Sayılar Kuramı

Bertrand Postülası ve Asalların Dağılımı

Haydar Göral* / *hgoral@gmail.com*
Barış Paksoy** / *barispaksoy@gmail.com*

1. Giriş

Verilen bir pozitif x reel sayısı için,

$$\pi(x) = |\{p \leq x : p \text{ asal sayı}\}|$$

olarak tanımlayalım[1]. Örnek olarak

$$\begin{aligned} \pi(20) &= |\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}| = 8, \\ \pi(100) &= 25, \\ \pi(1000) &= 168. \end{aligned}$$

Diğer bir deyişle $\pi(x)$ bize x'i aşmayan kaç tane asal sayı olduğunu söylemektedir. Asal sayaç fonksiyonu olarak adlandırılan $\pi(x)$ fonksiyonu bazen

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

olarak da yazılır.

Öklid $\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$ olduğunu göstermiştir, yani sonsuz çoklukta asal sayı vardır. Peki $\pi(x)$ ne hızla ıraksar? Gauss üç milyona kadar olan tüm asalları bularak, $\pi(x)$'in yaklaşık olarak

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

yani logaritmik integral kadar olduğunu iddia etmiştir[2]. Hemen hemen aynı zamanlarda Legendre $\pi(x)$'e iyi bir yaklaşımın $B = 1{,}08366$ olmak üzere

$$\frac{x}{\log x - B}$$

olduğunu iddia etmiştir. Daha sonra eğer $B(x)$ fonksiyonu,

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x - B(x)}$$

eşitliği doğru olacak biçimde tanımlanmışsa,

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = 1$$

eşitliği gösterilmiştir. Buradan da $\pi(x)$ için

$$\frac{x}{\log x - B}$$

iyi bir yaklaşımsa, $B = 1$ olması gerektiği anlaşılmaktadır.

Bu iddialardan yaklaşık 100 yıl sonra, 1896'da Jacques Hadamard ve Charles de la Vallée Poussin tarafından

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

olduğunu ortaya koyan Asal Sayı Teoremi ispatlanmıştır.

Bu yazıda Asal Sayı Teoremi'nin daha zayıf bir hali olan Chebyshev sınırlarını kanıtlayacağız ve burdan da Bertrand Postülası'nı, yani her $x \geq 2$ reel sayısı için x ile $2x$ arasında en az bir asal sayı olduğunu göstereceğiz.

Amatör bir matematikçi olan Joseph Bertrand, meşhur sanısını 1845'de grup teoriyle ilgili bir araştırmasında yayımladı. Postüla denmesinin sebebi de bu araştırmanın sonucunda ortaya çıkan permütasyon gruplarının sonuçlarını kullanarak sanıyı altı milyona kadar kontrol etmesindendir.

Chebyshev'e kadar asalları saymak için hep $\pi(x)$ fonksiyonuna bakılmıştır. İlk defa Chebyshev, Bertrand Postülası'ndan ilham alıp x ile $2x$ arasındaki asalları saymaya çalışmıştır. Buradan da $\pi(x)$'in ıraksama hızını bulup postülayı kanıtlamıştır.

2. Bertrand Postülası için Chebyshev'in Kanıtı

Chebyshev Fonksiyonları. Chebyshev $\pi(x)$ ile çalışmak yerine, ilk başta biraz garip gelen ama esasında doğal olduklarını konu ilerleyince anlayabileceğimiz

$$\theta(x) = \sum\nolimits_{p \leq x} \log p$$

ve

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^m, p \text{ bir asal sayı ve } m \geq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

1 Bu yazıda p daima bir asal sayıyı, x ise bir reel sayıyı gösterecektir.
2 Bu formülde ve yazının bundan sonraki kısmında $\log x$,
$$\log_e x = \ln x$$
yani doğal logaritma fonksiyonu alınacaktır.

