}}{n}$$
olsun. $(f_n)_n$ dizisi düzgün yakınsak mıdır?

8.16. $x \in X = \wp^{<\omega}(\mathbb{R})$ için $\sum x = \sum_{r \in X} r$ olsun ve
$$f_n(x) = \frac{\sum x}{n}$$
tanımını yapalım. $\lim f_n \stackrel{p}{=} 0$ olur. $(f_n)_n$ dizisi sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsarlar mı?

8.17. $x \in X = \wp^{<\omega}(\mathbb{R}^{>0}) \setminus \emptyset$ için $\sum x = \sum_{r \in X} r$ ve $\max x = \max\{r : r \in X\}$ olsun.
$$f_n(x) = \frac{\sum x}{n \max x}$$
tanımını yapalım. $\lim f_n \stackrel{p}{=} 0$ olur. $(f_n)_n$ dizisi sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsarlar mı?

8.2 Düzgün Yakınsaklığın Düzgün Tanımı

Bir önceki altbölümde bir fonksiyon dizisinin bir başka fonksiyona düzgün yakınsamasının ne demek olduğunu gördük. Bu altbölümde aynı kavramın daha kullanışlı ve birçok anlamda daha doğru bir tanımını vereceğiz.

Önce düzgün yakınsaklığın tanımını anımsatalım: X herhangi bir küme ve X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,
$$\text{her } n > N \text{ ve her } x \in X \text{ için, } |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$
önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Bu tanımda,
$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$
eşitsizliği yerine
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

eşitsizliğini almak bir şey değiştirmez. Yani yukarıdaki tanımla şu tanım aynı anlama gelir: Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$\text{her } n > N \text{ ve her } x \in X \text{ için, } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Nitekim birinci tanımdaki koşul her $\epsilon > 0$ için sağlanıyorsa, elbette ikinci tanımdaki koşul da her $\varepsilon > 0$ için sağlanır, çünkü ne de olsa

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

önermesi doğrudur. Şimdi ikinci tanımdaki koşulun her $\epsilon > 0$ için sağlandığını varsayalım ve birinci tanımdaki koşulun her $\epsilon > 0$ için sağlandığını kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. İkinci tanımı ϵ yerine $\epsilon/2$'ye uygulayalım: her $n > N$ ve her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı vardır. Bu N sayısı işimizi görür: Her $n > N$ ve her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği, dolayısıyla

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Kanıtımız bitmiştir.

Bu altbölümde yapmak istediğimiz için ikinci tanım daha kullanışlı olacak. Bundan böyle ikinci tanımı kullanacağız.

Şimdi şu basit ama önemli gözlemi yapalım: Eğer her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

eşitsizliği geçerliyse, o zaman,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \epsilon$$

eşitsizliği de geçerlidir. Ve bunun ters istikameti de doğrudur: Eğer bir n sayısı için,

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \epsilon$$

eşitsizliği geçerliyse, her $x \in X$ için

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla düzgün yakınsaklığın tanımını şöyle de verebiliriz: Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$\text{her } n > N \text{ için } \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Şimdi,

$$||f_n - f|| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\}$$

tanımını yapalım ve düzgün yakınsaklığın son tanımındaki

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\}$$

ifadesi yerine $||f_n - f||$ sembolizmini kullanalım. O zaman düzgün yakınsaklığın tanımı şu şekle dönüşür: Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$\text{her } n > N \text{ için } ||f_n - f|| \leq \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Elde etmek istediğimiz tanıma adım adım yaklaşıyoruz... Normlara uymak için ufak bir değişiklik daha yapalım. Aynen ta en başta yaptığımız gibi

$$||f_n - f|| \leq \epsilon$$

ifadesi yerine

$$||f_n - f|| < \epsilon$$

ifadesini alabiliriz. İşte hedeflediğimiz yeni tanımın sondan bir önceki hali: Eğer her $\epsilon > 0$ için, her $n > N$ için,

$$||f_n - f|| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Bu son koşulun ne dediğinin farkına vardınız mı? Bu koşul aynen,

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

diyor! Tek bir farkla ki $||f_n - f||$'ler illa sayı olmak zorunda değiller, ∞ da olabilirler. Eğer sonsuz tane n için $||f_n - f||$'ler ∞ oluyorsa, o zaman bunların limiti 0 olamaz ve düzgün yakınsaklık yoktur. Eğer en fazla sonlu tane n için $||f_n - f||$'ler ∞ oluyorsa, o zaman $||f_n - f||$'ler arasından sonsuz olanlarını çıkarıp geri kalan sayı dizisinin yakınsaklığına bakabiliriz.

Şimdi tanımın son halini yazabiliriz:

Tanım. *X herhangi bir küme ve X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$ ise, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna* ***düzgün yakınsadığı*** *söylenir.*

Son iki bölümde işlediğimiz örnekleri bu yeni tanım ışığında tekrar ele alalım.

Örnekler

8.18. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Örnek 8.3'te bu dizinin noktasal limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu ama dizinin düzgün yakınsak olmadığını gördük. Düzgün yakınsamanın olmadığını $||f_n - 0||$ değerlerini hesaplayarak görelim:

$$||f_n - 0|| = \sup\left\{\left|\frac{x}{n} - 0\right| : x \in \mathbb{R}\right\} = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = \infty.$$

Demek ki $(||f_n - 0||)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyor, hatta bir sayı dizisi bile değil. Dolayısıyla $(f_n)_n$ dizisi 0'a (ya da başka bir fonksiyona) düzgün yakınsayamaz.
Şimdi f_n fonksiyonlarını bir $A > 0$ için, $[-A, A]$ aralığına kısıtlayalım. Bu fonksiyonlara g_n diyelim:

$$g_n = f_{n|[-A,A]}.$$

Bu durumda $(g_n)_n$ dizisinin sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsar, nitekim,

$$0 \le ||g_n - 0|| = \sup\left\{\left|\frac{x}{n} - 0\right| : x \in [-A, A]\right\} = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in [-A, A]\right\} \le \frac{A}{n}$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} ||g_n - 0|| = 0$ olur.

8.19. $X = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur. Örnek 8.4'te f'nin bu dizinin düzgün limiti olmadığını kanıtlamıştık. Aynı şeyi

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||$$

limitini hesaplayarak gösterelim. Tanım kümesini, $[0, 1]$ yerine $[0, 1)$ alıp düzgün yakınsaklığın olmadığını göstersek de olur (bkz. Teorem 8.2). O zaman, $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limiti sabit 0 fonksiyonu olur ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - 0||$$

limitinin olmadığını ya da olsa bile bu limitin 0 olmadığını kanıtlamamız gerekir. Nitekim,

$$||f_n - 0|| = \sup\{|x^n - 0| : x \in [0, 1)\} = \sup\{|x|^n : x \in [0, 1)\} = 1$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - 0|| = 1 \neq 0$$

olur ve $(f_n)_n$ dizisi sabit 0 dizisine düzgün yakınsamaz.

Şimdi çok küçük ama pozitif bir α sayısı seçelim ve fonksiyonlarımızı $[0,1]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayacağımıza, $[0, 1-\alpha]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye yollayalım. Bu durumda fonksiyon dizisinin sabit 0 dizisine düzgün yakınsadığını kanıtlayabiliriz:

$$||f_n - 0|| = \sup\{|x^n - 0| : x \in [0, 1-\alpha]\} = \sup\{|x|^n : x \in [0, 1-\alpha]\} = (1-\alpha)^n$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - 0|| = \lim_{n\to\infty} (1-\alpha)^n = 0$$

olur ve bu sefer $(f_n)_n$ dizisi sabit 0 dizisine düzgün yakınsar.

8.20. $X = \mathbb{R}$ ve

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olsun. O zaman, exp fonksiyonun tanımına göre,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp x$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{p}{=} \exp.$$

Düzgün yakınsaklığın olmadığını göstermiştik. Bir daha gösterelim:

$$\begin{aligned} ||f_n - \exp|| &= \sup\{|f_n(x) - \exp x| : x \in \mathbb{R}\} = \sup\left\{\left|\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{x^m}{m!}\right| : x \in \mathbb{R}\right\} \\ &\geq \sup\left\{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} : x \in \mathbb{R}^{\geq 0}\right\} \geq \sup\left\{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : x \in \mathbb{R}\right\} = \infty. \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir.

Ama sınırlı bir aralıkta yakınsaklık düzgün olur. Bunun çok zor olmayan kanıtını okura bırakıyoruz.

8.21. X ve Y birer küme olsun. $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon dizisinin $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını varsayalım. $h : Y \longrightarrow X$ herhangi bir fonksiyon olsun. O zaman $(f_n \circ h : Y \longrightarrow \mathbb{R})_n$ fonksiyon dizisi $g \circ h : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Elbette, ne de olsa $(f_n)_n$ dizisi için bulunan N sayısı, $(f_n \circ h)_n$ dizisi için de işe yarar.

Bu altbölümde bir fonksiyon dizisinin bir başka fonksiyona düzgün yakınsamasının ikinci ve daha kullanışlı bir tanımını gördük. Bunun için

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

tanımına ihtiyaç duyduk. Bu önemli bir tanımdır, o kadar ki, "üzerinde durmaya değer" demek bile yeterince güçlü bir ifade değildir.

$||f||$ ifadesi bazen kitaplarda $||f||_\infty$ olarak geçer; adına da f'nin ***süpnorm***'u denir. Aşağıda süpnormun bazı başat özelliklerini ve Fonk X kümesinin özel bazı altkümelerini göreceğiz.

8.3 Fonksiyonların Süpnormu

Bir $f \in \text{Fonk}\, X$ fonksiyonu için,

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

tanımını yapalım. Elbette $||f||$, bir gerçel sayı olabileceği gibi ∞ da olabilir. Yani $||f||$, $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ kümesinin bir elemanıdır.

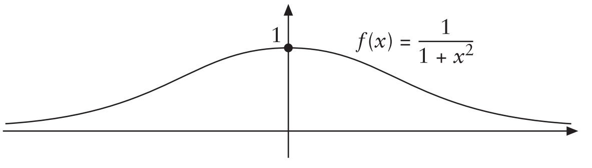
Örnekler

8.22. $X = \mathbb{R}$ ve $f(x) = x$ ise, $||f|| = \infty$ olur.

8.23. Öte yandan, $X = \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

kuralıyla tanımlanmışsa, aşağıdaki grafikten de görüleceği üzere, $||f|| = 1$'dir.



8.24. Ama dikkat $f(x) = x/(x + 1)$ ise de $||f|| = 1$ olur ama $|f(x)| = 1$ eşitliğini sağlayan bir x yoktur.

Teorem 5.15'te $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\pm\infty\}$ kümesi üzerine toplama, çarpma ve bir sıralama tanımlamıştık. Bu toplama ve sıralamaya göre, her $f \in \operatorname{Fonk} X = \operatorname{Fonk}(X, \mathbb{R})$ ve her $x \in X$ için,

$$f(x) \leq |f(x)| \leq ||f||$$

olur elbette. Ayrıca $||f||$, yukarıdaki eşitsizliği her $x \in X$ için sağlayan $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ kümesinin en küçük elemanıdır.

Şu sonucu kanıtlamak oldukça kolaydır:

Önsav 8.3. *Her f, $g \in \operatorname{Fonk} X$ ve her $r \in \mathbb{R}$ için, şu önermeler doğrudur:*
i. $||f|| = 0$ *ve* $f = 0$ *eşitliklerinden biri doğruysa diğeri de doğrudur.*
ii. $||rf|| = |r| \cdot ||f||$.
iii. $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.
iv. $||f \cdot g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$.
Dolayısıyla, her f, g, $h \in \operatorname{Fonk} X$ için şunlar doğrudur:
a. $||f - g|| = 0 \Leftrightarrow f = g$.
b. $||f - g|| = ||g - f||$.
c. $||f - g|| \leq ||f - h|| + ||h - f||$.

Kanıt: İlk iki önerme, tanımdan dolayı bariz; aslında üçüncüsü de:

$$\begin{aligned} ||f + g|| &= \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in X\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\} = ||f|| + ||g||. \end{aligned}$$

Dördüncüsünü ve ikinci kısmı okura alıştırma olarak bırakıyoruz. □

Önsav 8.3'teki özelliklerin, aynen gerçel sayılar üzerine tanımlanmış olan mutlak değer fonksiyonu için de geçerli olduğuna özellikle dikkatinizi çekmek isteriz. Yani Fonk X yerine $\mathbb{R}$ kümesini alsak ve $||\ ||$ yerine mutlak değeri alsak, yukarıdaki önsavın $\mathbb{R}$ ve mutlak değer için doğru olduğunu, lise, hatta ortaokul yıllarından beri bildiğimizin farkına varırız. Tek farkı, Fonk X kümesindeki bir f elemanı için $||f||$ denen şeyin sonsuz olabilmesi; oysa $\mathbb{R}$'de mutlak değer sonsuz olamaz tabii. Ama tek derdimiz bu olsun! Bunun da yakın gelecekte çaresini bulacağız.

Alıştırma 8.25. Önsav 8.3.iv'ü kanıtlayın. Önsav 8.3.iii ve iv'teki eşitsizliklerin her zaman doğru olmadığını gösterin.

8.4 Fonk X Üzerine Mesafe

Eğer f ve g, Fonk X kümesinden iki eleman ise, f ve g arasındaki ***mesafeyi***

$$d(f,g) = \min\{1, ||f-g||\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $d(f,g)$ hiçbir zaman sonsuz olmaz, hatta hiçbir zaman 1'i aşamaz. Ama bizim için $d(f,g)$'nin 1'i aşmaması değil, Önsav 8.4'te kanıtlayacağımız özellikleri önemli olacak. Nitekim herhangi bir $a > 0$ için

$$d(f,g) = \min\{a, ||f-g||\}$$

olarak tanımlanmış olsaydı da herhangi bir şey değişmezdi, yapacaklarımızın hepsi bu yeni d için de geçerli olurdu. $d(f,g)$'nin tanımında beliren 1'in yegâne işlevi, f ile g arasındaki mesafenin sonsuz olmasını engelleyip Önsav 8.3'ün a, b ve c özelliklerini sağlaması (bkz. Önsav 8.4). Eğer $||f-g||$ sonsuz olmasaydı böyle bir tanıma ihtiyaç duymazdık bile. Nitekim, sınırlı fonksiyonlarla çalışırken yukarıdaki $d(f,g)$ tanımını unutup,

$$d(f,g) = ||f-g||$$

tanımıyla çalışmak bizi mağdur etmeyecek (öte yandan pek bir şey de kazandırmayacak!)

Bu arada, daha ileri gitmeden,

$$d(f,g) \le 1,\ d(f,g) = ||f-g|| \text{ ve } ||f-g|| \le 1$$

önermelerinin birbirine denk olduklarını da farkedelim. Yani küçük mesafeler için, $d(f,g)$ ile $||f-g||$ arasında bir ayrım yoktur.

Önsav 8.4. *Her f, g, $h \in$ Fonk X için şu önermeler geçerlidir:*
i. $d(f,g) \in \mathbb{R}^{\ge 0}$.
ii. $d(f,g) = 0$ *ve* $f = g$ *eşitliklerinden biri geçerliyse, diğeri de geçerlidir.*
iii. $d(f,g) = d(g,f)$.
iv. $d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)$.

Kanıt: Bunların her biri Önsav 8.3'ün ve tanımın birer sonucudur. (i) çok bariz. (ii) de:

$$d(f,f) = \min\{1, ||f-f||\} = \min\{1,0\} = 0.$$

Diğer yandan $d(f,g)=0$ ise, o zaman,

$$0 = d(f,g) = \min\{1, ||f-g||\}$$

olduğundan $||f-g|| = 0$ buluruz; bundan da Önsav 8.3'e göre $f=g$ çıkar.

(iii)'ün kanıtı: Önsav 8.3'ten dolayı,

$$||f-g|| = ||(-1)(g-f)|| = |-1| \cdot ||g-f|| = ||g-f||.$$

olduğundan, $d(f,g) = d(g,f)$ olur.

(iv)'ün kanıtı: Eğer $d(f,h)$ ya da $d(h,g)$ mesafelerinden biri 1 ise, eşitsizlik elbette geçerli olur. İkisinin de 1'den küçük olduklarını varsayalım. O zaman,

$$d(f,h) = ||f-h||$$

ve

$$d(h,g) = ||h-g||$$

olmak zorunda. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \min\{1, ||f-g||\} \le ||f-g|| \le ||(f-h)+(h-g)||\} \\ &\le ||f-h|| + ||h-g|| = d(f,h) + d(h,g). \end{aligned}$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Bu aşamada durup biraz soluklanalım ve ne kanıtladığımıza dikkatlice (ama belli bir mesafeden) bakalım. Gerçel sayılarda mutlak değerin de benzer özellikleri vardır: Her x, y, z gerçel sayısı için, şu önermeler doğrudur:

i. $|x-y| \in \mathbb{R}^{\ge 0}$,
ii. $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$,
iii. $|x-y| = |y-x|$,
iv. $|x-y| \le |x-z| + |z-y|$.

Yani Fonk X yerine $\mathbb{R}$ kümesini alsaydık ve her x, $y \in \mathbb{R}$ için,

$$d(x,y) = |x-y|$$

tanımını yapsaydık da, Önsav 8.4 geçerli olacaktı.

Önsav 8.4'teki dört özelliğe sahip bir d fonksiyonuna ***mesafe*** fonksiyonu denir. Demek ki,

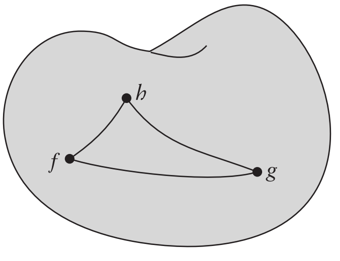
$$d(f,g) = \min\{1, ||f-g|\}$$

kuralıyla tanımlanmış $d : \text{Fonk}\,X \times \text{Fonk}\,X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, Fonk X kümesi üzerine bir mesafe fonksiyonudur. Bu yüzden $(\text{Fonk}\,X, d)$ çiftine ***metrik uzay*** adı verilir. Aynen bunun gibi,

$$d(x, y) = |x - y|$$

kuralıyla tanımlanmış $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da $\mathbb{R}$ üzerine bir mesafe fonksiyonudur ve $(\mathbb{R}, d)$ çifti de bir metrik uzaydır.

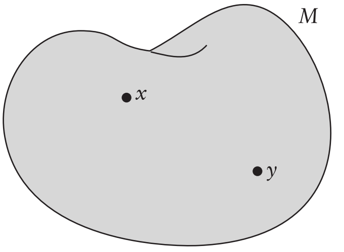
Önsav 8.4'te kanıtlanan dört özelliği sağlayan bir d fonksiyonuna "mesafe fonksiyonu" denmesi nedensiz değildir. Nitekim bu dört özellik "mesafe" kavramının sağlaması gereken özelliklerin özüdür: Mesafe denen şey, eğer gerçekten "mesafe" adını hakediyorsa, her şeyden önce bir gerçel sayı olmalı ve hiç negatif olmamalı. Bu, Önsav 8.4.i'de verilmiş. Ayrıca, ancak bir noktanın kendisine olan mesafesi 0 olabilmeli; iki farklı noktanın mesafesi pozitif olmalı. Bu da Önsav 8.4.ii'de verilmiş. Ayrıca mesafe simetrik olmalı, yani A'nın B'ye mesafesi B'nin A'ya olan mesafesine eşit olmalı. Bu, Önsav 8.5.iii'te verilmiş. Ve son olarak, A'dan B'ye gitmek için bir C noktasından geçilmek istenirse, mesafeyi kısaltmış olamayız. Bu son özelliğe ***üçgen eşitsizliği*** adı verilir. Bu özellik de Önsav 8.4.iv'te verilmiştir.



"Üçgen eşitsizliği"

Sonuç olarak, Önsav 8.4'teki dört özellik, sezgisel olarak hissettiğimiz "mesafe" kavramının vazgeçilmez ve en başat özellikleridir. Bu yüzden böyle bir fonksiyona ***mesafe fonksiyonu*** adı verilir. Ve bu yüzden mesafe kavramının tanımlandığı kümeye de metre'den türeyen ***metrik uzay*** denir.

Bir ***metrik uzay***, bir M kümesi ve Önsav 8.3'ün a, b ve c özelliğini sağlayan bir $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu için, (M, d) biçiminde yazılan bir çifttir. d'ye M üzerine ***mesafe*** denir. Çoğu zaman d'nin ne olduğu bilinir ve gözardı edilerek, (M, d) metrik uzayı yerine M metrik uzayı denir. Örneğin $M = \mathbb{R}$ ise, aksi söylenmedikçe $d(x, y) = |x - y|$ alınır.



Bir metrik uzay!

Bir metrik uzayın her altkümesi, aynı mesafe fonksiyonuyla bir metrik uzaydır. Bu durumda altkümeye ***altuzay*** adı verilir.

Bu ciltte amacımız hiçbir biçimde metrik uzayların genel teorisini göstermek değil, ama bu dile şimdiden alışmakta yarar var diye düşünüyoruz. Metrik uzay konusunu dördüncü ciltte [N5] işleyeceğiz.

$\mathbb{R}$'de tanımlanan hemen hemen her kavram metrik uzaylarına da genelleştirilebilir, hele metrik uzay üzerine toplama ve çarpma gibi işlemler varsa. Örneğin, yakınsaklık, limit, Cauchy dizisi, süreklilik, tamlık gibi kavramlar gerçel sayılardan metrik uzaylara genelleştirilebilir. Bunun için, $\mathbb{R}$'de yapılmış bir tanımda görünen her

$$|x - y|$$

türünden ifade yerine

$$d(x, y)$$

koymak yeterlidir; böylece aynı kavramı metrik uzaylara genelleştirmiş oluruz.

Her metrik uzayda toplama ve çarpma gibi işlemler olmaz. Ama $\mathbb{R}$ ve $\operatorname{Fonk} X$ metrik uzaylarında, mesafe dışında bir de toplama, çıkarma, çarpma ve "bir sayıyla çarpma" gibi işlemlerimiz var. Bu işlemler ve mesafe kavramı sayesinde, geçmişte $\mathbb{R}$ için tanımladığımız birçok kavramı $\operatorname{Fonk} X$ metrik uzayına genelleştireceğiz.

8.5 $\operatorname{Fonk} X$ Uzayında Yakınsaklık

$(f_n)_n$, $\operatorname{Fonk} X$ kümesinden bir dizi olsun. $f \in \operatorname{Fonk} X$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$n > N \text{ ise } d(f_n, f) < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'nin f'ye ***yakınsadığı*** söylenir. Bu koşulun aynen

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$$

demek olduğunu okurun dikkatine sunarız. Ama eğer $(d(f_n, f))_n$ dizisinin limiti 0 ise, bu sayılar bir zaman sonra 1'in altına girerler ve o zaman da

$$d(f_n, f) = \min\{1, ||f_n - f||\} = ||f_n - f||$$

olur, yani

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

olur. Bunun tersi de doğrudur: Eğer

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

ise, o zaman $||f_n - f||$ sayıları bir zaman sonra 1'in altına girerler ve o zaman gene

$$d(f_n, f) = \min\{1, ||f_n - f||\} = ||f_n - f||$$

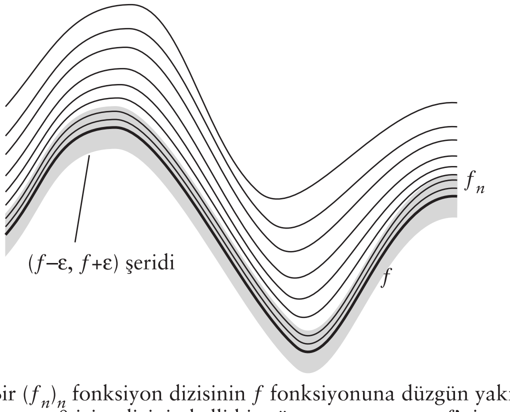
eşitliği geçerlidir, yani

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$$

olur. Dolayısıyla tanımı şöyle de verebilirdik: Eğer her $\epsilon > 0$ için,

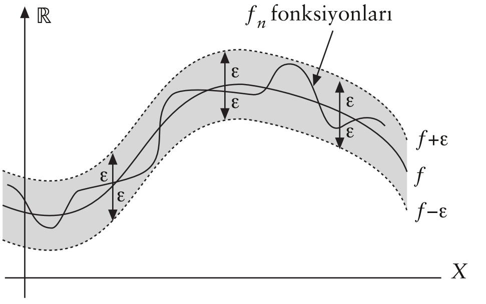
$$n > N \text{ ise } ||f_n - f|| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'nin f'ye ***yakınsadığı*** söylenir. Sonuç: Bu altbölümde tanımlanan bu yakınsaklık kavramı, aynen, önceki altbölümde tanımlanan düzgün yakınsaklık kavramıdır, ne bir fazla ne bir eksik!



Bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması, her $ε > 0$ için, dizinin belli bir göstergeçten sonra f'nin $ε$ şeridinin içine girmesi demektir.

Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f'ye düzgün yakınsaması için yeter ve gerek koşul, her $\epsilon > 0$ için, f_n fonksiyonlarının "bir zaman sonra", yani belli bir N göstergecinden sonra, yukarıdaki ve aşağıdaki şekillerdeki gibi, $f - \epsilon$ ile $f + \epsilon$ şeridinin içine girmesidir.



Verilmiş bir $(f_n)_n$ dizisi eğer yakınsaksa, tek bir fonksiyona yakınsayabilir. Limitin biricikliği bir önceki paragraftan ve bölümlerden belli: $(f_n)_n$ dizisi f'ye yakınsıyorsa, f ancak $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limiti olabilir (bkz. Teorem 8.1). Böylece

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

eşitliğini yazma hakkını kazanırız. Böyle bir f'nin olduğu bir diziye ***yakınsak*** ya da daha doğru olarak ***düzgün yakınsak*** dizi denir. f'ye de $(f_n)_n$ dizisinin ***düzgün limiti*** ya da ***süpnormuna göre limiti*** denir. Noktasal yakınsaklıkla karışmasın diye, geçen bölümlerde de belirttiğimiz gibi,

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

yerine,

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$$

yazılır.

Bu bulgularımızı bir önsav halinde toparlayalım:

Önsav 8.5. *$(f_n)_n$, $\mathrm{Fonk}\, X$ kümesinden bir dizi ve $f \in \mathrm{Fonk}\, X$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*
a. $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$.
b. $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.
c. $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$.
d. $\lim_{n\to\infty} (f_n - f) \stackrel{u}{=} 0$. □

Önsavın son koşulundaki 0 elbette sabit 0 fonksiyonunu simgelemektedir.

Örnekler

8.26. Sabit olmayan bir polinomiyal fonksiyon $\pm\infty$'da $\pm\infty$'a ıraksadığından, sabit olmayan polinomiyal fonksiyonlardan oluşan bir $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_n$ dizisi $\mathbb{R}$'nin sınırsız bir altkümesi üzerinde sınırlı bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayamaz. (Sayfanın tepesindeki şekilden bu kolaylıkla anlaşılıyor.)

8.27. Sinüs fonksiyonunun -1 ile 1 arasında değer aldığını biliyoruz [N4, Alıştırma 16.6]. Sinüs fonksiyonlarının,

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

olarak tanımlandığını da anımsayalım. Bir önceki örneğe göre, bu yakınsaklık $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün olamaz, sadece noktasal bir yakınsaklık söz konusudur. Ama yakın zamanda yakınsaklığın her sınırlı aralık üzerinde düzgün olduğunu kanıtlayacağız (bkz. Sonuç 9.2). Aynı şeyler kosinüs fonksiyonu için de geçerlidir elbette.

Alıştırmalar

8.28. Her f, g, $h \in \operatorname{Fonk} X$ için,

$$d(f,g) = d(f-g,0) = d(f-h, g-h)$$

eşitliklerini kanıtlayın. (Buradaki 0, elbette sabit 0 fonksiyonu anlamına geliyor.)

8.29. $X = \mathbb{R}$ olsun. Her n doğal sayısı için, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, n dışında her yerde 0 değerini alsın ve n'de de n değerini alsın.

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{p}{=} 0$$

eşitliğinin doğru ama

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} 0$$

eşitliğinin yanlış olduğunu kanıtlayın.

8.30. $X = \mathbb{R}$ olsun. Her pozitif n doğal sayısı için, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, n dışında her yerde 0 değerini alsın ve n'de $1/n$ değerini alsın.

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} 0$$

eşitliğini kanıtlayın.

8.6 Düzgün Yakınsaklığın Aritmetiği

Şimdi düzgün yakınsaklığın aritmetiği üzerine birkaç sonuç kanıtlayalım.

Teorem 8.6. *X bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon dizisi ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f \text{ ve } \lim_{n\to\infty} g_n \stackrel{u}{=} g$$

ise, $(f_n + g_n)_n$ ve $(rf_n)_n$ fonksiyon dizilerinin de düzgün limitleri vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) \stackrel{u}{=} f + g \text{ ve } \lim_{n\to\infty} rf_n \stackrel{u}{=} rf$$

olur.

Kanıt: Birinci eşitliğin kanıtı tamamen,

$$||(f_n + g_n) - (f + g)|| = ||(f_n - f) + (g_n - g)|| \leq ||f_n - f|| + ||g_n - g||$$

eşitsizliğine dayanır ve Sandviç Teoremi sayesinde Önsav 8.5'ten hemen çıkar. İkincisini okura bırakıyoruz. □

Belki şaşırtıcı ve hayal kırıklığına neden olacak ama, benzer sonuç çarpma için bu genellikte doğru değildir. Buna hemen bir örnek verelim.

Örnek 8.31. $X = \mathbb{R}$ olsun.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \text{ ve } g_n(x) = g(x) = x$$

olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} g_n \stackrel{u}{=} g$$

olur. Teorem 7.1'e göre

$$\lim_{n\to\infty} f_n g_n \stackrel{p}{=} 0$$

olur elbette ama Örnek 8.3'e göre

$$\lim_{n\to\infty} f_n g_n \stackrel{u}{=} 0$$

olmaz.

Öte yandan eğer her f_n ve her g_n fonksiyonu X üzerine sınırlıysa o zaman Teorem 8.6 çarpma için de geçerlidir. Sınırlı fonksiyonlarla bir sonraki bölümde ilgileneceğimizden bunun kanıtını erteliyoruz. (Dileyen aşağıdaki 8.39'uncu alıştırmaya bakabilir.) Bunu bildiğimizi varsayarsak, $\mathbb{R}$'nin her sınırlı I altkümesinde,

$$\lim_{n\to\infty} (f_n g_n)_{|I} \stackrel{u}{=} 0$$

olduğunu buluruz.

Aşağıdaki alıştırmalarda tersi söylenmedikçe X bir küme ve $(f_n)_n$ gibi diziler fonksiyon dizileri; ayrıca her fonksiyon X'ten $\mathbb{R}$'ye gidiyor.

Alıştırmalar

8.32. $X = \mathbb{R}$ olsun. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{eğer } x > n \text{ ise} \\ x & \text{eğer } -n \leq x \leq n \text{ ise} \\ -n & \text{eğer } x < -n \text{ ise} \end{cases}$$

f_n fonksiyonlarının grafiklerini çizin. Noktasal yakınsadığı fonksiyonu bulun. $(f_n)_n$ dizisi bu noktasal limite düzgün yakınsar mı?

8.33. $X = (0, 1)$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{p}{=} 0$$

eşitliğini ve her n için $||f_n|| = 1$ eşitliğini gösterin. Demek ki süpnormu 1 olan bir fonksiyonlar dizisi, süpnormu 1 olmayan bir fonksiyona noktasal olarak yakınsayabiliyorlar.

8.34. Eğer $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ ise $\lim_{n\to\infty} ||f_n|| = ||f||$ eşitliğini kanıtlayın. (Tersinin doğru olması sözkonusu bile olamaz!)

8.35. $X = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x + 1/n$ olsun.
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \stackrel{u}{=} x$$
eşitliğinin doğru olduğunu ama
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)^2 \stackrel{u}{=} x^2$$
eşitliğinin yanlış olduğunu gösterin.

8.36. $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olsun. f'nin sınırlı olduğunu varsayalım, yani $||f|| < \infty$ olsun. Şunu kanıtlayın: Öyle bir A ve N vardır ki, her $n > N$ için, $||f_n|| \leq A$. (Yani $(||f_n||)_n$ dizisinin kuyruğunun sınırlı olduğunu kanıtlayın.)

8.37. Her şey yukarıdaki alıştırmadaki gibi olsun ama f illa sınırlı olmasın. O zaman bir önceki alıştırmadaki sonucun doğru olmayabileceğini kanıtlayın.

8.38. Eğer her f_n sınırlıysa ve $(f_n)_n$ dizisi düzgün yakınsaksa, o zaman $(||f_n||)_n$ sayı dizisinin sınırlı olduğunu kanıtlayın.

8.39. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki sınırlı fonksiyon dizisi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ ve $\lim_{n\to\infty} g_n \stackrel{u}{=} g$ ise,
$$\lim_{n\to\infty} f_n \cdot g_n \stackrel{u}{=} f \cdot g$$
eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Bir önceki alıştırmadan yararlanacaksınız.)

8.40. $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olsun. Şunu kanıtlayın: $\epsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir N sayısı vardır ki, her $n, m > N$ için,
$$||f_n - f_m|| < \epsilon$$
olur. (Bu son özelliği sağlayan dizilere ***Cauchy dizileri*** adı verilir. Bu diziler bir sonraki altbölümünün konusu olacak.)

8.7 Cauchy Dizileri

Şimdi gerçel sayılardan $\mathrm{Fonk}(X, \mathbb{R})$ metrik uzayına genelleştireceğimiz ikinci kavramı ele alalım: Cauchy dizisi kavramı.

$(f_n)_n$, $\mathrm{Fonk}\, X$ metrik uzayından bir dizi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,
$$n, m > N \text{ ise } d(f_n, f_m) < \epsilon$$
koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'ye ***Cauchy dizisi*** adı verilir.

Tanımdaki ϵ'u dilersek 1'den küçükeşit alabileceğimizden (eğer tanım 1'den küçükeşit ϵ'lar için doğruysa her ϵ için doğrudur), tanımdaki $d(f_n, f_m)$ yerine $||f_n - f_m||$ alabiliriz. Dolayısıyla tanımı "Eğer her $\epsilon > 0$ için,
$$n, m > N \text{ ise } ||f_n - f_m|| < \epsilon$$
koşulunu sağlayan bir N varsa, $(f_n)_n$'ye ***Cauchy dizisi*** adı verilir" olarak değiştirebiliriz.

Aynen gerçel sayılarda olduğu gibi, $\mathrm{Fonk}(X, \mathbb{R})$ metrik uzayının her yakınsak dizisi Cauchy dizisidir ve her Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu ikinci özellik, yani her Cauchy dizisinin yakınsak olma özelliği her metrik uzay tarafından paylaşılmaz. Örneğin $\mathbb{Q}$'de bu doğru değildir. Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu metrik uzaylarına ***tam metrik uzayları*** denir.

Teorem 8.7. Fonk X *metrik uzayının her yakınsak dizisi bir Cauchy dizisidir*[1]. *Ayrıca* Fonk$(X,\mathbb{R})$ *metrik uzayının her Cauchy dizisi yakınsaktır. Daha ayrıntılı söylemek gerekirse,* Fonk$(X,\mathbb{R})$ *metrik uzayındaki her Cauchy dizisinin noktasal limiti vardır ve dizi bu noktasal limite düzgün yakınsar. Kısacası* Fonk$(X,\mathbb{R})$ *metrik uzayı tamdır.*

Kanıt: Birinci kısmın kanıtı standart ve oldukça kolay:

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$$

olsun, yani

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

olsun. $\epsilon > 0$ rastgele seçilmiş olsun. O zaman öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için

$$||f_n - f|| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Dolayısıyla Teorem 8.3.iii'e göre, her $n, m > N$ için,

$$||f_n - f_m|| = ||(f_n - f) + (f - f_m)|| \le ||f_n - f|| + ||f - f_m|| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ dizisi Cauchy dizisiymiş.

Şimdi teoremin ikinci kısmını kanıtlayalım. $(f_n)_n$, Fonk$(X,\mathbb{R})$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Demek ki her $\epsilon > 0$ için,

$$n, m > N \text{ ise } ||f_n - f_m|| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N vardır. Bir başka deyişle, her $\epsilon > 0$ için, $n, m > N$ ise

$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in X\} < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N vardır. Bundan da tabii ki, her $\epsilon > 0$ ve her $x \in X$ için, n, $m > N$ ise

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N'nin varlığı çıkar. Demek ki, $(f_n(x))_n$ dizisi gerçel sayılarda bir Cauchy dizisidir. Gerçel sayılar tam olduğundan [N4, Altbölüm 8.2], bu dizinin bir limiti vardır. Limite $f(x)$ diyelim:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Böylece X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir f fonksiyonu bulmuş oluruz. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$$

[1] Bu önerme her metrik uzayda doğrudur; ama sonraki önermeler her metrik uzayda doğru değildir.

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor.

Okurun, vereceğimiz kanıtın ne kadar zekice olduğunu kavrayabilmesi için en az bir saat kendi başına kanıtlamaya çalışmasında yarar vardır.

Herhangi bir $\epsilon > 0$ seçelim. N de yukarıdaki gibi olsun. $m > N$ sabit bir sayı olsun. Demek ki her $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bu eşitsizlikte n'yi sonsuza götürelim (m ve x sabit kalacaklar). Gerçel sayılardan gerçel sayılara giden mutlak değer fonksiyonu sürekli olduğundan (Önsav 1.8 ya da Alıştırma 1.32), Sandviç Teoremi'nden,

$$\epsilon \geq \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_m(x))\right| = |f(x) - f_m(x)|$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik her $x \in X$ için doğru olduğundan,

$$\epsilon \geq ||f - f_m||$$

elde ederiz. Her $\epsilon > 0$ için,

$$m > N \Rightarrow ||f - f_m|| \leq \epsilon$$

önermesinin sağlandığı bir N sayısı bulduk. Ama bu aynen,

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_m|| = 0$$

demektir, yani gerçekten de $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Alıştırma 8.41. Teorem 8.7'yi kanıtına (bir defa daha!) bakmadan kanıtlayın. (Önemlidir!)

8.8 Sınırlı Fonksiyonlar Kümesi $\ell^\infty(X)$

$\ell^\infty(X, \mathbb{R})$ ya da kısaca $\ell^\infty(X)$, X kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden sınırlı fonksiyonlar kümesi olsun:

$$f \in \ell^\infty(X) \Leftrightarrow f(X) \text{ sınırlı.}$$

Eğer f, $g \in \ell^\infty(X)$ ise, elbette $||f - g||$ bir gerçel sayı olur. Dolayısıyla Önsav 8.3'e göre,

$$d(f, g) = \min\{1,\ ||f - g||\}$$

yerine

$$d(f, g) = ||f - g||$$

alırsak da $\ell^\infty(X)$ bir metrik uzayı olur. İki metrikten birini seçelim. Hangisini seçtiğimiz bizim için önemli olmayacak. Fikirleri sabitlemek açısından, diyelim $d(f,g) = ||f-g||$ metriğini seçtik.

$\ell^\infty(X)$ kümesi toplama, çıkarma, çarpma ve sabit bir sayıyla çarpma işlemleri altında kapalıdır tabii ki. Ancak bölme işlemi altında kapalı değildir, mesela $(0,1)$ aralığı üzerine $f(x) = x$ formülüyle tanımlanmış fonksiyon sınırlıdır ama $g(x) = 1/x$ fonksiyonu sınırlı değildir. Ama elbette eğer f fonksiyonu sınırlıysa ve 0'ın yakınına uğramıyorsa, o zaman $1/f$ fonksiyonu da sınırlıdır.

Teorem 8.8. *X bir küme olsun. $\ell^\infty(X)$, d metriği için tam bir metrik uzaydır.*

Kanıt: $\ell^\infty(X)$ kümesinin d için bir metrik uzay olduğu belli. Tamlığı kanıtlayalım. $\ell^\infty(X)$ metrik uzayından bir $(f_n)_n$ Cauchy dizisi seçelim. $\ell^\infty(X) \subseteq \operatorname{Fonk} X$ olduğundan ve Teorem 8.7'ye göre $\operatorname{Fonk} X$ tam olduğundan, $(f_n)_n$ dizisi bir $f \in \operatorname{Fonk} X$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. f'nin sınırlı olduğunu kanıtlamalıyız. Düzgün yakınsamanın tanımında $\epsilon = 1$ alalım. O zaman bir n için $d(f_n, f) < 1$ olur, dolayısıyla her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f(x)| < 1$$

olur. Böyle bir n'yi sabitleyelim. $x_0 \in X$ sabit bir eleman olsun. B sayısı, her $x \in X$ için,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \le B$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde seçilsin. (f_n sınırlı bir fonksiyon olduğundan, böyle bir B vardır.) Şimdi her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< 1 + B + 1 = B + 2 \end{aligned}$$

olur. Bu da f'nin sınırlı bir fonksiyon olduğunu gösterir. □

Önsav 8.9. *$\ell^\infty(X)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Kanıt: $(f_n)_n$, $\ell^\infty(X)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Teorem 8.8'e göre bu dizinin düzgün bir limiti vardır, diyelim f. Yakınsaklığın tanımındaki ϵ sayısını 1 olarak alalım. Ve N, her $n > N$ için,

$$||f - f_n|| < 1$$

olacak biçimde seçilmiş olsun. Demek ki, her $n > N$ için,

$$||f_n|| = ||(f_n - f) + f|| \le ||f_n - f|| + ||f|| \le 1 + ||f||$$

elde ederiz. Dolayısıyla, eğer $M = \max\{||f_0||, ||f_1||, \ldots, ||f_N||, ||f||\} + 1$ ise, her n için, $||f_n|| < M$ olur. □

İkinci Kanıt: Yukarıdaki kanıt pek hoşumuza gitmedi, çünkü kanıt Teorem 8.8'i kullanıyor, ama kanıtlamak istediğimiz önsav tam olsun ya da olmasın tüm uzaylarda geçerli. Yukarıdaki kanıttaki gibi f'yi kullanmayan bir kanıt verelim. Cauchy dizisi tanımındaki ϵ sayısını 1'e eşit alalım. O zaman öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için

$$||f_n - f_m|| < 1$$

olur. Demek ki her $n > N$ için,

$$||f_n - f_{N+1}|| < 1.$$

Buradan da her $n > N$ için,

$$||f_n|| \le ||f_n - f_{N+1}|| + ||f_{N+1}|| < ||f_{N+1}|| + 1$$

çıkar. Demek ki her n için,

$$||f_n|| < \max\{||f_0||, ||f_1||, \ldots, ||f_{N+1}||\} + 1$$

olur. □

Şimdi düzgün yakınsaklığın aritmetiği üzerine sonuçlar kanıtlayalım. Teorem 8.6 ve ardından gelen örnekten farklı olarak $\ell^\infty(X)$ metrik uzayında fonksiyon çarpması da terbiyeli bir davranış sergiliyor.

Teorem 8.10. *X bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, $\ell^\infty(X)$'den iki dizi olsun ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f \text{ ve } \lim_{n\to\infty} g_n \overset{u}{=} g$$

ise, $(f_n + g_n)_n$, $(f_n g_n)_n$ ve $(rf_n)_n$ fonksiyon dizilerinin de düzgün limitleri vardır ve

$$\begin{aligned}
&\lim\nolimits_{n\to\infty} (f_n + g_n) \overset{u}{=} f + g,\\
&\lim\nolimits_{n\to\infty} (f_n g_n) \overset{u}{=} fg,\\
&\lim\nolimits_{n\to\infty} rf_n \overset{u}{=} rf
\end{aligned}$$

olur.

Kanıt: Birinci ve üçüncü eşitlik aynen Teorem 8.6; yalnız $f + g$ ve rf fonksiyonlarının $\ell^\infty(X)$ uzayında olmaları gerektiğinin kanıtlanması gerekiyor ki bunu da Önsav 8.3'ten biliyoruz. $fg \in \ell^\infty(X)$ olgusu da aynı önsavdan çıkar.

$$\lim_{n\to\infty} (f_n g_n) \overset{u}{=} fg$$

eşitliğini kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Teorem 8.8'den g'nin sınırlı olduğunu biliyoruz. $A > 0$ sayısı $||g|| \le A$ olarak seçilmiş olsun. Ayrıca Önsav

8.9'dan $(f_n)_n$ dizisinin sınırlı olduğunu biliyoruz. $B > 0$ sayısı, her n için $||f_n|| < B$ olarak seçilmiş olsun. Varsayıma göre, her $n > N_1$ için,

$$||g_n - g|| < \frac{\epsilon}{2B}$$

eşitsizliğini sağlayan bir N_1 vardır. Gene varsayıma göre, her $n > N_2$ için,

$$||f_n - f|| < \frac{\epsilon}{2A}$$

eşitsizliğini sağlayan bir N_2 vardır. $N = N_1 + N_2$ olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$\begin{aligned}||f_n g_n - fg|| &= ||(f_n g_n - f_n g) + (f_n g - fg)|| \leq ||f_n g_n - f_n g|| + ||f_n g - fg|| \\ &\leq ||f_n|| \cdot ||g_n - g|| + ||f_n - f|| \cdot ||g|| < B \cdot \left(\frac{\epsilon}{2B}\right) + \left(\frac{\epsilon}{2A}\right) \cdot A = \epsilon\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} (f_n g_n) \stackrel{u}{=} fg$$

olur. □

8.9 Sürekli Fonksiyonlar Kümesi $\mathcal{C}(X)$

$X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. X'ten $\mathbb{R}$'ye giden sürekli fonksiyonlar kümesi $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ya da kısaca $\mathcal{C}(X)$ olarak gösterilir.

$$\mathcal{C}(X) \subseteq \operatorname{Fonk} X$$

olduğundan, $\mathcal{C}(X)$'i d mesafesi altında bir metrik uzay olarak algılayabiliriz.

Eğer X sınırlı ve kapalı bir aralıksa, Teorem 3.12'ye göre,

$$\mathcal{C}(X) \subseteq \ell^\infty(X)$$

olur[2]. Aksi durumda gerek görülürse

$$\mathcal{C}(X) \cap \ell^\infty(X)$$

altuzayına bakılabilir.

Bu altbölümde $\mathcal{C}(X)$ metrik uzayını irdeleyeceğiz. Akla ilk gelen soru bunun tam bir metrik uzay olup olmadığı sorusu:

Teorem 8.11. *Sürekli fonksiyonlardan oluşan dizilerin düzgün limiti de süreklidir. Yani $\mathcal{C}(X)$ tam bir metrik uzaydır.*

---

[2] Bu dediğimiz genel olarak eğer X sınırlı ve kapalı bir kümeyse de geçerlidir.

Bu teorem aşağıdaki sonuçtan çıkar.

Önsav 8.12. *Eğer $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve f_n fonksiyonlarının her biri bir $a \in X$ noktasında sürekliyse, o zaman f fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N seçelim ki, her $n \geq N$ için,

$$d(f, f_n) < \frac{\epsilon}{3}$$

olsun. $n = N + 1$ olsun (mesela). O zaman her $x \in X$ için,

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

olur. f_n fonksiyonu a'da sürekli olduğundan a'yı içeren öyle bir I açık aralığı vardır ki, her $x \in I \cap X$ için,

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3}$$

olur. Şimdi $x \in I \cap X$ için hesaplayalım:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|\\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. □

Sonuç 8.13. *$\mathcal{C}(X)$ ve $\mathcal{C}(X) \cap \ell^\infty(X)$ metrik uzayları tamdır.* □

Örnekler

8.42. *Her n doğal sayısı için $f_n : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. (a, b) açık aralığı üstünde $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ ve ayrıca $\lim_{n\to\infty} f_n(b) = c$ varsayımlarını yapalım. O zaman $\lim_{x\to b} f(x) = c$ olur.*

Kanıt: $g : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } x \in (a, b) \text{ ise} \\ c & \text{eğer } x = b \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O zaman,

$$\begin{aligned}||f_n - g|| &= \sup\{|f_n(x) - g(x)| : x \in (a, b]\}\\ &= \max\{\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (a, b)\}, |f_n(b) - c|\}\\ &= \max\{||f_n - f||, |f_n(b) - c|\}\end{aligned}$$

olur. (En üstteki $||f_n - g||$ süpnormu $(a, b]$ üzerine, en alttaki $||f_n - f||$ süpnormu (a, b) açık aralığı üstünde tanımlanan süpnormdur.) En alttaki $||f_n - f||$ ve $|f_n(b) - c|$ ifadeleri n sonsuza giderken 0'a gittiğinden,

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - g|| = 0$$

olur. Demek ki $(a, b]$ üzerine

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} g$$

olur. Dolayısıyla g süreklidir (Teorem 8.11) ve

$$\lim_{x\to b} g(x) = g(b) = c$$

olur (Sonuç 4.4). Ama b dışında $g(x) = f(x)$ olduğundan, elbette

$$\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x)$$

eşitliği de geçerlidir. □

Alıştırmalar

8.43. $[0, 1]$ kümesinde tanımlı ve $\mathbb{R}$'de değer alan öyle bir sürekli fonksiyon dizisi bulun ki, dizinin noktasal limiti olsun ama dizinin limit fonksiyonu sınırsız olsun.

