Ali Nesin

1956'da . . .

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye...

Ali Nesin

Analiz I

İçindekiler

Üçüncü Basıma Önsöz

Olabildiğince kitabı takip etmeye çalışarak birinci sınıf öğrencilerine bir ders verdim ve oldukça rahat bir biçimde kitabı bir dönemde bitirebildim. Ama bazı bölümleri atladım ve sadece gerektiğinde o bölümlere geri döndüm. Atladığım ve ilk okumada atlanmasını tavsiye ettiğim bölümler: 3.1 dışında 3'üncü bölümün tümü (3.2 ve 3.3'e gerektiğinde geri dönmek üzere), 9.1, 14.4, 16.3, 18.3 altbölümleri ve 19.1 dışında 19'uncu bölümün tümü.

Her yıl olduğu gibi bu yıl da öğrencilerin düşüncelerini kâğıda aktarmayı beceremediklerini gözlemledim. Bu beceriksizlik her yıl giderek artıyor. Anlaşılan lise öğrencileri her yıl daha az yazıyorlar. Oysa yazmak demek, düşünceyi sınamak, yani tekrar ve tekrar tekrar düşünmek demektir. Gerçek ne demektir bilmiyorum ama düşüncesini yazmayan birinin gerçeğe ulaşamayacağını biliyorum. Öte yandan hiç yazmamış ya da az yazmış birini bu konuda nasıl ikna edebileceğim hakkında hiçbir fikrim yok!

Öğrenciler okudukları kanıtları kitaba bakmadan, sanki yeni bir kitap yazıyormuşçasına, noktasına, virgülüne, satırbaşına, merkezlenen formüllere, yani yazış biçimine ve biçemine dikkat ederek bir kâğıda aktarmalılar. Amaç, okuyanın kanıtı kolaylıkla anlaması olmalıdır elbette. Bunun için harcanan kâğıda, zamana ve emeğe acımamalı ve gereken tüm özen gösterilmelidir. Kesinlikle zaman kaybı değildir. Doğru biçimde yazılmış bir kanıtta yanlış daha kolaylıkla farkedilir, zorlanılan nokta hemen kendini belli eder, eksikler hemen göze çarpar, bilinçaltının beynin ücra köşelerine attığı kuşkular öne çıkar! Herkesin okuyunca hemen anlayacağı tertemiz bir kanıt yazıncaya kadar denemeye devam edin. Yararını göreceksiniz.

Kanıt kâğıda tertemiz bir biçimde aktarıldıktan sonra, sözlü olarak, el kol sallayarak bir arkadaşa anlatılmalıdır. Civarda arkadaş yoksa aynanın karşısına geçin! Böylece kanıtı içselleştireceksiniz. Sıra önemli: önce yazı, sonra söz.

Bu basımda bazı hataları düzelttim, anlatım bozukluklarını giderdim, bir iki örnek ve alıştırma ekledim. Bunlar pek önemli değişiklikler değil. Ama kitabın sonuna ek olarak, gerçel sayı sisteminin biricikliğini (Bölüm 24), sonsuz küçük sayılar barındıran sıralı iki cisim örneğini (Bölüm 25), sıradışı (*non-standard*) gerçel sayıları (Bölüm 26) ekledim. En azından ilk ikisi müfredatın parçası olsa öğrencilerin ufku açılır. Sıradışı gerçel sayılar muhteşem bir konudur, insan zekâsının ve yaratıcılığının sınırlarında dolanır ama seviyenin kitabın geri kalan bölümlerine göre hayli yüksek olduğunu itiraf etmeliyim. En azından bir kere okumanın, böyle bir şeyin olabileceğini bilmenin okura çok katacağını düşünüyorum. Bu üç ek sayesinde kitabın bir bütünlüğe ulaştığını düşünüyorum.

"Kazanım" diye bir şey icat edildi son yıllarda. Yönetici kadro her dönem başı hocalardan bir dersten öğrencilerin kazanımları soruyor. Kazanımları beğenmezlerse dersin açılmasına izin vermeyecekler herhalde... Hocaların özgürlüklerini kısıtlayarak yarının tüketicilerini yetiştirmeye yönelik Bolonya süreci denen şeyin bir parçası sanırım. Modaya uyarak ben de öğrencinin bu kitaptan elde edeceği kazanımları sıralayayım. Öğrencinin kitabı baştan sona anlaması gerektiği dışında şunları söyleyebilirim:

1. ϵ-N'li kanıt yöntemi.

2. Birinci bölümdeki gerçel sayıların aksiyomları ve daha sonra ikinci bölümde $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ gibi sayı kümelerinin $\mathbb{R}$'de nasıl bulundukları.

3. Matematiksel yöntem: Tanım, aksiyom, varsayım, sav gibi kavramlar arasındaki ayrım. Tanımların zihinselliği ve gerçekle olan buğulu ilişkisi.

4. Biraz önce söz ettiğim matematik yazma sanatı.

5. Ve son olarak, diziler ve seriler. Nihai amaç 18.1, 18.2 ve 18.4 altbölümlerini anlamak olmalı.

Derslerinde kitabı kullanan meslektaşlarımdan kitapta aksiyomlarla çok zaman harcandığı, bildiğimiz anlamda analize çok geç geçildiği yönünde eleştiriler geldi. Ne yazık ki bildiğimiz anlamda analize erken geçildiğinde yanlıştan dönmek için çok geç oluyor. Bu kitap mühendislik bölümü öğrencileri için yazılmadı. Birinci sınıf matematik öğrencilerine ilk günden ne idüğü belirsiz "sayı doğrusu"ndan söz etmenin, telafisi mümkün olmayan hasarlar yarattığı düşüncesini taşıyorum. Birinci sınıfta matematiğin aksiyomatik, yani zihinsel yönüne yeterince zaman harcanması gerektiğini şiddetle savunuyorum.

Öte yandan şu da bir başka gerçek ki kitap yazmak yerine kaset doldursaydım, kitaptakinden bambaşka bir sıralama takip ederdim.

Bir başka eleştiri bazı alıştırmaların öğrenciler için çok zor olduğu yönünde. Doğrudur. Öğrencilerimin bana kitaptan sorduğu birkaç alıştırmayı ben de yapamadım! Ama ne önemi var ki!

Bu basımda eski basımlardaki hataları düzelten öğrencilerim Atila İnanlı'ya, Betül Tolgay'a, ve Yasin Emre Üsküplü'ye ve yeni yapılan ekleri okuyup düzeltme ve önerilerde bulunan Onur Eylül Kara'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ali Nesin / Eylül 2014

İkinci Basıma Önsöz

Birinci basımdaki bazı hatalar düzeltildi, beceriksizlikler giderildi. Bazı bağımsız bölümler tek bir bölüm altında toplanarak kitap daha derli toplu bir hale getirildi. Bunun dışında, gereksiz yere uzun olduklarına hükmettiğim bazı kanıtlar kısaltıldı. (Ama bu konuda yanılmış da olabilirim, eski uzun kanıtları seviyordum!) Kitap daha az sayfaya insin ve böylece fiyatı artmasın diye mizanpajla oynandı. Bu çabalar sonucunda 20 sayfa kadar kısalan kitap, kitabın sonuna eklediğim eklerle ve en ilginçleri [A], [Bro] ve [Kn] şaheserlerinden apartılan ya da uyarlanan alıştırma ve örneklerin eklenmesiyle birlikte 80 sayfa kadar da uzadı! Ama kitabın özünün bu değişikliklerden pek etkilendiğini söyleyemem.

Örnekleri ya da alıştırmaları tek başına çözemeyen öğrenci karamsarlığa kapılmamalı, kimisi hiç kolay değildir çünkü. Birçoğunda ben de zorlandım, hatta kimisinde resmen çuvalladım, bir bilene sordum. Önemli olan kavramları, teoremleri ve kanıtlarını özümsemektir. Uygulamada ustalaşma işi zamanla (ve ancak gerekirse!) olacaktır.

Birinci basımda bir örneğin uzun açıklamalarını iki üç satıra indiren İlham Aliyev'e ve eşitsizliklerle ilgili birçok kanıtı kısaltan Yusuf Ünlü'ye sonsuz teşekkürler.

Yusuf Ünlü, pozitif gerçel sayıların üslerini almayı çok şık bir biçimde tanımlayıp yolladı. Bunu ek olarak Bölüm 20'ye koydum ama tanım Altbölüm 3.3'ün sonuna gelebilecek kadar basitti! Eğer böyle yapsaydım kitap baştan aşağı değişmek zorunda kalacak ve hedeflediğimden bambaşka bir kitap ortaya çıkacaktı. Kitabımın bakış açısından memnun olduğumdan bu değişikliği yapmadım.

Bunun dışında, kitabın sonuna, meraklılar için, seri kavramını bir anlamda (ve sadece belli bir anlamda) genelleştiren toplanabilir ailelerle, iki göstergeçli "çifte" serilerle ve sonsuz çarpımlarla ilgili birer altbölüm ekledim.

Bir de ayrıca kitabın en sonuna bir "formüler" ekledim. Böylece hangi diziden ya da seriden hangi sayfada sözedildiği bir bakışta görülebilecek. Mükerrer örnekler ve alıştırmalar özellikledir.

Bu arada bu analiz serisinin topoloji ve metrik uzaylar konularını işleyen dördüncü cildi çıktı ve hatta ikinci basımını yapmak üzere. İkinci cildin ise hâlâ daha eli kulağında. Tek bir cilde sığacağından giderek daha fazla kuşku duyduğum üçüncü cildin yayımlanması ise 2013'ü bulabilir.

Analizden sonra sıra cebire gelecek. Kitapların çıkmasını bekleyemeyecek okur Matematik Dünyası dergisini (www.matematikdunyasi.org) takip etmeli. Bu kitap da büyük ölçüde Matematik Dünyası'nda yazılan yazıların derlenmesiyle ortaya çıktı.

Ali Nesin / Mayıs 2012

Birinci Basıma Önsöz

En az dört ciltten oluşacak olan bu analiz serisi, 1996'dan, yani kuruluşundan beri İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde birinci sınıf matematik öğrencilerine verdiğim analiz derslerinden ve daha sonra Matematik Dünyası dergisine yazdığım yazılardan ortaya çıktı. Her cildin bir dönemlik bir dersin içeriğini (fazlasıyla) oluşturacağı düşünülmüştür.

Türev ve integral konuları öğrenciyi kaçınılmaz olarak otomatizme ve ezbere itekledeğinden, birkaç yıl sonra birinci sınıfta bu konulara hiç girmeme kararı aldım. Başlangıçta bu kısıtlama yüzünden işleyebileceğim konuların oldukça sınırlı olacağını düşünürken, zamanla bu tahminimde ne derece yanıldığımı anladım. Meğer türev ve integralsiz de analiz yapılabiliyormuş ve bayağı derine inilebiliyormuş. Dolayısıyla ilk iki ciltte bu konulara girmeyeceğiz.

Türev ve integralsiz analiz yapmak kimi zaman ayaklarından tavana asılı halde ve fırça ağızda resim yapmaya benzeyebiliyor, ama çekilen zorluğa değecek bir güzellik çıkıyor ortaya. (Biraz abarttım galiba!)

Burbakist bir yaklaşımla, kitaba gerçel sayılar sisteminin "aksiyomları"yla, yani tanımıyla başladım. Kanıtlanmamış hiçbir olgu kullanmadım.

Raabe Kıstasları bölümü gibi daha ileri seviyede olan bazı bölümler de ilk okuyuşta atlanabilir. Ama her matematik öğrencisinin bu ciltteki Cauchy çarpımını (Altbölüm 16) ve ikinci ciltteki Weierstrass M-testini okumasında, anlamasında ve özümsemesinde yarar vardır. Bu iki teorem hayatınızı kolaylaştıracak ve ayrıntılarla zaman kaybetmeyip kısa zamanda daha derine inmenize olanak sağlayacaktır.

Her ne kadar kitapta bir boyutlu (yani $\mathbb{R}$'de) analiz yapılmışsa da, daha deneyimli okurun kanıtladığımız olguların birçoğunu, $\mathbb{R}^n$'ye, $\mathbb{C}$'ye, topolojik ve metrik uzaylara ve hatta daha genel olarak Banach uzaylarına ve cebirlerine genelleştirmesi işten bile değildir.

Konuları en ekonomik biçimde alaburbaki işlemedim ve bunu özellikle yapmadım. Analiz gibi hesap kitap isteyen ve üstelik böylesine temel bir konuda ekonomik olmanın pedagojik değerine inanmıyorum. Örneğin exp fonksiyonuyla ilgili her şeyi, kitabın sonlarına doğru çok daha kısa bir biçimde sunabilirdim ya da eşitsizlikleri türev kullanarak çok daha kolay kanıtlayabilirdim. Tam tersine en ilkel yöntemlerle olabildiğince derin sonuçlar kanıtlamak istedim. Tabii sebat edip kitabı bitiren okur, yaptığımız karmaşık kanıtları basitleştirebilecektir. Ne mutlu ona!

Bir öğrenci iki tehlikeye maruz kalabilir. Ya çok fazla kuramsal matematiğe yönelip hesap yapmasını unutur, ya da tam tersine, hesaba kitaba çok fazla önem verir ve kavramların derinliğine vakıf olamaz, kavramsal düşünemez. Gençliğinde ikinci tehlikeye maruz kalmış biri olarak öğrencilerimin böyle yetişmesini istemedim ve İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde gereken önlemleri aldım, ama bu sefer tam tersi oldu, bir fonksiyonun grafiğini çizemeyen ya da çizmekten imtina eden öğrenciler yetişti. İşte bu kitap öğrencileri her iki tehlikeye karşı korumak için yazılmıştır. Bir matematikçi gerektiğinde hesap yapabilmeli!

Bu kitabı okumak amacıyla eline alan ciddi matematik öğrencisi, teoremleri önce kendi kanıtlamaya çalışmalıdır, çözümlü örnekleri önce kendi çözmelidir. Sanılanın aksine zaman kaybı olmaz ve çok şey kazandırır. Bu önerim her matematik kitabı için geçerlidir. Düşünmekten kitap okuyamadığı zaman öğrenci araştırma yapmaya hazır demektir! Zaten bu yüzden birçok kez, daha sonra metinde kanıtlanacak olan teoremleri alıştırma olarak koydum.

Kitabın bir iki yerinde pek pedagojik değeri olduğuna inanmadığım hesaplamalar yaptığımın farkındayım. Engelleyemedim. Daha doğru yaklaşımlara açığım. Lütfen kitapta bulduğunuz fazlalıkları, eksiklikleri, yanlışları, anlatım bozukluklarını anesin@nesinvakfi.org adresine bildirin.

Kanıtlayamadığım eşitsizliklerde hızır gibi imdadıma yetişen Görkem Özkaya'ya, bu ders notlarını yazmam için bana gereken ortamı sağlayan ve desteği veren eşim Özlem Beyarslan'a ve asistanlarım Aslı Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin'e, kitabın hazırlanışının çeşitli kademelerinde yardımcı olan ve daha da olacak olan (!) Sonat Süer'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Herkese kolay gele.

Ali Nesin / NMK, 10 Ekim 2010 - 18 Eylül 2011

Kısım I

Gerçel Sayılar

1. Gerçel Sayılar ve Özellikleri

1.1 Gerçel Sayıların Aksiyomları

Bir başka kitabımızda, [N2]'de[1], kümeler kuramının en basit aksiyomlarından yola çıkarak, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi matematiksel olarak yaratmıştık. Ayrıca, adına 0 (sıfır) ve 1 (bir) dediğimiz iki gerçel sayıya özel önem vermiş ve $\mathbb{R}$ kümesi üzerine, $+$ (toplama) ve $\times$ (çarpma) diye adlandırdığımız iki işlemle birlikte bir de $<$ olarak simgelediğimiz bir tamsıralama yaratmıştık. Böylece "gerçel sayılar sistemi" diye bilinen

$$(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$$

yapısını var etmiştik. Her şey kümeler kuramının en basit aksiyomlarından hareketle elde edilmişti. Yine aynı kitapta, $(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$ yapısının birçok özelliğini kanıtlamıştık. [N2]'de kanıtlanmış özelliklerin 16'sını birazdan sıralayacağız. Bu kitapta, gerçel sayılar yapısının [N2]'de nasıl inşa edildiğini unutarak, sadece ve sadece bu 16 özellikten hareketle, yani gerçel sayıların sadece ve sadece bu özelliklerini doğru varsayarak, matematiksel analizi geliştireceğiz; çünkü bu kitapta analiz yapılacak ve analizde gerçel sayıların nasıl yaratıldıklarından ve ne menem şey olduklarından ziyade, özellikleri önemlidir.

[N2]'de kanıtlanmış bu 16 önermeyi bu kitapta aksiyom olarak kabul etmenin psikolojik, pedagojik ya da matematiksel herhangi bir sakıncası yoktur ya da olmamalı çünkü gerçekten de bu 16 önerme, çocukluğumuzdan beri sezgilerimizle hissettiğimiz gerçel sayıların özünü oluşturur, yani doğru varsayılan bu 16 önermeden hareketle gerçel sayıların doğru olması gereken tüm özellikleri kanıtlanabilir.

Özetle, bu kitapta, [N2]'de gerçek anlamda ve somut olarak inşa ettiğimiz $\mathbb{R}$ kümesinin, 0 ve 1 elemanlarının ve toplama ve çarpma işlemlerinin ve $<$ sıralamasının nasıl tanımlandıklarını ve ne olduklarını unutup, gerçel sayıları, aşağıdaki 16 özelliği sağlayan matematiksel bir yapı olarak kabul edebilirsiniz.

Aşağıdaki önermelerde ab ifadesi $a \times b$ anlamına gelmektedir.

[1]Köşeli parantezlerle belirtilenler, kitabın sonundaki Kaynakça'da belirtilen kaynaklara atıf vermektedir.

$\mathbb{R}$'nin Aksiyomları

T1. Her a, b, c için, $(a+b)+c = a+(b+c)$.
T2. Her a için, $a+0 = 0+a = a$.
T3. Her a için, $a+b = b+a = 0$ eşitliklerini sağlayan bir b vardır.
T4. Her a, b için, $a+b = b+a$.
Ç1. Her a, b ve c için, $(ab)c = a(bc)$.
Ç2. Her a için, $a \times 1 = 1 \times a = a$.
Ç3. Her $a \neq 0$ için, $ab = ba = 1$ eşitliklerini sağlayan bir b vardır.
Ç4. Her a ve b için, $ab = ba$.
SB. $0 \neq 1$.
D. Her a, b ve c için, $a(b+c) = ab+ac$.
O1. Hiçbir a için $a < a$ olamaz.
O2. Her a, b ve c için, $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$.
O3. Her a ve b için, ya $a < b$ ya $a = b$ ya da $b < a$.
TO. Her a, b ve c için, $a < b$ ise $a+c < b+c$.
ÇO. Her a, b ve c için, $a < b$ ve $0 < c$ ise $ac < bc$.
SUP. Boş olmayan üstten sınırlı her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır.

Bundan böyle bu önermelere ***aksiyom*** adını vereceğiz. Bunlar matematiğin değil, analizin aksiyomları olarak kabul edilmelidirler. Daha doğru bir ifadeyle, tek bir aksiyomumuz var, o da şu: Bu 16 önermenin doğru olduğu bir

$$(\mathbb{R},\ +,\ \times,\ <,\ 0,\ 1)$$

yapısı vardır.

Yukarıdaki önermelerin bir anlam kazanması için şunları da eklemek lazım:

1. $\mathbb{R}$ bir kümedir.

2. 0 ve 1, $\mathbb{R}$'nin birer elemanıdır. 0'a "sıfır", 1'e "bir" denir.

3. $+$ ve $\times$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımından $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyondur. Ama aksiyomları yazarken, "$+(a, b)$" yerine çok daha alışık olduğumuz "$a+b$" yazılımını kullandık. "$a+b$" yazılımını "a artı b" diye okuyacağız. Benzer şekilde $\times(a, b)$ yerine ab yazdık; bunu da "a çarpı b" diye okuyacağız. Gerekli gördüğümüzde "$a \times b$" ya da "$a \cdot b$" yazılımlarına da başvuracağız.

4. $<$, $\mathbb{R}$'nin ikili bir ilişkisidir, yani $<$ aslında $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir. "$(a,\ b) \in <$" yerine, daha alışık olduğumuz "$a < b$" yazılımını tercih ettik. "$a < b$" ifadesi "a, b'den küçüktür" diye okunur.

Dikkat ederseniz, toplama ve çarpma üzerine yukarıdaki aksiyomlar dışında hiçbir şey bilmiyormuşuz gibi davranıyoruz. Örneğin 2 diye bir eleman henüz tanımlamadık. Bu elemanı daha sonra $1+1$ olarak tanımlayacağız. Soyut matematik işte böyle bir şeydir.

Aksiyomların sonuncusu hariç her biri $\mathbb{R}$'nin elemanlarından bahsetmektedir, yani ilk 15 aksiyomda söz edilen a, b ve c şeyleri $\mathbb{R}$'nin birer elemanıdır.

Sonuncu aksiyomda (SUP) ise $\mathbb{R}$ kümesinin (üstten sınırlı olan ama boşküme olmayan) altkümelerinden sözedilmektedir.

SUP aksiyomu dışındaki tüm aksiyomların kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ için de geçerli olduklarına dikkatinizi çekeriz. Kesirli sayılarla gerçel sayıların arasındaki ayrımın, elemanlardan değil de altkümelerden sözeden SUP aksiyomunda saklı olduğunu görmek gerekir.

Bazı Notlar. Yukarıda sıralanan aksiyomları sağlayan iki

$$(R, +, \times, <, 0_R, 1_R) \text{ ve } (S, +, \times, <, 0_S, 1_S)$$

yapısı birbirine öylesine benzer ki, elemanlarının adları değişik olmasa aralarındaki farkı anlamanın olanağı yoktur. Matematiksel deyişle, R ile S arasında, toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya duyarlı, yani her $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned}
&f(x+y) = f(x) + f(y),\\
&f(xy) = f(x)f(y),\\
&x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)
\end{aligned}$$

önermelerini sağlayan bir

$$f : R \longrightarrow S$$

eşlemesi vardır. Günlük ifadeyle bu şu demektir: Toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya dokunmadan R'nin x elemanını atıp yerine $f(x)$ koyarsak aynen S yapısını elde ederiz, yani R ile S yapıları arasında, kümelerin elemanlarının adları dışında -ki bunun da matematiksel ve düşünsel açıdan hiç önemi yoktur- en küçük bir ayrım yoktur. Bu durumda,

$$(R, +, \times, <, 0_R, 1_R) \simeq (S, +, \times, <, 0_R, 1_R)$$

yazarız. Bunu, "gerçekten (yani özünde, yani esaslı bir biçimde) birbirinden farklı iki gerçel sayı sistemi yoktur" olarak ifade edebiliriz. Bu biricikliği SUP aksiyomuna borçluyuz. SUP aksiyomunu sağlamayan yapılar için böyle bir biriciklik doğru olamaz. Bütün bunları kitabın en sonundaki eklerde, özellikle meraklı okurlar için, Bölüm 24'te kanıtlayacağız.

Matematiksel anlamda [N2]'de inşa ettiğimiz ya da yukarıda varlığını kabul ettiğimiz gerçel sayılar yapısının gerçek dünyayla (her ne demekse!) ya da liselerde öğretilen sayı doğrusuyla ilgisi pek açık değil. Gerçel sayıları bu kitapta fiziksel anlamda mesafe olarak tanımlamadık, tanımlayamazdık da, çünkü matematik yapıyoruz ve matematik sadece ve sadece zihinsel bir uğraştır. Gerçel sayılar yapısı, matematiksel anlamda yukarıda sıraladığımız özellikleri sağlayan bir yapıdır. Tekrar etmekte yarar var: Böyle bir yapının varlığı [N2]'de kanıtlanmıştı. Bu kitapta matematiksel mantık dışında sadece bu özellikleri veri olarak kabul edeceğiz ve analizi geliştireceğiz. Analize odaklanmak isteyen okur [N2]'ye başvurmayıp bu noktadan devam etmelidir.

Bu satırdan itibaren, bütün kitap boyunca ***gerçel sayılar sistemi*** ya da ***yapısı***, bu altbölümdeki T1'den SUP'e kadar sıraladığımız 16 önermeyi sağlayan bir $(\mathbb{R}, +, \times, <, 0, 1)$ altılısıdır. Bu önermelere $\mathbb{R}$'nin aksiyomları diyeceğiz. Tabii bunlar aslında aksiyom değildirler, [N2]'de kanıtlanmışlardır, ama bu kitapta bu önermelere aksiyom muamelesi yapacağız.

$\mathbb{R}$'nin elemanlarına ***gerçel sayı*** diyeceğiz.

Bu arada, [N2]'de yaptıklarımızı yok saydığımızdan $\mathbb{R}$'nin içinde kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'nün ya da en azından bir kopyasının bulunduğunu henüz bilmediğimizi de dikkatinizi çekerim. Gelecek bölümde $\mathbb{R}$'nin içindeki $\mathbb{Q}$'yü bulacağız.

Bu bölümde gerçel sayı sisteminin en basit özelliklerini kanıtlayacağız. Kanıtlarda SUP aksiyomunu sadece en sonda kullanacağız. SUP dışındaki aksiyomların sağlandığı yapılara ***sıralı cisim*** denir. Demek ki hemen aşağıda kanıtlayacağımız önermeler sadece $\mathbb{R}$'de değil, tüm sıralı cisimlerde doğrudur.

1.2 Toplamanın Özellikleri

A. T1 ve T4'ün anlamı. T1, sayıları toplarken paranteze gerek olmadığını söylüyor. Örneğin,

$$(a+b)+c \text{ ve } a+(b+c)$$

yerine $a+b+c$ yazabiliriz. Aynı biçimde,

$$(a+b)+(c+d) \text{ ve } (a+(b+c))+d$$

yerine $a+b+c+d$ yazabiliriz. T4 de toplama yaparken sıralamanın önemli olmadığını söylüyor. Örneğin, $a+b+c+d$ yerine $b+d+c+a$ yazabiliriz. T1'e ***birleşme özelliği***, T4'e de ***değişme özelliği*** adı verilir.

B. 0'ın biricikliği. T2 özelliğini sağlayan 0 elemanının biricik olduğunu kanıtlayalım: $0'$ elemanı da aynen 0 gibi T2 özelliğini sağlasın, hatta bu özelliğin sadece yarısını sağlasın, diyelim her $a \in \mathbb{R}$ için, $a + 0' = a$ olsun. Özel bir durum olarak, $a = 0$ için $0 + 0' = 0$ elde ederiz; o zaman,

$$0' \stackrel{\text{T2}}{=} 0 + 0' = 0$$

olur.

C. Toplamsal Ters. Şimdi, verilmiş bir $a \in \mathbb{R}$ için T3 özelliğini, hatta T3'ün sadece yarısını sağlayan b'nin biricikliğini kanıtlayabiliriz:

$$a+b = b+a = 0 \text{ ve } a+c = 0$$

olsun; o zaman,

$$b \stackrel{\text{T2}}{=} b+0 = b+(a+c) \stackrel{\text{T1}}{=} (b+a)+c = 0+c \stackrel{\text{T2}}{=} c$$

olur. Demek ki $b = c$. Yani verilmiş bir a için T3'ü sağlayan b biricik. Benzer şekilde $c + a = 0$ ise de $c = b$ eşitliği kanıtlanabilir.

Tabii a değiştikçe T3'teki eşitliği sağlayan b de değişir, ama verilmiş bir a için T3 özelliğini sağlayan b biriciktir, bir ikincisi daha yoktur. O zaman b'ye özel bir ad verebiliriz: b'ye a'nın ***toplamsal tersi*** denir ve b yerine $-a$ yazılır ve bu eleman "eksi a" diye okunur. Elbette,

$$(-a) + a = a + (-a) = 0 \tag{1}$$

eşitliği sağlanır ve $-a$ bu eşitliklerin birini sağlayan yegâne elemandır, yani,

$$b = -a \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b + a = 0.$$

Ayrıca, $0 + 0 = 0$ olduğundan, $-0 = 0$ olur.

D. Çıkarma. $a+(-b)$ yerine $a-b$ yazılır ve bu işleme ***çıkarma*** denir. Benzer şekilde $-a - b$ ifadesi $(-a) - b$ anlamına gelir:

$$-a - b = (-a) - b = (-a) + (-b).$$

$-a + b$ ifadesi de $(-a) + b$ anlamına gelir. Tahmin edilen

$$-(a + b) = -a - b \text{ ve } -(a - b) = b - a$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak zor değildir. Birincisini kanıtlayalım misal olarak:

$$\begin{aligned}(a + b) + (-a - b) &= a + b + (-a) + (-b)\\ &= (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

ve bundan ve (C)'den istenen eşitlik çıkar. Demek ki $-a - b$, $a + b$ sayısının toplamsal tersidir.

E. Sadeleştirme. *Toplama işleminin sadeleştirme özelliği vardır, yani* $a+c = b + c$ *ise,* $a = b$ *olur.* Nitekim,

$$\begin{aligned}a &= a + 0 = a + (c + (-c)) = (a + c) + (-c)\\ &= (b + c) + (-c) = b + (c + (-c)) = b + 0 = b.\end{aligned}$$

Tabii T4 sayesinde, sadece sağdan değil, soldan da sadeleştirme yapılabilir.

Sadeleştirmenin basit bir sonucu: Eğer $a + b = a$ ise $a + b = a = a + 0$ olur ve buradan sadeleştirerek $b = 0$ elde ederiz.

F. Tersin Tersi. (1) eşitliğinde a yerine $-a$ alırsak,

$$(-(-a)) + (-a) = 0$$

buluruz. Demek ki

$$(-(-a)) + (-a) = 0 = a + (-a)$$

ve sağdaki $-a$'ları sadeleştirerek

$$a = -(-a)$$

elde ederiz. Özetle, a'nın tersinin tersi a'dır. Bunu şöyle de görebiliriz; T3'te a ve b'nin simetrik rolleri olduğundan b, a'nın tersiyse a da b'nin tersi olur, yani a'nın tersinin tersi a'dır, yani

$$-(-a) = a$$

olur.

G. $a + b = c$ eşitliğinden kolaylıkla $a = c - b$ ve $b = c - a$ eşitlikleri çıkar.

Bundan böyle toplamayla ilgili tüm bu bilgileri ve kimbilir belki de kanıtlamayı unuttuğumuz başka eşitlikleri de özgürce kullanacağız. Şimdi çarpmanın özelliklerine geçelim.

1.3 Çarpmanın Özellikleri

H. Ç1 ve Ç4'ün anlamı. Ç1, çarpma işlemi için paranteze gerek olmadığını söylüyor. Ç4 de elemanları çarparken sıralamanın önemli olmadığını söylüyor. Örneğin, $((ab)c)d$ yerine $bdca$ yazabiliriz.

Ç1'e (çarpma için) ***birleşme özelliği***, Ç4'e (çarpma için) ***değişme özelliği*** denir.

I. 1'in Biricikliği. Aynen toplamadaki gibi, Ç2 özelliğini sağlayan 1 elemanının biricik olduğunu kanıtlayalım: $1'$ elemanı da Ç2 özelliğini sağlasın, yani her $a \in \mathbb{R}$ için, $a1' = a$ olsun. Bunun özel bir durumu olarak, $a = 1$ için $1 \times 1' = 1$ elde ederiz. Demek ki,

$$1' \stackrel{\text{Ç2}}{=} 1 \times 1' = 1$$

olur.

J. 0'la Çarpma. Her a için $a0 = 0$ olur, çünkü,

$$a0 + 0 = a0 = a(0 + 0) \stackrel{\text{D}}{=} a0 + a0$$

ve sadeleştirerek (bkz. (E)'nin son paragrafı) $a0 = 0$ buluruz.

Bundan ve SB'den, Ç3 özelliğinde neden a elemanının 0'dan farklı olması gerektiği anlaşılır. Çünkü bir $b \in \mathbb{R}$ elemanı için $0b = 1$ olsaydı, $0 = 0b = 1$ ve dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x = 1x = 0x = 0$$

olurdu, yani $\mathbb{R} = \{0\}$ olurdu, yani tek bir gerçel sayı (0 sayısı) olurdu; pek arzuladığımız bir sonuç olduğu söylenemez!

K. Çarpımsal Tersin Biricikliği. Verilmiş bir $0 \neq a \in \mathbb{R}$ için Ç3 özelliğini sağlayan b elemanının da biricikliğini kanıtlayabiliriz:

$$ab = ba = ac = 1$$

olsun; bu durumda,

$$b \overset{Ç2}{=} b \times 1 = b(ac) \overset{Ç1}{=} (ba)c = 1 \times c \overset{Ç4}{=} c$$

olur. Demek ki $b = c$, ve b elemanı gerçekten biricikmiş. Bu b elemanına a'nın ***çarpımsal tersi*** denir. a'nın çarpımsal tersi

$$a^{-1}\ 1/a \text{ ya da } \frac{1}{a}$$

olarak gösterilir. Elbette,

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \tag{2}$$

eşitliği sağlanır ve a^{-1} bu eşitliklerin birini sağlayan yegâne elemandır.

(J)'den dolayı a^{-1}, 0 olamaz, çünkü aksi halde, $1 = aa^{-1} = a0 = 0$ olur ve bu da SB ile çelişir.

Son olarak $1 \times 1 = 1$ olduğundan, $1^{-1} = 1$ olur.

L. Bölme. xy^{-1} yerine kimileyin x/y ya da $\frac{x}{y}$ yazılır. Tabii burada $y \neq 0$ olmalıdır, aksi halde y^{-1} ifadesi anlamsızdır. Bu yazılım anlaşmasından dolayı

$$x^{-1} = 1/x = \frac{1}{x}$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$\frac{x}{yz} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{z} = x \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{y}$$

gibi tahmin edilen çeşitli eşitlikleri kanıtlamak zor değildir.

M. Sadeleştirme. *Eğer $ac = bc$ ve $c \neq 0$ ise, $a = b$ olur.* Nitekim,

$$a = a1 = a(cc^{-1}) = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} = b(cc^{-1}) = b1 = b.$$

Sadeleştirme özelliğini kullanarak okur kolaylıkla

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{xt + yz}{yt}$$

eşitlikliğini kanıtlayabilir.

N. Tersin Tersi. $a \neq 0$ olsun. (K)'nın ikinci paragrafına göre $a^{-1} \neq 0$. Demek ki a^{-1} elemanının tersini de alabiliriz. (2) denkleminde a yerine a^{-1} alırsak, $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = 1$ buluruz. Demek ki $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Sadeleştirerek,

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

buluruz. a^{-1} yerine $1/a$ yazılımı tercih edilirse, bu eşitlik,

$$\frac{1}{1/a} = a$$

şeklini alır.

O. *Eğer $ab = c$ ve $b \neq 0$ ise, $a = cb^{-1}$ olur.* Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

P. Her a için, $-a = (-1)a$, çünkü,

$$0 = 0a = (1 + (-1))a = 1a + (-1)a = a + (-1)a$$

ve (C)'ye göre (toplamsal tersin biricikliği),

$$-a = (-1)a \tag{3}$$

olur. Özel bir durum olarak

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1$$

bulunur. Ayrıca (3)'ten

$$-(xy) = x(-y) = (-x)y \tag{4}$$

eşitliklerinin kanıtı kolaydır, mesela $-(xy) = (-1)(xy) = ((-1)x)y = (-x)y$. (4) eşitliklerinden dolayı $-(xy)$ yerine, daha kısa olarak $-xy$ yazılır.

Q. *Her a için, $(-a)^2 = a^2$ olur.* (Burada $x^2 = xx$ anlamına geliyor.) Bu da (P)'den çıkar:

$$\begin{aligned}(-a)^2 &= (-a)(-a) = (-1)a(-1)a = ((-1)(-1))aa\\ &= (-(-1))aa = 1aa = aa = a^2.\end{aligned}$$

R. *Eğer $ab = 0$ ise ya $a = 0$ ya da $b = 0$ olur*; nitekim eğer $b \neq 0$ ise

$$a = a1 = a(bb^{-1}) = (ab)b^{-1} = 0b^{-1} = 0$$

olur.

1.4 Sıralamanın Özellikleri

Yukarıdaki kanıtlarda hiç sıralamayı kullanmadık. Şimdi sıralamayla ilgili özellikleri kanıtlayalım. Bilinmesi gerektiği gibi, $x \leq y$ önermesi

$$x < y \text{ ya da } x = y$$

anlamına gelir. $x > y$ ve $x \geq y$ yazılımlarının anlamlarını okur tahmin ediyordur.

Eğer x ve y iki gerçel sayıysa, $\max\{x, y\}$ sayısı x ve y sayılarının en büyüğü, yani ***maksimumu*** anlamına gelir:

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{eğer } x \geq y \text{ ise} \\ y & \text{eğer } y \geq x \text{ ise} \end{cases}$$

O3'ten dolayı max iyi tanımlanmıştır. max elbette *maximum*'un kısaltılmışıdır.

$\min\{x, y\}$ ise

$$\min\{x, y\} = \begin{cases} y & \text{eğer } x \geq y \text{ ise} \\ x & \text{eğer } y \geq x \text{ ise} \end{cases}$$

anlamına gelir.

Alıştırmalar

1.1. Her $x,\ y \in \mathbb{R}$ için $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ eşitliğini kanıtlayın.

1.2. Her $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ için $\max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\}$ eşitliğini kanıtlayın. Benzer eşitliği max yerine min için kanıtlayın.

1.3. Yukarıdaki alıştırmadan hareketle, eğer $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir altkümeyse $\max A$ ve $\min A$ elemanlarını A kümesinin eleman sayısı üzerine tümevarımla tanımlayın.

Eğer $0 \leq x$ ise x'e ***pozitif*** diyeceğiz. (Genelde bu tanım $0 < x$ koşulunu sağlayan x elemanları için kullanılır, ama biz öyle yapmayacağız.) Eğer $0 < x$ ise x'e ***kesin*** ya da ***mutlak pozitif*** diyeceğiz. ***Negatif*** ve ***kesin*** ya da ***mutlak negatif***'in anlamlarını okur tahmin ediyordur.

S. *Eğer $a < b$ ise $-b < -a$ olur.* Bunu kanıtlamak için $a < b$ eşitsizliğinin her iki tarafına $-a - b$ eklemek yeterli. Dolayısıyla $0 < a$ eşitsizliği, ancak ve ancak $-a < 0$ ise doğrudur. Demek ki negatif sayılar, pozitif sayıların toplamsal tersleridir.

T. Pozitif Elemanlar. *Pozitif gerçel sayılar kümesi toplama ve çarpma altında kapalıdır.* Çarpma altında kapalı olduklarını kanıtlamak çok kolay, bu hemen ÇO'dan çıkıyor: $0 < a$ ve $0 < b$ ise, $0 = 0 \cdot 0 < ab$ olur; ve eğer a ya da $b = 0$ ise $ab = 0 \geq 0$. Toplamaya geçelim. $0 < a$ ve $0 < b$ olsun. O zaman, TO'ya göre,

$$0 = 0 + 0 < a + 0 < a + b.$$

a ya da b'nin 0'a eşit olduğu durumlar da bariz.

U. *İki negatif sayının çarpımı pozitiftir ve negatif bir sayıyla pozitif bir sayının çarpımı negatiftir.* İkinci önermeyi kanıtlayalım. Eğer

$$0 < x \text{ ve } y < 0$$

ise, o zaman (S)'ye göre $0 < -y$ olur, dolayısıyla (P)'ye göre,

$$0 < x(-y) = -xy \text{ ve } xy < 0.$$

Bundan karelerin (ve karelerin toplamlarının) negatif olamayacakları çıkar. Nitekim, eğer $0 \leq a$ ise (T)'ye göre $0 \leq a^2$ ve eğer $a \leq 0$ ise, o zaman (S)'ye göre $0 \leq -a$ ve yukarıda kanıtladığımıza göre, (Q)'den dolayı, $0 \leq (-a)^2 = a^2$ bulunur.

a yerine 1 koyarsak, $0 \leq 1^2 = 1$ olur. Dolayısıyla $-1 < 0$.

V. *Pozitif elemanlar kümesi çıkarma altında kapalı değildir elbet ama bölme altında kapalıdır.* Nitekim $0 < a$ olsun. O zaman $0 \neq 1/a$ olur ve eğer $1/a < 0$ olsaydı $1 = a(1/a) < 0$ olurdu ki bu da (U)'nun en sonunda kanıtladığımız $0 < 1$ eşitsizliğiyle çelişirdi. Demek ki $1/a > 0$.

Dolayısıyla, $a,\ b > 0$ ise $a/b = a(1/b) > 0$ olur.

W. $0 < 1$ eşitsizliği (U)'nun son satırında kanıtlandığına göre, her iki tarafa da 1 ekleyerek $1 < 2$ elde ederiz. (2'yi $1 + 1$ olarak tanımlıyoruz.) Demek ki, $0 < 1 < 2$ ve dolayısıyla $0 < 2$ ve $2 \neq 0$. Buradan 2'nin $\mathbb{R}$'de bir tersi olduğu çıkar: $1/2$. Eğer $1 < 2$ eşitsizliğinin iki tarafına 1 eklersek $2 < 3$ elde ederiz. (3'ü $2 + 1$ olarak tanımlıyoruz.) Böylece, $0 < 1 < 2 < 3$ elde ederiz ve $3 \neq 0$ olur. Buna böyle devam edebiliriz. (Henüz doğal sayılardan ve doğal sayılar kümesinden sözetmediğimize dikkatinizi çekerim. $\mathbb{R}$'nin içinde $\mathbb{N}$'nin bir kopyasının olduğunu bir sonraki bölümde kanıtlayacağız.)

X. Orta Nokta. *İki sayının* ***aritmetik ortalaması*** *bu iki sayının arasındadır, yani $x < y$ ise,*

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

olur. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Aralığın tanımını okur ilköğretim yıllarından biliyordur. İşte birkaç aralık örneği:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},\\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},\\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\},\\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},\\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},\\
\mathbb{R}^{\geq 0} &= [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x\},\\
\mathbb{R}^{>0} &= (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\},\\
\mathbb{R} &= (-\infty, \infty).
\end{aligned}$$

Diğer aralıkların tanımını okura bırakıyoruz. $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $(-\infty, b]$ ve $[a, \infty)$ türünden aralıklara ***kapalı aralık*** ve $\mathbb{R}$, (a, b), $(-\infty, b)$ ve (a, ∞) türünden aralıklara ***açık aralık*** adı verilir. $\mathbb{R}$ ve $\varnothing$ hem açık hem kapalı aralıklardır ve başka da hem açık hem kapalı aralık yoktur.

Örnekler

1.4. (U) maddesinde karelerin negatif olamayacaklarını gördük. Demek ki her x, $y \in \mathbb{R}$ için $(x-y)^2 \geq 0$ olur. Ama $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ olduğundan (neden!)

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

olur.

1.5. $a_0, \ldots, a_{n-1} \geq 0$ *ise*

$$(a_0 + \cdots + a_{n-1})^2 \leq n(a_0^2 + \cdots + a_{n-1}^2)$$

olur.

Kanıt: $(a_0 + \cdots + a_{n-1})^2$ terimini açtığımızda $a_i a_j$ çarpımlarını toplarız. Eğer $a_i a_j$ ve $a_j a_i$ çarpımlarını ayrı ayrı sayarsak bunlardan tam n^2 tane vardır. Bu $a_i a_j$ çarpımlarını $j - i \mod n$ değerine göre, her biri n çarpım içeren n farklı sınıfa ayıralım ve $k = 0, 1, \ldots, n-1$ için şu tanımı yapalım:

$$t_k = \sum_{j-i \,\equiv\, k \mod n} a_i a_j.$$

Daha açık yazmak gerekirse,

$$t_k = a_0 a_k + \cdots + a_{n-k-1} a_{n-1} + a_{n-k} a_0 + \cdots + a_n a_k.$$

Böylece

$$(a_0 + \cdots + a_{n-1})^2 = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$$

elde ederiz. t_k'yı üstten sınırlamak için bir önceki örnekte kanıtladığımız

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$$

eşitsizliğini kullanalım:

$$t_k = \sum_{j-i \,\equiv\, k \mod n} a_i a_j \leq \sum_{j-i \,\equiv\, k \mod n} \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}$$

elde ederiz. Buradan

$$\sum_k t_k \leq n \sum_i a_i^2$$

çıkar ve istediğimiz kanıtlanır. □

Alıştırmalar

1.6. Bir $I \subseteq \mathbb{R}$ altkümesinin şu özelliği olsun: "Her $x, z \in I$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için, eğer $x < y < z$ ise $y \in I$." I'nın bir aralık olduğunu gösterin. $\mathbb{R}$ için doğru olan bu özelliğin $\mathbb{Q}$ için yanlış olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Aralığın tanımı gereği, $\mathbb{Q}$ sıralı halkasının bir aralığının uç noktaları da $\mathbb{Q}$ halkasında olmalıdır.)

1.7. a bir gerçel sayı olsun. Eğer her $b > 0$ gerçel sayısı için $a \leq b$ oluyorsa $a \leq 0$ eşitsizliğini gösterin.

1.8. a ve b iki gerçel sayı olsun. Eğer her $c > b$ için $a \leq c$ oluyorsa, $a \leq b$ eşitliğini gösterin.

1.5 Mutlak Değer ve Mesafe

Bir $x \in \mathbb{R}$ için, x'in ***mutlak değeri*** denilen $|x| \in \mathbb{R}$ sayısı şöyle tanımlanır:

$$|x| = \max\{x, -x\},$$

yani x ve $-x$'ten en büyüğünü seçiyoruz. Mutlak değerin şu önemli özellikleri vardır:

Önsav 1.1. *Her x, $y \in \mathbb{R}$ için,*
i. $|x| \geq 0$,
ii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
iii. $|x| = |-x|$,
iv. $x \geq 0$ *ise* $|x| = x$ *olur ve* $x \leq 0$ *ise* $|x| = -x$ *olur,*
v. $|xy| = |x||y|$,
vi. $|y| \leq x \Leftrightarrow -x \leq y \leq x$,
vii. $-|x| \leq x \leq |x|$,
viii. Üçgen eşitsizliği. $|x + y| \leq |x| + |y|$,
ix. $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$,
x. $|y - a| < x \Leftrightarrow a - x < y < a + x$.

Kanıt: i. x ve $-x$ sayılarının ikisi birden mutlak negatif olamaz. $|x|$, tanımı gereği x ve $-x$ sayılarından hangisi pozitifse ona eşittir. Demek ki $|x| \geq 0$.

ii. Eğer $x = 0$ ise $|x| = |0| = \max\{0, -0\} = \max\{0, 0\} = 0$ ve böylece ($\Leftarrow$) kısmı gösterilmiş olur. Aksi istikamette: $|x| = 0$ olsun. Demek ki

$$0 = |x| = \max\{x, -x\}.$$

Dolayısıyla,

$$\max\{x, -x\} \geq x \text{ ve } \max\{x, -x\} \geq -x$$

olduğundan,

$$0 \geq x \text{ ve } 0 \geq -x$$

olur. Yani $0 \geq x$ ve $x \geq 0$. Bu da $x = 0$ demektir.

iii. Bariz.

iv. Eğer $x \geq 0$ ise, $-x \leq 0$ olur; dolayısıyla $-x \leq x$ ve $|x| = \max\{x, -x\} = x$ olur. Eğer $x \leq 0$ ise, $-x \geq 0$ olur; yani $x \leq -x$ ve $|x| = \max\{x, -x\} = -x$ olur.

v. Gerekirse x yerine $-x$ ve y yerine $-y$ alarak, (iii)'ten dolayı, x ve y'nin negatif olmadıklarını varsayabiliriz. O zaman xy de negatif değildir ve (iv)'ten dolayı, $|xy| = xy = |x||y|$ elde ederiz.

vi. $|y| \leq x$ ise, $\max\{y, -y\} = |y| \leq x$ olur. Demek ki, $y \leq x$ ve $-y \leq x$. Buradan $y \leq x$ ve $y \geq -x$ çıkar. Sonuç: $-x \leq y \leq x$.

Şimdi diğer istikameti kanıtlayalım. $-x \le y \le x$ olsun. O zaman $y \le x$ ve $-y \le x$. Yani $|y| = \max\{y, -y\} \le x$.

vii. $x \le \max\{x, -x\} = |x|$. Aynı nedenden $-x \le |x|$, yani $-|x| \le x$.

viii. (vi)'ya göre, $-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|$ eşitsizliklerini kanıtlamalıyız. Bunlar da (vii)'den çıkar.

ix. (viii) ve (iii)'ten,

$$|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y|$$

çıkar. Demek ki

$$|x| - |y| \le |x - y|.$$

Benzer biçimde $|y| - |x| \le |y - x|$, yani

$$-|x - y| \le |x| - |y|.$$

Bu iki eşitsizlik

$$-|x - y| \le |x| - |y| \le |x - y|$$

demektir ve (vi)'dan

$$||x| - |y|| \le |x - y|$$

çıkar.

x. (vi)'dan çıkar. □

Daha ileri analizde çok önemli olacak olan bir kavramın temellerini atalım. İki x ve y gerçel sayısı arasındaki ***mesafeyi***

$$d(x, y) = |x - y|$$

olarak tanımlayalım. Mesafenin şu önemli özellikleri vardır:

Önsav 1.2. *Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için,*
i. $d(x, y) \in \mathbb{R}^{\ge 0}$.
ii. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
iii. $d(x, y) = d(y, x)$.
iv. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

Kanıt: Mesafenin tanımından ve sırasıyla Önsav 1.1.i, ii, iii ve viii'den doğrudan çıkar. ***Üçgen eşitsizliği*** adı verilen sonuncusunun kanıtını yazmakta fayda olabilir: $a = x - z$ ve $b = z - y$ olsun. O zaman,

$$d(x, y) = |x - y| = |a + b| \le |a| + |b| = |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$$

olur. Önsav kanıtlanmıştır. □

Önsav 1.2'yi gündelik dille yorumlayalım:

i. İki nokta arasındaki mesafe negatif bir sayı olamaz.

ii. İki nokta arasındaki mesafe, ancak ve ancak noktalar çakışıyorsa (aynıysa) 0 olabilir.

iii. Bir noktanın ikinci bir noktaya mesafesi, ikinci noktanın birinci noktaya mesafesine eşittir. (Tek yönlü yollar yüzünden modern trafikte bu özellik doğru olmayabilir.)

iv. Bir noktanın ikinci bir noktaya mesafesi üçüncü bir noktadan (yani z'den) "geçerek" kısalamaz.

Notlar 1. Ola ki bazı "herkesin bildiği" özellikleri kanıtlamayı unutmuşuzdur. Kanıtlamayı unuttuklarımızı okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Örneğin,

$$0 \leq a \leq b \text{ ve } 0 \leq c \leq d \text{ ise } ac \leq bd$$

önermesini kanıtlamadık. Okur, bu ve buna benzer kanıtlanmamış ama kanıtlaması kolay gibi görünen önermelere rastlarsa kanıtlasın. Her şeyin aksiyomlardan çıkması gerekir. Genel kural olarak, elemanlarla ilgili önermelerin kanıtı, altkümeler ve fonksiyonlarla ilgili önermelerin kanıtından çok daha kolaydır.

2. Son aksiyom olan (SUP) dışındaki aksiyomların uzun uzadıya açıklamalara ihtiyaçları yok. Şimdi kısaca bu aksiyomlarla ilgili birkaç tanım verelim. Bu tanımları bu ve sonraki analiz ciltlerimizde ender de olsa kullanacağız.

T1, T2, T3 aksiyomlarını sağlayan bir $(R, +, 0)$ yapısına ***grup*** adı verilir. Bir grup ayrıca T4'ü de sağlıyorsa, adına ***değişmeli grup*** denir. Bu yapılara daha ziyade cebirde rastlanır ve bu notlarda pek sözünü etmeyeceğiz.

O1 ve O2'yi sağlayan bir $(R, <)$ yapısına ***yarısıralama*** adı verilir. Eğer yarısıralama ayrıca O3'ü de sağlıyorsa, o zaman yapıya ***tamsıralama*** adı verilir. [N3]'te sıralamalardan uzun uzadıya sözetmiştik.

Eğer değişmeli bir grup aynı zamanda tamsıralıysa ve ayrıca TO'yu sağlıyorsa, o zaman bu yapıya ***sıralı değişmeli grup*** adı verilir.

T1'den D'ye kadar olan aksiyomları sağlayan bir yapıya ***cisim*** denir. Eğer cisimde TO ve ÇO'yu sağlayan bir sıralama varsa, o zaman bu yapıya ***sıralı cisim*** adı verilir. Cisimler de cebirin çalışma alanına girerler.

Belki Ç3 dışında, T1'den D'ye kadar olan aksiyomları sağlayan bir yapıya ***değişmeli halka*** denir. Biz değişmeli halka yerine kısaca ***halka*** diyeceğiz. Eğer halkada TO ve ÇO'yu sağlayan bir sıralama varsa, o zaman bu yapıya ***sıralı halka*** adı verilir.

Alıştırmalar

1.9. Eğer $0 \leq a \leq b$ ve $0 \leq c \leq d$ ise $ac \leq bd$ eşitsizliğini kanıtlayın.

1.10. Eğer $a \leq x \leq b$ ise $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}$ eşitsizliğini kanıtlayın.

1.11. $f, g \in \mathbb{R}[X]$ polinomları için $|x| = f(x)/g(x)$ olarak yazılamayacağını kanıtlayın. (f ve g polinomları için f/g biçiminde yazılan fonksiyonlara ***rasyonel fonksiyon*** adı verilir.) İpucu $f(X) - Xg(X)$ polinomunun kaç kökü vardır?

1.6 SUP Aksiyomu

Bizim için hayati önem taşıyacak olan ama bu bölümde bu ana dek hiç sözünü etmediğimiz SUP aksiyomunu biraz açalım. $(R, <)$ bir tamsıralama olsun, yani O1, O2, O3 aksiyomlarını sağlasın. Ayrıca $A \subseteq R$ herhangi bir altküme ve $s \in R$ olsun. Eğer her $a \in A$ için $a \leq s$ oluyorsa, s'ye A'nın ***üstsınırı*** denir. Örneğin 1 ve 2 sayıları $(0,1)$ ve $(0,1]$ aralıklarının üstsınırlarıdır. Ama 1, 2'den küçüktür. En küçük üstsınıra ***en küçük üstsınır*** denir. 1 sayısı hem $(0,1)$ hem de $(0,1]$ aralığının en küçük üstsınırıdır.

Örneğin $R = \mathbb{R}$ ise ve sıralama bu bölümdeki sıralamaysa o zaman $\mathbb{R}$'nin üstsınırı yoktur çünkü her $r \in \mathbb{R}$ için $r+1$, r'den daha büyük bir elemandır, üstsınırı olmayan $\mathbb{R}$'nin elbette en küçük üstsınırı da olamaz.

Üstsınırı olan kümelere ***üstten sınırlı kümeler*** denir. ***Altsınır***, ***alttan sınırlı küme*** ve ***en büyük altsınır*** kavramları benzer şekilde tanımlanır. A'nın en küçük üstsınırı, olduğunda elbet, biriciktir ve $\sup A$ olarak yazılır. En büyük altsınır $\inf A$ olarak yazılır. Her gerçel sayı boşkümenin bir üstsınırıdır, dolayısıyla boşkümenin de en küçük üstsınırı yoktur.

$\sup A = s$ eşitliği için,

i. *Her $a \in A$ için $a \leq s$*, ve
ii. *Her $\epsilon > 0$ için, $s - \epsilon < a$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ sayısı vardır*

koşulları gerek ve yeter koşullardır. Nitekim birinci koşul s'nin A'nın bir üstsınırı olduğunu söylüyor; ikincisi ise s'den küçük hiçbir sayının A'nın üstsınırı olamayacağını söylüyor, yani s'nin en küçük üstsınır olduğunu söylüyor.

$\sup A$, olduğunda A'nın bir elemanı olabilir de olmayabilir de. Mesela $\sup(0,\ 1) = \sup[0,\ 1] = 1$, ama 1 birinci kümede olmamasına karşın ikinci kümede. $\sup A \in A$ olduğunda, $\sup A$ yerine $\max A$ yazılır ve bu durumda $\sup A$'ya, yani $\max A$'ya A'nın ***maksimum elemanı*** adı verilir. A'nın ***minimum elemanı*** (olduğunda) $\min A$ benzer şekilde tanımlanır.

Alıştırmalar

1.12. Gerçel sayılar kümesinin boş olmayan ve alttan sınırlı bir X altkümesinin en büyük altsınırının olduğunu kanıtlayın. Bu altsınıra $\inf X$ adı verilir. $\inf X = -\sup(-X)$ eşitliğini kanıtlayın.

1.13. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $c > 0$ ise,
$$\sup(cX) = c\sup X \text{ ve } \inf(cX) = c\inf X$$
eşitliklerini kanıtlayın. ($\sup X$ ve $\inf X$ varsa elbette.) Eğer $c < 0$ ise,
$$\sup(cX) = c\inf X \text{ ve } \inf(cX) = c\sup X$$
eşitliklerini kanıtlayın.

1.14. $X,\ Y \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in X$ için, $x \leq y$ eşitsizliğini sağlayan bir $y \in Y$ olsun. $\sup Y$ varsa $\sup X$'in de olduğunu ve $\sup X \leq \sup Y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

1.15. $X,\ Y \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan iki altküme olsun. Her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $x \leq y$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $\sup X$ ve $\inf Y$'nin olduğunu ve $\sup X \leq \inf Y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

1.16. $X \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı ve boş olmayan bir altküme olsun. Y, X'in üstsınırlarından oluşan küme olsun. $\sup X = \inf Y$ eşitliğini kanıtlayın. $\inf Y \in Y$ olduğunu kanıtlayın.

1.17. $X,\ Y \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan ve üstten sınırlı iki altküme olsun.
$$X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$$
olsun. $\sup(X+Y)$'nin olduğunu ve $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$ eşitliğini kanıtlayın.

1.18. X, $Y \subseteq \mathbb{R}^{>0}$ boş olmayan ve üstten sınırlı iki altküme olsun.

$$XY = \{xy : x \in X,\ y \in Y\}$$

olsun. $\sup(XY)$'nin olduğunu ve $\sup(XY) = (\sup X)(\sup Y)$ eşitliğini kanıtlayın. Aynı şey $\mathbb{R}$'nin herhangi iki sınırlı altkümesi için geçerli midir?

1.19. $I \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her a, $b \in I$ elemanı için, $(a, b) \subseteq I$ içindeliği doğruysa, o zaman I'nın bir aralık olduğunu kanıtlayın. I sınırlıysa uç noktalarının $\inf X$ ve $\sup X$ olduğunu gösterin. (İleride üstten sınırsız bir küme için $\sup X = \infty$ ve alttan sınırsız bir küme için $\inf X = -\infty$ tanımlarını yapacağız ve bu dediğimiz, bir anlamda, her zaman doğru olacak.) Her aralığın bu özelliği olduğunu gösterin.

2. $\mathbb{R}$'nin içindeki $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$

Bu bölümde $\mathbb{R}$'nin içindeki doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi, tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'yi ve kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü keşfedip başat özelliklerini kanıtlayacağız. Bu bölümü okurken, tanımlayacağımız bu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri hakkında sanki hiçbir şey bilmiyormuş gibi davranın ama bir yandan da bu kümelere çocukluğunuzdan beri aşina olduğunuzu unutmayın!

2.1 Doğal Sayılar

Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin, 0'ı içeren ve içerdiği her x sayısı için $x+1$ sayısını da içeren altkümelerini ele alalım. Bu tür altkümelere ***tümevarımsal altküme*** diyelim. Demek ki bir $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin tümevarımsal olması için iki koşul gerekiyor:

1. $0 \in A$,

2. Eğer $x \in A$ ise $x+1 \in A$.

$\mathbb{R}$'nin kendisi elbette tümevarımsal bir kümedir. Negatif olmayan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ da bir başka tümevarımsal küme örneğidir. Her $r < 0$ için $[r, \infty)$ ve (r, ∞) aralıkları tümevarımsal kümelerdir.

$$\{-1\} \cup \mathbb{R}^{\geq 0}, \;\; \{0\} \cup [1, \infty) \;\text{ ve }\; \{0, 1, 2\} \cup (3/2, \infty)$$

kümeleri de tümevarımsaldır.

Biraz düşününce, varlığını kanıtlayacağımız $\mathbb{N}$ kümesinin (eğer varsa tabii!) $\mathbb{R}$'nin en küçük tümevarımsal altkümesi olması gerektiği anlaşılır, ne de olsa ta ilkokuldan beri "bildiğimiz" üzere $\mathbb{N}$ kümesi 0'ı içerir ve 1 ile toplama altında kapalıdır ve bu iki özelliği sağlayan $\mathbb{N}$'den daha küçük bir küme yoktur. Dolayısıyla önce $\mathbb{R}$'nin en küçük tümevarımsal altkümesinin varlığını kanıtlamalıyız ve daha sonra $\mathbb{N}$'yi bu en küçük tümevarımsal küme olarak tanımlamalıyız.

Oldukça basit ama çok parlak olan genel fikri açıkladıktan sonra en küçük tümevarımsal kümenin varlığını kanıtlayalım.

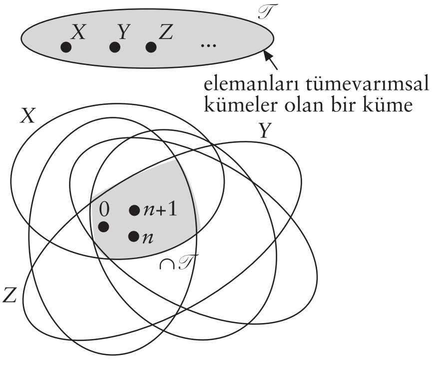
İki tümevarımsal kümenin kesişimi de tümevarımsaldır. Nitekim eğer A ve B iki tümevarımsal kümeyse, her ikisi de 0'ı içerdiğinden, kesişimleri olan

$A \cap B$ kümesi de 0'ı içerir. Ayrıca, eğer bir x sayısı $A \cap B$ kesişimindeyse, o zaman x hem A'da hem de B'dedir; her iki küme de tümevarımsal olduğundan $x+1$ de her iki kümededir; demek ki $x+1$ de kesişimdedir.

Sadece iki tümevarımsal kümenin değil, elemanları tümevarımsal kümeler olan bir kümenin elemanlarının kesişimi de tümevarımsaldır. Yani eğer $\mathcal{T}$, tümevarımsal kümeler içeren bir kümeyse, o zaman,

$$\bigcap \mathcal{T} = \bigcap_{A \in \mathcal{T}} A$$

kümesi de tümevarımsaldır. Bunun kanıtı da aynı: Her $A \in \mathcal{T}$ için, $0 \in A$ olduğundan, 0 kesişimdedir. Şimdi kesişimden herhangi bir x sayısı alalım. Her $A \in \mathcal{T}$ için, $x \in A$ ve A tümevarımsal olduğundan, $x+1 \in A$ olur. Demek ki $x+1$ de $\bigcap_{A \in \mathcal{T}} A$ kesişimindedir.



Şimdi ℝ'nin **tüm** tümevarımsal altkümelerini kesiştirelim ve kesişimin adına ***doğal sayılar kümesi*** diyelim ve bu kümeyi ℕ simgesiyle gösterelim.

ℕ'nin tümevarımsal bir küme olduğunu gördük. Tüm tümevarımsal altkümelerin kesişimi olduğundan ve tümevarımsal olduğundan, ℕ, ℝ'nin en küçük tümevarımsal altkümesidir, yani ℕ, ℝ'nin her tümevarımsal altkümesinin altkümesidir. Bütün bunları özetleyelim:

Teorem 2.1. i. $0 \in \mathbb{N}$.
ii. $n \in \mathbb{N}$ *ise* $n+1 \in \mathbb{N}$.
iii. ℕ, *yukarıdaki iki özelliği sağlayan* ℕ*'nin en küçük altkümesidir, yani eğer* A, ℕ*'nin bir altkümesiyse ve* $0 \in A$ *ise ve her* $n \in A$ *için* $n+1 \in A$ *ise* $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Kanıt: İlk ikisi ℕ'nin tümevarımsal olduğundan çıkıyor. Üçüncü önermedeki A kümesi varsayıma göre tümevarımsal bir küme. Ama ℕ tüm tümevarımsal kümelerin altkümesi. Demek ki $\mathbb{N} \subseteq A$, yani $A = \mathbb{N}$. □

Bu teoremin son maddesinin ***tümevarımla kanıt ilkesi*** olduğuna dikkatinizi çekerim. Bu konuyu [N1, N2]'de ayrıntılarıyla işlediğimizden üstünde fazla durmuyoruz. Gene de ilkeyi yazalım:

Teorem 2.2 (Tümevarım İlkesi I)**.** *Eğer (doğal ya da gerçel) sayılarla ilgili bir önerme* 0 *doğal sayısı için doğruysa ve, her n doğal sayısı için, n için doğru olduğunda $n+1$ için de doğru oluyorsa, o zaman o önerme her n doğal sayısı için doğrudur.*

Beklenildiği üzere doğal sayılarda toplama ve çarpma yapabiliriz. Bunu tümevarım ilkesini kullanarak kanıtlayalım.

Teorem 2.3. $\mathbb{N}$*, toplama ve çarpma altında kapalıdır.*

Kanıt: $x+(y+1)=(x+y)+1$ ve $x(y+1)=xy+x$ eşitlikleri kullanılarak istenenler tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır. Örnek olarak $\mathbb{N}$'nin toplama altında kapalı olduğunu kanıtlayalım.

$$A=\{y\in\mathbb{N}:\mathbb{N}+y\subseteq\mathbb{N}\}$$

olsun. Elbette $0\in A$. Şimdi $y\in A$ olsun. $y+1$'in de A'da olduğunu kanıtlayalım. $\mathbb{N}$'den herhangi bir x alalım. O zaman y, A'da olduğundan, $x+y$ elemanı $\mathbb{N}$'dedir. Bundan ve $\mathbb{N}$'nin tanımından $(x+y)+1\in\mathbb{N}$ çıkar. Ama

$$x+(y+1)=(x+y)+1$$

eşitliği doğru. Demek ki $x+(y+1)\in\mathbb{N}$. Her $x\in\mathbb{N}$ için, $x+(y+1)\in\mathbb{N}$ önermesini kanıtladık, yani $y+1$'in A'da olduğunu kanıtladık. Demek ki $A=\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$ toplama altında kapalı. □

Yukarıda kanıtladıklarımızdan kolaylıkla, ($\mathbb{N}$, $+$, $\times$, 0, 1) yapısının Peano aksiyomlarını sağladığı çıkar (Peano aksiyomları için bkz. [N2]).

Alıştırmalar

2.1. Her a, $b\geq 0$ için, $(a+b)^n\geq a^n+b^n$ eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın. (Binom açılımı daha kolay bir kanıt verir.)

2.2. Eğer $s>-1$ ise, her n doğal sayısı için $(1+s)^n\geq 1+ns$ eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın. (Eğer $s\geq 0$ ise tümevarıma gerek yok, eşitsizlik binom açılımından hemen kanıtlanır, öte yandan binom açılımını kanıtlamak için tümevarıma ihtiyaç vardır.) Bu eşitsizliği çok basit biçimde şöyle genelleştirebiliriz: Eğer $s_1,\ldots,s_n\geq -1$ ise ve hepsi pozitif ya da hepsi negatifse,

$$(1+s_1)\cdots(1+s_n)\geq 1+s_1+\cdots+s_n$$

olur.

2.3. Aşağıdaki eşitlikleri tümevarımla kanıtlayın.

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n &= n(n+1)/2,\\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 &= n(n+1)(2n+1)/6,\\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 &= n^2(n+1)^2/4.\end{aligned}$$

2.4. $n > 6$ doğal sayısı için
$$\frac{1}{n!} > \frac{8^n}{(2n)!}$$
eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın[1]. (İpucu: Doğrudan da deneyebilirsiniz ama şu yöntem de sonuca gider:
$$f(n) = \frac{(2n)!}{n!\,8^n}$$
olsun. $f(n+1)/f(n) > 1$ eşitsizliğini n üzerinden tümevarımla gösterebilirsiniz.)

2.5. Her $n > 0$ doğal sayısı için
$$\frac{1}{2n} \le \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}}{n} \le \frac{1}{n}$$
eşitsizliğini kanıtlayın.

2.6. Her $n > 0$ doğal sayısı için
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge 2$$
eşitsizliğini kanıtlayın.

2.7. Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n n! \le (n+1)^n$ eşitsizliğini kanıtlayın.

2.8. $m > n > 0$ iki doğal sayı ve $x > 0$ bir gerçel sayı olsun.
$$\frac{x^m - 1}{m} \ge \frac{x^n - 1}{n}$$
eşitsizliğini kanıtlayın. Eşitliğin ancak $x = 1$ için doğru olabileceğini gösterin. İpucu:
$$n(x^m - 1) - m(x^n - 1) = (x-1)[n(x^n + x^{n+1} + \cdots + x^{m-1}) - (m-n)(1 + x + \cdots + x^{n-1})].$$
eşitliğini kullanın. Bu eşitsizliğin daha genel bir hali için bkz. Sonuç 3.20.

Aşağıdaki alıştırmalarda sadece ve sadece $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$'nin tanımlarını ve bu tanımlardan yola çıkarak bu satıra kadar kanıtlanan olguları kullanmalısınız.

2.9. 0'ın $\mathbb{N}$'nin en küçük elemanı olduğunu kanıtlayın.

2.10. Eğer $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise $x - 1$'in de doğal sayı olduğunu kanıtlayın.

2.11. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < x < 1$ ise, x'in $\mathbb{N}$'de olamayacağını kanıtlayın.

2.12. Eğer $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ ve $n < x < n + 1$ ise, x'in $\mathbb{N}$'de olamayacağını kanıtlayın.

Aşağıdaki alıştırmalarda x, $y \in \mathbb{N}$.

2.13. Eğer $x < y$ ise, $x + 1 \le y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

2.14. Eğer $x \le y$ ise, $y - x$'in de $\mathbb{N}$'de olduğunu kanıtlayın.

2.15. Eğer $x < y + 1$ ise, x'in ya y'ye eşit olduğunu ya da y'den küçük olduğunu kanıtlayın.

2.16. Eğer $y \ne 0$, 1 ve $0 < x$ ise $x < xy$ eşitsizliğini kanıtlayın.

Pierre de Fermat'nın "sonsuzdan iniş" adını verdiği tümevarım ilkesini kanıtlayalım şimdi.

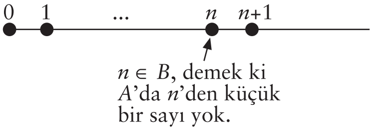
Teorem 2.4. *$\mathbb{N}$'nin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır, yani $\mathbb{N}$ iyisıralı bir kümedir.*

[1] Buradaki $n!$ tahmin ettiğiniz faktoriyeldir. $0! = 1$ ve $(n+1)! = n! \times (n+1)$ olarak tanımlanmıştır.

Kanıt: A, $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olsun. A'nın en küçük elemanı olmadığını varsayıp A'nın boşküme olduğunu kanıtlayalım. Ama önce başka bir şey kanıtlamamız gerekiyor:

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n\text{'den küçük hiçbir sayı } A\text{'da değil}\}$$

olsun. Tümevarımla B'nin $\mathbb{N}$'ye eşit olduğunu kanıtlayalım. 0'dan küçük bir doğal sayı olmadığından (Alıştırma 2.9), 0'dan küçük bir sayı A'da olamaz, dolayısıyla $0 \in B$ olmalı. Şimdi $n \in B$ olsun ve $n+1$'in de B'de olduğunu kanıtlayalım. Eğer $n+1$'den küçük bir sayı A'da olsaydı, o zaman bu sayı ancak n olabilirdi (Alıştırma 2.12) ve bu n, A'nın en küçük elemanı olurdu. Ama A'nın en küçük elemanı olmadığını varsaydık. Bu bir çelişkidir.



Demek ki $B = \mathbb{N}$.

Şimdi bir x doğal sayısının A'da olduğunu varsayalım. $n = x+1$ olsun. O zaman $x < n$ ve $x \in A$. Bundan $n \notin B$ çıkar. Ama bu imkânsız. □

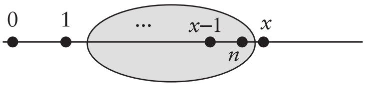
Bu teorem aslında bir kanıt ilkesidir: Eğer doğal sayılarla ilgili bir önerme her n doğal sayısı için doğru değilse, o zaman bu önermenin yanlış olduğu en küçük doğal sayı vardır. Dolayısıyla şu teorem de böylece kanıtlanmış oldu:

Teorem 2.5 (Tümevarım İlkesi II)**.** *Eğer bir önerme, her n doğal sayısı için, n'den küçük doğal sayılar için doğru olduğunda n için de doğru oluyorsa, o zaman bu önerme her n doğal sayısı için doğrudur.*

Kanıt: Önermenin yanlış olduğu en küçük doğal sayı n olsun. Demek ki önerme n'den küçük doğal sayılar için doğru. Ama varsayıma göre, bu durumda önerme n için de doğru olur, çelişki. □

Doğal sayılarla ilgili bildiklerimizi teyit etmeye devam edelim:

Teorem 2.6. *Üstten sınırlı ve boş olmayan bir doğal sayı kümesi en küçük üstsınırını içerir.*



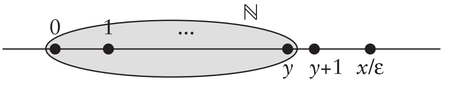
Kanıt: A bir doğal sayı kümesi ve x, A'nın en küçük üstsınırı olsun. $x-1$ bir üstsınır olmadığından,

$$x - 1 < n \leq x$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $n \in A$ doğal sayısı vardır. Demek ki $x < n+1$ ve n'den daha büyük bir doğal sayı A'da olamaz. Bundan da n'nin A'nın en büyük elemanı olduğu çıkar. Yani $n = x$. □

Teorem 2.7 (Arşimet Özelliği)**.** *Eğer $\epsilon > 0$ bir gerçel sayıysa ve $x \in \mathbb{R}$ ise, o zaman $n\epsilon > x$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n \in \mathbb{N}$ vardır, yani (tanım gereği) $\mathbb{R}$ bir Arşimet cismidir*[2].

Kanıt: Teoremin doğru olmadığını varsayalım. Demek ki her $n \in \mathbb{N}$ için, $n\epsilon \le x$ yani $n \le x/\epsilon$. Demek ki doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, x/ϵ tarafından üstten sınırlı. Teorem 2.6'ya göre $\mathbb{N}$'nin en küçük üstsınırı $\mathbb{N}$'dedir.



Bu en küçük üstsınır y ise, bu da $y+1$ doğal sayısının varlığıyla çelişir. □

Teorem 2.8 (Bölme)**.** *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için, eğer $m \neq 0$ ise,*

$$n = mq + r \text{ ve } 0 \le r < m$$

önermelerini sağlayan bir ve bir tane (q, r) doğal sayı ikilisi vardır.

Kanıt: Önce q ve r'nin varlığını gösterelim. Önermenin yanlış olduğunu varsayalım, yani,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{belli bir } m > 0 \text{ doğal sayısı için, } n = mq + r \text{ eşitliğini ve } 0 \le r < m \text{ eşitsizliklerini sağlayan } q \text{ ve } r \text{ doğal sayıları yoktur}\}$$

kümesi boş olmasın. n, A'nın en küçük elemanı olsun ve koşullar m sayısı için sağlanmasın. Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ istenen koşulları sağlar. Demek ki $n \ge m$ olmalı. O zaman, Alıştırma 2.14'e göre $n - m$ bir doğal sayıdır ve n'den küçük olduğundan $n - m \notin A$ olmalı. Demek ki, $n - m = mq_1 + r$ eşitsizliğini sağlayan q_1 ve $0 \le r < m$ doğal sayıları vardır. Ama bundan,

$$n = m(q_1 + 1) + r$$

çıkar ve $q = q_1 + 1$ için

$$n = mq + r$$

elde ederiz. Demek ki önerme n ve m için de doğruymuş. Bu bir çelişkidir.

[2]Bu özellik Öklid'in **Elemanlar** (MÖ ∼300) adlı eserinin 5'inci cildinde Tanım 4 olarak geçmektedir. Arşimet'in (MÖ ∼287-∼212) **Küre ve Silindir Üzerine** (MÖ ∼225) adlı yapıtında da Aksiyom V olarak geçmektedir ve Arşimet'ten sonra Eski Yunan uygarlığının en önemli matematikçisi (ve astronomu) olarak addedilen ve günümüze yazılı eseri kalmayan Ödoks'a (MÖ 408-355) atfedilmiştir. "Arşimet Özelliği" adı ilk olarak Avusturyalı matematikçi Otto Stolz (1842-1905) tarafından kullanılmıştır. Arşimet Özelliği hakkında daha fazla bilgi kitabın sonundaki eklerde, Bölüm 25 ve sonrasında bulunmaktadır.

Aynı sonuç Tümevarım İlkesi II kullanılarak n üzerine tümevarımla doğrudan da kanıtlanabilir: Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ olsun. Eğer $n \geq m$ ise, $n - m$ ve m sayıları için $n - m = mq_1 + r$ eşitsizliğini sağlayan q_1 ve $0 \leq r < m$ doğal sayılarının olduğunu varsayarsak, $n = m(q_1 + 1) + r$ olur.

Şimdi q ve r'nin biricikliğini kanıtlayalım.

$$mq + r = mq_1 + r_1,\ 0 \leq r < m \text{ ve } 0 \leq r_1 < m$$

ilişkilerini sağlayan r, r_1, q, q_1 olsun. $q = q_1$ ve $r = r_1$ eşitliklerini kanıtlayacağız. $q \geq q_1$ eşitsizliğini varsaymanın bedeli yoktur, varsayalım. O zaman,

$$q - q_1 \in \mathbb{N}$$

ve

$$m > r_1 \geq r_1 - r = m(q - q_1)$$

olur. Ama bu ancak $q - q_1 = 0$ ise mümkündür. (Neden?) □

2.2 Tamsayılar ve Kesirli Sayılar

Doğal sayıların ilkokuldan beri bildiğimiz diğer özelliklerini de yukarıda yaptığımız gibi oldukça kolay bir biçimde kanıtlayabiliriz. Daha fazla ileri gitmeden kısaca ***tamsayılar kümesi*** $\mathbb{Z}$'ye geçelim. $\mathbb{Z}$'yi,

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}.$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 2.9. *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'nin, 1'i içeren ve çıkarma altında kapalı en küçük altkümesidir. Ayrıca $\mathbb{Z}$ toplama, çarpma ve çıkarma altında kapalıdır, yani $\mathbb{Z}$ bir halkadır.*

Kanıt: $\mathbb{Z}$'nin 1'i içerdiği ve çıkarma altında kapalı olduğu bariz.

A, $\mathbb{R}$'nin 1'i içeren ve çıkarma altında kapalı herhangi bir altkümesi olsun. $0 = 1 - 1$ olduğundan $0 \in A$. Demek ki, her $a \in A$ için,

$$-a = 0 - a \in A.$$

Dolayısıyla $-A \subseteq A$ ve her a, $b \in A$ için,

$$a + b = a - (-b) \in A - (-A) \subseteq A - A \subseteq A.$$

Demek ki A toplama altında kapalı. 1'i de içerdiğinden, bundan A'nın tümevarımsal bir küme olduğu sonucu çıkar. Sonuç: $\mathbb{N} \subseteq A$ ve $-\mathbb{N} \subseteq -A \subseteq A$ ve $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \subseteq A$. Böylece birinci önerme kanıtlanmış oldu.

Şimdi $A = \mathbb{Z}$ alırsak $\mathbb{Z}$'nin toplama altında kapalı olduğunu görürüz. $\mathbb{Z}$'nin çarpma altında da kapalı olduğu, bundan ve $n(m + 1) = nm + m$ eşitliğinden m üzerine tümevarımla çıkar. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Teorem 2.10 (Bölme)**.** *Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için, eğer $m \neq 0$ ise,*

$$n = mq + r \text{ ve } 0 \leq r < |m|$$

önermelerini sağlayan bir ve bir tane (q, r) tamsayı ikilisi vardır.

Kanıt: Teorem 2.8 temel alınarak kolaylıkla kanıtlanabilir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

$\mathbb{Z}$'nin çok bilinen diğer özelliklerini burada kanıtlamayacağız. Gerektiği zaman tanımlara başvurularak kolaylıkla kanıtlanabilir.

Son olarak kesirli sayıları tanımlayalım:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z} \text{ ve } m \neq 0 \right\}$$

olsun. $\mathbb{Q}$'nün elemanlarına ***kesirli sayı*** ya da rasyonel sayı, $\mathbb{Q}$ kümesine de ***kesirli sayılar kümesi*** denir.

Teorem 2.11. *$\mathbb{Q}$, toplama, çarpma ve sıfırdan değişik bir elemana bölme altında kapalıdır, yani bir cisimdir. Ayrıca $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Z}$'yi içeren en küçük altcismidir.*

Kanıt: Çok basit. □

Teorem 2.12 (Tamkısım)**.** *Her $x \in \mathbb{R}$ için, $n \leq x < n + 1$ eşitsizliklerini sağlayan bir ve bir tane n tamsayısı vardır.*

Kanıt: Önce $x \geq 0$ varsayımını yapalım. $A = \{a \in \mathbb{N} : a \leq x\}$ olsun. O zaman $0 \in A$ ve A, x tarafından üstten sınırlı. Teorem 2.6'ya göre A, en küçük üstsınırını içerir. Bu doğal sayıya n dersek,

$$n \leq x < n + 1$$

olur. Biricikliği kanıtlayalım: Bir de ayrıca

$$m \leq x < m + 1$$

olsun. Eğer $n < m$ ise, Alıştırma 2.13'e göre,

$$x < n + 1 \leq m \leq x,$$

çelişki. Benzer biçimde $m < n$ de olamaz. Demek ki $n = m$.

x'in negatif olduğu durumun kanıtını okura bırakıyoruz. □

Teorem 2.12'de biricikliği kanıtlanan n tamsayısına x'in ***tamkısmı*** denir ve bu sayı $[x]$ olarak yazılır. $[x]$, x'ten küçükeşit en büyük tamsayıdır. Demek ki her $x \in \mathbb{R}$ için $x - [x] \in [0, 1)$ olur ve $[x]$ bu içindeliği sağlayan biricik tamsayıdır.

Teorem 2.13. *Herhangi iki farklı gerçel sayı arasında kesirli bir sayı vardır, yani (yoğunluğun tanımı gereği)* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$*'de* ***yoğundur****.*

Kanıt: $\alpha < \beta$ iki gerçel sayı olsun. Eğer $\alpha < 0 < \beta$ ise 0 sayısı α'yla β arasındadır. Eğer $\alpha < \beta \leq 0$ ise $0 \leq -\beta < -\alpha$ olur ve $-\beta$ ile $-\alpha$ arasında bir q kesirli sayısı bulmuşsak, $-q$ kesirli sayısı α'yla β arasında olur. Dolayısıyla teoremi $0 \leq \alpha < \beta$ varsayımı altında kanıtlamak yeterli.

$\alpha < q < \beta$ eşitsizliğini sağlayan bir q kesirli sayısı bulmak istiyoruz. Arşimet Özelliği'nden (Teorem 2.7) dolayı, $1 < n(\beta - \alpha)$ eşitsizliğini sağlayan bir n vardır. Demek ki,

$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha.$$

Şimdi, $m = [n\alpha]$ olsun (bkz. Teorem 2.12 ve sonraki tanım.) Demek ki

$$m \leq n\alpha < m + 1$$

ve

$$\frac{m}{n} \leq \alpha < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Dolayısıyla

$$\alpha < \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < \beta$$

olur ve

$$q = \frac{m+1}{n}$$

sayısı aranan kesirli sayıdır, daha doğrusu sayılardan biridir. □

Alıştırmalar

2.17. "$|x+3| < \delta \Rightarrow |4x - 12| < 0{,}04$" önermesini doğrulayan en büyük δ'yı bulun.

2.18. Merkezi 7 olan ve $|\sqrt{x-3} - 2| < 1$ eşitsizliğini sağlayan en büyük aralığı bulun.

2.19. $n \in \mathbb{Z}$, $m \in 2\mathbb{N} + 1$ olsun. $n = mq + r$ eşitliğini ve

$$-\frac{m-1}{2} \leq r < \frac{m-1}{2}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir ve bir tane (q, r) tamsayı ikilisi olduğunu kanıtlayın.

3. Kesirli Üsler ve Kökler

Bundan böyle $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ sayı kümeleri üzerine tanımlanmış toplama ve çarpma gibi basit aritmetiksel işlemleri ve bu işlemlerle ilgili basit olguları -kanıtlamamış olsak da- bildiğimizi varsayacağız. Örneğin asal sayılardan hiç sözetmedik ama her doğal sayının tek bir biçimde asalların çarpımı olarak yazıldığını bildiğimizi varsayacağız. Öte yandan üs almanın tanımını ve özellikleri aşağıda vereceğiz.

3.1 Kesirli Üs Alma ve Kök Bulma

Eğer x bir gerçel sayı ve n bir doğal sayıysa, x'in n'inci üssü adı verilen x^n gerçel sayısını n üzerine tümevarımla tanımlayacağız. Önce $n = 0$ şıkkından başlayalım[1]:

$$x^0 = 1.$$

Eğer x^n tanımlanmışsa, x^{n+1} sayısını $x^n x$ olarak tanımlayalım:

$$x^{n+1} = x^n x.$$

Tanımın hemen ardından tahmin edilen ve liseden beri bilinen eşitlikleri kanıtlayalım:

Teorem 3.1. *Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve her n, $m \in \mathbb{N}$ için,*
0. $1^n = 1$, $x^1 = x$ *ve* $n > 0$ *için* $0^n = 0$.
i. $x^m x^n = x^{m+n}$.
ii. $(xy)^n = x^n y^n$.
iii. $(x^m)^n = x^{mn}$.
iv. $0 < n$ *ve* $0 < x < y$ *ise* $x^n < y^n$.

Kanıt: Önermelerin her biri n üzerine tümevarımla kanıtlanır. Diğerlerini okura alıştırma olarak bırakarak örnek olarak (i)'i kanıtlayalım:

$n = 0$ için: $x^{m+0} = x^m = x^m 1 = x^m x^0$.

---

[1] Bazıları, genellikle analizciler, 0^0 ifadesini tanımsız kabul eder. Cebirde ve aritmetikte $0^0 = 1$ tanımını yapmak işimize gelir. En azından ders notlarının başlarında $0^0 = 1$ tanımını yapalım. İleride limit konusuna geldiğimizde 0^0 ifadesini tanımsız kabul etme hakkını saklı tutalım.

Şimdi, $x^{m+n} = x^m x^n$ eşitliğini varsayıp, $x^{m+(n+1)} = x^m x^{n+1}$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$x^{m+(n+1)} = x^{(m+n)+1} = x^{m+n}x = (x^m x^n)x = x^m(x^n x) = x^m x^{n+1}.$$

Teorem 3.1'in kanıtı tamamlanmıştır. □

Her değişmeli halkada geçerli olan $(x+y)^n$ ifadesinin binom açılımını ya da benzer özdeşlikleri okurun bildiğini varsayıyoruz. Okur bu konudaki eksiklerini [N2]'den tamamlayabilir.

Örnekler

3.1. *a, $b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $M = \max\{|a|, |b|\}$ ise $|a^n - b^n| \leq nM^{n-1}|a-b|$ olur.*
Kanıt: Aşağıdaki eşitlikten çıkar:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Her iki tarafın da mutlak değerini alıp üçgen eşitsizliğini uygularsak istediğimizi elde ederiz. □

Eğer $x \neq 0$ ve $n < 0$ ise, x^n terimini şöyle tanımlarız: $x^n = 1/x^{-n}$. Son maddesindeki "ufak" bir oynamayla Teorem 3.1 tamsayılar için de geçerlidir:

Teorem 3.2. *Her $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve her n, $m \in \mathbb{Z}$ için,*
0. $x^{-n} = 1/x^n$.
i. $x^{m+n} = x^m x^n$.
ii. $(xy)^n = x^n y^n$.
iii. $(x^m)^n = x^{mn}$.
iv. *$n < 0$ ve $0 < x < y$ ise $x^n > y^n$ olur.*

Kanıt: Tanımdan ve Teorem 3.1'den çıkar. Okura bırakıyoruz. □

Sonuç 3.3. *$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, x, $y > 0$ ve $x^n = y^n$ ise o zaman $x = y$ olur.*

Kanıt: Teorem 3.1.iv ve Teorem 3.2.iv'ten çıkar. □

Buraya kadar yaptıklarımız oldukça kolaydı. Daha zor konu ve sonuçlara doğru yelken açalım. Pozitif gerçel sayıların köklerini bulalım, yani $a > 0$ bir gerçel sayıysa ve $n \neq 0$ bir tamsayıysa, $X^n = a$ denklemini gerçel sayılarda çözebileceğimizi görelim. Bu çözümün pozitif gerçel sayılarda biricik olduğunu kanıtlayabilirsek, $a^{1/n}$ gerçel sayısını bu biricik pozitif çözüm olarak tanımlayabiliriz.

Teorem 3.4. *$a \geq 0$ bir gerçel sayıysa ve $n \neq 0$ bir tamsayıysa, $X^n = a$ denkleminin pozitif gerçel sayılarda bir ve bir tek çözümü vardır.*

Kanıt: Sonuç 3.3, çözümün (eğer varsa) biricikliğini söylüyor. Çözümün varlığını kanıtlayalım. Eğer $a = 0$ ya da 1 ise her şey bariz. Bundan böyle $a > 0$ ve $a \neq 1$ varsayımlarını yapalım.

Çözümün varlığını pozitif n tamsayıları için kanıtlamak yeterli. Nitekim, eğer $n > 0$ için $x > 0$ gerçel sayısı $X^n = a$ denkleminin bir çözümüyse, o zaman $1/x$ pozitif gerçel sayısı $X^{-n} = a$ denkleminin bir çözümüdür.

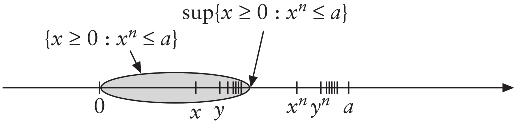
$n = 1$ için $x = a$ bir çözüm olduğundan, n'yi 1'den de büyük alabiliriz. Bundan böyle $n > 1$ olsun.

Teoremi, 1'den büyük a gerçel sayıları için kanıtlamak da yeterlidir. Nitekim, eğer $0 < b < 1$ ise, $1/b > 1$ olur ve $x > 0$ gerçel sayısı $X^n = 1/b$ denkleminin bir çözümüyse, o zaman $1/x$ pozitif gerçel sayısı $X^n = b$ denkleminin bir çözümüdür.

$n > 1$ bir tamsayı ve $a > 1$ bir gerçel sayı olsun. $X^n = a$ denklemi çözmek için,

$$x \geq 0 \text{ ve } x^n \leq a$$

eşitsizliklerini sağlayan gerçel sayılar kümesinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayıp, kümenin SUP aksiyomuna göre var olduğunu bildiğimiz en küçük üstsınırını alacağız. Kanıtlayacağımız üzere, bu en küçük üstsınır $X^n = a$ denkleminin çözümü olacak.

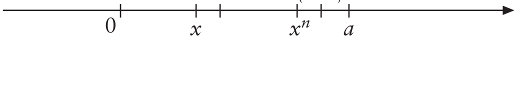


Planımızı uygulayalım. $n > 1$ bir tamsayı ve $a > 1$ bir gerçel sayı olsun.

$$A = \{x \geq 0 : x^n \leq a\}$$

olsun. $0, 1 \in A$ olduğundan A boşküme değildir. Ayrıca A, a tarafından üstten sınırlıdır, çünkü $1 < a$. Demek ki SUP aksiyomuna göre, A'nın bir en küçük üstsınırı vardır. Bu en küçük üstsınıra s adını verelim. Elbette $s \geq 1$. Şimdi $s^n = a$ eşitliği iki adımda (aşağıdaki Sav 1 ve 2) kanıtlayalım. Önce bir önsav.

Önsav 3.5. *$n > 1$ bir doğal sayı olsun. a ve x iki pozitif gerçel sayı olsun. Eğer $x^n < a$ ise, $(x + \epsilon)^n < a$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı vardır.*



Kanıt: $(x + \epsilon)^n$ terimiyle oynayarak, bu terimin a'dan küçükeşit olması için ϵ'un ne kadar küçük (ama pozitif) olması gerektiğini göreceğiz. ϵ sayısını, eğer varsa, her zaman 1'den küçük, hatta 1/2'den küçükeşit seçebiliriz, çünkü eğer bir $\epsilon > 1/2$ için $(x+\epsilon)^n < a$ eşitsizliği doğruysa, o zaman $\epsilon = 1/2$ için de aynı eşitsizlik doğrudur. Hesaplara başlayalım:

$$\begin{aligned}
(x+\epsilon)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\epsilon + \cdots + \binom{n}{i}x^{n-i}\epsilon^i + \cdots + \epsilon^n \\
&< x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\epsilon + \cdots + \binom{n}{i}x^{n-i}\epsilon + \cdots + \epsilon \\
&= x^n + \epsilon\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{i}x^{n-i} + \cdots + 1\right) = x^n + \epsilon B.
\end{aligned}$$

Burada B sayısı,

$$B = \binom{n}{1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{i}x^{n-i} + \cdots + 1$$

olarak alınmıştır. Demek ki $(x+\epsilon)^n < a$ eşitsizliğinin sağlanması için $x^n+\epsilon B \leq a$ eşitsizliğinin sağlanması yeterlidir. Dolayısıyla ϵ'un ne kadar küçük olması gerektiği de bellidir:

$$\epsilon = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{a-x^n}{B}\right\}.$$

ϵ'u böyle seçerek istediğimiz $(x+\epsilon)^n \leq a$ eşitsizliğini kanıtlarız. Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Şimdi Teorem 3.4'ün kanıtına devam edebiliriz. s'yi anımsayın: $s = \sup(A)$.

Sav 1. $s^n \geq a$.

Sav 1'in Kanıtı: Tam tersine, $s^n < a$ eşitsizliğini varsayalım. Önsav 3.5'e göre yeterince küçük bir $\epsilon > 0$ sayısı için, $(s+\epsilon)^n < a$ eşitsizliği sağlanır. Ama o zaman da s'den büyük olan $s+\epsilon$ sayısı A'da olur ve bu da s'nin en küçük üstsınır olmasıyla çelişir. Sav 1 kanıtlanmıştır. □

Bu savdan, $s \neq 1$ çıkar. Demek ki $s > 1$. Bu, birazdan önem kazanacak.

Sav 2. $s^n \leq a$.

Sav 2'nin Kanıtı: Tam tersine, $s^n > a$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman $(1/s)^n < 1/a$ olur. Önsav 3.5'e göre, belli bir $\epsilon > 0$ için,

$$\left(\frac{1}{s}+\epsilon\right)^n < \frac{1}{a}$$

olur. Buradan

$$a < \left(\frac{s}{1+s\epsilon}\right)^n$$

olur. Ama

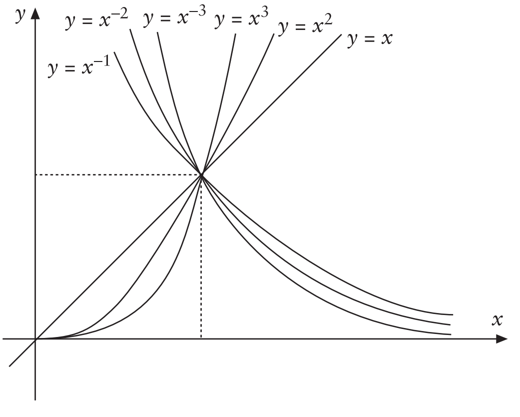
$$\frac{s}{1+s\epsilon} < s = \sup A$$

olduğundan, bir $x \in A$ için
$$\frac{s}{1+s\epsilon} < x < s$$
olur. Böylece,
$$a < \left(\frac{s}{1+s\epsilon}\right)^n < x^n \leq a$$
elde ederiz, ki bu bir çelişkidir. □

Sav 1 ve 2'den $s^n = a$ eşitliği çıkar.

Teorem 3.4 tamamen kanıtlanmıştır. □

Sonuç 3.6. *Eğer $n \neq 0$ bir tamsayıysa, $f(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinin bir eşleşmesidir. Eğer $n > 0$ ise f sürekli artar. Eğer $n < 0$ ise f sürekli azalır.*



Kanıt: f'nin eşleşme olduğunu Teorem 3.4 söylüyor. f'nin artan ya da azalan olması Teorem 3.1.iv ve Teorem 3.2.iv'ten belli. □

$a > 0$ gerçel sayısı ve $n \neq 0$ tamsayısı için, $X^n = a$ denkleminin biricik pozitif çözümü $a^{1/n}$ olarak yazılır. Demek ki, $a > 0$ için,
$$(a^{1/n})^n = a \text{ ve } a^{1/n} > 0.$$
Bir başka deyişle,
$$x = a^{1/n} \Leftrightarrow x^n = a \text{ ve } x > 0.$$
Kimileyin $a^{1/n}$ yerine $\sqrt[n]{a}$ yazılır. Ayrıca $\sqrt[2]{a}$ yerine $\sqrt{a}$ ya da $\sqrt{a}$ yazılır.

Son olarak, $q \in \mathbb{Q}$ ve $a \in \mathbb{R}^{>0}$ için a^q sayısını tanımlayalım. $m, n \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $q = m/n$ olarak yazıp,
$$a^q = (a^m)^{1/n}$$

tanım denemesini yapalım. Yani, a^q sayısı için,

$$x = a^q \Leftrightarrow x^n = a^m \text{ ve } x > 0$$

tanımını önerelim.

Bunun gerçekten bir tanım olması için örneğin,

$$a^{15/6} = a^{25/10} = a^{30/12},$$

yani

$$(a^{15})^{1/6} = (a^{25})^{1/10} = (a^{30})^{1/12}$$

olmalı; daha genel olarak, m, m', n, $n' \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için, $m/n = m'/n'$ olduğunda

$$(a^m)^{1/n} = (a^{m'})^{1/n'}$$

olmalı, yoksa a^q sayısının tanımı q'ye göre değil, $q = m/n$ eşitliğini sağlayan m ve n tamsayılarına göre değişebilir. Bir sonraki önsav, $(a^m)^{1/n}$ sayısının m ve n'ye göre değil, m/n'ye göre değiştiğini gösterecek.

Önsav 3.7. *m, m', n, n' tamsayıları için $m/n = m'/n'$ ise her $a > 0$ için $(a^m)^{1/n} = (a^{m'})^{1/n'}$ olur.*

Kanıt: Varsayıma göre $mn' = m'n$. Şimdi $x = (a^m)^{1/n}$ ve $y = (a^{m'})^{1/n'}$ olsun. Demek ki $x^n = a^m$ ve $y^{n'} = a^{m'}$. Dolayısıyla,

$$y^{n'm} = (y^{n'})^m = a^{m'm} = a^{mm'} = (x^n)^{m'} = x^{nm'} = x^{n'm}.$$

Sonuç 3.3'ten $y = x$ çıkar. □

Böylece artık $x > 0$ için $x^{n/m} = (x^n)^{1/m}$ tanımını yapabiliriz.

Gözden kaçabilecek bir şey daha kontrol edilmeli, $n \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{R}^{>0}$ için, a^n'nin eski tanımıyla, yukarıda tanımlanan $a^{n/1}$ sayısı birbirine eşit olmalı, yani n'yi tamsayı olarak da görsek, $n/1$ olarak kesirli sayı olarak da görsek, a^n'nin her iki tanımı da aynı sonucu vermeli. Nitekim öyle: $a^{n/1}$ sayısının yukarıda verdiğimiz tanımına göre,

$$x = a^{n/1} \Leftrightarrow x^1 = a^n \text{ ve } x > 0$$

olmalı ve bu da "$x = a^{n/1} \Leftrightarrow x = a^n$" demektir, yani $a^{n/1} = a^n$.

Teorem 3.8. *Her x, $y \in \mathbb{R}^{>0}$ ve p, $q \in \mathbb{Q}$ için,*
0. $1^p = 1$, $x^0 = 1$, $x^1 = x$,
i. $x^{p+q} = x^p x^q$ *ve* $x^{-p} = 1/x^p$.
ii. $(xy)^p = x^p y^p$.
iii. $(x^p)^q = x^{pq}$.
iv. $0 < p$ *ve* $x < y$ *ise* $x^p < y^p$.
v. $0 > p$ *ve* $x < y$ *ise* $x^p > y^p$.
vi. $p < q$ *ve* $1 < x$ *ise* $x^p < x^q$.
vii. $p < q$ *ve* $x < 1$ *ise* $x^q < x^p$.

Kanıt: Her şey tanımdan ve Teorem 3.1, Teorem 3.2 ve Sonuç 3.3'ten oldukça kolay bir biçimde çıkar. □

Alıştırmalar

3.2. $n \neq 0$ ve m tamsayıları ve $a > 0$ için, $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ eşitliğini kanıtlayın.

3.3. $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $p \in \mathbb{Q}$ için $(x/y)^p = x^p/y^p$ eşitliğini kanıtlayın.

Eğer $a < 0$ ise, $X^2 = a$ denkleminin gerçel sayılarda çözümü yoktur çünkü gerçel sayılarda kareler negatif olamazlar (bkz. Bölüm 1, U maddesi). Aynı nedenden eğer $a < 0$ ve n bir çift tamsayıysa, $X^n = a$ denkleminin de gerçel sayılarda çözümü olamaz. Öte yandan, şimdi kanıtlayacağımız üzere, eğer n bir tek doğal sayıysa, a hangi gerçel sayı olursa olsun, $X^n = a$ denkleminin gerçel sayılarda bir ve bir tek çözümü vardır.

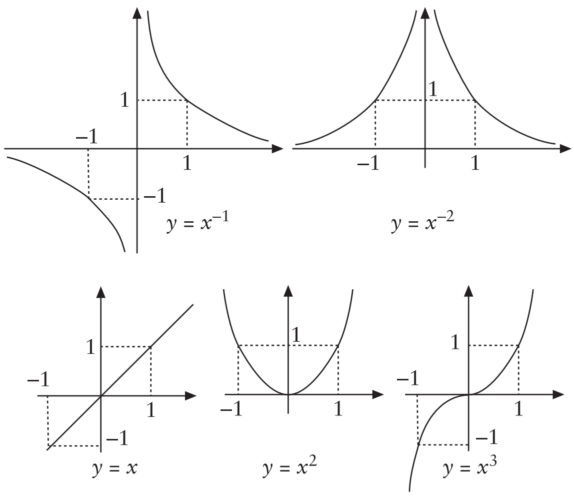
Teorem 3.9. i. *Eğer n bir tek doğal sayıysa, her $a \in \mathbb{R}$ için $X^n = a$ denkleminin gerçel sayılarda bir ve bir tek çözümü vardır. Bir başka deyişle $f(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}$'nin (artan) bir eşleşmesidir.*
ii. *Eğer $a \neq 0$ ise aynı şey n tek tamsayıları için de geçerlidir. Yani $f(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinin bir eşleşmesidir.*
iii. *Eğer $a \geq 0$ ise ve n bir çift tamsayıysa $X^n = a$ denkleminin gerçel sayılarda iki çözümü vardır. Eğer x bir çözümse, $-x$ diğer çözümdür.*

Kanıt: i. Eğer $a \geq 0$ ise, bu aynen Teorem 3.4. $a \leq 0$ durumu,

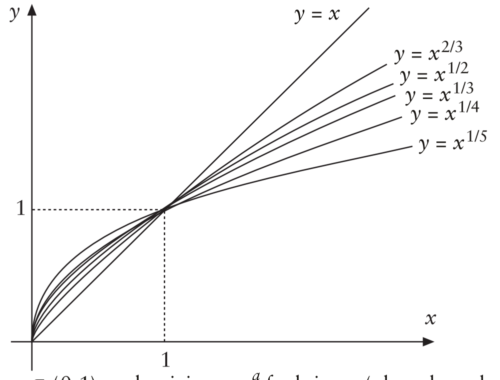
$$x^n = a \Leftrightarrow (-x)^n = -a$$

eşdeğerliğinden ve bir önceki cümleden çıkar. Artanlığı ve teoremin (ii, iii) kısımlarını okura bırakıyoruz. □

$n = -2, -1, 1, 2, 3$ tamsayıları için $f(x) = x^n$ fonksiyonları grafikleri aşağıda ayrı ayrı gösterilmiştir. (Matematikçiler grafikleri her zaman el yordamıyla çizerler...)

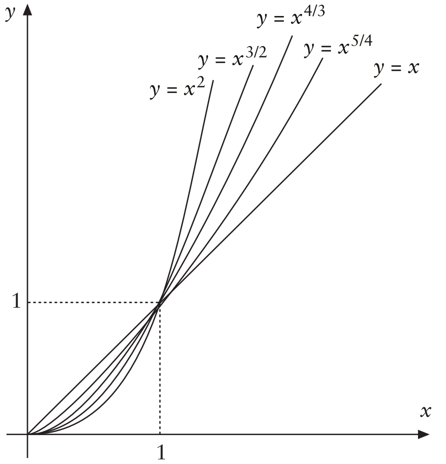


$a \in (0, 1]$ kesirli sayıları için $f(x) = x^a$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıda. a sayısı 1'e yaklaştıkça grafikler giderek düzleşirler ve $y = x$ doğrusuna benzerler. a, 0'a yaklaştıkça, $x = 0$ noktası dışında grafikler $y = 1$ doğrusuna benzemeye çalışırlar.



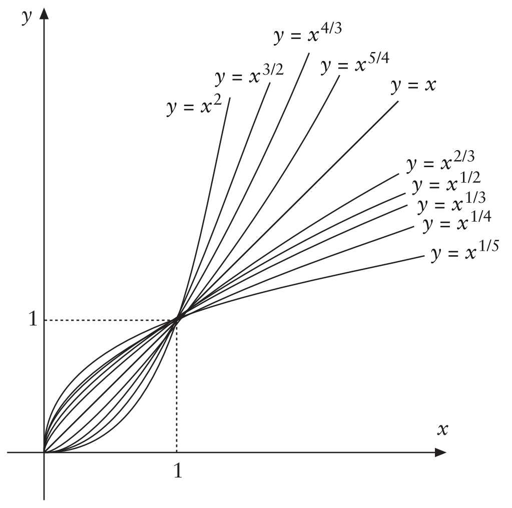
Bazı $a \in (0, 1)$ sayıları için $y = x^a$ fonksiyonu (el yordamıyla çizilmiştir.)

$a \geq 1$ kesirli sayıları için $f(x) = x^a$ fonksiyonları grafikleri aşağıda. $f(x) = x^a$ fonksiyonuyla $g(x) = x^{1/a}$ fonksiyonu birbirinin tersi olduğundan (yani $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_{[0,\infty)}$ olduğundan) yukarıdaki grafiklerle aşağıdaki grafikler $y = x$ çaprazına göre birbirine simetriktir. Tabii ki gene a sayısı 1'e yaklaştıkça grafikler $y = x$ doğrusuna benzer. Öte yandan a sayısı büyüdükçe, $[0, 1]$ aralığı üzerinde grafik yataylaşarak $y = 0$ doğrusuna, $[1, \infty)$ aralığı üzerinde grafik dikleşerek $x = 1$ doğrusuna benzemeye çalışır.



Bazı $a \in [1, 2]$ sayıları için $y = x^a$ fonksiyonu (el yordamıyla çizilmiştir.)

$a \geq 0$ iken grafikleri topluca gösterelim:



$x^q x^{-q} = 1$ olduğundan, $q > 0$ iken, $f(x) = x^{-q}$ fonksiyonlarının grafikleri yukarıdakilerden kolaylıkla elde edilebilir.

Teorem 3.9.ii'ye göre, eğer $n > 0$ tek bir tamsayıysa, sadece $x > 0$ için değil, her $x \in \mathbb{R}$ için $x^{1/n}$ sayısını $X^n = x$ denkleminin biricik çözümü olarak tanımlayabiliriz. Ama o zaman tehlikelere maruz kalırız, örneğin:

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1.$$

Bu yüzden negatif tamsayıların kökü pek alınmaz, alınırsa da hesaplarda dikkatli olunur.

Kesirli olmayan gerçel sayılara ***irrasyonel*** ya da ***kesirli olmayan gerçel sayılar*** adı verilir. Örneğin $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Daha genel bir olgu doğrudur.

Önsav 3.10. *$k > 0$ bir tamsayı ve $a \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer a bir doğal sayının k'ıncı kuvveti değilse $a^{1/k}$ kesirli bir sayı olamaz.*

Kanıt: Tam tersine, $a^{1/k}$ sayısının kesirli olduğunu varsayalım ve n, $m > 0$ tamsayıları için,

$$a^{1/k} = n/m$$

yazalım. Gerekirse sadeleştirerek, n ve m tamsayılarının birbirine asal olduklarını varsayabiliriz. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının da k'ıncı kuvvetini alarak, $a = n^k/m^k$, yani

$$am^k = n^k$$

elde ederiz. Bu eşitlikten, m'yi bölen her asalın n'yi de bölmek zorunda olduğu çıkar. n ve m birbirine asal olduklarından, $m = 1$ bulunur. □

Teorem 3.11. *İrrasyonel sayılar $\mathbb{R}$'de yoğundurlar, yani herhangi iki farklı gerçel sayı arasında irrasyonel bir sayı vardır.*

Kanıt: $a < b$ iki gerçel sayı olsun. Teorem 2.13'e göre, $a\sqrt{2} < q < b\sqrt{2}$ eşitsizliklerini sağlayan bir q kesirli sayısı vardır. Şimdi $q/\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayıdır (yoksa $\sqrt{2}$ rasyonel, yani kesirli olurdu) ve a ve b arasındadır. □

Örnekler

3.4. *p ve q iki pozitif kesirli sayı olsun. Her $n > 1$ doğal sayısı için*

$$\frac{n^p - n^q}{(n+1)^p - (n+1)^q} < 1$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Gerekirse p ve q sayılarının yerlerini değiştirerek $p > q > 0$ varsayımını yapabiliriz. O zaman payda pozitif olur ve $n^p - n^q < (n+1)^p - (n+1)^q$ eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini anlarız. Bu son eşitsizlik

$$n^q(n^{p-q} - 1) < (n+1)^q((n+1)^{p-q} - 1)$$

eşitsizliğine ve dolayısıyla

$$n^{p-q} - 1 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^q ((n+1)^{p-q} - 1)$$

eşitsizliğine denktir. Bu son eşitsizliği kanıtlayalım:

$$n^{p-q} - 1 < (n+1)^{p-q} - 1 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^q ((n+1)^{p-q} - 1).$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

3.5. *Yeterince büyük n doğal sayıları için $\sum_{i=1}^n 1/i \leq \sqrt{n}$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Aklımıza ilk gelen yöntem tümevarım olmalı. Eşitsizlik $n = 1$ için doğru ama $n = 2$ için yanlış. Hatta $n = 3, 4, 5, 6$ için de yanlış. Ama $n = 7$ için doğru. $n = 7$'den başlayarak tümevarımla kanıtlamaya çalışalım. $n \geq 7$ olsun ve eşitsizliğin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n} + \frac{1}{n+1}$$

olduğundan,

$$\sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Bu eşitsizlikle

$$\frac{1}{n+1} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

eşitsizliği ve

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \leq n+1$$

eşitsizliği eşdeğer. Ama

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

olduğundan, bu son eşitsizliği kanıtlamak için

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq n+1$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Öte yandan,

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1}$$

eşitsizliğinden dolayı, bu en son eşitsizliği kanıtlamak için

$$2\sqrt{n+1} \leq n+1$$

yani

$$2 \leq \sqrt{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli, ki $n \geq 3$ doğal sayıları için bunu elbette biliyoruz. □

3.6. *$a, b \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise $|a^{1/n} - b^{1/n}| \leq |a-b|^{1/n}$ olur.*
Kanıt: Genellikten taviz vermeden $a \geq b$ varsayımını yapabiliriz. $c = a^{1/n}$ ve $d = b^{1/n}$ olsun. O zaman $c \geq d$ olur ve binom açılımından

$$c^n = [(c-d)+d]^n = (c-d)^n + \cdots + d^n \geq (c-d)^n + d^n$$

elde ederiz. c ve d yerine eski değerleri koyarsak istediğimizi elde ederiz.

3.2 Bazı Basit Sonuçlar

İleride karşılaşacağımız bazı basit sonuçları bu altbölümde toparlıyoruz. Okur, ruh haline göre, ya bu sonuçları kanıtlarına bakmadan tek başına kanıtlamaya çalışmalıdır ya da tam tersine, şimdilik atlayıp gerektiğinde geri dönmelidir. Matematiğe yeni başlayanlara (ruh hallerinden bağımsız olarak) birinci seçeneği öneririz.

Önsav 3.12. *Her k doğal sayısı için $10^k > k$ olur.*

Kanıt: k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $k = 0$ için,

$$k = 0 < 1 = 10^0 = 10^k.$$

Bir de $k = 1$ için kanıtlayalım:

$$k = 1 < 10 = 10^1 = 10^k.$$

Şimdi $k \geq 1$ olsun ve $10^k > k$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Elbette $10^k \geq k+1$ olur. Hesap vakti geldi:

$$10^{k+1} = 10 \times 10^k > 10^k \geq k+1.$$

(Son eşitsizlik, kanıtın başında teoremi neden $k = 0$ ve $k = 1$ için kanıtladığımızı göstermektedir.) □

Sonuç 3.13. *Her $\epsilon > 0$ gerçel sayısı için öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ doğal sayısı için, $10^{-n} < \epsilon$ olur.*

Kanıt: N, $1/\epsilon$'dan büyük bir doğal sayı olsun (Arşimet Özelliği). O zaman,

$$10^N > N > 1/\epsilon$$

yani

$$10^{-N} < \epsilon$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için,

$$10^{-n} < 10^{-N} < \epsilon$$

olur. □

Önsav 3.14. *Her k doğal sayısı ve her $r \neq 1$ gerçel sayısı için,*

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^k = \frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}.$$

Kanıt: $S = 1 + r + r^2 + \cdots + r^k$ olsun. Bu sayıyı r ile çarpalım:

$$rS = r(1 + r + r^2 + \cdots + r^k) = r + r^2 + \cdots + r^{k+1}.$$

Şimdi S'yi ve rS'nin bu ifadelerini altalta yazalım:

$$\begin{aligned} S &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^k \\ rS &= r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{k+1}, \end{aligned}$$

ve birbirinden çıkaralım. r, $r^2, \ldots, r^k$ ifadeleri sadeleşir ve geriye sadece 1 ve r^{k+1} kalır:

$$S - rS = 1 - r^{k+1},$$

yani

$$(1 - r)S = 1 - r^{k+1}$$

bulunur. Buradan da S bulunur. □

Alıştırmalar

3.7. Önsav 3.14'ü k üzerine tümevarımla kanıtlayın.

3.8. $2^n \geq n^2$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.9. $3^n \geq n^2$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.10. $2^n \geq n^3$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.11. $3^n \geq n^3$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.3 Bernoullivari Eşitsizlikler

Sonuçlarımızı üç bölüme ayıracağız.

Birinci Bölüm. Bu altbölümde, ileride sık sık başvuracağımız meşhur (Jacob) Bernoulli eşitsizliğini ve bu eşitsizliğin türevlerini kanıtlayacağız.

Önsav 3.15 (Bernoulli)**.** *Eğer $s \geq 0$ ise, her n doğal sayısı için,*

$$(1+s)^n \geq 1+ns$$

olur.

Kanıt: Binom açılımından doğrudan çıkar:

$$(1+s)^n = 1 + ns + \binom{n}{2}s^2 + \cdots + s^n \geq 1+ns.$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Bundan daha genel bir sonuç doğru:

Önsav 3.16 (Bernoulli)**.** *Eğer $s \geq -1$ ise, her n doğal sayısı için*

$$(1+s)^n \geq 1+ns$$

olur. Eğer $n > 0$ ise sadece $s = -1$ durumunda eşitlik olur.

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise, kanıtlayacağımız eşitsizlik, $1 \geq 1$ eşitsizliğine dönüşüyor ki bunun doğru olduğu belli.

Şimdi eşitsizliğin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. $1+s \geq 0$ olduğundan,

$$(1+s)^{n+1} = (1+s)^n(1+s) \geq (1+ns)(1+s) = 1+(n+1)s+ns^2 \geq 1+(n+1)s.$$

Savımız kanıtlanmıştır. Son önerme de yukarıdaki satırlardan çıkar. □

Önsav 3.17. *Eğer $r < 1$ ise, her n doğal sayısı için, $(1-r)^n \geq 1-nr$ olur.*

Kanıt: Önsav 3.16'da $s = -r$ almak yeterli. □

Birazdan yukarıdaki sonucu doğal sayılardan kesirli sayılara genelleştireceğiz (Önsav 3.22).

Önsav 3.18. *Her $p \geq 1$ kesirli sayısı ve $x \geq 0$ gerçel sayısı için*

$$1+px \leq (1+x)^p$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik sadece $p = 1$ ya da $x = 0$ için geçerlidir.

Kanıt: $a \geq b > 0$ doğal sayıları için $p = a/b$ olsun. Demek ki

$$1 + \frac{ax}{b} \leq (1+x)^{a/b}$$

yani

$$\left(1 + \frac{ax}{b}\right)^b \leq (1+x)^a$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Her iki tarafı da açarsak, kanıtlamak istediğimizin,

$$\sum_{i=0}^{b} \binom{b}{i} \frac{a^i x^i}{b^i} \leq \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i$$

eşitsizliği olduğunu görürüz. Sağ tarafta her biri pozitif olan daha çok terim olduğundan, her $i = 0, 1, \ldots, b$ için,

$$\binom{b}{i} \frac{a^i}{b^i} \leq \binom{a}{i}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Bu eşitsizlik $i = 0$ için doğru. Şimdi eşitsizliğin i için doğru olduğunu varsayıp (tümevarım varsayımı), eşitsizliği $i+1$ için kanıtlayalım. Tümevarım varsayımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\binom{b}{i+1} \frac{a^{i+1}}{b^{i+1}} &= \binom{b}{i} \frac{b-i}{i+1} \cdot \frac{a^i}{b^i} \cdot \frac{a}{b} = \binom{b}{i} \frac{a^i}{b^i} \cdot \frac{b-i}{i+1} \cdot \frac{a}{b} \leq \binom{a}{i} \frac{b-i}{i+1} \cdot \frac{a}{b} \\ &= \binom{a}{i+1} \frac{i+1}{a-i} \cdot \frac{b-i}{i+1} \cdot \frac{a}{b} = \binom{a}{i+1} \frac{b-i}{a-i} \cdot \frac{a}{b} \leq \binom{a}{i+1}\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (En sondaki eşitsizlikte $a \geq b$ varsayımını kullandık.) Önsavın birinci kısmı kanıtlanmıştır. İkincisi yukarıdaki eşitsizlikler izlenerek kolayca çıkar. □

İkinci Bölüm[2]**.** Bu bölümde yukarıda kanıtladığımız 3.15-3.18 numaralı sonuçları çok daha şık bir biçimde bir defa daha kanıtlayacağız ama ayrıca kitabın en sonundaki ekte (sayfa 364'te) $x \in \mathbb{R}$ iken a^x sayısını tanımlamamızda çok yararlı olacak olan Sonuç 3.20'yi kanıtlayacağız. (Daha önce a^x sayısını sadece $x \in \mathbb{Q}$ iken tanımlamıştık.) Dileyen okur bu bölümü okuduktan sonra doğrudan kitabın sonundaki eke gidip $x \in \mathbb{R}$ iken a^x sayısının tanımını görebilir. Dileyen okur ise gerçel sayılarla üs almanın tanımı için ikinci cildi bekleyebilir; nitekim ikinci ciltte üs almayı çok daha genel bir teorem kanıtlayarak tanımlayacağız.

Önsav 3.19. *Eğer $x \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise $(n+1)x^n - 1 \leq nx^{n+1}$ olur. Eşitlik sadece $n = 0$ ya da $x = 1$ için mümkündür.* □

[2]Bu ikinci bölümdeki sonuçlar ve zarif kanıtları için Yusuf Ünlü'ye müteşekkiriz.

Kanıt: Eğer $n = 0$ ise kanıtlanacak bir şey yok. Bundan böyle $n > 0$ olsun. Okur isterse önsavın $n = 1$ için de doğru olduğunu kontrol edip $n > 1$ varsayımını yapabilir. Genel durum, oldukça kolay ama zekice bir hesaptan çıkıyor:

$$\begin{aligned}(n+1)x^n - nx^{n+1} - 1 = -nx^n(x-1) + (x^n - 1) &= (x-1)\left(-nx^n + \sum_{i=0}^{n-1} x^i\right)\\ &= (x-1)\sum_{i=0}^{n-1}(x^i - x^n) = -(x-1)\sum_{i=0}^{n-1} x^i(x^{n-i} - 1)\\ &= -(x-1)^2 \sum_{i=0}^{n-1}\left(x^i \sum_{j=0}^{n-i-1} x^j\right) \le 0.\end{aligned}$$

Ayrıca en sondaki eşitsizlik ancak $x = 1$ ise eşitliğe dönüşebilir. (Eğer $x = 0$ ise, $i = j = 0$ durumu en alttaki ve sağdaki parantezin 0 olmasını engelliyor.) Önsav kanıtlanmıştır. □

Sonuç 3.20. *Eğer $x \ge 0$ ve $0 \le p < q$ iki kesirli sayıysa*

$$\frac{x^p - 1}{p} \le \frac{x^q - 1}{q}$$

olur ve eşitlik sadece $x = 1$ için doğru olur.

Kanıt: Önermeyi önce p ve q doğal sayıları için kanıtlayalım. $q = p + 1$ için kanıtlamak yeterli. Ama bu da Önsav 3.19'dan hemen çıkar.

Şimdi p ve q iki kesirli sayı olsun. p ve q'nün paydalarını eşitleyerek, $n < m$ ve r doğal sayıları için, $p = n/r$, $q = m/r$ yazabiliriz. $y = x^r$ alarak,

$$\frac{y^n - 1}{n} < \frac{y^m - 1}{m}$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz, ki bunu da bir önceki paragrafta kanıtlamıştık. □

Sonuç 3.21 (Bernoulli)**.** *$0 < p$ kesirli bir sayı ve $-1 \le x$ gerçel bir sayı olsun. Eğer $1 \le p$ ise $1 + px \le (1+x)^p$ olur. Eğer $p < 1$ ise $1 + px \ge (1+x)^p$ olur.*

Kanıt: $a = 1 + x \ge 0$ olsun. Eğer $1 \le p$ ise Sonuç 3.20'den,

$$x = a - 1 \le \frac{a^p - 1}{p} = \frac{(1+x)^p - 1}{p}$$

bulunur ve bu da istediğimizi verir. Eğer $p < 1$ ise, gene Sonuç 3.20'den,

$$\frac{(1+x)^p - 1}{p} = \frac{a^p - 1}{p} < a - 1 = x$$

bulunur ve bu da istediğimizi verir. Sonuç'un ikinci kısmını Örnek 3.39'da bir defa daha kanıtlayacağız. □

Daha önce oldukça ilkel yöntemlerle ve çıplak elle kanıtlanmış olan 3.15, 3.16, 3.17 ve 3.18 numaralı sonuçlarımız yukarıdaki önsavdan hemen çıkar[3]. Kanıtları okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Şimdi Önsav 3.17'yi genelleştirebiliriz:

Önsav 3.22. *Her $p \geq 1$ kesirli sayısı ve her $0 < x \leq 1$ gerçel sayısı için*

$$1 - px \leq (1-x)^p$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: $a = 1 - x$ olsun. Sonuç 3.20'ye göre

$$-x = a - 1 \leq \frac{a^p - 1}{p} = \frac{(1-x)^p - 1}{p}$$

olur ve sonuç bundan çıkar[4]. □

Üçüncü Bölüm. Bu bölümde kanıtlayacağımız iki sonuç, ileride, Bölüm 10'da exp fonksiyonunu tanımlamak için gerekecek.

Önsav 3.23. *Her $n > 0$ için, $2 \leq (1 + 1/n)^n \leq 3$ olur.*

Kanıt: Önsav 3.16'da $s = 1/n$ alırsak, $2 \leq (1 + 1/n)^n$ eşitsizliğini buluruz. Diğer eşitsizlik daha zor. Dikkatli bir hesap yapmak gerekiyor. Yapalım. $n = 1$ ve $n = 2$ için kolay. $n \geq 3$ için:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} \frac{1}{n^i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \frac{1}{i!} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{i!}\right] < 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \\
&< 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} \\
&< 1 + \frac{1}{1/2} = 3.
\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

[3]Önsav 3.19'u ve bu çok şık sonuçlarını işaret eden Yusuf Ünlü'ye çok teşekkür ederim.

[4]Bu kitabın ilk basımında bu önsavın Görkem Özkaya tarafından bulunan son derece yaratıcı ve olağanüstü güzellikte ama iki sayfa uzunluğunda bir kanıtını vermiştik. Yukarıda verdiğimiz ve ilk basımda bulunmayan bu sade ve zarif kanıt Yusuf Ünlü'nün. Görkem Özkaya'nın kanıtını doğrusu çok üzülerek kaldırmak zorundayım.

Önsav 3.24. *$n > 0$ ve $x > 0$ için,* $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.