* Lyon Üniversitesi doktora öğrencisi.
** Berlin Humboldt Üniversitesi lisans öğrencisi.

dipnot
ine gö-
iş xxx

$$\Psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$$

fonksiyonlarını tanımlamıştır. Bir başka deyişle $\psi(x)$ fonksiyonu hem asalları hem de asalların kuvvetlerini logaritma ağırlıklı saymaktadır.

Örneğin

$$\Lambda(2) = \Lambda(2^k) = \log 2,$$
$$\Lambda(27) = \log 3,$$
$$\Lambda(1) = \Lambda(6) = \Lambda(10) = 0$$

ve

$$\begin{aligned}\psi(10) &= \Lambda(2) + \Lambda(3) + \Lambda(4) + \Lambda(5) \\ &\quad + \Lambda(7) + \Lambda(8) + \Lambda(9) \\ &= \log 2 + \log 3 + \log 2 + \log 5 + \log 7 \\ &\quad + \log 2 + \log 3 \\ &= \log 2^3{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7.\end{aligned}$$

olur.

Önsav 1. *Her x için $\psi(x) = \sum_{k\ge1} \theta(x^{1/k})$ olur.*

Kanıt: Tanımdan ötürü

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \sum_{\substack{p^m\le x\\ m\ge1}} \log p \\ &= \sum_{p\le x} \log p + \sum_{p^2\le x} \log p + \cdots \\ &= \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{1/k})\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta(x^{1/k})$$

toplamı aslında sonlu bir toplamdır, çünkü eğer $x^{1/k} < 2$ ise $\theta(x^{1/k}) = 0$ olur. □

Önsav 2. *Her $x \ge 1$ için*

$$\psi(x) - \sqrt{x}\log x \le \theta(x) \le \psi(x)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Kanıt: Eşitsizliğin sağ tarafı tanımdan dolayı barizdir. Sol tarafını ispatlamak içinse

$$\begin{aligned}\psi(x) - \theta(x) &= \sum_{p^m\le x,\, m\ge2} \log p \\ &\le \sum_{p\le\sqrt{x}} \log p \sum_{m\le \frac{\log x}{\log p}} 1 \\ &= \sum_{p\le\sqrt{x}} \log p \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \\ &\le \sum_{p\le\sqrt{x}} \log p \frac{\log x}{\log p} \le \sqrt{x}\log x\end{aligned}$$

eşitsizliklerini görmek yeterlidir. □

Önsav 3. *Her $n \ge 1$ doğal sayısı için*

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Eşitlik $n = 1$ durumunda doğrudur. $n > 1$ ise asal çarpanlarına ayıralım ve

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

olarak yazalım. Asal kuvvet olmayan sayılarda $\Lambda(n)$ fonksiyonu 0 olduğu için

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \Lambda(d) &= \sum_{r=1}^{k} \sum_{m=1}^{\alpha_r} \Lambda(p_r^m) \\ &= \sum_{r=1}^{k} \sum_{m=1}^{\alpha_r} \log p_r \\ &= \sum_{r=1}^{k} \alpha_r \log p_r = \sum_{r=1}^{k} \log p_r^{\alpha_r} = \log n\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. □

Önsav 4. *Her $x \ge 1$ için*

$$\sum_{n\le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\le x} \log n = \log[x]!$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt: Önsav 3'ten dolayı $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ olduğunu biliyoruz. Demek ki (ikinci satısın başında $n = dq$ tanımını yaparak),

$$\begin{aligned}\log[x]! &= \log\left(\prod_{n\le x} n\right) = \sum_{n\le x} \log n \\ &= \sum_{n\le x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{\substack{d,q\\ dq\le x}} \Lambda(d) \\ &= \sum_{d\le x} \Lambda(d) \sum_{q\le x/d} 1 = \sum_{d\le x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{d}\right]\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \sum_{d|n} \Lambda(d) &= \sum_{d,q:\,dq\le x} \Lambda(d) = \sum_{q\le x} \sum_{d\le x/q} \Lambda(d) \\ &= \sum_{n\le x} \Psi(x/n)\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. □

Şimdi Abel Toplam Formülü'nü kanıtlayacağız. Bu da bize ayrık bir toplamı nasıl sürekli bir toplama yani integrale dönüştüreceğimizi söylüyor. Abel toplam formülü bu yazı için en önemli araç olacak ve yazının sonuna kadar kullanacağız.