8.44. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden

$$f_n(x) = \frac{1}{n(1+x^2)}$$

fonksiyonlarının sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

8.45. $(f_n)_n = \begin{cases} 1 & \text{eğer } |x| \geq 1/n \text{ ise} \\ n|x| & \text{eğer } |x| < 1/n \text{ ise} \end{cases}$ olarak tanımlanan $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_n$ fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır?

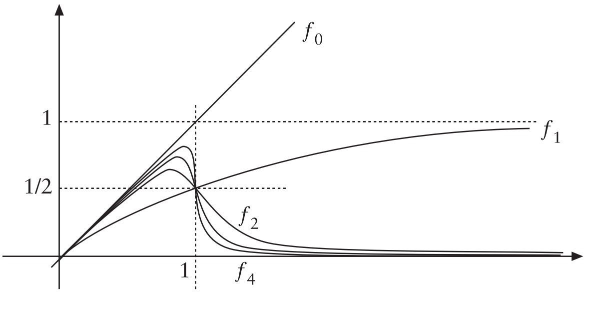
8.46. Öyle bir $(f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R})_n$ sürekli fonksiyon dizisi bulun ki sürekli bir fonksiyona noktasal yakınsasın ama düzgün yakınsamasın.

8.47. Eğer f_n fonksiyonları sınırlıysa ve $(f_n)_n$ düzgün yakınsaksa $(f_n)_n$ dizisinin sınırlı bir dizi olduğunu gösterin.

8.48. $[0, \infty)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden ve terimleri

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}$$

formülüyle tanımlanan $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın. Bu fonksiyon dizisinin düzgün yakınsadığı bir altküme bulun. (f_n fonksiyonlarını sizin için aşağıda çizdik.)



8.49. $x \in \mathbb{R}$ için

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

olsun. β fonksiyonu irrasyonellerde 0 değerini alsın ve birbirine asal a ve b tamsayıları için

$$\beta\left(\frac{a}{b}\right) = |b|$$

olsun.

$$g_n(x) = \beta(x) + \frac{1}{n}$$

olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$ dizilerinin her sonlu aralıkta düzgün yakınsadığını ama $(f_ng_n)_n$ dizisinin hiçbir sonlu aralıkta düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

8.50. $x \in (0,1)$ için

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$

olsun. $(f_n)_n$ dizisinin $(0,1)$ üzerinde noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

8.51. Eğer X kapalı bir aralıksa ve $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R})_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve $g : X \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fonksiyonu sürekliyse, $(f_n/g)_n$ dizisinin f/g fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

8.52. Her $f,\ g \in \ell^\infty(X)$ için, $\big|||f|| - ||g||\big| \le ||f+g||$ eşitsizliğini kanıtlayın.

8.53. $Y = \mathbb{R}$ olsun. Her $n \in \mathbb{R}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için, $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ ise ve $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} 0$ ise $\sum(-1)^n f_n(x)$ serisinin, yani $\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i f_i\right)_n$ dizisinin ***düzgün yakınsadığını*** kanıtlayın.

8.54. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ düzgün sürekli (bkz. Örnek 1.24) ve her $n > 0$ doğal sayısı için $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ olsun. $(f_n)_n$ dizisinin f'ye düzgün yakınsadığını kanıtlayın. Eğer f düzgün sürekli değilse bunun doğru olmayabileceğini gösterin.

8.55. $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. X'in $(x_n)_n$ dizisi x noktasına yakınsasın. $(f_n(x_n))_n$ dizisinin $f(x)$'e yakınsadığını kanıtlayın.

9. Weierstrass M-Testi ve Sonuçları

9.1 Kuvvet Serileri

Bölüm 22'de çok daha ayrıntılı bir biçimde göreceğimiz biçimsel kuvvet serilerini birinci ciltte kısaca görmüştük [N4, Altbölüm 18.4]. Anımsatalım. Bunlar,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

ya da daha kısa olarak

$$\sum a_i X^i$$

biçiminde yazılan (formel, biçimsel, anlamsız) ifadelerdi. Burada her a_n bir gerçel sayıdır. X ise anlamsızdır. Ancak X, gerçel sayılarda değer alan bir değişken olarak görülmek istenebilir. Nitekim, ifadede X yerine sabit bir x gerçel sayısını koyup ve ($x = 0$ bile olsa) $x^0 = 1$ anlaşması yapıp, biçimsel kuvvet serisini

$$\sum a_i x^i$$

serisi olarak görmek isteyebiliriz ($\sum a_i x^i$ serisine ***kuvvet serisi*** adı verilir); tabii seri yakınsaksa... Değilse, serinin x sayısında ***ıraksak*** olduğunu söyleriz. (Serinin x'te ***tanımsız*** olduğunu da söyleyebiliriz.) Örneğin $x = 0$ ise, seri kesinlikle yakınsaktır ve a_0 değerine eşittir. Diğer sayılarda limit olabilir de olmayabilir de, bazen olur bazen olmaz. Önceki ciltte şunu kanıtlamıştık: Öyle bir $R \geq 0$ sayısı vardır ki, $\sum a_i x^i$ serisi $x \in (-R, R)$ için mutlak yakınsar ama $x \notin [-R, R]$ için ıraksar [N4, Teorem 18.6]; $x = \pm R$ için ise limit olabilir de olmayabilir de, kuvvet serisine göre değişir. Bu R sayısı,

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^{1/n}}$$

olarak belirlenmiştir ve adına ***yakınsaklık yarıçapı*** denir. R'nin ∞ ya da 0 olabileceğini de anımsatalım. Örneğin, $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ kuvvet serilerinde (bkz. Örnek 7.4) R sonsuzdur, yani bu kuvvet serileri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden birer fonksiyon verirler. Öte yandan,

$$\sum x^i$$

kuvvet serisi için $R = 1$'dir ve bu kuvvet serisi sadece $(-1, 1)$ aralığında bir fonksiyon tanımlar. (Bu fonksiyon da, bilindiği üzere, $f(x) = (1-x)^{-1}$ fonksiyonudur.)

9.2 Fonksiyonların Sonsuz Toplamı

Kuvvet serileri, $a_i X^i$ gibi polinomiyal fonksiyonların sonsuz toplamı olarak algılanabilir. Böyle algılandığında, kuvvet serilerini genelleştirmek işten bile değildir: $a_i X^i$ fonksiyonları toplanabildiği gibi herhangi $f_i(x)$ fonksiyonları da toplanabilir. Hatta bu durumda x, herhangi bir X kümesinden bir eleman olarak da görülebilir.

X herhangi bir küme olsun. Her i doğal sayısı için, $f_i \in \text{Fonk}(X)$ olsun. Bu fonksiyonları teker teker toplayıp,

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$$

fonksiyonlarına bakabiliriz. Ardından bu sonlu toplamların n sonsuza giderken limitini alabiliriz:

$$\sum f_i = \sum_{i=0}^{\infty} f_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f_i$$

tanımını yapalım. "Tanım yapalım" dedik ama bu aslında çok eksik bir tanımdır. Tanımda iki sorun var:

1. Tanımda limitin noktasal limit mi yoksa düzgün limit mi olduğu söylenmemiş.

2. Limit yoksa tanım ne demek oluyor?

Birinci sorun o kadar önemli değil çünkü her şeyden önce eğer düzgün yakınsaklık varsa noktasal yakınsaklığın da olduğunu ve bu durumda noktasal limitle düzgün limitin birbirine eşit olduklarını biliyoruz. Ayrıca hangi yakınsaklık sözkonusuysa o yakınsaklığın adını ayrıca zikredebiliriz; fonksiyonların toplamının noktasal ya da düzgün yakınsak olduğunu söylemek bu sorunu çözer.

İkinci soruna gelince: Nitekim bu sonsuz toplam (yani limit) bazı noktalarda yakınsak olabilir, bazı noktalarda da olmayabilir. Bu sorunu da sonsuz toplamın hangi kümede yakınsak olduğunu belirtmekle çözeriz.

Demek ki söylenmesi gereken,

$$\sum f_i$$

serisinin X'in bir A altkümesinde noktasal ya da düzgün yakınsak olduğudur. Böylece tanımdaki belirsizlikler giderilmiş olur. İkinci durumda $\sum f_i$ serisinin ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Örnekler

9.1. exp, cos ve sin fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerine noktasal yakınsaktır ama $\mathbb{R}$ üzerine düzgün yakınsak değildir (Örnek 8.5 ve 8.26). Ama -birazdan kanıtlayacağımız üzere- $\mathbb{R}$'nin her sınırlı altkümesi üzerine bu seriler düzgün yakınsaktır.

9.2. $\sum x^i$ serisi $(-1, 1)$ aralığı üstünde noktasal yakınsaktır ama düzgün yakınsak değildir öte yandan her $0 < a < 1$ için seri $[-a, a]$ aralığı üstünde düzgün yakınsaktır. (Birazdan göreceğiz bunları.)

9.3. *f_n, f ve g fonksiyonları $(a, b]$ aralığından $\mathbb{R}$'ye gitsin. f_n ve g sürekli olsun. $(a, b]$ üzerinde $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olsun. Ve son olarak (a, b) açık aralığı üstünde $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = g$ olsun. O zaman $f(b) = g(b)$ olur.*

Kanıt: Teorem 8.11'e göre f fonksiyonu $(a, b]$ üzerinde süreklidir. Demek ki,

$$g(b) = \lim_{x \to b^-} g(x) = \lim_{x \to b^-} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

olur. □

9.3 Weierstrass M-Testi

Bir fonksiyon serisinin düzgün yakınsak olup olmadığını anlamanın en kolay ve en pratik yolu ***Weierstrass M-testi*** adı verilen aşağıdaki testi uygulamaktır.

Teorem 9.1 (Weierstrass M-Testi)**.** *X herhangi bir küme ve $(f_i : X \longrightarrow \mathbb{R})_i$, herhangi bir fonksiyon dizisi olsun. Her i için, $||f_i|| \leq M_i$ eşitsizliğini sağlayan ve $\sum M_i$ serisinin yakınsak olduğu M_i sayıları varsa, o zaman $\sum f_i$ serisi düzgün yakınsaktır.*

Testin ne kadar uygulanabilir olduğu her halinden belli, ne de olsa düzgün yakınsaklık gibi alengirli bir kavramı, daha aşina olduğumuz gerçel sayı serilerindeki normal yakınsaklığa indirgiyor.

Weierstrass M-Testi'nin Kanıtı: Varsayıma göre her i için $f_i \in \ell^\infty(X)$. Dolayısıyla Teorem 8.8'e göre, testi kanıtlamak için,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} f_i \right)_n$$

dizisinin süpnorm için bir Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamak yeterli. Bu dizinin iki teriminin farkının süpnormunu belirleyelim. $n > m$ olsun. Hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=0}^{n} f_i - \sum_{i=0}^{m} f_i\right\| &= \left\|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} ||f_i|| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} M_i = \sum_{i=0}^{n} M_i - \sum_{i=0}^{m} M_i.\end{aligned}$$

En sondaki sayıyı, n ve m sayılarını yeterince büyük seçerek, istediğimiz kadar küçültebilir miyiz? Evet, çünkü $\sum M_i$ serisi yakınsak olduğundan, yani

$$\left(\sum_{i=0}^{n} M_i\right)_n$$

dizisi yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. Şimdi verilmiş bir $\epsilon > 0$ için, N'yi, her $n > m > N$ için,

$$\sum_{i=0}^{n} M_i - \sum_{i=0}^{m} M_i < \epsilon$$

eşitsizliği doğru olacak biçimde seçelim. Böylece her n, $m > N$ için,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=0}^{n} f_i - \sum_{i=0}^{m} f_i\right\| &= \left\|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} ||f_i|| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} M_i = \sum_{i=0}^{n} M_i - \sum_{i=0}^{m} M_i < \epsilon\end{aligned}$$

olur ve böylece Weierstrass M-Testi'nin kanıtı tamamlanır. □

Teoremi uygularken seçilen M_i'nin x'ten bağımsız olmasına özen göstermeli.

Hemen uygulamalara geçelim.

Sonuç 9.2. exp*,* cos *ve* sin *fonksiyonlarının serileri olan*

$$\sum \frac{x^i}{i!},\ \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!},\ \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

serileri $\mathbb{R}$*'nin her sınırlı altkümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.*

Kanıt: Düzgün yakınsaklığı $[-R, R]$ aralığı için kanıtlamak yeterli. Öyle yapalım. Bu aralıktan herhangi bir x alalım. Önce exp'in dizisini sınırlayalım:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}\right| \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{|x|^i}{i!} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{R^i}{i!} \to \exp R$$

olduğundan, Weierstrass M-Testi'nde, $f_i(x) = x^i/i!$ ve M_i'yi $R^i/i!$ olarak almak yeterli.

Şimdi $\cos x$'in serisine bakalım.

$$\left|\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| \le \sum_{i=0}^{n}\left|(-1)^i\frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| = \sum_{i=0}^{n}\frac{|x|^{2i}}{(2i)!} \le \sum_{i=0}^{n}\frac{R^{2i}}{(2i)!} \le \sum_{i=0}^{2n}\frac{R^i}{i!} \to \exp R.$$

Bu sefer de M_i'yi $R^{2i}/(2i)!$ olarak almak yeterli. $\sin x$ serisi benzerdir ve okura bırakılmıştır. □

Yukarıdaki sonuçtan çok daha genel bir sonuç geçerlidir:

Teorem 9.3. *R, $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı olsun*[1]*. $S < R$ olsun. O zaman $\sum a_i x^i$ serisi $[-S, S]$ aralığı üstünde düzgün yakınsaktır.*

Kanıt: Seri S'de mutlak yakınsaktır [N4, Teorem 18.6]. Dolayısıyla, $\sum |a_i|S^i$ serisi yakınsaktır. Weierstrass M-Testi'ni $f_i(x) = a_i x^i$ fonksiyonlarına ve $M_i = |a_i|S^i$ sayılarına uygulayalım. □

Bu teoremden kuvvet serilerinin yakınsaklığının oldukça güçlü olduğu çıkıyor.

Sonuç 9.4. *Kuvvet serileri yakınsaklık yarıçapları içinde süreklidir.*

Kanıt: Kuvvet serisi $\sum a_i x^i$ olsun. Yakınsaklık yarıçapı R olsun. a, $|a| < R$ eşitsizliğini sağlayan bir a alalım. Sonra da $|a| < S < R$ eşitsizliklerini sağlayan bir S sayı alalım. $[-S, S]$ kapalı aralığı üstünde,

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

fonksiyonları (polinomiyal olduklarından) sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, Teorem 9.3'e göre bu kapalı aralık üzerinde,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \stackrel{u}{=} \sum a_i x^i$$

olur, yani yakınsaklık düzgündür. Demek ki sürekli fonksiyonların düzgün limiti olan serimiz $[-S, S]$ kapalı aralığı üzerinde süreklidir (Teorem 9.1). Dolayısıyla a'da da süreklidir. □

Daha önce Teorem 2.9 ve Alıştırma 2.5'te elle ve hesap yaparak kanıtladığımız exp, sin, cos fonksiyonlarının sürekliliği yukarıdaki sonuçla hemen kanıtlanır.

---

[1] $R = \infty$ da olabilir.

Sonuç 9.5. exp*,* sin*,* cos *fonksiyonları* $\mathbb{R}$ *üzerinde süreklidir.*

Kanıt: $a \in \mathbb{R}$ olsun. Yakınsaklık yarıçapı ∞ olduğundan, Sonuç 9.4'e göre fonksiyonlar $[a-1, a+1]$ kapalı aralığında süreklidir, demek ki a'da da süreklidir. □

Örnek 9.4. Örnek 4.14'te hesap yaparak 1 bulduğumuz

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x}$$

limiti daha teorik mütalaalarla bir kez daha bulalım. Kolay bir hesapla, $(-1, 0)$ aralığında

$$\frac{\exp x - 1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!}$$

elde edilir. Ama $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı ∞'dur. Şimdi Örnek 8.42'de kanıtlanan sonuçta $a = -1$, $b = 0$, $f(x) = \frac{\exp x - 1}{x}$, $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{(i+1)!}$ ve $c = 1$ alalım. $(-1, 0)$ aralığı üzerinde

$$f(x) = \frac{\exp x - 1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{(i+1)!} = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

olur. Sonuç 9.4'e göre $(-1, 0)$ aralığı üzerinde $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olur. Örnek 8.42'ye göre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 1$$

olur. Benzer şekilde

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

eşitliği de kanıtlanır. Teorem 5.7'ye göre $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ olur. □

Alıştırmalar

9.5. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} \sin \frac{x}{3^i}$ dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

9.6. $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^i}$ dizisi $\mathbb{R}$'nin hangi altkümeleri üzerinde düzgün yakınsadığını bulun.

9.7. Şu serilerin düzgün yakınsak olduklarını kanıtlayın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}.$$

9.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ serisinin düzgün yakınsak olduğu açık bir aralık var mıdır?

9.4 Trigonometrik Fonksiyonlar ve Pi Sayısı

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını [N4]'te bir seri olarak tanımlamıştık. Tanımları anımsatalım:

$$\sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

Bu altbölümde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının temel birkaç özelliğini bulacağız ve π sayısını tanımlayacağız.

Serilerin kısmi toplamında $x = 0$ alarak kolayca görüleceği üzere,

$$\sin 0 = 0 \text{ ve } \cos 0 = 1$$

olur. sin fonksiyonunun bir başka sayıda 0 değerini alıp almadığını henüz bilmiyoruz.

Ayrıca $\sin x$ ve $\cos x$ değerlerinin her x gerçel sayısı için tanımlı olduklarını gözlemleyelim, yani yukarıdaki seriler her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır, hatta mutlak yakınsaktır. Bu d'Alembert kıstasından [N4, Teorem 18.1] hemen çıkar. Dolayısıyla yukarıdaki sin ve cos serileri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden birer fonksiyon tanımlarlar. Ama noktasal yakınsaklıktan çok daha iyisini kanıtlamıştık geçen altbölümde: $\sin x$ ve $\cos x$ serilerinin kısmi toplamları, sin ve cos fonksiyonlarına her sınırlı kümede düzgün yakınsar (Sonuç 9.2); dolayısıyla sin ve cos fonksiyonları her yerde süreklidir (Sonuç 9.5).

Fonksiyonları tanımlayan serilere bakınca hemen görüleceği üzere,

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ ve } \cos(-x) = \cos x$$

olur; örneğin,

$$\sin(-x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(-x)^{2i+1}}{(2i+1)!} = -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = -\sin x.$$

Yani sinüs tek bir fonksiyondur, kosinüs ise çift. Bir başka deyişle sinüs fonksiyonunun grafiği $O(0,0)$ noktasına göre simetriktir ve kosinüs fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir. Bütün bunlar, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını $x \geq 0$ iken anlamanın yeterli olduğunu gösterir.

Şimdi çok yararlı iki eşitlik kanıtlayalım:

Teorem 9.6. *Her $x, y \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x.$$

Kanıt: Bu eşitlikler [N4, Teorem 16.6]'da kanıtlanan "Cauchy çarpımı formülü"nden çıkar. Okura kolaylık olması açısından Cauchy çarpımı teoremini buraya alalım.

Olgu [Cauchy çarpımı, Cauchy-Mertens Teoremi]. *$\sum x_i$ mutlak yakınsaksa, $\sum y_i$ yakınsaksa ve*

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}$$

olarak tanımlanmışsa, o zaman $\sum z_i$ *serisi de mutlak yakınsaktır ve*

$$\sum z_i = \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

olur.

Cauchy çarpımını kullanarak $\sin x \cos y$ ve $\sin y \cos x$ serilerini hesaplayalım ve bulduklarımızı toplayalım. Şansımız yaver giderse, aynen teoremin söylediği gibi $\sin(x+y)$'nin serisini bulacağız.

Önce $\sin x \cos y$'yi hesaplamak amacıyla,

$$\begin{array}{ll} x_{2i} = 0, & y_{2i} = (-1)^i \frac{y^{2i}}{(2i)!}, \\ x_{2i+1} = (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}, & y_{2i+1} = 0 \end{array}$$

alalım. O zaman, teoremdeki z_k,

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i+j=k,\ i \text{ tek},\ j \text{ çift}} x_i y_j$$

olur. Dolayısıyla k çiftse $z_k = 0$ olur. Şimdi k'nın tek olduğunu varsayıp ve k yerine $2k+1$ alıp z_{2k+1}'i hesaplayalım:

$$\begin{aligned} z_{2k+1} &= \sum_{i=0}^{k} x_{2i+1}\, y_{2(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} (-1)^{k-i} \frac{y^{2(k-i)}}{(2(k-i))!} \\ &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \frac{y^{2k-2i}}{(2k-2i)!} \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{(2k+1)!}{(2i+1)!(2k-2i)!} \frac{x^{2i+1} y^{2k-2i}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{2i+1} x^{2i+1} y^{2k-2i}. \end{aligned}$$

Bu toplamı şöyle de yazabiliriz:

$$z_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1,\, u \text{ tek}} \binom{2k+1}{u} x^u y^v$$

Demek ki Cauchy çarpımı teoremine göre, $\sin x \cos y$, bu z_{2k+1} sayılarının toplamıdır.

Bunu aklımızda tutup aynı yöntemle $\sin y \cos x$ serisini hesaplayalım. Hesapları yeniden yapmaya gerek yok; yukarıda bulduğumuz formülde x ile y'yi değiş tokuş edelim: $\sin y \cos x$, aşağıdaki t_{2k+1}'lerin toplamıdır.

$$\begin{aligned} t_{2k+1} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1,\, u \,\text{tek}} \binom{2k+1}{u} y^u x^v \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1,\, u \,\text{çift}} \binom{2k+1}{u} x^u y^v. \end{aligned}$$

Demek ki $\sin x \cos y + \sin y \cos x$, z_{2k+1} ile t_{2k+1}'lerin toplamının, yani,

$$z_{2k+1} + t_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{u+v=2k+1} \binom{2k+1}{u} x^u y^v = (-1)^k \frac{(x+y)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

terimlerinin toplamından oluşan seridir [N4, Sonuç 14.16]. Bu seri de elbette $\sin(x+y)$'nin serisidir. Birinci eşitlik kanıtlanmıştır. İkinci eşitlik de aynı yöntemle ve kolaylıkla kanıtlanabilir. □

Bu formüllerde y yerine $-y$ ya da $\pm x$ alırsak,

$$\begin{aligned} &\sin(x-y) && = \sin x \cos y - \sin y \cos x, \\ &\cos(x-y) && = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ &\sin(2x) && = 2 \sin x \cos x, \\ &\cos(2x) && = \cos^2 x - \sin^2 x, \\ &\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{aligned}$$

eşitliklerini buluruz. (Not: Burada $\cos^2 x$, $(\cos x)^2$ anlamına gelmektedir.)

Sonuç 9.7. *$S = \{x : \sin x = 0\}$ toplamsal bir gruptur, yani 0 bu kümededir ve bu kümeden iki elemanın farkı ve toplamı da bu kümededir. Özel olarak, $\alpha \in S$ ise $-\alpha = 0 - \alpha \in S$ olur.*

Kanıt: Aşağıdaki formüllerden hemen çıkar.

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x. \end{aligned}$$

Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Sonuç 9.8. $\cos$ *ve* $\sin$ *fonksiyonları -1 ile 1 arasında değer alır.*

Kanıt: Biraz önce kanıtlanan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ eşitliğinin bir sonucudur. □

Önsav 9.9. $(0, \sqrt{6})$ *aralığında sinüs fonksiyonu pozitif değerler alır.*

Kanıt: $\sin x$ fonksiyonunun tanımında terimleri ikişer ikişer gruplayalım. O zaman, $\sin x$, terimleri

$$\frac{x^{4i+1}}{(4i+1)!} - \frac{x^{4i+3}}{(4i+3)!} = \frac{x^{4i+1}}{(4i+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4i+2)(4i+3)}\right)$$

olan seriye eşittir [N4, Teorem 14.8]. Bu terimlerin her birinin belli bir $(0, \alpha)$ aralığında pozitif olduklarını kanıtlayacağız, yani

$$1 - \frac{x^2}{(4i+2)(4i+3)}$$

terimlerinin her i doğal sayısı için belli bir $(0,\ \alpha)$ aralığında pozitif olduklarını kanıtlayacağız. Ama bu terimlerin en küçüğü $i = 0$ için bulunan terimdir. Demek ki,

$$1 - \frac{x^2}{6} > 0$$

eşitsizliğiyle boğuşmalıyız. $\alpha = \sqrt{6}$ almak yeterli. □

Sonuç 9.10. *Bir π sayısı için, $S = \{x : \sin x = 0\}$ kümesi $\pi\mathbb{Z}$'ye eşittir.*

Kanıt: Önsav 9.9'a göre 0, S'nin bir yoğunlaşma noktası olamaz. Sonuç 9.7'ye göre S'nin hiç yoğunlaşma noktası olamaz. (Eğer a, S'nin bir yoğunlaşma noktasıysa, a'ya dilediğimiz yakınlıkta $s \in S$ noktaları buluruz, ama o zaman da $s - a \in S$ noktası 0'a çok yakın olur.)

Eğer $S = 0$ ise $\pi = 0$ almak yeterli. Bundan böyle S'nin 0 olmadığını varsayalım.

Eğer $\alpha \in S$ ise, $-\alpha \in S$ olduğundan ve S'nin yoğunlaşma noktası olmadığından, S'nin en küçük pozitif elemanı vardır. Bu elemana π diyelim. Sonuç 9.7'ye göre $\pi\mathbb{Z} \subseteq S$. Tersini kanıtlayalım: $\alpha \in S$ olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$. Bundan böyle $\alpha \neq 0$ olsun. α yerine $-\alpha$ alarak, α'nın pozitif olduğunu varsayabiliriz. $n = [\alpha/\pi]$ ise,

$$n \leq \frac{\alpha}{\pi} < n + 1$$

olur. Yani,

$$n\pi \leq \alpha < (n+1)\pi$$

olur ve dolayısıyla

$$0 \leq \alpha - n\pi < (n+1)\pi - n\pi = \pi$$

ve, $n\pi \in \pi\mathbb{Z} \subseteq S$ içindeliklerinden dolayı, $\alpha - n\pi \in S$ olur; dolayısıyla Sonuç 9.7'ye göre

$$\alpha - n\pi = 0 \text{ ve } \alpha = n\pi \in \pi\mathbb{Z}$$

olur. □

Yukarıda bulunan π sayısının 0'a eşit olup olmadığını henüz bilmiyoruz. Birazdan 0'a eşit olmadığını kanıtlayacağız. $\pi\mathbb{Z} = (-\pi)\mathbb{Z}$ olduğundan π'yi negatif olmayacak biçimde seçebiliriz. Öyle yapalım, bundan böyle $\pi \geq 0$ olsun.

Önsav 9.11. *Sinüs fonksiyonu 0'dan büyük bir sayıda 0 değerini alır, yani $\pi > 0$ olur.*

Kanıt: Her $x > 0$ için $\sin x > 0$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman,

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

denkleminden, $x > 0$ ise $\cos x > 0$ çıkar; dolayısıyla,

$$0 < \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

bulunur, yani

$$\sin x < \cos x.$$

Ayrıca, her $x, y > 0$ için,

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x < \cos x \cos y \leq \cos x$$

olur, ki bu da kosinüs fonksiyonunun $\mathbb{R}^{\geq 0}$ üzerinde azalan olduğunu gösterir. Bu ve $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ denkleminden de sinüs fonksiyonunun $\mathbb{R}^{\geq 0}$ üzerinde artan olduğunu anlarız. Sonuç 5.21'den, $\lim_{x\to\infty} \cos x$ ve $\lim_{x\to\infty} \sin x$ limitlerinin olduğu ortaya çıkar. Bu limitlere sırasıyla c ve s diyelim. Elbette $0 \leq s \leq c \leq 1$. Gene $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ eşitliğinden dolayı

$$c^2 + s^2 = 1$$

çıkar. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ denkleminden de,

$$c^2 - s^2 = c$$

çıkar. Bu iki denklemi toplarsak,

$$2c^2 - c - 1 = 0$$

buluruz. Çözersek $c = 1$ ya da $-1/2$ çıkar, ki $c \geq 0$ olmak zorunda olduğundan, $c = 1$ bulunur. Ama kosinüs fonksiyonu 0'da 1 değerini alıyor ve x arttıkça azalıyor ve sonsuzda da 1'e yakınsıyor. Bundan kosinüs fonksiyonunun sabit 1 fonksiyonu olduğu çıkar. Demek ki sinüs fonksiyonu da sabit 0 fonksiyonuymuş, ki bu da Önsav 9.9 ile çelişir.

Demek ki sinüs fonksiyonu pozitif sayılarda 0'dan küçükeşit değerler alabiliyor. Sinüs fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan, aradeğer teoreminden dolayı, sinüs fonksiyonunun pozitif bir sayıda 0 değeri aldığı anlaşılır. Demek ki $\pi > 0$ imiş. $\square$

İkinci Kanıt[2]**:** Öncelikle $\cos 2 < 0$ olduğunu gösterelim.

$$\cos 2 = 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{3} - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!} - \frac{2^{4n}}{(4n)!} \right) < 0$$

olur çünkü sağdaki her parantez negatiftir. $\cos 0 = 1 > 0$ olduğundan, aradeğer teoreminden dolayı $0 < p < 2$ koşulunu sağlayan bir p sayısı için $\cos p = 0$ olur. O halde $\sin 2p = 2 \sin p \cos p = 0$ olur. $\square$

π'nin S kümesinin en küçük pozitif sayısı olduğuna dikkatinizi çekerim. Demek ki,

$$\pi = \min\{x > 0 : \sin x = 0\}.$$

Bundan ve Önsav 9.9'dan, $\sqrt{6} \le \pi$ bulunur. Yukarıdaki ikinci kanıttan da $\pi < 4$ eşitsizliği anlaşılıyor.

Teorem 9.12. $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos \pi = -1$. *Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için,*

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi/2) &= \cos x, \\ \cos(x + \pi/2) &= -\sin x, \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, \\ \cos(x + \pi) &= -\cos x, \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x, \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \end{aligned}$$

olur. Ayrıca π sayısı, herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \textit{ve} \ \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

eşitliklerinin sağlandığı en küçük pozitif sayıdır.

Kanıt: $0 = \sin \pi = 2 \sin(\pi/2) \cos(\pi/2)$. Öte yandan $\pi/2 \notin \pi\mathbb{Z}$, yani

$$\sin(\pi/2) \neq 0.$$

Demek ki $\cos(\pi/2) = 0$. Bundan da $\sin(\pi/2) = \pm 1$ çıkar. Ama $\sin(\pi/2) = -1$ olsaydı, sinüs fonksiyonunun sürekliliğinden ve Önsav 9.9'dan dolayı, sinüsün 0'la $\pi/2$ arasında bir yerde, yani π'den küçük bir sayıda 0 olması gerekirdi, ki bu mümkün değildir. Demek ki

$$\sin(\pi/2) = 1.$$

[2] Yusuf Ünlü'ye teşekkürler.

Buradan da,

$$\cos\pi = \cos^2(\pi/2) - \sin^2(\pi/2) = -1$$

çıkar. Devam edelim:

$$\sin(x + \pi/2) = \sin x \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)\cos x = \cos x$$

ve benzer şekilde

$$\cos(x + \pi/2) = \cos x \cos(\pi/2) - \sin x \sin(\pi/2) = -\sin x.$$

Bu eşitlikleri, $\pi = \pi/2 + \pi/2$ yazarak iki defa uygularsak

$$\sin(x+\pi) = -\sin x,$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

elde ederiz. Son eşitlikleri, $2\pi = \pi + \pi$ yazarak iki defa uygularsak

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

elde ederiz.

Teoremin son kısmına gelelim. α sayısı, herhangi sabit bir $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\sin(x+2\alpha) = \sin x \text{ ve } \cos(x+2\alpha) = \cos x$$

eşitliklerinin sağlandığı en küçük pozitif sayı olsun. O zaman,

$$\cos(2\alpha) = \cos((x+2\alpha) - x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

olur. Bundan da

$$1 = \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

ve $\sin\alpha = 0$ çıkar. □

Sonuç 9.13. sin *ve* cos *fonksiyonlarının imgesi* $[-1, 1]$ *aralığıdır.*

Kanıt: sin ve cos fonksiyonlarının sürekli olduklarını bildiğimizden (Sonuç 9.5), Aradeğer Teoremi'ne ve Sonuç 9.8'e göre bu fonksiyonların 1 ve -1 değerlerini aldığını göstermemiz yeterli. Bu da Teorem 9.12'den kolaylıkla çıkar. □

Diğer trigonometrik eşitlikleri okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Kısım III

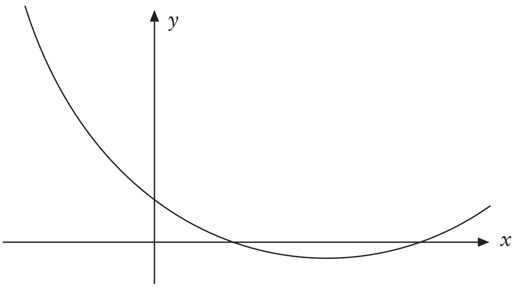
Değişik Konular

10. İç ve Dışbükey Fonksiyonlar

10.1 Tanım

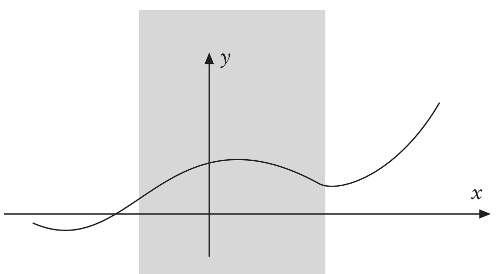
Bu bölümde analizde çok önemli bir rol oynayan, örneğin eşitsizlikler konusunda sık sık başvuracağımız önemli bir kavramı ele alacağız: Dışbükeylik.

Dışbükey bir fonksiyon, aşağıda gösterildiği gibi grafiği çanak anten gibi “yukarı doğru” olan bir fonksiyondur.



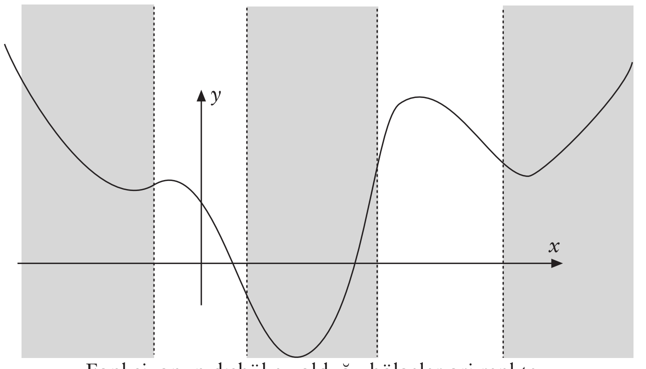
Dışbükey bir fonksiyon

Ama grafiği aşağıdaki gibi olan bir fonksiyon dışbükey değildir:



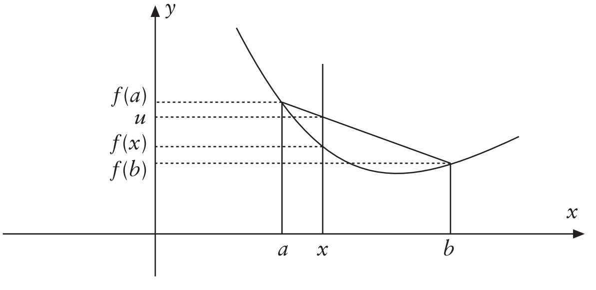
Dışbükeylik gri bölgede bozuluyor;
grafik gri alanda “aşağıya dönük”.

Yukarıdaki örnekteki gibi bir fonksiyon dışbükey olmasa da fonksiyonun dışbükey olduğu tanım bölgeleri olabilir.



Fonksiyonun dışbükey olduğu bölgeler gri renkte.
Bunlar grafiğin "yukarıya dönük" olan bölgeleridir.

Dışbükey fonksiyonun matematiksel tanımı şöyle: I, $\mathbb{R}$'nin bir aralığı ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer I'dan alınan her $a < x < b$ elemanları için, $f(x)$ değeri, aşağıdaki şekilde gösterilen u sayısından küçükeşitse, o zaman f'ye ***dışbükey*** denir.



Tanımdaki u sayısının nasıl belirlendiği herhalde şekilden anlaşılıyordur: u sayısı, düzlemin $(a, f(a))$ noktasıyla $(b, f(b))$ noktasından geçen kirişin üstündeki, birinci koordinatı x olan noktasının ikinci koordinatıdır. Bu tanımı daha cebirsel bir hale getirelim.

a ile b arasındaki her x noktası, bir ve bir tek $t \in (0, 1)$ sayısı için,

(1) $$x = (1-t)a + tb$$

olarak yazılabilir. Nitekim (1) eşitliğinin sağlanması için, kolay bir hesapla görülebileceği üzere,

(2) $$t = \frac{x-a}{b-a}$$

almak yeterli ve gereklidir. Bunun tersi de doğrudur: Her $t \in (0, 1)$ sayısı için,

$$(1-t)a + tb$$

sayısı a ile b arasındadır.

Eğer $x = (1-t)a+tb$ ise yukarıdaki şekilde belirtilen u sayısını t cinsinden bulmak zor değildir. Lisede öğrendiğiniz geometriye güveniyorsanız Tales teoremiyle u kolaylıkla bulunur. Aksi halde $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulup x yerine $(1-t)a+tb$ yazmak gerekir: Bu doğru,

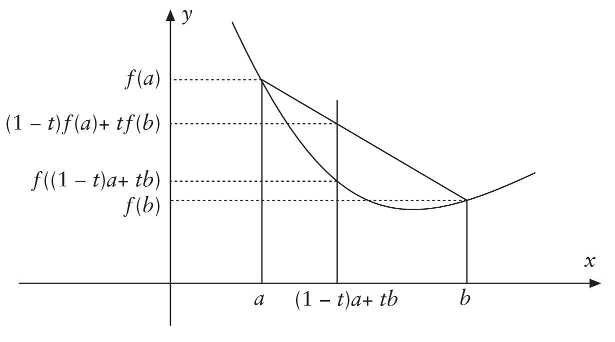
$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}$$

denklemiyle verilir. Şimdi x yerine $(1-t)a+tb$ yazalım. Sadeleşen hesaplar bize $u = (1-t)f(a)+tf(b)$ eşitliğini verir.

Bu aşamada, dışbükeylik tanımını biçimsel (yani cebirsel) olarak verebiliriz: I ve f yukarıdaki gibi olsunlar. Eğer her a, $b \in I$ ve her $t \in (0, 1)$ için,

(3) $$f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a)+tf(b)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman f fonksiyonuna ***dışbükey*** denir.



(3) formülünde (1) ve (2) formüllerini kullanırsak, dışbükeyliğe eşdeğer bir tanım elde ederiz: Her $x \in (a, b)$ için,

(4) $$f(x) \le \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{b-x}{b-a}f(a).$$

Biraz daha şık bir formülasyon şöyle: f'nin dışbükey olması için yeter ve gerek koşul, her $a, b \in I$ için ve toplamı 1 olan her pozitif α, β sayıları için,

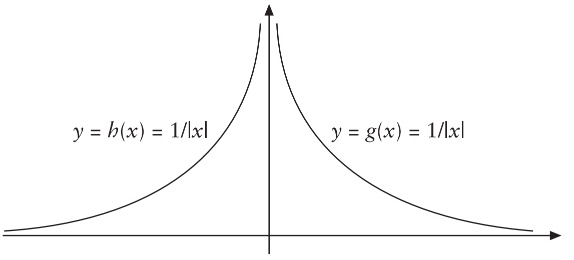
(5) $$f(\alpha a+\beta b) \le \alpha f(a)+\beta f(b)$$

eşitsizliğidir.

Dikkat: Dışbükey bir fonksiyonun tanım kümesinin her zaman bir aralık olduğu varsayılır.

Örnekler

10.1. $x \mapsto 1/|x|$ kuralıyla tanımlanan $g : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu dışbükeydir. Aynı kuralla tanımlanan $h : \mathbb{R}^{<0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da dışbükeydir. Ama tanım kümesi bir aralık olmadığından, gene aynı kuralla tanımlanan $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun dışbükey olup olmadığı sorusu sorulamaz.



$f(x) = 1/|x|$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu iki dışbükey parçadan oluşmasına karşın dışbükey değil.

10.2. $f(x) = x^2$ formülüyle tanımlanan fonksiyon bütün $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir. Bunu kanıtlamak için, her $t \in (0, 1)$ için,

$$((1-t)a + tb)^2 \le (1-t)a^2 + tb^2$$

eşitsizliğini kanıtlamamız lazım. Hesaplardan korkmayıp a/b yerine x koyarsanız, eşitsizliğin her a ve b için doğru olduğunu kanıtlamak çok kolay.

10.3. exp fonksiyonunun dışbükey olduğunu kanıtlayalım. Bu amaçla $a \le b$ eşitsizliğini sağlayan a ve b sayıları ve $\alpha + \beta = 1$ eşitliğini sağlayan iki pozitif α ve β sayıları alalım. (5)'e göre

$$e^{\alpha a + \beta b} \le \alpha e^a + \beta e^b$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Tarafları $e^{\alpha a + \beta b}$ sayısına bölüp, $\alpha + \beta = 1$ eşitliğini kullanırsak, bu eşitsizliğin,

$$1 \le \alpha e^{\beta(a-b)} + \beta e^{\alpha(b-a)}$$

eşitsizliğine denk olduğunu görürüz. Şimdi bu eşitsizliği $e^{\beta(b-a)}$ ile çarparak,

$$e^{\beta(b-a)} \le \alpha + \beta e^{b-a}$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Eğer $x = b - a \ge 0$ yazarsak,

$$e^{\beta x} \le \beta e^x + \alpha$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiği anlaşılıyor. Kanıtlayalım:

$$e^{\beta x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i x^i}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta^i x^i}{i!} \le 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta x^i}{i!} = (\alpha + \beta) + \beta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \beta e^x + \alpha.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Alıştırmalar

10.4. Bu ve aşağıdaki alıştırmalarda kolaylık olsun diye tüm fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerine tanımlı olduğunu varsayalım. İki dışbükey fonksiyonun toplamının da dışbükey olduğunu kanıtlayın.

10.5. Eğer f dışbükeyse ve $a, b \in \mathbb{R}$ ise $x \mapsto f(ax + b)$ fonksiyonunun dışbükey olduğunu kanıtlayın.

10.6. f ve g iki dışbükey fonksiyon olsun. Ayrıca f artan olsun. O zaman $f \circ g$ fonksiyonunun dışbükey olduğunu kanıtlayın. Benzer bir sonucu içbükey fonksiyonlar için ifade edin ve kanıtlayın. Eğer $f(x)$ fonksiyonu dışbükeyse, $\exp f(x)$ fonksiyonunun da dışbükey olduğunu kanıtlayın. Demek ki her $a, b \in \mathbb{R}$ için $x \mapsto e^{ax+b}$ fonksiyonu dışbükeydir.

10.7. Dışbükey fonksiyonların noktasal limitinin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

10.8. Yukarıdaki iki alıştırmadan, her $r \in \mathbb{R}$ için $x \mapsto e^{rx}$ fonksiyonunun dışbükey olduğunu kanıtlayın.

f fonksiyonunun ***içbükey*** olması demek, $-f$ fonksiyonunun dışbükey olması demektir; bir başka deyişle (3), (4) ve (5) eşitsizliklerinin ters çevrilmesi, yani fonksiyonun "aşağıya dönük" olması demektir.

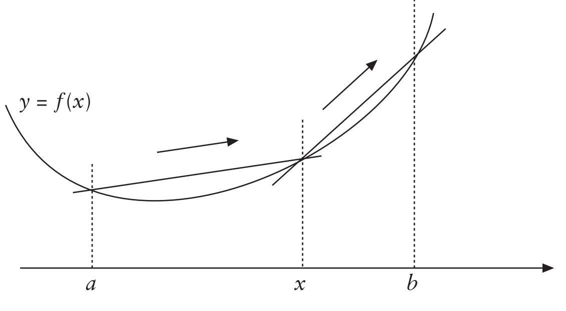
Tanımdaki eşitsizlikleri ($\leq$) kesin eşitsizliklere ($<$) dönüştürürsek, ***kesin içbükey*** ve ***kesin dışbükey*** kavramlarına ulaşırız. Örneğin $f(x) = |x|$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir ama kesin dışbükey değildir. $f(x) = mx + b$ formülüyle verilmiş fonksiyon, ki grafiği bir doğrudur, hem dışbükey hem de içbükeydir.

Dışbükeyliğin (dolayısıyla içbükeyliğin de) eşdeğer bir tanımı aşağıda.

Önsav 10.1. *I, $\mathbb{R}$'nin bir aralığı ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin dışbükey bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul, I'nın $a < x < b$ eşitsizliklerini sağlayan her a, x ve b elemanları için,*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır, yani, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, kirişlerin eğiminin sağa gittikçe artmasıdır.



Kanıt: f'nin dışbükey olduğunu varsayalım. $x \in (a, b)$ olsun. (4)'ten,

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b)$$

çıkar. Bu eşitsizliğin taraflarından $f(a)$ çıkarırsak ve tarafları $x - a$'ya bölersek,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

elde ederiz. İlk eşitsizliğin taraflarından bu sefer $f(b)$ çıkarıp tarafları $b - x$'e bölersek,

$$\frac{f(x) - f(b)}{b - x} \leq \frac{f(a) - f(b)}{b - a}$$

elde ederiz. Son iki eşitsizlik istediğimizi verir.

Şimdi diğer istikameti kanıtlayalım. Koşulun sağlandığını varsayalım. Koşuldan $f(x)$'i tecrit ettiğimizde, aynen

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(b) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

koşulunu, yani (4) eşitsizliğini elde ederiz. □

10.2 Dışbükeylik ve Süreklilik

Dışbükey ve içbükey fonksiyonlar çok vahşi fonksiyonlar olamaz, örneğin sürekli olmak zorundadırlar.