Kanıt: Önsav 3.18'e göre,

$$1+\frac{x}{n} = 1+\frac{n+1}{n}\frac{x}{n+1} < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

olur. □

Alıştırmalar

3.12. Önsav 3.23'teki yöntemle, $0 < x \le 2$ için

$$2 \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \frac{4-x}{2-x}$$

eşitsizliklerini kanıtlayın. (Daha fazlası için bkz. Önsav 10.2)

3.13. $0 < k, n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{k}{kn}\right)^{kn}$$

eşitsizliğini kanıtlayın ve bu eşitsizlikten hareketle

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \le \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

3.4 Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği I

Bu ve bundan sonraki altbölüm bu kitapta ve sonraki ciltlerde çok esaslı bir biçimde kullanılmayacağından, ilk okumada, kanıtlanan sonuçlar –şöyle bir bakıldıktan sonra– atlanabilir. Öte yandan, çok basit yöntemlerle son derece şaşırtıcı ve güçlü sonuçlar kanıtlayacağımızı da söyleyelim[5].

a ve b sayılarının ***aritmetik ortalaması***,

$$\frac{a+b}{2}$$

olarak, ***geometrik ortalaması*** da,

$$\sqrt{ab}$$

olarak tanımlanır. Negatif sayıların geometrik ortalaması alınmaz, sayıların 0'dan büyükeşit olmaları istenir.

Bu iki ortalama arasında meşhur bir eşitsizlik vardır:

[5]Bu ve bundan sonraki altbölüm için büyük ölçüde, okura da hararetle tavsiye edeceğimiz [SCY] kitabından yararlanılmıştır.

Teorem 3.25. *Her a, $b \geq 0$ için,*

$$\text{(AG)} \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

olur ve eşitlik sadece $a = b$ için geçerlidir.

Bunu kanıtlayalım.

Önce şu kanıtın yanlış olduğunu belirtelim: "Her iki tarafın da karesini al, paydaları eşitleyip 1 yap, sol tarafı sağ tarafa geçir; böylece

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab,$$

yani

$$0 \leq (a+b)^2$$

elde ederiz. Bu son eşitsizlik de doğru olduğundan ilk eşitsizliğimiz de doğrudur." Bu akıl yürütmenin yanlış olmasının nedeni, kanıtlanacak önermeden hareket ederek doğru bir önerme elde etmenin bir kanıt yöntemi olamayacağındandır, çünkü yanlış bir önermeden yola çıkılarak da doğru bir önerme elde edilebilir. Örneğin $0 = 1$ eşitliğinden yola çıkalım. "$0 = 1$ ise, $1 = 0$'dır elbette. Bu iki eşitliği altalta yazıp toplayalım: $1 = 1$ elde ederiz." Bu dediklerimizden $0 = 1$ eşitliğinin doğru olduğu anlaşılmaz elbette.

Ama doğru olduğunu bildiğimiz bir önermeden, örneğin, $0 \leq (a+b)^2$ önermesinden yola çıkarak $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ önermesini (kanıtta bir hata yapmadan) elde edersek, o zaman gerçekten de bu son eşitsizliği kanıtlamış oluruz.

Teorem 3.25'in Birinci Cebirsel Kanıtı: Yukarıda verdiğimiz yanlış kanıtı ters çevirmek gerekir.

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

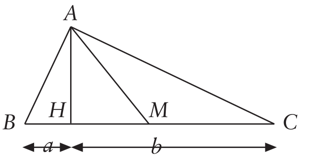
olduğundan, her iki tarafa da $4ab$ ekleyerek

$$4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

elde ederiz. Her iki tarafın karekökünü alıp 2'ye bölersek istediğimiz eşitsizliği elde ederiz. Kanıtın ilk satırındaki eşitsizliğin, ancak ve ancak $a = b$ ise eşitlik olabileceği gözönüne alınırsa, ikinci önerme de kanıtlanmış olur. □

Teorem 3.25'in İkinci Geometrik Kanıtı[6]: Bir diküçgende dik köşeden indirilen yükseklik, hipotenüsü, aşağıdaki şekildeki gibi a ve b uzunluğunda iki doğru parçasına bölsün.

[6]Bu kanıt bu kitaptaki aksiyomatik yaklaşımımızla hiç uyum sağlamıyor. Bu kanıtı bir parantez olarak algılayın lütfen.



M, BC'nin orta noktası olsun. Düzlem geometrisinden,

$$|AH|^2 = ab$$

ve

$$|AM| = |BM| = \frac{a+b}{2}$$

eşitliklerini biliyoruz. Ayrıca

$$|AH| \le |AM|$$

eşitsizliğini de biliyoruz. Bu üç olgudan (AG) eşitsizliği kolayca çıkar. □

(AG) eşitsizliğinde a yerine a^2, b yerine b^2 yazarsak ve her iki tarafı da 2'yle çarparsak,

$$2ab \le a^2 + b^2$$

elde ederiz. (Bu eşitsizlik elbette (AG)'siz de kanıtlanır!) Her iki tarafa a^2+b^2 eklersek

$$a^2 + b^2 + 2ab \le 2(a^2 + b^2),$$

yani

$$(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2),$$

yani

(AG′) $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

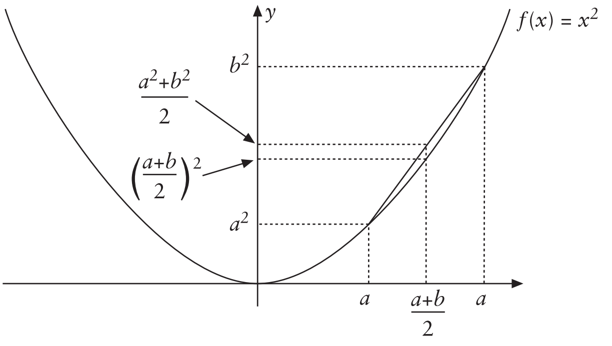
buluruz. Ayrıca bu son eşitsizlikten (AG)'yi elde etmek de zor değildir. Demek ki (AG) ve (AG′) eşitsizlikleri birbirine denktir.

(AG) yerine (AG′) eşitsizliğinin daha kullanışlı olduğu durumlar vardır. Örneklerde göreceğiz.

Teorem 3.25'in Üçüncü Kanıtı[7]: (AG) eşitsizliğine denk olduğunu bildiğimiz (AG′) eşitsizliği, aşağıdaki şekilden de görüldüğü üzere, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun dışbükeyliğinden de çıkar.

---

[7]Bu kanıtta da dışbükeylik gibi henüz tanımlamadığımız ama ikinci ciltte tanımlayacağımız geometrik bir kavram kullanacağız. Bu kanıt da bir parantez olarak algılanmalı.



Bu da (AG) eşitsizliğinin üçüncü kanıtını verir. □

Örnekler

3.14. *Çevresi verilmiş bir sabit olan tüm dikdörtgenler arasında, alanı en büyük olanın kare olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: Sabit çevreye p diyelim. Kenarlar a ve b olsun. Demek ki $a + b = p/2$ ve alan ab'ye eşit. (AG)'ye göre,

$$\text{Alan} = ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

olur ve ancak $a = b$ ise eşitlik olur. Bundan da en büyük alanın $a = b$ iken meydana çıktığı ve bu alanın $p^2/16$ olduğu anlaşılır.

İkinci Kanıt: Bu kanıt (AG)'yi kullanmadığı gibi başka bir bilgi de kullanmaz. Sabit çevre p, kısa kenar a, büyük kenar b olsun. Demek ki

$$a \le \frac{p}{4} \le b \text{ ve } a + b = \frac{p}{2}.$$

Buradan bir $x \ge 0$ sayısı için,

$$a = \frac{p}{4} - x \text{ ve } b = \frac{p}{4} + x$$

çıkar. Dolayısıyla

$$ab = \left(\frac{p}{4} - x\right)\left(\frac{p}{4} + x\right) = \frac{p^2}{16} - x^2$$

olur. Bundan da ab'nin maksimum değerine $x = 0$ iken ulaştığı ortaya çıkar: $x = 0$ ve $a = b = p/4$. □

3.15. *Alanı verilmiş bir sabit olan tüm dikdörtgenler arasında, çevresi en küçük olanın kare olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: Aynen yukarıdaki birinci kanıttaki gibi. Tekrarlamıyoruz. □

3.16. *Bir diküçgenin dik kenarlarının uzunluklarının toplamının $\sqrt{2}$ defa hipotenüsün uzunluğunu geçemeyeceğini kanıtlayın.*

Kanıt: Dik üçgenin kenarları a, b ve c olsun. Hipotenüsün uzunluğu c olsun. (AG$'$) eşitsizliğine göre,

$$\frac{(a+b)^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

ve

$$(a+b)^2 \le 2c^2$$

olur. Buradan da istenen çıkar. □

3.17. *x, herhangi bir pozitif sayı olsun. $x + 1/x$ sayısı en az kaç olabilir? $\alpha > 0$ bir gerçel sayıysa,* $\min\{x + 1/x : 0 < x \leq \alpha\}$ *kaçtır?*

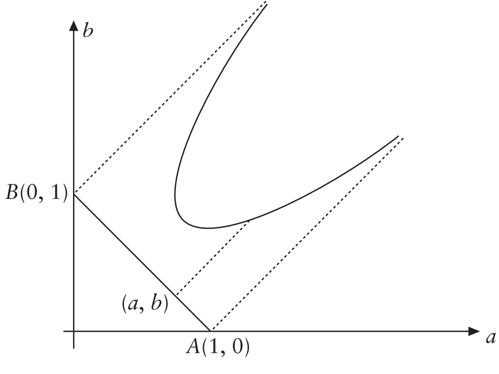
Yanıt: (AG) eşitsizliğini $a = x$ ve $b = 1/x$ için uygularsak, $x + 1/x$ sayısının en az 2 olacağı çıkar. 2 değeri de $x = 1/x$, yani $x = 1$ için elde edilir.

Demek ki $\alpha \geq 1$ ise, ikinci sorunun yanıtı da aynı: Minimum değer $x = 1$ için elde edilir ve minimum değer 2'dir. Şimdi $\alpha < 1$ varsayımını yapalım. Kolay bir hesapla kanıtlanacağı üzere $x + 1/x$ fonksiyonu $(0, \alpha]$ aralığı üzerine azalır. Demek ki minimum değer $x = \alpha$ iken elde edilir ve bu minimum değer $\alpha + 1/\alpha$'dır. □

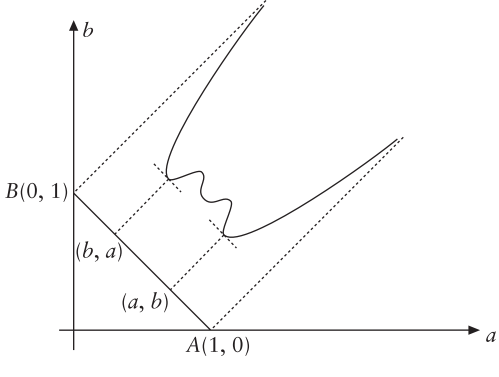
3.18. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere, $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer $a + b = 1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?*

Yanıt: Eğer kısıtlama yoksa, yanıt bir önceki sorudan dolayı $4+4 = 8$ çıkar ve bu sonuç $a = b = 1$ için elde edilir. Bundan böyle $a + b = 1$ kısıtlaması altında çalışalım. İfade, a ve b değişkenleri açısından simetrik olduğundan, eğer en küçük değer (a, b) tarafından alınırsa, aynı değer (b, a) tarafından da alınır. Buradan da en küçük değerin $a = b$, yani $a = b = 1/2$ olduğunda aldığı düşünülebilir. (Bu durumda ifadenin değeri $25/2$ olur, 8'den daha büyük elbette.)

Aşağıdaki şekilde (a, b) düzlemi üzerinde, $a + b = 1$ eşitliğini sağlayan noktalar kümesi olan AB doğru parçasını ve AB'ye dik olarak da sorudaki ifadenin aldığı değerleri göstermeye çalıştık.



Elbette a ya da b sayıları 0'a yaklaştıkça ifade büyür. Şekilde minimum tam ortada, $a = b = 1/2$ olarak gözüküyor, ama böyle olmayabilir tabii. Gerçek şekil aşağıdaki gibi de olabilir.



Ama herhalde birincisi daha akla yakın geliyor. Nitekim öyle de.

Birinci Çözüm: (AG)'ye göre, $a+b = 1$ olduğunda, ab en fazla $1/4$ değerini aldığından (o da $a = b = 1/2$ olduğunda), sorudaki ifadeyi ab cinsinden ifade etmenin iyi bir fikir olduğu düşünülebilir. Yanlış değil. Öyle yapalım:

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= \left(a^2+2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+2+\frac{1}{b^2}\right)\\ &= (a^2+b^2)+\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)+4 = (1-2ab)+\left(\frac{1-2ab}{a^2b^2}\right)+4\\ &= 5-2ab+\frac{1-2ab}{(ab)^2}.\end{aligned}$$

En sondaki ifadede a ve b sadece ab olarak beliriyor. Dikkat edilirse, ab ne kadar büyük olursa, en sondaki ifade o kadar küçük oluyor. Dolayısıyla ifade en küçük değerini ab'nin en büyük değerinde alabilir: $ab = 1/4$ iken. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 &= 5-2ab+\frac{1-2ab}{a^2b^2} \le 5-2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1-2\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}\\ &= 5-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = 5+8-\frac{1}{2} = 13-\frac{1}{2} = \frac{25}{2}\end{aligned}$$

olur ve $\frac{25}{2}$ değeri $a=b=\frac{1}{2}$ iken alınır. □

İkinci Çözüm: Fikir gene aynı: $x = a+\frac{1}{a}$ ve $y = b+\frac{1}{b}$ olsun. (AG′) eşitsizliğini x ve y için yazalım:

$$x^2+y^2 \ge 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Ama

$$x+y = \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right) = a+b+\frac{a+b}{ab} = 1+\frac{1}{ab}.$$

Demek ki

$$x^2+y^2 \ge 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{1+\frac{1}{ab}}{2}\right)^2.$$

En sağdaki ifade en küçük değerini ab en büyükken ($1/4$ iken) alır ve eşitlik $a=b=1/2$ iken sağlanır. Sonuç gene $25/2$ çıkar. □

3.19. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer bir de ayrıca $a+b=1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?

Yanıt: Hiç kısıtlama yoksa, her iki parantez de 2'den küçük olamayacağından ve her biri 2 olabileceğinden en küçük değer $2\times 2 = 4$ olur elbette ve bu değer de $a=b=1$ iken alınır. Bundan böyle $a+b=1$ kısıtlaması yapalım.

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) &= ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = ab+\frac{1}{ab}+\frac{a^2+b^2}{ab}\\ &= ab+\frac{1}{ab}+\frac{1-2ab}{ab} = ab+\frac{2}{ab}-2\end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı,

$$ab+\frac{2}{ab}$$

ifadesinin aldığı en küçük değeri bulmalıyız. Ama bu sefer ab sayısı $(0, 1/4]$ aralığında değişiyor çünkü

$$ab \le \frac{(a+b)^2}{4} = 1/4$$

ve bu değere $a = b = 1/2$ iken ulaşılır. (AG)'den dolayı,

$$ab + \frac{2}{ab} \geq 2\sqrt{ab\frac{2}{ab}} = 2\sqrt{2}$$

ve eşitlik ancak $ab = 2/ab$, yani $ab = \sqrt{2}$ ise doğru olur. Ama bizim ilgilendiğimiz ab değerleri en fazla $1/4$ olabilirler. $x + 2/x$ fonksiyonunun $(0, 1)$ aralığında azaldığını kanıtlamak zor değil; demek ki $x + 2/x$ fonksiyonu $(0, 1/4]$ aralığında minimum değeri $x = 1/4$ için alır ve bu minimum değer $1/4 + 8 = 33/4$ olur.

Sonuç olarak, $a + b = 1$ ve a, $b \geq 0$ kısıtlaması altında,

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) = ab + \frac{2}{ab} - 2 \geq \frac{33}{4} - 2 = \frac{25}{4}$$

olur ve minimum $25/4$ değerine $a = b = 1/2$ iken ulaşılır. □

3.20. *a ve b pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right)$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun. Eğer bir de $a + b = 1$ kısıtlaması yapılırsa, en küçük değer ne olur?

Yanıt: İfadeyi açalım:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 \geq 2 + 2 = 4.$$

Eşitlik ancak $ab = 1/ab$ ise, yani $ab = 1$ ise geçerlidir. Öte yandan $a + b = 1$ kısıtlaması yaparsak, $ab = 1$ olamaz, ab en fazla $1/4$ olabilir ve bu da ancak $a = b = 1/2$ iken olabilir. $x + 1/x$ fonksiyonu 1'den ve 1/4'ten önce azalan olduğundan,

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 \geq \frac{1}{4} + 4 + 2 = \frac{25}{4}$$

olur ve minimum $25/4$ değerine $a = b = 1/2$ iken ulaşılır. □

3.21. *Pozitif a, b ve c sayıları için $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Bu soru artık son derece basit olmalı, (AG)'yi üç defa uygulamak yeterli. □

3.22. *Pozitif a ve b sayıları için,*

$$\frac{a + bx^4}{x^2}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun.

Yanıt: $y = x^2$ alırsak, $a/y + by$ ifadesinin $y > 0$ iken alabileceği en küçük değeri bulmak yeterli. İfadenin alabileceği en küçük değer (AG)'ye göre $2(ab)^{1/2}$ olur ve bu en küçük değer $y = (a/b)^{1/2}$ için alınır. Demek ki $x = (a/b)^{1/4}$ olmalı. □

3.23. *a, b, $c \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın. Eşitliğin ancak $a = b = c$ için gerçekleşeceğini gösterin:*

$$(\mathrm{AG}_3) \qquad (abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Kanıt: a, b, c yerine a^3, b^3, c^3 alarak,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

eşitsizliğini kanıtlamanın (gerekli ve) yeterli olduğu görülür. "Çarpanlarına" ayırarak soldaki ifadenin pozitif olduğunu kanıtlayacağız. Soldaki ifadede a yerine X koyarsak,

$$p(X) = X^3 + b^3 + c^3 - 3Xbc$$

polinomunu elde ederiz.

$$p(-b-c) = 0$$

eşitliğinin doğru olduğunu kontrol etmek kolay. Demek ki $X + b + c$ polinomu $p(X)$ polinomunu böler. Bölmeyi yapalım:

$$p(X) = (X + b + c)(X^2 - (b + c)X + b^2 - bc + c^2)$$

buluruz. Şimdi a'da değerlendirirsek,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = p(a) &= (a + b + c)(a^2 - (b + c)a + b^2 - bc + c^2) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)}{2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da istediğimizi kanıtlar.

Eşitliğin ancak $a = b = c$ iken doğru olduğuna da dikkatinizi çekeriz. □

3.24. *$x > 0$ olmak üzere $x + 1/x^2$ ifadesinin alabileceği minimum değeri bulun. $x > 0$ olmak üzere $x^2 + 1/x$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun.*

Kanıt: (AG)'yi uygulamak bir işe yaramıyor. (AG_3)'ü uygulamanın bir yolu var:

$$x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\frac{x}{2}\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2^{2/3}}$$

ve eşitlik ancak $x = 2^{1/3}$ ise geçerli.

İkinci soru birincisiyle aynı: İlk soruda $y = 1/x$ almak yeterli. □

3.25. *Aynı çevreye sahip üçgenler arasında, en büyük alan hangi üçgen tarafından elde edilir?*

Yanıt: Ünlü Heron formülünü kullanacağız: Bir üçgenin kenarları a, b ve c uzunluğundaysa ve p çevre uzunluğunun yarısıysa, o zaman alan,

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

olur. (AG_3)'e göre,

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{p} &= (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{3p-2p}{3}\right)^3 = \frac{p^3}{27} \end{aligned}$$

olur ve eşitlik ancak $p - a = p - b = p - c$, yani $a = b = c$ ise geçerlidir. Demek ki en büyük alanı veren üçgen eşkenar üçgen olmalı. □

3.26. *a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3 \geq 0$ altı sayı olsun.*

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: İki kez (AG_3)'ü uygulayarak aşağıdaki hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} (a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3) &= a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + (a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &\qquad + (a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2a_3) \\ &\geq a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + 3\sqrt[3]{a_1^2a_2^2a_3^2b_1b_2b_3} + 3\sqrt[3]{a_1a_2a_3b_1^2b_2^2b_3^2} \\ &= \left(\sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3}\right)^3. \end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. Eşitliğe hangi koşullarda erişildiği sorusunu okura bırakıyoruz. □

Aşağıdaki alıştırmalar lise seviyesinde bir kitap olan [BB]'dendir ve bu altbölümde yapılanların zorluğunu yansıtamayacak kadar kolaydırlar.

Alıştırmalar

3.27. Her a, $b > 0$ için
$$\frac{2}{1/a + 1/b} \leq \sqrt{ab}$$
eşitsizliğini kanıtlayın.

3.28. $a \geq b > 0$ ve $c > d > 0$ olsun. Eğer $a/d = b/c$ ise $a = b$ ve $c = d$ eşitliklerini kanıtlayın.

3.29. Her a, b, c için $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ eşitsizliğini kanıtlayın.

3.30. Her a, b için $(a^2 \pm b^2)(a^4 \pm b^4) \leq (a^3 \pm b^3)^2$ eşitsizliğini kanıtlayın.

3.31. Eğer $ab \geq 0$ ise $(a^2 - b^2)^2 \geq (a-b)^4$ ve eğer $ab \leq 0$ ise $(a^2 - b^2)^2 \leq (a-b)^4$ eşitsizliklerini kanıtlayın.

3.32. Eğer $a + b \geq 0$ ise $a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2$ eşitsizliğini kanıtlayın.

3.33. a, b, c, $d \geq 0$ olsun. c ve d kesirli sayılar olsun.
$$a^{c+d} + b^{c+d} \geq d^c b^d + a^d b^c$$
eşitsizliğini kanıtlayın. Eşitlik hangi durumlarda geçerli olur? ($c = d = 1$ durumu ilginç.)

3.34. a, b, c, $d \geq 0$ olsun. Eğer $a/b \leq c/d$ ise
$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$$
eşitsizliklerini gösterin.

3.35. n, $m > 0$ doğal sayıları için $(1+n)^{1/m} + (1+m)^{1/n} \geq (1+m)^{1/n}(1+n)^{1/m}$ eşitsizliğini gösterin.

3.36. **Cauchy-Schwarz Eşitsizliği.** Basit cebirle $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$ eşitliğini gösterin. Buradan,
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$
eşitsizliğini kanıtlayın. Bu eşitsizlik ne zaman eşitlik olabilir?

3.37. **Cauchy-Schwarz Eşitsizliği.** $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$ eşitsizliğini kanıtlayın.

3.38. **Cauchy-Schwarz Eşitsizliği.** $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$ eşitsizliğini kanıtlayın.

3.5 Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği II

Bir önceki altbölümdeki (AG) eşitsizliğini iki sayıdan n sayıya genelleştireceğiz. Önce temel tanımları verelim.

$a_1, \ldots, a_n \geq 0$ olsun. Bu sayıların ***aritmetik ortalaması***,
$$A_n(a) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$
sayısıdır. ***Geometrik ortalaması*** ise,
$$G_n(a) = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$

sayısıdır. Bu iki ortalama arasında çok meşhur bir eşitsizlik vardır: Geometrik ortalama aritmetik ortalamayı aşamaz! $n = 1$ için bariz olan ve $n = 2$ ve 3 için geçen altbölümde kanıtladığımız bu eşitsizliği bu altbölümde her n doğal sayısı için kanıtlayıp çeşitli uygulamalarını vereceğiz.

Teorem 3.26. *Her* $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ *için,*

$$(\mathrm{AG}_n) \qquad (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

olur. Ayrıca eşitlik sadece ve sadece $a_1 = \ldots = a_n$ *ise geçerlidir.*

Birinci Kanıt: Önce (AG_{2^n}) eşitsizliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise kanıt bariz, ne de olsa (AG_1), $a_1 = a_1$ diyor. Kanıtı çok kolay olan $n = 1$ durumunu geçen yazımızda ele almıştık. Şimdi $n \geq 1$ olsun. (AG_{2^n}) eşitsizliğini varsayalım ve $(\mathrm{AG}_{2^{n+1}})$ eşitsizliğini kanıtlayalım. 2^{n+1} tane pozitif sayı alalım:

$$a_1, \ldots, a_{2^n}, b_1, \ldots, b_{2^n}.$$

(AG_{2^n})'den dolayı

$$(a_1 a_2 \cdots a_{2^n})^{1/2^n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n},$$
$$(b_1 b_2 \cdots b_{2^n})^{1/2^n} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bunları taraf tarafa çarparsak,

$$(a_1 \cdots a_{2^n} b_1 \cdots b_{2^n})^{1/2^n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n} \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

elde ederiz. (AG_2)'yi kullanarak sağ tarafı büyütelim:

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n} \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n} &\leq \left(\frac{\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n}}{2} + \frac{\frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n} + b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^{n+1}} \right)^2.\end{aligned}$$

Son iki eşitsizlikten,

$$(a_1 \cdots a_{2^n} b_1 \cdots b_{2^n})^{1/2^n} \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n} + b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^{n+1}} \right)^2$$

buluruz. Her iki tarafın da karekökünü alırsak, istediğimiz eşitsizliğe ulaşırız.

Eşitliğin ne zaman olacağını da (tümevarımla) anlayabiliriz. Eşitsizliğe kanıt boyunca, bir defa (AG_2)'yi, bir defa da (AG_{2^n})'yi kullanmak üzere tam iki kez başvurduk. ($AG_{2^{n+1}}$)'de eşitliğin olması için kanıtta kullanılan her iki eşitsizliğin de eşitlik olması gerekir. (AG_{2^n})'yi kullandığımızda eşitliğin olması için (tümevarım varsayımına göre),

$$a_1 = \ldots = a_{2^n} \text{ ve } b_1 = \ldots = b_{2^n}.$$

eşitliklerinin geçerli olması gerekir. (AG_2)'yi kullandığımızda eşitliğin olması için,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2^n}}{2^n} = \frac{b_1 + \cdots + b_{2^n}}{2^n}$$

eşitliğinin geçerli olması gerekir. Sonuç: ($AG_{2^{n+1}}$)'de eşitliğin geçerli olması için

$$a_1 = \ldots = a_{2^n} = b_1 = \ldots = b_{2^n}.$$

eşitliklerinin geçerli olması gerektiği anlaşılır.

Böylece (AG_{2^n}) eşitsizliğini her n doğal sayısı için kanıtlamış olduk. Şimdi eğer (AG_{n+1}) doğruysa, (AG_n)'nin de doğru olduğunu kanıtlayacağız. Bu da yukarıdaki sonuç sayesinde, (AG_n) formülünün her n için doğru olduğunu kanıtlayacak.

$$a_1, \ldots, a_n$$

sayılarını alalım.

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

olsun. $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sayılarına (AG_{n+1}) eşitsizliğini uygulayalım:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1})^{1/n+1} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Bu eşitsizlikte a_{n+1} yerine değerini koyalım:

$$\left(a_1 a_2 \cdots a_n \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}}{n+1}$$

elde ederiz. Her iki tarafı da düzenleyerek,

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n+1}}} (a_1 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

elde ederiz. Eşitsizliğin sol tarafındaki en sağdaki ifadeyi eşitsizliğin sağ tarafına geçirelim:

$$\frac{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n+1}}} \leq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^{1 - \frac{1}{n+1}}}{n} = \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^{n/n+1}}{n}$$

elde ederiz. Her iki tarafın da $n+1$'inci kuvvetini alırsak,

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n} \le \frac{(a_1+\cdots+a_n)^n}{n^{n+1}}$$

buluruz. Gerisi kolay. Solda paydada bulunan n'yi solda paydada bulunan n ile sadeleştirirsek ve her iki tarafın da n'inci kökünü alırsak, dilediğimiz,

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \le \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

eşitsizliğini buluruz.

Eşitliğin ne zaman doğru olduğuna bakalım. Kanıt boyunca eşitsizlik sadece bir defa peyda oldu. O eşitsizliğin de eşitlik olması için

$$a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

olmalı. Demek ki $a_1 = \ldots = a_n$ olmalı. □

İkinci Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n=1$ için önerme bariz. Şimdi (AG_n)'yi varsayıp (AG_{n+1})'i kanıtlayalım.

$$a_1,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$$

sayılarını seçelim. Bu sayıların en büyüğünü en sona koyduğumuzu varsayalım, yani a_{n+1} diğer bütün sayılardan büyükeşit olsun.

$$A_n = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

tanımını yapalım. A_{n+1} benzer biçimde tanımlansın. O zaman,

$$A_{n+1} = \frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1}$$

olur. a_{n+1} sayısı diğer tüm a_i sayılarından büyükeşit olduğundan, elbette

$$a_{n+1} \ge A_n$$

olur. Demek ki bir $b \ge 0$ sayısı için,

$$a_{n+1} = A_n + b$$

olur. Yukarıdaki eşitlikten devam edecek olursak,

$$A_{n+1} = \frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n+A_n+b}{n+1} = A_n + \frac{b}{n+1}$$

eşitliğini buluruz. Sol ve sağ tarafların $n+1$'inci kuvvetini alıp (ve en son eşitsizlikte tümevarım varsayımını kullanıp),

$$\begin{aligned} A_n^{n+1} &= \left(A_n + \frac{b}{n+1}\right)^{n+1} = A_n^{n+1} + \binom{n+1}{1} A_n^n \frac{b}{n+1} + \cdots \\ &\geq A_n^{n+1} + \binom{n+1}{1} A_n^n \frac{b}{n+1} = A_n^{n+1} + A_n^n b = A_n^n (A_n + b) \\ &= A_n^n a_{n+1} \geq (a_1 \cdots a_n) a_{n+1} = a_1 \cdots a_n a_{n+1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitsizlikti.

Eşitliğin doğru olması için $b = 0$ ve (tümevarım varsayımına göre),

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

olmalı. Bu ikisinden

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

çıkar. □

Üçüncü Kanıt: a_i yerine b_i^n yazarak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizliği,

$$nb_1 \cdots b_n \leq b_1^n + \cdots + b_n^n$$

şekline sokalım. $n = 1$ için eşitlik var. Şimdi eşitsizliği n için varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. $n+1$ tane pozitif $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}$ sayısı seçelim.

$$(n+1)b_1 \cdots b_n b_{n+1} \leq b_1^{n+1} + \cdots + b_n^{n+1} + b_{n+1}^{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak istiyoruz. İki tarafı da b_{n+1}^{n+1} sayısına bölüp

$$c_i = \frac{b_i}{b_{n+1}}$$

tanımını yaparsak, kanıtlamak istediğimiz eşitsizlik,

$$(n+1)c_1 \cdots c_n \leq c_1^{n+1} + \cdots + c_n^{n+1} + 1$$

şekline bürünür. Ama tümevarım varsayımını,

$$c_1^{(n+1)/n}, \ \ldots, \ c_n^{(n+1)/n}$$

sayılarına uygularsak,

$$n(c_1 \cdots c_n)^{(n+1)/n} + 1 = nc_1^{(n+1)/n} \cdots c_n^{(n+1)/n} + 1 \leq c_1^{n+1} + \cdots + c_n^{n+1} + 1$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu görürüz. Demek ki,

$$(n+1)c_1 \cdots c_n \leq n(c_1 \cdots c_n)^{(n+1)/n} + 1$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli.

$$x = (c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/n}$$

tanımını yaparak,

$$(n+1)x^n \leq nx^{n+1} + 1$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiği anlaşılır. Ama bu da Önsav 3.19'da kanıtlanmıştı. Gene aynı önsava göre, eşitlik ancak

$$c_1 c_2 \cdots c_n = x = 1$$

ve (tümevarım varsayımını kullanarak)

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n$$

ise, yani,

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$$

ise, yani,

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b_{n+1}$$

ise yani,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$$

ise geçerlidir. Teorem bir kez daha kanıtlanmıştır. □

Dördüncü Kanıt: Eğer a_i'lerden biri 0 ise, sorun yok. Bundan böyle her a_i'nin > 0 olduğunu varsayalım. $g = (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$ ve $b_i = a_i/g$ olsun. Bu durumda $b_i > 0$ ve $b_1 \cdots b_n = 1$ olur. Göstermek istediğimiz eşitsizlik de b'ler cinsinden yazınca $b_1 + \cdots + b_n \geq n$ eşitsizliğine dönüşür; önermenin ikinci kısmı da eşitliğin ancak tüm b_i'ler 1'e eşitse gerçekleştiğini söylüyor. $b_1 + \cdots + b_n \geq n$ eşitsizliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğr $n = 1$ ise sorun yok. Bundan böyle $n > 1$ olsun. Eğer tüm b_i'ler 1'e eşitse de sorun yok. Bundan böyle bazı b_i'lerin 1'e eşit olmadığını varsayalım. O zaman $b_1 \cdots b_n = 1$ eşitliğinden dolayı bazı b_i'ler 1'den büyük bazıları da 1'den küçüktür. Gerekirse b_i'lerin sırasını değiştirerek $b_1 < 1$ ve $b_n > 1$ varsayımlarını yapabiliriz. $c_1 = b_1 b_n$ olsun. O zaman $c_1 b_2 \cdots b_{n-1} = 1$ olur ve tümevarım varsayımından

$$c_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} \geq n - 1$$

elde ederiz. Şimdi,

$$\begin{aligned} b_1 + \cdots + b_n &= (c_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + b_1 + b_n - c_1 \\ &\geq (n-1) + b_1 + b_n - b_1 b_n \\ &= n + (1 - b_1)(b_n - 1) > n \end{aligned}$$

olur. □

Örnekler

3.39. Sonuç 3.21'in ikinci kısmını, yani $x \geq -1$ ve $p \in (0,1)$ bir kesirli sayıysa

$$(1+x)^p \leq 1 + px$$

eşitsizliğini (AG_n) sayesinde bir kez daha kanıtlayabiliriz. $n < m$ iki pozitif doğal sayı için $p = n/m$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}(1+x)^p &= (1+x)^{n/m} = ((1+x)^n)^{1/m} = ((1+x)^n 1^{m-n})^{1/m} \\ &\leq \frac{n(1+x)+m-n}{m} = 1 + \frac{n}{m}x = 1 + px\end{aligned}$$

olur ve eşitlik ancak $x = 0$ için geçerlidir.

3.40. *Toplamı, verilmiş bir t sayısı olan n pozitif gerçel sayının çarpımı en fazla kaç olabilir?*
Yanıt: $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = t$ ise, (AG_n)'den dolayı

$$r_1 \cdots r_n \leq \left(\frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}\right)^n = \frac{t^n}{n^n}$$

olur ve eşitlik ancak $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = t/n$ ise geçerlidir. □

3.41. *$n > 0$ bir doğal sayıysa,*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olur.
Kanıt: (AG_n)'den dolayı

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right) &\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n (1+1/2^i)}{n}\right)^n \\ &= \left(\frac{n + \sum_{i=1}^n 1/2^i}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\end{aligned}$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

3.42. *$a_1, \ldots, a_n > 0$ sayıları verilmişse,*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

sayısı en fazla kaç olabilir?
Yanıt: (AG_n)'den dolayı

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n\left(\frac{a_1}{a_2}\frac{a_2}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{a_n}{a_1}\right) = n$$

olur ve eşitlik ancak

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_1}$$

ise geçerlidir. Bu orana r dersek, eşitlik ancak,

$$a_1 = ra_2,\ a_2 = ra_3,\ \ldots,\ a_{n-1} = ra_n,\ a_n = ra_1$$

ise, yani

$$a_1 = ra_2 = r^2 a_3 = \ldots = r^{n-1} a_n = r^n a_1$$

ise, yani $r = 1$ ve

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a_n$$

ise geçerlidir. □

3.43. **Nesbitt Eşitsizliği.** $a, b, c > 0$ *ise*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

olur.

Kanıt: Örnek 3.42'ye göre $x/y + y/x \leq 2$ olur. Demek ki

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{c+b} + \frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c} + \frac{a+c}{b+a} \geq 2+2+2 = 6.$$

Bunu şöyle yazalım:

$$\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{c+b}\right) + \left(\frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c}\right) + \left(\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{b+a}\right) \geq 2+2+2 = 6,$$

yani

$$\frac{2a}{b+c} + 1 + \frac{2b}{c+a} + 1 + \frac{2c}{a+b} + 1 \geq 6,$$

yani

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Görüldüğü gibi eşitsizlik konusu hiç de kolay değil. Neyse ki bu kitaplarda eşitsizliklerle çok işimiz olmayacak.

3.44. *a ve b pozitif sayıları için,*

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a+nb}{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Ne zaman eşitlik olabilir?

Kanıt: Eşitsizlik (AG_{n+1})'den hemen çıkar. Eşitlik ancak $a = b$ ise mümkündür. □

3.45. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *ve* $z_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ *olsun. Her* $0 \neq n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n < x_{n+1}$ *ve* $z_n < z_{n+1}$ *eşitsizliklerini kanıtlayın.*

Kanıt: Önceki problemde $a = 1$ ve $b = 1 \pm 1/n$ alırsak,

$$\sqrt[n+1]{\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1 \pm \frac{1}{n+1}$$

buluruz. Her iki tarafın da $n+1$'inci kuvvetini alırsak istediğimiz çıkar. □

3.46. $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *olsun. Her* $0 \neq n \in \mathbb{N}$ *için* $y_{n+1} < y_n$ *eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Bir önceki probleme göre $z_{n+1} < z_{n+2}$ olduğundan,

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}$$

olur. □

3.47. $a_1, \ldots, a_n$ *pozitif sayılarsa*

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

sayısı en az kaç olabilir?

Yanıt: (AG_{n+1})'i her iki parantez için de uygularsak yanıtın n^2 olduğunu hemen görürüz. Eşitlik ancak $a_1 = \ldots = a_n$ ise mümkündür. □

3.48. *Her $n > 1$ doğal sayısı için,*
$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$
eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi uygulayalım:
$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \le \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$
İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

3.49. *Her $n > 1$ doğal sayısı için,*
$$\frac{2^n n!}{n^n} < 3$$
eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi uygulayarak ya da bir önceki soruyu kullanarak
$$\frac{2^n n!}{n^n} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
buluruz. Demek ki,
$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \le 3$$
eşitsizliğini göstermek gerekiyor. İşte bu son eşitsizliğin kanıtı:
$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 1+1+\sum_{i=2}^n \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\\ &= 2+\sum_{i=2}^n \frac{n!}{i!(n-1)!}\frac{1}{n^i} = 2+\sum_{i=2}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-(i-1))}{n^i}\frac{1}{i!}\\ &= 2+\sum_{i=2}^n 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{i!}\\ &\le 2+\sum_{i=2}^n \frac{1}{i!} \le 2+\sum_{i=2}^n \frac{1}{2^{i-1}} < 2+\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = 3.\end{aligned}$$
□

3.50. $x + x^2 + x^3 + 1/x^6$ *ifadesinin $x > 0$ için alabileceği en küçük değeri bulun.*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulayalım:
$$x + x^2 + x^3 + \frac{1}{x^6} \ge 4\left(xx^2x^3\frac{1}{x^6}\right)^{1/4} = 4.$$
Ve eşitlik ancak $x = 1$ ise mümkündür.

Dikkat: Eğer soru "$x+x^2+2/x^3$ ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulun" şeklinde olsaydı (AG_3)'ü uygulayarak en küçük değeri bulamazdık, çünkü $x = x^2 = 2/x^3$ denklemlerinin çözümü yoktur. $x + x^2 + 2/x^3$ ifadesinin alabileceği en küçük değerin bu yöntemle bulunabileceğini sanmıyorum. □

3.51. $x^2 + 2/x^3$ *ifadesinin $x > 0$ için alabileceği en küçük değeri bulun.*

Yanıt: (AG_5)'i uygulayalım:
$$x^2 + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} \ge 5\left(\frac{x^2}{3}\frac{x^2}{3}\frac{x^2}{3}\frac{1}{x^3}\frac{1}{x^3}\right)^{1/5} = \frac{5}{3^{3/5}}$$
buluruz. Eşitlik ancak $x^2/3 = 2/x^3$ ise, yani $x = 6^{1/5}$ ise mümkündür. □

3.52. *$x + x^2 + 1/64x^4$ ifadesinin $x > 0$ için alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi x tarafından ulaşılır?*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$x + x^2 + \frac{1}{64x^4} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + x^2 + \frac{1}{64x^4} \geq 4\left(\frac{x}{2}\frac{x}{2}x^2\frac{1}{64x^4}\right)^{1/4} = 4\left(\frac{1}{4\times 64}\right)^{1/4} = 1.$$

Şimdilik 1'in sadece altsınır olduğunu biliyoruz; henüz 1'e ulaşabileceğimizi bilmiyoruz. $x/2 = x^2 = 1/64x^5$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 1/2$, şansımız yaver gitti!) 1 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere $x = 1/2$ ile ulaşılır. □

3.53. *$x + x^2 + 64/x^5$ ifadesinin $x > 0$ için alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi x tarafından ulaşılır?*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$x + x^2 + \frac{64}{x^5} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{64}{x^5} \geq 4\left(x\frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2}\frac{64}{x^5}\right)^{1/4} = 4\cdot(16)^{1/4} = 8.$$

Şimdilik 8'in sadece altsınır olduğunu biliyoruz; henüz 8'e ulaşabileceğimizi bilmiyoruz. $x = x^2/2 = 64/x^5$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 2$, şansımız gene yaver gitti!) 8 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere $x = 2$ ile ulaşılır.

Eğer hesaplara

$$x + x^2 + \frac{64}{x^5} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{64}{x^5}$$

eşitliğiyle başlamak yerine,

$$x + x^2 + \frac{64}{x^5} = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{64}{x^5}$$

eşitliğiyle başlasaydık, başarıya ulaşamazdık çünkü $x/3 = x^2/2 = 64/x^5$ denklemlerinin bir çözümü yoktur. Yani şansın yaver gitmesi için doğru ayrıştırmayı yapmak lazım, ama her şeyden önce doğru ayrıştırmanın olması lazım. Bir sonraki soruyu çözmek çok daha zor. □

3.54. *$3x + 2x^2 + 1/(2x^{14})$ ifadesinin $x > 0$ için alabileceği en küçük değeri bulun. Bu en küçük değere hangi x tarafından ulaşılır?*

Yanıt: (AG_4)'ü uygulamaya çalışalım:

$$3x + 2x^2 + \frac{1}{2x^{14}} = 6\times\frac{x}{2} + 4\times\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^{14}} \geq 11\left(\left(\frac{x}{2}\right)^6\left(\frac{x^2}{2}\right)^4\frac{1}{2x^{14}}\right)^{1/11} = \frac{11}{2}.$$

$x/2 = x^2/2 = 1/(2x^{14})$ denklemlerinin bir çözümü olduğundan ($x = 1$, şans hep bizden yana!) 11/2 gerçekten en küçük değerdir ve bu en küçük değere ulaşmak için $x = 1$ alınmalı. □

3.55. *$a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$ sayıları için*

$$a_1a_2^2a_3^3a_4^4 \leq \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4}{10}\right)^{10}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Çok kolay... □

3.56. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın:*

$$1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{4^4}\cdots\frac{1}{n^n} < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n(n+1)/2}.$$

Kanıt: $(\mathrm{AG}_{n(n+1)/2})$'yi kullanmak yeterli:

$$\begin{aligned}
1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{4^4}\cdots\frac{1}{n^n} &= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{n}\cdots\frac{1}{n}\right)\\
&\le\left(\frac{1\cdot 1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n}}{1+2+3+\cdots+n}\right)^{1+2+3+\cdots+n}\\
&=\left(\frac{n}{n(n+1)/2}\right)^{n(n+1)/2}=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n(n+1)/2}.
\end{aligned}$$
□

3.57. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın:*

$$1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdots n^n\le\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{n(n+1)/2}.$$

Kanıt: $(\mathrm{AG}_{n(n+1)/2})$'yi kullanmak yeterli:

$$\begin{aligned}
1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdots n^n &\le\left(\frac{1+2\cdot 2+3\cdot 3+\cdots+n\cdot n}{n(n+1)/2}\right)^{n(n+1)/2}\\
&=\left(\frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n(n+1)/2}\right)^{n(n+1)/2}=\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{n(n+1)/2}.
\end{aligned}$$
□

3.58. *$a_1,\ldots,a_n$, toplamı s olan n tane pozitif sayı olsun.*

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\le 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: (AG_n)'yi kullanacağız:

$$\begin{aligned}
(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &\le\left(\frac{\sum_{i=1}^n(1+a_i)}{n}\right)^n=\left(\frac{n+\sum_{i=1}^n a_i}{n}\right)^n\\
&=\left(1+\frac{s}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}\frac{s^i}{n^i}\\
&=\sum_{i=0}^n\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{s^i}{n^i}=\sum_{i=0}^n\frac{n(n-1)\cdots(n-(i-1))}{n^i}\frac{s^i}{i!}\\
&=\sum_{i=0}^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{s^i}{i!}<\sum_{i=0}^n\frac{s^i}{i!}.
\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Not: Bunun özel bir durumu olarak, $a_1=\ldots=a_n=s/n$ alırsak,

$$\left(1+\frac{s}{n}\right)^n\le 1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\cdots+\frac{s^n}{n!}$$

elde ederiz.

3.59. *Her $0\ne n\in\mathbb{N}$ için,*

$$\sqrt{2}\,\sqrt[4]{4}\,\sqrt[8]{8}\cdots\sqrt[2^n]{2^n}\le n+1$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Kanıt: Sol tarafın 2^n'inci kuvvetini alıp (AG)'yi uygulayalım:

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^{n}(2^i)^{1/2^i}\right)^{2^n} &= \prod_{i=1}^{n}(2^i)^{2^{n-i}} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}2^i}{2^{n-1}+\cdots+2+1}\right)^{2^{n-1}+\cdots+2+1}\\ &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} 2^n}{2^n-1}\right)^{2^n-1} = \left(\frac{n2^n}{2^n-1}\right)^{2^n-1} \leq (n+1)^{2^n-1} < (n+1)^{2^n}.\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

3.60. (TÜBİTAK Olimpiyat elemeleri 1'inci aşama) $x+y+z=1$ *eşitliğini sağlayan* x, y, $z \geq 0$ *gerçel sayıları için* $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$ *çarpımının alabileceği en küçük değer kaçtır?*

Çözüm: $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$ ifadesi $x=y=z=1/3$ için 64 değerini alır. Bundan daha az olamayacağını gösterelim.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) &= \frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{xyz}\\ &= \frac{1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz}{xyz}\\ &= \frac{2+xy+yz+zx+xyz}{xyz}\\ &= 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{2}{xyz}\end{aligned}$$

eşitliğini aklımızda tutalım, birazdan gerekecek.
(AG)'den dolayı $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{3}{(xyz)^{1/3}}$ olur. Bunu yukarıda elde ettiğimiz eşitliğe yerleştirirsek,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{2}{xyz} \geq 1+\frac{3}{(xyz)^{1/3}}+\frac{2}{xyz}$$

elde ederiz.
Gene (AG)'den dolayı $(xyz)^{1/3} \leq \frac{x+y+z}{3} = \frac{1}{3}$, yani $xyz \leq \frac{1}{27}$ olur. Yukarıda bıraktığımız yerden devam edecek olursak,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 1+\frac{3}{(xyz)^{1/3}}+\frac{2}{xyz} \geq 1+\frac{3}{(1/27)^{1/3}}+\frac{2}{1/27} = 64$$

elde ederiz.

Alıştırmalar

3.61. $n \geq 2$ ve $a_1 > \ldots > a_n > 0$ olsun. $0 < a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n < a_1$ eşitsizliklerini kanıtlayın.

3.62. $a_1, \ldots, a_n > 0$ ise ve

$$h = \frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

ise

$$(a_1\cdots a_n)^{1/n} \geq \frac{n}{h}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

3.63. Eğer $q_1, \ldots, q_k \geq 0$ kesirli sayılarının toplamı 1 ise, her $x_1, \ldots, x_k \geq 0$ gerçel sayıları için

$$q_1x_1 + \cdots + q_kx_k \geq x_1^{q_1} \cdots x_k^{q_k}$$

eşitsizliğini gösterin.

3.64. $a_1 > \ldots > a_n > 0$ olsun. $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ olsun.

$$B_i = b_1 + \cdots + b_i$$

tanımını yapalım

$$m = \min\{B_1, \ldots, B_n\} \text{ ve } M = \max\{B_1, \ldots, B_n\}$$

tanımlarınmı yapalım. ***Abel eşitsizliği*** olarak bilinen

$$ma_1 \leq a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq Ma_1$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

Eşitsizlikler matematiğin ve özellikle analizin önemli konularından biridir. İkinci ciltte bu konuya özel bir bölüm ayıracağız. Eşitsizlikler hakkında daha fazla bilgi isteyen okur [BB, St, MOD, Lee, Cv, HLP] kaynaklarına başvurabilir.

Kısım II

Diziler

4. Yakınsak Gerçel Sayı Dizileri

4.1 Dizi

Ta en başından, dizinin tanımından başlayalım. X herhangi bir küme olsun. X'ten sırayla elemanlar seçelim:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

İşte dizi böyle bir şeydir. Buna X-***dizisi*** denir. Örneğin,

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}, \ldots$$

bir $\mathbb{Q}$-dizisidir, ve aynı zamanda bir $\mathbb{R}$-dizisidir elbette.

$$\pi,\ \pi^2,\ \pi^3,\ \pi^4,\ \pi^5, \ldots$$

ise bir $\mathbb{R}$-dizisidir. (Her ne kadar π diye bir sayının varlığını tanımlamamışsak da, böyle bir gerçel sayının varlığı okurun kulağına kadar gelmiştir... Dileyen π yerine herhangi bir başka gerçel sayı da alabilir.)

Bu bölümde sadece gerçel sayı dizilerini konu edeceğimizden $\mathbb{R}$-dizisi yerine kısaca ***dizi*** diyeceğiz.

Daha matematiksel olalım. Matematiksel olarak bir dizi (yani bir $\mathbb{R}$-dizisi), doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir x fonksiyonudur. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise, x'in n'de aldığı $x(n)$ değeri yerine x_n yazılır. Ayrıca, x fonksiyonu değerleriyle belirlendiğinden, x yerine $(x_n)_n$ yazılır:

$$x = (x_n)_n.$$

Örneğin yukarıdaki $1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5$, $5/6, \ldots$ dizisi, eğer tahmin edildiği gibi devam ediyorsa,

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)_n$$

olarak yazılır. x_n'ye x dizisinin n'***inci terimi*** adı verilir. n'ye de x_n'nin ***göstergeci*** ya da ***endisi*** denir[1].

Bazı dizilerin tanımında yapay bir tanım sorunu olabilir. Örneğin,

$$x_n = \frac{1}{n(n-2)}$$

dizisi $n = 0$ ve 2 göstergeçleri için sorun yaşar. Bu durumda dizinin 3 ve daha büyük göstergeçler için tanımlandığını varsayabiliriz, ya da bu dizi yerine,

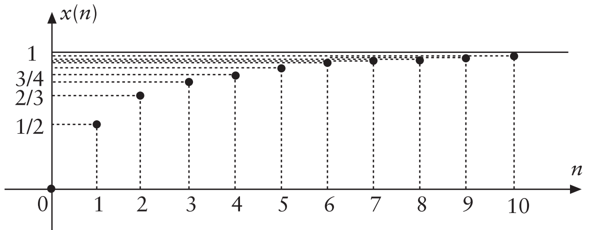
$$x_n = \frac{1}{(n+3)(n+1)}$$

dizisini alabiliriz. Nitekim,

$$\left(\frac{1}{n(n-2)}\right)_{n\geq 3} = \left(\frac{1}{(n+3)(n+1)}\right)_{n\geq 0}.$$

Bu yöntemle sonlu sayıda göstergeçte tanımsız olan dizilerin her göstergeçte tanımlı olduklarını varsayabiliriz.

Bir dizi aslında bir fonksiyon olduğundan, dizinin grafiğini de çizebiliriz. Aşağıda bir örnek verdik.



$x_n = \frac{n}{n+1}$ dizisinin grafiği

Her terimi sabit bir a sayısı olan diziye sabit a dizisi adı verilir. Bu diziyi $s(a)$ olarak göstereceğiz. Demek ki $s(a)$ dizisi,

$$a, a, a, a, a, a, \ldots$$

diye başlar ve aynen böyle devam eder. Sabit 0 dizisi ve sabit 1 dizisi önemli sabit dizilerdendir. Kimi zaman bir dizi hemen değil ama ***zamanla sabitleşebilir***, örneğin,

$$b, c, b, a, a, a, a, a, a, \ldots$$

dizisi zamanla -dördüncü adımda- sabitleşen bir dizidir.

[1]Bu son tanımın şu tuhaflığı var: $x_n = x_m$ ise x_n'nin göstergeci n midir yoksa m midir? Dolayısıyla bu bir tanım olamaz, bu tanım lafın gelişinden her şeyin anlaşıldığı, yani muallakta kalınmadığından emin olunduğunda kullanılır. Ayrıca, eğer $n \neq m$ ise $x_n = x_m$ olsa bile x_n terimiyle x_m teriminin farklı terimler olduğu varsayılır, biri n'inci, diğeri m'inci terimdir! Örneğin "$(x_n)_n$ dizisinin 50 terimi 0'a eşittir" demek, 50 farklı n göstergeci için $x_n = 0$ demektir.

Dizilerden oluşan kümeyi $\mathscr{D}$ ile gösterelim. $\mathscr{D}$ kümesi üstüne toplama, çıkarma ve çarpma gibi standart işlemleri şöyle -en doğal biçimde, fonksiyonların toplamını, farkını, çarpımını tanımladığımız gibi- tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}(x_n)_n + (y_n)_n &= (x_n + y_n)_n,\\ (x_n)_n - (y_n)_n &= (x_n - y_n)_n,\\ (x_n)_n(y_n)_n &= (x_n y_n)_n.\end{aligned}$$

Bunlara sırasıyla ***terim terim*** toplama, çıkarma ve çarpma denir, çünkü dizileri toplamak, çıkarmak ve çarpmak için aynı işlemi dizilerin terimleriyle yapıyoruz. Eğer her n için $y_n \neq 0$ ise bir diziyi $(y_n)_n$ dizisine "terim terim" bölebiliriz:

$$(x_n)_n/(y_n)_n = (x_n/y_n)_n.$$

$s(0)$ sabit dizisi toplamanın, $s(1)$ sabit dizisi de çarpmanın etkisiz elemanlarıdır elbette. $s(0)$ ve $s(1)$ yerine $0_{\mathscr{D}}$ ve $1_{\mathscr{D}}$ de yazılabilir.

Eğer $x = (x_n)_n \in \mathscr{D}$ ise

$$-x = 0_{\mathscr{D}} - x = (-x_n)_n$$

tanımını yapabiliriz.

Alıştırmalar

4.1. Bir dizi tümevarımla tanımlanabilir. Örneğin eğer x_0 sayısı verilmişse

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2$$

formülü bir dizi tanımlar. Eğer $x_0 = 0$ alırsak, $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ dizisini elde ederiz. $x_0 = 1/2$ alarak bu dizinin ilk birkaç terimini bulun. Dizinin terimlerinin giderek ya 0'a ya da 1'e yakın olduklarını gözlemleyin.

4.2. $x_0 = 2$ ve $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ olsun. Üstünde karekök düğmesi olan bir hesap makinası kullanarak $(x_n)_n$ dizisinin ilk 20 terimini hesaplayın. Ne gözlemliyorsunuz? Şimdi aynı şeyi $x_0 = 0{,}5$ için yapın. x_0 için farklı değerlerle aynı işlemi yaptığınız zaman ne gözlemliyorsunuz?

4.3. Excel gibi bir yazılım kullanarak yukarıdaki dizinin ilk yüz terimini çeşitli x_0 değerleri için bulmaya çalışın. Özellikle $x_0 = 1{,}61803$ ve $x_0 = 1{,}61805$ için dizinin davranışını gözlemleyin.

4.4. $x_{n+1} = -x_n^2 + 3x_n + 1$ olsun. $x_0 = 1$ için diziyi bulun. Excel gibi bir yazılım kullanarak aynı soruyu $x_0 = 0,5$ için yanıtlamaya çalışın. Dizinin terimlerinin 0,198, 0,1555, 3,247 gibi sayıların civarında dolanıp durduklarını gözlemleyin.

4.5. $x_{n+1} = 6 - 1/x_n$ olsun. x_0'ı elbette 0'a eşit alamayız, yoksa x_1 tanımlanmaz. Ama 1/6'ya da eşit alamayız, yoksa x_2 tanımlanmaz. $x_0 = 6/35$ olabilir mi? Bundan böyle $x_0 = 1$ olsun. Her $n \geq 1$ için x_n'nin tanımlandığını ve $x_n \geq 5$ eşitsizliğini kanıtlayın; ayrıca $x_n \leq 6$ eşitsizliğini kanıtlayın. Excel gibi bir yazılımla dizinin ilk birkaç terimini hesaplayın. Ne gözlemliyorsunuz? $x = 6 - 1/x$ denkleminin çözümüyle dizinin aldığı değerleri karşılaştırın. Gene $x_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için,

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{25}\,|x_n - x_{n-1}|$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

4.6. Bazen bir diziyi tümevarımla tanımlamak için ilk iki terimi bilmek gerekebilir. Örneğin meşhur ***Fibonacci dizisi*** $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ ve $x_0 = x_1 = 1$ eşitlikleriyle tanımlanır. $y_n = x_{n+1}/x_n$ olsun. $y_{n+1} = 1/y_n + 1$ ve $y_0 = 1$ eşitliklerini gözlemleyin. $(y_n)_n$ dizisinin ilk birkaç terimini (örneğin Excel'le) hesaplayın ve bu terimlerle $y^2 - y - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökü arasındaki ilişkiyi gözlemleyin. Her n için $1 \leq y_{n+1} \leq 2$ eşitsizliklerini kanıtlayın. $|y_{n+1} - y_n|$ sayıları arasında bir önceki alıştırmadaki gibi bir eşitsizlik bulun.

4.7. $s \geq 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları verilmiş olsun. Her $n \geq 0$ için $x_{n+1} = \sqrt{s + x_n}$ tanımını yapalım. Her x_n'nin bu formülle gerçekten tanımlandığını kanıtlayın.

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n \geq s$$

önermesini kanıtlayın. Bunu kullanarak

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

önermesini kanıtlayın.

$$\alpha = \max\left\{x_0, \frac{1 + \sqrt{1 + 4s}}{2}\right\}$$

olsun. $\alpha^2 - \alpha - s \geq 0$ eşitsizliğini gözlemleyerek, her n için $x_n \leq \alpha$ eşitsizliğini kanıtlayın (bkz. Örnek 7.15).

4.8. $a_0 > 0$ bir kesirli sayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} = a^{a_n}$ tanımını yaparak, çeşitli $a \in (0, 2)$ kesirli sayıları için $(a_n)_n$ dizisinin büyük n'ler için davranışını bulun. (Bir hesap makinası ya da Excel kullanın.)

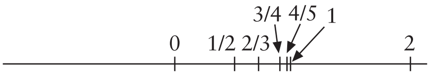
4.9. Tüm kesirli sayıları içeren bir dizi var mıdır?

4.2 Yakınsak Diziler

Kesirli sayı dizileri bir sayıya giderek daha çok yaklaşabilirler. Örneğin girişte verdiğimiz

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

örneğindeki dizi giderek daha çok 1'e yaklaşır, yaklaşmaktan da öte (çünkü dizi 2'ye de yaklaşır) 1'in burnunun dibine girer.



Öte yandan 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... kesirli sayı dizisi giderek daha fazla 0'ın burnunun dibine girer, 0'a yaslanır neredeyse. Buna matematikte ***yakınsamak*** denir.

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$(*) \qquad n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) "a'ya ***yakınsar***" ya da "a, $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti***dir" denir.

Bir sayıya yakınsayan dizilere ***yakınsak*** denir. Yakınsak olmayan dizilere de ***ıraksak*** denir.

Örneklere geçmeden önce bu önemli tanım üzerine biraz kafa yoralım. Bu tanımı özümsemek çok önemlidir.

Okur, tanımın, sezgileriyle algıladığı "yakınsama"nın anlamını matematiksel olarak verdiğine ikna olmalıdır, dolayısıyla aşağıda yazılanları laf ebeliği olarak nitelemeyip dikkatle okumalıdır.

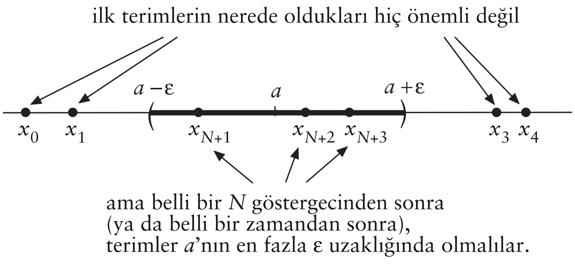
Tanımın Tartışması. $|x_n - a| < \epsilon$ eşitsizliğiyle, $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ önermesi birbirine denktir, nitekim Önsav 1.1.vi'ya göre,

$$|x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x_n - a < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

denklikleri geçerlidir. Demek ki tanıma göre, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\epsilon > 0$ sayısı için öyle bir N doğal sayısı olmalı ki, N'den büyük her n göstergeci için,

$$x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

olsun. Yani $(x_n)_n$ dizisi belli bir göstergeçten sonra $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ aralığına düşmeli. Dolayısıyla bir dizinin limiti olmasında ilk birkaç terimin, örneğin ilk 1 milyar terimin ne olduğu hiç ama hiç önemli değildir, önemli olan dizinin son kısmının, yani



"kuyruğu"nun genel davranışıdır. Sonuç olarak, dizinin ilk terimleri yakınsamayı etkilemez. Örneğin,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

dizisi 1'e yakınsıyorsa -ki yakınsıyor, daha sonra kanıtlayacağız bunu- o zaman,

$$9,\ 199,\ 3543,\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

dizisi de 1'e yakınsar. Nitekim verilmiş bir $\epsilon > 0$ için birinci dizide N yeterliyse, aynı ϵ için ikinci dizide $N + 3$ yeterlidir. Bunun gibi

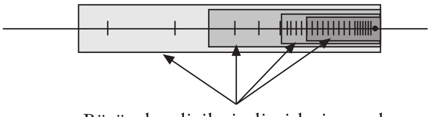
$$\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \ldots$$

dizisi de 1'e yakınsar. Kanıtını ileride vereceğimiz şu daha genel sonuç geçerlidir (bkz. sayfa 88).

Teorem 4.1. *Yakınsak bir dizinin sonlu sayıda terimini değiştirirsek ya da yakınsak bir diziye sonlu sayıda terim eklersek ya da yakınsak bir diziden sonlu sayıda terim çıkarırsak gene yakınsak bir dizi elde ederiz ve bu işlemlerle dizinin limiti değişmez; bir başka deyişle, iki dizinin kuyrukları aynıysa, yani belli A ve B doğal sayıları ve her $n > A$ için,*

$$x_n = y_{n+B}$$

ise, o zaman, $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır ve bu durumda her iki dizi de aynı sayıya yakınsar.



Bütün bu dizilerin limitleri aynıdır

Eğer belli bir $\epsilon_0 > 0$ için (*) önermesini doğrulayan bir N sayısı bulmuşsak, bu ϵ_0'dan büyük ϵ'lar için de (*) önermesi aynı N ile doğrudur. Örneğin,

$$\epsilon_0 = 0{,}001$$

için $N = 10.000$ yetiyorsa, ϵ_0'dan daha büyük olan

$$\epsilon = 0{,}003$$

için de $N = 10.000$ yeter. Dolayısıyla önermeyi asıl küçük ϵ'lar için doğrulamak gerekir. Yani buradaki ϵ çok küçük (ama gene de pozitif) bir sayı olarak algılanmalıdır.

Tanımdaki N sayısı, ϵ'a göre değişir: ϵ küçüldükçe N'yi daha büyük almak zorunda kalabiliriz. ϵ ne kadar küçükse, x_n terimlerinin $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ aralığına düşmesi zorlaşır ve gecikebilir. Örneğin, $\epsilon_0 = 0{,}001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, $\epsilon_1 = 0{,}00001$ için artık $N = 10.000$ yetmeyebilir, N'yi daha büyük, örneğin 100.000 almak gerekebilir. Kısaca söylemek gerekirse, N, ϵ'a göre değişir.

N'nin ϵ'a bağımlı olduğunu görsel olarak göstermek için, kimileyin N yerine N_ϵ yazılır.

Elbette, eğer bir ϵ için, (*) önermesini sağlayan bir N_ϵ doğal sayısı bulunmuşsa, bu N_ϵ sayısından büyük N'ler de (*) önermesini sağlarlar.

Dikkat: Bir dizinin a'ya yakınsaması için, amaç, verilmiş her $\epsilon > 0$ için (*) önermesini sağlayan en küçük N doğal sayısını bulmak değildir. Böyle bir en küçük N doğal sayısı vardır elbette ama çoğunlukla bulması ya da ifade etmesi çok zordur (ve gereksizdir). Amaç, sadece (*) önermesini sağlayan bir N'nin olduğunu bulmaktır. Bu önemli. Bir dizinin bir sayıya yakınsadığını kanıtlamak aslında bu yüzden zordur. ϵ verildiğinde, (*) önermesini doğrulayan tek bir N doğal sayısı olsaydı (rüyada mesela!), eminim kanıtlar çok daha kolay olurdu. Ama maalesef N'yi seçmekte bayağı bir özgürlüğümüz var. İşte bu özgürlüktür çoğu zaman yaratıcılık gerektiren, analizi zorlaştıran ve heyecanlı kılan.

Önemli bir nokta daha: Tanımda $n > N$ yerine $n \geq N$ ve $|x_n - a| < \epsilon$ yerine $|x_n - a| \leq \epsilon$ veya $|x_n - a| < \epsilon/2$ de yazabilirdik, kavram değişmezdi. Bu, belki küçük bir ayrıntıdır, ama okurun neden böyle olduğunu anlamasında çok yarar vardır. Gerekirse saatlerini versin bu ince noktaya, değer çünkü.

Birçok yakınsama örneği vereceğiz birazdan. Ama şimdi bir yakınsama kanıtına nasıl başlanacağını görelim.

Diyelim $(x_n)_n$ sayı dizisinin a'ya yakınsadığını göstermek istiyorsunuz. Demek ki her $\epsilon > 0$ için bir şey kanıtlamanız gerekiyor. O zaman hemen rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı seçin. Yani kanıtınız,

$$\epsilon > 0, \textit{ herhangi bir pozitif sayı olsun}$$

sözleriyle başlamalıdır. Kanıtın bu birinci tümcesi yanlış olamaz. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacaksınız. N'yi kafadan atarak hemen bulmaya çalışmayın, genellikle başaramazsınız.

$$|x_n - a| < \epsilon$$

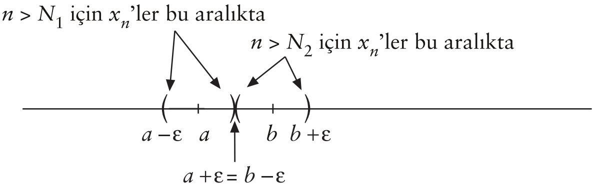
eşitsizliğinin doğru olması için n'nin en az kaç olması gerektiğini bulmak için $|x_n - a|$ ifadesiyle oynamalısınız. Örneklerle her şey daha açık olacak.

4.3 Limitin Biricikliği

İlk sonucumuz, bir dizinin limiti - eğer varsa - biricik olduğunu söyleyecek; yani bir dizi iki farklı sayıya yakınsayamaz.

Önsav 4.2. *Bir dizi en fazla bir sayıya yakınsayabilir. Yani bir dizinin en fazla bir limiti olabilir.*

Kanıt: Hem a hem de b sayılarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, eğer $a \neq b$ ise, $(x_n)_n$ dizisinin hem a'ya hem de b'ye aynı zamanda çok çok yakın olamayacağını kullanacağız elbette. Aşağıdaki şekil kanıtımızı resmediyor.



Ve can alıcı soru: $n > \max\{N_1, N_2\}$ için x_n nerede?

Üstteki resimden izleyelim. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım. $\epsilon = |a-b|/2$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \epsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayı olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned}|a-b| &= |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |a-x_n| + |x_n-b|\\ &= |a-x_n| + |b-x_n| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a-b|,\end{aligned}$$

yani $|a-b| < |a-b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir sayı kendinden küçük olamaz! □

Bu önsav sayesinde, eğer bir $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa, dizinin yakınsadığı sayıyı

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

olarak gösterme hakkını kazanırız. Bu sayıya $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti*** adı verilir. Eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ ya da } x_n \longrightarrow a$$

yazılır. İnce ama gerekli bir ayrıntı: Buradaki ∞ simgesinin tek başına anlamı yoktur. Burada anlamı olan ve bir anlam verilen,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ifadesinin tümüdür ve bu, "n sonsuza giderken $(x_n)_n$ dizisinin limiti vardır ve bu limit a'dır" ya da "n sonsuza giderken $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsar/gider" diye okunur.

4.4 Örnekler

İleride örneklerimizi çoğaltacağız. Şimdilik en kolay örnekten başlayalım.

Önsav 4.3. *Sabit a dizisi a'ya yakınsar. Daha genel olarak, zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği sayıya yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ dizisi zamanla sabitleşen bir dizi olsun. Yani belli bir göstergeçten sonra, diyelim M göstergecinden sonra dizi hep a olsun: Eğer $n > M$ ise $x_n = a$. Bu dizinin a'ya yakınsadığını göstereceğiz. Rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı seçelim. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacağız. Ama N'yi M almak yeterli. Nitekim, eğer $n > M$ olursa,

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

olur. □

Önsav 4.4. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Kanıt: Herhangi bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı alalım. Öyle bir N doğal sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n \geq N$ için $|1/n - 0| < \epsilon$ olsun, yani $1/n < \epsilon$ olsun, yani $1/\epsilon < n$ olsun, yani, $[1/\epsilon] + 1 \leq n$ olsun. Burada $[x]$, x'in tamkısmıdır (bkz. sayfa 32). Eğer

$$N = [1/\epsilon] + 1$$

alırsak istediğimiz olur. Ne olur ne olmaz diye kontrol edelim. $n > N$ olsun. O zaman,

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\epsilon] + 1} \leq \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon.$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Alıştırmalar

4.10. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

4.11. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ile $\lim_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ önermelerinin eşdeğerliğini kanıtlayın.

4.12. Her n için $x_n \geq 0$ olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n$ limiti varsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{1/2}$$

eşitliğini kanıtlayın.

Yakınsaklığın verdiğimiz tanımına bakılırsa, bir dizinin yakınsak olduğunu bilmek ve hatta kanıtlamak için dizinin limitini bilmek gerekiyor. İleride dizinin limitini bilmeden de dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamanın yöntemlerini bulacağız.

Örneklerimize birkaç satır ara vererek araya önemli bir kavram ve sonuç sokuşturalım:

Arşimet Cisimleri. R sıralı bir cisim olsun. Her $0 < \epsilon \in R$ için, $N\epsilon > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir N doğal sayısı varsa[2] R'ye ***Arşimet cismi*** adı verilir.

Teorem 4.5. $\mathbb{R}$ *bir Arşimet cismidir.*

Kanıt: Kanıt, Önsav 4.4'ün kanıtında gizlidir. Ayrıca Teorem 2.7 olarak da kanıtlanmıştır. □

Örnekler

4.13. Önsav 4.3'ün kanıtının neredeyse aynısı,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

eşitliğini de kanıtlar: Bir $\epsilon > 0$ için, aynen kanıttaki N'yi seçelim:

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

olur. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} 1/2n = 0$ eşitliği de kanıtlanır. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} 1/n! = 0$ olur.

4.14. Biraz daha karmaşık bir limit alıştırması olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini gösterelim. Eşitliğin doğruluğunu kanıtlamadan önce, eşitliğin neden olması gerektiğini anlayalım.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5}$$

ifadesinin payı $n-3$'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, sondaki -3'ün esamesi bile okunmaz. Bir trilyonerin servetinden 3 lira eksilse ne çıkar ki!.. Bu yüzden $n-3$ yerine n yazabiliriz. Paydaya bakalım şimdi. Payda, n^2+n-5'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, n^2, n'den o kadar büyüktür ki, $n-5$ onun yanında çok küçük kalır. Dolayısıyla, n çok büyük olduğunda n^2+n-5 yerine n^2 alabiliriz. Böylece paya n, paydaya n^2 yazarsak,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Bir Excel tablosu yaparak bu iki ifadenin büyük n'ler için birbirine ne kadar yakın olduklarını görebilirsiniz.

Yukarıda yaptığımız tam bir matematiksel kanıt değil, şimdilik. Ama daha sonra (Bölüm 6'da) bu akıl yürütmeyi matematiksel bir kanıt haline dönüştüreceğiz.

---

[2] Her n doğal sayısı ve her $r \in R$ için $nr \in R$ elemanı n üzerine tümevarımla şöyle tanımlanır: $0r = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(n+1)r = nr + r$.

Limitin 0 olduğunu şöyle de tahmin edebilirdik: İfadenin her terimini n^2'ye bölelim.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2}$$

elde ederiz. n çok büyük olduğunda, $1/n$, $3/n^2$ ve $5/n^2$ terimleri o kadar küçük sayılardır ki (bunu biraz önce kanıtlamıştık), bu sayılar yerine 0 yazarsak fazla hata yapmış olmayız! Böylece,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1+1/n-5/n^2} \approx \frac{0-0}{1+0-0} = 0$$

elde ederiz.

Bu da şimdilik pek matematiksel değil. (İleride olacak ama.) Eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0.$$

Her zamanki gibi pozitif bir $\epsilon > 0$ sayısı seçerek başlıyoruz. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > N$ için,

$$\left|\frac{n-3}{n^2+n-5} - 0\right| \leq \epsilon$$

olacak. Yani yukarıdaki eşitsizliğin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Soldaki ifadeyle oynayacağız. Soldaki ifadeyi büyüteceğiz ama bunu yaparken n'yi büyüterek yeni ifadeyi dilediğimiz kadar küçültebileceğimize emin olacağız. Hesaplara başlıyoruz. Önce n'yi 3'ten büyük alırsak hem pay hem de payda pozitif olur ve mutlak değer işaretinden kurtuluruz:

$$\left|\frac{n-3}{n^2+n-5} - 0\right| = \frac{n-3}{n^2+n-5}.$$

Eğer paydaki $n-3$ yerine n yazarsak daha büyük bir ifade buluruz elbet:

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5}.$$

Şimdi sağdaki ifadenin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Sağdaki ifadeyi büyütmeye devam ediyoruz, ama çok az büyüteceğiz.

Eğer n'yi 5'ten büyük alırsak, paydada da bulunan $n-5$ pozitif olur ve o $n-5$'i silersek payda küçüleceğinden ifade büyür:

$$\frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2}.$$

En sağdaki ifade $1/n$'ye eşit. Demek ki n'yi, $1/n$ sayısı ϵ'dan küçük olacak biçimde seçmek yeterli. Bunun da Arşimet Özelliği sayesinde mümkün olduğunu biliyoruz. Şimdi bir satırlık kanıtımızı yazabiliriz:

$\epsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $N > 5$ sayısı $1 < N\epsilon$ eşitsizliğini sağlasın. Şimdi, her $n > N$ için,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

4.15. $r \in \mathbb{R}$ ve $q \in \mathbb{Q}^{>0}$ iki sabit sayı olsun. $\lim_{n\to\infty} r/n^q = 0$ eşitliğini gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük n'ler için $|r/n^q - 0| < \epsilon$ eşitsizliğinin, yani $n > (|r|/\epsilon)^{1/q}$ eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermek istiyoruz. N'yi $(|r|/\epsilon)^{1/q}$ sayısından büyük herhangi bir doğal sayı alırsak, bu N'den büyük her n doğal sayısı için $|r/n^q - 0| < \epsilon$ olur. □

4.16. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki dizi olsun. Şu varsayımları yapalım:*
a. *Yeterince büyük n göstergeçleri için $a_n \leq b_n$.*
b. *$(b_n)_n$ dizisi 1'e yakınsar.*
c. *Her $a < 1$ için öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için $a \leq a_n$.*
Bu durumda $(a_n)_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını kanıtlayın.
Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun.
(a) varsayımına göre, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N$ için $a_n \leq b_n$ olur.
(b) varsayımına göre öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için $b_n < 1 + \epsilon/2$ olur.
(c) varsayımına göre öyle bir N_3 vardır ki, her $n > N_3$ için $1 - \epsilon/2 \leq a_n$ olur.
Şimdi $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ olsun. Her $n > N$ için

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < a_n \leq b_n < 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

ve dolayısıyla $1 - a_n < \epsilon$ olur. □

4.17. *$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $|x - a| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ olduğunu varsayalım. O zaman x'e yakınsayan bir A-dizisinin varlığını kanıtlayın.*
Kanıt: Her $n > 0$ için, $|x - a_n| < \frac{1}{n+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $a_n \in A$ seçelim. $(a_n)_n$ dizisinin x'e yakınsadığının kanıtını okura bırakıyoruz.

4.18. *A, $B \subseteq \mathbb{R}$ olsun. B'nin her elemanının bir A-dizisinin limiti olduğunu varsayalım. Yakınsak her B-dizisinin limitinin bir A-dizisinin limiti olduğunu kanıtlayın.*
Kanıt: $(b_n)_n$ yakınsak bir B-dizisi olsun. Her $n > 0$ için b_n'ye yakınsayan bir A-dizisi vardır. Demek ki

$$|b_n - a_n| \leq \frac{1}{n}$$

eşitliğini sağlayan bir $a_n \in A$ vardır. $(a_n)_n$ dizisinin $\lim_{n\to\infty} b_n$ sayısına yakınsadığını kanıtlamayı okura bırakıyoruz. □

Alıştırmalar

4.19. Aşağıdaki eşitlikleri limitin tanımına başvurarak kanıtlayın.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2(n+1)^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{2(n+1)^2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n+5}{3(2n+1)^2} = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{-15n^2-4n+5}{2(3n-5)^2} = -\frac{5}{6}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3+4\cdot 5^n}{2-3\cdot 5^{n+1}} = -\frac{4}{15}.$$

4.20. $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Her pozitif n doğal sayısı için, $(a - 1/n, a + 1/n) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \varnothing$ varsayımını yapalım. Bu durumda A kümesinde, herhangi iki terimi birbirinden farklı bir $(x_n)_n$ dizisinin varlığını kanıtlayın. Bu dizi elbette a'ya yakınsar.

Iraksak iki dizi örneği verelim.

Örnekler

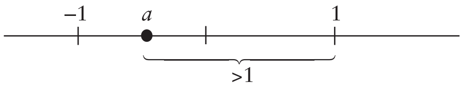
4.21. $x_n = (-1)^n$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi şöyle başlar:

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

ve böyle devam eder. Bu dizinin limiti yoktur, çünkü a ne olursa olsun, ϵ sayısını 1'e eşit alırsak, her n için,

$$\text{ya } |x_{2n} - a| \geq \epsilon \text{ ya da } |x_{2n+1} - a| \geq \epsilon$$

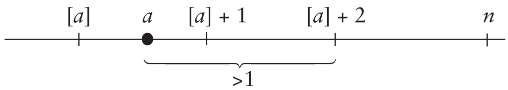
olur (bkz. aşağıdaki şekil); demek ki dizinin limiti a olamaz.



4.22. Yakınsamayan bir başka dizi örneği:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

diye başlayan ve $y_n = n$ kuralıyla tanımlanan dizidir, çünkü a ne olursa olsun, $\epsilon = 1$ ise, her $n > [a] + 2$ için, $|y_n - a| \geq \epsilon$ olur (bkz. aşağıdaki şekil) ve dizi herhangi bir sayıya yakınsayamaz.



Yakınsaklığın tanımı üzerinde biraz daha duralım çünkü yakınsaklığın ve benzer kavramların tanımını anlayıp özümsemek matematik eğitiminin aşağı yukarı üçte birini teşkil eder.

Limitin tanımını şöyle değiştirebiliriz:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $m > 0$ doğal sayısı için,

$$(**) \qquad n > N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{1}{m}$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) "a'ya ***yakınsar***" ya da "a, $(x_n)_n$ ***dizisinin limitidir***" denir.

Bu tanımla eskisinden farklı bir kavram elde edilmez. Birinci tanımla $(x_n)_n$ dizisinin limiti a ise, $\epsilon = 1/m$ alarak, bu ikinci tanımla da $(x_n)_n$ dizisinin limitinin a olduğunu görürüz. Şimdi, $(x_n)_n$ dizisinin limitinin bu ikinci tanıma göre a olduğunu varsayalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. m doğal sayısı, $m\epsilon > 1$ eşitsizliğini sağlasın (Arşimet Özelliği, Teorem 2.7) ve N'yi (**) önermesi m için doğru olacak şekilde seçelim. O zaman, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \frac{1}{m} < \epsilon$$

olur. Daha genel bir sonuç aşağıdaki Alıştırma 4.26'da bulunabilir.

Örnek 4.23. *Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlıysa ve $a = \sup A$ ise, terimleri A'da olan ve a'ya yakınsayan bir dizi vardır. Dilersek bu diziyi artan (yani bizim terminolojimizle azalmayan) seçebiliriz.*

Kanıt: Her $m > 0$ doğal sayısı için, $a - 1/m < a$ olduğundan, $a - 1/m$ sayısı A'nın üstsınırı değildir. Demek ki A'da $a - 1/m < a_m \leq a$ eşitsizliklerini sağlayan bir a_m noktası vardır. Demek ki $|a_m - a| = a - a_m < 1/m$ ve her $n > m$ için $|a_n - a| < 1/n < 1/m$ olur. Yukarıdaki yakınsaklık tanımındaki (**) formülünde $N = m$ almak yeterli.

Şimdi de dizinin artan (yani azalmayan) olarak seçilebileceğini gösterelim. Eğer $a \in A$ ise sabit a dizisi işimizi görür. Bundan böyle $a \notin A$ varsayımını yapalım. a_1'i üstteki paragrafta olduğu gibi seçtikten sonra $a_{m+1} \in A$ terimini m üzerine tümevarımla,

$$a - \min\{1/m, a - a_m\} < a_{m+1}$$

eşitsizliği doğru olacak biçimde seçelim. O zaman,

$$a_m = a - (a - a_m) \leq a - \min\{1/m, a - a_m\} < a_{m+1}$$

olur. □

Son olarak Teorem 4.1'i kanıtlayalım.

Teorem 4.1'in Kanıtı: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ kuyrukları aynı olan iki dizi olsun. Bu iki diziden ilk birkaç terimi atarak her ikisini de aynı $(z_n)_n$ dizisine dönüştürebiliriz. Demek ki $(x_n)_n$ dizisinden ilk birkaç terimi attığımızda elde edilen $(z_n)_n$ dizisinin yakınsaklığının ve yakınsaksa limitinin değişmediğini göstermemiz gerekiyor. Belli bir A doğal sayısı için $z_n = x_{n+A}$ olsun. a, $(x_n)_n$ dizisinin limiti olsun. Bir $\epsilon > 0$ sayısı alalım. N sayısı, her $n > N$ için, $|x_n - a| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilmiş olsun. O zaman, $n > N$ için, $n+A > N$ olduğundan,

$$|z_n - a| = |x_{n+A} - a| < \epsilon$$

olur. Benzer yöntemle, yakınsak bir $(z_n)_n$ dizisinin başına terimler ekleyerek elde edilen $(x_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve limitin değişmediğini kanıtlayabiliriz. □

Verilen tanıma göre, bir dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamak için dizinin limitini bilmek gerekir. İleride dizinin limitini bilmeden de dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamanın yöntemlerini bulacağız.

Alıştırmalar

4.24. $A \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir küme olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in A$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

4.25. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \mathbb{Z}$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

4.26. $(e_n)_n$, 0'a yakınsayan bir dizi olsun. $(x_n)_n$ bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $m > 0$ doğal sayısı için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < |e_m|$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsadığını kanıtlayın.

4.27. $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $a \in \mathbb{R}$ ise $(ax_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = a \lim_{n\to\infty} x_n$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.28. $(x_n)_n$, 0'a yakınsayan bir diziyse ve her n göstergeci için $|y_n| \leq |x_n|$ ise, $(y_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

4.29. Eğer $(x_n)_n$ yakınsak bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$$

eşitliğini kanıtlayın. Bunun tersi doğru mudur?

4.30. Eğer $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(|x_n|)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını gösterin.

4.31. $(x_n)_n$, yakınsak bir dizi olsun ve her n göstergeci için $a \le x_n$ olsun. $a \le \lim_{n\to\infty} x_n$ eşitsizliğini kanıtlayın. Her n için $a < x_n$ eşitsizliğine rağmen $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ eşitliğinin olabileceğini gösterin.

4.32. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$, aynı sayıya yakınsayan iki dizi olsun. $z_{2n} = x_n$ ve $z_{2n+1} = y_n$ olsun. $(z_n)_n$ dizisinin de aynı sayıya yakınsadığını kanıtlayın.

4.33. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$, iki farklı sayıya yakınsayan iki dizi olsun. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ kesişiminin sonlu olduğunu kanıtlayın.

4.34. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ eşdeğerliğini kanıtlayın.

4.35. $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi ve

$$y_n = \begin{cases} x_{n-1} & \text{eğer } n \text{ tekse} \\ x_{n+1} & \text{eğer } n \text{ çiftse} \end{cases}$$

olsun. $(y_n)_n$ dizisinin de yakınsak bir dizi olduğunu ve her iki dizinin de limitinin aynı olduğunu kanıtlayın.

4.36. $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi olsun. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, artan bir fonksiyon olsun. $y_n = x_{f(n)}$ olsun. $(y_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve her iki dizinin de limitinin aynı olduğunu kanıtlayın. (Bir sonraki alıştırma bundan daha da genel bir sonucu kanıtlamanızı istiyor.)

4.37. $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi olsun. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, her $n \in \mathbb{N}$ için, $f^{-1}(n)$ kümesinin sonlu olduğu bir fonksiyon olsun. $y_n = x_{f(n)}$ olsun. $(y_n)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve her iki dizinin de limitinin aynı olduğunu kanıtlayın.

4.38. Artan ve üstten sınırlı bir dizinin en küçük üstsınırına yakınsadığını kanıtlayın. Yani $(x_n)_n$ dizisi, sabit bir b için her n için $x_n \le x_{n+1} \le b$ eşitsizliklerini sağlıyorsa ve

$$s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ eşitliğini kanıtlayın.

4.39. $(I_n)_n$ küçülen, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \supseteq I_{n+1}$ içindeliğini sağlayan kapalı aralıklar dizisi olsun. $\bigcap_n I_n$ kesişiminin boşküme olamayacağını gösterin.

4.40. Alıştırma 4.39'un $\mathbb{Q}$ için yanlış olduğunu kanıtlayın. (Tanım gereği, $\mathbb{Q}$'nün bir aralığının uç noktaları da $\mathbb{Q}$'de olmalıdır.)

4.41. Alıştırma 4.39'un $(a, b]$ türünden yarı kapalı aralıklar için yanlış olduğunu kanıtlayın.

4.42. Eğer $x_n \ge 0$ ise ve $\lim_{n\to\infty} x_n$ varsa, o zaman,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{1/2}$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.43. a_0 ve $a > 0$ olsun. $n \ge 0$ için

$$a_{n+1} = \frac{a}{1 + a_n}$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin $x^2 + x - a = 0$ denkleminin pozitif köküne yakınsadığını kanıtlayın.

4.44. (Newton) $a > 0$ olsun. Eğer $x > \sqrt{a}$ ise

$$\sqrt{a} < \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) < x$$

olduğunu kanıtlayın. Buradan yola çıkarak, eğer $x_0 > \sqrt{a}$ ise ve

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

tanımını yaparsak, $(x_n)_n$ dizisinin azalarak $\sqrt{a}$ sayısına yakınsadığını gösterin.

Kısa Tarih Notu. MÖ 5'inci yüzyılda Elea'lı filozof Zenon (M.Ö. 490-430) bir mesafeyi sonsuz defa 2'ye bölerek limit kavramını -adını vermeden- ilk kez dile getirmiştir diyebiliriz. Demokrit (MÖ 460-370) şeylerin sonsuza kadar bölünemeyeceğini düşünerek atom kavramını ortaya atmıştır. Arşimet (MÖ 287-212) dizilerle ve limit kavramıyla bir parabolün içerdiği alanı hesaplamış ve π sayısının o ve ileriki çağlarda rekor sayılabilecek yaklaşık değerlerini bulmuştur. Bugünkü limit kavramını Bolzano (1816'da) ve Cauchy (1821'de) birbirinden bağımsız olarak bulmuşlardır. Aynı kavramı Bolzano'nun da bulduğu çok daha sonradan anlaşılmıştır.

5. Yakınsak Dizilerle Sıralama ve İşlemler

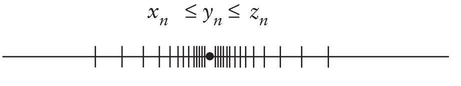
5.1 Yakınsak Diziler ve Sıralama

Bu bölümde, gerçel sayıların sıralamasıyla dizilerin limitleri arasındaki ilişkiyi kısaca irdeleyeceğiz. Bu ilişkinin özü aşağıdaki teoremde gizlidir.

Teorem 5.1 (Sandviç Teoremi)**.** *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun.*

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

eşitsizlikleri belli bir göstergeçten sonra doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlarsa, $(y_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve diğer dizilerle aynı sayıya yakınsar.



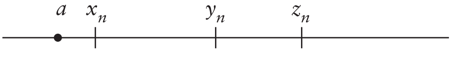
Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri a'ya yakınsasınlar. $(y_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız, yani $\epsilon > 0$, herhangi bir pozitif sayıysa,

$$|y_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin her $n > N$ için doğru olduğu bir N sayısı bulacağız. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|y_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız.



Bunun için $|y_n - a|$ ifadesiyle oynayacağız. Teoremin önermesindeki eşitsizlikler M'den büyük göstergeçler için doğru olsun. Hesaplarda kolaylık olması için $n > M$ alalım. Bu kısıtlama yetmez ama bu sayede, hiç olmazsa,

$$\begin{aligned} |y_n - a| &= |a - x_n + x_n - y_n| \leq |a - x_n| + |x_n - y_n| \\ &= |a - x_n| + (y_n - x_n) \leq |a - x_n| + (z_n - x_n) \\ &\leq |a - x_n| + |z_n - a| + |a - x_n| = 2|a - x_n| + |z_n - a| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki en sondaki

$$2|a - x_n| + |z_n - a|$$

ifadesini ϵ'dan küçük yapmak yeterli. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için

$$|x_n - a| = |a - x_n| < \epsilon/3$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için

$$|a - z_n| < \epsilon/3$$

olur. $N = \max\{M, N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$|y_n - a| = 2|a - x_n| + |z_n - a| < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

elde ederiz ve kanıt böylece tamamlanır. □

Sandviç Teoremi'nin İkinci Kanıtı: Bir $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. a, $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizilerinin limiti olsun. O zaman büyük n'ler için, hem $a - \epsilon < x_n$ hem de $z_n < a + \epsilon$ olur. (Neden?) Demek ki belki biraz daha büyük n'ler için

$$a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \epsilon$$

olur. Bu büyük n'ler için $a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$, yani $|y_n - a| < \epsilon$ olur. □

Örnekler

5.1. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$ *eşitliğini kanıtlayın.*
Kanıt: Örnek 3.49'a göre,

$$\frac{2^n n!}{n^n} < 3.$$

Demek ki $n \geq 4$ için,

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} < \frac{3}{2^n} \leq \frac{3}{n^2}.$$

(Neden?) En sağdaki terim 0'a yakınsadığından, Sandviç Teoremi'ne göre istenen limit 0 olmak zorundadır. Meraklı okur bu örneği tek başına, Örnek 3.49'u kullanmadan yapmaya çalışmalıdır.

5.2. *Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 0.$$

Kanıt: Gene Sandviç Teoremi'ni kullanacağız. Ama Örnek 3.5 de yardım edecek. Önce

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

eşisizliğini gözlemleyelim. Sonra da Örnek 3.5'te yeterince büyük n sayıları için elde edilen

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \leq \frac{1}{n}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

eşitsizliğini görelim. Demek ki,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Birinci ve sonuncu diziler 0'a gittiğinden, ortadaki terim de 0'a gider. □

Alıştırmalar

5.3. Terimleri

$$\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}}{n}$$

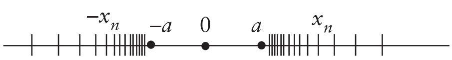
olan dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

5.4. Terimleri

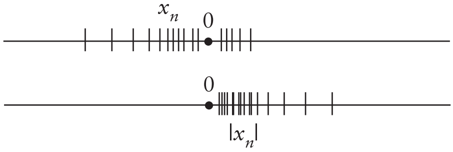
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

olan dizinin 1/2 ile 1 arasında değer aldığını ve arttığını kanıtlayın.

Önsav 5.2. i. *$(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, $(-x_n)_n$ dizisinin $-a$'ya yakınsaması gerek ve yeter koşuldur.*



ii. *$(x_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsaması için, $(|x_n|)_n$ dizisinin 0'a yakınsaması gerek ve yeter koşuldur.*



iii. *$(x_n)_n$, 0'a yakınsayan bir diziyse ve yeterince büyük n göstergeçleri için (yani belli bir M göstergecinden sonra) $|y_n| \leq |x_n|$ ise, $(y_n)_n$ dizisi de 0'a yakınsar.*

iv. *$(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, $(|x_n|)_n$ dizisi $|a|$'ya yakınsar.*

Kanıt: i. Önermenin sadece bir yönünü kanıtlamak yeterli elbette. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın ve $\epsilon > 0$ olsun. N, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlatan göstergeç olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$|-x_n - (-a)| = |-x_n + a| = |x_n - a| < \epsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır.

ii. $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ olduğundan, yukarıdakinden ($a = 0$ alın) ve Sandviç Teoremi'nden, $(|x_n|)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa, $(x_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığı anlaşılır. Şimdi $(x_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. N, her $n > N$ için,

$$|x_n| = |x_n - 0| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlatan göstergeç olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$\big||x_n| - 0\big| = \big||x_n|\big| = |x_n| < \epsilon$$

olur ve kanıtımız tamamlanır.

iii. Yeterince büyük n'ler için $0 \leq |y_n| \leq |x_n|$ olduğundan ve sabit 0 dizisi 0'a yakınsadığından, Sandviç Teoremi'nden $(y_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığı çıkar.

iv. $\epsilon > 0$ olsun. Yeterince büyük n göstergeçleri için,

$$\big||x_n| - |a|\big| < \epsilon$$

eşitsizliğini göstermeliyiz. Önsav 1.1.ix'a göre,

$$\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a|$$

olduğundan ve sağdaki $|x_n - a|$ terimi yeterince büyük n göstergeçleri için ϵ'dan küçük olduğundan, kanıtımız tamamlanmıştır. □

Öte yandan (iv)'ün tersi yanlıştır. Örneğin, $x_n = (-1)^n$ ise $(|x_n|)_n$ dizisi 1'e yakınsar ama $(x_n)_n$ dizisi hiçbir sayıya yakınsamaz.

Şimdi de yakınsak bir dizinin terimlerinin sınırsız bir biçimde artıp azalamayacağını kanıtlayalım.

Teorem 5.3. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır, yani eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa, o zaman öyle bir B vardır ki, her n için $|x_n| < B$ olur.*

Kanıt: Kanıtın anafikri çok basit: Eğer bir dizi a'ya yakınsıyorsa, bu dizinin terimleri a'dan sürekli uzaklaşamazlar...

Bir a sayısına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. Yakınsamanın tanımında ϵ'u 1'e eşit alalım. 1, 0'dan büyük bir sayı olduğundan buna hakkımız var. O zaman dizinin terimleri belli bir N göstergecinden sonra $(a-1,\, a+1)$ aralığına düşer, yani her $n > N$ için, $x_n \in (a-1,\, a+1)$ olur.

Geriye sonlu sayıda $x_0,\, x_1, \ldots, x_N$ terimi kalır. Bunlar da sınırlı bir aralığa sığarlar elbette. Daha biçimsel olalım ve

$$\begin{aligned} A &= \min\,\{x_0,\, x_1, \ldots, x_N,\, a\} - 1,\\ B &= \max\,\{x_0,\, x_1, \ldots, x_N,\, a\} + 1 \end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. O zaman her x_n terimi (A, B) aralığına düşer. Demek ki dizi sınırlıdır. □

Demek ki sınırlı olmayan bir dizi ıraksak olmak zorundadır. Örneğin,

$$0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4, \ldots$$

doğal sayı dizisi ıraksaktır. Sınırlı olmayan ama sınırlı olmadığı bir önceki dizi kadar bariz olmayan başka diziler de vardır, örneğin terimleri

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

olan dizi her sayıyı aşar ama çoook uzun bir süre sonra aşar, o kadar ki üşenmeyip hesap yaparsak dizinin sınırlı olduğunu bile sanabiliriz. Demek ki bu dizi de ıraksaktır.

Öte yandan, her sınırlı dizi yakınsak değildir, örneğin,

$$1,\, -1,\, 1,\, -1,\, 1,\, -1, \ldots$$

diye devam eden dizi sınırlıdır ama yakınsak değildir.

Alıştırmalar

5.5. Sınırlı diziler kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

5.6. $(x_n)_n$, hiçbir terimi 0 olmayan bir dizi olsun. $(1/x_n)_n$ dizisi illa sınırlı olmak zorunda mıdır?

5.7. $(x_n)_n$, hiçbir terimi 0 olmayan bir dizi olsun. $(1/x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için,

her n için, $0 < \delta < |x_n|$ eşitsizliğini sağlayan n'den bağımsız bir $\delta > 0$ vardır

koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

5.8. $(x_n)_n$ dizisi sınırlıysa ve $(y_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa, $(x_n y_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

5.9. $(x_n)_n$ dizisi sınırlıysa ve $(y_n)_n$ dizisi yakınsaksa, $(x_n y_n)_n$ dizisi de yakınsak olmak zorunda mıdır?

5.10. $A \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı bir küme olsun. O zaman tüm terimleri A'da olan öyle bir $(a_n)_n$ dizisi vardır ki $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$ olur. Kanıtlayın. Dizinin azalmayan bir dizi olarak seçilebileceğini gösterin.

5.2 Yakınsak Dizi Aritmetiği

Bu bölümde yakınsak dizilerle toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri arasındaki ilişkiyi göreceğiz.

Teorem 5.4. *İki yakınsak dizinin toplamı, farkı, çarpımı, (mümkün olduğunda) kesirli bir kuvveti ve birbirine bölümü de yakınsaktır ve dizilerin limiti tahmin edilen sayıdır. Daha net bir ifadeyle,* $(x_n)_n$ *ve* $(y_n)_n$ *iki yakınsak diziyse ve* $q \in \mathbb{Q}$ *ise* $(x_n + y_n)_n$, $(x_n - y_n)_n$, $(x_n y_n)_n$ *dizileri de yakınsaktır ve*
i. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$,
ii. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} yn$,
iii. $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n)$,
eşitlikleri geçerlidir. Dolayısıyla her $r \in \mathbb{R}$ *ve* $k \in \mathbb{N}$ *için,* $(rx_n)_n$ *ve* $(x_n^k)_n$ *dizileri de yakınsaktır ve*
iv. $\lim_{n\to\infty} rx_n = r\,(\lim_{n\to\infty} x_n)$ *ve* $\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k$ *olur.*
v. *Ayrıca eğer* $(y_n)_n$ *dizisinin her terimi* 0*'dan farklıysa ve* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *ise, o zaman* $(x_n/y_n)_n$ *dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

olur.
vi. *Ayrıca* x_n^q *ve* $(\lim_{n\to\infty} x_n)^q$ *sayıları tanımlı olduğunda* $(x_n^q)_n$ *dizisi yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^q = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^q$$

olur.

Kanıt: Bu teoremin kanıtı biraz uzun sürecek, sayfa 104'te bitecek. Pek teoremin zorluğundan kaynaklanmayacak bu uzunluk, biz de özellikle uzun uzun anlatarak, engelleri işaret ederek, zorluklara parmak basarak, ayrıntılara girerek kanıtlayacağız. Teoremi kanıtlarken kanıtlayacağımız önsavlar da kendi başlarına önemli olacaklar.

Teorem 5.4.i'in Kanıtı: Önce,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğini kanıtlayalım. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki yakınsak dizi olsun. Bu dizilerin sırasıyla a ve b sayılarına yakınsadıklarını varsayalım.

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$$

eşitliğini kanıtlayacağız.

Kanıtımız her zamanki gibi başlayacak: $\epsilon > 0$, herhangi bir sayı olsun.

$$(x_n + y_n)_n$$

dizisinin $a + b$ sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$$

olsun. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukarıdaki eşitsizliğe bir biçimde

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Tekrar:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için n'nin ne kadar büyük seçilmesi gerektiğini bulacağız. Her zaman olduğu gibi sol taraftaki ifadeyle oynayacağız. O ifadeden birazcık daha büyük bir ifade bulacağız. Bulduğumuz bu büyük ifadeyi,

1. Varsayımlarımızı kullanacağımız biçimde ve

2. n'yi yeterince büyük seçerek dilediğimiz kadar küçülteceğimizden emin olacağımız biçimde değiştireceğiz.

Başlayalım: Üçgen eşitsizliğinden

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b|$$

elde ederiz. Şimdi, $|(x_n + y_n) - (a + b)|$ ifadesi yerine,

$$|x_n - a| + |y_n - b|$$

ifadesini ϵ'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Eğer,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

ifadelerinin her biri $\epsilon/2$'den küçük olursa, toplamları ϵ'dan küçük olur. Bunu yapmasını biliyoruz, çünkü x_n'nin limiti a ve y_n'nin limiti b...

x_n'nin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 doğal sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \epsilon/2$$

olur. Biz her iki eşitsizliğin birden doğru olmasını istediğimizden, n'yi hem N_1'den hem de N_2'den büyük almalıyız. Dolayısıyla, eğer $N = \max\{N_1, N_2\}$ ise, $n > N$ olduğunda, n, hem N_1'den hem de N_2'den büyük olur ve yukarıdaki iki eşitsizliğin ikisi birden doğru olur.

Teorem 5.4.ii'nin Kanıtı: Önsav 5.2.i'den ve yukarıdakinden çıkar. Ama yukarıdaki kanıt yöntemini toplama yerine çıkarma işlemine de uygulayabiliriz: $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, a ve b yukarıdaki gibi olsunlar. $\epsilon > 0$, herhangi bir sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (a - b)| &= |(x_n - a) + (b - y_n)| \leq |x_n - a| + |b - y_n| \\ &= |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

olur. İkinci eşitliğin de kanıtı tamamlanmıştır.

Teorem 5.4.iii'ün Kanıtı: Üçüncü eşitliğin kanıtı ne yazık ki yukarıdakiler kadar doğrudan çıkmıyor. Biz gene de tüm iyimserliğimizi takınıp yukarıdaki gibi doğrudan bir kanıta girişelim.

$(x_n)_n$, $(y_n)_n$, a ve b yukarıdaki gibi olsunlar. $(x_n y_n)_n$ dizisinin ab sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı seçildiğinde, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_n y_n - ab| < \epsilon$$

olsun. Bir başka deyişle, $|x_n y_n - ab| < \epsilon$ eşitsizliğinin geçerli olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışacağız. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek, $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukarıdaki

$$|x_n y_n - ab| < \epsilon$$

eşitsizliğine bir biçimde $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını sokuşturabilmeliyiz, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim. Her zamanki gibi sol taraftaki $|x_n y_n - ab|$ ifadesiyle oynamalıyız. Bu ifadeyi hafifçe büyüterek, işin içine $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ ifadelerini sokmalıyız. Bunu yapmak için matematikte sık sık kullanılan bir hile vardır. İşte o hile

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \\ &\leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|.\end{aligned}$$

Şimdi en sağdaki $|x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|$ toplamını ϵ'dan küçük yapmalıyız. Ama bu mümkün müdür? Her iki

$$|x_n||y_n - b| \text{ ve } |x_n - a||b|$$

terimini de $\epsilon/2$'den küçük yapabilirsek, o zaman bunların toplamları da

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

sayısından küçük olur ve kanıtımızı başarıyla tamamlamış oluruz.

Önce görece kolay olan $|x_n - a||b|$ terimini (n'yi yeterince büyük yaparak) $\epsilon/2$'den küçük yapalım. Bunun için, $|x_n - a|$ terimini $\epsilon/2|b|$'den küçük yapmak yeterli. Ama dikkat, eğer $|b| = 0$ ise, $|b|$'ye bölemeyiz... Hiç önemli değil! Bu sorunun çözümü gayet basit:

$$|x_n - a||b| < |x_n - a|(1 + |b|)$$

olduğundan, $|x_n - a|$ terimini

$$\frac{\epsilon}{2(1 + |b|)}$$

sayısından küçük yapmak yeterli! Bunu yapabilir miyiz? Evet! Bu sayı 0'dan büyük olduğundan, öyle bir N_1 sayısı vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2(1 + |b|)}$$

eşitsizliği doğrudur.

Şimdi, $|x_n||y_n - b|$ terimini de $\epsilon/2$'den küçük yapmaya çalışmalıyız.

$$|y_n - b|$$

terimini istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu yetmez. Çünkü bu terimin yanına yapışmış bir de $|x_n|$ terimi var. Eğer $|x_n|$ çok büyürse, o zaman bu terimi, küçüldüğünü bildiğimiz $|y_n - b|$ terimiyle çarptığımızda, çarpımın çok küçüleceğinden pek emin olamayız. Örneğin, $|y_n - b|$ terimi $1/n$ gibi küçülebilir ama $|x_n|$ terimi n gibi artabilir. O zaman da çarpımları olan $|x_n||y_n - b|$ terimi n büyükken 1 civarında dolanır durur ve hiçbir zaman $\epsilon/2$ kadar küçülemez. (ϵ'un küçük bir sayı olduğunu bir kez daha anımsayın.)

Neyse ki böyle bir sorunla karşılaşmayız, çünkü yakınsak bir dizi olduğundan, $(x_n)_n$ dizisi sınırlıdır (Teorem 5.3) ve her $|x_n|$ belli bir $B > 0$ sayısından küçüktür. Demek ki,

$$|x_n||y_n - b| < B|y_n - b|$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi en sağdaki $B|y_n - b|$ ifadesini $\epsilon/2$'dan küçük yapmak yeterlidir. $B|y_n - b|$ ifadesini $\epsilon/2$'den küçük yapmak için ise, $|y_n - b|$ ifadesini

$$\frac{\epsilon}{2B}$$

sayısından küçük yapmak yeterlidir. (Bunu başarabiliriz dostum!)

Ne de olsa bu sayı pozitiftir ve $|y_n - b|$ sayısı yeterince büyük n'ler için bu sayının altına iner: Öyle bir N_2 sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2B}$$

eşitsizliği doğrudur. Demek ki,

$$|x_n||y_n - b| < B|y_n - b| < B\frac{\epsilon}{2B} = \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \le |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| < B|y_n - b| + |x_n - a||b| \\ &< B|y_n - b| + |x_n - a|(1 + |b|) \\ &< B\frac{\epsilon}{2B} + \frac{\epsilon}{2(1 + |b|)}(1 + |b|) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

olur. (iii)'ün kanıtı bitmiştir.

Teorem 5.4.iv'ün Kanıtı: Birincisi için önceki maddede her n için $y_n = r$ almak yeterli. İkinci ise k üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır.

Teorem 5.4.v'in Kanıtı: Eğer aşağıdaki teoremi kanıtlayabilirsek, o zaman (iii)'ten (v) çıkar.

Teorem 5.4'ün kanıtına devam etmeden önce şu sonuca ihtiyacımız var:

Teorem 5.5. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisinin her terimi 0'dan farklıysa ve dizi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

olur. Ayrıca eğer $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(1/x_n)_n$ dizisi ıraksaktır.

Teorem 5.5'i kanıtlamadan önce de iki önsava ihtiyacımız var. Her iki önsavın da kendi başına önemi vardır.

Önsav 5.6. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olur.*

Kanıt: $z_n = x_n - y_n$ tanımını yaparak, kanıtlanmış olan Teorem 5.4.ii'ye göre,

"Eğer $(z_n)_n$ *dizisi c'ye yakınsıyorsa ve belli bir göstergeçten sonra hep $z_n \geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $c \geq 0$ olur*"

önermesini kanıtlamanın yeterli olduğunu görürüz. Tam tersine, c'nin negatif olduğunu varsayalım. Demek ki $c = -|c|$. Şimdi, $n > N_0$ için, $z_n \geq 0$ olsun. Varsayıma göre böyle bir N_0 vardır. Ayrıca $n > N_1$ için,

$$|z_n - c| \leq \frac{|c|}{2}$$

olsun. $(z_n)_n$ dizisi c'ye yakınsadığından böyle bir N_1 vardır; bunu görmek için, yakınsamanın tanımında $\epsilon = |c|/2 > 0$ almak yeterli. Demek ki,

$$-\frac{|c|}{2} \leq z_n - c \leq \frac{|c|}{2}.$$

Dolayısıyla $z_n \leq c + |c|/2$. Şimdi n, hem N_0'dan hem de N_1'den büyük bir göstergeç olsun. O zaman,

$$z_n \leq c + \frac{|c|}{2} = -|c| + \frac{|c|}{2} = -\frac{|c|}{2} < 0,$$

çelişki. □

Önsav 5.7. i. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisi 0'a yakınsamıyorsa, öyle bir N doğal sayısı ve $\delta > 0$ vardır ki, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ olur. Demek ki böyle bir dizinin ancak sonlu sayıda terimi 0'a eşit olabilir.*
ii. *Eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ama 0'a yakınsamıyorsa ve her terimi 0'dan farklıysa, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her n için, $|x_n| > \delta$ olur.*

Kanıt: Önsav 5.2.ii'ye göre, $(x_n)_n$ yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alıp $x_n \geq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın.

Önsav 5.6'ya göre $a \geq 0$ olmalı. Demek ki $a > 0$. Eğer $\epsilon = \frac{a}{2}$ alırsak, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \frac{a}{2}$$

eşitsizliğini, yani

$$-\frac{a}{2} < x_n - a < \frac{a}{2}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir N'nin olduğunu görürüz. Demek ki, $n > N$ için,

$$a - \frac{a}{2} < x_n$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi

$$\delta = \frac{a}{2}$$

alırsak, birinci kısmı kanıtlamış oluruz. İkinci kısma geçelim. Yukarıdaki δ yerine,

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_1|}{2}, \ldots, \frac{|x_N|}{2}, \frac{a}{2}\right\}$$

alalım. Varsayımdan dolayı $\delta > 0$ olur. Ve a, N ve δ'nın tanımlarından dolayı, her n için, $|x_n| > \delta$ olur. □

Teorem 5.5'in Kanıtı: $a \neq 0$ sayısı $(x_n)_n$ dizisinin limiti olsun. $1/a$ sayısının $(1/x_n)_n$ dizisinin limiti olduğunu göstereceğiz. Her zaman olduğu gibi herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı almakla işe başlayalım. Öyle bir N bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \epsilon$$

olsun. $|1/x_n - 1/a|$ ifadesiyle oynayarak, bu ifadenin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Oynamaya başlayalım:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|}.$$

Sağdaki ifadenin payını dilediğimiz kadar küçük yapabiliriz, çünkü $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyor, burada bir sorun yok. Paydadaki a da sabit bir sayı, bu da sorun yaratmaz. Ama x_n sorun yaratabilir, çünkü eğer x_n çok küçülürse, o zaman ifade çok büyüyebilir ve ifadenin ϵ'dan küçük olduğunu kanıtlayamayız. Teoremin doğru olması için $|x_n|$'ler belli bir pozitif sayıdan küçük olmamalı. Bu doğrudur ve $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmamasından kaynaklanır ve bu yukarıdaki önsavda kanıtlanmıştır: Önsav 5.7'ye göre, öyle bir $\delta > 0$ var ki, her n için, $|x_n| > \delta$ olur. Şimdi yukarıdaki hesabı bir adım daha devam ettirebiliriz:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta}.$$

En sağdaki ifadenin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulalım. Bu ifadenin ϵ'dan küçük olması için, $|a - x_n|$, $\epsilon|a|\delta$'dan küçük olmalı ve $\epsilon|a|\delta > 0$ olduğundan bunu yapabiliriz: N, her $n > N$ için,

$$|a - x_n| < \epsilon|a|\delta$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayı olsun. Şimdi N'den büyük her n için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta} < \frac{\epsilon|a|\delta}{|a|\delta} = \epsilon$$

olur. □

Teorem 5.4.v'in kanıtı da böylece tamamlanmış oldu.

Teorem 5.4.vi'nın Kanıtı: (v)'inci kısımdan dolayı teoremi $q > 0$ için kanıtlamak yeterli. Eğer $q \in \mathbb{N}$ ise sonucumuz (iii)'üncü kısımdan tümevarımla kolaylıkla çıkar.

Önce sorunun $(x_n^q)_n$ dizisinin yakınsaklığını kanıtlamak olduğunu gösterelim. Nitekim eğer bu dizi yakınsaksa, pozitif a ve b doğal sayıları için $q = a/b$ yazarsak,

$$\left(\lim_{x\to\infty} x_n^q\right)^b = \lim_{x\to\infty} x_n^a = \left(\lim_{x\to\infty} x_n\right)^a$$

eşitliğinden istediğimiz kanıtlanır.

$x = \lim_{x\to\infty} x_n$ olsun. Önce $x = 0$ varsayımını yapalım. $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N bulalım ki, her $n > N$ için $|x_n| < \epsilon^{1/q}$ olsun; bu durumda $|x_n^q| = |x_n|^q < \epsilon$ olur. Dolayısıyla $(x_n^q)_n$ dizisi de 0'a yakınsar.

Şimdi de dizinin 0'a yakınsamadığını varsayalım. u, $v \in \mathbb{N}$ ve $v \neq 0$ için $q = u/v$ olsun. Önce $u = 1$ alalım. O zaman, $1/v \leq 1$ olduğundan, Sonuç 3.20'ye göre,

$$(x^{-1}x_n)^{1/v} - 1 \leq \frac{x^{-1}x_n - 1}{v}$$

olur. Ama $(x^{-1}x_n)_n$ dizisi 1'e yakınsadığından, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ifadeyi istediğimiz kadar küçük yapabiliriz. Demek ki $((x^{-1}x_n)^{1/v})_n$, yani $(x^{-1/v}x_n^{1/v})_n$ dizisi de 1'e yakınsar, yani $(x_n^{1/v})_n$ dizisi $x^{1/v}$ sayısına yakınsar. Buradan da $(x_n^{u/v})_n$ dizisinin $x^{u/v}$ sayısına yakınsadığı çıkar. □

Teorem 5.4.vi'nın İkinci Kanıtı: (v)'inci kısımdan dolayı teoremi $q > 0$ için kanıtlamak yeterli. (iii)'üncü kısımdan dolayı bir $0 \neq k \in \mathbb{N}$ için $q = 1/k$

alabiliriz. Varsayımdan dolayı $x_n \geq 0$ olmalı. $(x_n)_n$ dizisinin limitine x diyelim. Sandviç teoremine göre $x \geq 0$ olur. Şimdi $\epsilon > 0$ olsun. $\epsilon^k > 0$ olduğundan, varsayıma göre öyle bir N vardır ki, eğer $n > N$ ise, $|x_n - x| < \epsilon^k$ olur. Örnek 3.6'ya göre,

$$|x_n^{1/k} - x^{1/k}| \leq |x_n - x|^{1/k} < \epsilon$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 5.4'ü, "limit alma işlemi toplamaya, çıkarmaya, çarpmaya, bölmeye ve kesirli üs almaya saygı duyuyor" ya da "limit alma işlemi toplamaya, çıkarmaya, çarpmaya ve bölmeye dağılıyor" ya da ya da "limit alma işlemi toplamayla, çıkarmayla, çarpmayla, bölmeyle ve üs almayla uyumlu" gibi ifadelerle ifade edebiliriz.

Örnekler

5.11. $a_n = (-1)^n$ ve $b_n = (-1)^{n-1}(1 + 1/n)$ olsun. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri ıraksaktır ama $(a_n + b_n)_n$, $(a_n b_n)_n$ ve $(a_n/b_n)_n$ dizileri yakınsaktır.

5.12. İki basit örnek:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8}{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{8}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{8}{3} \times 0 = 0.$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{8}{3n} + \frac{7}{n^2}\right) = 5.$$

5.13. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$ limitini bulun.

Çözüm: Limiti alınacak ifadenin "eşleniği" denen şeyle çarpıp bölelim:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} - n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Alıştırmalar

5.14. a_0 ve a_1 verilmiş olsun ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = ua_n + va_{n-1}$ olsun. Eğer $(a_n)_n$ dizisinin limiti varsa ve 0'dan farklıysa, u ve v sayıları hakkında ne söyleyebilirsiniz?

5.15. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)$ limitini bulun.

Şimdi bir polinomu[1] bir dizide değerlendirip, bu değerlerden oluşan dizinin limitine bakalım. Limit alma işlemiyle bir diziyi bir polinomda değerlendirme işlemlerinin yer değiştirebildiklerini göreceğiz, bir başka deyişle bir dizinin limitini alıp değerlendirmekle, diziyi değerlendirip limitini almak aynı sonucu verir:

[1] Polinomun tanımı için bölümün sonuna bakınız.

Teorem 5.8 (Polinomlarla Yakınsaklık)**.** *$(a_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X)$ de herhangi bir polinom olsun. O zaman, $(p(a_n))_n$ dizisi $p(a)$ sayısına yakınsar.*

Eğer $q(X)$ herhangi bir başka polinomsa, $q(a) \neq 0$ ise ve her n için $q(a_n) \neq 0$ ise, o zaman

$$\left(\frac{p(a_n)}{q(a_n)}\right)_n$$

dizisi $p(a)/q(a)$ sayısına yakınsar.

Kanıt: Bu da Teorem 5.4'ün doğrudan bir sonucudur. □

Aşağıdaki alıştırmaların birçoğu çok kolay değildir ve çözümü de her zaman doğal gelmeyebilir. (Yani tek başınıza yapamazsanız moraliniz bozulmasın!) Ancak limit kavramının iyice oturması için her birini ayrı ayrı denemekte ve sonra çözüme bakmakta yarar var.

Örnekler

5.16. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 4n + 5}{4n^2 - 5n + 1}.$$

Çözüm: Payı ve paydayı n^2 sayısına bölerek ve yukarıda kanıtlanan teoremi $a_n = 1/n$ dizisine uygulayarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 4n + 5}{4n^2 - 5n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 4/n + 5/n^2}{4 - 5/n + 1/n^2} = \frac{3}{4}$$

buluruz. □

5.17. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1}\right).$$

Çözüm: Limiti alınacak ifadenin paydalarını eşitleyip elde ettiğimize bakalım:

$$\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} = \frac{n(n+2)(n^2+1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n^2+1)} = \frac{n^3 + n^2 + 2n}{(n+1)(n^2+1)}.$$

Tarafları n^3'e bölersek limitin 1 olduğunu görürüz.

5.18. $0 < q < p$ *iki kesirli sayı olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p - n^q}{(n+1)^p - (n+1)^q} = 1$$

eşitliğini kanıtlayın.

Kanıt: Basit bir hesap:

$$\begin{aligned}
\frac{n^p - n^q}{(n+1)^p - (n+1)^q} &= \frac{n^{p-q} - 1}{(n+1)^p/n^q - (1+1/n)^q} \\
&= \frac{n^{p-q} - 1}{(n+1)^{p-q}(n+1)^q/n^q - (1+1/n)^q} \\
&= \frac{1 - 1/n^{p-q}}{(1+1/n)^{p-q}(1+1/n)^q - (1+1/n)^q/n^{p-q}} \longrightarrow 1.
\end{aligned}$$

Bu konuda Örnek 3.4'e de bakabilirsiniz. Dizi 1'e "alttan yakınsar".

5.19. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

Çözüm: Paydadaki n^2+i sayıları yerine önce n^2+1, sonra da n^2+n koyalım, bakalım bir şeyler çıkacak mı. Önce n^2+1 koyalım:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+i} \le \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1}\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2+1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Demek ki Sandviç Teoremi'ne göre,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+i} \le \frac{1}{2}.$$

Şimdi de n^2+n koyalım:

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+i} \ge \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+n} = \frac{1}{n^2+n}\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2+n}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Gene Sandviç Teoremi'ne göre,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2+i} \ge \frac{1}{2}.$$

Böylece limitin $1/2$ olduğu çıkar. □

5.20. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^i \frac{j}{n^3}.$$

Çözüm: Oldukça kolay ama belki biraz uzunca bir hesap:

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^i \frac{j}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^i j = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n^3}\sum_{i=1}^n (i^2+i)$$

$$= \frac{1}{2n^3}\left(\sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i\right) = \frac{1}{2n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

ve gerisi Teorem 5.8'den kolaylıkla çıkar. (Sonuç $1/6$ çıkar.) □

5.21. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ *ise*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\cdots+a_{n-1}}{n} = \ell$$

eşitliğini kanıtlayın.

Kanıt: $b_n = a_n - \ell$ tanımını yaparak, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ise

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_0+\cdots+b_{n-1}}{n} = 0$$

eşitliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Eğer $M < n$ ise,

$$\frac{b_0+\cdots+b_{n-1}}{n} = \frac{b_0+\cdots+b_{M-1}}{n} + \frac{b_M+\cdots+b_{n-1}}{n}$$

eşitliğinden

$$\left|\frac{b_0+\cdots+b_{n-1}}{n}\right| \le \frac{|b_0+\cdots+b_{M-1}|}{n} + \frac{|b_M|+\cdots+|b_{n-1}|}{n}$$

eşitsizliği çıkar. Şimdi $\epsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğundan M'yi,

$$i \ge M \Rightarrow |b_i| < \epsilon/2$$

önermesi doğru olacak biçimde seçebiliriz. Demek ki $n > M$ için,

$$\frac{|b_M|+\cdots+|b_{n-1}|}{n} < \frac{(n-M)\epsilon/2}{n} \le \frac{\epsilon}{2}$$

olur. M'yi böylece seçtikten sonra, P sayısını

$$\frac{|b_0+\cdots+b_{M-1}|}{P} < \frac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde seçelim. $N = \max\{M, P\}$ olsun. O zaman her $n > N$ için,

$$\left|\frac{b_0+\cdots+b_{n-1}}{n}\right| \le \frac{|b_0+\cdots+b_{M-1}|}{n} + \frac{|b_M|+\cdots+|b_{n-1}|}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

5.22. $\lim_{n\to\infty}(1+n+n^2)^{1/n} = 1$ *eşitliğini kanıtlayın.*
Kanıt: Elbette $(1+n+n^2)^{1/n} \ge 1$. Demek ki bir $r_n \ge 0$ sayısı için

$$(1+n+n^2)^{1/n} = 1 + r_n$$

yazabiliriz. $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ eşitliğini göstermemiz lazım. $n \ge 3$ olsun. Her iki tarafın da n'inci kuvvetini alarak ve binom teoremini kullanarak,

$$1+n+n^2 = (1+r_n)^n = 1 + nr_n + \frac{n(n-1)}{2!}r_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}r_n^3 + \cdots + r_n^n$$

ve dolayısıyla

$$1+n+n^2 \ge 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}r_n^3$$

elde ederiz. Buradan da

$$0 < r_n^3 < \frac{6(n+n^2)}{n(n-1)(n-2)}$$

bulunur. Bundan ve bu bölümde yapılanlardan $\lim_{n\to\infty} r_n^3 = 0$ çıkar. Teorem 5.4.vi'dan dolayı $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ bulunur ve bu da istediğimizi kanıtlar.

5.23. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}.$$

Çözüm: Bir zekâ pırıltısı gerekiyor:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)(k+1)k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k^2+3k+2)k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k^2+3k+2)-1}{(k^2+3k+2)k!} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+2)!}\right)\\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

ve sonuç $1/1! + 1/2! = 3/2$ çıkar. □

5.24. *Aşağıdaki limiti bulun:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 5}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right).$$

Çözüm: Limiti bulunması gereken ifade,

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{2}{i(i+1)}\right).$$

Parantezlerin herbirini hesaplamaktan başka çare yok sanki:

$$1-\frac{2}{i(i+1)}=\frac{(i+2)(i-1)}{i(i+1)}.$$

Bu parantezleri $i=2$'den $i=n+1$'e kadar çarpınca birçok sadeleştirmeler olur ve geriye

$$\frac{1}{3}\times\frac{n+2}{n}$$

kalır. Bunun limiti de 1/3 olur. □

Alıştırmalar

5.25. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+7}{3n-5}\right)^3,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{n^{2/3}+1},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}}{n^{1/3}+1}.$$

5.26. Aşağıdaki limitleri kanıtlayın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\frac{1}{2}.$$

(İpucu: Eşlenikleriyle çarpıp bölün.)

5.27. $k\in\mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Binom açılımı.)

5.28. Sandviç Teoremi'ni kullanarak

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}$$

limitini bulun (bkz. Örnek 5.19).

5.29. Genel terimi

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}$$

olan dizi 2'ye yakınsar. Hesap makinanızı ya da Excel'i kullanarak buna ikna olun. Bu aşamada bunu kanıtlamanız imkânsız olabilir ama denemenin kimseye bir zararı olmaz, hatta böylece gelecek sayfalarda yapacaklarımızın değerini anlamış olursunuz. Bkz. Örnek 14.43.

5.30. Aşağıdaki limiti bulun (bkz. Örnek 5.23):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}.$$

5.31. Aşağıdaki limiti bulun (bkz. Örnek 5.20):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j^2}{n^4}.$$

5.32. Eğer $(x_n)_n$ yakınsak ama 0'a yakınsamayan bir diziyse, belli bir zaman sonra, dizinin ya hep pozitif ya da hep negatif olacağını kanıtlayın.

5.33. $(x_n)_n$, yakınsak bir diziyse ve belli bir göstergeçten sonra $a \le x_n$ ise, $\lim_{n\to\infty} x_n \ge a$ eşitsizliğini kanıtlayın.