Teorem 5 (Abel Toplam Formülü). $f : [y, x] \to \mathbb{R}$ *türevli ve türevi bu aralıkta sürekli bir fonksiyon ve $a(n)$ reellerde değer alan bir fonksiyon olsun.*

$$A(x) = \sum_{n\le x} a(n)$$

olsun. Ve eğer $x < 1$ ise $A(x) = 0$ olsun. O zaman

$$\sum_{y<n\le x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)$$

olur.

Kanıt:

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\le x} a(n)f(n) &= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} a(n)f(n) \\ &= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} (A(n) - A(n-1))f(n) \\ &= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} A(n)f(n) - \sum_{n=[y]+1}^{[x]} A(n-1)f(n) \\ &= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} A(n)f(n) - \sum_{n=[y]}^{[x]-1} A(n)f(n+1) \\ &= A([x])f([x]) - A([y])f([y]+1)\end{aligned}$$

Ama $[n, n+1)$ aralığında $A(t) = A(n)$ olduğundan, yukarıdaki hesapları devam ederek,

$$\begin{aligned}&= -\sum_{n=[y]+1}^{[x]-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)\,dt \\ &\quad + A([x])f([x]) - A([y])f([y]+1) \\ &= -\sum_{n=[y]+1}^{[x]-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)\,dt \\ &\quad + A([x])f([x]) - A([y])f([y]+1) \\ &= -\int_{[y]+1}^{[x]} A(t)f'(t)\,dt + A([y])f([y]+1) \\ &= -\int_y^x A(t)f'(t)\,dt + \int_y^{[y]+1} A(t)f'(t)\,dt \\ &\quad + \int_{[x]}^x A(t)f'(t)\,dt \\ &\quad + A([x])f([x]) - A([y])f([y]+1) \\ &= \int_y^x A(t)f'(t)\,dt + A([y])((f([y])+1) - f(y)) \\ &\quad + A([x])(f(x) - f([x])) \\ &\quad + A([x])f([x]) - A([y])f([y]+1) \\ &= A([x])f(x) - A([y])f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt \\ &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt\end{aligned}$$

buluruz. Teorem kanıtlanmıştır. □

$\{x\} = x - [x]$ olsun, yani x'in kesirli kısmı olarak tanımlayalım. Örnek vermek gerekirse $\{3{,}14\} = 0{,}14$ olur. Ayrıca her x için $\{x\} < 1$ olur.

Sonuç 6 (Euler Toplam Formülü). $f : [y, x] \to \mathbb{R}$ *türevli ve türevi bu aralıkta sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\le x} f(n) &= \int_y^x f(t)\,dt + \int_y^x \{t\}f'(t)\,dt \\ &\quad - \{x\}f(x) + \{y\}f(y)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Abel Toplam formülünde $a(n) = 1$ alırsak

$$\sum_{y<n\le x} f(n) = \sum_{y<n\le x} a(n)f(n)$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\le x} f(n) &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\,dt \\ &= [x]f(x) - [y]f(y) - \int_y^x [t]f'(t)\,dt \\ &= xf(x) - \{x\}f(x) - yf(y) + \{y\}f(y) \\ &\quad - \int_y^x tf'(t)\,dt + \int_y^x \{t\}f'(t)\,dt\end{aligned}$$

elde ederiz. Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\int_y^x tf'(t)\,dt = xf(x) - yf(y) - \int_y^x f(t)\,dt$$

olduğundan istediğimiz sonuca ulaşırız. □

Sonuç 7. *$|R(x)| \le 2/x$ eşitsizliğini sağlayan bir R fonksiyonu için her $x \ge 1$ için,*

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + R(x)$$

olur. Burada γ, Euler-Gamma sabiti olarak bilinen

$$\gamma = \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x} \frac{1}{n} - \log x\right)$$

sayısıdır.