Teorem 10.2. *Açık bir aralık üzerine tanımlanmış dışbükey ve içbükey fonksiyonlar süreklidirler.*

Kanıt: I, $\mathbb{R}$'nin bir aralığı ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun. $b \in I$ olsun. I'dan $a < b < c$ eşitsizliklerini sağlayan a ve c sayıları seçelim. $x \in (b, c)$ rastgele olsun. $a < b < x$ olduğundan, (4) formülünden (x'le b'nin yerlerini değiştirerek),

$$f(b) \leq \frac{b-a}{x-a} f(x) + \frac{x-b}{x-a} f(a)$$

elde ederiz. Buradan da

$$f(x) \geq \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)$$

çıkar. Ayrıca $b < x < c$ olduğundan, gene (4) eşitsizliğinden,

$$f(x) \leq \frac{x-b}{c-b} f(c) + \frac{c-x}{c-b} f(b)$$

buluruz. Demek ki,

$$\frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a) \leq f(x) \leq \frac{x-b}{c-b} f(c) + \frac{c-x}{c-b} f(b).$$

Şimdi, bu formülde, $b < x < c$ eşitsizliğini bozmadan x'i b'ye götürelim. Sol ve sağ taraflar $f(b)$'ye eşit olurlar ve sandviç teoreminden (Önsav 5.3)

$$f(b) = \lim_{x \to b^+} f(x)$$

çıkar. Benzer şekilde,

$$f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

eşitliği kanıtlanır. Demek ki,

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

ve f sürekli (Teorem 5.7). İçbükey fonksiyonlar için kanıt benzerdir. □

Bu teorem ve Örnek 10.3 sayesinde exp fonksiyonunun sürekli olduğu bir defa daha kanıtlanmış olur.

Ama aralık kapalıysa süreklilik olmayabilir. Örneğin $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, 1)$ üzerinde 0 değerini alsın ama 0 ve 1'de 1 değerini alsın. f dışbükeydir ama 0 ve 1'de sürekli değildir.

10.3 Dışbükey Fonksiyonların Çarpımı

İki dışbükey fonksiyonun çarpımı dışbükey midir? Yanıt, net bir hayır!

Örnekler

10.9. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = -1$ fonksiyonları dışbükeydir ama $f \cdot g$ çarpımı dışbükey olmadığı gibi kesin içbükeydir.

10.10. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları dışbükeydir ama $f \cdot g$ çarpımı dışbükey değildir. Bu iki örneğe dikkatlice bakarsak, sorunun fonksiyonlardan birinin bazen negatif değerler almasında yattığını sanabiliriz. Sorun burada yatmıyor, bir sonraki örnekte göreceğimiz üzere pozitif dışbükey fonksiyonların çarpımı da dışbükey olmayabiliyor.

10.11. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = (x - 1)^2$ fonksiyonları dışbükeydir ama $f \cdot g$ çarpımı dışbükey değildir. Nitekim eğer $a = 0$, $b = 1$ olarak alırsak ve $t \in (0, 1)$ herhangi bir sayıysa,

$$(f \cdot g)((1 - t)a + tb) = (f \cdot g)(t) = t^2(t - 1)^2$$

ve

$$(1 - t)(f \cdot g)(a) + t(f \cdot g)(b) = 0$$

olur. Demek ki,

$$(f \cdot g)((1 - t)a + tb) > (1 - t)(f \cdot g)(a) + t(f \cdot g)(b)$$

olur ve $f \cdot g$ fonksiyonu dışbükey olmaz.

Gene de dışbükey fonksiyonların çarpımı hakkında bir teorem var. Sadece heyecan katmak amacıyla değil, daha pedagojik olması için teoremin önce kanıtını verelim, önermesini daha sonra yazarız.

İki pozitif ve dışbükey fonksiyon alalım: f ve g. Bunların çarpımının dışbükey olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bu sonucun yanlış olduğunu bildiğimizden, "kanıtlamak istiyoruz" yerine "kanıtlamaya çalışalım" demek daha az yanlış olurdu.

a ve b tanım aralığından iki sayı olsun. $t \in (0, 1)$ rastgele olsun.

$$t(f \cdot g)(a) + (1 - t)(f \cdot g)(b) \geq (f \cdot g)(ta + (1 - t)b),$$

yani

$$(6) \qquad tf(a)g(a) + (1 - t)f(b)g(b) \geq f(ta + (1 - t)b) \cdot g(ta + (1 - t)b)$$

eşitsizliğini kanıtlamak istiyoruz. f ve g'nin dışbükey olduğunu bildiğimizden,

$$tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b),$$
$$tg(a) + (1-t)g(b) \geq g(ta + (1-t)b)$$

eşitsizliklerini biliyoruz. f ve g fonksiyonları pozitif olduklarından, bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarpıp,

$$[tf(a) + (1-t)f(b)][tg(a) + (1-t)g(b)] \geq f(ta + (1-t)b) \cdot g(ta + (1-t)b)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki (6) eşitsizliğini kanıtlamak için,

$$tf(a)g(a) + (1-t)f(b)g(b) \geq [tf(a) + (1-t)f(b)][tg(a) + (1-t)g(b)]$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Bu son eşitsizlik de,

$$\begin{aligned} tf(a)g(a) + (1-t)f(b)g(b) \geq\, & t^2 f(a)g(a) + (1-t)^2 f(b)g(b) \\ & + t(1-t)(f(a)g(b) + f(b)g(a)) \end{aligned}$$

eşitsizliğine denk. Eşitsizliğin sağındaki ilk iki terimi sola geçirip, pozitif olan $t - t^2$ terimlerini sadeleştirirsek, son eşitsizliğin

$$f(a)g(a) + f(b)g(b) \geq f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

eşitsizliğine denk olduğunu görürüz. Bu da,

$$(f(a) - f(b))(g(a) - g(b)) \geq 0$$

eşitsizliğine denktir. Eğer

$$f(a) > f(b) \Leftrightarrow g(a) > g(b)$$

ise bu eşitsizlik doğrudur ve sadece bu durumda doğrudur. Bir teorem kanıtladık:

Teorem 10.3. *Eğer f ve g fonksiyonları pozitif ve dışbükeylerse ve her a, b için*

$$f(a) > f(b) \Leftrightarrow g(a) > g(b)$$

eşdeğerliği doğruysa, o zaman $f \cdot g$ fonksiyonu da dışbükeydir. Dolayısıyla f pozitif ve dışbükeyse ve $n \in \mathbb{N}$ ise f^n fonksiyonu da dışbükeydir. □

Örnekler

10.12. Bu teoremin özel bir durumu olarak, eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $x \mapsto |x|^n$ fonksiyonunun dışbükey olduğunu anlarız, ama bir sonraki altbölümde bundan daha genel bir teorem kanıtlayacağız: Her $r \geq 1$ gerçel sayısı için $x \mapsto x^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ üzerine dışbükeydir.

10.13. Bir önceki örnekten yukarıdaki teoremin içbükey fonksiyonlar için yanlış olduğu çıkar, nitekim $x \mapsto |x|$ fonksiyonu içbükeydir ama $x \mapsto |x|^2$ fonksiyonu içbükey değildir. Örnek 10.17'de bir başka örnek vereceğiz.

10.14. Örnek 10.3'ten exp fonksiyonunun dışbükey olduğunu bildiğimizden, her n doğal sayısı için, $\exp^n$ fonksiyonu Teorem 10.3'ten dolayı $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir.

10.15. Teorem 10.3'ten ve yukarıdaki örnekten dolayı, her n ve m doğal sayıları için $f(x) = x^{2m} \exp^n x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir.

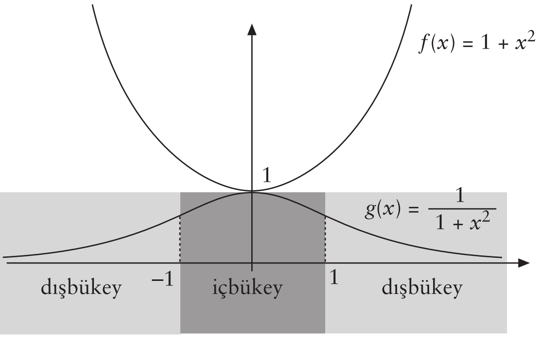
10.16. n ve m doğal sayıları için $f(x) = x^m \exp^n x$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{\geq 0}$ üzerine dışbükeydir.

10.4 Ters Fonksiyonun Bükeyliği

Bir veya birkaç fonksiyonun dışbükeyliğinden yola çıkarak başka fonksiyonların dış ya da içbükeyliğini kanıtlayabiliriz miyiz? Evet.

- f dış/içbükeyse, tanımdan dolayı $-f$ iç/dışbükeydir.
- Dış/içbükey fonksiyonların toplamı dış/içbükeydir.
- f ve g dışbükey fonksiyonlarsa $\max\{f, g\}$ fonksiyonu dışbükeydir. (Ama $\min\{f, g\}$ dışbükey olmayabilir.)
- f dış/içbükeyse, her a ve b sayısı için $f(ax+b)$ fonksiyonu da dış/içbükeydir.

Ama eğer f dışbükeyse, f hep pozitif değerler alsa bile, $1/f$ hakkında genellikle pek bir şey söyleyemeyiz. Mesela $f(x) = 1+x^2$ fonksiyonu dışbükeydir ama $1/f$ ne içbükey ne de dışbükeydir (bkz. aşağıdaki şekil).



Eğer $f : I \longrightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ içbükey bir eşlemeyse, f'nin bileşke işlemi için tersi olan $f^{-1} : J \longrightarrow I$ fonksiyonunun dışbükey ya da içbükey olması gerektiğini söyleyebilir miyiz? Hayır. Örneğin,

$$f(x) = x^2$$

formülüyle tanımlanmış $f : \mathbb{R}^{<0} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu ve tersi olan,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

formülüyle tanımlanmış fonksiyon dışbükeydir. (Neden?) Öte yandan $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu dışbükey bir eşlemedir (Örnek 10.3 ve 5.26) ama exp fonksiyonunun tersi olan log fonksiyonu içbükeydir (kanıtı birazdan).

Aşağıdaki teorem, dışbükey bir fonksiyonun tersinin iç ya da dışbükeyliği hakkında bir bilgi veriyor.

Teorem 10.4. *I ve J, $\mathbb{R}$'nin iki aralığı olsun. $f : I \longrightarrow J$ dışbükey bir eşleme olsun. Eğer f artansa f^{-1} içbükeydir. Eğer f azalansa f^{-1} dışbükeydir.*

Kanıt: Önsav 10.1'i uygulayacağız. J'den $y_1 < y < y_2$ sayılarını seçelim. x_1, x, x_2 sayıları, I'dan ve

$$f(x_1) = y_1,\ f(x) = y,\ f(x_2) = y_2$$

olacak biçimde seçilsin.

f'nin artan olduğunu varsayalım. O zaman $x_1 < x < x_2$ olur. f dışbükey olduğundan, Önsav 10.1'e göre

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} \le \frac{y_2 - y}{x_2 - x}$$

eşitsizliği geçerlidir. Pay ve paydadaki tüm terimler pozitif olduklarından,

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} \ge \frac{x_2 - x}{y_2 - y}$$

elde ederiz. Bu da aynen Önsav 10.1'e (ya da benzerine) göre, f^{-1} içbükey demektir. İkinci önermenin kanıtı aynıdır. □

10.5 Üs Almanın Bükeyliği

Bu altbölümde çeşitli r gerçel sayıları için,

$$x \mapsto |x|^r$$

formülüyle tanımlanmış fonksiyonların bükeyliğini irdeleyeceğiz.

Önsav 10.5. *Eğer $r \ge 1$ bir gerçel sayıysa $x \mapsto |x|^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerine dışbükeydir*[1].

Kanıt: $0 \le t \le 1$ ve x, $y \in \mathbb{R}$ olsun. Amacımız

$$|(1-t)\,x + ty|^r \le (1-t)\,|x|^r + t\,|y|^r$$

eşitsizliğini göstermek. $|(1-t)\,x + ty| \le (1-t)\,|x| + t\,|y|$ olduğundan

$$((1-t)\,|x| + t\,|y|)^r \le (1-t)\,|x|^r + t\,|y|^r$$

[1] Görkem Özkaya'nın çok güzel ve orijinal bir kanıtını, Yusuf Ünlü'den aldığım ve aşağıda bulacağınız kanıttan sonra üzülerek kaldırmak zorunda kaldım. Hem Görkem Özkaya'ya hem de Yusuf Ünlü'ye teşekkür ederim.

eşitsizliğini göstermek yeter. $s = (1-t)\,|x| + t\,|y| > 0$ olsun. Elbette $s > 0$ varsayımını yapabiliriz çünkü aksi halde göstermek istediğimiz eşitsizlik bariz.

$$a = \frac{|x|}{s} \text{ ve } b = \frac{|y|}{s}$$

tanmımlarını yapalım. Tanımlardan dolayı $(1-t)\,a + tb = 1$ olur. Ayrıca, Bernoulli eşitsizliğinden (Teorem 6.7) dolayı

$$1 + r\,(a-1) \le a^r \text{ ve } 1 + r\,(b-1) \le b^r$$

elde ederiz. Bunların ağırlıklı toplamlarını alarak

$$(1-t)\,(1 + r\,(a-1)) + t\,(1 + r\,(b-1)) \le (1-t)\,a^r \; + tb^r$$

buluruz. Ama biraz basit cebirle eşitsizliğin sol tarafının 1'e eşit olduğu anlaşılıyor. Demek ki,

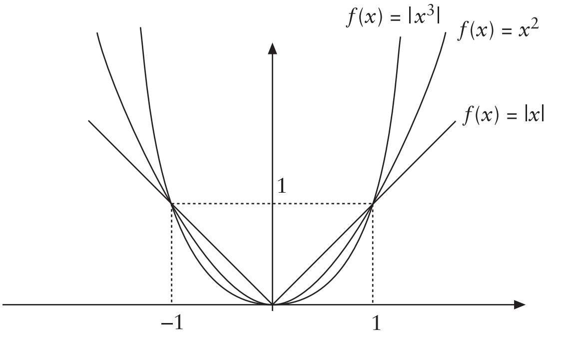
$$1 \le (1-t)\,a^r \; + tb^r.$$

a ve b yerine değerlerini koyarsak istediğimiz

$$s^r \le (1-t)\,|x|^r \; + t\,|y|^r$$

eşitsizliği çıkar. □

Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda.

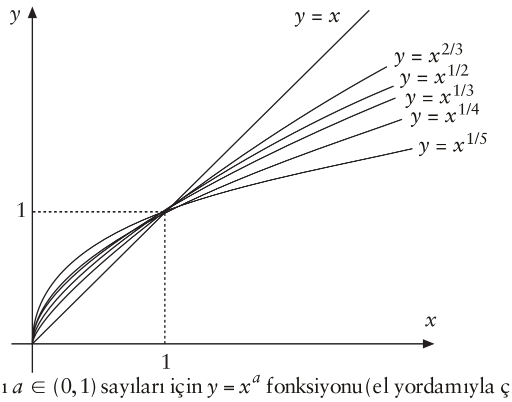


r büyüdükçe, $x \mapsto |x|^r$ fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığında yassılaşır; bu aralığın dışında ise daha hızlı ∞'a yaklaşır.

Önsav 10.6. *Eğer $0 < r < 1$ bir gerçel sayıysa $x \mapsto x^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ üzerinde içbükeydir.*

Kanıt: Her $x \ge 0$ için $(x^r)^{1/r} = x$ ve $(x^{1/r})^r = x$ olduğundan, $\mathbb{R}^{>0}$ aralığından $\mathbb{R}$ aralığına giden $x \mapsto x^r$ fonksiyonunun tersi $x \mapsto x^{1/r}$ fonksiyonudur. Sonuç şimdi Önsav 10.5 ve Teorem 10.4'ten hemen çıkar. □

Bu fonksyonların grafikleri de aşağıdaki gibidir:



Bazı $a \in (0,1)$ sayıları için $y = x^a$ fonksiyonu (el yordamıyla çizilmiştir.)

Örnekler

10.17. Önsav 10.6 ve 10.5'ten, Teorem 10.3'ün içbükey fonksiyonlar için yanlış olduğu çıkar. Nitekim Önsav 10.6'ya göre $f(x) = x^{2/3}$ fonksiyonu içbükeydir, ama $f \cdot f$ fonksiyonuna eşit olan $g(x) = x^{4/3}$ fonksiyonu Önsav 10.5'e göre dışbükeydir. Bu konuda ayrıca bkz. Örnek 10.13.

Önsav 10.7. *Eğer $r < 0$ ise, $x \mapsto x^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ üzerine dışbükeydir.*

Kanıt: Bu amaçla x, $y > 0$ ve $a + b = 1$ eşitliğini sağlayan a, $b > 0$ sayıları alalım.

$$(ax + by)^r \leq ax^r + by^r \tag{1}$$

eşitsizliğini göstermeliyiz. $x = y$ ise kanıtlayacak bir şey yok. Gerekirse x ve y'nin yerini değiştirerek, $y > x$ eşitsizliğini varsayabiliriz. Bu eşitsizliği $r < 0$ kesirli sayıları için göstermek yeterli, çünkü eğer (1) eşitsizliği kesirli sayılar için geçerliyse, limit alarak gerçel sayılar için de geçerli olduğu anlaşılır. $n > 0$ doğal sayısı için $x \mapsto x^{-1/n}$ fonksiyonu pozitif bir fonksiyon olduğu için, Teorem 10.3'e göre bu fonksiyonun dışbükey olduğunu göstermek yeterli. Demek ki,

$$(ax + by)^{-1/n} \leq ax^{-1/n} + by^{-1/n}$$

eşitsizliğini göstermeliyiz. Bu eşitsizliğin n'inci kuvvetini alıp, x ve y yerine sırasıyla x^n ve y^n yazalım. Eşitsizlik,

$$(ax^n + by^n)^{-1} \leq (ax^{-1} + by^{-1})^n$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu son eşitsizliği x^n ile çarpıp $z = y/x > 1$ tanımını yapalım:

$$(a + bz^n)^{-1} \leq (a + bz^{-1})^n$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son bir kez daha düzenlersek,

$$(a + bz^n)(az + b)^n \geq z^n \tag{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği $n \geq 1$ ve $z > 1$ için gösterirsek, (1) gösterilmiş olacak. Bunu tümevarımla yapmayı öneriyoruz. Aslında (2), $n = 0$ için geçerli olduğundan tümevarımı $n = 0$'dan başlatabiliriz. Şimdi (2)'yi varsayıp,

$$(a + bz^{n+1})(az + b)^{n+1} \geq z^{n+1} \tag{3}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Sol taraftaki ifadeden yola koyulalım: (2)'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}(a + bz^{n+1})(az + b)^{n+1} &= (a + bz^{n+1})(az + b)(az + b)^n \\ &\geq (a + bz^{n+1})(az + b)\tfrac{z^n}{(a+bz^n)}\end{aligned}$$

elde ederiz. Demek ki (3)'ü kanıtlamak için,

$$(a + bz^{n+1})(az + b)\frac{z^n}{(a + bz^n)} \geq z^{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Paydaları yok edip sadeleştirirsek,

$$(a + bz^{n+1})(az + b) \geq z(a + bz^n)$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini buluruz. Bunu açalım. Sağ tarafta

$$za + bz^{n+1} = za + b + bz^{n+1} - b = (az + b) + b(z^{n+1} - 1)$$

eşitliği var. Demek ki

$$(a + bz^{n+1})(az + b) \geq (az + b) + b(z^{n+1} - 1)$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Sağdaki $az + b$ ifadesini sola geçirelim:

$$(a + bz^{n+1} - 1)(az + b) \geq b(z^{n+1} - 1)$$

elde ederiz. Ama $a - 1 = b$; bunu sol tarafa atarak,

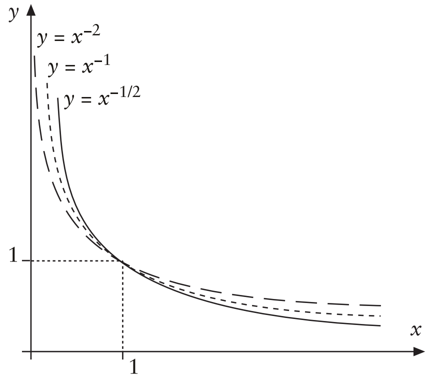
$$(-b + bz^{n+1})(az + b) \geq b(z^{n+1} - 1)$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Sadeleştirirsek,

$$az + b \geq 1$$

eşitliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Ama a, $b \geq 0$, $a + b = 1$ ve $z > 1$ olduğundan, bu eşitsizlik bariz. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Bu fonksiyonların grafikleri de aşağıdaki gibidir:

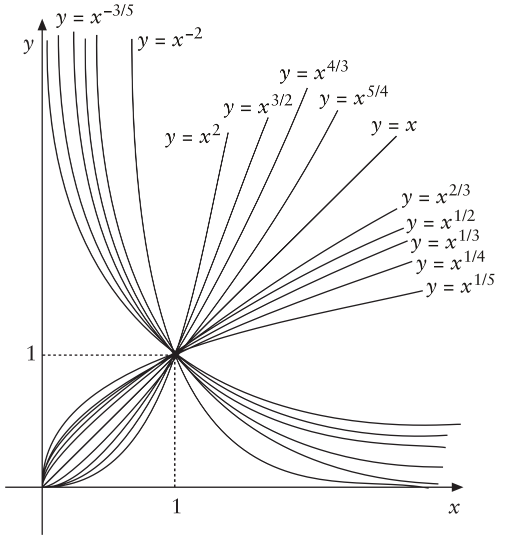


$r < 0$ için $x \mapsto x^r$ fonksiyonların grafikleri

Bu bölümde yaptıklarımızı bir teoremde özetleyelim:

Teorem 10.8. *Eğer $r \geq 1$ ya da $r \leq 0$ ise $x \mapsto x^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ üzerine dışbükeydir. Eğer $r \in (0,1)$ ise $x \mapsto x^r$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ üzerine içbükeydir.* □

Daha önce çizdiğimiz grafikleri toplu halde gösterelim:



Eğer $a > 0$ ise $x \mapsto a^x$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^{>0}$ kümesine giden fonksiyonun dışbükey olduğunu ileride, Teorem 11.5'te göreceğiz.

Yukarıda yapılanlardan ve Teorem 10.2'den, $x \mapsto x^r$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^{>0}$ üzerinde sürekli olduğu çıkar. Ama aynı sonucu bükeyliği kullanmadan Teorem 6.8'de kanıtlamıştık zaten. Elbette, iki sürekli fonksiyonun bileşkesi olduğundan, $x \mapsto |x|^r$ fonksiyonu da $\mathbb{R}$ üzerine süreklidir.

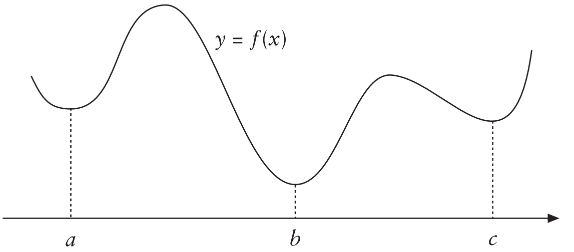
Alıştırmalar

10.18. Eğer $p \geq 1$ ve a, $b > 0$ ise, $(a+b)^p \leq 2^{p-1}a^p + 2^{p-1}b^p$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10.6 Yerel/Global Minimum/Maksimum

Dış/içbükey fonksiyonlar kavramı, analizin vazgeçilmezi olan eşitsizlikleri kanıtlamak için çok güçlü bir alettir. Birçok uygulamasını göreceğiz.

$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $f(x) \geq f(a)$ oluyorsa, a'ya f'nin ***minimumu*** ya da ***global minimumu*** adı verilir. Bu durumda $f(a)$'ya f'nin ***minimum değeri*** adı verilir. Eğer a'yı içeren açık bir I aralığı için, $f(x) \geq f(a)$ koşulu her $x \in X \cap I$ için sağlanıyorsa, a'ya ***yerel minimum*** adı verilir. Global minimum her zaman bir yerel minimumdur elbet ama tersi doğru olmak zorunda değildir. ***Yerel*** ve ***global maksimum*** ve ***maksimum değer*** benzer şekilde tanımlanır.



a, *b* ve *c* yerel minimumlar. *a* ve *c* global minimum değiller.
Eğer tanım kümesi görünenden ibaretse *b* global minimumdur.

Teorem 10.9. *I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun.*
i. *Her yerel minimum aynı zamanda global bir minimumdur ve eğer kesin dışbükeyse f'nin en fazla bir global minimumu vardır.*
ii. *Eğer kesin dışbükeyse f'nin maksimum değerini veren noktalar ancak I'nın uç noktaları olabilirler.*

Kanıt: i. a, f'nin yerel minimumu olsun. J, her $x \in I \cap J$ sayısı için $f(x) \geq f(a)$ eşitsizliğinin sağlandığı a'yı içeren açık bir aralık olsun. $x \in I$ herhangi bir eleman olsun. O zaman, öyle bir $0 < \epsilon$ vardır ki, her $t \in (0, \epsilon)$ sayısı için,

$$(1-t)a + tx \in I \cap J$$

olur. Demek ki,

$$(1-t)f(a) + tf(x) \geq f((1-t)a + tx) \geq f(a),$$

yani

$$(1-t)f(a) + tf(x) \geq f(a),$$

olur. Bundan da, bariz sadeleştirmelerden sonra, $f(x) \geq f(a)$ çıkar. Demek ki a global minimummuş.

Şimdi a ve b, minimum değeri veren iki değişik sayı olsun. a ve b global minimum olduklarından, $f(a) = f(b)$ olur. Her $t \in (0,1)$ sayısı için,

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b) = (1-t)f(a)+tf(a) = f(a) \leq f((1-t)a+tb),$$

yani $f((1-t)a+tb) = f(a)$ olur. Demek ki f fonksiyonu a ile b arasında bir sabittir. Ama bu da kesin dışbükeylikle çelişir.

ii. Şimdi a'nın I'nın içinde yerel bir maksimum olduğunu varsayalım. O zaman a'yı içeren öyle bir $J \subseteq I$ açık aralığı vardır ki, $b < a < c$ eşitsizliklerini sağlayan her b, $c \in J$ sayıları için,

$$f(b) \leq f(a) \text{ ve } f(c) \leq f(a)$$

olur. Böyle b ve c sayıları seçelim.

$$a = (1-t)b + tc$$

eşitliğini sağlayan bir $t \in (0,\, 1)$ alalım. Dışbükeyliğin tanımından dolayı,

$$f(a) = f((1-t)b+tc) \leq (1-t)f(b) + tf(c) \leq \max\{f(b),\, f(c)\} \leq f(a)$$

olur. Demek ki

$$f(a) = \max\{f(b),\, f(c)\}.$$

Ayrıca eğer $f(b) \neq f(c)$ ise,

$$f(a) = f((1-t)b+tc) \leq (1-t)f(b) + tf(c) < \max\{f(b),\; f(c)\} \leq f(a)$$

olur, bir çelişki. Dolayısıyla $f(b) = f(a) = f(c)$ ve f, J üzerinde sabit değer alan bir fonksiyon. Bu da f'nin kesin dışbükeyliğiyle çelişir. □

Alıştırmalar

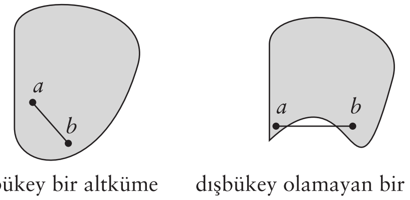
10.19. Eğer bir I aralığı üzerine tanımlanmış bir f fonksiyonu sürekliyse ve her $a, b \in I$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f'nin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

Dışbükey Kümeler. Konu dışbükey fonksiyonlardan açılmışken, bir başka önemli dışbükeylik kavramından söz edelim.

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer her a, $b \in A$ için, a ve b arasındaki doğru parçası da A'nın içindeyse, A'ya



dışbükey bir altküme   dışbükey olamayan bir altküme

dışbükey denir. (Bu kavram kolaylıkla n boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayına genişletilebilir.) Bir başka deyişle, eğer her a, $b \in A$ ve her $t \in (0,1)$ için,

$$(1-t)a + tb \in A$$

ise A'ya ***dışbükey*** denir. (Burada, $b = (b_1, b_2)$ ise, $tb = (tb_1, tb_2)$ olarak tanımlanmıştır.) $\mathbb{R}^2$ elbette dışbükeydir.

Alıştırmalar

10.20. Eğer $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralıksa ve $f : I \to \mathbb{R}$ dışbükeyse, f'nin grafiğinin üstünde kalan noktalar kümesinin, yani

$$\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : y > f(x)\}$$

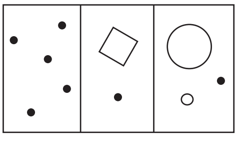
kümesinin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

10.21. Sonlu ya da sonsuz sayıda dışbükey kümenin kesişiminin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

10.22. Eğer $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ise, A'yı içeren tüm dışbükey kümelerin kesişiminin, A'yı içeren dışbükey bir küme olduğunu kanıtlayın. Bu kümeye A'nın ***dışbükey zarfı*** dersek ve bu kümeyi $\operatorname{dbz} A$ olarak gösterirsek, $\operatorname{dbz} A$'nın A'yı içeren en küçük dışbükey küme olduğunu kanıtlayın (yani $\operatorname{dbz} A$, A'yı içeren her dışbükey kümenin altkümesidir.)

10.23. Şu özellikleri kanıtlayın:
i. $A \subseteq \operatorname{dbz} A$,
ii. $\operatorname{dbz}(\operatorname{dbz} A) = \operatorname{dbz} A$,
iii. $\operatorname{dbz}(A \cap B) = \operatorname{dbz} A \cap \operatorname{dbz} B$,
iv. $\operatorname{dbz} \emptyset = \emptyset$.

10.24. Aşağıdaki üç şeklin her birinin ayrı ayrı dışbükey zarfını çizin.



10.25. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. A'nın dışbükey olması için, "Her $x_1, \ldots, x_n \in A$ ve toplamı 1 olan her $t_1, \ldots, t_n \in (0,\ 1)$ için

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$$

elemanı A'dadır" koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

10.26. Yukarıdaki koşuldaki gibi bir

$$t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$$

noktasına $x_1, \ldots, x_n$ noktalarının ***dışbükey kombinasyonu*** adı verilir. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. A'nın noktalarının tüm dışbükey kombinasyonları kümesinin A'nın dışbükey zarfı olduğunu kanıtlayın.

10.27. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ olsun. $\operatorname{dbz} A$'nın her elemanının aslında A'nın üç noktasının bir dışbükey kombinasyonu olduğunu kanıtlayın. (Constantin Carathéodory'nin daha genel bir teoremi için bkz. Teorem 10.10 [Ca].)

10.28. $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $t \in \mathbb{R}$ olsun.

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

ve

$$tA = \{ta : a \in A\}$$

olsun. Eğer A ve B dışbükeyse bu kümelerin de dışbükey olduklarını kanıtlayın. A'nın dışbükey olmasının, her $t \in (0,1)$ için

$$(1-t)A + tA \subseteq A$$

içindeliğinin yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

10.29. $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dışbükey bir küme ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin dışbükey olmasının tanımını verin. Eğer f dışbükeyse her u için,

$$\{x : f(x) < u\} \text{ ve } \{x : f(x) \leq u\}$$

"seviye kümelerinin" dışbükey olduklarını kanıtlayın.

10.30. Yukardaki iki alıştırmayı $\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^n$'ye genelleştirin.

10.31. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n < \alpha\},$$
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq \alpha\},$$
$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \alpha\}$$

kümelerinin dışbükey olduklarını kanıtlayın. Bundan, herhangi bir sayıda doğrusal eşitliğin ya da eşitsizliğin ortak çözümleri kümesinin dışbükey olduğunu kanıtlayın.

Bölümü Constantin Carathéodory'nin bir teoremini kanıtlayarak bitirelim.

Teorem 10.10 (Constantin Carathéodory). *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. P, A'nın dışbükey zarfının bir elemanı olsun. O zaman P, A'nın en fazla $n+1$ tane noktasının dışbükey zarfındadır.*

Kanıt: $P \in \operatorname{dbz} A$ olsun. O zaman sonlu sayıda $P_1, \ldots, P_k \in A$ vektörü ve toplamı 1 eden $t_1, \ldots, t_n \geq 0$ sayıları için

$$P = \sum_{i=1}^{k} t_i P_i$$

olur. $k > n+1$ ve her i için $t_i > 0$ varsayımlarını yapabiliriz. Bu durumda

$$P_2 - P_1, \ldots, P_k - P_1$$

vektörleri lineer bağımlıdırlar. Demek ki hepsi 0'a eşit olmayan $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{R}$ sayıları için,

$$\sum_{i=2}^{k} s_i(P_i - P_1) = 0$$

olur. s_1 sayısını

$$s_1 = -\sum_{i=2}^{k} s_i$$

olarak tanımlarsak,

$$\sum_{i=1}^{k} s_i P_i = 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{k} s_i = 0$$

elde ederiz. İkinci eşitlikten s_i'lerden en az birinin > 0 olduğu çıkar. İkinci eşitlikten, her $a \in \mathbb{R}$ için,

$$P = P - a \cdot 0 = \sum_{i=1}^{k} t_i P_i - a \sum_{i=1}^{k} s_i P_i = \sum_{i=1}^{k} (t_i - a s_i) P_i$$

olduğu çıkar. Burada a sayısını

$$a = \min \left\{ \frac{t_i}{s_i} : i = 1, \ldots k \text{ ve } s_i > 0 \right\} = \frac{s_j}{t_j} > 0$$

olarak alırsak, her i için,

$$\frac{t_i}{s_i} \geq \frac{t_j}{s_j} = a$$

olur, dolayısıyla **her** i için $t_i - a s_i \geq 0$ olur. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{k} (s_i - a t_i) = \sum_{i=1}^{k} s_i - a \sum_{i=1}^{k} t_i = 1 - a \cdot 0 = 1.$$

Böylece P'yi farklı bir biçimde P_i'lerin dışbükey kombinasyonu olarak yazdık:

$$P = \sum_{i=1}^{k} (t_i - a s_i) P_i.$$

Ama $t_j - a s_j = 0$. Demek ki P'yi aslında k'dan daha az sayıda noktanın dışbükey kombinasyonu olarak yazdık. Bu sayıyı $n + 1$'e kadar indirebiliriz tabii ki. $\square$

11. Logaritma ve Üs Alma

Logaritmalar değişik yöntemlerle tanımlanabilir. Liselerde tanımlandığı biçimi,

$$x = \log y \Leftrightarrow y = 10^x,$$

bu yolların bir yandan en kolayı bir yandan da en zorudur. En kolayıdır çünkü doğrudan uygulamaya yöneliktir. En zorudur çünkü:

1. 10^π, $10^{\sqrt{2}}$ gibi sayıları tanımlamadan varsayar,

2. Her pozitif y sayısının 10^x gibi bir sayıya eşit olduğunu kanıtlamadan varsayar.

Logaritmayı tanımlamanın bir başka yolu bu ciltte görmeyeceğimiz integral kullanmaktır.

Biz burada logaritmayı neredeyse liselerde tanımlandığı biçimiyle tanımlayacağız; iki farkımız olacak:

1. 10 tabanı yerine e tabanı kullanacağız,

2. Hiçbir olguyu kanıtlamadan kullanmayacağız.

Logaritmayı (ama log'u değil ln'yi), exp fonksiyonunun tersi olarak tanımlayacağız. Ama önce biraz exp fonksiyonundan sözedelim.

11.1 exp Fonksiyonu

Sayfa 126'da a^r sayılarını tanımlamış ve $e^r = \exp r$ eşitliğini göstermiştik. O kanıtın geniş bir özetiyle başlayalım:

(1) Pozitif bir a sayısı ve bir q kesirli sayısı için, a^q sayısını [N4, Bölüm 3.1]'de (tahmin edileceği gibi, liselerde gösterildiği biçimde) tanımlamış ve [N4, Teorem 3.8]'de a^q sayısının özelliklerini kanıtlamıştık.

(2) Bu ciltte, Sonuç 6.4'te ve sonrasında, pozitif bir a sayısı ve bir r gerçel sayısı için, a^r sayısını, r'ye yakınsayan herhangi bir $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi için,

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

olarak tanımlamıştık ve $r \mapsto a^r$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli bir fonksiyon olduğunu göstermiştik.

(3) [N4, Altbölüm 10.4]'te exp fonksiyonunu

$$\exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

olarak tanımlamıştık ve $\exp 1$ sayısına e adını vermiştik. [N4, Sonuç 10.9]'da her q kesirli sayısı için,

$$\exp q = e^q$$

eşitliğini kanıtlamıştık.
(4) Bu ciltte, Teorem 2.1'de exp'in sürekli bir fonksiyon olduğunu kanıtlamıştık.
(5) Gene bu ciltte, Teorem 6.2'de $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve $\mathbb{Q}$ üzerine aynı değerleri veren iki fonksiyonun eşit olduklarını kanıtlamıştık.

Şimdi bunları kullanarak aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz:

Teorem 11.1. *Her x gerçel sayısı için* $\exp x = e^x$ *olur.*

Kanıt: Yukarıdaki 2 ve 4 sayılı notlara göre, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden exp fonksiyonuyla $r \mapsto e^r$ fonksiyonları süreklidir ve 3 sayılı nota göre kesirli sayılar üzerine aynı değerleri alırlar. 5 sayılı nota göre bu fonksiyonlar eşittirler. □

Geçmişte çeşitli vesilelerle exp fonksiyonunun özelliklerini kanıtlamıştık. Bu sonuçların bazılarını da özetleyelim:

Teorem 11.2. a. exp *fonksiyonu* $\mathbb{R}$*'den* $\mathbb{R}^{>0}$ *kümesine giden birebir ve örten ve sürekli bir fonksiyondur.*
b. *Her* $x, y \in \mathbb{R}$ *için* $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$ *ve* $(\exp x)^y = \exp xy$ *olur. Ayrıca* $\exp(-x) = 1/\exp x$ *ve* $\exp 0 = 1$ *olur.*
c. exp *kesin artan bir fonksiyondur.*
d. exp *dışbükey bir fonksiyondur.*
e. $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ *ve* $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ *olur.*

Kanıt: a. Örnek 5.26 ve Teorem 6.8.
b. [N4, Teorem 10.11 ve Sonuç 10.12] ve Sonuç 6.5.iv.
c. [N4, Sonuç 10.14]
d. Örnek 10.3.
e. Örnek 5.21 ve 5.25. □

11.2 Doğal Logaritma

Teorem 11.2'ye göre $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu sürekli, dışbükey ve artan bir eşlemedir. exp fonksiyonunun tersine ***doğal logaritma*** diyelim ve bu fonksiyonu ln simgesiyle gösterelim:

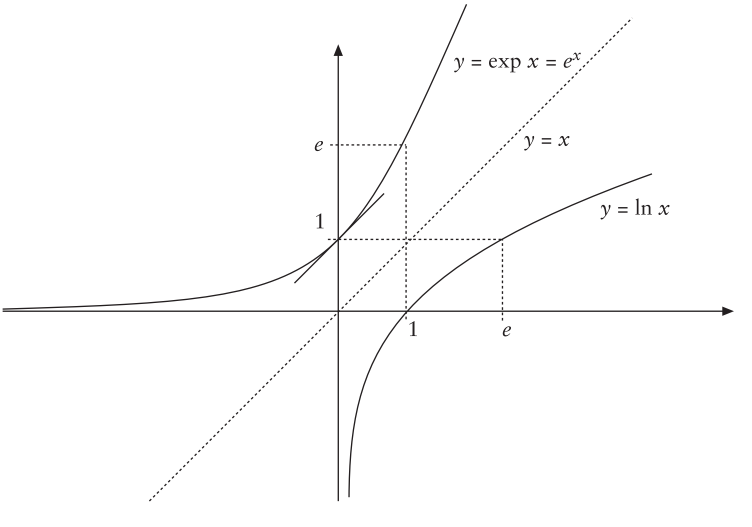
$$\ln : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Tanım gereği
$$\ln y = x \Leftrightarrow \exp x = y$$
olur. Teorem 5.24'e göre ln fonksiyonu süreklidir. Doğal logaritmaya bazen kısaca ***logaritma*** da denir.

Artan bir fonksiyonun tersi de artan olduğundan, ln fonksiyonu da artan bir fonksiyondur. exp fonksiyonu dışbükey olduğundan Teorem 10.4'e göre ln içbükey bir fonksiyondur. Ayrıca, $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ olduğundan
$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$
olur ve $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ olduğundan,
$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$
olur. Bu bulgularımızı teorem adı altında özetleyelim.

Teorem 11.3. $\ln : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ *artan, içbükey ve sürekli bir eşlemedir. Ayrıca*
$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \textit{ ve } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$
olur. □

ln fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir. (Birbirinin tersi olan fonksiyonların grafiği $y = x$ doğrusuna göre birbirinin simetriğidirler.)



Logaritmanın birkaç özelliğini kanıtlayalım. Elbette kanıtlarımızda logaritmanın tanımına, yani
$$\ln y = x \Leftrightarrow \exp x = y$$

formülüne ve exp fonksiyonunun özelliklerine başvuracağız.

• $\exp 0 = 1$ olduğundan $\ln 1 = 0$ olur.

• $\exp 1 = e$ olduğundan $\ln e = 1$ olur.

• exp fonksiyonu 0'dan büyük sayılarda 1'den büyük ve 0'dan küçük sayılarda 1'den küçük değerler aldığından,

$$\ln y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$$

önermesi geçerlidir.

• $\ln y = x$ ve $\ln y_1 = x_1$ olsun. (Burada y ve y_1 pozitif olmak zorundalar, yoksa eşitlikler anlamsız olur.) Demek ki,

$$\exp x = y \text{ ve } \exp x_1 = y_1.$$

Bu iki eşitliği taraf tarafa çarpalım:

$$(\exp x)(\exp x_1) = yy_1$$

elde ederiz. Öte yandan

$$(\exp x)(\exp x_1) = \exp(x + x_1).$$

Demek ki,

$$\exp(x + x_1) = yy_1.$$

Logaritmanın tanımından dolayı,

$$\ln yy_1 = x + x_1 = \ln y + \ln y_1$$

eşitliği geçerlidir. Bir başka deyişle, nasıl exp fonksiyonu toplamayı çarpmaya dönüştürüyorsa, exp'in tersi olan ln fonksiyonu da çarpmayı toplamaya dönüştürür. Eğer y ve y_1 negatif değerler alabilirse, yukarıdaki eşitliği,

$$\ln |yy_1| = \ln |y| + \ln |y_1|$$

olarak yazmak gerekir.

• $\ln y = x$ ve r bir gerçel sayı olsun. Teorem 11.3'ten dolayı

$$e^x = \exp x = y$$

ve gene Teorem 11.3'ten dolayı

$$\exp xr = e^{xr} = (e^x)^r = y^r$$

(bkz. Teorem 6.5.iv). Demek ki

$$\ln y^r = xr = rx = r \ln y$$

olur. $r = -1$ için $\ln(1/y) = -\ln y$ elde edilir.

Eğer y'nin negatif değerler almasına izin verirsek, yukarıdaki eşitliği,

$$\ln|y|^r = r\ln|y|$$

olarak yazmak gerekir. Örneğin, y'nin negatif olabileceğini göz önünde tutarak,

$$\ln y^2 = 2\ln|y|$$

yazmalı.

• exp ve ln fonksiyonları birbirlerinin tersi olduklarından, her $y > 0$ için

$$e^{\ln y} = \exp\ln y = y$$

ve her x için

$$\ln e^x = \ln\exp x = x$$

olur.

• $n > 0$ sabit bir doğal sayı olsun. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = 0$ eşitliğini kanıtlayalım. $x > 1$ iken $y = \frac{\ln x}{n}$ tanımını yaparsak, $x = e^{ny}$ olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = \lim_{y\to\infty} \frac{ny}{e^y} = 0$$

olur (Alıştırma 4.22).

Bulduklarımızı özetleyelim:

Teorem 11.4. *Her $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ ve her $r \in \mathbb{R}$ için,*
i. $\ln 1 = 0$.
ii. $\ln e = 1$.
iii. $\ln y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$.
iv. $\ln xy = \ln x + \ln y$.
v. $\ln y^r = r\ln y$ *ve* $\ln e^r = r$.
vi. $\ln(1/y) = -\ln y$.
vii. $e^{\ln y} = y$.
viii. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = 0$ *olur.* □

Örnekler

11.1. Eğer $z > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} z^{1/n} = 1$ olur çünkü

$$\lim_{n\to\infty} z^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\ln z\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln z}{n}\right) = \exp 0 = 1.$$

11.2. Eğer $z > 0$ ise $\lim_{n\to\infty}(1+z^{1/n})^n = \infty$ olur çünkü bir önceki örneğe göre n'inci kuvveti alınan $1 + z^{1/n}$ sayıları 2'ye yakındırlar.

11.3. a, b, $z > 0$ olsun. Eğer $a + b > 1$ ise $\lim_{n\to\infty}(b + az^{1/n})^n = \infty$ olur, eğer $a + b < 1$ ise $\lim_{n\to\infty}(b + az^{1/n})^n = 0$ olur. Nitekim,

$$\lim_{n\to\infty}(b + az^{1/n})^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\ln(b + az^{1/n})\right)$$

ve Örnek 11.1'e göre

$$\lim_{n\to\infty}(b + az^{1/n}) = b + a$$

olur. Bunu şöyle de bulabiliriz: $\lim_{n\to\infty}(b+az^{1/n}) = b+a$ olduğundan yeterince büyük n doğal sayıları için $b+az^{1/n}$ değerleri $a+b$ sayısına yakın olurlar; dolayısıyla $a+b$'nin değerine göre n'inci kuvvetler ya sonsuza ya da 0'a giderler.

11.4. Eğer $a, b > 0$ ve $a + b = 1$ ise, $\lim_{n\to\infty}(b + az^{1/n})^n = z^b$ olur ama bu eşitliği bu aşamada göstermek kolay olamayabilir, bir sonraki ciltte, türev konusunu irdeledikten sonra gösteririz.

11.5. $z > 0$ olsun. Eğer $0 < a < 2$ ise Örnek 11.1'e göre yeterince büyük n doğal sayıları için $az^{1/n} < 2$, yani $-1 < 1 - az^{1/n}$ olur, demek ki $-1 < 1 - az^{1/n} < 1$ olur. Böylece $\lim_{n\to\infty}(1 - az^{1/n})^n = 0$ elde ederiz.

Alıştırmalar

11.6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(xy) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlasın. $f = 0$ olduğunu gösterin.

11.7. $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(xy) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlasın. $f = 0$ olduğunu gösterin.

11.8. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlasın. $f \neq 0, 1$ varsayımını yapalım. $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ eşitliğini gösterin. Her $q \in \mathbb{Q}$ için $(x^q) = f(x)^q$ eşitliğini gösterin.

11.9. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{Q}$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlasın. f'nin asal sayılarda aldığı değerlerle belirlendiğini kanıtlayın.

11.3 Üs Alma Üzerine

Altbölüm 6.3'te tanımladığımız $(x, y) \mapsto x^y$ üs alma fonksiyonu aslında iki değişkenli bir fonksiyondur. Eğer ikinci koordinatı sabitlersek elde edilen $x \mapsto x^a$ fonksiyonunun analizi oldukça kolaydır ve bunu Sonuç 6.5'te ve Teorem 10.8'de yapmıştık. Şimdi birinci koordinatı sabitleyip, fonksiyonun ikinci koordinata göre nasıl değiştiğine bakalım, yani $x \mapsto a^x$ fonksiyonunu analiz edelim. Tabii $a \geq 0$ olmalı. Ayrıca $a = 0$ ya da 1 iken sabit fonksiyonlar elde edildiğinden, $a \neq 0, 1$ durumlarını incelemek yeterli.

Teorem 11.5. *Eğer $1 \neq a > 0$ ise $x \mapsto a^x$ kuralıyla tanımlanmış $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^{>0}$ kümesine giden fonksiyon dışbükey ve sürekli bir eşlemedir. Ayrıca $a > 1$ ise fonksiyon artandır, yoksa azalandır. Son olarak, eğer $a > 1$ ise*

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \text{ ve } \lim_{x\to-\infty} a^x = 0,$$

eğer $a < 1$ ise

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ ve } \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$$

olur.

Kanıt: x herhangi bir gerçel sayı olsun. O zaman

$$a^x \overset{\text{vii}}{=} e^{\ln a^x} \overset{v}{=} e^{x \ln a} = \exp(x \ln a)$$

olur. Bundan da $x \mapsto a^x$ fonksiyonunun $x \mapsto x \ln a$ ve exp fonksiyonlarının bileşkesi olduğu anlaşılır. Bu iki fonksiyon da sürekli olduğundan, $x \mapsto a^x$ fonksiyonu süreklidir[1].