5.34. Eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ama 0'a yakınsamıyorsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1$$

eşitliğini kanıtlayın.

5.35. Sınırlı diziler kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Terimleri 0'dan farklı olan sınırlı diziler kümesinin bölme altında kapalı olmadığını kanıtlayın. $(x_n)_n$ sınırlı ve terimleri 0'dan farklı bir diziyse, ne zaman $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlıdır?

5.36. Eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki diziyse ve $\lim(x_n - y_n) = \ell$, yani $x_n - y_n \longrightarrow \ell$ oluyorsa, bunu

$$x_n \longrightarrow y_n + \ell$$

olarak gösterelim. Eğer $\lim x_n/y_n = \ell$ ise bunu

$$x_n \sim \ell y_n$$

olarak gösterelim. Bu tanımların geçerli olması için $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinin illa yakınsak olmaları gerekmediğine dikkatinizi çekelim.

a. $x_n = 1/n$ ve $y_n = (-1)^n/n$ olsun. $x_n \longrightarrow y_n$ olduğunu (yani tanımdaki $\ell = 0$) ama hiçbir ℓ için $x_n \sim \ell y_n$ olmadığını gösterin.

b. $x_n = 2n$ ve $y_n = n$ olsun. $x_n \sim 2y_n$ olduğunu ama hiçbir ℓ için $x_n \longrightarrow y_n + \ell$ olmadığını gösterin.

c. $a \in \mathbb{R}$ olsun. $x_n = 1/n$ ve $y_n = a/n$ olsun. Yukarıdaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

d. $x_n = 1/n$ ve $y_n = 1/n^2$ olsun. Yukarıdaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

e. $x_n = 1/n^2$ ve $y_n = 1/n$ olsun. Yukarıdaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

f. Eğer bir ℓ için $x_n \longrightarrow y_n + \ell$ için oluyorsa bunu $x_n \equiv y_n$ olarak gösterelim. Bu ilişki diziler üzerine bir denklik ilişkisi midir?

g. Eğer bir ℓ için $x_n \sim \ell y_n$ için oluyorsa bunu $x_n \simeq y_n$ olarak gösterelim. Bu ilişki diziler üzerine bir denklik ilişkisi midir?

5.37. Eğer yeterince büyük n ve n'den bağımsız bir K için $|x_n| < Ky_n$ oluyorsa,

$$x_n = O(y_n)$$

yazılır. Eğer $\lim x_n/y_n = 0$ ise

$$x_n = o(y_n)$$

yazılır. Bunlara "büyük O" ve "küçük o" adı verilir.

a. $x_n = 3n$, $y_n = n$ olsun. Yukarıdaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

b. $x_n = n$, $y_n = n^2$ olsun. Yukarıdaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

c. $x_n = n^2$, $y_n = n$ olsun. Yukarıdaki ilişkilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

5.38.
$$x_n = \frac{n^2+2n+3}{3n-1}$$
olsun.
a. $x_n \longrightarrow n/3 + 7/9$ ilişkisini kanıtlayın (bkz. Alıştırma 5.36).
b. $x_n \sim n/3$ olduğunu gösterin (bkz. Alıştırma 5.36).
c. $x_n = O(n)$ olduğunu gösterin (bkz. Alıştırma 5.37).
d. $x_n = o(n^2)$ olduğunu gösterin (bkz. Alıştırma 5.37).

Polinomlar. $\mathbb{R}$ üzerine bir ***polinom***,
$$r_0 + r_1X + r_2X^2 + \cdots + r_nX^n$$
gibi "biçimsel" (bir başka deyişle anlamsız) bir nesnedir. Bu ifadede n bir doğal sayıdır ve ***katsayı*** adı verilen r_i'ler birer gerçel sayıdır. Eğer $r_n \neq 0$ ise, n'ye polinomun ***derecesi*** adı verilir. Eğer $r_i = 0$ ise, polinomda r_iX^i ifadesi yazılmayabilir. Bu anlaşmayla, $i > n$ için $r_i = 0$ tanımını yaparak, $r_0 + r_1X + r_2X^2 + \cdots + r_nX^n$ polinomunu
$$\sum_{i=0}^{\infty} r_iX^i$$
olarak gösterebiliriz. Bu ikinci türden yazılım çoğu zaman ifadeleri basitleştirir, kolaylık sağlar.

"Biçimsel" sıfatının nedeni şudur: $\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$ ve $\sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i$ polinomlarının eşit olması için yeter ve gerek koşul her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i = b_i$ eşitliğidir, yani eşitlik gerçekten görsel eşitliktir.

Polinomlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bir polinomu bir sayıyla çarpmak gibi işlemler yapılabilir:
$$\left(\sum a_iX^i\right) \pm \left(\sum b_iX^i\right) = \sum (a_i \pm b_i)X^i,$$
$$\lambda\left(\sum a_iX^i\right) = \sum \lambda a_iX^i,$$
$$\left(\sum a_iX^i\right)\left(\sum b_jX^j\right) = \sum \left(\sum_{i+j=n} a_ib_j\right) X^n.$$

Bu işlemlerle birlikte polinomlar kümesi $\mathbb{R}[X]$ olarak gösterilen bir halka oluşturur. Eğer $\mathbb{R}$ yerine bir başka değişmeli R halkası alınırsa, polinom halkası $R[X]$ olarak gösterilir. Örneğin $\mathbb{Z}[X]$ ve $\mathbb{Q}[X]$, katsayıları sırasıyla $\mathbb{Z}$'den ve $\mathbb{Q}$'den alınan polinomlardır.

6. Yakınsak Dizi Örnekleri I

En önemli dizilerden biri olan geometrik dizilerden başlayalım. $(r^n)_n$ biçiminde yazılan bir diziye ***geometrik dizi*** denir:

$$1,\, r,\, r^2,\, r^3, \ldots, r^n, \ldots$$

Geometrik dizilerin yakınsaklığına karar vermek oldukça kolaydır:

Teorem 6.1. *r bir gerçel sayıysa $(r^n)_n$ dizisi ancak $r \in (-1, 1]$ iken yakınsak olabilir.*
$r = 1$ ise limit 1'dir.
$r \in (-1, 1)$ ise limit 0'dır.
$r \notin [-1, 1]$ ise dizi sınırsızdır, dolayısıyla ıraksar.

Kanıt: Önce $-1 < r < 1$ olsun; $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ eşitliğini göreceğiz. Eğer $r = 0$ ise kanıtlayacak fazla bir şey kalmıyor, bundan böyle r'nin 0 olmadığını varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. $s = -1 + 1/|r|$ olsun. Tabii ki $s > 0$ ve

$$|r| = \frac{1}{1+s}.$$

N doğal sayısı,

$$\frac{1}{s} < N\epsilon$$

eşitsizliğini sağlasın (Arşimet Özelliği). Şimdi, her $n > N$ için, Önsav 3.15'e göre,

$$|r^n - 0| = |r|^n = \left(\frac{1}{1+s}\right)^n = \frac{1}{(1+s)^n} \le \frac{1}{1+ns} < \frac{1}{ns} < \frac{1}{Ns} < \epsilon.$$

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ eşitliği kanıtlanmıştır.

Şimdi r'nin 1'den büyük olduğunu varsayalım. $s = r - 1 > 0$ olsun. O zaman Önsav 3.15'e göre

$$r^n = (1+s)^n \ge 1 + ns$$

ve Arşimet özelliğinden dolayı $(r^n)_n$ dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak olamaz (bkz. Teorem 5.3).

Eğer $r < -1$ ise, $n = 2m$ çift olduğunda, $r^n = r^{2m} = (r^2)^m$ sayıları bir önceki paragrafa göre üstten sınırlı değildirler. Dolayısıyla $(r^n)_n$ dizisi sınırlı değildir ve yakınsak olamaz. □

Şimdi de geometrik dizinin terimlerini toplayarak elde ettiğimiz,

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1,\\
s_1 &= 1 + r,\\
s_2 &= 1 + r + r^2,\\
s_3 &= 1 + r + r^2 + r^3,\\
&\dots\\
s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n,\\
&\dots
\end{aligned}$$

dizisine bakalım. Bu dizinin limiti analizde temel niteliktedir.

Teorem 6.2. *r bir gerçel sayı ve*

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

olsun. $(s_n)_n$ dizisi ancak ve ancak $r \in (-1, 1)$ iken yakınsak olabilir ve bu durumda limit

$$\frac{1}{1-r}$$

olur.

Kanıt: Önsav 3.14'te, eğer $r \neq 1$ ise,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

eşitliğini kanıtlamıştık. Dolayısıyla eğer $r \in (-1, 1)$ ise sonuç Teorem 6.1 ve 5.4'ten çıkar:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Eğer $r \geq 1$ ise,

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \geq n + 1$$

olduğundan, dizi sınırlı değildir ve ıraksar (bkz. Teorem 5.3).

Eğer $r < -1$ ise, n çift sayısı için,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 + |r|^{n+1}}{1 + |r|} > \frac{|r|^{n+1}}{2|r|} = \frac{|r|^n}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla dizi sınırsızdır (Önsav 3.15) ve limiti olamaz.

Eğer $r = -1$ ise, $(s_n)_n$ dizisi $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ diye devam eder ve hiçbir sayıya yakınsayamaz. □

Aşağıda vereceğimiz örnekler önemlidir. Her birini önce kendiniz kanıtlamayı denemelisiniz. Okuduğunuzda size çok kolay gelebilecek kanıtları bulamamanız moralinizi bozmasın. Gerçekten de birçoğu uzun süren çalışmalardan süzülmüş zekâ ürünleridir.

Örnekler

6.1. $r \in \mathbb{R}$ için, $\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$ *olur.*
Kanıt: Önsav 5.2.ii'ye göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. $\epsilon > 0$, herhangi bir gerçel sayı olsun. L, r'den büyük herhangi bir doğal sayı olsun. Her k doğal sayısı için,

$$x_{L+k} \leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k$$

eşitsizliğini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım. $k = 0$ ise eşitlik sözkonusu. Şimdi eşitsizliği k için varsayıp $k+1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} x_{L+k+1} &= \frac{r^{L+k+1}}{(L+k+1)!} = \frac{r^{L+k}}{(L+k)!}\frac{r}{L+k+1} = x_{L+k}\frac{r}{L+k+1} \\ &\leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k \frac{r}{L+k+1} \leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k \frac{r}{L+1} = x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Eşitsizliği kanıtladık. Ama $0 < r/(L+1) < 1$ ve Teorem 6.1'e göre yukarıdaki eşitsizliğin en sağındaki terimin k sonsuza giderken limiti 0'dır. Demek ki öyle bir K vardır ki, her $k > K$ için,

$$\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < \frac{\epsilon}{x_L}$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi $N = K + L$ olsun. Her $n > N$ için,

$$k = n - L > K$$

tanımıyla,

$$x_n = x_{L+k} \leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < x_L\frac{\epsilon}{x_L} = \epsilon$$

elde ederiz. İstediğimizi kanıtladık ama pek kolay olmadı. Limit bulmak her zaman kolay değildir, hatta bazen çok çok zor olabilir.
Okur, haklı olarak yukarıdaki kanıtı nasıl düşündüğümüzü sorabilir. Kanıtı nasıl yaptığımızı açıklamaya çalışalım.
x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki var:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Bunu bir adım daha götürürsek,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}x_{n+1} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n$$

elde ederiz. Ama buradan da,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n < \left(\frac{r}{n+1}\right)^2 x_n$$

elde ederiz. Bu aşamada,

$$x_{n+k} \leq \left(\frac{r}{n+1}\right)^k x_n$$

eşitsizliğini tahmin edip kanıtlamak zor değil. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$\frac{r}{n+1}$$

sayısı 1'den küçük olur ve Teorem 6.1'e göre eşitsizliğin sağ tarafı k büyüdükçe küçülür. Bizim istediğimiz de buydu zaten. Gerisi, okurun ustalaşması gerektiği teknik ayrıntı.

Benzer Bir Kanıt Daha: $x_{n+1}/x_n = r/(n+1) < r/n$. Ama $\lim_{n\to\infty} r/n = 0$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, $n > N$ için $r/n < 1/2$ olur. Demek ki her $n > N$ için,

$$0 \leq \frac{x_n}{x_{N+1}} = \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\frac{x_{N+3}}{x_{N+2}}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N-1}$$

olur. Sonuç şimdi sandviç teoreminden kolaylıkla çıkar.

Benzer Bir Kanıt Daha: m, r'den büyük bir doğal sayı olsun. O zaman $n > m$ için,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{r^n}{n!}\right| &= \frac{|r|^n}{n!} = \frac{|r|^m}{m!}\,\frac{|r|}{m+1}\,\frac{|r|}{m+2}\cdots\frac{|r|}{n} \\ &\leq \frac{|r|^m}{m!}\,\frac{|r|}{m}\,\frac{|r|}{m}\cdots\frac{|r|}{m} = \frac{|r|^m}{m!}\left(\frac{|r|}{m}\right)^{n-m} = \frac{m^m}{m!}\left(\frac{|r|}{m}\right)^n \end{aligned}$$

olur. Ama m bir sabit; ayrıca $\frac{|r|}{m} < 1$ olduğundan, Teorem 6.1'e göre, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|r|}{m}\right)^n = 0$ olur. Sandviç teoreminden istediğimizi elde ederiz.

Bir Uyarı: $(n^n/n!)_n$ dizisi bir zaman sonra her sayıyı aşar, yani limiti yoktur (bkz. Alıştırma 10.12 ya da Örnek 5.1).

6.2. *Her $r \in (-1,1)$ için,*

$$\lim_{n\to\infty}\left(r+\frac{1}{n}\right)^n = 0.$$

Eğer $|r| > 1$ ise dizi ıraksar.

Kanıt: Önce $r \in (-1,1)$ varsayımını yapalım. Önsav 5.2.ii ve

$$\left|r+\frac{1}{n}\right| \leq |r| + \frac{1}{n}$$

eşitsizliğinden dolayı, genelliği bozmadan, $r \in [0,1)$ varsayımını yapabiliriz. $s \in (r,1)$ olsun. N doğal sayısı, $1/N < s-r$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman, her $n \geq N$ için,

$$r+\frac{1}{n} \leq r+\frac{1}{N} < r+(s-r) = s$$

ve

$$0 \leq \left(r+\frac{1}{n}\right)^n < s^n$$

olur. Sağ taraf, Teorem 6.1'e göre 0'a yakınsadığından Sandviç Teoremi istediğimizi verir.

Eğer $|r| > 1$ ise,

$$\left|\left(r+\frac{1}{n}\right)^n\right| > |r|^n$$

olur ve Teorem 6.1'e göre dizimiz sınırsızdır, dolayısıyla ıraksaktır.

$|r| = 1$ **Durumu:** Dizinin $r = -1$ için ıraksadığını Örnek 10.7'de, $r = 1$ için (adına e denilen bir sayıya) yakınsadığını Teorem 10.1'de göreceğiz.

6.3. *Eğer $a > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ olur.*
Kanıt: $a = 1$ ise sorun yok. Gerekirse a yerine $1/a$ alırsak, $a > 1$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = a^{1/n} - 1$ olsun. O zaman

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \cdots > nx_n$$

ve $0 < x_n < a/n$. Buradan da $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ çıkar.

6.4. *Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ise ve $a > 0$ ise $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$ olur.*
Kanıt: $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Bir önceki örneğe göre, bir m doğal sayısı için $a^{1/m}$ ve $a^{-1/m}$ sayıları $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ aralığında olurlar. Ayrıca yeterince büyük n sayıları, diyelim N'den büyük n sayıları için $-1/m < x_n < 1/m$ olur. Buradan a^{x_n} sayısının $a^{-1/m}$ ile $a^{1/m}$ arasında olduğu, yani $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$ aralığında olduğu çıkar ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

6.5. *$|r| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ olur.*
Kanıt: $r \neq 0$ varsayımını yapabiliriz. $1/|r| = 1 + s$ olsun. $s > 0$ olur elbette. $n > 2$ için,

$$(1+s)^n = 1 + ns + \frac{n(n-1)}{2}s^2 + \cdots$$

eşitliğinden

$$\frac{(1+s)^n}{s^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{n}{s} + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}$$

ve buradan da,

$$|nr^n| = \frac{n}{(1+s)^n} < \frac{2}{(n-1)s^2} < \frac{4}{ns^2}$$

çıkar. (Son eşitsizlik $n > 2$ koşulundan çıkar.) Şimdi ϵ verilmiş olsun.

$$N = \max\left\{2, \frac{4}{\epsilon s^2}\right\}$$

olsun. Eğer $n > N$ ise, yukarıdaki hesaptan, $|nr^n| < \epsilon$ çıkar. □
Eğer $r = 100/101$ ise, $(nr^n)_n$ dizisi 100'üncü terime kadar artar, neredeyse 37 olur ve daha sonra azalarak 0'a yakınsamaya başlar, yani bu dizi 0'a yakınsar ama sonlara doğru yakınsar! Bu dediklerimizin doğruluğu örneğin Excel ile kontrol edilebilir. □

6.6. *$|r| < 1$ ve $q \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$ ise $\lim_{n\to\infty} n^q r^n = 0$ olur.*
Kanıt: $q = 0$ ise sorun yok. Bundan böyle $q > 0$ olsun. $s = r^{1/q}$ olsun. O zaman, $\lim_{n\to\infty} n^q s^{qn} = 0$ eşitliğini göstermek durumundayız ki bu da Teorem 5.4.vi'ya göre, $\lim_{n\to\infty} ns^n = 0$ eşitliğini göstermek demektir. Bunu da bir önceki örnekte göstermiştik. □

6.7. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.
Kanıt: $x_n = n^{1/n} - 1$ olsun. O zaman, $n > 2$ için,

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}x_n^2$$

olur. Demek ki

$$x_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

ve

$$x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. □
Ayrıca bkz. Örnek 8.2, 11.2, 16.12 ve Alıştırma 18.34.

6.8. Terimleri, $n \geq 2$ için,

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} = \frac{1}{1 \cdot (n-1)} + \frac{1}{2 \cdot (n-2)} + \cdots + \frac{1}{i(n-i)} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot 1}$$

olan diziyi ele alalım.

$$\frac{1}{i\,(n-i)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}\right)$$

eşitliğinden dolayı,

$$x_n = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

olur. Örnek 3.5'e göre

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} < \sqrt{n}.$$

Demek ki, her $n \geq 2$ için

$$0 < x_n < \frac{2}{n}\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

sağlanır. Buradan da $\lim x_n = 0$ elde edilir[1]. □

6.9. *$x \in \mathbb{R}$ olsun ve*

$$x_n = \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2}$$

olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = x/2$ *eşitliğini kanıtlayın.*

Kanıt: Her $r \in \mathbb{R}$ için $[r] \leq r < [r] + 1$ olduğundan, $r - 1 < [r] \leq r$ olur. Buradan

$$(x-1) + (2x-1) + \cdots + (nx-1) < [x] + [2x] + \cdots + [nx] \leq x + 2x + \cdots + nx$$

ve dolayısıyla

$$\frac{n(n+1)}{2}\,x - n < [x] + [2x] + \cdots + [nx] \leq \frac{n(n+1)}{2}\,x$$

olur. Her tarafı n^2'ye bölersek, Sandviç Teoremi'nden istediğimiz çıkar. □

6.10. **[Lineer cebir bilenlere.]** $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ *ve*

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n$ *limiti var mıdır ve varsa kaçtır?* (Not: Lineer cebir kullanmayan bir çözüm için sayfa 154'teki Alıştırma 12'ye bakın.)

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

ve

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman

$$x_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = Ax_n$$

[1] Birinci basımda bu sonucun Görkem Özkaya tarafından bulunmuş çok güzel ama oldukça uzun bir kanıtı vardı. İlham Aliyev yukarıdaki kısa kanıtı sundu.

olur. Buradan da her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A^n x_0 = x_n$$

çıkar.

A^n matrisini hesaplayalım. Bunu yapmak için önce A matrisini çapraz matris haline sokalım. (Eğer bu mümkün değilse matrisi Jordan kanonik biçimine sokmak gerekir.) Bunu yapmak için de matrisin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulalım:

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}_2) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1/2 & 1/2 - x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

olduğundan, özdeğerler 1 ve $-1/2$'dir. (İki değişik özdeğer olduğundan, A matrisi bir başka tabanda çapraz matris olarak yazılır.) Eğer bu özdeğerlere sırasıyla λ_1 ve λ_2 dersek, bunlara tekabül eden $v_i \neq 0$ özvektörleri bulalım. $i = 1, 2$ için

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

denklemini çözersek,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ve } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektörlerinin $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1/2$ özdeğerlerine tekabül eden özvektörlerden olduklarını buluruz.

Şimdi P, e_1 ve e_2 kanonik tabanları v_1 ve v_2 vektörlerine götüren dönüşümün matrisi olsun:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

P'nin tersini bulmak zor değil:

$$P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Şimdi

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

olmalı. İki üç dakikadan fazla sürmemesi gereken hesaplar yapılınca bir hata yapmadığımız ve eşitliğin gerçekten doğru olduğu kolaylıkla görülür. Buradan,

$$\begin{aligned} A^n &= \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-(-1/2)^{n-1} & 2-(-1/2)^{n-1} \\ -1+(-1/2)^n & -2-(-1/2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= x_n = A^n x_0 \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} & 2-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ -1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \\ -1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

olur. Demek ki $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$.

Not: Yukarıdaki a_n ifadesi bilindikten sonra aynı eşitlik tümevarımla kanıtlanabilir! Ama sadece bilindikten sonra... Tümevarımla kanıt yöntemi çok güçlü olmasına karşın, bu yöntemi kullanabilmek için kanıtlanacak formülün ya da teoremin önceden bilinmesi gerekir! □

Alıştırmalar

6.11. $(x_n)_n$, bir dizi olsun. Sabit bir $r \in (0,1)$ sayısı ve her n göstergeci için

$$|x_{n+1}| \leq r|x_n|$$

olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

eşitliğini kanıtlayın.

6.12. Genel terimi

$$\frac{n+4}{3n^2+2}$$

olan dizinin bir zaman sonra azalan olduğunu ve limitinin 0 olduğunu kanıtlayın.

6.13. Terimleri pozitif ve azalan olan ama limitin 0 olmadığı bir dizi bulun.

6.14. Terimleri

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n^2-i)}$$

olan dizi yakınsak mıdır?

6.15. Terimleri

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{i(n^2-i)}$$

olan dizi yakınsak mıdır?

6.16.

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n^2} = 1$$

eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: $n^{1/n} \geq n^{1/n^2}$.)

6.17. **[Lineer cebir bilenlere.]** $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ve

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$$

olsun (Fibonacci dizisi). Örnek 6.10'daki gibi yola çıkarak f_{1000}'i bulun.

6.18. a_0, $a_1 > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

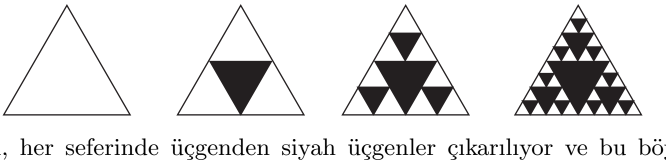
$$a_{n+2} = (a_n a_{n+1})^{1/2}$$

olsun.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (a_0 a_1^2)^{1/3}$$

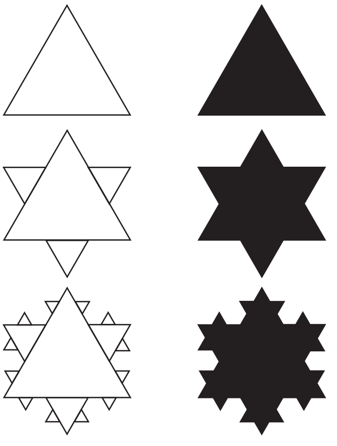
eşitliğini kanıtlayın. İpucu: $a_n = a_0^{u_n} a_1^{v_n}$ olsun. u_n'ler arasında bir ilişki bularak ve Örnek 6.10'u kullanarak $\lim_{n\to\infty} u_n$ limitini bulun. Aynı şeyi v_n için yapın.

6.19. **[Sierpinski Üçgeni]** Aşağıdaki birinci üçgenin alanı 1'dir.

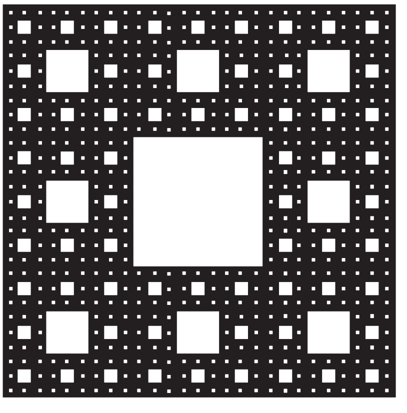


Şekildeki gibi, her seferinde üçgenden siyah üçgenler çıkarılıyor ve bu böyle sonsuza kadar devam ediyor. n'inci üçgende kalan beyaz alanı hesaplayın. Bu alanların n sonsuza giderken limitini bulun.

6.20. [**Koch Kartanesi**] Aşağıdaki şekildeki gibi, bir eşkenar üçgenin kenarlarına, üçgenin üçte biri kadar olan üç üçgeni taşıyoruz ve benzer işlemi elde edilen şekilde tekrar ediyoruz. Başlangıç üçgeninin kenarı 1 br ise, süreci sonsuza dek devam ettirdiğimizde, elde edilen şeklin dış çevresi ne olur? Peki ya üçgenin alanı 1 br ise oluşan şeklin alanı ne olur?



6.21. [**Sierpinski Halısı**] Aşağıdaki şekil yukarıdakiler gibi bir kareden o karenin dokuzda biri kareler çıkartılarak ve süreç sürekli sonsuza dek tekrarlanarak elde ediliyor. Sonsuzda elde edilen şeklin (siyah kısmın) alanını hesaplayın.



6.22. [**Kaos**] k sabit bir sayı, $x_1 = 0{,}8$ ve $x_{n+1} = kx_n(1 - x_n^2)$ olsun. $k = 2{,}2$ ve $k = 2{,}4$ için ilk dizinin 50 değerini örneğin Excel'de hesaplayın. İki dizi arasındaki farkı görüyor musunuz? Aynı şeyi başka k değerleri için yapıp ne olup bittiğini anlamaya çalışın.

7. Dizi Çeşitleri

7.1 Monoton Diziler

Artan ya da azalan bir diziye ***monoton dizi*** denir. Yani eğer bir $(x_n)_n$ dizisi her n için,

$$x_n \leq x_{n+1}$$

koşulunu sağlıyorsa (yani artansa), ya da her n için,

$$x_n \geq x_{n+1}$$

koşulunu sağlıyorsa (yani azalansa), o zaman bu diziye ***monoton dizi*** adı verilir[1]. Örneğin

$$\left(\frac{n+3}{n+1}\right)_n$$

azalan bir dizidir. Bazı diziler başlangıçta monoton olmasalar da zamanla, örneğin 1 milyonuncu terimden sonra monotonlaşabilirler.

Örnekler

7.1. *$(a_n)_n$ dizisi artansa (azalansa), terimleri*

$$\frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n}$$

$(n \geq 1)$ olan dizi de artandır (azalandır).

Kanıt: Soruyu artan diziler için kanıtlayalım. $a_0 + \cdots + a_{n-1}$ toplamına s_n diyelim. İstediğimiz,

$$\frac{s_n}{n} \leq \frac{s_{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow \frac{s_n}{n} \leq \frac{s_n + a_n}{n+1} \Leftrightarrow s_n \leq na_n$$

eşdeğerliğinden ve

$$s_n = a_0 + \cdots + a_{n-1} \leq na_{n-1} \leq na_n$$

eşitsizliğinden çıkar. □

[1] Eğer eşitsizliği mutlak eşitsizlikle değiştirirsek, ***kesin azalan*** ya da ***kesin artan*** dizi kavramını buluruz. Birçok kitapta bizim "artan" dediğimize "azalmayan" dense de, bu terminolojinin pek pratik olmadığını düşünüyoruz.

7.2. $a > 0$ olsun ve yukarıda kanıtladığımızı terimleri $a_n = a^n(1-a)$ olan diziye uygulayalım. Bu dizinin azalan olduğunu kanıtlamak zor değil (ama kanıtı $a \le 1$ ve $a \ge 1$ olarak iki parçaya ayırmak gerekir). Demek ki $(s_n)_n$ dizisi de azalandır.

$$s_n = \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \frac{(1-a) + a(1-a) + \cdots + a^{n-1}(1-a)}{n} = \frac{1-a^n}{n}$$

olduğundan, buradan kolaylıkla

$$na^{n-1}(1-a) < 1 - a^n < n(1-a)$$

çıkar.

7.3. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki dizi olsun. Her n için $b_n > 0$ olduğunu ve $(a_n/b_n)_n$ dizisinin artan (azalan) olduğunu varsayalım. O zaman terimleri*

$$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{b_0 + \cdots + b_n}$$

olan dizi de artandır (azalandır).

Kanıt: Kanıtı sadece artan diziler için yapalım. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerinin kısmi toplamlarını sırasıyla s_n ve t_n ile gösterelim. Önce

(1) $$\frac{s_n}{t_n} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

eşitsizliğini n üzerinden tümevarımla kanıtlayalım. $n = 0$ için her şey yolunda. (1) eşitsizliğini kabul edip

(2) $$\frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} \le \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. (1) eşitsizliğinden kolayca

$$\frac{s_n + a_{n+1}}{t_n + b_{n+1}} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

yani

$$\frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

eşitsizliği çıkar. Ama varsayıma göre

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}.$$

Demek ki (2), dolayısıyla (1) de doğru.

Şimdi $(s_n/t_n)_n$ dizisinin artan olduğunu kanıtlayabiliriz.

$$\frac{s_n}{t_n} \le \frac{s_{n+1}}{t_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{s_n}{t_n} \le \frac{s_n + a_{n+1}}{t_n + b_{n+1}} \Leftrightarrow \frac{s_n}{t_n} \le \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

ki son eşitsizliği bir paragraf önce kanıtlamıştık. □

Alıştırmalar

7.4. Örnek 7.1'in ters istikametlisinin yanlış olduğunu kanıtlayın.

7.5. Örnek 7.2, $n < 0$ için doğru mudur? Doğru değilse ne tür bir eşitlik doğrudur?

7.6. Örnek 7.2, kesirli sayılar için doğru mudur? Doğru değilse ne tür bir eşitlik doğrudur?

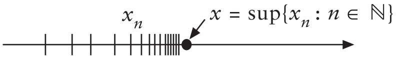
7.7. Örnek 7.3'ün artan yerine azalan için de doğru olduğunu kanıtlayın.

7.8. Örnek 7.3'ün ters istikametlisinin doğru olmadığını gösterin. Yani öyle $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri bulun ki, $(s_n/t_n)_n$ dizisi artan olsun ama (a_n/b_n) dizisi artan olmasın.

7.9. $a > 0$ olsun. Her $a_n = a^{n+1}(1-a)$ ve $b_n = n+1$ olsun. Örnek 7.3'ü a_n/b_n dizisine uygulayın.

Monoton dizilerin diğer dizilere göre önemli bir üstünlüğü vardır: Bu dizilerin yakınsak olmaları için sadece sınırlı olmaları yeterlidir. Nitekim, sezgilerimiz de, sürekli (ya da bir zaman sonra) artan bir dizinin, eğer terimleri belli bir sayıyı hiçbir zaman aşamıyorsa, belli bir sayıya (en küçük üstsınırına) yoğunlaşması gerektiğini söylüyor.

Teorem 7.1. *Artan ve sınırlı bir dizi yakınsaktır. Eğer $(x_n)_n$ böyle bir diziyse, bu dizinin limiti* $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *olur.*



Teorem, kesirli sayılar kümesi için geçerli değildir. [N2]'de kesirli bir sayıya yakınsamayan birçok artan kesirli sayı dizisi örneği gördük. Daha ince zevklere hitap eden bir örnek verelim. x, kesirli olmayan herhangi bir gerçel sayı olsun. x_1, x ile $x-1$ arasında olan herhangi bir kesirli sayı olsun. Eğer

$$x_1 < \ldots < x_n < x$$

kesirli sayıları,

$$x - x_i < \frac{1}{i}$$

eşitsizlikleri doğru olacak biçimde tanımlanmışsa, x_{n+1} sayısını,

$$(x_n,\, x) \cap \left(x - \frac{1}{n+1},\, x\right)$$

açık aralığından herhangi bir kesirli sayı olarak seçelim. O zaman $(x_n)_n$ dizisi sürekli artan bir kesirli sayı dizisidir ve gerçel sayılarda x'e yakınsar, ancak kesirli sayılar kümesinde limiti yoktur (çünkü x kesirli değil.)

Bundan da, teoremin kanıtında, gerçel sayılarda doğru olan ama kesirli sayılarda doğru olmayan (SUP) aksiyomunun kullanılması gerektiği çıkar.

Teorem 7.1'in Kanıtı: $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. x'in varlığını dizinin sınırlı olmasına ve SUP aksiyomuna borçluyuz. Elbette, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x$. Herhangi bir $\epsilon > 0$ alalım. $x - \epsilon < x$ olduğundan ve x, dizinin **en küçük** üstsınırı olduğundan, $x - \epsilon$, dizinin bir üstsınırı değildir. Demek ki, belli bir N sayısı için,

$$x - \epsilon < x_N \leq x$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için de,

$$x - \epsilon < x_N \le x_n \le x$$

olur, yani

$$|x_n - x| = x - x_n \le \epsilon$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Zamanla artan bir dizi için de sonuç geçerlidir elbet.

Sonuç 7.2. *Zamanla artan ve sınırlı olan bir dizi yakınsaktır. Eğer $(x_n)_n$ böyle bir diziyse ve dizi M göstergecinden sonra azalmamaya başlıyorsa, o zaman bu dizinin limiti* $\sup\{x_n : n > M\}$ *olur.* □

Benzer sonuçlar azalan diziler için de geçerli:

Sonuç 7.3. *Zamanla azalan ve sınırlı bir dizi yakınsaktır. Eğer $(x_n)_n$ böyle bir diziyse, bu dizinin limiti* $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *olur.* □

Sonuç 7.4. *Zamanla monotonlaşan sınırlı diziler yakınsaktır.* □

Ve elbette monoton bir dizi sınırlı değilse yakınsak olamaz, çünkü bildiğimiz gibi yakınsak her dizi sınırlı olmak zorundadır.

Bu sonuçlar çok önemlidir ve birçok uygulamasını göreceğiz. Hemen başlayalım.

Örnekler

7.10. Genel terimi

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

olan diziye bakalım. Bu dizinin sürekli arttığı belli, her terime yeni pozitif bir sayı ekleniyor. Teoreme göre, eğer dizi sınırlıysa yakınsak olması gerekir.

Bu elektronik çağda, insanın eli mecburen aygıtlara gidiyor. Dizinin ilk birkaç terimini bilgisayara hesaplatalım.

$$\begin{array}{ll}
1/1^2 & = 1 \\
1/1^2 + 1/2^2 & = 1{,}25 \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 & = 1{,}361111\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 & = 1{,}423611\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/5^2 & = 1{,}463611\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/6^2 & = 1{,}491389\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/7^2 & = 1{,}511797\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/8^2 & = 1{,}527422\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/9^2 & = 1{,}539768\ldots \\
1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/10^2 & = 1{,}549768\ldots
\end{array}$$

Toplamlar gittikçe büyüyorlar, doğru, ama bu, toplamların her sayıyı aşacağı anlamına gelmez. Örneğin,

$$0{,}9,\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ 0{,}9999,\ \ldots$$

dizisi de durmadan büyür, ama 1'i hiçbir zaman geçemez. Birkaç terim daha hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/100^2 &= 1{,}634984\ldots\\
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/200^2 &= 1{,}639947\ldots\\
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/300^2 &= 1{,}641606\ldots\\
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/1000^2 &= 1{,}643935\ldots\\
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/2000^2 &= 1{,}644432\ldots\\
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/3000^2 &= 1{,}644595\ldots\\
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/4000^2 &= 1{,}644714\ldots\\
1/1^2+1/2^2+1/3^2+\cdots+1/5000^2 &= 1{,}644725\ldots
\end{aligned}$$

Sanki dizi 1,65'i geçmeyecek gibi bir hisse kapıldınız mı? Doğru, haklısınız, hislerinizde yanılmadınız... Bu dizi $\pi^2/6$'ya yakınsar. π'yi ikinci ciltte tanımlayacağız. Limitin $\pi^2/6$'ya eşit olduğunun kanıtı da bu kitabı aşar. Bunu olmasa da, dizinin en azından 2'yi geçemeyeceğini kanıtlayabiliriz.

$$x_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

olsun.

Sav. *Her $n \geq 1$ doğal sayısı için, $x_n \leq 2 - 1/n$.*

Kanıt: $n = 1$ için kanıtlayacak fazla bir şey yok. Eşitsizliği n için varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\\
&= 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} < 2 - \frac{n^2+n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Sav kanıtlanmıştır. □

Demek ki dizi 2'den küçük bir sayıya yakınsar. Bu arada,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$$

eşitsizliği tümevarımla kolaylıkla kanıtlandığından (kanıtlayın lütfen), dizinin limitinin $1,5$ ile 2 arasında bir sayı olduğu anlaşılır. (Bu dizinin limiti $\pi^2/6$'dır. Euler kimsenin tahmin edemediği bu ünlü sonucu bulduğunda yer yerinden oynamıştı.)

7.11. Peki

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}$$

dizisinin limiti nasıl bir sayıdır? $1/i^2 \geq 1/i^3$ olduğundan, bu yeni toplam $\pi^2/6$'dan daha küçük bir sayıdır. (Sonlu toplamlar $\pi^2/6$'dan küçük ama artan bir dizidir, dolayısıyla yakınsaktır.) Bu sayının hangi sayı olduğu bilinmiyor. Nasıl bir sayı olduğu da bilinmiyor, tek bildiğimiz, bu sayının kesirli bir sayı olmadığı. Bu da, sadece 1990'ların başında kanıtlandı.

7.12. $1/1^4+1/2^4+1/3^4+1/4^4+\cdots+1/n^4$ toplamının limitinin kaç olduğu biliniyor. Genel olarak, eğer k çift bir sayıysa,

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}$$

toplamının limitinin π^k ile kesirli bir sayının çarpımı olduğu biliniyor (Euler), örneğin,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Ama eğer $k \geq 5$ tek bir sayıysa, bu sonsuz toplam üzerine pek bir şey bilindiğini sanmıyorum.

7.13. *$A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow A$ artan bir fonksiyon ve $c \in A$ sayısı $f(x) = x$ denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $a_0 \in A$ sayısı $a_0 \leq c$ ve $a_0 \leq f(a_0)$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman, terimleri her $n \geq 0$ için $a_{n+1} = f(a_n)$ formülüyle tanımlanmış dizi yakınsaktır.*

Kanıt: $a_0 \leq c$ olduğundan, her n için $a_n \leq c$ eşitsizliği kolaylıkla elde edilir, nitekim tümevarımla $a_{n+1} = f(a_n) \leq f(c) = c$ olur. Ayrıca varsayıma göre $a_0 \leq a_1$ olduğundan, bu eşitsizliğe f fonksiyonunu n defa uygulayarak $a_n \leq a_{n+1}$ elde ederiz; yani $(a_n)_n$ dizisi artandır. Artan ve c tarafından üstten sınırlı olduğundan, $(a_n)_n$ dizisi yakınsaktır. □

7.14. **[Gauss]** $0 \leq a_0 \leq b_0$ ve

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \text{ ve } b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

olsun. Tümevarımla $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ eşitsizliklerini göstermek kolay. Demek ki $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri yakınsaktır. Limitlere sırasıyla a ve b dersek,

$$a=\frac{a+b}{2}$$

yani $a = b$ olur. Bu ortak değere a_0 ve b_0 sayılarının ***aritmetik-geometrik ortalaması*** adı verilir.

7.15. $s \geq 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları verilmiş olsun. Her $n \geq 0$ için $x_{n+1} = \sqrt{s + x_n}$ tanımını yapalım. Her x_n bu formülle gerçekten tanımlanır, nitekim eğer x_n tanımlanmışsa, $x_n \geq 0$ olmak zorundadır, dolayısıyla $s + x_n \geq 0$ olur ve karekökü vardır, dolayısıyla x_{n+1} de tanımlanmıştır.

Her iki tarafın da karesini alarak $x_{n+1}^2 = s + x_n$ buluruz, demek ki dizinin limiti eğer varsa, $x^2 - x - s = 0$ köklerinden biri olmalıdır. Ama köklerden küçük olanı negatif olduğundan, dizinin limiti varsa, bu limit ancak

$$\frac{1+\sqrt{1+4s}}{2}$$

olabilir.

Dizinin artanlığına azalanlığına karar verelim.

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n \geq s$$

önermesini kanıtlamak zor değil, x_{n+1} yerine x_n cinsinden ifadesini yazınca çıkıyor. Bunu kullanarak

$$x_{n+1} \leq x_n \Leftrightarrow x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

önermesini kanıtlayabiliriz:

$$x_{n+2} \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1}^2 - x_{n+1} \geq s \Leftrightarrow (x_n + s) - x_{n+1} \geq s \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n.$$

Demek ki dizi bir yerde artarsa her yerde artıyor, bir yerde azalırsa her yerde azalıyor, yani dizi monoton. Daha keskin bir ifadeyle

$$(x_n)_n \text{ azalan} \Leftrightarrow x_1 \leq x_0 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 \geq s.$$

Dizi azalansa dizinin bir limiti olduğu belli. Şimdi dizinin üstten sınırlı olduğunu gösterelim ki dizinin her durumda yakınsadığı anlaşılsın.

$$\alpha = \max\left\{x_0, \frac{1+\sqrt{1+4s}}{2}\right\}$$

olsun. Elbette $x_0 \leq \alpha$ ve $\alpha^2 - \alpha - s \geq 0$ olur. Eğer $x_n \leq \alpha$ eşitsizliğini varsayarsak,

$$x_{n+1}^2 = x_n + s \leq \alpha + s \leq \alpha^2$$

ve buradan da $x_{n+1} \leq \alpha$ buluruz. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi üstten sınırlıdır ve her durumda limiti vardır.

7.16. [A] *$a_0 = -3/2$ ve $3a_{n+1} = 2 + a_n^3$ olsun. $(a_n)_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını kanıtlayın.*
Kanıt: Eğer dizinin limiti varsa, bu limit $3x = 2 + x^3$ eşitliğini sağlamalı.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

olduğundan bu limit ya 1 olabilir ya da -2. Ayrıca $a_0 < 0$ ve $a_1 = -11/24 < 0$ olduğundan, limit (eğer varsa) negatif gibi görünebilir ilk bakışta ama kolayca hesaplanabileceği üzere

$$0 < a_2 = \frac{2}{3} - \frac{11^3}{3 \cdot 24^3} \simeq 0,63457 < 1$$

oluyor. Dizinin tanımı kullanılarak buradan her $n \geq 2$ için $a_n \geq 0$ eşitsizliği hemen görülüyor. Bu bilgiyle

$$a_{n+1} < 1 \Leftrightarrow a_n < 1$$

eşdeğerliğini de kanıtlamak kolay. Demek ki $n \geq 2$ için $0 < a_n < 1$. Buradan $n \geq 2$ için

$$3(a_{n+1} - 1) = (2 + a_n^3) - 3 = a_n^3 - 1 = (a_n - 1)(a_n^2 + a_n + 1) > 3(a_n - 1)$$

elde ederiz (çünkü $a_n - 1 < 0$). Böylece $(a_n)_n$ dizisinin bir zaman sonra artan olduğu anlaşılır. Demek ki dizinin limiti 1'dir. □

Alıştırmalar

7.17. $(n!/n^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını kanıtlayın. Bu dizinin limitinin 0 olduğunu kanıtlayın.

7.18. $r \in (0, 1)$ olsun. $(nr^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını, dolayısıyla yakınsak olduğunu kanıtlayın. Dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

7.19. $r \in (0, 1)$ olsun. $(n^2r^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını, dolayısıyla yakınsak olduğunu kanıtlayın. Dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

7.20. $r \in (-1, 1)$ ve sabit bir $k \in \mathbb{N}$ için $(n^kr^n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

7.21. Terimleri

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$$

olan dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

7.22. $a_1 = 3$ ve $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$ eşitliğini kanıtlayın.

7.23. Terimleri

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

olan dizinin 1 ile 2 arasında değer aldığını ve arttığını kanıtlayın. Dolayısıyla bu dizinin bir limiti vardır[2].

7.24. $a > 0$ ve $x_0 >$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

olsun.

[2]Limit $\ln 2$'dir. Ancak logaritma bir sonraki ciltte tanımlanacak.

a. $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2$ eşitliğini kanıtlayın.
b. Bundan $x_n \geq \sqrt{a}$ eşitsizliğini çıkarın.
c. $x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$ eşitliğini kanıtlayın.
d. Bundan $(x_n)_n$ dizisinin azalan olduğunu gösterin.
e. $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ eşitliğini gösterin.

7.25. a_0 ve b_0 iki pozitif sayı olsun. $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ve $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ tanımını yapalım. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerinin monoton olduklarını ve aynı limite yakınsadıklarını kanıtlayın.

7.26. a_0 ve b_0 iki pozitif sayı olsun. $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ve $a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n$ olsun. $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerinin monoton olduklarını ve $\sqrt{a_0b_0}$ sayısına yakınsadıklarını kanıtlayın.

7.27. $s \geq 0$, $x_0 \geq 0$ ve $x_{n+1} = \frac{s}{1+x_n}$ olsun. Dizinin limiti varsa bu limitin ancak $x^2+x-s=0$ denkleminin pozitif kökü olabileceğini, yani

$$\frac{1+\sqrt{1+4s}}{2}$$

olabileceğini gösterin.

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow x_n \geq x_{n-1}$$

önermesini kanıtlayın. Dizinin monoton olduğunu kanıtlayın. Eğer dizi azalansa dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın. Eğer dizi artansa, her n için

$$a_n \leq \frac{s}{1+a_0}$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Dizinin her durumda yakınsak olduğunu kanıtlayın.

7.28. $s \geq 0$, $x_0 \geq 0$ ve $x_{n+1} = s/x_n + 1$ olsun. Yukarıdakine benzer analizi bu dizi için yapın.

7.29. $a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}_{n \text{ tane}}$ olsun.

a. $(a_n)_n$ dizisinin artan olduğunu kanıtlayın.
b. $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ eşitliğini kanıtlayın.
c. Yukarıdaki eşitlikten, limitin eğer varsa (***altın oran*** olarak bilinen)

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.
d. Altın oranın 2'den küçük olduğunu kanıtlayın.
e. Her n için $a_n < 2$ eşitsizliğini kanıtlayın.
f. Bütün bunlardan, $\lim_{n\to\infty} a_n = \phi$ eşitliğini kanıtlayın.

7.30. $b_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$ olsun.

a. $(b_n)_n$ dizisinin artan olduğunu kanıtlayın.
b. $b_n = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2}{2^2}+\sqrt{\frac{3}{2^3}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{2^n}}}}}$ eşitliğini kanıtlayın.
c. a_n bir önceki alıştırmadaki gibi olsun. (b) kısmından hareketle $b_n < \sqrt{2}a_n$ eşitliğini kanıtlayın.
d. $(b_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

7.31. Terimleri $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ tane}}$ olan dizi yakınsak mıdır ve öyleyse hangi sayıya yakınsar?

7.2 Sonsuza Iraksayan Diziler I

Bir önceki bölümde, Örnek 6.10'da sürekli artan

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

dizisinin (örneğin 2 tarafından) üstten sınırlı olduğunu, dolayısıyla yakınsak olduğunu gösterdik. Bu bölümde, gene sürekli artan ve ***harmonik dizi*** adı verilen

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

dizisini ele alacağız. Bu dizi de bir önceki dizi gibi sınırlı mı ve dolayısıyla yakınsak mıdır? Bu altbölümde bu soruyu ele alacağız.

Dizinin ilk terimlerine bakıp bir tahminde bulunmaya çalışalım.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1} &= 1\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &= 1{,}5\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} &= 1{,}8333...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &= 2{,}08333...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{5} &= 2{,}28333...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{6} &= 2{,}45\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{7} &= 2{,}592857143...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8} &= 2{,}717857143...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9} &= 2{,}828968254...\\
\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10} &= 2{,}928968254...
\end{aligned}$$

İlk on terimde sadece 2'yi geçtik, henüz 3'e varamadık. Bu toplamlar bir zaman sonra -örneğin- 100'ü geçer mi? Geçerse ne zaman geçer?

Bilgisayara hesaplattık bu toplamları. Eğer

$$H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

tanımını yaparsak, bulduğumuz sonuçları daha rahat yazabiliriz:

$$
\begin{array}{lll@{\qquad}lll}
H_1 & = & 1 & H_{11} & = & 3{,}019877... \\
H_2 & = & 1{,}5 & H_{12} & = & 3{,}103211... \\
H_3 & = & 1{,}833333... & H_{13} & = & 3{,}180134... \\
H_4 & = & 2{,}083333... & H_{14} & = & 3{,}251562... \\
H_5 & = & 2{,}283334... & H_{15} & = & 3{,}318229... \\
H_6 & = & 2{,}45 & H_{16} & = & 3{,}380729... \\
H_7 & = & 2{,}592857... & H_{17} & = & 3{,}439553... \\
H_8 & = & 2{,}717857... & H_{18} & = & 3{,}495108... \\
H_9 & = & 2{,}828969... & H_{19} & = & 3{,}54774... \\
H_{10} & = & 2{,}928968... & H_{20} & = & 3{,}59774...
\end{array}
$$

İlk 20 toplamda henüz 4'e varamadık, yanına bile yaklaşamadık. Bilgisayarda daha da ileri gittik. 4'ü ancak 31'inci toplamda aşabildik:

$$H_{30} = 3{,}994987...$$
$$H_{31} = 4{,}027246...$$

Ya 5'i aştık mı? Aştık. Ama oldukça geç aştık, ancak 83'üncü toplamda aşabildik:

$$H_{82} = 4{,}990021...$$
$$H_{83} = 5{,}002069...$$

6'yı da aştık. 227'nci toplamda...

$$H_{226} = 5{,}999962...$$
$$H_{227} = 6{,}004367...$$

7'yi aşmak için çok bekledik. 7'yi ancak 616'ncı terimde aşabildik:

$$H_{615} = 6{,}999652...$$
$$H_{616} = 7{,}001276...$$

8'i aşıp aşmayacağımız merak konusu... Onu da aştık:

$$H_{1673} = 7{,}99989...$$
$$H_{1674} = 8{,}00048...$$

Ya 9? 9'u aşabilir miyiz? Aştık, daha doğrusu bilgisayar aştı:

$$H_{4549} = 8{,}999995...$$
$$H_{4550} = 9{,}000215...$$

10'u, 11'i, 12'yi de aştık:

$$\begin{aligned} H_{12366} &= 9{,}999969... \\ H_{12367} &= 10{,}00005... \\ H_{33616} &= 10{,}99998... \\ H_{33618} &= 11, \ldots \\ H_{91328} &= 12{,}00001... \end{aligned}$$

Her sayıyı bir zaman sonra aşacak mıyız?

Örneğin 100'ü aşacak mıyız?

Evet aşacağız! $1{,}5 \times 10^{43}$'üncü toplamdan sonra...

Baklayı ağzımızdan çıkaralım: Yukarıdaki dizi sonsuza gider. Yani her sayıyı bir zaman sonra aşarız. Kanıtlayalım bunu.

Şu tablodaki eşitsizliklere bakalım:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} > \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}. \end{gathered}$$

Bu hesaplardan sonra dizinin neden her sayıyı aştığı anlaşılıyor:

$$H_{2^n} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ tane}} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Dolayısıyla dizi bir sayıya yakınsamaz çünkü sürekli artarak her sayıyı bir zaman sonra geçer. Bu tür diziler için özel bir terim kullanılır: Dizinin ***sonsuza gittiği*** ya da ***sonsuza ıraksadığı*** söylenir. Hatta kimi zaman, sanki sonsuz diye bir sayı varmışçasına dizi ***sonsuza yakınsar*** denir.

Matematiksel tanımı verelim:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,

$$x_n > A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin ***sonsuza gittiği*** ya da ***ıraksadığı*** söylenir ve bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

olarak yazılır.

Dikkat: Burada "sonsuz" diye bir kavramı tanımlamadık, sadece bir "dizinin sonsuza gitmesi"nin ne demek olduğunu söyledik, yani "dizi sonsuza gidiyor" kavramını tanımladık. Tanımımıza göre, sonsuza gitmek demek, **her** sayıyı belli bir aşamadan sonra **hep** geçmek demektir.

"$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$" yazıldığında aslında bir eşitlikten sözedilmemektedir, çünkü ∞ diye özel bir matematiksel nesne tanımlanmamıştır. Ama lafın gelişi ve alışkanlıklardan dolayı "$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ eşitliği"nden bahsedeceğiz. Demek ki yukarıda,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty$$

eşitliğini kanıtladık.

Örnekler

7.32. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ dizisi de sonsuza gider elbet.

7.33. Ancak,

$$0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, 1, \ldots$$

dizisi sonsuza gitmez, çünkü her iki terimin arasına konmuş olan 1'ler dizinin sonsuza gitmesini engellerler.

7.34. Terimleri $\sqrt{n}$ olan dizi sonsuza gider çünkü bu dizi artandır ve içinde $\sqrt{n^2} = n$ sayılarını barındırır, dolayısıyla her doğal sayıyı bir zaman sonra aşar.

7.35. Terimleri

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}$$

olan dizi sonsuza ıraksar çünkü,

$$\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}} = \sqrt{i+1}-\sqrt{i}$$

eşitliği geçerlidir ve dolayısıyla

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\right) = \sqrt{n+1}$$

olur. Bir önceki örneğe göre $\sqrt{n+1}$ sayısı her sayıyı aştığından dizimiz sonsuza ıraksar.

7.36. (Cauchy, 1821) *Eğer* $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \infty$ *ise* $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \infty$ *olur.*

Kanıt: $0 < A \in \mathbb{R}$ olsun. M göstergeci,

$$n > M \Rightarrow x_n > 2A$$

olacak biçimde seçilmiş olsun. O zaman $B = x_1+\cdots+x_M - 2MA$ tanımıyla, her $n > M$ için,

$$\begin{aligned}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} &= \frac{x_1+\cdots+x_M}{n} + \frac{x_{M+1}+\cdots+x_n}{n}\\ &> \frac{x_1+\cdots+x_M}{n} + \frac{2(n-M)A}{n}\\ &= 2A + \frac{x_1+\cdots+x_M-2MA}{n} = 2A + \frac{B}{n}\end{aligned}$$

buluruz. Negatif de olabilecek olan B sayısı M'ye bağımlı ama n'den bağımsız. Sağ taraftaki n'yi istediğimiz kadar büyük alabileceğimizden, n'yi yeterince büyük, diyelim belli bir P'den büyük seçersek

$$\frac{B}{n} > -A$$

olur. Şimdi $N = \max\{M, P\}$ olsun. Her $n > N$ için,

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} > 2A + \frac{B}{n} > 2A - A = A$$

olur. □

7.37. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ise ve* $(u_n)_n$ *pozitif dizisi için*

$$\lim_{n\to\infty}(u_0 + \cdots + u_n) = \infty$$

ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0x_0 + \cdots + u_nx_n}{u_0 + \cdots + u_n} = x$$

olur.

Not: $u_i = 1$ alırsak bir önceki örneği elde ederiz.

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. Her $i > N$ için $|x - x_i| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N seçelim. $n > N$ olsun.

$$\frac{\sum_{i=0}^n u_ix_i}{\sum_{i=0}^n u_i} - x = \frac{\sum_{i=0}^n u_i(x_i - x)}{\sum_{i=0}^n u_i} = \frac{\sum_{i=0}^N u_i(x_i - x)}{\sum_{i=0}^n u_i} + \frac{\sum_{i=N+1}^n u_i(x_i - x)}{\sum_{i=0}^n u_i}$$

olduğundan, üçgen eşitsizliğinden,

$$A = \left|\sum_{i=0}^N u_i(x_i - x)\right|$$

tanımıyla,

$$\left|\frac{\sum_{i=0}^n u_ix_i}{\sum_{i=0}^n u_i} - x\right| \le \frac{A}{\sum_{i=0}^n u_i} + \frac{\sum_{i=N+1}^n u_i|x_i - x|}{\sum_{i=0}^n u_i} < \frac{A}{\sum_{i=0}^n u_i} + \epsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. n'yi sonsuza götürdüğümüzde sağ taraf ϵ'a yakınsadığından ve ϵ rastgele seçildiğinden, Sandviç Teoremi'nden istediğimizi elde ederiz. □

7.38. $(y_n)_n$ *kesin artarak sonsuza ıraksayan bir dizi olsun. Eğer* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = z$ *ise* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = z$ *olur*[3].

Kanıt: $u_n = y_n - y_{n-1} > 0$ ve $u_0 = y_0$ olsun. O zaman $y_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ olur. Ve $v_n = x_n - x_{n-1}$ ve $v_0 = x_0$ olsun. O zaman $x_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ olur. Demek ki, $(u_n)_n$ pozitif artan bir diziyse ve $\lim_{n\to\infty}(u_0 + \cdots + u_n) = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} v_n/u_n = z$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} = z$$

eşitliğini kanıtlamamız lazım.

Şimdi $z_n = v_n/u_n$ tanımını yapalım. Bu tanımla, $(u_n)_n$ pozitif artan bir diziyse ve $\lim_{n\to\infty}(u_0 + \cdots + u_n) = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_0z_0 + u_1z_1 + \cdots + u_nz_n}{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} = z$$

eşitliğini kanıtlamamız lazım, ki bunu da bir önceki örnekte kanıtlamıştık. □

Uygulama olarak bir $0 < k \in \mathbb{N}$ alalım.

$$x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

[3] Analizde pek sık kullanılan L'Hospital kuralını bilene bu önerme ilginç gelecektir.

ve
$$y_n = n^{k+1}$$
olsun. Yukarıda kanıtlanana göre,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$
olur (bkz. Alıştırma 5.27).

Bir dizinin sonsuza gitmesi için, artan olması gerekmez, örneğin,
$$1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, \ldots$$
(terimleri ikişer ikişer gruplarsanız dizinin nasıl devam ettiğini anlarsınız) dizisi artan değildir ama sonsuza gider. Öte yandan aşağıdaki sonuç doğrudur:

Teorem 7.5. *Artan bir dizi ya yakınsaktır ya da sonsuza gider.*

Kanıt: Dizi sınırlıysa, o zaman limitinin olduğunu biliyoruz. Eğer sınırsızsa, o zaman belli bir N göstergecinden sonra verilmiş herhangi bir A sayısını aşar. Ama dizi artan olduğundan, o göstergeçten sonra A sayısını sürekli aşar. □

Benzer biçimde "eksi sonsuza gitme"yi de tanımlayabiliriz.

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,
$$x_n < A$$
eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin eksi sonsuza (ya da $-\infty$'a) gittiği söylenir ve bu,
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$
olarak yazılır.

Teorem 7.6. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$.

Kanıt: Kolaydır ve okura bırakılmıştır. □

Altbölümün başında ele aldığımız
$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$
dizisi çok önemlidir, çünkü bu dizi sonsuza gider ama sonlu bir sayıya gitmesine -tabiri caizdir!- ramak kalmıştır, yani sonsuza çok yavaş gider. Örneğin eğer $s > 1$ ise,
$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$$

dizisi yakınsaktır, limiti sonlu bir sayıdır, s, 1'e ne kadar yakın olursa olsun, $s = 1{,}0001$ olsa bile, yeter ki 1'den büyük olsun...

Bunu ileride, gerçel sayılarda üs almayı tanımladığımızda kanıtlayacağız. Ama okur, şimdilik, s'yi kesirli bir sayı alarak kanıtlamaya çalışabilir. Güzel ve yararlı bir alıştırmadır.

Alıştırmalar

7.39. Şu eşitlikleri kanıtlayın:

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{3+n} = -\infty.$$

7.40. Sonsuza ıraksayan iki dizinin toplamının da sonsuza gittiğini kanıtlayın.

7.41. Sonsuza ıraksayan iki dizinin çarpımının da sonsuza gittiğini kanıtlayın.

7.42. Terimleri

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

olan dizi hangi terimden sonra azalmaya başlar? (Bkz. Örnek 5.2 ve 16.9.)

7.43. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise ve $r > 0$ ise, $\lim_{n\to\infty} rx_n = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

7.44. A, onluk tabanda yazıldığında içinde 0 rakamının belirdiği pozitif doğal sayılar kümesi olsun. $\sum_{n\in A} 1/n = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

7.45. $p(X) = a_kX^k + \cdots + a_1X + a_0$ bir polinom olsun. $a_k > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

7.46. $p(X) = a_kX^k + \cdots + a_1X + a_0$ bir polinom olsun. $a_k > 0$ olsun. $q(X) = b_\ell X^\ell + \cdots + b_1X + b_0$ da bir polinom olsun ve $b_\ell > 0$ olsun. Ayrıca $k > \ell$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \infty$$

eşitliğini kanıtlayın.

7.47. α, bir 01-dizisiyse, $f_\alpha(n)$, α'nın ilk n terimindeki 1 sayısı olsun. $(f_\alpha(n)/n)_n$ dizisinin ıraksadığı bir α dizisi yaratın. Verilmiş bir $p \in [0,1]$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_\alpha(n)}{n} = p$$

eşitliğini sağlayan bir α dizisinin varlığını kanıtlayın.

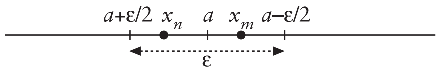
7.3 Cauchy Dizileri

Yakınsak dizinin tanımına bakılırsa, bir dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamak için önce dizinin limitini bilmek lazım gibi bir hisse kapılabilir insan. Bu bölümde, bir dizinin yakınsak olduğunu dizinin limitini bilmeden de kanıtlayabileceğimizi göreceğiz. Aslında Teorem 7.1'de de yapmıştık bunu; orada, rtan ve üstten sınırlı bir dizinin limiti olduğunu limiti bilmeden kanıtlamıştık, örneğin

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

limitinin kaç olduğunu bilmeden limitin varlığını kanıtlamıştık.

Yakınsak bir dizi limitine çok çok çok yaklaştığından, dizinin terimleri birbirlerine çok çok çok yakınlaşırlar. Nitekim eğer $\epsilon > 0$ verilmişse, a sayısına yakınsayan bir dizinin terimleri belli bir aşamadan sonra a'ya $\epsilon/2$'den daha yakın olurlar;



dolayısıyla o aşamadan sonra, dizinin terimleri birbirlerine, yukarıdaki şekilde de görüleceği üzere, ϵ'dan daha yakın olurlar. Bu tür dizilere Cauchy dizileri denir. (Koşi diye okunur.) Matematiksel tanım şöyle:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için sağlandığı bir N göstergeci varsa, $(x_n)_n$ dizisine ***Cauchy dizisi*** denir.

Tanım, Cauchy dizilerinin terimlerinin belli bir zaman sonra birbirlerine çok yakın olduklarını, daha doğrusu, Cauchy dizilerinin terimlerini birbirlerine istediğimiz kadar yaklaştırabileceğimizi söylüyor, yeter ki göstergeçleri yeterince büyük seçelim.

Cauchy olmak da, yakınsamak gibi, dizinin kuyruğunu ilgilendiren bir özelliktir. Bir dizinin başından istediğimiz kadar terim atalım ya da başına istediğimiz kadar terim ekleyelim, dizinin koşiliği bozulmaz.

Bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamak için önce rastgele bir $\epsilon > 0$ sayısı seçilir. Ardından,

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n ve m'nin ne kadar büyük olması gerektiği araştırılır. Bunun için de $|x_n - x_m|$ terimiyle dikkatli bir biçimde -terimi fazla büyütmemeye çalışılarak- oynanır.

Örnekler

7.48. $(x_n)_n$ dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlamak için, $|x_{k+1} - x_k|$ ifadesini (ardışık terimlerin farkını) küçük yapmak yetmez, çünkü $|x_{k+1} - x_k|$ ifadesi çok küçük olsa da $|x_n - x_m|$ çok küçük olmayabilir.

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

buna bir örnektir;

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{k+1}$$

olur, dolayısıyla çok küçülür ama m kaç olursa olsun, n'yi çok büyük alarak $|x_n - x_m|$ sayısını dilediğimiz kadar büyütebiliriz, örneğin 1'den büyük yapabiliriz. (Bkz. Altbölüm 7.2.)

7.49. Öte yandan eğer her k için
$$|x_k - x_{k+1}| < \frac{1}{2^k}$$
ise o zaman $(x_n)_n$ dizisi Cauchy olur. Nitekim $n > m$ olsun.
$$x_m - x_n = (x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - x_{m+2}) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)$$
olduğundan,
$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \cdots + |x_{n-1} - x_n|\\ &\leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\\ &= \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-m-1}}\right)\\ &= \frac{1}{2^m}\frac{1-1/2^{n-m}}{1/2} = \frac{1}{2^{m-1}}(1-1/2^{n-m}) < \frac{1}{2^{m-1}}\end{aligned}$$
olur. Demek ki verilmiş bir ϵ için N'yi $N > 1/\epsilon$ olacak biçimde seçersek, her $n > m > N$ için,
$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^N} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$$
olur.

7.50. Her $n > 0$ için $a_n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$ olsun, yani a_n bir rakam olsun. a_0 da herhangi bir doğal sayı olsun.
$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$
tanımını yapalım. Daha ekonomik bir yazılımla:
$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$
$(x_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir pozitif gerçel sayı olsun.
$$|x_n - x_m| < \epsilon$$
eşitsizliğinin yeterince büyük n ve m göstergeçleri için doğru olduğunu kanıtlayacağız. Sanki bu dediğimiz doğruymuş gibi davranıp, bu eşitsizliğin doğru olması için n ve m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulalım. $n \geq m$ varsayımını yapabiliriz çünkü
$$|x_n - x_m| = |x_m - x_n|.$$
Şimdi $|x_n - x_m|$ ifadesiyle oynayalım:
$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i} - \sum_{i=1}^{m} a_i 10^{-i}\right| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i}\right|\\ &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i} \leq \sum_{i=m+1}^{n} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \cdot \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i}\\ &= 9 \cdot 10^{-m-1} \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i+m+1} = 9 \cdot 10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} 10^{-j}\\ &= 9 \cdot 10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} \frac{1}{10^j} = 9 \cdot 10^{-m-1} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-m}}}{1 - \frac{1}{10}}\\ &= 9 \cdot 10^{-m-1} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-m}}}{\frac{9}{10}} = 10^{-m}\left(1 - \frac{1}{10^{n-m}}\right) \leq 10^{-m}.\end{aligned}$$

Üçüncü satırda son eşitlikte $j = i - m - 1$ değişikliğini yaptık. Dördüncü satırda Önsav 3.14'te kanıtlanan eşitliği $a = 1/10$ için kullandık.
Yukarıdaki hesaptaki eşitsizliklerin her biri son derece ekonomiktir: İkinci satırdaki eşitsizlik zorunlu bir eşitsizliktir, çünkü a_i'lerin her biri bal gibi de 9 olabilirler. Son satırdaki eşitsizlik de zorunlu, çünkü m sabit kalıp n çok büyüdüğünde (sonsuza gittiğinde), $1 - 1/10^{n-m}$ sayısı 1'e kadar dayanır.
Bu hesaptan, 10^{-m}'yi ϵ'dan küçük yapmamız gerektiğini anlıyoruz.

$$0 < 10^{-1} < 1$$

olduğundan, Teorem 6.1'e göre,

$$\lim_{m\to\infty} 10^{-m} = 0$$

olur. Dolayısıyla öyle bir N vardır ki, her $m > N$ için, $10^{-m} < \epsilon$ olur. □

Alıştırma 7.51. *$0 \leq c < 1$ olsun. $(a_n)_n$ dizisinin terimleri $n \geq 1$ için $|a_{n+1} - a_n| < c^n$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman $(a_n)_n$ dizisi bir Cauchy dizisidir.* İpucu: Örnek 7.49.

Görüldüğü gibi bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamak her zaman kolay olmayabilir. Ama çoğu zaman bir dizinin limiti bilinemeyeceğinden, bilinebilse de bulmak kolay olmayabileceğinden, Cauchy dizisi kavramı çok yararlıdır.

İlk paragrafta her yakınsak dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu söyledik ve bunun edebi bir kanıtını verdik. Bunu matematiksel olarak kanıtlayalım:

Teorem 7.7. *Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.*

Kanıt: $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi olsun. $\epsilon > 0$, herhangi bir pozitif gerçel sayı olsun. Dizinin limitine a diyelim. Demek ki, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \epsilon/2$$

olur. Dolayısıyla, $n, m > N$ için,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Kanıt tamamlanmıştır. □

Sonuç 7.8. *$(a_n)_n$ bir dizi olsun.*

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olsun. Eğer $(s_n)_n$ dizisi yakınsaksa $(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsar.

Kanıt: $\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun. $(s_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan, bir Cauchy dizisidir, dolayısıyla, her $n, m > N$ için,

$$|s_m - s_n| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N vardır. Böyle bir N'yi sabitleyelim. Eğer $n > N+1$ ise, yukarıdaki m yerine $n-1$ alarak,

$$|s_n - s_{n-1}| < \epsilon$$

buluruz. Ama $s_n - s_{n-1} = a_n$ olduğundan, bu da $|a_n| < \epsilon$ demek olur ve böylece aradığımız sonuç kanıtlanır.

İkinci Daha Basit Kanıt: $a_n = s_n - s_{n-1}$ ve $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ olduğundan, sonuç hemen çıkar. □

Sonuç 7.9. *Eğer $(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, terimleri*

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olarak tanımlanan $(s_n)_n$ dizisi yakınsak değildir. □

Yukarıdaki sonuçların tersi doğru değildir, yani bir $(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsayabilir ama terimleri,

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olarak tanımlanan $(s_n)_n$ dizisi yakınsamayabilir. Örneğin, $n \geq 1$ için,

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

alırsak $(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsar ama terimleri

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

olan dizi bildiğimiz gibi sonsuza gider (Altbölüm 7.2), yakınsamaz.

Bir Cauchy dizisinin terimleri birbirlerine çok yakın olduğundan, bir Cauchy dizisinin sınırlı olması şaşırtıcı olmamalı. Nitekim öyledir, Cauchy dizileri sınırlıdır. Bunu şimdi kanıtlayacağız.

Birkaç sayfa sonra, Teorem 8.5'te her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayacağız, bundan da her Cauchy dizisinin sınırlı olduğu çıkar, ama bu bir kanıt sayılmaz çünkü zaten her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki bu olguya gereksineceğiz.

Teorem 7.10. *Her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. Tanımdaki ϵ'u, örneğin, 1 seçelim. Demek ki, öyle bir N göstergeci vardır ki, her $n, m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < 1$$

olur. Demek ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - x_{N+1}| < 1$$

olur; bir başka deyişle,

$$x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1$$

olur. Şimdi

$$b = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} + 1\}$$

ve

$$a = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} - 1\}$$

olsun. O zaman, her n için, $a \leq x_n \leq b$ olur. □

Alıştırmalar

7.52. Eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse $(|x_n|)_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.53. Eğer $(x_n^2)_n$ bir Cauchy dizisiyse $(|x_n|)_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.54. Monoton ve sınırlı bir dizinin Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.55. İki Cauchy dizisinin toplamının, farkının ya da çarpımının da Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.56. Eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse ve $p(X)$ bir polinomsa, $(p(x_n))_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.57. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\{n \in \mathbb{N} : x_n < a\}$ ve $\{n \in \mathbb{N} : x_n > a\}$ kümeleri sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsadığını kanıtlayın.

7.58. Eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse ve 0'a yakınsamıyorsa, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı ve bir $\delta > 0$ olduğunu kanıtlayın.

7.59. Eğer $(x_n)_n$ Cauchy dizisi 0'a yakınsamıyorsa ve her terimi 0'dan farklıysa, her n için, $|x_n| > \delta_1$ eşitsizliğinin doğru olduğu pozitif bir δ_1 sayısının varlığını kanıtlayın.

7.60. Eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ birer Cauchy dizisiyse, her n için $y_n \neq 0$ ise ve $(y_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, $(x_n/y_n)_n$ dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayın.

7.61. Diziler kümesi üzerine şu ilişkiyi tanımlayalım:

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow (x_n - y_n)_n \text{ Cauchy dizisidir.}$$

Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın.

7.62. Diziler kümesi üzerine şu ilişkiyi tanımlayalım:

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın.

7.63. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Sabit bir $r \in (0, 1)$ ve her n için, $|x_{n+1}| \leq r|x_n|$ olsun. $\left(\sum_{i=0}^n x_i\right)_n$ dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlayın.

8. Gerçel Sayıların Tamlığı

Yakınsak bir dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu Teorem 7.7'de kanıtlamıştık. Bu bölümde her Cauchy dizisinin (gerçel sayılar kümesinde) yakınsak olduğunu kanıtlayacağız. Önce altdizi kavramından başlayacağız, ana teoremimizi ikinci altbölümde kanıtlayacağız.

8.1 Altdiziler

Herhangi bir dizi ele alalım:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

ve bu dizinin içinden göstergeci çift olan terimleri seçelim:

$$x_0,\ x_2,\ x_4,\ x_6,\ \ldots$$

Bu ikinci dizi, birincisinin ***altdizisidir***. Bir başka altdizi, göstergeci asal olan terimlerden seçilebilir:

$$x_2,\ x_3,\ x_5,\ x_7,\ x_{11},\ \ldots$$

Ya da dizinin ilk birkaç terimini silip bir başka altdizi elde edebiliriz:

$$x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ \ldots$$

Öte yandan,

$$x_3,\ x_2,\ x_5,\ x_7,\ x_{11},\ \ldots$$

dizisi yukarıdaki ilk dizinin bir altdizisi olmayabilir, çünkü göstergeçler artan bir biçimde seçilmemiş, ilk iki terimde terslik var. Ancak x_3 terimi x_0 ya da x_1'e eşitse bu dizi birinci dizinin bir altdizisi olabilir. Eğer x_3 terimi x_0, x_1 ya da x_2'ye eşit değilse

$$x_3,\ x_3,\ x_5,\ x_7,\ x_{11},\ \ldots$$

dizisi de en baştaki dizinin bir altdizisi olmayabilir.

Tanımı hissettirdikten sonra matematikselleşelim. Bir $(x_n)_n$ dizisi verilmiş olsun. Ayrıca, sürekli artan, yani her k için $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi verilmiş olsun. O zaman, $(x_{n_k})_k$ dizisine $(x_n)_n$ dizisinin ***altdizisi*** adı verilir.

Eğer $y_k = x_{n_k}$ tanımını yaparsak, $(x_{n_k})_k = (y_k)_k$ olur ve böylece alışık olduğumuz $(y_k)_k$ yazılımına kavuşuruz.

Tanımı şöyle de verebilirdik. $A \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz bir altküme olsun. O zaman, göstergeçlerine göre doğal olarak sıralanmış $(x_k)_{k\in A}$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir. Örneğin $A = 2\mathbb{N}$ ise, elde ettiğimiz altdizi $x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots$ altdizisi olur.

Bir başka deyişle, bir altdizi, bir

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots$$

dizisinden bazı terimlerin atılmasıyla elde edilen bir dizidir. Örneğin, yukarıdaki diziden bazı terimleri silerek,

$$\cancel{x_0},\ x_1,\ \cancel{x_2},\ x_3,\ x_4,\ \cancel{x_5},\ x_6,\ \ldots$$

altdizisini, yani

$$x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_6, \ldots$$

altdizisini elde ederiz.

Eğer şansımız yaver gider de, $x_3 = x_0$ ya da $x_3 = x_1$ olursa, o zaman,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi olur, yoksa olmaz.

Altdizilerde sık sık kanıtı çok basit olan şu olgu kullanılır: Kesin artan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi için, $k \le n_k$ olur. Bunu k üzerine tümevarımla kanıtlayabiliriz. Eğer $k = 0$ ise sorun yok, çünkü ne de olsa doğal sayı dizilerinden sözediyoruz. Eğer $k \ge 0$ ise ve $k \le n_k$ ise, o zaman,

$$k + 1 \le n_k + 1 \le n_{k+1}$$

olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

İlk teoremimizde bu olguyu kullanacağız.

Teorem 8.1. *Bir Cauchy dizinin her altdizisi Cauchy'dir.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir Cauchy dizisi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. Öyle bir N var ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Şimdi eğer k, $\ell > N$ ise $N < k \le n_k$ ve $N < \ell \le n_\ell$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - x_{n_\ell}| < \epsilon$$

olur. Bu da bizim kanıtlamak istediğimizdi. □

Benzer sonuç yakınsak diziler için de geçerlidir.

Teorem 8.2. *Yakınsak bir dizinin altdizisi de yakınsaktır ve iki dizi aynı limite yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir a sayısına yakınsayan bir dizi olsun, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. Öyle bir N var ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Şimdi eğer $k > N$ ise $N < k \leq n_k$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Teorem 8.2'nin tersi yanlıştır elbet, yani yakınsak bir altdizinin varlığı dizinin yakınsak olduğu anlamına gelmez, mesela $((-1)^n)_n$ dizisinin, sabit 1 dizisi ve sabit -1 dizisi olmak üzere iki altdizisi vardır. Ancak şu teorem geçerlidir:

Teorem 8.3. *$(x_n)_n$ bir dizi ve A ve B, bileşimleri $\mathbb{N}$ olan iki sonsuz altküme olsun. Eğer $(x_n)_{n\in A}$ ve $(x_n)_{n\in B}$ altdizileri yakınsaksa ve aynı sayıya yakınsıyorlarsa o zaman $(x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve bu ortak limite yakınsar.*

Kanıt: Ortak limite ℓ diyelim. $\epsilon > 0$ olsun. Varsayıma göre

$$(n \in A \text{ ve } n > N_A) \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon$$

ve

$$(n \in B \text{ ve } n > N_B) \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon$$

önermelerini sağlayan N_A ve N_B sayıları vardır. $N = \max\{N_A, N_B\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, $|x_n - \ell| < \epsilon$ olur. □

Şimdi yukarıdakilerden daha zor ve daha fazla uygulaması olan bir sonuç kanıtlayacağız.

Teorem 8.4. *Bir Cauchy dizisinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir Cauchy dizisi olsun. $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin yakınsak bir altdizisi olsun, diyelim a'ya yakınsasın. $(x_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız.

$\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. $|x_n - a|$ sayısının bir zaman sonra, yani belli bir göstergeçten sonra ϵ'dan küçük olduğunu göstereceğiz. Her zaman yaptığımız gibi,

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için, soldaki $|x_n - a|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadeyi bildiğimiz **küçük** ifadeler cinsinden üstten sınırlayacağız.

k herhangi bir doğal sayı olsun. Üçgen eşitsizliğinde

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$$

elde ederiz. En sondaki

$$|x_n - x_{n_k}| \text{ ve } |x_{n_k} - a|$$

ifadelerinin her birini küçültmeye çalışmalıyız. Birinci ifade $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, ikinci ifade ise $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından küçülür. Ayrıntılar önemli, ayrıntıları yazalım. Her iki ifadeyi de $\epsilon/2$'den küçük yapacağız.

Birinci ifadeden başlayalım. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2$$

olur. Demek ki eğer k, $n > N$ ise, $n_k \ge k > N$ olur ve

$$|x_n - x_{n_k}| < \epsilon/2$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci ifadeye geçelim. $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $k > N_1$ için,

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi k, hem N'den hem de N_1'den büyük herhangi bir sabit göstergeç olsun. Her $n > k$ için,

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

elde ederiz. Bu da teoremi kanıtlar. □

Örnekler

8.1. *$a > 0$ ise $\lim_{n\longrightarrow\infty} a^{1/n} = 1$ olur.*

Kanıt: Gerekirse a yerine $1/a$ alarak $a > 1$ varsayımını yapabiliriz. Bu varsayımla $a^{n+1} > a^n > 1$ çıkar, dolayısıyla dizi azalır. Bundan da dizinin 1'den büyükeşit bir limiti olduğu çıkar. Limite x diyelim $(a^{1/2n})_n$ dizinin bir altdizisidir, dolayısıyla Teorem 8.4'e göre x'e yakınsar. Öte yandan $a^{1/2n} = \sqrt{a^{1/n}}$ olduğundan aynı dizi $\sqrt{x}$'e de yakınsar. Demek ki $x = \sqrt{x}$ ve $x = 1$. □

8.2. $\lim_{n\longrightarrow\infty} n^{1/n} = 1$ *olur.*
Kanıt: Önce dizinin zamanla azalan olduğunu, yani $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)}$, yani $n^{n+1} > (n+1)^n$, yani

$$n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliğinin zamanla doğru olduğunu kanıtlayalım. Ama Önsav 3.23'ten dolayı bu son eşitsizliği $n \geq 4$ için biliyoruz. Demek ki dizi zamanla azalır ve dizinin 1'den büyükeşit bir limiti vardır. Limite x diyelim. Terimleri $(2n)^{1/2n}$ olan dizi bu dizinin bir altdizisi olduğundan Teorem 8.4'e göre bu altdizi de x'e yakınsar. Öte yandan

$$(2n)^{1/2n} = 2^{1/2n} n^{1/2n}$$

olduğundan, Örnek 8.1'e göre aynı dizi $\sqrt{x}$'e de yakınsar. Demek ki $x = \sqrt{x}$ ve $x = 1$. □

8.3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ *limitini bulun.*
Birinci Çözüm: $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ eşitliğinden ve yukarıdaki iki alıştırmadan sonuç kolaylıkla 1 bulunur.
İkinci Çözüm: $n \leq 1^2+2^2+\cdots+n^2 \leq n\times n^2 = n^3$ eşitsizliklerinden ve yukarıdaki alıştırmadan kolaylıkla çıkar.

8.4. [A] $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ *ve her* $n \geq 1$ *için,*

$$a_{2n+1} = \frac{a_{2n}+a_{2n-1}}{2} \text{ ve } a_{2n+2} = \frac{a_{2n}a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$$

olsun. $(a_n)_n$ *dizisinin 4'e yakınsadığını kanıtlayın.*
Çözüm: İkinci formülden her $n \geq 1$ için $a_{2n+1}a_{2n+2} = a_{2n-1}a_{2n}$ eşitliği çıkar, demek ki $a_{2n-1}a_{2n} = a_1a_2 = 2\times 8 = 16$, yani

$$a_{2n-1} = \frac{16}{a_{2n}}. \tag{1}$$

Buradan ve birinci formülden, kolaylıkla,

$$a_{2n+2} = 32\frac{a_{2n}}{a_{2n}^2+16}$$

bulunur. $b_n = a_{2n}$ olsun. O zaman $(b_n)_n$ dizisi $(a_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir ve $b_1 = a_2 = 8$ ve

$$b_{n+1} = 32\frac{b_n}{b_n^2+16} \tag{2}$$

olur. (2)'den kolaylıkla,

$$b_{n+1} \geq b_n \Leftrightarrow b_n \leq 4$$

çıkar. Ne yazık ki b_1'in 4'ten küçükeşit olduğu doğru değil, ama

$$b_2 = 32\frac{b_1}{b_1^2+16} = 32\frac{8}{8^2+16} = \frac{16}{5} \leq 4$$

olur. Bakalım b_n terimleri bir zaman sonra hep 4'ten küçük oluyor mu. (2) kullanılarak yapılan kolay bir hesapla

$$b_{n+1} \leq 4 \Leftrightarrow (b_n-4)^2 \geq 0$$

bulunur. Demek ki $(b_n)_n$ dizisi $n = 2$'den sonra artan ve 4 tarafından üstten sınırlı, dolayısıyla bir limiti var. (1)'e göre bu limit

$$x = 32\frac{x}{x^2+16}$$

eşitliğini sağlamalı, yani limit 4 olmalı. Demek ki

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 4.$$

(1)'den dolayı $(a_{2n+1})_n$ dizisinin de limiti var ve bu limit de $16/4 = 4$'e eşit. Teorem 8.3'e göre $(a_n)_n$ dizisi yakınsaktır ve 4'e yakınsar. □

8.5. *Artan bir dizinin yakınsak bir altdizisi varsa, dizinin de limiti olduğunu ve limitlerin eşit olduklarını kanıtlayın.*

Kanıt: $(a_n)_n$ artan bir dizi olsun. Artan bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu için, $(a_{f(n)})_n$ altdizisinin a'ya yakınsadığını varsayalım. $(a_n)_n$ dizisinin limitinin a olduğunu kanıtlayacağız. Bu amaçla bir $\epsilon > 0$ seçelim. Öyle bir M seçelim ki her $n > M$ için

$$a - \epsilon < a_{f(n)} < a + \epsilon$$

olsun. $N = f(M+1)$ ve $n > N$ olsun. O zaman, $M + 1 > M$ olduğundan,

$$a_n \geq a_N = a_{f(M+1)} > a - \epsilon$$

olur. Bu, kanıtlamak istediğimizin yarısıydı. Şimdi diğer yarıyı kanıtlayalım. Hâlâ daha $n > N$. Diyelim $a_n \geq a + \epsilon$. O zaman, $n \leq f(n)$ eşitsizliğinden dolayı,

$$a + \epsilon \leq a_n \leq a_{f(n)}$$

olur. Ama $n > N = f(M+1) \geq M + 1 > M$ olduğundan bu bir çelişkidir. Demek ki $a_n < a + \epsilon$. □

Alıştırmalar

8.6. Her altdizisinin dizinin kendisine eşit olduğu diziler hangi dizilerdir?

8.7. Sadece iki altdizisi olan tüm dizileri bulun.

8.8. Monoton bir dizinin yakınsak bir altdizisi varsa dizinin kendisinin de yakınsak olduğunu kanıtlayın.

8.9. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsasın. Bu iki diziyi şu yöntemle karalım: A ve B, $\mathbb{N}$'nin $\mathbb{N} = A \cup B$ eşitliğini sağlayan iki ayrık ve sonsuz altkümesi olsun.

$$f : A \longrightarrow \mathbb{N} \text{ ve } g : B \longrightarrow \mathbb{N}$$

iki artan eşleme olsun. (f ve g biriciktirler.)

$$z_n = \begin{cases} x_{f(n)} & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \\ y_{g(n)} & \text{eğer } n \in B \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Böylece $(z_n)_n$ dizisini elde ederiz. Örneğin,

$$x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ x_3,\ y_3,\ x_4,\ y_4,\ \ldots$$

bu yöntemle elde edilmiş bir dizidir ve burada $A = 2\mathbb{N}$ ve $B = 2\mathbb{N} + 1$ alınmıştır. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için $a = b$ eşitliğinin gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayın.

8.10. Eğer her n için $x_n \leq x_{n+1}$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $(x_n)_n$ dizisine ***artan dizi*** adını veriyoruz. ***Azalan dizi*** de benzer şekilde tanımlanır. Her dizinin ya azalan ya da artan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın. (Sonraki iki alıştırmaya bakabilirsiniz.)

8.11. $(a_n)_n$, en büyük terimi olmayan bir diziyse $(a_n)_n$'nin artan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın; yani öyle artan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisinin olduğunu gösterin ki, her k için, $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$ olsun.

8.12. $(a_n)_n$ bir dizi olsun. İlk k terimi atarak $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ altdizisini elde ederiz. Bu diziye $(a_n)_n$ dizisinin k-kesilmiş altdizisi diyelim. Eğer $(a_n)_n$ dizisinin her k-kesilmiş altdizisinin bir en büyük terimi varsa ve bu terime q_k adını verirsek, o zaman $(q_k)_k$ dizisinin $(a_n)_n$ dizisinin azalan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın. (Bu altdizi elbette $(a_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir.)

8.13. $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ dizisinin altdizileri kümesinin kardinalitesi kaçtır?

8.14. Sonsuza ıraksayan bir dizinin her altdizisinin de sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

8.15. Üstten sınırlı olmayan bir dizinin sonsuza ıraksayan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın.

8.16. Sınırlı bir dizinin bir Cauchy altdizisi olduğunu kanıtlayın.

8.17. Yazı gelene kadar yazı-tura atıyorsunuz. Ortalama kaç kez para atarsınız?

8.18. Yazı-tura atıyorsunuz. Yazı gelirse 1 puan, tura gelirse 0 puan alıyorsunuz. Ortalama kaç atışta n puanı tutturursunuz?

8.19. Sandviç teoreminin şu daha genel versiyonunu kanıtlayın: *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \le y_n \le z_n$ eşitsizlikleri sonsuz sayıda n için doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlarsa, $(y_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve diğer dizilerle aynı sayıya yakınsar.*

8.20. Bölüm 7'nin sonundaki alıştırmalara yeniden göz atın. Belki şimdi bazılarını daha kolay yapabilirsiniz.

8.2 Gerçel Sayıların Tamlığı

Yakınsak bir dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu Teorem 7.7'de kanıtlamıştık. Bu altbölümde her Cauchy dizisinin (gerçel sayılar kümesinde) yakınsak olduğunu kanıtlayacağız:

Teorem 8.5. *Her Cauchy dizisinin $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır.*

Aynı olgu kesirli sayılar kümesi için geçerli değildir, yani Cauchy dizisi olan ama limiti kesirli sayı olmayan kesirli sayı dizileri vardır. Henüz kanıtlamadık ama genel terimi $(1 + 1/n)^n$ olan dizi böyle bir dizidir. Örnek 9.1'de

$$x_0 = 1 \text{ ve } x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

olarak tanımlanan kesirli sayı dizisinin kesirli bir sayı olmayan $\sqrt{2}$'ye yakınsadığını göreceğiz. Demek ki Teorem 8.5'i kanıtlamak için, gerçel sayılara özgü, kesirli sayılarda doğru olmayan bir olgu kullanılmalı. Bu olgu da ancak SUP aksiyomu olabilir.

Teorem 8.5'in Kanıtı: Aslında bu aşamada teoremin kanıtı oldukça kolay. $(x_n)_n$ verilmiş bir Cauchy dizisi olsun. Kanıtımız için şu aşamalardan geçeceğiz:

1. $(x_n)_n$'nin monoton bir $(y_n)_n$ altdizisini bulacağız.

2. $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır (Teorem 7.10). Demek ki $(y_n)_n$ altdizisi de sınırlıdır.

3. Monoton ve sınırlı olduğundan, $(y_n)_n$ dizisi yakınsaktır (Sonuç 7.4).

4. Yukarıdaki maddeden $(x_n)_n$'nin yakınsak olduğu çıkar (Teorem 8.4).

2, 3 ve 4'üncü aşamalardan zaten geçmişiz ve sadece birinci aşamayı kanıtlamak kalmış. Kanıtlayalım.

Teorem 8.6. *Her dizinin monoton bir altdizisi vardır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ herhangi bir dizi olsun. Eğer bir n göstergeci için, $a_n \leq a_m$ eşitsizliği n'den büyük her m göstergeci için sağlanıyorsa, n'ye, bu kanıtlık, "iyi göstergeç" diyelim. Eğer sonsuz sayıda iyi göstergeç varsa artan bir altdizi seçmek kolaydır: $(a_k)_k$ artan bir altdizidir. Eğer sonlu sayıda iyi göstergeç varsa ve N iyi göstergeçlerin sonuncusuysa, her $n > N$ için, $a_n > a_m$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $m > n$ vardır. Bu durumda da (kesin) azalan bir altdizi kolaylıkla bulunur. □

Teorem 8.5, "$\mathbb{R}$ **tamdır**" olarak ifade edilir.

Alıştırmalar

8.21. $r \in (0,1)$ olsun. $(nr^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını kanıtlayın. Bundan dizinin limiti olduğunu çıkarın. Bundan da limitin 0 olduğunu kanıtlayın.

8.22. $r \in (0,1)$ olsun. Terimleri
$$x_n = r + 2r^2 + \cdots + nr^n$$
olan dizinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlayın.

8.3 Onluk Tabanda Açılım

Ta ilkokuldan beri gerçel sayıları

$$56{,}4593729889376283\ldots$$

gibi onluk tabanda yazmışızdır. Bu o kadar içimize işlemiştir ki, birçok kişi bu tür ifadeleri gerçel sayıların tanımı olarak kabul eder. Gerçekten de böyle öğretilmiştir ilk ve ortaöğretimde ve bu yüzden de birçok kişi anlaşılır (hatta haklı!) ama yanlış olarak 0,9999... sayısını 1'den küçük zanneder. Ama bu kitapta gerçel sayıları böyle onluk tabanda yazılmış biçimde vermedik. Gerçel sayıları aksiyomatik olarak tanımladık. Dolayısıyla bizim tanımladığımız gerçel sayılar kümesiyle ilkokul öğretmeninin tanımladığı gerçel sayılar kümesinin aynı kümeler olup olmadığı yanıtı merakla beklenen bir soru olmalıdır!

$x \geq 0$, herhangi bir doğal sayı olsun. x'in,

$$56{,}4593729889376283\ldots$$

gibi yazılan bir ifadeye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Şimdilik hem

$$56{,}4593729889376283\ldots$$

ifadesinin ne demek olduğunu bildiğimizi, hem de

$$x = 56{,}4593729889376283\ldots$$

eşitliğini varsayalım ve sağdaki sayının 56'sını ve virgülden sonraki rakamlarını x cinsinden teker teker bulalım. En baştaki 56'nın x cinsinden nasıl yazılacağı belli: 56, x'in tamkısmıdır:

$$56 = [x]\,.$$

56'yı başarıyla bulduk.

Ya virgülden sonraki ilk rakam olan 4'ü nasıl buluruz? Oldukça kolay:

$$x - [x] = 0{,}4593729889376283\ldots$$

olduğundan,

$$10\,(x - [x]) = 4{,}593729889376283\ldots$$

olur ve

$$[10\,(x - [x])] = [4{,}593729889376283\ldots] = 4$$

buluruz.

Yukarıdaki yöntem,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

rakamları için,

$$0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

olarak yazılan sayının a_1'ini buluyor: Eğer $a = 0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ ise,

$$a_1 = [10\,(a - [a])]$$

olur.

Bu yöntemi tekrar tekrar uygulayarak x'in rakamlarını teker teker bulabiliriz. Bunun için şu tanımları yapalım:

$$\begin{array}{ll}
x_0 = x = 56{,}4593729889376283\ldots, & a_0 = [x_0] = 56,\\
x_1 = 10(x_0 - a_0) = 4{,}593729889376283\ldots, & a_1 = [x_1] = 4,\\
x_2 = 10(x_1 - a_1) = 5{,}93729889376283\ldots, & a_2 = [x_2] = 5,\\
x_3 = 10(x_2 - a_2) = 9{,}3729889376283\ldots, & a_3 = [x_3] = 9,\\
x_4 = 10(x_3 - a_3) = 3{,}729889376283\ldots, & a_4 = [x_4] = 3,\\
\ldots &
\end{array}$$

Böylece x sayısının onluk tabanda gösteriminin

$$56,\ 4,\ 5,\ 9,\ 3,\ 7,\ \ldots$$

rakamlarının her birini x cinsinden yazabiliriz. Bu rakamlara, yukarıda yaptığımız gibi,

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots$$

adlarını verelim. Şimdi de,

$$a_0, a_1a_2a_3a_4 \ldots$$

olarak yazacağımız sayıyı tanımlayalım. Örnek 7.50'de, terimleri,

$$y_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

olarak tanımlanan $(y_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu kanıtlamıştık. Teorem 8.5'te ise, her Cauchy dizisinin gerçel sayılarda bir limiti olduğunu kanıtlamıştık. Demek ki $(y_n)_n$ dizisinin gerçel sayılarda bir limiti vardır. Şimdi $a_0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$ ifadesinin tanımını verebiliriz:

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Birazdan bu limitin en başta başladığımız sayı olan x olduğunu kanıtlayacağız. Önce tanımları tekrarlayalım ve bir örnek verelim.

Tanım. $a_0 \in \mathbb{N}$ ve $i > 0$ için $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ olsun.

$$y_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

olsun. O zaman $(y_n)_n$ bir Cauchy dizisidir; dolayısıyla bir limiti vardır. Bu limit,

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$$

olarak yazılır. Demek ki, tanım gereği,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots\right) = a_0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$$

olur.

Örnek 8.23. Bu örnekte şu teoremi kanıtlayacağız:
Teorem. $0{,}9999\ldots = 1$.
Kanıt: Yukarıdaki tanıma göre, soldaki sayı, terimleri

$$y_n = 0 + \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}$$

olarak tanımlanan $(y_n)_n$ dizisinin limitidir. Demek ki,

$$\begin{aligned} 0{,}999\ldots &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n}\right)\\ &= \frac{9}{10} \times \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)\\ &= \frac{9}{10} \times \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-1/10^n}{1-1/10}\right) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-1/10} = 1. \end{aligned}$$

Ve böylece istenen eşitlik kanıtlanmış oldu. Eşitliği kanıtlamak için $0{,}999999\ldots$ ifadesinin tanımını bilmemiz gerektiğini dikkatinize sunarız. □

Şimdi, her pozitif gerçel sayının $a_0,a_1a_2a_3a_4\ldots$ türünden bir açılımı olduğunu matematiksel olarak kanıtlayalım.

Teorem 8.7. *$x > 0$ bir gerçel sayı olsun. $x_0 = x$ ve $a_0 = [x_0]$ olsun. Ve $n \geq 1$ için, x_n ve a_n'yi şöyle tanımlayalım: Her $n \geq 0$ için*

$$x_{n+1} = 10(x_n - a_n) \text{ ve } a_{n+1} = [x_{n+1}].$$

O zaman $a_0 \in \mathbb{N}$, her $n \geq 1$ için $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ve

$$x = a_0,a_1a_2a_3a_4\ldots$$

olur.

Kanıt: $a_0 \in \mathbb{N}$ olduğu belli. $n \geq 0$ için,

$$x_{n+1} = 10(x_n - a_n) = 10(x_n - [x_n]) \text{ ve } 0 \leq x_n - [x_n] < 1$$

olduğundan,

$$0 \leq x_{n+1} < 10$$

olur ve buradan da,

$$a_{n+1} = [x_{n+1}] \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

çıkar.

Şimdi kanıtın önemli kısmına geçelim.

$$x = a_0,a_1a_2a_3a_4\ldots$$

eşitliğini kanıtlayalım. Yani

$$y_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

ise,

$$x = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğini kanıtlayalım. Önce, n üzerine tümevarımla,

$$10^n(x - y_n) = x_n - a_n$$

eşitliğini kanıtlayalım. $n = 0$ için, $x - y_0 = x_0 - a_0$ eşitliğini kanıtlamamız gerekir ki, bu da, $x = x_0$ ve $y_0 = a_0$ eşitliklerinden hemen çıkar. Şimdi eşitliği n için varsayıp $n + 1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} 10^{n+1}(x - y_{n+1}) &= 10^{n+1}\left(x - y_n - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\right) = 10 \cdot 10^n(x - y_n) - a_{n+1} \\ &= 10(x_n - a_n) - a_{n+1} = x_{n+1} - a_{n+1} \end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Şimdi, yukarıdakini kullanarak, her n için,

$$x - y_n = \frac{10^n(x - y_n)}{10^n} = \frac{x_n - a_n}{10^n} = \frac{x_n - [x_n]}{10^n}$$

buluruz ve bundan da

$$0 \leq x - y_n < \frac{1}{10^n}$$

çıkar. Sandviç Teoremi (Teorem 5.1) sayesinde teorem kanıtlanmış olur. □

Eğer $x = a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ ise, $a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ gösterimine x'in ***onluk tabanda açılımı*** denir.

Eğer $x \leq 0$ ise ve $-x$'in onluk tabanda açılımı

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

ise,

$$x = -a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

yazarız. Bu da negatif x'in onluk tabanda açılımıdır.

Sonuç 8.8. *Her x gerçel sayısı, bir kesirli sayı dizisinin limitidir. Kesirli sayı dizisinin terimlerini, $a_n \in \{0, 1\ldots, 9\}$ rakamları için (onluk tabanda yazılımıyla),*

$$x_n = [x]{,}a_1a_2\ldots a_n$$

olarak alabiliriz. □

Vize Sınavı

1. $r \in \mathbb{R}$ olsun. A, r'den küçük rasyoneller (kesirli sayılar) ve B, r'den küçük irrasyoneller kümesi olsun.
$$\sup A = \sup B = r$$
eşitliklerini kanıtlayın.
2. Aşağıdaki formülleri n üzerine tümevarımla kanıtlayın:
a. $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$,
b. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$,
c. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$,
d. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$.
3. $A = \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{N}\}$ olsun. A'nın çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın.
4. $B = \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\}$ olsun. B'nin çarpma ve bölme altında kapalı olduğunu kanıtlayın.
5. $\mathbb{R}$'nin (ya da $\mathbb{Q}$'nün) çıkarma ve bölme altında kapalı bir altkümesinin toplama ve çarpma altında da kapalı olduğunu kanıtlayın.
6. a. B, 4'üncü alıştırmadaki gibi olsun. $u, v \in \mathbb{Q}^{>0}$ için, ya $uB \cap vB = \varnothing$ ya da $uB = vB$ olduğunu kanıtlayın. b. $\{uB : u \in \mathbb{Q}^{>0}\}$ kümesinin sonsuz olduğunu kanıtlayın.

Limit Alıştırmaları

1. Limitin tanımına giderek $(1/n)_n$ dizisinin 1'e yakınsamadığını gösterin.
2. Genel terimi $(-1)^n/n$ olan dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.
3. Genel terimi $(n+4)/(n^2+1)$ olan dizinin bir zaman sonra azalan olduğunu ve limitinin 0 olduğunu kanıtlayın.
4. Her terimi pozitif olan ve 0'a yakınsayan ama bir zaman sonra hep azalmayan bir dizi bulun.
5. Her terimi pozitif olan ve 0'a yakınsayan bir dizinin artan bir altdizisi olabilir mi?
6. Aşağıdaki dizilerin limitlerini (varsa) bulun.

a. $\dfrac{3n-4}{n+7}$ b. $\dfrac{2n-7}{n^2-10}$ c. $\dfrac{3n^2-4}{n+7}$ d. $\dfrac{2n^2+n}{n^2+1}$ e. $\dfrac{n^3}{2^n}$

f. $\dfrac{\sqrt{2n-7}}{\sqrt{n-10}}$ g. $\dfrac{3^n}{n!}$ h. $\dfrac{n!}{(2n)!}$ i. $\dfrac{n!}{n^n}$ j. $\dfrac{n^4}{n!}$

k. $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$ l. $n^{1/n}$ m. $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ n. $n^{3/2}\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)$

7. Aşağıdaki limitleri bulun:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2-6n+7}}{3n+5}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-2n}-n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})(2+7\sqrt{n})}{3n+5}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 5^n - 3\cdot 5^{3n}}{2\cdot 5^{n-1}+7\cdot 5^{2n-1}}.$$

8. $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (2a_n + 5)/3$ olsun.
   a. Her n için $a_n < 5$ eşitsizliğini gösterin.
   b. Dizinin artan olduğunu gösterin.
   c. Dizinin limitinin olduğunu gösterin.
   d. Dizinin limitinin 5 olduğunu gösterin.
9. Aşağıdaki diziler yakınsak mıdır? Eğer öyleyse limitlerini bulun.

$$\begin{aligned}
&a_0 = 2 \text{ ve } a_{n+1} = (5a_n+7)/2;\\
&b_0 = 1 \text{ ve } b_{n+1} = 3 - 1/b_n;\\
&c_0 = 1 \text{ ve } c_{n+1} = 3 - 2/c_n;\\
&d_0 = 1 \text{ ve } d_{n+1} = (3d_n+2)/6;\\
&e_0 = 1 \text{ ve } e_{n+1} = 2e_n/(4e_n+1);\\
&f_0 = 2 \text{ ve } f_{n+1} = 1/2 + \sqrt{f_n}.\\
&g_0 = 1 \text{ ve } g_{n+1} = 1/2 + \sqrt{g_n}.
\end{aligned}$$

10. $a_0 = \sqrt{6}$, $a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k}$ olsun.
    a. Dizinin ilk dört terimini yazın.
    b. Dizinin artan olduğunu gösterin.
    c. Dizinin üstten 6 tarafından sınırlı olduğunu gösterin.
    d. Dizinin yakınsak olduğunu gösterin.
    e. Dizinin limitinin 3 olduğunu gösterin.
11. $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ olsun. Yani

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

    dizisini ele alalım. Dizinin yakınsak olduğunu ve 2'ye yakınsadığını kanıtlayın.
12. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olsun. Her $n \geq 2$ için,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

    olsun.
    a. Her n için, $1 \leq x_n \leq 2$ eşitsizliklerini gösterin.
    b. Her n için, $|x_n - x_{n+1}| = 1/2^{n-1}$ eşitliğini gösterin.
    c. Her $m > n$ için, $|x_n - x_m| < 1/2^{n-2}$ eşitsizliğini gösterin.
    d. $(x_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterin.
    e. Her n için, $x_n - x_{n+1} = (-1)^n/2^{n-1}$ eşitliğini gösterin.
    f. Her n için,

$$x_{n+1} - 1 = x_{n+1} - x_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

    eşitliğini gösterin.
    g. $(x_n)_n$ dizisinin limitini bulun (5/3).

13. **[Gauss]** $0 \le a_0 \le b_0$ ve

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ ve } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

olsun.

a. Tümevarımla $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ eşitsizliklerini gösterin.

b. Hem $(a_n)_n$ dizisinin hem de $(b_n)_n$ dizisinin yakınsaklığını kanıtlayın.

c. Limitlerin eşit olduğunu gösterin. Bu ortak değere a_0 ve b_0 sayılarının ***aritmetik-geometrik ortalaması*** adı verilir.

14. $0 < b_0 < a_0$ ve

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \text{ ve } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

olsun. Hem $(a_n)_n$ dizisinin hem de $(b_n)_n$ dizisinin yakınsaklığını ve limitlerin eşitliğini kanıtlayın.

15. a_0, b_0, c_0 verilmiş olsun. $n \ge 1$ için,

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2},\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

olarak tanımlansın. Dizilerin yakınsaklığını gösterin ve limitlerini hesaplayın. (Önce $a_0 = b_0 = 0$, $c_0 = 1$ alabilirsiniz.)

16. $a_1 = 1$ ve

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}$$

olsun. Bu dizinin limitinin $\sqrt{2}$ olduğunu [N2]'de göstermiştik, Bölüm 9.1'de de göstereceğiz. $(a_{2n})_n$ ve $(a_{2n+1})_n$ altdizilerini ayrı ayrı ele alarak aynı sonucu bir başka yoldan elde edin. Buradan,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

eşitliği elde edildiğine dikkatinizi çekeriz.

17. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ olsun. Dizi yakınsak mıdır? Öyleyse limitini bulun.

18. $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $(n^k x^n)_n$ dizisinin yakınsaklığını tartışın.

19. $a_0 = a$, $a_1 = b$ ve her $n \ge 1$ için,

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{a_{n-1}}$$

olsun. Dizinin yakınsaklığını tartışın.

20. Eğer sabit bir $c \in (0, 1)$ sayısı için,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \le c|x_{n+1} - x_n|$$

her n için sağlanıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***büzen dizi*** denir. (Bkz. Altbölüm 9.1.) Büzen bir dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

21. Yazı-tura atılıyor. Yazı geldiğinde 1 puan, tura geldiğinde 2 puan alınıyor. $p(n)$, n sayısına ulaşma olasılığı olsun. $p(n)$ dizisinin limitinin $2/3$ olduğunu kanıtlayın. Puanlar değişseydi sonuç ne olurdu?

22. Yukarıdaki soru gene, ama bu sefer zar atılıyor ve gelen zar kadar puan kazanılıyor.

23. **[Fibonacci Dizisi]** $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ve her $n \geq 0$ için,

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

olsun. Bu diziye ***Fibonacci dizisi*** adı verilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

eşitliğini kanıtlayın. Sağdaki sayı ***altın oran*** olarak bilinen sayıdır.

24. $(a_n)_n$ sınırlı bir dizi olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak her altdizisinin limitinin aynı sayı olduğunu varsayalım. Dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

25. $(a_n)_n$ sınırlı bir dizi ve $S = \{x \in \mathbb{R} :$ sonsuz sayıda n için $x < a_n\}$ olsun. $(a_n)_n$'nin $\sup S$'ye yakınsayan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın. Bundan Bolzano-Weierstrass Teoremi'ni kanıtlayın: Sınırlı bir dizinin yakınsak bir altdizisi vardır. (Bkz. Teorem 9.4.)

26. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ limitini hesaplayın. İpucu: İfadenin eşleniğiyle çarpıp eşleniğine bölün.

27. $(q_n)_n$, limiti 0 olan pozitif bir kesirli sayı dizisi olsun. Her $a > 0$ için $\lim a^{q_n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

28. Bir $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi olması için yeter ve gerek koşulun

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

olduğunu kanıtlayın.

29. Aşağıdaki limiti bulun:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5} + \frac{5}{11} + \cdots + \frac{n^2+1}{2n^2+3}\right).$$

30. [GL, Sayfa 63, Alıştırma 22] α, β, $\gamma > 0$ olsun. $a_0 = \alpha$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\beta a_n + \gamma}$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu ve a'ya yakınsadığını varsayalım. Eğer $\gamma \geq 1$ ise $a = 1$ olduğunu, aksi halde $a = (1-\gamma)/\beta$ olduğunu kanıtlayın. İpucu: $\alpha\beta + \gamma \geq 1$ ve $\alpha\beta + \gamma \leq 1$ durumlarını ayrı ayrı inceleyin.

31. [GL, Sayfa 63, Alıştırma 23] α, $\beta \geq 0$ olsun. $a_0 = \alpha$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} = \sqrt{\beta + a_n}$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterin. Limite a diyelim. Eğer $\alpha = \beta = 0$ ise $a = 0$ olduğunu, aksi halde

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2}$$

olduğunu gösterin. İpucu: $\sqrt{\alpha+\beta} \leq \alpha$ ve $\sqrt{\alpha+\beta} > \alpha$ durumlarını ayrı ayrı inceleyin.

32. [GL, Sayfa 63, Alıştırma 24] α, $\beta \geq 0$ olsun. $a_0 = \alpha$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n+1} = \beta + \sqrt{a_n}$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterin. Limite a diyelim. Eğer $\alpha = \beta = 0$ ise $a = 0$ olduğunu, aksi halde

$$a = \frac{1+2\beta+\sqrt{1+4\beta}}{2}$$

olduğunu gösterin. İpucu: $\sqrt{\alpha}+\beta \leq \alpha$ ve $\sqrt{\alpha}+\beta > \alpha$ durumlarını ayrı ayrı inceleyin.

9. Sınırlı Diziler

9.1 Büzen Diziler

$r \in (-1, 1)$ iken, hem

$$(r^n)_n$$

dizisinin hem de

$$(1 + r + \cdots + r^n)_n$$

dizisinin yakınsaklığını Bölüm 6'da kanıtlamıştık. Bu iki dizinin ortak bir özelliğini ortaya çıkaralım: Önce birinci diziyi ele alalım.

$$x_n = r^n$$

ise, o zaman,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|r^{n+2} - r^{n+1}\right| = |r| \left|r^{n+1} - r^n\right| = |r| \, |x_{n+1} - x_n|$$

olur. Şimdi ikinci diziye bakalım. Bu sefer,

$$x_n = 1 + r + \cdots + r^n$$

olsun. O zaman da

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \left|r^{n+2}\right| = |r| \left|r^{n+1}\right| = |r||x_{n+1} - x_n|$$

olur. Her iki durumda da

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |r||x_{n+1} - x_n|$$

elde ettik. Aslında bu iki dizinin yakınsamasını bu eşitliğe borçluyuz, hatta bundan daha zayıf bir koşul olan,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |r||x_{n+1} - x_n|$$

eşitsizliğine borçluyuz. Bu özelliği sağlayan dizilere, "ardışık terimler arasındaki mesafe belli bir orandan daha az büzülüyor" anlamında, ***büzen dizi*** adı verilir.

Tanım. $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi olsun. Eğer sabit bir $r \in (0,1)$ sayısı için,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \le r|x_{n+1} - x_n|$$

her n için sağlanıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***büzen dizi***, r'ye ***büzme katsayısı*** denir. Eğer bu eşitsizlik yeterince büyük n'ler için sağlanıyorsa, diziye ***zamanla büzen dizi*** denir.

Zamanla büzüşen dizilerin yakınsak olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 9.1. *Zamanla büzüşen bir dizi yakınsaktır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ büzen bir dizi olsun. (Zamanla büzen dizilerin yakınsaklığının kanıtı aynıdır.) Dizinin Cauchy dizisi olduğunu kanıtlayacağız ve böylece teorem kanıtlanmış olacak.

$\epsilon > 0$ ve $n > m$ olsun.

$$|x_n - x_m| \le \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız ama önce bir k göstergeci için,

$$|x_{k+1} - x_k|$$

teriminin ne kadar küçük olabileceğini bulmaya çalışalım.

$$|x_{k+1} - x_k| \le r\,|x_k - x_{k-1}| \text{ ve } |x_k - x_{k-1}| \le r\,|x_{k-1} - x_{k-2}|$$

eşitsizliklerinden,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^2\,|x_{k-1} - x_{k-2}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ve

$$|x_{k-1} - x_{k-2}| \le r\,|x_{k-2} - x_{k-3}|$$

eşitsizliğinden,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^3\,|x_{k-2} - x_{k-3}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Tümevarımla, kolaylıkla, her $\ell = 1, 2, \ldots, k$ için,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^\ell\,|x_{k-\ell+1} - x_{k-\ell}|$$

eşitsizliğini ve $\ell = k$ için de,

$$|x_{k+1} - x_k| \le r^k\,|x_1 - x_0|$$

eşitsizliğini buluruz. Dizinin Cauchy olduğunu göstermek için, her k için geçerli olan bu son eşitsizliği kullanacağız. Fazla kalabalık etmemesi için,

$$|x_1 - x_0|$$

yerine a yazalım. Demek ki,

$$|x_{k+1} - x_k| \leq r^k a$$

eşitsizliği doğrudur. r, 0 ile 1 arasında bir sayı olduğu için k çok büyük olduğunda $r^k a$'nın çok küçük olduğuna dikkatinizi çekeriz. Şimdi $n > m$ için $|x_n - x_m|$ terimini küçültmeye geçebiliriz. Bu terimin ϵ'dan küçük olması için m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız.

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{m+1} - x_m)|\\ &\leq |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m|\\ &\leq r^{n-1}a + \cdots + r^m a = (r^{n-1} + \cdots + r^m)a\\ &= r^m(r^{n-m-1} + \cdots + 1)a = r^m\frac{1 - r^{n-m}}{1-r}a \leq a\frac{r^m}{1-r}\end{aligned}$$

eşitsizliğinden dolayı,

$$a\frac{r^m}{1-r}$$

terimini ϵ'dan küçük yapmak yeterli. Bunun için de,

$$r^m \leq \frac{\epsilon(1-r)}{a}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Ama $(r^m)_m$ dizisinin 0'a yakınsadığını bildiğimizden, öyle bir N vardır ki, bu N'den büyük m'ler için, $r^m \leq \epsilon(1-r)/a$ eşitsizliği sağlanır ve bu da kanıtı tamamlar. □

Örnekler

9.1. Bu önemli teoremin bir uygulamasını verelim hemen. $a \geq 0$ ise $\sqrt{a}$ 'ya yakınsayan bir dizi bulalım.
a herhangi bir gerçel sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin terimlerini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$(*) \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + a}{x_n + 1}$$

Bu tanım sayesinde, eğer doğru bir x_0 değeri verilmişse, tüm x_n'leri hesaplayabiliriz. Ama bazı x_0 değerleri için dizi sonsuza dek hesaplanamaz. Örneğin, $x_0 = -1$ için x_1 hesaplanamaz olur. Ya da

$$x_0 = -\frac{a+1}{2}$$

için $x_1 = -1$ olur ve bu sefer de x_2 hesaplanamaz olur. Dizinin sonsuza dek hesaplanamayacağı x_0 değerleri olsa da, dizinin sonsuza dek hesaplanabileceği sonsuz sayıda x_0 değeri vardır. Örneğin eğer a pozitifse, x_0'ı pozitif seçersek dizinin tüm terimleri pozitif olur, dolayısıyla hiçbir terimi -1 olamaz, dolayısıyla böyle bir seçimle dizinin tüm terimleri hesaplanabilir.

Eğer bu dizi yakınsaksa, limiti ancak $\sqrt{a}$ olabilir. Nitekim eğer dizinin limiti x ise, $(*)$ eşitliği bize, Teorem 5.4'ten dolayı

$$x = \frac{x+a}{x+1}$$

verir. Paydayı eşitleyerek ve sadeleştirerek

$$x^2 = a$$

buluruz. Demek ki eğer $a < 0$ ise $(*)$ dizisi (x_0 ne olursa olsun) yakınsak olamaz; dolayısıyla Cauchy de olamaz. Öte yandan eğer $a \geq 0$ ise, bundan, dizinin -eğer yakınsaksa- karesi a olan bir sayıya, yani ya $\sqrt{a}$ ya da $-\sqrt{a}$'ya yakınsadığı anlaşılır.

Bundan böyle a'nın pozitif olduğunu varsayacağız. Ayrıca $x_0 \geq 0$ varsayımını da yaparak dizinin tanımlı olup olmaması sorunuyla muhatap olmak zorunda kalmayacağız.

Eğer $a = 1$ ise, ilk terimden sonra 1 olarak sabitleşen bir dizi elde ederiz ki bu da pek ilginç bir dizi değil, ayrıca Cauchy olduğu da çok belli. Dolayısıyla bundan böyle $a \neq 1$ varsayalım.

Şimdi $|x_{n+2} - x_{n+1}|$ ile $|x_{n+1} - x_n|$ arasındaki büzme ilişkisini bulmaya çalışalım. Kolay bir hesapla,

$$\begin{aligned}
|x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left| \frac{x_{n+1}+a}{x_{n+1}+1} - \frac{x_n+a}{x_n+1} \right| = \left| \frac{(a-1)(x_n - x_{n+1})}{(x_{n+1}+1)(x_n+1)} \right| \\
&= \left| \frac{(a-1)(x_n - x_{n+1})}{2x_n + a + 1} \right| = \frac{|a-1|}{2x_n + a + 1} |x_{n+1} - x_n|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Demek ki,

$$\frac{|a-1|}{2x_n + a + 1}$$

terimine yoğunlaşmamız gerekiyor. Bu terimin her zaman 1'den küçük olduğunu göstermek yetmez, bu terimin, n ne olursa olsun, 1'den küçük **aynı** r sayısından küçük olduğunu göstermek gerekir. Şimdi bunu yapalım.

İki değişik durumu ele alacağız: $1 < a$ ve $1 > a$ durumlarını.

Eğer $1 < a$ ise, kolaylıkla $1 < x_n$ eşitsizliği kanıtlanır, buradan da,

$$\frac{|a-1|}{2x_n + a + 1} = \frac{1-a}{2x_n + a + 1} < \frac{1-a}{2 + a + 1} = \frac{1-a}{a+3} < 1$$

elde ederiz.

Eğer $1 > a$ ise, kolaylıkla $a < x_n$ eşitsizliği kanıtlanır, buradan da,

$$\frac{|a-1|}{2x_n + a + 1} = \frac{a-1}{2x_n + a + 1} < \frac{a-1}{2a + a + 1} = \frac{a-1}{3a+1} < 1$$

elde ederiz. Demek ki, r'yi,

$$r = \begin{cases} \frac{a-1}{a+3} & \text{eğer } 1 < a \text{ ise} \\ \frac{1-a}{1+3a} & \text{eğer } 1 > a \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak, o zaman $0 < r < 1$ ve

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |r||x_{n+1} - x_n|$$

olur. Sonuç: Dizi büzen bir dizidir; dolayısıyla yakınsar. Dizinin hangi sayıya yakınsadığını biliyoruz: $\sqrt{a}$'ya.

9.2. Terimleri

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

formülüyle tanımlanmış diziye bakalım. $(a_n)_n$ dizisinin artan olduğu belli. Ama çok artmadığı da belli çünkü her terim bir önceki terimi 1'den büyük bir sayıyla çarparak elde ediliyor:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) a_n.$$

Buradan

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} a_n$$

elde ederiz. Bu eşitlikte n yerine $n-1$ alırsak,

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n} a_{n-1}$$

buluruz. Son iki eşitlikten, $n \geq 2$ için

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{a_n}{2a_{n-1}} = \frac{1 + 1/2^{n-1}}{2} \leq \frac{3}{4} < 1$$

elde ederiz. Demek ki zamanla büzen bir diziyle karşı karşıyayız. Dolayısıyla dizi yakınsaktır ve elbette 1'den büyük bir sayıya yakınsar.

9.3. $a_0 \neq 0$ verilmiş herhangi bir sayı olsun.

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) a_n$$

olsun. Bu dizi artık artan bir dizi değildir, terimleri bir artıp bir azalır. Tanımdan,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} a_n$$

çıkar. Burada n yerine $n-1$ alırsak,

$$a_n - a_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} a_{n-1}$$

buluruz. Bu eşitliklerden,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = -\frac{a_n}{2a_{n-1}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)$$

çıkar. Demek ki

$$\left|\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}\right| = \frac{1}{2}\left|1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ve yeterince büyük n'ler için sağ taraftaki sayı $3/4$'ten küçük olur. Demek ki dizi zamanla büzen bir dizidir ve limiti vardır.

Alıştırmalar

9.4. $x_{n+1} = 6 - 1/x_n$ ve $x_0 = 1$ olsun. Her $n \geq 1$ için x_n'nin tanımlandığını ve $x_n \geq 5$ eşitsizliğini kanıtlayın; ayrıca $x_n \leq 6$ eşitsizliğini kanıtlayın.

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{25} |x_n - x_{n-1}|$$

$(n \geq 1)$ eşitsizliğini kanıtlayın. $(x_n)_n$ dizisinin limitini bulun.

9.5. Fibonacci dizisini ele alalım: $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ ve $x_0 = x_1 = 1$. Ve
$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$
olsun.
$$y_{n+1} = \frac{1}{y_n} + 1$$
ve $y_0 = 1$ eşitliklerini gözlemleyin. Her n için $1 \leq y_{n+1} \leq 2$ eşitsizliklerini kanıtlayın. $|y_{n+1} - y_n|$ sayıları arasında bir önceki alıştırmadaki gibi bir eşitsizlik bulun. $(y_n)_n$ dizisinin limitini hesaplayın.

9.6. Her n için $|a_n| \leq 3$ ve $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq |a_{n+1}^2 - a_n^2|/7$ olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

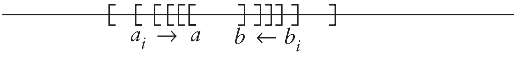
9.7. $s \geq 0$ ve $x_0 \geq 0$ sayıları verilmiş olsun. Her $n \geq 0$ için
$$x_{n+1} = \sqrt{s + x_n}$$
tanımını yapalım. Bu diziyi Örnek 7.15'te de incelemiştik. O alıştırmayı tekrar gözden geçirerek dizinin büzen olup olmadığını inceleyin.

9.8. $x_n = 1 + 1/2^2 + \cdots 1/n^2$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi yakınsaktır (Örnek 7.10) ama büzen bir dizi değildir. Kanıtlayın.

9.2 Kapalı Kutular Teoremi

Bu altbölümde, birbiri içine geçmiş kapalı aralıkların kesişiminin boşküme olamayacağını kanıtlayacağız.

Teorem 9.2 (Kapalı Kutular Teoremi I). *$(a_i)_i$ ve $(b_i)_i$, her $i < j$ için,*
$$a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$$
eşitsizliklerini sağlasın. O zaman $\bigcap_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i]$ kesişimi boş değildir. Ayrıca,
$$\lim_{i\to\infty} a_i \text{ ve } \lim_{i\to\infty} b_i$$
limitleri vardır ve limitlere sırasıyla a ve b dersek, $a \leq b$ ve $\bigcap_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i] = [a, b]$ olur. Dahası, eğer $\lim_{i\to\infty}(a_i - b_i) = 0$ ise, $a = b$ olur ve kesişim tek bir noktadan ibarettir.



Kanıt: $(a_i)_i$ dizisi artan ve her b_i tarafından üstten sınırlıdır. Bundan da $(a_i)_i$ dizisinin limiti olduğu çıkar. Eğer a bu limitse,
$$a_i \leq a \leq b_i$$
olur. Demek ki $(b_i)_i$ dizisi azalan olduğu gibi aynı zamanda a tarafından da alttan sınırlıdır. Dolayısıyla
$$a \leq b \leq b_i$$

olmak zorunda. Bu ikisini bir araya getirirsek,

$$a_i \leq a \leq b \leq b_i$$

buluruz. Demek ki $a \leq x \leq b$ eşitsizliklerini sağlayan her x tüm $[a_i, b_i]$ aralıklarındadır, yani

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{i=0}^{\infty} [a_i, b_i]$$

olur. Şimdi diğer tarafı kanıtlayalım. x tüm $[a_i, b_i]$ aralıklarında olsun. O zaman,

$$a_i \leq x \leq b_i$$

olur ve tarafların limiti alındığında, Sandviç Teoremi'nden (Teorem 5.1),

$$a \leq x \leq b$$

bulunur, yani $x \in [a, b]$.