Kanıt: $f(t) = 1/t$ olsun. $f'(t) = -1/t^2$ olduğu için Euler Toplam Formülü'nden

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \frac{1}{n} &= 1 + \sum_{1<n\le x} \frac{1}{n} \\ &= 1 + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt - \int_1^x \frac{\{x\}}{x} \\ &= \log x + 1 - \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt - \frac{\{x\}}{x} \\ &= \log x + \underbrace{\left(1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt\right)}_{c} + R(x)\end{aligned}$$

bulunur. Burada, $R(x)$'in ve c'nin ne olmaları gerektiği belli. Kolay bir hesapla,

$$|R(x)| \le \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{x} \le \frac{2}{x}$$

eşitsizliği,dolayısıyla $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$ eşitliği çıkar. Buradan da $c = \gamma$ sonucunu elde ederiz. □

Sonuç 8. *Her $x \ge 1$ için öyle bir S fonksiyonu vardır ki*

$$\sum_{n\le x} \log n = x\log x - x + S(x)$$

ve $|S(x)| \le \log x + 1$ olur.

Kanıt: Euler Toplam Formülü'nde $f(t) = \log t$ alırsak

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \log n &= \sum_{1<n\le x} \log n \\ &= \int_1^x \log t\,dt + \int_1^x \frac{\{t\}}{t}\,dt - \{x\}\log x\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\int_1^x \log t\,dt = x\log x - x + 1$$

olduğu için,münasip bir S fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} \log n &= x\log x - x\int_1^x \frac{\{t\}}{t}\,dt - \{x\}\log x + 1 \\ &= x\log x - x + S(x)\end{aligned}$$

ve

$$|S(x)| \le \left|\int_1^x \frac{\{t\}}{t}\,dt - \{x\}\log x\right| + 1 \le \log x + 1$$

olur. □

Sonuç 9. *$T(x) = \sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$ olsun. O zaman*

$$T(x) = x \log x - x + S(x)$$

ve

$$|S(x)| \le \log x + 1$$

olur.

Kanıt: Önsav 4 ve Sonuç 8'den çıkar. □

Eğer $(a_n)_n$ dizisi azalarak sıfıra giden bir diziyse

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

toplamı yakınsar ve

$$a_0 - a_1 \le s \le a_0 - a_1 + a_2 \le a_0$$

eşitsizlikleri sağlanır [MD-20xx-xx, sayfa xx].

Teorem 10 (Chebyshev). *Her $x \ge 350$ reel sayısı için $A_1 = 1{,}2$ ve $A_2 = 0{,}9$ olmak üzere*

$$A_2 x \le \psi(x) \le A_1 x$$

eşitsizlikleri doğrudur. Ayrıca $\psi(x) \le A_1 x$ eşitsizliği $x \ge 2$ için de doğrudur.

Yukarıdaki türde bir eşitsizliği kanıtlamak için genel yöntem

$$\sum_{n=1}^{N} a_n T\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \le x} b_n \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

türündeki $T(x)$'in bir kombinasyonuyla çalışmak olmuştur. Kanıtın çalışması için

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n} = 0 \text{ ve } b_n = (-1)^{n+1}$$

olması önemlidir. Chebyshev ilk olarak yukarıdaki türde bir eşitsizliği kanıtlamak için

$$T(x) - 2T\left(\frac{2}{x}\right)$$

kombinasyonuyla çalışmıştır. Bu kombinasyonla $A_2 = \log 2$ ve $A_1 = 2 \log 2$ bulmuştur. Burada

$$T(x) = x \log x - x + S(x)$$

olduğuna göre

$$T(x) - 2T\left(\frac{2}{x}\right) = (\log 2)x + B(x)$$

ve $|B(x)| \le 3 \log x + 3$ şeklindedir. Amaç ana terim olan $x\log x$'i yok eden bir kombinasyon bulmaktır ve

$$1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

olur. Bertrand Postülası'nı kanıtlamak için Chebyshev daha karışık bir kombinasyon olan xxx