Ayrıca exp fonksiyonu artan olduğundan (yani sıralamayı koruduğundan), $x \mapsto a^x$ fonksiyonunun artan ya da azalan olması $x \mapsto x \ln a$ fonksiyonunun artan ya da azalan olmasıyla doğrudan ilişkilidir, ki bu da $\ln a$'nın pozitif ya da negatifliğiyle, yani a'nın 1'den büyük ya da küçük olmasıyla ilgilidir.

Alıştırma 10.5'te, $f(x)$ fonksiyonuyla $f(ax+b)$ fonksiyonunun iç/dışbükeyliğinin aynı olduğunu söylemiştik (kanıtı da kolaydır), dolayısıyla

$$x \mapsto a^x = \exp(x \ln a)$$

fonksiyonu aynen exp fonksiyonu gibi dışbükeydir.

Dışbükeyliği ve Teorem 10.2'yi kullanarak da sürekliliği kanıtlayabilirdik.

Şimdi $a \neq 1$ iken $r \mapsto a^r$ fonksiyonun bir eşleme olduğu $a^x = \exp(x \ln a)$ fonksiyonundan çıkar.

Son olarak limitleri hesaplayalım. Eğer $a > 1$ ise $\ln a > 0$ olur ve

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} \exp(x \ln a) = \infty$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \exp(x \ln a) = 0$$

bulunur. Eğer $a < 1$ ise $\ln a < 0$ olur ve

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} \exp(x \ln a) = 0$$

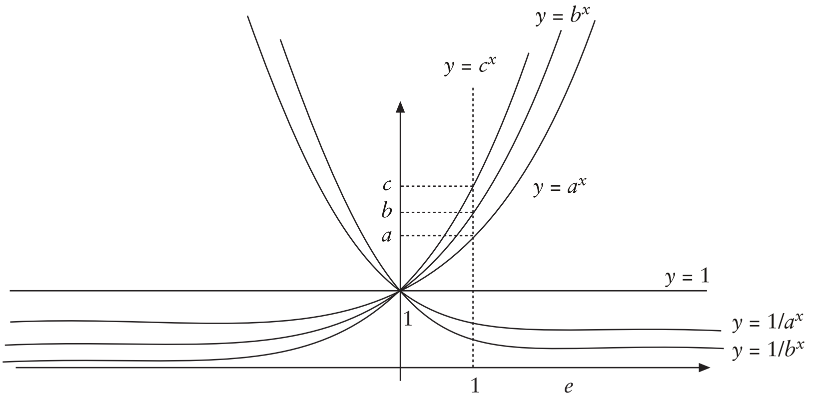
ve

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \exp(x \ln a) = \infty$$

bulunur. □

Teoremi kullanarak çeşitli $a > 0$ sayıları için $x \mapsto a^x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizebiliriz.

[1] Yukarıda kanıtlanan $a^x = \exp(x \ln a)$ eşitliği a^x sayısının bir tanımı olarak da verilebilir. Bazı kitaplarda a^x sayısı böyle tanımlanır.



11.4 Başka Tabanlarda Logaritma

ln fonksiyonunu yukarıda

$$\ln y = x \Leftrightarrow e^x = y$$

formülüyle tanımlamıştık, yani ln fonksiyonunu

$$r \mapsto e^r$$

kuralıyla verilmiş fonksiyonun tersi olarak tanımlamıştık. Eğer e yerine bir başka $a \neq 1$ pozitif sayısı alırsak ne olur? Bişeycikler olmaz, sadece logaritmayı bir başka tabanda tanımlamış oluruz.

$$\log_a : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^{>0}$ kümesine giden

$$r \mapsto a^r$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun tersi olsun. Demek ki

$$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$$

ve her $x > 0$ için

$$\log_a a^x = x$$

ve her y için

$$a^{\log_a y} = y.$$

Bu fonksiyona a ***tabanında logaritma*** denir. Elbette $\log_e = \ln$ olur. Eğer a'nın ne olduğu belliyse, $\log_a$ yerine kısaca log yazıldığı da olur.

Aynen ln için kanıtladığımız gibi,

$$\log_a y^r = r \log_a y$$

olur. Nitekim eğer $x = \log_a y$ ise, $a^x = y$ ve dolayısıyla $a^{xr} = y^r$ olur, buradan da $\log_a y^r = xr = r \log_a y$ çıkar.

Bu arada $\log_e = \ln$ eşitliğine dikkatinizi çekeriz. $\log_a$ fonksiyonunu uzun uzun çalışmaya gerek yok, çünkü $\log_a$ fonksiyonunu $\log_b$ cinsinden yazabiliriz, yeter ki a ve $b \neq 1$ olsun:

$$a^{\log_a y} = y$$

eşitliğinin her iki tarafına $\log_b$ fonksiyonunu uygularsak,

$$\log_b(a^{\log_a y}) = \log_b y,$$

yani,

$$\log_a y \log_b a = \log_b y,$$

buluruz. Demek ki

$$\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}.$$

Eğer $b = e$ alırsak,

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

eşitliğini buluruz. Son olarak, Teorem 11.5'teki, $a > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için,

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

eşitliğine dikkatinizi çekerim. Her iki tarafa da ln uygularsak bunun doğruluğu hemen anlaşılır.

Alıştırmalar

11.10. $f(x) = x \ln x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^{>0}$ üzerine dışbükey olduğunu kanıtlayın.

11.11. Bir I aralığında tanımlanmış ve pozitif değerler alan bir f fonksiyonu alalım. Eğer

$$g(x) = \log f(x)$$

fomülüyle tanımlanmış fonksiyon dışbükeyse, f'ye ***logaritmik dışbükey*** denir. Logaritmik dışbükey fonksiyonların dışbükey olduklarını kanıtlayın.

$$f(x) = x^2$$

formülüyle tanımlanmış fonksiyonun dışbükey olmasına karşın logaritmik dışbükey olmadığını gösterin.

12. Eşitsizlikler Geçidi

Altbölüm 6.4'te analizde çok önemli olan Bernoulli eşitsizliğini kanıtlamıştık. Bu bölümde analizde öne çıkan birkaç klasik eşitsizlik daha kanıtlayacağız.

12.1 Jensen Eşitsizliği ve Sonuçları

Teorem 12.1 (Jensen Eşitsizliği)**.** *I bir aralık ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dışbükey bir fonksiyon olsun, o zaman her $x_1, \ldots, x_n \in I$ ve her $t_1, \ldots, t_n > 0$ sayıları için*

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\sum_{i=1}^n t_i} \in I$$

olur ve

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\sum_{i=1}^n t_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n t_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer f kesin dışbükeyse eşitlik ancak ve ancak $x_1 = \ldots = x_n$ ise geçerlidir. Eğer f içbükeyse eşitsizlik ters çevrilir.

Not 1. Eşitsizlik sık sık $t_1 + \cdots + t_n = 1$ durumunda ifade edilir. Nitekim eşitsizlikte t_i yerine,

$$\frac{t_i}{\sum_{i=1}^n t_i}$$

alırsak o zaman daha basit görünümlü olan

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

formülünü elde ederiz.

Not 2. Formüldeki t_i sayılarına, x_i ve $f(x_i)$ sayılarının ***ağırlıkları*** diyebiliriz; o zaman toplamlar ***ağırlıklı ortalamalar*** olarak algılanabilir, "ortalama alıyoruz ama bazı sayılara diğerlerinden daha fazla ya da daha az önem veriyoruz" anlamında. Teoreme göre, eğer f dışbükeyse, sayıların ***ağırlıklı ortalamalarının*** f-imgesi, f-imgelerin ağırlıklı ortalamasından küçükeşittir.

Teorem 12.1**'in Kanıtı:** Kanıtı f'nin dışbükey olduğu durumda yapalım, çünkü diğer durumda kanıt çok benzer. Not 1'deki değişikliği yaparak t'lerin toplamının 1 olduğunu varsayabiliriz.

$$\min\{x_i\} \le t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \le \max\{x_i\}$$

olduğundan $t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \in I$ olur. Eşitsizliği n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ durumunda her iki taraf birbirine eşittir. $n = 2$ durumu ise aynen dışbükeyliğin tanımından çıkar. Şimdi $n \ge 3$ olsun ve eşitsizliğin $n-1$ için doğru olduğunu varsayalım. $t_1 + \cdots + t_{n-1} = t$ ve $t_n = s$ olsun. O zaman $t + s = 1$ olur elbette. Hesaplara başlayalım.

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} t_ix_i\right) &= f\left(t\sum_{i=1}^{n-1}\frac{t_i}{t}\,x_i + sx_n\right) \le tf\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{t_i}{t}\,x_i\right) + sf(x_n) \\ &\le t\sum_{i=1}^{n-1}\frac{t_i}{t}\,f(x_i) + sf(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} t_if(x_i) + sf(x_n) = \sum_{i=1}^{n} t_if(x_i). \end{aligned}$$

Eşitsizliğin kanıtı bitmiştir. Şimdi fonksiyonun kesin dışbükey olduğunu varsayalım. Yukarıdaki hesaplardaki ilk eşitsizlik ancak ve ancak

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{t_i}{t}\,x_i = x_n$$

ise geçerlidir. İkinci eşitsizlik ise (tümevarımla) ancak ve ancak

$$x_1 = \ldots = x_{n-1}$$

ise geçerlidir. Bu ikisi eşitliğin ancak ve ancak

$$x_1 = \ldots = x_{n-1} = x_n$$

ise geçerli olduğunu gösterir. □

Alıştırmalar

12.1. Jensen eşitsizliğini $n \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonlara uygulayın.

12.2. Jensen eşitsizliğini $r \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^r$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonlara uygulayın (bkz. Teorem 10.8).

12.3. Jensen eşitsizliğini $a > 0$ için $f(x) = a^x$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonlara uygulayın (bkz. Teorem 11.5).

12.4. Jensen eşitsizliğini $f(x) = \ln x$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyona uygulayın.

Eğer her $i = 1, \ldots, n$ için $t_i = 1/n$ alırsak, f içbükeyse, teoremden,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

formülünü elde ederiz. Şimdi $f(x) = \ln x$ olarak alalım, ve x_i sayılarını (zorunlu olarak) pozitif alalım. Logaritmanın içbükey olduğunu biliyoruz (Teorem 11.3). Dolayısıyla,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\, x_i = \frac{1}{n}\ln\left(x_1\cdots x_n\right) = \ln\left[(x_1\cdots x_n)^{1/n}\right]$$

olur. Logaritma (ya da exp) artan olduğundan, bundan,

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

elde ederiz, ki bu da meşhur ***aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğidir***. (Birinci ciltte bunun daha temel bilgilere dayanan kanıtlarını vermiştik [N4, Teorem 3.26].)

Sonuç 12.2 (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği)**.** *Eğer $x_1, \ldots, x_n$ sayıları pozitifse*

$$(\mathrm{AG}_n) \qquad \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

olur ve eşitlik ancak ve ancak $x_1 = \ldots = x_n$ ise geçerlidir. □

(AG_n) eşitsizliklerini kolaylıkla genelleştirebiliriz[1]:

Sonuç 12.3 (Genelleştirilmiş Aritmetik-Geometrik Eşitsizliği)**.** *$a_1, \ldots, a_n$ ve $r_1, \ldots, r_n$ pozitif gerçel sayılar olsun. Eğer $r_1+\cdots+r_n = 1$ ise*

$$a_1^{r_1}\cdots a_n^{r_n} \leq r_1a_1+\cdots+r_na_n$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise geçerlidir.

Kanıt: $b_i = \ln a_i$ tanımını yapalım. exp kesin dışbükey olduğundan, Jensen eşitsizliğine göre

$$\exp(r_1b_1+\cdots+r_nb_n) \leq r_1\exp b_1+\cdots+r_n\exp b_n$$

olur. Sağ taraf için $\exp b_i = a_i$ eşitliğini, sol taraf için

$$\exp(r_ib_i) = e^{r_ib_i} = \left(e^{b_i}\right)^{r_i} = a_i^{r_i}$$

eşitliğini kullanırsak istediğimizi elde ederiz. Son önerme Teorem 12.1'in ikinci cümlesinden çıkıyor. □

Bernoulli eşitsizliklerini (Teorem 6.7) bir defa daha kanıtlayabiliriz[2]:

---

[1] Bu ve bundan sonraki sonuçlar için Yusuf Ünlü'ye çok teşekkür ederim.

[2] Vereceğimiz kanıt aslında Teorem 6.7'nin ilk kanıtıyla aynıdır ama bu biçimiyle kanıt daha temiz.

Sonuç 12.4 (Bernoulli)**.** *Eğer* $x \geq -1$ *ve* $\alpha \in (0,1)$ *ise*

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x. \tag{1}$$

Eğer $x > -1$ *ve* $\alpha \notin [0,1]$ *ise*

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x. \tag{2}$$

Ayrıca (1) *ve* (2)*'de eşitlik sadece* $x = 0$ *için mümkündür.*

Kanıt: $-1 \leq x \neq 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ olsun. Genelleştirilmiş aritmetik-geometrik eşitsizliğinde (Sonuç 12.3) $n = 2$, $a_1 = 1+x$, $a_2 = 1$, $r_1 = \alpha$ ve $r_2 = 1-\alpha$ alırsak,

$$(1+x)^\alpha = (1+x)^\alpha 1^{1-\alpha} < \alpha(1+x) + (1-\alpha) = 1+\alpha x$$

buluruz.

Eğer $\alpha \notin [0,1]$ ise kanıt aynen Teorem 6.7'nin kanıtı gibidir. □

Alıştırmalar

12.5. Jensen eşitsizliğinden, her $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ gerçel sayısı ve her $k \geq 1$ doğal sayısı için

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k \leq n^{k-1}(a_1^k + \cdots a_n^k)$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

12.2 Young Eşitsizliği

Kanıtlayacağımız bir sonraki eşitsizlik ***Young eşitsizliği*** diye bilinir.

Teorem 12.5 (Young Eşitsizliği)**.** *a ve* $b \geq 0$ *olsun.* p *ve* q *sayıları pozitif olsun ve*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitliğini sağlasın. O zaman

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, eşitlik sadece $a^p = b^q$ *iken geçerlidir.*

Kanıt: Kanıtın püf noktası,

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q}$$

eşitliğidir.

ln fonksiyonunun içbükeyliğinden, eğer t ve s sayıları $t+s=1$ eşitliğini sağlıyorsa ve α, $\beta>0$ ise

$$\ln(t\alpha+s\beta)\geq t\ln\alpha+s\ln\beta$$

elde ederiz. Ayrıca, ln keskin içbükey olduğundan, eşitlik ancak ve ancak $\alpha=\beta$ ise geçerlidir. α ve β yerine sırasıyla a^p ve b^q koyarsak,

$$\ln\left(ta^p+sb^q\right)\geq t\ln a^p+s\ln b^q$$

elde ederiz, ve eşitlik ancak ve ancak $a^p=b^q$ ise geçerlidir. Şimdi de $t=1/p$ ve $s=1/q$ alalım. İlk bulduğumuz eşitlikten devam edelim:

$$\ln ab=\ln a+\ln b=\frac{\ln a^p}{p}+\frac{\ln b^q}{q}\leq\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$$

elde ederiz. ln fonksiyonu artan olduğundan istediğimiz eşitsizliği elde ederiz. Ayrıca ln keskin artan olduğundan, eşitlik ancak $a^p=b^q$ ise geçerlidir. □

İkinci Kanıt[3]**:** $x^p\neq y^q$ olsun. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin genel halinden dolayı (Sonuç 12.3)

$$xy=(x^p)^{1/p}\,(y^q)^{1/q}<\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

olur. $x^p=y^q$ ise

$$xy=y^{q/p}y=y^{q(1/p+1/q)}=y^q=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)y^q=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

olur. □

Alıştırmalar

12.6. Her şey Teorem 12.5'teki gibi olsun, bir de ayrıca $\epsilon>0$ olsun. O zaman,

$$ab\leq\frac{\epsilon a^p}{p}+\frac{b^q}{\epsilon^{q/p}q}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

12.7. Teorem 12.5'i a, b ve p, q sayıları için değil de, a_1, a_2, …, $a_n\geq 0$ sayıları ve

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$$

eşitliğini sağlayan p_1, p_2, …, $p_n>0$ sayıları için kanıtlayın.

---

[3]Yusuf Ünlü'ye teşekkürler.

12.3 Hölder ve Cauchy-Schwarz Eşitsizlikleri

Teorem 12.6 (Hölder Eşitsizliği)**.** *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pozitif gerçel sayılar olsun. p ve q sayıları pozitif olsun ve*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q}$$

olur.

Kanıt: x_i ve y_i yerine sırasıyla,

$$\frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}} \text{ ve } \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}}$$

yazarak (burası önemli!)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1$$

varsayımını yapabiliriz. Bu aşamada, artık,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Young eşitsizliğine göre, her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$x_i y_i \leq \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}$$

olur. Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^q}{q} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

buluruz, ki bu da istediğimiz eşitsizliktir. □

Meşhur ***Cauchy-Schwarz eşitsizliği***, Hölder eşitsizliğinin $p = q = 2$ durumudur:

Sonuç 12.7 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)**.** *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gerçel sayılarsa*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

olur. □

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin başka basit ve güzel kanıtları vardır, vermeden geçmek olmaz. z bir bilinmeyen olsun ve ikinci dereceden olan şu polinoma bakalım:

$$(x_1 z + y_1)^2 + \cdots + (x_n z + y_n)^2.$$

Bu polinomun en fazla bir kökü olabileceğinden (ancak $y_1/x_1 = \ldots = y_n/x_n$ ise bir kök olabilir, o kök de $-y_1/x_1$'dir), polinomun diskriminantı 0'dan küçükeşit olmalıdır. Bu polinom,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) z^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) z + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

biçiminde yazılabilir. Bu polinomun diskriminantının dörtte biri olan

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

sayısıdır ve 0'dan küçükeşit olmalıdır.

Bu kanıttan ayrıca eşitliğin ancak ve ancak a_i ve b_i sayılarının birbirine oranları aynıysa gerçekleşebileceği çıkar. □

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir başka kanıtı:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i x_j y_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i y_j)(x_j y_i)$$

eşitliğinin en sağdaki terimlerine, kanıtlaması çok kolay olan $2\alpha\beta \le \alpha^2 + \beta^2$ eşitsizliğini uygulayalım:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2)$$

elde ederiz. Ama bu son eşitsizliğin sağındaki ifade

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)$$

ifadesine eşit. Buradan istediğimiz çıkar. □

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin dördüncü kanıtı:

$$\sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 \ge 0$$

eşitsizliğinden yola çıkıp soldaki ifadeyi açın. Eşitsizliği kolayca elde edeceksiniz. Bu kanıtta, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitliğin ancak ve ancak her i ve j için $x_i y_j = x_j y_i$ eşitliği doğruysa geçerli olduğu hemen görünüyor. □

12.4 Minkowski Eşitsizliği

Bu altbölümde fonksiyonel analizin temellerinde önemli bir yer tutan (ve sonlu toplamlardan integrallere genelleştirilebilen) ünlü Minkowski eşitsizliğini kanıtlayacağız.

Teorem 12.8 (Minkowski Eşitsizliği)**.** *$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0$ ve $p \geq 1$ olsun. O zaman,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}$$

olur.

Kanıt: q sayısını $1/q + 1/p = 1$ olacak şekilde tanımlayalım ve biraz önceki Hölder eşitsizliğini (üçüncü satırdan dördüncü satıra geçerken, tam iki kez) kullanalım:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1}(x_i + y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i(x_i + y_i)^{p-1} + y_i(x_i + y_i)^{p-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1} \\
&\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

En aşağıda ve en sağdaki terimi en yukarıya geçirirsek, istediğimizi elde ederiz. □

Eğer $p = 2$ alırsak, Minkowski eşitsizliği n boyutlu $\mathbb{R}^n$ metrik uzayında ***üçgen eşitsizliği*** olarak bilinir: Bir üçgenin iki kenarının uzunluklarının toplamı üçüncüsünün uzunluğundan küçük olamaz.

Minkowski eşitsizliği 0 ile 1 arasındaki hiçbir p sayısı için geçerli değildir. (Okura alıştırma).

Sonuç 12.9. *$0 \leq p < 1$ ve $x, y \geq 0$ olsun. O zaman $(x + y)^p \leq x^p + y^p$ olur.*

Kanıt: $z = y/x$ alarak $(1+z)^p \le 1 + z^p$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. $z = t^{1/p}$ ve $r = 1/p > 1$ alarak, $(1+t^r)^{1/r} \le 1 + t$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Teorem 12.8'de $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = t$ alırsak istediğimizi elde ederiz. □

12.5 Mahler Eşitsizliği

Teorem 12.10 (Mahler Eşitsizliği). *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pozitif gerçel sayılar olsun. O zaman,*

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{1/n} \ge \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n} + \prod_{k=1}^{n} y_k^{1/n}$$

olur.

Kanıt: Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden dolayı (Teorem 12.2)

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i + y_i}$$

ve

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i + y_i}$$

olur. Bu ikisini toplarsak,

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} + \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{x_i + y_i}\right)^{1/n} \le 1$$

elde ederiz. □

Teorem 12.11. *Eğer $0 < x < 1$ ve $0 < r \le s$ ise, $(1 - x^r)^{1/r} \le (1 - x^s)^{1/s}$ olur.*

Kanıt: $x \mapsto x^{1/r}$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında bir eşlemedir; dolayısıyla eşitsizliği x yerine $x^{1/r}$ için kanıtlamak yeterlidir. O zaman eşitsizlik

$$(1 - x)^{1/r} \le (1 - x^{s/r})^{1/s}$$

eşitsizliğine dönüşür. $u = s/r \ge 1$ dersek,

$$(1 - x)^u \le 1 - x^u$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Üs alma fonksiyonunun sürekliliğinden ve kesirli sayıların yoğunluğundan dolayı, bu son eşitsizliği kesirli u sayıları için kanıtlamak yeterli. $q \ge p > 0$ doğal sayılar için $u = q/p$ olsun.

$$(1 - x)^{q/p} \le 1 - x^{q/p}$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. x yerine x^p koyarsak,

$$(1 - x^p)^q \leq (1 - x^q)^p$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Bunu, p'yi sabitleyip q üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $q = p$ için sorun yok. Tümevarım adımına başlamadan önce,

$$1 - x^p < 1 < \left(1 + x^q \frac{1-x}{1-x^q}\right)^p$$

eşitsizliğinden, paydaları eşitleyerek

$$(1 - x^q)^p (1 - x^p) \leq (1 - x^{q+1})^p$$

eşitsizliğini elde edelim. Şimdi hem bunu hem de tümevarım varsayımını kullanarak,

$$(1 - x^p)^{q+1} = (1 - x^p)^q (1 - x^p) \leq (1 - x^q)^p (1 - x^p) \leq (1 - x^{q+1})^p$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

12.6 α'ıncı Mertebeden Ortalama

Bir $\alpha \neq 0$ gerçel sayısı için,

$$c_\alpha = c_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

olsun. Burada a_i sayılarının negatif olmadıklarını varsayıyoruz. Bu sayıya $a_1, \ldots, a_n$ sayılarının ***α'ıncı mertebeden ortalaması*** adı verilir[4].

Dikkat ederseniz,

$$c_1 = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

sayısı aritmetik ortalamaya eşittir.

$$c_2 = \left(\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}\right)^{1/2}$$

sayısına ise ***kuadratik ortalama*** denir.

$$c_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

sayısı ***harmonik ortalama*** olarak bilinir.

---

[4] Bu altbölüm için büyük ölçüde [Ko]'dan yararlanılmıştır. Ama [Ko]'nun da [SCY]'den yararlandığı anlaşılıyor.

Geometrik ortalamaya g adının verildiğini anımsatırız:

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Bundan böyle

$$c_0 = g$$

tanımını yapacağız. Böylece her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $c_\alpha = c_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ sayısı tanımlanmış oldu. c_0 tanımının rastgele bir tanım olmadığı, bir nedeni olduğu birazdan kanıtlayacağımız Sav'dan anlaşılacak.

Bu altbölümde aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız:

Teorem 12.12. *$a_1, \ldots, a_n > 0$ olsun. Eğer $\alpha \leq \beta$ ise $c_\alpha \leq c_\beta$ olur. Ayrıca eğer $\alpha < 0 < \beta$ ise $c_\alpha \leq g \leq c_\beta$ olur. Ve her durumda eşitlik ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise mümkündür.*

$g \leq c_1$ aynen (AG_n) eşitsizliği demek olduğundan bu teorem Sonuç 12.2'de kanıtlanan (AG_n) eşitsizliğini genelleştirir.

Teoremin kanıtı biraz uzun sürecek. Önce şu durumu halledelim:

Sav. *Her $\alpha < 0 < \beta$ için $c_\alpha \leq c_0 < c_\beta$ olur ve eşitlik ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise mümkündür.*

Kanıt: (AG_n) eşitsizliğinden dolayı,

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha \cdots a_n^\alpha} \leq \frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}$$

eşitsizliğini ve eşitliğin sadece $a_1 = \ldots = a_n$ için geçerli olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın da $1/\alpha$'ıncı kuvvetini alırsak, ($1/\alpha < 0$ olduğundan, bkz. sayfa 204'teki şekiller),

$$g = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \left(\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = c_\alpha$$

elde ederiz. Ayrıca eşitliğin ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise geçerli olduğu belli. Bu, göstermek istediğimizin yarısıdır. Diğer yarısı da aynı şekilde gösterilir. Sav kanıtlanmıştır. □

Teorem 12.12'nin Kanıtı: $a_i > 0$ olduğundan, $c_\alpha > 0$ olur.

$$c_\beta = \left(\frac{a_1^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta}$$

olduğundan

$$\frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{\left(\frac{a_1}{c_\alpha}\right)^\beta + \cdots + \left(\frac{a_n}{c_\alpha}\right)^\beta}{n}\right)^{1/\beta}$$

olur. Eğer

$$d_1 = \left(\frac{a_1}{c_\alpha}\right)^\alpha, \ldots, d_n = \left(\frac{a_n}{c_\alpha}\right)^\alpha$$

tanımını yaparsak, bir önceki eşitlik,

$$(1) \qquad \frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{d_1^{\beta/\alpha} + \cdots + d_n^{\beta/\alpha}}{n}\right)^{1/\beta}$$

eşitliğine dönüşür. Öte yandan,

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{d_1+\cdots+d_n}{n}\right)^{1/\alpha} &= \left(\frac{\left(\frac{a_1}{c_\alpha}\right)^\alpha + \cdots + \left(\frac{a_n}{c_\alpha}\right)^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\\ &= \tfrac{1}{c_\alpha}\left(\tfrac{a_1^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} = \tfrac{1}{c_\alpha} c_\alpha = 1.\end{aligned}$$

Demek ki,

$$d_1 + \cdots + d_n = n.$$

Şimdi x_i sayılarını

$$d_i = 1 + x_i$$

eşitliği doğru olacak biçimde tanımlayalım. Elbette

$$x_1 + \cdots + x_n = 0$$

olur.

Eğer $0 < \alpha < \beta$ ise, $\beta/\alpha > 1$ olduğundan, Teorem 6.7'ye göre,

$$(*) \qquad \begin{cases} d_1^{\beta/\alpha} = & (1+x_1)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_1 \\ d_2^{\beta/\alpha} = & (1+x_2)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2 \\ & \cdots \\ d_n^{\beta/\alpha} = & (1+x_n)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_n \end{cases}$$

olur. Bu eşitsizlikleri toplarsak,

$$d_1^{\beta/\alpha} + \cdots + d_n^{\beta/\alpha} \geq n + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + \cdots + x_n) = n$$

elde ederiz. Bu ve (1) eşitliğinden,

$$\frac{c_\beta}{c_\alpha} = \left(\frac{d_1^{\beta/\alpha} + \cdots + d_n^{\beta/\alpha}}{n}\right)^{1/\beta} \geq 1$$

yani

$$c_\beta \geq c_\alpha$$

bulunur. Kanıtta eşitsizliği bir kez (aslında n kez!), o da

$$(1+x_i)^{\beta/\alpha} \geq 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_i$$

eşitsizliklerinde kullandık. Burada eşitlik ancak ve ancak $x_i = 0$, yani $d_i = 1$, yani $a_i = c_\alpha$ ise geçerlidir. Demek ki eşitliğin olması için tüm a_i sayılarının c_α'ya eşit olması gerekir.

Eğer $\alpha < \beta < 0$ ise $0 < \beta/\alpha < 1$ olduğundan, Teorem 6.7'ye göre, (*)'daki eşitsizlikler ters döner ve kanıtın devamı yukarıdaki gibi getirilir.

α ve β'nın farklı işaretlerde olduğu durumu Sav'da ele almıştık. Teorem 12.12 böylece tamamıyla kanıtlanmıştır □

Altbölümün bundan sonrasında bu teoremin sonuçlarını ve uygulamalarını görelim.

Örnekler

12.8. *Eğer x, y, $z \geq 0$ sayıları $x+y+z=1$ eşitliğini sağlıyorlarsa,*

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{9}{4}$$

eşitsizliğini gösterin. Eşitlik ne zaman mümkündür?
[`http://matkafasi.com/672/disbukeylik-ve-esitsizlikler`]
Kanıt: $c_{-1} \leq c_1$ eşitsizliğini kullanalım:

$$\frac{3}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}} \leq \frac{(1+x)+(1+y)+(1+z)}{3} = \frac{4}{3}.$$

Eşitlik $x = y = z = 1/3$ durumunda mümkündür. □

12.9. *Pozitif x, y, z, t sayıları için $x+y+z+t = 12$ ise $x^2+y^2+z^2+t^2 \geq 36$ olduğunu gösterin.*
Kanıt: $c_1 \leq c_2$ olduğundan,

$$3 = \frac{x+y+z+t}{4} \leq \left(\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}\right)^{1/2},$$

yani basit bir hesapla $x^2+y^2+z^2+t^2 \geq 36$ olduğu anlaşılır. Eşitlik ancak $x = y = z = t = 3$ ise mümkündür. □

12.10. *Pozitif x, y, z, t sayıları için $x^2+y^2+z^2 = 7$ ise $x^3+y^3+z^3$ en az kaç olabilir?*
Çözüm: $c_2 \leq c_3$ olduğundan,

$$\sqrt{\frac{7}{3}} = \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{1/3},$$

yani basit bir hesapla

$$x^3+y^3+z^3 \geq 3\left(\frac{7}{3}\right)^{3/2}$$

olduğu anlaşılır. Eşitlik ancak $x = y = z = \sqrt{7/3}$ ise mümkündür. □

12.11. *Pozitif* x, y, z, t *sayıları* $x^3+y^3+z^3=24$ *eşitliğini sağlıyorsa,* $x+y+z\leq 6$ *eşitsizliğini sağladıklarını gösterin.*

Kanıt: $c_3 \geq c_1$ olduğundan,

$$2=\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\right)^{1/3}\geq \frac{x+y+z}{3}$$

olur ve bu da problemi çözer. □

12.12. $a_1,\ldots,a_n$ *pozitif olsunlar. Şunları kanıtlayın:*
Eğer $\alpha\geq 1$ *ise* $(a_1+\cdots+a_n)^\alpha \leq n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)$ *olur.*
Eğer $0<\alpha\leq 1$ *ise* $(a_1+\cdots+a_n)^\alpha \geq n^{\alpha-1}(a_1^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)$ *olur.*

Kanıt: $\alpha>1$ durumunu ele alalım. $c_\alpha\geq c_1$ olduğundan,

$$\left(\frac{a_1^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}\geq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

olur. Böylece birinci kısım kanıtlanır. İkinci kısım da benzerdir. □

Kısım IV

Weierstrass Yoğunluk Teoremi

13. Genelleştirilmiş Binom Açılımı

Liseden beri bildiğimiz binom açılımını anımsayalım: Eğer x bir gerçel sayı ve n bir doğal sayıysa,

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

olur. x^i'lerin önündeki

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

katsayılarına ***binom katsayıları*** denir. Binom katsayılarını sadeleştirerek yazalım:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}.$$

Eski tanımı unutup, binom katsayılarını bundan böyle,

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

olarak tanımlayalım. Arada bir fark yok gibi görünse de bu yeni tanımın öncekine göre iki avantajı var:

1. Birinci tanım $i > n$ iken anlamsızdı, oysa şimdi $i > n$ iken yeni tanım 0 sonucunu veriyor, çünkü çarpımın ortalarında bir yerde $(n-n)$ ifadesi beliriyor[1]. Dolayısıyla bu yeni tanımla, binom açılımını

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i$$

olarak yazabiliriz. Böylece ifade (basitleşmez belki ama) bir seriye dönüşür.

[1] Bilindiği üzere $(n-a)(n-b)\cdots(n-z)$ ifadesinin açılımı 0'dır!

2. Binom katsayılarının yeni tanımında n bir doğal sayı olmak zorunda değildir, herhangi bir α gerçel sayısı da olabilir:

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!}.$$

Ayrıca eğer α yerine X yazarsak, katsayıları kesirli sayılar olan i'inci dereceden bir polinom elde ederiz:

$$\binom{X}{i} = \frac{X(X-1)\cdots(X-(i-1))}{i!} \in \mathbb{Q}[X].$$

Eğer $i = 0$ ise tanımı 1 olarak kabul ediyoruz:

$$\binom{X}{0} = 1.$$

Bundan böyle her $\alpha \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı ve her $i \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için,

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$$

tanımını yapalım. $i = 0$ için tanımı gene 1'e eşit kabul ediyoruz. Aynen bildiğimiz binomiyal katsayılarında olduğu gibi,

$$(i+1)\binom{\alpha}{i+1} = (\alpha-i)\binom{\alpha}{i}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 13.1. *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in (-1,1)$ için*

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i = (1+x)^\alpha$$

olur. Eğer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ise soldaki serinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Dolayısıyla her $\alpha \in \mathbb{R}$ için seri mutlak yakınsaktır ve her $0 \le r < 1$ için $[-r, r]$ üzerine düzgün yakınsaktır[2].

Bir sonraki teoremde soldaki serinin $x = \pm 1$'de nasıl davrandığını göreceğiz.

Teoremin kanıtı biraz zaman alacak ve pek kolay olmayacak. Türev bilseydik, kanıtı çok daha kolay bir biçimde yapabilirdik. Bir sonraki ciltte aynı teoremin bir başka kanıtını veririz. Aynı sonuç bu kitapta Altaltbölüm 22.9.2'de de kanıtlanmıştır.

[2] İlk versiyondaki kanıtı toparlayan ve kanıtı daha okunur hale getiren Yusuf Ünlü'ye teşekkür ederim.

Adımlarımızı harflerle numaralandıracağız.

a. (*) *eşitliği her* $\alpha \in \mathbb{N}$ *için doğrudur.*
Kanıt: Bu durumda (*) eşitliği bildiğimiz binom açılımıdır. Hatta bu durumda, eşitlik sadece $(-1, 1)$ aralığındaki sayılar için değil, tüm x gerçel sayıları için geçerlidir. □

b. (*) *eşitliği* $\alpha = -1$ *için doğrudur.*
Kanıt: Bunun doğruluğunu kontrol etmek için önce,

$$\binom{-1}{i} = \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-i+1)}{i!} = (-1)^i$$

hesabını yapalım. Şimdi seriyi hesaplarsak,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = (1+x)^{-1}$$

buluruz. Demek ki (*) eşitliği $\alpha = -1$ için de doğruymuş. □

Öte yandan, eğer α bir gerçel sayıysa, (*) eşitliğinin sol tarafındaki serinin yakınsak olduğunu bilmediğimiz gibi, yakınsaksa da pozitif bir sayıya yakınsadığını bilmiyoruz. Şimdilik... Birazdan bunu kanıtlayacağız.

c. *Her* $x \in (-1, 1)$ *için* (*) *eşitsizliğinin sol tarafındaki seri mutlak yakınsar ve* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *ise yakınsaklık yarıçapı* 1*'dir.*
Kanıt: Bunu kanıtlamak için d'Alembert yakınsaklık kıstasını kullanacağız [N4, Teorem 18.1]. Önce, $\alpha \notin \mathbb{N}$ olduğundan katsayıların $\neq 0$ olduğunun farkına varalım ve sonra şu hesabı yapalım:

$$\frac{\binom{\alpha}{i+1} x^{i+1}}{\binom{\alpha}{i} x^i} = \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i)}{(i+1)!} x^{i+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!} x^i} = \frac{\alpha - i}{i+1} x.$$

Demek ki i sonsuza gittiğinde, sol taraftaki oranın limiti $-x$ olur. Mutlak değerleri aldığımızda, limit $|x|$ çıkar, yani 1'den küçüktür. d'Alembert yakınsaklık kıstasına göre (*) eşitliğinin sol tarafındaki seri mutlak yakınsar ve yakınsaklık yarıçapı 1'dir. □

Bundan böyle bu seriye $f_\alpha(x)$ adını verelim:

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i.$$

d. *Her* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *ve* $x \in (-1, 1)$ *için*

$$(1) \qquad f_\alpha(x) f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x)$$

eşitliği, yani

$$\left(\sum \binom{\alpha}{i} x^i\right)\left(\sum \binom{\beta}{i} x^i\right) = \sum \binom{\alpha+\beta}{i} x^i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Bunun kanıtı biraz uzun sürecek. Cauchy çarpım formülü'ne göre (bkz. sayfa 181)

$$\sum_{i+j=n} \binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. β yerine Y yazıp kanıtlamak istediğimiz eşitliği Y cinsinden iki polinomun eşitliği olarak görelim:

(2)
$$\sum_{i+j=n} \binom{\alpha}{i}\binom{Y}{j} = \binom{\alpha+Y}{n}.$$

Her iki taraf da n'inci dereceden polinomlar. Ayrıca başkatsayıları eşit: Her ikisinin de başkatsayısı $1/n!$. Demek ki bu iki polinomun n değişik sayıda aynı değerleri aldıklarını kanıtlamak yeterli. Her iki polinomun da $0, 1, \ldots, n-1$ sayılarında aynı değerleri aldığını kanıtlayacağız ve böylece istediğimize ulaşacağız:

Sav. *Her* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *için,*

$$\sum_{i+j=n} \binom{\alpha}{i}\binom{k}{j} = \binom{\alpha+k}{n}.$$

Sav'ın Kanıtı: Eğer $k < j$ ise, soldaki ifadedeki binom katsayılarının 0 olduklarını biliyoruz. Demek ki, kanıtlamak istediğimiz eşitlik,

$$\sum_{i+j=n,\, j\le k} \binom{\alpha}{i}\binom{k}{j} = \binom{\alpha+k}{n}$$

eşitliğine bürünüyor. α yerine X yazarak, bu son eşitsizliği de bir polinom olarak görelim:

(3)
$$\sum_{i+j=n,\, j\le k} \binom{X}{i}\binom{k}{j} = \binom{X+k}{n}.$$

Bu son eşitliği kanıtlayacağız. Her iki taraf da katsayıları kesirli sayılar olan polinomlar. Toplamdaki i, en fazla n'ye eşit olabiliyor ve bu durumda $j = 0$. Demek ki sol taraf n'inci dereceden bir polinom. Sağ taraftaki de n'inci dereceden elbette. Ayrıca her iki polinomun başkatsayısı $1/n!$. Demek ki eğer bu iki polinom n değişik sayıda aynı değerleri alıyorlarsa eşit olacaklar. Nitekim bu iki polinomun 0, 1, ..., n sayılarında eşit değerler aldıklarını kanıtlayacağız. Demek ki her $\ell = 0, 1, \ldots, n$ doğal sayısı için,

$$\sum_{i+j=n, j\le k} \binom{\ell}{i}\binom{k}{j} = \binom{\ell+k}{n}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Gene ℓ'den büyük i'ler gereksiz. Demek ki her $\ell =$ 0, 1, ..., n doğal sayısı için,

$$\sum_{i+j=n,\, j\le k,\, i\le \ell} \binom{\ell}{i}\binom{k}{j} = \binom{\ell+k}{n}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Basit bir kombinatorik problemi bu. ℓ tane kadın ve k tane erkekten oluşan bir toplulukta n kişiyi kaç değişik biçimde seçebiliriz? Elbette sağdaki ifade kadar. Öte yandan seçeceğimiz n kişi arasında 0 kadın, 1 kadın, 2 kadın, ..., ℓ kadın olacağını ayrı ayrı düşünürsek, soldaki ifadeyi buluruz. Demek ki iki ifade birbirine eşittir. Böylece hem sav, hem (3), hem (2), hem de (d) maddesindeki savımız kanıtlanmış oldu.

Artık, her α, β gerçel sayısı için (1) eşitliğini biliyoruz. Dolayısıyla her n doğal sayısı için ve her α için,

$$f_\alpha(x)^n = f_{n\alpha}(x) \tag{4}$$

eşitliğini de biliyoruz.

Şimdi

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \text{ her } x \in (-1, 1) \text{ için } (1+x)^\alpha = f_\alpha(x)\}$$

tanımını yapalım. Amacımız $A = \mathbb{R}$ eşitliğini kanıtlamak. □

e. *$\mathbb{Z} \subseteq A$ içindeliği geçerlidir.*
Kanıt: $\mathbb{N} \subseteq A$ içindeliğini biliyoruz. Ayrıca -1'in de A'da olduğunu kanıtladık. Ve (1) eşitliğinden dolayı A toplama altında kapalıdır: Eğer α, $\beta \in A$ ise,

$$f_{\alpha+\beta}(x) = f_\alpha(x)f_\beta(x) = (1+x)^\alpha(1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}.$$

Dolayısıyla $\alpha \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise $n\alpha \in A$ olur. Bundan da $\mathbb{Z} = (-1)\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \subseteq A$ içindeliği çıkar. □

f. *$\mathbb{Q}_1$, paydası tek olan kesirli sayılar kümesi ise $\mathbb{Q}_1 \subseteq A$ olur.*
Kanıt: $n \in \mathbb{Z}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için, (4)'ten dolayı,

$$f_{n/m}(x)^m = f_n(x) = (1+x)^n$$

olur. Demek ki eğer m tek bir sayıysa

$$f_{n/m}(x) = (1+x)^{n/m}$$

ve $n/m \in A$ olur. (Eğer m çift sayıysa aynı eşitliği elde etmek için $f_{n/m}(x) \geq 0$ olgusu gerekli. Eğer $x \geq 0$ ise bunu kanıtlamak çok zor değil, ancak eğer $x < 0$ ise bunu bu aşamada nasıl kanıtlayacağımızı bilmiyoruz.) □

$\mathbb{R} = A$ eşitliği biraz daha zamanımızı alacak. Bunun için önce şu sonucu kanıtlayalım:

g. *Her gerçel sayı bir $\mathbb{Q}_1$-dizisinin limitidir.*
Kanıt: Önce 1/2'den başlayalım.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}$$

serisi elbette mutlak yakınsaktır. Toplama x dersek,

$$3x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = 1 + x$$

ve $x = 1/2$ olur. Demek ki

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i}.$$

Ama

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i} \in \mathbb{Q}_1$$

olduğundan, bundan 1/2'nin bir $\mathbb{Q}_1$-dizisinin limiti olduğu anlaşılır. Cauchy çarpım formülüne göre, tümevarımla, $1/2^n$ de bir $\mathbb{Q}_1$-dizisinin limitidir. Her kesirli sayı $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ ve $b \in 2\mathbb{N}+1$ için

$$\frac{1}{2^n}\frac{a}{b}$$

olarak yazıldığından, bundan her kesirli sayının bir $\mathbb{Q}_1$-dizisinin limiti olduğu anlaşılır. Dolayısıyla her gerçel sayı da bir $\mathbb{Q}_1$-dizisinin limitidir. □

(g)'nin İkinci Kanıtı[3]: $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$q_n = \frac{[(2n+1)x]}{2n+1} \in \mathbb{Q}_1$$

[3]Yusuf Ünlü'den.

olsun. $[(2n+1)x] \leq (2n+1)x < (2n+1)x+1$ olduğundan,

$$q_n \leq x < q_n + \frac{1}{2n+1}$$

olur. Demek ki,

$$0 \leq x - q_n < \frac{1}{2n+1}.$$

Bundan da $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ çıkar.

h. Kanıtın Sonu: Sabit bir $x \in (-1, 1)$ verilsin. $\beta \geq 1$ ve $i \in \mathbb{N}$ için,

$$g_i(\beta) = \binom{\beta}{i} x^i$$

ve

$$a_i = \left|\binom{\beta}{i}\right|$$

tanımlarını yapalım.

$$f_\beta(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(\beta)$$

eşitliği gözden kaçmamalı. Sağ taraftaki serinin β değişkeni için düzgün yakınsadığını kanıtlayacağız (x'i sabitlemiştik) ve böylece sabit bir $x \in (-1, 1)$ için

$$\beta \mapsto f_\beta(x)$$

fonksiyonunun sürekli olduğu çıkacak.

$N = [\beta] + 1$ ve $i \geq N$ olsun. Elbette $\beta \leq N \leq i$ olur. Sayfa 238'deki formülden ((*) formülünün hemen üstündeki formül)

$$ia_i - (i+1)a_{i+1} = ia_i - |\beta - i|a_i = ia_i - (i-\beta)a_i = \beta a_i \geq a_i$$

çıkar. Bulduğumuz bu

$$ia_i - (i+1)a_{i+1} \geq a_i$$

eşitsizliklerini $i = N$'den başlayarak $i = n$'ye kadar taraf tarafa toplarsak, her $n \geq N$ için, sadeleştirmelerden sonra,

$$Na_N - (n+1)a_n \geq a_N + \cdots + a_n,$$

dolayısıyla

$$Na_N \geq a_N + \cdots + a_n$$

buluruz. Şimdi

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

olsun. Biraz önce bulduğumuz eşitsizlikten, her $n \geq N$ için,

$$s_n = s_{N-1} + \sum_{i=N}^{n} a_i \leq s_{N-1} + Na_N$$

buluruz. Demek ki $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ serisi (kısmi toplamlar üstten sınırlı olduğundan) yakınsaktır. Ayrıca

$$|g_i(\beta)| = \left| \binom{\beta}{i} x^i \right| \leq a_i$$

olduğundan, Weierstrass M-testinden dolayı

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i(\beta)$$

serisi $[1, \infty)$ aralığında düzgün yakınsaktır. Yakınsanan fonksiyona $g(\beta)$ diyelim.

$$g(\beta) = f_\beta(x)$$

eşitliğini yukarıda görmüştük. $g_i(\beta)$ fonksiyonları da aynı aralıkta sürekli olduğundan, g fonksiyonu süreklidir[4].

β'ya üstten yakınsayan bir $\mathbb{Q}_1$-dizisi seçelim, diyelim $(q_n)_n$. O zaman (g) maddesinden dolayı

$$(1+x)^\beta = \lim_{n\to\infty} (1+x)^{q_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{q_n}{i} x^i = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(\beta) = f_\beta(x)$$

olur.

Şimdi rastgele bir $\alpha \in \mathbb{R}$ alalım. n tamsayısını $\alpha + n \geq 1$ olacak biçimde seçelim. O zaman,

$$(1+x)^{\alpha+n} = f_{\alpha+n}(x) = f_\alpha(x) f_n(x) = f_\alpha(x)(1+x)^n$$

olur ve bundan da istediğimiz

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

eşitliği çıkar. Teorem 13.1 tamamen kanıtlanmıştır. □

Alıştırma 13.1. Bu alıştırmada $g(x+y) = g(x)g(y)$ eşitliğini sağlayan sürekli ve sabit 0 fonksiyonundan farklı $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $a > 0$ sayısı için $g(x) = a^x$ biçiminde olduğunu göreceğiz. Elbette, böyle bir a varsa, bu a sayısı $g(1)$'e eşit olmalıdır. Bundan böyle g, yukarıdaki fonksiyonel eşitliği sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. (Bu eşitliği sağlayan ancak sürekli olmayan fonksiyonların varlığı Zorn Önsavı'yla biraz cebir kullanılarak kanıtlanabilir.)