Eğer $\lim_{i\to\infty}(a_i - b_i) = 0$ ise, elbette $a = b$ olur ve kesişimde tek bir sayı vardır. □

Bu teoremden daha genel bir teorem kanıtlayabiliriz. Yukarıda sayılabilir sayıda aralık aldık, oysa buna gerek yoktu:

Teorem 9.3 (Kapalı Kutular Teoremi II)**.** *$(K_i)_{i\in I}$ bir kapalı aralıklar ailesi olsun ve her $i, j \in I$ için ya $K_i \subseteq K_j$ ya da $K_j \subseteq K_i$ olsun. O zaman $\bigcap_{i\in I} K_i$ kesişimi boş değildir.*

Kanıt: $K_i = [a_i, b_i]$ olsun. Her $i, j \in I$ için, ya $K_i \subseteq K_j$ ya da $K_j \subseteq K_i$ olduğundan,

$$\text{ya } a_j \leq a_i \leq b_i \leq b_j \text{ ya da } a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$$

olur. Ama her durumda, $a_i \leq b_j$ olur. Demek ki

$$\{a_i : i \in I\}$$

kümesi üstten her b_j tarafından üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, $\{a_i : i \in I\}$ kümesinin en küçük üstsınırı, yani $\sup\{a_i : i \in I\}$ sayısı vardır ve bu en küçük üstsınıra a dersek, her $j \in I$ için

$$a \leq b_j$$

olur. Demek ki

$$\{b_j : j \in I\}$$

kümesi alttan a tarafından alttan sınırlıdır. Dolayısıyla, $\inf\{b_j : j \in I\}$ vardır ve bu en büyük altsınıra b dersek, $a \le b$ olur. Bundan da, her $i, j \in I$ için,

$$a_i \le a \le b \le b_j$$

eşitsizlikleri çıkar. Demek ki, her $i \in I$ için $[a, b] \subseteq K_i$ ve sonuç olarak,

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{i \in I} K_i$$

olur. Şimdi diğer tarafı kanıtlayalım. x, kesişimde olsun. O zaman her $i \in I$ için,

$$a_i \le x \le b_i$$

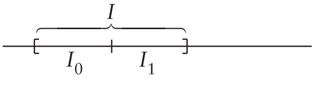
olur. Bundan da $a \le x \le b$ çıkar. □

9.3 Bolzano-Weierstrass Teoremi

Ünlü Bolzano-Weierstrass Teoremi sınırlı her dizinin yakınsak bir altdizisi olduğunu söyler. Değişik türden ve daha genel ifadeleri de vardır. Klasik analizin temel teoremlerinden biridir. Bu bölümde bu teoremin birkaç değişik kanıtını göstereceğiz. (Daha önce sayfa 156'daki Alıştırma 25'te bunun bir kanıtını göstermiştik.)

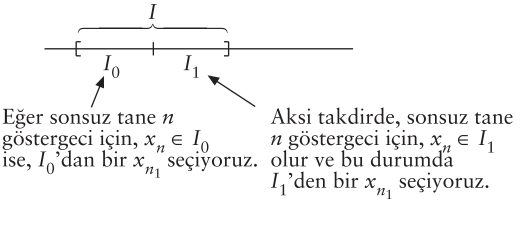
Teorem 9.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sınırlı bir dizinin yakınsak bir altdizisi vardır.*

Birinci (Standart) Kanıt: $(x_n)_n$, sınırlı bir dizi olsun. Dizinin bir I aralığında olduğunu varsayalım. I aralığını tam ortasından ikiye bölüp sol ve sağ parçalarına bakalım. Bu parçalara I_0 ve I_1 diyelim.

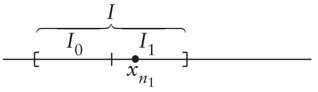


I_0 ve I_1 parçalarının yarıaçık ya da kapalı aralıklar olması önemli değil, her ikisinin de kapalı olduklarını varsayalım.

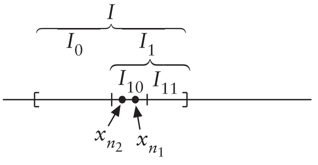
Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_0'daysa, I_0'dan bir x_{n_1} terimi seçelim.



Eğer aksine, $x_n \in I_0$ özelliğini sağlayan sonlu sayıda n göstergeci varsa, o zaman sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_1'dedir ve bu durumda x_{n_1} elemanını I_1 aralığından seçelim. Diyelim x_{n_1} elemanını I_1 aralığından seçtik. Bu eleman, kanıtın sonunda bulacağımız yakınsak altdizinin ilk terimi olacak.



Şimdi bir sonraki x_{n_2} elemanını seçeceğiz. Bunun için I_1 aralığını tam ortadan ikiye bölelim. Bu aralıklara I_{10} ve I_{11} adını verelim. Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_{10}'daysa, I_{10} aralığından, $n_0 < n_1$ olacak şekilde bir x_{n_1} terimi seçelim. Eğer aksine, $x_n \in I_{10}$ özelliğini sağlayan sonlu sayıda n göstergeci varsa, o zaman sonsuz sayıda n göstergeci için, x_n terimi I_{11}'dedir ve bu durumda x_{n_1} elemanını I_{11} aralığından seçelim. Diyelim x_{n_1} elemanını I_{10} aralığından seçtik. Bu eleman bulacağımız yakınsak altdizinin ikinci terimi olacak.



Her aşamada, bir önceki aralığı tam ortadan ikiye böleceğiz ve bu iki aralıktan hangisinde sonsuz sayıda n göstergeci için x_n terimi varsa, o aralığı seçeceğiz. (Eğer her ikisinde de sonsuz sayıda varsa, soldaki aralığı seçiyoruz. Böylece Seçim Aksiyomu'nu gereksiz yere kullanmamış oluyoruz.)

Kanıtın sonunda bulacağımız yakınsak dizinin bir sonraki terimini işte bu seçtiğimiz aralıktan seçiyoruz.

Daha matematiksel olalım ve yukarıdaki inşayı daha simgesel olarak yapalım.

Öyle bir $(I_k)_k$ kapalı aralıklar dizisi ve $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi bulacağız ki,

1. Her k için $n_k < n_{k+1}$ olacak.
2. Her k için $I_{k+1} \subset I_k$ olacak.
3. I_{k+1}'in uzunluğu I_k'nin uzunluğunun yarısı kadar olacak.
4. Her $k > 0$ için, $x_{n_k} \in I_k$ olacak.
5. Her k için, $x_n \in I_k$ ilişkisini sağlayan sonsuz sayıda n göstergeci olacak.

Bu inşayı k üzerine tümevarımla yapacağız. Önce $k = 0$ için: $I_0 = I$ olsun. Sadece 5'inci koşulun doğruluğunu kontrol etmemiz gerekiyor ki bu da I'nın tanımından dolayı bariz: Her n için $x_n \in I = I_0$'dir.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan,

$$I = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_k$$

aralıklarını ve
$$n_0 < n_1 < \ldots < n_k$$
doğal sayılarını (göstergeçlerini) seçtiğimizi varsayalım. ($k = 0$ da olabilir.) Bir sonraki I_{k+1} aralığını ve n_{k+1} doğal sayısını seçelim. Tümevarım varsayımına göre, sonsuz tane n için, I_k aralığında x_n teriminin olduğunu biliyoruz. I_k aralığını tam ortadan ikiye bölerek iki kapalı aralığın birleşimi olarak yazalım. Bu iki kapalı aralığa $I_{k,0}$ ve $I_{k,1}$ adını verelim (soldaki hep $I_{k,0}$ olsun mesela):
$$I_k = I_{k,0} \cup I_{k,1}.$$
Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için $x_n \in I_{k,0}$ ise, $I_{k+1} = I_{k,0}$ olsun (böylece 2, 3 ve 5'inci koşullar sağlanmış olur). Eğer aksine $x_n \in I_{k,0}$ ilişkisini sonlu sayıda n göstergeci sağlıyorsa, o zaman sonsuz tane n göstergeci için $x_n \in I_{k,1}$ olur.

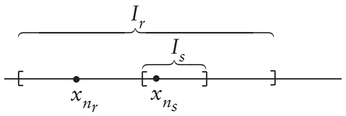
Bu son durumda $I_{k+1} = I_{k,0}$ olsun (2, 3 ve 5'inci koşullar gene sağlanmış olur).

Sonsuz sayıda n göstergeci için $x_n \in I_{k+1}$ olduğundan
$$x_n \in I_{k+1} \text{ ve } n < n_k$$
ilişkilerini sağlayan bir n göstergeci vardır. Bu n'lerin en küçüğüne n_{k+1} diyelim. (Seçim Aksiyomu'nu gene kullanmadık!) Böylece 1 ve 4'üncü özellikler de sağlanmış oldu.

İnşaat tamamlandı.

Şimdi $(x_{n_k})_k$ dizisinin yakınsak olduğunu ya da (aynı şey) bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

Yakınsaklığın Birinci Kanıtı: $\epsilon > 0$ olsun. I'nın uzunluğuna ℓ diyelim. (3)'e göre, I_k'nin uzunluğu $\ell/2^k$'dır. Eğer $r \geq s$ ise,
$$x_{n_r} \in I_r \subseteq I_s \text{ ve } x_{n_s} \in I_s$$
olduğundan,
$$|x_{n_r} - x_{n_s}| < \frac{\ell}{2^s}$$
olur. (Bkz. aşağıdaki şekil.) Demek ki eğer N doğal sayısı,
$$\frac{\ell}{2^N} < \epsilon$$
eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçilirse, o zaman her $r \geq s > N$ için,
$$|x_{n_r} - x_{n_s}| < \frac{\ell}{2^s} < \frac{\ell}{2^N} < \epsilon$$
olur. Demek ki $(x_{n_k})_k$ bir Cauchy dizisidir.



Yakınsaklığın İkinci Kanıtı: $I_k = [a_k, b_k]$ olsun. I'nın uzunluğuna ℓ diyelim. (3)'e göre, I_k'nin uzunluğu $\ell/2^k$'dır, yani

$$b_k - a_k = \frac{\ell}{2^k}.$$

Ayrıca, (2) ve (4)'ten dolayı,

$$a_k \leq a_{k+1} \leq x_{n_k} \leq b_{k+1} \leq b_k.$$

Demek ki $(a_k)_k$ üstten sınırlı ve artan bir dizi, dolayısıyla yakınsak. Benzer nedenden $(b_k)_k$ dizisi de yakınsak. Bu dizilerin limit a ve b ise,

$$b - a = \lim_{k\to\infty} (b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ell}{2^k} = 0$$

olur, yani $a = b$. Şimdi sandviç teoremine (Teorem 5.1) göre

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

vardır (ve a'ya eşittir). □

Bolzano-Weierstrass Teoremi'nin İkinci (daha basit) Kanıtı: $(x_n)_n$, sınırlı bir dizi olsun. Eğer $(x_n)_n$ dizisi sonlu sayıda değer alıyorsa, yani

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi sonluysa, o zaman bu dizi sabit bir altdizi içerir ve bu durumda istediğimiz yakınsak altdiziyi elde ederiz. Eğer $(x_n)_n$ dizisi sonsuz sayıda değer alıyorsa, o zaman bu dizinin her terimi değişik olan bir altdizisi vardır. (Neden? Ve bu altdiziyi Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan bulabilir misiniz?) Gerekirse $(x_n)_n$ dizisi yerine her terimi değişik olan bu altdiziyi alarak, $(x_n)_n$ dizisinin her teriminin değişik olduğunu varsayabiliriz.

$(x_n)_n$ dizisinin bir $[a, b]$ aralığına sığdığını varsayalım.

$$A = \{x \leq b \colon \text{sonlu tane } x_n \text{ terimi } [a, x] \text{ aralığında}\}$$

kümesine bakalım. $a \in A$ olduğundan, $A \neq \emptyset$. Ayrıca A kümesi b tarafından üstten sınırlı. Demek ki A'nın bir en küçük üstsınırı var.

$$c = \sup A$$

olsun. Şimdi c'ye yakınsayan bir altdizi olduğunu kanıtlayacağız. $k > 0$ herhangi bir doğal sayı olsun. $c - 1/k < c$ olduğundan, $c - 1/k$ sayısı A'nın bir üstsınırı değildir. Dolayısıyla

$$c - \frac{1}{k} \le d \le c$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $d \in A$ vardır. A'nın tanımına göre, $[a, d]$ aralığında dizinin sonlu sayıda terimi bulunmaktadır. Öte yandan $c < c + 1/k$ olduğundan, $c + 1/k \notin A$ ve $[a, c + 1/k]$ aralığında dizinin sonsuz sayıda terimi bulunmaktadır. Demek ki $(d, c + 1/k]$ aralığında dizinin sonsuz sayıda terimi bulunmaktadır. Bundan da

$$\left[c - \frac{1}{k}, c + \frac{1}{k}\right]$$

aralığında dizinin sonsuz sayıda terimi bulunduğu çıkar. x_{n_k} bu terimlerden biri olsun. Demek ki,

$$c - \frac{1}{k} \le x_{n_k} \le c + \frac{1}{k}$$

olur ve sandviç teoremi sayesinde bundan da,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c$$

çıkar. □

Bolzano-Weierstrass Teoremi'nin Üçüncü (en basit) Kanıtı: $(x_n)_n$, sınırlı bir dizi olsun. Her dizinin olduğu gibi, bu dizinin de monoton bir altdizisi vardır (Teorem 8.6). Her monoton ve sınırlı dizi gibi bu altdizi yakınsaktır (Teorem 7.1).

Alıştırmalar

9.9. $c \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer bir dizinin c'ye yakınsayan bir altdizisi varsa, c'ye dizinin ***yoğunlaşma*** ya da ***limit noktası*** diyelim. Tek bir yoğunlaşma noktası olan sınırlı her dizinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

9.10. $S \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer S'nin her dizisinin yoğunlaşma noktası varsa S'nin sınırlı olduğunu kanıtlayın.

10. Euler Sabiti ve exp Fonksiyonu

Kitabın bu en uzun bölümünde matematiğin en ünlü ve en yaygın kullanılan sabitlerinden biri olan e sayısını tanımlayacağız. Ayrıca halk arasında daha çok e^x olarak bilinen exp fonksiyonunu tanımlayacağız. Bu bölüm sayesinde okurun diziler konusunda belli bir ustalık kazanacağını da düşünüyoruz.

10.1 Euler Sayısının Tanımı

Teorem 10.1. $((1+1/n)^n)_{n>0}$ *dizisi* 2 *ile* 3 *arasında bir sayıya yakınsar.*

Kanıt: Karmaşık hesapları Altbölüm 3.2'de yaptık. Şimdi meyveleri toplayalım: Önsav 3.24'e göre dizi artıyor. Önsav 3.23'e göre dizi alttan 2'yle, üstten 3'le sınırlı. Demek ki dizinin 2 ile 3 arasında bir limiti vardır. □

İkinci Kanıt: Örnek 3.45 ve 3.46'da,

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ve } y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

tanımlarını yapıp, $(x_n)_n$ dizisinin artan, $(y_n)_n$ dizisinin ise azalan olduğunu kanıtlamıştık. Bundan,

$$2 = x_1 < x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4$$

çıkar. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi artan ve üstten 4 tarafından sınırlı; yani 4'ten küçük bir limiti var, diyelim e. Aynı şekilde $(y_n)_n$ dizisinin 2'den büyük bir limiti vardır, diyelim f. Şu hesaplardan $e = f$ eşitliği çıkar:

$$\begin{aligned} f = \lim y_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) &= e \cdot \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e. \end{aligned}$$

$e < 3$ eşitsizliği için, $e \le y_5 = (1+1/5)^6 < 3$ eşitsizliğini farketmek yeterli. □

Euler sayısı ya da ***Napier sabiti*** olarak bilinen ve matematiğin π'den sonra herhalde en ünlü ve ilginç sabiti olan bu limit, e harfiyle gösterilir. İlk 20 basamağı şöyledir:

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\ldots$$

e sayısının kesirli bir sayı olmadığını ileride kanıtlayacağız. e sayısının 0 polinomu hariç hiçbir polinomun kökü olmadığı da bilinmektedir.

Bundan böyle

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olacak. e'nin başka tanımları da vardır; bunları da ileride göreceğiz.

Her $n > 0$ için

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \le e$$

eşitsizliklerine de dikkatinizi çekeriz. Bu, Önsav 3.24'ten çıkar. Yukarıdaki teoremin kanıtında da kullanılmıştı.

Örnekler

10.1. *$n! > (n/e)^n$ eşitsizliğini kanıtlayın.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için eşitsizlik yukarıda kanıtlanan $e > 2 > 1$ eşitsizliklerinden çıkıyor. Şimdi eşitsizliği n için kabul edip $n+1$ için kanıtlayalım:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)$$

eşitsizliğinden dolayı,

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \ge \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğini, ya da sadeleştirerek,

$$n^n \ge \frac{(n+1)^n}{e}$$

eşitsizliğini kanıtlamanın yettiğini görürüz. Ama bu eşitsizlik, aynen, bildiğimiz

$$e \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliğine denktir. □

10.2. *$n! \ge a(n/e)^n$ eşitsizliği hangi a sayıları için geçerlidir?*

Yanıt: Eşitsizliğin $n = 1$ için doğru olması için, $e \ge a$ olmalı. Şimdi eşitsizliğin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlamaya çalışalım, bakalım a için nasıl bir koşul bulacağız:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \ge a\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)$$

olduğundan, eğer

$$a\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \ge a\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

ise istediğimiz kanıtlanır. Bu eşitsizlikte a sadeleştiğinden, a üzerine yeni bir koşul elde etmeyiz. Bakalım eşitsizlik doğru mu? Bu eşitsizliğin, sadeleştirmelerden sonra,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

eşitsizliğine eşdeğer olduğunu görmek zor değil. Ama bu son eşitsizliğin doğru olduğunu biliyoruz. Demek ki herhangi bir $a \leq e$ için sorudaki eşitsizlik doğru. □

10.3. *Aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayın.*

$$n! \geq \left(\frac{n+1}{e}\right)^n.$$

Kanıt: Bir üstteki örnekte $a = e$ alabileceğimizi gördük. Öyle yapalım. Demek ki,

$$n! \geq e\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Sadeleştirmeleri yaparsak ($n-1$ için) istediğimizi elde ederiz. □

10.4. $300! > 100^{300}$ *eşitsizliğini gösterin.*

Kanıt: $e < 3$ olduğundan, Örnek 10.1'den $n! > (n/3)^n$ çıkar. Bunu $n = 300$'e uygularsak istediğimizi buluruz. □

10.5. $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$.

Kanıt: Örnek 10.1'den hemen çıkar. □

10.6. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$.

Kanıt: $x_n = n!/n^n$ olsun. O zaman, $(1+1/n)^n$ dizisi artan olduğundan,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n!}{(n+1)^n}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \leq \frac{1}{2}$$

olur. Demek ki

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{2}x_n.$$

Buradan tümevarımla,

$$x_{n+k} \leq \frac{1}{2^k}x_n$$

çıkar. k'yı sonsuza götürerek, istediğimizi kanıtlamış oluruz. □

Biraz Tarih. e sayısının ilk izlerine, logaritmayı icat eden İsviçreli matematikçi John Napier'nin 1618 tarihli bir kitabının sonundaki ekteki cetvellerde rastlanır; o cetvelleri de William Oughtred'in hazırladığı sanılıyor. Napier'nin kitabında açık açık e'den bahsedilmemekte, sadece bazı logaritmaların e sayısı kullanılarak hesaplandığı anlaşılmaktadır.

e'nin matematiksel bir sabit olarak ilk kullanımı 1690-1691 yılları arasında, Leibniz'in Christian Huygens'e yazdığı mektuplardadır. Bu mektuplarda sabite e değil b adı verilmiştir.

Jacob Bernoulli bileşik faizleri çalışırken $((1+1/n)^n)_n$ dizisinin farkına varmıştır. Dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamış ve limitini, yani e sayısını hesaplamaya çalışmıştır.

Euler, e sayısını 1727'de kullanmaya başlamıştır. e sayısını basımevine ilk sokan da Euler'dir, 1736'da yayımlanan **Mechanica** adlı eserinde e olarak sözetmiştir bu sayıdan. Büyük olasılıkla "üs" anlamına gelen "exponentiation" sözcüğünün ilk harfi olarak e demiştir. Son derece alçakgönüllü olan ve başkalarının çalışmalarına çok saygılı olan Euler'in bu sayıya kendi adından dolayı e demiş olması pek muhtemel değil.

$(1+1/n)^n$ sayıları e sayısına pek o kadar çabuk yakınsamaz. Dizinin ilk $k = 1, 2, 3, 4, 5$ terimini ve virgülden sonraki ilk doğru rakamları gösterelim:

n	$(1+1/n)^n$
1	$\underline{2}$
74	$\underline{2{,}7}0013967884683\ldots$
164	$\underline{2{,}71}004043793275\ldots$
4822	$\underline{2{,}718}00001954235\ldots$
16609	$\underline{2{,}7182}0000137902\ldots$

Görüldüğü gibi dizi e sayısına çok yavaş yakınsıyor. İleride e'ye daha çabuk yakınsayan bir dizi bulacağız.

10.2 $((1+x/n)^n)_n$ Dizisi

Bu altbölümde, bir x gerçel sayısı için

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_n$$

dizisine takılacağız. Her bir x için ayrı bir diziden sözettiğimizi anlamışsınızdır. Eğer $x \in \mathbb{Q}$ ise bu dizinin e^x sayısına yakınsayacağını kanıtlayacağız. Önce dizinin yakınsaklığını gösterelim.

Önsav 10.2. *Eğer $x > 0$ ise, $((1+x/n)^n)_n$ dizisi artan ve üstten sınırlı bir dizidir; dolayısıyla yakınsaktır.*

Kanıt: Önsav 3.24'e göre dizi artar. Sonuca ulaşmak için dizinin üstten sınırlı olduğunu göstermeliyiz. Bu amaçla, x'ten büyükeşit bir k doğal sayısı seçelim.

$$1+\frac{x}{n} \le 1+\frac{k}{n}$$

olduğundan, $((1+k/n)^n)_n$ dizisinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlamak yeterli. Onu da şimdi kanıtlıyoruz:

Önsav 10.3. *Eğer k bir doğal sayıysa, $((1+k/n)^n)_n$ dizisi e^k tarafından üstten sınırlıdır.*

Kanıt: $(1+k/n)^n$ teriminde n yerine kn alırsak, dizi artan olduğundan, daha büyük bir sayı buluruz. Demek ki,

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{k}{kn}\right)^{kn} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k \le e^k.$$

Demek ki dizi üstten sınırlıdır. Savımız kanıtlanmıştır. □

Bu yaptıklarımızdan, $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ limitinin varlığı ve eğer $x \le k \in \mathbb{N}$ ise, bu limitin e^k sayısından küçükeşit olduğu çıkar, çünkü artan ve üstten sınırlı bir gerçel sayı dizisi her zaman yakınsaktır (Teorem 7.1). Önsav 10.2'nin kanıtı tamamlanmıştır. □

Birazdan (Önsav 10.5) $q \in \mathbb{Q}$ için $\lim_{n\to\infty}(1+q/n)^n = e^q$ eşitliğini kanıtlayacağız.

Önsav 10.4. *Eğer $x > 0$ ise, $((1-x/n)^n)_n$ dizisi yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^{-1}$$

olur.

Kanıt: Eğer $\lim_{n\to\infty}\left(1-x^2/n^2\right)^n = 1$ eşitliğini kanıtlarsak işimiz iş, çünkü o zaman,

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

olur. $\lim_{n\to\infty}\left(1-x^2/n^2\right)^n = 1$ eşitliğini kanıtlayalım. Önsav 3.17'ye göre, her $n > x$ için,

$$1-\frac{x^2}{n} = 1-n\frac{x^2}{n^2} \le \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \le 1^n = 1$$

eşitsizliği çıkar. Bundan ve Sandviç Teoremi'nden (Teorem 5.1),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$$

bulunur. □

Ve işte söz verdiğimiz eşitliğin kesirli sayılar için kanıtı:

Önsav 10.5. *Eğer $q \in \mathbb{Q}$ ise, $\lim_{n\to\infty}(1+q/n)^n = e^q$ olur.*

Kanıt: Birinci Durum. $q = 0$ ise her şey apaçık. Bundan böyle $q \neq 0$ olsun.

İkinci Durum. $q \in \mathbb{N}$ durumuna bakalım. Önsav 10.3'te,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n \le e^q$$

eşitsizliğini kanıtladık. Şimdi eşitliği kanıtlayacağız. Bunun için

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}=e$$

eşitliğini göstermek yeterli, çünkü bu eşitliği gösterebilirsek, o zaman,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}\right]^{q}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}\right]^{q}=e^{q}$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}(1+q/n)^{n/q}=e$ eşitliğini gösterelim.

Eğer $((1+q/n)^{n/q})_n$ dizisinde tüm n'leri değil de sadece q'nün bir katı olan n'leri alırsak ($n=qm$), o zaman

$$\left(\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n/q}\right)_n$$

dizisinin,

$$\left(\left(1+\frac{q}{qm}\right)^{qm/q}\right)_m$$

altdizisini, yani,

$$\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)_m$$

altdizisini elde ederiz. Bu son dizi de Teorem 10.1'e göre e'ye yakınsar. Demek ki yakınsak olduğunu bildiğimiz $((1+q/n)^{n/q})_n$ dizisinin bir altdizisi e'ye yakınsıyor. Bundan $((1+q/n)^{n/q})_n$ dizisinin de e'ye yakınsadığı çıkar (Teorem 8.2). Yani $q\in\mathbb{N}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n}=e^{q}$$

eşitliği kanıtlanmıştır.

Üçüncü Durum. Şimdi de $q\in\mathbb{Q}^{>0}$ durumuna bakalım. $a,b\in\mathbb{N}$ için, $q=a/b$ yazalım. O zaman,

$$\left(1+\frac{q}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{a}{bn}\right)^{n}$$

olur. $((1+a/bn)^{bn})_n$ dizisine bakalım; bu $((1+a/n)^{n})_n$ dizisinin bir altdizisidir ve o da bir önceki durumdan e^a sayısına yakınsar. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^{bn}=e^{a}$$

bulunur. Öte yandan, $((1+a/bn)^{n})_n$ dizisi Önsav 10.2'ye göre yakınsaktır. Demek ki,

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^{n}\right]^{b}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^{bn}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^{m}=e^{a}$$

ve her iki taraf da pozitif olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{bn}\right)^n = e^{a/b}$$

bulunur.

Dördüncü Durum. Son olarak $q \in \mathbb{Q}^{<0}$ olsun. O zaman $-q > 0$ olur ve üçüncü durumdan,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{q}{n}\right)^n = e^{-q}$$

bulunur. Demek ki, Önsav 10.4'ten

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{q}{n}\right)^n\right]^{-1} = (e^{-q})^{-1} = e^q$$

çıkar. Önsav 10.5 tamamıyla kanıtlanmıştır. □

Örnek 10.7. $\left(-1+\frac{1}{n}\right)^n$ *dizisi ıraksar.* (Bkz. Örnek 6.2.)
Kanıt:

$$\left(-1+\frac{1}{n}\right)^n = (-1)^n\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

eşitliklerinden ve $\lim_{n\to\infty}\left((-1)^n\right)_n$ dizisinin ıraksak olmasından çıkar. □

Alıştırma 10.8. Terimleri $\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ olan dizi ıraksar mı?

Gerçel sayılarla üs almayı öğrendiğimizde, Önsav 10.5'i kesirli q sayıları yerine r gerçel sayıları için de kanıtlayacağız, yani

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

eşitliği de doğrudur. Daha doğrusu, bu eşitlik (neredeyse) e^r sayısının tanımı olacak. Şimdilik şunu kolaylıkla kanıtlayabiliriz ama:

Sonuç 10.6. *Eğer $p \le r \le q$ ve $p, q \in \mathbb{Q}$ ise,*

$$e^p \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \le e^q$$

olur.

Kanıt: Varsayımdan, her n için,

$$1+\frac{p}{n} < 1+\frac{r}{n} < 1+\frac{q}{n}$$

ve

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n < \left(1+\frac{r}{n}\right)^n < \left(1+\frac{q}{n}\right)^n$$

çıkar. Üç tarafın da limitini alırsak, sandviç teoreminden ve Önsav 5.6'dan,

$$e^p \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \leq e^q$$

buluruz. □

Örnek 10.9. *Aşağıdaki limiti hesaplayın:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1/3}{n-1/2}\right)^{5n}.$$

Çözüm:

$$\left(\frac{n+1/3}{n-1/2}\right)^{5n} = \left(\frac{1+1/3n}{1-1/2n}\right)^{5n} = \left(\frac{(1+1/3n)^n}{(1-1/2n)^n}\right)^5.$$

Payın ve paydanın limitlerini ayrı ayrı hesaplayalım:

$$(1+1/3n)^n = \left((1+1/3n)^{3n}\right)^{1/3} \longrightarrow e^{1/3}$$

ve

$$(1-1/2n)^n = \left((1-1/2n)^{2n}\right)^{1/2} = \left(e^{-1}\right)^{1/2} \longrightarrow e^{-1/2}$$

olur. Demek ki

$$\left(\frac{n+1/3}{n-1/2}\right)^{5n} \longrightarrow \left(\frac{e^{1/3}}{e^{-1/2}}\right)^5 = \left(e^{1/3+1/2}\right)^5 = e^{25/6}.$$

Alıştırmalar

10.10. Aşağıdaki limitleri hesaplayın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n}\right)^{2n}.$$

10.11. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ve $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$ limitlerini hesaplayın.

10.12. $(n!/n^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını ve 1'den küçük olduğunu kanıtlayın. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

10.13. k sabit bir doğal sayı olsun. $((kn)!/n^n)_n$ dizisinin limitini -varsa- bulun.

10.3 e'ye Yakınsayan Bir Başka Dizi

Bu altbölümde e sayısına daha çabuk yakınsayan bir başka dizi bulacağız. Tabii $(1+1/n)^n$ dizisi yerine terimleri

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}, \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}, \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}$$

olan dizilerden birini alırsak, e sayısına çok daha çabuk yakınsayan diziler buluruz ama bu mızıkçılık sayılır.

Yukarıda, e sayısını, terimleri

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olan dizinin limiti olarak tanımladık. Binom açılımını kullanarak bu terimi açalım ve ortaya çıkan ifadeyle oynayalım:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n^i} = 1+\sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{1}{n^i}\\ &= 1+\sum_{i=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}\frac{1}{n^i}\\ &= 1+\sum_{i=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i}\frac{1}{i!}\\ &= 1+\sum_{i=1}^n \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{i!}\\ &\leq 1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}.\end{aligned}$$

Demek ki,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}.$$

Sağ tarafta bulduğumuz dizinin terimlerini (Excel'de mesela) hesaplayalım:

n	n'inci terim (yaklaşık)
0	1
1	2
2	2,5
3	2,6666666666667
4	2,7083333333333
5	2,7166666666667
6	2,7180555555556
7	2,7182539682540
8	2,7182787698413
9	2,7182815255732
10	2,7182818011464
11	2,7182818261985
12	2,7182818282862
13	2,7182818284468
14	2,7182818284582

Eğer kitaplarda yazan $e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\ldots$ eşitliği gözönüne alınırsa, sağdaki dizinin de e'ye yakınsadığı tahmin edilir. Bu tahmin doğrudur elbette; bu kadar da rastlantı olmaz... Ayrıca, bu yeni dizinin e'ye eskisine oranla daha çabuk yakınsadığı da belli, ne de olsa terimler hep daha büyükeşit.

Bu yeni dizinin e'ye yakınsadığını kanıtlayalım. Kanıt biraz uzun sürecek.

10.4 exp **Fonksiyonu**

Yukarıda,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$$

dizisine baktık. Bu altbölümde, bu diziyi genelleştirip, her $x \in \mathbb{R}$ için, terimleri

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

olan diziye bakacağız. Bu dizi yakınsaktır; daha doğrusu bir Cauchy dizisidir ve Cauchy dizisi olduğundan yakınsaktır. Bunu kanıtlayalım.

Teorem 10.7. *Terimleri*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$

olan dizi bir Cauchy dizisidir, dolayısıyla yakınsaktır.

Bu dizinin limiti $\exp x$, bazen de $\exp(x)$ ya da $\mathrm{Exp}(x)$ olarak yazılır:

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Bu bölümün sonunda $\exp 1 = e$ eşitliğini kanıtlayacağız. Hatta daha da ileri gidip, $q \in \mathbb{Q}$ için, daha da şaşırtıcı olan

$$\exp q = e^q$$

eşitliğini kanıtlayacağız. $\exp 0 = 1$ eşitliği daha şimdiden bariz olmalı. Gerçel üs almasını bilsek, $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\exp x = e^x$$

eşitliğini kanıtlardık ama ne yazık ki henüz bilmiyoruz! İleride, bir gerçel sayının gerçel bir gücünü tanımladığımızda bu eşitliği de kanıtlayacağız. Bu fonksiyon hakkında, türevinin olması ve türevinin kendisine eşit olması gibi daha da şaşırtıcı olguları üçüncü cilde saklıyoruz.

Teorem 10.7'nin Kanıtı: Kanıt pek kolay olmasa da zenginleştirici olacak. Yavaş yavaş, yöntemi tartışa tartışa kanıtlayacağız. $x \neq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!}\right| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için $n > m$ sayılarının ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız. Soldaki (küçültmemiz gereken) ifadeyle oynayalım:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!}\right| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} \frac{x^i}{i!}\right| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \frac{|x|^i}{i!}$$

En sağda $n - m$ tane terim toplanmış. Bu toplamı ta en başta verilmiş olan pozitif ϵ sayısından küçük yapacağız. Toplamda bulunan bu $n - m$ tane

$$\frac{|x|^i}{i!}$$

sayısının her birini (ϵ'a göre çok küçük) sabit bir α sayısından daha küçük yapmak işe yaramaz, çünkü o zaman ϵ'dan küçük yapmak istediğimiz toplamın $(n-m)\alpha$'dan küçük olduğu ortaya çıkar ki, m'yi sabit tutup n'yi büyütürsek, $(n-m)\alpha$ sayısı sonsuza kadar büyür ve sadece ϵ'u değil, her sayıyı aşar. Burada kullanmamız gereken bilgi, x ne kadar büyük olursa olsun, i çok çok büyük olduğunda, $|x|^i/i!$ sayısının çok çok küçük olduğu ve bir sonraki $|x|^{i+1}/(i+1)!$ sayısının bundan daha daha küçük olduğu. Bu dediğimizi matematiksel olarak ortaya çıkaran küçük bir hesap yapalım şimdi:

$$\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{|x|}{i+1}\frac{|x|^i}{i!} < \frac{|x|}{N}\frac{|x|^i}{i!} = r\frac{|x|^i}{i!}$$

Burada, i'yi daha sonra belirleyeceğimiz belli bir N sayısından büyükeşit aldık; ayrıca $r = |x|/N$ aldık. N doğal sayısını da, zamanı geldiğinde

$$r = \frac{|x|}{N} < 1$$

eşitsizliğini sağlayacak kertede büyük seçeceğiz, yani N sayısı, $|x|$'ten büyük bir doğal sayı olacak; hatta N'yi daha şimdiden $|x|$'ten büyük bir doğal sayı olarak seçelim. Birazdan N'nin seçiminde bir başka belirleyici kısıtlama daha bulacağız. Şimdilik sadece $r = |x|/N < 1$ kısıtlamasıyla yetinip N'nin daha başka hangi kısıtlamalara maruz kalması gerektiğini -sabırla- araştıralım.

Her $i > N$ için geçerli olan

$$\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!} < r\frac{|x|^i}{i!}$$

eşitsizliğinden, kolayca, $i > j > N$ için,

$$\frac{|x|^i}{i!} < r\frac{|x|^{i-1}}{(i-1)!} < r^2\frac{|x|^{i-2}}{(i-2)!} < \ldots < r^{i-j}\frac{|x|^i}{j!}$$

eşitsizliklerini elde ederiz.

Başladığımız hesaplara devam edelim: $n > m > N$ için, $0 < r < 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| = \left|\sum_{i=m+1}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| &\le \sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^i}{i!} < \sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)}\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\\ &= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)} = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-(m+1)} r^i\\ &< \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1-r^{n-m}}{1-r} < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-r}\end{aligned}$$

buluruz. En sondaki ifadeyi ϵ'dan küçük yapmalıyız, yani N sayısını, her $m > N$ için,

$$\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} < \epsilon(1-r)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçmeliyiz. Ama

$$\left(\frac{|x|^n}{n!}\right)_n$$

dizisi 0'a yakınsadığından (Örnek 6.1), böyle bir N sayısı bulmak mümkündür: N sayısı, $r = |x|/N$ sayısını 1'den küçük yapacak kadar büyük seçildiği gibi, bir de ayrıca, her $m > N$ için,

$$\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} < \epsilon(1-r)$$

eşitsizliğini doğru kılacak kadar da büyük seçilsin. Bu durumda, hesaplardan devam ederek, $n > m > N$ için, istediğimiz,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| < \ldots < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-r} < \epsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Kanıtımız tamamlanmıştır. Bu önemli kanıtı kitabi bir şekilde yazalım.

Teorem 10.7'nin Kitabi Kanıtı: $x \neq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun. $|x|$'ten büyük bir N_1 tamsayısı vardır.

$$r = \frac{|x|}{N_1}$$

olsun. Demek ki
$$0 < r < 1.$$
Ayrıca, $(|x|^{n/n!})_n$ dizisi de 0'a yakınsadığından (bkz. Örnek 6.1), her $n > N_2$ için
$$\frac{|x|^n}{n!} < \epsilon(1-r)$$
eşitsizliğini sağlayan bir N_2 sayısı vardır. Son olarak, $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Her $i > N$ için,
$$\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!} = \frac{|x|}{i+1}\frac{|x|^i}{i!} < \frac{|x|}{N}\frac{|x|^i}{i!} = r\frac{|x|^i}{i!}$$
bulunur. Demek ki, $i > j > N$ için,
$$\frac{|x|^i}{i!} < r\frac{|x|^{i-1}}{(i-1)!} < r^2\frac{|x|^{i-2}}{(i-2)!} < \ldots < r^{i-j}\frac{|x|^j}{j!}$$
olur. Böylece, $0 < r < 1$ olduğundan,
$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| &= \left|\sum_{i=m+1}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| \le \sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^i}{i!} < \sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)}\frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\\ &= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{i=m+1}^{n} r^{i-(m+1)} = \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-(m+1)} r^i\\ &< \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1-r^{n-m}}{1-r} < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-r} < \epsilon\end{aligned}$$
elde ederiz. Kitabi kanıtımız tamamlanmıştır. Cümleten geçmiş olsun. □

Artık
$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$
tanımını verebiliriz. e sayısına geri dönmeden önce, $x \ge 0$ için,
$$\exp x \ge 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$
eşitsizliğine dikkat edelim. Teorem 10.8'in kanıtının son hamlesinde gerekecek.

Örnek 10.14. Eğer $y_0, y_1, \ldots, y_n \ge 0$ ise
$$(1+y_0)(1+y_1)\cdots(1+y_n) \le \exp(y_0 + \cdots + y_n)$$
olur çünkü
$$1 + y_i \le 1 + \frac{y_i}{1!} + \frac{y_i^2}{2!} + \frac{y_i^3}{3!} + \cdots = \exp y_i$$
ve
$$(1+y_0)(1+y_1)\cdots(1+y_n) \le \exp y_0\ \exp y_1 \cdots \exp y_n = \exp(y_0 + \cdots + y_n)$$
olur.

10.5 e'ye Yakınsayan Bir Başka Dizi (devam)

Söz verdiğimiz gibi,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=e$$

eşitliğini, yani $\exp 1 = e$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bir önceki altbölümde limitin olduğunu kanıtladık ($x = 1$ alın.) Geriye limitin e olduğunu kanıtlamak kaldı.

Bunu kanıtlamak için, terimleri

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olan dizinin 0'a yakınsadığını kanıtlamamız yeterlidir. Ama elimiz değmişken, en genel şeyi kanıtlayalım, çok daha zahmetli olmayacak:

Teorem 10.8. $\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Kanıt: exp'in tanımından dolayı,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)=0$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Hesaplara başlayalım. Daha önce de sık sık yaptığımız gibi, $(1 + x/n)^n$ ifadesinin yerine bu ifadenin binom açılımını yazacağız.

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{x^i}{n^i}\right)=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right)x^i$$

Tarafların mutlak değerlerini alırsak,

$$\left|\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|=\left|\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right)x^i\right|\le\sum_{i=2}^{n}\left|\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i$$

buluruz. En sağdaki ifadeyi (n'yi büyütmeyi göze alarak) dilediğimiz kadar küçültebileceğimizi göstermemiz lazım.

Bu aşamada kanıtı nasıl bitirebileceğimizi tartışalım. Bu tartışmanın yararlı olduğuna da inanıyoruz. Bilinçsizce yapılan hesapların bir sonuç vermesini beklemek mucize beklemek gibi bir şeydir. Hesaplara girişmeden önce ne yapmak gerektiğini bilmek, en azından üç aşağı beş yukarı hissetmek gerekir.

Çok küçültmek istediğimiz bu ifadede, tam tamına $n-1$ tane terim toplanıyor. İşte o terimler:

$$\left|\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i$$

$(i = 2, \ldots, n)$. Eğer bu $n-1$ terimin her birini dilediğimiz kadar küçültebilirsek, işimiz iş, o zaman toplamı da istediğimiz kadar küçültebiliriz... demek içimizden geçiyor hemen ama bu yanlış. $x = 1$ olsa bile yanlış. Çünkü eğer her bir terimi, örneğin, aşağı yukarı $1/n$ kadar küçültürsek, o zaman $n-1$ tane terimin toplamını aşağı yukarı

$$(n-1) \times \frac{1}{n} \approx 1$$

kadar küçültmüş oluruz ve 1 çok çok küçük bir sayı olmadığından (ve çok çok küçük bir sayı olmadığından!) bu küçültme bir işimize yaramaz. Burada yapılması gereken, her bir terimi, mesela, eğer mümkünse, $1/n^2$ kadar küçültmektir, çünkü o zaman $n-1$ tane terimin toplamını

$$(n-1) \times \frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n}$$

kadar küçültmüş oluruz ve n çok büyük olduğunda ifade de çok küçük olur. Demek ki her n ve her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\left|\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right| |x|^i \leq \frac{1}{n^2}$$

eşitsizliğini kanıtlamamız yeterli. ($x = 1$ özel durumuna bile razıyız!) Eğer bunu kanıtlamayı beceremezsek, ki beceremeyiz, çünkü yanlış, o zaman, $1/n^2$ yerine,

$$\left|\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right| |x|^i \leq f(n)$$

eşitsizliğini ve

$$\lim_{n\to\infty} nf(n) = 0$$

eşitliğini sağlayan $1/n^2$'den daha küçük bir f fonksiyonu bulmamız gerekecek.

Yukarıdaki tartışma aydınlatıcıdır aydınlatıcı olmasına ama aynı zamanda beyhudedir! Yöntemimiz yukarıda tartıştığımız gibi olmayacak ama ona yakın olacak. Öyle bir f fonksiyonu bulacağız ki, hem her $2 \leq i \leq n$ için

$$\left|\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right| \leq \frac{f(i)}{n}$$

olacak, hem de her $n \geq 2$ için,

$$\sum_{i=2}^{n} f(i)|x|^i$$

ifadesi n'den bağımsız bir $B(x)$ sayısı tarafından üstten sınırlı olacak. Eğer bunu başarabilirsek, o zaman,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &\le \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i \le \sum_{i=2}^{n}\frac{f(i)}{n}|x|^i\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}f(i)|x|^i \le \frac{B(x)}{n}\end{aligned}$$

olur ve n çok büyük olduğunda, bu sayı çok küçük olur. İşte plan bu. Planımızı gerçekleştirmeden önce oldukça kolay bir savı aradan çıkaralım.

Sav 1. $0 \le a_i \le x$ *ise*

$$(x-a_1)\cdots(x-a_k) \ge x^k-(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}$$

olur.

Kanıt: Eşitsizliği k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $k=1$ ise eşitlik sözkonusu ve her şey çok bariz. Şimdi

$$(x-a_1)\cdots(x-a_k) \ge x^k-(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}$$

eşitsizliğini varsayıp,

$$(x-a_1)\cdots(x-a_{k+1}) \ge x^{k+1}-(a_1+\cdots+a_{k+1})\,x^{k}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım.

$$\begin{aligned}(x-a_1)\cdots(x-a_{k+1}) &= (x-a_1)\cdots(x-a_k)\,(x-a_{k+1})\\ &\ge \left(x^k-(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}\right)(x-a_{k+1})\\ &= x^{k+1}-(a_1+\cdots+a_{k+1})\,x^k+(a_1+\cdots+a_k)\,x^{k-1}a_{k+1}\\ &\ge x^{k+1}-(a_1+\cdots+a_{k+1})\,x^k.\end{aligned}$$

Eşitsizliğimiz kanıtlanmıştır. □

Ve canalıcı sav:

Sav 2. *Her* $2 \le i \le n$ *doğal sayısı için,*

$$0 \le \frac{1}{i!}-\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} \le \frac{1}{2n}\frac{1}{(i-2)!}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: Sav 1'den yararlanıp ortadaki terimle oynayacağız.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i} &= \frac{1}{i!} - \frac{n!}{(n-i)!\,i!}\frac{1}{n^i} = \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{n!}{(n-i)!}\frac{1}{n^i}\right)\\
&= \frac{1}{i!}\left(1 - \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i}\right)\\
&= \frac{1}{i!}\frac{n^i - n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^i}\\
&= \frac{1}{i!}\frac{n^{i-1} - (n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{n^{i-1}}\\
&\le \frac{1}{i!}\frac{n^{i-1} - (n^{i-1} - (1+2+\cdots+(i-1))n^{i-2})}{n^{i-1}}\\
&= \frac{1}{i!}\frac{(1+2+\cdots+(i-1))n^{i-2}}{n^{i-1}} = \frac{(i-1)i}{2\cdot i!\cdot n} = \frac{1}{2n}\frac{1}{(i-2)!}.
\end{aligned}$$

Kanıtlamamız gereken birinci eşitsizlik, yani ifadenin ≥ 0 olduğu yukarıdaki hesabın daha ikinci satırından anlaşılıyor. □

Şimdi artık Teorem 10.8'in kanıtına nihai noktayı koyabiliriz. Her zamanki gibi küçük bir hesap yapacağız. x'i sabitleyip hesaplara devam edelim:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| &\le \sum_{i=2}^{n}\left|\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right||x|^i = \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i!} - \binom{n}{i}\frac{1}{n^i}\right)|x|^i\\
&\le \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2n}\frac{1}{(i-2)!}|x|^i = \frac{|x|^2}{2n}\sum_{i=2}^{n}\frac{|x|^{i-2}}{(i-2)!}\\
&= \frac{|x|^2}{2n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{|x|^j}{j!} \le \frac{|x|^2}{2n}\exp|x|.
\end{aligned}$$

Şimdi $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. N'yi,

$$2N\epsilon > |x|^2\exp|x|$$

eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçelim. Her $n > N$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right| \le \ldots \le \frac{|x|^2}{2n}\exp|x| < \frac{|x|^2}{2N}\exp|x| < \epsilon$$

buluruz. Son olarak, her iki tarafın n sonsuza giderken limitini alalım. Teorem 10.8 kanıtlanmıştır. □

Sonuç 10.9. *Eğer $x \in \mathbb{Q}$ ise,*

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$$

olur.

Kanıt: Önsav 10.5'ten ve Teorem 10.7 ve 10.8'den çıkar. □

Not: Bu kitapta elimizden geldiğince teoremlerin "doğal kanıtlarını" vermeye çalıştık. Doğal kanıtla kestettiğimiz, illa analizci olması gerekmeyen ortalama bir matematikçinin, eline kalem kâğıt aldığında genellikle aklına gelen ilk kanıt yolu. Çünkü doğal kanıtların çoğu zaman başka sonuçların kanıt yollarını da gösterdiği için daha eğitici olduklarına inanıyoruz. Yoksa bir analizci ya da analiz dersini sık sık vermiş ve konunun kısa yollarını bellemiş biri zekice hilelere başvurarak kanıtladıklarımızı çok daha kolay ve estetik biçimde kanıtlayabilir. Örneğin, [LW, Ap2]'den hafifçe değiştirilerek alınmış aşağıdaki kanıt,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eşitliğini çok daha kısa yoldan gösteriyor.

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ ve } B_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

olsun. $(A_n)_n$ dizisinin artan olduğu belli. $k \geq 4$ için $2^k \leq k!$ olduğundan,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24}$$

olduğu da belli. Demek ki $(A_n)_n$ dizisinin bir limiti var. B_n'yi bir de şöyle ifade edelim:

$$\begin{aligned} B_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Buradan $B_n \leq A_n$ çıkar çünkü

$$B_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = A_n.$$

Öte yandan bir de şu hesapları yapalım: $k \geq 1$ için

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{k-1}{n}\right) = 1 - \frac{k(k-1)}{2n}$$

olur. (Eşitsizlikte Alıştırma 2.2'yi kullandık.) Bu eşitsizliği $k!$ sayısına bölüp $k = 1$'den $k = n$'ye kadar toplayalım:

$$\begin{aligned} B_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= A_n - \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = A_n - \frac{A_{n-2}}{2n} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n$ bulunur. □

Örnekler

10.15. $2 < e$ olduğundan, her $n > 0$ için $n < 2^n < e^n$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \exp n = \infty$ olur.

10.16. $2 < e$ olduğundan, her $n > 0$ için $1/n > 2^{-n} > e^{-n}$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0$ olur.

10.17. $\lim_{n\to\infty} n(n^{1/n} - 1) = \infty$ *eşitliğini kanıtlayın.*
Kanıt: $A \in \mathbb{N}$ olsun. Önsav 10.2, 10.3 ve 10.5'e göre terimleri $(1 + A/n)^n$ olan dizi artarak $\exp A$'ya yakınsadığından, her $n > \exp A$ için $(1 + A/n)^n \le \exp A < n$ olur. Buradan, her $n > \exp A$ için,

$$A < n(n^{1/n} - 1)$$

çıkar. □

10.18. exp *fonksiyonu polinomiyal bir fonksiyon değildir.*
Kanıt: p, derecesi d olan gerçel katsayılı bir polinom olsun. p'yi açık biçimde yazalım:

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_dX^d.$$

p'yi bir $n > 0$ doğal sayısında değerlendirelim:

$$p(n) = p_0 + p_1n + p_2n^2 + \cdots + p_dn^d$$

sayısını buluruz. p'nin derecesi d olduğundan, $p_d \neq 0$'dır. Çıkan sayıyı n^d'ye bölelim:

$$\frac{p(n)}{n^d} = \frac{p_0}{n^d} + \frac{p_1}{n^{d-1}} + \cdots + \frac{p_{d-1}}{n} + p_d$$

elde ederiz. Şimdi n'yi sonsuza götürelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^d} = p_d \neq 0$$

bulunur. Öte yandan eğer $k > d$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = 0$$

bulunur ve $k < d$ ise, p_d'nin pozitif ya da negatif oluşuna göre, $\pm\infty$ bulunur. Demek ki p polinomunun derecesi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ilişkisini sağlayan **yegâne** doğal sayıdır. Dolayısıyla bir f fonksiyonunun polinomiyal olmadığını kanıtlamak için, yukarıda bulduklarımızın doğru olmadığını kanıtlamak yeterlidir. Demek ki eğer her k doğal sayısı için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp n}{n^k} = \infty$$

olduğunu kanıtlayabilirsek, o zaman exp fonksiyonunun polinomiyal bir fonksiyon olmadığını da kanıtlamış oluruz. Bunun da kanıtı kolay, çünkü her $k > 0$ doğal sayısı için şu olur:

$$\frac{\exp n}{n^k} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!}}{n^k} \ge \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \frac{n^i}{i!}}{n^k} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!}\frac{1}{n^{k-i}}\right) + \frac{1}{k!} + \frac{n}{(k+1)!} \to \infty.$$

10.6 $\exp x$'in Yaklaşık Değerini Bulmak

$\exp x$'in yaklaşık bir değerini bulmak için,

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

eşitliğinden yararlanıp, büyük bir n sayısı için, $\exp x$ yerine,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

sayısını hesaplayabiliriz. n'yi ne kadar büyük alırsak, $\exp x$'e o kadar yakın bir sayı buluruz. Ancak yaptığımız hatanın üstsınırını bilmezsek, bu kestirimiz (yaklaşık hesabımız yani) uygulamada hiçbir işe yaramaz. Sosyologlar bile, bir anket yayımladıklarında hata payını, örneğin, "sonuçlarımız %95 olasılıkla ±%3 doğrudur" diyerek belirtirler... Önce aşina olduğumuz türden hesaplar yaparak

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

terimleri arasındaki farkı bulalım. $n > m$ olsun.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| &= \left|\sum_{i=m+1}^{n}\frac{x^i}{i!}\right| \le \sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^i}{i!} = |x|^{m+1}\sum_{i=m+1}^{n}\frac{|x|^{i-m-1}}{i!}\\
&= |x|^{m+1}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{|x|^j}{(j+m+1)!}\\
&= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{(m+1)!}{(j+m+1)!}|x|^j\\
&= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{j!(m+1)!}{(j+m+1)!}\frac{|x|^j}{j!}\\
&= \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{\binom{j+m+1}{j}}\frac{|x|^j}{j!}\\
&\le \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{|x|^j}{j!} \le \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\exp|x|.
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right| < \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}\exp|x|.$$

(Eğer $x \geq 0$ ise tüm mutlak değerler kalkabilir.) Her iki tarafın da n sonsuza giderken (m sabit kalacak) limitini alalım. Sağ taraf hiçbir yere gitmediğinden,

$$\left| \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp|x|$$

elde ederiz. Limiti mutlak değerinin içine sokabiliriz (Önsav 5.2.iv):

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp|x|$$

yani,

$$\left| \exp x - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp|x|$$

buluruz. Bu bize, $\exp x$ ile

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}$$

sayısı arasındaki azami farkı veriyor. m çok büyük bir sayı olduğunda bu fark görüldüğü gibi küçülüyor. Bir şey kanıtladık:

Sonuç 10.10. *Her $x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için,*

$$\left| \exp x - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \exp|x|$$

olur. □

Bulduğumuz bu sonucun ne işe yarayabileceğini sorgulayabilir okur. Nitekim, $\exp x$ sayısıyla $\exp x$'in yaklaşık değeri arasındaki farkı, içinde $\exp|x|$ bulunan bir ifadeyle sınırladık; biz zaten $\exp x$'i tam olarak bilmediğimizden, bu yaptığımız ne işe yarayabilir ki? Yarar! $|x|$'ten büyükeşit bir q kesirli sayı bulalım. O zaman

$$\exp|x| \leq \exp q = e^q \leq 3^q$$

olur (neden?) ve yukarıdaki sonuçtaki eşitsizliği

$$\left| \exp x - \sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} \right| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} 3^q$$

olarak yazabiliriz. Örneğin $\exp 1$'i, yani e'yi en fazla 1000'de 1 hatayla bulmak istiyorsak, yukarıda $q = x = 1$ alırız ve

$$\exp 1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} = \left| \exp 1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \right| \leq \frac{3}{(m+1)!}$$

buluruz; ardından,

$$\frac{3}{(m+1)!} \leq \frac{1}{1000}$$

eşitsizliğini sağlayan bir m bulmak gerekiyor. $m = 6$ yetiyor. Demek ki,

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{6!} = 2{,}7180555\ldots$$

sayısı e'ye 1000'de 1 yakın, yani,

$$2{,}7170555\ldots \leq e \leq 2{,}7190555\ldots$$

Fena bir iş yapmadık doğrusu.

Tabii Sonuç 10.10'dan daha ince ve daha doğru kestirimler yapılabilir. Ama amacımız bu değil.

Matematiğin daha ileri safhalarında, $\exp x$ ifadesi, daha doğrusu,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

ifadesi x, kare bir matrisken, ya da x bambaşka uzaylardayken (örneğin karmaşık bir sayıyken) de anlamlı olacak. Bunu doğru kılan $n!$ sayısının çok büyük bir sayı olmasıdır, aynı olgu $n!$ yerine örneğin n^2 alırsak doğru olmaz, nitekim,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{n^2}\right)$$

limiti ancak ve ancak $|x| \leq 1$ ise vardır, yoksa dizi ıraksaktır. İleride bu ve benzer ifadeleri kanıtlamanın kolay yöntemlerini göreceğiz.

Alıştırmalar

10.19. $\lim_{n\to\infty}\prod_{i=2}^{n}(1-\frac{1}{i})$ limitini bulun.

10.20. Her x, $y \in \mathbb{R}$ için, $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$ eşitsizliğini kanıtlayın. Bundan $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$ eşitliğini çıkarın.

10.21. Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $q \in \mathbb{Q}$ için, $\exp qx = (\exp x)^q$ eşitsizliğini kanıtlayın. (Bir önceki alıştırmayı kullanarak önce $q \in \mathbb{N}$ için, sonra $q \in \mathbb{Z}$ için kanıtlayın.)

10.22. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $\exp x > 0$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10.23. Her x, $y \in \mathbb{R}$ için, eğer $x < y$ ise, $\exp x < \exp y$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10.24. $\lim_{n\to\infty}\exp(-n) = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

10.25. $\lim_{n\to\infty}\exp(1/n) = 1$ eşitliğini kanıtlayın. (Dikkat: $\exp 0 = 1$ eşitliği yetmez, exp fonksiyonunun sürekli olduğunu (hatta sürekliliğin tanımını bile) henüz bilmiyoruz; tanımlara geri dönün.)

10.26. e^2 sayısını en fazla milyonda 1 hatayla hesaplayın.

10.27. e sayısının virgülden sonraki k'inci basamağı 9 değilse, bu basamağı bulmak için,

$$e \approx \sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}$$

kestiriminde m kaç olmalıdır?

10.28. $\exp e$ sayısı en fazla on binde 1 hatayla bulun.

10.29. $0 \le \alpha \le 1$ olsun. $1 - \alpha \le \exp(-\alpha)$ eşitsizliğini kanıtlayın. **İpucu:**

$$\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} - \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \ge 0.$$

10.30. Sayfa 186'daki kanıtı $\exp x = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n$ eşitliğinin kanıtına uyarlayabilir misiniz?

10.31. $\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n} - 1) = 1$ eşitliklerini kanıtlayın.

10.32. Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\exp\left(x + \frac{1}{n}\right) - \exp x\right)\right) = \exp x$$

eşitliğini kanıtlayın.

10.33. $(n^{1/n})_n$ dizisinin zamanla azaldığını kanıtlayın. Buradan $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın (bkz. Örnek 8.2).

10.34. $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/n}$ ve $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/(n-1)!}$ limitlerini bulun.

10.35. Her $x \in \mathbb{R}$ için, terimleri

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \text{ ve } \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

olan dizilerin yakınsak olduklarını kanıtlayın (Örnek 15.29). Bu dizilerin limitleri sırasıyla $\cos x$ ve $\sin x$ olarak yazılır. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

10.36. $(x_n)_n$, yakınsak ve pozitif bir dizi olsun. Limitin 0 ve 1'den farklı olduğunu varsayalım. $\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın. Limit 0 ya da 1 olursa ne diyebiliriz?

10.7 $\exp(x+y) = \exp x \exp y$

Başlıktaki eşitliği kanıtlayıp bu eşitliğin önemli birkaç sonucunu vereceğiz. Kanıtımızda okurun hoşlanacağını umduğumuz güzel hesaplar yapacağız. Bu tür hesaplarla arası hoş olmayan matematikçi adayı okurun dikkatlice okumasında sonsuz yarar vardır. Bölüm 16'da Cauchy çarpımını gördüğümüzde, burada yaptığımız çok daha basit biçimde çıkacak.

Teorem 10.11. *Her x, $y \in \mathbb{R}$ için,* $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Kanıtlamak istediğimiz eşitliğin sağındaki ve solundaki ifadelerin ikisi de birer limit. Nitekim, soldaki ifade, exp fonksiyonunun tanımı gereği,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}$$

olur. Sağdaki ifade de, gene tanım gereği,

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)$$

ifadesine eşittir; ama bunu,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)\right)$$

olarak da yazabiliriz. Demek ki birinci limitle bu son limitin birbirine eşit olduğunu göstermeliyiz. Bir başka deyişle,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)-\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}\right)\right)=0$$

eşitliğini göstermeliyiz. Demek ki, terimleri

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)-\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}\right)$$

olan dizinin 0'a yakınsadığını göstermeliyiz. Oldukça karmaşık görünümlü bir dizi... $n=0,1,2,3$ için dizinin terimlerini hesaplamakta yarar var.

$n=0$ için,

$$1-1=0$$

elde edilir.

$n=1$ için,

$$(1+x)(1+y)-[1+(x+y)]=xy$$

elde edilir.

$n=2$ için, ilk elde,

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)-\left[1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}\right]$$

elde edilir. Çarpmalar ve sadeleştirmeler yapıldığında da geriye sadece,

$$\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\frac{x^2y^2}{4}$$

kalır.

$n=3$ için, ilk elde,

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}\right)-\left[1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{6}\right]$$

elde edilir. Çarpmalar ve sadeleştirmeler yapıldığında da geriye sadece (!),

$$\frac{x^3y}{6}+\frac{x^2y^2}{4}+\frac{xy^3}{6}+\frac{x^2y^3}{12}+\frac{x^3y^2}{12}+\frac{x^3y^3}{36}$$

kalır.

$n = 4$ için sonucun ne çıkacağını bulmayı okura bırakıyoruz. (Hesapları yapmakta çok yarar vardır. Şiddetle öneririz.)

Okur elini çamura bulayıp hesapları gerçekten yaparsa, iki ilginç tespitte bulunacaktır.

a. Birinci terimden çıkarılan ikinci terim tamamen sadeleşmekte ve ortadan kaybolmaktadır. Örneğin $n = 3$ durumunda,

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6}\right)$$

ifadesinden çıkarılan

$$1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6}$$

ifadesinin her terimi birinci ifadede de aynı katsayıyla bulunduğundan sadeleşerek yok olmaktadır.

b. Hesap sonucu bulunan ifadedeki terimlerin en küçük derecesi giderek büyümektedir. Örneğin,

$n = 1$ için 2'nci dereceden (xy),

$n = 2$ için 3'üncü dereceden $(x^2y/2 + \cdots)$

$n = 3$ için 4'üncü dereceden: $(x^3y/6 + \cdots)$

kalan bulunmaktadır. Okur hesapları yaparsa $n = 4$ için en küçük derecesi 5 olan bir kalan bulacağını görecektir.

Kalanın en büyük dereceli teriminin,

$$\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!}$$

olduğu belli.

Henüz başlamadığımız kanıta devam edelim. x ve y iki sabit sayı olsun. Birazdan bu sabit sayıları pozitif alabileceğimizi göreceğiz, yani teoremi pozitif x ve y sayıları için kanıtlamanın yeterli olduğunu göreceğiz. Ama şimdilik x ve y herhangi iki gerçel sayı.

$\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun.

$$\left|\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}\right)\right| < \epsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Kolları sıvayıp, mutlak değer içindeki canavarı açalım ve birçok terimin sadeleşeceğini umalım.

Canavarı parça parça açalım. Önce ilk ifade:

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{y^j}{j!}\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^iy^j}{i!j!}$$
$$=\sum_{0\le i\le n,\ 0\le j\le n}\frac{x^iy^j}{i!\cdot j!}.$$

Şimdi ikinci ifade:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^iy^{i-j}}{i!}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{\binom{i}{j}}{i!}x^iy^{i-j}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{\frac{i!}{j!(i-j)!}}{i!}x^jy^{i-j}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{x^iy^{i-j}}{j!(i-j)!}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j+k=i}\frac{x^jy^k}{j!k!}=\sum_{0\le j+k\le n}\frac{x^jy^k}{j!k!}=\sum_{0\le i+j\le n}\frac{x^iy^j}{i!j!}.$$

Ve şimdi σ kapsamındaki ifadeleri kısaltmak amacıyla

$$\triangle=\{(i,\,j):0\le i\le n,\ n<i+j\le 2n\}$$

tanımını yapıp iki ifade arasındaki farka bakalım:

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{y^i}{i!}\right)-\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(x+y)^i}{i!}\right)=\sum_{1\le i,j\le n}\frac{x^iy^j}{i!j!}-\sum_{0\le i+j\le n}\frac{x^iy^i}{i!j!}$$
$$=\sum_{(i,j)\in\triangle}\frac{x^iy^i}{i!j!}.$$

Görüldüğü ve denemelerimiz sonucu tahmin ettiğimiz gibi derecesi n'den küçükeşit olan terimler kayboldu ve geriye dereceleri $n+1$'den $2n$'ye kadar uzanan terimler kaldı.

Hesaplarımız sonunda bulduğumuz ifadenin mutlak değerinin ϵ'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız (belli bir N sayısından büyük olacak, işte o N'dir bulmak istediğimiz.)

Üçgen eşitsizliğinden,

$$\left|\sum_{\triangle}\frac{x^iy^j}{i!j!}\right|\le\sum_{\triangle}\frac{|x^i||y^j|}{i!j!}$$

bulunur. Dolayısıyla sağdaki terimi ϵ'dan küçük yapmalıyız ve dolayısıyla x ve y sayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz ve dolayısıyla mutlak değerleri kaldırabiliriz. (x ya da y sıfırsa yukarıdaki toplam da 0'dır ve kanıtlayacak bir şey kalmaz.) Bundan böyle, $x, y > 0$ sayıları için,

$$\sum_{\triangle} \frac{x^i y^j}{i!j!}$$

ifadesini (n'yi yeterince büyük alarak) ϵ'dan küçük yapmaya çalışacağız.

x ya da y sayılarından biri diğerinden büyükeşittir. Diyelim x, y'den büyükeşit olsun. O zaman,

$$\leq \sum_{\triangle} \frac{x^{i+j}}{i!j!}$$

ifadesi yukarıdaki ifadeden büyükeşittir. (Formülün başına koyduğumuz "$\leq$" simgesi, bir önceki formülden devam ediyoruz anlamına geliyor.) Demek ki bu son ifadeyi ϵ'dan küçük yapmalıyız. Bu son ifade de şuna eşit:

$$= \sum_{\triangle} \frac{(i+j)!}{i!j!} \frac{x^{i+j}}{(i+j)!} = \sum_{\triangle} \binom{i+j}{i} \frac{x^{i+j}}{(i+j)!}.$$

i ve j'yi n ile sınırlamazsak daha büyük bir ifade buluruz, yukarıdaki hesabı devam ettirelim:

$$\leq \sum_{n<i+j\leq 2n} \binom{i+j}{i} \frac{x^{i+j}}{(i+j)!}.$$

Şimdi bu son ifadeyi ϵ'dan küçük yapmalıyız. x^k'ların katsayılarını bir parantezde toparlayarak bu son ifadeyi şöyle de yazabiliriz:

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{2n} 2^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2x)^k}{k!}.$$

ϵ'dan küçük yapmamız gereken bu son ifadeye alıcı gözle bakalım. Bir şey anımsatıyor mu? ("Evet" deyin!) $\exp 2x$'e yakınsayan dizinin terimlerini anımsıyor musunuz? exp fonksiyonunun tanımını anımsatalım:

$$\exp 2x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}.$$

Yani, terimleri

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

olan dizi yakınsak bir dizidir ($\exp 2x$'e yakınsar) ve yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden, öyle bir N vardır ki, her $m > n > N$ için,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(2x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

farkı ϵ'dan küçük olur. Eğer burada $m = 2n$ alacak olursak, her $n > N$ için,

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(2x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

farkı, yani

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2x)^k}{k!}$$

toplamı ϵ'dan küçük olur. İstediğimiz en sonunda kanıtlanmıştır. □

Bu önemli teoremin önemli sonuçlarını irdelemeden önce kanıtına bir göz atalım. Kanıtta elde edilen

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!} \right) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!} \right) = 0$$

yakınsaklığın aslında gerçel sayılarla pek ilgili olmadığını gördünüz mü? x ve y'nin birer sayı olduklarını unutun ve bunları iki bilinmeyenli (ya da değişkenli) bir polinomun değişkenleri olarak görelim.

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{y^i}{i!} \right) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(x+y)^i}{i!}$$

ifadesini hesaplamak için yaptığımız işlemlere yakından bakacak olursanız, her x^iy^j teriminin belli bir n'den sonra kaybolduğu görülecektir. Nitekim, exp fonksiyonu bambaşka uzaylarda da tanımlanacak ve bu bölümde kanıtladığımız

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$$

eşitliği bu uzaylarda da geçerli olacaktır. Şimdi teoremin önemli sonuçlarını çıkaralım:

Sonuç 10.12. $\exp 0 = 1$ *ve her* $x \in \mathbb{R}$ *için* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ *olur.*

Kanıt: Birinci eşitlik aslında $\exp x$'in tanımından belli: Bu tanımda $x = 0$ almak yeterli.

İkinci sonuç bunun bir sonucu:

$$1 = \exp 0 = \exp(x - x) = \exp(x + (-x)) = (\exp x)(\exp(-x)).$$

Demek ki $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$. □

Sonuç 10.13. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *için,* $\exp x > 0$. *Hatta eğer* $x \geq 0$ *ise* $\exp x \geq 1$, *yoksa* $0 < \exp x < 1$.

Kanıt: Eğer $x \geq 0$ ise, $\exp x$'in pozitif, hatta 1'den büyükeşit olduğu tanımından ve her şeyinden belli:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1.$$

Bir başka kanıt: Eğer $x \geq 0$ ise,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \geq 1.$$

Eğer $x > 0$ ise, $-x > 0$ olduğundan, bu bulgudan ve Sonuç 10.12'den,

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$$

çıkar. Kanıtlamamız gereken $\exp x < 1$ eşitsizliği de bundan çıkar. □

Sonuç 10.14. exp *kesin artan bir fonksiyondur, yani* $x < y$ *için* $\exp x < \exp y$ *olur.*

Kanıt: Teorem 10.11'den ve Sonuç 10.13'ten,

$$\exp y = \exp\left(x + (y - x)\right) = (\exp x) \exp\left(y - x\right) < \exp x$$

bulunur. □

Sonuç 10.15. *Her* $x \in \mathbb{R}$ *ve her* $q \in \mathbb{Q}$ *için* $\exp qx = (\exp x)^q$ *ve dolayısıyla* $\exp q = e^q$.

Kanıt: Önce q'nün bir doğal sayı olduğunu varsayalım. Bu durumda sonuç, q üzerine tümevarımla, teoremin doğrudan bir sonucu olan,

$$\exp\left(q + 1\right)x = \exp(qx + x) = (\exp qx)(\exp x)$$

eşitliğinden çıkar.

Şimdi $q \in \mathbb{Q}^{>0}$ olsun. $a, b \in \mathbb{N}$ için $q = a/b$ yazalım. O zaman, yukarıda yapılana göre,

$$(\exp qx)^b = \exp bqx = \exp ax = (\exp x)^a$$

olur ve exp hep pozitif olduğundan,

$$\exp qx = (\exp x)^{a/b} = (\exp x)^q$$

elde edilir.

$q \in \mathbb{Q}^{<0}$ durumu, bundan ve Sonuç 10.13'ten çıkar. Aynı sonuç Sonuç 10.9'dan da çıkar. □

Alıştırmalar

10.37. Bir kumarbaz kazanma şansının milyonda 1 olan bir oyunu 1 milyon kez oynuyor. Kumarbazın tek bir oyun bile kazanamama olasılığı aşağı yukarı kaçtır?

10.8 e Sayısı Hakkında

Bu altbölüm acelesi olan okur tarafından atlanabilir. Gene de bölümün içeriğinin farkında olmasında yarar vardır.

10.8.1 e Kesirli Bir Sayı Değildir

Başlıktaki önermeyi kanıtlayacağız. Aslında bu önermeden çok daha güçlü bir önerme doğrudur: e sayısı sadece kesirli olmamakla kalmaz, ***cebirsel*** bir sayı bile değildir, yani hiçbir $n \geq 1$ ve $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}$ için,

$$a_0 + a_1 e + \cdots + a_i e^i + \cdots + a_{n-1} e^{n-1} + e^n = 0$$

eşitliği sağlanmaz. Cebirsel olmayan sayılara ***aşkın sayılar*** denir. e'nin aşkınlığını 1873'te Charles Hermite kanıtlamıştır ve e, tarihte aşkın olduğu kanıtlanan ilk sayıdır. π'nin aşkınlığını daha sonra, 1882'de Ferdinand von Lindemann kanıtlamıştır. Ama Hermite'in teoremini kanıtlamak çok zor olduğundan, biz sadece başlıktaki önermeyi kanıtlamakla yetineceğiz.

Teorem 10.16. *e kesirli bir sayı değildir.*

Kanıt: Sonuç 10.9'da kanıtladığımız

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = e$$

eşitliğini kullanacağız. e'nin kesirli bir sayı olduğunu ve p ve q pozitif doğal sayıları için p/q sayısına eşit olduğunu varsayalım. Demek ki,

$$q!e = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{q!}{i!} = q! + \frac{q!}{1!} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=q+1}^{n} \frac{q!}{i!}$$

olur. Hem $q!e$ hem de eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplamlar doğal sayı olduklarından, kuyruktaki

$$R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=q+1}^{n} \frac{q!}{i!}$$

limiti de bir doğal sayıdır. Toplamdaki terimleri sadeleştirirsek,

$$R = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=q+1}^{n} \frac{1}{(q+1)\cdots(q+j)}$$

sayısının bir doğal sayı olduğunu buluruz. Ama $j > 1$ için,

$$\frac{1}{(q+1)\cdots(q+j)} < \frac{1}{(q+1)^j}$$

olduğundan,

$$R \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(q+1)^j}$$

olmalı. Sağ taraftaki limiti hesaplamayı biliyoruz (bkz. Teorem 6.2):

$$\begin{aligned} R &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(q+1)^j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{q+1}\right)^j \\ &= \frac{1}{q+1} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{q+1}\right)^j = \frac{1}{q+1} \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} < 1. \end{aligned}$$

R pozitif doğal sayısının 1'den küçük olduğunu kanıtladık! Daha neler! □

Biraz Tarih. Lindemann aslında e sayısıyla ilgili çok daha genel bir teorem kanıtlamıştır: Eğer $0 \neq \alpha$ cebirselse (yani katsayıları $\mathbb{Q}$'da olan ve 0 olmayan bir polinomun köküyse), e^α sayısı aşkındır (yani cebirsel değildir). Kanıtlamadığımız ve bu ders notlarında kanıtlamayacağımız (ama kitabı çok değil yirmi sayfa daha uzatarak kanıtlayabileceğimiz) meşhur Euler eşitliğine göre $e^{i\pi} = -1$ olduğundan, $i\pi$ cebirsel olamaz, dolayısıyla π de cebirsel olamaz...

Bundan da, sadece çentiksiz cetvel ve pergel kullanarak, verilmiş bir dairenin alanına eşit bir karenin çizilemeyeceği çıkar...

Madem ki e ve π cebirsel değil, o zaman $e+\pi$ ve $e\pi$ sayılarının her ikisi birden cebirsel olamaz, yoksa, hem e hem de π,

$$x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$$

denklemini sağlardı ve her ikisi birden cebirsel olurdu... Tabii bu akıl yürütme, $e+\pi$ ya da $e\pi$ sayılarından hangisinin aşkın olduğunu söylemiyor. Her ikisi birden de aşkın olabilir ve muhtemelen de öyle.

1897'de ABD'nin İndiana eyaleti az kaldı π'yi kesirli bir sayı olarak kabul eden bir yasa çıkarıyordu. Rastlantı eseri o anda mecliste bulunan bir matematikçi rezaleti engellemiştir.

10.8.2 Bileşik Faizler

Bankaya A lira yatırdığınızı ve bankanın yüzde yüz faiz verdiğini düşünün. Bir yıl sonunda bankada $2A$ liranız olur. Eğer banka %15, yani 0,15 faiz verseydi, o zaman yıl sonunda bankada $A + 15A/100$ liranız olurdu, ilk yatırdığınız A lira ve buna ilaveten faizden gelen $15A/100$. Bankanın yıllık faizi x ise, (%100 faiz $x = 1$ demektir) bir yıl sonra paranız Ax artar ve toplam

$$A + Ax = A(1+x)$$

kadar paranız olmuş olur. Paranızı bankadan çekmez de, faiziyle birlikte bir yıl daha bekletirseniz, o zaman ikinci yılın faizi bu $A(1+x)$ üstünden hesaplanır ve ikinci yılın sonunda

$$A(1+x)(1+x) = A(1+x)^2$$

kadar paranız olur. Faizine hiç dokunmadan parayı bankada n yıl bırakırsanız ve faiz bu n yıl içinde değişmezse, n yıl sonra bankada,

$$A(1+x)^n$$

liranız birikmiş olur.

Şimdi de bankanın faizi müşterilerine altı ayda bir ödediğini varsayalım. O zaman, altı ay sonra bankadaki paranız

$$A\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

lira olur, çünkü yıllık faiz x ise, altı aylık faiz bunun yarısı kadar, yani $x/2$'dir. Eğer bu para bir sonraki altı ay boyunca da bankada işletilirse, o zaman bankadan x'ten daha fazla yıllık faiz alırsınız, çünkü banka, ikinci altı ayda ilk altı ay sonunda verdiği faize de faiz işleyecektir. Böylece yıl sonunda paranız

$$A\left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$

lira olur ki bu da elbette yıllık ödenen x faizden daha fazla para getirir.

Ya faiz üç ayda bir ödenirse? O zaman bir yıl sonra,

$$A\left(1+\frac{x}{4}\right)^4$$

liranız olur. Eğer faiz her ay ödenirse ve anaparaya ve faizine hiç dokunmazsanız, yıl sonunda,

$$A\left(1+\frac{x}{12}\right)^{12}$$

kadar paranız olur. Faiz günlük de ödenebilir ve o zaman bankada yıl sonunda

$$A\left(1+\frac{x}{365}\right)^{365}$$

kadar paranız birikir. Genel olarak, eğer faizler yılda n kez ödenirse, o zaman yıl sonunda

$$A\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

kadar paranız birikir. Şimdi, yıl başında 1 liranızın ($A = 1$) ve faizin %100 ($x = 1$) olduğunu varsayalım. O zaman yıl sonunda bankada

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

liranız olur. n ne kadar büyükse, yani banka faizi ne kadar sık öderse, yıl sonunda bankada biriken paranız o kadar artar. n'yi sonsuza götürürsek, e

buluruz. Yani banka paranızı %100 faizle işletirse ve faizi her *an* öderse, o zaman yıl sonunda,

$$e = 2{,}71828\ldots$$

liranız olur. Faizin ne kadar sıklıkla ödendiği pek büyük bir fark yaratmıyor:

Yıllık:	2	10 günlük:	2,68200
6 aylık:	2,25	5 günlük:	2,699894
3 aylık:	2,44141	1 günlük:	2,71457
1 aylık :	2,61304	sürekli:	2,71828

10.8.3 e Sayısının Farklı Gösterimleri

Bu altbölümde, okurun merakını gıdıklamak amacıyla, e sayısının çeşitli gösterimlerini kanıtlamadan vereceğiz.

Aşağıda, $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ ifadesi,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i$$

anlamına kullanılacaktır. Önce bildiklerimizi yazalım.

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^i}{i!}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Benzer eşitlikler:

$$\begin{aligned} e &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1-2i}{(2i)!}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i+1}{i!} = 2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i+1}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{3-4i^2}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{9i^2+1}{(3i)!} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{4i+3}{2^{2i+1}(2i+1)!}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2}{2\cdot i!} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^3}{5\cdot i!} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^4}{15\cdot i!}. \end{aligned}$$

Bu tür eşitlikler çoğaltılabilir.

Bir başka türden belki ama gene de standart sayılabilecek bir eşitlik:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right].$$

n-inci ***Bell sayısı***, n elemanlı bir kümenin toplam parçalanış sayısıdır, yani küme üzerindeki değişik denklik ilişkisi sayısıdır. (Bu ad ünlü İskoç matematikçi yazar Eric Temple Bell'in (1883-1960) onuruna verilmiştir.) Örneğin, $n = 3$ ise, $\{1, 2, 3\}$ kümesinin parçalanışları,

$$\begin{array}{l} \{1,2,3\}; \\ \{1\},\ \{2,3\}; \\ \{2\},\ \{1,3\}; \\ \{3\},\ \{1,2\}; \\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\} \end{array}$$

olmak üzere 5 tanedir, yani $p_3 = 5$. İlk Bell sayıları şöyledir:

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975.$$

Bell sayıları arasında kanıtlaması oldukça kolay olan şu ilişki vardır:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

Biraz önce verdiğimiz eşitlikler şöyle genelleştirilebilir:

$$e = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{B_{n-1} i!}.$$

Peki ya şu Dobinski formülüne ne demeli?

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}.$$

Şimdi tuhaf bir eşitlik verelim. p_k, k'ıncı asal olsun. Örneğin $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ vs. Eğer $n \geq 2$ bir doğal sayıysa, $n\sharp$, n'den küçükeşit asalların çarpımı olsun. Örneğin,

$$p_4\sharp = 7\sharp = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210.$$

Şimdi çarpıcı eşitliği verebiliriz:

$$e = \lim_{n\to\infty} (p_n\sharp)^{1/p_n}.$$

Bir sonraki altbölümde e'nin neden ilginç bir sayı olduğu bir kez daha gün yüzüne çıkacak. Buna bağlantılı olarak: $1/n$ kazanma olasılığıyla kumar oynayan bir kumarbazın n kez oynadığında hiç kazanmama olasılığı, n büyük olduğunda, yaklaşık $1/e$'dir.

10.8.4 Yer Bulma Olasılığı

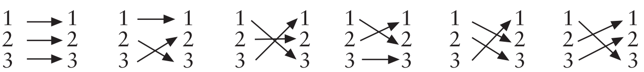
Kendi adlarını okuyacak kadar bile okuma yazması olmayan n kişi bir ziyafete davet edilmişler. Davet eden kişi, davet edilenlerin okuma yazma bilmediğini tahmin edemediğinden, ziyafet masasındaki yerleri belirlemek için konukların adlarını bir kartona yazıp tabaklarının üstüne koymuş. Hiçbir şeyin farkında olmayan ve varmayan konuklar masaya rasgele yerleşmişler. En az bir kişinin doğru yere oturma olasılığı kaçtır?

Yanıtı önce küçük n'ler için bulalım. Belki bir fikir verir. (Acemice bir yaklaşım!)

$n = 1$ ise, gelen tek davetlinin yanlış yapma ihtimali yoktur, mecburen kendisine ayrılan yere oturacaktır. Bu durumda en az bir kişinin doğru yere oturma olasılığı 1'dir.

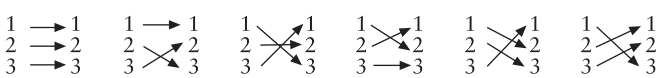
$n = 2$ ise, ya ikisi de doğru ya da ikisi de yanlış oturacaktır; olasılık %50, yani 1/2'dir.

$n = 3$ ise çeşitli yerleşme biçimlerini çizelim. Sol tarafa kişileri 1, 2, 3 diye yazalım, sağ tarafa da kartonda yazan adları. Ok da kişinin oturduğu yerin kartonunu göstersin. İşte 6 durum:



Sadece ilk 4 yerleşmede en az bir kişi doğru oturmuş. Son iki yerleşmede herkes yanlış yere oturmuş. Demek ki en az bir kişinin doğru yere oturma olasılığı 4/6, yani 2/3. Olasılık bu sefer arttı.

Şimdi $n = 4$ olsun. Yukarıdaki gibi şekil yaparsak, çok uzar, işin içinden çıkamayız. Yerleşimleri daha cebirsel bir biçimde simgeleme yöntemi bulmalıyız. Yukarıdaki 6 yerleşimi şöyle gösterelim:



(1)(2)(3) (1)(23) (13)(2) (12)(3) (123) (132)

Örneğin (123) yerleşimi, 1 numaralı konuk 2 numaralı iskemleye, 2 numaralı konuk 3 numaralı iskemleye ve 3 numaralı konuk 1 numaralı iskemleye oturuyor demektir. (13)(2) ise 1 numara 3 numaranın yerine, 3 numara 1 numaranın yerine oturmuş ve 2 numara da kendi yerine oturmuş demektir. Kendi numarasına oturanları hiç göstermesek de olur. O zaman (13)(2) yerine kısaca (13) yazabiliriz. Herkesin kendi yerine oturduğu durumu da Id olarak gösterelim.

Bu anlaşmayla $n = 4$ için tüm durumları teker teker yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Id},\\
&(12), (13), (14), (23), (24), (34),\\
&(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243),\\
&(12)(34), (13)(24), (14)(23),\\
&(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432).
\end{aligned}$$

Sadece ilk üç satırda en az bir kişi kendi yerine oturmuş, yani toplam 24 durumun 15'inde. Olasılık bu sefer $15/24 = 5/8$ bulunur. Bir önceki olasılıktan daha düşük.

Bir de $n = 5$ için bulalım ama bu sefer daha çabuk olalım. (Bu, matematik yapalım demektir!) En az 1 kişinin doğru yerleştiği yerleşimleri sayalım:

Id: 1 tane.

Tipi (12) olan yerleşimler, yani tam 3 kişinin doğru yere oturduğu yerleşimler, bunlardan toplam

$$\binom{5}{2} = 10$$

tane var.

Tipi (123) olan yerleşimler, yani tam 2 kişinin doğru yere oturduğu yerleşimler, toplam

$$\binom{5}{3} \times 2 = 20$$

tane.

Tipi (12)(34) olan yerleşimler, toplam

$$\frac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{2}}{2} = 15$$

tane.

Tipi (1234) olan yerleşimler, toplam

$$\binom{5}{4} \times 3! = 30$$

tane.

Demek ki

$$1 + 10 + 20 + 15 + 30 = 76$$

değişik yerleşimde en az 1 kişi kendine ayrılan yere oturuyor. Toplam yerleşme sayısı da $5! = 120$ olduğundan, bu durumda olasılık $76/120 = 19/30$'dur. Bu sefer olasılık arttı, çünkü

$$\frac{5}{8} < \frac{19}{30}.$$

Bulduğumuz olasılıkları teker teker yazalım:

$$\begin{aligned} n &= 1 \text{ için } 1, \\ n &= 2 \text{ için } 1/2, \\ n &= 3 \text{ için } 4/6, \\ n &= 4 \text{ için } 15/24, \\ n &= 5 \text{ için } 76/120. \end{aligned}$$

Sanki hiçbir kural ya da formül yok... Var ama. Bulacağız. En azından paydaya $n!$ koyabileceğimiz belli! Bunun nedeni çok bariz olmalı: Toplam yerleşme sayısı $n!$ çünkü ne de olsa n kişi ve n yer var, dolayısıyla n elemanlı bir kümenin eşlemeleri söz konusu. Bu toplam $n!$ tane eşlemenin kaçının en az bir elemanı sabitlediğini bulmalıyız. Bu sayıyı $n!$ sayısına böldüğümüzde istediğimiz olasılığı buluruz.

$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin eşleşmelerinden oluşan kümeye S_n diyelim. $|S_n| = n!$ olduğunu biliyoruz.

T_i, S_n'nin, i sayısını sabitleyen eşlemelerinden oluşan küme olsun. Örneğin eğer $n = 4$ ve $i = 2$ ise,

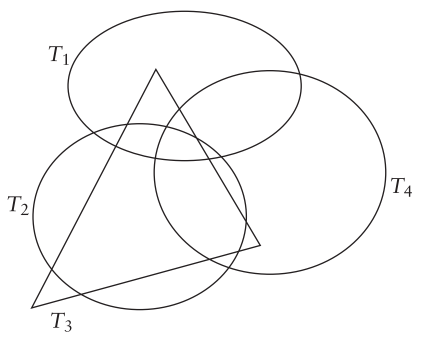
$$T_2 = \{\mathrm{Id}, (13), (14), (34), (134), (143)\}$$

olur. $|T_i| = (n-1)!$ çünkü T_i kümesi, $n-1$ tane elemanı olan $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ kümesinin eşlemelerinden oluşur.

Hesaplamak istediğimizin,

$$\bigcup_{i=1}^{n} T_i$$

kümesinin eleman sayısı olduğuna dikkatinizi çekerim. T_i'lerin bir resmi aşağıda.



Eğer değişik i'ler için T_i kümeleri kesişmeseydi, bu birleşimin eleman sayısı tam tamına T_i kümelerinin eleman sayısının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} |T_i|$$

olurdu. ($|T_i| = (n-1)!$ olduğundan, bu toplam tam $n!$ olur.) Ama maalesef T_i'ler kesişiyorlar.

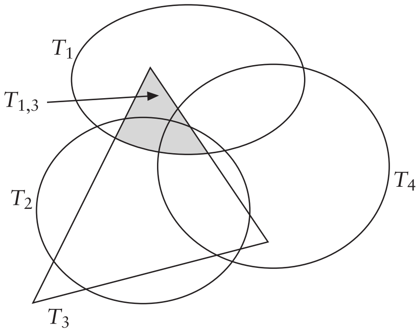
$T_{i,j}$, hem i'yi hem de j'yi sabitleyen eşlemelerin kümesi olsun, yani

$$T_{i,j} = T_i \cap T_i$$

olsun. Eğer $i \neq j$ ise,

$$|T_{i,j}| = (n-2)!$$

olur.



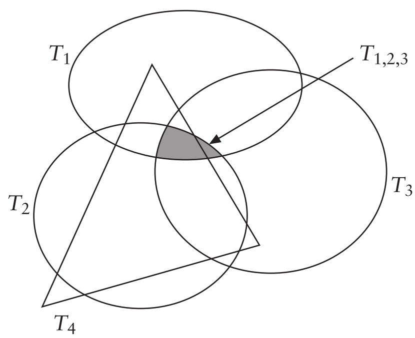
Bu tanımı genelleştirelim. $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ göstergeçleri için, $T_{i_1,\ldots,i_k}$ kümesi S_n'nin $i_1, \ldots, i_k$ sayılarını sabitleyen eşlemelerinden oluşan küme olsun. Yani

$$T_{i_1,\ldots,i_k} = T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_k}$$

olsun. Eğer $i_1, \ldots, i_k$ sayıları birbirinden değişikse,

$$|T_{i_1,\ldots,i_k}| = |S_{n-k}| = (n-k)!$$

olur.



Elbette, örneğin, $T_{1,4,2} = T_{4,1,2} = T_{2,4,1} = T_{1,2,4}$. Bundan böyle $T_{i_1,\ldots,i_k}$ yazılımını sadece

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$$

eşitsizliğini sağlayan $i_1, i_2, \ldots, i_k$ göstergeçleri için kullanacağız.

T_i'lerin birleşiminin eleman sayısını bulmak için [N1]'de kanıtladığımız İçindelik-Dışındalık Teoremi'ni kullanacağız:

$$\left|\bigcup_i T_i\right| = \sum_i |T_i| - \sum_{i_1<i_2} |T_{i_1,i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |T_{i_1,i_2,i_3}| - \cdots$$

yani

$$\left|\bigcup_i T_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sum_{1\le i_1\le \ldots \le i_k \le n} |T_{i_1,\ldots,i_k}| \right).$$

Bu teoremi durumumuza uygulayalım. Eğer

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$$

ise, göstergeçler birbirinden değişik olacağından,

$$|T_{i_1,\ldots,i_k}| = |S_{n-k}| = (n-k)!$$

eşitliğini biliyoruz. Ayrıca her $k = 1, \ldots, n$ için, tam

$$\binom{n}{k}$$

tane $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ eşitsizliğini sağlayan

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$$

kümesi olduğunu biliyoruz. Demek ki,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

olur. Bu sayıyı daha tıkız bir biçimde hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

buluruz. Demek ki, hesaplamak istediğimiz olasılık,

$$\frac{|\bigcup_{i=1}^{n} T_i|}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

olur. İstediğimizi bulduk.

Ancak, n çok büyükken, örneğin $n = 1000$ iken ya da $n = 1.000.000$ iken bu sayıyı hesaplamak çok zordur. Matematikçiler bu gibi durumlarda n'yi sonsuza götürürler ki n çok büyükken yaklaşık bir değer bulunabilsin. Aynı şeyi faiz hesaplarında da yapmıştık. Yukarıda n'yi sonsuza götürürsek e^{-1} buluruz (bkz. Sonuç 10.9).

Teorem 10.17. *Rastgele eşlenen n çiftten en az birinin kendi eşiyle eşlenme olasılığı, n sonsuza giderken $1/e$'ye yakınsar, yani n çok büyükken bu olasılık yaklaşık $1/e$'dir.* □

İlk Görünüşe Aldanma! $f(n) = [e^{n/2-1/20}]+1$ olsun. Buradaki $[x]$, x'in tamkısmını ifade etmektedir. $f(1)$, $f(2)$, …, $f(9)$ değerleri şöyledir:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55;$$

yani Fibonacci dizisinin ilk sayıları. Ama bir sonraki değer $f(10) = 144$ olur! Demek ki neymiş? İlk görünüşe aldanmamak lazımmış!

11. Yakınsak Dizi Örnekleri II

Yakınsaklık konusunu birkaç örnekle perçinleyelim. Örneklerden bazılarını geçmişte görmüştük ama burada değişik yöntemler deneyeceğiz.

Örnekler

11.1. *Eğer* $a > 0$ *ise* $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

Kanıt: Eğer $a = 1$ ise kanıtlayacak bir şey yok. Bundan böyle $a \neq 1$ olsun.

$a > 1$ durumunda eşitliği kanıtlamamız yeterli, nitekim bu durumda kanıtladığımızı varsayarsak, $0 < a < 1$ ise, $b = 1/a$ olsun; o zaman $b > 1$ olur ve

$$\lim a^{1/n} = \lim \frac{1}{b^{1/n}} = \frac{1}{\lim b^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1$$

elde ederiz.

Bundan böyle $a > 1$ eşitsizliğini varsayalım.

$(a^{1/n})_n$ dizisi azalan bir dizidir, çünkü

$$a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliğinin taraflarının $n(n+1)$'inci kuvvetini alırsak, bu eşitsizlikle,

$$a^n < a^{n+1}$$

eşitsizliğinin birbirine denk olduklarını görürüz; ama $a \geq 1$ olduğundan bu son eşitsizlik doğrudur. $(a^{1/n})_n$ dizisi aynı zamanda pozitif bir dizi olduğundan, dizi yakınsaktır.

Şimdi de dizinin limitini bulalım. Dizinin limitine x diyelim. $a^{1/n} > 1$ olduğundan, $x \geq 1$'dir. $(a^{1/2n})_n$ dizisi $(a^{1/n})_n$ dizisinin altdizisi olduğundan, $(a^{1/2n})_n$ dizisi de x'e yakınsar. Bu zekice gözlemden x'i bulacağız.

$$x^2 = (\lim a^{1/2n})^2 = \lim a^{2/2n} = \lim a^{1/n} = x$$

eşitliğinden dolayı, $x^2 = x$ buluruz. Ama $x \geq 1$ olduğundan, buradan $x = 1$ çıkar.

11.2. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Kanıt: Dizinin bir zaman sonra azalan olduğunu kanıtlarsak o zaman dizinin yakınsak olduğunu da kanıtlamış oluruz. Kanıtlayalım.

$$(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$$

eşitsizliğinin her iki tarafının da $n(n+1)$'inci gücünü alacak olursak, bu eşitsizlikle,

$$(n+1)^n \leq n^{n+1}$$

eşitsizliğinin denk olduklarını görürüz. Şimdi bu son eşitsizliği n^n'ye bölecek olursak, bu son eşitsizlikle,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

eşitsizliğinin denk olduklarını görürüz. Ama sol taraftaki

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

terim n sonsuza gittiğinde (e sayısına) yakınsar, dolayısıyla bir zaman sonra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

eşitsizliği doğru olur.

Dizinin yakınsak olduğunu artık biliyoruz. Limite x diyelim. Dizinin terimleri de x_n olsun:

$$x_n = n^{1/n} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = x \geq 1.$$

Ama $(x_{2n})_n$, $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi, dolayısıyla bu altdizinin limiti de x olmalı. Bu zekice gözlemi ve Örnek 11.1'i de kullanarak x'i bulacağız:

$$\begin{aligned} x &= \lim x_{2n} = \lim(2n)^{1/2n} = \lim(2^{1/2n}n^{1/2n}) = \lim((\sqrt{2})^{1/n}(n^{1/n})^{1/2}) \\ &= \lim(\sqrt{2})^{1/n}\lim(n^{1/n})^{1/2} = \lim(n^{1/n})^{1/2} = (\lim n^{1/n})^{1/2} = x^{1/2}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $x^2 = x$ ve $x \geq 1$ olduğundan, $x = 1$ bulunur.

11.3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e.$$

olduğundan, yeterince büyük n için,

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} \leq (e+\epsilon)^{1/n}$$

olur. Örnek 11.1'e göre en sağdaki dizi 1'e yakınsadığından, istediğimiz sonuç Sandviç Teoremi'nden çıkar (Teorem 5.1).

11.4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty.$

Kanıt: $e - 1 > \epsilon > 0$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

olduğundan, yeterince büyük n için,

$$(e-\epsilon)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

olur. $e - \epsilon > 1$ olduğundan, en soldaki terim sonsuza gider.

11.5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{1+n}\right)^n = \frac{1}{e^2}.$

Kanıt: Aşağıda. (Okun, yani $\to$ iminin anlamı belli: n sonsuza giderken dizinin limiti anlamına geliyor.)

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-1}{1+n}\right)^n &= \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \times \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-1} \longrightarrow e^{-2} \times 1 = e^{-2}. \end{aligned}$$

11.6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{7+4n}\right)^n = 0.$

Kanıt: Parantezin içindeki ifade 1'den küçük olan 3/4'e yakınsar. Eğer $3/4 < a < 1$ ise, belli bir aşamadan sonra,

$$0 \le \left(\frac{3n-5}{7+4n}\right)^n < a^n$$

olur ve sağ taraf 0'a yakınsadığından sonuç bulunur.

11.7. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{7+3n}\right)^n = e^{-4}.$

Kanıt: n değişkenini değiştirerek (önce $m = 7+3n$, sonra $p = m/3$) limiti alınması gereken ifadeyi daha aşina olduğumuz bir şekle getirelim:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3n-5}{7+3n}\right)^n &= \left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{m-7}{3}} = \left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{-7}{3}}\left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{m}{3}}\\ &\simeq \left(\frac{m-12}{m}\right)^{\frac{m}{3}} = \left(\frac{3p-12}{3p}\right)^p = \left(1-\frac{4}{p}\right)^p \simeq e^{-4}.\end{aligned}$$

(Bkz. Önsav 10.5.) Buradaki $\simeq$ işareti "aynı limiti var" anlamına gelmektedir.

Alıştırmalar

11.8. Aşağıdaki limitleri hesaplayın:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n},\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n}\right)^{2n}.$$

11.9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ve $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+3}\right)^n$ limitlerini hesaplayın.

11.10. $(n!/n^n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azaldığını ve 1'den küçük olduğunu kanıtlayın. $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

11.11. $a_1 = \sqrt{6}$ ve $k \ge 1$ için,

$$a_{k+1} = \sqrt{6+a_k}$$

olsun. a_2, a_3 ve a_4'ü yazın. $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ eşitliğini kanıtlayın. **İpucu:** Dizi artar ve 6'dan küçüktür.

11.12. $a \ge 0$, $a_1 = \sqrt{a}$ ve $k \ge 1$ için,

$$a_{k+1} = \sqrt{6+a_k}$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için a'nın alabileceği değerleri bulun.

12. Sonsuza Iraksayan Diziler ve Sonsuzlar

Bu bölümde, başlıktan yanlışlıkla anlaşılabileceği gibi sonsuzluğu filan tanımlamayacağız. Sonsuzluğun analizi kümeler kuramına aittir ve [N3]'te yapılmıştır. Bu bölümde iki şey yapacağız: Bir, sonsuza (giden değil) gitmeye eğilimli dizileri inceleyeceğiz. İki, başı sonu olmayan gerçel sayılar kümesinin en başına ve en sonuna, yapay bir müdaheleyle ve sadece ve sadece duyularımızla daha uyumlu olmak amacıyla ∞ ve $-\infty$ gibi iki "anlamsız şey" ekleyeceğiz.

12.1 Sonsuza Iraksayan Diziler II

Her terimi

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

olan dizinin sürekli artan bir dizi olduğu belli, çünkü ne de olsa bir sonraki terim bir önceki terime pozitif bir sayı eklenerek elde ediliyor. Benzer şekilde, her terimi

$$y_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

olan dizi de sürekli artar. Ancak bu iki dizi arasında önemli bir fark vardır, ikinci dizi üstten sınırlıdır, çünkü her n için,

$$y_n \leq 2$$

eşitsizliği sağlanır, oysa birinci dizi üstten sınırlı değildir, yani her sayıyı bir zaman sonra aşar; nitekim, Altbölüm 7.2'de, her n doğal sayısı için,

$$x_{2^n} \geq 1 + n/2$$

eşitsizliğini kanıtladık; dolayısıyla dizinin terimleri zamanla her sayıyı aşar ve dizinin bir limiti olamaz. $(x_n)_n$ dizisi zamanla her sayıyı aşmakla kalmaz, bir defa bir sayıyı aştı mı, aynı sayıyı sürekli aşar. Bu tür dizilerin ***sonsuza ıraksadığı*** söylenir. Matematiksel tanım şöyle:

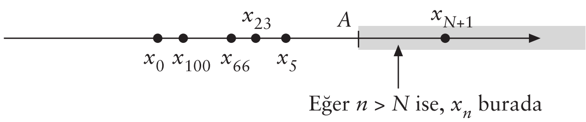
Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,

$$x_n > A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin sonsuza (∞'a) ıraksadığı ya da sadece ıraksadığı söylenir ve bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

olarak yazılır.



Bir dizinin sonsuza gitmesi için, A hangi sayı olursa olsun, belli bir göstergeçten sonra dizinin terimleri A'yı geçmeli.

Demek ki bölümün başında verdiğimiz örnekte,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$$

"eşitliği" sözkonusu. Benzer biçimde,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ldots$$

dizisi de sonsuza ıraksar elbet. Ancak,

$$0,\ \mathbf{1},\ 1,\ \mathbf{1},\ 2,\ \mathbf{1},\ 3,\ \mathbf{1},\ 4,\ \mathbf{1},\ 5,\ \mathbf{1},\ 6,\ \mathbf{1},\ldots$$

dizisi sonsuza ıraksamaz, çünkü her iki terimin arasına konmuş olan koyu puntolu 1'ler dizinin sonsuza gitmesini engeller; dizi hiçbir zaman, örneğin 2'yi **hep** aşmaz.

Dikkat: Burada "sonsuz" diye bir kavramı tanımlamadık, sadece bir "dizinin sonsuza gitmesi"nin ne demek olduğunu söyledik, yani "dizi-sonsuza-gidiyor" kavramını tanımladık. Tanımımıza göre, "sonsuza gitmek" demek, dizinin **her** A sayısını belli bir N göstergecinden sonra **hep** (yani her $n > N$ için; sadece bazı n'ler için değil) aşması demektir.

"$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$" ifadesinde aslında bir eşitlikten sözedilmemektedir, çünkü ∞ diye özel bir matematiksel nesne tanımlanmamıştır. Ama lafın gelişi ve alışkanlıklardan dolayı

$$\text{“}\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\text{”}$$

eşitliğinden bahsedeceğiz. Bir sonraki altbölümde ∞ diye bir nesneyi **yapay** (hem de çok yapay, alabildiğine yapay, daha yapayı olamaz) bir biçimde var ettiğimizde, o zaman "$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$" ifadesinden bir eşitlikmiş gibi sözetmeye biraz daha fazla hak kazanacağız.

Bu ∞ simgesi bir sayı olmamasına karşın o kadar bir sayıymış gibi algılanır ki, bazen "sonsuza ıraksar" yerine "sonsuza yakınsar" dendiği bile olur; sağda solda bu ifadeye rastlarsanız şaşırmayın.

Tanımın Tartışması. Bir $(x_n)_n$ dizisinin sonsuza ıraksadığını kanıtlamak için, önce herhangi bir A sayısı seçilir ve ardından,

$$x_n > A$$

eşitsizliğinin sağlanması için n göstergecinin ne kadar büyük, yani eşitsizliğin sağlanması için n'nin hangi N sayısından daha büyük olması gerektiği araştırılır. Bulunan N sayısı (yani göstergeci) elbette A'ya göre değişir; A ne kadar büyükse, N göstergeci de o kadar büyük olmalıdır. Bu yüzden N yerine, N'nin A'ya göre değiştiğini göstermek amacıyla N_A yazılabilir. Ama dikkat, bu yazılım, A verildiğinde işimizi gören tek bir N vardır anlamına gelmez. Nitekim, eğer A sayısı N göstergecinden sonra aşılıyorsa, aynı sayı elbette N'den büyük herhangi bir N' göstergecinden sonra da aşılır. Yani verilmiş bir A için işimizi gören sonsuz sayıda N göstergeci vardır. Amaç, işimizi gören bu N'lerin en küçüğünü bulmak değildir. (Bu en küçük N göstergecinden sadece bir tane vardır ama kimsenin umurunda değildir kendileri ve böyle bir uğraşa girmek genellikle çok zahmetli ve zahmetli olduğu kadar da gereksiz bir iştir.)

Eğer bir A için, istediğimiz eşitsizlikleri gerçekleştiren bir N göstergeci bulmuşsak, aynı göstergeci elbette A'dan küçük sayılar için de kullanabiliriz; dolayısıyla marifet küçük bir A sayısı için ilgili N'yi bulmak değil, büyük A'lar için ilgili N'yi bulmaktır. Örneğin eğer 8000'den büyük her A için istediğimizi sağlayan bir N bulabilirsek, bu, her A için bir N bulabiliriz demektir.

Sonsuza ıraksamanın dizinin kendisiyle değil, kuyruğuyla ilgili bir özellik olduğunu anlamışsınızdır, yani sonsuza ıraksayan bir dizinin terimlerinin arasına sonlu sayıda terim sıkıştırırsanız ya da diziden sonlu sayıda terim silseniz, elde ettiğiniz dizi gene sonsuza ıraksar. Geriye sonsuz sayıda terim kalacak şekilde terim silsek de sonsuza ıraksaklık değişmez.

Artan bir dizinin sonsuza ıraksadığını göstermek için, her A sayısı için $x_N > A$ eşitsizliğini sağlayan **tek bir** N göstergeci bulmak yeterlidir, çünkü o zaman, eğer $n > N$ ise, $x_n \geq x_N > A$ eşitsizlikleri de sağlanır.

Azalan diziler sonsuza gidemezler, ama "arada bir azalan diziler" sonsuza gidebilirler; örneğin,

$$1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 6,\ 5, \ldots, n,\ n-1, \ldots$$

dizisi azalan bir dizidir ama sonsuza ıraksar.

Teorem 12.1. *Artan bir dizi ya yakınsaktır ya da sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Dizi sınırlıysa, o zaman limitinin olduğunu biliyoruz (Teorem 7.1). Eğer dizi sınırsızsa, o zaman verilmiş herhangi bir A sayısını belli bir N göstergecinden sonra aşar. Ama dizi artan olduğundan, o göstergeçten sonra dizi A sayısını sürekli aşar. □

Alıştırmalar

12.1. Sonsuza ıraksayan bir dizinin bir zaman sonra pozitif olması gerektiğini kanıtlayın.

12.2. Sonsuza ıraksayan bir dizinin alttan sınırlı olduğunu kanıtlayın.

12.3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ olduğunu kanıtlayın. Tersi doğru mudur?

12.4. Sonsuza ıraksayan bir dizinin artan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın.

12.5. Sonsuza ıraksayan bir dizinin her altdizisinin de sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

12.6. $\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.7. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-4}{3n} = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.8. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n^2}{3-4n} = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.9. Sonsuza ıraksayan iki dizinin toplamının da sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

12.10. Sonsuza ıraksayan iki dizinin çarpımının da sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

12.11. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise ve $r > 0$ ise, $\lim_{n\to\infty} rx_n = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.12. $p(X) = a_kX^k + \cdots + a_1X + a_0$ bir polinom ve $k > 0$ olsun. $a_k > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} p(n) = \infty$ eşitliğini kanıtlayın.

Bir önceki sayfada, "Bir $(x_n)_n$ dizisinin sonsuza ıraksadığını kanıtlamak için, önce herhangi bir A sayısı seçilir ve ardından,

$$x_n > A$$

eşitsizliğinin sağlanması için n'nin ne kadar büyük, yani hangi N sayısından daha büyük olması gerektiği araştırılır" demiştik. Bu araştırma şu işten ibarettir: Yeterince büyük n göstergeçleri için, x_n teriminden daha küçük, ama gene de n'yi büyüterek istediğimiz kadar büyütebileceğimiz ve görünümü x_n'den daha sade bir y_n terimi bulmak. Böylece, yeterince büyük n'ler için,

$$x_n \geq y_n$$

olur. Şimdi $x_n > A$ eşitsizliği yerine $y_n > A$ eşitsizliğini elde etmeye çalışmalıyız. y_n'nin görünümü x_n'den daha sade olduğundan, problemi daha basite indirgemiş oluruz. Eğer bu indirgeme sonuca ulaşmak için yeterli değilse, yeterince büyük n'ler için,

$$y_n \geq z_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı daha basit görünümlü bir z_n ifadesi aranır. Ama dikkat, z_n'yi örneğin hep 5000'den küçük bir şey seçerseniz, bu, hapı yuttuğunuzun resmidir, o zaman bu seçimle x_n'nin 5001'den büyük olduğunu gösteremezsiniz! Örneğin z_n'yi n ya da $\sqrt{n}$ gibi bir şey seçebilirseniz, o zaman sorun çözüldü demektir, ne de olsa bunlar bir zaman sonra her A sayısını geçeceklerdir.

Dikkat ettiyseniz yukarıda önerdiğimiz yöntem şunu söylüyor:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

eşitliğini kanıtlamak için, bir zaman sonra

$$x_n \geq y_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı ve

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

eşitliğinin sağlandığı bir $(y_n)_n$ dizisi bulmak gerekir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

eşitliğini kanıtlayamıyorsanız, aynı yöntem $(x_n)_n$ yerine $(y_n)_n$ dizisiyle denenir. Önerdiğimiz bu yöntemin doğruluğu bir teoremle saptanabilir.

Teorem 12.2. *Eğer* $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *ise ve bir zaman sonra* (*yani yeterince büyük n'ler için*) $x_n \geq y_n$ *eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *olur.*

Kanıt: Rastgele bir A sayısı alalım. N_1 sayısı, her $n > N_1$ için $y_n > A$ olacak biçimde seçilsin. $(y_n)_n$ dizisi sonsuza gittiğinden böyle bir N_1 vardır. Ayrıca N_2, her $n > N_2$ için, $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlayacak biçimde seçilsin. Varsayımdan dolayı böyle bir N_2 vardır. Nihayet $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Şimdi her $n > N$ için, $x_n \geq y_n > A$ olur ve kanıt tamamlanır. □

Benzer sonuçları çoğaltabiliriz ve çoğaltacağız. Ancak önce sonsuza ıraksadığı yukarıda sunduğumuz örneklerdeki kadar bariz olmayan bir örnek sunalım.

Örnekler

12.13. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} = \infty$.

Kanıt: A verilmiş herhangi bir sayı olsun.

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > A$$

eşitsizliğinin sağlanması için N'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Soldaki terimle oynayalım:

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4}$$

Sağdaki terim, soldakinden daha sade ama sadece biraz daha sade, yeterince sade değil, devam edelim. Eğer n'yi yeterince büyük almayı göze alırsak, ki göze almalıyız, paydayı $4n^2$'ye çıkarabiliriz ve o zaman sağdaki terim hem küçülür hem de sadeleşir.

$$3n^2+n+4 < 4n^2$$

olması için, $n^2 > n+4$ olmalı ve bunun için de $n \geq 3$ yeterli. Demek ki n'yi 3'ten büyük almayı kabullenirsek,

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{4n^2} = \frac{n^2-2}{4n}$$

elde ederiz. Paydadaki n'yi sadeleştirmek için paydaki 2 yerine n koyabiliriz, çünkü $n \geq 3 > 2$:

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{4n^2} = \frac{n^2-2}{4n} > \frac{n^2-n}{4n} = \frac{n-1}{4}.$$

Yüzdük yüzdük kuyruğuna geldik. En sağdaki ifadeyi A'dan büyük yapmalıyız, bu çok kolay, n'yi $4A+1$'den büyük seçelim. Artık N'nin ne olması gerektiği belli,

$$N = \max\{[4A+1]+1, 3\}$$

olsun. O zaman, her $n > N$ için,

$$\begin{aligned}\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} &> \frac{n^3-2n}{3n^2+n+4} > \frac{n^3-2n}{4n^2} = \frac{n^2-2}{4n}\\ &> \frac{n^2-n}{4n} = \frac{n-1}{4} > \frac{N-1}{4} \geq A\end{aligned}$$

olur ve kanıt tamamlanır. □

Yukarıda verdiğimiz kanıttan çok daha başkaları ve muhtemelen daha kısaları vardır. Amacımız sadece yöntemi örneklendirmekti.

Aynı örneği bir başka yöntemle kanıtlamaya çalışalım.

12.14. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} = \infty$.

Kanıt: Limiti alınacak ifadenin payını ve paydasını n^2'ye bölelim:

$$\frac{n^3-2n+7}{3n^2+n+4} = \frac{n-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}.$$

n sonsuza giderken, sağdaki ifadenin paydası 3'e yakınsıyor. Payın n sonsuza giderken tam ne yaptığı belli değil, ama çok da belirsiz değil. Paydaki

$$n - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}$$

ifadesi, sonsuza ıraksayan n terimiyle, limiti 0 olan $-2/n+7/n^2$ teriminin toplamı. Böyle bir toplamın da sonsuza gitmesini beklemek, imkânsızı istemek olmasa gerek! Nitekim birazdan kanıtlayacağımız üzere bu böyledir. Demek ki pay sonsuza ıraksar. Payda da 3'e yakınsıyordu. Bu iki bilgiden başlangıçtaki ifadenin sonsuza ıraksadığı çıkar. Bütün bunları birazdan aşağıda göreceğiz.

Bu örnek, tahmin edileceği üzere polinomlarla ilgili genel bir teoremin özel bir halidir (bkz. Teorem 12.10 ve Teorem 12.11).

12.15. $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$.

Kanıt: Önce dizinin artan olduğunu, yani

$$(n!)^{1/n} < (n+1)!^{1/(n+1)}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Her iki tarafın da $n(n+1)$'inci gücünü alacak olursak, kanıtlamak istediğimizin,

$$(n!)^{n+1} < (n+1)!^n$$

eşitsizliğine dönüştüğünü görürüz. Bu eşitsizliği,

$$n!^n n! < n!^n (n+1)^n$$

olarak yazıp gereken sadeleştirmeyi yaparsak, bu sefer,

$$n! < (n+1)^n$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. Ama her $1 \leq i \leq n$ doğal sayısı için, $i < 1 + n$ olduğundan, bu son eşitsizlik elbette doğrudur. Demek ki artan bir dizi sözkonusu. Dolayısıyla eğer dizinin limiti yoksa, dizi sonsuza gider.
Bir an için dizinin limitinin olduğunu varsayalım ve limite x diyelim ve $x_n = n!^{1/n}$ olsun. Elbette $x > 0$ olmak zorunda.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = x$$

olur. Şimdi x_{2n} terimini açalım:

$$\begin{aligned} x_{2n} &= (2n)!^{1/2n} = (n!(n+1)(n+2)\cdots(n+n))^{1/2n} \\ &= n!^{1/2n}((n+1)(n+2)\cdots(n+n))^{1/2n} \\ &> n!^{1/2n}(n^n)^{1/2n} = x_n^{1/2}n^{1/2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Sağ taraftaki $x_n^{1/2}n^{1/2}$ teriminin limiti elbette ∞'dur (çünkü $x > 0$). Demek ki sol taraftaki x_{2n} terimi de ∞'a gider. Bu da istediğimizi kanıtlar.

Şimdi sonsuza ıraksamayla toplama ve çarpma gibi işlemler arasındaki ilişkileri irdeleyelim.

Toplamayla İlişkiler. İlk olarak sonsuza ıraksamakla dizilerin toplanması konusuna eğilelim.

Önsav 12.3. *Sonsuza ıraksayan bir diziyle alttan sınırlı bir dizinin toplamı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ sonsuza ıraksayan, $(y_n)_n$ de B tarafından alttan sınırlı bir dizi olsun. A herhangi bir sayı olsun. Belli bir zaman sonra,

$$x_n + y_n > A$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak istiyoruz. $y_n \geq B$ olduğundan,

$$x_n + y_n \geq x_n + B$$

doğrudur. Demek ki,

$$x_n + B > A$$

yani,

$$x_n > A - B$$

eşitsizliğinin belli bir zaman sonra geçerli olduğunu kanıtlamak yeterli. Ama $(x_n)_n$ sonsuza ıraksadığından bu doğru: Öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için, $x_n > A - B$ eşitsizliği geçerlidir. □

Sonuç 12.4. *Sonsuza ıraksayan bir diziyle yakınsak bir dizinin toplamı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Yakınsak bir dizi sınırlı olduğundan istediğimiz sonuç Önsav 12.3'ten çıkar. □

Sonuç 12.5. *Sonsuza ıraksayan iki dizinin toplamı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Sonsuza ıraksayan bir dizi alttan sınırlı olduğundan istediğimiz sonuç Önsav 12.3'ten çıkar. □

Çarpmayla İlişkiler. Sonsuza ıraksayan bir diziyle terimleri negatif olan bir diziyi çarparsak, sonsuza ıraksayan bir dizi elde etmeyiz elbette. Sonsuza ıraksayan bir diziyle terimleri pozitif olan bir diziyi çarparsak da her zaman sonsuza ıraksayan bir dizi elde etmeyiz. Örneğin, sonsuza ıraksayan $(n)_{n>0}$ dizisiyle terimleri pozitif olan $(1/n)_{n>0}$ dizisini çarparsak, sonsuza ıraksayan bir dizi değil, sabit 1 dizisini buluruz. Demek ki çarpmada toplamadan biraz daha dikkatli davranmalıyız.

Bir sonraki önsavı ifade etmek için bir tanıma ihtiyacımız var. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Eğer bir $\epsilon > 0$ için, $|xn| > \epsilon$ oluyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisi için "*0'dan uzak duruyor*" denir. Limiti 0 olan diziler 0'dan uzak duramazlar. Öte yandan limiti 0'dan değişik olan ve hiçbir zaman 0 olmayan diziler 0'dan uzak dururlar.

Eğer $|x_n| > \epsilon$ eşitsizliği belli bir göstergeçten sonra sağlanıyorsa, dizinin ***zamanla 0'dan uzak durduğu*** söylenir. Limiti 0 olan diziler zamanla da 0'dan uzak durmazlar ama limiti olan ve limitin 0'dan değişik olduğu diziler 0'dan uzak dururlar.

Dizinin zamanla 0'dan uzak durmasıyla, dizinin 0'a yakınsayan bir altdizisinin olmaması aynı şeydir.

Bütün bunları okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Önsav 12.6. *Sonsuza yakınsayan bir diziyle, zamanla hem pozitif olan ve hem de 0'dan uzak duran bir dizinin çarpımı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: $(y_n)_n$ zamanla pozitif olan ve 0'dan uzak duran bir dizi olsun; diyelim bu dediklerimiz N göstergecinden sonra gerçekleşsin, yani bir $\epsilon > 0$ ve her $n > N$ için,

$$\text{hem } y_n > 0 \text{ hem de } |y_n| > \epsilon$$

olsun. Demek ki her $n > N$ için,

$$y_n > \epsilon > 0$$

olur.

Bir de sonsuza ıraksayan bir $(x_n)_n$ dizisi alalım. $(x_n)_n$ dizisinin terimleri her sayıyı bir zaman sonra aştığından, 0'ı da bir zaman sonra aşarlar, yani pozitif olurlar. Yukarıdaki N'yi gerekirse daha da büyük seçerek, her $n > N$ için,

$$x_n > 0$$

varsayımını yapabiliriz. Bu hazırlıklardan sonra şimdi artık işin özüne inebiliriz. A, herhangi bir sayı olsun. Belli bir göstergeçten sonra

$$x_n y_n > A$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bu göstergeci N'den büyükeşit alacağımıza söz verirsek,

$$x_n y_n > x_n \epsilon$$

olur. Şimdi sağdaki $x_n \epsilon$ terimini A'dan büyük yapmalıyız, yani x_n'yi A/ϵ'dan büyük yapmalıyız. Ama $(x_n)_n$ dizisi sonsuza ıraksadığından, bu mümkündür. Yukarıdaki N'yi bir de ayrıca, her $n > N$ için,

$$x_n > A/\epsilon$$

eşitsizliği gerçekleşecek kadar büyük seçelim. □

Sonuç 12.7. *Sonsuza ıraksayan bir diziyle pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizinin çarpımı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizi zamanla hem pozitiftir hem de 0'dan uzak durur. □

Sonuç 12.8. *Sonsuza ıraksayan iki dizinin çarpımı sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Sonsuza ıraksayan bir dizi zamanla 1'i (örneğin) aşar, dolayısıyla zamanla pozitiftir ve 0'dan uzaktır. Yukarıdaki önsavı uygulayalım. □

Sonuç 12.9. *Eğer $(x_n)_n$ sonsuza ıraksayan bir diziyse ve $r > 0$ ise, $(rx_n)_n$ dizisi de sonsuza ıraksar.*

Kanıt: Sabit r dizisi, $r > 0$ olduğundan pozitif ve 0'dan uzaktır. □

Teorem 12.10. *$k > \ell$ ve $p_k q_\ell > 0$ olmak üzere,*

$$p(X) = p_k X^k + \cdots + p_1 X + p_0$$

ve

$$q(X) = q_\ell X^\ell + \cdots + q_1 X + q_0$$

iki polinom olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \infty$$

olur.

Kanıta girişmeden önce biraz düşünelim. Teoremin doğru olmasının nedeni, n çok büyük olduğunda,

$$p(n) = p_k n^k + \cdots + p_1 n + p_0$$

sayısının $p_k n^k$ ölçeğinde bir şey olmasıdır. Aynı şey $q(n)$ için de geçerli olduğundan, n çok büyükken,

$$\frac{p(n)}{q(n)} \approx \frac{p_k n^k}{p_\ell n^\ell} = \frac{p_k}{p_\ell} n^{k-\ell}$$

aşağı yukarılığı geçerlidir. En sağdaki terim de elbette her A sayısını geçtiğinden teorem doğrudur.

Teorem 12.10'un Kanıtı: Gerekirse p ve q polinomlarının her ikisini de -1'le çarparak p_k ve q_ℓ katsayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz. $p(n)/q(n)$ ifadesinin payını ve paydasını n^ℓ'ye bölelim:

$$\begin{aligned}\frac{p(n)}{q(n)} &= \frac{p_k n^k + \cdots + p_\ell n^\ell + p_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + p_0}{q_\ell n^\ell + q_{\ell-1} n^{\ell-1} + \cdots + q_0}\\ &= \frac{p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell + p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell}}{q_\ell + q_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + q_0 n^{-\ell}}.\end{aligned}$$

Demek ki $(p(n)/q(n))_n$ dizisini terimleri

$$(p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell) + (p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell})$$

ve

$$\frac{1}{q_\ell + q_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + q_0 n^{-\ell}}$$

olan dizilerin çarpımı olarak görebiliriz. İkinci dizinin pozitif bir sayı olan $1/q_\ell$'ye yakınsadığını biliyoruz. Birinci dizinin sonsuza ıraksadığını kanıtlarsak, sonucumuz Sonuç 12.7'den çıkacak. Birinci dizi, terimleri

$$p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell \text{ ve } p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell}$$

olan iki başka dizinin toplamı. Terimleri

$$p_{\ell-1} n^{-1} + \cdots + p_0 n^{-\ell}$$

olan dizinin 0'a gittiğini biliyoruz. Terimleri

$$p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell$$

olan dizinin sonsuza ıraksadığını kanıtlarsak, Sonuç 12.4'ten istediğimize ulaşırız.

$$p_k n^{k-\ell} + \cdots + p_\ell = n^{k-\ell}(p_k + p_k n^{-1} + \cdots + p_\ell\, n^{\ell-k})$$

eşitliğinden ve Sonuç 12.7'den dolayı,

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-\ell} = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty}(p_k + p_k n^{-1} + \cdots + p_\ell n^{\ell-k}) = p_k$$

eşitliklerini kanıtlamak yeterli. İkinci limitin doğru olduğunu biliyoruz. Birinciyi kanıtlamalı. $k > \ell$ olduğundan,

$$n^{k-\ell} \geq n$$

olur ve Teorem 12.2'den dolayı birinci limit de doğru. □

Kanıtını okurlara bırakacağımız ve kanıtı yukarıdaki kanıttan pek değişik olmayan bundan daha genel bir teorem geçerlidir aslında.

Teorem 12.11. *$k > \ell$ ve $p_k q_\ell > 0$ olmak üzere,*

$$p(X) = p_k X^k + \cdots + p_1 X + p_0$$

ve

$$q(X) = q_\ell X^\ell + \cdots + q_1 X + q_0$$

iki polinom ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)}{q(x_n)} = \infty$$

olur. Dolayısıyla eğer $p_k q_\ell < 0$ ise, limit $-\infty$ olur.

Sonuç 12.12. *p, derecesi en az 1 olan ve başkatsayısı pozitif olan bir polinomsa ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = \infty$ olur. Başkatsayı negatifse limit $-\infty$ olur.*

Okur herhalde 0'a yakınsamakla sonsuza ıraksamak arasında yakın bir ilişkinin olduğunu düşünüyordur. Biraz dikkat etmek koşuluyla bu doğrudur.

Teorem 12.13. *Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$ olur. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ise ve $(x_n)_n$ dizisi zamanla pozitif oluyorsa, $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = \infty$ olur.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Sonuç 12.14. *$\ell > k$ ve $p_k q_\ell > 0$ olmak üzere,*

$$p(X) = p_k X^k + \cdots + p_1 X + p_0$$

ve

$$q(X) = q_\ell X^\ell + \cdots + q_1 X + q_0$$

iki polinom ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)}{q(x_n)} = 0$$

olur.