[4]Bu şık kanıt için Yusuf Ünlü'ye çok teşekkür ederiz.

a. Eğer bir x için $g(x) = 0$ ise her x için $g(x) = 0$ olduğunu gösterin. Bundan böyle g'nin sabit 0 fonksiyonu olmadığını varsayalım.

b. $g(0) = 1$ ve her x için $g(-x) = g(x)^{-1}$ eşitliklerini kanıtlayın.

c. Fonksiyonun pozitif değerler aldığını kanıtlayın. Bundan böyle $a = g(1) > 0$ olsun.

d. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $g(nx) = g(x)^n$ eşitliğini kanıtlayın.

e. Her $n \in \mathbb{Z}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $g(nx) = g(x)^n$ eşitliğini kanıtlayın.

f. Her $q \in \mathbb{Q}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $g(qx) = g(x)^q$ eşitliğini kanıtlayın.

g. Her $q \in \mathbb{Q}$ için $g(q) = a^q$ eşitliğini kanıtlayın.

h. Her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = a^x$ eşitliğini kanıtlayın.

Şimdi, eğer $\alpha \geq 0$ ise sınır noktalarının bir sorun teşkil etmediğini kanıtlayacağız:

Teorem 13.2. *$\alpha \geq 0$ sabit bir sayı olsun. Eğer $x \in [-1, 1]$ ise*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

olur. Serinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir ve seri $[-1, 1]$ üzerinde düzgün ve mutlak yakınsar.

Kanıt: $\alpha = 0$ ise her iki taraf da 1'e eşit olur. Bundan böyle $\alpha > 0$ varsayımını yapalım. $i \in \mathbb{N}$ için

$$a_i = \left|\binom{\alpha}{i}\right|$$

tanımını yapalım. $N = [\alpha] + 1$ ve $i \geq N$ olsun. Elbette $\alpha \leq N \leq i$ olur. Sayfa 238'deki (*) formülünden

$$ia_i - (i+1)a_{i+1} = ia_i - |\alpha - i|a_i = ia_i - (i-\alpha)a_i = \alpha a_i$$

çıkar. Bulduğumuz bu $ia_i - (i+1)a_{i+1} = \alpha a_i$ eşitliklerini $i = N$'den başlayarak $i = n$'ye kadar taraf tarafa toplarsak, her $n \geq N$ için,

$$Na_N - (n+1)a_{n+1} = \alpha(a_N + \cdots + a_n),$$

dolayısıyla

$$Na_N \geq \alpha(a_N + \cdots + a_n)$$

buluruz. Şimdi

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

olsun. Biraz önce bulduğumuz eşitsizlikten, her $n \geq N$ için,

$$s_n = s_{N-1} + \sum_{i=N}^{n} a_i \leq s_{N-1} + \frac{N}{\alpha} a_N$$

buluruz. Demek ki $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ serisi (kısmi toplamlar üstten sınırlı olduğundan) yakınsaktır. Ayrıca her $x \in [-1,1]$ ve $i \in \mathbb{N}$ için,

$$\left|\binom{\beta}{i} x^i\right| \leq a_i$$

olduğundan, Weierstrass M-testinden (Teorem 9.1) dolayı

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i} x^i$$

serisi $[-1,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır; dolayısıyla bu aralıkta süreklidir. Ayrıca Teorem 13.1'den dolayı $x \in (-1,1)$ için

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

olur. Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki fonksiyonlar $[-1,1]$ aralığında sürekli olduklarından eşitlik $x = \pm 1$ için de geçerlidir[5] (bkz. Örnek 9.3). □

Elimiz değmişken yukarıda ele alınmayan diğer durumları da gözden geçirelim.

Teorem 13.3. $\sum \binom{\alpha}{i} x^i$ *serisi,*
i. *Eğer* $\alpha \in (-\infty, 0)$ *ve* $x = -1$ *ise ıraksar.*
ii. *Eğer* $\alpha \in (-\infty, -1]$ *ve* $x = 1$ *ise ıraksar.*
iii. *Eğer* $\alpha \in (-1, 0)$ *ve* $x = 1$ *ise koşullu yakınsar.*

Kanıt: $\alpha \leq 0$ olsun. $i \geq 2$ için,

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{i} &= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!} \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}(-1)^{i-1}\end{aligned}$$

olduğundan, $x = -1$ ise,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} (-1)^i = 1 - \alpha - \alpha \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}$$

olur. Sağ taraftaki $\sum$ işareti altındaki tüm parantezler pozitif olduklarından, yakınsaklık varsa mutlak yakınsaklık vardır. $\beta = -\alpha > 0$ olsun. Her $j > 0$

[5] Yusuf Ünlü'ye bu şık kanıt için teşekkür ederim.

doğal sayısı için, $j+\beta = j-\alpha > j$ olduğundan, yukarıdaki hesabı devam ettirerek,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}x^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}(-1)^i \\
&= 1-\alpha-\alpha\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}\\
&= 1+\beta+\beta\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)(2+\beta)\cdots((i-1)+\beta)}{i!}\\
&= 1+\beta+\beta\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1+\beta)\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\beta}{i-1}\right)}{i}\\
&\geq 1+\beta+\beta\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty
\end{aligned}$$

buluruz. Demek ki $x=-1$ ve $\alpha<0$ ise seri ıraksar. Birinci önerme kanıtlanmıştır.

Eğer $x=1$ ise, seri

$$\sum\binom{\alpha}{i} = 1+\alpha+\alpha\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)}{i!}(-1)^{i-1}$$

serisine eşittir. Dolayısıyla eğer $\alpha \leq -1$ ise, genel terim 0'a gitmez çünkü mutlak değeri sonsuza gider. Nitekim $\beta=-\alpha$ olsun. k tamsayısı $1\leq k\leq\beta$ olacak biçimde seçilsin ve sabitlensin. i sonsuza gittiğinde,

$$\begin{aligned}
\frac{|(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots((i-1)-\alpha)|}{i!} &= \frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+i-1)}{i!}\\
&\geq \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+i-1)}{i!}\\
&= \frac{(k+i-1)!}{k!i!}\\
&= \frac{(i+k-1)(i+k-2)\cdots(i+1)}{k!}\to\infty
\end{aligned}$$

olur. Demek ki bu durumda seri ıraksar.

Son olarak $x = 1$ ve $\alpha \in (-1, 0)$ olsun. $\beta = -\alpha \in (0, 1)$ tanımını yapalım;

$$\begin{aligned}
\sum \binom{\alpha}{i} x^i &= \sum \binom{\alpha}{i} \\
&= 1 + \alpha + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(i-1))}{i!} \\
&= 1 - \beta + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-\beta)(-\beta-1)(-\beta-2)\cdots(-\beta-(i-1))}{i!} \\
&= 1 - \beta + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+(i-1))}{i!}(-1)^i
\end{aligned}$$

olur. Genel terimin mutlak değerinin, yani,

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+(i-1))}{i!}$$

dizisinin azaldığını görmek kolay. Eğer bu dizinin, i sonsuza gittiğinde 0'a gittiğini gösterirsek, o zaman Leibniz'in dalgalanan seriler üzerine teoremini [N4, Teorem 17.1] kullanarak serinin yakınsak olduğunu kanıtlayabiliriz. Bunu gösterelim[6]. $\epsilon = 1 - \beta$ olsun. $0 < \epsilon < 1$ olur. O zaman, Alıştırma 13.2'den dolayı,

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+(i-1))}{i!} &= \frac{(1-\epsilon)(2-\epsilon)\cdots(i-\epsilon)}{i!} \\
&= (1-\epsilon)\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\epsilon}{i}\right) \\
&\le \exp(-\epsilon)\exp\left(\frac{-\epsilon}{2}\right)\cdots\exp\left(\frac{-\epsilon}{i}\right) \\
&= \exp\left(-\epsilon-\frac{\epsilon}{2}-\cdots-\frac{\epsilon}{i}\right) \\
&= \exp\left(-\epsilon\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\exp\left(\epsilon\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}\right)\right)}
\end{aligned}$$

olur. Eğer i'yi sonsuza götürürsek,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i}$$

ve dolayısıyla

$$\epsilon\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i}\right)$$

[6] Kanıtı veren Serdar Boztaş'a sonsuz teşekkürler.

ifadesi sonsuza ıraksar ve Sandviç teoreminden, istediğimiz limiti gerçekten de 0 buluruz. Demek ki bu durumda seri koşullu yakınsar (yani yakınsar ama mutlak yakınsamaz). □

Alıştırmalar

13.2. $0 \leq \alpha \leq 1$ olsun. $1 - \alpha \leq \exp(-\alpha)$ eşitsizliğini kanıtlayın. **İpucu:**

$$\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} - \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq 0.$$

13.3. $0 < \alpha < 1$ ise,

$$\lim_{i\to\infty} i^\alpha \frac{\alpha(1-\alpha)\cdots(i-1-\alpha)}{(i-1)!} = 0$$

eşitliği doğru mudur?

14. Tıkız Kümeler

Bu bölümde amacımız, bundan sonraki birkaç bölümde kanıtlamak istediğimiz sonuçlar için gereken “topoloji” bilgisini vermek. [N5]’te topolojiye çok daha geniş yer ayırdık. Şimdilik bu kadarıyla yetinelim.

14.1 Açık Kümeler

Gerçel sayılar kümesinin, açık aralıkların bileşimi olarak yazılan bir altkümesine ***açık küme*** diyelim. Demek ki $\mathbb{R}$’nin bir U altkümesinin açık olması için yeter ve gerek koşul, her $a \in U$ için,

$$(a-\delta,\, a+\delta) \subseteq U$$

içindeliğini sağlayan (ve a’ya göre değişebilen) bir $\delta > 0$ sayısının varlığıdır.

Tanıma göre $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ açık kümelerdir. Her açık aralık da açık bir kümedir. Açık kümelerin bileşimi elbette açıktır. Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.

$[0, 1]$ ya da $(0, 1]$ aralıkları açık değildirler, çünkü 1’i içeren her açık aralık mutlaka 1’den büyük sayılar da içermek zorundadır.

Yukarıda verdiğimiz tanım aslında $\mathbb{R}$’nin açık kümelerinin tanımı. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ise, X’in bir açık kümesi, tanım gereği, $\mathbb{R}$’nin bir açık kümesiyle X’in kesişimidir. X’in açık kümelerine ***X-açık*** diyebiliriz. Bir $U \subseteq X$ kümesinin X-açık olması için yeter ve gerek koşul, her $a \in U$ için,

$$(a-\delta,\, a+\delta) \cap X \subseteq U$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısının olmasıdır. Elbette $\mathbb{R}$-açık kümelerle açık kümeler arasında bir fark yoktur.

Tanıma göre $\emptyset$ ve X kümeleri X-açık kümelerdir. X-açık kümelerin bileşimi elbette X-açıktır. Sonlu sayıda X-açık kümenin kesişimi de X-açıktır.

X’in X-açık kümelerinin X’te tümleyenlerine ***X-kapalı küme*** denir. Açık kümeler için yazdığımız her özelliği uygun dile çevirerek kapalı kümeler için yazabiliriz. Örneğin, $\emptyset$ ve X kümeleri X-kapalı kümelerdir, X-kapalı kümelerin kesişimi kapalıdır ve sonlu sayıda X-kapalı kümenin bileşimi kapalıdır.

Önsav 1.8'ten anımsayalım: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ ise x ile A arasındaki mesafe,

$$d(x,\, A) = \inf\{|x-a| : a \in A\} = \inf_{a\in A} |x-a|$$

olarak tanımlanır. Eğer $x \in A$ ise $d(x, A) = 0$ olur. Ama bunun tersi yanlıştır: $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ ise 1 elemanı A'da değildir ama A'ya mesafesi 0'dır. Öte yandan eğer A kapalıysa, her şey yolunda gider.

Önsav 14.1. *Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ kapalı bir altküme ise*
i. *"$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$" eşdeğerliliği geçerlidir.*
ii. *Eğer A üstten sınırlıysa ve boşküme değilse,* $\sup A \in A$ *olur.*
iii. *Terimleri A'dan olan yakınsak her dizinin limiti A'dadır.*

Kanıt: (i) Nitekim, eğer $x \notin A$ ise, A^c açık olduğundan, x'i içeren ve A'yı kesmeyen $\epsilon > 0$ yarıçaplı açık bir aralık vardır, dolayısıyla

$$d(x, A) \geq \epsilon > 0$$

olur. Diğer yönün kanıtı bariz.

(ii) $\sup A = s \notin A$ olsun. O zaman s, açık bir küme olan A^c'nin bir elemanıdır. Dolayısıyla bir $\epsilon > 0$ için, $(s-\epsilon,\, s+\epsilon) \cap A = \emptyset$ olur. Ama bu da $s = \sup A$ tanımıyla çelişir.

(iii) Bir önceki kanıt gibi. □

14.2 Süreklilik

Açık kümelerin varoluş nedeni aşağıdaki sonuçta gizli:

Teorem 14.2. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için yeter ve gerek koşul, $\mathbb{R}$'nin her açık kümesinin f altındaki öngörüntüsünün X-açık olmasıdır.*

Kanıt: Önce f'nin sürekli olduğunu varsayalım. Eğer $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralıksa, $f^{-1}(I)$ kümesinin X-açık olduğunu kanıtlamak yeterli. Yani her $a \in f^{-1}(I)$ için, öyle bir $\delta > 0$ bulmalıyız ki,

$$(a-\delta,\, a+\delta) \cap X \subseteq f^{-1}(I)$$

olsun. İşe koyulalım: $f(a) \in I$ ve I bir açık aralık olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$(f(a)-\epsilon,\, f(a)+\epsilon) \subseteq I$$

olur. f, a'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $x \in (a-\delta,\, a+\delta) \cap X$ için

$$f(x) \in (f(a)-\epsilon,\, f(a)+\epsilon),$$

dolayısıyla
$$f(x) \in I$$
olur, yani
$$(a-\delta,\, a+\delta) \cap X \subseteq f^{-1}(I)$$
olur.

Şimdi açık kümelerin f-öngörüntülerinin X-açık olduklarını varsayalım. $a \in X$ olsun. f'nin a'da sürekli olduğunu kanıtlayacağız. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $(f(a)-\epsilon,\, f(a)+\epsilon)$ açık aralığı açık bir küme olduğundan, bu aralığın önimgesi olan $f^{-1}(f(a)-\epsilon,\, f(a)+\epsilon)$ kümesi X-açıktır. a, bu X-açık kümenin bir elemanı olduğundan,
$$(a-\delta,\, a+\delta) \cap X \subseteq f^{-1}(f(a)-\epsilon,\, f(a)+\epsilon)$$
içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. Şimdi $x \in X$ elemanı $|x-a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa,
$$x \in (a-\delta,\, a+\delta) \cap X$$
olur, dolayısıyla
$$x \in f^{-1}(f(a)-\epsilon,\, f(a)+\epsilon),$$
yani
$$f(x) \in (f(a)-\epsilon,\, f(a)+\epsilon),$$
yani $|f(x)-f(a)| < \epsilon$ olur. □

14.3 Tıkızlık

Sezgisel olarak tıkız bir küme, terimleri içinde olan dizilerin mutlaka yakınsak bir altdizisi olduğu kümelerdir. Bir dizinin yakınsak altdizisi olmaması iki türlü mümkündür: Ya dizinin terimleri arasındaki mesafe hiç azalmıyordur (böylece dizi sonsuza gitmek istiyordur ve küme sınırsızdır) ya da kümede eksik noktalar vardır ($\mathbb{Q}$ ya da $(0, 1)$ kümesi gibi). Demek ki tıkız bir küme sınırsız olmamalı (ki diziler sonsuza gidemesin) ve çok yakınındaki noktaları içermeli (ki bir yere yakınsamak isteyen altdiziler yakınsayabilsinler). En azından $\mathbb{R}$'de gerçekten böyle olur, mesela $[0, 1]$ kapalı aralığı tıkızdır (Teorem 14.3). Sezgi kazandırma amacı taşıyan bu kısa sohbeti geçip $\mathbb{R}$'nin bir altkümesinin tıkız olmasının matematiksel tanımını verelim.

$X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $(U_i)_{i\in I}$, X'in bir altkümeler ailesi olsun. Eğer $X \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ ise, $(U_i)_{i\in I}$ ailesine X'in ***örtüsü*** adı verilir. Eğer her U_i açıksa, örtüye ***açık örtü*** denir. Eğer I sonluysa, örtü ***sonlu örtü*** adını alır. Eğer $J \subseteq I$ ise ve $(U_j)_{j\in J}$, X'in hâlâ daha bir örtüsüyse, $(U_j)_{j\in J}$ ailesine $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün ***altörtüsü*** adı verilir. Eğer J sonluysa, ***sonlu altörtüden*** sözedilir.

Eğer X'in her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa, X'e ***tıkız*** denir. Yani X'in tıkız olması için,

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan **her** $(U_i)_i$ açık küme ailesi için,

$$X \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci olmalıdır. U_i'ler açık aralıkların bileşimi olduklarından, bu koşulu şöyle de yazabiliriz: X'in tıkız olması için,

$$X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan **her** $(U_i)_i$ açık aralık ailesi için,

$$X \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci olmalıdır.

Yukarıdaki tanımdaki "her" sözcüğünün altını çizeriz; tanımın kilit sözcüğüdür. Bulunan sonlu örtü de orijinal örtünün **altörtüsü** olmak zorundadır.

Yukarıda U_i açık altkümeler yerine X-açık olan $U_i \cap X$ altkümelerini alabilirdik, gene aynı kavram tanımlanırdı. Yani bir $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümesinin tıkız olması için yeter ve gerek koşul $X = \bigcup_i U_i$ eşitliğini sağlayan her X-açık $(U_i)_i$ ailesi için, $X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ eşitliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n$ göstergecinin olmasıdır. Bu ince nokta ileride bazı kanıtlarda kolaylık sağlayacak.

Hemen birkaç örnek ve karşıörnek verelim.

Örnekler

14.1. $\mathbb{R}$'nin her sonlu altkümesi (dolayısıyla boşküme de) tıkızdır.

14.2. $\mathbb{R}$ tıkız değildir çünkü $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$ olmasına karşın, $\mathbb{R}$ sonlu sayıda $(-n, n)$ aralığının bileşimi değildir.

14.3. $(0, 1)$ aralığı tıkız değildir, çünkü örneğin $((1/n, 1))_{n=1,2,3,\ldots}$ açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü yoktur.

14.4. Her kapalı aralık tıkızdır. Bunu birazdan kanıtlayacağız.

14.5. Sonlu sayıda tıkız kümenin bileşimi de tıkızdır.

14.6. Daha fazla örnek vermeye gerek yok, çünkü bir sonraki (önemli) teorem $\mathbb{R}$'nin tüm tıkız altkümelerini betimleyecek.

Teorem 14.3 (Heine-Borel Teoremi)**.** *$\mathbb{R}$'nin bir altkümesinin tıkız olması için yeter ve gerek koşul altkümenin sınırlı ve kapalı olmasıdır.*

Kanıt: $X \subseteq \mathbb{R}$ tıkız olsun. $((-n, n))_{n \in \mathbb{N}}$, X'in bir açık örtüsü olduğundan, X bunların sonlu tanesinin bileşiminin içindedir; dolayısıyla X sınırlıdır.

Şimdi X'in kapalı olduğunu kanıtlayalım. Bunun için X'in tümleyeninin açık olduğunu kanıtlamamız lazım. $x \notin X$ olsun. Pozitif bir n doğal sayısı için $[x-1/n, x+1/n]^c$ kümeleri (iki açık aralığın bileşimi olduklarından) açıktırlar. Öte yandan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right]\right)^c = \{x\}^c = \mathbb{R}\setminus\{x\} \supseteq X$$

olduğundan, $[x-1/n,\ x+1/n]^c$ kümeleri X'in bir açık örtüsüdür. Demek ki bunların sonlu tanesi X'i içerir. Ama bu açık örtünün iki elemanından biri diğerini içerdiğinden, büyük bir n için

$$X \subseteq \left[x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right]^c$$

olur. Yani

$$\left[x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right] \subseteq X^c,$$

ve dolayısıyla

$$\left(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}\right) \subseteq X^c,$$

olur. Böylece x'i içeren bir açık aralığın X'in tümleyeninde olduğunu göstermiş olduk. Bu da X'in tümleyeni açık demektir. Teoremin yarısı kanıtlanmıştır. Ama bu teoremin kolay yarısıydı. Daha zor ve daha içerikli olan diğer yarısını kanıtlamak için (kendi başına önemli olan) yardımcı bir sonuca ihtiyacımız var:

Önsav 14.4. *Tıkız bir kümenin kapalı altkümeleri tıkızdır.*

Kanıt: $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun ve Y'nin kapalı, X'in tıkız olduğunu varsayalım. $(U_i)_{i\in I}$, Y'nin bir açık örtüsü olsun. Bu örtüye açık bir küme olan Y^c'yi eklersek, X'in bir açık örtüsünü elde etmiş oluruz. X tıkız olduğundan, öyle sonlu bir $J \subseteq I$ vardır ki, $(U_j)_{j\in J}$ ve Y^c kümeleri X'i, dolayısıyla Y'yi de örter. Ama tabii Y'yi örtmek için Y^c kümesine ihtiyaç yoktur: $(U_j)_{j\in J}$ sonlu ailesi Y'yi örter. □

Şimdi Teorem 14.3'ün kanıtına devam edelim. $\mathbb{R}$'nin sınırlı ve kapalı bir K altkümesi verilmiş olsun. K sınırlı olduğundan, belli $a < b$ sayıları için, $K \subseteq [a, b]$ olur. K kapalı olduğundan, Önsav 14.4'e göre $[a, b]$ aralığının tıkız olduğunu kanıtlamak yeterli.

$(U_i)_{i\in I}$, $[a, b]$ aralığının açık bir örtüsü olsun. Eğer $c \in [a, b]$ ise, $(U_i)_{i\in I}$ aynı zamanda $[a, c]$ aralığının örtüsüdür. Eğer bu örtünün sonlu sayıda elemanı $[a, c]$ kapalı aralığını örtüyorsa, c sayısına bu kanıtlık "güzel sayı" diyelim. a

elbette güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi boş değildir. Amacımız b'nin güzel bir sayı olduğunu kanıtlamak. Eğer c güzel bir sayıysa ve c_1 sayısı $a \le c_1 \le c$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman c_1 sayısı da güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi G, $\mathbb{R}$'nin (belki tek bir noktası olan) bir aralığıdır. G, b tarafından üstten sınırlı olduğundan G'nin en küçük üstsınırı vardır. Bu en küçük üstsınıra g diyelim. Elbette $g \in [a, b]$. Dolayısıyla U_i'ler arasından g'yi içeren bir U_i vardır. U_i açık olduğundan ve g'yi içerdiğinden,

$$(g - \epsilon, g + \epsilon) \subseteq U_i$$

önermesini sağlayan bir $\epsilon > 0$ vardır. Öte yandan $g - \epsilon < g = \sup G$ olduğundan, bir $c \in G$ için $g - \epsilon < c \le g$ olur. c güzel bir sayı olduğundan, sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci için $[a, c]$ aralığı $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ açık kümeleri tarafından kaplanır. Ayrıca

$$[c, g + \epsilon/2] \subseteq (g - \epsilon, g + \epsilon) \subseteq U_i$$

olduğundan, $[a, g + \epsilon/2] = [a, c] \cup [c, g + \epsilon/2]$ aralığı

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, U_i$$

tarafından kaplanır. Bundan, her şeyden önce g'nin güzel bir sayı olduğu çıkar, yani $g \in G$. Sonra,

$$[a, g + \epsilon/2] \cap [a, b] \subseteq G$$

çıkar. Ama $g = \sup G$ olduğundan, bundan da $g = b$ çıkar. □

Yukarıda verilen kanıt şık, zarif, zekice ve son derece anlaşılır. Ama standart kanıtlardan değil. Ortalama bir matematikçinin hemen aklına gelmeyecek kadar zekice bu yazarın zevkine göre. Bu teoremin daha standart kanıtının topolojinin yöntemleri açısından daha eğitici olduğunu düşünüyoruz. Daha standart kanıtı verelim:

Teorem 14.3'ün İkinci Yarısının İkinci Kanıtı: $[a, b]$ aralığının tıkız olmadığını varsayalım. O zaman $[a, b]$ aralığının sonlu altörtüsü olmayan bir $(U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü vardır. c_1, a ve b noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[a, c_1]$ aralığı ya da $[c_1, b]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Diyelim $[a, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_2, a ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[a, c_2]$ ya da $[c_2, c_1]$ aralığı tarafından örtülmez. Diyelim $[c_2, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_3 noktası c_2 ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[c_2, c_3]$ ya da $[c_3, c_1]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor... Bunu böyle devam ettirerek, öyle

$$[a, b] = [d_0, e_0] \supseteq [d_1, e_1] \supseteq [d_2, e_2] \supseteq \ldots$$

aralıkları bulabiliriz ki, hem

$$e_n - d_n = \frac{b - a}{2^n}$$

olur hem de $[d_n, e_n]$ aralıkları sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Kapalı kutular teoremine göre [N4, Teorem 9.2], bütün bu $[d_n, e_n]$ aralıkları tek bir noktada kesişir, diyelim

$$f = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n$$

noktasında kesişiyorlar. $f \in [a, b]$ olduğundan, bir $i \in I$ için $f \in U_i$ olur. U_i açık olduğundan, bir $\epsilon > 0$ için, $(f - \epsilon, f + \epsilon) \subseteq U_i$ olur. $f = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n$ olduğundan, bir n göstergeci için,

$$[d_n, e_n] \subseteq (f - \epsilon, f + \epsilon) \subseteq U_i$$

olur. Ama o zaman da $[d_n, e_n]$ tek bir (dolayısıyla sonlu sayıda) U_i tarafından kaplanır. Bir çelişki. Demek ki $[a, b]$ aralığı tıkız bir kümedir. □

14.4 Uç Değerler

Bazı fonksiyonlar maksimum ve minimum uç değerlerini alırlar bazıları da almaz. Örneğin $f(x) = 1/x$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun tanım kümesi $(0, 1)$ ise hiçbir uç değerini almaz; ama tanım kümesi $(0, 1]$ ise maksimum değerini alır, minimum değerini almaz; son olarak, eğer tanım kümesi $[1, 2]$ kümesiyse hem maksimum değerini hem de minimum değerini alır. Bu altbölümde fonksiyonların uç değerlerini aldığı çok önemli bir koşul bulacağız. Önce şu kendi başına önemli teoreme ihtiyacımız var:

Teorem 14.5. *Tıkız bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında imgesi tıkızdır.*

Kanıt: $K \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$, K tıkız ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $f(K)$'nın tıkız olduğunu göstermek istiyoruz. $(V_i)_{i\in I}$, $f(K)$'nın açık bir örtüsü olsun:

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i.$$

Demek ki

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i),$$

ve $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ ailesi K'nın bir örtüsü. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(V_i)$ açık bir küme. Yani bu aile K'nın açık bir örtüsü. K tıkız olduğundan,

$$K \subseteq f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Her iki tarafın da f-imgesini alalım:

$$\begin{aligned} f(K) &\subseteq f(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})) \\ &= f(f^{-1}(V_{i_1})) \cup \ldots \cup f(f^{-1}(V_{i_n})) \subseteq V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n} \end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 14.6 (Uç Değerler Teoremi)**.** *$X \subseteq \mathbb{R}$ tıkız bir küme ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu X üzerine minimum ve maksimum değerini alır; yani öyle a, $b \in X$ vardır ki her $x \in X$ için*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

olur.

Kanıt: X tıkız ve f sürekli olduğundan, Teorem 14.5'ten dolayı $f(X)$ de tıkızdır. Teorem 14.3'e göre $f(X)$ kapalı ve sınırlıdır. $f(X)$ sınırlı olduğundan $\sup f(X)$ bir gerçel sayıdır. $f(X)$ kapalı olduğundan $\sup f(X) \in f(X)$ olur (Önsav 14.1.ii). Benzer bir kanıt $\inf f(X)$ için de yapılabilir. □

Alıştırmalar

14.7. $I = [a, b]$ ve $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. M ve m sayıları, sırasıyla f'nin $[a, b]$ aralığındaki mutlak maksimum ve mutlak minimumu ise,

$$M - m = \sup \{|f(y) - f(x)| : x, y \in I\}$$

eşitliğini gösterin.

14.8. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer f fonksiyonu (a, b) aralığında uç değerlerinden birini alıyorsa f'nin birebir olamayacağını kanıtlayın.

14.5 Düzgün Süreklilik

Düzgün süreklilik, sürekliliğin çok özel bir halidir. Ama genel olarak tüm topolojik uzaylarda değil, metrik uzay gibi özel topolojik uzaylarda geçerli olan bir kavramdır. Tanımı anımsatalım:

(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Önce f'nin sürekli olduğunun ne demek olduğunu anımsatalım. f'nin sürekli olması için f'nin X'in her a noktasında sürekli olması gerekmektedir; yani her $a \in X$ için şu özellik doğru olmalıdır: Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalıdır ki, her $x \in X$ için

$$d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$$

Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, süreklilik

$$\forall a \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \left(d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon\right)$$

önermesine denktir. Buradaki δ sayısı verilmiş olan ϵ'a göre değişir elbette, ama a'ya göre de değişebilir, hatta çoğu zaman a'ya göre değişir. Bu yüzden kimi zaman δ yerine $\delta_{a,\epsilon}$ yazılır.

Ama kimi zaman da δ sayısını a'dan bağımsız (sadece ϵ'a bağımlı) seçebiliriz. O zaman çok özel, çok daha güçlü bir süreklilik söz konusu olur. Bu durumda f'nin ***düzgün sürekli*** olduğu söylenir. Yani eğer

Her $\epsilon > 0$ ve X'in her a ve x elemanları için
"$d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$"
önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa

o zaman f fonksiyonuna ***düzgün sürekli*** denir. Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, düzgün süreklilik,

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a,\, x \in X\ (d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon)$$

önermesine denktir. Burada "$\forall a$" ifadesinin en baştan ortalara, "$\exists \delta > 0$" ifadesinden sonraya gittiğine dikkatinizi çekerim: Verilmiş bir $\epsilon > 0$ için **tüm** a ve x'ler için geçerli olan bir $\delta > 0$ bulunuyor. Ama artık a ile x arasında büyük bir ayrım yok, dolayısıyla a ve x yerine x ve y kullanırsak daha şık bir tanıma ulaşmış oluruz: Düzgün süreklilik

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\, y \in X\ (d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

önermesine denktir.

Eğer $A \subseteq X$ ise ve $f_{|A}$ fonksiyonu düzgün sürekliyse, o zaman f'nin A üzerine ***düzgün sürekli*** olduğu söylenir.

Teorem 14.7. *Tanım kümesi $\mathbb{R}$'nin tıkız bir altkümesi olan her sürekli fonksiyon düzgün süreklidir.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $x \in X$ için öyle bir $\delta(x) > 0$ sayısı seçelim ki, her $y \in X$ için,

$$|x - y| < \delta(x) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olsun. f sürekli olduğundan böyle bir δ vardır. X tıkız olduğundan sonlu sayıda $\left(x - \frac{\delta(x)}{2},\, x + \frac{\delta(x)}{2}\right)$ açık aralığı X'i örter, diyelim

$$\left(x_1 - \frac{\delta(x_1)}{2},\, x_1 + \frac{\delta(x_1)}{2}\right), \ldots, \left(x_n - \frac{\delta(x_n)}{2},\, x + \frac{\delta(x_n)}{2}\right)$$

açık aralıkları X'i örtüyor. δ, bu $\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)$ sayılarının en küçüğü olsun. Şimdi $x,\, y \in X$ noktaları $|x - y| < \delta/2$ eşitsizliğini sağlasın. Diyelim

$$x \in \left(x_i - \frac{\delta(x_i)}{2}, x_i + \frac{\delta(x_i)}{2}\right).$$

O zaman

$$|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \leq \delta(x_i),$$

dolayısıyla

$$|f(x_i) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Aynı nedenden
$$|f(x_i) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$
olur. Bunlardan da $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ çıkar. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Bu teoremi sayfa 292'de bir defa daha kanıtlayacağız.

Düzgün sürekliliğe değinmişken şu sonucu da kanıtlayalım:

Teorem 14.8. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin düzgün sürekli olması için, $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ eşitliğini sağlayan terimleri X'ten alınmış her $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.*

Eğer $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ sağlanıyorsa ve dizilerden birinin limiti varsa diğerinin de vardır elbet ve iki limit eşittir. Bu durumda sürekli her fonksiyon elbette $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ eşitliğini sağlar. Demek ki en azından sürekli fonksiyonlar sözkonusu olduğunda, teorem daha çok yakınsak olmayan dizilere yoğunlaşıyor. Hemen bir örnek verelim:

Örnekler

14.9. $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanmış olsun. $x_n = 1/(n + 1)$ ve $y_n = 1/n$ olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ olur elbette, ama $f(x_n) - f(y_n) = (n+1) - n = 1$ olur ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ eşitliği sağlanmaz. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinin yakınsak olmadıklarına dikkatinizi çekerim.

14.10. Teorem 14.7'den dolayı eğer bir $\alpha > 0$ için $X \subseteq (\alpha, 1]$ ise, yukarıdaki örnekteki f fonksiyonu X üzerine düzgün süreklidir. (Neden?)

Kanıt: Önce f'nin düzgün sürekli olduğunu varsayalım. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ koşulunu sağlasınlar. Rastgele bir $\epsilon > 0$ alalım. Düzgün yakınsaklığın tanımında bu ϵ sayısını mutlu eden bir δ bulalım. Ardından, öyle bir N seçelim ki, $n > N$ için $|x_n - y_n| < \delta$ olsun. Bu durumda, δ'nın seçiminden dolayı $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ olur. Demek ki $\lim_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ eşitliği sağlanır.

Şimdi de f'nin düzgün sürekli olmadığını varsayalım. Dolayısıyla öyle bir $\epsilon > 0$ sayısı vardır ki, her $\delta > 0$ sayısı için, $|x - y| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan ama $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlamayan, yani $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan $x, y \in X$ elemanları bulunur. δ'yı $1/n$'ye eşit alırsak, her n pozitif doğal sayısı için $|x_n - y_n| < 1/n$ ve $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ eşitsizliklerini sağlayan x_n ve y_n elemanlarını buluruz. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri teoremdeki koşula karşıörnek oluştururlar. □

Alıştırmalar

14.11. $(0, \infty)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanan fonksiyon düzgün sürekli değildir (çünkü a küçüldükçe δ sayısı küçülür). Tanım kümesi $(0, 1)$ aralığı olsa da bu fonksiyon düzgün sürekli değildir. Öte yandan eğer $\alpha > 0$ ise bu fonksiyon $[\alpha, \infty)$ üzerinde düzgün süreklidir. Kanıtlayın.

14.12. $[0, \infty)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = \sqrt{x}$ formülüyle tanımlanan fonksiyonun düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın.

14.13. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ varsayımlarını yapalım.

a. f'nin düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın.

b. f'nin $\mathbb{R}$'de ya bir mutlak maksimumu veya bir mutlak minimumu olduğunu kanıtlayın.

c. Hem mutlak maksimum hem de mutlak minimumu aynı anda olmayan ama yukarıda söylenen özelliklere sahip bir örnek verin.

14.14. $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer bir M sayısı için,

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

eşitsizliği her x, $y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa, f'ye ***Lipschitz özelliğini sağlayan fonksiyon*** ya da kısaca ***Lipschitz*** denir. Lipschitz fonksiyonların düzgün sürekli olduklarını kanıtlayın.

14.15. $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $||f - f_\epsilon|| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan düzgün sürekli bir $f_\epsilon : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda f'nin de düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın.

14.16. Sürekli ve periyodik her $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın.

14.17. Düzgün sürekli fonksiyonların aritmetiğini irdeleyin. (Toplama, bir sayıyla çarpma, çarpma, bileşke gibi işlemler altında kapalı mıdır?)

15. Dini Teoremi ve Bir Uygulaması

15.1 Dini Teoremi

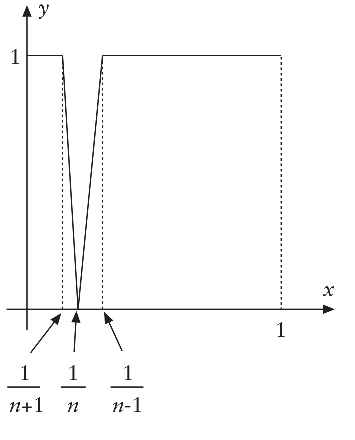
Bir fonksiyon dizisinin düzgün yakınsak olup olmadığına karar vermek her zaman kolay olmayabileceğinden, elimizde düzgün yakınsaklığa karar verecek genel kıstasların olması yararlı olur. Bunlardan en ünlüsü Dini Teoremi'dir.

Sürekli fonksiyon dizilerinin düzgün limitinin de sürekli olduğunu biliyoruz. Demek ki limit sürekli değilse, düzgün yakınsaklık olamaz. Öte yandan limitin sürekli olması da düzgün yakınsaklık için yetmez; tanım kümesi $[0, 1]$ aralığı bile olsa. İşte buna bir örnek:

Örnek 15.1. Her $n > 1$ doğal sayısı için, $f_n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonları şöyle tanımlansın:

$$f_n(x) = \begin{cases} -n(n+1)x + n + 1 & \text{eğer } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \text{ ise} \\ n(n-1)x - n + 1 & \text{eğer } \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n-1} \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}\right) \text{ ise} \end{cases}$$

f_n fonksiyonunun grafiği şöyle:



Görüldüğü gibi f_n sürekli bir fonksiyon ve n büyüdükçe $1/n$ küçüldüğünden, f_n'lerin limiti (elbette sürekli olan) sabit 1 fonksiyonu s_1. Öte yandan,

$$s_1\left(\frac{1}{n}\right) - f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1$$

olduğundan, $||s_1 - f_n|| = 1$ olur ve yakınsaklık düzgün değildir.

Dini teoremi, okunduğunda hemen anlaşılacağı üzere, bu konuda büyük kolaylık sağlar.

Teorem 15.1 (Dini). *K, $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı (yani tıkız) bir altkümesi olsun. $(f_n : K \longrightarrow \mathbb{R})_n$, sürekli bir fonksiyona noktasal yakınsayan sürekli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $x \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ oluyorsa, yani dizi azalarak yakınsıyorsa, o zaman dizinin yakınsaklığı düzgündür*[1].

Kanıt: Dizinin noktasal limitine f diyelim. f_n yerine (sürekli olan) $f_n - f$ alarak, f fonksiyonunun sabit 0 fonksiyonu olduğunu varsayabiliriz. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in K$ için $0 \le f_n(x)$ olur.

$\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$U_n = \{x \in K : f_n(x) < \epsilon\} = f_n^{-1}((-\infty, \epsilon))$$

tanımını yapalım. f_n sürekli olduğundan, her U_n, K'nın açık bir altkümesidir, yani K-açıktır (Teorem 14.2).

Her $x \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n \subseteq U_{n+1}$$

olur.

Her $x \in K$ için, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ olduğundan,

$$K = \bigcup_n U_n$$

olur. Dolayısıyla, K tıkız olduğundan, sonlu sayıda $n_1, \ldots, n_k$ doğal sayıları için,

$$K = U_{n_1} \cup \ldots \cup U_{n_k}$$

olur. Demek ki eğer $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ ise

$$K = U_{n_1} \cup \ldots \cup U_{n_k} = U_N$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için de $K = U_n$ olur. Bundan da her $n > N$ ve her $x \in K$ için

$$f_n(x) < \epsilon$$

çıkar, yani $||f_n|| \le \epsilon$ olur. □

[1] Bilenlere: Bu teorem K tıkız bir topolojik uzay iken de doğrudur. Kanıt da aynıdır. [N5]'te bu genel haliyle kanıtlayacağız.

Not 1. Kanıtta süreklilik varsayımı çok kısıtlı bir haliyle kullanılıyor. K'dan $\mathbb{R}$'ye giden bir f fonksiyonu,

$$\textit{her } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ için}, \{x \in K : f(x) < \alpha\} \textit{ kümesi açıktır}$$

özelliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna ***üstten yarısürekli***[2] adı verilir. Kanıtlanan teorem belli ki sadece sürekli fonksiyonlar için değil, üstten yarısürekli fonksiyonlar için de geçerli.

Not 2. Benzer sonuç artan ve alttan yarısürekli fonksiyonlar için de geçerlidir elbette.

15.2 $\sqrt{t}$'ye Düzgün Yakınsayan Polinomlar

Önce $[0,1]$ aralığından $[0,1]$ aralığına giden ve

$$t \mapsto 1 - \sqrt{1-t}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyona düzgün yakınsayan bir $(p_n)_n$ polinom ailesi (daha doğrusu bir polinomiyal fonksiyon ailesi) bulacağız.

p_0, sabit 0 fonksiyonu olsun. Eğer $n \geq 0$ ise, p_{n+1}'i tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$p_{n+1}(t) = \frac{t + p_n(t)^2}{2}$$

olsun. Her n ve her $t \in [0,1]$ için şunlar doğrudur:

1. p_n bir polinomdur.
2. $p_n(0) = 0$.
3. $0 \leq p_n(t) \leq 1$.
4. $(p_n(t))_n$ dizisi artan bir dizidir.

İlk üç özellik tümevarımla hemen çıkar[3]. Sonuncusunu kanıtlayalım: Tanımdan elde edilen,

$$p_{n+1}(t) = \frac{t + p_n(t)^2}{2}$$

ve

$$p_n(t) = \frac{t + p_{n-1}(t)^2}{2}$$

eşitliklerini taraf tarafa birbirinden çıkarırsak,

$$p_{n+1}(t) - p_n(t) = \frac{p_n(t)^2 - p_{n-1}(t)^2}{2} \tag{1}$$

[2] İngilizcesi *upper semicontinuous.*

[3] Hatta 3'üncü özellikten daha güçlü olan $0 \leq p_n(t) \leq 1 - \sqrt{1-t}$ eşitsizlikleri doğrudur.

elde ederiz.

$$p_1(t) - p_0(t) = p_1(t) = t/2 \geq 0$$

olduğundan, (1) eşitsizliğinden tümevarımla $p_{n+1}(t) - p_n(t) > 0$ çıkar, yani $(p_n(t))_n$ dizisi artandır.

Her $t \in [0, 1]$ için $(p_n(t))_n$ dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan, bir limiti vardır. Bu limite $p(t)$ dersek, tümevarımsal tanımda her iki tarafın da limitini alarak,

$$p(t) = \frac{t + p(t)^2}{2}$$

buluruz, yani,

$$p(t)^2 - 2p(t) + t = 0,$$

yani

$$p(t)^2 - 2p(t) + 1 = 1 - t,$$

yani

$$(p(t) - 1)^2 = 1 - t,$$

yani tam istediğimiz gibi

$$p(t) = 1 - \sqrt{1 - t}$$

olur (çünkü 3'üncü ve 4'üncü özelliklerden dolayı $1 - p(t) \geq 1 - p_n(t) \geq 0$).

Noktasal yakınsaklığı kanıtladık. Şimdi Dini teoremini (Teorem 15.1) uygulayarak yakınsaklığın düzgün olduğunu görürüz:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(t) \stackrel{u}{=} 1 - \sqrt{1 - t}.$$

Bundan ve Altbölüm 8.2'de kanıtladığımız çok basit olgulardan,

$$\lim_{n\to\infty} (1 - p_n(1 - t)) \stackrel{u}{=} 1 - p(1 - t) = \sqrt{t}$$

çıkar. Bundan ilham alarak, $q_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$q_n(t) = 1 - p_n(1 - t)$$

tanımlarını yaparsak, p_n'lerin tümevarımsal tanımından, her $t \in [0, 1]$ ve n için kolaylıkla,

$$q_0(t) = 0 \text{ ve } q_{n+1}(t) = q_n(t) + \frac{t - q_n(t)^2}{2}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri q_n polinomiyal fonksiyonlarının tümevarımsal tanımı olarak kabul edebiliriz. Elbette

$$\lim_{n\to\infty} q_n(t) \stackrel{u}{=} \sqrt{t}$$

olur.

Not 1. $\lim_{n\to\infty} q_n(t^2) \stackrel{u}{=} |t|$ olur. (Bkz. Örnek 8.21.)

Not 2. İlk birkaç q_n polinomunu hesaplayarak katsayıların zamanla sabitleşmediğini görün.

16. Weierstrass Yoğunluk Teoremi

16.1 Weierstrass Yoğunluk Teoremi

Bu altbölümde kanıtlayacağımız teorem $[a, b]$ kapalı aralığı üzerine tanımlanmış her sürekli fonksiyonun polinomlardan (aslında polinomiyal fonksiyonlardan demek lazım) oluşan bir dizinin düzgün limiti olduğunu söylüyor. Bir başka deyişle sürekli fonksiyonların yaklaşık değerlerini, münasip polinomların değerlerini hesaplayarak bulabiliriz. ***Weierstrass Yoğunluk Teoremi*** denilen bu sonucun benzerlerine aslında okur aşinadır. Örneğin, exp fonksiyonu,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

polinomlarının her kapalı ve sınırlı aralık üzerinde düzgün limitidir. Aynı şey, sin ve cos fonksiyonları için de geçerlidir:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$
$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

eşitlikleri (sin ve cos fonksiyonlarının tanımından dolayı) geçerlidir ve limitler her kapalı ve sınırlı aralık üzerinde düzgündür (Sonuç 9.2 ya da Teorem 9.3).

Bu ciltte görmediğimiz (ama bir sonraki ciltte göreceğimiz) Taylor serilerini bilen okur da bu fikirle aşinadır. Ama bir fonksiyonun Taylor serisi olması için, fonksiyonun sonsuz kez türevlenebilir olması gerekir ki birçok sürekli fonksiyon tek bir kez bile türevlenemez. Ayrıca fonksiyon sonsuz kez türevlenebilir olduğu zaman bile fonksiyonun Taylor serisi fonksiyona eşit olmayabilir. Bu tartışmadan da anlaşılacağı üzere son derece genel bir teorem sözkonusu.

Teorem 16.1 (Weierstrass, 1885)**.** *$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanmış her sürekli fonksiyona polinomiyal fonksiyonlarla düzgün yakınsanabilir; yani eğer*

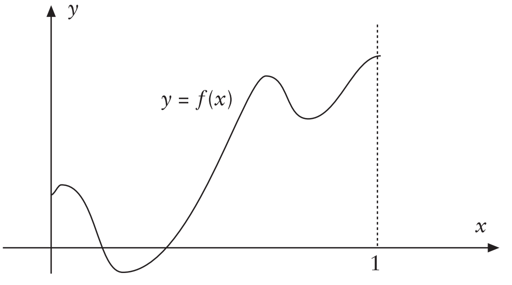
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyonsa ve $\epsilon > 0$ ise, öyle bir P polinomu vardır ki

$$||f - P|| < \epsilon$$

olur. Bir başka deyişle, polinomiyal fonksiyonlar kümesi (Altbölüm 8.9'da tanımlanan) $\mathcal{C}([a, b])$ *metrik uzayında yoğundur*[1].

Kanıt: Elbette $[a, b]$ yerine $[0, 1]$ aralığını alabiliriz. (Neden?) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyon ve $\epsilon > 0$ olsun.



Polinomlarla yakınsanacak f fonksiyonunun grafiği

İlk olarak bu fonksiyona çok "yakın" olan parçalı doğrusal bir g fonksiyonu bulalım. Bulacağımız bu parçalı doğrusal g fonksiyonunun grafiği, aşağıdaki şekildeki gibi f'nin küçük kirişlerinden oluşacak. $[0, 1]$ aralığını öyle küçük aralıklara böleceğiz ki, yola koyulduğumuz f fonksiyonuyla g parçalı doğrusal fonksiyonu arasındaki mesafe bu küçük aralıklarda en fazla ϵ olacak. Bunu yapabilir miyiz? Evet! Hem de aralıkları eşit uzunlukta seçerek bile yapabiliriz. Nitekim, K tıkız olduğundan, f düzgün süreklidir (Teorem 14.7), bir başka deyişle öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $|x - y| < \delta$ ise

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi N doğal sayısını

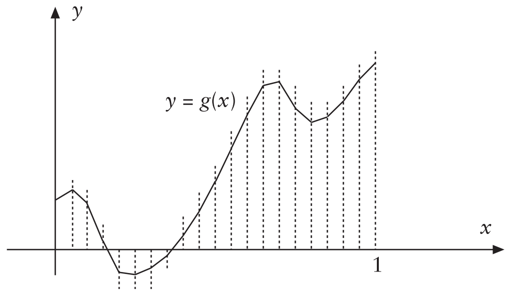
$$\frac{1}{N} < \delta$$

olacak biçimde seçelim ve $[0, 1]$ aralığını $1/N$ uzunluktaki aralıklara bölelim. g fonksiyonunu,

$$I_n = \left[\frac{n}{N}, \frac{n}{N+1}\right]$$

aralığında $(n = 0, 1, \ldots, N - 1)$ doğrusal olacak ve

[1]Bu teoremin daha genel bir hali Stone-Weierstrass teoremi olarak bilinir ve [N5]'te kanıtlanmıştır.



Grafiği yukardaki f fonksiyonunun çok küçük kirişlerinden oluşan parçalı doğrusal fonksiyon

$$g\left(\frac{n}{N}\right) = f\left(\frac{n}{N}\right) \text{ ve } g\left(\frac{n+1}{N}\right) = f\left(\frac{n+1}{N}\right)$$

eşitlikleri gerçekleşecek biçimde seçelim. Eğer $x \in I_n$ ise,

$$\left|x - \frac{n}{N}\right| < \frac{1}{n} < \delta$$

olduğundan, aşağıdaki "detay" şekilden de görüleceği üzere,

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

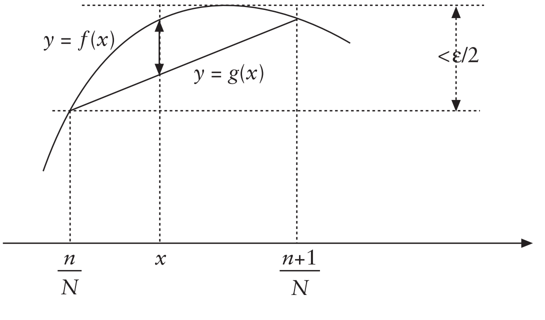
olur. Bu dediğimiz her I_n aralığında böyle olduğundan, her $x \in [0,1]$ için,

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur, yani

$$||f - g|| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

olur.



Şimdi yukarıdaki parçalı doğrusal g fonksiyonuna bir P polinomuyla $\epsilon/2$ kadar yakınsamak kaldı. Böylece,

$$||f - P|| \leq ||f - g|| + ||g - P|| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olacak ve istediğimiz kanıtlanmış olacak.

Her parçalı doğrusal fonksiyon gibi, g fonksiyonu da sonlu sayıda

$$b,\ a_1,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ \ldots,\ c_k$$

için,

$$g(x) = b + \sum_{i=1}^{k} a_i|x - c_i|$$

olarak yazılabilir. (Neden? Aslında k, N'ye eşit alınabilir.) Eğer her $i = 1, \ldots, n$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$\big|a_i|x - c_i| - P_i(x)\big| < \frac{\epsilon}{2k}$$

eşitsizliğini sağlayan bir P_i polinomu bulabilirsek, o zaman olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - \left(b + \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\right)\right| &= \left|\left(b + \sum_{i=1}^{k} a_i|x - c_i|\right) - \left(b + \sum_{i=1}^{k} P_i(x)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{k} (a_i|x - a_i| - P_i(x))\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} |a_i|x - a_i| - P_i(x)| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon}{2k} = \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$\left\|g - \left(b + \sum_{i=1}^{k} P_i\right)\right\| \le \frac{\epsilon}{2}$$

polinomunun işimizi gördüğü anlaşılmış olur.

$$P = b + \sum_{i=1}^{k} P_i$$

Geriye, verilmiş a ve c sayıları ve $\epsilon > 0$ için, her $x \in [0,1]$ için

$$\big|a|x - c| - p(x)\big| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir p polinomu bulmamız kalıyor. $a = 0$ ise, $p = 0$ olsun. Eğer $a \neq 0$ ise, kanıtlamamız gereken eşitsizliği a'ya bölerek $a = 1$ varsayımını yapabiliriz. Bölüm 15'in sonundaki Not 1'de bu işi $c = 0$ için yaptık. Şimdi değişkeni kaydırarak istediğimizi elde edebiliriz. $\square$

16.2 Bernstein Polinomları

Geçen altbölümde, $\mathbb{R}$'nin tıkız bir altkümesi üzerine tanımlanmış her sürekli fonksiyonun polinomlarla tanımlanmış bir dizinin düzgün limiti olduğunu görmüştük. Bu altbölümde verilmiş herhangi bir sürekli $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsayan bir polinom dizisini açık açık bulacağız.

Önce her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n > 0$ tamsayısı için şu eşitliği anımsayalım:

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Şimdi eşitliğin sağ tarafında toplanan ifadeleri $f(k/n)$ sayılarıyla çarparak toplayalım:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

$B_n(f)$ polinomlarına, polinomları bulan Rus matematikçi Sergey Natanoviç Bernstein (1880-1968) onuruna ***Bernstein polinomları*** denir.

Gelecekte $f = \mathrm{Id}$, yani $f(x) = x$ alacağız ve o zaman $B_n(\mathrm{Id})(x)$ yerine $B_n(x)(x)$ yazacağız. Buradaki birinci x ve ikinci x birbirine karıştırılmamalı. Birinci x, $f(x) = x$ anlamına kullanılıyor, ikincisi ise değişken anlamına.

Bernstein polinomlarının bariz özellikleri var: Fonksiyonlar kümesinden polinomlar kümesine giden B_n fonksiyonu doğrusaldır, yani her f, g fonksiyonu ve her a ve b gerçel sayısı için

$$B_n(af + bg) = aB_n(f) + bB_n(g)$$

olur. Ayrıca, sabit c fonksiyonunun B_n altında imgesi sabit c polinomudur (sabit değişmez), örneğin $B_n(1) = 1$ olur. Ve eğer $f \leq g$ ise, $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olarak görüldüğünde,

$$B_n(f) \leq B_n(g)$$

ve dolayısıyla

$$|B_n(f)| \leq B_n(|f|)$$

olur. Bu özellikleri aşağıdaki son derece ilginç teoremin kanıtında özgürce kullanacağız.

Teorem 16.2. $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman,*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f) \overset{u}{=} f$$

olur.

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük n göstergeçleri için,

$$||B_n(f) - f|| < \epsilon$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayacağız. f sürekli ve $[0,1]$ tıkız olduğundan, f düzgün süreklidir (Teorem 14.7). Demek ki öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $|x-a| < \delta$ ise

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur.

$$M = ||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

olsun. f, bir tıkız küme üzerine tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olduğu için M diye bir sayı gerçekten vardır (Teorem 3.12 ya da Teorem 14.5).

Öte yandan, eğer $|x-a| > \delta$ ise

$$2M\left(1 - \frac{(x-a)^2}{\delta^2}\right) < 0 < \frac{\epsilon}{2}$$

olduğundan,

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x)| + |f(a)| \le 2M < \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2 + \frac{\epsilon}{2}$$

olur.

Demek ki $[0,1]$ aralığının her x ve a elemanları için her iki durumda da,

$$|f(x) - f(a)| \le \frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2 + \frac{\epsilon}{2}$$

oluyor.

Şimdi a herhangi bir gerçel sayı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
|B_n(f) - f(a)| = |B_n(f) - f(a)| &\le B_n(|f - f(a)|) \le B_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(x-a)^2 + \frac{\epsilon}{2}\right)\\
&\le \frac{2M}{\delta^2}B_n((x-a)^2) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{2M}{\delta^2}B_n(x^2 - 2ax + a^2) + \frac{\epsilon}{2}\\
&= \frac{2M}{\delta^2}(B_n(x^2) - 2aB_n(x) + a^2) + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

olur. Sağdaki $B_n(x^2)$ ve $B_n(x)$ terimlerini hesaplayalım şimdi; sonra kaldığımız yerden devam edeceğiz.

Sav 1. $B_n(x) = x$.

Sav 1'in Kanıtı: $m = n - 1$ ve $\ell = k - 1$ tanımlarıyla yapacağımız oldukça basit bir hesap:

$$\begin{aligned}
B_n(x)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{\ell=0}^{m} \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} = x.
\end{aligned}$$

Sav 2. $B_n(x^2)(x) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}$.
Sav 2'nin Kanıtı: Sırasıyla $m = n-1, \ell = k-1$, $p = m-1$, $r = \ell - 1$ tanımlarını kullanan belki biraz uzun ama oldukça basit bir hesap:

$$\begin{aligned}
B_n(x^2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{\ell=0}^{m} (\ell+1) \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum_{\ell=0}^{m} \ell \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum_{\ell=1}^{m} \ell \frac{m!}{\ell!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(\sum_{\ell=1}^{m} \frac{m!}{(\ell-1)!(m-\ell)!} x^{\ell} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(mx \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(m-1)!}{(\ell-1)!(m-\ell)!} x^{\ell-1} (1-x)^{m-\ell} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n} \left(mx \sum_{r=0}^{p} \frac{p!}{r!(p-r)!} x^{r} (1-x)^{p-1} + 1 \right) \\
&= \frac{x}{n}(mx+1) = \frac{x}{n}((n-1)x+1) = x^2 + \frac{x-x^2}{n}.
\end{aligned}$$

Sav 1'den önce kaldığımız yerden devam edelim:

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x) - f(a)| &\leq \frac{2M}{\delta^2}(B_n(x^2) - 2aB_n(x) + a^2) + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{2M}{\delta^2}\left(\left(x^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) - 2ax + a^2\right) + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{2M}{\delta^2}\left((x-a)^2 + \frac{x - x^2}{n}\right) + \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Bunun özel bir hali olarak, her $a \in [0, 1]$ için geçerli olan

$$|B_n(f)(a) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\frac{a - a^2}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{4M}{\delta^2 n}$$

eşitsizliğini buluruz. Eğer n'yi yeterince büyük alırsak, mesela

$$n > \frac{8M}{\delta^2 \epsilon}$$

olursa, o zaman

$$|B_n(f)(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır. □

Dikkat ederseniz, Sav 2'de görüleceği üzere, f bir polinom olduğunda bile $B_n(f)$, f'ye eşit olmayabiliyor.

Alıştırmalar

16.1. $B_1(\sqrt{x})$, $B_2(\sqrt{x})$, $B_3(\sqrt{x})$ polinomlarını hesaplayın.

16.2. $[0, 1]$ aralığı üzerinde $\sqrt{x}$'i en fazla 0,001 hatayla hesaplamak için hangi n için $B_n(\sqrt{x})$ polinomunu hesaplamalıyız?

Kısım V

Ekler

17. Exp ve Logaritma - *Yusuf Ünlü*

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu [N4, Bölüm 10.4]'te

$$\exp x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

formülüyle tanımlandı. Daha sonra [N4, Teorem 10.8]'de

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

eşitliğini gösterdik. Ayrıca, [N4, Sonuç 10.9]'da her x kesirli sayısı için $\exp x = e^x$ eşitliği kanıtlandı. Tahmin edileceği üzere bu eşitlik her x gerçel sayısı için geçerlidir ancak [N4]'te bu kanıtlanamazdı çünkü o aşamada henüz gerçel sayılarla üs alma tanımlanmamıştı, yani $x \in \mathbb{Q}$ olmadıkça okurun o aşamada e^x sayısının anlamını henüz bilmiyor olması gerekirdi. $\exp x = e^x$ eşitliğinin her x gerçel sayısı için geçerli olduğu ancak bu ciltte ve Teorem 11.1 olarak kanıtlandı. Bu bölümde, $\exp x = e^x$ eşitliğini daha basit ve daha doğrudan bir yöntemle göstereceğiz ve bunu yaparken aynı zamanda analizin en önemli fonksiyonlarından olan logaritma fonksiyonunu da (kitaptakinden farklı bir biçimde) tanımlayacağız.

Bu bölümde lim, $\lim_{n\to\infty}$ anlamına kullanılacaktır.

Önsav 17.1. *Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n = 1$ olur.*

Kanıt: Bernoulli eşitsizliğinden dolayı [N4, Önsav 3.16], yeterince büyük n sayısı için,

$$1 - \frac{x}{n} \leq \left(1 - \frac{x}{n^2}\right)^n \leq 1$$

olur. Bu eşitsizliklerden ve Sandviç teoreminden [N4, Teorem 5.1] önermenin doğruluğu görülür. □

Önsav 17.2. *Her $x \in \mathbb{R}$ için $\exp x \neq 0$ ve $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ olur.*

Kanıt: Bir önceki önsavı x yerine x^2'ye uygularsak,

$$\exp x \, \exp(-x) = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$$

elde ederiz. □

Önsav 17.3. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $\exp x > 0$ *olur.*

Kanıt: Önsav 17.2'den dolayı $\exp x \neq 0$. Ayrıca yeterince büyük n doğal sayıları için

$$0 < 1 + \frac{x}{n}$$

olacağından

$$\exp x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 0$$

olur. $\exp x \neq 0$ olduğundan $\exp x > 0$ olduğu görülür. □

$x \in \mathbb{R}$ ise yeteri kadar büyük n doğal sayıları için, terimleri $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ olan dizinin artan dizi olduğunu [N4, Önsav 10.2]'den biliyoruz. O halde

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp x \tag{1}$$

olur. Buradan

$$x \leq n\left(\sqrt[n]{\exp x} - 1\right)$$

çıkar. Doğal olarak akla,

$$\left(n\left(\sqrt[n]{\exp x} - 1\right)\right)_n$$

dizisinin limitinin olup olmadığı ve eğer limit varsa limitin x olup olmayacağı soruları geliyor. Daha genel olarak şu soruyu soralım: $0 < a \in \mathbb{R}$ ise

$$\left(n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right)_n$$

dizisinin limiti var mıdır? Bu sorunun cevabını ve ilginç sonuçlarını aşağıda verelim.

Önsav 17.4. $0 < x \in \mathbb{R}$ *için* $x_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ *tanımını yapalım.*
i. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_{n+1} \leq x_n$ *olur.*
ii. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\frac{x-1}{x} \leq x_n \leq x - 1$ *olur.*

Kanıt: $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ve $0 < x$ olduğundan, [N4, Sonuç 3.20]'ye göre,

$$x_{n+1} = \frac{x^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = x_n$$

olur. Bunun özel bir durumu olarak,

$$x_n = \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \leq x_1 = x - 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte x yerine $1/x$ alınırsa,

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{x} - 1$$

elde edilir ve bu eşitsizliği yeniden düzenleyerek

$$\frac{x-1}{x} \sqrt[n]{x} \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = x_n$$

eşitsizliğini buluruz. Buradan

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x}\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \frac{x-1}{x}\sqrt[n]{x} \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

çıkar. □

Görüldüğü gibi $0 < x \in \mathbb{R}$ ise, terimleri $x_n = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$ olarak tanımlanan dizi azalan ve alttan sınırlı bir dizidir. O halde bu dizi yakınsaktır. Bu dizinin limitini $\ln x$ ile gösterelim:

$$\ln x = \lim n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right).$$

Önsav 17.5. *x, $y \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $r \in \mathbb{Q}$ olsun.*
i. $\ln xy = \ln x + \ln y$.
ii. $\ln 1 = 0$.
iii. $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
iv. $\ln x^r = r \ln x$.
v. $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.
vi. $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *kesin artan bir fonksiyondur.*

Kanıt: i. Basit bir hesap:

$$\begin{aligned} n\left(\sqrt[n]{xy} - 1\right) &= n\left(\sqrt[n]{xy} - \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{y} - 1\right) \\ &= n\left(\sqrt[n]{xy} - \sqrt[n]{y}\right) + n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right) \\ &= \sqrt[n]{y}\, n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) + n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right) \end{aligned}$$

eşitliğinde n'yi sonsuza götürerek ve

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y} = 1$$

eşitliğini kullanarak istenilen eşitlik kanıtlanır.

ii. Bir önceki eşitlikte $x = y = 1$ alınırsa, $\ln 1 = 0$ bulunur.
iii. $\ln \frac{1}{x} + \ln x = \ln \frac{1}{x} x = \ln 1 = 0$ olur.
iv. i'den dolayı, tümevarımla, $0 \leq n$ bir tamsayıysa $\ln x^n = n \ln x$ elde edilir. iii'ten dolayı n bir tamsayı ve $n < 0$ ise

$$\ln x^n = -\ln x^{-n} = -(-n) \ln x = n \ln x$$

olur. p, q tamsayılar ve $0 < q$ ise

$$q \ln x^{\frac{p}{q}} = \ln x^{\frac{p}{q} q} = \ln x^p = p \ln x$$

ve buradan da

$$\ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln x$$

elde edilir.
v. Önsav 17.4.ii'ye göre, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{x-1}{x} \leq n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \leq x - 1$$

olduğundan limit alınarak istenen sonuç elde edilir.
vi. $0 < x < y$ olduğunu varsayalım. Önsav 17.4.ii'ye göre,

$$0 < \frac{y-x}{y} = \frac{y/x - 1}{y/x} \leq \ln \frac{y}{x} = \ln y - \ln x$$

olur. O halde $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyondur. □

Önsav 17.6. $0 < x \in \mathbb{R}$ *ve* $t \in (0, \infty)$ *olsun. O zaman şunlar olur:*
i. $\ln (\exp x) = x$.
ii. $\exp (\ln t) = t$.
iii. $0 < a$ *ise* $a^x = \exp (x \ln a)$.
iv. $e^x = \exp x$.

Kanıt: i. (1)'den dolayı, yeterince büyük n doğal sayıları için

$$x \leq n \left(\sqrt[n]{\exp x} - 1 \right)$$

olduğundan, limit alınırsa

$$x \leq \ln (\exp x)$$

bulunur. Bu eşitsizlik her x için doğru olduğundan,

$$-x \leq \ln (\exp(-x)) = \ln \left(\frac{1}{\exp x} \right) = -\ln(\exp x)$$

eşitsizliği de doğrudur. Demek ki $\ln(\exp x) = x$ olur.

ii. i'den dolayı $\ln(\exp(\ln x)) = \ln x$ olur. Kesin artan olduğundan, ln fonksiyonu birebirdir. O halde $\exp(\ln x) = x$ olur.

iii. $x \in \mathbb{R}$ ve $(r_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ dizisinin limiti x olsun. Üs almanın tanımı gereği, $0 < a$ ise $(a^{r_n})_n$ dizisinin limiti a^x olur. Demek ki,

$$\frac{a^{r_n} - a^x}{a^{r_n}} = \frac{a^{r_n}/a^x - 1}{a^{r_n}/a^x} \leq \ln\left(\frac{a^{r_n}}{a^x}\right) = \ln a^{r_n} - \ln a^x \leq \frac{a^{r_n} - a^x}{a^x}$$

olur. Limit alınırsa

$$\ln a^x = \lim \ln a^{r_n} = \lim r_n \ln a = x \ln a$$

bulunur. Buradan

$$a^x = \exp(\ln a^x) = \exp(x \ln a)$$

elde edilir.

iii. e'nin tanımından dolayı [N4, Bölüm 10.1],

$$\exp 1 = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

eşitliğini biliyoruz. O halde

$$\ln e = \ln(\exp 1) = 1$$

eşitliği geçerlidir. Buradan ve ii'den dolayı,

$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$$

elde edilir. □

18. Harmonik Seri, Euler-Mascheroni Sabiti ve Asallar - *Tosun Terzioğlu*

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ serisine ***harmonik seri*** dendiğini ve harmonik serinin ıraksadığını biliyoruz. Eğer $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise

$$s(X) = \sum_{n \in X} \frac{1}{n}$$

serisine bakalım. Eğer bu seri sonsuza ıraksıyorsa, X kümesini "kalabalık" bir küme olarak algılayabiliriz. Aksine seri yakınsıyorsa X kümesini küçük bir küme olarak düşünebiliriz. Örneğin eğer X sonlu bir kümeyse, seri elbette sonlu bir sayı olur. Ama X sonsuz bir küme olduğunda da seri sonlu olabilir, örneğin eğer X tamkareler kümesiyse, $s(X)$'in yakınsak olduğunu biliyoruz. Demek ki bu anlamda "az" tamkare var. Eğer X kümesi onluk tabanda içinde 0 rakamı bulunmayan sayılar kümesiyse, [N4, Örnek 15.6]'da $s(X)$'in de sonlu olduğunu kanıtlamıştık. Nitekim n haneli "rastgele" bir sayının hanelerinden en az birinin 0 olma olasılığı n ile birlikte artar, n sonsuza gittiğinde bu olasılık 1'e yakınsar, yani hane sayısı büyüdükçe X'teki eleman sayısı oranı çok düşer. Şimdi $X = \mathbb{P}$ asal sayılar kümesi olsun. "$s(\mathbb{P})$ serisi yakınsak mıdır" sorusu ilginç bir sorudur. Bu bölümde bu soruyu (olumsuz olarak) yanıtlayacağız[1].

Birkaç basit eşitsizlikten başlayalım. Eğer $x \geq 0$ ise, elbette

$$1 + x \leq e^x \tag{1}$$

olur. Bunu görmek için e^x'i kuvvet serisi olarak ifade etmek yeterlidir. Şimdi $x \geq 0$ için

$$1 - x \leq e^{-x} \tag{2}$$

[1] Bu yazı [TT]'den bu kitap için özellikle derlenmiştir. İzin veren Tosun Terzioğlu'na çok teşekkür ederiz.

eşitsizliğini kanıtlayalım. Eğer $x \geq 1$ ise, sol taraf pozitif olamaz ve eşitsizlik bariz. Bundan böyle $x \in (0,1)$ varsayımını yapalım. Bu durumda,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{x}{2n+1}\right) \geq 1 - x$$

olur, çünkü sildiğimiz parantezler pozitiftirler.

Bu eşitsizliklerden, her $x \geq 0$ için

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \tag{3}$$

eşitsizlikleri çıkar. Nitekim sağdaki eşitsizlik (1)'in logaritmasıdır. Soldaki eşitsizliği kanıtlamak için $y = \frac{x}{1+x} \in [0,1)$ tanımını yapalım. O zaman $x = \frac{y}{1-y}$ ve $1 + x = \frac{1}{1-y}$ olur ve kanıtlamak istediğimiz eşitsizlik $y \leq -\ln(1-y)$ eşitsizliğine, yani $\ln(1-y) \leq -y$ eşitsizliğine bürünür, ki bu da (2) eşitsizliğinin logaritmasıdır.

(3)'te $x = 1/k$ koyarsak, teleskopik sadeleşmeden sonra

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k} \tag{4}$$

elde ederiz. Bunları $k = 1, \ldots, n$ için toplarsak,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{5}$$

buluruz. Harmonik serinin kısmi toplamlarına H_n diyelim:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Böylece bulduğumuz formül,

$$H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$$

olarak ya da

$$H_n + \frac{1}{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + 1$$

olarak yazılır. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln(n+1)} = 1$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$$

çıkar. Yani harmonik serinin kısmi toplamları dizisi $(H_n)_n$, limitte $(\ln n)_n$ dizisi gibi davranıyor. Peki $(H_n - \ln n)_n$ dizisi yakınsar mı, yakınsarsa kaça yakınsar?

$$\gamma_n = H_n - \ln n$$

olsun. (5)'e göre $\ln n < \ln(n+1) \leq H_n$ olduğundan, $H_n > 0$ olur. Ayrıca (4)'e göre

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) \leq 0$$

elde ederiz. Demek ki $(\gamma_n)_n$ dizisi pozitif ve azalan bir dizidir. Dolayısıyla bir limiti vardır. ***Euler-Mascheroni sabiti*** adı verilen bu limit γ olarak yazılır. Değeri yaklaşık olarak 0,57721'dir. Matematikte sık sık karşılaşılan bu sayının rasyonel olup olmadığını bile bilmiyoruz!

Şimdi asalların harmonik serisine bakalım. Asal sayıları, hiçbirini unutmadan, sırasıyla $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ olarak yazarak elde edilen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

serisine ***asalların harmonik serisi*** denir.

Her sayıyı "karesiz" bir sayıyla, yani 1'den farklı bir tamkareye bölünmeyen bir sayıyla bir tamkarenin çarpımı olarak tek bir biçimde yazabiliriz. Örneğin, $2^3 \times 3^4 \times 5^9 \times 7$ sayısı,

$$(2 \times 5 \times 7) \times (2 \times 3^2 \times 5^4)^2$$

olarak yazılır. Her $i \in \mathbb{N}$ sayısını karesiz bir r_i sayısı için

$$i = r_i m_i^2$$

olarak yazalım. (5)'ten

$$\ln(n+1) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i m_i^2}$$

sonucu çıkar. Tabii bu toplamdaki m_i sayıları tekrarlanabilir, $12 = 3 \cdot 2^2$ ve $20 = 5 \times 2^2$ örneğinde olduğu gibi. Öyleyse

$$I(k) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : m_i = k\}$$

yazalım ve p_{j_n} ile de her $n \geq 2$ için bu n sayısından büyük olmayan en büyük asal sayıyı gösterelim. Yani

$$p_{j_n} \leq n < p_{j_{n+1}}$$

olsun. Bir de

$$P_n = \left\{ \prod_{k=1}^{j_n} p_k^{\epsilon(k)} : \epsilon(k) \in \{0,1\} \right\}$$

kümesini tanımlayalım. P_n tam tamına, n'den küçük asalların çarpımı olan karesiz sayılar kümesidir. Yukarıdaki eşitsizlikte yer alan her r_i sayısı P_n kümesine ait. Öyleyse

$$\sum_{i \in I(k)} \frac{1}{r_i m_i^2} = \left(\sum_{i \in I(k)} \frac{1}{r_i} \right) \frac{1}{k^2} \leq \left(\sum_{r \in P_n} \frac{1}{r} \right) \frac{1}{k^2}$$

eşitsizliği geçerli. Sağ tarafta beliren sonlu toplam k'dan bağımsızdır. Bu toplamı

$$\sum_{r \in P_n} \frac{1}{r} = \prod_{\ell=1}^{j_n} \left(1 + \frac{1}{p_\ell} \right)$$

biçiminde yazabiliriz. Bunu görmek için sağdaki çarpmayı yapmak yeterlidir. Sonuçta

$$\ln(n+1) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \prod_{\ell=1}^{j_n} \left(1 + \frac{1}{p_\ell} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

eşitsizliğini elde ettik. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki seri yakınsak. Toplamını A ile gösterelim ve $j_n \leq n$ olduğunu hatırlayalım. Böylece

$$\ln(n+1) \leq A \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p_k} \right)$$

eşitsizliğini bulduk. Bu eşitsizliğin sağ tarafına $1 + x \leq e^x$ eşitsizliğini uygularsak

$$\ln(n+1) \leq A\, e^{\sum_{k=1}^{n} 1/p_k}$$

sonucuna varırız. Tekrar logaritma alarak

$$\ln(\ln(n+1)) \leq \ln A + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}$$

elde ederiz. Ama

$$\lim_{n \to \infty} \ln \ln(n+1) = \infty.$$

Öyleyse $\sum_{k=1}^{\infty} 1/p_k$ ıraksak bir seri.

Bu da asalların sonsuzluğunun bir başka kanıtını verir.

19. Abel Yakınsaklık Teoremi

Bu bölümde soracağımız ve olumlu olarak yanıtlayacağımız soru şu: Diyelim yakınsaklık yarıçapı R olan bir $\sum a_i x^i$ kuvvet serisi verilmiş. $x = R$ iken serinin yakınsak ya da ıraksak olduğunu bilemeyiz. Ama diyelim bir biçimde,

$$\sum a_i R^i$$

serisinin yakınsak olduğunu kanıtladık. O zaman

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{i \geq 0} a_i x^i = \sum_{i \geq 0} a_i R^i$$

olur mu? Yanıt olumlu. Bu sonuç, Abel yakınsaklık (ya da limit) teoremi olarak bilinir.

Abel yakınsaklıklık teoremini bu genellikle kanıtlamadan önce aynı teoremi

$$\sum a_i R^i$$

serisi mutlak yakınsak olduğu durumda kanıtlayalım. Bu durumda kanıt çok daha kolay, hatta Weierstrass M-testi sayesinde neredeyse bariz. Nitekim bu seri mutlak yakınsaksa, Weierstrass M-testinde,

$$\begin{aligned} X &= [-R, R], \\ M_i &= |a_i R^i|, \\ M &= \sum |a_i R^i|, \\ f_i(x) &= a_i x^i \end{aligned}$$

olarak alırsak, $\sum a_i x^i$ serisinin $[-R, R]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu görürüz. Yani

$$f(x) = \sum a_i x^i$$

ise, $[-R, R]$ üzerinde

$$f(x) \stackrel{u}{=} \lim_{n \to \infty} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$$

olur. Sonuç 9.4'ten dolayı f, X üzerine süreklidir. Demek ki

$$f(R) = \lim_{x \to R^-} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n).$$

Şimdi teoremi en genel haliyle yazıp kanıtlayalım:

Teorem 19.1 (Abel Yakınsaklık Teoremi)**.** *$\sum a_i x^i$ serisi $-R < x \leq R$ için yakınsak olsun. O zaman*

$$\lim_{x \to R^-} \sum a_i x^i = \sum a_i R^i$$

olur, yani $(-R, R]$ üzerine tanımlanmış olan,

$$f(x) = \sum a_i x^i$$

fonksiyonu R'de (ya da R'nin sağında) süreklidir.

Kanıt: Kolaylık olsun diye, a_i yerine $a_i R^i$ alarak R'nin 1 olduğunu varsayabiliriz. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki, eğer $0 < 1 - x < \delta$ ise,

$$|f(x) - f(1)| < \epsilon$$

olacak ve böylece dilediğimizi kanıtlamış olacağız. x'i 0'dan büyük almanın bir zararı olamaz, öyle yapacağız.

[N4]'te Teorem 16.6 olarak kanıtladığımız Cauchy çarpım formülünü kullanacağız: Eğer $x \in (-1, 1)$ ise,

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j$$

tanımını yaparak,

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \left(\sum x^i\right)\left(\sum a_i x^i\right) = \sum c_i x^i$$

eşitliğini buluruz. Buradan,

$$\begin{aligned}
f(x) - f(1) &= (1-x)\left(\sum c_i x^i\right) - f(1) \\
&= (1-x)\left(\sum c_i x^i\right) - (1-x)\left(\sum x^i\right) f(1) \\
&= (1-x)\left(\sum c_i x^i\right) - (1-x)\left(\sum f(1) x^i\right) \\
&= (1-x)\sum (c_i - f(1)) x^i
\end{aligned}$$

çıkar. Dolayısıyla,

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x) \sum |c_i - f(1)| x^i.$$

Öte yandan varsayıma göre,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = f(1).$$

Demek ki öyle bir N var ki, her $n > N$ için,

$$|c_n - f(1)| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Bunu da göz önünde bulundurarak hesaplara kaldığımız yerden devam edelim:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &\leq (1-x) \sum |c_i - f(1)|\, x^i \\
&< (1-x) \sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| x^i + (1-x) \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=N}^{\infty} x^i \\
&\leq (1-x) \sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + (1-x) \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=N}^{\infty} x^i \\
&= (1-x) \sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + (1-x) \frac{\epsilon}{2} \frac{x^N}{1-x} \\
&= (1-x) \sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + \frac{\epsilon}{2} x^N \\
&\leq (1-x) \sum_{i=0}^{N-1} |c_i - f(1)| + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

buluruz.

$$A = \max\{|c_0 - f(1)|, \ldots, |c_{N-1} - f(1)|\}$$

tanımını yapıp tekrar hesaplara kaldığımız yerden devam edelim:

$$|f(x) - f(1)| \leq (1-x) AN + \frac{\epsilon}{2}$$

elde ettik. Şimdi δ'yı $\epsilon/3AN$ seçersek, dilediğimiz

$$0 < 1 - x < \delta \to |f(x) - f(1)| < \epsilon$$

önermesini elde ederiz. □

20. Lebesgue Sayısı

Sınırlı bir $A \neq \emptyset$ altkümesinin ***çapı***,

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki oldukça teknik önsav tıkız kümelerin açık örtülerinin çok küçük çaplı elemanlarının gereksiz olduğunu söylüyor.

Önsav 20.1 (Lebesgue Sayısı)**.** *X, $\mathbb{R}$'nin tıkız bir altkümesi ve $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ailesi, X'in açık bir örtüsü olsun. O zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, X'in çapı en fazla δ olan her altküme $\mathcal{U}$ ailesinin bir elemanının (yani U_i'lerden birinin) altkümesidir.*

Kanıt: Eğer U_i'lerden biri X'e eşitse, kanıtlayacak bir şey yok. Bundan böyle hiçbir U_i'nin X'e eşit olmadığını varsayalım. $\mathcal{U}$ ailesinin sonlu bir $\mathcal{V}$ altörtüsünü seçelim. Diyelim,

$$\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_n\}.$$

$C_i = U_i^c$ olsun. C_i kapalıdır. $d(x, C_i)$, x'in C_i'ye olan uzaklığı olsun (bkz. Önsav 1.8).

$$X \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

olduğundan,

$$C_1 \cap \ldots \cap C_n \cap X = \emptyset$$

olur. Demek ki X'in her x elemanı C_i kümelerinden en az birinin elemanı değildir ve, C_i kapalı olduğundan, Önsav 14.1.i'e göre, $d(x, C_i)$ sayılarından en az biri pozitiftir. Demek ki

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) > 0$$

formülüyle tanımlanan $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu pozitif değerler alır. Önsav 1.8'e göre f fonksiyonu süreklidir. X tıkız olduğundan, Sonuç 14.6'ya göre f minimum değerini alır. Bu minimum değer x_0'da alınmış olsun ve

$$\delta = f(x_0) > 0$$

olsun. B, yarıçapı δ'dan küçük bir altküme olsun. $x \in B$ olsun. Demek ki

$$B \subseteq (x - \delta,\ x + \delta).$$

Şimdi, $d(x, C_1), \ldots, d(x, C_n)$ sayılarının en büyüğüne $d(x, C_i)$ diyelim. O zaman,

$$\delta \le f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) \le d(x, C_i)$$

olur. Demek ki

$$(x - \delta,\ x + \delta) \cap C_i = \emptyset,$$

yani

$$(x - \delta,\ x + \delta) \subseteq U_i.$$

Ama $B \subseteq (x - \delta,\ x + \delta)$ olduğundan, bu son içindelik istediğimizi kanıtlar. □

X'in verilmiş bir $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü için, yukarıdaki önsavdaki gibi bir $\delta > 0$ sayısına $\mathcal{U}$'nun ***Lebesgue sayısı*** adı verilir. Elbette bir Lebesgue sayısından daha küçük sayılar da Lebesgue sayılarıdır.

Lebesgue sayısını kullanarak Teorem 14.7'yi bir kez daha kanıtlayalım. Önce teoremi anımsatalım:

Teorem. *Tanım kümesi $\mathbb{R}$'nin tıkız bir altkümesi olan her sürekli fonksiyon düzgün süreklidir.*

Kanıt: $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\epsilon > 0$ olsun.

$$\left(y - \frac{\epsilon}{2}, y + \frac{\epsilon}{2}\right)_{y \in \mathbb{R}}$$

açık aralıklar ailesi $\mathbb{R}$'nin açık bir örtüsüdür. f sürekli olduğundan,

$$\left(f^{-1}\left(y - \frac{\epsilon}{2}, y + \frac{\epsilon}{2}\right)\right)_{y \in \mathbb{R}}$$

ailesi de X'in bir açık örtüsüdür. $\delta > 0$ bu açık örtünün bir Lebesgue sayısı olsun. Şimdi $x_1,\ x_2 \in X$ olsun ve $d_X(x_1, x_2) < \delta$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x_1,\ x_2\}$ kümesinin çapı δ'dan küçüktür. Demek ki bir $y \in Y$ için,

$$\{x_1,\ x_2\} \subseteq f^{-1}(y - \epsilon/2,\ y + \epsilon/2),$$

yani

$$x_1,\ x_2 \in f^{-1}(y - \epsilon/2,\ y + \epsilon/2),$$

yani

$$f(x_1),\ f(x_2) \in (y - \epsilon/2,\ y + \epsilon/2)$$

olur. Buradan da

$$d_Y(f(x_1),\ f(x_2)) \le d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde ederiz. f'nin düzgün sürekliliği kanıtlanmıştır. □

21. $\ln(1+x)$ Fonksiyonunun Kuvvet Serisi - *Yusuf Ünlü*

Bir sonraki ciltte, türev ve Taylor serisi konularını işlediğimizde, $\log(1+x)$ fonksiyonunu $(-1,\, 1]$ aralığında kuvvet serisi olarak kolaylıkla ifade edebileceğiz. Bu bölümde aynı sonuca türev kullanmadan ulaşacağız. Kanıtlayacağımız teorem şöyle:

Teorem 21.1. *$x \in (-1,\, 1]$ için*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$$

olur[1].

Teoremi önce $(-1,\, 1)$ aralığı için kanıtlayacağız. Bu amaçla bir $0 < s < 1$ sayısı sabitleyelim ve teoremi $[-s,\, s]$ aralığındaki x'ler için kanıtlayalım. $x = 1$ için eşitlik, bu yaptıklarımızdan ve Abel teoreminden hemen çıkacak.

Önsav 21.2. *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, her $z \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n\to\infty} nf(z/n) = 0$ eşitliğini sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. ($f(x) = Kx^2$ fonksiyonunun bu özelliği vardır.) Her $x,\, y \in [a,\, b]$ için $|H(y) - H(x)| \le f(y-x)$ eşitsizliğini sağlayan her $H : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sabittir.*

Kanıt: $a < x < y < b$ olsun. $n \ge 1$ bir tamsayı olsun. Her $i = 0, 1, \ldots, n$ için,

$$x_i = x + i\,\frac{y-x}{n}$$

olsun. Şimdi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}|H(y) - H(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(H(x_i) - H(x_{i-1}))\right| \le \sum_{i=1}^{n}|H(x_i) - H(x_{i-1})|\\ &\le \sum_{i=1}^{n} f(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{y-x}{n}\right) = nf\left(\frac{y-x}{n}\right)\end{aligned}$$

ve ardından bulduğumuz eşitsizlikte n'yi sonsuza götürelim. □

[1] Bölüm 22'de aynı sonuca çok daha cebirsel bir yöntemle ulaşacağız.

Önsav 21.3. *Her* $x > 0$ *için*

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

olur.

Kanıt: İkinci eşitsizlikte x yerine $1/x$ yazarsak birinci eşitsizliği buluruz. Dolayısıyla ikinci eşitsizliği kanıtlamak yeterli. İkinci eşitsizliğin her iki tarafına da artan bir fonksiyon olduğunu bildiğimiz exp fonksiyonunu uygularsak, bu eşitsizliğin $ex \leq e^x$ eşitsizliğine denk olduğunu görürüz. Şimdi $y > -1$ için, $x = 1 + y$ yazalım. Bu durumda kanıtlamamız gereken eşitsizlik $e + ey \leq ee^y$, yani

$$1 + y \leq e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

eşitsizliğine dönüşür. Her iki taraftan $1 + y$'leri sadeleştirdikten sonra sağda kalan seriyi ikişer ikişer gruplarsak, her $y > -1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y^{2n}}{(2n)!} + \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \geq 0$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Toplanan her parantezin pozitif olduğunu gösterirsek, istediğimizi kanıtlamış oluruz. Sadeleştirmeyi yaparsak,

$$1 + \frac{y}{2n+1} \geq 0$$

eşitsizliği göstermemiz gerekir, ki $y > -1$ olduğundan bu son eşitsizlik doğrudur. □

İkinci Kanıt: İkinci eşitsizlikte x yerine $1/x$ yazarsak birinci eşitsizliği buluruz. Dolayısıyla ikinci eşitsizliği kanıtlamak yeterli.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y$$

eşitliğini biliyoruz [N4]. Yeterince büyük n için $1 + y/n > 0$ olur; bu tür n'ler için, Bernoulli eşitsizliğinden,

$$1 + y = 1 + n\,\frac{y}{n} \leq \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

buluruz. Limit alırsak,

$$1 + y \leq e^y$$

buluruz. $y = \ln x$ yazarsak,

$$1 + \ln x \leq x$$

çıkar. □

Önsav 21.4. *Eğer $|x|, |y| \leq s$ ve $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise*

$$\left|y^k - x^k\right| \leq k|y-x|s^{k-1}$$

olur.

Kanıt: $k = 1$ için eşitlik aşikâr. Bundan böyle $k \geq 2$ olsun.

$$\begin{aligned}\left|y^k - x^k\right| &= \left|(y-x)\left(y^{k-1} + y^{k-2}x + \cdots + yx^{k-2} + x^{k-1}\right)\right| \\ &\leq |y-x|\left(|y|^{k-1} + |y|^{k-2}|x| + \cdots + |y||x|^{k-2} + |x|^{k-1}\right) \\ &\leq |y-x|\left(|s|^{k-1} + |s|^{k-2}|s| + \cdots + |s||s|^{k-2} + |s|^{k-1}\right) \\ &= k\,|y-x|\,|s|^{k-1}\end{aligned}$$

olur. □

Önsav 21.5. *Eğer $|x|, |y| \leq s$ ve $n \geq 1$ bir tamsayıysa*

$$\left|\frac{y^n - x^n}{n} - (y-x)x^{n-1}\right| \leq \frac{n-1}{2}\,(y-x)^2 s^{n-2}$$

olur.

Kanıt: $n = 1$ için sonuç bariz. $n \geq 2$ için

$$P_n = y^n - x^n - n(y-x)x^{n-1}$$

tanımını yapalım.

$$|P_n| \leq \frac{n(n-1)}{2}\,(y-x)^2 s^{n-2}$$

eşitsizliğini göstermek istiyoruz. $P_2 = y^2 - x^2 - 2(y-x)x = (y-x)^2$ olduğundan, $n = 2$ ise eşitlik vardır. Bundan böyle $n \geq 3$ olsun.

$$\begin{aligned}P_n &= y^n - x^n - n(y-x)x^{n-1} \\ &= (y-x)\left(y^{n-1} + y^{n-2}n + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}\right) - n(y-x)x^{n-1} \\ &= (y-x)\left(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1} - nx^{n-1}\right) \\ &= (y-x)\left(\left(y^{n-1} - x^{n-1}\right) + \left(y^{n-2} - x^{n-2}\right)x + \cdots + (y-x)\,x^{n-2}\right)\end{aligned}$$

olduğundan, bir önceki önsavdan dolayı,

$$\begin{aligned}|P_n| &\leq |y-x|\left(\left|y^{n-1} - x^{n-1}\right| + \left|y^{n-2} - x^{n-2}\right||x| + \cdots + |y-x|\,|x|^{n-2}\right) \\ &\leq |y-x|^2\left((n-1)s^{n-2} + (n-2)s^{n-3}|x| + \cdots + 2s|x|^{n-3} + |x|^{n-2}\right) \\ &\leq |y-x|^2\left((n-1)s^{n-2} + (n-2)s^{n-3}s + \cdots + 2ss^{n-3} + s^{n-2}\right) \\ &= |y-x|^2 s^{n-2}\left((n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1\right) \\ &= |y-x|^2 s^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

olur. □

Önsav 21.6.
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)s^n = \frac{1}{(1-s)^2}.$$

Kanıt: Serinin yakınsak olduğunu biliyoruz [N4]. Seriyi $1-s$ ile çarparsak, kolay bir hesapla

$$\left(1+2s+3s^2+4s^3+\cdots\right)(1-s) = 1+s+s^2+\cdots = \frac{1}{1-s}$$

buluruz. □

Şimdi artık Teorem 21.1'i kanıtlayabiliriz. x, $y \in (0,\, 1)$ ve

$$s = \max\{|x|,\, |y|\}$$

olsun. Önsav 21.3'e göre,

$$\frac{y-x}{1+y} = \frac{\frac{1+y}{1+x}-1}{\frac{1+y}{1+x}} \le \ln\frac{1+y}{1+x} \le \frac{1+y}{1+x} - 1 = \frac{y-x}{1+x}$$

olur. Bundan,

$$\frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1+y} \le \frac{1}{1-s}$$

olduğundan,

$$0 \le \frac{y-x}{1+x} - \ln\frac{1+y}{1+x} \le \frac{y-x}{1+x} - \frac{y-x}{1+y} = \frac{(y-x)^2}{(1+x)(1+y)} \le \frac{(y-x)^2}{(1-s)^2}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

(1) $$\left|\ln(1+y) - \ln(1+x) - \frac{y-x}{1+x}\right| \le \frac{(y-x)^2}{(1-s)^2}$$

olur. Şimdi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$$

ve

$$\Delta = f(y) - f(x) - \frac{y-x}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{y^n-x^n}{n} - (y-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

tanımlarını yapalım. O zaman,

$$|\Delta| \le \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{y^n-x^n}{n} - (y-x)x^{n-1}\right|$$

ve Önsav 21.5'ten dolayı,

$$|\Delta| \le \frac{1}{2}(y-x)^2 \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)s^{n-2}$$

olur. Buna bir de Önsav 21.6'yı uygularsak,

$$|\Delta| \le \frac{1}{2}\,\frac{(y-x)^2}{(1-s)^2} \tag{2}$$

buluruz. (1) ve (2)'den dolayı, eğer

$$H(x) = \ln(1+x) - f(x)$$

ise,

$$\begin{aligned}
|H(y)-H(x)| &= |\ln(1+y) - \ln(1+x) + f(x) - f(y)| \\
&= \left|\left(\ln(1+y) - \ln(1+x) - \frac{y-x}{1+x}\right) + \left(f(x) - f(y) + \frac{y-x}{1+x}\right)\right| \\
&\le= \left|\ln(1+y) - \ln(1+x) - \frac{y-x}{1+x}\right| + \left|f(x) - f(y) + \frac{y-x}{1+x}\right| \\
&\le \frac{1}{2}\,\frac{(y-x)^2}{(1-s)^2} + \frac{(y-x)^2}{(1-s)^2} \\
&= \frac{3}{2(1-s)^2}\,(y-x)^2
\end{aligned}$$

Şimdi Önsav 21.2'yi uygularsak, H fonksiyonunun bir sabit olduğunu buluruz. Demek ki $\ln(1+x) - f(x)$ fonksiyonu bir sabit. $x = 0$'da fonksiyon

$$\ln 1 - f(0) = 0$$

değerini aldığından, bu sabit 0'dır, yani $\ln(1+x) = f(x)$ olur. Teorem 21.1, $x \in (-1, 1)$ için kanıtlanmıştır.

Teoremi $x = 1$ için kanıtlamak için Abel teoreminden (Teorem 19.1) ve ln fonksiyonunun sürekliliğinden yararlanacağız:

$$\ln 2 = \ln(1+1) = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Teorem tamamen kanıtlanmıştır.