Kanıt: Teorem 12.11 ve 12.13'ten çıkar. □

Benzer biçimde "eksi sonsuza ıraksama"yı da tanımlayabiliriz:

Tanım. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Hangi A sayısı verilirse verilsin, eğer her $n > N$ için,

$$x_n < A$$

eşitsizliğini sağlayan bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin eksi sonsuza (ya da $-\infty$'a) ıraksadığı söylenir ve bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

olarak yazılır.

Eksi ve artı sonsuza ıraksamak elbette birbirine çok yakın iki kavramdır:

Teorem 12.15. *$(x_n)_n$ bir dizi olsun. O zaman,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty.$$

olur.

Kanıt: Soldan sağa kanıtlayalım. A herhangi bir sayı olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, $n > N$ ise, $x_n > -A$ olur. (Sonsuza gitme'nin tanımında, yani (*) koşulunda A yerine $-A$ alın.) Demek ki $n > N$ için $-x_n < A$ oluyor, yani $\lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty$. Sağdan sola da aynı biçimde kanıtlanır. □

Alıştırmalar

12.16. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ ve her n için $x_n \geq 0$ ise ve $q > 0$ kesirli bir sabit sayıysa, $\lim_{n\to\infty} x_n^q = \infty$ olduğunu kanıtlayın.

12.17. Eğer $r > 1$ ise ve $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} r^{q_n} = \infty$ olduğunu kanıtlayın.

12.18. $0 < r < 1$ ise ve $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} r^{q_n} = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

12.19. Öyle $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri bulun ki,
a. her n için $y_n > 1$,
b. her n için $x_n \in \mathbb{Q}$,
c. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$,
d. $\lim_{n\to\infty} y_n^{x_n} \in \mathbb{R}$
olsun.

12.20. Eğer p polinomunun derecesi en az 1 ise ve başkatsayısı negatifse, $\lim_{n\to\infty} p(n) = -\infty$ eşitliğini kanıtlayın.

12.21. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

12.22. $\mathcal{C}_\infty$, ∞'a ıraksayan diziler kümesi, $\mathcal{C}_u$, zamanla pozitif ve sıfırdan uzak diziler kümesi olsun. $\mathcal{C}_\infty\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_\infty + \mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}_\infty$ eşitliklerini kanıtlayın.

12.23. $x_n = (n!)^{1/n}$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin artan olduğunu ve sonsuza ıraksadığını kanıtlayın.

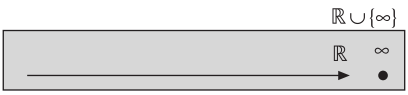
12.2 Sonsuzları ℝ'ye Eklemek

$\overline{\mathbb{R}}$ **Tamsıralaması.** Gerçel sayılar kümesi ℝ'ye yepyeni bir eleman ekleyelim. ∞ simgesiyle göstereceğimiz bu yeni elemana "sonsuz" adını verelim. ∞, gerçel bir sayı değildir, yepyeni bir şeydir, daha doğrusu yepyeni bir simgedir, o kadar bambaşka bir şeydir ki bu yeni simgeye "sayı" bile denmez.

ℝ tamsıralı bir yapı olduğu için, ℝ'ye eklediğimiz bu yeni elemanı ℝ'de istediğimiz herhangi bir yere yerleştirebiliriz. Mesela $\sqrt{2}$'den hemen sonra (ya da hemen önce) yerleştirebiliriz. Ama öyle yapmayalım, öyle yaparsak amacımıza ulaşmayız. ∞ elemanını ℝ'nin en sonuna koyalım, yani ℝ'nin bildiğimiz sıralamasını, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesine şöyle genişletelim: Her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r < \infty$$

olsun. Böylece ℝ'nin eski sıralamasını korumuş oluruz ve $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi tamsıralanmış[1] bir küme olur. Bu tamsıralamada, ∞, her gerçel sayıdan daha büyüktür.



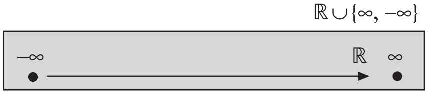
$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tamsıralaması

X, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin boş olmayan herhangi bir altkümesi ise o zaman $\sup X$ mutlaka vardır, nitekim eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ve X üstten sınırlıysa o zaman $\sup X$, ℝ'nin bir elemanıdır, öte yandan $\infty \in X$ ise ya da $X \cap \mathbb{R}$ üstten sınırlı değilse, $\sup X = \infty$ olur.

Tamsıralanmış $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesine $-\infty$ diye göstereceğimiz bir başka eleman daha ekleyelim ve yukarıda tanımlanan $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin tamsıralamasını $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ kümesine şu kuralla genişletelim: $-\infty$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin bütün elemanlarından daha küçük olsun. Böylece

$$\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

kümesi tamsıralanmış olur. Bu tamsıralamada $-\infty$ en küçük eleman, ∞ en büyük elemandır.



$\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ tamsıralaması

$\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ kümesini $\overline{\mathbb{R}}$ simgesiyle gösterelim: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi temel işlemlerden sözedeceğiz; bir sonraki altbölümde de inf, sup ve limit alma gibi işlemlerden.

[1] Yani her $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ için, ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$.

Temel İşlemler. Toplamayı, çıkarmayı ve çarpmayı şöyle tanımlayalım:

$+$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	⊠
$s \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$r+s$	∞
∞	⊠	∞	∞

$-$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$	⊠	∞	∞
$s \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$r-s$	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	⊠

$\times$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}^{<0}$	0	$r \in \mathbb{R}^{>0}$	∞
$-\infty$	∞	∞	⊠	$-\infty$	$-\infty$
$s \in \mathbb{R}^{<0}$	∞	rs	0	rs	$-\infty$
0	⊠	0	0	0	⊠
$s \in \mathbb{R}^{>0}$	$-\infty$	rs	0	rs	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	⊠	∞	∞

$\div$	$-\infty$	$r \in \mathbb{R}^{<0}$	0	$r \in \mathbb{R}^{>0}$	∞
$-\infty$	⊠	0	0	0	⊠
$s \in \mathbb{R}^{<0}$	∞	r/s	0	r/s	$-\infty$
0	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠
$s \in \mathbb{R}^{>0}$	$-\infty$	r/s	0	r/s	∞
∞	⊠	0	0	0	⊠

x sütunuyla y sırasının kesiştiği yere $x * y$ işleminin sonucunu yazdık. Çarpı olan yerleri tanımsız kabul ediyoruz. Görüldüğü gibi $\mathbb{R}$'deki işlemler aynen $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde de geçerli.

Bu işlemler rastgele tanımlanmadılar. Bu işlemler, aşağıdaki teorem doğru olsun diye tanımlanmışlardır.

Teorem 12.16. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki gerçel sayı dizisi olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{\mathbb{R}}$$

olsun. Eğer $*$ işlemi yukarıdaki $+$, $-$, $\times$ ve $/$ işlemlerinden biriyse ve

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) * \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

işlemi tanımlıysa,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n * y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) * \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

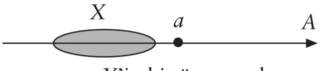
olur.

Kanıt: Bu teorem büyük ölçüde önceki altbölümde kanıtlandı. Olası eksiklikler okura bırakılmıştır. □

Alıştırma 12.24. $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde "kesirli sayıyla üs alma" işlemini tanımlamak isteseydiniz nasıl tanımlardınız?

13. Dizilerin Alt ve Üstlimitleri

$(A,<)$ herhangi bir tamsıralama olsun; yani X bir küme ve $<$, bu küme üzerine bir tamsıralama. $X \subseteq A$ bir altküme ve $a \in A$ olsun. Eğer her $x \in X$ için, $x \leq a$ oluyorsa, a'ya X'in ***üstsınırı*** denir, daha doğrusu $(A,<)$ tamsıralamasında üstsınır denir, çünkü üstsınır A'ya ve A üzerine konulan sıralamaya göre değişir. Eğer a, X'in bir üstsınırıysa, a'dan büyük her eleman da X'in bir üstsınırıdır, yani üstsınırdan tek bir tane olmayabilir. A'nın her elemanı boşkümenin üstsınırıdır, çünkü boşkümede $x \leq a$ eşitliğini sağlamayan x yoktur! Ama bazen de hiç üstsınır yoktur; örneğin $A = \mathbb{R}$ ise ve X, $\mathbb{N}$'yi içeriyorsa X'in bir üstsınırı olamaz. Öte yandan eğer $A = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ise, (tüm gerçel sayılardan daha büyük olan) ∞ elemanı, A'nın boş olmayan her altkümesinin bir üstsınırıdır.



a, X'in bir üstsınırıdır

X'in üstsınırlarının en küçüğüne -eğer varsa- ***en küçük üstsınır*** denir ve en fazla bir tane olan bu eleman $\sup X$ olarak gösterilir. Bilindiği üzere $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı her altkümesinin bir en küçük üstsınırı vardır. Bu özellik, $\mathbb{R}$'nin aksiyomlarından biriydi.

Benzer şekilde tanımlanan en büyük altsınır da -olduğunda- $\inf X$ olarak gösterilir.

Örnek 13.1. Bir önceki bölümde tanımladığımız $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ tamsıralamasını anımsayalım: ∞'un her gerçel sayıdan büyük, $-\infty$'un ise her gerçel sayıdan küçük olmasına karar vermiştik. $\overline{\mathbb{R}}$ tamsıralamasının her X altkümesinin en büyük ve en küçük altsınırları vardır. Aşağıdaki örneklerde sup ve inf, $\overline{\mathbb{R}}$ tamsıralamasında alınmıştır.

$\sup \overline{\mathbb{R}} = \infty,\ \inf \overline{\mathbb{R}} = -\infty,\quad \sup \mathbb{R} = \infty,\ \inf \mathbb{R} = -\infty,$
$\sup \mathbb{Z} = \infty,\ \inf \mathbb{Z} = -\infty,\quad \sup \mathbb{N} = \infty,\ \inf \mathbb{N} = 0,$
$\sup[-\infty, 5] = 5,\ \inf[-\infty, 5] = -\infty,\quad \sup(-\infty, 5) = 5,\ \inf(-\infty, 5) = -\infty,$
$\sup\{-\infty, 5, 7\} = 7,\ \inf\{-\infty, 5, 7\} = -\infty,$
$X = \{-1/n : n = 1, 2, \ldots\}$ ise, $\sup X = 0$, $\inf X = -1$.

Alıştırmalar

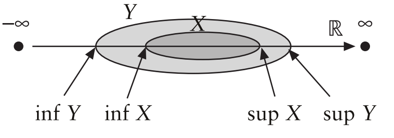
13.2. $x \in \mathbb{R}$ ve $A(x) = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\sup A(x)$ ve $\inf A(x)$'i -eğer varsa- bulun.

13.3. $x \in \mathbb{R}$ ve $A(x) = \{x^n : -n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\sup A(x)$ ve $\inf A(x)$'i -eğer varsa- bulun.

13.4. $x \in \mathbb{R}$ ve $A(x) = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $\sup A(x)$ ve $\inf A(x)$'i -eğer varsa- bulun.

13.5. $x \in \mathbb{R}$ ve $A(x) = \{x^{2n} : n \in \mathbb{Z}\}$ olsun. $\sup A(x)$ ve $\inf A(x)$'i -eğer varsa- bulun.

Eğer $\varnothing \neq X \subseteq Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ise, $\sup X \leq \sup Y$ ve $\inf X \geq \inf Y$ olur elbette, bir başka deyişle sup artan, inf ise azalan bir fonksiyondur.



Limit. Terimleri $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinden olan dizilerin limitlerinden söz edebiliriz. Açıklayalım: $(x_n)_n$, terimleri $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde olan bir dizi olsun ve

$$\begin{aligned} I &= \{n : x_n \in \mathbb{R}\}, \\ I_\infty &= \{n : x_n = \infty\}, \\ I_{-\infty} &= \{n : x_n = -\infty\} \end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. $(y_n)_n = (x_n)_{n \in I}$ olsun, yani $(y_n)_n$, $(x_n)_{n \in I}$ dizisinden $-\infty$ ve ∞'ları çıkardığımızda kalan dizi olsun. Ama dikkat $(y_n)_n$ dizisi sonlu olabilir, hatta boşdizi bile olabilir.

• Eğer I_∞ ve $I_{-\infty}$ kümelerinden ikisi birden sonsuzsa, o zaman -tanım gereği- $(x_n)_n$ dizisinin limiti yoktur.

• Eğer I_∞ ve $I_{-\infty}$ kümelerinin ikisi birden sonluysa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin limitinin olup olmadığına ve varsa limitin ne olduğuna $(y_n)_n$ dizisine bakıp karar verelim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Sonuç ∞ ya da $-\infty$ da çıkabilir; ya da limit hiç olmayabilir, bu durumda $(x_n)_n$ dizisinin de limiti olmadığını söyleyeceğiz.

• Eğer I_∞ sonsuz, $I_{-\infty}$ sonluysa, o zaman diziden ∞ ve $-\infty$'ları atalım, geriye kalan dizi sonluysa ya da ∞'a ıraksıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin limitinin ∞ olduğunu söyleyelim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

• Eğer $I_{-\infty}$ sonsuz, I_∞ sonluysa, o zaman diziden ∞ ve $-\infty$'ları atalım, geriye kalan dizi sonluysa ya da $-\infty$'a ıraksıyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin limitinin $-\infty$ olduğunu söyleyelim:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Bu limit kavramı bir önceki bölümde $\overline{\mathbb{R}}$ üzerine tanımlanan dört işlemle uyumludur, yani Teorem 12.16, $\overline{\mathbb{R}}$ için de geçerlidir.

Terimleri $\overline{\mathbb{R}}$'de olan ve artan bir $(x_n)_n$ dizisinin limiti dizinin en küçük üstsınırıdır elbette: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Limsup ve Liminf. $(x_n)_n$, terimleri $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinden olan bir dizi olsun. Bizi asıl ilgilendiren, dizinin gerçel sayı dizisi olduğu durumdur ama şimdilik bu genellikte almanın bir mahsuru yok. Gene de okur sürekli olarak $(x_n)_n$ dizisinin gerçel sayı dizisi olduğu durumu irdelemesinde yarar vardır.

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\},$$

kümesi $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin de bir altkümesidir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için,

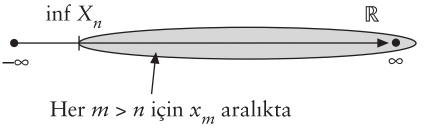
$$X_n = \{x_m : m > n\}$$

kümesinin $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde en büyük altsınırı vardır: $\inf X_n$. (Eğer dizinin terimleri gerçel sayılar olsaydı, o zaman $\inf X_n$, $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ kümesinin bir elemanı olurdu.)

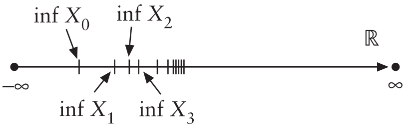
$(x_n)_n$ dizisinin belki ilk birkaç terimi dışında tüm terimleri $\inf X_n$'den büyükeşittir; nitekim her $m > n$ için,

$$\inf X_n \leq x_m$$

olur. Şekil aşağıda:



Her n için $X_n \supseteq X_{n+1}$ olduğundan, $(\inf X_n)_n$ artan bir dizidir.

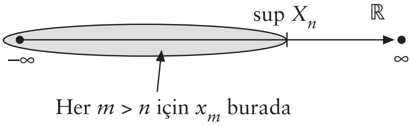


Benzer şekilde X_n kümesinin en küçük üstsınırı vardır: $\sup X_n$. (Eğer dizinin terimleri gerçel sayılar olsaydı, o zaman $\sup X_n$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesinin bir elemanı olurdu.)

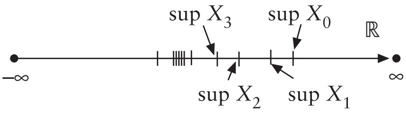
$(x_n)_n$ dizisinin belki ilk birkaç terimi dışında tüm terimleri $\sup X_n$'den küçükeşittir; nitekim her $m > n$ için,

$$\sup X_n \geq x_m$$

olur.



Ayrıca, $(\sup X_n)_n$ azalan bir dizidir.

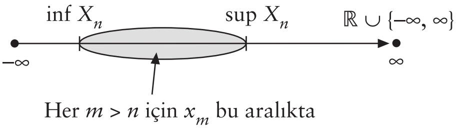


Alıştırma 13.6. $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi olsun. Eğer belli bir n için $\sup X_n = \infty$ ise her n için $\sup X_n = \infty$ olması gerektiğini kanıtlayın. Eğer belli bir n için $\inf X_n = -\infty$ ise her n için $\inf X_n = -\infty$ olması gerektiğini kanıtlayın.

Sonuç olarak, belki dizinin başındaki sonlu sayıdaki terim dışında, $(x_n)_n$ dizisi $\inf X_n$ ile $\sup X_n$ arasına sıkışmıştır: Her $m > n$ için,

$$\inf X_n \le x_m \le \sup X_n$$

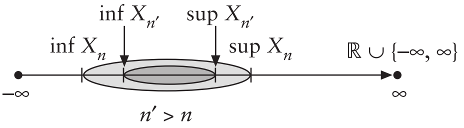
olur.



Yani dizinin kuyruğu, her n için, $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin

$$[\inf X_n, \sup X_n]$$

kapalı aralığındadır. n büyüdükçe bu aralıklar küçülür ve dizinin "özünün" (yani kuyruğunun, yani bizi ilgilendiren kısmının) ne kadar küçük bir aralığa sığıştığını görebiliriz.



$\inf X_n \in \overline{\mathbb{R}}$ olduğundan, $(\inf X_n)_n$ dizisinin $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinde en küçük üstsınırı vardır. $(x_n)_n$ dizisinin ***altlimiti***,

$$\sup\{\inf X_n : n \ge 0\}$$

olarak tanımlanır ve

$$\underline{\lim}\, x_n \text{ ya da } \liminf x_n$$

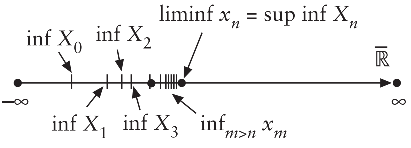
olarak gösterilir. Demek ki

$$\liminf x_n = \sup\{\inf\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\} = \lim_{n\to\infty}\{\inf\{x_m : m \geq n\} : n \geq 0\}.$$

lim inf için şu yazılımların da kullanıldığı olur:

$$\liminf x_n = \lim_{n\to\infty} \inf X_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} x_m = \lim_{n\to\infty} \inf_{m>n} x_m = \sup_{n\geq 0} \inf_{m>n} x_m.$$

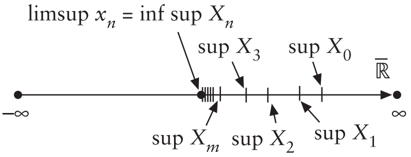
Elbette her n için, $\inf X_n \leq \liminf x_n$ olmalı.



$(x_n)_n$ dizisinin ***üstlimiti*** de benzer şekilde tanımlanır:

$$\limsup x_n = \lim_{n\to\infty} \sup X_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} x_m = \lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} x_m = \inf_{n\geq 0} \sup_{m>n} x_m.$$

Elbette her n için $\sup X_n \geq \limsup x_n$ olmalı.



Dolayısıyla her n için

$$\inf X_n \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq \sup X_n$$

olur.

Dikkat: Dizi gerçel sayı dizisi olsa da, $\liminf x_n$ ve $\limsup x_n$, $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin herhangi bir elemanı olabilir, yani herhangi bir gerçel sayı olabileceği gibi, ∞ ya da $-\infty$ olabilir.

Kimi zaman $\liminf x_n$ ve $\limsup x_n$ ifadelerindeki n yanıltıcı olabilir, olmasın! Bu ifadelerde aslında n yoktur! Yani bu ifadeler n'den bağımsızdır, aynen $\lim_{n\to\infty} x_n$ ve $\bigcup_n A_n$ ifadelerinin n'den bağımsız olduğu gibi... Örneğin $\liminf x_n = \liminf x_m$.

Örnekler

13.7. $\limsup n = \liminf n = \infty$.

13.8. $\limsup\,(-1)^n n = \infty$, $\liminf\,(-1)^n n = -\infty$.

13.9. $\limsup 1/n = \liminf 1/n = 0$.

13.10. Eğer n çiftse $x_n = n$, tekse $x_n = 0$ olsun. O zaman $\limsup x_n = \infty$, $\liminf x_n = 0$ olur.

13.11.
$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n^2+4} & \text{eğer } n \equiv 0 \mod 3 \text{ ise} \\ 1-1/n & \text{eğer } n \equiv 1 \mod 3 \text{ ise} \\ 2+1/n & \text{eğer } n \equiv 2 \mod 3 \text{ ise} \end{cases}$$
olsun. O zaman $\limsup x_n = 2$, $\liminf x_n = 0$ olur. Dizinin 0'a, 1'e ve 2'ye yakınsayan altdizileri vardır.

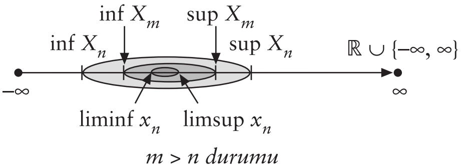
13.12. p_n, n'inci asal sayı olsun. $\liminf(p_{n+1}-p_n) = 2$ eşitliği matematikte ***ikiz asallar sanısı*** olarak bilinir ve matematiğin bugüne kadar kanıtlanmamış en önemli ve en ünlü önermelerinden biridir.

Alıştırma 13.13. Terimleri verilmiş şu dizilerin lim sup ve lim inf'ini bulun: $(-1)^n + 1/n$, $2^{-n}+3^{-n}$, 2^n+3^{-n}, $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{(-1)^n n}{n+1}$, $\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]$, $(-1)^n(2+3/n)$, $\frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n}$.

lim inf ve lim sup'ün önemini daha iyi kavramak için kolaydan zora doğru giden birkaç sonuç kanıtlayalım.

$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki dizi olsun. Dizinin terimleri $\mathbb{R}$ ya da $\overline{\mathbb{R}}$ kümelerinden olabilir, elde edeceğimiz sonuçlar değişmeyecek. X_n ve Y_n kümeleri yukarıda verilen anlama gelecekler, örneğin,
$$Y_n = \{y_m : m > n\}$$
olacak.

Önsav 13.1. $\liminf x_n \le \limsup x_n$.



$m > n$ durumu

Kanıt: Her $m > n$ için,
$$\inf X_n \le \inf X_m \le \sup X_m \le \sup X_n$$
olduğundan, her $m > n$ için,
$$\inf X_m \le \sup X_n$$
olur. Eğer n'yi sabitleyip her iki tarafın da m'ye göre limitini (ya da en küçük üstsınırını) alırsak
$$\liminf x_m \le \sup X_n$$
buluruz. Sol taraftaki ifade m'den ve n'den bağımsızdır. Şimdi her iki tarafın da n'ye göre limitini (ya da en büyük altsınırını) alalım.
$$\liminf x_m \le \limsup x_n$$
buluruz ki bu da aynen $\liminf x_n \le \limsup x_n$ anlamına gelir. $\square$

Bu önsavdan dolayı,

$$\liminf x_n = \infty \text{ ise } \limsup x_n = \infty$$

ve

$$\limsup x_n = -\infty \text{ ise } \liminf x_n = -\infty$$

önermeleri doğrudur.

Önsav 13.2. *Eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki diziyse, o zaman*

$$\limsup\,(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

ve

$$\liminf\,(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$$

olur.

Kanıt: Birinci eşitsizliği kanıtlamakla yetinelim. Elbette, her n için,

$$\sup\{x_m + y_m : m > n\} \leq \sup\{x_m : m > n\} + \sup\{x_m : m > n\}.$$

Şimdi her iki tarafın da limitini alırsak, istediğimiz kanıtlanmış olur. □

Yukarıdaki eşitsizlik eşitliğe çevrilemez:

$$x_n = (-1)^n \text{ ve } y_n = (-1)^{n+1}$$

olsun. O zaman $x_n + y_n = 0$ ve

$$\begin{aligned} &\limsup\,(x_n + y_n) = 0,\\ &\limsup x_n = 1\\ &\limsup y_n = 1 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 13.14. $-\liminf x_n = \limsup\,(-x_n)$ eşitliğini kanıtlayın.

Önsav 13.3. $\liminf x_n = \infty$ *ancak ve ancak* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. *Ve* $\limsup x_n = -\infty$ *ancak ve ancak* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Kanıt: Birincisini kanıtlamak yeterli, diğeri birincisine çok benzer. $\liminf x_n = \infty$ varsayımını yapalım. Tanıma göre,

$$\sup_{N\geq 0} \inf_{n>N} x_n = \infty.$$

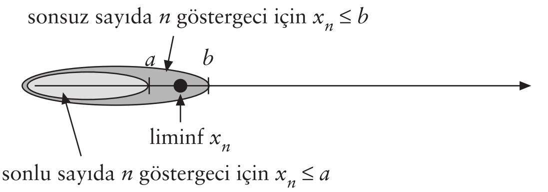
A herhangi bir gerçel sayı olsun. Demek ki belli bir N için,

$$A < \inf_{n>N} x_n;$$

yani her $n > N$ için, $A < x_n$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Şimdi de $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ varsayımını yapalım. $\inf_{n>N} x_n$ sayılarının her sayıyı aştıklarını göstermek gerekiyor; yani A hangi gerçel sayı olursa olsun, belli bir N için $\inf_{n>N} x_n > A$ eşitsizliğini, yani her $n > N$ için $x_n > A$ eşitsizliğini göstermeliyiz, ki bu da $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ varsayımının doğrudan sonucu. □

Önsav 13.4. i. *Eğer* $\liminf x_n \neq \infty$ *ise,* $\epsilon > 0$ *hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi* $\liminf x_n - \epsilon$ *sayısından küçüktür.*
ii. *Eğer* $\liminf x_n \neq -\infty$ *ise, dizinin sonsuz sayıda terimi* $\liminf x_n + \epsilon$ *sayısından küçüktür.*
iii. *Eğer* $\liminf x_n = \infty$ *ise,* r *hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi* r*'den küçüktür.*



$a <$ liminf $x_n < b$ ise

Kanıt: i. Eğer $\liminf x_n = -\infty$ ise, tanım gereği,

$$\liminf x_n - \epsilon = -\infty$$

olduğundan, önerme bariz. Bundan böyle

$$\ell = \liminf x_n \in \mathbb{R}$$

olsun.

$$\ell - \epsilon < \ell = \sup_{n\geq 0} \inf_{m>N} x_m$$

olduğundan, $\ell - \epsilon$ sayısı $\{\inf_{m>N} x_m : n \geq 0\}$ kümesinin bir üstsınırı olamaz. Demek ki,

$$\ell - \epsilon < \inf_{m>N} x_m$$

eşitsizliğini sağlayan bir N vardır, yani, her $m > N$ için, $\ell - \epsilon < x_m$ eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla $\ell - \epsilon$ sayısından küçük en fazla $N + 1$ tane x_m terimi olabilir.

ii. Eğer $\liminf x_n = \infty$ ise, $\liminf x_n + \epsilon = \infty$ olacağından, önerme bariz. Bundan böyle

$$\ell = \liminf x_n \in \mathbb{R}$$

olsun. Dizinin sadece sonlu sayıda teriminin $\ell + \epsilon$ sayısından küçük olduğunu varsayalım. Demek ki öyle bir n var ki her $m > n$ için, $x_m \geq \ell + \epsilon$ olur. Dolayısıyla,

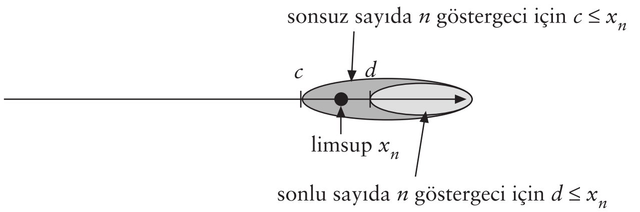
$$\inf X_n \geq \ell + \epsilon > \ell = \sup \inf X_n$$

ve bu bir çelişkidir.

iii. Bu aynen Önsav 13.3. □

Aşağıdaki önsav da benzer şekilde kanıtlanabilir.

Önsav 13.5. i. *Eğer* $\limsup x_n \neq -\infty$ *ise,* $\epsilon > 0$ *hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi* $\limsup x_n + \epsilon$ *sayısından büyüktür.*
ii. *Eğer* $\limsup x_n \neq \infty$ *ise, dizinin sonsuz sayıda terimi* $\limsup x_n - \epsilon$ *sayısından büyüktür.*
iii. *Eğer* $\limsup x_n = -\infty$ *ise,* r *hangi gerçel sayı olursa olsun, dizinin sadece sonlu sayıda terimi* r*'den büyüktür.* □



$c <$ limsup $x_n < d$ ise

Yukarıdaki iki önsava göre,

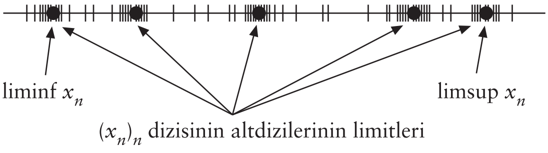
$$a < \liminf x_n \leq \limsup x_n < d$$

eşitsizliklerini sağlayan her a ve b sayıları için, sonlu sayıda terim dışında, dizinin tüm terimleri (a, d) aralığındadır. Yani,

$$[\liminf x_n, \limsup x_n]$$

kapalı aralığını içeren her (a, d) açık aralığı dizinin hemen hemen tüm terimlerini içerir. Ayrıca $[\liminf x_n, \limsup x_n]$ kapalı aralığı bu özelliği sağlayan en küçük kapalı aralıktır. (Okura alıştırma.)

Bir sonraki önsavın şekli aşağıda:



Şekil şunu anlatmak istiyor: $\limsup x_n$, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak altdizilerinin en büyüğüdür (sonsuzlar dahil olmak üzere) ve $\liminf x_n$ en küçüğüdür.

Önsav 13.6. i. *Her $(x_n)_n$ dizisinin $\lim_{n\to\infty} y_n = \liminf x_n$ ve $\lim_{n\to\infty} z_n = \limsup x_n$ eşitliklerini sağlayan $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ altdizileri vardır.*
ii. *Eğer $(y_n)_n$, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisiyse*

$$\liminf x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \le \limsup x_n$$

olur.
Yani $\liminf x_n$ ve $\limsup x_n$, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olan ya da sonsuza yakınsayan altdizilerinin limitlerinin sırasıyla en küçüğü ve en büyüğüdür.

Kanıt: i. Eğer $\limsup x_n = -\infty$ ise, Önsav 13.1'den, $\liminf x_n = -\infty$ bulunur ve istediğimiz, Önsav 13.3'ten çıkar.

Şimdi $\limsup x_n = \infty$ varsayımını yapalım. Demek ki her n için (ya da tek bir n için), $\sup X_n = \infty$. Öyle artan bir $(n_k)_k$ göstergeç dizisi bulacağız ki, her $k > 0$ için,

$$x_{n_k} > k$$

olacak ve bu da kanıtı tamamlayacak. $\sup X_0 = \infty$ olduğundan, dizinin pozitif terimleri olmalı. n_0 göstergeci $x_{n_0} > 0$ olacak biçimde seçilsin. İstediğimiz koşulları sağlayan,

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$$

sonlu bir göstergeçler dizisinin seçildiğini varsayalım. Bir sonraki n_k göstergecini seçeceğiz. $\sup X_0 = \infty$ olduğundan, $\{n : x_n > k\}$ sonsuz bir kümedir, dolayısıyla n_{k-1}'den büyük bir elemanı vardır. n_k bu tür elemanlardan biri olsun, örneğin en küçüğü.

Şimdi de $\limsup x_n \in \mathbb{R}$ varsayımını yapalım.

$$\ell = \limsup x_n$$

olsun. Öyle artan bir $(n_k)_k$ göstergeç dizisi bulacağız ki, her $k > 0$ için,

$$|x_{n_k} - \ell| < \frac{1}{k}$$

olacak ve bu da kanıtı tamamlayacak. $n_0 = 0$ olsun. İstediğimiz koşulları sağlayan,

$$n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$$

sonlu bir göstergeçler dizisinin seçildiğini varsayalım. Bir sonraki göstergeç olan n_k'yı seçeceğiz. Önsav 13.5.i'e göre, $\ell + \frac{1}{2k}$'den büyük sadece sonlu sayıda

x_n terimi var. Öte yandan, Önsav 13.4.ii'ye göre, dizinin sonsuz sayıda terimi $\ell - \frac{1}{2k}$ sayısından büyüktür. Demek ki öyle bir $n_k > n_{k-1}$ göstergeci vardır ki,

$$\ell - \frac{1}{2k} < x_{n_k} < \ell + \frac{1}{2k}$$

olur. Bu da istediğimizi kanıtlar.

$(x_n)_n$ dizisinin $\liminf x_n$'ye yakınsayan bir altdizisi olduğu benzer şekilde kanıtlanır.

ii. $(y_n)_n$, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi olsun.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} y_n$$

olsun. $\ell \leq \limsup x_n$ eşitsizliğini gösterelim. Eğer $\limsup x_n = \infty$ ya da $\ell = -\infty$ ise sorun yok. Eğer $\limsup x_n = -\infty$ ise, Önsav 13.3'ten dolayı, ℓ de $-\infty$ olmak zorunda ve gene sorun yok. Eğer $\ell = \infty$ ise, X_n kümesi hiçbir n için sınırlı olamaz ve $\limsup x_n = \infty$ olur. Bundan böyle $\limsup x_n$ ve ℓ birer gerçel sayı olsunlar. Bir çelişki elde etmek için $\limsup x_n < \ell$ eşitsizliğini varsayalım. $\epsilon > 0$,

$$\limsup x_n < \ell - \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir sayı olsun. Varsayımdan dolayı, sonsuz sayıda n göstergeci için

$$x_n \in (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$$

olur. Demek ki, sonsuz sayıda n için,

$$\limsup x_n < \ell - \epsilon < x_n$$

olur. Ama bundan da her n için, $\ell - \epsilon < \sup X_n$ çıkar, yani $\ell - \epsilon \leq \limsup x_n$, bir çelişki. □

Bir sonraki teorem önemli.

Teorem 13.7. *$(x_n)_n$ dizisinin bir gerçel sayıya yakınsaması ya da $\pm\infty$'a ıraksaması için gerek ve yeter koşul,* $\liminf x_n = \limsup x_n$ *eşitliğidir ve bu durumda,* $\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup x_n$ *olur.*

Kanıt: Önsav 13.6'nın bir sonucudur. Ama bu sonucu bir de tanımlardan hareketle kanıtlayalım.

$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ olsun. Demek ki $\epsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir N var ki her $n > N$ için,

$$\ell - \epsilon < x_n < \ell + \epsilon$$

olur. Demek ki

$$\sup X_n \leq \ell + \epsilon \text{ ve } \inf X_n \geq \ell - \epsilon.$$

Dolayısıyla

$$\ell - \epsilon \leq \inf X_n \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq \sup X_n \leq \ell + \epsilon,$$

yani

$$\ell - \epsilon \leq \liminf x_n \leq \limsup x_n \leq \ell + \epsilon.$$

Bu her $\epsilon > 0$ için geçerli olduğundan, $\liminf x_n = \limsup x_n$ bulunur.

Şimdi $\liminf x_n = \limsup x_n = \ell$ eşitliğini varsayalım.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$$

olmasın. Demek ki öyle bir $\epsilon > 0$ var ki, sonsuz sayıda n için,

$$|x_n - \ell| \geq \epsilon;$$

yani ya sonsuz sayıda n için

$$x_n \geq \ell + \epsilon$$

ya da sonsuz sayıda n için

$$x_n \leq \ell - \epsilon.$$

(İkisi birden de sonsuz defa gerçekleşebilir.) Birinci durumda

$$\limsup x_n \geq \ell + \epsilon > \ell,$$

ikinci durumda

$$\liminf x_n \leq \ell - \epsilon < \ell$$

bulunur. Her ikisi de bir çelişki. □

Önsav 13.8. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki pozitif dizi olsun. Eğer $\limsup x_n \neq 0$ ise ve $\lim_{n\to\infty} y_n$ varsa ya da sonsuzsa, o zaman,*

$$\limsup x_n y_n = \limsup x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliği geçerli olur.

Kanıt: $(\leq)$ eşitsizliğini kanıtlamak kolay:

$$\begin{aligned}\limsup x_n y_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m y_m\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m \cdot \sup_{m\geq n} y_m\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} y_m\right) = \limsup x_n \cdot \limsup y_n.\end{aligned}$$

Aynı eşitsizliği şöyle de kanıtlayabiliriz: $\limsup x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ olsun. x ya da y'nin sonsuz olduğu durumlar oldukça kolay, kendimizi x ve

y'nin sonlu olduğu durumla kısıtlayalım. Herhangi bir $\epsilon > 0$ alalım. Demek ki yeterince büyük n'ler için,

$$0 < x_n < x + \epsilon \text{ ve } 0 < y_n < y + \epsilon$$

ve dolayısıyla

$$0 < x_n y_n < (x+\epsilon)(y+\epsilon) = xy + \epsilon(x+y+\epsilon)$$

olur. Ama ϵ sayısını istediğimiz kadar küçük seçebileceğimizden, bu hesaptan, $(x_n y_n)_n$ dizisinin altdizilerinin en büyük limitinin xy olduğu çıkar. Demek ki,

$$\limsup x_n y_n \leq xy$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıtlanan bu eşitsizlikten, $y = 0$ ise de istediğimiz eşitsizliği elde edeceğimiz çıkar. Bundan böyle y'nin pozitif bir gerçel sayı olduğunu varsayalım.

Şimdi $\epsilon > 0$ sayısı, $0 < x - \epsilon$ ve $0 < y - \epsilon$ eşitsizliklerini sağlayacak kadar küçük seçilsin. x'in tanımından dolayı

$$x - \epsilon < x_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı sonsuz sayıda n vardır (Önsav 13.4.i). Ama

$$y - \epsilon < y_n$$

eşitsizliği bir zaman sonra **hep** sağlandığından,

$$x - \epsilon < x_n \text{ ve } y - \epsilon < y_n$$

eşitsizliklerinin ikisi birden sonsuz sayıda n göstergeci için sağlanır. Dolayısıyla,

$$(x-\epsilon)(y-\epsilon) < x_n y_n,$$

yani

$$xy < x_n y_n + \epsilon(x + y - \epsilon)$$

eşitsizliği sonsuz sayıda n için sağlanır. Demek ki,

$$xy \leq \limsup x_n y_n + \epsilon(x+y-\epsilon)$$

olur. ϵ'u dilediğimiz kadar küçük alabileceğimizden, $xy \leq \limsup x_n y_n$ bulunur. Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Örnekler

13.15. *Eğer $(s_n)_n$ pozitif bir seriyse, aşağıdaki eşitsizlikleri gösterin:*

$$\liminf x_n \leq \liminf \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \limsup \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \limsup x_n.$$

Kanıt: Ortadaki eşitsizlik bariz. Sonuncu eşitsizliği göstermekle yetinelim. $N < M < n$ olsun.

$$x_{N+1} + \cdots + x_n \leq (n-N)\max\{x_{N+1}, \ldots, x_n\} \leq (n-N) \sup_{k>N} x_k \leq n \sup_{k>N} x_k$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{x_1 + \cdots + x_N}{n} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n}\\ &\leq \frac{x_1 + \cdots + x_N}{M} + \frac{x_{N+1} + \cdots + x_n}{n}\\ &\leq \frac{x_1 + \cdots + x_N}{M} + \sup_{k>N} x_k\end{aligned}$$

olur. Demek ki,

$$\sup_{n>N} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_N}{M} + \sup_{k>N} x_k$$

olur. Şimdi N'yi sabitleyip M'yi sonsuza götürürsek, bu eşitsizlikten

$$\sup_{n>N} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sup_{k>N} x_k$$

eşitsizliğini ve bu son eşitsizlikte N'yi de sonsuza götürürsek istediğimizi elde ederiz. □

13.16. *Eğer $(x_n)_n$ pozitif bir diziyse,*

$$\liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

olur.

Kanıt: Ortanca eşitsizlik bariz. Birinciyle üçüncü benzer. Üçüncüyü kanıtlayalım.

$$a = \limsup \sqrt[n]{x_n} \text{ ve } b = \limsup \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

olsun. $a \leq b$ eşitsizliğini kanıtlayacağız. Bunun için her $c > b$ için $a \leq c$ eşitsizliğini kanıtlamamız yeterli. Böyle bir c alalım. Demek ki öyle bir N vardır ki, her $n \geq N$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c$$

ve

$$x_n = x_N \frac{x_{N+1}}{x_N} \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} \leq x_N c^{n-N} = \frac{x_N}{x^N} c^n$$

olur. Eğer $d = x_N/x^N$ tanımını yaparsak, $x_n \leq dc^n$ ve $x_n^{1/n} \leq d^{1/n}c$ elde ederiz. Demek ki

$$\limsup x_n^{1/n} \leq \limsup d^{1/n}c = c \lim d^{1/n} = c$$

olur. □

Kısım III

Seriler

14. Seriler

14.1 Tanımlar

İki sayıyı toplamayı herkes bilir. Üç ya da dört sayıyı da kolaylıkla toplayabiliriz. Ama sonsuz sayıda sayı toplamak çok daha çetin bir uğraştır, hatta başlı başına bir sanattır diyebiliriz. Bu bölümde bu sanata bir giriş yapacağız ve ileriki bölümlerde konuyu çok daha derinlemesine işleyeceğiz.

$(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi olsun. İşte bu dizinin açık hali:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots$$

Bu dizinin terimlerini en soldan başlayarak teker teker toplayalım.

$$\begin{aligned}
s_0 &= x_0,\\
s_1 &= x_0 + x_1,\\
s_2 &= x_0 + x_1 + x_2,\\
s_3 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3\\
&\ldots\\
s_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i\\
&\ldots
\end{aligned}$$

dizisini elde ederiz. Toplamlar sonlu olduklarından, dizinin varlığıyla ilgili herhangi bir sorun yoktur.

Böylece elde edilen

$$(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)_n$$

toplamlar dizisinin bir limiti olduğunda (bu limit illa $\mathbb{R}$'de olmak zorunda değil, $\overline{\mathbb{R}}$'de de olabilir, yani $\pm\infty$ da olabilir), bu limit,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i \text{ ya da } \sum x_i \text{ ya da } \sum_{i\geq 0} x_i \text{ hatta } \sum_i x_i \text{ ve hatta } \sum x_i$$

olarak gösterilir, yani tanım gereği,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \sum_{i\geq 0} x_i = \sum_{i} x_i = \sum x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty} (x_0 + \cdots + x_n)$$

olur. Eğer metinde satırlar tarafından alttan ve üstten sıkıştırılmışsak $\sum x_i$ yazılımını tipografik nedenlerden dolayı özellikle tercih edeceğiz. Aynı yazılımı göstergeç kümesinin ne olduğunun önemli olmadığı durumlarda da kullanacağız.

Eğer limit bir gerçel sayıysa, bu gerçel sayıya $\sum x_i$ "serisi"nin ***limiti ya da toplamı*** denir ve $\sum x_i$ "serisi"nin bu limite ***yakınsadığı*** söylenir. Bu limiti,

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots$$

sayılarının "hepsinin birden toplamı" olarak algılamak istemek doğaldır. Nitekim öyle algılanır ve -biz pek yapmayacağız ama- kimileyin $\sum x_i$ yerine,

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_n + \cdots$$

yazılır.

Eğer limit bir gerçel sayı değilse, yani $\pm\infty$ ise o zaman serinin $\pm\infty$'a ***ıraksadığı*** söylenir.

$\lim_{n\to\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ise

$$\sum x_i = \ell$$

yazılır.

Örnekler

14.1. $\sum i = \infty$ olur çünkü bu durumda

$$s_n = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olur ve bu dizinin limiti ∞'dur.

14.2. $\sum 1/i = \infty$ eşitliğini Altbölüm 7.2'de göstermiştik. Bu seriye ***harmonik seri*** denir.

14.3. Eğer her n için $x_n \geq 0$ ise, kısmi toplamlar dizisi artan bir dizidir, dolayısıyla $\sum x_i$ ya bir gerçel sayıdır ya da sonsuz.

14.4. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ olsun.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2^i}}{1 - x^{2^{i+1}}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1 - x^{2^{n+1}}}$$

eşitliği n üzerine tümevarımla oldukça kolay bir biçimde kanıtlanabilir. Demek ki

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2^i}}{1 - x^{2^{i+1}}}$$

serisi eğer $|x| > 1$ ise
$$\frac{1}{1-x}$$
sayısına ve eğer $|x| < 1$ ise
$$\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$
sayısına yakınsar.

14.5. $\sum\left(\sqrt{1+i^2} - i\right)$ *serisi yakınsak mıdır?*
Yanıt:
$$\sqrt{1+i^2} - i = \frac{\left(\sqrt{1+i^2} - i\right)\left(\sqrt{1+i^2} + i\right)}{\left(\sqrt{1+i^2} + i\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+i^2} + i\right)} > \frac{1}{\left(\sqrt{3i^2 + i^2} + i\right)} = \frac{1}{3i}$$
olduğundan ve Örnek 14.1'e göre $\sum 1/3i$ serisi sonsuza ıraksadığından, sorudaki seri de sonsuza ıraksar. □

Herhalde anlaşılmıştır: $\sum x_i$ ifadesine ***seri*** denir. Bir serinin limitinin hesaplanması için limiti alınan
$$\sum_{i=0}^{n} x_i$$
sonlu toplamlarına serinin ***kısmi toplamları*** adı verilir. Kısmi toplamları s_n (ya da t_n) olarak göstermek bir gelenek haline gelmiştir:
$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$
x_i ise serinin ***genel terimi***dir.

Diziyi toplamaya x_0'dan değil de, x_1'den ya da belli bir x_k teriminden başlayabiliriz. Bu durumda, seri,
$$\sum_{i=k}^{\infty} x_i \text{ ya da } \sum_{i \geq k} x_i$$
olarak yazılır. Bazen de göstergeci çift olan terimleri toplamak isteyebiliriz; bu durumda,
$$\sum_{i \in 2\mathbb{N}} x_i \text{ ya da } \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i}$$
gibi yazılımlar uygulanır. Tanım gereği,
$$\sum x_{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} x_{2i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_{2i}$$
olur. Önemli olan "toplanacak" terimlerin en fazla sayılabilir sonsuzlukta olması ve (şimdi söyleyeceğimiz önemli) doğal sayılar gibi iyisıralanmış olmalarıdır. Bu önemli konuyu biraz daha açalım.

x_0, x_1, x_2, ... sayılarını **bu sırayla** topladığımıza dikkatinizi çekeriz. Sayıları $x_{24} + x_0 + x_{342} + \cdots$ gibi rastgele bir sırayla toplamıyoruz, çünkü ne de olsa x_i sayılarının sıralamasına göre s_n kısmi toplamları değişebilir ve sıralamaya göre farklı bir $\lim_{n\to\infty} s_n$ limiti yani değişik bir toplam bulabiliriz. Biraz yukarıda sözünü ettiğimiz $\sum_{i\in 2\mathbb{N}} x_i$ serisi için x_0, x_2, x_4, ... sıralaması seçilmiştir. Daha genel olarak eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ sonsuz bir doğal sayı kümesiyse, $\sum_{i\in A} x_i$ serisi A kümesi doğal sıralamayla sıralanmış olarak toplandığı varsayılacaktır, yani $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ sıralamayı koruyan (yegâne) eşlemeyse, $\sum_{i\in A} x_i$ toplamının $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_{f(i)}$ anlamına geldiğini açık açık söylemeden varsayacağız.

Kalanlar. Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, R_m sayıları, $\sum_{i>m} x_i$ olarak tanımlanır:

$$R_m = \sum_{i>m} x_i = \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m+1}^{n} x_i.$$

Bu sayılara $\sum x_i$ serisinin ***kalanları*** adı verilir. Elbette,

$$\begin{aligned}\sum x_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m+1}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i = s_m + R_m\end{aligned}$$

olur. m çok büyük olduğunda, s_m sayısı serinin limitine çok yakın olduğundan, R_m kalanı çok küçülür:

$$\lim_{m\to\infty} R_m = 0$$

olur.

Örnek 14.6. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots = 1$, *yani* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$ *olur.*

Kanıt:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

eşitliğini gözönüne alarak kısmi toplamları hesaplayalım:

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Kısmi toplamların limitinin 1 olduğu bariz; demek ki serinin limiti 1'dir.

Bulduğumuz eşitliği yazalım:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right).$$

Sağ taraftaki seriye ***teleskopik seri*** adı verilir. Teorem 14.2 ve sonrasında teleskopik serilere daha yakından bakacağız.

Şimdilik bir seriyi, sadece kısmi toplamların limiti olduğunda tanımladık. Şimdi bu tanımı anlamsız bir biçimde genişletelim ve herhangi bir $(x_i)_i$ gerçel sayı dizisi verildiğinde,

$$\sum x_i$$

ifadesine de ***seri*** diyelim. Eğer kısmi toplamların limiti yoksa, bu ifadenin hiçbir anlamı yoktur, tanımsızdır, ama bu yazılım öylesine pratiktir ki yazmamak yazmaktan daha büyük bir günahtır.

Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa ya da $\pm\infty$'a ıraksıyorsa, tanım gereği,

$$\sum x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = \lim_{n\to\infty} (x_0 + \cdots + x_n)$$

olur; birinci durumda $\sum x_i$ serisi

$$\lim_{n\to\infty} (x_0 + x_1 + \cdots + x_n)$$

sayısına ***yakınsar***, ikinci durumda $\pm\infty$'a ***ıraksar*** denir. Örneğin,

$$\sum \frac{1}{i!} = e$$

(Sonuç 10.9) ve birazdan Örnek 14.7'de kanıtlayacağımız (ama aslında Teorem 6.2'de kanıtladığımız) üzere, eğer $-1 < r < 1$ ise,

$$\sum r^i = \frac{1}{1-r}$$

olur. Öte yandan,

$$\sum i = \infty,\ \sum(-i) = -\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

olur. (İlk ikisi bariz, sonuncusu için bkz. Altbölüm 7.2.)

Ama mesela,

$$\sum (-1)^i$$

ifadesi anlamsızdır çünkü kısmi toplamlar dizisi 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... diye gider ve limiti yoktur. Kısmi toplamlar bir sayıya yakınsamadığında, $\sum x_i$ serisinin ***ıraksadığı*** söylenir.

Yukarıda verdiğimiz ikinci örnek, $\sum r^i$ serisi, basit ama son derece önemlidir. Bu örnekteki seriye ***geometrik seri*** denir.

Örnek 14.7. *Eğer $-1 < r < 1$ ise,*

$$\sum r^i = \frac{1}{1-r}$$

olur. Aksi halde seri ıraksar. Eğer $r \geq 1$ ise seri sonsuza ıraksar.

Kanıt: Bu örnekte toplanan dizi,

$$1, r, r^2, r^3, \ldots, r^n, \ldots$$

dizisidir. Kısmi toplamlar dizisinin genel terimi ise

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{eğer } r \neq 1 \text{ ise} \\ n+1 & \text{eğer } r = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. İşte bu dizinin limitini bulmalıyız. Bu limiti bulmak pek zor değildir, Teorem 6.2'de bulmuştuk:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{eğer } |r| < 1 \text{ ise} \\ \infty & \text{eğer } r \geq 1 \text{ ise} \\ \text{yok} & \text{eğer } r \leq -1 \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer bu örnekte $r = 1/2$ alırsak,

$$\sum \frac{1}{2^i} = 2$$

buluruz. Toplamı $i = 1$'den başlatırsak sonuç 1 çıkar:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Eğer $r = 1$ ise, kısmi toplam,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = n + 1$$

bulunur; bu durumda kısmi toplamların limiti yoktur, kısmi toplamlar sonsuza ıraksarlar. Genel olarak, eğer $r \geq 1$ ise,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n \geq n + 1$$

bulunur, ve bu kısmi toplamlar dizisi sonsuza ıraksadığından, $r \geq 1$ iken,

$$\sum r^i = \infty$$

bulunur. Eğer $r \leq -1$ ise, n üzerine tümevarımla, kolaylıkla,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} \geq & 1 & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ \leq & 0 & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

eşitsizlikleri kanıtlanabilir ve dolayısıyla bu durumda,

$$\sum r^i$$

ifadesi anlamsızdır, seri ıraksar. Bunun böyle olduğu, $r \neq 1$ iken doğru olan

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

eşitliğinden de bellidir.

Bu örnekte bulduklarımız ileride çok önemli olacak. Bir teorem altında toparlayalım:

Teorem 14.1. *$\sum r^i$ serisi sadece $-1 < r < 1$ iken yakınsar ve bu durumda*

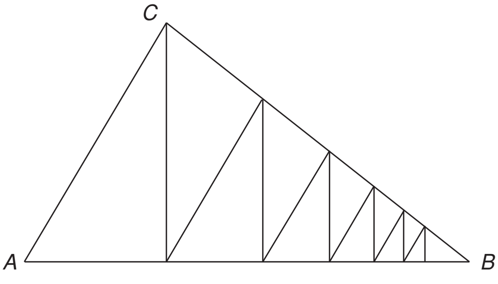
$$\sum r^i = \frac{1}{1-r}$$

olur. □

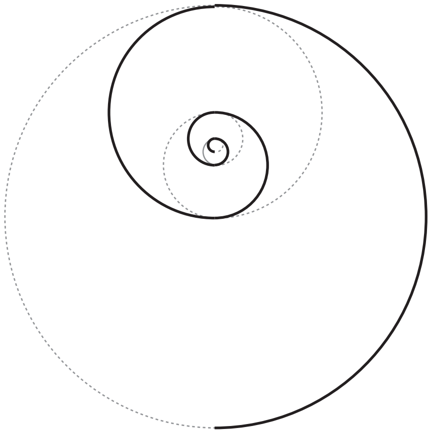
Alıştırmalar

14.8. $x_i \in \mathbb{Z}$ olsun. $\sum x_i$ serisinin yakınsak olması için $(x_i)_i$ dizisinin zamanla sabit 0-dizisi olmasının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

14.9. Aşağıdaki resimdeki gibi bir ABC dik üçgeni alın. C'den AB'ye bir dik inin. Bu dikmenin ayağından BC'ye dik inin. Bu dikmenin ayağından AB'ye dik inin. Bu dikmenin ayağından BC'ye dik inin. Bunu böyle sonsuza kadar devam ettirin. Elde edilen zikzak çizginin uzunluğunu bulun.



14.10. Aşağıdaki koyu renk spiral yarım çemberlerden tahmin edileceği biçimde inşa edilmiştir. Bu spiralin uzunluğunu bulun.



Seriler limitlerden çok daha ilginç ve zor ve dolayısıyla eğlenceli bir konudur. Çoğu zaman serinin toplamını bulamayacağız, sadece yakınsak olduğunu kanıtlamakla yetineceğiz.

Geçmiş bölümlerde seri adını anmadan birçok yakınsak seri örneği vermiştik. Bu örneklerin birkaçını sıralayalım. Teorem 10.7'de her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sum \frac{x^i}{i!}$$

serisinin yakınsadığını ve Sonuç 10.9'da her $x \in \mathbb{Q}$ için,

$$\sum \frac{x^i}{i!} = e^x$$

olduğunu kanıtlamıştık. Çok daha fazla seri örneği göreceğiz.

Bir seri özünde bir dizidir. Bunu gördük. Ama bir dizi de istenirse bir seri olarak görülebilir. Nitekim eğer $(s_n)_n$ dizisi verilmişse, $x_0 = s_0$ ve $n > 0$ için $x_n = s_n - s_{n-1}$ tanımlarını yapalım. O zaman $s_n = \sum_{i=0}^n x_i$ olur. Bir sonraki altbölümde bu fikri sömüreceğiz.

14.2 Teleskopik Seriler

Bir örnekle başlayalım.

Örnek 14.11. Örnek 7.10'da,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

serisinin yakınsak olduğunu kanıtlamıştık ama hangi sayıya yakınsadığını gösterememiştik. Yakınsaklığı bir kez daha ama bu sefer değişik bir kanıtla kanıtlayalım. Kısmi toplamlar

$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

olsun. $(s_n)_n$ pozitif ve artan bir dizidir. Her $i \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

olduğundan, $(s_n)_n$ dizisi üstten 2 tarafından sınırlıdır; dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} s_n$ limiti vardır ve 2'den küçüktür. Böylece

$$0 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq 2$$

eşitsizliğini kanıtlamış olduk. Kısmi toplamlar sayesinde seriyi alttan daha iyi sınırlayabiliriz:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} > \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36}.$$

Örnek 7.10'un sonunda yaptıklarımızdan serinin alttan 3/2 ile sınırlandığı çıkar. Ama kısmi toplamlarda ne kadar ileri gidersek serinin toplamına o kadar yakınsarız, örneğin bulduğumuz bu 3/2 altsınırını henüz yedinci kısmi toplamda aşarız. Daha da ileri gidelim: $s_{100} \approx 1{,}634984$.

Seriyi üstten de daha yakından sınırlayabiliriz:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \\ &< \frac{49}{36}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n} \\ &= \frac{49}{36}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{49}{36}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}=\frac{61}{36}-\frac{1}{n}<\frac{61}{36}. \end{aligned}$$

Demek ki,

$$1{,}63498 < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} < \frac{61}{36}.$$

Birinci örneğimizi genelleştiren basit ama çok yararlı bir teorem sunalım şimdi.

Teorem 14.2 (Teleskopik Seri)**.** *$\sum(x_i - x_{i+1})$ serisinin yakınsaması için, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması yeter ve gerek koşuldur. Bu durumda,*

$$\sum(x_i - x_{i+1}) = x_0 - \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

Kanıt: $\sum(x_i - x_{i+1})$ serisinin kısmi toplamlarına bakalım:

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i - x_{i+1}) = x_0 - x_{n+1}.$$

Kısmi toplamlar dizisinin yakınsaması için, belli ki $\lim_{n\to\infty} x_n$ limitinin olması yeter ve gerek koşuldur ve bu durumda kısmi toplamların limiti ancak

$$x_0 - \lim_{n\to\infty} x_n$$

olabilir. □

Teoremde, ilk göstergeç olarak 0 yerine herhangi bir k sayısı alabilir ve o zaman

$$\sum_{i\geq k}(x_i - x_{i+1}) = x_k - \lim_{n\to\infty} x_n$$

bulurduk.

Örnekler

14.12. Eğer Teorem 14.2'de $x_i = 1/i$ alırsak ve serinin toplamını 0'dan değil de 1'den başlatırsak

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)} = 1$$

buluruz.

Daha ilginç bir örnek bulalım.

$$x_i = \frac{(i+1)^2}{i(i+2)}$$

olsun. Teoreme göre,

$$\sum_{i\geq 1}(x_i - x_{i+1}) = x_1 - \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

olur. Kolay bir hesapla,

$$x_i - x_{i+1} = \frac{2i+3}{i(i+1)(i+2)(i+3)}$$

bulunur. Demek ki,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+3}{i(i+1)(i+2)(i+3)} = \frac{1}{3}$$

olur.

14.13. Örnekleri çoğaltabiliriz. Teoremi $\sum(x_i - x_{i+2})$ durumuna da uyarlayabiliriz:

$$\frac{2}{i(i+2)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}$$

eşitliğinden,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i(i+2)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

buluruz. (Neden?) Bundan da,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4}$$

çıkar. (Neden?)

14.14. $\sum(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$ serisi ıraksaktır.

Kanıt: Teorem 14.2'den hemen çıkar: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{i} = \infty$. □

14.15. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2}$ *serisini hesaplayın.*

Hesap:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = 1$$

olur.

14.16. *Aşağıdaki seriyi hesaplayın:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+2)(i+3)}.$$

Çözüm: Önce her i için,

$$\frac{1}{i(i+2)(i+3)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i+2} + \frac{c}{i+3}$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c sayılarını bulalım. Yukarıdaki eşitliği i ile çarparsak,

$$\frac{1}{(i+2)(i+3)} = a + \frac{bi}{i+2} + \frac{ci}{i+3}$$

buluruz ve sonra $i = 0$ alırsak

$$a = 1/6$$

bulunur. b'yi bulmak için i ile yaptığımızı $i+2$ için yapıp, sonra da $i=-2$ alalım; sonuçta

$$b = -1/2$$

buluruz. Benzer şekilde c bulunur:

$$c = 1/3.$$

Demek ki,

$$\frac{1}{i(i+2)(i+3)} = \frac{1}{6i} - \frac{1}{2(i+2)} + \frac{1}{3(i+3)}.$$

Böylece seri biraz daha teleskopik seriye benzer ama henüz tam anlamıyla değil. Bu aşamada

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

eşitliğini kullanıp sağdaki terimin

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{i+3} - \frac{1}{i+2}\right)$$

terimine eşit olduğunu kanıtlamalıyız. Şimdi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)(i+3)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{i+3} - \frac{1}{i+2}\right)\right)$$

serisini hesaplarsak birçok sadeleştirme olur ve

$$\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{36}$$

elde ederiz. □

14.17. $(a_n)_n$ *herhangi pozitif bir dizi olsun.*

$$\frac{a_0}{1+a_0} + \frac{a_1}{(1+a_0)(1+a_1)} + \frac{a_2}{(1+a_0)(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{\prod_{j=0}^{i}(1+a_j)}$$

serisi yakınsaktır.

Kanıt: $p_i = \prod_{j=0}^{i}(1+a_j)$ olsun. Demek ki

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p_i}$$

serisinin yakınsaklığını kanıtlamamız lazım. Her $i \geq 1$ için,

$$p_i = p_{i-1}(1+a_i)$$

ve

$$p_i - p_{i-1} = p_{i-1}(1+a_i) - p_{i-1} = a_i p_{i-1}$$

olur. Bu eşitliği $p_i p_{i-1}$ ifadesine bölersek,

$$\frac{1}{p_{i-1}} - \frac{1}{p_i} = \frac{a_i}{p_i}$$

olur. Demek ki

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{p_i} = \frac{a_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p_i} = \frac{a_0}{p_0} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_{i-1}} - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{a_0}{p_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_n}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{p_i} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n}.$$

Son olarak $(p_n)_n$ dizisinin ya sonlu bir sayıya yakınsadığını ya da sonsuza ıraksadığını göstermemiz lazım. Ama bu dizi artan bir dizi olduğundan bu bariz[1]. Demek ki mesela $a_i = i$ alırsak,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i-1}{i!} = \frac{0}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = 1$$

buluruz. Ama e sayısını kullanarak bunun daha kolay bir kanıtını bulabiliriz tabii. □

Eğer bir serinin sonlu sayıda terimi dışında her terimi 0 ise, o zaman sonlu bir toplam elde ederiz ve bu durumda seri elbette bu sonlu toplama yakınsaktır. Aksi durumda, seride 0'a eşit olan terimleri silersek fazla bir şey kaybetmeyiz. Yakınsaklığı ya da ıraksaklığı bozmayan, yakınsak olduğunda toplamın da bozulmadığı bir seri elde ederiz. Dolayısıyla gerektiğinde serilerimizde hiçbir terimin 0 olmadığını varsayabiliriz.

Seriler, dizilerden çok daha zor ama daha eğlenceli bir konudur. Özellikle x'e göre değişen

$$\sum c_i x^i$$

türünden seriler eğlenceyi doruk noktasına çıkarır.

Alıştırmalar

14.18. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ serisini hesaplayın.

14.19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ serisini hesaplayın.

14.20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ serisini hesaplayın.

14.21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(2n+3)}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

14.22. Şu eşitliği kanıtlayın:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+3)} = \frac{7}{36}.$$

İpucu: Önce

$$\frac{1}{i(i+1)(i+3)} = \frac{1}{3i} - \frac{1}{2(i+1)} + \frac{1}{6(i+3)}$$

eşitliğini bulun ve sağ tarafı

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$

olarak yazın (bkz. Örnek 14.16).

14.23. $\sum x_i = s$ ise, her $r \in \mathbb{R}$ için $\sum r x_i = rs$, yani, $\sum r x_i = r \sum x_i$ eşitliğini kanıtlayın.

14.24. $\sum x_i = s$ ve $\sum y_i = t$ ise, $\sum (x_i + y_i)$ serisinin $s+t$'ye yakınsadığını, yani $\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$ eşitliğini kanıtlayın.

---

[1] Çözüm için Yusuf Ünlü'ye teşekkür ederiz. Daha sonra göreceğimiz d'Alembert, Cauchy ve Raabe kıstasları bu serinin yakınsaklığına karar vermeye yetmiyor. Bu da teleskopik seri yönteminin ne kadar güçlü olduğunu gösterir.

14.25. $\sum x_i = s$ ve $\sum y_i = t$ ise, $\sum x_i y_i$ serisinin st'ye yakınsamak zorunda olmadığını gösterin. (Bu konuda bkz. Bölüm 16.)

14.26. Teorem 14.2'de
$$x_i = \frac{i^2}{(i+1)(i+2)}$$
alarak
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3i+1}{(i+1)(i+2)(i+3)}$$
serisini hesaplayın.

14.27. $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{4\cdot 6} + \cdots = \dfrac{3}{2}$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Örnek 14.6'daki gibi.)

14.28. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4}$ eşitliğini kanıtlayın.

14.29. Teleskopik serilerden esinlenerek, bir $k > 0$ tamsayısı için,
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(k+i)} = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)$$
eşitliğini kanıtlayın.

14.3 Serilerle İlgili İki Basit Gözlem

Cauchy Kıstası. Bir serinin yakınsak olup olmadığını bilmek kolay olmayabilir, ama yakınsaksa hangi sayıya yakınsak olduğunu bulmak bambaşka düzeyde bir problemdir; çok zor olduğu gibi bu mümkün de olmayabilir çünkü örneğin o güne dek kimse serinin yakınsak olduğu sayıya bir ad vermemiştir, yani seri bugüne dek insanoğlunun dikkatini çekmemiş bir sayıya yakınsayabilir ve elbette bu durumda yapacak fazla bir şey yoktur.

Serinin hangi sayıya yakınsadığı bilinmese de, serinin yakınsak olduğu kanıtlanabilir. Bunun için kıstaslar -yakınsama kıstasları- vardır. İşte bunlardan çok sık kullanılanlardan biri:

Teorem 14.3 (Cauchy Kıstası)**.** *Bir $\sum x_i$ serisinin bir gerçel sayıya yakınsaması için yeter ve gerek koşul şudur: Her $\epsilon > 0$ için öyle bir N olmalı ki, her $n > m > N$ için,*
$$\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| < \epsilon$$
olsun.

Kanıt: Serinin yakınsaması demek, tanım gereği, kısmi toplamlar dizisi olan
$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)_n$$

dizisinin yakınsaması demektir. Bu dizinin yakınsaması da, dizinin Cauchy dizisi olmasıyla eşdeğerdir; yani her $\epsilon > 0$ için öyle bir N olmalı ki, her $n > m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{m} x_i\right| < \epsilon,$$

yani,

$$\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| < \epsilon$$

olmalı. □

Bu kıstasın uygulanışına geçmişte birçok örnek vermiştik. Örneğin Teorem 10.7'de

$$\sum \frac{x^i}{i!}$$

serisinin yakınsadığını aynen bu yöntemle göstermiştik.

Bu kıstasla

$$\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$$

harmonik serisinin yakınsamadığını da gösterebiliriz. Nitekim eğer teoremde

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2}$$

ve her N için, (N'den büyük olan)

$$m = N + 1 \text{ ve } n = 2N + 1$$

alırsak,

$$\left|\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i}\right| = \sum_{i=N+1}^{2N+1} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=N+1}^{2N+1} \frac{1}{2N+1} = \frac{N+1}{2N+1} \geq \frac{1}{2} \geq \epsilon$$

buluruz.

Bu kıstastan $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri yakınsaksa, $\sum(x_i + y_i)$ serisinin ve eğer $r \in \mathbb{R}$ ise $\sum r x_i$ serisinin yakınsak olduğu çıkar. Ama bu sonuçları ileride, Bölüm 16'da çok daha doğal biçimde (sadece tanımlara başvurarak) bulacağız.

Bu Cauchy kıstasının, Altbölüm 18.2'de sözedeceğimiz çok daha önemli Cauchy kıstasıyla karıştırılmaması gerekir.

Örnekler

14.30. *$(x_n)_n$ artarak sonsuza ıraksayan bir diziyse*

$$\sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} \text{ ve } \sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}$$

serileri ıraksaktır.

Kanıt: $(s_n)_n$, birinci serinin kısmi toplamları dizisi olsun. Eğer $m < n$ ise

$$s_n - s_m = \sum_{i=m}^{n} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \geq \sum_{i=m}^{n} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_m}{x_{n+1}}$$

olur. Şimdi n'yi $x_{n+1} \geq 2x_m$ olacak kadar büyük seçelim. O zaman, bir önceki satırdan devam ederek

$$\geq \frac{2x_m - x_m}{x_{n+1}} = \frac{x_m}{x_{n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

buluruz. Demek ki kısmi toplamların dizisi $(s_n)_n$ Cauchy dizisi değildir ve birinci seri yakınsak olamaz. İkinci serinin ıraksaklığının kanıtı da benzerdir.

14.31. Bir önceki örnekte $x_i = i$ alarak, $\sum 1/i$ serisinin bir kez daha ıraksak olduğu anlaşılır.

14.32. [Stieltjes] *Eğer $(a_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan bir diziyse, sonsuza ıraksayan öyle bir $\sum b_n$ pozitif serisi vardır ki, $\sum a_n b_n$ yakınsak olur.*

Kanıt: $u_n = 1/a_n$ ve

$$b_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}}$$

olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ olur. Dolayısıyla Örnek 14.30'a göre $\sum b_n = \infty$ olur. Ama

$$a_n b_n = \frac{b_n}{u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

olduğundan $\sum a_i b_i$ teleskopik bir seridir. Ve $\lim_{n\to\infty} 1/u_n = 0$ eşitliğinden dolayı $\sum a_i b_i$ yakınsar. □

14.33. [Stieltjes] *Eğer $(a_n)_n$ artarak sonsuza ıraksayan bir diziyse, öyle bir yakınsak $\sum b_n$ pozitif serisi vardır ki, $\sum a_n b_n$ ıraksak olur.*

Kanıt: $b_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$ olsun. Teleskopik seri olduğundan $\sum b_i$ yakınsar. Ama

$$a_n b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$$

olduğundan, Örnek 14.30'a göre $\sum b_n$ ıraksaktır. □

Alıştırmalar

14.34. $\sum x_i$ yakınsaksa, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{2n} x_i = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

14.35.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) = 0$$
eşitliğini gösterin.

14.36. (Abel) $(x_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan pozitif bir dizi olsun. Eğer $\sum x_i$ yakınsaksa $\lim_{n\to\infty} nx_{2n} = 0$ eşitliğini gösterin. İpucu: $nx_{2n} \leq \sum_{i=1}^{n} x_{n+k} \to 0$. (Teorem 14.6'ya ve kanıtına da bakın.)

Genel Terimin Sıfıra Yakınsaması. Bir seride bir anlamda sonsuz sayıda sayı toplanır. Bu "sonsuz toplam"ın sonlu bir sayı olabilmesi için, gittikçe küçülen sayılar toplamak gerektiği hissedilebilir. Nitekim öyledir de.

Teorem 14.4. *Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, o zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olur.*

Kanıt 1: $\epsilon > 0$ olsun. Bir önceki teoreme göre öyle bir N vardır ki, her $m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=m}^{m+1} x_i\right| < \epsilon$$

yani $|x_{m+1}| < \epsilon$. Bu da her $n > N+1$ için, $|x_n| < \epsilon$ demektir.

Kanıt 2: s serinin limiti olsun. $\epsilon > 0$ olsun ve

$$s_n = x_0 + \cdots + x_n$$

olsun. Tanımlar gereği,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

olur. Ve tabii ki (altdizi olduğundan),

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = s - s = 0.$$

Teorem bir kez daha kanıtlanmıştır. □

Sonuç 14.5. *Eğer $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa (yakınsak değilse de), o zaman $\sum x_i$ serisi yakınsak değildir.* □

Ama teoremin ters istikameti doğru değildir, yani $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ eşitliği doğru olsa da, $\sum x_i$ serisi yakınsamayabilir. Örneğin, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olmasına karşın yukarıda gördüğümüz üzere $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} = \infty$ olur.

Bu sonuç sayesinde, yakınsamaktan oldukça uzak olan serilerin ıraksadıkları kolaylıkla kanıtlanabilir. Ama, $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i}$ serisi, genel terimi 0'a gittiğinden bu sonucun kapsamına girmiyor. Bu serinin yakınsamadığını Teorem 14.4'ün kanıtındaki fikri kullanarak şöyle de gösterebiliriz:

Teorem 14.6. *Eğer $\sum x_i$ yakınsak serisinin terimleri pozitif ve azalansa o zaman $\lim_{n\to\infty} nx_n = 0$ olur.*

Kanıt: s_n kısmi toplamlar olsun. $(x_n)_n$ dizisi azalan olduğundan,

$$nx_{2n} \leq x_{n+1} + \cdots + x_{2n} = s_{2n} - s_n$$

olur. Demek ki $\lim_{n\to\infty} nx_{2n} = 0$ ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} 2nx_{2n} = 0$. Şimdi tek sayılara geçelim. Benzer şekilde

$$(n+1)x_{2n+1} \leq x_{n+1} + \cdots + x_{2n+1} = s_{2n+1} - s_n.$$

Demek ki $\lim_{n\to\infty}(n+1)x_{2n+1} = 0$. Buradan kolaylıkla $\lim_{n\to\infty}(2n+1)x_{2n+1} = 0$ çıkar. (Nasıl?) □

Bütün bunlardan şu çıkıyor: $\sum x_i$ serisinin yakınsaması için x_i sayılarının 0'a azalarak yakınsaması yetmez, ayrıca bu sayıların 0'a "hızlı" yakınsaması da gerekir. Örneğin $1/i^2$, 0'a yeterince hızlı yakınsadığından, $\sum_{i\geq 1} 1/i^2$ serisi yakınsaktır. Yakın gelecekte $s > 1$ ise, $\sum_{i\geq 1} 1/i^s$ serisinin yakınsak olduğunu göreceğiz.

Sonuç 14.7. $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ *serisi ıraksar.* □

Örnekler

14.37. $\sum \left(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}\right)$ *serisi ıraksar.*

Kanıt: Sonuç 14.5'i uygulamaya çalışalım:

$$\sqrt{i+1} - \sqrt{i} = \frac{(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})(\sqrt{i+1} + \sqrt{i})}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{i+1} + \sqrt{i}} \to 0$$

Genel terimin limiti 0 olduğundan, serinin yakınsak mı yoksa ıraksak mı olduğunu Sonuç 14.5'in yöntemiyle anlayamayız. Ama Örnek 14.14'ten serinin ıraksak olduğunu biliyoruz.

14.38. *Eğer* $0 < a < 1$ *ise* $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^n = 1$.

Kanıt: Aşağıdaki hesapları yapalım:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1+a^n)^n - 1 = a^n \left((1+a^n)^{n-1} + (1+a^n)^{n-2} + \cdots + (1+a^n) + 1\right) \\ &\leq a^n n (1+a^n)^{n-1}. \end{aligned}$$

Demek ki

$$0 \leq (1+a^n) - \frac{1}{(1+a^n)^{n-1}} \leq na^n.$$

Ama Teorem 14.6'dan dolayı $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ olduğundan, sandviç teoremine göre

$$\lim_{n\to\infty} \left((1+a^n) - \frac{1}{(1+a^n)^{n-1}}\right) = 0$$

olur. $\lim_{n\to\infty}(1+a^n) = 1$ olduğundan, bundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+a^n)^{n-1}} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} (1+a^n)^{n-1} = 1$$

çıkar. Bu son eşitlik de istediğimizi verir. □

14.39. $\lim_{n\to\infty}(n^{1/n} - 1)^{1/n}$ *limitini bulun.*

Çözüm: Herhangi bir $a < 1$ alalım. Bir önceki örneğe göre yeterince büyük n göstergeçleri için $(1 + a^{1/n})^n < 2 < n$ olur. Buradan $a < (n^{1/n} - 1)^{1/n}$ çıkar.

Öte yandan $(n^{1/n} - 1)^{1/n} \leq (n^{1/n})^{1/n} = n^{1/n^2} = (n^2)^{1/n^2} \simeq n^{1/n} \longrightarrow 1$.

Son iki paragraftan istenen limitin 1 olduğu kolaylıkla çıkar (bkz. Örnek 4.16.) □

14.40. [Abel] Her $(a_n)_n$ dizisi için, "$\lim a_n b_n = 0 \Rightarrow \sum a_i$ *yakınsak" önermesini sağlayan bir* $(b_n)_n$ *dizisi yoktur.*

Kanıt: Tam tersine böyle bir $(b_n)_n$ dizisinin olduğunu varsayalım. Elbette sonsuz sayıda $b_n = 0$ olamaz, yoksa bu n'ler için a_n'yi çok büyük seçerek yakınsamaması gereken serilerin yakınsadığını kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla her n için $b_n \neq 0$ varsayımını yapabiliriz. $\lim a_n b_n = 0$ ile $\lim a_n |b_n| = 0$ önermeleri arasında fark olmadığından, $b_n > 0$ varsayımını yapabiliriz. $a_n = 1/nb_n$ gibi, $\lim a_n b_n = 0$ eşitliğini sağlayan pozitif bir seri alalım. $\epsilon > 0$ rastgele olsun. O zaman $a_n b_n < \epsilon$ olduğundan $\frac{1}{b_n} > \frac{a_n}{\epsilon}$, dolayısıyla

$$\sum \frac{1}{b_i} > \frac{\sum a_i}{\epsilon}$$

olur. Bundan da

$$\sum \frac{1}{b_i} = \infty$$

çıkar. Demek ki

$$c_n = \frac{1}{b_0} + \cdots + \frac{1}{b_n}$$

dizisi sonsuza ıraksar. Örnek 14.30'a göre terimleri

$$a_n = \frac{c_n - c_{n-1}}{c_n}$$

olan seri ıraksar. (Eski a_n'yi unutun!) Ama

$$b_n a_n = b_n \frac{c_n - c_{n-1}}{c_n} = \frac{1}{c_n} \longrightarrow 0$$

olduğundan bir çelişki elde ederiz. □

14.41. [Abel] *Sonsuza ıraksayan her* $\sum a_i$ *serisi için,* $\lim b_n/a_n = 0$ *eşitliğini sağlayan sonsuza ıraksayan bir* $\sum b_i$ *serisi vardır.*

Kanıt: $a_i > 0$ varsayımını yapabiliriz.

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n$$

ve

$$b_n = \frac{a_n}{s_n} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n}$$

olsun. O zaman

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{s_n} \longrightarrow 0$$

olur. Ayrıca Örnek 14.30'a göre $\sum b_n$ serisi ıraksar. □

Birkaç İlginç Seri. Ya kanıtlama yöntemi için henüz yeterince matematik geliştiremediğimizden ya da π gibi bazı matematiksel nesnelerin tanımlarını henüz vermediğimizden şu anda kanıtlayamayacağımız birkaç eşitlik sunuyoruz.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

serisinin yakınsaklığını Bölüm 17'de kanıtlayacağız. (Limit $\ln 2$'dir ama henüz ln diye bir fonksiyon görmediğimizden şu anda bu olgu okura bir anlam ifade etmeyebilir.)

Tek sayılarla π sayısı arasında bir ilişki var mıdır diye sorulsa, aklı başında herhangi biri yok der herhalde! Ama yanlış!

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Şu toplamdan sözetmiştik bir zamanlar:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

$1/n$'lerin toplamının sonsuz olduğunu biliyoruz:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty.$$

Bu seride toplanan terim sayısını azaltalım... Tüm $1/n$'leri toplayacağımıza, asal n'ler için $1/n$'leri toplayalım; bakalım ne oluyor...

$$\sum_{p \text{ asal}} \frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\infty.$$

Gene sonsuz çıkar... Demek ki asal sayıların sayısı çok az değil, terslerinin toplamını sonsuz yapacak kadar çok asal sayı var...

3 ve 5 gibi, 5 ve 7 gibi, 11 ve 13 gibi, 17 ve 19 gibi, aralarında 2 fark olan asallara ***ikiz asallar*** denir. Sonsuz sayıda ikiz asal olduğu sanılıyorsa da, bu sanı bugüne dek kanıtlanamadı. Brun 1919'da, ikiz asalların bir anlamda o kadar çok olmadığını kanıtlamıştır. Şu anlamda çok değillerdir:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\cdots$$

serisi yakınsaktır, yani bu toplam sonlu bir sayıdır. ***Brun sabiti*** adı verilen bu sayının değeri aşağı yukarı 1,902160583104'tür. Bu yaklaşık değer, 10^{16}'ya kadar olan asallar bulunarak hesaplanmıştır.

14.4 Serilerin Terimleriyle Oynamak

Bu altbölümde amacımız bir serinin terimleri gruplandığında ya da terimlerinin yerleri değiştiğinde ya da seriye yeni terimler eklendiğinde seride ne gibi değişikliklerin olduğunu anlamaya çalışmak. İlk okumada bu altbölüm üstün körü okunabilir.

Seriden Terim Atmak. Bir önceki altbölümde kanıtlanan Teorem 14.3, bir serinin yakınsaklığının ya da ıraksaklığının, toplanan diziden çok, dizinin kuyruğuna göre değiştiğini de söylüyor: Kuyrukları aynı olan iki diziden birinin toplamı yakınsaksa diğerinin de toplamı yakınsaktır ve biri ıraksaksa diğeri de ıraksaktır. Yani bir seriye sonlu sayıda terim eklersek ya da bir seriden sonlu sayıda terim silersek ya da her iki işlemi birden yaparsak, serinin yakınsaklığında ya da ıraksaklığında bir değişiklik olmaz. (Tabii yakınsak olduğunda elde edilen toplam değişebilir.) Bu o kadar bariz ki teorem adı altında yazmıyoruz bile.

Serinin Terimlerini Gruplamak. Yakınsak serilerin terimlerini teker teker toplayacağımıza ikişer ikişer toplayabiliriz, yani yakınsak bir seriyi

$$x_0+\cdots+x_i+\cdots$$

sonsuz toplamı olarak göstereceğimize,

$$(x_0+x_1)+(x_2+x_3)+\cdots+(x_{2i}+x_{2i+1})+\cdots$$

sonsuz toplamı olarak da gösterebiliriz, çünkü ne de olsa, kısmi toplamlar dizisi $(s_n)_n$ yakınsaksa, bunun bir altdizisi olan $(s_{2n+1})_n$ dizisi de aynı sayıya yakınsar. Bu bulduğumuz sadece ikişer ikişer toplama için değil, ikişer üçer gruplama ve hatta **her türlü** gruplama için de geçerlidir elbet, çünkü gruplanarak elde edilen serinin kısmi toplamları başladığımız serinin kısmi toplamlarının bir altdizisidir. Bir teorem daha kanıtladık:

Teorem 14.8. *Eğer bir seri yakınsaksa, serinin terimlerini gruplayarak elde edilen seri de aynı sayıya yakınsaktır.* □

Örneğin,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2i)^2}+\frac{1}{(2i+1)^2}\right)$$

serisi yakınsaktır çünkü,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2i)^2}+\frac{1}{(2i+1)^2}\right)=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i^2}$$

eşitliği geçerlidir ve sağdaki serinin yakınsak olduğunu biliyoruz (Bölüm 7). Gruplayarak ayrı sayılara yakınsayan (dolayısıyla yakınsak olmayan) seri örneği için bkz. Örnek 17.2.

Ama dikkat: Bir seri gruplanarak yakınsak oluyorsa, bu, gruplanmamış orijinal serinin yakınsak olduğunu göstermez. Örneğin, $x_i = (-1)^i$ ise $\sum x_i$ yakınsamaz; ama terimleri ikişer ikişer gruplarsak, terimleri 0 olan dizi buluruz ki bu da elbette 0'a yakınsayan bir seri verir.

Aynı felaket, serinin genel terimi 0'a yakınsıyorsa da başımıza gelebilir. Örneğin,

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{11}-\frac{1}{11}-\cdots-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{231}-\frac{1}{231}-\cdots-\frac{1}{13}-\frac{1}{12}\right)+\cdots$$

serisine bakalım. k'ıncı parantezdeki

$$\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{b}$$

toplamının $a \le b$ sayıları şöyle seçiliyorlar: a, toplamda daha önce belirmeyen ilk doğal sayı (bir sonraki parantezde $a = 232$ olacak örneğin); b ise,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots+\frac{1}{b}$$

toplamını k'dan büyükeşit yapan en küçük doğal sayı. $\sum_{i\geq 1} 1/i$ serisi sonsuza ıraksadığından her a için böyle bir b bulmak mümkündür. Serinin yukarıdaki gibi gruplaşmış hali, terimleri sürekli 0 olan seridir ve elbette bu gruplaşmış seri 0'a yakınsar; ama aynı seriyi parantezlerden arınmış biçimde görürsek, bu sefer seri yakınsamaz, çünkü parantezsiz serinin kısmi toplamları belli aşamalarda her k doğal sayısını aşar. (b sayıları itinayla seçilmişlerdir.)

Öte yandan gruplanan terim sayısı sınırlı tutulursa ve serinin genel terimi 0'a yakınsıyorsa, her şey yolunda gider:

Teorem 14.9. *Eğer bir serinin genel terimi* 0*'a yakınsıyorsa ve terimler en fazla* b *terim içeren bloklar halinde (terimlerin sıraları bozulmadan) gruplandığında seri yakınsak bir seriye dönüşüyorsa, o zaman başlangıçtaki seri de (yani gruplaşmamış seri de) yakınsaktır; üstelik gruplanmış ve gruplanmamış seriler aynı sayıya yakınsarlar.*

Bu teoremi kanıtlamadan önce kanıtı çok daha kolay olan şu teoremi kanıtlayalım:

Teorem 14.10. $\sum x_i$ *bir seri olsun.* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *varsayımını yapalım. Bir* $k > 0$ *doğal sayısı için* $(s_{kn})_n$ *kısmi toplamların bir* s *sayısına yakınsadığını varsayalım. O zaman* $\sum x_i$ *serisi de* s *sayısına yakınsar.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ eşitliğinden dolayı her $n > N_1$ için $|x_n| < \epsilon/2k$ eşitsizliğini sağlayan bir N_1 vardır. $\lim_{n\to\infty} s_{kn} = s$ eşitliğinden dolayı her $n > N_2$ için $|s - s_{kn}| < \epsilon/2$ eşitsizliğini sağlayan bir N_2 vardır. $N = (k+1)\cdot\max\{N_1, N_2\}$ ve $n > N$ olsun. n'yi k'ya bölelim: Bir $n_0 > \max\{N_1, N_2\}$ ve bir $r = 0, 1, \ldots, k-1$ için, $n = kn_0 + r$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
|s - s_n| &= |s - (s_{kn_0} + x_{kn_0+1} + \cdots + x_{kn_0+r})| \\
&\leq |s - s_{kn_0}| + |x_{kn_0+1}| + \cdots + |x_{kn_0+r}| \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2k} + \cdots + \tfrac{\epsilon}{2k} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

çıkar, ki bu da istediğimizi kanıtlar. □

Şimdi yukarıdaki fikri genelleştirip Teorem 14.9'u kanıtlayalım.

Teorem 14.9'un Kanıtı: Seri $\sum x_i$ olsun. s_n de $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamları olsun:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

Şimdi $0 < j_k - j_{k-1} \leq b$ eşitsizliğini sağlayan bir

$$0 = j_0 < j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$$

göstergeç dizisi ele alalım ve $\sum x_i$ serisini

$$(x_0 + \cdots + x_{j_1-1}) + (x_{j_1} + \cdots + x_{j_2-1}) + \cdots$$

biçiminde gruplayıp böylece elde edilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} x_i \right)$$

serisinin bir t sayısına yakınsak olduğunu varsayalım. t_m bu gruplaşmış serinin kısmi toplamlarını simgelesin:

$$t_m = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=j_k}^{j_{k+1}-1} x_i \right) = \sum_{i=0}^{j_{m+1}-1} x_i = s_{j_{m+1}-1}.$$

Varsayımdan dolayı

$$\lim_{m\to\infty} t_m = t$$

eşitliğini biliyoruz ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n = t$$

eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Bunun için s_n'lerle t_m'ler arasında bir ilişki bulacağız.

n verilmiş olsun. $j_{m+1} < n \le j_{m+2}$ eşitsizliklerini sağlayan m sayısını seçelim. O zaman,

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{j_{m+1}-1} x_i + \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i = t_m + \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i$$

buluruz. Demek ki,

$$|s_n - t_m| = \left| \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i \right| \le \sum_{i=j_{m+1}}^{n} |x_i|$$

olur. m'nin seçiminden dolayı, en sağdaki toplamda en fazla b terim vardır. $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsadığından, n'yi büyüterek (ki o zaman m ve j_m de büyür) $|s_n - t_m|$ sayısını dilediğimiz kadar küçültebiliriz, yani

$$\lim_{n\to\infty} |s_n - t_m| = 0$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - t_m) = 0$$

olur. Belki söylemeye bile gerek yok ama m sayısı n'ye bağımlıdır ve n sonsuza gittiğinde m de sonsuza gider (çünkü $n \le (m+2)b$ eşitsizliği geçerlidir); dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - t_m) + \lim_{n\to\infty} t_m = \lim_{n\to\infty} t_m = \lim_{n\to\infty} t_m = t$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Eğer serinin terimleri ≥ 0 ise, gruplanan terim sayısına sınır koymak gereksizdir. O zaman da her şey yolunda gider:

Teorem 14.11. *Eğer terimleri negatif olmayan bir serinin genel terimi* 0*'a yakınsıyorsa ve terimler (sıraları bozulmadan) herhangi bir şekilde gruplandığında seri yakınsak bir seriye dönüşüyorsa, o zaman başlangıçtaki seri de (yani gruplanmamış seri de) yakınsaktır; üstelik gruplanmış ve gruplanmamış seriler aynı sayıya yakınsarlar.*

Kanıt: Bir önceki kanıttaki gösterimi kabul edelim ve aynı fikri devam ettirelim.

$$|s_n - t_m| = \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i$$

aşamasına kadar geldik. Bundan sonra,

$$|s_n - t_m| = \sum_{i=j_{m+1}}^{n} x_i \le \sum_{i=j_{m+1}}^{j_{m+2}-1} x_i = t_{m+1} - t_m$$

şeklinde devam edelim. $(t_m)_m$ dizisi Cauchy olduğundan, n'yi, dolayısıyla m'yi de yeterince büyük alırsak, $t_{m+1} - t_m$ sayısını her sayıdan küçük yapabiliriz. Şimdi bir önceki teoremin kanıtındaki gibi devam edelim. □

Serinin Terimlerini Karmak. Yukarıda serinin terimlerinin yerlerini değiştirmemiştik. Şimdi serinin terimlerinin yerlerini değiştirdiğimiz zaman başımıza geleceklere bakalım.

Terimleri özel bir biçimde kararak, serinin yakınsaklığının ya da ıraksaklığının bozulmayacağını görebiliriz. Örneğin

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2i} + x_{2i+1} + \cdots$$

serisi yerine

$$x_1 + x_0 + x_3 + x_2 + \cdots + x_{2i+1} + x_{2i} + \cdots$$

serisine bakabiliriz. Eğer birinci seri yakınsaksa ikinci seri de yakınsaktır. s_n ve t_n bu iki serinin (bu sırayla) kısmi toplamları olsun ve birinci serinin s'ye yakınsadığını varsayalım. t_n'leri s_n cinsinden hesaplamaya çalışalım.

$$t_{2n+1} = x_1 + x_0 + \cdots + x_{2n+1} + x_{2n} = s_{2n+1}$$

olur. Ama t_{2n}'de küçük bir düzeltme payı gerekir:

$$t_{2n} = x_1 + x_0 + \cdots + x_{2n-2} + x_{2n+1} = t_{2n-1} + x_{2n+1} = s_{2n-1} + x_{2n+1}.$$

Demek ki, Teorem 14.4'ten dolayı,

$$\lim_{n\to\infty} t_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} + x_{2n+1}) = s.$$

Aynı zamanda

$$\lim_{n\to\infty} t_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$$

olduğundan, $(t_n)_n$ kısmi toplamlar dizisinin limiti de vardır ve bu limit s'ye eşittir (Alıştırma 8.9).

Aynı biçimde, eğer ikinci seri yakınsaksa birinci seri de yakınsaktır.

Yukarıda serinin terimlerini ikişer ikişer kardık. Beşer beşer de karabilirdik, bir şey değişmezdi. Ayrıca beşer beşer hep aynı biçimde de karmak zorunda değiliz, her seferinde ayrı bir karma kullanabiliriz. Bunu birazdan kanıtlayacağız.

Ama okur dikkatli olmalıdır, terimler rastgele uzunlukta gruplar halinde karılırsa yakınsak seriler ıraksayabilir. Birazdan bir örnek göreceğiz. Yakınsaklığın değişmemesi için ya yukarıdaki gibi özel karmaları ya da bazı özel serileri almak gerekir. Teorem 14.13'te göreceğimiz üzere, terimleri pozitif olan bir seriyi istediğimiz gibi karabiliriz, yakınsaklığı/ıraksaklığı değişmez. Ama terimleri negatif ve pozitif olan serileri kararken dikkatli olmak gerekir.

Teorem 14.12. *$j > 0$ bir doğal sayı ve her $k \geq 0$ için σ_k, $\{0, 1, \ldots, j-1\}$ kümesinin bir eşleşmesi olsun. Her i doğal sayısı için, r_i sayısı $0 \leq r_i < j$ ve $i = kj + r_i$ olacak biçimde seçilsin.*

$$y_i = x_{kj+\sigma_k(r_i)}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır. Ayrıca bu durumda her iki seri de aynı sayıya yakınsar.

Kanıt: $\sum x_i$ serisinin s'ye yakınsadığını varsayalım. Yaptığımız karma, $\sum x_i$ serisinin terimlerini, en baştan başlayarak, j'li bloklar halinde karıyor, ama her j'lik bloğu değişik biçimde karabilir. Her k doğal sayısı için,

$$x_{kj},\ x_{kj+1},\ \ldots,\ x_{kj+(j-1)}$$

terimleri

$$x_{kj+\sigma_{k(0)}},\ x_{kj+\sigma_k(1)},\ \ldots,\ x_{kj+\sigma_k(j-1)}$$

terimlerine dönüşüyor. Dolayısıyla eğer s_n ve t_n sayıları $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin (bu sırayla) kısmi toplamlarıysa, her k ve $0 \leq r < j$ doğal sayıları için,

$$s_{kj+r} = t_{kj+r} - x_{kj} - \cdots - x_{kj+r} + x_{kj+\sigma_k(0)} + \cdots + x_{kj+\sigma_k(r)}$$

elde ederiz. Teorem 14.4'ten dolayı her $0 \leq r < j$ için,

$$\lim_{j\to\infty} t_{kj+r} = \lim_{j\to\infty} s_{kj+r} = s$$

olur. Demek ki $\sum_{i\geq 1} y_i$ serisi de s'ye yakınsıyor.

Şimdi $\sum y_i$ serisinin yakınsadığını varsayalım. $\sum x_i$ serisi de $\sum y_i$ serisinden yukarıdaki biçimde elde edilir. Bunun için σ_k yerine σ_k^{-1} almak yeterlidir. Dolayısıyla aynı sonuç $\sum y_i$ serisi için de geçerlidir. □

Bu teoremi hafifçe genelleştirmek mümkündür. Karmaların hep j tane terim üzerine olma koşulunu, karma yapılan terim sayısını sınırlı tutmak koşuluyla değiştirebiliriz.

Eğer karma yukarıdaki gibi terbiyeli bir biçimde yapılmazsa, başlangıçtaki seri yakınsak bile olsa, kararak elde edilen seri bir başka sayıya yakınsayabilir, hatta ıraksak olabilir. Bir örnek verelim.

Örnek 14.42. Bölüm 17'de $\sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ serisinin yakınsak olduğunu göreceğiz, şimdilik bu serinin yakınsadığını varsayalım. Şimdi serinin terimlerini karacağız. $j = 0, 1, 2$ için,

$$y_{3i+j} = \begin{cases} \frac{1}{2i+1} & \text{eğer } j = 1 \text{ ise} \\ \frac{-1}{4i+2} & \text{eğer } j = 2 \text{ ise} \\ \frac{-1}{4i+4} & \text{eğer } j = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. $(y_i)_i$ dizisinin $((-1)^{i+1}/i)_{i\geq 1}$ dizisinin bir karması olduğunu kanıtlamak oldukça kolay. Şimdi $\sum_{i\geq 1} y_i$ serisine bakalım:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

$(y_n)_{n\geq 1}$ dizisi 0'a yakınsadığından, Teorem 14.9'a göre, yakınsaklığı bozmadan, $\sum_{i\geq 1} y_i$ serisini şöyle gruplayabiliriz:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots$$

ve

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

serisini, yani $\sum_{i\geq 1}(-1)^{i+1}/i$ serisinin yarısı olan

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right)$$

serisini buluruz. Görüldüğü gibi toplam yarıya indi!

Öte yandan eğer serinin terimleri negatif değilse terimlerini istediğimiz gibi karabiliriz, yakınsaklık ve toplam değişmez:

Teorem 14.13. *$\sum x_i$, terimleri pozitif olan bir seri olsun. σ, $\mathbb{N}$'nin bir eşleşmesi olsun. O zaman, eğer $\sum x_i$ ve $\sum x_{\sigma(i)}$ serilerinden biri yakınsıyorsa diğeri de yakınsar ve yakınsadıklarında aynı sayıya yakınsarlar.*

Kanıt: s_n ve t_n sırasıyla $\sum x_i$ ve $\sum_i x_{\sigma(i)}$ serilerinin kısmi toplamları, s ve t de serilerin limitleri olsun. Her iki kısmi toplamlar dizisi de artan dizidir. $(t_n)_n$ dizisinin üstten s tarafından sınırlı olduğunu kanıtlayacağız.

$$m(n) = \max\{\sigma(0), \ldots, \sigma(n)\}$$

olsun. Hesaplayalım:

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} x_{\sigma(i)} \le \sum_{i=0}^{m(n)} x_i = s_{m(n)} \le s.$$

Demek ki $(t_n)_n$ dizisi de, dolayısıyla $\sum x_{\sigma(i)}$ serisi de yakınsak. Eğer limite t dersek, yukarıdaki eşitsizlikten $t \le s$ elde ederiz. Ama şimdi s, t ve σ ile yaptığımızı t, s ve σ^{-1} ile de yapabiliriz ve bu sefer $s \le t$ elde ederiz. □

Bu teorem biraz daha genel bir haliyle de doğrudur (bkz. Teorem 15.9).

Kimi zaman göstergeç kümesini sonsuz parçalara ayırmak zorunda kalabiliriz. Eğer serinin terimleri pozitifse bu bir sorun teşkil etmez. Kanıta geçmeden önce bunun yararını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 14.43.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots$$

serisini toplamak istediğimizi varsayalım. Bu seriyi şöyle açalım:

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^4}\right) + \cdots$$

Teorem 14.8 ve 14.11'e göre bu serilerden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır ve iki seri de bu durumda aynı sayıya yakınsarlar. Şimdi bu ikinci serinin yakınsaklığını kanıtlamaya çalışalım.

İkinci serideki her parantezin ilk terimini alarak

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

serisini, (ikinci parantezden başlayarak) her parantezin ikinci terimini alarak

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

serisini, (üçüncü parantezden başlayarak) her parantezin üçüncü terimini alarak

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$

serisini alalım ve bunu böylece sonsuza kadar devam edelim. Elde ettiğimiz seriler yakınsaktır:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots &= 1\\
\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots &= \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots &= \frac{1}{2^2}
\end{aligned}$$

Bunları toplarsak da 2 buluruz. Bu bulgudan, birinci ve ikinci serilerin 2'ye yakınsadığını söyleyebilir miyiz?

Ne yaptığımızın farkına vardınız mı?

$$\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{\text{2 adet}}+\underbrace{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}}_{\text{3 adet}}+\underbrace{\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}}_{\text{4 adet}}+\cdots$$

serisini hesaplamak için, sayıları, seride önerildiği ve her Avrupalının yapacağı gibi terimleri soldan sağa doğru teker teker toplayacağımıza, aşağıdaki gibi dizip

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\\ \frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\\ \frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\\ \qquad\cdots\end{array}$$

Çinliler gibi en sol sütundan başlayarak yukarıdan aşağı topladık ve sonra sütunların toplamlarını topladık:

En sol sütunun toplamı 1.

Bir sonraki sütunun toplamı 1/2.

Soldan üçüncü sütunun toplamı 1/4. Vs.

Soru belli: Bunu yapmaya hakkımız var mı? Yani satırların toplamının toplamı, sütunların toplamının toplamına eşit midir? Yanıt: Evet var! Bir sonraki teoremde bunu kanıtlayacağız.

Teorem 14.14. *$\sum_{i\geq 0} x_i$ terimleri negatif olmayan bir seri ve*

$$\mathbb{N} = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots,$$

$\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun.

i. *Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi de yakınsaktır. Ayrıca, eğer $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yaparsak, $\sum y_j$ serisi de yakınsaktır ve bu seri $\sum x_i$ toplamına eşittir.*

ii. *Her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi yakınsak olsun. $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yapalım. Eğer $\sum y_j$ serisi de yakınsaksa o zaman $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve bu seri $\sum y_j$ toplamına eşittir.*

Kanıt: i. $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisinin kısmi toplamları elbette $\sum x_i$ serisinden küçükeşittir. Kısmi toplamları artan bir dizi oluşturduğundan, $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi yakınsaktır (Teorem 7.1) ve toplamı $\sum x_i$ serisinden küçükeşittir. Demek ki

$$y_j \leq \sum x_i.$$

$\sum y_j$ serisinin kısmi toplamları $\sum x_i$ serisi tarafından üstten sınırlanmıştır ve $\sum y_j$ serisi yakınsar (Teorem 7.1) ve

$$\sum y_j \leq \sum x_i$$

olur. Şimdi eşitliği kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ olsun. k'yı yeterince büyük seçerek

$$\sum x_i - (y_0 + \cdots + y_k)$$

farkını ϵ'dan küçük yapabileceğimizi kanıtlamalıyız. Ama tek bir k için farkı ϵ'dan küçük yapmak yeterli, çünkü k büyüdükçe yukarıdaki fark küçülür. Önce öyle bir n bulalım ki,

$$\sum x_i - (x_0 + \cdots + x_n) < \epsilon$$

olsun. Ardından öyle bir k bulalım ki,

$$0, 1, \ldots, n \in A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k$$

olsun. O zaman elbette,

$$x_0 + \cdots + x_n \leq y_0 + \cdots + y_k$$

olur. Dolayısıyla,

$$\sum x_i - (y_0 + \cdots + y_k) \leq \sum_{i \geq 0} x_i - (x_0 + \cdots + x_n) < \epsilon$$

olur. Birinci önerme kanıtlanmıştır.

ii. Verilmiş bir i için, $j(i)$ göstergeci, $i \in A_{j(i)}$ içindeliğini sağlayacak biçimde seçilmiş olsun. O zaman $x_i \leq y_{j(i)}$ olur. Dolayısıyla,

$$x_0 + \cdots + x_n \leq y_{j(0)} + \cdots + y_{j(n)} \leq \sum y_j$$

olur. Demek ki $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamları üstten $\sum y_j$ tarafından sınırlıdır. Bundan da, Teorem 7.1 yardımıyla, $\sum x_i$ serisinin yakınsak olduğu ve

$$\sum x_i \leq \sum y_j$$

eşitsizliği çıkar. Şimdi eşitliği gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. n'yi yeterince büyük seçerek

$$\sum y_j - (x_0 + \cdots + x_n)$$

farkını ϵ'dan küçük yapabileceğimizi kanıtlamalıyız. Ama tek bir n için farkı ϵ'dan küçük yapmak yeterli, çünkü n büyüdükçe yukarıdaki fark küçülür. Hatta sağda toplanan x_i'lerin göstergeçlerinin illa 0'dan n'ye gitmeleri gerekmez, aradan sadece bazı göstergeçleri seçsek de yeter. Önce öyle bir k seçelim ki,

$$\sum y_j - (y_0 + \cdots + y_k) < \frac{\epsilon}{2}$$

olsun. Her $j = 0, \ldots, k$ için öyle bir sonlu $I_j \subseteq A_j$ göstergeç kümesi vardır ki,

$$y_j - \sum_{i \in I_j} x_i < \frac{\epsilon}{2(k+1)}$$

olur. O zaman

$$I = I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_k$$

tanımını yaparsak,

$$(y_0 + \cdots + y_k) - \sum_{i \in I} x_i < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Demek ki,

$$\begin{aligned}\sum y_j - \sum_{i \in I} x_i &= \Big(\sum y_j - (y_0 + \cdots + y_k)\Big) + \left((y_0 + \cdots + y_k) - \sum_{i \in I} x_i\right) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Şimdi n'yi o kadar büyük seçelim ki

$$I = I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_k \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum y_j - (x_0 + \cdots + x_n) \leq \sum y_j - \sum_{i \in I} x_i < \epsilon$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Teorem 14.14'ün ikinci kısmı herhangi bir seri için ve sonlu sayıda parçalanma için de doğrudur:

Teorem 14.15. *$\sum x_i$ herhangi bir seri olsun. $\mathbb{N} = A \sqcup B$, $\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun. Eğer $\sum_{i \in A} x_i$ ve $\sum_{i \in B} x_i$ serileri yakınsaksa ve toplamlar a ve b'ye eşitse, o zaman $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve bu seri $a + b$ toplamına eşittir.*

Kanıt: s_n, $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamı olsun.

$$A_n = A \cap \{0, 1, \ldots, n\} \text{ ve } B_n = B \cap \{0, 1, \ldots, n\}$$

olsun. Ayrıca

$$a_n = \sum_{i \in A_n} x_i \text{ ve } b_n = \sum_{i \in B_n} x_i$$

tanımlarını yapalım. Her a_n, $\sum_{i \in A} x_i$ serisinin bir kısmi toplamıdır. $(a_n)_n$ dizisinin $\sum_{i \in A} x_i$ serisinin kısmi toplamları dizisinden tek farkı, $(a_n)_n$ dizisinde bazı kısmi toplamların tekrar etmesidir, nitekim $A_n = A_{n+1}$ olduğunda

$a_n = a_{n+1}$ olur. Aynı şeyler $(b_n)_n$ dizisi için de geçerlidir. Dolayısıyla $(a_n)_n$ dizisi a'ya ve $(b_n)_n$ dizisi b'ye yakınsar. Tanımdan dolayı

$$s_n = a_n + b_n$$

olduğundan, $\lim_{n\to\infty} s_n$ vardır ve $a + b$'ye eşittir. $\square$

Sonuç 14.16. *$\sum x_i$ herhangi bir seri olsun. $\mathbb{N} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$, $\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun. Eğer her $j = 1, \ldots, k$ için $\sum_{i \in A_j} x_i$ serisi yakınsaksa ve toplamlar a_j'ye eşitse, o zaman $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve bu seri*

$$a_1 + \cdots + a_k$$

toplamına eşittir. $\square$

Teorem 14.14'ü ileride Teorem 15.10 olarak genelleştireceğiz.

15. Pozitif Seriler ve Mutlak Yakınsaklık

15.1 Pozitif Seriler

Terimleri negatif olmayan serilerin analizi oldukça kolaydır. Nitekim, böyle bir serinin yakınsaması için, kısmi toplamlarının sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur. Bunun çok kolay kanıtını birazdan vereceğiz. Böylece, terimleri negatif olmayan bir serinin yakınsaklığını, serinin hangi sayıya yakınsadığını bilmeden de bulabilme imkânına sahip olacağız. Geçmişte bunun örneklerini çok gördük. Örneğin,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^5}$$

serisinin terimleri pozitiftir ve bu serinin kısmi toplamları

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^5} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$$

eşitsizliğini sağladığından (Örnek 7.10), Teorem 7.1'den dolayı, seri yakınsar. Ancak, bırakın hangi sayıya yakınsadığının bilinmesini, serinin ne tür (örneğin kesirli) bir sayıya yakınsadığı bile bilinmiyor... Bu ve benzer konular bugün revaçta olan araştırma konularıdır. Terimleri negatif olmayan bir seriye kısaca ***pozitif seri*** diyeceğiz. Böyle bir $\sum_{i\geq 0} x_i$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$$

artan bir dizidir elbet. Dolayısıyla pozitif bir seri ıraksaksa ancak ∞'a ıraksayabilir (Teorem 12.1). Örneğin $\sum_{i\geq 1} 1/i = \infty$ (bkz. Altbölüm 7.2).

Teorem 15.1. *Pozitif bir serinin yakınsaması için kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Eğer seri s'ye yakınsıyorsa, kısmi toplamlar dizisi $(s_n)_n$ artan bir dizi olduğundan, $s_n \leq s$ elde edilir.

Şimdi de, artan bir dizi olan kısmi toplamlar dizisi $(s_n)_n$'nin üstten sınırlı olduğunu varsayalım. O zaman Teorem 7.1'e göre, $(s_n)_n$ dizisi, yani seri yakınsaktır. □

Kanıttan da anlaşılacağı üzere, Teorem 15.1 bize aslında biraz daha fazla bilgi veriyor:

Teorem 15.2. *Eğer $\sum x_i$ pozitif bir seriyse, $\sum x_i$ serisinin yakınsaması için kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur. Ayrıca eğer M, kısmi toplamların bir üstsınırıysa,*

$$\sum x_i \leq M$$

olur ve eğer m, kısmi toplamların en küçük üstsınırıysa,

$$\sum x_i = m$$

olur. Ayrıca her n için

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \leq \sum x_i$$

olur. □

Tabii bütün bu dediklerimizin doğru olması için, serinin terimlerinin hep değil, sadece "bir zaman sonra" negatif olmamaları yeterlidir.

Sonuç 15.3. *$\sum x_i$ pozitif bir seri olsun. $(x_{i_k})_k$, $(x_i)_i$ dizisinin bir altdizisi olsun. Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa, $\sum_k x_{i_k}$ serisi de yakınsaktır ve limiti $\sum x_i$ sayısından küçükeşittir. Eğer $\sum_k x_{i_k}$ serisi ıraksaksa, $\sum x_i$ serisi de ıraksaktır.*

Kanıt: $\sum x_i = s$ olsun. s_n ve t_n sayıları sırasıyla, $\sum x_i$ ve $\sum_k x_{i_k}$ serilerinin kısmi toplamları olsunlar. Elbette,

$$t_n = x_{i_0} + x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} \leq x_0 + x_1 + \cdots + x_{i_n} = s_{i_n} \leq s$$

olur. Teorem 15.2'ye göre $\sum x_{i_k}$ serisi yakınsaktır. İkinci kısım birincisinden çıkar. □

Örnekler

15.1. Örnek 6.8'de, terimleri

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j(i-j)} = \frac{1}{1(i-1)} + \frac{1}{2(i-2)} + \cdots + \frac{1}{j(i-j)} + \cdots + \frac{1}{(i-1)\cdot 1},$$

olan dizinin 0'a yakınsadığını, yani,

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0$$

eşitliğini kanıtlamıştık. Demek ki,

$$\sum_{i=2}^{\infty} x_i$$

serisinin yakınsak olma ihtimali var (Sonuç 14.5). Bu seri yakınsak mıdır? Değildir[1]:

$$\frac{1}{j(i-j)} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{i-j} + \frac{1}{j}\right)$$

olduğundan,

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j(i-j)} = \frac{1}{i-1}\left(\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{i-j} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j}\right) \geq \frac{1}{i}(1+1) = \frac{2}{i} > \frac{1}{i}$$

olur. Ama $\sum_{i=1}^{n} 1/i$ dizisinin üstten sınırlı olmadığını biliyoruz (Bölüm 7.2). Demek ki terimleri $\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j(i-j)}$ olan seri sonsuza ıraksar.

15.2. *$(x_n)_n$ sonsuza ıraksayan artan bir dizi olsun. Eğer $q > 0$ bir kesirli sayı ise*

$$\sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}}$$

serisi yakınsaktır. Eğer $q \leq 0$ ise seri ıraksaktır.

Kanıt: $q = 0$ durumunu Örnek 14.30'da irdelemiştik. Bundan $q \leq 0$ durumu da çıkar çünkü eğer $x_i > 1$ ise,

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}} \geq \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}$$

olur.

Şimdi $q = 1$ olsun. O zaman, teleskopik seri elde ederiz:

$$\sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}} = \sum \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i x_{i+1}} = \sum \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{x_0},$$

ve seri yakınsar. Buradan kolaylıkla serinin $q \geq 1$ için de yakınsadığı görülür.

Son olarak $0 < q < 1$ olsun. Sonuç 3.20'de $x = x_i/x_{i+1}$ alırsak,

$$1 - \frac{x_i}{x_{i+1}} \leq \frac{1}{q}\left(1 - \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^q\right)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin taraflarını x_i^q sayısına bölersek,

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i^q x_{i+1}} \leq \frac{1}{q}\left(\frac{1}{x_i^q} - \frac{1}{x_{i+1}^q}\right)$$

buluruz. Terimleri sağdaki ifade olan seri teleskopik seridir ve yakınsar. Demek ki terimleri soldaki ifade olan seri de yakınsar. □

15.3. [du Bois-Reymond] *Yakınsak her $\sum a_i$ pozitif serisi için,* $\lim b_n/a_n = \infty$ *eşitliğini sağlayan yakınsak bir $\sum b_i$ serisi vardır.*

Kanıt: Her i için $a_i > 0$ varsayımını yapabiliriz. $s_n = a_0 + \cdots + a_n$, $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ ve

$$u_n = \frac{1}{s - s_{n-1}} = \frac{1}{\sum_{i=n}^{\infty} a_i}$$

olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ olur. Bir $q > 0$ kesirli sayısı seçelim.

$$b_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^q u_{n+1}}$$

[1] Yusuf Ünlü'ye ve İlham Aliyev'e teşekkürler.

olsun. Örnek 15.2'ye göre $\sum b_i$ yakınsaktır. Ayrıca

$$b_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^q u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^q} - \frac{1}{u_n^{q-1} u_{n+1}} = (s - s_{n-1})^q - (s - s_{n-1})^{q-1}(s - s_n)$$
$$= (s - s_{n-1})^{q-1}(s_n - s_{n-1}) = u_n^{1-q} a_n$$

olduğundan, eğer $q < 1$ ise

$$\frac{b_n}{a_n} = u_n^{1-q} \longrightarrow \infty$$

olur. □

Alıştırmalar

15.4. Teorem 15.2'yi kullanarak $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ pozitif yakınsak serilerse, $\sum(x_i + y_i)$ serisinin de yakınsak olduğunu kanıtlayın. (Bir sonraki alıştırmaya da bakın mutlaka.)

15.5. Serinin yakınsaklığının tanımını kullanarak, $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri yakınsaksa, $\sum(x_i+y_i)$ ve $\sum rx_i$ serilerinin de yakınsak olduğunu ve $\sum(x_i+y_i) = \sum x_i+\sum y_i$ ve $\sum rx_i = r\sum x_i$ eşitliklerini kanıtlayın.

Teorem 14.13 ve 14.14'e göre pozitif bir serinin terimlerini istediğimiz sırada ve istediğimiz gibi gruplayarak toplayabiliriz. Bu da serinin yakınsaklığına karar vermede hatırı sayılır bir kolaylık sağlar. Hatta bu durumda seriyi yazmak da kolaylaşır: Eğer $X \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ sayılabilir bir kümeyse, $\sum_{x\in X} x$ anlamlıdır; nitekim X'i nasıl iyisıralarsak sıralayalım, diyelim

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\},$$

olarak iyisıraladık, o zaman, Teorem 14.13'e göre, $\sum_n x_n$ serisinin değeri (bir gerçel sayı ya da ∞), X'in seçilen iyisıralamasından bağımsızdır. Dolayısıyla bu seriyi $\sum_{x\in X} x$ ya da $\sum_X x$ hatta $\sum X$ olarak tanımlayabiliriz. Hatta eğer $0 \notin X$ ise $\sum_{x\in X} 1/x$ ifadesi de anlamlıdır. İşte bir örnek:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{1}{n}.$$

Bir başka örnek: Eğer P asal sayılar kümesiyse,

$$\sum_P \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots .$$

Ve son örnek: Eğer K, doğal sayılarda pozitif karelerin kümesiyse,

$$\sum_K \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

anlamına gelir.

Altbölüm 7.2'de $\sum_{n\geq 1} 1/n$ serisinin toplamının sonsuza ıraksadığını gördük. Peki tüm n'leri değil de bazı n'lerin terslerini toplarsak ne olur? Örneğin

P asal sayılar kümesi olmak üzere $\sum_P \frac{1}{p}$ serisi yakınsak mıdır, yoksa ıraksak mıdır? $\sum_{n\geq 1} 1/n = \infty$ olduğundan, hislerimiz, eğer "çok" asal varsa seri sonsuza ıraksamalı ama "az" asal varsa seri yakınsamalı diyor. Bu durumda seri gerçekten sonsuza ıraksar (bkz. [T3]) ama bunun kanıtı kolay değildir[2]. Aşağıda bu minvalde bir soru ve şık çözümünü bulacaksınız.

Örnek 15.6. B, onluk tabanda yazıldığında içinde 0 rakamı belirmeyen doğal sayılar kümesi olsun.

$$\sum_{n\in B} \frac{1}{n}$$

serisinin yakınsaklığını inceleyelim.

Önce hislerimizi konuşturalım. B kümesinde doğal sayıların birçoğu var mıdır, yoksa tam tersine B kümesinde az mı sayı vardır? n basamaklı bir doğal sayıda 0 belirmeme olasılığı, n çok büyük olduğunda çok küçüktür. (1 milyar defa zar attığınızda, en az bir defa şeş geleceğinden emin olmalısınız. Neredeyse...) Dolayısıyla B kümesinde az sayı olduğu ve serinin yakınsak olması gerektiği söylenebilir. Göreceğiz...

$$\alpha = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{9}$$

olsun.

$$G_k = \sum_{n\in B, n<10^k} \frac{1}{n}$$

olsun. Bulmak istediğimiz elbette $\lim_{k\to\infty} G_k$ limitidir. Her k için $G_k < 10\alpha$ eşitsizliğini kanıtlayacağız ve böylece serinin yakınsak olduğunu kanıtlamış olacağız. $k = 1$ için $G_k = G_1 = \alpha < 10\alpha$ olduğundan eşitsizlik doğru. Şimdi eşitsizliğin k için doğru olduğunu varsayıp $k+1$ için kanıtlayalım. $1, \ldots, 9$ sayılarını muaf tutarak B'deki n sayılarının son hanelerini 0'a dönüştürelim ve böylece elde edilen sayıyı n' olarak gösterelim. Elbette n' sayısı 10'a bölünür ve $n'' = n'/10 \in B$ olur. Ayrıca elbette $10n'' = n' < n \leq n' + 9 = 10n'' + 9$ olur; dolayısıyla tam 9 tane $n \in B$ sayısı aynı $n'' \in B$ sayısını verir. Şimdi hesap yapalım (aşağıdaki toplamlarda doğal sayıların istisnasız hep B kümesinden alındığını varsayacağız, yani 1/1205 gibi sayılar belirmeyecek):

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= \sum_{n<10^{k+1}} \frac{1}{n} = \alpha + \sum_{10<n<10^{k+1}} \frac{1}{n} \\ &< \alpha + \sum_{10<n<10^{k+1}} \frac{1}{n'} = \alpha + \frac{1}{10} \sum_{10<n<10^{k+1}} \frac{1}{n''} \\ &= \alpha + \frac{9}{10} \sum_{n''<10^k} \frac{1}{n''} = \alpha + \frac{9G_k}{10} < \alpha + 9\alpha = 10\alpha. \end{aligned}$$

Demek ki seri 10α'dan daha küçük bir sayıya yakınsar.

Alıştırma 15.7. C, içinde 1 rakamı bulunmayan pozitif doğal sayılar kümesi olsun. $\sum_{n\in C} \frac{1}{n}$ serisi yakınsak mıdır ve yakınsaksa Örnek 15.6'da verilen $\sum_{n\in B} 1/n$ serisinden küçük müdür?

[2]Bugün artık kanıtı bilinen Bertrand Postulatı'na göre her $n > 1$ doğal sayısı için n ile $2n$ arasında bir asal vardır. Bu serinin sonsuza ıraksadığı Bertrand Postulatı'ndan çıkar. İkinci cildin ek bölümlerinden birinde bu serinin sonsuza ıraksadığı kanıtlanacak.

15.2 Kıyaslama Teoremleri

Aşağıdaki yakınsaklık kıstasının çok sık uygulaması vardır:

Teorem 15.4 (Karşılaştırma/Kıyaslama Kıstası). *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ iki pozitif seri olsun. Eğer yeterince büyük i'ler için $x_i \leq y_i$ oluyorsa, o zaman,*

i. *Eğer $\sum y_i$ serisi yakınsaksa $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır.*

ii. *Eğer $\sum x_i$ serisi ıraksaksa $\sum y_i$ serisi de ıraksaktır.*

Kanıt: İlk birkaç terimi yok sayarak, $x_i \leq y_i$ eşitsizliğinin her i için vuku bulduğunu varsayabiliriz.

i. Teorem 15.2'ye göre

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \leq \sum_{i=0}^{n} y_i \leq \sum y_i$$

eşitsizliklerinden dolayı, $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamlar dizisi, $\sum y_i$ serisi tarafından üstten sınırlanır. Gene Teorem 15.2'ye göre $\sum x_i$ serisi yakınsar ve $\sum x_i \leq \sum y_i$ olur.

ii. Birinci kısımdan çıkar. □

Örnekler

15.8.

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} + \frac{1}{13\times 15} + \cdots$$

serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Çözüm: Seri

$$\sum \frac{1}{(4i+1)(4i+3)}$$

olarak yazılabilir. Ama

$$\frac{1}{(4i+1)(4i+3)} < \frac{1}{(4i+1)^2}$$

olduğundan ve sağdaki terimlerden oluşan seri yakınsadığından, Teorem 15.4'e göre sorudaki seri de yakınsar[3].

15.9. $\sum_{i\geq 1} r^i/i$ *serisi* $-1 < r < 1$ *için mutlak yakınsaktır,* $r \geq 1$ *için sonsuza ıraksaktır.*

Kanıt: $0 \leq r < 1$ için, $r^i/i \leq r^i$ ve bu durumda $\sum_{i\geq 1} r^i$ yakınsak olduğundan, Teorem 15.4'e göre $\sum_{i\geq 1} r^i/i$ serisi de yakınsaktır.

$r \geq 1$ için, $r^i/i \geq 1/i$ olduğundan ve $\sum_{i\geq 1} 1/i$ ıraksak olduğundan, Teorem 15.4'e göre $\sum_{i\geq 1} r^i/i$ serisi de ıraksaktır.

15.10. $\sum_{i=-2}^{\infty} \frac{2i}{3i^3+4}$ *serisi yakınsaktır.*

Kanıt: Bu seri pozitif değildir, ama sadece ilk üç terimi pozitif değildir ve böylece Karşılaştırma Kıstası'nı uygulayabiliriz.

$$\frac{2i}{3i^3+4} \leq \frac{3i}{3i^3} = \frac{1}{i^2}$$

---

[3] Sorudaki serinin $\pi/8$'e yakınsadığı bilinmektedir. Bir başka kitabımızda kanıtlarız.

olduğundan ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

yakınsak olduğundan Teorem 15.4'e göre seri yakınsaktır.

15.11. $\sum_{i>1} \frac{1}{\sqrt{i^2-1}}$ serisi ıraksaktır çünkü $i^2 - 1 \leq i^2$ ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\sqrt{i^2-1}} > \frac{1}{i}$$

olur.

15.12. $\sum \frac{1}{\sqrt{i^2+1}}$ serisi ıraksaktır çünkü $i > 0$ için

$$\frac{1}{\sqrt{1+i^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{i^2+i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{i}$$

olur ve $\sum 1/i$ serisi ıraksaktır.

Alıştırma 15.13. $r < -1$ için $\sum_{i \geq 1} r^i/i$ serisinin ıraksadığını kanıtlayın. (Ama seri $-\infty$'a ıraksamaz.)

Şimdi pozitif seriler üzerine hayatı kolaylaştıran birkaç kolay sonuç kanıtlayalım.

Sonuç 15.5. $\sum x_i$ *ve* $\sum y_i$ *iki pozitif seri olsun.*
i. $\limsup x_i y_i \neq \infty$ *olsun. Eğer* $\sum 1/y_i$ *yakınsaksa* $\sum x_i$ *de yakınsaktır. Eğer* $\sum x_i$ *ıraksaksa* $\sum 1/y_i$ *de ıraksaktır.*
ii. *Eğer* $\liminf x_i y_i \neq 0$ *ve* $\sum 1/y_i$ *ıraksaksa* $\sum x_i$ *de ıraksaktır.*

Kanıt: i. $\limsup x_i y_i \neq \infty$ olduğundan $(x_i y_i)_i$ dizisi üstten sınırlıdır. Demek ki öyle bir $A > 0$ vardır ki her i göstergeci için $x_i y_i \leq A$ olur. Demek ki $\sum x_i \leq A \sum 1/y_i$ olur. Sonuç bundan ve Teorem 15.4'ten çıkar.

ii. $\liminf x_i y_i \neq 0$ olduğundan $\liminf x_i y_i > 0$ olur. Demek ki öyle bir A vardır ki her i göstergeci için $A \leq x_i y_i$ olur. Demek ki $\sum x_i \geq A \sum 1/y_i = \infty$ olur. □

Buna benzer bir sonuç için bkz. Teorem 15.7.