22. Biçimsel Kuvvet Serileri

Bu kitapta $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonunu

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

formülüyle tanımladık [N4]. Teorem 11.2'de exp fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösterdik. Altbölüm 11.2'de $\ln : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu exp fonksiyonunun ters fonksiyonu olarak tanımladık, yani ln fonksiyonunu, her $x \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $y \in \mathbb{R}$ için,

$$\exp(\ln x) = x \text{ ve } \ln(\exp y) = y$$

olacak biçimde tanımladık. Bölüm 21'de her $x \in (-1, 1]$ için

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

eşitliğini gösterdik. Bu eşitliği göstermek için elbette analizin yöntemlerini kullandık. Demek ki

$$\ell(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

formülü bize bir $\ell : (-1,\, 1] \longrightarrow (-\infty,\, \ln 2]$ fonksiyonu tanımlar. Elbette

$$\ell(-1 + \exp x) = \ln(\exp x) = x$$

ve

$$\exp(\ell(y)) = \exp(\ln(1+y)) = 1 + y$$

olur. Bu eşitliklerin anlamlı olabilmesi için $x \in (-\infty,\, \ln 2]$ ve $y \in (-1,\, 1]$ olarak alınmalı. Bu bölümde bu eşitlikleri ve başkalarını tamamen cebirsel bir yoldan kanıtlayacağız. (Bkz. Altaltbölüm 22.9.1.) Bunu kuvvet serilerine bambaşka bir açıdan bakarak başaracağız. Bakış açımızı bir örnekle açıklayalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

sonsuz toplamı sadece $x \in (-1, 1]$ için anlamlıdır; diğer x sayıları için seri ıraksaktır. Ama biz bu bölümde bu sonsuz toplamı bir sayı olarak değil, biçimsel (yani anlamsız) bir nesne olarak ele alacağız; bu sayede yakınsaklıkla ilgili bir sorunumuz olmayacak ve böylece analiz değil cebir yapacağız. Bir başka aydınlatıcı örnek daha verelim: $x \in (-1, 1)$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

yani

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1$$

olur. Bu son eşitlikteki $x \in (-1, 1)$ sayısını bu bölümde soyut ve anlamsız bir X simgesi olarak görüp,

$$(1-X)\sum_{n=0}^{\infty} X^n = 1$$

eşitliğinden bahsedeceğiz. ($X^0 = 1$ ve $X^1 = X$ anlaşması yapıyoruz.)

22.1 Polinomlar

Bu bölümde tanımlayacağımız "biçimsel kuvvet serileri", polinomların genelleşmiş bir halidir. Dolayısıyla önce kısaca polinomlardan sözedelim. Bir ***polinom***,

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

biçiminde ya da daha kısa olarak,

$$\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$$

biçiminde yazılan bir ifadedir. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$'lere polinomun ***katsayıları*** denir. (Ama bunlar illa "sayı" olmak zorunda değildirler!) a_0'a polinomun ***sabit katsayısı*** denir. Polinomun katsayıları $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gibi, elemanlarını toplayıp, çıkarıp, çarpabileceğimiz matematiksel bir yapıdan (çarpması değişmeli olan bir "halka"dan) seçilir. Şimdilik katsayılarımız, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gibi, adına R diyeceğimiz herhangi bir "halka"dan seçilsin. Halkanın çarpmasının her $a, b \in R$ için $ab = ab$ eşitliğini sağlaması gerekiyor ama; çünkü aksi halde polinomları çarparken sorun yaşarız. Bu bölümde "halka"dan sık sık sözedeceksek de okurun halkanın anlamını bilmeyebileceğinin farkındayız. Bu okurlar "halka" gördükleri yerde, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gibi toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinin tanımlandığı matematiksel yapıları düşünsünler. (Bir halkada illa bölme olmak zorunda değildir.) Halkanın ne anlama geldiğini illa bilmek isteyenler herhangi bir cebir kitabına ya da [N4]'e başvurabilirler.

Bir polinomun bir fonksiyon olmadığına dikkatinizi çekerim. Her $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ polinomu, katsayıların ait olduğu halka üzerinde,

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

kuralıyla tanımlanan bir fonksiyon tanımlar ama polinomun kendisi kesinlikle bir fonksiyon değildir, sadece $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ şeklinde anlamı olmayan soyut ve biçimsel bir ifadedir.

Bir de katsayıların alındığı halkanın her elemanının bir polinom olarak görülebileceğine dikkat çekelim. Nitekim polinomun tanımında $n = 0$ alırsak, halkanın bir elemanı olan a_0'ı buluruz. Yani halkanın her elemanı bir polinomdur. Bu arada (yeri geldi çünkü) her zaman

$$X^0 = 1,\ X^1 = X,\ 1X^n = X^n$$

eşitliklerini varsayacağımızı da belirtelim. Ayrıca, alışılageldiği üzere, $0X^n$ yerine 0 yazma, hatta hiçbir şey yazmama özgürlüğünü alacağız.

Okurun, polinomlarla toplama ve çarpmanın nasıl yapılabileceğini bildiğini varsayıyoruz. Bu işlemlerle ilgili önemli bir gözlemde bulunacağız.

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

ve

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_mX^m$$

polinomları toplanıp çarpıldığında ilk katsayılar (yani sabit katsayılar) sırasıyla

$$a_0 + b_0 \text{ ve } a_0b_0$$

olur. Bu katsayılar sadece ve sadece a_0 ve b_0'a bağımlıdır, diğer katsayılardan bağımsızdır. İkinci katsayılar ise gene sırasıyla

$$a_1 + b_1 \text{ ve } a_0b_1 + a_1b_0$$

olur. Bu katsayılar da sadece ve sadece a_0, a_1, b_0 ve b_1'e bağımlıdır, diğer katsayılardan bağımsızdır. Üçüncü katsayılar da

$$a_2 + b_2 \text{ ve } a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2$$

olur. Bu katsayılar da sadece ve sadece a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ve b_2'ye bağımlıdır, diğer katsayılardan bağımsızdır. Ve bu böyle devam eder. Polinomların toplamının ve çarpımının k'ıncı katsayısı, çarpılan polinomların ilk $k+1$ katsayısına bağımlıdır sadece, daha sonraki katsayılardan bağımsızdır. Genel olarak toplamın k'ıncı katsayısı

$$a_k + b_k$$

ve çarpımın k'ıncı katsayısı

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j$$

olur.

Peki, polinomların sonlu bir toplam olmalarından vazgeçsek ne olur? Gene toplama ve çarpma yapamaz mıyız? Yukarıdaki gibi

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

ve

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_mX^m$$

polinomlarını toplayıp çarpacağımıza, aynı toplama ve çarpma kurallarına uyarak, sonsuza kadar gidebilecek olan

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

ve

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_mX^m + \cdots$$

nesnelerini aynen polinomları çarptığımız gibi toplayıp çarpalım. İlk katsayılar gene polinomlardaki gibi sonlu bir toplamla verilir. İşte sonsuza kadar gidebilen bu tür polinomsu nesnelere ***biçimsel kuvvet serisi*** denir.

Katsayıları R halkasından seçilen polinomlar kümesi $R[X]$ olarak yazılır. $R[X]$ de aynen R gibi bir halkadır. (Hatta R'yi, katsayıları bir başka A halkasında olan $A[Y]$ polinom halkası olarak da alabiliriz ve böylece "iki değişkenli" $A[X,Y]$ halkasını elde ederiz.)

22.2 Biçimsel Kuvvet Serileri

Bir biçimsel kuvvet serisi de bir polinom gibidir ancak sonlu bir toplam olarak yazılma zorunluluğu yoktur, toplanan a_iX^i terimlerinden (ki bunlara ***monom*** adı verilir) sonsuz sayıda olabilir. İşte genel bir kuvvet serisi:

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

Bunu, daha tıkız olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$$

olarak da yazacağız. İlla somut bir örnek gerekiyorsa hemen verelim:

$$1 + X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots$$

bir biçimsel kuvvet serisidir.

$$1 - X + X^2 - X^3 + \cdots + (-1)^n X^n + \cdots$$

bir başka biçimsel kuvvet serisidir. Eğer katsayıları aldığımız halka $\mathbb{Q}$ halkasını içeriyorsa (örneğin katsayı halkamız $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise)

$$\exp X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

ve

$$\ell(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}$$

birer biçimsel kuvvet serisidir. Aynı şekilde,

$$\sin X = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \cdots$$

ve

$$\cos X = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots$$

biçimsel kuvvet serileri de tanımlanır. $\tan X$ biçimsel kuvvet serisini ileride tanımlayacağız. Anlaşılacağı üzere X^0 yerine 1 yazıyoruz.

Bir biçimsel kuvvet serisini $a(X)$ olarak kısaltabileceğimiz gibi a olarak da kısaltabiliriz:

$$a = a(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

Polinomlar, belli bir zaman (yani belli bir göstergeçten) sonra katsayıları hep 0 olan biçimsel kuvvet serileri olarak görülebilirler. Örneğin $1-X$ polinomu

$$1 + (-1)X + 0X^2 + 0X^3 + \cdots + 0X^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisi olarak görülebilir. Demek ki her polinom biçimsel bir kuvvet serisidir ve biçimsel kuvvet serisi genelleştirilmiş polinomlardır.

Tanımdaki a_i katsayıları belli bir R değişmeli halkasından seçilir. (Değişmeli demek, halkanın her r ve s elemanı için $rs = sr$ eşitliği geçerli demektir. Bkz [N4].) Katsayıları R halkasından seçilen biçimsel kuvvet serileri kümesi $R[[X]]$ olarak yazılır. Bir sonraki altbölümde $R[[X]]$'in de aynen R ve $R[X]$ gibi bir halka olduğunu göreceğiz; ama tabii önce biçimsel kuvvet serilerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlamalıyız. Daha önce de söylediğimiz gibi bu işlemler aynen polinom halkalarında olduğu gibi tanımlanacak.

Biçimsel kuvvet serisinin a_0 katsayısına, polinomlarda olduğu gibi, ***sabit katsayı*** denir.

Biçimsel kuvvet serilerindeki X bir sayı olmadığından, biçimsel kuvvet serilerinde (nasıl polinomlarda anlam aranmıyorsa) anlam aranmaz; biçimsel kuvvet serileri oldukları gibi biçimsel olarak kabul edilirler. "Biçimsel" teriminin var oluş nedeni şudur:

$$a(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

ve

$$b(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serilerinin eşit olması için yeter ve gerek koşul her n için $a_n = b_n$ eşitliğidir; yani iki biçimsel kuvvet serisi ancak ve ancak katsayıları eşitse eşit olabilir.

Eğer anlamsız olan X simgesi $1/2$, $\sqrt{2}$, π gibi bir sayı olsaydı, o zaman yazılan sonsuz toplamın bir sayıya eşit olup olmadığı, yani serinin yakınsak olup olmadığı sorusu sorulabilirdi. Örneğin yukarıda tanımladığımız

$$\ell(X) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n}$$

biçimsel kuvvet serisinde X yerine 2 koyarsak seri sonsuza ıraksar.

Bir $\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ polinomunu halkanın bir x elemanında değerlendirebiliriz, yani X yerine halkanın x elemanını koyup $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ toplamının değerini halkada hesaplayabiliriz. Sonlu bir toplam sözkonusu olduğundan, sorun yaşamayız. Ancak biçimsel kuvvet serilerinde toplam sonsuza dek gidebileceğinden, bir biçimsel kuvvet serisini halkanın bir x elemanında değerlendirmek için sonsuz sayıda toplama yapmak zorunda kalabiliriz, ve böyle bir toplama kimi halkalarda kimi x'ler için mümkün olsa da her halkada her x için mümkün değildir. Sonsuz bir toplamın halkada bir anlam kazanması için halkada bir yakınsaklık kavramı tanımlanmış olması gerekir.

Yukarıda söylediklerimizin tek bir istisnası var: Bir biçimsel kuvvet serisini her zaman (yani katsayı halkası ne olursa olsun) 0'da değerlendirebiliriz. Nitekim bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ biçimsel kuvvet serisinde X yerine 0 koyarsak, her $n \geq 1$ için $a_n0^n = 0$ olduğundan geriye sadece a_0 kalır. (Yani kısmi toplamlar dizisi sabit a_0 dizisidir ve sabit a_0 dizisi her metrikte a_0'a yakınsar.) Eğer

$$a(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

bir biçimsel kuvvet serisiyse,

$$a(0) = a_0$$

yazacağız. Örneğin, $\exp(0) = 1$ ve $\ell(0) = 0$ olur.

Şimdi biçimsel kuvvet serilerinde toplamayla çarpma işlemlerini tanımlayalım.

22.3 Toplama ve Çarpma

Biçimsel kuvvet serilerini de aynen polinomlar gibi toplayıp çarpabiliriz. Tanımlar şöyle:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n,$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n$$

Biçimsel kuvvet serilerinde çıkarmayı ve halkanın bir r elemanıyla çarpmayı da tanımlayabiliriz:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) X^n,$$
$$r \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r a_n X^n.$$

Her a, b ve c biçimsel kuvvet serisi ve her $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}
&a + b = b + a,\\
&a(bc) = (ab)c,\\
&ab = ba,\\
&a(b + c) = ab + ac,\\
&-(-a) = a,\\
&a0 = 0a = 0\\
&r(ab) = (ra)b = a(rb)
\end{aligned}$$

gibi beklenen eşitliklerin kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Bir çarpma örneği verelim. Diyelim

$$a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) X^n = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisiyle

$$b(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n X^n = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisini çarpmak istiyoruz.

$$a_i = i + 1 \text{ ve } b_j = (-1)^j$$

tanımlarını yaparsak, çarpmanın tanımına göre,

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

olmak üzere

$$a(X)b(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$$

olur. Hesabı tamamlamak için c_n sayılarını açık bir biçimde bulalım:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} (-1)^j (i+1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}(i+1) \\ &= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (i+1) = (-1)^n [(1-2) + (3-4) + \cdots] \end{aligned}$$

olduğundan (en sondaki toplam sonlu adımda duruyor), kolay bir hesapla,

$$c_{2n} = c_{2n+1} = n+1$$

bulunur. Bir başka yazılımla,

$$c_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

(Burada köşeli parantez, içindeki sayının tamkısmı anlamına gelmektedir.) Demek ki,

$$a(X)b(X) = 1 + X + 2X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 3X^5 + 4X^6 + 4X^7 + \cdots$$

olur. Bunu da

$$\begin{aligned} a(X)b(X) &= 1 + X + 2X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 3X^5 + 4X^6 + 4X^7 + \cdots \\ &= (1+X) + 2X^2(1+X) + 3X^4(1+X) + 4X^6(1+X) + \cdots \\ &= (1+X)(1 + 2X^2 + 3X^4 + 4X^6 + \cdots) \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz.

Biraz ileride de göreceğiz, ama okur daha şimdiden

$$(1+X)b(X) = 1$$

eşitliğini kontrol edebilir. Bunu da kale alırsak $a(X)b(X)$ için bulduğumuz eşitliğin her iki tarafını $1+X$ ile çarparak,

$$a(X) = (1+X)^2(1 + 2X^2 + 3X^4 + 4X^6 + \cdots)$$

eşitliğini buluruz. Demek ki, $a(X)$ biçimsel kuvvet serisi $(1+X)^2$ biçimsel kuvvet serisine (ama aslında polinomuna) $R[[X]]$ halkasında bölünebilir.

Hesapların son derece biçimsel olduğuna dikkatinizi çekerim: X'e herhangi bir anlam yüklemiyoruz, X'i kendi başına bir varlık olarak kabul ediyoruz.

Bu yöntemle birçok eşitliğin şaşırtıcı ve son derece estetik kanıtları yapılabilir. Konumuz bu olmadığından tek bir örnek vermekle yetinelim: her n, m, k doğal sayısı için,

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j}$$

eşitliğini kanıtlayalım. Bunun için

$$(1+X)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} X^i$$

(eğer $i > n$ ise, katsayı 0'dır) ve

$$(1+X)^n(1+X)^m = (1+X)^{n+m}$$

eşitliklerini kullanacağız. Hesaplar şöyle:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m}{k} X^k &= (1+X)^{n+m} = (1+X)^n(1+X)^m \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} X^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j}\right) X^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j}\right) X^k.
\end{aligned}$$

Her iki taraftaki X^k'nın katsayısını eşleyerek dilediğimiz eşitliğe ulaşırız.

Bu eşitliğin ("daha sezgisel" anlamında) daha geometrik kanıtı vardır: n erkek ve m kadının olduğu bir toplulukta k kişilik bir komisyonu kaç farklı biçimde seçebileceğimizi iki farklı biçimde hesaplayalım. Birinci sayım bariz: $n+m$ kişi arasından k kişi seçeceğiz. İkinci sayımı komisyonda bulunan erkek sayısına $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ göre ayrı ayrı yapalım ve bulduğumuz sayıları toplayalım.

Eğer katsayıları içeren halka R ise, biçimsel kuvvet serileri kümesi $R[[X]]$ olarak simgelenir. Hem $R[X]$ hem de $R[[X]]$ birer halkadır ve

$$R \subseteq R[X] \subseteq R[[X]]$$

kapsamaları doğrudur. R'deki işlemler $R[X]$'teki işlemlerle ve $R[X]$'teki işlemler $R[[X]]$'teki işlemlerle çakıştığından R'nin $R[X]$'in, $R[X]$'in de $R[[X]]$'in bir althalkası olduğu söylenir ve

$$R \leq R[X] \leq R[[X]]$$

yazılır.

Alıştırmalar

22.1. $\exp X \cos X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını hesaplayın.

22.2. $\sin X \cos X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını hesaplayın.

22.3. $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

22.4. Eğer R bir bölgeyse, $R[[X]]$ halkasının da bir bölge olduğunu kanıtlayın.

Eğer R bir bölgeyse, $R[[X]]$ halkasının da bir bölge olduğunu Alıştırma 22.4'ten biliyoruz. Demek ki bu durumda $a, b \in R[[X]] \setminus \{0\}$ için $a = bc$ eşitliğini sağlayan en fazla bir tane c biçimsel kuvvet serisi vardır, çünkü eğer $bc = bc'$ ise $b(c - c') = 0$ olur ve $b \neq 0$ olduğundan mecburen $c - c' = 0$ yani $c = c'$ olur. Bu durumda "b, a'yı böler" diyeceğiz ve bazen

$$c = \frac{a}{b}$$

yazacağız. Örneğin, eğer katsayılar halkası kesirli sayıları içeriyorsa, $\frac{\sin X}{X}$ ve $\frac{\exp X - 1}{X}$ biçimsel kuvvet serileri vardır:

$$\frac{\sin X}{X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n+1)!} \text{ ve } \frac{\exp X - 1}{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)!}.$$

Bir sonraki altbölümde ne zaman b'nin 1'i böldüğünü, yani ne zaman $1/b$ biçimsel kuvvet serisinin olduğunu göreceğiz.

Bir kuvvet serisinin $X+1$'e bölünüp bölünmediğini anlamak kolay olmayabilir ama X'e bölünüp bölünmediğini anlamak kolaydır: Sabit katsayısı 0 olanlar X'e bölünürler. İlk n katsayısı 0 olanlar da tam tamına X^n'ye bölünürlerdir.

Bir $a(X)$ biçimsel kuvvet serisinin $a(X)^2$, $a(X)^3$ gibi kuvvetlerinin nasıl tanımlandığı bariz olmalı. Bazen $a(X)^n$ yerine $a^n(X)$ yazabileceğimizi de belirtelim. Tanım gereği $a^0 = 1$ ve $a^1 = a$ olur.

22.4 Tersinir Biçimsel Kuvvet Serileri

Eğer a bir halkanın elemanıysa ve aynı halkada $ab = 1 = ba$ eşitliğini sağlayan bir b elemanı varsa, o zaman a'ya ***tersinir***, b'ye de a'nın ***tersi*** denir. a'nın tersi (eğer varsa) bir tanedir ve a^{-1} olarak yazılır, nitekim eğer b ve c elemanları a'nın tersi ise,

$$c = 1c = (ba)c = b(ac) = b1 = b$$

olur. Tanımdan dolayı, a'nın tersi b ise, b'nin tersi de a'dır.

Örneğin $\mathbb{Z}$'de sadece 1 ve -1 elemanları tersinirdir. Öte yandan $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ halkalarında 0 dışında her eleman tersinirdir. 0 dışında her elemanın tersinir olduğu $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ gibi değişmeli halkalara ***cisim*** denir. Bir R halkasının tersinir elemanlarının kümesi R^* olarak gösterilir. Demek ki

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^* &= \{1, -1\},\\ \mathbb{Q}^* &= \mathbb{Q} \setminus \{0\},\\ \mathbb{R}^* &= \mathbb{R} \setminus \{0\}\end{aligned}$$

olur.

Her R halkası için $R[X]$ polinom halkasının tersinir elemanlarını bulmak kolay olmayabilir. Ancak, eğer R'nin 0 olmayan elemanlarının çarpımı hiçbir zaman 0 olmuyorsa (bu tür halkalara ***tamlık bölgesi*** ya da kısaca ***bölge*** denir) o zaman

$$R[X]^* = R^*$$

olur. Bunun kolay kanıtını okura bırakıyoruz. (İpucu: R bir bölgeyse $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ olur.)

Bir halkada tersinir olmayan bir eleman, daha büyük bir halkada tersinir olabilir. Örneğin $\mathbb{Z}$'de tersinir olmayan 2 elemanı $\mathbb{Q}$ halkasında tersinirdir. Bir sonraki paragrafta $\mathbb{Z}[X]$ halkasında tersinir olmayan $1-X$ polinomunun $\mathbb{Z}[[X]]$ halkasında tersinir olduğunu göreceğiz.

$R[[X]]$ halkasında $R[X]$ halkasından çok daha fazla tersinir eleman vardır. Örneğin, $R[[X]]$'in

$$1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n + \cdots$$

elemanı tersinirdir ve bu biçimsel kuvvet serisinin tersi

$$1 - X$$

polinomudur, nitekim çarpma yapıldığında, kolaylıkla,

$$(1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n + \cdots)(1 - X) = 1 \tag{1}$$

elde edilir. Demek ki $1 - X$ de tersinirdir. Burada X yerine $-X$ koyarsak, $1 + X$ biçimsel kuvvet serisinin de tersinir olduğunu görürüz. Nitekim,

$$(1 - X + X^2 - X^3 + \cdots + (-1)^n X^n + \cdots)(1 + X) = 1$$

eşitliği çarpmanın tanımından kolayca çıkar. Eğer R halkasında 2'nin tersi varsa (yani $1/2 \in R$ ise), aynı zamanda biçimsel bir kuvvet serisi olan $2 - X$

polinomu $R[[X]]$ halkasında tersinirdir ve tersi

$$\begin{aligned}(2-X)^{-1} &= \left[2\left(1-\frac{X}{2}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{X}{2}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{X}{2}+\frac{X^2}{4}+\cdots+\frac{X^n}{2^n}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{X}{4}+\frac{X^2}{8}+\cdots+\frac{X^n}{2^{n+1}}+\cdots\end{aligned}$$

biçimsel kuvvet serisidir.

Tüm tersinir biçimsel kuvvet serileri kolaylıkla bulunabilir:

Teorem 22.1. *Katsayıları R halkasından olan bir $\sum_k a_kX^k$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $a_0 \in R^*$ koşuludur.*

Kanıt: Önce $\sum_k a_kX^k$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olduğunu varsayalım. Demek ki

$$\left(\sum_k a_kX^k\right)\left(\sum_k b_kX^k\right) = 1$$

eşitliğini sağlayan bir $\sum_k b_kX^k$ biçimsel kuvvet serisi var. Bundan, $a_0b_0 = 1$ çıkar ki bu da a_0 elemanı R'de tersinir demektir. Teoremin yarısı kanıtlandı.

Şimdi $a_0 \in R^*$ koşulunu varsayalım.

$$\left(\sum_k a_kX^k\right)\left(\sum_k b_kX^k\right) = 1$$

eşitliğini sağlayan bir $\sum_k b_kX^k$ biçimsel kuvvet serisi arıyoruz. Yani,

$$\begin{array}{ll} a_0b_0 = 1 & (0)\\ a_0b_1 + a_1b_0 = 0 & (1)\\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 & (2)\\ \quad\cdots & \\ a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots\cdots + a_kb_0 = 0 & (k)\\ \quad\cdots & \end{array}$$

denklemlerinin hepsini birden R'de çözmemiz gerekiyor (a'ları biliyoruz, b'leri arıyoruz.) Birinci denklemden başlayıp tüm bu denklemleri teker teker çözelim.

Sıfırıncı denklem kolay: $a_0 \in R^*$ koşulundan dolayı, $a_0b_0 = 1$ eşitliğini sağlayan bir $b_0 \in R$ vardır: $b_0 = a_0^{-1}$. Birinci denkleme geçelim. Bu denklemde yer alan b_0 zaten bulundu. b_1'i bulmalıyız. Denklem hemen bize b_1'in ne olması gerektiğini söylüyor:

$$b_1 = -a_0^{-1}a_1b_0.$$

İkinci denkleme geçelim. Bu denklemi sağlayan bir b_2 bulmalıyız. Denklem bize b_2'nin ne olması gerektiğini söylüyor:

$$b_2 = -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0).$$

Genel olarak, k-inci denkleme bakarak b_k'yi bulabiliriz:

$$b_k = -a_0^{-1}(a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0).$$

Demek ki $\sum_k a_k X^k$ biçimsel kuvvet serisi tersinirmiş ve tersi de

$$a_0^{-1}\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k\right)$$

imiş. □

Aynı sonucu birkaç sayfa ileride daha şık bir biçimde elde edeceğiz.

Böylece $\cos X$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olduğunu ama $\sin X$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olmadığını görüyoruz. Dolayısıyla

$$\tan X = \frac{\sin X}{\cos X}$$

tanımını yapmaya hakkımız var.

Alıştırmalar

22.5. $1/\cos X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını bulun.

22.6. $\tan X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını bulun.

22.5 Bileşke

Bazen, ama her zaman değil, sonsuz sayıda biçimsel kuvvet serisini de toplayabiliriz. Zaten her $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ biçimsel kuvvet serisi $a_n X^n$ biçimsel kuvvet serilerinin toplamı olarak da görülebilir ve polinom olmayan bir biçimsel kuvvet serisinde bunlardan sonsuz sayıda vardır. Bileşkeyi tanımlamadan önce, sonsuz sayıda biçimsel kuvvet serisinin toplanabildiği bir durum göreceğiz.

Bir $0 \neq a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ biçimsel kuvvet serisinde $a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0$ ama $a_n \neq 0$ ise, o zaman bu biçimsel serisinin ***sırasının*** n olduğunu söyleyelim[1] ve bu durumda $\operatorname{ord} a = n$ yazalım. Demek ki eğer a biçimsel kuvvet serisi X^n'nin bir çarpımıysa (katıysa), yani

$$a = a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + \cdots = X^n(a_n + a_{n+1} X + \cdots)$$

[1] İngilizcesi *order*.

biçimindeyse, o zaman a'nın sırası en az n'dir. Eğer $a_n = 0$ ise sırası n'den de büyüktür.

$(f_n)_n$ bir biçimsel kuvvet serisi dizisi olsun. Her n için $\operatorname{ord} f_n \geq n$ olsun. Bu durumda

$$f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$$

sonsuz toplamına (biçimsel kuvvet serisi serisine) bir anlam verebiliriz. Nitekim, her n için X^n monomu sadece f_0, f_1, ..., f_n biçimsel kuvvet serilerinde belirir ve diğerlerinde belirmez. Dolayısıyla $f_0+f_1+f_2+\cdots$ toplamında (ya da serisinde) X^n'nin katsayısını sonlu sayıda toplama yaparak hesaplayabiliriz.

$\operatorname{ord} fg \geq \operatorname{ord} f + \operatorname{ord} g$ olduğundan (eğer katsayılar halkası bir bölge değilse eşitlik olmak zorunda değil), eğer $\operatorname{ord} f \geq 1$ ise, $\operatorname{ord} f < \operatorname{ord} f^2 < \operatorname{ord} f^3 < \ldots$ olur ve dolayısıyla

$$1 + f + f^2 + f^3 + \cdots$$

toplamı anlamlıdır. Örneğin, $\sin X$ biçimsel kuvvet serisi,

$$\sin X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

olarak tanımlanmışsa,

$$1 + \sin X + \sin^2 X + \sin^3 X + \cdots$$

sonsuz toplamının anlamı vardır çünkü $\sin X$ serisi X ile başlar, yani sırası 1'dir. Ama

$$\cos X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!}$$

ise,

$$1 + \cos X + \cos^2 X + \cos^3 X + \cdots$$

sonsuz toplamı anlamsızdır çünkü $\cos X$'in sırası 0'dır.

Yukarıda dediklerimizden şu çıkar: Eğer $(f_n)_n$ herhangi bir biçimsel kuvvet serisi dizisiyse,

$$f_0 + Xf_1 + X^2 f_2 + X^3 f_3 + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisi anlamlıdır.

Şimdi biçimsel kuvvet serilerinin bileşkesini almaya geçelim. Daha önce de söylediğimiz gibi bu bölümde,

$$\exp \ell(X) = 1 + X \text{ ve } \ell(-1 + \exp X) = X$$

eşitliklerini kanıtlayacağız. Ancak kanıta geçmeden önce bu ifadeleri anlamlandırmalıyız. Belli ki burada bir tür bileşke alınıyor. Biçimsel kuvvet serilerinde bileşkenin bir anlamı var mı, varsa ne anlama gelir?

Örneğin $\exp \ell(X)$ terimini ele alalım. Bu, ne demektir?

$$\exp X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

olarak tanımlanan biçimsel kuvvet serisinde X yerine $\ell(X)$ biçimsel kuvvet serisini koyup,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ell(X)^n}{n!}$$

terimini hesaplıyoruz demektir, yani $\exp X$ biçimsel kuvvet serisini $\ell(X)$ biçimsel kuvvet serisinde değerlendiriyoruz demektir. Bunun bir anlamı var mı? Evet var, çünkü $\operatorname{ord} \ell(X) = 1 > 0$ ve biraz önce sıraları mutlak artan sonsuz sayıda biçimsel kuvvet serisini toplayabileceğimizi gördük.

$a(X)$ ve $b(X)$ birer biçimsel kuvvet serisi ise $a(b(X))$ şeyine bir anlam vermek istiyoruz, $a(X)$ biçimsel kuvvet serisini $b(X)$ biçimsel kuvvet serisinde değerlendirip mümkünse bir başka biçimsel kuvvet serisi elde etmek istiyoruz. Bunun için $\operatorname{ord} b(X) > 0$ koşulu yeterlidir.

Ama mesela $a(X)$ biçimsel kuvvet serisinde X yerine $1 + X$ koyamayız; koymayı deneyelim, bakalım başımıza neler gelecek:

$$a(1+X) = a_0 + a_1(1+X) + a_2(1+X)^2 + \cdots + a_n(1+X)^n + \cdots .$$

Bu şeyin sabit terimini hesaplamak için, halkada

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

sonsuz toplamı hesaplamamız gerektiğini görüyoruz. Diyelim bu sonsuz toplamla bir biçimde başa çıkabildik. Ama bir sonraki aşamada $a(1+X)$ ifadesinde X'in katsayısını hesaplamak için halkada,

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n + \cdots$$

sonsuz toplamı hesaplamamız gerektiğini görürüz. Daha sonraki katsayılar için daha da karmaşık toplamlar belirir.

Burada sorun yaratan, $1 + X$'in 0'a eşit olmayan sabit katsayısıdır (yani 1'dir). $1 + X$ yerine sabit terimi 0 olmayan hangi polinomu alırsak alalım benzer sorunu yaşarız. Örneğin, $a(2 - 3X + X^2)$ ifadesini hesaplamak istersek, $2 - 3X + X^2$'nin sabit katsayısı olan 2 sorun yaratır. (İnanmayan açık açık yazsın $a(2 - 3X + X^2)$ ifadesini.) Sabit terim 0 olmazsa benzer sorun hep yaşanır, her seferinde R'de sonsuz bir seri hesaplamak zorunda kalırız.

Bu zorluktan kurtulmanın en kolay yolu b'nin sabit terimini 0 almaktır, yani $\operatorname{ord} b \geq 1$ koşulunu varsaymaktır. Nitekim bir biçimsel kuvvet serisini, sabit terimi 0 olan bir başka biçimsel kuvvet serisinde değerlendirebiliriz. Bunu bu altbölümün başında görmüştük.

Örneğin,

$$a(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisinde X yerine $-X$ alıp,

$$a(-X) = a_0 - a_1X + a_2X^2 - \cdots + (-1)^n a_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz. Ya da X yerine $2X$ koyup,

$$a(2X) = a_0 + 2a_1X + 4a_2X^2 + \cdots + 2^n a_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz. Ya da X yerine X^2 koyup,

$$a(X^2) = a_0 + a_1X^2 + a_2X^4 + \cdots + a_nX^{2n} + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz.

Bu bölümün ana sonucu aslında bir tanım, o tanımı yazalım: *Eğer $b(X)$ biçimsel kuvvet serisinin sabit katsayısı 0'sa, o zaman herhangi bir $a(X)$ biçimsel kuvvet serisinde X yerine $b(X)$ koyup $a(b(X))$ biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz.*

Bu durumda, a ve b'nin (bu sırayla) ***bileşkesi*** adı verilen $a(b(X))$ biçimsel kuvvet serisi bazen $a \circ b$ olarak yazılır.

Örnek 22.7. $\exp \ell(X)$ biçimsel kuvvet serisi anlamlıdır. Ayrıca, $-1+\exp X$ biçimsel kuvvet serisinin sabit katsayısı 0 olduğundan, $\ell(-1+\exp X)$ biçimsel kuvvet serisi de vardır.

Bir an $\exp \ell(X)$'i elle bulmaya çalışalım.

$$\exp X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisinde X yerine

$$\ell(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \frac{X^5}{5} - \cdots$$

koymak gerekir. Okur deneyip bunun hiç de kolay bir hesap olmadığını görmeli. Hatta zamanına acımayıp $\exp \ell(X)$'in ilk dört katsayısını hesaplamaya çalışmalıdır. (Eğer kanıtlamak istediğimiz $\exp \ell(X) = 1 + X$ eşitliği doğruysa, yanıt 1, 1, 0, 0 olmalı elbette...)

Bu tanımı kullanarak Teorem 22.1'i bir defa daha kanıtlayabiliriz.

Teorem 22.1'in İkinci Kanıtı: Önce şu basit gözlemi yapalım: Daha önce sayfa 309'da farkına vardığımız

$$(1) \qquad \left(1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n + \cdots\right)(1 - X) = 1$$

eşitliğinde X yerine sabit katsayısı 0 olan herhangi bir biçimsel kuvvet serisi alabiliriz. Şimdi a, sabit terimi tersinir olan bir biçimsel kuvvet serisi olsun. Eğer $a(0) = 1$ ise,

$$a(X) = 1 - Xb(X)$$

olarak yazılabilir; nitekim

$$a(X) = 1 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

ise, $b(X)$'i

$$b(X) = -a_1 - a_2X - a_3X^2 - \cdots - a_nX^{n-1} - \cdots$$

almak yeterlidir. Şimdi $a(X)$'in tersini kolayca buluruz: Bunun için (1) eşitliğinde X yerine sabit terimi 0 olan $Xb(X)$ almak yeterlidir, Önsav 22.5'e göre buna hakkımız olduğunu biliyoruz.

$$1 + Xb(X) + X^2b(X)^2 + \cdots + X^nb(X)^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisi $1 - Xb(X)$'in yani $a(X)$'in tersidir.

En genel durum: Eğer $a(0) \in R^*$ ise (ama illa 1'e eşit değilse), o zaman $a(X)$'in tersini bulmak için $a(0)^{-1}a(X)$ biçimsel kuvvet serisi ele alınır (çünkü bunun sabit katsayısı 1'dir) ve yukarıdaki yöntem uygulanır. $\square$

Örneğin, $\exp 0 = 1$ olduğundan, $\exp X$ tersinirdir. $\exp X$ biçimsel kuvvet serisinin tersinin $\exp(-X)$ olduğunu okur kanıtlayabilir.

$$\cos X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} X^{2i}$$

kuvvet serisi $\mathbb{Q}[[X]]$'te tersinirdir:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos X} &= \frac{1}{1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots} = \frac{1}{1 - \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right)} \\
&= 1 + \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots \\
&= 1 + \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{X^4}{4!} + \cdots\right) + \cdots \\
&= 1 + \frac{X^2}{2!} + \left(\frac{-1}{24} + \frac{1}{4}\right) T^4 + \text{daha üst dereceden terimler.}
\end{aligned}$$

Ama

$$\sin X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} X^{2i+1}$$

biçimsel kuvvet serisi $\mathbb{Q}[[X]]$'te tersinir değildir çünkü X ile başlar. Öte yandan $1+\sin X$ biçimsel kuvvet serisi $\mathbb{Q}[[X]]$'te tersinirdir ve tersi de

$$1 - \sin X + \sin^2 X - \sin^3 X + \sin^4 X - \cdots$$

kuvvet serisidir. Bu biçimsel kuvvet serisinin ilk birkaç katsayısını bulmayı deneyebilirsiniz. $2+X$ biçimsel kuvvet serisinin $\mathbb{Z}[[X]]$'te tersinir olmadığına ama $\mathbb{Q}[[X]]$'te tersinir olduğuna dikkatinizi çekeriz.

Alıştırmalar

22.8. $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ biçimsel bir kuvvet serisiyse ve $f(X) = f(-X)$ ise, her n için $a_{2n+1} = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

22.9. $f(-X) = -f(X)$ ise f'nin katsayıları hakkında ne söyleyebiliriz?

22.10. $f(X) = f(X^2)$ ise f'nin sabit olduğunu kanıtlayın.

22.11. $\frac{\exp X - 1}{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)!}$ biçimsel kuvvet serisinin başkatsayısı 1'dir, dolayısıyla tersinirdir. B_n sayılarını,

$$\frac{X}{\exp X - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} X^n$$

olarak tanımlayalım. Bu sayılara ***Bernoulli sayıları*** adı verilir. $B_0 = 1$ ve $n > 1$ için

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = 0$$

eşitliklerini kanıtlayın. Eğer $n > 1$ bir tek sayıysa $B_n = 0$ eşitliğini kanıtlayın (bkz. Alıştırma 22.8).

22.12. $\sin(\cos X)$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 8 katsayısını hesaplayın.

22.6 Modülo X^n

Bu altbölüm bu kitapta hiç kullanılmayacaktır. Okur isterse atlayabilir.

f ve g birer biçimsel kuvvet serisi olsun. Eğer X^n, $f-g$'yi bölüyorsa, yani bir h biçimsel kuvvet serisi için $f - g = X^n h$ oluyorsa, yani $\operatorname{ord}(f-g) \geq n$ ise, yani f ve g'nin ilk n katsayısı eşitse,

$$f \equiv g \mod X^n$$

yazalım. Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunun kanıtı çok kolaydır. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için, hatta eğer sonsuz sayıda $n \in \mathbb{N}$ için $f \equiv g \mod X^n$ ise $f = g$ olur.

$$f = f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i X^i$$

olsun.

$$p = p(X) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i X^i$$

polinomunu tanımlarsak,

$$f \equiv p \mod X^n$$

olduğunu görürüz. Ayrıca bu denkliği sağlayan derecesi n'den küçük tek bir polinom vardır: f'nin ilk n teriminden oluşan p polinomu.

Önsav 22.2. *f, g, u, $v \in R[[X]]$ olsun. $f \equiv g \mod X^n$ ve $u \equiv v \mod X^n$ varsayımlarını yapalım. O zaman*

$$f + u \equiv g + v \mod X^n \text{ ve } fu \equiv gv \mod X^n$$

olur. Ayrıca eğer u ve v'nin sıraları 1'den büyükeşitse

$$f \circ u \equiv g \circ v \mod X^n$$

olur.

Kanıt: İlk iki denkliğin kanıtı bariz. Üçüncü denkliği kanıtlayalım. Bunun için,

$$f \circ u \equiv g \circ u \mod X^n \text{ ve } g \circ u \equiv g \circ v \mod X^n$$

denkliklerini kanıtlamak yeterli.

Önce $f \circ u \equiv g \circ u \mod X^n$ denkliğini kanıtlayalım. Diyelim $f - g = X^n h$. O zaman

$$f \circ u - g \circ u = u^n \cdot (h \circ u)$$

olur. Ama $\operatorname{ord} u \geq 1$ olduğundan, bir $k \in R[[X]]$ için $u = Xk$ yazabiliriz. Demek ki, $f \circ u - g \circ u = X^n k^n \cdot (h \circ u)$ ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olur.

Şimdi $g \circ u \equiv g \circ v \mod X^n$ denkliğini kanıtlayalım. Bir h, $k \in R[[X]]$ için $u - v = X^n h$ ve $v = Xk$ olsun. Ve diyelim

$$g(X) = g_0 + g_1 X + g_2 X^2 + \cdots .$$

Bu durumda, bir $\ell \in R[[X]]$ için

$$\begin{aligned} g \circ u &= g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \cdots \\ &= g_0 + g_1(v + X^n k) + g_2(v + X^n k)^2 + \cdots \\ &= (g_0 + g_1 v + g_2 v^2 + \cdots) + X^n \ell \\ &\equiv g_0 + g_1 v + g_2 v^2 + \cdots = g \circ v \end{aligned}$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

22.7 Değerlendirmek

Birkaç sayfa önce bir biçimsel kuvvet serisini bir sayıda değerlendirmekten sözettik ve bunun her zaman mümkün olmadığını söyledik. Ama mesela eğer

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

kuvvet serisi x'te yakınsaksa, o zaman

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sayısını hesaplayabiliriz, yani biçimsel kuvvet serisini x'te değerlendirebiliriz.

Elbette, eğer $f(X) = 0$ ise her x için $f(x) = 0$ olur, ne de olsa f'nin tüm katsayıları 0'dır. Ayrıca $f(X) = g(X)$ ise ve $f(x)$ yakınsaksa, $g(x)$ de yakınsak olur ve $f(x) = g(x)$ olur; çünkü f ve g'nin aynı katsayıları vardır.

Peki $f(X)g(X) = 1$ ise ve $f(x)$ yakınsaksa, $g(x)$ de yakınsak olmak zorunda mıdır? Hayır; nitekim biçimsel kuvvet serisi olarak,

$$(1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots) = 1$$

olur ama $|x| \geq 1$ ise, soldaki $1-X$ serisi (polinom olduğundan) x'te yakınsaktır, sağdaki ise x'te ıraksaktır. Neyse ki [L2]'den aldığımız aşağıdaki sonuç doğrudur:

Önsav 22.3. *f biçimsel kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı > 0 ise ve $fg = 1$ ise, o zaman g'nin de yakınsaklık yarıçapı 0'dan büyüktür.*

Kanıt: Gerekirse sabitlerle çarparak f ve g'nin sabit katsayılarının 1 olduğunu varsayabiliriz. $h = 1 - f$ olsun. $\operatorname{ord} h \geq 1$ olur. Öyle bir a sayısı bulalım ki, her n için $|a_n| < a^n$ olsun [N4, Sonuç 18.9]. Bu durumda

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \cdots \tag{2}$$

olur. Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının > 0 olduğunu göstermek istiyoruz. Bu aşamada bir tanım yapalım. Her n için $|a_n| < |b_n|$ ise

$$\sum_n a_n X^n \prec \sum_n b_n X^n$$

yazalım. Elbette, eğer $a \prec b$ ise a'nin yakınsaklık yarıçapı en az b'ninki kadardır, daha küçük olamaz. Şimdi,

$$h(X) \prec \sum_{n=1}^{\infty} a^n X^n = \frac{aX}{1 - aX}$$

olur. Bu ve (2)'den,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &\prec 1+\frac{aX}{1-aX}+\left(\frac{aX}{1-aX}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{aX}{1-aX}}\\ &=\frac{1-aX}{1-2aX}=(1-aX)(1+2aX+4a^2X^2+\cdots)\end{aligned}$$

olur. En alttaki ve en sağdaki biçimsel kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $1/2a$'dır, yani 0'dan büyüktür. Demek ki $1/f$'nin de yakınsaklık yarıçapı 0'dan büyüktür. □

Aşağıdaki sonuç biçimsel kuvvet serilerini yakınsaklık yarıçaplarının **için-de** değerlendirirken rahatlamamızı sağlar:

Önsav 22.4. *$f(X)$, $g(X) \in \mathbb{R}[X]$, yakınsaklık yarıçapı r'den büyükeşit olan iki biçimsel kuvvet serisi olsun. O zaman $f(X)+g(X)$, $f(X)g(X)$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için $af(X)$ biçimsel kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapı en az r'dir. Ayrıca eğer seriler x'te yakınsaklarsa,*

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (fg)(x)=f(x)g(x),\ (af)(x)=af(x)$$

olur.

Kanıt: Önsavı sadece çarpma için kanıtlayacağız, diğer ikisinin kanıtı oldukça kolay. Aslında bunu [N4]'te Cauchy çarpımı başlığı altında kanıtlamıştık [N4, Teorem 16.6 ve 16.7], bir defa daha kanıtlayalım. Son paragraf hariç, kanıtımız [L2]'den.

$$f(X)=\sum a_nX^n \text{ ve } g(X)=\sum b_nX^n$$

olsun. Demek ki

$$c_n=\sum_{i+j=n} a_ib_j$$

olmak üzere

$$f(X)g(X)=h(X)=\sum c_nX^n$$

olur. Şimdi $0<s<r$ olsun. Hipoteze göre f ve g kuvvet serileri s'de mutlak yakınsaktırlar. $\lim_{n\to\infty}|a_n|s^n=0$ olduğundan, $(|a_n|s^n)_n$ dizisi üst-ten sınırlıdır. Aynı şekilde $(|b_n|s^n)_n$ dizisi de üstten sınırlıdır. Demek ki her n için

$$|a_n|\le C/s^n \text{ ve } |b_n|\le C/s^n$$

eşitsizliklerini sağlayan bir C sayısı vardır. Bu durumda,

$$|c_n|=\left|\sum_{i+j=n}a_ib_j\right|\le\sum_{i+j=n}|a_i||b_j|\le\sum_{i+j=n}\frac{C}{s^i}\frac{C}{s^j}=\sum_{i+j=n}\frac{C^2}{s^n}=\frac{(n+1)C^2}{s^n}$$

olur. Demek ki

$$|c_n|^{1/n} \leq \frac{(n+1)^{1/n}C^{2/n}}{s}$$

ve her iki tarafın da limitini alarak,

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \frac{1}{s}$$

buluruz. Bu eşitsizlik her $s < r$ için doğru olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \leq \frac{1}{r}$$

buluruz, yani

$$r \leq \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n}}.$$

Böylece h kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapınının en az r olduğu çıkar.

Şimdi $|x| < r$ olsun, daha doğrusu $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ kuvvet serileri mutlak yakınsak olsun. f_n, g_n ve h_n polinomları f, g ve h biçimsel kuvvet serilerinin kısmi toplamları olsun.

$$|h_n(x) - f_n(x)g_n(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |c_n||x|^n$$

ve $h(x)$ yakınsak olduğundan, sağ tarafın n sonsuza giderken limiti 0'dır. Her iki tarafın da limitini alarak istediğimiz eşitliği buluruz.

Şimdi $f(r)$, $g(r)$ ve $h(r)$ kuvvet serilerinin yakınsak olduğunu varsayalım. Kolaylık olması açısından da $r > 0$ varsayımını yapalım. O zaman her $0 < x < r$ için $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ kuvvet serileri mutlak yakınsaktır [N4, Sonuç 18.7] ve dolayısıyla bir önceki paragraftan dolayı $f(x)g(x) = h(x)$ olur. Teorem 19.1'e göre, x, r'ye giderken eşitsizliğin limitini alırsak $f(r)g(r) = h(r)$ eşitliğini buluruz. □

Benzer teoremi bir de biçimsel kuvvet serilerinin bileşkesi için kanıtlamalıyız:

Önsav 22.5. *$f(X) = \sum_n a_n z^n$ ve $g(X) = \sum_n b_n z^n$, katsayıları $\mathbb{R}$'de olan iki biçimsel kuvvet serisi olsun. g'nin sabit terimi 0 olsun. f, bir $r > 0$ sayısında mutlak yakınsak olsun. Ve son olarak, $s > 0$ sayısı için $\sum_n |b_n|s^n \leq r$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $h(X) = f(g(X))$ serisi $|x| \leq s$ eşitsizliğini sağlayan her x'te mutlak yakınsaktır ve ayrıca $f(g(x)) = h(x)$ olur.*

Kanıt: $h(X) = \sum_n c_n X^n$ olsun.

$$h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k X^k \right)^n$$

olduğundan,

$$h(X) \prec \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| X^k \right)^n$$

olur. ($\prec$ simgesinin tanımı için Önsav 22.3'ün kanıtına bakın.) Hipoteze göre sağdaki seri her $|x| \leq s$ için mutlak yakınsaktır; demek ki $h(x)$ de mutlak yakınsaktır.