Sonuç 15.6 (Oran Kıyaslama Testi)**.** $\sum x_i$ *ve* $\sum y_i$ *iki pozitif seri olsun. Bir zaman sonra*

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq \frac{y_{i+1}}{y_i}$$

olsun.
i. *Eğer* $\sum y_i$ *yakınsaksa* $\sum x_i$ *de yakınsaktır.*
ii. *Eğer* $\sum x_i$ *ıraksaksa* $\sum y_i$ *de ıraksaktır.*

Kanıt: Eşitsizlik, $N - 1$ göstergecinden doğru olsun ve $b = y_N/x_N$ olsun. Varsayımdan dolayı, her $i \geq N$ için,

$$\frac{x_i}{y_i} \leq \frac{x_N}{y_N} = b,$$

yani $x_i \leq by_i$ olur.

i. Eğer $\sum y_i$ yakınsaksa o zaman $\sum by_i$ serisi de yakınsaktır. Sonuç, $x_i \le by_i$ eşitsizliğinden ve Teorem 15.4'ten çıkar.

ii. Eğer $\sum x_i$ ıraksaksa, $x_i \le by_i$ eşitsizliğinden ve Teorem 15.4'ten, $\sum by_i$ serisinin de ∞'a ıraksadığı çıkar. Demek ki $\sum y_i$ serisi de ∞'a ıraksar. □

Örnekler

15.14. Sonuç 15.5.i'deki koşul yeterlidir ama gerekli değildir. Örneğin $x_i = 1/2^i$ ve $y_i = i!$ olsun. O zaman $\sum 1/y_i$ yakınsaktır ve $\limsup x_i y_i = \limsup i!/2^i = \lim i!/2^i = \infty$ olur (Örnek 6.1) ama gene de $\sum x_i$ yakınsar.

15.15. Eğer i bir kare değilse $x_i = 1/i^2$ olsun, eğer i bir kareyse, $x_i = 1/i^{2/3}$ olsun. Ve $y_i = i$ olsun. Bu durumda $\sum 1/y_i$ ıraksaktır ve $\limsup x_i y_i = \infty$ olur ama Örnek 19.5'te göreceğimiz üzere $\sum x_i$ serisi yakınsar. (Bu arada $\liminf x_i y_i = 0$ eşitliğine dikkat çekelim.)

Sonuç 15.5.ii için de gerekliliğin geçerli olmadığını göstermeyi okura bırakıyoruz.

15.16. $\sum(i^{1/i} - 1)$ *serisi yakınsak mıdır?*

Yanıt: Örnek 10.17'ye göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n} - 1}{1/n} = \infty$$

olur. Demek ki bir $A > 0$ için, mesela $A = 1$ için,

$$n^{1/n} - 1 > A\frac{1}{n}$$

olur. $\sum 1/i$ sonsuza ıraksadığından, $\sum(i^{1/i} - 1)$ serisi de sonsuza ıraksar. □

Teorem 15.7 (Kummer Kıstası, 1837)**.** *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ iki pozitif seri olsun. Eğer* $\lim_{i\to\infty} x_i/y_i = \ell \neq 0, \infty$ *ise, serilerden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır. Ayrıca*

$$\sum y_i = \frac{1}{\ell}\left(\sum x_i - \sum\left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right)x_i\right)$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: $\ell > 0$ olmak zorunda. ϵ'u, $\ell - \epsilon > 0$ olacak biçimde seçelim, mesela $\epsilon = \ell/2$ olabilir. $a = \ell - \epsilon$ olsun. Öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$a = \ell - \epsilon \le \frac{x_i}{y_i} \le \ell + \epsilon,$$

ve dolayısıyla $ay_i \le x_i$ olur. Eğer $\sum x_i$ serisi yakınsaksa ya da $\sum y_i$ serisi ıraksaksa, sonuç Teorem 15.4'ten çıkar. Eğer $\sum y_i$ serisi yakınsaksa ya da $\sum x_i$ serisi ıraksaksa, aynı kanıt ℓ yerine $1/\ell$ ile yapılır. Böylece birinci kısım kanıtlandı. Aynı şeyi ve daha fazlasını şöyle de kanıtlayabiliriz:

$\sum x_i$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım (mesela!) O zaman,

$$\sum x_i = \sum\left(\ell y_i + \left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right)x_i\right) = \ell\sum y_i + \sum\left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right)x_i$$

olur. Ama
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ell\, y_i}{x_i} = 1$$
olduğundan, bir zaman sonra
$$\left|1 - \frac{\ell y_i}{x_i}\right| < 1$$
olur ve en sağdaki serinin terimleri x_i'den küçük olurlar ve böylece Teorem 15.4'e göre, en sağdaki
$$\sum \left(1 - \ell \frac{y_i}{x_i}\right) x_i$$
serisi mutlak yakınsak olur. Demek ki,
$$\sum y_i = \frac{1}{\ell}\left(\sum x_i - \sum \left(1 - \ell\frac{y_i}{x_i}\right) x_i\right).$$
İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Bu teorem şiirsel bir dilde şunu söylüyor: Eğer $(x_i)_i$ ve $(y_i)_i$ dizileri "sonsuza doğru eşdeğerlerse", yani $(x_i/y_i)_i$ dizisinin limiti varsa ve bu limit 0 (ya da ∞) değilse, o zaman $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ pozitif serilerinin "doğaları" aynıdır.

Örnekler

15.17. $x_i = \frac{1}{i(i+1)}$ ve $y_i = \frac{1}{i^2}$ olsun. O zaman $\ell = \lim_{i\to\infty} x_i/y_i = 1$ olur ve teoremdeki formül,
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} - \sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{i+1}{i}\right)\frac{1}{i(i+1)}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2(i+1)}\right) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2(i+1)}\end{aligned}$$
eşitliğini verir. Bu eşitlikten de,
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} - 1$$
eşitliği elde edilir. Eğer sağdaki toplamın $\frac{\pi^2}{6} - 1$ olduğu biliniyorsa, bu bize daha fazla bilgi verir elbette.

15.18. $\sum \frac{2i}{3i^3-4}$ *serisi yakınsaktır.*
Kanıt: $\sum_{i\geq 1} 1/i^2$ yakınsak olduğundan, Teorem 15.7'den çıkar. □

15.19. $\sum \frac{2^i+3^{i+1}}{i^2+7^{2i+1}}$ *serisi yakınsaktır.*
Kanıt:
$$\frac{2^i+3^{i+1}}{i^2+7^{2i+1}} < \frac{2^i+3^{i+1}}{7^{i+1}} = \frac{2^i}{7^{i+1}} + \frac{3^{i+1}}{7^{i+1}} < \frac{2^i}{7^i} + \frac{3^{i+1}}{7^{i+1}}$$
olduğundan ve $\sum(2/7)^i$ ve $\sum(3/7)^i$ geometrik serisi yakınsak olduğundan seri yakınsaktır. □

15.20. *$\sum x_i$ pozitif ve yakınsak bir seriyse $\sum \sqrt{x_i x_{i+1}}$ serisi de yakınsaktır.*
Kanıt: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ eşitsizliğinden çıkar. □

15.21. *$0 < q < p$ iki kesirli sayı olsun.*

$$\sum_{n>1} \frac{1}{n^p - n^q}$$

serisinin yakınsaklığını tartışın.
Tartışma: $\frac{n^p - n^q}{n^p} = 1 - 1/n^{p-q} \longrightarrow 1$ olduğundan, teoreme göre, eğer $p \ge 2$ ise seri yakınsar ve eğer $p \le 1$ ise seri ıraksar. Diğer durumlar için bkz. Örnek 19.10. □

15.22. *$\sum_{i>0} \frac{1}{i^{1+1/i}}$ serisi yakınsar mı?*
Yanıt: Yakınsamaz. Bunu görmek için seriyi ıraksak olduğunu bildiğimiz $\sum_{i>0} \frac{1}{i}$ serisiyle kıyaslamak yeterli:

$$\frac{1/i}{1/i^{1+1/i}} = \frac{i^{1+1/i}}{i} = i^{1/i} \longrightarrow 1$$

olduğundan, Teorem 15.7'ye göre seri ıraksar. □

Alıştırmalar

15.23. $\sum x_i$ pozitif ve yakınsak bir seriyse $\sum_{i>0} \frac{x_i}{i}$ serisinin de yakınsak olduğunu kanıtlayın.

15.24. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadıklarını belirleyin.

$$\sum \frac{1}{i^2+3} \qquad \sum \frac{1}{i^2-101} \qquad \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(2i+1)^2}{[i^2(i+1)]}$$

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{2i+1}{i^2(i+1)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2+i+1}{i(i+1)!} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3+i+1}{i+2}$$

$$\sum \frac{5^{i+1}+3i}{7^i+2} \qquad \sum \frac{5^i+3^i}{6^i} \qquad \sum \frac{4^{2i-1}}{3^{3i+1}}$$

15.25. $\sum \frac{4^{2i-1}}{3^{3i+1}}$ serisinin toplamını bulun.

15.26. Her $k \ge 1$ doğal sayısı için,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)\cdots(i+k)}$$

toplamını bulun.

15.27. $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ olsun. $\sum_{n\ge1} 1/H_n$ serisinin ıraksadığını kanıtlayın.

15.3 Mutlak Yakınsaklık

Pozitif serilerin önemi aşağıdaki teoremle daha da belirginleşecek.

Teorem 15.8 (Cauchy)**.** *Eğer $\sum |x_i|$ serisi yakınsaksa $\sum x_i$ serisi de yakınsaktır ve $-\sum |x_i| \le \sum x_i \le \sum |x_i|$ olur, yani*

$$\left|\sum x_i\right| \le \sum |x_i|$$

olur.

Kanıt: Toplamlar arasında bir ilişki olmadığından, $\sum |x_i|$ serisinin kısmi toplamları dizisinin Cauchy olduğunu kullanabiliriz ancak; bunu kullanarak $\sum x_i$ serisinin kısmi toplamları dizisinin de Cauchy olduğunu kanıtlayacağız. $\epsilon > 0$, herhangi bir gerçel sayı olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{m} x_i\right| < \epsilon$$

yani,

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right| < \epsilon \tag{1}$$

olsun. Ama

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |x_i|$$

olduğundan, her $n > m > N$ için,

$$\sum_{i=m+1}^{n} |x_i| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N bulmak yeterli, çünkü o zaman (1) elbette sağlanır. Ama $\sum |x_i|$ serisi yakınsak olduğundan, böyle bir N vardır (Teorem 14.3).

Toplamlar arasındaki eşitsizlik bariz olmalı çünkü benzer eşitsizlik kısmi toplamlar arasında vardır. □

Teorem 15.8'in İkinci (Zeki) Kanıtı: $0 \leq x_i + |x_i| \leq 2|x_i|$ eşitsizliklerinden, $\sum 2|x_i|$ serisi yakınsak olduğundan (bkz. Alıştırma 15.4 ya da 15.5), Teorem 15.4'e göre $\sum (x_i + |x_i|)$ pozitif serisi de yakınsaktır. Öte yandan

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (x_i + |x_i|) - \sum_{i=0}^{n} |x_i|$$

olduğundan,

$$\sum x_i = \sum (x_i + |x_i|) - \sum |x_i|$$

olur. □

Bu teoremin tersi doğru değildir, yani $\sum x_i$ serisi yakınsak olsa da

$$\sum |x_i|$$

serisi ıraksayabilir. En standart karşıörnek,

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$$

serisidir. Bu serinin yakınsak olduğunu Altbölüm 17.1'de göreceğiz ama

$$\sum \left|\frac{(-1)^i}{i+1}\right|,$$

yani

$$\sum \frac{1}{i+1}$$

serisinin ıraksak olduğunu biliyoruz (Altbölüm 7.2).

Eğer $\sum |x_i|$ serisi yakınsıyorsa, $\sum x_i$ serisine ***mutlak yakınsak*** denir. Yukarıdaki teoreme göre, mutlak yakınsak bir seri yakınsaktır. $\sum_{i\geq 1}(-1)^i/i$ serisi gibi yakınsak olan ama mutlak yakınsak olmayan serilere ***koşullu yakınsak seri*** denir. Koşullu yakınsak serilerin analizi mutlak yakınsak serilerin analizinden daha zordur.

Örnekler

15.28. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2}$ serisi mutlak yakınsaktır.

15.29. (Trigonometrik Fonksiyonlar.) Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \text{ ve } \sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

serileri mutlak yakınsaktırlar. Nitekim,

$$\sum \left|(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}\right| = \sum \frac{|x|^{2i}}{(2i)!} \leq \sum \frac{|x|^i}{i!} = \exp|x|$$

olur ve Teorem 15.1'e göre $\cos x$ serisi mutlak yakınsar. Bu arada, çok daha iyisini kanıtlayacağımız $|\cos x| \leq \exp|x|$ eşitsizliğine dikkatinizi çekerim. $\sin x$ için kanıt benzerdir. Bunlar gerçekten lise yıllarından âşina olduğumuz sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıdır. Bu kitapta, her ciddi matematik kitabında olduğu gibi, böyle tanımlanacaklar. Bir sonraki ciltte sin ve cos fonksiyonları üzerine çok daha fazla şey kanıtlayacağız.

15.30. exp fonksiyonunun serisi mutlak yakınsaktır. Bariz.

Bu örneklerde olduğu gibi, mutlak yakınsak bir seri yardımıyla tanımlanmış fonksiyonların çok hoş özellikleri vardır ve diğer fonksiyonlara göre daha hoş davranırlar. Bir sonraki ciltte mutlak yakınsaklıktan çok yararlanacağız.

Teorem 14.13'e göre mutlak yakınsak bir serinin terimlerini kararsak gene mutlak yakınsak (dolayısıyla yakınsak) bir seri elde ederiz. Şimdi Teorem 14.13'ü genelleştirerek terimleri karılmış iki mutlak yakınsak serinin aynı sayıya yakınsadığını göstereceğiz:

Teorem 15.9. *$\sum x_i$, mutlak yakınsak bir seri olsun. σ, $\mathbb{N}$'nin bir eşleşmesi olsun. O zaman, eğer $\sum x_i$ ve $\sum x_{\sigma(i)}$ serilerinden biri yakınsıyorsa diğeri de yakınsar ve yakınsadıklarında aynı sayıya yakınsarlar.*

Kanıt: $\sum x_i$ serisinin s'ye yakınsadığını varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. Seri mutlak yakınsak olduğundan, öyle bir M_1 vardır ki, her $n > M_1$ için

$$\sum_{i>n} |x_i| < \epsilon/2$$

olur. Ayrıca, seri s'ye yakınsadığından, öyle bir M_2 vardır ki, her $n > M_2$ için,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} x_i - s\right| \leq \epsilon/2$$

olur.

$$M = \max\{M_1,\, M_2\}$$

ve

$$N = \max\{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(M)\}$$

olsun. σ bir eşleme olduğundan, $N \geq M$ olur. Herhangi bir $n > N \geq M$ sayısı alalım ve

$$\begin{aligned}
&A = \{\sigma^{-1}(0), \sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(M)\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n\},\\
&B = \{0, 1, \ldots, n\} \setminus A,\\
&u = \min \sigma(B) = \min(\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \ldots, M\}) > M,\\
&v = \max \sigma(B) = \max(\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} \setminus \{1, \ldots, M\}) \geq u
\end{aligned}$$

tanımlarını yapıp hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} - s\right| &= \left|\sum_{i\in A} x_{\sigma(i)} - s + \sum_{i\in B} x_{\sigma(i)}\right| \leq \left|\sum_{i\in A} x_{\sigma(i)} - s\right| + \left|\sum_{i\in B} x_{\sigma(i)}\right|\\
&\leq \left|\sum_{i\in A} x_{\sigma(i)} - s\right| + \sum_{i\in B} |x_{\sigma(i)}| \leq \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{i\in B} |x_{\sigma(i)}|\\
&= \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{j\in\sigma(B)} |x_j| \leq \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{j=u}^{v} |x_j|\\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{M} x_j - s\right| + \sum_{j=M+1}^{v} |x_j| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

Demek ki $\sum x_{\sigma(i)} = s$ olur. □

Son olarak Teorem 14.14'ü genelleştirelim:

Teorem 15.10. *$\sum_{i\geq 0} x_i$ bir seri ve*

$$\mathbb{N} = A_0 \sqcup A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots$$

$\mathbb{N}$'nin herhangi bir parçalanışı olsun.
i. *Eğer $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaksa, her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi de mutlak yakınsaktır. Ayrıca, eğer $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yaparsak, $\sum y_j$ serisi de mutlak yakınsaktır ve bu seri $\sum x_i$ toplamına eşittir.*
ii. *Her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisi mutlak yakınsak olsun. $y_j = \sum_{i\in A_j} x_i$ tanımını yapalım. Eğer $\sum y_j$ serisi de mutlak yakınsaksa o zaman $\sum x_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve $\sum y_j = \sum x_i$ olur.*

Kanıt: i. Her j için $\sum_{i\in A_j} x_i$ serisinin mutlak yakınsak olduğu bariz çünkü ne de olsa $\sum_{i\in A_j} |x_i|$ serisinin kısmi toplamları $\sum |x_i|$ sayısından küçükeşittir. $\sum y_j$ serisinin mutlak yakınsaklığı da Teorem 14.14'ten çıkıyor.

Şimdi $\sum y_j = \sum x_i$ eşitliğini gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N_1 seçelim ki, her $n > N_1$ için,

$$\sum |x_i| - \sum_{i=0}^{n} |x_i| = \sum_{i>n} |x_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

olsun. Buradan,

$$\sum_{i>n} x_i < \frac{\epsilon}{2}$$

çıkar.

Öyle bir N_2 seçelim ki,

$$\{0, 1, \ldots, N_1\} \subseteq A_0 \cup \ldots \cup A_{N_2}$$

olsun. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$y_0 + \cdots + y_n - \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i\in A_0} x_i + \cdots + \sum_{i\in A_n} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i$$

ifadesinde $x_0, \ldots, x_N$ terimleri sadeleşir ve dolayısıyla serilerdeki üçgen eşitsizliğinden

$$\left| y_0 + \cdots + y_n - \sum_{i=0}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i>N} |x_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliği çıkar. Demek ki,

$$\begin{array}{rcl} |y_0 + \cdots + y_n - \sum x_i| & \leq & |y_0 + \cdots + y_n - \sum_{i=0}^{n} x_i| + |\sum_{i=0}^{n} x_i - \sum x_i| \\ & < & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{array}$$

olur. (i) kanıtlanmıştır.

ii. $\sum x_i$ serisinin mutlak yakınsaklığı Teorem 14.14'ten çıkar. Şimdi (i)'i uygulayıp kanıtı bitirebiliriz. $\square$

16. Serilerle İşlemler

Serilerle toplama ve çıkarma yapabiliriz. Çarpma da yapılır ama çarpma işleminin tanımlanması toplama ve çıkarma kadar kolay değildir. Önce toplama ve çıkarmayla başlayalım, ardından çarpmaya el atacağız. Bu arada, biraz daha zor olan çarpma bölümünün hayatı çok kolaylaştırdığını, geçmişte kanıtladığımız

$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$$

gibi eşitlikleri kanıtladığı gibi birçok trigonometrik eşitliği de bir çırpıda kanıtladığını söyleyelim. Yani Cauchy çarpımı bölümü ciddiyetle ve dikkatle okunmalıdır.

16.1 Toplama, Çıkarma ve Bir Sayıyla Çarpma

Kolay olan işlemle başlayalım: Toplama.

Teorem 16.1. *Eğer $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri yakınsaksa, o zaman, $\sum(x_i+y_i)$ serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum(x_i+y_i) = \sum x_i + \sum y_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Kanıt çok kolay:

$$\begin{aligned}\sum(x_i+y_i) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(x_i+y_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i+\sum_{i=0}^{n}y_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}y_i = \sum x_i + \sum y_i.\end{aligned}$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Aynı teorem $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri $\pm\infty$'a ıraksadıklarında da doğrudur, yeter ki biri ∞ diğeri $-\infty$ olmasın:

Teorem 16.2. *Eğer* $\sum x_i$ *ve* $\sum y_i$ *serileri* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alıyorlarsa ve* $\overline{\mathbb{R}}$*'de* $\sum x_i + \sum y_i$ *toplamı tanımlıysa, o zaman,* $\sum(x_i + y_i)$ *serisi de* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alır ve*

$$\sum(x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$$

eşitliği geçerli olur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Alıştırma 16.1. Eğer $\sum x_i$ serisi $\pm\infty$'a yakınsıyorsa ve $\sum y_i$ serisinin kısmi toplamları (alttan/üstten) sınırlıysa, o zaman $\sum(x_i + y_i)$ serisinin de $\pm\infty$'a yakınsadığını kanıtlayın.

Teorem 16.3. *Eğer* $\sum x_i$ *serisi yakınsaksa ve* $r \in \mathbb{R}$ *ise, o zaman,* $\sum rx_i$ *serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum rx_i = r \sum x_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt:

$$\sum rx_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} rx_i = \lim_{n\to\infty} \left(r \sum_{i=0}^{n} x_i \right) = r \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i = r \sum x_i$$

eşitliklerinden hemen çıkar. □

Aynı sonuç $\sum x_i$ serisi $\pm\infty$'a ıraksadığında da doğrudur:

Teorem 16.4. *Eğer* $\sum x_i$ *serisi* $\overline{\mathbb{R}}$ *kümesinde değer alıyorsa ve* $r \in \mathbb{R}$ *ise, o zaman,* $\sum rx_i$ *serisi de* $\overline{\mathbb{R}}$ *kümesinde değer alır ve* $\sum rx_i = r \sum x_i$ *eşitliği geçerli olur.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Sonuç 16.5. *Eğer* $\sum x_i$ *ve* $\sum y_i$ *serileri* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alıyorlarsa ve* $\overline{\mathbb{R}}$*'de*

$$\sum x_i - \sum y_i$$

toplamı tanımlıysa, o zaman, $\sum(x_i - y_i)$ *serisi de* $\overline{\mathbb{R}}$*'de değer alır ve*

$$\sum(x_i - y_i) = \sum x_i - \sum y_i$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Teorem 16.2 ve Teorem 16.4'ten çıkar. □

Bunlar kolaydı. Çok daha güçlü bir sonuca geçiyoruz.

16.2 Cauchy Çarpımı

Serilerde çarpmayı tanımlamak biraz daha zordur. İlk akla gelen

$$\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) = \sum x_i y_i$$

tanımında iş yoktur, hem de hiç iş yoktur, hiçbir işe yaramaz. Çarpmanın tanımı için biraz daha düşünmeliyiz. $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin n-inci kısmi toplamlarını çarpalım:

$$\begin{aligned}
&(x_0)(y_0) = x_0y_0\\
&(x_0+x_1)(y_0+y_1) = x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + x_1y_1\\
&(x_0+x_1+x_2)(y_0+y_1+y_2) = x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0) + (x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0)\\
&\qquad\qquad + (x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2\\
&(x_0+x_1+x_2+x_3)(y_0+y_1+y_2+y_3) = x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0)\\
&\qquad\qquad + (x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0) + (x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0)\\
&\qquad\qquad + (x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2) + x_3y_3
\end{aligned}$$

Yukarıda, çarpımdaki x_iy_j terimlerini $i+j$'nin değerlerine göre gruplayalım. Bir anlamda x_i, y_j ve x_iy_j terimlerine sanki sırasıyla i, j ve $i+j$'inci "dereceden" terimlermiş gibi davranalım

$i+j$'nin 0 olduğu grup, tüm kısmi çarpımlarda hep aynı kalıyor: x_0y_0.

$i+j$'nin 1 olduğu grup ikinci satırda beliriyor ve o satırdan sonra hiç değişikliğe uğramıyor: $x_0y_1 + x_1y_0$.

Öte yandan $i+j$ değerinin 2 ya da daha büyük olduğu gruplar bir süre değişiyorlar, ama bir zaman sonra da sabitleniyorlar. Örneğin $i+j$'nin 2 olduğu grup, ikinci adımda x_1y_1 olarak beliriyor, ama bir sonraki adımda

$$x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0$$

oluyor ve bundan sonra hiç değişmiyor. Ve $i+j$'nin 3 olduğu grup dördüncü adımda sabitleniyor, o adımdan sonra hep

$$(x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0)$$

oluyor.

Genel olarak, $i+j$'nin k olduğu grup $k+1$'inci adımda sabitlenecek, daha önce değil.

Anlaşılacağı üzere, $\sum x_i$ serisinin n'inci kısmi toplamıyla $\sum y_i$ serisinin m'inci kısmi toplamını çarpıp, çarpımı yukarıdaki gibi $i+j$ değerine göre gruplarsak,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} y_j\right) = \sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k\ ,\ i\le n\ ,\ j\le m} x_iy_i\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Sağ tarafta toplanan

$$\sum_{i+j=k,\, i\le n,\, j\le m} x_i y_j$$

terimleri n ve m'ye göre değişir. Ama $n \ge k$ ve $m \ge k$ ise bu terim artık değişmez, yani n ve m'yi k'dan büyükeşit alırsak değişmez. Ayrıca $i+j = k \le n$ ise, zorunlu olarak $i \le n$ olur. O halde, $k = n = m$ alarak, şu tanımı yapmak için yeterli nedenimiz var:

$$z_k = \sum_{i+j=k,\, i\le k,\, j\le k} x_i y_j = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}.$$

İşte, iki serinin Cauchy çarpımını bu z_k'lerin toplamı olarak tanımlayacağız:

$$\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right) = \sum_k z_k = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} x_i y_j\right).$$

Tanımın böyle yapılmasının nedeni aşağıdaki teoremde gizli:

Teorem 16.6 (Cauchy)**.** *$\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serileri mutlak yakınsaksa ve*

$$z_k = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}$$

olarak tanımlanmışsa, o zaman $\sum z_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve

$$\sum z_i = \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

olur.

Kanıt: Bu teoremin kanıtı, daha önceki teoremlerin kanıtından çok daha fazla dikkat ve yoğunlaşma gerektirir. Ama kanıtı muhteşem güzelliktedir.

$x_i y_j$ sayılarını bir tablo halinde yazalım:

	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y_0	x_0y_0	x_1y_0	x_2y_0	$\cdots$	x_iy_0	$\cdots$	x_ny_0
y_1	x_0y_1	x_1y_1	x_2y_1	$\cdots$	x_iy_1	$\cdots$	x_ny_1
y_2	x_0y_2	x_1y_2	x_2y_2	$\cdots$	x_iy_2	$\cdots$	x_ny_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_j	x_0y_j	x_1y_j	x_2y_j	$\cdots$	x_iy_j	$\cdots$	x_ny_j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_n	x_0y_n	x_1y_n	x_2y_n	$\cdots$	x_iy_n	$\cdots$	x_ny_n

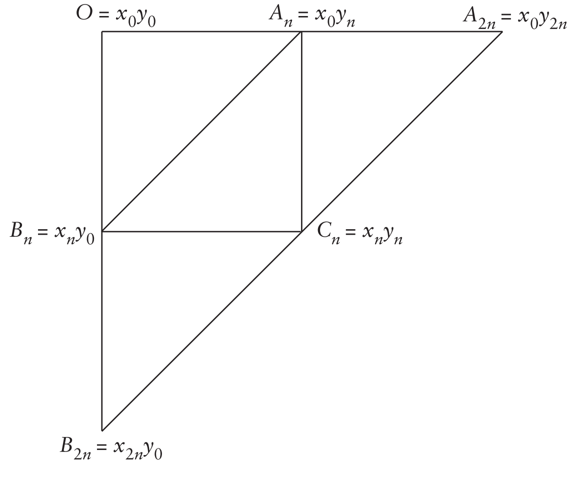
Ve

$$X_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n,$$

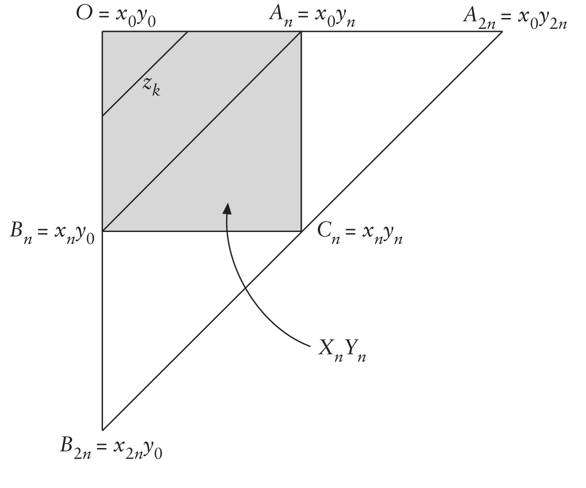
$$Y_n = y_0 + y_1 + \cdots + y_n,$$

$$Z_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n,$$

olsun. Şimdi X_nY_n çarpımını ve Z_n toplamını bir tablo üstünde temsil etmeye çalışalım.



Her z_k, yukarıdaki şekildeki k'ıncı çaprazın üstündeki sayıların toplamıdır (ve aşağıdaki şekilde gösterilmişlerdir). Örneğin, z_n, A_nB_n çaprazının üstündeki sayıların toplamıdır. Demek ki Z_n ve Z_{2n} sayıları, sırasıyla OA_nB_n ve $OA_{2n}B_{2n}$ üçgenlerinin içinde bulunan sayıların toplamıdır. Ayrıca, X_nY_n sayısı, $OA_nC_nB_n$ dörtgeninin içindeki sayıların toplamıdır.



Eğer her x_i ve $y_i \geq 0$ ise, şekilden de görüleceği üzere, her n için,

$$Z_n \leq X_n Y_n \leq Z_{2n}$$

ve dolayısıyla

$$X_n Y_n \leq Z_{2n} \leq X_{2n} Y_{2n}$$

eşitsizlikleri doğru olur. Eğer X ve Y sayıları sırasıyla $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin limitleriyse, son eşitsizlikten ve Sandviç Teoremi'nden, $(Z_n)_n$ dizisinin limitinin XY olduğu çıkar.

Şimdi, x_i ve y_i sayılarının pozitif olduklarını varsaymaktan vazgeçelim.

$$x'_i = |x_i|,\ y'_i = |x_i|$$

ve

$$z'_k = \sum_{i+j=k} x'_i y'_j = x'_k y'_0 + \cdots + x'_0 y'_k$$

olsun. Şekilden de görüleceği üzere, eğer

$$\triangle{=}\triangle_n{=} \{(i,j) : i \leq n,\ j \leq n,\ i+j > n\}$$

tanımını yaparsak,

$$X_n Y_n - Z_n = \sum_{\triangle} x_i y_j$$

eşitliği ve aynı nedenden,

$$X'_n Y'_n - Z'_n = \sum_{\triangle} x'_i y'_j$$

eşitliği geçerlidir. Demek ki,

$$|X_n Y_n - Z_n| = \left|\sum_{\triangle} x_i y_j\right| \leq \sum_{\triangle} |x_i y_j| = \sum_{\triangle} |x_i||y_j| = \sum_{\triangle} x'_i y'_j = X'_n Y'_n - Z'_n$$

olur. Ama kanıtımızın birinci kısmından yukarıdaki eşitliğin en sağdaki teriminin 0'a yakınsadığını biliyoruz. Demek ki

$$0 = \lim_{n\to\infty} (X_n Y_n - Z_n) = XY - \lim_{n\to\infty} Z_n,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = XY.$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Aynı sonucu [N4, Altbölüm 22.7]'de başka bir kanıtla kanıtlayacağız.

Bu teoremi, yakınsak olsunlar veya olmasınlar, $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin çarpımının tanımı olarak kullanabiliriz. Eğer

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}$$

ise, $\sum z_i$ serisine $\sum x_i$ ve $\sum y_i$ serilerinin ***Cauchy çarpımı*** adı verilir. Teorem 16.6'ya göre eğer

$$\sum x_i \text{ ve } \sum y_i$$

serileri mutlak yakınsaksa, Cauchy çarpımıyla limitlerin (sayısal olarak) çarpımları arasında bir fark yoktur.

Örnekler

16.2. Teorem 16.6'nın bir uygulaması olarak, $(\exp x)(\exp y) = \exp(x+y)$ eşitliğini (bir defa daha) kanıtlayalım.

Kanıt: exp serisinin mutlak yakınsak olduğunu bildiğimizden, Teorem 16.6'yı uygulayabiliriz. $x_i = x^i/i!$ ve $y_i = y^i/i!$ olsun. O zaman,

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i+j=k} \frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!} = \sum_{i+j=k} \frac{1}{k!}\frac{k!}{i!j!}x^i y^i = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i y^{k-i} = \frac{(x+y)^k}{k!}$$

olur ve Teorem 16.6'dan dolayı,

$$\exp x \exp y = \left(\sum \frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum \frac{y^i}{i!}\right) = \sum z_i = \sum \frac{(x+y)^i}{i!} = \exp(x+y)$$

elde ederiz. □

16.3. $|r| < 1$ olsun ve Cauchy çarpımında $x_i = y_i = r^i$ alalım. $\sum x_i$ mutlak yakınsak olduğundan ve $\frac{1}{1-r}$ sayısına yakınsadığından, Cauchy çarpımı da mutlak yakınsaktır. Cauchy çarpımının terimleri,

$$z_n = \sum_{i=0}^{n} r^i r^{n-i} = (n+1)r^n$$

olduğundan,

$$\sum (n+1)r^n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

olur. Ama bunu daha kolay yoldan şöyle de bulabilirdik: $\sum(n+1)r^n$ serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz. Seriyi $1-r$ ile çarparsak, kolay bir hesapla

$$\left(1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots\right)(1-r) = 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

buluruz.

16.4. Yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı yakınsak olmak zorunda değildir. Örneğin,

$$x_i = y_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}}$$

olsun. Gelecek bölümde göreceğimiz Teorem 17.1'e göre $\sum x_i = \sum y_i$ yakınsaktır. Cauchy çarpımının terimi

$$z_n = (-1)^n \left(\frac{1}{1\cdot(n+1)} + \frac{1}{2\cdot n} + \frac{1}{3\cdot(n-1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdot 1}\right)$$

olur. Ama $1 \leq i \leq n+1$ için

$$i \cdot (n+1-i) \leq (n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2$$

olduğundan

$$|z_n| \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$$

olur ve genel terimi 0'a yakınsamadığından $\sum z_i$ yakınsak olamaz.
Ancak birazdan Cauchy çarpımının yakınsak olması için iki diziden sadece birinin mutlak yakınsak olmasının yettiğini göreceğiz.

Alıştırmalar

16.5. Örnek 15.29'dan

$$\cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}\ ,\ \sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

tanımlarını anımsayalım. Teorem 16.6'yı kullanarak, her x, y gerçel sayıları için,

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \text{ ve } \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

eşitliklerini kanıtlayın. (Bkz. [N4, Teorem 9.6].)

16.6. Bir önceki alıştırmada $y = -x$ alarak her x gerçel sayısı için, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ eşitliğini kanıtlayın. Demek ki cos ve sin fonksiyonları -1 ile 1 arasında değer alırlar.

16.7. $|r| < 1$ için

$$\sum nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitliğini kanıtlayın. İpucu: Örnek 16.3.

16.8. $|r| < 1$ için Cauchy çarpım formülünü terimleri $x_i = r^i$ ve $y_i = ir^i$ olan serilere uygulayın. İpucu: Alıştırma 16.7.

Teorem 16.6'nın geçerli olması için, serilerin ikisinin birden değil, sadece birinin mutlak yakınsak olması yeterlidir:

Teorem 16.7 (Mertens). *$\sum x_i$ mutlak yakınsaksa, $\sum y_i$ yakınsaksa ve*

$$z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}$$

olarak tanımlanmışsa, o zaman $\sum z_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve

$$\sum z_i = \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

olur.

Kanıt: Teorem 16.6'nın kanıtındaki X_n, Y_n ve Z_n tanımlarını kabul edelim. Herhangi bir $\epsilon > 0$ seçelim. $|Z_n - XY|$ sayısının bir zaman sonra ϵ'dan küçük olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için, önce Z_n ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned}
Z_n &= \sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{i+j \le n} x_i y_j = \sum_{i=0}^{n} \left(x_i \sum_{j=0}^{n-i} y_j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i Y_{n-i} = \sum_{k=0}^{n} Y_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} [(Y_k - Y)x_{n-k} + Y x_{k-n}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (Y_k - Y)x_{n-k} + Y \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (Y_k - Y)x_{n-k} + Y X_n.
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$Z_n - XY = \sum_{k=0}^{n} (Y_k - Y)x_{n-k} + Y(X_n - X)$$

ve

$$|Z_n - XY| \le \sum_{k=0}^{n} |Y_k - Y||x_{n-k}| + |Y||X_n - X|.$$

Sağdaki toplamı, n'yi yeterince büyük seçerek ϵ'dan küçük yapacağız. En sağdaki $|Y||X_n - X|$ teriminde bir sorun yok. Sorun, toplanan $|Y_k - Y||x_{n-k}|$ ifadelerinde. Eğer k büyükse, $|Y_k - Y|$ küçük olur; eğer k küçükse, $n-k$ büyük olur ve o zaman da $|x_{n-k}|$ küçük olur; yani her iki durumda da $|Y_k - Y||x_{n-k}|$ ifadesi küçüktür. Bu iyi haber. Ama bu küçük ifadelerden az buz değil, tam $n+1$ tane var; her biri çok küçük de olsa, n çok büyük olduğundan, bu ifadeler toplandığında ϵ'u aşabiliriz. Bu sorunu aşmanın bir yolu var.

$\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $k > N_1$ için,

$$|Y_k - Y| < \frac{\epsilon/3}{1 + \sum |x_i|}$$

olur. $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ olduğundan, $\{|Y_n - Y| : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi üstten sınırlıdır. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğundan, öyle bir N_2 vardır ki, her $k > N_2$ için,

$$|x_k| < \frac{\epsilon}{1 + 3(N_1 + 1)\sup |Y_n - Y|}$$

olur. $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ olduğundan, öyle bir N_3 vardır ki, her $n > N_3$ için,

$$|X_n - X| < \frac{\epsilon/3}{1 + |Y|}$$

olur. Şimdi $N = N_1 + N_2 + N_3$ olsun. Her $n > N$ için,

$$\begin{aligned}
|Z_n - XY| &\leq \sum_{k=0}^{n} |Y_k - Y||x_{n-k}| + |Y||X_n - X| \\
&= \sum_{k=0}^{N_1} |Y_k - Y||x_{n-k}| + \sum_{k=N_1+1}^{n} |Y_k - Y||x_{n-k}| + |Y||X_n - X| \\
&< \sum_{k=0}^{N_1} \frac{\epsilon|Y_k - Y|}{1 + 3(N_1+1)\sup|Y_n - Y|} + \sum_{k=N_1+1}^{n} \frac{\epsilon/3}{1+\sum|x_i|}|x_{n-k}| \\
&\qquad + |Y|\frac{\epsilon/3}{1+|Y|} \\
&= \frac{(N_1+1)\epsilon|Y_k - Y|}{1 + 3(N_1+1)\sup|Y_n - Y|} + \frac{\epsilon}{3}\frac{\sum_{k=N_1+1}|x_{n-k}|}{1+\sum|x_i|} + |Y|\frac{\epsilon/3}{1+|Y|} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

eşitlik ve eşitsizliklerini elde ederiz ve böylece kanıtımız tamamlanmış olur. □

16.3 Cesàro Ortalaması ve Toplamı

Bir $(x_n)_{n\geq 1}$ dizisinin ***Cesàro ortalaması***, eğer varsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

limitidir, yani dizinin ilk n teriminin aritmetik ortalamasının limitidir. Belki beklenmedik bir şekilde, dizinin ortalamalarının limiti dizinin limitidir. Eğer dizinin limiti varsa elbette... Ama dizinin limiti olmasa da Cesàro ortalaması olabilir. $x_i = (-1)^{i+1}$ ise, dizi yakınsak değildir ama kolayca görüleceği üzere dizinin Cesàro ortalaması $1/2$'dir.

Bu altbölümde bu sonucu ve bu sonucun serilere olan ilginç bir uygulamasını kanıtlayacağız.

Cesàro ortalamalarının hem soyut hem de uygulamalı matematiğin çok önemli bir konusu olan Fourier serilerine önemli uygulamaları vardır.

Teorem 16.8 (Cauchy, 1821)**.** *Eğer* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *varsa, Cesàro ortalaması da vardır ve iki sayı birbirine eşittir. Yani* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *varsa,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

Kanıt: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olsun. x'i 0 alabileceğimizi gösterelim önce. $y_n = x_n - x$ olsun. O zaman,

$$\frac{y_1+\cdots+y_n}{n} = \frac{(x_1-x)+\cdots+(x_n-x)}{n} = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} - x$$

olur. Demek ki $(x_n)_n$ dizisinin Cesàro ortalamasının x olduğunu göstermekle $(y_n)_n$ dizisinin Cesàro ortalamasının 0 olduğunu kanıtlamak aynı şey. Dolayısıyla, $(y_n)_n$ dizisinin limiti 0 olduğundan, $(x_n)_n$ dizisi yerine $(y_n)_n$ dizisini alarak bundan böyle $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ varsayımını yapabiliriz.

$\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ olsun.

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ olduğundan, her $n > N$ için,

$$|x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı bir N vardır.

$\lim_{n\to\infty} s_N/n = 0$ olduğundan, her $n > M$ için, $|s_N/n| < \epsilon/2$ eşitsizliklerinin sağlandığı bir M vardır. M'yi N'den büyük alabiliriz. O zaman, her $n > M$ için,

$$\begin{aligned}\left|\frac{s_n}{n}\right| &= \left|\frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1}+\cdots+x_n}{n}\right| \le \left|\frac{s_N}{n}\right| + \frac{|x_{N+1}|+\cdots+|x_n|}{n}\\ &< \frac{\epsilon}{2} + \overbrace{\frac{\epsilon}{2}+\cdots+\frac{\epsilon}{2}}^{n-N \text{ tane}} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{(n-N)\epsilon/2}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{n\epsilon/2}{n} = \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

olur. Bu da, $\lim_{n\to\infty} s_n/n = 0$ eşitliğini, yani teoremi kanıtlar. □

Örnekler

16.9. $x_i = 1/i$ olsun. Teorem 16.8'e göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 0$$

olur.

16.10. *Aşağıdaki limiti gösterin:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[i]{i} = 1.$$

(Bkz. Örnek 5.2.)

Çözüm: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[i]{i} = 1$ eşitliğinden ve teoremden hemen çıkıyor. □

16.11. *Eğer* $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \ell$ *ise* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \ell$ *olduğunu kanıtlayın.*

Kanıt: $y_n = x_{n+1} - x_n$ olsun. O zaman

$$x_n - x_0 = y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0$$

olur. Ama teoreme göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0}{n} = \ell$$

olur. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n-1} + y_{n-2} + \cdots + y_0}{n} = \ell.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Geometrik ortalama da aritmetik ortalama gibi davranır ama terimleri ve limiti pozitif alma koşuluyla. Yeri gelmişken bunu da kanıtlayalım:

Teorem 16.9. $(x_n)_n$*, limiti* x *olan pozitif bir dizi olsun. O zaman*

$$\lim_{n\to\infty} (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

limiti vardır ve x*'e eşittir.*

Kanıt: Önce $x > 0$ varsayımını yapalım. Küçük bir $\epsilon > 0$ sayısı seçelim. Bu ϵ sayısının $0 < x - \epsilon$ eşitsizliğini sağladığını varsayabiliriz. Her $n > N$ için $|x_n - x| < \epsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N seçelim. $x_1 x_2 \cdots x_N$ çarpımına a diyelim. O zaman her $n > N$ için,

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 x_2 \cdots x_N x_{N+1} \cdots x_n = a x_{N+1} \cdots x_n$$

yazarsak,

$$a(x-\epsilon)^{n-N} \le x_1 x_2 \cdots x_n \le a(x+\epsilon)^{n-N}$$

eşitsizliklerini buluruz. Bu eşitsizlikleri biraz daha düzgün yazalım:

$$\frac{a}{(x-\epsilon)^N}(x-\epsilon)^n \le x_1 x_2 \cdots x_n \le \frac{a}{(x+\epsilon)^N}(x+\epsilon)^n.$$

Her üç tarafın da n'inci kökünü alırsak

$$\left(\frac{a}{(x-\epsilon)^N}\right)^{1/n}(x-\epsilon) \le (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \le \left(\frac{a}{(x+\epsilon)^N}\right)^{1/n}(x+\epsilon)$$

buluruz ve n sonsuza giderken limit alındığında (öRNEK 6.3'ten dolayı),

$$x - \epsilon \le \lim_{n\to\infty} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \le x + \epsilon$$

çıkar. Bu da istediğimizi kanıtlar.

Eğer $x = 0$ ise, $x_n < \epsilon$ eşitsizliğini kullanıp aynı sonucu elde edebiliriz. Daha kolay olan kanıtı okura bırakıyoruz. Aynı sonuç, Teorem 3.26'da kanıtlanan

$$(\mathrm{AG}_n) \qquad (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

eşitsizliğinden ve Teorem 16.8'den de çıkar. □

Örnekler

16.12. Teorem 16.9'dan $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ eşitliğini bir kez daha kanıtlayabiliriz. Nitekim

$$x_n = \frac{n+1}{n}$$

olsun. O zaman $x = 1$ ve

$$x_1 \cdots x_n = n$$

olur. Teoremi uygulamak yeterli.

16.13. Aynı sonucu kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

eşitliğini kanıtlayabiliriz. Nitekim

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

olsun. O zaman $x = e$ olur. Ayrıca sadeleştirmelerden sonra,

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

bulunduğundan, Teorem 16.9'dan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

bulunur. Bu da tabii

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

demektir.

Tanım. $(x_i)_{i\ge 1}$ bir dizi olsun. $\sum_{i\ge 1} x_i$ serisinin kısmi toplamlarına s_n diyelim:

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Bu $(x_i)_{i\ge 1}$ dizisinin ***Cesàro toplamı***, eğer varsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}$$

limitidir, yani kısmi toplamların aritmetik ortalamalarının limitidir.

Teorem 16.10. *Eğer $\sum_{i\ge 1} x_i$ serisi yakınsaksa, Cesàro toplamı da vardır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

eşitliği sağlanır.

Öte yandan $\sum_{i\ge 1} x_i$ serisi yakınsak olmasa da Cesàro toplamı olabilir. Örneğin, $x_i = (-1)^{i+1}$ ise, $\sum_{i\ge 1} x_i$ serisi yakınsak değildir ama kolayca görüleceği üzere dizinin Cesàro toplamı $1/2$'dir.

Kanıt: $\sum_{i\geq 1} x_i$ serisi x'e yakınsasın. $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ olsun. O zaman, varsayıma göre, $\lim_{n\to\infty} s_n = x$. Şimdi $(s_n)_n$ dizisine Teorem 16.8'i uygulayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = x$$

buluruz. □

Alıştırmalar

16.14. $x_n = (-1)^n n$ ve

$$\sigma_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

olsun. $\limsup \sigma_n$ ve $\liminf \sigma_n$ sayılarını bularak $(x_n)_n$ dizisinin Cesàro ortalamasının olmadığını gösterin.

16.15. Cesàro ortalaması olmayan ve sadece 0 ve 1'den oluşan bir dizi bulun.

16.16. Limiti olmayan ama Cesàro ortalaması olan bir dizi bulun.

Cesàro'nun Diğer Toplamları. İtalyan diferansiyel geometrici Ernesto Cesàro (1859-1906) başka toplamlar da bulmuştur.

Bir $(a_n)_n$ dizisi verilmiş olsun.

$$a_{n,-1} = a_n$$

olsun ve her $k \geq 0$ doğal sayısı için, $(a_{n,k})_n$ dizisini şöyle tanımlayalım:

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k-1}.$$

Eğer $k = 0$ alırsak,

$$a_{n,0} = a_0 + \cdots + a_n = s_n$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca,

$$a_{n,1} = s_0 + \cdots + s_n$$

olur, yani $a_{n,1}$ kısmi toplamların toplamıdır.

Bir başka tanıma daha ihtiyacımız var, $(e_n)_n$ dizisi, tümevarımla,

$$e_0 = 1 \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } e_n = 0$$

olarak tanımlanmış olsun. O zaman $e_{n,k}$ sayıları şöyle olur:

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45

$e_{n,k}$ sayıları

$k \geq 0$ için $(a_n)_n$ dizisinin (C,k)-toplamını şöyle tanımlayalım:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,k}}{e_{n,k}}.$$

$(a_n)_n$ dizisinin $(C,0)$-toplamı bildiğimiz sonsuz toplamdır:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,0}}{e_{n,0}} = \lim_{n\to\infty} a_{n,0} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_{n,-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum a_i$$

$(a_n)_n$ dizisinin $(C,1)$-toplamı bu bölümde ele aldığımız Cesàro toplamıdır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n,0}}{e_{n,0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} a_{n,0}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}.$$

Genel bir teoreme göre, bir dizinin (C,k)-toplamı varsa $(C,k+1)$-toplamı da vardır.

17. Dalgalanan Seriler

17.1 Leibniz Testi

Önceki bölümlerde daha çok terimleri pozitif sayılar olan serilere bakmıştık. Bu bölümde terimleri bir pozitif bir negatif olan serilere bakacağız. Bakacağımız seriler, $a_n \geq 0$ gerçel sayıları için,

$$\sum (-1)^i a_i$$

biçiminde yazılan serilerdir. Bu tür serilere ***dalgalanan*** ya da ***alterne seriler*** denir. Perihan Mağden'in tabiriyle içlerinden en en ennnnn bilineni,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

serisidir. Bu seri yakınsaktır. (Ve limiti $\ln 2$'dir, yani 2'nin doğal logaritmasıdır. Ama henüz logaritma mogaritma görmediğimizden bu $\ln 2$ sayısı okura şimdilik bir şey ifade etmeyebilir.)

Yukarıda ele alınan $\sum (-1)^i a_i$ türünden bir serinin yakınsak olması için, Teorem 14.4'te gördüğümüz üzere,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

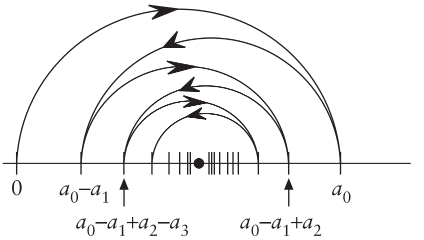
olmalıdır. Ancak bu koşul yetmez, daha fazlasına gerek var.

Teorem 17.1 (Leibniz)**.** *$(a_i)_i$ azalarak 0'a yakınsayan pozitif bir dizi olsun. O zaman, $\sum (-1)^i a_i$ serisi yakınsaktır.*

Kanıt: $s_n = a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n$, kısmi toplamlar olsun.

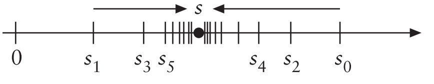
$$(s_{2n})_n \text{ ve } (s_{2n+1})_n$$

dizilerine bakacağız.



$(s_n)_n$ dizisi a_i'ler eklenip çıkarılarak oluşturulur

Birincisinin azalan, ikincisinin artan olduğunu ve her ikisinin de aynı limite yakınsadığını kanıtlayacağız. Elde ettiğimiz bilgiler aşağıdaki şekli verecek.



$(s_{2n+1})_n$ dizisi artarak, $(s_{2n})_n$ dizisi azalarak aynı sayıya yakınsayacak.

Sav 1. $(s_{2n})_n$ azalan bir dizidir.
Kanıt: $s_{2n} \geq s_{2n+2}$ eşitsizliğini göstermeliyiz. Ama s_{2n+2}'nin içindeki s_{2n}'yi ortaya çıkarırsak, $(a_n)_n$ dizisinin azalan olmasını kullanarak bunu kolaylıkla görebiliriz:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} \\ &= s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n}. \end{aligned}$$

Sav 2. $(s_{2n+1})_n$ *artan bir dizidir.*
Kanıt: $s_{2n+1} \leq s_{2n+3}$ eşitsizliğini göstermeliyiz. Kanıt aynen yukarıdaki gibi:

$$\begin{aligned} s_{2n+3} &= s_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} + (-1)^{2n+3}a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ &= s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1}. \end{aligned}$$

Sav 3. $s_{2n} \geq s_{2n+1}$.
Kanıt: Çok kolay: $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0$.

Sav 4. *Her* n *ve* m *için,* $s_{2n+1} \leq s_{2m}$.
Kanıt: $n \leq m$ varsayımını yapalım. O zaman yukarıdaki üç savdan,

$$s_{2n+1} \leq s_{2m+1} \leq s_{2m} \leq s_{2n}$$

çıkar. $n \geq m$ varsayımında kanıt benzerdir.

Şimdi teoremin kanıtını bitirebiliriz. Sav 2 ve 4'e göre, $(s_{2n+1})_n$ artan ve üstten sınırlı bir dizidir; demek ki bir limiti vardır. Bu limite u adını verirsek, Sav 4'e göre, her m için,

$$u \leq s_{2m}$$

olur. Sav 1'e ve bu eşitsizliğe göre, $(s_{2m})_m$ azalan ve alttan sınırlı bir dizidir; demek ki bir limiti vardır. Bu limite v adını verirsek, yukarıdaki eşitsizlikten dolayı

$$u \leq v$$

olur. Şimdi Sav 3'ü kullanalım:

$$v - u = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Demek ki $u = v$ ve $(s_{2n+1})_n$ ve $(s_{2n})_n$ dizileri aynı sayıya yakınsıyorlar. Dolayısıyla $(s_n)_n$ dizisi de aynı sayıya yakınsar. Teorem kanıtlanmıştır. □

Yukarıdaki kanıttan, her n ve m için,

$$s_{2n+1} \leq \sum (-1)^i a_i \leq s_{2m}$$

bulunur. Demek ki ayrıca,

$$0 \leq s_{2n} - \sum (-1)^i a_i \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$$

ve

$$0 \leq \sum (-1)^i a_i - s_{2n-1} \leq s_{2n-2} - s_{2n-1} = a_{2n-1}$$

olur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum (-1)^i a_i - s_n \right| \leq a_n$$

olur. Bunu da not edelim.

Sonuç 17.2 (Kanıtın Sonucu)**.** *$(a_n)_n$ azalan ve 0'a yakınsayan pozitif bir diziyse, $\sum (-1)^i a_i$ serisi yakınsaktır ve*

$$\left| \sum (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \right| \leq a_n$$

olur.

Böylece,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

toplamına, yani henüz bilmediğimiz $\ln 2$ sayısına dilediğimiz kadar ($1/n$ kadar) yakınsayabiliriz. Bu seriyi şöyle yazalım:

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$$

ve kısmi toplamları (Excel kullanarak) hesapladım:

$$\begin{array}{lll lll}
s_0 & = & 1 & s_1 & = & 0{,}5 \\
s_2 & = & 0{,}83333\ldots & s_5 & = & 0{,}73333\ldots \\
s_9 & \approx & 0{,}645634\ldots & s_{10} & \approx & 0{,}736544\ldots \\
s_{11} & \approx & 0{,}653210\ldots & s_{99} & \approx & 0{,}688172\ldots \\
s_{100} & \approx & 0{,}698073\ldots & s_{999} & \approx & 0{,}692647\ldots \\
s_{1000} & \approx & 0{,}693646\ldots & & &
\end{array}$$

Örneğin, $s_{999} = 0{,}693647\ldots$ eşitliğinden,

$$0{,}692647 \le \sum \frac{(-1)^i}{i+1} \le 0{,}693647$$

bulunur. Nitekim gerçek değer şudur:

$$\sum \frac{(-1)^i}{i+1} = 0{,}69314718055994\ldots$$

Alıştırma 17.1. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadığını belirleyin.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt[3]{i}},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i^2},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i^i},\ \sum \frac{(-1)^i i^3}{i^3+1},\ \sum \frac{(-1)^i i^3}{i^4-i^2+1},\ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i 2^{1/i},$$

$$\sum \frac{(-1)^i}{(e-2)^{i/2}},\ \sum (-1)^{i^2+i-1} \frac{\sqrt{i}}{i+5},\ \sum \frac{(-1)^i i}{1+i^2},\ \sum \frac{(-1)^i i}{i+1}.$$

Örnek 17.2. Genel terimi 0'a gitmeyen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \cdots$$

serisine bakalım. Bu seriyi önce şöyle parantezleyelim:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) + \cdots$$

Bu durumda şunu elde ederiz:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{5\cdot 6} - \frac{1}{7\cdot 8} - \cdots < \frac{1}{2}.$$

Bir de şöyle parantezliyelim:

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{5}{6} - \frac{6}{7}\right) \cdots$$

Bu durumda şunu elde ederiz:

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots > 1.$$

İki farklı parantezlemeyle farklı toplamlar elde edildiğine göre başlangıçtaki seri yakınsamaz. (Bkz. Teorem 14.8.)

17.2 Riemann Düzenleme Teoremi

Pozitif bir serinin terimlerinin yerlerini değiştirirsek yakınsaklığın bozulmayacağını ve limitin değişmeyeceğini gördük (bkz. Teorem 14.13). Yakınsak olan ama mutlak yakınsak olmayan seriler (bu tür serilere ***koşullu yakınsak seri*** denir) bu konuda dramatik bir fark gösterirler: Böyle bir serinin terimlerinin yerlerini değiştirirsek seriyi dilediğimiz sayıya yakınsatabiliriz, hatta dilersek $\pm\infty$'a bile ıraksatabiliriz!

Teorem 17.3 (Riemann Düzenleme Teoremi)**.** *$\sum a_i$ koşullu yakınsak olan bir seri olsun. $b \in \mathbb{R}$, rastgele olsun. O zaman doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin*

$$\sum_i a_{\sigma(i)} = b$$

eşitliğini sağlayan bir σ eşleşmesi vardır.

Kanıt: $P = \{i \in \mathbb{N} : a_i \geq 0\}$ ve $N = \{i \in \mathbb{N} : a_i < 0\}$ olsun. Önce

$$\sum_{i \in P} a_i \text{ ve } \sum_{i \in N} a_i$$

serilerinin sırasıyla $+\infty$ ve $-\infty$'a yakınsadıklarını kanıtlayalım. Nitekim, eğer

$$P_n = P \cap \{0, 1, \ldots, n\}$$

ve

$$N_n = N \cap \{0, 1, \ldots, n\}$$

ise, $\sum a_i$ serisinin kısmi toplamı olan s_n sayısı,

$$s_n = \sum_{i \in P_n} a_i + \sum_{i \in N_n} a_i$$

eşitliğini sağlar. $(s_n)_n$ dizisinin bir limiti olduğundan, $\sum_{i \in P_n} a_i$ ve $\sum_{i \in N_n} a_i$ serilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır, biri ıraksaksa diğeri de ıraksaktır. Öte yandan $\sum a_i$ serisi mutlak yakınsak olmadığından,

$$\sum |a_i| = \infty$$

olur, yani
$$\sum_{i\in P_n} a_i - \sum_{i\in N_n} a_i$$
serisi $+\infty$'a ıraksar, yani hem $\sum_{i\in P_n} a_i$ hem $\sum_{i\in N_n} a_i$ dizisi yakınsak olamaz. Demek ki $\sum_{i\in P_n} a_i$ ve $\sum_{i\in N_n} a_i$ serilerinin ikisi birden ıraksaktır, biri $+\infty$'a, diğeri de tabii ki $-\infty$'a ıraksar.

b'nin bir gerçel sayı olduğunu varsayalım. Demek ki $i \in P$ için, a_i'leri toplayarak toplamı istediğimiz kadar büyütebiliriz, örneğin b'den büyük yapabiliriz ve daha sonra bu toplama $i \in N$ için, a_i'leri ekleyerek toplamı istediğimiz kadar küçültebiliriz, örneğin b'nin altına inebiliriz. Bu prosedürü böyle, bir ileri bir geri devam ettireceğiz.

Aklımıza ilk geleni denersek başarıya ulaşırız. P ve N kümelerini artan bir şekilde göstergeçleyelim:
$$p(0) < p(1) < p(2) < \ldots < p(k) < \ldots$$
ve
$$n(0) < n(1) < n(2) < \ldots < n(k) < \ldots$$
için,
$$P = \{a_{p(i)} : i \in N\} \text{ ve } N = \{a_{n(i)} : i \in \mathbb{N}\}$$
olsun.

b'nin pozitif olduğunu varsayalım.
$$a_{p(0)},\ a_{p(1)},\ a_{p(2)},\ \ldots$$
sayılarını b'yi aşana kadar toplayalım ve b'yi aştığımız ilk yerde duralım. Diyelim,
$$a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0-1)} < b \leq a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0)}.$$
Şimdi
$$a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0)}$$
toplamına, negatif olan
$$a_{n(0)},\ a_{n(1)},\ a_{n(2)},\ \ldots$$
sayılarını, toplam b'nin altına inene dek toplayalım. Diyelim
$$a_{p(0)}+\cdots+a_{p(k_0)}+a_{n(0)}+\cdots+a_{n(\ell_0)} < b \leq a_{p(0)}+\cdots+a_{p(k_0)}+a_{n(0)}+\cdots+a_{n(\ell_0-1)}$$
oluyor. Şimdi
$$a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0)} + a_{n(0)} + \cdots + a_{n(\ell_0)}$$
toplamına
$$a_{p(k_0+1)},\ a_{p(k_0+2)},\ \ldots$$

terimlerini b'yi geçene dek ekleyelim ve b'yi geçer geçmez duralım. Bu prosedürü böyle sürekli devam ettirirsek, elde edilen

$$\begin{aligned} &a_{p(0)} + \cdots + a_{p(k_0)} + a_{n(0)} + \cdots + a_{n(\ell_0)} \\ &\quad + a_{p(k_0+1)} + \cdots + a_{p(k_1)} + a_{n(\ell_0+1)} + \cdots + a_{n(\ell_1)} \\ &\quad + a_{p(k_1+1)} + \cdots + a_{p(k_2)} + a_{n(\ell_1+1)} + \cdots + a_{n(\ell_2)} + \cdots \end{aligned}$$

serisi $k_0 + 1$ adımda b'yi aşar, $k_0 + \ell_0 + 2$ adımda b'den küçük olur, sonra $k_0 + \ell_0 + k_1 + 3$ adımda tekrar b'yi aşar... Ve sonunda b'ye yakınsar... Ama söylemek yetmez, bu serinin gerçekten b'ye yakınsadığını kanıtlamak gerekiyor. Kanıtlayalım. Burada önemli olan nokta, her i için $i \leq k_i$ ve $i \leq \ell_i$ eşitsizlikleri ve

$$\lim_{i\to\infty} |a_i| = 0$$

eşitliğidir (çünkü $\sum a_i$ serisi yakınsaktır). Yani $\epsilon > 0$ ne kadar küçük olursa olsun, eğer M yeterince büyükse $i > M$ için, eklenen $a_{p(k_i+j)}$ sayılarının mutlak değerleri ϵ'dan küçük olurlar, çünkü

$$p(k_{i+j}) \geq p(k_i) \geq i > M$$

olur. Dolayısıyla kısmi toplamlar b'yi aştıklarında $b + \epsilon$ sayısını geçemezler, b'nin altına indiklerinde de $b - \epsilon$ sayısından küçük olamazlar, yani kısmi toplamlar bir zaman sonra $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ aralığının içinde kalmak zorunda kalırlar.

Örnekler

17.3. $0 < a < b < 1$ olsun.

$$1 + 1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots = \sum a^i + \sum b^i = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}$$

olur.

17.4. $\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$ serisinin terimlerini iki pozitif terim ve bir negatif terim olarak karalım:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$\sum \frac{(-1)^i}{i+1}$ serisinin toplamına ℓ dersek, bu serinin $3\ell/2$ sayısına yakınsadığını kanıtlayacağız. Bunun için, Teorem 14.10'a göre s_{3n} kısmi toplamlarının $3\ell/2$ sayısına yakınsadığını kanıtlamak yeterli. Yani

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4i-3} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{2i} \right) = \frac{3\ell}{2}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Parantezi hesaplayalım önce. Kolay bir hesapla,

$$\frac{1}{4i-3} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{2i} = \frac{8i-3}{2i(4i-3)(4i-1)} > 0$$

çıkar. Kummer Kıyaslama Kıstası'na göre (Teorem 15.7), $\sum 1/i^2$ yakınsak olduğundan bu seri de yakınsaktır. Şimdi limiti zekice bir hesapla bulalım:

$$\begin{aligned}
s_{3n} &= \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n}\right)\\
&= \left(\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)+\left(\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\right)\\
&\quad+\left(\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)\right)\\
&= \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots-\frac{1}{4n}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots-\frac{1}{4n}\right)
\end{aligned}$$

En sondaki dizi de $\ell+\ell/2=3\ell/2$ sayısına yakınsar.

18. d'Alembert ve Cauchy Kıstasları

18.1 d'Alembert Yakınsaklık Kıstası

Bir serinin yakınsak olup olmadığını anlamak için en pratik yöntemlerden biri bu bölümde kanıtlayacağımız ***d'Alembert Yakınsaklık Kıstası***'dır. Örneğin bu kıstasla, yakınsaklığını kanıtlamak için Bölüm 10'da bayağı uğraştığımız $\sum x^i/i!$ serisinin yakınsaklığı kolayca kanıtlanır.

Teorem 18.1 (d'Alembert Yakınsaklık Kıstası)**.** *Eğer*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|}$$

limiti varsa ve 1*'den küçükse, o zaman* $\sum x_i$ *serisi mutlak yakınsaktır. Eğer limit varsa ve* 1*'den büyükse ya da limit sonsuzsa o zaman seri ıraksar. Eğer limit* 1*'e üstten yakınsıyorsa da seri ıraksar.*

Limit olmadığında ya da limit 1'e eşit olduğunda teoremin $\sum x_i$ serisi hakkında hiçbir ipucu vermediğine dikkatinizi çekeriz. Nitekim limit olmadığında ya da limit 1 olduğunda, seri yakınsayabilir de ıraksayabilir de.

Örnekler

18.1. $x_i = 1$ ya da $1/i$ ise bildiğimiz üzere seri ıraksar, $x_i = 1/i^2$ ise seri yakınsar (Örnek 7.10) ve her üç durumda da oranların limiti 1'dir. Demek ki limitin 1 olduğu durumda teoremin bir şey söylememesi, teoremin bir eksikliği değil, doğa öyle emrediyor. Bu arada $x_i = 1/i$ olduğunda, $\frac{x_{i+1}}{x_i} < 1$ olur ama gene de $\sum x_i$ serisi ıraksar, yani d'Alembert kıstasını kullanmak için oranların 1'den küçük olması yetmez, illa limitin 1'den küçük olması gerekir.

18.2. $a \in (-1, 1)$ olsun. $\sum a^i$ serisinin yakınsadığını biliyoruz. Bu serinin terimlerini ikişer ikişer karalım:

$$a + 1 + a^3 + a^2 + a^5 + a^4 + \cdots$$

Teorem 14.12'ye göre bu seri de yakınsar. Ama terimlerin oranı tekliğe ya da çiftliğe göre $1/a$ ya da a^3 olur ve oranlar dizisi yakınsamaz.

18.3. $k \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $|x| < 1$ ise $\sum i^k x^i$ serisi mutlak yakınsar. Nitekim bu durumda katsayıların mutlak değerlerinin oranı

$$\frac{(i+1)^k |x|^{i+1}}{i^k |x|^i} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^k |x| \longrightarrow |x| < 1$$

olur.

Teoremin son önermesinin kanıtı kolay: Eğer $|x_{i+1}/x_i|$ dizisi 1'e üstten yakınsıyorsa, yani yeterince büyük i'ler için $|x_{i+1}/x_i| \geq 1$ oluyorsa, o zaman seri ıraksar, çünkü o zaman, $(|x_i|)_i$ dizisi artar ve 0'a yakınsayamaz.

Teoremde $x_i \neq 0$ eşitsizliği gerekiyormuş gibi görünse de bu eşitsizliğin bir zaman sonra doğru olması (elbette!) yeterlidir.

Teoremi kanıtlamadan önce birkaç standart örnekle teoremin nasıl uygulanacağını gösterelim. İleride başka örnekler de göreceğiz.

Örnekler

18.4. **[Geometrik Seri].** $\sum x^i$ *serisi* $|x| < 1$ *ise mutlak yakınsar.* $|x| \geq 1$ *ise seri ıraksar.*
Kanıt: $x_i = x^i$ olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{|x|^{i+1}}{|x|^i} = |x|$$

olur ve $x \neq \pm 1$ ise her şey teoremden çıkar. $x = \pm 1$ durumları kolay. (Ama teoremin kanıtı bu örneği kullandığından, bunu teoremin bir uygulaması olarak sunmak bilimsel ahlaksızlık sınıfına girer!) □

18.5. $\sum x^i/i!$ *serisi her* x *için mutlak yakınsaktır.*
Kanıt: $x_i = x^i/i!$ olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \lim_{i\to\infty} \frac{\frac{|x|^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{|x|^i}{i!}} = \lim_{i\to\infty} \frac{|x|}{i+1} = 0 < 1$$

olur ve teoreme göre seri her x için mutlak yakınsaktır. Bu seriye $\exp x$ adını vermiştik ve belli bir e gerçel sayısı ve her $x \in \mathbb{Q}$ için $\exp x = e^x$ eşitliğini kanıtlamıştık. $x \in \mathbb{R}$ için, e^x ifadesini tanımladığımızda, $\exp x = e^x$ eşitliğini her $x \in \mathbb{R}$ için de kanıtlayacağız. □

18.6. *Her* x *gerçel sayısı için,*

$$\cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \text{ ve } \sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

serileri mutlak yakınsaktır.
Kanıt: Aynı yöntemle kanıtlanır. Bu örneği Alıştırma 16.5'te başka bir yöntemle göstermiştik. □

18.7.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-5)^i}{3^{2i+1}(i+1)}$$

serisi yakınsak mıdır?
Çözüm: Teoremde

$$x_i = \frac{(-5)^i}{3^{2i+1}(i+1)}$$

alalım. O zaman,

$$\frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \frac{5^{i+1}}{3^{2i+3}(i+2)} \frac{3^{2i+1}(i+1)}{5^i} = \frac{5(i+1)}{3^2(i+2)} \longrightarrow \frac{5}{9} < 1$$

olur. Teoreme göre seri yakınsaktır. □

18.8. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{15^i}$ *serisi yakınsak mıdır?*

Çözüm: Teoremde $x_i = i!/15^i$ alalım. O zaman,

$$\frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} = \frac{(i+1)!}{15^{i+1}} \frac{15^i}{i!} = \frac{i+1}{15} \longrightarrow \infty > 1$$

olur ve teoreme göre $\sum i!/15^i$ serisi ıraksaktır.

Bir başka kanıt: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{15^i}{i!}$ serisi bilindiği üzere e^{15} sayısına yakınsar. Dolayısıyla

$$\lim_{i\to\infty} 15^i/i! = 0$$

ve buradan

$$\lim_{i\to\infty} i!/15^i = \infty$$

çıkar. Genel terimi 0'a yakınsamadığından $\sum i!/15^i$ serisi yakınsayamaz. □

18.9. $k \in \mathbb{N}$ olsun. d'Alembert kıstasına göre, eğer $|x| < 1$ ise

$$\sum_i \binom{i+k}{i} x^i$$

serisi mutlak yakınsar, eğer $|x| > 1$ ise ıraksar. $x = 1$ ise de serinin ıraksadığı belli. $x = -1$ ise de seri ıraksaktır (Alıştırma 14.8). □

Alıştırmalar

18.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterin.

18.11. $k \in \mathbb{Q}$ verilmiş olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{e^n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterin.

18.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$ serisinin ıraksak olduğunu gösterin.

18.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$ serisi hangi x sayıları için yakınsaktır?

18.14. $a \in \mathbb{Q}^{>0}$ verilmiş olsun. $\sum a^n n^a$ serisi hangi a sayıları için yakınsaktır?

Teorem 18.1'in Kanıtı: Limite ℓ diyelim ve önce $\ell < 1$ varsayımını yapalım. Her x_i yerine $|x_i|$ koyarak, terimlerin pozitif olduklarını varsayabilir ve mutlak değer işaretlerinden kurtulabiliriz.

$\ell + \epsilon < 1$ eşitsizliği geçerli olacak şekilde pozitif bir ϵ sayısı seçelim. Mesela $\epsilon = (1-\ell)/2$ olabilir.

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell$$

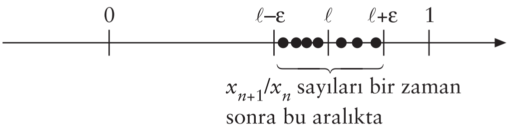
olduğundan, belli bir N göstergecinden sonra, yani her $i \geq N$ için,

$$\ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon$$

olur. (Aşağıdaki şekle bakın.) Burada önemli olan sadece, her $i \geq N$ için

$$0 < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon < 1$$

eşitsizlikleri olacak. $\ell + \epsilon$ sayısına s adını verelim.



Demek ki $0 < s < 1$ ve her $i \geq N$ için, $x_{i+1} < sx_i$. Yani,

$$\begin{aligned} x_{N+1} &< sx_N \\ x_{N+2} &< sx_{N+1} \\ x_{N+3} &< sx_{N+2} \\ &\dots \end{aligned}$$

İlk iki eşitsizlikten,

$$x_{N+2} < sx_{N+1} < s^2 x_N$$

elde ederiz. Üçüncüsüyle birlikte

$$x_{N+3} < sx_{N+2} < s^2 x_{N+1} < s^3 x_N$$

elde ederiz. Genel olarak, kolay bir tümevarımla, her $j \geq 0$ için,

$$x_{N+j} < s^j x_N$$

elde ederiz. Şimdi, $\sum x_i$ serisinin $n > N$ için s_n kısmi toplamlarına bakalım:

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i + \sum_{i=N}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{N-1} + \sum_{j=0}^{n-N} x_{N+j} < \sum_{i=0}^{N-1} x_i + \sum_{j=0}^{n-N} s^j x_N \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i + x_N \sum_{j=0}^{n-N} s^j = \sum_{i=0}^{N-1} x_i + x_N \frac{1 - s^{n-N+1}}{1-s} < \sum_{i=0}^{N-1} x_i + x_N \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

En sondaki ifade n'den bağımsız olduğundan, böylece $(s_n)_n$ artan dizisinin üstten sınırlı olduğunu kanıtlamış oluruz. Demek ki $(s_n)_n$ dizisinin limiti vardır ve $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaktır.

Şimdi $\ell > 1$ olsun ($\ell = \infty$ da olabilir.) Serinin yakınsak olmadığını kanıtlamak için, $(|x_n|)_n$ dizisinin limitinin 0 olamayacağını kanıtlayacağız (Teorem 14.4). Demek ki gene $x_n > 0$ varsayımını yapabiliriz.

Önce ℓ'nin bir gerçel sayı olduğunu varsayalım. $\ell - \epsilon > 1$ eşitsizliği geçerli olacak kadar küçük pozitif bir ϵ sayısı seçelim. Mesela $\epsilon = (\ell - 1)/2$ olabilir.

$$\lim_{i \to \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell$$

olduğundan, bir zaman sonra, yani belli bir N göstergecinden sonra, yani her $i \geq N$ için,

$$\ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon$$

olur. Burada önemli olan sadece, her $i \geq N$ için

$$1 < \ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

eşitsizlikleri olacak. $\ell - \epsilon$ sayısına s adını verelim. Demek ki $s > 1$ ve her $i \geq N$ için, $x_{i+1} > sx_i$.

Aynı eşitsizliklerin $\ell = \infty$ ise de geçerli olduğunu kanıtlayalım. Nitekim,

$$\lim_{i \to \infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = \infty$$

olduğundan, $s > 1$ ne olursa olsun, yeterince büyük i göstergeçleri için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} > s$$

olur.

Demek ki ℓ, bir gerçel sayı da olsa, ∞ da olsa, öyle bir $s > 1$ ve N vardır ki, her $i \geq N$ için

$$x_{i+1} > sx_i$$

olur. Buradan, $i = N$ için,

$$x_{N+1} > sx_N$$

elde ederiz. Bunu ve $i = N + 1$ için elde edilen eşitsizliği birleştirerek,

$$x_{N+2} > sx_{N+1} > s^2 x_N$$

elde ederiz. Devam edecek olursak,

$$x_{N+3} > sx_{N+2} > s^2 x_{N+1} > s^3 x_N$$

elde ederiz. Genel olarak, kolay bir tümevarımla, her $j \geq 0$ için,

$$x_{N+j} > s^j x_N > x_N$$

elde ederiz. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsayamaz. □

Yakın gelecekte (bu altbölümde) bu kıstası genelleştireceğiz. Ama önce çok kullanışlı olan bu kıstasa birkaç örnek daha verelim.

Örnekler

18.15. *$x \in \mathbb{R}$ için,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{(n+1)!} x^n$$

serisinin yakınsaklığını tartışın.

Tartışma: d'Alembert Kıstasını uygulamaya çalışalım:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3n+4}{n+2} x \to 3x.$$

Demek ki $|x| < 1/3$ ise seri yakınsar, hem de mutlak yakınsar; $|x| > 1/3$ ise seri ıraksar. Ama $|x| = 1/3$ ise d'Alembert Kıstası serinin yakınsaklığına ya da ıraksaklığına karar veremez. $x = 1/3$ durumunda $y_n = 1/n$ alarak oran kıyaslama testini (Sonuç 15.6) uygulayabiliriz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{3n+4}{n+2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+4}{3(n+1)(n+2)} > 0$$

olduğundan, seri $x = 1/3$ iken de ıraksar. Eğer $x = -1/3$ ise, "dalgalı bir seri"yle karşı karşıyayız. $x = -1/3$ durumunda terimler azalarak (kanıtı kolay) 0'a yakınsadığından (kanıtı zor, bkz. Örnek 19.14) Leibniz testine göre seri $x = -1/3$ iken yakınsar. □

18.16. Binom katsayılarını

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-1)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

ve binom açılımını anımsayalım:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} x^i.$$

Eğer $i > n$ ise,

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

sayısı 0'a eşit olduğundan,

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} x^i$$

yazabiliriz. Şimdi sol tarafa değil de sağ tarafa, yani

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} x^i$$

serisine bakalım. Buradaki n doğal sayısını herhangi bir α gerçel sayısı yapalım. Böylece, α'ya göre değişen

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} x^i$$

serisini elde ederiz. Elbette, α bir doğal sayı olduğunda, bu seri (sonlu bir toplam olduğundan) yakınsaktır ve her x için,

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

olur. Ve ilginç soru: Diğer α'lar için seri ne olur? Hangi x sayıları için $f_\alpha(x)$ serisi yakınsar? Yanıt hem şaşırtıcı hem de basit: Eğer α bir doğal sayı değilse, her $|x| < 1$ için $f_\alpha(x)$ serisi yakınsar. Bunu görmek için d'Alembert kıstasını uygulamak yeterli:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \times \left|\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}\right| \\ &= \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| \to |x|.\end{aligned}$$

Bu seriye ikinci cildin sonuna doğru çok daha etraflıca eğileceğiz.

18.17. *Şu serinin yakınsaklığını tartışın ve yakınsak olduğunda toplamı bulun:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}.$$

Çözüm: Tabii ki her şeyden önce $x \neq \pm 1$ olmalı, yoksa terimler tanımlı değil. d'Alembert kıstasını uygulayalım.

$$x_k = \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}}$$

olsun. O zaman,

$$1 - x^{2^{k+1}} = 1 - x^{2^k 2} = 1 - \left(x^{2^k}\right)^2 = \left(1 - x^{2^k}\right)\left(1 + x^{2^k}\right)$$

eşitliğini kullanarak,

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x^{2^k}}{1 - x^{2^{k+1}}} \frac{1 - x^{2^k}}{x^{2^{k-1}}} = \frac{x^{2^{k-1}}}{1 + x^{2^k}}$$

elde ederiz. Eğer $|x| < 1$ ise, bu ifadenin limiti 0'dır. Eğer $|x| > 1$ ise de 0'dır çünkü

$$\frac{x^{2^{k-1}}}{1 + x^{2^k}} = \frac{1}{1/x^{2^{k-1}} + x^{2^{k-1}}}$$

olur ve sağdaki ifadenin paydası sonsuza gider. Demek ki d'Alembert kıstasına göre seri her $x \neq \pm 1$ için mutlak yakınsaktır.

Serinin limitini bulmak için kısmi toplamları hesaplayalım (bkz. Örnek 14.4):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{-1 + \left(1 + x^{2^{k-1}}\right)}{1 - x^{2^k}} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{2^k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{2^k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{2^{k-1}}} = \frac{1}{1 - x^{2^{1-1}}} - \frac{1}{1 - x^{2^n}} \\
&= \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^{2^n}}.
\end{aligned}$$

Demek ki eğer $|x| < 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x},$$

eğer $|x| > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2^{k-1}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1}{1 - x}$$

olur. □

Alıştırmalar

18.18. $\sum \frac{2^i (i!)^2}{(2i)!}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

18.19. $\sum \frac{n}{a^n}$ serisinin yakınsak olması için a'nın sağlaması gereken koşulları bulun.

18.20.
$$\frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(4i)!}{(i!)^4} \frac{1103 + 36390i}{396^i}$$

serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın[1].

[1] Bu serinin $1/\pi$ sayısına yakınsadığı 1915'te ünlü Hint matematikçi Srinivasa Ramanujan (1887-1920) tarafından anlaşılmıştır.

d’Alembert Kıstası işe yaramadığı zaman, yani limit 1 olduğunda, Altbölüm 19.2’de kanıtlayacağımız Raabe Kıstası da kullanılabilir.

Teoremin kanıtına dikkatlice bakacak olursak, varsayımı tam gücüyle kullanmadığımızı görürüz. Nitekim, teoremin birinci kısmının kanıtında, yeterince büyük i’ler için,

$$\ell - \epsilon < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon < 1$$

eşitsizliklerini değil, yeterince büyük i’ler için,

$$0 < \frac{x_{i+1}}{x_i} < \ell + \epsilon < 1$$

eşitsizliklerini kullandık, ve bu son koşul da birincisinden daha zayıf bir koşuldur. Velhasılı kelam, verdiğimiz kanıt, aslında daha genel bir önermenin kanıtıdır.

Teorem 18.2 (d’Alembert Yakınsaklık Kıstası 2)**.** *Eğer*

$$\limsup \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} < 1$$

ise, $\sum x_i$ *serisi mutlak yakınsaktır. Eğer*

$$\liminf \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} > 1$$

ise seri ıraksar.

Kanıt: Her x_i yerine $|x_i|$ koyarak, terimlerin pozitif olduklarını varsayıp mutlak değer işaretlerinden kurtulabiliriz.

$\limsup \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell < 1$ olsun.

$$\ell + \epsilon < 1$$

eşitsizliği geçerli olacak şekilde pozitif bir ϵ sayısı seçelim. Mesela

$$\epsilon = \frac{1-\ell}{2}$$

olabilir. Önsav 13.5.i’e göre, $(x_{i+1}/x_i)_i$ dizisinin sadece sonlu sayıda terimi $\ell+\epsilon$ sayısından büyüktür. Demek ki belli bir N sayısından büyükeşit i’ler için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \le \ell + \epsilon < 1$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu aşamada kanıta aynen yukarıdaki teoremin kanıtındaki gibi devam edebiliriz.

Şimdi $\liminf \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ell > 1$ varsayımını yapalım. O zaman

$$\limsup \frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{1}{\ell} < 1$$

olur. Demek ki teoremin kanıtlanan kısmına göre $\sum 1/x_i$ yakınsar ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = 0$ olur. Buradan da $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olamayacağı ve dolayısıyla $\sum x_i$ serisinin ıraksadığı çıkar. □

Teoremin ikinci kısmının lim sup için doğru olmadığı, yani $\limsup \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|} > 1$ ise serinin yakınsak olabileceği Örnek 18.2'den anlaşılıyor.

Terimlerinde $n!$ gibi faktoriyel olan serilerde genellikle d'Alembert Kıstası kullanılır. Bir sonraki altbölümde terimlerinde x^n gibi n'inci güçlerin belirdiği serilerde kullanılan ve d'Alembert Kıstası'ndan daha genel olan Cauchy kıstasını göreceğiz.

Alıştırmalar

18.21. $\sum_{i>0}(i^{1/i} - 1)^i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

18.22. $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in (-1, 1)$ olsun. $\sum a_i^i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

18.23. Aşağıdaki serilerin her x için yakınsak olduğunu kanıtlayın:

$$\cosh x = \sum \frac{x^{2i}}{(2i)!}\ ,\ \sinh x = \sum \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Yukarıda tanımlanan $\cosh x$ ve $\sinh x$ serileri $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon tanımlarlar. Bu fonksiyonlara sırasıyla ***hiperbolik kosinüs*** ve ***hiperbolik sinüs*** adı verilir.

18.24. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

$$\cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}\ ,\ \sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}\ ,\ \exp x = \cosh x + \sinh x.$$

18.25. Şu seriler hangi x'ler için yakınsaktır?

$$\sum \frac{2^i}{i!}\,x^i,\ \sum \frac{(i!)^2}{(2i)!}\,x^i,\ \sum i^i x^i,\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^{i-1}}{i!}\,x^i,\ \sum \frac{x^i}{2^i + 3^i}.$$

18.26. Önce her n için,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} = 2^n$$

eşitliğini kanıtlayın, sonra Cauchy çarpımı formülünü kullanarak

$$\sinh(2x) = 2\cosh x\ \sinh x$$

eşitliğini kanıtlayın.

18.2 Cauchy Yakınsaklık Kıstası (Kök Testi)

Seriler konusuna başlar başlamaz geometrik serinin öneminden söz etmiştik. Birçok serinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı, seriyi geometrik seriyle karşılaştırarak anlaşılır. Bir önceki altbölümde gördüğümüz d'Alembert Kıstası bu karşılaştırma yöntemlerinden biridir örneğin. (Teoremin kanıtındaki uzun hesaba bakarsanız, d'Alembert Kıstası'nın geometrik seriyi tam nerede ve nasıl kullandığını görürsünüz.) Bu altbölümde bir seriyi geometrik seriyle karşılaştırmanın bir başka yolunu göreceğiz.

Teorem 18.3 (Cauchy Yakınsaklık Kıstası, namıdiğer Kök Testi)**.** *$\sum x_i$ bir seri olsun.*
i. *Eğer $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i}$ limiti varsa ve $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} < 1$ ise, $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaktır.*
ii. *Eğer $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} > 1$ ise (limit ∞ da olabilir), $\sum x_i$ serisi ıraksaktır.*

Bir kez daha kıstasın limit 1'e eşit olduğunda herhangi bir fikir beyan etmediğini gözlemleyelim. Limitin 1 olduğu durumlar en ilginç durumlardır.

Cauchy kıstasını çok sık kullanma gereksinimi duyacağız. Kanıtlamadan önce birkaç standart örnek verelim.

Örnekler

18.27. **[Geometrik Seri]** *$\sum x^i$ serisi $|x| < 1$ ise mutlak yakınsar. $|x| \geq 1$ ise seri ıraksar.*
Kanıt: $x_i = x^i$ olduğundan,

$$\lim_{i\to\infty} |x_i|^{\frac{1}{i}} = \lim_{n\to\infty} |x^i|^{\frac{1}{i}} = |x|$$

olur ve $x \neq \pm 1$ ise her şey teoremden çıkar. $x = \pm 1$ durumları kolay. (Ama teoremin kanıtı bu örneği kullandığından, bunu teoremin bir uygulaması olarak sunmak -en hafif tabirle- doğru değildir!) □

18.28. $\exp x = \sum x^i/i!$ *serisi her x için mutlak yakınsaktır.*
Kanıt: $x_i = x^i/i!$ olduğundan, sayfa 171'deki örnekte kanıtlanan $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n} = \infty$ eşitliğinden dolayı,

$$\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = \lim_{i\to\infty} \left|\frac{x^i}{i!}\right|^{1/i} = \lim_{i\to\infty} \frac{|x|}{i!^{1/i}} = 0$$

olur. Teoreme göre seri her x için mutlak yakınsaktır. □

18.29. $\sum_{i\geq 1} 1/i^i$ *serisi yakınsaktır.*
Kanıt: $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = \lim_{i\to\infty} 1/i = 0 < 1$. □

18.30. $\sum_{i\geq 1} 1/i^{5i}$ *serisi yakınsaktır.*
Kanıt: $1/i^{5i} \leq 1/i^i$ olduğundan, bir üsttekinden çıkar. □

18.31. *$x \in \mathbb{R}$ için,*

$$\sum \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{5n} x^n$$

serisinin yakınsaklığını tartışın.
Kanıt: Gerekeni yapalım:

$$\left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^{5} |x|$$

dizisinin limitinin ne zaman 1'den küçük olduğunu bulmalıyız. Bunu yapmak oldukça kolay: Teoremi uygulayarak, $|x| < (2/3)^5$ ise serinin mutlak yakınsak olduğunu, $|x| >$

$(2/3)^5$ ise serinin ıraksak olduğunu buluruz. $|x| = (2/3)^5$ ise Cauchy Kıstası bir işe yaramaz. $x = (2/3)^5$ durumunda seri,

$$\sum \left(\frac{n-1/3}{n+1/2}\right)^{5n}$$

halini alır. Genel terimin limitini alalım:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1/3}{n+1/2}\right)^{5n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-1/3n}{1+1/2n}\right)^{5n} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1-1/3)^{5n}}{\lim_{n\to\infty}(1+1/2n)^{5n}}\\ &= \frac{(\lim_{n\to\infty}(1-1/3n)^{3n})^{5/3}}{(\lim_{n\to\infty}(1+1/2n)^{2n})^{5/2}} = \frac{e^{-5/3}}{e^{5/2}} \neq 0\end{aligned}$$

Böylece $x = (2/3)^5$ durumunda serinin ıraksak olduğunu buluruz. $x = -(2/3)^5$ durumunda da serinin genel terimi -aynen yukarıda olduğu gibi- 0'a yakınsamaz, dolayısıyla seri bu durumda da ıraksar. □

Görüldüğü gibi Cauchy Kıstası çok yararlıdır. Genel terimi n'ye bağlı bir kuvvet olan serilerde ilk olarak aklımıza Cauchy Kıstası gelmelidir; muhtemelen bizi sonuca götürecektir.

Alıştırma 18.32. $\sum_{i\geq 1} 1/i^{i/2}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Teorem 18.3'ün Kanıtı: Limite ℓ diyelim:

$$\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = \ell$$

olsun. Kanıtın ana fikri şöyle: Büyük i'ler için $|x_i|$, ℓ^i civarındadır, dolayısıyla $\sum x_i$ serisi $\sum \ell^i$ geometrik serisine benzer.

Önce ℓ'nin 1'den küçük olduğunu varsayalım. x_i yerine $|x_i|$ alarak, serinin pozitif bir seri olduğunu varsayabiliriz ve böylece mutlak değer işaretlerinden kurtuluruz.

$\epsilon > 0$ sayısı, $\ell + \epsilon < 1$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilsin. Belli bir göstergeçten sonra, diyelim N göstergecinden sonra,

$$\ell - \epsilon < x_i^{1/i} < \ell + \epsilon < 1$$

olur. Bizim için önemli olan, 1'den küçük belli bir $u = \ell + \epsilon$ ve her $i > N$ için

$$x_i^{1/i} < u < 1$$

eşitsizlikleri olacak. (Yani limitin ℓ olduğunu kullanmayacağız bile!) Demek ki her $i > N$ için

$$x_i < u^i$$

olur. Dolayısıyla, $n > N$ için, n'inci kısmi toplama bakacak olursak,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{N} x_i + \sum_{i=N+1}^{n} x_i &\leq \sum_{i=0}^{N} x_n + \sum_{i=N+1}^{n} u^i \leq \sum_{i=0}^{N} x_n + u^{N+1}\sum_{i=0}^{n} u^i\\ &= \sum_{i=0}^{N} x_n + u^{N+1}\frac{1-u^{n+1}}{1-u} < \sum_{i=0}^{N} x_n + u^{N+1}\frac{1}{1-u}\end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. Yani kısmi toplamlar üstten sınırlıdır. Demek ki $\sum x_i$ serisinin limiti vardır.

Şimdi de $\ell > 1$ eşitsizliğini varsayalım. Eğer ℓ bir gerçel sayıysa, $\epsilon > 0$ sayısı, $\ell - \epsilon > 1$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilsin. Belli bir göstergeçten sonra, diyelim N göstergecinden sonra,

$$1 < \ell - \epsilon < x_i^{1/i} < \ell + \epsilon$$

olur. Bizim için önemli olan aslında belli bir $u > 1$ sayısı için ($u = \ell - \epsilon$ alın)

$$1 < u < x_i^{1/i}$$

eşitsizliklerini sağlayan sonsuz sayıda i bulmak olacak (yani bir kez daha limitin ℓ olduğunu kullanmayacağız.) Kolayca görüleceği üzere böyle bir u, $\ell = \infty$ ise de vardır. Demek ki her $i > N$ için

$$1 < u^i < |x_i|$$

olur ve $|x_i|$ teriminin limiti 0 olamaz, yani $\sum x^i$ serisi yakınsayamaz. □

Eğer $\lim_{i\to\infty} |x_i|^{1/i} = 1$ ise ama $|x_i|^{1/i}$ dizisi 1'e üstten yakınsıyorsa, yani $|x_i|^{1/i} \geq 1$ ise, o zaman seri ıraksar, çünkü o zaman $|x_i| \geq 1$ olmak zorundadır ve $\lim_{i\to\infty} |x_i|$ limiti kesinlikle 0 olamaz. Örneğin,

$$\sum \left(\frac{n + 1/3}{n - 1/2}\right)^{5n}$$

serisinin ıraksaklığı bu sayede hemen anlaşılır.

Kanıttan da anlaşılacağı üzere aslında çok daha genel bir teorem kanıtladık:

Teorem 18.4 (Cauchy Kıstası 2)**.** *$\sum x_i$ bir seri olsun.*
Eğer $\limsup |x_i|^{1/i} < 1$ *ise, $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaktır.*
Eğer $\limsup |x_i|^{1/i} > 1$ *ise (dolayısıyla* $\liminf |x_i|^{1/i} > 1$ *ise de), $\sum x_i$ serisi ıraksaktır.*

Bu teoremin -artık kolay olması gereken- kanıtını okura bırakıyoruz.

18.3 Cauchy-d'Alembert Karşılaştırması

Bu altbölümde, önceki iki altbölümde gördüğümüz iki kıstası karşılaştıracağız. Cauchy Yakınsaklık Kıstası'nın bir anlamda d'Alembert Yakınsaklık Kıstası'ndan daha genel olduğunu göreceğiz.

Teorem 18.5. *$(x_i)_i$ pozitif bir dizi olsun. Eğer* $\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i}$ *limiti varsa o zaman* $\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i}$ *limiti de vardır ve iki limit birbirine eşittir:*

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i} = \lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i}.$$

Kanıt: Örnek 13.16'dan çıkar. □

Alıştırmalar

18.33. Terimleri $a_n = n^n/n!$ olan diziye Teorem 18.5'i uygulayarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$$

eşitliğini kanıtlayın.

18.34. Teorem 18.5'i uygulayarak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

Demek ki $\sum x_i$ pozitif serisinin yakınsaklığını anlamak için d'Alembert Kıstası'nı uygulamaya kalkıp,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = 1$$

bulmuşsak, ardından Cauchy yakınsaklık kıstasını uygulamaya kalkışmak gereksiz bir uğraştır çünkü zorunlu olarak

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i} = 1$$

bulunacaktır. Ayrıca, önce Cauchy yakınsaklık kıstasını uygulayıp

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{1/i} = 1$$

bulmuşsak, yukarıda kanıtladığımız teoreme göre ya $\lim_{i\to\infty} x_{i+1}/x_i$ diye bir limit olmayacaktır ya da bu limit olacaktır ama 1'e eşit olacaktır, yani bu durumda da ikinci kıstası uygulamak neredeyse gereksizdir. ("Neredeyse" dedik çünkü $|x_i|^{1/i}$ dizisi 1'e alttan yakınsamasına rağmen, $|x_{i+1}|/|x_i|$ dizisi 1'e üstten yakınsayabilir, dolayısıyla seri ıraksayabilir; yani Cauchy yakınsaklık kıstasının yakınsaklığına karar veremediği bir seriye d'Alembert yakınsaklık kıstası bazı ender durumlarda olumsuz yanıt verebilir.)

Ama aşağıdaki Alıştırma 18.38'den anlaşılacağı üzere, $|x_{i+1}|/|x_i|$ dizisinin limiti olmasa da $|x_i|^{1/i}$ dizisinin limiti olabilir.

Örnekler

18.35. $0 < a < b < 1$ olsun. Şu seriye bakalım:

$$1 + 1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

d'Alembert kıstasını uygulamaya çalışalım. Dizinin terimlerine x_n diyelim. Her n için öyle bir k var ki (k aşağı yukarı n'nin yarısı) ya

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

ya da

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^k.$$

Demek ki, $b > a$ olduğundan

$$\limsup \frac{x_{n+1}}{x_n} = \infty \text{ ve } \liminf \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$$

olur ve genelleştirilmiş d'Alembert kıstası bile serinin yakınsaklşığına ya da ıraksaklığına karar veremez.

Cauchy kıstasını uygulamaya çalışalım. Elbette

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = 1$$

olur, yani Cauchy kıstası da bu durumda karar veremez. Üstelik limit 1'e soldan gittiğinden, yani her n için $(x_n)^{1/n} < 1$ olduğundan Cauchy kıstasının inceliklerinden de yararlanamayız (bkz. sayfa 322).

İşin gerçeği: Seri pozitif olduğundan,

$$1 + 1 + a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots = \sum a^i + \sum b^i = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b}$$

olur ve seri yakınsaktır!

18.36. $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$.

Teorem 18.5'te $x_n = 1/n!$ alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olduğundan, teoreme göre,

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} = 0$$

olur. Demek ki, $1/n! > 0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} n!^{1/n} = \infty$ olur. □

18.37. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$. Teoremde $x_n = n$ alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

olduğundan, $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ olur.

Alıştırma 18.38. a ve b iki pozitif gerçel sayı olsun. Her n doğal sayısı için x_n'yi şöyle tanımlayalım:

$$x_n = \begin{cases} a^k b^k & \text{eğer } n = 2k \text{ ise} \\ a^{k+1} b^k & \text{eğer } n = 2k+1 \text{ ise} \end{cases}$$

$\sum x_i$ pozitif serisinin yakınsaklığını anlamak için d'Alembert ve Cauchy kıstaslarını uygulayın. Hangisi karar verebiliyor? Serinin toplamını bulun.

Not: Bazen ne d'Alembert ne Cauchy ne de daha sonra göreceğimiz Raabe kıstası bir serinin yakınsaklığına karar verebilir. Bu durumlarda teleskopik seri yöntemini denemeye çalışmakta yarar vardır. Örneğin $a_n > 0$ için

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{\prod_{j=0}^{i}(1+a_j)}$$

serisinin yakınsaklığına bu bölümde gördüğümüz ve ileride göreceğimiz kıstaslar karar veremezler ama teleskopik seri fikriyle Örnek 14.17'de bu serinin yakınsadığını kolaylıkla kanıtlayabilmiştik.

18.4 Yakınsaklık Yarıçapı

Geçmişte, verilmiş bir x gerçel sayısına göre değişen seri örnekleri gördük sık sık. Örneğin, $\exp x = \sum x^i/i!$ bu tür serilerden biriydi.

$$\sum a_i x^i$$

biçiminde yazılan serilere ***kuvvet serisi*** adı verilir. Tabii kuvvet serileri bazı x'ler için yakınsaktır, bazıları için ise değildir.

Bu seri gibi, anlamsız bir X için

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$$

biçiminde yazılan *biçimsel* serilere ***biçimsel kuvvet serisi*** adı verilir. İkinci cildin ekinde (Bölüm 22) biçimsel kuvvet serilerinden uzun uzadıya sözedeceğiz.

Biçimsel Kuvvet Serileri Hakkında Kısa Bilgi: Biçimsel kuvvet serileri fonksiyon değildirler, sadece "anlamsız" birer ifadedirler[2]. Eğer biçimsel bir kuvvet serisini,

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

olarak yazarsak, biçimsel kuvvet serilerinin polinomların genelleştirilmiş bir hali olduklarını görürüz; nitekim, eğer her $m > n$ için $a_m = 0$ ise, yukarıdaki biçimsel kuvvet serisi,

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

polinomuna dönüşür (bkz. sayfa 110), yani her polinom aslında bir biçimsel kuvvet serisidir. Eğer x gerçel sayısı için $\sum a_i x^i$ serisi yakınsaksa, o zaman $\sum a_i X^i$ biçimsel kuvvet serisini x'te değerlendirip $\sum a_i x^i$ sayısını elde ederiz.

[2]Polinomlar da fonksiyon değildir, ama her polinom $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlar. Örneğin $p(X) = X^2+X-1$ polinomu $x \mapsto p(x) = x^2+x-1$ kuralıyla verilen bir fonksiyon tanımlar. Bunun nedeni polinomları $\mathbb{R}$'nin her elemanında değerlendirebilmemizdir. Biçimsel kuvvet serilerini $\mathbb{R}$'nin her elemanında değerlendiremeyeceğimizden, biçimsel kuvvet serileri tanım kümesi $\mathbb{R}$ olan bir fonksiyon tanımlamayabilirler.

Bu tür nesnelere "biçimsel" adı verilmesinin nedeni şudur: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ ve $\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ elemanlarının eşit olması için yeter ve gerek koşul her $i \in \mathbb{N}$ için $a_i = b_i$ eşitliğidir, yani eşitlik gerçekten görsel eşitliktir.

Biçimsel kuvvet serileriyle de toplama, çarpma, çıkarma, bir sayıyla çarpma gibi işlemler yapılabilir:

$$\left(\sum a_i X^i\right) \pm \left(\sum b_i X^i\right) = \sum (a_i \pm b_i) X^i,$$
$$\lambda \left(\sum a_i X^i\right) = \sum \lambda a_i X^i,$$
$$\left(\sum a_i X^i\right)\left(\sum b_j X^j\right) = \sum \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n.$$

Çarpmayı biraz açmakta yarar var: $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ kuvvet serisiyle $b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots$ kuvvet serisinin çarpımının ilk terimleri aşağıdaki gibidir:

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) X^3 + \cdots$$

Bu işlemlerle birlikte biçimsel kuvvet serileri kümesi $\mathbb{R}[[X]]$ olarak gösterilen bir halka oluşturur. Çarpma işlemi, her $a \in \mathbb{R}$ için $aX = Xa$ eşitliği ve dağılma ve birleşme özellikleri doğru olacak biçimde tanımlanmıştır.

a_0 terimine, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ kuvvet serisinin ***sabit terimi*** adı verilir. a_0 elbette, X'i 0'da değerlendirdiğimizde kuvvet serisinin aldığı değerdir.

$\mathbb{R}[T]$ halkasının (çarpma için) tersinir elemanları sabit terimi 0'dan farklı olan elemanlardır. Bunun (oldukça kolay olan) kanıtını Önsav 25.1'de vereceğiz.

Bu altbölümde irdeleyeceğimiz soru şu: $(a_i)_i$ sayı dizisi verilmiş olsun ya da -aynı şey- bir $\sum a_i X^i$ biçimsel kuvvet serisi verilmiş olsun; hangi x gerçel sayıları için

$$\sum a_i x^i$$

kuvvet serisi yakınsaktır, ve tabii, hangi x gerçel sayıları için seri ıraksaktır?

Biçimsel bir kuvvet serisinin en azından 0'da yakınsak olduğu belli. Ama 0'dan başka hangi sayılarda yakınsaktır?

Bu önemli bir soru, çünkü eğer her $x \in B \subseteq \mathbb{R}$ için $\sum a_i x^i$ serisi yakınsaksa, o zaman $\sum a_i X^i$ kuvvet serisi B'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlar:

$$x \mapsto \sum a_i x^i;$$

ve bu tür fonksiyonlar, polinomlardan sonra analizi ve anlaşılması en kolay fonksiyonlardır.

Cauchy Kıstası'nı kullanarak bu altbölümde bu sorunun yanıtını bulacağız.

Teorem 18.6. *$(a_i)_i$ bir dizi, $S = \limsup |a_i|^{1/i} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ve*

$$R = \frac{1}{S} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

olsun. O zaman $|x| < R$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\sum a_i x^i$ serisi mutlak yakınsaktır ve $|x| > R$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\sum a_i x^i$ serisi ıraksaktır.

Cauchy Kıstası sayesinde teoremin kanıtı sadece birkaç satırdan ibaret olacak. Ufuk açıcı olduğunu iddia edemeyeceğimiz kanıta başlamadan önce teoremin kendisini tartışalım.

Problemi tersine çevirip şu soruyu da sorabiliriz: Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ise ve

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyonsa, f'yi yukarıdaki gibi bir kuvvet serisi olarak yazabilir miyiz, yani öyle bir $(a_i)_i$ dizisi var mıdır ki, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \sum a_i x^i$$

olsun? Örneğin $\exp x$, tanımı gereği, $X = \mathbb{R}$ için böyle bir fonksiyondur. Bu tür fonksiyonlar ele avuca gelen fonksiyonlar olduğundan, soru ve bu sorunun varyasyonları matematikte ve fizikte önemlidir.

Eğer X sonlu bir kümeyse, her f fonksiyonunun bu özelliği vardır, çünkü sonlu küme üstüne tanımlanmış bir fonksiyon her zaman bir polinom (dolayısıyla bir kuvvet serisi) olarak yazılabilir. Marifet, X daha büyük olduğunda, örneğin açık bir aralık olduğunda f'nin bu özelliğinin olup olmadığını anlamaktır.

Bu tür fonksiyonların analizi polinomların analizi kadar kolay olmasa da polinomların analizinden sadece bir dirhem daha zordur, polinom olmasalar da polinomiyal fonksiyonlara oldukça benzerler. Örneğin n'yi yeterince büyük seçersek,

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

sayısı $\exp x$'e çok yakın olur. Zaten hesap makinaları da $\exp x$'i bu yöntemle hesaplarlar, belli bir n için,

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

sayısını bize $\exp x$ diye yuttururlar. Aynı şey sin ve cos gibi “aşkın” olarak nitelenen fonksiyonlar için de geçerlidir. Zaten biz de bu fonksiyonların tanımını liselerde alışılageldiği gibi dik üçgenler ve düzlem geometrisi kullanılarak değil, kuvvet serileriyle vermiştik:

$$\sin x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\ , \ \cos x = \sum (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}.$$

Yukarıdaki exp, sin ve cos örneklerinin her biri $\mathbb{R}$'de “analitik”tir, yani kuvvet serileriyle tanımlanan bu fonksiyonlar $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlardır. Şimdi

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

gibi daha masum görünüşlü bir fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon $(-1, 1)$ aralığında bir seri olarak ifade edilebilir. Nitekim, defalarca kanıtlandığımız üzere, her $x \in (-1, 1)$ için,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum x^i$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 18.6'nın Kanıtı: $x = 0$ ise her şey bariz. Artık $x \neq 0$ olsun. Cauchy Teoremi'ne göre,

$$\limsup |a_i x^i|^{1/i} < 1$$

ise,

$$\sum a_i x^i$$

serisi mutlak yakınsaktır. Ama

$$\limsup |a_i x^i|^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i} |x| = |x| \cdot \limsup |a_i|^{1/i}$$

olduğundan, $\limsup |a_i x^i|^{1/i} < 1$ koşulu,

$$|x| < \frac{1}{\limsup |a_i|^{1/i}} = R$$

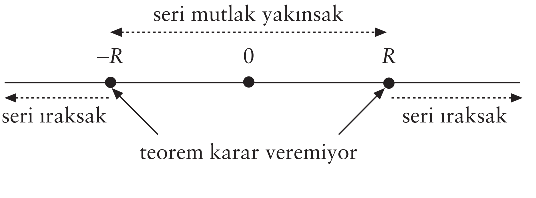
koşuluna denktir. (Bu dediğimiz, $1/0 = \infty$ tanımıyla $\limsup |a_i|^{1/i} = 0$ ise de geçerlidir!) Benzer şekilde $|x| > R$ ise, serinin ıraksaklığı kolaylıkla gösterilir. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

R'ye $\sum a_i X^i$ kuvvet serisinin ***yakınsaklık yarıçapı*** adı verilir.

R'nin sonsuz olabileceğini unutmayalım, ki bu durumda seri her x için yakınsaktır.

Katsayılar büyüdükçe yakınsaklık yarıçapı azalır elbet, ama aynı da kalabilir. $\sum x^i$ ve $\sum ix^i$ serilerinin ve katsayıları daha da büyük olan $\sum i^2 x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Örnek 18.40'ın sonunda R'nin 0 olduğu bir kuvvet serisi bulacaksınız; bu durumda seri sadece $x = 0$ için yakınsaktır.

Bu arada teoremin, $|x| = R$ eşitliği halinde, $R = 0$ olmadıkça, kuvvet serisinin yakınsaklığı hakkında herhangi bir ipucu vermediğine de dikkatinizi çekeriz.



Demek ki $\sum a_i X^i$ kuvvet serisi, teoreme göre $(-R, R)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon veriyor ve bu fonksiyonu en fazla, $[-R, R]$ aralığına uzatabiliriz (o da eğer R sonlu bir sayıysa tabii!)

Sonuç 18.7. *Eğer $\sum a_i x_0^i$ yakınsaksa, o zaman $|x| < |x_0|$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\sum a_i x^i$ serisi mutlak yakınsaktır ve serinin yakınsaklık yarıçapı $\geq |x_0|$ olur.* □

Sonuç 18.8. *Eğer $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ varsa ve S'ye eşitse, $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $1/S$ olur.*

Kanıt: Teorem 18.5'e göre $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \ell$ olur. Sonuç şimdi Teorem 18.6'dan çıkar. □

Sonuç 18.9. *Eğer $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 0'dan büyük ise, her i için $|a_i| < ma^i$ eşitsizliğinin sağlandığı a ve m sayıları vardır. İstenirse $m = 1$ alınabilir.*

Kanıt: $r > 0$ yakınsaklık yarıçapı olsun. Rastgele bir $0 < s < r$ seçelim ve $a = 1/s$ olsun. $(|a_i|s^i)_i$ dizisi 0'a yakınsadığından sınırlıdır. m, bu dizinin bir üstsınırı olsun. İstediğimiz eşitsizlikler sağlanır. Son olarak, a'yı yeterince büyük alarak m'yi 1'e eşit alabileceğimizi görelim. □

Son olarak kanıtlayacağımız aşağıdaki sonuç, 0'ı içeren bir aralık sözkonusu olduğunda, biçimsel kuvvet serileriyle kuvvet serileri arasında büyük bir ayrım olmadığını söylüyor.

Teorem 18.10. *Eğer bir $R > 0$ ve her $x \in [0, R)$ için $\sum a_i x^i = \sum b_i x^i$ ise o zaman her i için $a_i = b_i$ olur.*

Kanıt: $c_i = a_i - b_i$ tanımını yaparak, eğer $[0, R)$ üzerinde $\sum c_i x^i = 0$ ise her c_i'nin 0 olduğunu kanıtlamalıyız. Teorem 18.6'ya göre, R'yi gerekirse daha küçük seçerek her $x \in [0, R]$ için $\sum c_i x^i$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu varsayabiliriz. Bu hazırlıklardan sonra teoremin kanıtına geçelim.

Kuvvet serisini $x = 0$'da değerlendirerek, $c_0 = 0$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi $c_1 = 0$ eşitliğini gösterelim. $x \neq 0$ için,

$$-c_1 = x \sum c_{i+2} x^i$$

olduğundan, $c_1 = 0$ eşitliğini göstermek için $\sum c_{i+2} x^i$ serisinin 0 içeren bir aralıkta sınırlı olduğunu göstermek yeterli. (Böylece yukarıdaki eşitliği $x = 0$'da değerlendirebiliriz ve $c_1 = 0$ eşitliğini elde ederiz.) Eğer $x \in (0, R)$ ise,

$$\sum c_{i+2} x^i = -\frac{c_1}{x}$$

olduğundan, $\sum c_{i+2}x^i$ serisi de yakınsaktır; dolayısıyla $\sum c_{i+2}X^i$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 0'dan büyüktür ve herhangi bir $0 < S < R$ sayısı için kuvvet serimiz $[-S, S]$ aralığında mutlak yakınsaktır. Demek ki her $-S < x \le S$ sayısı için,

$$\left|\sum c_{i+2}x^i\right| \le \sum |c_{i+2}||x|^i \le \sum |c_{i+2}|S^i = B$$

olur. Böylece $c_1 = 0$ eşitliği ispatlanmış oldu. Aynı yöntemle $c_2 = c_3 = \ldots = 0$ eşitlikleri gösterilebilir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Örnekler

18.39. *$\sum X^i/i$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir ve bu kuvvet serisi sadece ve sadece $x \in [-1, 1)$ için yakınsaktır.*
Kanıt: Teoremi kullanıp,

$$\limsup |a_i|^{1/i} = \limsup |1/i|^{1/i} = \lim 1/i^{1/i}$$

sayısını hesaplayalım. 1 bulacağımızı iddia ediyoruz; demek ki $\lim_{i\to\infty} i^{1/i} = 1$ eşitliğini iddia ediyoruz. Ama bu eşitliği Örnek 18.37'de görmüştük. Aynı sonuç biraz daha kolay biçimde Sonuç 18.8'den de çıkar. □

18.40. *Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapları ∞'dur, yani bu seriler her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsarlar.*

$$\sum \frac{X^i}{i!},\ \sum (-1)^i \frac{X^{2i+1}}{(2i+1)!},\ \sum (-1)^i \frac{X^{2i}}{(2i)!}.$$

Kanıt: Sadece birincisini (bir defa daha!) kanıtlayalım.

$$\limsup |a_i|^{1/i} = \limsup 1/i!^{1/i}$$

sayısını hesaplayalım. 0 bulacağımızı iddia ediyoruz; bu dediğimiz, Örnek 18.36'da kanıtladığımız $\lim i!^{1/i} = \infty$ eşitliğinden çıkacağı gibi, Sonuç 18.8'den de çıkar. □

Demek ki, bu örnekteki biçimsel kuvvet serilerinden her biri bize $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon verir. Defalarca söylediğimiz gibi bu fonksiyonlara sırasıyla, exp, sin ve cos adı verilir.
Aslında,

$$\sum \frac{X^i}{i!}$$

biçimsel kuvvet serisinin her gerçel sayıda yakınsaklığını bildiğimizden (Örnek 18.5), bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı ∞'dur ve böylece teoremi kullanarak,

$$\limsup\ i!^{1/i} = \infty$$

eşitliğini bir kez daha kanıtlayabiliriz.
Yakınsaklık yarıçapı 0 da olabilir. Örneğin, $\sum i!X^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 0'dır, yani bu kuvvet serisini sadece $x = 0$'da değerlendirebiliriz (ve yanıt 1 çıkar).

18.41. [BR] Bu örnekte iki serinin Cauchy çarpımının yakınsaklık yarıçapının, çarpılan iki serinin yakınsaklık yarıçaplarından bağımsız olduğunu göreceğiz.

$$a(x) = \sum \left(\frac{1}{3^{i+1}} + \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i+1}}\right) x^i$$

ve

$$b(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sum 2^i x^i$$

olsun. O zaman $a(x)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 2'dir, $b(x)$'inki ise 1/2'dir. Biraz hesapla, $a(x)$ ile $b(x)$ serilerinin Cauchy çarpımının

$$c(x) = \sum \frac{1}{3^{i+1}} x^i$$

olduğu görülür. $c(x)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 3'tür. Bunun neden böyle olduğunu anlamak zor değildir. Yakınsaklık yarıçapları içinde

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{3-x} - \frac{1}{2+x} = \frac{2x-1}{(3-x)(2+x)}, \\ b(x) &= \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\frac{1}{1-2x} = \frac{x+2}{2x-1}, \\ c(x) &= a(x)b(x) = \frac{2x-1}{(3-x)(2+x)} \times \frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{3-x} \end{aligned}$$

olur. Sadeleşmeler, yakınsaklık yarıçapını artırıyor. Bu konuda bkz. Alıştırma 18.47.

Alıştırmalar

18.42. $a > 0$ için, $\sum (x-a)^i$ serisinin hangi x sayıları için yakınsak olduğunu bulun.

18.43. a ve b, iki pozitif sayı olsun.

$$1 + bx + abx^2 + a^2bx^3 + a^2b^2x^4 + a^3b^2x^5 + \cdots$$

serisinin yakınsaklık yarıçapının $1/\sqrt{ab}$ olduğunu gösterin. (Serinin katsayıları sırasıyla b ve a ile çarpılarak elde ediliyor.)

18.44. $(a_n)_n$ dizisi sınırlıysa $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının en az 1 olduğunu kanıtlayın.

18.45. $\lim_{n\to\infty} a_n$ varsa $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının en az 1 olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Bir önceki alıştırma.)

18.46. $\sum a_i$ yakınsaksa $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının en az 1 olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Bir önceki alıştırma.)

18.47. İki kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapları r_1 ve r_2 olsun. Bu serilerin Cauchy çarpımının yakınsaklık yarıçapının $\geq \min\{r_1, r_2\}$ olduğunu gösterin.

18.5 Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegralleri

$\sum_{i\geq 1} i a_i X^{i-1}$ biçimsel kuvvet serisine (bazılarının tahmin edeceği nedenden) $\sum_{i\geq 0} a_i X^i$ biçimsel kuvvet serisinin ***türevi*** adı verilir ve bu,

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i X^{i-1}$$

olarak yazılır[3]. Türevin tanımını,

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots)' \\ = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \cdots + na_nX^{n-1} + \cdots$$

olarak vermek, tanımı biraz daha çabuk anlaşılır kılabilir ve yapılacak olası yanlışları önleyebilir, çünkü örneğin,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^{2i+1}$$

kuvvet serisinin türevi, verilen ilk tanıma alelacele bakıp sanılabileceği gibi,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (2i+1)a_iX^{2i}$$

değil,

$$\sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)a_iX^{2i}$$

olur, çünkü bu kuvvet serisinin ilk terimi a_0X'tir. Bu yüzden,

$$0 \times a_i \times X^{-1} = 0$$

anlaşmasını yaparak, kuvvet serisinin türevinin tanımını

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i\right)' = \sum_{i=0}^{\infty} ia_iX^{i-1}.$$

olarak vermek daha pratiktir.

Biçimsel bir kuvvet serisinin türevinin de türevi alınabilir tabii ve bu türev alma işlemini dilediğimiz kadar sürdürebiliriz. Bir kuvvet serisinin türevleri birinci, ikinci, üçüncü... türevler olarak bilinir. Kuvvet serisinin 0'ıncı türevinin kendisine eşit olduğu kabul edilir. Bir f kuvvet serisinin n'inci türevini $f^{(n)}$ olarak yazarsak,

$$f^{(0)} = f, \\ f^{(1)} = f', \\ f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

[3]Burada tanımlanan türev, cebirsel, yani formel, bir başka deyişle dünyevi bir anlamı olmayan bir kavramdır. Zaten biçimsel kuvvet serilerinin de bir anlamı yoktur, öylesine, formel olarak tanımlanmışlardır. Geometrik bir anlamı olan analizdeki türevi bir sonraki ciltte tanımlayacağız.

eşitlikleri doğrudur. Türevlerin f'', f''', f^{iv} olarak yazıldığı da olur. Özellikle f'' ve f''' pek sık kullanılan bir yazım türüdür.

Türeve hemen birkaç örnek verelim.

$$\begin{aligned}(\exp X)' &= \exp X,\\ (\sin X)' &= \cos X,\\ (\cos X)' &= -\sin X.\end{aligned}$$

Buradaki $\exp X$, $\cos X$ ve $\sin X$ tahmin edilen kuvvet serileri anlamına gelirler.

Tanımları anımsayarak, bunları teker teker kanıtlayalım. Önce[4] exp:

$$(\exp x)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ix^{i-1}}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp x.$$

Şimdi açıklayamayacağımız haklı nedenlerden, matematikte $(\exp x)'$ yerine $\exp' x$ yazılır. Bunun gibi, $(\sin x)'$ ve $(\cos x)'$ yerine $\sin' x$ ve $\cos' x$ yazılır.

Görüldüğü gibi, exp fonksiyonu kendi türevine ve hatta türevlerine eşit:

$$\exp = \exp' = \exp^{(n)}.$$

Okur, alıştırma olarak türevine eşit olan tüm kuvvet serilerini bulabilir.

Şimdi de sin kuvvet serisinin türevini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\sin' x &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)' = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(2i+1)\frac{x^{2i}}{(2i+1)!}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \cos x.\end{aligned}$$

Ve en nihayet cos kuvvet serisinin türevi:

$$\begin{aligned}\cos' x &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}\right)' = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(2i)\frac{x^{2i-1}}{(2i)!} = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}\\ &= -\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!} = -\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = -\sin x.\end{aligned}$$

Demek ki (kuvvet serileri olarak görüldüğünde),

$$\sin'' = -\sin \text{ ve } \cos'' = -\cos;$$

[4]Büyük harf X yerine, sanki bir sayıymışçasına küçük harf x'i kullanıyoruz. Ama bu yazılım seriyi daha az kuvvet serisi yapmaz tabii.

yani sin ve cos kuvvet serilerinin ikinci türevleri bu kuvvet serilerinin negatiflerine eşit.

"Şimdi durduk yerde kuvvet serilerinin türevleri konusuna niye girdik?" sorusunu soran okurları şu teoremi kanıtlayarak yanıtlayalım:

Teorem 18.11. *Bir kuvvet serisinin ve türevinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.*

Örneğin,

$$\sum_{i\geq 0} X^i$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 olduğundan, türevi olan

$$\sum_{i\geq 1} iX^{i-1},$$

yani

$$\sum_{i\geq 0}(i+1)X^i$$

kuvvet serisinin de yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Bundan da

$$\sum_{i\geq 0} iX^i$$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu çıkar. (Neden?)

Teorem 18.11'in Kanıtı: Kuvvet serimiz $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ olsun. Bu kuvvet serisinin türevi

$$\sum_{i\geq 1} ia_i x^{i-1}$$

dir. Ama bu türevin yakınsaklık yarıçapıyla, bunun x'le çarpılmışı olan

$$\sum_{i\geq 1} ia_i x^i$$

serisinin yakınsaklık yarıçapı aynıdır. Demek ki,

$$\limsup |ia_i|^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i}$$

eşitliğini kanıtlamamız yeterli; kanıtlayalım:

$$\limsup |ia_i|^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i} i^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i} \lim i^{1/i} = \limsup |a_i|^{1/i}.$$

Burada Önsav 13.8'i ve Örnek 18.37'yi kullandık. □

$\sum_{i\geq 0} b_i x^i$ kuvvet serisinin türevi $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ ise o zaman

$$\sum_{i\geq 0} b_i x^i$$

kuvvet serisine, $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ kuvvet serisinin ***integrali*** (Fransız etkisinde kalmış eskilerin diliyle ***entegrali*** adı verilir.) Elbette,

$$\sum_{i\geq 1} i b_i x^{i-1} = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$$

olmalı. Dolayısıyla b_0 herhangi bir gerçel sayı olabilir ama $i \geq 1$ için, $a_{i-1} = ib_i$ olmalı, yani b_0 sabit terimi dışında, $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$ kuvvet serisinin integralinin diğer katsayıları tamamıyla a_i katsayıları tarafından belirlenmiştir.

Teorem 18.12. *Bir kuvvet serisinin ve integralinin yakınsaklık yarıçapları eşittir.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır; aynen Teorem 18.11'in kanıtı gibidir. □

Alıştırma 18.48. $0 \leq x < 1$ için

$$\sum ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

eşitliğini kanıtlayın. Aynı eşitlik $-1 < x < 0$ için de geçerlidir ama bu kitaptakinden daha derin analiz yapmadan bunu nasıl kanıtlayabileceğimizi göremedik.

19. Birkaç Önemli Yakınsaklık Kıstası Daha

19.1 Riemann Serisi ve Kıstası

Geçmişte birçok seriyi geometrik seriyle, yani

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

serisiyle karşılaştırmıştık. Bize çok yardımcı olan bu seriyi "dost seri" ya da "yardımcı seri" olarak algılayabiliriz. Seriler konusunda bu nitelemeyi hakeden bir başka tür seri daha vardır. ***p-serileri*** ya da ***Riemann serileri***, yani bir p için,

$$\zeta(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

türünden yazılan serilerdir bunlar. $\zeta(p)$ yazılımı klasiktir. Adına ***Riemann zeta fonksiyonu*** denir. (Ama neden fonksiyon dendiği ve fonksiyonsa tanım kümesinin ne olduğu şimdilik bir muamma olmalı.) Matematiğin ve sayılar kuramının en önemli ve en muamma fonksiyonlarından biridir. Asal sayıların dağılımıyla yakın ilişkisi vardır.

Eğer $p = 2$ ise bu serilerin yakınsaklığını geçmişte birçok kez kanıtlamıştık. Dolayısıyla $p > 2$ ise de bu serinin yakınsaklığını biliyoruz. Öte yandan $p < 2$ ise bu serinin yakınsaklığı hakkında şimdilik bir şey bilmiyoruz.

Teorem 19.1. *p kesirli bir sayı olsun. O zaman,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$$

serisi $p > 1$ ise yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır[1].

[1] Bu teorem $p \in \mathbb{R}$ ise de geçerlidir. Teorem 19.1 ışığında, $p \in \mathbb{R}$ iken i^p'nin tanımı [N4]'de verildiğinde bunun kanıtı çok kolay olacak. Bkz. [N4, Teorem 6.6].

Birinci Kanıt: Eğer $p \leq 1$ ise, $1/n^p \geq 1/n$ ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} = \infty$$

olur. Bundan böyle $p > 1$ olsun.

Kısmi toplamların

$$1 + \frac{1}{p-1}$$

sayısı tarafından üstten sınırlandığını kanıtlayacağız, böylece serinin yakınsaklığı kanıtlanmış olacak. Demek ki bir sonraki savı kanıtlamak yeterli.

Sav. *Eğer $p > 1$ bir kesirli sayıysa her $n \geq 2$ için,*

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^p} \leq \frac{1 - n^{1-p}}{p-1}$$

olur.

Sav'ın Kanıtı: $n = 2$ için, eşitsizlik,

$$\frac{1}{2^p} \leq \frac{1 - 2^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğine dönüşür. Yani, $p+1 \leq 2^p$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Önsav 3.18'de $x = 1$ alırsak, savımız $n = 2$ için kanıtlanmış olur. Şimdi $n \geq 2$ için,

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^p} \leq \frac{1 - n^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğini varsayıp,

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^p} \leq \frac{1 - (n+1)^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Böylece savımız tümevarımla kanıtlanmış olacak. Tümevarım varsayımına göre,

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^p} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^p} + \frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1 - n^{1-p}}{p-1} + \frac{1}{(n+1)^p}$$

olduğundan,

$$\frac{1-n^{1-p}}{p-1} + \frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1-(n+1)^{1-p}}{p-1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Bu son ifadeyle biraz oynayalım. Önce

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{n^{1-p}-(n+1)^{1-p}}{p-1},$$

sonra paydaları eşitleyerek,

$$p-1 \leq (n+1)^p n^{1-p} - (n+1) = (n+1)^p n n^{-p} - n - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^p n - n - 1$$

elde ederiz, yani

$$1 + \frac{p}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. Ama Önsav 3.18'de $x = 1/n$ alınırsa bunun doğru olduğu görülür. Sav'la birlikte teorem de kanıtlanmıştır. □

Teorem ve Kanıtı Üzerine. Tahmin edileceği üzere, kanıtladığımız teorem sadece kesirli p sayıları için değil, gerçel p sayıları için de geçerlidir. Bunu bir gerçel sayıyla üs almayı öğrendiğimizde göreceğiz.

Bu teorem, integral kıstası denen bir kıstasla çok daha kolay biçimde, birkaç satırda kanıtlanır. Kitaplarda da genellikle integral testini kullanan kanıtlar bulunur. (Üçüncü ciltte bu testi göreceğiz.) Aslında verdiğimiz kanıtta yaptığımız, integral kıstasını kullanarak, teoremi kanıtlamak için Sav'daki eşitsizliği kanıtlamamız gerektiğini anlayıp, o eşitsizliği elementer yöntemlerle kanıtlamaktan ibarettir; yoksa Sav'daki eşitsizliği tahmin etmek ortalama bir ölümlüye nasip olmaz. Yani her ne kadar integral kıstasını kanıtımızda açık açık kullanmamışsak da, bu kıstası üstü kapalı bir biçimde kullandık.

Aşağıda aynı teoremin iki değişik kanıtını daha vereceğiz.

Teorem 19.1'in Çok Daha Makul İkinci Kanıtı:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p}$$

olsun. O zaman her $k \geq 1$ için,

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} = \frac{1}{(2^{k-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{k-1}+2)^p} + \cdots + \frac{1}{2^{kp}}$$

olur. Sağ tarafta tam 2^{k-1} tane terim var ve her biri $1/2^{(k-1)p}$ sayısından küçük. Demek ki,

$$S_{2^k} - S_{2^{k-1}} \leq 2^{k-1} \times \frac{1}{2^{(k-1)p}} = \frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}}.$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= (S_{2^k} - S_{2^{k-1}}) + (S_{2^{k-1}} - S_{2^{k-2}}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1 \\ &< \frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}} + \frac{1}{2^{(k-2)(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} + 1 + 1 < \frac{1}{1 - 1/2^{p-1}} + 1 \end{aligned}$$

olur ve böylece S_{2^k} toplamlarının sınırlı olduğu anlaşılır. Bundan, artan bir dizi olan $(S_n)_n$'nin de sınırlı olduğu çıkar. Dolayısıyla dizinin limiti vardır. □

Örnekler

19.1. Uygulama olarak,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\sqrt{i+1}}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Bu seriyi, teorem sayesinde yakınsak olduğunu bildiğimiz,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}}$$

dizisiyle karşılaştıracağız. Birinin i'inci terimini diğerinin i'inci terimine bölüp limiti alalım:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\frac{1}{i\sqrt{i+1}}}{\frac{1}{i^{3/2}}} = \lim_{i\to\infty} \frac{i^{3/2}}{i\sqrt{i+1}} = \lim_{i\to\infty} \frac{i^{1/2}}{\sqrt{i+1}} = \lim_{i\to\infty} \sqrt{\frac{i}{i+1}} = 1 \neq 0, \infty.$$

(En sondaki limitin 1 olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.) Sonuç 15.6'ya göre,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i\sqrt{i+1}}$$

serisi yakınsaktır.

19.2. $\sum \frac{1}{\sqrt{i(i^2-1)}}$ serisi yakınsaktır çünkü

$$\frac{1}{\sqrt{i(i^2-1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{i(i^2 - i^2/2)}} \leq \frac{\sqrt{2}}{i^{3/2}}$$

olur ve teoreme göre sağdaki terimlerin serisi yakınsaktır.

19.3. $\sum \frac{1}{i^{3/2}}$ serisiyle karşılaştırarak, $\sum \frac{i}{i^3+1}$ serisinin yakınsak olduğunu görürüz.

19.4. $p \in \mathbb{Q}$ olsun. $\sum \frac{1}{(2i+1)^p}$ dizisi $p > 1$ iken yakınsak, aksi halde ıraksaktır. Çünkü $p > 1$ ise

$$\frac{1}{(2i+1)^p} < \frac{1}{(2i)^p} < \frac{1}{2^p}\frac{1}{i^p}$$

olur ve $p \leq 1$ için

$$\frac{1}{(2i+1)^p} \leq \frac{1}{(3i)^p} < \frac{1}{3^p}\frac{1}{i^p}$$

olur.

19.5. Eğer n bir kare değilse $a_n = 1/n^2$ olsun, eğer n bir kareyse, $a_n = 1/n^{2/3}$ olsun. O zaman $\sum a_i$ yakınsar çünkü,

$$\sum a_i = \sum_{i \text{ kare değil}} \frac{1}{i^2} + \sum_{i \text{ kare}} \frac{1}{i^{2/3}} = \sum_{i \text{ kare değil}} \frac{1}{i^2} + \sum \frac{1}{i^{4/3}} \leq \sum \frac{1}{i^2} + \sum \frac{1}{i^{4/3}}$$

olur ve en sağdaki toplamı alınan iki seri yakınsaktır.

Şimdi bu teoremin iki sonucunu yazalım. Sonuçların uygulamalarını daha sonra göreceğiz.

Sonuç 19.2 (Riemann Kıstası)**.** *$\sum x_n$ pozitif bir seri olsun.*
i. *Eğer bir $s > 1$ için $\lim_{n\to\infty} n^s x_n = 0$ ise seri yakınsar.*
ii. *Eğer bir $s < 1$ için $\lim_{n\to\infty} n^s x_n = \infty$ ise seri ıraksar.*

Kanıt: $y_n = 1/n^s$ olsun.
i. Teoreme göre $\sum y_n$ yakınsaktır. Ve varsayıma göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

olur. Sonuç 15.5'e göre $\sum x_n$ yakınsar.
ii. Teoreme göre $\sum y_n$ ıraksaktır ve varsayıma göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$$

olur. Sonuç 15.5'e göre $\sum x_n$ ıraksar. □

Sonuç 19.3. *$\sum x_n$ pozitif bir seri olsun.*

$$z_n(s) = \frac{x_{n+1}}{x_n} - \left(\frac{n}{1+n}\right)^s$$

olsun.
i. *Eğer her $n > N$ için, $z_n(s)$'nin negatif olduğu bir $s > 1$ ve N varsa, o zaman $\sum x_n$ serisi yakınsaktır.*
ii. *Eğer her $n > N$ için, $z_n(s)$'nin negatif olduğu bir $s \le 1$ ve N varsa, o zaman $\sum x_n$ serisi ıraksaktır.*

Kanıt: Bu sonuç, yukarıdaki teoremin ve Oran Kıyaslama Teoremi'nin (bkz. Sonuç 15.6) doğrudan bir sonucudur. □

Alıştırmalar

19.6. Aşağıdaki serilerin yakınsaklığını tartışın.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{i\sqrt{i+1}},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2+i+1}{i^3},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^3+i+1}{i^2},\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2+(-1)^i i+1}{i^3-i+1},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)^2}{i^2(i+1)},\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1)^2}{i(i+1)},\ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^i i^2}.$$

19.7. Eğer $s > 1$ ise $(s-1)\zeta(s) < s$ eşitsizliğini gösterin. $1 \le (s-1)\zeta(s)$ eşitsizliği de doğrudur. Bunları kullanarak, eğer $s_n > 1$ ise ve $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ ise $\lim_{n\to\infty}(s_n - 1)\zeta(s_n) = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

19.8. $p \in \mathbb{Q}$ olsun.

$$\sum_{i>1} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

serisi hangi p kesirli sayıları için yakınsaktır?

Yukarıdaki alıştırmalarda verdiğimiz örneklerin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı d'Alembert ya da Cauchy kıstaslarıyla anlaşılamaz; illa Riemann Kıstası'nı kullanmak gerekir. Cauchy ve Riemann kıstasları $\sum r^n$ geometrik serisini nirengi serisi olarak kabul ettiğinden, bu kıstasların işe yaradığı seriler oldukça çabuk yakınsarlar ya da ıraksarlar. Öte yandan Riemann Kıstası $\sum_{n\geq 1} 1/n^p$ serisini nirengi serisi olarak kabul eder ve p sayısı 1'e yakın olduğunda bu seriler çok zor (yani çok yavaş) yakınsarlar ya da ıraksarlar. Yani Riemann Kıstası unutulmaması gereken oldukça güçlü bir kıstastır.

Örnekler

19.9.

$$\alpha(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^p} \textbf{ Serisi}$$

Eğer $p > 1$ ise, serinin mutlak yakınsadığı, eğer $p \leq 1$ ise serinin mutlak yakınsamadığı bu bölümde kanıtlanan teoremden belli. Eğer $p \leq 0$ ise, serinin ıraksadığı genel terimin 0'a yakınsamamasından anlaşılıyor. Eğer $0 < p \leq 1$ ise serinin koşullu yakınsadığı (yani yakınsadığı ama mutlak yakınsamadığı), Bölüm 17'de kanıtladığımız Leibniz Testi'nden belli. Sonuç olarak seri,

$$(-\infty, 0],\ (0, 1] \text{ ve } (1, \infty)$$

aralıklarında değişik davranışlar sergiliyor, sırasıyla ıraksıyor, koşullu yakınsıyor ve mutlak yakınsıyor. Anımsarsanız kuvvet serilerinde durum hiç bu kadar çetrefilli değildi. (Bkz. Teorem 18.6.)

19.10. *$0 < q < p$ kesirli sayılar olsun.*

$$\sum_{n>2} \frac{1}{n^p - n^q}$$

serisi yakınsak mıdır?

Yanıt: Sonuç 19.2 bize sonucu verir: Eğer $p > 1$ ise seri yakınsar çünkü eğer s kesirli sayısı $p > s \geq 1$ ve $s > q$ eşitsizliklerini sağlarsa,

$$n^s \frac{1}{n^p - n^q} = \frac{1}{n^{p-s} - 1/n^{s-q}} \longrightarrow 0$$

olur. Eğer $p < 1$ ise seri ıraksar çünkü eğer $s = 1$ ise

$$n^s \frac{1}{n^p - n^q} = \frac{n}{n^p - n^q} = \frac{n^{1-p}}{1 - 1/n^{p-q}} \longrightarrow \infty$$

olur.

19.11. *$p \in \mathbb{Q}$ olsun.*

$$\sum_{i>1} n^p \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

serisi hangi p kesirli sayıları için yakınsaktır?

Yanıt:

$$n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n^p\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=n^p\frac{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$
$$=\frac{\frac{n^p}{n(n-1)}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{n^p}{n(n-1)}\frac{\sqrt{n-1}\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\simeq\frac{n^p}{n^2}\frac{n}{2\sqrt{n}}$$
$$\simeq n^{p-2+1-1/2}=n^{p-3/2}$$

karşılaştırmasından dolayı, eğer $p\leq 5/2$ ise seri ıraksar, aksi halde yakınsar. □

Teorem 19.1'in Üçüncü Kanıtı: Üçüncü kanıt daha genel bir teoremden kaynaklanır:

Teorem 19.4 (Cauchy)**.** *$(a_n)_n$, azalan ve terimleri 0'dan büyük bir dizi olsun. $\sum_{n\geq 1}a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\sum_{i=0}^{\infty}2^ia_{2^i}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

Kanıt: Kısmi toplamların sınırlı olduklarını göstermek yeterli.

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
$$t_n=a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^na_{2^n},$$

olsun. Eğer $n<2^k$ ise $s_n\leq t_{k-1}$ olur çünkü

$$s_n\leq s_{2^k-1}=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^{k-1}}+\cdots+a_{2^k-1})$$
$$\leq a_1+2a_2+\cdots+2^{k-1}a_{2^{k-1}}=t_{k-1}.$$

Demek ki $(t_k)_k$ dizisinin limiti varsa $(s_n)_n$ dizisi üstten sınırlıdır ve limiti vardır. Öte yandan eğer $n>2^k$ ise $s_n\geq t_k/2$ olur çünkü

$$s_n\geq s_{2^k}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})$$
$$\geq\frac{a_1}{2}+a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{t_k}{2}.$$

Demek ki $(s_n)_n$ dizisinin limiti varsa $(t_k)_k$ dizisi üstten sınırlıdır ve limiti vardır. □

Teorem 19.1 bundan kolaylıkla çıkar: $\sum_{i=1}^{\infty}1/i^p$ serisinin yakınsak olması için yeter ve gerek koşul,

$$\sum_{i=1}^{\infty}2^i\frac{1}{(2^i)^p}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^{1-p}\right)^i$$

serisinin yakınsak olmasıdır, ki bu geometrik serinin ancak $p>1$ için yakınsak olduğunu biliyoruz. □

Teorem 19.4'ten daha genel bir teorem vardır. Yeri gelmişken o teoremi de belirtelim:

Teorem 19.5 (Cauchy Yoğunlaşma Teoremi)**.** *$(x_n)_n$ pozitif ve azalan bir dizi olsun. $(k_n)_n$ kesin artan bir doğal sayı dizisi olsun. Öyle bir $M > 0$ sayısının olduğunu varsayalım ki, her $0 < n \in \mathbb{N}$ için*

$$k_{n+1} - k_n \leq M(k_n - k_{n-1}).$$

olsun. Bu durumda

$$\sum x_n \text{ ile } \sum (k_{i+1} - k_i) x_{k_i}$$

serilerinden biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır.

Kanıt: Serilerin kısmi toplamlarına sırasıyla s_n ve t_n diyelim. $n < k_m$ için,

$$A = x_0 + \cdots + x_{k_0 - 1}$$

tanımıyla,

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{k_m} \leq A + (x_{k_0} + \cdots + x_{k_1 - 1}) + \cdots + (x_{k_m} + \cdots + x_{k_{m+1} - 1}) \\ &\leq A + (k_1 - k_0) x_{k_0} + \cdots + (k_{m+1} - k_m) x_{k_m} \\ &= A + t_m \end{aligned}$$

olur. Bu da $(t_m)_m$ dizisi sınırlıysa $(s_n)_n$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

Öte yandan eğer $n > k_m$ ise,

$$\begin{aligned} s_n &\geq s_{k_m} \geq (x_{k_0+1} + \cdots + x_{k_1}) + \cdots + (x_{k_{m-1}+1} + \cdots + a_{k_m}) \\ &\geq (k_1 - k_0) a_{k_1} + \cdots + (k_m - k_{m-1}) a_{k_m} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$M s_n \geq (k_2 - k_1) a_{k_1} + \cdots + (k_{m+1} - k_m) a_{k_m} = t_m - t_0$$

olur. Bu da $(s_n)_n$ dizisi sınırlıysa $(t_m)_m$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. □

19.2 Raabe Kıstasları

Teorem 18.1'de duyurulan ve kanıtlanan d'Alembert kıstasını anımsayalım. Aynen şöyle söylüyordu o kıstas:

d'Alembert Yakınsaklık Kıstası. *Eğer*

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|}$$

limiti varsa ve 1*'den küçükse, o zaman $\sum x_i$ serisi mutlak yakınsaktır. Eğer limit varsa ve* 1*'den büyükse ya da sonsuzsa o zaman seri ıraksaktır.* □

Limit 1 olduğunda d'Alembert kıstası bize serinin yakınsaklığı hakkında herhangi bir bilgi vermiyor. Örneğin,

$$\sum \frac{(2i)!}{4^i (i+1)! i!}$$

serisine d'Alembert kıstası uygulamaya çalışalım (terimleri faktoriyel barındıran serilere genellikle d'Alembert Kıstası uygulanmaya çalışılır):

$$\frac{\frac{(2i+2)!}{4^{i+1}(i+2)!(i+1)!}}{\frac{(2i)!}{4^i(i+1)!i!}} = \frac{(2i+2)(2i+1)}{4(i+2)(i+1)} \to 1.$$

Görüldüğü gibi limit 1 çıktı ve d'Alembert kıstası bize yakınsaklık konusunda bir ipucu vermedi. d'Alembert yakınsaklık kıstası'nın bize yakınsaklık hakkında bir ipucu vermediği bir başka seri,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

serisidir. Ama neyse ki bu serinin limiti olduğunu biliyoruz.

Bu altbölümde, limit 1 olduğunda başvurulabilecek bir başka kıstas kanıtlayacağız, Raabe kıstası. Bu kıstas sayesinde yukarıdaki serinin yakınsak olup olmadığını anlayabileceğiz.

Bir an için, $\sum x_i$ pozitif serisinin terimlerinin,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_{i+1}}{x_i} = 1$$

eşitliğini sağladığını varsayalım. Ve α_i terimlerini,

$$\alpha_i = 1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

olarak tanımlayalım. $(\alpha_i)_i$ dizisi elbette 0'a yakınsar ama dizinin 0'a nasıl yakınsadığı önemli. $(\alpha_i)_i$ dizisinin $(1/i)_i$ dizisiyle karşılaştırılması bize $\sum x_i$ serisinin yakınsaklığı konusunda ipucu verebilir. Teorem şöyle:

Teorem 19.6 (Raabe Kıstası)**.** *Eğer*

$$\lim_{i\to\infty} i\left(1 - \frac{|x_{i+1}|}{|x_i|}\right)$$

limiti varsa ve 1*'den büyükse o zaman* $\sum x_i$ *serisi mutlak yakınsaktır. Öte yandan limit* 1*'den küçükse seri ıraksaktır.*

Limit 1 olduğunda Raabe kıstası da serinin yakınsaklığı konusunda bir fikir beyan etmekten âciz. Seriler konusunda güçlüklerden ilelebet kurtulmanın yolu yoktur. Doktor ancak ağrı kesici verebiliyor...

Teorem 19.6'nın Birinci Kısmının Kanıtı: Her zaman olduğu gibi x_i yerine $|x_i|$ alarak serinin pozitif olduğunu varsayabiliriz ve böylece mutlak değerlerden kurtuluruz. Limite ℓ diyelim. $\epsilon > 0$ sayısı, $\ell - \epsilon > 1$ eşitliğini sağlayacak kadar küçük olsun. Varsayımdan dolayı öyle bir N vardır ki, her $i > N$ için,

$$1 < \ell - \epsilon < i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) < \ell + \epsilon$$

olur. Bizim için önemli olan ilk iki eşitsizlik olacak. $\ell - \epsilon$ yerine p diyelim. Demek ki yeterince büyük i için,

$$1 < p < i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right)$$

olur, yani öyle bir $p > 1$ vardır ki, yeterince büyük i göstergeçleri için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i}$$

olur. Aslında Raabe kıstasını kanıtlamak için sadece bu eşitsizliğe ihtiyacımız olacak, teoremin önermesindeki limitin varlığı ya da yokluğu umurumuzda olmayacak. Dolayısıyla limitten kurtulup çok daha genel bir teorem kanıtlayabiliriz:

Teorem 19.7 (Raabe Kıstası II)**.** *Eğer $x_i > 0$ ise ve yeterince büyük i göstergeçleri için*

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı i'den bağımsız bir $p > 1$ sayısı varsa, o zaman $\sum x_i$ serisi yakınsaktır.

Kanıt: Teoremi kanıtlamak için Teorem 19.1'de kullanılan Önsav 3.18'in bir benzerine ihtiyacımız var.

Sav 1. *Her $p \geq 1$ ve $0 < x < 1$ gerçel sayıları için $1 - px \leq (1-x)^p$ eşitsizliği geçerlidir.*

Bu savı bu notlarda buraya kadar verilen bilgilerle kanıtlamamıza imkân yok, çünkü henüz bir p gerçel sayısı için $1 - x$ gibi bir sayının p'inci gücünü almayı henüz tanımlamadık. Bir sayının p'inci gücünü sadece kesirli p sayıları için biliyoruz. Ama ne gam! Eğer teoremin varsayımı gerçel bir p sayısı için geçerliyse, o zaman aynı varsayım kesirli bir p sayısı için de geçerlidir. Nitekim, eğer q kesirli sayısı, $1 < q < p$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, yeterince büyük i göstergeci için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i} \leq 1 - \frac{q}{i}$$

olur. Demek ki bundan böyle teoremdeki p'nin kesirli olduğunu varsayabiliriz ve yukarıdaki sav yerine aşağıdaki savı kanıtlamakla yetinebiliriz:

Sav 2. *Her $p \geq 1$ kesirli sayısı ve $0 < x < 1$ gerçel sayısı için*

$$1 - px \leq (1-x)^p$$

eşitsizliği geçerlidir.

Ama bu aynen Önsav 3.22.

Teorem 19.6'nın Birinci Kısmının Kanıtının Devamı: Sav'a göre, yeterince büyük i göstergeçleri için,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} \leq 1 - \frac{p}{i} \leq \left(1 - \frac{1}{i}\right)^p = \frac{(i-1)^p}{i^p} = \frac{1/i^p}{1/(i-1)^p}$$

eşitsizliği doğrudur. Sonuç bundan ve oran kıyaslama teoreminden (bkz. Sonuç 15.6) çıkar. Nitekim $\sum x_i$ serisini, yakınsak olduğunu Teorem 19.1'den bildiğimiz $\sum_{i=1}^{\infty} i^{1/p}$ serisiyle kıyaslayabiliriz. □

Teoremin ikinci kısmının kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Raabe kıstasının bir başka kanıtı ve farklı ve daha genel bir önerme için bkz. Sonuç 19.10.

Sonuç 19.8. *Eğer yeterince büyük i göstergeçleri için $|x_{i+1}/x_i| \leq 1 - p/i$ eşitsizliklerinin sağlandığı i'den bağımsız bir $p > 1$ sayısı varsa, o zaman $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$ olur.* □

Örnekler

19.12. *Bu kıstası uygulayarak,*

$$\sum \frac{(2i)!}{4^i (i+1)!\, i!}$$

serisinin yakınsaklığını kanıtlayabiliriz.

Kanıt: Eğer x_i bu serinin i'inci terimiyse,

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1 - \frac{(2i+2)(2i+1)}{4(i+2)(i+1)}\right) = \frac{i(6i+6)}{4(i+2)(i+1)} \to \frac{3}{2} > 1$$

olur. Demek ki seri yakınsaktır. Bu serinin,

$$\frac{1}{4} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2i-1)}{4\cdot 6\cdots(2i+2)} + \cdots$$

serisi olduğuna dikkatinizi çekeriz. Buradan da genel terimin 0'a yakınsadığını, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n+1)!\, n!} = 0$$

eşitliğini buluruz. Hesapta olmayan başlı başına ilginç bir eşitlik. □

19.13. Raabe Kıstası'nı $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ serisine uygularsak serinin yakınsak olduğunu (bir kez daha) görürüz, nitekim,

$$i\left(1-\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1-\frac{i^2}{(i+1)^2}\right) = \frac{i(2i+1)}{(i+1)^2} \to 2 > 1$$

bulunur.

19.14.

$$\sum_i \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3i+1)}{(i+1)!3^i}$$

serisi yakınsak mıdır?

Kanıt: d'Alembert kıstasının bir sonuç vermeyeceği hemen anlaşılır, çünkü eğer x_i yukarıdaki serinin i'inci terimiyse, o zaman,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{3i+4}{3i+6}$$

olur ve bu ifadenin limiti 1'dir. Raabe kıstasını uygulamaya çalışalım:

$$i\left(1-\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1-\frac{3i+4}{3i+6}\right) = i\left(\frac{2}{3i+6}\right)$$

ve bu dizi 1'den küçük olan 2/3'e yakınsar. Raabe kıstasına göre seri ıraksar. □

19.15. a ve b iki sayı olsun. Şu seriye bakalım:

$$1+\frac{1+a}{1+b}+\frac{(1+a)(2+a)}{(1+b)(2+b)}+\frac{(1+a)(2+a)(3+a)}{(1+b)(2+b)(3+b)}+\cdots$$

Raabe kıstasını uygulamaya çalışalım (mutlak değerleri atarak!):

$$i\left(1-\frac{(1+a)(2+a)\dots(i+1+a)}{(1+b)(2+b)\dots(i+1+b)}\,\frac{(1+b)(2+b)\dots(i+b)}{(1+a)(2+a)\dots(i+a)}\right) = i\left(1-\frac{i+1+a}{i+1+b}\right)$$

$$= \frac{b-a}{1+1/i+a/i} \longrightarrow b-a$$

olduğundan, $b > a+1$ ise seri mutlak yakınsar, $b < a+1$ ise seri ıraksar.
Eğer $b = a+1$ ise Raabe kıstası bize bir şey söylemiyor ama bu durumda serinin genel terimi

$$\frac{(1+a)(2+a)\cdots(i+a)}{(2+a)(3+a)\cdots(i+1+a)} = \frac{1+a}{i+1+a}$$

olduğundan, seriyi $\sum 1/i$ serisiyle kıyaslayarak, serinin ıraksak olduğunu anlarız.

19.16. a, b, c, d gerçel sayılar olsun. Şu seriye bakalım:

$$\sum \frac{a(a+c)(a+2c)\cdots(a+ic)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+id)}$$

Eğer $c = d = 0$ ve $b = 1$ alırsak, $\sum a^{i+1}$ geometrik serisini elde ederiz. Dolayısıyla, serimiz genelleştirilmiş bir geometrik seri olarak addedilebilir.
Eğer $a = 1$, $b = 4$, $c = d = 2$ alırsak, Örnek 19.12'yi elde ederiz.
Eğer $a = b = 1$ ise Örnek 19.15'i elde ederiz.
Bu serinin hangi a, b, c, d sayıları için yakınsak olduğunu anlamaya çalışalım. Seriye d'Alembert Kıstası'nı uygulamaya kalkışalım:

$$\frac{|a+(i+1)c|}{|b+(i+1)d|} \to \frac{|c|}{|d|}.$$

Eğer $|c| < |d|$ ise seri yakınsar, eğer $|d| < |c|$ ise seri ıraksar. Ama eğer $|c| = |d|$ ise serinin yakınsayıp yakınsamadığını anlayamayız. $d = c > 0$ durumunda Raabe kıstasını uygulamaya çalışalım. Nitekim yukarıdaki örnekte olan da bu: $d = c = 2 > 0$.

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right)$$

ifadesinin i sonsuza giderken limitini alalım:

$$i\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) = i\left(1 - \frac{a+(i+1)c}{b+(i+1)c}\right) = i\frac{b-a}{b+(i+1)c} \to \frac{b-a}{c}.$$

Demek ki, eğer $c > 0$ ise,

$$\sum \frac{a(a+c)(a+2c)\cdots(a+ic)}{b(b+c)(b+2c)\cdots(b+ic)}$$

serisi $b > a+c$ ise mutlak yakınsar, $b < a+c$ ise ıraksar. Eğer $b = a+c$ ise bu yöntem bize serinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı hakkında bir şey söylemez; ama $\sum 1/i$ serisiyle kıyaslayarak bu durumda serinin ıraksak olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

19.17. **[Hipergeometrik Seri]** a, b, c üç sayı olsun. Şu seriye bakalım:

$$1 + \frac{a}{1}\frac{b}{c}x + \frac{a(a+1)}{1\cdot 2}\frac{b(b+1)}{c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

d'Alembert kıstasını kullanmaya çalışalım. u_i, x^i'nin katsayısı olsun.

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} = \frac{(a+i+1)(b+i+1)}{(i+2)(c+i+1)}$$

olduğundan, yeterince büyük i için bu oranlar pozitif olacak ve d'Alembert (ya da Raabe) kıstasını uygulamak için mutlak değerlere ihtiyaç yok. d'Alembert kıstası uygulandığında, serinin $|x| < 1$ için mutlak yakınsak olduğu, $|x| > 1$ için ıraksak olduğu kolaylıkla çıkar. Bundan böyle $x = 1$ olsun. Bu durumda Raabe kıstasını uygulamaya çalışalım. $j = i+1$ tanımını yaparak,

$$\begin{aligned}
i\left(1 - \frac{u_{i+1}}{u_i}\right) &= i\left(1 - \frac{(a+i+1)(b+i+1)}{(i+2)(c+i+1)}\right) = i\left(1 - \frac{(a+j)(b+j)}{(j+1)(c+j)}\right)\\
&= i\frac{j(c-a-b+1)-ab-c}{(j+1)(c+j)} = i\frac{(c-a-b+1)-ab/j-c/j}{(j+1)(c/j+1)}\\
&= \frac{(c-a-b+1)-ab/j-c/j}{(c/j+1)(j+1)/i} \longrightarrow c-a-b+1
\end{aligned}$$

buluruz. Demek ki $c > a+b$ ise seri yakınsar, $c < a+b$ ise seri ıraksar. $c = a+b$ durumunda da seri yakınsar. Bunun için bkz. [Bro, sayfa 40-41].

19.3 Kummer-Dini Kıstası

Bu altbölümde, d'Alembert ve Raabe kıstaslarından daha genel (bkz. Örnek 19.20 ve Sonuç 19.10) bir kıstas göreceğiz[2]. İlk olarak Kummer tarafından bulunan bu türden bir kıstas, daha sonra Dini tarafından aşağıda açıklanan biçimiyle kanıtlanmıştır.

[2] Bu bölüm için [Bro]'dan yararlanılmıştır.

Teorem 19.9. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki kesin pozitif dizi ve*

$$c_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}$$

olsun.
i. *Eğer* $\liminf c_n > 0$ *ise* $\sum a_i$ *yakınsaktır.*
ii. *Eğer* $\sum \frac{1}{b_i} = \infty$ *ve* $\limsup c_n < 0$ *ise* $\sum a_i = \infty$ *olur.*

Kanıt: i. $\ell = \liminf c_n > 0$ olsun. O zaman öyle bir $0 < c < \ell$ vardır ki her i için

$$c < c_i = b_i \frac{a_i}{a_{i+1}} - b_{i+1},$$

yani

$$a_i b_i - a_{i+1} b_{i+1} > c a_{i+1}$$

olur. Bu eşitsizlikleri $i = 0$'dan $i = n-1$'e kadar toplarsak, sadeleştirmelerden sonra

$$a_0 b_0 \geq a_0 b_0 - a_n b_n > c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

elde ederiz. Demek ki $\sum a_i$ serisinin kısmi toplamları $a_0 b_0 / c$'den küçüktür, dolayısıyla seri yakınsaktır.

ii. $\ell = \liminf c_n < 0$ olsun. O zaman öyle bir N vardır ki, her $i \geq N$ için

$$b_i \frac{a_i}{a_{i+1}} - b_{i+1} = c_i < 0,$$

yani

$$a_i b_i < a_{i+1} b_{i+1}$$

olur. Demek ki her $i > N$ için,

$$a_N b_N < a_i b_i$$

ya da

$$a_i > a_N b_N \frac{1}{b_i}$$

olur, ki bu da $\sum a_i = \infty$ eşitliğini gösterir. □

Örnekler

19.18. Teorem $(a_n)_n$ dizisinden ziyade $(a_n/a_{n+1})_n$ oranlar dizisi üzerine bir varsayım yaptığından, $(a_n)_n$ dizisi örneği vereceğimize oranlar dizisi örneği vermek yeterli. Bir a sayısı için,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+a}{n}$$

olsun. $b_n = n^2$ olsun. O zaman

$$c_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = n(n+a) - (n+1)^2 = (a-2)n - 1$$

olur. Demek ki eğer $a > 2$ ise, $\lim c_n = \infty > 0$ olur. Böylece teoremin (i) şıkkından $\sum a_i$ serisinin $a > 2$ ise yakınsak olduğu çıkar. (Bir sonraki örnekte daha iyi bir sonuç elde edeceğiz.)

$\sum 1/b_i$ yakınsak olduğundan bu durumda teoremin ikinci şıkkını uygulayamayız.

19.19. Gene bir a sayısı için,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+a}{n}$$

olsun. Bu sefer $b_n = n$ alalım. O zaman

$$c_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = (n+a) - (n+1) = a - 1$$

olur. Demek ki eğer $a > 1$ ise, $\lim c_n = a - 1 > 0$ olur ve teoremin (i) şıkkından $\sum a_i$ serisi $a > 1$ ise yakınsak olur. (Yukarıdakinden daha iyi bir sonuç.)

Bu sefer $\sum 1/b_i = \infty$ olduğundan teoremin (ii) şıkkını da uygulayabiliriz: Eğer $a < 1$ ise $\sum a_i$ serisi ıraksaktır.

Eğer $a = 1$ ise kıstas bir sonuca varamıyor.

19.20. Teoremde $b_n = 1$ alırsak, d'Alembert kıstasını buluruz.

Sonuç 19.10 (Genelleştirilmiş Raabe Kıstası)**.** *$\sum a_i$ pozitif bir seri olsun.*

i. *Eğer* $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ *ise* $\sum a_i$ *yakınsar.*

ii. *Eğer* $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ *ise* $\sum a_i$ *ıraksar.*

Kanıt: Teoremde $b_n = n$ almak yeterli. □

19.4 Dirichlet ve Abel Kıstasları

Bu bölümde terimleri illa pozitif olmak zorunda olmayan serilerin yakınsaklığıyla ilgileneceğiz.

$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ iki dizi olsun.

$$A_n = a_0 + \cdots + a_n$$

olsun. O zaman

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i b_i = A_n b_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} A_i (b_{i+1} - b_i)$$

olur. Nitekim sağdaki ifadede, $i \le j < n+1$ ise $a_i b_j$ terimi bir kez $A_{j-1}b_j$'de bir kez de $A_j b_j$'de beliriyor, ama bu ifadeler ters işaretli olduklarından bunlar birbirini götürüyor ve $a_i b_j$ kalmıyor. $i < n+1$ ise $a_i b_{n+1}$ ifadeleri de sadeleşiyor. Böylece sağ tarafta sadece $a_i b_i$ ifadeleri kalıyor. Aynı eşitliği şöyle de kanıtlayabiliriz: $A_{-1} = 0$ tanımıyla,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_i = \sum_{i=0}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=0}^{n} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n} A_i b_{i+1} + A_n b_{n+1}.$$

(1) formülüne ***Abel'in kısmi toplam formülü*** adı verilir[3]. Şu sonucu elde ettik:

Teorem 19.11. *Eğer* $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ *serisi ve* $(A_n b_{n+1})_n$ *dizisi yakınsaksa* $\sum a_i b_i$ *serisi de yakınsaktır ve*

$$\sum a_i b_i = \lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} - \sum A_i(b_{i+1} - b_i)$$

olur. □

Teorem 19.12 (Dirichlet Kıstası)**.** $\sum a_i$ *serisi, kısmi toplamları sınırlı olan bir seri ve* $(b_n)_n$ *azalarak* 0*'a yakınsayan bir dizi olsun. O zaman* $\sum a_i b_i$ *serisi yakınsar.*

Kanıt: $A_n = a_0 + \cdots + a_n$ olsun. Diyelim her n için $|A_n| \le M$. O zaman $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0$ olur. Demek ki Teorem 19.11'e göre $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz. $(b_n)_n$ dizisi azaldığından,

$$|A_i(b_{i+1} - b_i)| = |A_i|\,|b_{i+1} - b_i| = |A_i|(b_{i+1} - b_i) \le M(b_{i+1} - b_i)$$

olur. Ama $\sum(b_{i+1} - b_i)$ serisi teleskopiktir ve $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğunu biliyoruz. Demek ki $\sum(b_{i+1} - b_i)$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisi mutlak yakınsaktır. □

Teorem 19.13 (Abel Kıstası)**.** $\sum a_i$ *serisi yakınsaksa ve* $(b_n)_n$ *dizisi azalarak ya da artarak yakınsayan bir diziyse* $\sum a_i b_i$ *serisi yakınsar.*

Kanıt: Yukarıdaki yazılımı kabul edelim. Varsayıma göre $\sum A_n b_{n+1}$ yakınsar. Teorem 19.11'e göre $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlamalıyız. $(|A_i|)_i$ dizisi üstten M tarafından sınırlanmış olsun. O zaman,

$$|A_i(b_{i+1} - b_i)| = |A_i|\,|b_{i+1} - b_i| \le \pm M(b_{i+1} - b_i)$$

olur. Terimleri sağdaki ifade olan seri teleskopik bir seridir ve $(b_i)_i$ dizisinin limiti vardır, demek ki yakınsaktır; dolayısıyla $\sum A_i(b_{i+1} - b_i)$ serisi mutlak yakınsaktır. □

Alıştırmalar

19.21. $\sum a_i$ serisi yakınsaksa ve $\sum(b_i - b_{i+1})$ serisi mutlak yakınsaksa $\sum a_i b_i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

19.22. $\sum a_i$ serisinin kısmi toplamları sınırlıysa, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ise ve $\sum(b_i - b_{i+1})$ serisi mutlak yakınsaksa $\sum a_i b_i$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Bir başka Abel kıstası aşağıda:

[3] İntegral görmüşler için: Bu formülün integrali parçalara ayırmaya (*integration by parts*) benzediğine dikkatinizi çekeriz.

Teorem 19.14 (Abel Kıstası)**.** *$\sum_{i\geq 0} x_i$ bir seri olsun. Şu özellikleri sağlayan $(\epsilon_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri varsa,*

1. *$x_n = \epsilon_n y_n$,*
2. *$|\sum_{i=m}^{n} y_i|$ sayıları üstten sınırlıdır,*
3. *$\sum_{n=0}^{\infty} |\epsilon_{n+1} - \epsilon_n|$ serisi yakınsaktır,*
4. *$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$,*

o zaman $\sum_{i\geq 0} x_i$ serisi yakınsaktır.

Kanıt: $\sum_{i\geq 0} x_i$ serisinin kısmi toplamlarının bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla 0'dan büyük herhangi bir ϵ sayısı seçelim.

$$y_{m,n} = \sum_{i=m}^{n} y_i$$

olsun. Varsayıma göre öyle bir A var ki, her m ve n için,

$$|y_{m,n}| \leq A$$

olur. Tanımdan dolayı, her $i < p$ için,

$$y_i = y_{i,p} - y_{i+1,p}$$

olur. Demek ki, her $m < n < p$ için

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| = \left|\sum_{i=m}^{n} \epsilon_i y_i\right| &= \left|\sum_{i=m}^{n} \epsilon_i (y_{i,p} - y_{i+1,p})\right| \\
&= \left|\epsilon_m y_{m,p} + \sum_{i=m}^{n-1} y_{i+1,p}(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i) - \epsilon_n y_{n+1,p}\right| \\
&\leq |\epsilon_m||y_{m,p}| + \sum_{i=m}^{n-1} |y_{i+1,p}||\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n||y_{n+1,p}| \\
&\leq A\left(|\epsilon_m| + \sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n|\right)
\end{aligned}$$

olur. Biz, her $m < n$ için

$$\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| \leq A\left(|\epsilon_m| + \sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n|\right)$$

eşitsizliğini aklımızda tutalım. Şimdi sağdaki ifadeyi (yeterince büyük $m < n$ sayıları için) ϵ'dan küçük yapacağız. $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|\epsilon_n| < \frac{\epsilon}{3A}$$

olur. Ayrıca,

$$\sum_{i\geq 0} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i|$$

serisi yakınsak olduğundan, kısmi toplamları bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla öyle bir N_2 vardır ki, her $n > m > N_2$ için,

$$\sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{n+1} - \epsilon_n| < \frac{\epsilon}{3A}$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Her $n > m > N$ için,

$$\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| \leq A\left(|\epsilon_m| + \sum_{i=m}^{n-1} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| + |\epsilon_n|\right) < A\left(\frac{\epsilon}{3A} + \frac{\epsilon}{3A} + \frac{\epsilon}{3A}\right) = \epsilon$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Eğer $(\epsilon_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan bir diziyse, üçüncü koşul otomatik olarak sağlanır çünkü,

$$\sum_{i=0}^{n} |\epsilon_{i+1} - \epsilon_i| = \epsilon_0 - \epsilon_{n+1} \to \epsilon_0$$

olur.

Bu teoremden yola çıkarak Leibniz teoremini (Teorem 17.1) bir kez daha kanıtlayabiliriz:

Teorem 19.15 (Leibniz). *$(\epsilon_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan pozitif bir dizi olsun. O zaman $\sum(-1)^n\epsilon_n$ serisi yakınsaktır.*

Kanıt: $x_n = (-1)^n\epsilon_n$ ve $y_n = (-1)^n$ olsun. Teorem 19.6'nın 1, 2 ve 4'üncü varsayımları bariz biçimde doğru. 3'üncü varsayım ise Teorem 14.2. □

Her ne kadar karmaşık sayıları henüz görmediysek ve, en azından bu ve sonraki ciltlerde görmeyeceksek de, bu teoremi terimleri karmaşık sayılar olan ilginç bir seriye uygulayalım:

Karmaşık Sayıları Bilenlere Örnek. *Eğer $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n}$ serisi yakınsaktır.*
Kanıt: Eğer $z \in 2\pi\mathbb{Z}$, $|e^{inz}/n| = 1/n$ olur ve bu durumda serinin sonsuza gittiğini biliyoruz. Şimdi $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$ olsun. Abel Kıstası'nda, $x_n = e^{inz}/n$, $y_n = e^{inz}$ ve $\epsilon_n = 1/n$ olsun. Sadece 2'nci koşulu kanıtlamak biraz zordur. $a = e^{iz}$ olsun. O zaman, $n > m$ için,

$$\sum_{k=m}^{n} y_k = \sum_{k=m}^{n} e^{ikz} = \sum_{i=m}^{n} a^k = \frac{a^m - a^{n+1}}{1-a}$$

olur ve bu sayıların üstten sınırlı olduklarını kanıtlamak kolaydır. □

Daha genel olarak eğer $(\epsilon_n)_n$ azalarak 0'a yakınsayan bir diziyse, $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ise $\sum \epsilon_n e^{inz}$ serisi yakınsaktır. Bunun da kanıtı aynen yukarıdaki gibidir. Gerçel ve karmaşık kısımları ayırarak bundan,

$$\sum \epsilon_n \cos nz \text{ ve } \sum \epsilon_n \sin nz$$

serilerinin de yakınsak olduğu çıkar. □

Karışık Alıştırmalar

1. $(a_n)_n$ dizisinin limiti a olsun. Eğer her $n, m > N$ için, $|a_n - a_m| < \epsilon$ ise, her $n > N$ için, $|a_n - a| < \epsilon$ olduğunu kanıtlayın.

2. a ve b iki gerçel sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisini şöyle tanımlayalım: $x_1 = a$, $x_2 = b$ ve her $n \geq 2$ için,
$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$
olsun. Yani dizinin her terimi önceki iki terimin aritmetik ortalaması. Şimdi $y_1 = x_1$ ve her $n \geq 2$ için, $y_n = x_n - x_{n-1}$ olsun.

   i. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın. **İpucu 1:** Dizinin ilk birkaç terimini kâğıt üstünde gösterin. **İpucu 2:** $a \leq b$ varsayımının bir zararı olamaz. Önce tümevarımla, her k için,
$$x_{2k-1} \leq x_{2k+1} \leq x_{2k+2} \leq x_{2k}$$
eşitsizliklerini kanıtlayın. Demek ki $(x_{2k})_k$ dizisi azalmaz, $(x_{2k+1})_k$ dizisi artmaz ve her k ve ℓ için $x_{2k+1} \leq x_{2\ell}$ olur. Sonra, gene tümevarımla, $x_{2k+2} - x_{2k+1} = (b-a)/2^k$ eşitliğini kanıtlayın. Bu kadar ipucu yeterli olmalı.

   ii. $\sum y_n$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Teorem 14.2.

   iii. Buradan x_n'nin değerini a ve b cinsinden bulun. **İpucu:** x_n, $\sum y_n$ serisinin kısmi toplamıdır. Ayrıca $n \geq 2$ için, $y_n = (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}}$ dir.

   iv. $\lim_{n\to\infty} x_n$'yi bulun.

3. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 1$ için,
$$\sum \frac{x^{2^n}}{(1-x)^{2^{n+1}}}$$
serisinin yakınsaklığını ve ıraksaklığını tartışın.

4. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadıklarına karar verin ve yakınsıyorlarsa hangi sayıya yakınsadıklarını bulun:
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2+3i+2}{2i^3+i+4}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5i^3+2}}{2i^3+3i+4}, \quad \sum \frac{i}{2i+1}, \quad \sum \frac{i}{2i^2+1},$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{i+1}}, \quad \sum \frac{2^i-1}{2^i}, \quad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{5^i}{6^{i+1}}, \quad \sum \frac{2^i+3}{3^i},$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}, \quad \sum (\sqrt[3]{i+1} - \sqrt[3]{i}), \quad \sum \frac{2i+1}{(i^2+1)(i^2+2i+2)}, \quad \sum_{i=3}^{\infty} \frac{4i-3}{i^3-4i}.$$

5. Aşağıdaki serilerin yakınsayıp yakınsamadıklarına karar verin:

$$\sum (-1)^i \frac{i}{1+i^2}, \quad \sum (-1)^i \frac{i}{i+1}, \quad \sum (-1)^i \frac{5^{3i-1}}{(3i-1)!},$$

$$\sum \frac{5^{3i-1}}{(3i-1)!}, \quad \sum (-1)^i \frac{i^2+1}{i^3+1}, \quad \sum (-1)^i \left(\frac{1+2i}{2+3i}\right)^i.$$

6. Aşağıdaki serilerin yakınsaklığına ya da ıraksaklığına karar verin:

$$\sum \left(\frac{i+3}{i^2+1}\right)^i, \quad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^i\sqrt{i}}.$$

7. $\sum x_i$ pozitif ve ıraksak bir seri olsun.

$$y_i = \frac{x_i}{x_0 + \cdots + x_i}$$

tanımını yapalım. $\sum y_i$ serisinin de ıraksadığını kanıtlayın. İpucu:

$$\sum_{k=0}^{m} y_{i+k} > 1 - \frac{\sum_{k=0}^{m} x_k}{\sum_{k=0}^{i+m} x_k}$$

eşitsizliğini kullanabilirsiniz.

8. Aşağıdaki serilerin hangileri yakınsak, hangileri ıraksaktır?

$$\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \quad \sum \frac{n^k}{2^n} \ (k \in \mathbb{N} \text{ bir sabit}),$$
$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}, \quad \sum \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n,$$
$$\sum 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$
$$\sum \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \sum \sqrt[n]{1+2+\cdots+n},$$
$$\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}, \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$
$$\sum \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \sum \frac{3^n n!}{n^n},$$
$$\sum \frac{2^{n^2}}{n!}, \quad \sum \left(\sqrt[n]{n}-1\right).$$

9. a_i, $\sqrt{2}$'nin virgülden sonraki i'inci basamağı olsun.

$$\sum a_i x^i = 1 + 4x + x^2 + 4x^3 + \cdots$$

serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğunu kanıtlayın.

10. $a_0 = 1$ ve $i \geq 1$ için,

$$a_{i+1} = \begin{cases} 2a_i & \text{eğer } i \text{ çiftse} \\ 3a_i & \text{eğer } i \text{ tekse} \end{cases}$$

olsun. $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapının $1/\sqrt{6}$ olduğunu kanıtlayın.

11. Sabit bir $r \neq 1$ gerçel sayısı alalım. $a_0 = 1$ ve $i \geq 1$ için,

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{i+r}{i+2}$$

olsun. $\sum a_i x^i$ serisinin yakınsaklık yarıçapı kaçtır?

12. $\cosh x$ ve $\sinh x$ kuvvet serilerinin türevlerini bulunuz. (Bkz. Alıştırma 18.23.)

13. Altbölüm 18.4'teki Cauchy çarpımını ve Cauchy çarpımı hakkındaki teoremleri kullanarak şu (trigonometrik) eşitlikleri kanıtlayın:

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\
\sin(x + y) &= \cos x \sin y + \sin x \cos y, \\
\cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.
\end{aligned}$$

14. Terimleri $a_n = 1! + \sqrt{2! + \sqrt{3! + \cdots + \sqrt{n!}}}$ olan dizi yakınsak mıdır?

15. Terimleri $a_n = 1! + \sqrt[2]{2! + \sqrt[3]{3! + \cdots + \sqrt[n]{n!}}}$ olan dizi yakınsak mıdır?

Kısım IV

Ekler

20. Üs Almak - *Yusuf Ünlü*

Kitabın oldukça erken bir safhasında, Bölüm 3'te, pozitif bir gerçel sayının kesirli bir kuvvetini tanımladık, böylece örneğin, $3^{7/5}$ ya da $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ gibi "üslü" sayıların anlamını öğrendik. Altbölüm 3.3'ten hemen sonra okunabilecek ve Yusuf Ünlü'ye borçlu olduğumuz bu bölümde, $2^{\sqrt{2}}$ ya da $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ gibi, bir gerçel sayının sadece kesirli değil, gerçel üssünü tanımlayacağız.

Plan şöyle: $a \geq 0$ gerçel sayısı verilmiş olsun. Eğer $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi $\mathbb{R}$'de bir sayıya yakınsıyorsa $(a^{q_n})_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi, dolayısıyla yakınsak olduğunu kanıtlayacağız (Önsav 20.4). Bu sonuçtan cesaret alarak, eğer $(q_n)_n$ dizisi $x \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsıyorsa a^x sayısını

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

olarak tanımlamayı düşünebiliriz. Ama bunun geçerli bir tanım olması için $\lim_{n\to\infty} a^{q_n}$ limitinin x'e yakınsayan $(q_n)_n$ dizisinden bağımsız olması lazım. Bunu da şöyle kanıtlayacağız: Önce $([nx]/n)_n$ dizisinin x'e yakınsadığını kanıtlayacağız (Önsav 20.3). Ardından,

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{[nx]/n}$$

tanımını yapacağız. Son olarak, eğer $(q_n)_n$ dizisi $x \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsıyorsa

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

eşitliğini kanıtlayacağız (Önsav 20.6) ve böylece istediğimize ulaşmış olacağız[1]. Tabii bir ara, eğer $x \in \mathbb{Q}$ ise Bölüm 3'te tanımlanan a^x sayısıyla bu bölümde tanımlanan a^x sayısının birbirine eşit olduklarını göstermemiz gerekecek; bunu da Önsav 20.5'te kanıtlayacağız.

Aynı tanıma aşağı yukarı aynı planla ikinci ciltte çok daha genel bir teorem kanıtlayarak ulaşacağız.

Bu bölüm boyunca Teorem 3.8'i -referans vermeden- sık sık kullanacağız.

[1] Bu konuyla ilgili olarak okur Örnek 6.4'ü ilginç bulabilir.

Önsav 20.1. *$x \in [-1,1]$ kesirli bir sayı ve $0 < a$ bir gerçel sayı olsun. O zaman*

$$|a^x - 1| \leq |x|\,|a-1| \max\{1, a^{-1}\}$$

olur.

Kanıt: Eğer $a = 1$ ya da $x = 0$ ise önsavın doğruluğu aşikâr. Bundan böyle $1 \neq a$ ve $0 < |x| \leq 1$ eşitsizliklerini varsayabiliriz. Dört farklı durum olabilir.

Birinci Durum: $1 < a$ ve $0 < x \leq 1$ olsun. Sonuç 3.20'ye göre,

$$\frac{|a^x - 1|}{|x|} = \frac{a^x - 1}{x} \leq a - 1.$$

Demek ki $|a^x - 1| \leq |x|(a-1) = |x||a-1|$ ve bu durumda önsav kanıtlanmış olur.

İkinci Durum: $1 < a$ ve $-1 \leq x < 0$ olsun. Bu durumda $a^x < 1$ olur. Dolayısıyla, $0 < -x \leq 1$ olduğundan $|a^x - 1| = a^x|1 - a^{-x}| \leq a^x|x||a-1| < |x||a-1|$ olur.

Üçüncü Durum: $0 < a < 1$ ve $0 < x \leq 1$ olsun. $1 < a^{-1}$ olduğundan birinci durumdan dolayı

$$\left|a^{-x} - 1\right| = \left|(a^{-1})^x - 1\right| \leq |x| \left|a^{-1} - 1\right|$$

olur. Bu eşitsizliği a^x ile çarparak, kolaylıkla

$$|a^x - 1| \leq |x||a-1|(a^{-1})^{1-x}$$

bulunur. $1 < a^{-1}$ ve $0 < x$ olduğundan $1-x < 1$ olur ve yukarıdaki eşitsizlikten $(a^{-1})^{1-x} < a^{-1}$ ve

$$|a^x - 1| \leq |x||a-1|a^{-1}$$

elde edilir.

Dördüncü ve Son Durum: $0 < a < 1$ ve $-1 \leq x < 0$ olsun. $1 < a^{-1}$ ve $0 < -x$ olduğundan birinci durumdan dolayı

$$|a^x - 1| = \left|(a^{-1})^{-x} - 1\right| \leq |x| \left|a^{-1} - 1\right| = |x||a-1|a^{-1}$$

olur.

Böylece her durumda önsav kanıtlanmış olur. □

Eğer $k \in \mathbb{N}$ ise

$$T_k(a) = \max\left\{a^k, a^{-k}\right\}$$

tanımını yapalım. Eğer $s \in \mathbb{Q}$ ve $|s| \leq k \in \mathbb{N}$ ise $a^s \leq T_k(a)$ olur elbette. Son olarak

$$A_k(a) = T_k(a) \max\{1, a^{-1}\}$$

tanımını yapalım.

Önsav 20.2. *r, $s \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $|r - s| \le 1$ ve $|s| \le k$ ise*

$$|a^r - a^s| \le A_k(a)|r - s||a - 1|$$

olur.

Kanıt: Yukarıdaki önsavda $x = r - s$ alırsak,

$$|a^{r-s} - 1| \le |r - s|\,|a - 1| \max\{1, a^{-1}\}$$

elde ederiz. Her tarafı a^s ile çarparsak ve $a^s \le \max\left\{a^k, a^{-k}\right\}$ eşitsizliğini kullanırsak istediğimiz sonucu elde ederiz. $\square$

Önsav 20.3. *Eğer $x \in \mathbb{R}$ ise $\lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{n} = x$ olur.*

Kanıt: Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$[nx] \le nx < [nx] + 1$$

olduğundan,

$$0 \le nx - [nx] < 1$$

ve $n \neq 0$ için

$$0 \le x - \frac{[nx]}{n} < \frac{1}{n}$$

olur. Buradan da istenen sonuç kolayca çıkar. $\square$

Önsav 20.4. *$0 < a \in \mathbb{R}$ ve $(q_n)_n$ kesirli bir sayı dizisi olsun. Eğer $(q_n)_n$ dizisi ($\mathbb{R}$'de) yakınsaksa, $(a^{q_n})_n$ dizisi bir Cauchy dizisidir.*

Kanıt: $a \neq 1$ varsayımını yapabiliriz. $(q_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır. $k \in \mathbb{N}$, dizinin mutlak değerlerinin bir üstsınırı olsun. $\epsilon > 0$ olsun. Eğer $|q_n - q_m| < 1$ ise, Önsav 20.2'den dolayı,

$$|a^{q_n} - a^{q_m}| \le A_k(a)\,|a - 1|\,|q_n - q_m|$$

olur. Dolayısıyla, verilmiş bir $\epsilon > 0$ için N sayısını, her n, $m > N$ için,

$$|q_n - q_m| < \min\left\{1, \frac{\epsilon}{A_k(a)\,|a - 1|}\right\}$$

eşitsizliği doğru olacak biçimde seçersek, her n, $m > N$ için,

$$|a^{q_n} - a^{q_m}| \le A_k(a)\,|a - 1|\,|q_n - q_m| < \epsilon$$

olur. Böylece $(a^{q_n})_n$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu kanıtlanmış oldu. $\square$

Şimdi artık üs almayı tanımlayabiliriz. Ama daha önce tanımladığımız üs almayla birazdan tanımlayacağımız üs almayı kısa bir süre için ayrıştırmalıyız.

Aşağıda önce $a^{\underline{x}}$ ifadesini tanımlayacağız; hemen sonra da, $x \in \mathbb{Q}$ için bu ifadenin Altbölüm 3.1'de tanımladığımız (ve çok eskiden beri aşina olduğumuz) a^x ifadesine eşit olduğunu göstereceğiz.

Tanım. $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $a^{\underline{x}}$ sayısını şöyle tanımlayalım:

$$a^{\underline{x}} = \lim_{n\to\infty} a^{[nx]/n}.$$

Önsav 20.5. *$x \in \mathbb{Q}$ için $a^{\underline{x}} = a^x$.*

Kanıt: Eğer $x \in \mathbb{Z}$ ise $a^{\underline{x}} = a^x$ eşitliği tanımdan hemen anlaşılıyor, çünkü ne de olsa $[nx] = nx$. Demek ki önsav $x \in \mathbb{Z}$ için doğru.

Şimdi p ve $q > 0$ tamsayıları için $x = p/q$ olsun. $(a^{[qnx]/qn})_n$ dizisi $(a^{[nx]/n})_n$ dizisinin bir altdizisi olduğundan, tanımda n yerine qn alarak,

$$\begin{aligned} (a^{\underline{x}})^q &= \left(\lim_{n\to\infty} a^{[nx]/n}\right)^q = \left(\lim_{n\to\infty} a^{[qnx]/qn}\right)^q \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} a^{[np]/qn}\right)^q = \lim_{n\to\infty} a^{[np]/n} = a^{\underline{p}} \\ &= a^p \end{aligned}$$

elde ederiz. (Sondan iki önceki eşitlikte Teorem 5.4.vi'yı kullandık.) $a^{\underline{x}} = a^{p/q} = a^x$ eşitliği kanıtlanmıştır. □

Bundan böyle $a^{\underline{x}}$ yerine a^x yazacağız; bu hakkı yukarıda elde ettik.

Şimdi de tanımın x'e yakınsayan $([nx]/n)_n$ dizisinden bağımsız olduğunu gösterelim.

Önsav 20.6. *Eğer $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi x'e yakınsıyorsa, o zaman*

$$\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = a^x$$

olur.

Kanıt: x'in mutlak değerinden büyük bir $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Önsav 20.3'ten dolayı,

$$\lim_{n\to\infty} \left(q_n - \frac{[nx]}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} q_n - \lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{n} = x - x = 0$$

olduğundan, yeterince büyük n doğal sayıları için,

$$|q_n| < 2k, \quad \left|\frac{[nx]}{n}\right| < 2k \text{ ve } \left|q_n - \frac{[nx]}{n}\right| < 1$$

olur. Önsav 20.2'den dolayı, bu tür n'ler için,

$$0 \le \left|a^{q_n} - a^{[nx]/n}\right| \le A_{2k}(a)\,|a-1| \left|q_n - \frac{[nx]}{n}\right|$$

olur. a, k ve $A_{2k}(a)$ sayıları n'ye göre sabit olduklarından, sağ tarafın limiti (n sonsuza gittiğinde) 0'dır. Sandviç Teoremi'ne göre sol taraf da 0'a gider. □

Teorem 20.7. *Her x, $y \in \mathbb{R}$ ve $a \geq 0$ için $a^{x+y} = a^x a^y$ ve $(a^x)^y = a^{xy}$ olur.*

Kanıt: $a \neq 0, 1$ varsayımını yapabiliriz. Birincisi Önsav 20.6'nın neredeyse doğrudan bir sonucu. İkincisini kanıtlayalım. $(p_n)_n$ ve $(q_n)_n$ kesirli sayı dizileri sırasıyla x ve y'ye yakınsasınlar. O zaman $(p_n q_n)_n$ kesirli sayı dizisi xy'ye yakınsar. Demek ki,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a^{p_m} \right)^{q_n} = \lim_{n\to\infty} a^{p_n q_n}$$

eşitliğini, yani Teorem 5.4.vi'ya göre,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a^{p_m q_n} \right) = \lim_{n\to\infty} a^{p_n q_n}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız.

Tüm $|p_m q_n|$ ve $|q_n|$ kesirli sayılarından daha büyük bir b pozitif doğal sayısı seçelim. Rastgele bir

$$0 < \epsilon < A_b(a)\,|a-1|$$

seçelim. Son olarak, öyle bir N sayısı seçelim ki, her n, $m > N$ için,

$$|p_m - p_n| < \frac{\epsilon}{2bA_b(a)\,|a-1|}$$

olsun. Bu durumda,

$$|p_m q_n - p_n q_n| = |p_m - p_n| \cdot |q_n| < |p_m - p_n| \cdot b < \frac{\epsilon}{2A_b(a)\,|a-1|}$$

olur. En sağdaki sayı 1/2'den, dolayısıyla 1'den de küçük olduğundan, Önsav 20.4'e göre

$$|a^{p_m q_n} - a^{p_n q_n}| < A_b(a)\,|p_m q_n - p_n q_n|\,|a-1| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlikte m'yi sonsuza götürürsek, her $n > N$ için,

$$\left| \lim_{m\to\infty} a^{p_m q_n} - a^{p_n q_n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

21. Çifte Diziler ve Seriler

Tanım kümesi $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olan bir fonksiyona ***çifte dizi*** adı verilir[1]. Eğer fonksiyon a ise, $a(n,m)$ yerine $a_{n,m}$ yazılır ve çifte dizi $(a_{n,m})_{n,m}$ olarak gösterilir.

Bundan böyle her n, $m \in \mathbb{N}$ için $a_{n,m}$ teriminin bir gerçel sayı olduğunu varsayacağız. $a \in \mathbb{R}$ olsun. (Bir önceki paragraftaki a'yı artık unutabiliriz.) Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$n,\ m > N \Rightarrow |a_{n,m} - a| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N varsa, a'ya $(a_{n,m})_{n,m}$ ***çifte dizisinin limiti*** denir. Bu durumda ikinci bir limit daha olamaz ve

$$\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$$

yazılır.

Örnekler

21.1. Her $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için

$$a_{n,m} = \frac{nm}{n^2+m^2}$$

olsun. Bu durumda $a_{n,n} = 1/2$ ve $a_{n,2n} = 1/5$ bulunur. Demek ki bu örnekte çifte dizinin limiti yoktur.

21.2. Her $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için

$$a_{n,m} = \frac{n+m}{n^2+m^2}$$

olsun. Bu durumda limit vardır ve 0'a eşittir. Nitekim $\epsilon > 0$ olsun. N sayısı, $N > 2/\epsilon$ eşitsizliği doğru olacak kadar büyük seçelim. O zaman her n, $m > N$ için,

$$\frac{n+m}{n^2+m^2} = \frac{n}{n^2+m^2} + \frac{m}{n^2+m^2} < \frac{n}{n^2} + \frac{m}{m^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \epsilon$$

olur.

$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}\right)$ ile $\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m}$ birbirine karıştırılmamalı. Nitekim

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\frac{nm}{n^2+m^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

[1]Bu bölüm için [A]'dan yararlanılmıştır.

olur ama Örnek 21.1'de gördüğümüz üzere

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{nm}{n^2+m^2}$$

limiti yoktu. Öte yandan şu teorem geçerlidir:

Teorem 21.1. $\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$ *olsun. Ayrıca her* n *için* $\lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ *limitinin olduğunu varsayalım. O zaman* $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m})$ *vardır ve* a*'ya eşittir.*

Kanıt: $a_n = \lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ olsun. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Yeterince büyük n sayıları için

$$|a_n - a| < \epsilon$$

eşitsizliğini göstereceğiz ve bu da istediğimizi kanıtlayacak.

$\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$ olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki her n, $m > N_1$ için,

$$|a_{n,m} - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur.

Her n için $a_n = \lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ olduğundan, öyle bir $N_2(n)$ vardır ki, eğer $m > N_2(n)$ ise,

$$|a_n - a_{n,m}| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur.

Şimdi $n > N_1$ verilmiş olsun. Bir $m > \max\{N_1, N_2(n)\}$ sayısı seçelim. O zaman yukarıdaki iki eşitsizlik n ve m için doğru olur. Demek ki,

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{n,m}| + |a_{n,m} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

$(a_{n,m})_{n,m}$ bir çifte dizi olsun. $\sum_{i,j} a_{i,j}$ ifadesine ***çifte seri*** denir. Standart serilerle yaptığımız gibi, bazı durumlarda, (şimdilik anlamsız olan) $\sum_{i,j} a_{i,j}$ ifadesini birazdan bir gerçel sayı ya da $\pm\infty$ olarak anlamlandıracağız.

$$s_{n,m} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$$

olsun. $s_{n,m}$ sayısına $\sum_{i,j} a_{i,j}$ ***çifte serisinin kısmi toplamı*** adı verilir. Eğer

$$\lim_{n,m\to\infty} s_{n,m}$$

limiti varsa ve bu limit a ise ($a = \pm\infty$ bile olsa),

$$\sum_{i,j} a_{i,j} = a$$

yazılır. Eğer limit $\pm\infty$ ise çifte serinin $\pm\infty$'a ıraksadığı, aksi halde çifte serinin ***yakınsak*** olduğu ve a gerçel sayısına yakınsadığı ya da serinin ***toplamının*** a olduğu söylenir.

$\sum_{i,j} a_{i,j}$ yerine çoğu zaman $\sum a_{i,j}$ yazacağız. Toplamlar $i = 0$ ya da $j = 0$'dan başlamak zorunda değiller elbet. Örneğin

$$\sum \frac{ij}{i^2 + j^2}$$

çifte serisinde $i = j = 0$ olamaz.

Eğer $\sum |a_{i,j}|$ çifte serisi yakınsaksa $\sum a_{i,j}$ çifte serisi de yakınsaktır (bunun kanıtını okura bırakıyoruz) ve bu durumda $\sum a_{i,j}$ çifte serisinin ***mutlak yakınsak*** olduğu söylenir.

$\sum a_{i,j}$ bir çifte seri olsun ve $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bir eşleme olsun. O zaman

$$\sum_k a_{f(k)}$$

dizisine $\sum a_{i,j}$ çifte serisinin (yeniden) ***dizilişi*** adı verilir.

Teorem 21.2. *$\sum a_{i,j}$ bir çifte seri ve $\sum a_{f(k)}$ bu çifte serinin bir dizilişi olsun.*
i. *$\sum a_{f(k)}$ serisiyle $\sum a_{i,j}$ çifte serisinden biri mutlak yakınsaksa diğeri de mutlak yakınsaktır.*
Eğer $\sum a_{i,j}$ çifte serisi mutlak yakınsaksa ve toplamı a ise şunlar doğrudur:
ii. *$\sum_k a_{f(k)} = a$ olur.*
iii. *$\sum_i a_{i,j}$ ve $\sum_j a_{i,j}$ serileri mutlak yakınsaktır.*
iv. *$x_j = \sum_i a_{i,j}$ ve $y_i = \sum_j a_{i,j}$ olsun. O zaman $\sum_j x_j$ ve $\sum_i y_i$ serileri mutlak yakınsaktır ve toplamları a'dır.*

Kanıt: Eğer $\sum a_{i,j}$ çifte serisi mutlak yakınsaksa, $\sum |a_{f(k)}|$ serisinin kısmi toplamları $\sum |a_{i,j}|$ çifte serisinin münasip kısmi toplamlarından küçükeşit olduğundan, elbette $\sum a_{f(k)}$ serisi mutlak yakınsar. f örten olduğundan, diğer istikamet de benzer şekilde kanıtlanır.

Bundan böyle $\sum a_{i,j}$ çifte serisinin mutlak yakınsak olduğunu ve toplamın a olduğunu varsayalım. Önce $\sum a_{f(k)}$ serisinin toplamının f fonksiyonundan bağımsız olduğunu kanıtlayalım. $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bir başka eşleme olsun. $\sum a_{f(k)} = \sum a_{g(k)}$ eşitliğini kanıtlayacağız.

$$b_k = a_{f(k)} \text{ ve } c_k = a_{g(k)}$$

tanımlarını yapalım. Ayrıca $h = g^{-1} \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ olsun. h bir eşlemedir. Bu durumda,

$$c_{h(k)} = a_{g(h(k))} = a_{f(k)}$$

ve dolayısıyla Teorem 15.9'a göre,

$$\sum a_{g(k)} = \sum c_k = \sum c_{h(k)} = \sum a_{f(k)}$$

olur. İstediğimizi kanıtladık. Bu ortak toplama a' adını verelim. Daha sonra $a = a'$ eşitliğini kanıtlayacağız.

$\sum_i a_{i,j}$ ve $\sum_j a_{i,j}$ serileri $\sum a_{f(k)}$ serisinin altdizileri olduğundan (iii) önermesi bariz.

$\sum_j x_j$ ve $\sum_i y_i$ serilerinin mutlak yakınsaklığı Teorem 15.10'dan çıkar. Aynı teoremden bu toplamlarının a' sayısına eşit olduğu çıkar. Geriye $a = a'$ eşitliğini kanıtlamak kaldı.

$$S_{n,m} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} |a_{i,j}|$$

ve

$$A = \lim_{n,m\to\infty} S_{n,m}$$

olsun. $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N seçelim ki, n, $m \geq N$ ise

$$0 \leq A - S_{n,m} < \frac{\epsilon}{2}$$

olsun.

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} a_{f(i)} \text{ ve } s_{n,m} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j}$$

tanımlarını yapalım. M'yi,

$$\{(i, j) : i,\, j = 0, 1, \ldots, N\} \subseteq \{f(0), \ldots, f(M)\}$$

içindeliği doğru olacak kadar büyük seçelim. f fonksiyonu örten olduğundan bu mümkündür. O zaman

$$t_M - s_{N,N}$$

toplamında beliren $a_{i,j}$ terimlerinde ya $i > N$ ya da $j > N$ olmak zorundadır, çünkü diğerleri sadeleşir. Demek ki $n \geq M$ ise, üçgen eşitsizliğinden,

$$|t_n - s_{N,N}| \leq A - S_{N,N} < \frac{\epsilon}{2}$$

çıkar. Benzer nedenden,

$$|a - s_{N,N}| \leq A - S_{N,N} < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Son iki satırdan da $n \geq M$ ise $|t_n - a| < \epsilon$ bulunur. Demek ki $a' = a$ olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. $\square$

Örnek 21.3. Her n, $m \in \mathbb{N}$ için

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } m = n+1 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } m = n-1 \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olsun. Bir tablo halinde yazacak olursak $a_{n,m}$ sayıları şöyle olur (sütunlar m'yi, sıralar n'yi göstersin):

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

Böylece

$$\sum_m a_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n = 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki,

$$\sum_n \sum_m a_{n,m} = 1$$

olur. Öte yandan,

$$\sum_n a_{n,m} = \begin{cases} -1 & \text{eğer } m = 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } m > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki,

$$\sum_m \sum_n a_{n,m} = -1$$

olur. Demek ki Teorem 21.2'ye göre $\sum_{i,j} a_{i,j}$ çifte serisi yakınsak değildir, nitekim

$$s_{n,m} \begin{cases} \geq 1 & \text{eğer } n > m \text{ ise} \\ \leq -1 & \text{eğer } m > n \text{ ise} \\ = 0 & \text{eğer } m = n \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

Aşağıdaki teorem bazı durumlarda $\sum_m \sum_n a_{n,m}$ ve $\sum_n \sum_m a_{n,m}$ serilerinin eşit olduğunu söylüyor:

Teorem 21.3. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için $a_{n,m} \geq 0$ olsun. Her j için $\sum_i a_{i,j}$ serisi ve $\sum_j \sum_i a_{i,j}$ serisi yakınsak olsun. O zaman her i için $\sum_j a_{i,j}$ serisi ve $\sum_i \sum_j a_{i,j}$ serisi yakınsaktır ve*

$$\sum_i \sum_j a_{i,j} = \sum_j \sum_i a_{i,j}$$

olur.

Kanıt: Her j için $a_{n,j} \le \sum_i a_{i,j}$ olduğundan,

$$\sum_{j=0}^{m} a_{n,j} \le \sum_{j=0}^{m}\sum_{i} a_{i,j} \le \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i} a_{i,j}$$

olur. Bu eşitsizlikte m'yi sonsuza götürürsek, her n için $\sum_{j=0}^{\infty} a_{n,j}$ serisinin yakınsak olduğunu görürüz. Bu, birinci önerme. İkincisini kanıtlayalım. $y_j = \sum_i a_{i,j}$ ve $x_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}$ olsun. $\sum_{j=0}^{\infty} y_j \le \sum_{i=0}^{\infty} x_i$ eşitliğini kanıtlamalıyız. İşte kanıtı:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} y_j &= \sum_{j=0}^{m}\sum_{i} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{m}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\end{aligned}$$

eşitsizliğinde m'yi sonsuza götürürsek,

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j \le \sum_{i=0}^{\infty} x_i$$

buluruz. Diğer eşitsizlik benzer şekilde kanıtlanır. □

Son olarak şu teoremi kanıtlayalım:

Teorem 21.4. *$\sum a_i$ ve $\sum b_j$ iki mutlak yakınsak seri olsun. O zaman*

$$\sum_{i,j} a_i b_j$$

çifte serisi mutlak yakınsaktır ve

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \sum a_i \sum b_j$$

olur.

Kanıt: $\sum_{i,j} |a_i b_j|$ çifte serisinin kısmi toplamlarının $\sum |a_i| \sum |b_j|$ çarpımından küçük eşit olduğunu kanıtlamak zor değil. Dolayısıyla $\sum_{i,j} |a_i b_j|$ çifte serisi yakınsar.

$c_{i,j} = a_i b_j$ olsun. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ fonksiyonu, her n doğal sayısı için, f fonksiyonu

$$\{0, 1, \ldots, n^2\}$$

kümesiyle

$$\{0, 1, \ldots, n\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$$

kümesi arasında bir eşleme olacak biçimde tanımlanmış olsun. (Böyle bir fonksiyon tabii ki vardır ve zorunlu olarak bir eşlemedir.) Teorem 21.2'ye göre

$$\sum_k c_{f(k)} = \sum_{i,j} a_i b_j$$

olur. Demek ki $\sum_k c_{f(k)} = \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right)$ eşitliğini kanıtlamak yeterli. Ancak, f'nin tanımından dolayı,

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_{f(k)} = \sum_{i,j \le n} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)$$

olur. Demek ki terimleri

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_{f(k)}$$

olan dizi yakınsaktır. Ama bu dizi terimleri $\sum_{k=1}^{n} c_{f(k)}$ olan (yakınsak) dizinin altdizisidir. Demek ki her iki dizi de aynı sayıya yakınsar. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sum_k c_{f(k)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{f(k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} c_{f(k)} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right)\end{aligned}$$

olur. □

22. Sonsuz Çarpımlar

$(x_n)_n$ herhangi bir sayı dizisi olsun.

$$p_n = x_0 x_1 \cdots x_n$$

olsun. p_n'ye n'inci ***kısmi çarpım*** diyebiliriz. Eğer $\lim_{n\to\infty} p_n$ limiti varsa

$$\prod_{i=0}^{\infty} x_i = \lim_{n\to\infty} p_n$$

tanımını yapmak isteyebiliriz. Ne yazık ki çoğu zaman (ama her zaman değil) kabul gören tanım bu kadar basit değil. Önce genellikle kabul edilen tanımı yazalım, sonra neden bu tanımın kabul edilmesi gerektiğini gösteren bir sonuç kanıtlayacağız.

Eğer belli bir N_0 göstergeci için,

$$(p'_n = x_{N_0+1} x_{N_0+2} \cdots x_n)_{n>N_0}$$

dizisinin 0'dan **farklı** bir limiti varsa, o zaman

$$\prod_{i=0}^{\infty} x_i$$

sonsuz çarpımının **yakınsak** olduğu ve sonsuz çarpımın

$$x_0 x_1 \cdots x_{N_0} \cdot \lim_{n\to\infty} p'_n$$

olduğu söylenir ve bu sonsuz çarpım

$$\prod x_i \text{ ya da } \prod_{i=0}^{\infty} x_i$$

olarak yazılır.

$$\prod_{i=k}^{\infty} x_i \text{ ya da } U \subseteq \mathbb{N} \text{ için } \prod_{i\in U} x_i$$

gibi gösterimlerin anlamı bariz olmalı. Elbette herhangi bir $N_0 \in \mathbb{N}$ için,

$$\prod_{i=0}^{\infty} x_i = \prod_{i=0}^{N_0} x_i \cdot \prod_{i=N_0+1}^{\infty} x_i$$

olur.

Demek ki sonsuz bir çarpımın 0 olması için terimlerden en az birinin 0 olması ve sadece sonlu sayıda terimin 0 olması gerek ve yeter koşuldur. Mesela sabit 0 dizisinin sonsuz çarpımı yoktur! Ya da her iki teriminden biri 0 olan bir dizinin sonsuz çarpımı yoktur. Bir başka örnek: $(1/i)_{i>0}$ dizisinin sonsuz çarpımı yoktur çünkü N_0 ne olursa olsun,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=N_0}^{n} \frac{1}{i} = 0$$

olur.

Bu arada tanımın ve $\prod_{i=0}^{\infty} x_i$ sayısının N_0'ın seçiminden bağımsız olduğunu gözlemleyelim (aksi halde tanım, tanım olmazdı!) Bunun basit kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Tanımın böyle olmasını okur doğal karşılamayabilir. Ama bu tanım daha pratiktir. İşte bu tanımın daha pratik olmasının nedenlerinden biri:

Teorem 22.1. $\prod_{i=0}^{\infty} x_i$ *sonsuz çarpımı yakınsaksa o zaman* $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ *olur.*

Kanıt: N_0 ve $n > N_0$ için p'_n tanımdaki gibi olsun. $\lim_{n\to\infty} p'_n = p'$ olsun. Tanıma göre $p' \neq 0$ olmalı. Eğer $n > N_0 + 1$ ise,

$$x_n = \frac{p'_n}{p'_{n-1}}$$

olduğundan ve sağ tarafın limiti $p'/p' = 1$ olduğundan, istediğimiz sonucu elde ederiz. □

Sonuç 22.2. *Sonsuz sayıda terimi* ≤ 0 *olan bir dizinin sonsuz çarpımı yakınsak olamaz.* □

Örnek 22.1. $\prod_{i=2}^{\infty}(1-1/i)$ sonsuz çarpımının kısmi çarpımları

$$p_n = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

olduğundan, sonsuz çarpımın yakınsadığı söylenemez. Bu durumda sonsuz çarpımın 0'a ıraksadığı söylenir.

Yukarıdaki teoremden dolayı x_n yerine ($y_n = x_n - 1$ tanımıyla) $1 + y_n$ ve $\prod x_i$ yerine $\prod(1+y_i)$ yazmak neredeyse bir gelenek olmuştur. Demek ki $\prod x_i$ çarpımının yakınsak olması için $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ olmalıdır.

Teorem 22.3. *$(y_n)_n$ pozitif bir dizi olsun. $\prod(1+y_i)$ sonsuz çarpımının yakınsak olması için $\sum y_i$ serisinin yakınsak olması gerek ve yeter koşuldur. Bu durumda*

$$\sum y_i \le \prod(1+y_i) \le \exp\left(\sum y_i\right)$$

olur.

Kanıt: Önce sonsuz çarpımın yakınsak olduğunu varsayalım. Kanıtı bariz olan

$$y_0 + y_1 + \cdots + y_n \le (1+y_0)(1+y_1)\cdots(1+y_n) \le \prod(1+y_i)$$

eşitsizliğinden, pozitif bir seri olan $\sum y_i$ serisinin sonsuz çarpım tarafından sınırlı olduğu, dolayısıyla yakınsak olduğu çıkar.

Şimdi $\sum y_i$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. Örnek 10.14'e göre,

$$(1+y_0)(1+y_1)\cdots(1+y_n) \le \exp(y_0 + \cdots + y_n) \le \exp\left(\sum y_i\right)$$

olur. Demek ki artan bir dizi olan kısmi çarpımlar dizisi $\exp\left(\sum y_i\right)$ tarafından üstten sınırlıdır, dolayısıyla yakınsaktır. □

Örnekler

22.2. Eğer $s > 1$ ise $\prod(1+1/i^s)$ yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır.

22.3. Gene üçüncü ciltte Wallis formülü olarak bilinen

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{4i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

eşitliğini kanıtlayacağız.

Teorem 22.4. *$\prod(1+y_i)$ sonsuz çarpımının yakınsak olması için şu koşul yeter ve gerek koşuldur: Her $\epsilon > 0$ için öyle bir N var ki, her $N < m < n$ için*

$$|(1+y_{m+1})\cdots(1+y_n) - 1| < \epsilon$$

olur.

Kanıt: Önce $\prod(1+y_i)$ sonsuz çarpımının yakınsak olduğunu varsayalım ve limite p diyelim. Kısmi çarpımları da her zamanki gibi p_n olarak gösterelim. Gerekirse ilk birkaç terimi silerek, $1+y_i$'lerin > 0 olduklarını varsayabiliriz. Bu varsayımla $p > 0$ ve her $p_n > 0$ olur.

Öyle bir N_0 alalım ki, her $m > N_0$ için

$$|p_m - p| < \frac{p}{2}$$

olsun. Bu durumda, her $m > N_0$ için

$$\frac{p}{2} < p_m < \frac{3p}{2} \tag{1}$$

olur.

Şimdi $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $N > N_0$ vardır ki, her $n > m > N$ için,

$$|p_n - p_m| < \epsilon\frac{p}{2}$$

olur. Buradan, (1)'in ilk yarısıyla birlikte

$$\left|\prod_{i=m+1}^{n}(1+y_i) - 1\right| = \left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| = \frac{|p_n - p_m|}{p_m} < \frac{\epsilon p/2}{p_m} < \epsilon$$

çıkar ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

Ters istikameti kanıtlayalım. Koşul sağlanmış olsun. Koşulda $\epsilon = 1/2$ alıp öyle bir N_0 bulalım ki, her $N_0 < m < n$ için

$$|(1+y_{m+1})\cdots(1+y_n) - 1| < \frac{1}{2}$$

olsun. Demek ki N_0'dan sonraki terimlerin hiçbiri 0 olamaz ve ayrıca eğer $\prod_{i>N_0}(1+y_i)$ sonsuz çarpımı yakınsaksa, bu sonsuz çarpım 0 olamaz, 1/2 ile 3/2 arasında bir sayı olmalı. İlk birkaç terimi atarak, $N_0 = -1$ varsayımını yapabiliriz, yani her m için $|p_m - 1| < 1/2$ ya da

$$\frac{1}{2} < p_m < \frac{3}{2}$$

varsayımını yapabiliriz. Şimdi $\prod(1+y_i)$ sonsuz çarpımının yakınsaklığını kanıtlayabiliriz. Koşula göre her $\epsilon > 0$ için öyle bir N var ki her $n > m > N$ için

$$\left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| = \left|\prod_{i=m+1}^{n}(1+y_i) - 1\right| < 2\epsilon/3$$

ve

$$|p_n - p_m| < \frac{2\epsilon|p_m|}{3} < \epsilon$$

olur. Demek ki $(p_n)_n$ dizisi bir Cauchy dizisi, dolayısıyla yakınsak. □

Şimdi de mutlak yakınsaklığa eş düşen sonucu kanıtlayalım:

Teorem 22.5. *Eğer $\prod(1+|y_i|)$ yakınsaksa, $\prod(1+y_i)$ de yakınsaktır.*

Kanıt: Bir önceki teoremi kullanacağız.

$$|(1+y_{m+1})\cdots(1+y_n)-1|$$

ve

$$(1+|y_{m+1}|)\cdots(1+|y_n|)-1$$

ifadelerinin içindeki çarpımları yapalım ve her birinden 1 çıkaralım (sabit terim kaybolur) ve ardından birincisine üçgen eşitsizliğini uygulayalım, aynen ikincisini buluruz. Demek ki,

$$|(1+y_{m+1})\cdots(1+y_n)-1| \le (1+|y_{m+1}|)\cdots(1+|y_n|)-1$$

olur. Böyle bir önceki teorem istediğimiz sonucu verir. □

Eğer $\prod(1+|y_i|)$ yakınsaksa, $\prod(1+y_i)$ sonsuz çarpımına ***mutlak yakınsak*** denir.

Teorem 22.3'ten hemen şu çıkar:

Sonuç 22.6. $\prod(1+y_i)$ *sonsuz çarpımının mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter koşul* $\sum y_i$ *serisinin mutlak yakınsak olmasıdır.* □

Örnekler

22.4. Her $|z|<1$ için $\prod(1+z^n)$ sonsuz çarpımı yakınsaktır.

22.5. Mutlak yakınsak olmayan bir sonsuz çarpım örneği:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^i}{i}\right).$$

Bu sonsuz çarpımın kısmi çarpımlarını hesaplayabiliriz. Eğer i tekse,

$$\left(1-\frac{(-1)^i}{i}\right)\left(1-\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}\right)=1$$

olduğundan, kısmi çarpımlar ya 1 ya da

$$1-\frac{(-1)^i}{i}$$

çıkar. Demek ki sonsuz çarpım 1'e yakınsar.

22.6. Her z sayısı için $\prod_{i=i_0}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{i^2}\right)$ mutlak yakınsaktır çünkü $\sum 1/i^2$ yakınsaktır. Üçüncü ciltte

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{i^2}\right)$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Burada

$$\prod_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$$

çarpımının kısmi çarpımlarını hesaplayalım:

$$1-\frac{1}{i^2}=\frac{(i-1)(i+1)}{i^2}$$

olduğundan, sadeleşmelerden sonra,

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{2\cdot 4}{3^2}\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

kalır. Demek ki sonsuz çarpım $1/2$ imiş.

Şimdi Teorem 22.3'ün kanıtını tamamlayabiliriz:

Teorem 22.7. *Her i için $0 \le y_i < 1$ olsun. O zaman $\prod(1-y_i)$ sonsuz çarpımının yakınsak olması için, $\sum y_i$ serisinin yakınsak olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: $\sum y_i$ yakınsaksa, $0 \le y_i$ olduğundan, mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla $\prod(1-y_i)$ mutlak yakınsaktır. Şimdi sonsuz çarpımın yakınsak olduğunu ve p'ye yakınsadığını varsayalım. Teoremin varsayımları altında,

$$1+y_i \le \frac{1}{1-y_i}$$

olduğundan,

$$(1+y_0)(1+y_1)\cdots(1+y_n) \le \frac{1}{(1-y_0)(1-y_1)\cdots(1-y_n)} \le \frac{1}{p}$$

olur. Buradan $\prod(1+y_i)$ sonsuz çarpımının yakınsak olduğu çıkar. Demek ki Teorem 22.3'e göre $\sum y_i$ yakınsaktır. □

Örnekler

22.7. Eğer $s > 1$ ise $\prod(1-1/i^s)$ mutlak yakınsaktır. Eğer $s = 1$ ise $\prod_{i=2}^{\infty}(1-1/i^s) = \prod_{i=2}^{\infty}(1-1/i)$ sonsuz çarpımının 0'a ıraksadığını Örnek 22.1'de görmüştük. Eğer $s < 1$ ise,

$$0 < 1-\frac{1}{n^s} < 1-\frac{1}{n^s}$$

olduğundan kısmi çarpımlar $1/n$'den de küçük olurlar ve bu durumda da sonsuz çarpım 0'a ıraksar.

22.8.

$$\prod_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{i(i+2)}\right)$$

sonsuz çarpımı mutlak yakınsaktır elbet. Bu durumda kısmi çarpımları hesaplayarak sonsuz çarpımı bulabiliriz:

$$p_n=\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{2}{i(i+2)}\right)=\frac{4\cdot 1}{2\cdot 3}\cdot\frac{5\cdot 2}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}=\frac{n+2}{3n}$$

olduğundan, sonsuz çarpım $1/3$ olur.

23. Toplanabilir Aileler

Yakınsak bir seri, aslında sayılabilir sonsuzluktaki iyisıralanmış bir sayı kümesini (ya da ailesini) toplamak demektir. Eğer sayı kümesinin elemanları

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

olarak iyisıralanmışsa, o zaman bu sayıların toplamını

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} (a_0 + \cdots + a_n)$$

limiti olarak tanımlamıştık (tabii limit varsa.) Toplamın iyisıralamaya göre değiştiğini de gördük (Altbölüm 17.2). Bu "toplam"ın sonlu toplamları anımsatan birçok hoş özelliğini kanıtladık. Örneğin, yakınsak serilerin toplama ya da yakınsak serileri bir sayıyla çarpma eylemleri aynen sonlu toplamlardaki gibi davranıyor:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_i a_i + \sum_i b_i = \sum_i (a_i + b_i),\\
&\textstyle\lambda \sum a_i = \sum \lambda a_i,\\
&\textstyle(\sum_i a_i + \sum_i b_i) + \sum c_i = \sum_i a_i + (\sum b_i + \sum c_i)
\end{aligned}$$

gibi. Ama ne yazık ki sonlu toplamların her özelliği sonsuz toplamlara sirayet etmiyor. Örneğin $\sum a_i$ toplamı varsa ve $J \subseteq \mathbb{N}$ ise $\sum_{i\in J} a_i$ toplamı olmayabilir; bunu görmek için $a_i = (-1)^i/(i+1)$ ve $J = 2\mathbb{N}$ almak yeterli. Serilerin çarpımı bile ancak özel durumda tanımlanmıştı (Cauchy çarpımı, bkz. Teorem 16.7). Ama pozitif sayıların toplamı çok daha fazla sonlu bir toplam gibi davranıyordu. Bu bölümde, pozitif serilerin yakınsaklığını genelleştireceğiz: Sadece sayılabilir sonsuzlukta ve iyisıralanmış değil, iyisıralanmış olsun ya da olmasın çeşitli sonsuzlukta sayıları da toplamaya çalışacağız. Çok başarılı olacağımız söylenemez ama $\sum_{q\in\mathbb{Q}} a_q$ ya da $\sum_{X\subseteq\mathbb{R}} a_X$ gibi "toplamları" bazı ender durumlarda tanımlayabileceğiz.

I herhangi bir küme ve $a = (a_i)_{i\in I}$ herhangi bir gerçel sayı ailesi olsun. (Yani a, I'dan $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyondur; $a(i)$ yerine a_i yazıyoruz sadece.) $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{I})$, I'nın sonlu altkümeleri kümesi olsun. $J \in \mathcal{S}$ için

$$s_J = \sum_{i\in J} a_i = \sum_J a_i = \sum_J a$$

olarak tanımlansın. J sonlu bir küme olduğundan, bu tanımda sonlu bir toplam sözkonusu ve tanımda bir sorun yok. Bu gösterimleri bu altbölümün başından sonuna kadar kabul edeceğiz.

Şimdi $(a_i)_i$ ailesinin toplanabilir olmasının ve toplamının s olmasının tanımını verelim:
Her $\epsilon > 0$ sayısı için, öyle bir $J = J(\epsilon) \in \mathcal{S}$ vardır ki, her $J \subseteq K \in \mathcal{S}$ için

$$|s_K - s| < \epsilon$$

olur.

Bu durumda $(a_i)_i$ ailesine ***toplanabilir aile*** denir. Toplamın s olduğunu gönül rahatlığıyla söyleyebilmemiz için şu sonucu kanıtlamamız gerekiyor:

Önsav 23.1. *Toplanabilir bir ailenin toplamı biriciktir.*

Kanıt: Toplanabilir aileye $a = (a_i)_i$ diyelim. s ve t sayıları a ailesinin iki toplamı olsun. $\epsilon > 0$ olsun. Tanıma göre öyle $J_s, J_t \in \mathcal{S}$ vardır ki,

$$J_s \subseteq K \in \mathcal{S} \Longrightarrow |s_K - s| < \epsilon/2$$
$$J_t \subseteq K \in \mathcal{S} \Longrightarrow |s_K - t| < \epsilon/2$$

olur. Şimdi $K = J_s \cup J_t$ olsun. O zaman,

$$|s - t| \leq |s - s_K| + |s_K - t| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olur. Bu her $\epsilon > 0$ için doğru olduğundan $s = t$ olmalıdır. □

Bu önsav sayesinde, eğer $a = (a_i)_i$ ailesinin toplamı varsa ve toplamı s ise

$$\sum a = s$$

yazabiliriz.

Şu sonuç bariz olmalı:

Önsav 23.2. *İki toplanabilir ailenin ayrık bileşimi toplanabilirdir ve bileşimin toplamı ailelerin toplamına eşittir.* □

İlk olarak eğer $a = (a_i)_i$ ailesi sonluysa (yani I sonluysa) $\sum a$ toplamının aynen bildiğimiz s_I toplamı olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 23.3. *Eğer $a = (a_i)_i$ ailesi sonluysa (yani I sonluysa) o zaman $\sum a$ vardır ve bu sayı aynen bildiğimiz s_I sayısıdır.*

Kanıt: Eğer I sonluysa, $s = s_I = \sum_I a_i$ sayısının $\sum a$ sayısına eşit olduğu tanımdan çıkıyor, nitekim her $\epsilon > 0$ için tanımdaki $J = J(\epsilon)$ kümesini I'ya eşit alalım. Bu durumda her $I \subseteq K \in \mathcal{F}$ için $I = K$ ve dolayısıyla $|s_K - s| = |s_K - s_I| = 0 < \epsilon$ olur. □

Şimdi de pozitif seriler için, daha önce kitapta tanımladığımız yakınsaklık kavramının hiç uzağına düşmediğimizi kanıtlayalım. Önce yardımcı bir önsav:

Önsav 23.4. *Eğer $a = (a_i)_i$ ailesi toplanabilirse ve her $i \in I$ için $a_i \geq 0$ ise, o zaman her $K \in \mathcal{S}$ için $s_K \leq \sum a$ olur.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. $J = J(\epsilon)$, toplanabilirliğin tanımında ϵ'a tekabül eden sonlu göstergeç kümesi olsun. O zaman

$$\left| s_{K \cup J} - \sum a \right| < \epsilon$$

olur. Bunu şöyle yazalım:

$$\left| s_K + s_{J \setminus K} - \sum a \right| < \epsilon.$$

Demek ki

$$-\epsilon - s_{J \setminus K} < s_K - \sum a < \epsilon - s_{J \setminus K} < \epsilon.$$

Bu her $\epsilon > 0$ için doğru olduğundan, $s_K - \sum a \leq 0$ olur. □

Önsav 23.5. *Eğer $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ pozitif bir diziyse, daha önce kitapta tanımlanan $\sum a_i$ kavramıyla biraz önce tanımlanan $\sum a$ kavramı çakışır: Toplamların biri varsa diğeri de vardır ve iki toplam eşittir.*

Kanıt: Önce $\sum a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = s \in \mathbb{R}$ varsayımını yapalım. Seri yakınsaklığının tanımına göre, $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ tanımıyla, $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ olur. Herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı alalım. Öyle bir N göstergeci vardır ki, her $n \geq N$ için $|s - s_n| < \epsilon$ olur. $J = \{0, 1, \ldots, N\}$ olsun. Herhangi sonlu bir $J \subseteq K \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi alalım. Ve $K \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ içindeliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Elbette $n \geq N$ olur. O zaman

$$|s - s_K| = s - s_K \leq s - s_n < \epsilon$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar: $s = \sum a$.

Şimdi $\sum a$ sayısının olduğunu varsayalım. Bir $\epsilon > 0$ seçelim. $J \in \mathcal{S}$, tanımdaki ϵ sayısına tekabül eden J olsun. N sayısını $J \subseteq \{0, 1, \ldots, N\}$ olacak kadar büyük seçelim. $n > N$ olsun. $K = \{0, 1, \ldots, n\}$ olsun. $J \subseteq K \in \mathcal{S}$ olduğundan,

$$\left| s_N - \sum a \right| = \sum a - s_N \leq \sum a - s_K = \left| \sum a - s_K \right| < \epsilon$$

olur. □

Teorem 23.6. *Pozitif bir $a = (a_i)_i$ ailesinin toplanabilir olması için sonlu toplamlar kümesinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur. Bu durumda*

$$\sum a = \sup\{s_K : K \in \mathcal{F}\}$$

olur.

Kanıt: Önce ailenin toplanabilir olduğunu varsayalım. Önsav 23.4'e göre $\sum a$ sonlu toplamların bir üstsınırıdır, ve toplanabilirliğin tanımı gereği bu sayı sonlu toplamların en küçük üstsınırıdır.

Şimdi sonlu toplamlar kümesinin üstten sınırlı olduğunu varsayalım ve en küçük üstsınıra s diyelim. $\epsilon > 0$ olsun. $J = J(\epsilon) \in \mathcal{S}$ kümesi

$$s - \epsilon < s_J$$

olacak biçimde seçilsin. N sayısı $J \subseteq \{0, 1, \ldots, N\}$ içindeliği doğru olacak biçimde seçilsin. $n > N$ olsun. O zaman,

$$|s - s_n| = s - s_n \leq s - s_J < \epsilon$$

olur, ki bu da istediğimizi kanıtlar. □

Şimdi de bu kapsamda Cauchy koşulunun ne anlama geldiğini görelim. $a = (a_i)_i$ bir sayı ailesi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$(K \in \mathcal{S} \text{ ve } I_0 \cap K = \varnothing) \Longrightarrow |s_K| < \epsilon$$

ya da buna eşdeğer olan

$$(K \in \mathcal{S} \text{ ve } I_0 \subseteq K = \varnothing) \Longrightarrow |s_K - s_{I_0}| < \epsilon$$

önermesini sağlayan sonlu bir $I_0 \subseteq I$ göstergeç kümesi varsa $a = (a_i)_i$ ailesine ***Cauchy ailesi*** denir.

Birazdan tahmin edilen sonucu kanıtlayacağız ama önce bir tanım daha gerekiyor: Eğer $J \subseteq I$ ise ve her $j \in J$ için $b_j = a_j$ ise $(b_j)_{j \in J}$ ailesine $(a_i)_{i \in I}$ ailesinin bir ***altailesi*** denir.

Önsav 23.7. *Bir Cauchy ailesinin altailesi de Cauchy'dir.*

Kanıt: $a = (a_i)_i$ bir Cauchy ailesi ve $(b_j)_j$ bu ailenin bir altailesi olsun. $\epsilon > 0$ olsun. $I_0 \subseteq I$, Cauchy ailesi tanımındaki I_0 olsun. $J_0 = I_0 \cap J$ olsun. O zaman J_0, J'nin sonlu bir altkümesidir. Eğer $K \subseteq J$, J_0'dan ayrık bir kümeyse, K, I_0'dan da ayrık bir kümedir, nitekim $K \cap I_0 = (K \cap J) \cap I_0 = K \cap (J \cap I_0) = K \cap J_0 = \varnothing$ olur. Dolayısıyla $|s_K| < \epsilon$ olur. □

Teorem 23.8. *Bir ailenin toplanabilir olmasıyla Cauchy olması arasında fark yoktur.*

Kanıt: Önce $a = (a_i)_i$ ailesinin toplanabilir olduğunu varsayalım. Toplama s diyelim. $\epsilon > 0$ olsun. Toplanabilirliğin tanımından dolayı öyle sonlu bir $J \subseteq I$ göstergeç kümesi vardır ki, her $J \subseteq K \in \mathcal{F}$ için $|s - s_K| < \epsilon/2$ olur. Öyle bir J sabitleyelim. O zaman her $J \subseteq K \in \mathcal{F}$ için

$$|s_K - s_J| \leq |s_K - s| + |s - s_J| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olur.

Ters istikamette, $a = (a_i)_i$ ailesinin Cauchy olduğunu varsayalım. Pozitif (ya da negatif) a_i'lerden oluşan altdizi bir önceki önsava göre Cauchy olduğundan, Önsav 23.2'ye göre her a_i'nin pozitif (ya da negatif) olduğunu varsayabiliriz. Tanımda $\epsilon = 1$ alalım ve öyle bir $I_0 \in \mathcal{F}$ bulalım ki eğer $K \in \mathcal{F}$, I_0'dan ayrıksa, $s_K < 1$ olsun. O zaman her $K \in \mathcal{F}$ için,

$$s_K = s_{K \cap I_0} + s_{K \setminus I_0} \leq s_{I_0} + s_{K \setminus I_0} \leq s_{I_0} + 1.$$

Demek ki

$$\{s_K : K \in \mathcal{F}\}$$

kümesi üstten sınırlıdır ve dolayısıyla en küçük üstsınırı vardır. Teorem 23.6'ya göre a ailesi toplanabilirdir. □

Sonuç 23.9. *Eğer $a = (a_i)_i$ ailesi toplanabilirse, her $\epsilon > 0$ için,*

$$\{i \in I : |a_i| \geq \epsilon\}$$

kümesi sonludur.

Kanıt: a ailesinin Cauchy olduğunu biliyoruz. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. I_0, Cauchyliğin tanımındaki gibi olsun. Eğer $k \in I \setminus I_0$ ise tanımdaki K kümesini $\{k\}$ olarak alalım. □

Şimdi konunun en önemli teoremini kanıtlayalım.

Teorem 23.10. *Eğer $a = (a_i)_i$ ailesi toplanabilirse o zaman $\{i \in I : a_i \neq 0\}$ kümesi sayılabilirdir.*

Kanıt: Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $I_n = \{i \in \mathbb{N} : a_i > 1/n\}$ olsun. O zaman $I_n \subseteq I_{n+1}$ ve

$$\bigcup_{n>0} I_n = \{i \in I : a_i \neq 0\}$$

olur. Sonuç 23.9'a göre her I_n sonludur. Demek ki I en fazla sayılabilir sonsuzlukta olabilir. □

Toplanabilir ailelerle ilgili bilgilendirmeyi burada kesiyoruz. Daha fazla bilgiye ulaşmak isteyen, örneğin [Bo]'ya başvurabilir.

24. $\mathbb{R}$'nin Biricikliği

Bu bölümde ikinci bir gerçel sayı sisteminin daha olmadığını kanıtlayacağız. Bir başka (edebî) deyişle, eğer

$$(\mathbb{R},\ +,\ \times,\ <,\ 0,\ 1) \text{ ve } (\mathbb{R}',\ +',\ \times',\ <',\ 0',\ 1')$$

yapıları, kitabın en başında, Altbölüm 1.1'de verilen 16 aksiyomu sağlıyorsa, o zaman bu iki yapının birbirine çok benzediğini, sadece elemanlarının ve işlemlerinin adlarının değişik olduğunu, mesela birinin İngilizce diğerinin Türkçe olabileceğini (birinde iki artı üç beşse diğerinde two plus three five olduğunu), ama yapıların özünde birbirinden pek bir farkı olmadığını, $\mathbb{R}$'ceden $\mathbb{R}'$'ceye ve $\mathbb{R}'$'ceden $\mathbb{R}$'ceye tercüme yapmamızı sağlayan iki sözlüğün aradaki farkı yok edeceğini göstereceğiz. Aşağıdaki teoremde bu dediğimizi matematiksel olarak ifade ediyoruz.

Teorem 24.1. $(\mathbb{R},\ +,\ \times,\ <,\ 0,\ 1)$ *ve* $(\mathbb{R}',\ +',\ \times',\ <',\ 0',\ 1')$ *yapıları kitabın en başında, Altbölüm* 1.1*'de verilen* 16 *aksiyomu sağlayan iki yapı olsun. O zaman her* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *için*

a. $f(x+y) = f(x) +' f(y)$,
b. $f(x \times y) = f(x) \times' f(y)$,
c. $x < y \Leftrightarrow x <' y$,
d. $f(0) = 0'$,
e. $f(1) = 1'$

önermelerini sağlayan bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ *eşlemesi vardır. Ayrıca ilk iki önermeyi sağlayan bir* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ *eşlemesi zorunlu olarak son üç önermeyi de sağlar ve böyle bir eşlemeden sadece bir tane vardır*[1].

Kanıt: Her iki yapı da 16 aksiyomu sağladığından ve bu aşamaya kadar kanıtladığımız teoremlerin kanıtları sadece bu 16 aksiyomu (ve matematiğin genel aksiyomlarını elbette) kullandığından, bu teoremlerin her biri her iki yapı için de geçerlidir. Örneğin $\mathbb{R}$ için inşa ettiğimiz $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ doğal sayılar yapısının bir benzeri $\mathbb{R}'$ yapısının içinde de vardır; bu yapıya $(\mathbb{N}', +', \times', 0', 1')$ diyelim.

[1] Bu koşulları sağlayan bir f eşlemesine ***izomorfi*** denir. Aralarında bir izomorfi bulunan yapılara da ***izomorfik yapılar*** adı verilir.

Aynı şey $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ için de geçerlidir, bunların da $\mathbb{R}'$ yapısında muadilleri vardır. Onlara da $\mathbb{Z}'$ ve $\mathbb{Q}'$ adlarını verelim.

Teoremde f eşlemesinden **sadece bir tane** olduğu söyleniyor. Demek ki f'yi bulmak zor olmamalı. Matematikte biricik olan nesneleri pek aramaya gerek yoktur, onlar zaten sürekli "ben buradayım, ben buradayım" diyerek kendilerini belli ederler. Dolayısıyla kanıt zor değil, ama biraz zaman alıcı.

İlk önce eğer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ eşlemesi ilk iki özelliği sağlıyorsa, bu eşlemenin ters eşlemesi olan $f^{-1} : \mathbb{R}' \longrightarrow \mathbb{R}$ eşlemesinin de ilk iki özelliği sağladığını kanıtlayalım. Nitekim x', $y' \in \mathbb{R}'$ olsun.

$$f(f^{-1}(x') + f^{-1}(y')) = f(f^{-1}(x')) +' f(f^{-1}(y')) = x' +' y'$$

olduğundan, eşitliğin her iki tarafının f^{-1}-imgesini alarak,

$$f^{-1}(x') + f^{-1}(y') = f^{-1}(x' +' y')$$

bulunur. Benzer şekilde her x', $y' \in \mathbb{R}'$ için,

$$f^{-1}(x') \times f^{-1}(y') = f^{-1}(x' \times' y')$$

eşitliği doğrudur. Bunları aklımızda tutalım.

Şimdi (a) ve (b) önermeleri bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ fonksiyonu tarafından sağlanıyorsa, (c), (d) ve (e) önermelerinin de sağlandığını kanıtlayalım. Diyelim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ ilk iki önermeyi sağlıyor, yani toplamaya ve çarpmaya dağılıyor, matematikçi jargonuyla toplama ve çarpmayla uyum içinde, ya da toplamaya ve çarpmaya saygı duyuyor. (a)'dan dolayı

$$0' +' f(0) = f(0) = f(0+0) = f(0) +' f(0)$$

doğru olduğundan, $f(0) = 0'$ olmak zorundadır, çünkü sayfa 13'te kanıtlanan sadeleştirme özelliği, sadece $\mathbb{R}$ için değil, $\mathbb{R}'$ yapısı için de geçerlidir. Benzer şekilde $f(1)^2 = f(1)$ bulunur:

$$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) \times' f(1).$$

Demek ki $f(1)$ ya $0'$ elemanına ya da $1'$ elemanına eşit. Ama $f(1) = 0'$ ise, $f(1) = 0' = f(0)$ olur, ve f birebir olduğundan $0 = 1$ buluruz, bir çelişki. Demek ki $f(1) = 1'$ olmalı. (d) ve (e) kanıtlandı. Şimdi (e)'yi kanıtlayalım. Pozitif her elemanın gene pozitif, dolayısıyla 0'dan farklı bir karekökü olduğunu biliyoruz. 0'dan farklı elemanların karelerinin de pozitif olduğunu biliyoruz. Demek ki aşağıdaki önerme $\mathbb{R}$'de doğrudur:

$$x < y \Leftrightarrow \exists z\,(z \neq 0 \wedge y = x + (z \times z)).$$

Bir başka deyişle $\mathbb{R}$'de eşitsizliği toplama ve çarpma işlemleriyle ifade edebiliriz. Aynı önermenin muadili $\mathbb{R}'$ yapısında da doğrudur:

$$x <' y \Leftrightarrow \exists z\,(z \neq 0' \wedge y = x +' (z \times' z)).$$

Ama f ve f^{-1} eşlemeleri toplama ve çarpmayla uyumlu olduklarından, eğer bir $z \in \mathbb{R}$ için,

$$z \neq 0 \wedge y = x + (z \times z)$$

önermesi doğruysa, bu önermeye f'yi uygulayarak

$$f(z) \neq 0' \wedge f(y) = f(x) +' (f(z) \times' f(z))$$

önermesinin de doğru olduğu anlaşılır. Bundan da $x < y$ ise $f(x) <' f(y)$ olduğu çıkar. Diğer istikamet benzer şekilde kanıtlanır çünkü bir önceki paragrafta f' eşlemesinin de toplama ve çarpmayla uyumlu olduğunu kanıtladık.

Şimdi sıra, toplama ve çarpmayla uyumlu bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ eşlemesinin varlığını kanıtlamaya geldi. f'nin biricikliğini kanıtın en sonunda göstereceğiz. f'yi önce $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}'$ kümesine gidecek biçimde tanımlayacağız. Ardından, bulduğumuz bu $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ eşlemesini bir $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}'$ eşlemesine genişleteceğiz; daha sonra da bulduğumuz bu $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}'$ eşlemesini bir $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$ eşlemesine genişleteceğiz. Ardından $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{R}$'de yoğunluğunu kullanarak bulduğumuz bu son $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$ eşlemesini bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ eşlemesine genişleteceğiz. Tabii her aşamada f'nin toplama ve çarpmaya uyumlu olduğuna dikkat etmeliyiz.

$f(0) = 0'$ olsun ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n+1) = f(n) +' 1'$$

tanımını yapalım. Böylece f fonksiyonu tümevarımla tanımlanmış olur. Biraz haklı nedenlerden bu formülün gerçekten bir fonksiyon tanımladığından kuşku duyan okurlar için şu tanımı verelim (diğerleri bir sonraki paragrafa geçebilirler): Eğer bir $X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}'$ altkümesi,

$$(0, 0') \in X \wedge ((x, y) \in X \Rightarrow (x+1, y +' 1'))$$

önermesini sağlıyorsa, bu paragraflık bu kümeye "güzel küme" adı verelim. Güzel kümelerin kesişimi gene güzeldir elbette ve $\mathbb{N} \times \mathbb{N}'$ güzel bir kümedir. Tüm güzel kümeleri kesiştirirsek en küçük güzel kümeyi elde ederiz. Bu en küçük güzel küme, yukarıda tanımlamaya çalıştığımız fonksiyonun grafiğidir. Böylece f'nin bir fonksiyon olduğu tanımlanmış oldu.

Böylece tanımlanan f fonksiyonunun birebir ve örten olduğu ve her x, $y \in \mathbb{N}$ için (a) ve (b) özelliklerini sağladığı kolaylıkla kanıtlanır, kanıtı daha fazla uzatmamak için ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Şimdi $n \in \mathbb{N}$ ise $f(-n) = -f(n)$ tanımını yapalım. (Buradaki ikinci $-$, $\mathbb{R}'$ yapısındaki eksidir, yani aslında $-'$ olarak yazılmalıydı.) Böylece $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ eşlemesi $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}'$ eşlemesine genişler. Bu yeni tanımlanan $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}'$ eşlemesinin de toplama ve çarpmayla uyumlu olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir. Okura bırakıyoruz.

Şimdi de, n, $m \in \mathbb{Z}$ ama $m \neq 0$ için,

$$f(n/m) = f(n)/f(m)$$

tanımını yapalım. (İkinci bölme $\mathbb{R}'$ yapısındaki bölmedir.) $m \neq 0$ için $f(m) \neq 0'$ olduğundan eşitliğin sağındaki ifade anlamlıdır. Ama tanımın geçerli olduğunu kanıtlamak için, $n/m = p/q$ ise, $f(n)/f(m) = f(p)/f(q)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Diyelim, $n/m = p/q$. O zaman $nq = mp$ olur. Bu eşitliğin f imgesini alırsak,

$$f(n)f(q) = f(nq) = f(mp) = f(m)f(p)$$

ve $f(n)/f(m) = f(p)/f(q)$ buluruz. Böylece daha önceki $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}'$ eşlemesi $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$ fonksiyonuna genişler. Bu yeni fonksiyonun birebir ve örten olduğu ayrıca toplama ve çarpmayla uyum içinde olduğunun kolay kanıtını bir kez daha okura bırakıyoruz. Peşisıra tanımladığımız bu f fonksiyonlarının eşitsizlikle uyumlu oldukları da kanıtlanabilir[2].

Şimdi yukarıda bulduğumuz $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$ fonksiyonunu $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ fonksiyonuna genişleteceğiz. Buraya kadar SUP aksiyomunu hiç kullanmadığımıza dikkatinizi çekerim. Bütün bu yaptıklarımız çok daha genel bir çerçevede doğrudur[3]. Ama bundan sonra yapacağımız SUP aksiyomuyla çok yakından bağlantılı olacak. Sonraki iki bölümde de SUP aksiyomu doğru değilse başımıza neler gelebileceğini göreceğiz.

$r \in \mathbb{R}$ olsun.

$$A_r = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\} \text{ ve } B_r = \{q \in \mathbb{Q} : q > r\}$$

olsun. $f(A_r)$ ve $f(B_r)$ kümelerine bakalım. A_r'nin her elemanı B_r'nin her elemanından küçük olduğundan, $f(A_r)$'nin her elemanı $f(B_r)$'nin her elemanından küçük olur. Demek ki $\sup f(A_r) \leq \inf f(B_r)$ olmalı. Ama ayrıca

[2] f fonksiyonu toplama ve çarpmayla uyumlu olduğundan, f'nin sıralamayla uyumlu olduğunu göstermek için, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkalarının her birinde $a \geq 0 \Leftrightarrow \exists x, y, z, t\ a = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ eşdeğerliğinin geçerli olduğunu bilmek yeterli. Ancak okurun bu önermeyi bildiğini varsayamayız. f'nin eşitsizlikle uyumlu olduğu bu önerme varsayılmadan kolaylıkla kanıtlanabilir. Önce ilk tanımlanan $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ için bu kanıtlanmalı, ardından $\mathbb{Z}$ için ve nihayet $\mathbb{Q}$ için. Herhangi bir zorlukla karşılaşılmayacaktır.

[3] Cebir bilenler için: Karakteristiği 0 olan her cisim $\mathbb{Q}$ cismini, daha doğrusu $\mathbb{Q}$'ya izomorfik bir cismi içerir.

$A_r \cup B_r = \mathbb{Q}$ olduğundan, $f(A_r) \cup f(B_r) = \mathbb{Q}'$ olmak zorunda. Bundan da $\sup f(A_r) = \inf f(B_r)$ çıkar. Şimdi $f(r)$ elemanını

$$f(r) = \sup f(A_r) = \inf f(B_r)$$

olarak tanımlayalım. Böylece tanımlanmış olan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ fonksiyonunun istediğimiz tüm özellikleri sağladığının kanıtını okura bırakıyoruz.

Sıra geldi f fonksiyonunun biricikliğini kanıtlamaya. Dikkatli bir okur, yukarıdaki kanıtı gözden geçirince f fonksiyonunun zaten başka türlü tanımlanamayacağının, aynen yukarıda tanımladığımız gibi tanımlanması gerektiğinin hemen farkına varacaktır. Ama biz gene de ayrıca kanıtlayalım.

f, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$ teoremde sıralanan (a-e) özelliklerini (ya da aynı şey, (a) ve (b) özelliklerini) sağlayan iki eşleme olsun. O zaman $g^{-1} \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aynı özellikleri sağlayan bir eşleme olur. Bu eşlemenin özdeşlik olduğunu gösterirsek, $f = g$ eşitliğini kanıtlamış oluruz.

Bundan böyle $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ teoremdeki beş özelliği sağlayan bir eşleşme olsun[4]. h'nin özdeşlik fonksiyonu olduğunu adım adım göstereceğiz. $h(0) = 0$ ve $h(1) = 1$ zaten verilmiş. Kolaylıkla n üzerine tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $h(nx) = nh(x)$ bulunur. Bu eşitlikte $x = 1$ alırsak, her $n \in \mathbb{N}$ için $h(n) = n$ buluruz. Ayrıca, $h(x) + h(-x) = h(x + (-x)) = f(0) = 0$ olduğundan $h(-x) = -h(x)$ olur. Demek ki, her $n \in \mathbb{Z}$ için $h(nx) = nh(x)$ olur. Şimdi n, $m \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ olsun. O zaman

$$mh\left(\frac{n}{m}\right) = h\left(m\,\frac{n}{m}\right) = h(n) = n$$

ve dolayısıyla

$$h\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}$$

olur. Şimdi $r \in \mathbb{R}$ olsun. Yukarıdaki kanıtta tanımlanan A_r ve B_r kümelerini alalım. Biraz önce kanıtladığımızdan $h(A_r) = A_r$ ve $h(B_r) = B_r$ çıkar. Ama r sayısı A_r'nin elemanlarından büyük ve B_r'nin elemanlarından küçük olduğundan, $h(r)$ sayısı $h(A_r) = A_r$'nin elemanlarından büyük ve $h(B_r) = B_r$'nin elemanlarından küçük olmak zorundadır. Dolayısıyla $h(r) = r$ tek seçenektir. $\square$

[4]Sadece (a) ve (b) eşitliklerini sağlayan $\mathbb{R}$'nin bir eşleşmesi de özdeşlik olmak zorundadır, çünkü yukarıda, kanıtın başında kanıtladığımız üzere, (a) ve (b) sağlanıyorsa, geri kalan (c), (d) ve (e) özellikleri de sağlanır.

25. Sonsuz Küçük Elemanlı Sıralı Bir Cisim

Altbölüm 1.1'de gerçel sayıların aksiyomları olarak sunduğumuz 16 özelliği sağlayan $(R, +, \times, <, 0, 1)$ yapılarının birbirine çok benzediğini, yani bu tür yapılardan aslında ve özünde (en fazla) bir tane olduğunu bir önceki altbölümde göstermiş ve bu biricikliğin SUP aksiyomu sayesinde mümkün olduğunu söylemiştik. Bu altbölümde SUP aksiyomunu kabul etmezsek başımıza neler gelebileceğini göreceğiz.

Altbölüm 1.1'de verilen (SUP aksiyomu dışında kalan) T1'den ÇO'ya kadar olan 15 aksiyomu sağlayan bir $(R, +, \times, <, 0, 1)$ yapısına ***sıralı cisim*** denir. Altbölüm 1.1'den Altbölüm 1.5'e kadar SUP aksiyomunu hiç kullanmadığımızdan, yani sadece ilk 15 aksiyomu kullandığımızdan, sözünü ettiğimiz bu altbölümlerde kanıtlanan özellikler daha genel olarak tüm sıralı cisimlerde geçerlidir. Örneğin her sıralı cisimde $0 < 1$ olur, ya da sıralı cismin her x elemanı için $x^2 \geq 0$ eşitsizliği geçerlidir. Ama daha sonra SUP aksiyomunu kullanmaya başladık. Mesela $\mathbb{R}$'nin Arşimet özelliğini sağladığını kanıtlarken (Teorem 2.7) SUP aksiyomunu kullandık. Öte yandan $\mathbb{Q}$ cismi de Arşimet Özelliği'ni sağlamasına rağmen bu sıralı cisimde SUP özelliği yanlıştır. O zaman akla şu soru gelmeli: Arşimet özelliğini sağlamayan (dolayısıyla SUP aksiyomunu da sağlamayan[1]) sıralı bir cisim var mı? Evet var ve bulması da oldukça kolay. Bu bölümde Arşimet özelliğini sağlamayan iki cisim örneği vereceğiz. Çok daha zor ve derin olan bir sonraki bölümde de $\mathbb{R}$'ye bu örneklerden çok daha fazla benzeyen ama yine de Arşimet özelliğini sağlamayan sıralı bir cisim örneği vereceğiz.

Önce Arşimet Özelliği'nin ne olduğunu $\mathbb{R}$ cisminden bağımsız bir biçimde açık açık yazalım:

Arşimet Özelliği. *Eğer $\epsilon > 0$ ve $x \in R$ ise, o zaman $n\epsilon > x$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.*

Arşimet özelliğinde sözü edilen R, sıralı bir cisimdir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in R$

[1] Teorem 24.1'e göre $\mathbb{R}$'ye izomorfik olmayan her sıralı cisimde SUP önermesi yanlış olmalı.

için, nx elemanı

$$nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ tane}}$$

olarak tanımlanır. Daha matematiksel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $nx \in R$ elemanı tümevarımla şöyle tanımlanır:

$$0x = 0 \text{ ve } (n+1)x = nx + x.$$

Demek ki Arşimet özelliğini sağlamayan bir sıralı cismin şu özelliği sağlaması gerekir:

Anti-Arşimet Özelliği 1. *Öyle $0 < \epsilon \in R$ ve $x \in R$ elemanları vardır ki, her $n \in \mathbb{N}$ için $n\epsilon \le x$ olur.*

Yukarıdaki özelliği sağlayan ϵ elemanına x'***e göre sonsuz küçük*** denir, çünkü ϵ uzunluğunda sonlu sayıda adımla x geçilememektedir, ve bu durum $0 < \epsilon \ll x$ olarak yazılır.

Anti-Arşimet özelliğinde $n\epsilon \le x$ eşitsizliğinin taraflarını (pozitif olduğunu bildiğimiz) x^{-1} ile çarparsak, $n(\epsilon x^{-1}) \le 1$ elde ederiz ve böylece $\epsilon x^{-1} \ll 1$ buluruz. Demek ki ϵ yerine ϵx^{-1} alarak x'ten kurtuluruz ve anti-Arşimet özelliğinin aşağıdaki daha basit önermeye denk olduğunu görürüz:

Anti-Arşimet Özelliği 2. *Öyle bir $0 < \epsilon \in R$ elemanı vardır ki, her $n \in \mathbb{N}$ için $n\epsilon \le 1$ olur. Bir başka deyişle $0 < \epsilon \ll 1$ eşitsizliklerini sağlayan bir ϵ vardır*[2].

Sıralı bir cisimde her $n \in \mathbb{N}$ için $n|\epsilon| \le 1$ eşitsizliği sağlayan ϵ elemanlarına "sonsuz küçük" adı verilir[3]. Örneğin 0 sonsuz küçüktür. Arşimet özelliğine sahip olduğundan $\mathbb{R}$'de 0'dan başka sonsuz küçük yoktur.

Her sıralı cisimde, sonsuz küçük elemanlar kümesi toplama altında kapalıdır, yani ϵ_1 ve ϵ_2 elemanları sonsuz küçükse, $\epsilon_1 + \epsilon_2$ toplamı da sonsuz küçüktür; nitekim her $n \in \mathbb{N}$ için

$$2n(|\epsilon_1 + \epsilon_2|) \le 2n(|\epsilon_1| + |\epsilon_2|) = 2n|\epsilon_1| + 2n|\epsilon_2| \le 1 + 1 = 2$$

ve sadeleştirmeden sonra (sıralı cisimlerde aynen $\mathbb{R}$'deki gibi sadeleştirme yapabiliriz) $n(|\epsilon_1 + \epsilon_2|) \le 1$ olur. Ayrıca $|\epsilon| = |-\epsilon|$ olduğundan, ϵ bir sonsuz küçükse, $-\epsilon$ elemanı da bir sonsuz küçük olur. Demek ki sıralı bir cisimde sonsuz küçük elemanlar kümesi T1-T4 önermelerini sağlar. Hatta sonsuz küçük elemanlar kümesi çarpma altında da kapalıdır, yani ϵ_1 ve ϵ_2 sonsuz küçükse, $\epsilon_1\epsilon_2$ de sonsuz küçüktür çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n|\epsilon_1\epsilon_2| = n|\epsilon_1||\epsilon_2| \le n|\epsilon_1| \le 1$$

olur.

---

[2] Her $n \in \mathbb{N}$ için $n\epsilon \le 1$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $n\epsilon < 1$ olur, çünkü $n\epsilon < (n+1)\epsilon \le 1$ olur.

[3] Sıralı bir cisimde, $|\epsilon|$ elemanı $\max\{\epsilon, -\epsilon\}$ olarak tanımlanır.

Birinci Örnek. Anti-Arşimet özelliğini sağlayan bir cisim bulmak için önce $\mathbb{R}[X]$ polinom halkasında çalışacağız. Polinomlarda toplama ve çarpma işlemlerini okurun bildiğini varsayıyoruz. 0 ve 1 polinomlarını da biliyoruz, bunlar, sırasıyla, toplama ve çarpmanın etkisiz elemanları. $(\mathbb{R}[X], +, \times, 0, 1)$ beşlisi (ya da yapısı) Altbölüm 1.1'de yazdığımız, Ç3 dışında, T1'den D'ye kadar tüm aksiyomları sağlar. Ancak bu halkada Ç3 önermesi sağlanmaz, örneğin X polinomunun çarpımsal tersi olması gereken $1/X$ bir polinom değildir. Bunu şimdilik umursamayalım; daha sonra $\mathbb{R}[X]$'in bu kusurunu gidereceğiz. $\mathbb{R}[X]$'te toplama ve çarpma işlemleri var, ama $\mathbb{R}[X]$'te bir sıralama yok. Amacımız $\mathbb{R}[X]$ halkası üzerinde, Altbölüm 1.1'de yazdığımız O1, O2, O3, TO, ÇO önermeleri ve $0 < X \ll 1$ önermesi doğru olacak biçimde bir sıralama tanımlamak.

Eğer X sonsuz küçük olacaksa, her $r \in \mathbb{R}$ ve $0 < m \in \mathbb{N}$ için rX^m de sonsuz küçük olmalı, nitekim bu durumda, eğer $|r| < k \in \mathbb{N}$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n|rX^m| = n|r||X|^m \leq nk|X|^m \leq nk|X| \leq 1$$

olur. Böylece, sonsuz küçük elemanlar kümesi toplama altında kapalı olduğundan, her $f \in \mathbb{R}[X]$ için (eğer X sonsuz küçükse) Xf elemanının da sonsuz küçük olduğu anlaşılır.