Şimdi herhangi bir $|x| \leq s$ sayısı sabitleyelim. Tabii ki

$$|g(x)| \leq \sum_n |b_n||x|^n \leq \sum_n |b_n| s^n \leq r$$

olur. Dolayısıyla $f(X)$ kuvvet serisi $g(x)$'te mutlak yakınsaktır ve $f(g(x))$ sayısından bahsedebiliriz.

f_n, f'nin n'inci kısmi polinomu olsun:

$$f_n(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i.$$

O zaman,

$$h(X) - f_n(g(X)) = f(g(X)) - f_n(g(X)) \prec \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| X^k \right)^i$$

olur. Mutlak yakınsaklık hipotezinden dolayı, her $\epsilon > 0$ için, $n > N$ ise,

$$|h(x) - f_n(g(x))| \leq \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı vardır. Ayrıca $(f_n)_n$ dizisi f'ye $[-r, r]$ aralığında düzgün yakınsadığından (Teorem 9.3), yeterince büyük $n > N$ göstergeçleri için,

$$|f_n(g(x)) - f(g(x))| < \epsilon$$

ve dolayısıyla

$$|h(x) - f(g(x))| < 2\epsilon$$

olur. Bu eşitsizlik her $\epsilon > 0$ için geçerli olduğundan, $h(x) = f(g(x))$ eşitsizliğini elde ederiz. □

22.8 Türev

Herhangi bir $a(X)$ biçimsel kuvvet serisi verilmiş olsun, diyelim

$$a(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots .$$

Bu biçimsel kuvvet serisinin ***türevini***

$$a'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \cdots + na_nX^{n-1} + \cdots$$

olarak tanımlayalım. Bunun özel bir durumu olarak, $a \in R$ ve $n \geq 1$ için

$$(aX^n)' = naX^{n-1}$$

elde ederiz. Demek ki

(3) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_nX^n)'$$

eşitliği geçerli. Pek masumane görünen bu eşitlik birazdan türev almayla ilgili bazı kuralları kanıtlarken çok yardımcı olacak.

Kimileyin $a'(X)$ yerine $a(X)'$ yazdığımız da olacak.

Burada tanımlanan türevin analizle bir ilgisi olmadığından, biçimsel olarak tanımlandığından, biçimsel kuvvet serilerinin türevine ***biçimsel türev*** dendiği de olur.

Daha tıkız yazılımla, bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$ biçimsel kuvvet serisinin türevi şöyle tanımlanır:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nX^{n-1}.$$

Örneğin,

$$a(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots$$

ise,

$$a'(X) = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + nX^{n-1} + \cdots$$

olur.

$\exp X$'in türevini bulalım şimdi:

$$\exp' X = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp X.$$

Demek ki $\exp X$ kendi kendisinin türevi.

Bir de $\ell(X)$'in türevini bulalım:

$$\ell'(X) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{nX^{n-1}}{n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}X^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-X)^{n-1} = \frac{1}{1+X}.$$

Alıştırmalar

22.13. $f'(X) = f(X)$ eşitliğini sağlayan tüm f biçimsel kuvvet serilerini bulun.

22.14. $\ell(X^2)$ ve $\exp\left(2X^3\right)$ biçimsel kuvvet serilerinin türevlerini hesaplayın.

Şimdi türev üzerine, bir iki dönemcik analiz dersi görmüş her öğrencinin tahmin edebileceği birkaç sonuç kanıtlayalım.

Önsav 22.6. *Eğer $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise ve $a(X)$ ve $b(X)$ biçimsel kuvvet serilerinin türevleri eşitse, o zaman bir $r \in R$ için*

$$a(X) = r + b(X)$$

olur. Elbette $r = a(0) - b(0)$ olmak zorundadır. Dolayısıyla bir de ayrıca

$$a(0) = b(0)$$

ise $a(X) = b(X)$ olur. Bunun özel bir durumu olarak şunu elde ederiz: $a'(X) = 0$ ise, $a(X)$ sabit bir biçimsel kuvvet serisi olmak zorundadır.

Kanıt: $a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ ve $b(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ olsun. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1} = a'(X) = b'(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n X^{n-1}$$

olur. Demek ki her $n \geq 1$ için $na_n = nb_n$, dolayısıyla $a_n = b_n$. Ama a_0 ve b_0 farklı olabilirler. Olası farkı kapatmak için $b(X)$'e R'nin $a(0) - b(0)$ elemanını eklersek $a(X)$'i buluruz. $\square$

Biraz cebir bilgisine sahip okur, yukarıdaki önsavın karakteristiği 0 olan her bölgede geçerli olduğunu anlar. Ama mesela $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ halkasında bu önsav doğru değildir, nitekim

$$a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{pn}$$

ise $a'(X) = 0$ olur ama a elbette sabit bir kuvvet serisi olmak zorunda değildir.

Şimdi biraz türev cebiriyle ilgili sonuçlar kanıtlayalım.

Önsav 22.7. *Eğer a ve b kuvvet serileriyse ve $r \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise,*

$$\begin{aligned}
&(a+b)' = a' + b',\\
&(ra)' = ra',\\
&(a-b)' = a' - b',\\
&(ab)' = a'b + ab',\\
&(a^n)' = na^{n-1}a'
\end{aligned}$$

ve eğer b, a'yı bölüyorsa (mesela b tersinirse) o zaman b^2, $a'b - ab'$ biçimsel kuvvet serisini böler ve

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

olur. Ayrıca eğer $\operatorname{ord} b > 0$ *ise,*

$$(a \circ b)' = a' \circ b \cdot b'$$

olur.

Kanıt: Tanımlara başvurmaktan başka çaremiz yok gibi. İlk eşitliği kanıtlayalım.

$$a = a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,\ b(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$$

olsun. Demek ki,

$$a + b = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n.$$

Bunun türevini alalım:

$$(a+b)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\,(a_n + b_n)\, X^{n-1}.$$

Şimdi $a' + b'$ biçimsel kuvvet serisini hesaplayalım, bakalım yukarıdakini bulacak mıyız.

$$a' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1} \text{ ve } b' = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n X^{n-1}$$

olduğunu biliyoruz. Bunları toplayalım. Aynen yukarıdaki $(a+b)'$ ifadesini buluruz.

İkinci ve üçüncü eşitlik benzer şekilde kolaylıkla bulunur.

Gelelim dördüncü eşitsizliğe. Dördüncü eşitlik doğrudan bir hesapla da kanıtlanabilir. Ama hesaplar çok uzun sürer. Uzun hesaplara girmek yerine şu gözlemi yapalım: Eğer kanıtlamak istediğimiz

$$(ab)' = a'b + ab' \tag{4}$$

eşitliğini a yerine a_1 ve a_2 biçimsel kuvvet serileri için kanıtlarsak, bu eşitlikleri toplayarak, (4)'ü $a_1 + a_2$ biçimsel kuvvet serisi için de kanıtlamış oluruz. Hatta (4)'ü a_n biçimsel kuvvet serileri için kanıtlarsak ve $\sum_n a_n$ toplamı anlamlıysa, o zaman (4)'ü $\sum_n a_n$ biçimsel kuvvet serisi için de kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla (4) eşitliğini a biçimsel kuvvet yerine $a_n X^n$ "monomları" için kanıtlarsak, kanıtladığımız bu eşitlikleri toplayarak, (4)'ü a biçimsel kuvvet serisi için de elde ederiz. Demek ki,

$$(a_nX^nb(X))' = (a_nX^n)'b(X) + (a_nX^n)b'(X) \tag{5}$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli. İkinci gözlem: Kanıtlamak istediğimiz (5) eşitliğini b biçimsel kuvvet serisi yerine b_mX^m "monomları" için kanıtlarsak, kanıtladığımız bu eşitlikleri toplayarak, (5)'i elde ederiz. Demek ki,

$$(a_nX^nb_mX^m)' = (a_nX^n)'(b_mX^m) + (a_nX^n)(b_mX^m)' \tag{6}$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli. Bu da gayet kolay. Önce sol tarafı açalım:

$$(a_nX^nb_mX^m)' = (a_nb_mX^{n+m})' = (n+m)a_nb_mX^{n+m-1}.$$

Şimdi sağ tarafı hesaplayalım, bakalaım aynı ifadeyi bulacak mıyız.

$$\begin{aligned}(a_nX^n)'(b_mX^m) + (a_nX^n)(b_mX^m)' &= na_nb_mX^{n-1+m} + ma_nb_mX^{n+m-1}\\ &= (n+m)a_nb_mX^{n+m-1}.\end{aligned}$$

Aynı ifadeyi bulduk ve böylece dördüncü eşitliği kanıtlamış olduk.

Beşinci eşitlik dördüncü eşitlikten n üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır. Okura bırakıyoruz.

Şimdi b'nin a'yı böldüğünü varsayalım. Diyelim $a/b = c$. O zaman

$$a' = (bc)' = b'c + bc'$$

ve dolayısıyla

$$c' = \frac{a' - b'c}{b} = \frac{a' - b'a/b}{b} = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

olur.

Son olarak ***zincir kuralı*** adı verilen

$$(a \circ b)' = a' \circ b \cdot b' \tag{7}$$

eşitliğini kanıtlayalım. (4)'ü kanıtlamak için kullandığımız yöntemi kullanacağız, ama bu sefer sadece a'yı parçalayabiliriz, b'yi parçalayamayız. Bu eşitliği a biçimsel kuvvet serisi yerine a_nX^n monomları için kanıtlarsak, ve kanıtladığımız bu eşitlikleri toplarsak (7)'yi elde ederiz. Elbette a_n'yi 1'e eşit alabiliriz. $(X^n)' = nX^{n-1}$ olduğundan,

$$(b^n)' = nb^{n-1} \cdot b'$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama bu eşitliği bir paragraf önce kanıtlamıştık... Önsav tamamen kanıtlanmıştır. □

Bir a biçimsel kuvvet serisinin türevi olan a' bulunduktan sonra, a' biçimsel kuvvet serisinin de türevini alabiliriz. a' biçimsel kuvvet serisinin türevine a'nın ***ikinci türevi*** denir ve bu ikinci türev a'' ya da $a^{(2)}$ olarak yazılır. Daha sonra, türevin türevinin türevini alabiliriz. Türev almayı hiç durmadan sürdürebiliriz. $a(X)$'in k defa türevi alınmasıyla elde edilen kuvvet serisi $a^{(k)}$ olarak yazılır. Demek ki,

$$a^{(0)} = a,$$
$$a^{(1)} = a'$$

ve $a^{(k+1)}$, $a^{(k)}$'nın türevidir:

$$a^{(k+1)} = \left(a^{(k)}\right)'.$$

Biçimsel kuvver serilerinin k'ıncı türevinin formülünü de bulmak zor değildir:

Önsav 22.8. *Eğer* $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ *ise*

$$a^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, X^{n-k}$$

olur.

Kanıt: $k = 0$ ve 1 için eşitlik bariz. Şimdi eşitliğin k için doğru olduğunu varsayıp eşitliği $k+1$ için kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} a^{(k+1)} = \left(a^k\right)' &= \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n X^{n-k}\right)' \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\,(n-k) a_n X^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k-1)!}\, a_n X^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-(k+1))!}\, a_n X^{n-(k+1)}. \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Sonuç 22.9. *Eğer* $a = a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ *ise* $a^{(k)}(0) = k!\, a_k$ *olur. Yani, her* a *kuvvet serisi için,*

$$a = a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

olur.

Kanıt: Yukarıdaki önsavda $a^{(k)}$ biçimsel kuvvet serisini 0'da değerlendirmek yeterli. □

Demek ki bir kuvvet serisi, türevlerinin 0'da aldığı değerlerle belirleniyor.

22.9 Uygulamalar

Bu altbölümde yaptıklarımızın iki önemli uygulamasını vereceğiz.

22.9.1 Exp ve Ln

Bu altaltbölümde

$$\exp \ell(X) = 1 + X \text{ ve } \ell(-1 + \exp X) = X$$

eşitliklerini kanıtlayacağız. Bunun için sol ve sağ tarafların türevlerini alacağız. Sonuç 22.9'a göre, örneğin birinci eşitlik için, $\exp \ell(X)$'in

1. 0'da değerinin 1,
2. Türevinin 0'daki değerinin gene 1 ve
3. İkinci türevinin 0, yani $\exp \ell(X) = 0$

olduğunu kanıtlamak yeterli. Birincisi çok bariz: $\exp \ell(0) = \exp 0 = 1$. Diğer ikisi ilk bakışta pek bariz değil ama bunun için gereken tekniği önceki altbölümlerde geliştirdik. exp ve ℓ biçimsel kuvvet serilerinin türevlerini biliyoruz:

$$\exp' X = \exp X \text{ ve } \ell'(X) = (1 + X)^{-1}.$$

Bu bilgiden hareketle Önsav 22.7 sayesinde $\exp \ell(X)$ biçimsel kuvvet serisinin türevini bulabiliriz:

$$(\exp \ell(X))' = \exp' \ell(X) \cdot \ell'(X) = \frac{\exp \ell(X)}{1 + X}.$$

Demek ki,

$$\exp \ell(X) = (1 + X)(\exp \ell(X))'.$$

Şimdi $\exp \ell(X)$'in ikinci türevini bulalım. Yukarıdaki eşitliği ve tekrar Önsav 22.7'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}(\exp \ell(X))' &= \left[(1 + X)(\exp \ell(X))'\right]' \\ &= (1 + X)'(\exp \ell(X))' + (1 + X)(\exp \ell(X))'' \\ &= (\exp \ell(X))' + (1 + X)(\exp \ell(X))'',\end{aligned}$$

yani, $(1 + X)(\exp \ell(X))'' = 0$, yani $(\exp \ell(X))'' = 0$ elde ederiz. Böylece istediğimiz üç eşitliği de kanıtladık. Sonuç 22.9'a göre, $\exp \ell(X) = 1 + X$ olur.

Şimdi de $\ell(-1+\exp X) = X$ eşitliğini kanıtlayalım. Sonuç 22.9'a göre, $\ell(-1+\exp X)$ biçimsel kuvvet serisinin

1. 0'daki değerinin 0,
2. Türevinin 0'daki değerinin 1,
3. İkinci türevinin 0

olduğunu kanıtlamamız lazım.

$\ell(-1+\exp X)$ kuvvet serisinin 0'daki değerinin 0 olduğunu biliyoruz. Birinci türevi hesaplayalım:

$$\ell\,(-1+\exp X)' = \exp' X \cdot \ell'\,(-1+\exp X) = \frac{\exp X}{1+(-1+\exp X)} = 1.$$

Demek ki $\ell(-1+\exp X)' = 1$. Dolayısıyla ikinci ve daha sonraki türevler de 0'a eşit. İstediğimizi kanıtladık: $\ell(-1+\exp X) = X$.

Alıştırmalar

22.15. R herhangi bir değişmeli halka olsun. Her $a \in R$ için, $\exp(X+a) = \exp X \exp a$ eşitliğini kanıtlayın.

22.16. R herhangi bir değişmeli halka olsun. $R[[X,Y]] = R[[X]][[Y]]$ halkasında $\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$ eşitliğini kanıtlayın.

22.9.2 Genelleştirilmiş Binom Açılımı

Bölüm 13'te her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in (-1,1)$ için

$$(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

eşitliğini kanıtlamıştık. Burada biçimsel kuvvet serileri için aynı eşitliği kanıtlayacağız, yani

$$(1+X)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} X^i$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Ama tabii önce $(1+X)^\alpha$ ifadesini nasıl biçimsel kuvvet serisi olarak gördüğümüzü açıklamamız lazım, aksi halde kanıtlamak istediğimiz eşitlik anlamlı olmaz. İşte tanım:

$$(1+X)^\alpha = \exp(\alpha \ln(1+X)) = \exp(\alpha\ell(X)).$$

(Bu tanım geçmişte yaptıklarımızla uyumlu, örneğin eğer $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ise gerçekten $(1+X)$'in n'inci üssünü buluruz.) Sonuç olarak,

$$\exp(\alpha\ell(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} X^i \tag{8}$$

eşitliğini kanıtlayacağız.

Önce $f(X) = \exp(\alpha\ell(X))$ tanımını yapalım. İki tarafın da türevini alırsak, zincir kuralını kullanarak

$$f'(X) = \exp(\alpha\ell(X))(\alpha\ell(X))' = \exp(\alpha\ell(X))\frac{\alpha}{1+X} = f(X)\frac{\alpha}{1+X},$$

yani

$$(1+X)f'(X) = \alpha f(X)$$

buluruz.

Şimdi de

$$g(X) = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha}{i}X^i$$

tanımını yapalım. Yukarıda f için kanıtladığımız eşitliği g için kanıtlayacağız:

$$(1+X)g'(X) = \alpha g(X).$$

Soldaki ifadeyi hesaplamakla işe başlayalım, bakalım sağdaki ifadeye ulaşacak mıyız:

$$\begin{aligned}(1+X)g'(X) &= (1+X)\sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}iX^{i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}iX^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}iX^i\\ &= \alpha + \sum_{i=2}^{\infty}\binom{\alpha}{i}iX^{i-1} + \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}iX^i\\ &= \alpha + \sum_{j=1}^{\infty}\binom{\alpha}{j+1}(j+1)X^j + \sum_{i=1}^{\infty}\binom{\alpha}{i}iX^i\\ &= \alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha}{i+1}(i+1) + \binom{\alpha}{i}i\right)X^i\\ &= \alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\left((\alpha-i)\binom{\alpha}{i} + \binom{\alpha}{i}i\right)X^i\\ &= \alpha + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{i}X^i = g(X).\end{aligned}$$

(Sondan bir önceki eşitlikte sayfa 238'de bulunan $(i+1)\binom{\alpha}{i+1} = (\alpha-i)\binom{\alpha}{i}$ eşitliğini kullandık.)

Kanıtladığımız son iki eşitlikten $f'g = fg'$ çıkar. Şimdi bunu ve Önsav 22.7'yi kullanarak (sabit katsayısı 1 olduğundan g tersinirdir) f/g'nin türevini hesaplayalım:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = 0.$$

Önsav 22.6'ya göre f/g sabit bir sayıdır. Ama $f(0) = g(0) = 1$ olduğundan, bu sabit sayı 1 olmalıdır. Demek ki $f = g$. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Şimdi Teorem 13.1'i bir defa daha kanıtlayabiliriz: $x \in (-1, 1)$ ise, Önsav 22.5'e göre (8)'den dolayı

$$\exp(\alpha\ell(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$$

elde ederiz. Ama sol taraf tabii ki $(1 + x)^\alpha$ sayısına eşit.

22.10 Laurent Serileri

Biçimsel kuvvet serileri konusuna bu kadar girmişken Laurent serilerinden sözetmemek olmaz. R yerine $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ gibi herhangi bir K cismi alalım bu altbölümde, yani K halkasının 0 dışındaki her elemanının K'da bir tersi olsun.

0'dan değişik herhangi bir a kuvvet serisi alalım. Bu kuvvet serisinin sabit terimi 0 olabilir, bir sonraki terim de 0 olabilir, ama bir zaman sonra 0 olmayan bir terime mutlaka rastlayacağız. Diyelim X^k, katsayısı 0 olmayan ilk monom. Yani seri, $a_k \neq 0$ olmak üzere, şöyle bir şey:

$$a = a_k X^k + a_{k+1} X^{k+1} + a_{k+2} X^{k+2} + \cdots$$

Bu seriyi şöyle yazalım:

$$a = X^k \left(a_k + a_{k+1} X + a_{k+2} X^2 + \cdots\right).$$

Sağdaki parantezli kısmın, yani

$$a_k + a_{k+1} X + a_{k+2} X^2 + \cdots$$

kısmının tersinir olduğunu biliyoruz çünkü sabit terimi olan $a_k \neq 0$. Demek ki eğer X^k da tersinir olsaydı a da tersinir olacaktı. Ama tabii ki $k = 0$ olmadığı sürece X^k (dolayısıyla a da) tersinir olamaz.

Kuvvet serilerine yapay bir biçimde X^{-1} (ya da $1/X$) diye bir eleman ekleyelim ve elde ettiğimiz kümeyi toplama ve çarpma altında kapatalım.

$$a_{-n} X^{-n} + \cdots + a_{-1} X^{-1} + a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$$

gibi (gene biçimsel) seriler elde ederiz. Bu tür serilere ***kısıtlı Laurent serileri*** adını verelim. (Kimi sadece ***Laurent serisi*** der.) Her kısıtlı Laurent serisi, bir b kuvvet serisi ve bir $n \geq 0$ için,

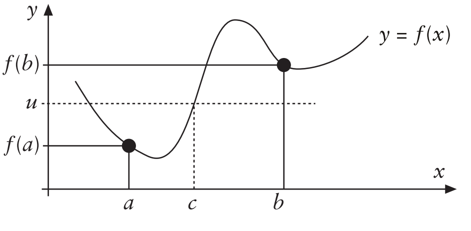
$$X^{-n}b$$

olarak yazılabilir. Kısıtlı Laurent serileri bir cisimdir ve (bir anlamda ama güçlü bir anlamda) biçimsel kuvvet serilerini içeren en küçük cisimdir, yani matematiksel deyişle $K[[X]]$ halkasının bölüm cismidir.

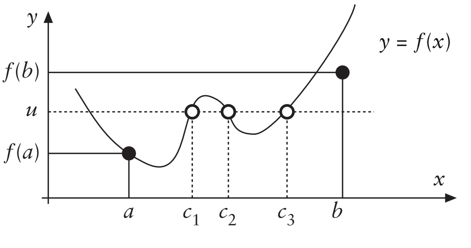
23. Darboux Fonksiyonları - *Zafer Ercan, Uğur Gül, Mine Menekşe*

Gerçel sayılarda tanımlı olan sürekli bir fonksiyon, aldığı herhangi iki değer arasındaki tüm değerleri alır. Bu, bu ciltte Teorem 3.3 olarak kanıtlanan aradeğer teoremidir. Teoremi tekrar etmekte yarar var:

Aradeğer Teoremi. *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $[a, b] \subseteq A$ olsun. Eğer $u \in \mathbb{R}$, $f(a)$ ile $f(b)$ ise arasındaysa, o zaman $f(c) = u$ eşitliğini sağlayan bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.*



Yani u'dan geçen yatay doğru (şekilde noktalı) f'nin grafiğini keser; üstelik $[a, b]$ dikey şeridinde bulunan bir noktada keser. Kesişim, aşağıdaki şekilde olduğu gibi birden fazla noktada da olabilir tabii.



Peki bu teoremin tersi doğru mudur? Yani aradeğer teoreminin doğru olduğu her fonksiyon sürekli midir?

Yanıtın olumsuz olduğunu göreceğiz.

Aradeğer teoremi, $u = 0$ için ***Bolzano teoremi*** olarak bilinir. Bolzano teoreminin (çağında pek bilinmeyen Bolzano'ya ait olduğu) Otto Stolz tarafından 1881'de yayımlanan çalışmasında belirtilmiştir.

19'uncu yüzyılın birçok matematikçisi sürekli fonksiyonlarla Aradeğer Teoremi'ni sağlayan fonksiyonların aynı fonksiyonlar olduklarını tahmin ediyordu. Bunun doğru olmadığı 1875'te Darboux tarafından gösterildi. Bu yüzden aradeğer teoremini sağlayan fonksiyonlara ünlü Fransız matematikçi Darboux' nun adı verilmiştir. Tam tanım şöyle:

Tanım: *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $[a, b] \subseteq A$ ve $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her $u \in \mathbb{R}$ için, $f(c) = u$ eşitliğini sağlayan bir $c \in [a, b]$ sayısı varsa, f'ye* ***Darboux fonksiyonu*** *ya da* ***Darboux-sürekli fonksiyonu*** *denir.*

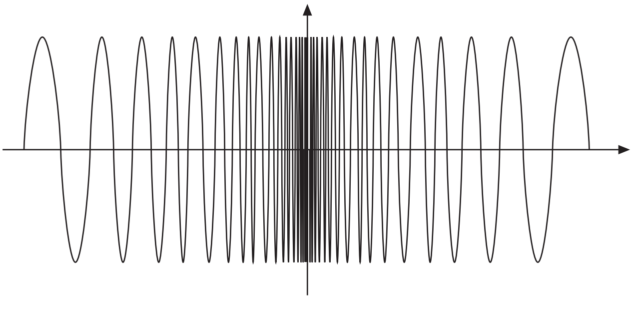
İlk olarak, sürekli olmayan Darboux fonksiyonlarına her kitapta verilen standart örnekle başlayalım.

Örnekler

23.1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlansın. Grafiği aşağıda. f'nin 0 dışında her yerde sürekli olduğu sin ve $1/x$ fonksiyonlarının sürekliliğinden belli.



f'nin 0'da sürekli olmadığı ama Aradeğer Teoremi'ni sağladığı, yani bir Darboux fonksiyonu olduğu Altbölüm 9.4'teki bilgilerden ya da yukarıdaki grafikten kolaylıkla anlaşılır.

23.2. Eğer $E \subseteq \mathbb{R}$ kapalı kümesinin[1] her noktası E'nin limit noktasıysa, yani E'nin ayrık noktası yoksa, E'ye ***mükemmel küme*** denir. Sonlu kümeler mükemmel olamazlar. Kapalı aralıklar mükemmel kümelerdir. Cantor kümesi de [N5, Bölüm 19] mükemmel bir kümedir. Cantor kümesi ayrıca 1'den fazla elemanı olan bir aralık içermez.

$E \subseteq [0, 1]$ altkümesi 1'den fazla elemanı olan ve bir aralık içermeyen mükemmel bir küme olsun (örneğin Cantor kümesi). $[0, 1] \setminus E$ açık bir küme olduğundan,

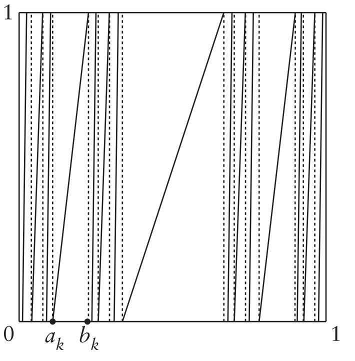
$$[a, b] \setminus E = \bigcup_k (a_k, b_k)$$

[1] $\mathbb{R}$'nin bir altkümesinin tümleyeni açıksa o altkümeye ***kapalı*** adı verilir.

eşitliğini sağlayan ayrık $((a_k, b_k))_k$ aralıklar dizisi vardır (neden?) Şimdi $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} 2\frac{x-a_k}{b_k-a_k} - 1 & \text{eğer } x \in (a_k, b_k) \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \in E \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. g'nin temsilî grafiği aşağıda.



E'de 0 değerini alan ve E dışında doğrusal olan g fonksiyonu E'nin hiçbir noktasında sürekli değildir, dolayısıyla f'nin süreksiz olduğu noktaların sayısı sonsuzdur ve f bir Darboux fonksiyonudur.

23.3. f ve $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

kurallarıyla tanımlansın. f ve g Darboux fonksiyonları olmasına karşın $f-g$ ve fg fonksiyonlarının hiçbiri Darboux fonksiyonu değildir.

Son örnekten de görüleceği üzere, Darboux fonksiyonları toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalı değildir ancak bileşke alma işlemi altında kapalıdır (kanıtı çok kolay, çünkü bir aralığın sürekli bir fonksiyon altında imgesi bir aralıktır [Teorem 3.10]).

Darboux fonksiyonlarının temel özelliklerinden biri her fonksiyonun iki Darboux fonksiyonunun toplamı olarak yazılabilmesidir. Bunu birazdan kanıtlayacağız.

Örnek 23.4. Hiçbir noktada sürekli olmayan bir $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ Darboux fonksiyonu vardır. Her $x \in (0,1)$ için $(b_k(x))_k$ dizisi x'in 2 tabanda yazılımındaki katsayılar olsun:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(x)}{2^k}$$

(Dizinin belli bir terimden sonraki tüm terimleri hep 1 olmasın.) $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $h(0) = h(1) = 0$ ve $x \in (0,1)$ için

$$h(x) = \limsup_n \frac{b_1(x) + \cdots + b_n(x)}{n}$$

kuralıyla tanımlansın. h fonksiyonu hiçbir noktada sürekli olmayan bir Darboux fonksiyonudur.

Darboux fonksiyonlarının sanılabileceğinden daha fazla olduğunu gösteren şu teoremi kanıtlayacağız:

Teorem 23.1. *$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun.*
i. *$f = g + h$ olacak biçimde g, h Darboux fonksiyonları vardır.*
ii. *Her x için $f(x) = \lim f_n(x)$ olacak biçimde Darboux fonksiyonlar dizisi $(f_n)_n$ bulunabilir.*

Lindenbaum tarafından kanıtsız olarak verilen bu teorem Sierpiński tarafından genelleştirilerek kanıtlanmıştır [3]. Aşağıda verilen kanıt H. Fast'a aittir [2].

Kanıta başlamadan önce birkaç teknik tanım verelim.

k, m, n, p, $q \in \mathbb{N}$ ve $p \geq 2$ olsun. 0 ve 1'lerden oluşan ve şu koşulları sağlayan dizileri ele alalım:

$k+1$'inci terim 0,
sonraki ilk m terim 1,
sonraki terim 0,
sonraki ilk n terim 1,
sonraki terim 0,
sonraki ilk p terim 1,
sonraki terim 0,
sonraki q terim 1,
sonraki terim 0,

ve bu aşamadan sonra her ikinci terim 0. Bu tür dizilerin kümesini A_{kmnpq} ile gösterelim. Yani A_{kmnpq} kümesi, terimleri 0 ve 1'lerden oluşan

$$a_0a_1 \ldots a_k01 \ldots 101 \ldots 101 \ldots 101 \ldots 10b_00b_10b_20 \ldots$$

biçiminde yazılan dizilerin kümesidir. Böyle bir diziyi kolaylık olsun diye,

$$a = a_0a_1 \ldots a_k$$

ve

$$b = b_0b_1b_2 \ldots$$

dizileri için,

$$\delta(a, b) = a01^m01^n01^p01^q0b$$

tanımını yapalım. Ayrıca teoremin kanıtında gerekecek olan şu sayıları tanımlayalım:

$$\rho(a, b) = 0{,}a01^m01^n01^p01q0b$$

ve

$$\beta_1(b) = 0{,}b_1b_3b_5 \ldots$$
$$\beta_2(b) = 0{,}b_2b_4b_6 \ldots .$$

Eğer $(k, m, n, p, q) \neq (k', m', n', p', q')$ ise $A_{kmnpq} \cap A_{k'm'n'p'q'} = \emptyset$ olduğunu göstermek kolaydır.

Son olarak,

$$A = \bigcup_{k,m,n,p,q} A_{kmnpq}$$

tanımını yapalım.

Önsav 23.2. *g, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını şöyle tanımlayalım: Eğer bir*

$$\delta(a, b) = a01^m01^n01^p01^q0b \in A_{kmnpq}$$

için

$$x - [x] = \rho(a, b) = 0{,}a01^m01^n01^p01^q0b$$

oluyorsa,

$$g(x) = m + n + \beta_1(b) \text{ ve } h(x) = p - q + \beta_2(b)$$

olsun. Diğer bütün x'ler için $g(x) = h(x) = 0$ olsun. O zaman her $y \in \mathbb{R}$ ve (x_1, x_2) aralığı için

$$h(g^{-1}(y) \cap (x_1, x_2)) = \mathbb{R}$$

olur.

Kanıt: Eğer $x - [x] \in A_{kmnpq}$ ise her $r \in \mathbb{R}$ için

$$(x - r) - [x - r] = x - [x]$$

olduğundan

$$g(x) = g(x - r)$$

olur. $y - [y]$ sayısının 2 tabanındaki temsili

$$y - [y] = 0{,}b_1b_3b_5\ldots$$

biçiminde olsun. Rastgele bir $z \in \mathbb{R}$ alalım. İki tabanında

$$z - [z] = 0{,}b_2b_4b_6\ldots$$

olsun. r gerçel sayısını,

$$(x_1 + r,\ x_2 + r) \cap (0,\ 1) \neq \emptyset$$

olacak biçimde rastgele seçelim. a_0, a_1, $\ldots$, $a_k \in \{0, 1\}$ rakamları,

$$0{,}a_0a_1\ldots a_k \text{ ve } 0{,}a_0a_1\ldots a_k1000\ldots$$

sayıları $(x_1 + r,\ x_2 + r) \cap (0, 1)$ aralığında olacak biçimde ayarlanabilir. m, n, p, $q \in \mathbb{N}$ tamsayıları

$$[y] = m - n \text{ ve } [z] = p - q$$

eşitlikleri doğru olacak biçimde seçilsin.

$$a = a_0 a_1 \dots a_k \text{ ve } b = b_0 b_1 b_2 \dots$$

olmak üzere,

$$x = \rho(a,\ b) = 0{,}a01^m01^n01^p01^q0b \in A_{kmnpq}$$

olsun. O zaman, $x \in (x_1 + r,\ x_2 + r) \cap (0, 1)$ ve $g(x) = y$ ve $h(x) = z$ olur. Kanıtımız bitmiştir. $\square$

Önsav 23.3. *$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Her y için,*

$$u_y(x) = F(x, y) + u(x)$$

kuralıyla tanımlanan $u_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu Darboux fonksiyonu yapan bir $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

Kanıt: g ve h, bir önceki önsavdaki fonksiyonlar olsun. $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$u(x) = h(x) - F(x, g(x))$$

kuralıyla tanımlansın. Her $x \in g^{-1}(y)$ için

$$u_y(x) = h(x) = F(x, y) + u(x)$$

olur. Her I aralığı için $h(I) = \mathbb{R}$ olduğundan u_y bir Darboux fonksiyonudur. $\square$

Teoremin Birinci Kanıtı: i. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Ayrıca $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(x, 0) = 0$$

ve $y \neq 0$ için

$$F(x, y) = f(x)$$

olarak tanımlansın. u ve u_y fonksiyonları Önsav 23.3'te verilen fonksiyonlar olarak tanımlansın. Bu durumda u_0 fonksiyonu bir Darboux fonksiyonudur.

$$h(x) = F(x, 0) + u(x) = f(x) + u(x)$$

fonksiyonu da Darboux.

$$f(x) = h(x) + (-u(x))$$

olduğundan birinci kısmın kanıtı biter.

ii. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $x \in \mathbb{N}$ için

$$F(x, y) = (x - 1)f(x)$$

olsun, ama eğer $x \notin \mathbb{N}$ ise $F(x, y)$ herhangi bir değer olsun. Önsav 23.3'ün sonucu olarak öyle bir u fonksiyonu vardır ki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f_n(x) = \frac{(n-1)f(x) + u(x)}{n}$$

fonksiyonu bir Darboux fonksiyondur ve her x için $f(x) = \lim f_n(x)$'dir. Kanıt bitmiştir.

İkinci Kanıt: Önsav 23.2'den dolayı her aralık I için $g(I) = \mathbb{R}$ olan bir g fonksiyonunun varlığını biliyoruz. Bu fonksiyon yardımıyla teoremimizin birinci kısmının bir alternatif kanıtı aşağıdaki gibi verilebilir: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = 0$ için $h(x) = 0$ ve diğer durumda $h(x) = \log|g(x)|$ olarak tanımlansın.

$$A = g^{-1}[0, \infty) \text{ ve } B = g^{-1}(-\infty, 0)$$

olmak üzere, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $x \in A$ için,

$$f_1(x) = h(x) \text{ ve } f_2(x) = f(x) - h(x)$$

ve $x \in B$ için,

$$f_1(x) = f(x) - h(x) \text{ ve } f_2(x) = h(x)$$

olarak tanımlansın. f_1 ve f_2 fonksiyonları Darboux fonksiyonlarıdır ve $f = f_1 + f_2$ olur. □

Alıştırmalar

23.5. Bir $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Darboux olması için gerekli ve yeterli koşul f altındaki her kapalı aralığın görüntüsünün bir aralık olmasıdır. Kanıtlayın.

23.6. f bir Darboux fonksiyonu ise, $|f|$, f^2 ve αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) fonksiyonlarının da Darboux fonksiyonları olduğunu kanıtlayın.

23.7. f bir Darboux fonksiyonu olsun. f ve $|f|$ fonksiyonlarının aynı noktalarda sürekli olduğunu kanıtlayın.

23.8. f fonksiyonu 0 değeri almayan bir Darboux fonksiyonu ise $1/f$ fonksiyonunun da Darboux fonksiyonu olduğunu kanıtlayın.

23.9. Birebir Darboux fonksiyonlarının sürekli olduğunu kanıtlayın.

23.10. f fonksiyonunun her noktada sağdan ve soldan limiti olsun. Bu durumda f'nin sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul Darboux olmasıdır. Kanıtlayın.

23.11. Düzgün yakınsayan Darboux fonksiyonlar dizisinin limiti illa Darboux olması gerekmediğini gösterin.

Türev Bilenlere Not. Türevlenebilir bir fonksiyon, zorunlu olarak sürekli olduğundan, Darboux fonksiyonudur, ama Darboux'nun [1]'de kanıtladığı üzere *eğer $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirse türev fonksiyonu da bir Darboux fonksiyonudur.*

Kanıt: $a \leq c < d \leq b$ ve $f'(c) < u < f'(d)$ olduğunu varsayalım. $g(x) = f(x) - ux$ kuralıyla tanımlanan $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve,

$$g'(c) = f'(c) - u < 0 < f'(d) - u < g'(d)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \to c^+} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} < 0$$

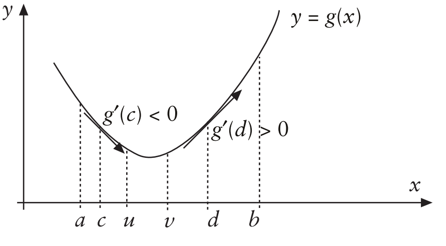
ve

$$\lim_{x \to c^-} \frac{g(x) - g(d)}{x - d} > 0$$

olduğundan, $g(s) < g(c)$ ve $g(t) < g(d)$ olacak biçimde $c < s < t < d$ var. g sürekli olduğundan

$$\inf g([s,t]) = g(z)$$

olacak biçimde $z \in (c,d)$ bulunur. Üstelik $g'(z) = 0$ ve $f'(z) = u$ olur. Bu da kanıtı tamamlar.



Kaynakça

[1] G. Darboux, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. Sci. Scuola Norm. Sup. 4 (1875) sayfa 57-112.
[2] H. Fast, *Une remarque sur la propriété de Weierstrass*, Colloq. Math. 7 (1959) sayfa 75-77.
[3] W. Sierpinski, *Sur une propriété des fonctions réelles quelconques*, Le Mathematische Catania 8 (1953) no 2, sayfa 43-48.

Kaynakça

[Ab] Stephen Abbott, **Understanding Analysis**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 2002.

[Ap] Tom M. Apostol, **Calculus I** ve **II**, John Wiley and Sons 1967.

[Ba] Robert G. Bartle ve Donald R. Sherbert, **Introduction to Real Analysis**, dördüncü basım, John Wiley and Sons 2011.

[Be] Sterling K. Berberian, **A First Course in Real Analysis**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 1994.

[BR] G. Bouligand ve J. Rivaud, **L'Enseignement des Mathématiques Générales par les Problèmes**, Librarie Vuibert, 4'üncü basım, 1968.

[Br] Andrew Browder, **Mathematical Analysis, An Introduction**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 1996.

[Br] R. Creighton Buck, **Advanced Calculus**, Mc-Graw Hill 1956, 2'nci basım 1965.

[Ca] Constantin Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 32: 193-217, 1911.

[G] Roger Godement, **Analysis I** ve **II**, Springer, Universitext 2003. (Fransızcadan çeviren Philip Spain).

[Ko] P.P. Korowkin, **Eşitsizlikler**, çeviri H. Şahinci, TMD 1962, 60 sayfa.

[L] Serge Lang, **A First Course in Calculus**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, 5. Basım, 1986.

[L2] Serge Lang, **Complex Analysis**, Addison-Wesley Publishing Company 1977.

[MD] Matematik Dünyası dergisi, TMD, 2007-2012.

[MK] `http://matkafasi.com`.

[N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, üçüncü basım, Nesin Yayıncılık 2011.

[N2] Ali Nesin, **Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N3] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N4] Ali Nesin, **Analiz I**, üçüncü basım, Nesin Yayıncılık 2014.

[N5] Ali Nesin, **Analiz IV**, ikinci basım, Nesin Yayıncılık 2012.

[SCY] D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov ve I.M. Yalom, **The USSR Olympiad Problem Book**, Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics, Dover Publications, Inc. 1994.

[Sp] Murray R. Spiegel, **Théorie et Applications de l'Analyse**, Serie Schaum, McGraw-Hill 1974.

[TT] Tosun Terzioğlu, **Bir Analizcinin Defterinden Seçtikleri**, ikinci basım, Nesin Yayınevi 2014.

Dizin

$\stackrel{p}{=}$, 138
$\stackrel{u}{=}$, 144

Abel yakınsaklık teoremi, 288
açık küme, 251
ağırlık, 221
ağırlıklı ortalamalar, 221
α'ıncı mertebeden ortalama, 230
altörtü, 253
altuzay (metrik), 160
a^q, 123
a^r, 117, 125, 216–218
aradeğer özelliği, 64
aradeğer teoremi, 56, 57, 333
aralık, 62, 63, 114, 115
aritmetik-geometrik eşitsizliği, 129
aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği, 223
artan fonksiyon, 62
asalların harmonik serisi, 285
ayrık küme, 16
azalan fonksiyon, 62

Bernoulli eşitsizlikleri, 129, 224
Bernoulli sayıları, 316
Bernstein polinomları, 271
Bernstein, Sergey Natanoviç, 271
Beyarslan, Özlem, 2
biçimsel kuvvet serileri, 299–328
biçimsel kuvvet serisi, 302
bileşke, 314
binom katsayıları, 237
birebir fonksiyon, 63, 115
birim fonksiyon, 17
Bolzano teoremi, 60, 334
bölge, 309
Boztaş, Serdar, 1, 248

Carathéodory teoremi, 207
Carathéodory, Constantin, 207, 208
Cauchy çarpımı, 181
Cauchy dizisi, 165
Cauchy-sürekli, 25, 90
Cauchy, Augustin Louis, 6, 181
Cauchy-Mertens teoremi, 181
Cauchy-Schwarz eşitsizliği, 226
Cauchy-süreklilik, 25

$\mathcal{C}_a(X)$, 41
cisim, 309
cos, 139, 180–187, 303
$\mathcal{C}(X)$, 41, 170
çap, 291
Çelik, Türkü Özlüm, 2
çıkarma (fonksiyonlarda), 34

Darboux fonksiyonları, 64, 334
Darboux, Jean Gaston, 334
Darboux-sürekli fonksiyon, 334
dbz, 207
dışbükey fonksiyon, 191–193
dışbükey fonksiyonların çarpımı, 197
dışbükey kombinasyonu, 207
dışbükey küme, 206
dışbükey zarfı, 207
dışbükeylik ve süreklilik, 196
Dini teoremi, 264
Dini, Ulisse, 264
doğal logaritma, 212–216
Doğan, Uğur, 2
düzgün sürekli fonksiyon, 259
düzgün süreklilik, 18, 173, 258
düzgün yakınsak dizi, 162
düzgün yakınsaklık, 140
düzgün yakınsamak, 143–173
düzgün yakınsamak (seri), 173, 177

eksi sonsuz, 105
eksponansiyel büyüme, 111
Ercan, Zafer, 1, 333
Euler-Mascheroni sabiti, 285
exp, 35, 109, 110, 139, 150, 155, 180, 194, 197, 211–212, 299

Fast, H., 336
Fonk X, 137, 157
Fonk$(X, \mathbb{R})$, 41, 137
fonksiyon bileşimi, 19
fonksiyon genişlemesi, 21
fonksiyon kısıtlaması, 21, 25
fonksiyonların noktasal czarpımı, 137
fonksiyonların noktasal toplamı, 137
$f(x^+)$, 113
$f(x^-)$, 113

genelleştirilmiş binom açılımı, 237
genişleme (fonksiyonlarda), 21
geometrik ortalama, 231
global maksimum, 205
global minimum, 205
Gül, Uğur, 1, 333

halka, 303
harmonik ortalama, 230
harmonik seri, 283
Heine-sürekli, 25
Heine-Borel teoremi, 254
Hölder eşitsizliği, 226

ıraksak kuvvet serisi, 175
içbükey fonksiyon, 191
ikinci türev, 326
imge, 62

Jensen eşitsizliği, 221
J_f, 113

kapalı küme, 334
kesin artan fonksiyon, 62
kesin azalan fonksiyon, 62
kesin dışbükey, 195
kesin içbükey, 195
kesin monoton fonksiyon, 62
kısıtlanmış fonksiyon, 21
kısıtlı Laurent serileri, 331
komşuluk, 24
komşulukta $\leq$, 85
Korkmaz, Aslı Can, 2
kuadratik ortalama, 230
kuvvet serileri, 179
kuvvet serisi, 175

Laurent serileri, 330–331
Lebesgue sayısı, 291, 292
limit noktası, 74
Lindenbaum, Adolf, 336
Lipschitz fonksiyon, 261
Lipschitz özelliği, 261
ln, 213, 279, 299
log, 218
$\log_a$, 218
logaritma, 213, 218–219
logaritma tabanı, 218
logaritmik dışbükey, 219

Mahler eşitsizliği, 229
maksimum değer, 205
Menekşe, Mine, 1, 333
mertebeli ortalama, 230
Mertens, Franz, 181
mesafe, 157
mesafe (bir kümeye), 22
mesafe fonksiyonu, 158, 159
metrik uzay, 159
minimum, 205
Minkowski eşitsizliği, 228
monom, 302
monoton fonksiyon, 62–64, 112–116
mutlak değer, 13, 40
mükemmel küme, 334

Nesin, Ali Derya, 2
noktasal yakınsamak, 138

özdeşlik fonksiyonu, 17
örtü, 253
Özkaya, Görkem, 1, 200

π, 180, 184
polinom, 300–302
polinomiyal fonksiyon, 13
polinomiyal fonksiyonlar, 34–36

Riemann zeta fonksiyonu, 129
$\mathbb{R}[T]$, 35
$R[X]$, 302
$R[[X]]$, 303, 307
$R[X, Y]$, 302

sabit katsayı, 300, 304
sabit nokta, 62
sabitle çarpma (fonksiyonlarda), 34
sağdan limit, 93
sağdan yoğunlaşma noktası, 92
sandviç teoremi, 86, 94
seviye kümesi, 208
sıçrama, 113
sınırlı fonksiyon, 10
sıra, 311
Sierpiński, Wacław, 336
sin, 139, 180–187, 303
soldan limit, 92, 93
soldan yoğunlaşma noktası, 92
sonlu altörtü, 253
sonlu örtü, 253
sonsuza ıraksamak, 105, 107
sonsuzlar, 97
Stolz, Otto, 334
sup, 156
süpnorm, 155
sürekli fonksiyon, 10, 72
sürekli imge, 62
süreklilik, 5–23
süreklilik (bir noktada), 8, 9
süreklilik çeşitleri, 25
süreksizlik noktası, 114
Şahin, Çiğdem, 2

tam metrik uzay, 165
tamlık bölgesi, 309
tan, 311
Tefenlili, Dilek, 2
Terziogzlu, Tosun, 1, 283

tıkız küme, 254
tıkızlık, 253
Törün, Ali, 2
trigonometrik fonksiyonlar, 180–187

uç değerler teoremi, 258
Uyar, Ayşe, 10
üçgen eşitsizliği, 159, 228
Ülkem, Özge, 2
Ünlü, Yusuf, 1, 115, 117, 186, 200, 223, 225, 238, 244, 246, 277, 293
üs alma, 110, 123–129, 200–204, 216–218
üssel fonksiyonlar, 126
üssü, 126
üstten yarısürekli, 265

Weierstrass M-Testi, 177
Weierstrass yoğunluk teoremi, 267
Weierstrass, Karl, 267

X-açık, 251

yakınsaklık yarıçapı, 175
yakınsamak, 161
yerel maksimum, 205
yerel minimum, 205
yerellik, 21
yoğun, 118
yoğunlaşma noktası, 74, 75
Young eşitsizliği, 224

zincir kuralı, 325