Sıralamayı, TO önermesi doğru olacak biçimde tanımlayacağımızdan, her $f, g \in \mathbb{R}[X]$ için

$$f < g \Leftrightarrow 0 < g - f \tag{1}$$

önermesi (tanımı yaptığımızda) doğru olacaktır. Dolayısıyla $f < g$ eşitsizliğini tanımlayacağımıza $0 < h$ eşitsizliğini tanımlayalım. Bu eşitsizliğin doğru olması için, sağlanmasını istediğimiz O1 önermesinden dolayı $h = 0$ olamaz. h polinomunu 0'dan farklı seçelim ve

$$h = h_0 + h_1X + \cdots + h_nX^n$$

biçiminde yazalım. Burada $n \in \mathbb{N}$ ve her $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için $h_i \in \mathbb{R}$ ve son olarak $h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olarak alıyoruz. Ama h_0 ve h_1 gibi ilk birkaç katsayı 0'a eşit olabilir. $i = 0, 1, \ldots, n$ göstergecini $h_0 = \ldots = h_{i-1} = 0$ ve $h_i \neq 0$ olacak biçimde seçelim. Demek ki

$$h = h_iX^i + h_{i+1}X^{i+1} + \cdots + h_nX^n = X^i(h_i + h_{i+1}X + \cdots + h_nX^{n-i})$$

olur. $h > 0$ eşitsizliğini tanımlamaya çalıştığımızı unutmayalım. Bir de ayrıca $X > 0$ eşitsizliğini istiyoruz. Demek ki ÇO önermesi doğru olması gerektiğinden, $h_i \neq 0$ için,

$$0 < h_i + h_{i+1}X + \cdots + h_nX^{n-i}$$

eşitsizliğinin ne zaman doğru olduğunu tanımlamak yeterli. X sonsuz küçük olacağından,

$$h_{i+1}X + \cdots + h_nX_{n-i} = X(h_{i+1} + \cdots + h_nX_{n-i-1})$$

ifadesi de sonsuz küçük olacak. Dolayısıyla

$$h_i + h_{i+1}X + \cdots + h_n X_{n-i}$$

ifadesinin pozitifliğine ya da negatifliğine h_i karar verecek, eğer h_i pozitifse pozitif olacak, negatifse negatif olacak. Dolayısıyla en doğal tanım, $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $i \in \mathbb{N}$ ve $f \in \mathbb{R}[X]$ için

$$0 < X^i(r + Xf) \Leftrightarrow r > 0 \tag{2}$$

tanımı. Bu ve (1) formülü ikili bir $<$ ilişkisi tanımlar. Bu tanımı kabul edelim. Bu ikili ilişkinin $\mathbb{R}[X]$ halkasını sıraladığını ve Altbölüm 1.1'de verilen, Ç3 dışında, T1'den ÇO'ya kadar olan önermeleri sağladığını kanıtlamak belki biraz meşakkatli ama kolaydır, okura bırakıyoruz. Ama bakalım X gerçekten de pozitif bir sonsuz küçük mü?

$$X = X^1(1 + X0)$$

olduğundan ve $1 > 0$ olduğundan, (2)'ye göre $X > 0$ olur. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$1 - nX = X^0(1 + X(-n))$$

olduğundan ve $1 > 0$ olduğundan, gene (2)'ye göre $1 - nX > 0$ ve (1)'e göre $nX < 1$ olur. Böylece X'in pozitif bir sonsuz küçük olduğu kanıtlanmış oldu.

Ama Ç3 sağlanmıyor. Bunun da çaresi var:

$$\mathbb{R}(X) = \left\{\frac{f}{g} : f,\, g \in \mathbb{R}[X],\ g \neq 0\right\}$$

olsun. Bu tanımda

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow fg_1 = f_1 g$$

önermesinin doğru olduğunu kabul ediyoruz. Örneğin,

$$\frac{f}{g} = \frac{-f}{-g} = \frac{Xf}{Xg} = \frac{fh}{gh}$$

olur. Ayrıca $\frac{f}{1}$ yerine f yazıyoruz ve böylece $\mathbb{R}[X]$'i $\mathbb{R}(X)$'in bir altkümesi (aslında bir althalkası) olarak görüyoruz: $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{R}(X)$.

$\mathbb{R}(X)$ kümesinde toplama ve çarpma işlemlerini okur biliyordur. (Bu işlemler aynen kesirli sayılardaki gibi yapılırlar.) Toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}(X)$ bir cisim olur, yani Altbölüm 1.1'de verilen (Ç3 dahil) T1'den D'ye kadar olan önermeleri sağlar. $\mathbb{R}(X)$ cisminin sıralı bir cisim olması için cismin üstünde bir sıralama tanımlamak gerekiyor. Okurun tahmin edeceği üzere, yukarıda $\mathbb{R}[X]$ halkası üzerinde tanımladığımız sıralamayı kullanacağız.

$f,\ g,\ f_1,\ g_1 \in \mathbb{R}[X]$ ve $g,\ g_1 \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f}{g},\ \frac{f_1}{g_1} \in \mathbb{R}(X)$ verilmiş olsun. Amacımız

$$\frac{f}{g} < \frac{f_1}{g_1} \tag{3}$$

ilişkisini, $\mathbb{R}(X)$ cismi sıralı bir cisim olacak biçimde tanımlamak. Sıralama, yukarıda $\mathbb{R}[X]$ halkası üzerinde tanımladığımız $<$ sıralamasını genişletecek. Gerekirse eksilerini alarak (mesela f/g yerine $(-f)/(-g)$ yazarak) $\mathbb{R}[X]$ halkasında $g,\ g_1 > 0$ olduğunu varsayabiliriz. Tanımlamak istediğimiz (3) eşitsizliğini, pozitif olduğunu bildiğimiz gg_1 ile çarparsak, tanımı bitirdiğimizde,

$$fg_1 < f_1g$$

elde edeceğiz. Dolayısıyla tanımı şöyle yapalım: $f,\ g,\ f_1,\ g_1 \in \mathbb{R}[X]$ ve $g,\ g_1 > 0$ olmak üzere,

$$\frac{f}{g} < \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow fg_1 < f_1g. \tag{4}$$

Bu ilişkinin bir sıralama olduğu ve $(\mathbb{R}(X),\ +,\ \times,\ \leq\ 0,\ 1)$ yapısının Altbölüm 1.1'de verilen T1'den ÇO'ya kadar olan önermeleri sağladığını göstermek zor değil, okura bırakıyoruz.

X elbette hâlâ daha sonsuz küçüktür; $\mathbb{R}[X]$'te sonsuz küçüktür, $\mathbb{R}(X)$'te de sonsuz küçük kalır.

Yine de $\mathbb{R}(X)$ sıralı cismi $\mathbb{R}$'den farklıdır. $\mathbb{R}(X)$'te SUP aksiyomu sağlanmaz. Ama bu iki sıralı cisim arasında elemanlarla ilgili çok daha temel farklılıklar vardır. Mesela $X > 0$ olmasına rağmen, $\mathbb{R}(X)$ sıralı cisminde X'in karekökü yoktur, hele $\ln X$, $\exp X$ gibi şeyler hiç yoktur. Bir sonraki bölümde bulacağımız cisimde her pozitif elemanın bir karekökü, hatta logaritması ve üs alma fonksiyonu olacak.

İkinci Örnek. Bu bölümü bitirmeden önce yukarıdakine çok benzeyen bir örnek daha verelim. Gene $\mathbb{R}[X]$ polinom halkasından hareket edeceğiz. Bu sefer $\mathbb{R}\{X\}$ olarak göstereceğimiz şu cismi ele alacağız:

$$\mathbb{R}\{X\} = \left\{ \sum_{n \geq N} r_n X^n : N \in \mathbb{Z},\ r_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bu cismin elemanları,

$$\sum_{n \geq N} r_n X^n = r_N X^N + r_{N+1} X^{N+1} + r_{N+2} X^{N+2} + \cdots$$

olarak bir sonsuz toplam şeklinde gösterilen biçimsel nesnelerdir. Bu tür nesnelere ***biçimsel Laurent serisi*** adı verilir. Ama dikkat, biçimsel kuvvet serilerinin aksine (bkz Altbölüm 18.4) burada N sayısı negatif bir tamsayı olabilir.

Eğer $r_N \neq 0$ ise N tamsayısına biçimsel Laurent serisinin ***mertebesi*** adı verilir. Eğer $N \geq 0$ ise, yani mertebe ≥ 0 ise, biçimsel Laurent serisi biçimsel kuvvet serisi olur; bir başka deyişle biçimsel kuvvet serileri özel biçimsel Laurent serileridir. $r_i = 0$ olduğunda r_iX^i ifadesini hiç yazmama hakkını kendimizde görüyoruz. Bu anlaşmayla, örneğin,

$$3X^{-5} - 2X^{-2} + 5 - X - X^2 - X^3 - \cdots$$

biçimsel bir Laurent serisidir. Biçimsel Laurent serilerini

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_nX^n$$

biçiminde göstermek hatırı sayılır kolaylık sağlar, ama tabii negatif göstergeçli terimlerin katsayılarının bir zaman sonra 0 olduğunu unutmamak lazım.

Bu tür nesnelere "biçimsel" adı verilmesinin nedeni şudur: $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_iX^i$ ve $\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_iX^i$ elemanlarının eşit olması için yeter ve gerek koşul her $i \in \mathbb{Z}$ için $a_i = b_i$ eşitliğidir, yani eşitlik gerçekten görsel eşitliktir.

Elbette $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{R}[[X]] \subseteq \mathbb{R}\{X\}$ olur.

Biçimsel Laurent serileriyle de toplama, çarpma, çıkarma, bir sayıyla çarpma gibi işlemler yapılabilir:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum a_iX^i\right) \pm \left(\sum b_iX^i\right) = \sum (a_i \pm b_i)X^i,\\
&\lambda\left(\sum a_iX^i\right) = \sum \lambda a_iX^i,\\
&\left(\sum a_iX^i\right)\left(\sum b_jX^j\right) = \sum \left(\sum_{i+j=n} a_ib_j\right) X^n.
\end{aligned}$$

(Toplamlar $-\infty$'dan ∞'a kadar alınıyorlar. En son satırdaki $\sum_{i+j=n} a_ib_j$ toplamının aslında sonlu bir toplam olduğunu, yani anlamlı olduğunu gözlemleyin. Bunun nedeni mertebeden önceki katsayıların hepsinin 0 olmasıdır.) Bu işlemlerle birlikte biçimsel Laurent serileri kümesi $\mathbb{R}\{X\}$ olarak gösterilen bir cisim oluşturur. $\mathbb{R}\{X\}$'in bu işlemlerle birlikte değişmeli bir halka oluşturduğunun kanıtı kolaydır. Cisim olduğu da aşağıdaki önsavdan kolaylıkla çıkacak.

Önsav 25.1. $\mathbb{R}[[X]]$ *halkasının tersinir elemanları, sabit terimi* 0*'dan farklı olan kuvvet serileridir.*

Kanıt: $a = \sum a_iX^i \in \mathbb{R}[[X]]$ tersinir olsun. Demek ki bir $b = \sum b_iX^i \in \mathbb{R}[[X]]$ elemanı için $ab = 1$ olur. Ama

$$ab = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + \cdots$$

olduğundan, buradan $a_0b_0 = 1$ çıkar. (Çarpımdaki diğer katsayılar da 0'dır, ama bunun önemi yok.)

Şimdi $a = \sum a_iX^i \in \mathbb{R}[[X]]$ elemanının sabit katsayısı 0'dan farklı olsun, yani $a_0 \neq 0$ olsun. Öyle bir $b = \sum b_iX^i \in \mathbb{R}[[X]]$ elemanı bulacağız ki $ab = 1$ olacak. Bu eşitliği açtığımızda şu denklem sistemini buluruz.

$$\begin{aligned}
&a_0b_0 = 1\\
&a_0b_1 + a_1b_0 = 0\\
&a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0\\
&a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 0\\
&\qquad\qquad\ldots
\end{aligned}$$

Burada a_i'ler bilinen gerçel sayılar, b_i'ler ise bulunması gereken gerçel sayılar. $a_0 \neq 0$ olduğundan, birinci denklemin bir (ve bir tek) çözümü vardır: $b_0 = 1/a_0$. Böyle b_0'ı bulmuş olduk. Şimdi b_1'i bulalım. Bunun için ikinci denkleme bakalım. b_0'ı biraz önce bulduğumuzdan, ikinci denklemde bilinmeyen olarak sadece b_1 var. b_1'i ikinci denklemde tecrit edersek $b_1 = -a_1b_0/a_0$ buluruz. Gerçekten a_0'a bölebiliriz çünkü $a_0 \neq 0$. Hatta b_1'i a_i'ler cinsinden yazabiliriz:

$$b_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}.$$

b_2'yi bulmak için üçüncü denkleme bakacağız. b_0 ve b_1'i bulduğumuzdan üçüncü denklemde tek bir bilinmeyen var, b_2. Buradan b_2'yi elde ederiz:

$$b_2 = -\frac{a_1b_1 + a_2b_0}{a_0}.$$

Böyle gide gide her b_n'yi buluruz. Demek ki $ab = 1$ eşitliğini sağlayan bir $b \in \mathbb{R}[[X]]$ vardır, yani a tersinirdir. □

Demek ki $\mathbb{R}[[X]]$ halkasının 0'dan farklı her elemanı, bir $n \in \mathbb{N}$ ve tersinir bir $a \in \mathbb{R}[[X]]$ için X^na olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\mathbb{R}[[X]]$ halkasının bir cisim olmasına tek engel X elemanıdır; eğer X de tersinir olsaydı, o zaman her X^n tersinir olacak ve $\mathbb{R}[[X]]$ halkası bir cisim olacaktı. İşte $\mathbb{R}\{X\}$ halkası, $\mathbb{R}[[X]]$'in bu eksikliğini giderir; nitekim $\mathbb{R}\{X\}$ halkası $\mathbb{R}[[X]]$ halkasına $1/X$ eklenerek elde edilmiştir[4]. Bundan da $\mathbb{R}\{X\}$ halkasının bir cisim olduğu çıkar. Daha doğru biçimde bunu şöyle gösterebiliriz: $\mathbb{R}\{X\}$ halkasının 0'dan farklı bir f elemanının bir $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı ve bir $a \in \mathbb{R}[[X]]$ elemanı için $f = X^na$ olarak yazıldığını gördük. Ama biraz önce bir $m \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve tersinir bir $b \in \mathbb{R}[[X]]$ elemanı için $a = X^mb$ olduğunu gördük. Demek ki $f = X^{n+m}b$.

[4]Biraz cebir bilen bir okur, $\mathbb{R}\{X\} \simeq (\mathbb{R}[[X]])[Y]/\langle XY - 1\rangle$ halka izomorfisinin varlığını görmekte zorlanmayacaktır.

Bu yazılımla f'nin $\mathbb{R}\{X\}$ halkasında tersinir olduğu bariz, tersi $X^{-n-m}b^{-1}$ elemanıdır. (Burada b^{-1}, b'nin $\mathbb{R}[[X]]$'te var olduğunu bildiğimiz tersidir.)

Şimdi amacımız $\mathbb{R}\{X\}$ cismini, X pozitif ama sonsuz küçük olacak biçimde sıralamak. Aynen bir önceki örnekteki gibi yapacağız. $0 \neq f \in \mathbb{R}\{X\}$ olsun. f'nin mertebesi n olsun ve n'inci katsayısı a_n olsun. Bu durumda,

$$f > 0 \Leftrightarrow a_n > 0$$

tanımını yapalım. Buradan hareketle

$$h > g \Leftrightarrow h - g > 0$$

tanımını yapalım. Bu tanımla $\mathbb{R}\{X\}$ cisminin sıralı bir cisim olduğunu göstermek çok kolay. X ise pozitif bir sonsuz küçük olur.

$\mathbb{R}\{X\}$ cisminde de (pozitif olduğunu bildiğimiz) X'in karekökü yoktur. Dolayısıyla $\mathbb{R}\{X\}$ cismi $\mathbb{R}$'den farklıdır. Bir sonraki bölümde $\mathbb{R}$'ye çok daha fazla benzeyen ama Arşimet özelliğini sağlamayan (dolayısıyla $\mathbb{R}$'ye izomorf olmayan) bir cisim daha bulacağız.

26. Sıradışı Gerçel Sayılar

Bu bölümde amacımız, gerçel sayılara çok benzeyen, ayrıca bir de sonsuz küçük eleman içeren bir "sayı sistemi" yaratmak. Önceki bölümde yaratılan sayı sistemlerinde sonsuz küçük eleman vardı ama o sayı sistemleri $\mathbb{R}$'ye pek benzemiyorlardı, örneğin $\mathbb{R}$'deki gibi her pozitif elemanın bir karekökü yoktu. Bu bölümde yaratacağımız sayı sistemi $\mathbb{R}$'ye o kadar çok benzeyecek ki, $\mathbb{R}$ halkasında doğru olan elemanlarla ilgili (altkümelerle değil) **tüm** önermeler yeni sayı sisteminde de doğru olacak[1].

Uzunca bir süre formel matematikten uzaklaşıp sohbet edeceğiz ve tanımın ne olması gerektiğini anlamaya çalışacağız. Matematiksel tanımlar Altbölüm 26.3'te gelecek.

26.1 Giriş

Elimizde toplamasıyla, çarpmasıyla ve eşitsizliğiyle $\mathbb{R}$ var. $\mathbb{R}$'ye "yeni sayılar" ekleyeceğiz ve böylece içinde sonsuz küçük elemanlar barındıran bir sıralı cisim elde edeceğiz. Anımsatalım: Sıralı bir cisimde her $n \in \mathbb{N}$ için $n|\epsilon| \leq 1$ eşitsizliği sağlayan ϵ elemanlarına "sonsuz küçük" adı verilir[2]. Örneğin 0 sonsuz küçüktür. Arşimet özelliğine sahip olduğundan $\mathbb{R}$'de 0'dan başka sonsuz küçük yoktur.

İleride düzeltmek üzere, şimdilik yeni sayılarımız gerçel sayı dizileri olsun. Mesela

$$(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$$

dizisi bundan böyle yeni bir sayı. (Bu bölümde dizileri parantez içinde yazıyoruz.)

$$(1, -\pi, \pi^2, -\pi^3, \ldots, (-1)^n\pi^n, \ldots)$$

dizisi de bir başka yeni sayı. Dediğim gibi sayı tanımımızı ileride değiştireceğiz, çünkü tanımladığımız bu sayı kavramı tam olarak istediğimizi vermeyecek,

[1] Demek ki "sonsuz küçük eleman" kavramı altkümelerden sözedilmeden tanımlanamaz. Nitekim ϵ elemanının sonsuz küçük olması için her $n \in \mathbb{N}$ için $n\epsilon < 1$ olmalı. Tanımda $\mathbb{N}$ altkümesi var.

[2] Sıralı bir cisimde, $|\epsilon|$ elemanı $\max\{\epsilon, -\epsilon\}$ olarak tanımlanır.

ama en azından bir ilk yaklaşım olacak. Sonsuz küçük olmaya aday sayımızı da hemen ifşa edelim:

$$(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots).$$

Bir başka sonsuz küçük adayı:

$$(10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3},\ 10^{-4},\ \ldots).$$

Nihai analizde bu diziler sonsuz küçük olmayacak, çünkü bunlar sayı bile olmayacaklar, sayılarımızı ileride değiştireceğiz, ama şimdilik bu dizileri sonsuz küçük eleman adayı olarak algılayalım.

Diziler kümesini $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ olarak gösterelim. Elemanları da her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ya da bu kitapta alışık olduğumuz yazılım biçimiyle $(x_n)_n$ türünden şeyler, yani gerçel sayı dizileri. Bunlar arasında tabii ki sabit diziler de var. Bu sabit dizileri de gerçel sayılar olarak görmeyi öneriyoruz. (Bütün tanımlar ileride değişecek.)

Sayı deyince akla dört işlem geliyor, dolayısıyla yeni sayılarımızla da dört işlem yapabilmeliyiz. Dizileri toplamayı ve birbirinden çıkarmayı biliyoruz:

$$(x_n)_n \pm (y_n)_n = (x_n \pm y_n)_n.$$

Çarpmayı da benzer biçimde "terim terim çarpma olarak" tanımlayalım:

$$(x_n)_n(y_n)_n = (x_n y_n)_n.$$

Bölmeyi es geçelim şimdilik, çünkü dizilerdeki olası 0 terimi, aynı yöntemle dizileri bölmeyi tanımlamamıza engel. Ama bu sorun ileride, tanımları değiştirdiğimizde kendiliğinden hallolacak. Sabit 0 ve sabit 1 dizileri sırasıyla toplama ve çarpmanın etkisiz elemanlarıdır. Bu dizileri $s(0)$ ve $s(1)$ olarak göstereceğiz. Genel olarak, $r \in \mathbb{R}$ için sabit r dizisini $s(r)$ olarak göstereceğiz. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ kümesi bu toplama ve çarpma işlemleriyle değişmeli bir halka oluşturur. Ama bir cisim oluşturmaz, sadece tüm terimleri 0'dan farklı olan dizilerin çarpımsal tersi vardır çünkü, tek bir terimi bile 0 olan bir dizinin çarpımsal tersi olamaz.

Biz $\mathbb{R}$'yi de içeren bir sayı sistemi bulmak istiyorduk, ama maalesef $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$'nin bir altkümesi değil. Bunu gidermenin bir çaresi var.

$$r \mapsto s(r) = (r, r, r, \ldots)$$

kuralıyla tanımlanmış $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fonksiyonu birebirdir ve toplama ve çarpmayla uyumludur, yani her r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ için

$$s(r_1 + r_2) = s(r_1) + s(r_2) \text{ ve } s(r_1 r_2) = s(r_1)s(r_2)$$

olur. Dolayısıyla s fonksiyonu sayesinde $\mathbb{R}$'yi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ kümesinin bir altkümesi (aslında bir altcismi) olarak görebiliriz. Bunu yapmak için $\mathbb{R}$'nin r elemanıyla $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ kümesinin $s(r)$ elemanını özdeşleştirmek, bir başka deyişle sanki aynı elemanlarmış gibi davranmak yeterlidir. Bundan böyle her r gerçel sayısını sabit r dizisi olarak görelim.

Yaratmak istediğimiz 0'dan farklı bir sonsuz küçük eleman içeren sıralı bir cisim. Oysa yukarıda sadece bir halka yarattık. Demek ki iki eksiğimiz var: Bazı elemanların tersi yok ve henüz bir sıralama yok; sıralama olmadığından sonsuz küçük bir elemanın olması da söz konusu olamaz. Sıralamayla başa çıkmaya çalışalım. (Belli ki elemanları tersinir yapmak mümkün değil.) İki dizi örneği ele alalım, diyelim

$$(1, 2, 3, 4, \ldots) \text{ ve } (2, 3, 4, 5, \ldots)$$

dizilerini aldık. Birinin diğerinden daha büyük olduğuna karar vermeliyiz. Sanki ikincisinin daha büyük olmasına karar vermek en doğal seçimmiş gibi görünüyor, ne de olsa ikincisinin **tüm** terimleri daha büyük. Şimdi de şu iki diziye bakalım:

$$a = (1, 2, 3, 4 \ldots) \text{ ve } b = (0, 3, 4, 5, \ldots).$$

Hangisi daha büyük olmalı? İlk terim dışında, b'nin tüm terimleri daha büyük; yani terimlerin çoğunluğu b'nin daha büyük olması gerektiğini söylüyor. Biz de bu yönde karar vermeye meyilliyiz.

Demokrat olalım ve $a = (a_n)_n$ ve $b = (b_n)_n$ gibi iki dizi verildiğinde, terimlerin çoğunluğu ne diyorsa o yönde karar verelim; yani hangi dizinin daha büyük olacağını dizilerin terimlerine soralım, çoğunluk ne diyorsa onu yapalım. Eğer

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\}$$

kümesi çoğunluksa $a \leq b$ kararı verelim, eğer

$$\{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\}$$

kümesi çoğunluksa $b \leq a$ kararı verelim. (Her iki küme de çoğunluksa, eşitlik sözkonusu olmalı! Bunu sağlamak için ileride "sayı" tanımımızı değiştireceğiz.)

Tabii çoğunluğun ne demek olduğuna karar vermemiz gerekecek. Çoğunluğa karar vermek o kadar kolay değil. Örneğin,

$$(0, 1, 0, 1 \ldots) \text{ ve } (1, 0, 1, 0, \ldots).$$

elemanlarından hangisi daha büyük olmalı? 0, 2, 4 gibi çift sayı göstergeçli terimler sağdaki elemanın daha büyük olması gerektiğini söylüyor, ama 1, 3, 5 gibi tek sayı göstergeçli terimler soldakinin daha büyük olması gerektiğini söylüyor. Tek sayılar kümesi mi yoksa çift sayılar kümesi mi çoğunluk? Tüm sorun "çoğunluğa" karar vermekte yatıyor.

26.2 Çoğunluk

Doğal sayıların bazı altkümelerine "çoğunluk" adını vereceğiz. Diyelim bunu bir biçimde yaptık. $\mathbb{N}$'nin çoğunluk altkümelerinden oluşan kümeye $\mathcal{F}$ diyelim ve eşitsizliği yukarıda önerdiğimiz gibi şöyle tanımlamaya yeltenelim:

$$(a_n)_n \leq (b_n)_n \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}.$$

Yani terimlerin çoğunluğu ne diyorsa o olsun... Tabii ileride çoğunluğun belirlenmesi gerekecek. Şimdilik, yukarıdaki tanımın bir tamsıralama olması için çoğunluk kümelerinin taşıması gereken özellikleri bulalım.

Her şeyden önce her $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizisi için ya $(a_n)_n \leq (b_n)_n$ ya da $(b_n)_n \leq (a_n)_n$ olmalı, çünkü herhangi iki elemanı karşılaştırabilmek istiyoruz. Tanıma dönersek,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \text{ ve } B = \{nn \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\}$$

kümelerinden en az birinin $\mathcal{F}$'de olması gerektiğini görürüz. Bu iki kümenin bileşimi $\mathbb{N}$ olduğundan $\mathcal{F}$ üzerine şu koşulu koşmalıyız.

(1) *Her A, $B \subseteq \mathbb{N}$ için eğer $A \cup B = \mathbb{N}$ ise ya $A \in \mathcal{F}$ ya $B \in \mathcal{F}$ olur.*

Bundan da şu çıkar: her $A \subseteq \mathbb{N}$ için ya A ya da A'nın tümleyeni A^c kümesi $\mathcal{F}$'de olmalı; yani $\mathbb{N}$'nin her altkümesi için, altkümenin mi yoksa tümleyeninin mi çoğunluk olduğuna karar vermeliyiz. (Bu da tahmin edilebileceğinden çok daha zor bir iştir. İleride göreceğiz.)

Ayrıca,

(2) *Eğer $A \subseteq B$ ise ve $A \in \mathcal{F}$ ise $B \in \mathcal{F}$*

olmalı, çünkü ne de olsa $\mathcal{F}$ "çoğunluklar" kümesi; dolayısıyla, amacımıza hizmet etmesi için, eğer A çoğunluksa, A'nın üstkümeleri de çoğunluk olmalı.

(2)'den dolayı $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ olmalı. Ayrıca eğer $\varnothing \in \mathcal{F}$ ise, gene (2)'den dolayı her doğal sayı kümesi çoğunluk kümesi olmalı ve önerdiğimiz eşitsizlik tanımına göre her yeni sayı her yeni sayıdan küçükeşit olmalı, yani aslında tek bir yeni sayı olmalı! Dolayısıyla $\varnothing$ çoğunluk kümesi olmamalı. Bunu da yazalım:

(3) $$\varnothing \notin \mathcal{F} \text{ ve } \mathbb{N} \in \mathcal{F}.$$

Sonra... Sıralama geçişli bir ilişki olduğundan, eğer $(a_n)_n \leq (b_n)_n$ ve $(b_n)_n \leq (c_n)_n$ ise, $(a_n)_n \leq (c_n)_n$ olmalı, yani eğer

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F} \text{ ve } B = \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq c_n\} \in \mathcal{F}$$

ise,

$$C = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n\} \in \mathcal{F}$$

olmalı. Bunu nasıl sağlayacağız? Dikkat ederseniz $A \cap B \subseteq C$ olur. İlla eşitlik olmak zorunda değil, C kümesi $A \cap B$ kümesinden daha büyük olabilir; ama eşitlik de olabilir. Dolayısıyla A ve B çoğunluk olduklarında $A \cap B$ de çoğunluk oluyorsa, o zaman (2)'yle birlikte zorunlu olarak C de çoğunluk olur. Demek ki şu koşul da doğru olmalı:

(4) $$\textit{Eğer } A, B \in \mathcal{F} \textit{ ise } A \cap B \in \mathcal{F}.$$

Son bir sorun kaldı: Eğer $(a_n)_n \leq (b_n)_n$ ve $(b_n)_n \leq (a_n)_n$ ise $(a_n)_n = (b_n)_n$ olmalı. Bu soruna çare bulmak pek o kadar kolay değil, buna biraz zaman ayıralım.

Önce $(a_n)_n \leq (b_n)_n$ ve $(b_n)_n \leq (a_n)_n$ koşullarının ne dediğine bakalım. Tanıma göre bu koşullar,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F} \text{ ve } B = \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{F}$$

koşullarına eşdeğer. (4)'e göre,

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$$

olmalı. Bunun ters istikameti de doğru: Eğer $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$ oluyorsa, o zaman (2)'ye göre,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F} \text{ ve } B = \{n \in \mathbb{N} : b_n \leq a_n\} \in \mathcal{F},$$

yani $(a_n)_n \leq (b_n)_n$ ve $(b_n)_n \leq (a_n)_n$ olur. Demek ki

$$(a_n)_n \leq (b_n)_n \text{ ve } (b_n)_n \leq (a_n)_n$$

koşuluyla

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$$

koşulu birbirine denk olmalı. Dolayısıyla tanım denememizin başarıya ulaşması için $\mathcal{F}$ üzerinde şu doğru olmalı:

(5) $$(a_n)_n = (b_n)_n \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{F};$$

ama

$$(a_n)_n = (b_n)_n \Leftrightarrow \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } a_n = b_n$$

olduğundan, bu son önerme $\mathcal{F}$'nin tek bir elemanı olduğunu, bu elemanın da $\mathbb{N}$ olduğunu söylüyor, ki bu da (1) ile çelişir. Başaramadık, olmadı. Başarmamız için (5) önermesi doğru olmalıydı ama olmuyor...

Matematikte, eşit olmasını istediğiniz elemanlar eşit çıkmadığında oldukça yaratıcı bir çözüm vardır. Eşit olmasını istediğiniz ama eşit olmayan elemanlara "eşit" demek yerine "denk" derseniz ve bunun bir denklik ilişkisi olduğunu gösterirseniz ve elemanlar yerine denklik sınıflarını alırsanız sorun hallolur. Demek ki eğer

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$$

ise $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ elemanlarına "denk" demeliyiz.

Sohbeti burada kesip bu dediklerimizi matematiksel olarak yapmaya koyulalım.

26.3 Filtreler ve Ultrafiltreler

$\mathcal{F}$, elemanları doğal sayı kümeleri olan bir küme olsun. Yani $\mathcal{F} \subseteq \wp(\mathbb{N})$ olsun. Eğer[3]

F1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$, $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$,

F2. $X \in \mathcal{F}$ ve $X \subseteq Y$ ise $Y \in \mathcal{F}$,

F3. $X, Y \in \mathcal{F}$ ise $X \cap Y \in \mathcal{F}$

koşulları doğruysa $\mathcal{F}$'ye ($\mathbb{N}$ üzerine) ***filtre*** denir.

F1'den dolayı $\mathcal{F}$'den sonlu sayıda elemanın kesişimi gene $\mathcal{F}$'de olmalı. Bu ve F3'ten dolayı, bir filtrenin sonlu sayıda elemanının kesişimi $\varnothing$ olamaz.

Örnekler

26.1. $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ sabitlenmiş bir küme olsun. $\mathcal{F}(A)$, $\mathbb{N}$'nin A'yı içeren altkümelerinden oluşsun. $\mathcal{F}(A)$'nın bir filtre olduğunu görmek zor değil. Bu tür filtrelere ***başat filtre*** adı verilir. Elbette,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A)$$

olur. Demek ki A ne kadar küçükse, $\mathcal{F}(A)$ o kadar büyük oluyor. Dolayısıyla başat filtrelerinin en büyükleri (maksimal başat filtreler) sabit bir a elemanını içeren altkümelerden oluşur. Bu filtreyi $\mathcal{F}(\{a\})$ yerine $\mathcal{F}(a)$ olarak göstereceğiz.

$\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \{\mathbb{N}\}$ olur ve bu filtre tüm filtrelerin en küçüğüdür.

Eğer $\mathcal{F}$ bir filtreyse ve $A \in \mathcal{F}$ ise, elbette $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}$ olur.

Bu arada $\mathcal{F}(A)$ filtresinin önceki bölümdeki (1) koşulunu sağlaması için A'nın tek elemanlı bir küme olması gerektiğini gözlemleyelim. Dikkatli bir okur (1) koşulunu sağlayan filtrelerin maksimal filtreler olması gerektiğini anlamış olmalı.

Başat filtreler pek ilginç nesneler değil, birazdan daha ilginç örnekler vereceğiz.

26.2. *Sonlu bir küme içeren her filtre başat olmak zorundadır.*

Kanıt: $\mathcal{F}$, sonlu bir küme içeren bir filtre olsun. $\mathcal{F}$'nin en az elemanlı bir A elemanını seçelim. Elbette $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}$ olur. Diğer içindeliği göstereceğiz. $X \in \mathcal{F}$ olsun. F3'ten dolayı $X \cap A \in \mathcal{F}$ olur. $X \cap A \subseteq A$ olduğundan, A'nın seçiminden dolayı, $X \cap A$ ve A'nın aynı sayıda elemanları vardır, dolayısıyla birbirine eşittirler, yani $A \subseteq X$ ve $X \in \mathcal{F}(A)$ olur. □

26.3. *Filtrelerin kesişimi gene bir filtredir.*

Kanıt: Bariz. □

Mesela $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(A \cup B)$ olur. Ama sonsuz sayıda filtrelerin kesişimi de bir filtredir.

---

[3] $\mathcal{F}$'nin elemanları, $\mathbb{N}$'nin bir önceki altbölümde sözettiğimiz "çoğunluk" altkümeleri olacak. Önceki altbölümde doğru olması gerektiğini gösterdiğimiz (2), (3) ve (4) özelliklerini yeniden numaralandıracağız. Sağlanması çok daha zor olan (1) koşulunu en sona bırakacağız.

26.4. Eğer $A \cap B \neq \varnothing$ ise, $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$ kümesini (altküme olarak kapsayan) en küçük bir filtre vardır ve bu filtre $\mathcal{F}(A \cap B)$ filtresidir. Bu bariz önermenin kanıtını okura bırakıyoruz.

26.5. $\mathcal{X} \subseteq \wp(\mathbb{N})$ olsun. Eğer $\mathcal{X}$'i içeren bir filtre varsa, o zaman elbette $\mathcal{X}$'in sonlu sayıda elemanının kesişimi boşküme olamaz. Bunun tersinin de doğru olduğunu Önsav 26.1'de göreceğiz. Bu durumda $\mathcal{X}$'i içeren tüm filtrelerin kesişimi gene $\mathcal{X}$'i içeren bir filtredir, dolayısıyla bu kesişim $\mathcal{X}$'i içeren en küçük filtredir. Önsav 26.1'de $\mathcal{X}$'i içeren en küçük filtrenin elemanlarının neler olduğunu açık seçik göreceğiz.

26.6. [**Fréchet Filtresi**] Nihayet başat olmayan bir filtre örneği vereceğiz: $\mathcal{F}_0$, $\mathbb{N}$'nin tümleyeni sonlu olan altkümelerinden oluşsun. $\mathcal{F}_0$ elbette bir filtredir ve bir sonraki kalemde göreceğimiz üzere başat bir filtre değildir. Bu filtreye ***Fréchet filtresi*** adı verilir.

26.7. *Fréchet filtresini içeren bir filtre başat olamaz.*
Kanıt: Eğer bir $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}(A)$ olsaydı o zaman tümleyeni sonlu her altküme A'yı içermek zorunda kalırdı ki, bu absürt bir iddiadır. □
Bu konuyla ilgili olarak Önsav 26.2'ye bakınız.

Önsav 26.1. *$\mathcal{X} \subseteq \wp(\mathbb{N})$ olsun. Eğer $\mathcal{X}$'in sonlu sayıda elemanının kesişimi boşküme olamıyorsa, X'i içeren bir filtre, dolayısıyla X'i içeren en küçük filtre vardır. $\mathcal{X}$'i içeren en küçük filtre $\mathcal{X}$'in sonlu sayıda elemanının kesişimlerinin üstkümelerinden oluşur.*

Kanıt: $\mathcal{F}$, $\mathcal{X}$'in sonlu sayıda elemanlarının kesişimlerinin üstkümelerinden oluşsun, yani

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \text{ sonlu sayıda } X_1, \ldots X_n \in \mathcal{X} \text{ için } X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq A\}$$

olsun. $\mathcal{F}$'nin bir filtre olduğunun kanıtı çok kolay; $\mathcal{X}$'i içerdiği bariz (tanımda $n = 1$ alın ve $A = X_1$ alın). Ayrıca $\mathcal{X}$'i içeren her filtre elbette $\mathcal{F}$'yi kapsar, dolayısıyla $\mathcal{F}$, $\mathcal{X}$'i içeren en küçük filtredir. □

Eğer $a \in \mathbb{N}$ ise $\mathcal{F}(a)$'nın maksimal bir filtre olduğunu biliyoruz (bkz. Örnek 26.1). Maksimal filtrelere ***ultrafiltre*** denir. Başat filtreler dışında ultrafiltrelerin olup olmadığını henüz bilmiyoruz. Nitekim başat filtreler dışında bir ultrafiltrenin olduğu ancak Seçim Aksiyomu [N3] kullanılarak kanıtlanabilir. İleride kanıtlayacağız. Şimdilik başat olmayan ultrafiltrelerle ilgili şu önsavları aradan çıkaralım:

Önsav 26.2. *Başat olmayan bir ultrafiltre Fréchet filtresini kapsamak zorundadır.*

Kanıt: $\mathcal{F}$ başat olmayan bir ultrafiltre olsun. $A \subseteq \mathbb{N}$, tümleyeni sonlu olan herhangi bir küme olsun. $\mathcal{F} \cup \{A\}$ kümesinin sonlu sayıda elemanının kesişiminin boşküme olamayacağını iddia ediyoruz. Nitekim böyle bir kesişim, $F \in \mathcal{F}$ için $F \cap A = \varnothing$ biçiminde olmak zorundadır; buradan da F'nin sonlu olması gerektiği çıkar ve bu, Örnek 26.2 ile çelişir. Demek ki Önsav 26.1'e göre $\mathcal{F} \cup \{A\}$'yı içeren bir filtre vardır. Ama $\mathcal{F}$ maksimal bir filtre olduğundan, bundan $A \in \mathcal{F}$ olduğu anlaşılır. □

Önsav 26.3. *$\mathcal{F}$ bir filtre olsun. $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olması için yeter ve gerek koşul her $A \subseteq \mathbb{N}$ için ya A'nın ya da tümleyeninin $\mathcal{F}$'de olmasıdır.* (*İkisi birden $\mathcal{F}$'de olamaz.*)

Kanıt: Her $A \subseteq \mathbb{N}$ için ya A'nın ya da tümleyeninin $\mathcal{F}$'de olduğunu varsayalım. $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}$'den daha büyük bir filtre olsun. $A \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}$ olsun. O zaman varsayımımızdan dolayı $A^c \in \mathcal{F}$ olur. Demek ki hem A hem de A^c altkümeleri $\mathcal{F}_1$'in elemanı. Buradan da A ve A^c'nin kesişimi olan boşkümenin $\mathcal{F}_1$'in bir elemanı olduğu çıkar, çelişki.

Şimdi $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olduğunu varsayalım. $A \notin \mathcal{F}$ olsun. O zaman, Önsav 26.1'e göre $\mathcal{F} \cup \{A\}$ kümesinin sonlu sayıda elemanının kesişimi boşküme olmalı. Böyle bir kesişim de bir $F \in \mathcal{F}$ için $F \cap A$ biçiminde olmalı. $F \cap A = \varnothing$ olduğundan, $F \subseteq A^c$ olur. Buradan da $A^c \in \mathcal{F}$ çıkar. □

Önsav 26.4. *$\mathcal{F}$ bir filtre olsun. $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olması için yeter ve gerek koşul, $A \cap B = \mathbb{N}$ eşitliğini sağlayan her A ve B kümelerinden birinin $\mathcal{F}$'de olmasıdır.*

Kanıt: Eğer koşul sağlanıyorsa, bir önceki önsavdan dolayı $\mathcal{F}$ bir ultrafiltredir. Şimdi $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olduğunu varsayalım ve $A \cap B = \mathbb{N}$ eşitliğini sağlayan A ve B kümeleri alalım. Diyelim $A \notin \mathcal{F}$. Bir önceki önsava göre $A^c \in \mathcal{F}$. Ama $A^c \subseteq B$ olduğundan bundan $B \in \mathcal{F}$ çıkar. □

Şimdiye kadar başat olmayan bir ultrafiltre örneği görmedik. Böyle bir örnek görmeyeceğiz de. Başka kitaplara bakmanızın da bir yararı yok, çünkü kimse başat olmayan bir filtre görmemiştir, göremez ve dolayısıyla gösteremez de, çünkü başat olmayan ultrafiltrelerin varlığı **Seçim Aksiyomu**, daha doğrusu **Zorn Önsavı** (Önsav 27.4) ile kanıtlanır ve Seçim Aksiyomu'yla varlığı kanıtlanan nesneler ele avuca gelmeyen sadece teorik olarak varlığını bilebileceğimiz nesnelerdir. (Bu konu hakkında bir başlangıç için [N3]'e bakınız.)

Teorem 26.5. *Her filtre bir ultrafiltreye genişletilebilir.*

Kanıt: $\mathcal{F}_0$ bir filtre olsun. $\mathcal{Z}$, $\mathcal{F}_0$ filtresini kapsayan filtrelerden oluşan küme olsun. $\mathcal{Z}$'nin maksimal bir elemanını bulmalıyız. Bunun için (bir sonraki bölümde ele aldığımız) Zorn Önsavı'nı kullanacağız[4].

$\mathcal{F}_0 \in \mathcal{Z}$ olduğundan, $\mathcal{Z} \neq \varnothing$ olur. $\mathcal{Z}$'yi altküme olma ilişkisiyle sıralayalım, üstkümeler büyük, altkümeler küçük olsun. $\mathcal{Z}$'den herhangi bir $\mathcal{C}$ zinciri alalım, yani $\mathcal{C}$, $\mathcal{Z}$'nin tamsıralı bir altkümesi olsun. $\cup\mathcal{C}$, yani $\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathcal{C}} \mathcal{F}$ de $\mathcal{Z}$'dedir; nitekim $\cup\mathcal{C}$ kümesinin F1, F2 ve F3 koşullarını sağladığını kanıtlamak çocuk oyuncağı. Demek ki $\mathcal{Z}$ kümesine Zorn Önsavı'nı (Önsav 27.4) uygulayarak maksimal bir elemanının olduğunu anlarız. □

[4]Zorn Önsavı'nı bilmeyen ya da hemen şimdi öğrenmek istemeyen okur, bu teoremi kanıtsız kabul edebilir, Zorn Önsavı bu bölüm boyunca bir daha kullanılmayacaktır.

Sonuç 26.6. *Başat olmayan ultrafiltreler vardır.*

Kanıt: Bir önceki teoreme göre Fréchet filtresini kapsayan bir ultrafiltre vardır. Örnek 26.7'ye göre bu ultrafiltre başat olamaz. □

Başat olmayan ultrafiltrelerin varlığını kanıtladıktan sonra sıradışı sayıların inşasına geçebiliriz.

26.4 Sıradışı Sayılar

$\mathcal{F}$ herhangi bir filtre olsun. (İleride $\mathcal{F}$'yi başat olmayan bir ultrafiltre olarak alacağız, ama henüz değil.) $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki gerçel sayı dizisi olsun. Eğer

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\} \in \mathcal{F}$$

ise, bu iki diziye **denk** diyelim ve bunu

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n$$

olarak gösterelim.

Önsav 26.7. *Yukarıda tanımlanan* $\equiv$ *ilişkisi* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *kümesi üzerine bir denklik ilişkisidir.*

Kanıt: $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ olduğundan her dizi kendisine denktir. Elbette $(x_n)_n \equiv (y_n)_n$ ise $(y_n)_n \equiv (x_n)_n$ olur. Şimdi $(x_n)_n \equiv (y_n)_n$ ve $(y_n)_n \equiv (z_n)_n$ varsayımlarını yapıp, $(x_n)_n \equiv (z_n)_n$ ilişkisini kanıtlayalım. Varsayıma göre,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\} \in \mathcal{F} \text{ ve } B = \{n \in \mathbb{N} : y_n = z_n\} \in \mathcal{F}$$

olur. Demek ki $A \cap B$ kümesi de filtrenin bir elemanı. Ama

$$A \cap B \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n = z_n\}$$

olduğundan (eşitlik olmak zorunda değil), bundan,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n = z_n\} \in \mathcal{F}$$

çıkar ve böylece $(x_n)_n \equiv (z_n)_n$ ilişkisi kanıtlanmış olur. □

Bir $x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ elemanının denklik sınıfını

$$[x] = [x_n]_n$$

olarak göstereceğiz, yani

$$[x] = [x_n]_n = \{(y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_n \equiv (y_n)_n\} = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x \equiv y\}$$

olacak. Denklik sınıflarının kümesini $\tilde{\mathbb{R}}_{\mathcal{F}}$ ya da daha sade bir yazılımla $\tilde{\mathbb{R}}$ olarak göstereceğiz:

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \equiv = \{[x] : x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$$

olacak[5]. $\mathcal{F}$ bir ultrafilre olduğunda, $\tilde{\mathbb{R}}$ kümesinin elemanları "sıradışı sayılar" adını vereceğimiz yeni sayılarımız olacak. İlk olarak bu yeni sayılar üzerine toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ kümesi üzerine tanımlanmış toplama ve çarpma işlemlerimiz var: İki diziyi terim terim toplayıp çarpmak. (Bu işlemlerle $\mathbb{R}^n$ değişmeli bir halkadır.) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ üzerine tanımlanmış bu toplama ve çarpma işlemlerini $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerine yansıtacağız. Amacımız toplama ve çarpmayı

$$[x] + [y] = [x + y] \text{ ve } [x][y] = [xy]$$

olarak tanımlamak. Ama önce bu tanıma hakkımızın olduğunu kanıtlamalıyız. Bunun için aşağıdaki sonuca ihtiyacımız var:

Önsav 26.8. *x, y, x', $y' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ olsun. Eğer $x \equiv x'$ ve $y \equiv y'$ oluyorsa, $x + y \equiv x' + y'$ ve $xy \equiv x'y'$ olur.*

Kanıt: $x = (x_n)_n$, $x' = (x'_n)_n$, $y = (y_n)_n$, $y' = (y'_n)_n$ tanımlarını yapalım. Varsayıma göre,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\} \in \mathcal{F} \text{ ve } B = \{n \in \mathbb{N} : y_n = y'_n\} \in \mathcal{F}$$

olur. Ama $A \cap B \in \mathcal{F}$ ve

$$A \cap B \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n + y_n = x'_n + y'_n\}$$

olduğundan,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n + y_n = x'_n + y'_n\} \in \mathcal{F}$$

olur. Demek ki $x + y = x' + y'$. Aynı kanıt çarpma için de geçerlidir. □

Bu önsav sayesinde $\tilde{\mathbb{R}}$ kümesi üzerine toplama ve çarpma tanımlayabiliriz: Her x, $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ için,

$$[x] + [y] = [x + y] \text{ ve } [x][y] = [xy].$$

Bir başka deyişle, eğer α, $\beta \in \tilde{\mathbb{R}}$ ise, α ve β'yı toplayıp çarpmak için **herhangi** $(x_n)_n \in \alpha$ ve $(y_n)_n \in \beta$ seçelim ve $\alpha + \beta$ ve $\alpha\beta$ elemanlarını

$$\alpha + \beta = [x_n + y_n]_n \text{ ve } \alpha\beta = [x_n y_n]_n$$

[5]Biraz soyut cebir bilene not: $I(\mathcal{F}) = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^n : \{n \in \mathbb{N} : x_n = 0\} \in \mathcal{F}\}$ olsun. $I(\mathcal{F})$, $\mathbb{R}^n$ halkasının bir idealidir ve $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ halkasının her ideali bir $\mathcal{F}$ filtresi için $I(\mathcal{F})$ biçimindedir. Yukarıda tanımlanan $\tilde{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}/I(\mathcal{F})$ bölüm halkasından başka bir şey değildir. $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerine halka işlemleri birazdan tanımlanacak.

olarak tanımlayalım; tanım, $(x_n)_n \in \alpha$ ve $(y_n)_n \in \beta$ dizilerinin seçiminden bağımsızdır.

Bu iki işlemle birlikte $\tilde{\mathbb{R}}$ kümesinin bir halkaya dönüştüğünü göstermek çok kolay; nitekim $\mathbb{R}$'de **evrensel** olarak doğru olan her eşitliğin $\tilde{\mathbb{R}}$'de de doğru olduğu kolaylıkla görülebilir. Örneğin $\mathbb{R}$'de **her** x ve y için $xy = yx$ olduğundan, $\tilde{\mathbb{R}}$ halkası da değişmeli bir halkadır. $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının sıfır elemanı $[s(0)]$'dır, yani sabit 0 dizisinin sınıfı. Çarpmanın etkisiz elemanı da sabit 1 dizisinin sınıfı olan $[s(1)]$ elemanıdır. $\tilde{\mathbb{R}}$ kümesinin toplama ve çarpma için etkisiz elemanlarını da 0 ve 1 olarak göstereceğiz, yani $0 = [s(0)]$ ve $1 = [s(1)]$ anlaşmalarını yapıyoruz. Zaten birazdan $\mathbb{R}$ cismini $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının içine gömeceğiz.

Ama "her x için öyle bir y var ki" türünden "evrensel" olmayan önermeler $\mathbb{R}$'de doğru olsa bile $\tilde{\mathbb{R}}$'de doğru olmayabilirler. Örneğin bu işlemlerle $\tilde{\mathbb{R}}$'nin cisim olduğu her filtre için doğru değildir, sadece ultrafiltreler için doğrudur. Bu konuya ileride tekrar döneceğiz.

Alıştırmalar

26.8. $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ için $-[x_n]_n = [-x_n]_n$ eşitliğini kanıtlayın.

26.9. $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının çarpma için tersinir elemanlar kümesinin,

$$\tilde{\mathbb{R}}^{\star} = \{[x_n]_n : \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\} \in \mathcal{F}\}$$

kümesi olduğunu gösterin. Eğer $\mathcal{F}$ Fréchet filtresiyse, $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının cisim olmadığını gösterin. Eğer $|A| > 1$ için $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ ise, $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının cisim olmadığını gösterin.

26.10. $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının bir cisim olması için yeter ve gerek koşulun $\mathcal{F}$ filtresinin ultrafiltre olması olduğunu gösterin.

26.11. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A)$ ise $\tilde{\mathbb{R}} \simeq \prod_A \mathbb{R}$ olduğunu gösterin. Demek ki bu durumda ilginç bir yapı elde etmiyoruz.

Yukarıdaki önsav sadece toplama ve çarpma için değil, $\mathbb{R}$ ya da daha genel olarak $\mathbb{R}^k$ üzerine tanımlanmış her fonksiyon için geçerlidir. Mesela

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunu ele alalım. Önce $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$'den $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$'ye giden ve gene sin olarak göstereceğimiz bir fonksiyonu, her $x = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ için,

$$\sin x = (\sin x_n)_n$$

olarak tanımlayalım. (Terim terim tanım, aynen toplama ve çarpma için.) Kolayca gösterilebileceği üzere, her x, $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ için $x \equiv y$ ise $\sin x \equiv \sin y$ olur. Böylece

$$\tilde{\sin}[x] = [\sin x]$$

tanımını yapıp

$$\tilde{\sin} : \tilde{\mathbb{R}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Eğer $\tilde{\cos}$ fonksiyonunu da aynı yöntemle tanımlarsak, okurun kolaylıkla kanıtlayabileceği üzere, her $\alpha \in \tilde{\mathbb{R}}$ için

$$\tilde{\sin}^2\alpha + \tilde{\cos}^2\alpha = 1$$

olur[6]. Diğer trigonometrik eşitlikler de geçerlidir.

Ya da $f(x,y) = \sin(y \exp x) + \sqrt{1+(x^2)^y}$ gibi $\mathbb{R}^2$ üzerine tanımlanmış herhangi bir fonksiyon, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ üzerine "terim terim" tanımlanabilir:

$$f(x,y) = f((x_n)_n, (y_n)_n) = (f(x_n, y_n))_n.$$

Kolayca görülebileceği üzere $x \equiv x'$ ve $y \equiv y'$ olduğunda $f(x,y) \equiv f(x',y')$ olur. Bu sayede $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu kullanarak,

$$\tilde{f}([x],[y]) = [f(x,y)]$$

formülüyle $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ fonksiyonunu tanımlama hakkını kendimizde buluruz. Böylece sadece toplama ve çarpma değil, $\mathbb{R}$ ya da bir $\mathbb{R}^k$ üzerine tanımlanmış **her** fonksiyon $\tilde{\mathbb{R}}$ ya da $\tilde{\mathbb{R}}^k$ üzerine tanımlanabilir.

Şimdi $\mathbb{R}$ cismini $\tilde{\mathbb{R}}$ halkası içine gömeceğiz, $i : \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ fonksiyonunu, her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$i(r) = [s(r)]$$

olarak tanımlayalım (sabit r dizisinin sınıfı). i'nin birebir bir fonksiyon olduğu ve toplama ve çarpmayla uyumlu olduğu, yani her r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ için

$$i(r_1 + r_2) = i(r_1) + i(r_2) \text{ ve } i(r_1 r_2) = i(r_1) i(r_2)$$

eşitliklerini sağladığı bariz. Böylece $\mathbb{R}$ cismi, $\tilde{\mathbb{R}}$ cisminin içine gömülür. İşimize geldiği zaman $[s(r)]$ yerine r yazıp $\mathbb{R}$'yi $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının bir althalkası olarak göreceğiz[7].

Böylece $\mathbb{R}$'yi içeren bir $\tilde{\mathbb{R}}$ halkası bulduk. Ayrıca $\mathbb{R}^k$ üzerine tanımlanmş **her** reel fonksiyon $\tilde{\mathbb{R}}^k$ halkasına (değer kümesi $\tilde{\mathbb{R}}$ olacak şekilde) genişletilebilir.

Şimdi sıralamaya gelelim. Burada biraz zorluk yaşayacağız, her şey yukarıdaki kadar kolay olmayacak. $\mathbb{R}$ üzerine tanımlanmış bildiğimiz $\leq$ sıralamasını $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerine tanımlamaya çalışalım. Tanımımız şu şekilde olmalı elbet:

$$[x_n]_n \leq [y_n]_n \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n\} \in \mathcal{F}.$$

Önce bu tanımın geçerli bir tanım olduğunu gösterelim.

[6]Buradaki 1, $\tilde{\mathbb{R}}$'nin 1'dir tabii, yani $[s(1)]$ elemanıdır.

[7]Matematikte bu tür "özdeşleştirmeler" sık sık yapılır. Örneğin, sabit polinomlarla sayılar arasında bir fark gözetilmez, oysa aynı şey değildirler. Hatta bazen özdeşleştirme abartılır ve doğru olmamasına rağmen her polinom bir fonksiyon olarak algılanır.

Önsav 26.9. *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(x'_n)_n$, $(y'_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ olsun. Eğer $(x_n)_n \equiv (x'_n)_n$, $(y_n)_n \equiv (y'_n)_n$ ve $\{n \in \mathbb{N} : x_n \le y_n\} \in \mathcal{F}$ ise $\{n \in \mathbb{N} : x'_n \le y'_n\} \in \mathcal{F}$ olur.*

Kanıt: Şu tanımları yapalım:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : x_n = x'_n\}, \\ B &= \{n \in \mathbb{N} : y_n \le y'_n\}, \\ C &= \{n \in \mathbb{N} : x_n \le y_n\}, \\ D &= \{n \in \mathbb{N} : x'_n \le y'_n\}. \end{aligned}$$

Varsayımlara göre A, B, $C \in \mathcal{F}$. Göstermemiz gereken $D \in \mathcal{F}$. Ama

$$A \cap B \cap C \subseteq D$$

olduğundan bu bariz. □

Demek ki eşitsizlik tanımımız geçerli, $\mathbb{R}$ üzerine tanımlanmış $\le$ eşitsizlik ilişkisini $\tilde{\mathbb{R}}$ halkası üzerine tanımlayabiliyoruz. Şimdi bu tanımın $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerine bir sıralama verdiğini göstermek gerekiyor. Tanımın bir sıralama verdiğini göstermek oldukça kolay, ama her zaman bir tamsıralama olmuyor ne yazık ki, yani herhangi iki elemanı her zaman karşılaştıramayabiliyoruz. Örneğin $x = [(-1)^n]$ ve $y = [(-1)^{n+1}]$ elemanlarından birinin diğerinden daha büyük olması için $2\mathbb{N}$ ve $2\mathbb{N}+1$ kümelerinden biri $\mathcal{F}$'de olmalı, ama mesela $\mathcal{F}$ Fréchet filtresiyse bu doğru değil. Bu sıralamanın bir tamsıralama olması için $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olması gerekiyor.

Önsav 26.10. *Yukarıdaki tanım $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerine bir sıralama tanımlar. Bu sıralamanın bir tamsıralama olması için yeter ve gerek koşul $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olmasıdır.*

Kanıt: Tanımlanan ikili ilişkinin bir sıralama olduğu aşikâr. Eğer $\mathcal{F}$ bir ultrafiltreyse sıralamanın bir tamsıralama olduğunu gösterelim. Bu amaçla $\tilde{\mathbb{R}}$ kümesinden iki $[x_n]_n$ ve $[y_n]_n$ elemanı alalım.

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \le y_n\} \text{ ve } B = \{n \in \mathbb{N} : y_n \le x_n\}$$

olsun. A ve B'den birinin $\mathcal{F}$'de olduğunu göstermeliyiz, ki iki elemandan biri diğerinden küçükeşit olsun. Elbette $A \cup B = \mathbb{N}$ olur. Önsav 26.4'ten dolayı ya A ya da B kümesi $\mathcal{F}$'dedir. □

Bir başka benzer sonuç:

Önsav 26.11. *$\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının bir cisim olması için yeter ve gerek koşul $\mathcal{F}$'nin bir ultrafiltre olmasıdır.*

Kanıt: Diyelim $\mathcal{F}$ bir ultrafiltre. $\alpha = [a_n]_n \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ olsun. O zaman

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \notin \mathcal{F}$$

olur. $\mathcal{F}$ bir ultrafiltre olduğundan, Önsav 26.4'e göre

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in \mathcal{F}$$

olur. Şimdi

$$b_n = \begin{cases} a_n^{-1} & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

ve $\beta = [b_n]_n$ olsun.

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n b_n = 1\} = A \in \mathcal{F}$$

olduğundan $\alpha\beta = 1$ olur.

Şimdi $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasının bir cisim olduğunu varsayalım. $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Önsav 26.4'e göre A ya da A^c kümelerinden birinin $\mathcal{F}$'de olduğunu göstermeliyiz. Diyelim $A \notin \mathcal{F}$; bu durumda $A^c \in \mathcal{F}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } n \in A^c \text{ ise} \end{cases}$$

ve $\alpha = [a_n]_n$ olsun. $A \notin \mathcal{F}$ olduğundan, $\alpha \neq 0$. Demek ki $\alpha\beta = 1$ eşitliğini sağlayan bir $\beta = [b_n]_n$ vardır. Dolayısıyla

$$\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n b_n = 1\} \in \mathcal{F}.$$

Bu da, a_n'nin tanımına göre,

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n = 1\} \in \mathcal{F}$$

demek. Ama

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n = 1\} \subseteq A^c.$$

Demek ki $A^c \in \mathcal{F}$. □

Önceki iki önsava göre, eğer $\mathcal{F}$'yi bir ultrafiltre olarak alırsak, $\tilde{\mathbb{R}}$ halkası sıralı bir cisim olur. Eğer $\mathcal{F}$ başat olmayan bir ultrafiltreyse, $\tilde{\mathbb{R}}$'de sonsuz küçük pozitif elemanların varlığını göstermek hiç zor değil. Mesela

$$\epsilon = [1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ \ldots]$$

olsun. Elbette $\epsilon > 0$ olur[8], çünkü dizinin istisnasız her terimi 0'dan büyük. Ayrıca $\epsilon < 1$ olur, çünkü $\mathcal{F}$ başat olmayan bir ultrafiltre olduğundan, Önsav 26.2'ye göre,

$$\{n \in \mathbb{N} : 1/(n+1) < 1\} = \mathbb{N} \setminus \{0\} \in \mathcal{F}$$

[8]Buradaki 0 elemanı, $\tilde{\mathbb{R}}$ cisminin sıfır elemanıdır, yani toplama için etkisiz elemandır, yani sabit 0 dizisi olan $s(0)$'ın sınıfıdır.

olur. Benzer nedenden $2\epsilon < 1$ olur, nitekim

$$2\epsilon = [2,\ 2/2,\ 2/3,\ 2/4,\ 2/5,\ \ldots]$$

ve

$$\{n \in \mathbb{N} : 2/(n+1) < 1\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \in \mathcal{F}$$

olur. Aynı yöntemle, her $k \in \mathbb{N}$ için $k\epsilon < 1$ olur, çünkü

$$k\epsilon = [k,\ k/2,\ k/3,\ k/4,\ k/5,\ \ldots]$$

ve

$$\{n \in \mathbb{N} : k/(n+1) < 1\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \ldots, k-1\} \in \mathcal{F}$$

olur. Bulduklarımızı özetleyelim.

Teorem 26.12. *$\tilde{\mathbb{R}}$, sonsuz küçük pozitif bir eleman içeren ve $\mathbb{R}$'yi (ya da $\mathbb{R}$'nin bir kopyasını) sıralı bir altcisim olarak içeren sıralı bir cisimdir.* □

$\mathbb{R}$ üzerine tanımlanmış (toplama ve çarpma gibi) tüm fonksiyon ve (eşitsizlik gibi) tüm ilişkilerin tanımını $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerine genişletebilirdik. Nitekim sin fonksiyonunu $\mathbb{R}$'den $\tilde{\mathbb{R}}$ halkasına genişletmiştik. Aynı yöntemle $\exp x$ fonksiyonunu, hatta $\mathbb{R}^{\geq 0}$ üzerine tanımlanmış $\sqrt{x}$ fonksiyonunu da $\tilde{\mathbb{R}}^{\geq 0}$ kümesine genişletebiliriz. Tüm bu fonksiyonlarla ilgili tüm önermeler $\mathbb{R}$'de doğruysa $\tilde{\mathbb{R}}$'de de doğru olur, yeter ki önerme sadece elemanlardan (altkümelerden değil) sözetsin. Mesela $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerine tanımlanmış exp fonksiyonu, aynen $\mathbb{R}$'de olduğu gibi birebirdir ve imgesi $\tilde{\mathbb{R}}^{>0}$ olur. Bu konuda daha fazla kelam bu kitabın sınırlarını aşacağından, bu konuyu burada kapatıyoruz.

Not. Bu bölümde dizilerle çalışmaya başladık ve filtrelerimizin tabanı $\mathbb{N}$ idi. Bu bölümde yapılan istisnasız her şeyi $\mathbb{N}$ yerine herhangi bir sonsuz I kümesi için de yapabilirdik.

26.5 Sınırlı Sayılar

$\mathbb{R}$'yi $\tilde{\mathbb{R}}$ cisminin bir althalkası olarak görüyoruz, bunu artık bir defa daha tekrarlamayacağız.

Eğer ϵ sonsuz küçük bir elemansa, her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $n\epsilon < 1$ olur, dolayısıyla $1/\epsilon > n$ olur. Demek ki $1/\epsilon$ her doğal sayıdan daha büyük bir sayıdır, herhangi bir doğal sayı, ya da gerçel sayı ile üstten sınırlanamaz. Bu son altbölümde "üstten bir gerçel sayıyla sınırlanmak" konusunu kısaca ele alacağız ve sıradışı sayılarla limit kavramını kullanmadan nasıl türev alınabileceğini göstereceğiz.

Her fonksiyonu olduğu gibi mutlak değer fonksiyonunu da (terim terim tanımlayarak) $\mathbb{R}$'den $\tilde{\mathbb{R}}$'ye genişletebiliriz: Eğer $x = [x_n]_n$ ise, $|x| = [|x_n|]_n$ olsun. Kolayca görüleceği üzere $\tilde{\mathbb{R}}$ üzerinde de $\mathbb{R}$'de olduğu gibi

$$|x| = \max\{x, -x\}$$

eşitliği geçerlidir.

Bir $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ elemanı alalım. Eğer bir $r \in \mathbb{R}$ için

$$|x| \le r$$

oluyorsa, x'e ***sınırlı eleman*** adı verilir. Örneğin $\mathbb{R}$'nin elemanları ve sonsuz küçük elemanlar sınırlıdır. Sınırlı elemanlar kümesi bir althalkadır (yani toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve 0 ve 1'i içerir) ama bir cisim değildir, örneğin $0 < \epsilon$ bir sonsuz küçük elemansa, $1/\epsilon$, her doğal sayıyı aştığından sınırlı bir eleman değildir. Üstten sınırlı elemanlar kümesini $\mathfrak{R}$ olarak gösterelim. Sonsuz küçük elemanlar kümesini de I ile gösterelim. I kümesi toplama ve çarpma altında kapalıdır, hatta $\mathfrak{R}I \subseteq I$ olur[9].

Önsav 26.13. $\mathfrak{R} = \mathbb{R} + I$ *olur; hatta her* $x \in \mathfrak{R}$ *elemanı bir ve bir tek* $r \in \mathbb{R}$ *ve* $\epsilon \in I$ *için* $r + e$ *olarak yazılır*[10].

Kanıt: $\mathbb{R} + I \subseteq \mathfrak{R}$ içindeliği bariz. Şimdi $x \in \mathfrak{R}$ olsun.

$$A(x) = \{r \in \mathbb{R} : r \le x\}$$

olsun. x, sınırlı bir eleman olduğu için, $A(x)$ üstten sınırlı ve boş olmayan bir gerçel sayı kümesidir. SUP aksiyomuna göre en küçük üstsınırı vardır. O üstsınıra r diyelim. (Dikkat: $r > x$ olabilir. Örneğin $r \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon \in I^{>0}$ olsun. $x = r - \epsilon$ tanımını yapalım. O zaman $A(x) = (-\infty, r)$ ve $\sup A(x) = r > x$ olur.)

Şimdi $r - x$'in bir sonsuz küçük olduğunu kanıtlayacağız. Diyelim bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$n|r - x| > 1$$

oluyor. Eğer $r - x \ge 0$ ise, $r - x = |r - x| > 1/n$, yani $x < r - 1/n$ olur; ama bu da $r = \sup A(x)$ tanımıyla çelişir. Eğer $r - x < 0$ ise, $n(x - r) = n|r - x| > 1$, yani $x \ge r + 1/n$ olur; dolayısıyla $\sup A(x) = r < r + 1/n \in A(x)$ olur, çelişki. $r - x$'in sonsuz küçük olduğunu kanıtladık.

Böylece $x = r + (x - r) \in \mathbb{R} + I$ elde ettik ve $\mathfrak{R} = \mathbb{R} + I$ eşitliğini kanıtlamış olduk.

---

[9]Soyut cebir bilenlere: Yani I, $\mathfrak{R}$ halkasının bir idealidir ve $\mathfrak{R}/I \simeq \mathbb{R}$ olur. Ama birazdan bundan daha güçlü bir şey kanıtlayacağız.

[10]Soyut cebir bilenlere: Bu önsav, toplama işlemi altında bir grup olarak $\mathfrak{R}$ grubunun $\mathbb{R} \oplus I$ grubuna eşit olduğunu söylemektedir.

Son olarak: Eğer r, $r' \in \mathbb{R}$ ve ϵ, $\epsilon' \in I$ için $r + \epsilon = r' + \epsilon'$ olsaydı, o zaman

$$r - r' = \epsilon' - \epsilon \in \mathbb{R} \cap I = \{0\},$$

yani $r = r'$ ve $\epsilon = \epsilon'$ olur. □

Eğer $x \in \mathfrak{R}$ ise ve $r \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon \in I$ için $x = r + \epsilon$ ise, r'ye x'in ***sıradan kısmı*** ya da ***standart kısmı*** adı verilir ve $r = \mathrm{st}(x)$ yazılır. Şimdi $f(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve $\epsilon \in I \setminus \{0\}$ için

$$\mathrm{st}\left(\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}\right)$$

sayısını hesaplayalım:

$$\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = \frac{(a+\epsilon)^2 - a^2}{\epsilon} = \frac{(a^2 + 2a\epsilon + \epsilon^2) - a^2}{\epsilon} = \frac{2a\epsilon + \epsilon^2}{\epsilon} = 2a + \epsilon$$

olduğundan,

$$\mathrm{st}\left(\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}\right) = 2a$$

olur. Bu sonuç sizi pek şaşırtmamış olmalı. Eğer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $a \in \mathbb{R}$ noktasında türevlenebilirse, o zaman f fonksiyonunu (terim terim tanımla) önce $\tilde{\mathbb{R}}$ cismine genişletelim, sonra herhangi bir $\epsilon \in I \setminus \{0\}$ için

$$\mathrm{st}\left(\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}\right)$$

sayısını hesaplayalım,

$$\mathrm{st}\left(\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}\right) = f'(a)$$

bulunacaktır[11].

Son Söz. 1960'ların başında Abraham Robinson'un bulduğu bu konuyla ilgili bugün artık birçok kitap bulabilirsiniz. Bu konuda yazılmış ilk makale [R1], ilk kitap ise [R] idi. Konunun tarihi ve felsefesi için Joseph W. Dauben'in `http://www.mcps.umn.edu/philosophy/11_7dauben.pdf` makalesinden yararlanabilirsiniz. Sadece matematik açısından değil, matematikte yaratıcılık ve matematik felsefesi açısından da son derece ilginç ve derin bir konudur.

[11] $f'(a)$, üçüncü ciltte ele alacağımız f'nin a'daki türevidir.

27. Zorn Önsavı

Zorn Önsavı, ya da ona eşdeğer olan Seçim Aksiyomu matematiğin en tartışmalı önermelerindendir. İlk kez 1904'te Zermelo tarafından ifade edilen Seçim Aksiyomu, elemanları boş olmayan kümelerden oluşan bir kümenin her elemanından bir eleman seçebileceğimizi söyler; daha doğru bir deyişle şunu söyler: *X bir küme ve $\mathcal{X} \subseteq \wp(X) \setminus \{\varnothing\}$ olsun; o zaman her $A \in \mathcal{X}$ için $f(A) \in A$ önermesini sağlayan bir $f : \mathcal{X} \longrightarrow X$ fonksiyonu vardır.* Seçim Aksiyomu, "boş olmayan kümelerin kartezyen çarpımı boş değildir" önermesine eşdeğerdir, biri doğruysa diğeri de doğrudur. Oldukça masum görünen bu aksiyom kümeler kuramının diğer aksiyomlarından bağımsızdır (Kurt Gödel 1940 ve Paul Cohen 1963) ve sezgisel olarak çok doğru gelen önermelerin kanıtında kullanıldığı gibi, "bu kadarı da olamaz" dedirten, sezgilere ters gelen önermelerin kanıtında da kullanılır.

Matematiğin çok geniş bir alanında Seçim Aksiyomu'na gerek duyulmazken, özellikle cebir ve analiz gibi önemli konuların biraz derinliklerine inildiğinde, Seçim Aksiyomu ya da Seçim Aksiyomu'na denk olan Zorn Önsavı kullanılarak rahat bir nefes alınır, çünkü başka türlü kanıtlanamayacak (ama kanıtlamayı çok istediğimiz) önermeler Zorn Önsavı sayesinde kanıtlanabilir.

Seçim Aksiyomu'nun (ya da Zorn Önsavı'nın) pratikte hiçbir yararı olamaz, örneğin mühendislikte ya da fizikte kullanılamaz, günlük yaşama bir etkisi olamaz, ama Seçim Aksiyomu'nu varsaymak hiç kuşku yok ki matematiği zenginleştirir. Zaten bu zenginlik sayesinde (ya da yüzünden!) geçmişte büyük tartışmalara yol açan Seçim Aksiyomu'nu bugün hemen her matematikçi kabul eder. Gene de, eğer mümkünse, matematikçiler teoremlerini Seçim Aksiyomu kullanmadan kanıtlamayı tercih ederler, ancak son çare olarak Seçim Aksiyomu'na başvururlar. Hatta bazıları teoremin başına, "Axiom of **C**hoice" anlamına gelen (C) ya da (AC) ibaresi koyarak Seçim Aksiyomu'nu kullandıklarını özellikle ifade ederler.

Seçim Aksiyomu konusunda daha fazla bilgi almak isteyenler başka kaynaklara başvurabilirler ([N3]'ten başlanabilir, ama yetmez). Biz burada Seçim Aksiyomu'nu değil, ondan çok daha kullanışlı olduğunu düşündüğümüz (ve sıradışı sayıları inşa ederken geçen bölümde kullandığımız) Zorn Önsavı'nı konu edeceğiz.

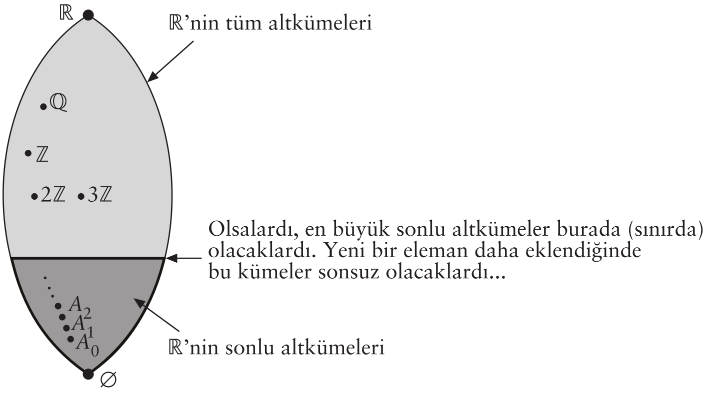
27.1 Bazı Problemler

27.1.1 İmkânsız Bir Problem

İmkânsız bir problemle başlayalım: Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin **maksimal** bir sonlu altkümesini bulmaya çalışalım...

Doğru anladınız! Dediğimiz gibi imkânsız bir problemi çözmeye çalışacağız. Gerçel sayılardan oluşan öyle bir sonlu küme bulmaya çalışacağız ki, bu kümeden daha fazla gerçel sayı içeren hiçbir gerçel sayı kümesi sonlu olamasın...

Böyle bir küme olamaz elbet. Eğer bir kümenin sonlu sayıda elemanı varsa, bu kümeye yeni bir eleman ekleyerek ondan daha büyük ama gene sonlu sayıda elemanı olan bir başka küme elde ederiz. Biz gene de böyle bir küme bulmaya çalışalım.



Aradığımız, "en büyük" sonlu küme değil, yani tüm sonlu kümeleri altküme olarak içeren sonlu bir küme aramıyoruz. Sadece o sonlu kümeden daha büyük bir sonlu altküme olmamasını istiyoruz. Arada önemli bir fark var.

$\mathbb{R}$'nin sonlu bir altkümesini alalım. Eğer bu küme $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesiyse işimiz iş. Değilse (ki değildir!) o zaman bu kümeden daha büyük ama hâlâ sonlu bir küme daha vardır. (Kümelerimiz hep $\mathbb{R}$'nin altkümeleri olsunlar, artık bunu sürekli tekrarlamayalım.) Şimdi eskisinden daha büyük olan bu yeni kümeye bakalım. Bu yeni kümenin maksimal sonlu küme olma olasılığı eski kümeye göre daha yüksek tabii... Eğer bu yeni küme maksimal bir sonlu kümeyse, işimiz iş, istediğimizi elde ettik. Değilse, o zaman bu kümeden daha büyük sonlu bir küme daha vardır (ki var, biliyoruz). Şimdi bu en yeni sonlu kümeye bakalım, acaba bu en yeni sonlu küme maksimal bir sonlu küme mi? Eğer öyleyse maksimal bir sonlu küme bulduk ve sorunumuzu hallettik. Değilse, bu kümeden daha büyük bir sonlu altküme vardır. Şimdi bu sonlu altkümeye bakalım, acaba bu en gıcır sonlu küme maksimal bir sonlu altküme mi?..

Birinci kümemize A_0 diyelim. Eğer A_0, $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesiyse, sorun yok. (Ama olmadığını biliyoruz; eğer a, A_0'da olmayan bir gerçel sayıysa, $A_0 \cup \{a\}$, A_0'dan daha büyük sonlu bir kümedir.) Diyelim şansımız yaver gitmedi (!) ve A_0, $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesi değil, ondan daha büyük sonlu bir küme var. A_0'dan daha büyük sonlu bir küme alalım ve bu kümeye A_1 diyelim. A_1, maksimal bir sonlu küme değilse, A_1'den daha büyük sonlu bir küme vardır. Bu kümeye de A_2 diyelim. Bunu böylece sürdürebiliriz:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n.$$

Bunların biri maksimal bir sonlu kümeyse imkânsız problemimizi çözdük demektir. Ama değilse işlemi sonsuza kadar sürdürebiliriz. Sürdürelim:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Böyle bir diziye ***zincir*** adını verelim.

Yukarıdaki zincirin A_n "halkaları" sonlu gerçel sayı kümeleri. Herbirinin bir öncekinden daha fazla elemanı var. Dolayısıyla hiçbiri maksimal bir sonlu küme değil. Bunların **herbirinden** daha büyük ama hâlâ sonlu bir gerçel sayı kümesi bulup bu kümenin maksimal bir sonlu küme olup olmadığına bakalım... Bulacağımız bu yeni küme A_n'lerin hepsini (altküme olarak) içermek zorunda olduğundan sonlu olamaz maalesef. Ama olsaydı ne güzel olurdu... Bu, bütün A_n'leri içeren sonlu kümeye A_ω der ve kaldığımız yerden devam ederdik... Durum şöyle olurdu:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_\omega.$$

Eğer A_ω maksimal bir sonlu kümeyse sorunu çözmüş olurduk. Değilse (ki değil, çünkü A_ω sonlu bile değil), o zaman A_ω'dan daha büyük sonlu bir küme bulur ve aynı işlemi maksimal bir sonlu altkümeye toslayana dek sürekli tekrarlardık. Bir zincire geldiğimizde ise zincirin bileşimini içeren sonlu bir küme bulmayı umup gene yolumuza devam ederdik. Bu yöntemi hiç durmadan tekrarlayarak maksimal bir sonlu küme bulmaya çalışabilirdik.

Ama ne yazık ki bunlar hayal, bütün A_n'leri içeren A_ω gibi sonlu bir küme yok evrende.

Gene de yukarıdaki fikrin başarıya ulaşacağı durumlar olacaktır. Bizi izlemeye devam edin!

27.1.2 Çok Kolay Bir Problem

Gene çok kolay bir problem ele alalım, ama bu sefer lütfen çözümü olsun! Bu sefer $\mathbb{R}$'nin 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulalım.

Gerçekten çok kolay bir problem bu. Tek bir çözümü var: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Yani bu sefer sadece maksimal değil, gerçekten de koşulumuzu sağlayan **en büyük** altküme var. Ama biz bu çözümü bilmediğimizi varsayarak yukarıdaki yöntemi deneyelim.

$\mathbb{R}$'nin 1'i içermeyen herhangi bir altkümesinden başlayalım. Bu altküme boşküme de olabilir, $\{0\}$ ya da $\{\pi\}$ kümesi de olabilir, hatta, şans bu ya, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesi de olabilir; önemli olan 1'i içermemesi. 1'i içermeyen bu ilk kümeye A_0 diyelim. Eğer A_0 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir altkümeyse, o zaman keyfimize diyecek yok, problemi çözdük. Ama diyelim A_0 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir küme değil. O zaman A_0'ı içeren ve A_0'dan daha fazla elemanı olan ama 1'i içermeyen bir A_1 kümesi vardır. Eğer A_1 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir. Ama diyelim A_1 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir küme değil. O zaman A_1'i içeren ve A_1'den daha fazla elemanı olan ama hâlâ daha 1'i içermeyen bir A_2 kümesi vardır. Eğer A_2 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Bunu böylece devam ettirelim. Eğer belli bir aşamada, diyelim n'inci aşamada A_n kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Diyelim hiçbir A_n, 1'i içermeyen maksimal bir küme değil, sürekli daha büyüğünü buluyoruz. Durumu resmedelim:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

ve özetleyelim: Bunların hepsi gerçel sayı kümeleri ve hiçbiri 1'i içermiyor ve herbirinin bir öncekinden daha fazla elemanı var.

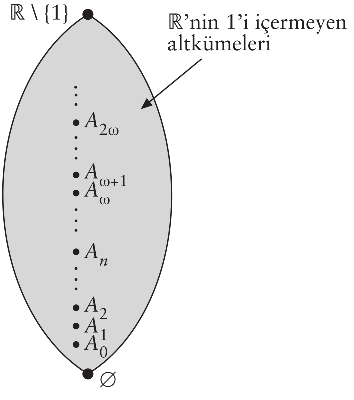
Bunların herbirinden daha büyük ve 1'i içermeyen bir küme bulup bu kümenin 1'i içermeyen maksimal bir küme olup olmadığına bakalım. Bulacağımız bu yeni kümenin A_n'lerin hepsinden daha büyük olmasını istediğimizden, A_n'lerin hepsini altküme olarak kapsamak zorundadır. Bir önceki örnekte A_n'lerin hepsinden daha büyük ve sonlu bir küme bulamamıştık, yoktu öyle bir küme, bakalım şimdi bulabilecek miyiz? Heyecan dorukta!

Bütün bu A_n'lerin bileşimini alırsak, A_n'lerin hepsinden daha büyük bir küme elde ederiz elbet. Ayrıca, A_n'lerin hiçbiri 1'i eleman olarak içermediğinden, A_n'lerin bileşimi de 1'i eleman olarak içermez. Ne güzel!

Demek ki tüm A_n'leri altküme olarak içeren ama 1'i eleman olarak içermeyen en az bir küme vardır. A_ω, bu kümelerden biri olsun. Örneğin,

$$A_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

olabilir, ama bundan daha büyük bir küme de olabilir, ne olduğu pek önemli değil, önemli olan A_ω'nın A_n'lerin hepsini altküme olarak içermesi ve 1'i içermemesi.



Kaldığımız yerden A_0 yerine A_ω ile devam edelim. Eğer A_ω kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman başarıya ulaştık demektir... Değilse, A_ω'yı altküme olarak içeren ama A_ω'dan daha büyük olan ve 1'i içermeyen bir küme var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+1}$ diyelim. Okur tahmin ediyordur bundan sonra ne yapacağımızı. Eğer $A_{\omega+1}$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, $A_{\omega+1}$'in, $A_{\omega+1}$'den daha büyük ve 1'i içermeyen bir üstkümesi var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+2}$ diyelim... Bunu böylece sürdürürüz... Eğer

$$A_\omega \subset A_{\omega+1} \subset A_{\omega+2} \subset \ldots \subset A_{\omega+n} \subset \ldots$$

zincirinin $A_{\omega+n}$ halkalarından hiçbiri 1'i içermeyen maksimal bir küme değilse, bunların bileşimi örneğin, 1'i içermeyen ve yukarıdakilerin herbirinden daha büyük bir kümedir. Böyle bir kümeye $A_{2\omega}$ adını verelim. Eğer $A_{2\omega}$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, işlemi devam ettirebiliriz... Eğer belli bir aşamada, 1'i içermeyen maksimal bir altkümeye (yani $\mathbb{R}\setminus\{1\}$'e, ama sonucun bu olduğunu bilmiyormuş gibi davranıyoruz) rastlarsak o zaman gayretlerimiz amacına ulaşmış demektir, duralım. Ama eğer kümeleri hep 1'i içermeyecek biçimde büyütebiliyorsak, bir adım ileri gidelim. Başarıya ulaşmadığımız sürece hep ileri gidebileceğimizi biliyoruz.

$$A_{2\omega} \subset A_{2\omega+1} \subset A_{2\omega+2} \subset \ldots \subset A_{2\omega+n} \subset \ldots$$

Eğer hep başarısızlığa uğramışsak, bir sonraki aşamada bu kümelerin bileşimini içeren ama 1'i içermeyen herhangi bir küme alıp buna $A_{\omega 3}$ diyelim ve yukarıdaki gibi devam edelim.

Peki ama bu durmadan ileri gitmenin bir sonu gelecek mi? En sonunda, gerekirse sonsuz hatta çok sonsuz adımı aşıp $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesine ulaşabilecek miyiz?

Bu sorunun yanıtı hiç de bariz değil. $\mathbb{R}$ çok büyük bir küme olduğundan (bkz. [SKK]) ulaşmak istediğimiz $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ kümesi de bayağı büyüktür, sayılamaz sonsuzluktadır. (Bunun ne demek olduğunu bilmeyen umursamasın.) Yukarıdaki yöntemle zaten bildiğimiz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ çözümüne ulaşıp ulaşamayacağımızdan emin olamayız.

27.1.3 Benzer Bir Problem

Bu sefer $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümesini bulmaya çalışalım. Yani $\mathbb{R}$'nin öyle bir altkümesini bulalım ki, $\mathbb{R}$'nin bu altkümeden daha büyük bir altkümesi $\mathbb{R}$'ye eşit olsun. Yanıtı gene biliyoruz: Eğer a, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir elemanıysa, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümelerinden biridir, $\mathbb{R}$'nin ondan daha büyük bir özaltkümesi yoktur.

Bu sefer birden fazla yanıt var, $\mathbb{R}$'nin her a elemanı için bir çözüm ($\mathbb{R} \setminus \{a\}$ çözümünü) bulabiliriz.

Aynı yöntemi denersek bu sefer de birinci örneğimizdeki zorluğa toslarız: Eğer

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

her biri $\mathbb{R}$'nin özaltkümesiyse, bunların hepsini birden içeren bir küme $\mathbb{R}$'ye eşit olabilir, yani bunların hepsinin bileşimi $\mathbb{R}$ olabilir. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_n = (-\infty, n)$$

aralığıysa, bu A_n'lerin hepsi özaltkümedir, hiçbiri maksimal bir özaltküme değildir, ama bileşimleri $\mathbb{R}$'dir.

Bu zorluğu yenmek için bu problemi bir önceki probleme dönüştürüp belli bir a için ($a = 1$ olabilir), bu belirlenmiş a'yı içermeyen maksimal bir altkümeyi bulmaya çalışmalıyız. Şans bu ya, a'yı içermeyen maksimal bir altküme $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümesidir.

27.1.4 Orta Zorlukta Bir Problem

Şimdi bir başka probleme el atalım. Bu problem daha zor olacak. Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'nün çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulmaya çalışalım. Yani öyle bir $M \subseteq \mathbb{Q}$ kümesi bulmaya çalışalım ki,

1. Her $x, y \in M$ için, $x - y \in M$ olsun.
2. 1 sayısı M'de olmasın.
3. M, $\mathbb{Q}$'nün yukarıdaki iki koşulu sağlayan maksimal bir altkümesi olsun. Yani $M \subset N \subseteq \mathbb{Q}$ ise, N ya çıkarma altında kapalı olmayacak (yani birinci koşulu sağlamayacak) ya da 1'i içerecek (yani ikinci koşulu sağlamayacak).

"Maksimal" koşulundan vazgeçip ilk iki koşulu sağlayan bir küme bulalım. $\varnothing$ ya da $\{0\}$ bu tür kümelerdendir. Çift sayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ de çıkarma altında kapalıdır ve 1'i içermez. Bu iki özelliği sağlayan herhangi bir küme alalım ve bu kümeye A_0 adını verelim. Eğer A_0 ilk iki koşulu sağlayan maksimal bir kümeyse sorun yok, çözüme ulaştık. Değilse, ilk iki koşulu sağlayan ve A_0'dan daha büyük bir $A_1 \subset \mathbb{Q}$ vardır.

Bu işlemi sürdürelim.

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n$$

kümelerini elde ederiz. Amacımıza henüz ulaşmamışsak, yani A_n, ilk iki koşulu sağlayan maksimal bir küme değilse devam edelim. Sonlu bir aşamada ilk iki koşulu sağlayan $\mathbb{Q}$'nün maksimal bir altkümesine rastlamamışsak şöyle bir zincir elde ederiz:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Bunların her biri $\mathbb{Q}$'nün 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı altkümeleri, ama hiçbiri en büyüğü değil, yani her biri bir öncekinden daha fazla eleman içeriyor. Bunların bileşimini alalım:

$$A_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

A_ω da 1'i içermez, çünkü A_n'lerin hiçbiri 1'i içermiyor. (A_ω'nın 1'i içermesi için A_n'lerin en az birinin 1'i içermesi gerekir.) Ayrıca A_ω da çıkarma altında kapalıdır. Bunu kanıtlayalım. A_ω'dan iki eleman alalım, diyelim x ve y. Bu iki eleman A_ω'da olduğundan, herbiri A_n'lerden birindedir, ama ikisi birden aynı A_n'de olmayabilir, en azından bundan henüz emin değiliz (birazdan olacağız ama...) Diyelim,

$$x \in A_n \text{ ve } y \in A_m.$$

Şimdi ya $n \leq m$ ya da $m \leq n$. Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $n \leq m$ eşitsizliğini varsayabiliriz. Böylece,

$$x \in A_n \subseteq A_m$$

olur. Demek ki hem x, hem de y, A_m'deler. Ama A_m çıkarma altında kapalı. Buradan $x - y \in A_m$ çıkar. Ama şimdi, $A_m \subseteq A_\omega$ olduğundan, $x - y \in A_\omega$ buluruz. Böylece A_ω kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlamış olduk.

Demek ki bir sonraki aşamada A_ω kümesini alabiliriz. Bu küme A_n'lerin hepsinden daha büyük, ayrıca 1'i içeriyor ve çıkarma altında kapalı. Kaldığımız yerden A_0 yerine A_ω ile devam edelim. Eğer A_ω kümesi, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı olan maksimal bir kümeyse, o zaman işimiz bitti, istediğimizi bulduk. Öyle değilse, o zaman, A_ω'yı altküme olarak içeren (yani A_ω'nın üstkümesi olan) ama A_ω'dan daha fazla eleman içeren öte yandan 1'i içermeyen ve gene çıkarma altında kapalı bir küme var demektir. Bu kümeye

$A_{\omega+1}$ diyelim. Eğer $A_{\omega+1}$ kümesi 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, $A_{\omega+1}$'in, $A_{\omega+1}$'den daha büyük ve 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı bir üstkümesi var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+2}$ diyelim... Bunu böylece sürdürürüz... Eğer

$$A_\omega \subset A_{\omega+1} \subset A_{\omega+2} \subset \ldots \subset A_{\omega+n} \subset \ldots$$

zincirinin $A_{\omega+n}$ halkalarından hiçbiri 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir küme değilse, bunların bileşimi örneğin, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı ve yukarıdakilerin herbirinden daha büyük bir kümedir. Böyle bir kümeye $A_{2\omega}$ adını verelim. Eğer $A_{2\omega}$ kümesi 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, işlemi devam ettirebiliriz... Eğer belli bir aşamada, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir altkümeye rastlarsak o zaman çabalarımız amacına ulaşmış demektir, duralım. Ama eğer kümeleri hep 1'i içermeyecek ve çıkarma altında kapalı olacak biçimde büyütebiliyorsak, bir adım ileri gidelim. Hep ileri gidebileceğimizi biliyoruz.

$$A_{2\omega} \subset A_{2\omega+1} \subset A_{2\omega+2} \subset \ldots \subset A_{2\omega+n} \subset \ldots$$

Eğer sürekli başarısızlığa uğramışsak, bir sonraki aşamada bu kümelerin bileşimini içeren ama 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı herhangi bir küme alıp buna $A_{3\omega}$ diyelim ve yolumuza devam edelim...

Bir zaman sonra istediğimiz kümeye rastlayacak mıyız? Zor soru... Ayrıca "bir zaman sonra" ne demek?..

Bu çözüm yöntemini burada durdurup problemi bambaşka bir yolla çözelim.

Çözüm: Yukarıdaki yöntemi terkedelim, belli ki bir yere varamayacak. Aradığımız kümelerden birini ayan beyan yazacağım:

p herhangi bir asal sayı olsun.

$$M = \{pa/b\colon a,\, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p,\, b\text{'yi bölmüyor}\}$$

olsun. M çıkarma altında kapalıdır, bunu görmek kolay. Ayrıca M, 1'i de içermez; çünkü aksi takdirde, p'nin b'yi bölmediği $a,\, b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $1 = pa/b$ olur, buradan $pa = b$ ve p'nin b'yi böldüğü çıkar ki bunun böyle olmadığını biliyoruz... Demek ki $1 \notin M$.

Şimdi M'nin, $\mathbb{Q}$'nün bu iki özelliği olan maksimal bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. N, M'den daha büyük ve çıkarma altında kapalı herhangi bir kesirli sayılar kümesi olsun. 1'in N'de olduğunu kanıtlayacağız ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olacak.

Önce çıkarma altında kapalı kümelerin çok bilinen ve kolay kanıtlanan bir özelliğini verelim:

Önsav 27.1. *Eğer N çıkarma altında kapalıysa ve boşküme değilse, o zaman $0 \in N$ ve N toplama altında da kapalıdır. Ayrıca $-N \subseteq N$ olur.*

Kanıt: $N \neq \varnothing$ olduğundan, N'de en az bir eleman vardır. a ve b (birbirine eşit ya da değil) N'nin herhangi iki elemanı olsun. N çıkarma altında kapalı olduğundan, $0 = a - a \in N$, $-a = 0 - a \in N$ ve $a + b = a - (-b) \in N$ olur. Bunlar da istediğimizi kanıtlar. □

Sonuç 27.2. *N ve M, $\mathbb{Q}$'nün çıkarma altında kapalı iki altkümesi olsun. $M \subseteq N$ ve $x \in N$ ise o zaman $M + \mathbb{Z}x \subseteq N$ olur.* □

Şimdi biraz önce tanımladığımız,

$$M = \{pa/b \colon a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p,\ b\text{'yi bölmüyor}\}$$

kümesinin, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal kesirli sayı kümesi olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 27.3. *Yukarıda tanımlanan M kümesi, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı bir maksimal kesirli sayı kümesidir.*

Kanıt: N, M'nin çıkarma altında kapalı herhangi bir üstkümesi olsun. Diyelim, N'de olan ama M'de olmayan bir x kesirli sayısı var. a ve b tamsayıları için $x = a/b$ yazalım. a ve b'nin birbirine asal olduklarını varsayabiliriz. x, M'de olmadığından, p, a'yı bölmez. Demek ki a ve p birbirine asallar. Dolayısıyla $pu + av = 1$ eşitliğini sağlayan u ve v tamsayıları vardır [N2, Bézout önsavı]. Dolayısıyla,

$$pu + vbx = pu + vb(a/b) = pu + va = 1.$$

Ama $pu = pu/1 \in M$ ve $vbx \in \mathbb{Z}x$. Dolayısıyla,

$$1 = pu + vbx \in M + \mathbb{Z}x \subseteq N.$$

Böylece, M'nin özaltkümesi olduğu çıkarma altında kapalı her kesirli sayı kümesinin 1'i içermek zorunda olduğunu kanıtladık. Demek ki M, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı olan $\mathbb{Q}$'nün bir maksimal altkümesidir. □

M'yi bulmak için denediğimiz ilk yöntem başarıya ulaşmadı. İkinci yöntemde tepeden inme bir çözüm önerisinde bulunduk ve bu önerinin istediğimiz koşulları sağladığını gösterdik. Bir sonraki altaltbölümde bu probleme çok benzer bir problemi ele alacağız ama çözümü hiç de umduğumuz gibi olmayacak.

27.1.5 Çetin Bir Problem

Son olarak çetin bir problemi ele alacağız. Problemimiz bir önceki problemin benzeri olacak. Yalnız bu sefer $\mathbb{Q}$'nün değil $\mathbb{R}$'nin altkümeleriyle uğraşacağız.

$\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulmaya çalışacağız.

Yöntemimizi biliyorsunuz, eğer çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen bir küme maksimalse, duralım; değilse o kümeden bir büyüğü vardır. Şimdi o büyük kümeden hareket edelim. Bunu böylece sürdürelim. Eğer hiçbir zaman maksimal bir kümeye rastlamazsak, o zaman

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

diye bir dizi elde ederiz. Bu dizideki kümelerin her biri bir öncekinden daha büyüktür. Her biri çıkarma altında kapalıdır. Hiçbirinde 1 yoktur. Şimdi bu kümelerin bileşimini alalım. Bu bileşim de çıkarma altında kapalıdır ve 1'i içermez. Şimdi A_0'la yaptığımızı bu bileşimle yapalım. Ve bunu çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir kümeye rastlayana dek sürekli sürdürelim.

Bu yöntemle, böyle bir kümeye rastlama şansımız var mı? Böyle bir maksimal kümeye rastlayacağımız konusunda kimse bize bir güvence veremez.

Peki, bir önceki problemdeki gibi, çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir kümeyi -sanki gökten inmiş gibi- okurlara sunabilir miyiz? Sunamayız! Sadece biz değil, kimse sunamaz.

Böyle bir kümenin varlığı bir sonraki altbölümde söz edeceğimiz **Zorn Önsavı** kullanılarak kanıtlanabilir. Zorn Önsavı'nın kanıtı da Seçim Aksiyomu'nu gerektirir, Seçim Aksiyomu olmadan yapılamaz.

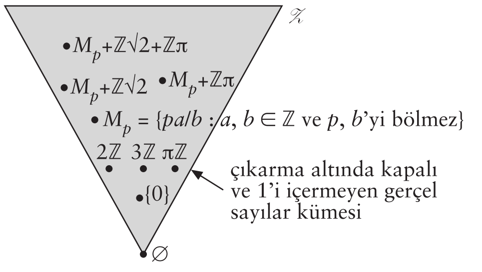
Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla kanıtlanan Zorn Önsavı sayesinde elle, akılla, emek vererek bulamayacağımız matematiksel nesnelerin varlığını kanıtlayabileceğiz. Zorn Önsavı'nı (daha doğrusu Seçim Aksiyomu'nu) matematikçilerin yardımına yetişen tanrısal bir el olarak algılayabilirsiniz: Seçim Aksiyomu sayesinde, olmasını çok arzuladığımız ama geleneksel yöntemlerle varlığı kanıtlanamayan kümeler var olacaklar.

27.2 Zorn Önsavı ve Birkaç Sonucu

27.2.1 Hazırlık

Okurun bir önceki altbölümü okuduğunu ve orada ortaya konulan sorunu anladığını varsayıyoruz. O altbölümde ele aldığımız ama pek başarılı olamadığımız kanıtlama yönteminden, yani bir kümenin belli koşullara sahip maksimal bir altkümesinin varlığını gösterme çabamızdan sözedeceğiz bu altbölümde.

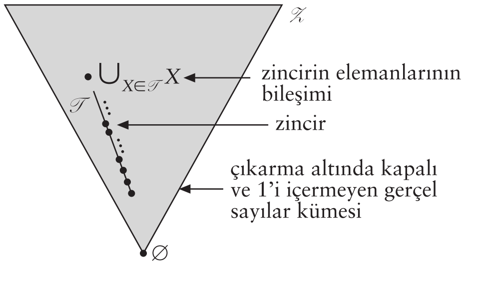
Geçen altbölümde, son örnekte, çıkarma altında kapalı olan ve 1'i içermeyen gerçel sayılar kümelerini ele almıştık. Bu altbölümün en azından başında $\mathbb{R}$'nin bu tür altkümelerine yoğunlaşalım. $\mathbb{R}$'nin bu tür altkümelerini eleman olarak içeren kümeye $\mathcal{Z}$ adını verelim. Uzunca bir süre bu örnekle uğraşacağız.



Yukarıdaki şekilde $\mathcal{Z}$'yi (temsilen tabii ki) çizdik. Altkümeleri aşağıya, üstkümeleri yukarıya yazdık, yani $\mathcal{Z}$'nin elemanlarının (altküme ilişkisine göre aşağıdan yukarıya doğru) sıralanmasına dikkat ettik: $A \subset B$ ise A'yı alta B'yi yukarıya yazdık. Dolayısıyla boşkümeyi en alta koyduk. Bunun bir üstünde $\mathcal{Z}$'nin tek sonlu sayıda elemanı olan $\{0\}$ kümesi var. Daha yukarıda 1 ve -1 dışındaki a sayılarının katlarından oluşan $a\mathbb{Z}$ kümeleri var. Resimde göstermedik ama bir üst katta $\sqrt{2}\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ gibi iki elemanla "gerilen" çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ kümeleri var. (Soru: $\sqrt{2}\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ kümesi $\mathcal{Z}$'de midir?) Resimde bir de M_p diye bir küme var, tanımına bakılırsa 1'i içermiyor ve çıkarma altında kapalı, yani $\mathcal{Z}$'de. Velhasıl, $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen her altkümesi $\mathcal{Z}$'nin bir elemanı ve bu altkümeler küçükten büyüğe doğru aşağıdan yukarıya sıralanmışlar.

$\mathcal{Z}$ kümesinin ***zincir özelliği*** adı verilen şu özelliği var:

Zincir Özelliği. *Eğer $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ ise ve her X, $Y \in \mathcal{T}$ için ya $X \subseteq Y$ ya da $Y \subseteq X$ ise, o zaman $\mathcal{T}$'nin elemanlarının bileşimi olan $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi de $\mathcal{Z}$'dedir.*



Bunun kanıtı oldukça kolay. Eğer $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi 1'i içerseydi, $\mathcal{T}$'nin bir X elemanı da 1'i içermek zorunda olurdu ki, bu imkânsız, çünkü $X \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$. Demek ki $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi 1'i içeremez. Şimdi $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlayalım. x ve y, $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinden iki eleman olsun. O zaman, $x \in X$ ve $y \in Y$ ilişkilerinin doğru olduğu $X, Y \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $\mathcal{T}$'nin zincir özelliğinden dolayı ya $X \subseteq Y$ ya da $Y \subseteq X$ olmalı. x ve y açısından durum simetrik olduğundan, $Y \subseteq X$ ilişkisini kabul etmede bir mahsur yok. O zaman $y \in Y \subseteq X$ ve hem x hem de y, X'in birer elemanı. Ama X çıkarma altında kapalı bir küme. Demek ki $x - y \in X$. Öte yandan, X elbette $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin bir altkümesi. Sonuç: $x-y \in \bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ ve $\bigcup_{X\in,\mathcal{T}} X$ kümesi çıkarma altında kapalı.

$\mathcal{Z}$'nin, "her $X, Y \in \mathcal{T}$ için ya $X \subseteq Y$ ya da $Y \subseteq X$" özelliğini sağlayan $\mathcal{T}$ altkümelerine ***zincir*** diyelim. O zaman yukarıdaki özellik şöyle okunur:

$\mathcal{Z}$'nin her zincirinin bileşimi gene $\mathcal{Z}$'dedir.

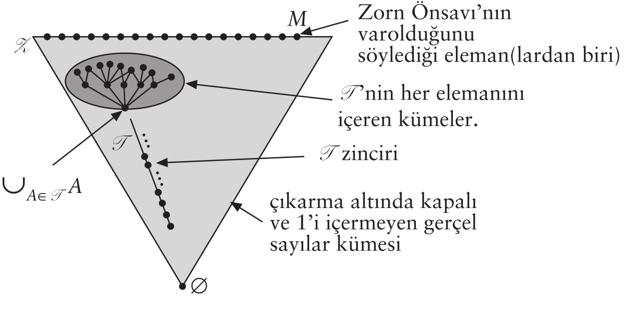
Geçen altbölümde bu özelliği, $\mathcal{Z}$'nin sayılabilir sonsuzlukta elemanı olan zincirleri için kullanmıştık. Birazdan yazacağımız Zorn Önsavı'nda $\mathcal{Z}$'nin sayılabilir ya da sayılamaz sonsuzluktaki tüm zincirlerini ele almamız gerekecek.

Bu arada, $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin kimileyin $\bigcup \mathcal{T}$ olarak yazıldığını da anımsatalım. Bu tıkız yazılım, simge sayısında hatırı sayılır bir indirim sağlar.

Birazdan ifade edeceğimiz Zorn Önsavı için "$\mathcal{Z}$'nin her zincirinin bileşimi gene $\mathcal{Z}$'dedir" özelliğinden daha zayıf bir özellik gerekir. İşte o özellik:

$\mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$'nin herhangi bir zinciriyse, $\mathcal{Z}$'de $\mathcal{T}$'nin her elemanından büyükeşit bir eleman vardır.

Yukarıdaki örnekte, eğer $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincirse, $\bigcup \mathcal{T} \in \mathcal{Z}$ olur ve $\mathcal{T}$'nin her elemanından büyükeşittir. (Eğer $A \subseteq B$ ise B'nin A'dan ***büyükeşit*** olduğunu söylüyoruz. Eğer $A \subset B$ ise B'nin A'dan ***büyük*** olduğunu söyleyeceğiz. Aslında, aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere, $\bigcup \mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$'de bulunan ve $\mathcal{T}$'nin her elemanından büyükeşit olan elemanların en küçüğüdür. Ama bu özelliğin bir önemi olmayacak bizim için.)

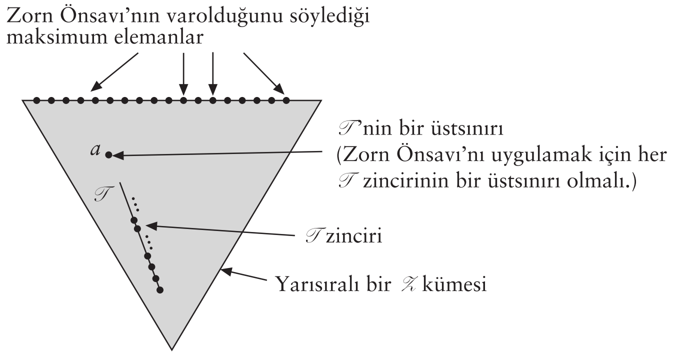


Birazdan tanıtacağımız Zorn Önsavı, eğer $\mathcal{Z}$ yukarıdaki son italik koşulu sağlıyorsa, o zaman $\mathcal{Z}$'nin en az bir maksimal elemanının olduğunu söyler. Yani, Zorn Önsavı, $\mathcal{Z}$ üzerine koşulan yukarıdaki italik koşul doğru olduğunda, öyle bir $M \in \mathcal{Z}$ vardır ki, der, $\mathcal{Z}$'nin hiçbir elemanı M'den daha büyük olamaz, en fazla M'ye eşit olabilir. Ama dikkat: Bu maksimal elemanlardan sonsuz sayıda olabilir (ki çoğu zaman da öyledir).

27.2.2 Zorn Önsavı

Artık Zorn Önsavı'nı anlayacak bilgi birikimine sahibiz:

Önsav 27.4 (Zorn Önsavı)**.** *$(\mathcal{Z}, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ ise ve $\mathcal{Z}$'nin her zincirinin (gene $\mathcal{Z}$'de) bir üstsınırı varsa o zaman $\mathcal{Z}$'nin maksimal bir elemanı vardır.*



Dikkat ederseniz, Zorn Önsavı, önceki altbölümde yapmak isteyip de yapamadığımızı herhangi bir zahmete girmeksizin yapıyor. Bir tür sihirbazlık, ya da Tanrı'nın eli diyebilirsiniz ("Al sana uğraşıp da bir türlü bulamadığın küme, evlat!").

Zorn Önsavı'nı bu kitapta kanıtlamayacağız. Dileyen okur (mesela) [N3]'e başvurabilir. Birkaç basit ama önemli örnek verelim.

İlk olarak, Zorn Önsavı'nı kullanarak, geçen altbölümde bulmaya çalışıp bulamadığımız, bu altbölümde de konu mankeni olarak kullandığımız kümenin varlığını kanıtlayalım:

Teorem 27.5. *Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesi vardır.*

Kanıt: Zorn Önsavı'nı kullanacağız.

$$\mathcal{Z} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ çıkarma altında kapalı ve } 1 \notin A\}$$

olsun. $\mathcal{Z}$'yi "altkümesi olmak" ilişkisiyle sıralayalım. Şimdi $(\mathcal{Z}, \subseteq)$ kısmi sıralamasının Zorn Önsavı'nın koşullarını sağladığını gösterelim. $\{0\} \in \mathcal{Z}$ olduğundan $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Şimdi ikinci koşulun sağlandığını kanıtlayalım. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincir olsun. $\bigcup \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$'nin her elemanının bir üstkümesi olduğundan, eğer $\bigcup \mathcal{T} \in \mathcal{Z}$ ise, $\bigcup \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$'nin bir üstsınırı olur. Dolayısıyla $\bigcup \mathcal{T} \in \mathcal{Z}$ önermesini kanıtlayalım. Bunun için iki şey kanıtlamalıyız:

1. $\bigcup \mathcal{T}$ çıkarma altında kapalı olmalı,
2. $\bigcup \mathcal{T}$, 1'i içermemeli.

Birinciden başlayalım. x, $y \in \bigcup\mathcal{T}$ olsun. Bu iki eleman $\mathcal{T}$'nin elemanlarından birindedir, ama ikisi birden aynı elemanda olmayabilir, en azından bundan henüz emin değiliz, birazdan olacağız ama... Diyelim, A, $B \in \mathcal{T}$ için, $x \in A$ ve $y \in B$. Ama $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan,

$$\text{ya } A \subseteq B \text{ ya da } B \subseteq A.$$

Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $A \subseteq B$ ilişkisini varsayabiliriz. Böylece,

$$x \in A \subseteq B$$

olur. Demek ki hem x hem de y, B'de. Ama B çıkarma altında kapalı. Buradan $x - y \in B$ çıkar. Ama şimdi, $B \subseteq \bigcup\mathcal{T}$ olduğundan, $x - y \in \bigcup\mathcal{T}$ olur. Böylece $\bigcup\mathcal{T}$ kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlamış olduk.

Şimdi, $1 \notin \bigcup\mathcal{T}$ önermesini kanıtlayalım. $\bigcup\mathcal{T}$ kümesinin elemanları $\mathcal{T}$'nin elemanlarının elemanlarıdır; dolayısıyla eğer 1, $\bigcup\mathcal{T}$ kümesinde olsaydı, 1, $\mathcal{T}$ kümesinin bir elemanının elemanı olurdu. Ama $\mathcal{T}$'nin hiçbir elemanı 1'i içermez. Dolayısıyla, 1 de $\bigcup\mathcal{T}$ kümesinde olamaz. □

Notlar

1. Zorn Önsavı'nda $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ koşulunu kanıtlamak genel olarak kolaydır ama gene de unutulmaması gerekir. Eğer $\mathcal{Z}$ boşkümeyse, $\mathcal{Z}$'nin maksimal bir eleman barındırma şansı yoktur!

2. Uygulamada çoğu zaman $\mathcal{Z}$ bir kümeler kümesidir ve kısmi sıralama da $\subseteq$ tarafından verilmiştir. Bu arada, $\mathcal{Z}$'de bir kısmi sıralama tanımlanmamışsa önsavı uygulayamayacağınıza dikkatinizi çekerim.

3. Uygulamada çoğu zaman $\mathcal{Z}$'nin bir $\mathcal{T}$ zincirinin en küçük üstsınırı bulunmaya çalışılır (daha kolaydır çünkü) ama böyle bir zorunluluk yoktur tabii.

4. Zorn Önsavı'nın var olduğunu söylediği maksimal elemanı görebiliyorsanız, yani açık açık tanımını yazabiliyorsanız ya da diğer tüm maksimal elemanlardan ayırt edebiliyorsanız, o zaman Zorn Önsavı'nı gereksiz yere kullanmışsınız demektir, maksimal elemanın varlığını Zorn Önsavı'nı kullanmadan da kanıtlayabilirdiniz.

Örneğin, Zorn Önsavı yardımıyla yukarıda varlığı kanıtlanan $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini açık açık yazamazsınız. Zorn Önsavı doğruysa böyle maksimal bir altküme vardır ama birini bile "işte budur" diye gösteremezsiniz. Öte yandan aynı problemi $\mathbb{Q}$ için sormuş ve Teorem 27.3'te açık açık bir çözümünü bulmuştuk. Demek ki $\mathbb{Q}$ için Zorn Önsavı gerekmiyor ama $\mathbb{R}$ için gerekiyor. İlginç...

5. Zorn Önsavı'nı gerekmedikçe kullanmamakta estetik ve matematiksel yarar vardır. Örneğin maksimal elemandan tek bir tane varsa, Zorn Önsavı'nı gereksiz yere kullanmış olmalısınız. Aynı teoremi bu sefer Zorn Önsavı kullanmadan kanıtlamaya çalışmalısınız.

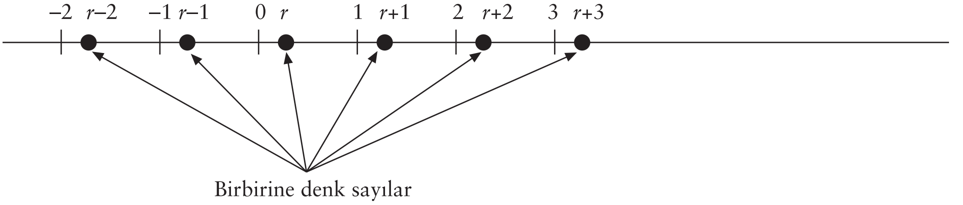
6. Zorn Önsavı'nın varsayımlarını sağlayan $\mathcal{Z}$ kümelerine talihsiz bir şekilde ***tümevarımsal*** küme denir. [N2]'de verdiğimiz tümevarımsal küme tanımıyla karıştırılmamalı.

Zorn Önsavı uygulaması olarak bir başka örnek verelim. Eğer iki r ve s gerçel sayısı arasındaki fark tamsayıysa bu iki gerçel sayıya birbirine ***denk*** diyelim ve bunu $r \equiv s$ olarak gösterelim. Demek ki,

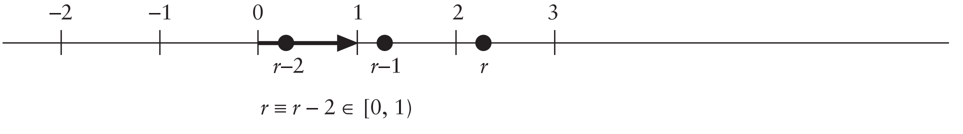
$$r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Z}.$$

Örneğin, π, $\pi+1$, $\pi+2$, $\pi-3$ sayıları birbirine denktir. π'ye denk gerçel sayılar belli bir $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $\pi + n$ olarak yazılan sayılardır.

Bu, daha genel olarak doğrudur, her r gerçel sayısı için, r'ye denk gerçel sayılar, belli bir $n \in \mathbb{Z}$ için $r + n$ olarak yazılan sayılardır.



Şimdi amacımız, öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulmak ki, her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \equiv x$ denkliğinin doğru olduğu bir ve bir tek $x \in X$ olsun. Böyle bir X kümesi kolaylıkla bulunabilir, örneğin $X = [0, 1)$ yarı açık aralığı istediğimiz özelliği sağlar.



Nitekim, eğer bir r gerçel sayısı verilmişse, r'ye yeterince 1 ekleyerek ya da r'den yeterince 1 çıkararak, $[0, 1)$ aralığında r'ye denk bir sayıya ulaşırız ve $[0, 1)$ aralığında r'ye denk başka bir sayı da yoktur.

Şu basit teoremi kanıtladık:

Teorem 27.6. *Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ vardır ki, her $r \in \mathbb{R}$ için $r - x$'in tamsayı olduğu bir ve bir tek $x \in X$ vardır. ($X = [0, 1)$ alınabilir.)* □

Yukarıdaki basit teoremde $\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{Q}$ koyarsak teorem çok daha çetin bir önermeye dönüşür:

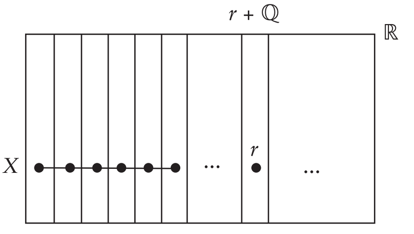
Teorem 27.7. *Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ vardır ki, her $r \in \mathbb{R}$ için $r - x$ sayısının kesirli bir sayı olduğu bir ve bir tek $x \in X$ vardır.*

Kanıt: $\mathbb{R}$ kümesi üzerine $\equiv$ ilişkisini,

$$r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Q}$$

olarak tanımlayalım. Daha önceki $\mathbb{Z}$ burada $\mathbb{Q}$ oldu. Ama bu sefer, $[0, 1)$ aralığı gibi açık seçik bir yanıtı yok bu sorunun.

Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulmak istiyoruz ki, her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \equiv x$ denkliğinin doğru olduğu bir ve bir tek $x \in X$ olsun.



Böyle bir X kümesi vardır. Hem de çok vardır. Ama biri bile elle bulunamaz, illa Zorn Önsavı gerekiyor!

X kümesinin varlığını hemen kanıtlayalım. Kanıtta (zorunlu olarak) Zorn Önsavı'nı kullanacağız. (Aslında aynı kanıt Seçim Aksiyomu kullanılarak çok daha basit bir biçimde yapılabilir ama vereceğimiz kanıt Zorn Önsavı'nın kullanıldığı kanıtların tipik özelliklerini taşıdığından, kanıtımızı önemsiyoruz.)

$$\mathcal{Z} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X\text{'in iki farklı elemanı birbirine denk olamaz}\}$$

olsun. Yani $X \in \mathcal{Z}$ ise, X'in iki farklı elemanının farkı $\mathbb{Q}$'de olamaz. $\mathcal{Z}$'yi "altküme olma" ilişkisiyle sıralandıralım. Bakalım $\mathcal{Z}$, Zorn Önsavı'nın koşullarını sağlıyor mu.

Boşküme ve tek elemanlı her sayı kümesi $\mathcal{Z}$'de olduğundan, $\mathcal{Z}$ boşküme değildir. Gözü örneğe doymayan okur, $\{1, \sqrt{2}\}$ kümesinin de $\mathcal{Z}$'de olduğunu kanıtlayabilir.

Şimdi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincir olsun. $\bigcup \mathcal{T}$'nin $\mathcal{Z}$'nin bir elemanı olduğunu kanıtlayacağız. x ve y, $\bigcup \mathcal{T}$ kümesinden iki değişik sayı olsun. Bu iki eleman $\mathcal{T}$'nin elemanlarından birinin elemanıdır. Diyelim, $A, B \in \mathcal{T}$ için, $x \in A$ ve $y \in B$. Ama $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan, ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$. Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $A \subseteq B$ ilişkisini varsayabiliriz. Böylece, $x \in A \subseteq B$ olur. Demek ki hem x hem de y, B'de. B, $\mathcal{Z}$'de olduğundan x ve y denk olamazlar.

Demek ki $\mathcal{Z}$, Zorn Önsavı'nın önkoşullarını sağlıyor. Dolayısıyla Zorn Önsavı'na göre $\mathcal{Z}$'nin bir maksimal elemanı olmalı. Bu elemana X diyelim. Şimdi bu X'in dilediğimiz X olduğunu kanıtlayacağız.

$r \in \mathbb{R}$ olsun. Diyelim r'nin denk olduğu bir $x \in X$ yok. O zaman r, X'te olamaz. Şimdi $X_1 = X \cup \{r\}$ olsun. X_1, X'ten daha büyük olduğundan,

X_1, $\mathcal{Z}$ kümesinde olamaz. Ama biz gene de X_1'in $\mathcal{Z}$'de olduğunu kanıtlama başarısında bulunacağız.

Eğer X_1, $\mathcal{Z}$'de olmasaydı, o zaman X_1'de $x \equiv y$ denkliğini sağlayan iki farklı x ve y elemanı olurdu.

$$X_1 = X \cup \{r\} \text{ ve } X \in \mathcal{Z}$$

olduğundan, hem x hem de y, X'te olamaz, demek ki ikisinden biri r'ye eşit olmalı. Diyelim $y = r$. Ama o zaman da $r \equiv x \in X$ olur, oysa biz böyle bir x'in olmadığını varsaymıştık. Bir çelişki. Demek ki böyle bir $r \in \mathbb{R}$ yok. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin her elemanı X'in bir elemanına denktir.

Eğer $\mathbb{R}$'nin bir elemanı X'in iki elemanına denk olsaydı, o zaman X'in o iki elemanı birbirine denk olurdu, dolayısıyla $X \in \mathcal{Z}$ olduğundan, bu iki eleman birbirine eşit olurdu. Demek ki $\mathbb{R}$'nin her elemanı X'in bir ve bir tek elemanına denktir. Kanıtımız bitmiştir. $\square$

Formüler

Formüllerin doğru olduğu koşullar ve serilerin kapsam alanı belirtilmemiştir. Sağdaki sayı sayfa numarasıdır. Aynı formül birkaç farklı yerde belirebilir.

Kaynakça

[A] Tom M. Apostol, **Mathematical Analysis, a modern approach to advanced calculus**, Addison-Wesley, 3. basım 1969.

[Ap2] Tom M. Apostol vd. (editör), **A Century of Calculus**, 2. cilt 1974, 2. basım 1992, sayfa 432-433.

[BB] Edwin Beckenbach ve Richard Bellman, **An Introduction to Inequalities**, Randon House – The L.W. Singer Company, New Mathematical Library 1961.

[Bo] Alain Bouvier, **Théorie Elementaire des Séries**, Hermann 1971.

[BR] G. Bouligand ve J. Rivaud, **L'Enseignement des Mathématiques Générales par les Problèmes**, Librarie Vuibert, 4. basım, 1968.

[Bra] Robert L. Brabenec, **Resources for the Study of Real Analysis, Classroom Resource Materials**, Mathematical Association of America 2006.

[Bro] T. J. I'a Bromwich, **An Introduction to the Theory of Infinite Series**, AMS Chelsea Publishing, 3. basım 1991 (1. basım 1908).

[Ch] G. Chilov, **Analyse Mathématique, fonctions d'une variable**, (Rusçadan Fransızcaya çeviren Vitali Kharine) 1973, Traduction française Editions Mir, 1991.

[CJ] Richard Courant ve Fritz John, **Introduction to Calculus and Analysis I**, 1981 basımı, Springer, Classics in Mathematics, 1991.

[Cv] Zdravko Cvetkovski, **Inequalities**, Springer 2012.

[GL] Sushir R. Ghorpode ve Balmohan V. Limaye, **A Course in Calculus and Real Analysis**, Springer, Undergraduate Text in Mathematics 2006.

[HLP] G. Hardy, J. E. Littlewood ve G. Pólya, **Inequalities**, Cambridge Mathematical Library. 1. basım 1934.

[Kn] Konrad Knopp, **Infinite Sequences and Series**, (çeviren F. Bagemihl), Dover Publications 1956.

[Ko] P.P. Korowkin, **Eşitsizlikler**, çeviri H. Şahinci, TMD 1962, 60 sayfa.

[La] Serge Lang, **Complex Analysis**, Addison-Wesley Publishing Company 1977.

[Lar] Loren C. Larson, **Problem Solving Through Problems**, Springer-Verlag 1983.

[Lee] Hojoo Lee, **Topics in Inequalities**. (Halen gelişmekte olan kitabı bulmak için internetten arayınız.)

[LW] R. Lyon ve M. Ward, *The limit for e*, American Mathematical Monthly 59 (1952), sayfa 102-103.

[MD] Matematik Dünyası dergisi `www.matematikdunyasi.org`, TMD 2007-2011.

[MOD] Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado, **Inequalities, a mathematical olympiad approach**, Birkhäuser 2009.

[N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 3. basım, Nesin Yayıncılık 2011.

[N2] Ali Nesin, **Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından muhtemelen 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: `http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2`.

[N3] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: `http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2`.

[N4] Ali Nesin, **Analiz II**, Nesin Yayıncılık tarafından 2014'te yayımlanacak.

[R1] Abraham Robinson, *Non-Standard Analysis*, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, ser. A, 64, sayfa 432-440.

[R] Abraham Robinson, **Non-Standard Analysis**, North-Holland Publishing Co. 1966. Yeni basım Princeton University Press 1995.

[SCY] D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov ve I.M. Yalom, **The USSR Olympiad Problem Book**, Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics, Dover Publications, Inc. 1994.

[Sp] Murray R. Spiegel, **Théorie et Applications de l'Analyse**, Serie Schaum, McGraw-Hill 1974.

[St] J. Michael Steele, **The Cauchy-Schwarz Master Class, an introduction to the art of mathematical inequalities**, MAA ve Cambridge University Press 2004.

[Ş] Erdoğan Şuhubi, **Fonksiyonel Analiz**, İTÜ Vakfı 2001.

[T1] Tosun Terzioğlu, **Fonksiyonel Analizin Yöntemleri**, Matematik Vakfı 1998.

[T2] Tosun Terzioğlu, **An Introduction to Real Analysis**, Matematik Vakfı 2000.

[T3] Tosun Terzioğlu, **Bir Analizcinin Defterinden Seçtikleri**, 2. basım, Nesin Yayıncılık 2014.

Dizin