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right)$$

ile çalışır ve yine

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = 0$$

olduğuna dikkat çekelim. Chebyshev'in amacı asal sayı teoremini kanıtlamaktır. Daha sonra Erdös ve Diamond Chebyshev'in bu yöntemle sonuç elde edemeyeceğini göstermiştir,çünkü Chebyshev'in çeşitli kombinasyonlarını bir araya getirerek A_1 ve A_2'yi 1'e yaklaştırmak ve asal sayı teoremini kanıtlamak için, Erdös ve Diamond asal sayı teoremini kullanmak zorunda kalmıştır. Asal sayı teoreminin ilk ispatı karmaşık analiz kullanmaktadır ve 1948'de Selberg ve Erdös sadece reel analiz kullanarak başka bir kanıt vermiştir; fakat bu kanıt ilk kanıta göre oldukça karışıktır. xxx

<u>cümle düşük ya da anlaşılmıyor. xxx</u>

Teorem 10'u kanıtlamak için önce bir önsava ihtiyacımız var.

Önsav 11.

$$\alpha(x) = T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right)$$

olsun. Bu durumda her $x \ge 2$ reel sayısı için

$$\alpha(x) < \psi(x) < \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \alpha(x)$$

olur.

<u>Bu paragraf zor anlaşılıyor xxx</u>

Kanıt: $T(x) = \sum_{n \le x} \Psi(x/n)$ olduğu için,

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

olarak yazılabilir (buradaki toplam esasında sonsuz değil, sonlu bir toplamdır). Ayrıca

$$\alpha(x) = \sum_{m \le x} \psi\left(\frac{x}{m}\right) - \sum_{m \le x} \psi\left(\frac{x}{2m}\right) - \sum_{m \le x} \psi\left(\frac{x}{3m}\right) - \sum_{m \le x} \psi\left(\frac{x}{5m}\right) + \sum_{m \le x} \psi\left(\frac{x}{30m}\right)$$

olduğundan,

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n,30) = 1 \\ -1 & (n,30)\text{'un tam iki farklı asal çarpanı varsa} \\ -1 & 30 \mid n \textit{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde ederiz.

Şimdi de 30'dan küçük veya eşit n sayıları için

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1,7,11,13,17,19,23,29 \textit{ ise} \\ -1 & n = 6,10,12,15,18,20,24,30 \textit{ ise} \\ 0 & n = 2,3,4,5,8,9,14,16,21,22,25,26,27,28 \textit{ ise} \end{cases}$$

olduğunu gözlemleyelim.

Ayrıca $a_n = a_{n+30}$, diğer bir deyişle katsayıların mod 30'da periyodik olduğuna da dikkat çekelim.

Şimdi de $1 = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$ dizisi $(a_n)_n$ dizisindeki 0 olmayan terimlerden oluşsun. Buradan da katsayıların periyodikliğini ve $a_{29} = a_{31} = 1$ ve $a_{30} = -1$ olduğunu kullanırsak, $a_{c_n} = (-1)^n$ olduğunu da görürüz. Dolayısıyla

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi\left(\frac{x}{c_n}\right)$$

olur. Ayrıca

$$\left(\psi\left(\frac{x}{c_n}\right)\right)_n$$

azalan bir dizi olduğundan

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{x}{c_0}\right) > \alpha(x) > \psi\left(\frac{x}{c_0}\right) - \psi\left(\frac{x}{c_1}\right) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right)$$

sonucunu elde ederiz. □

Teorem 10'un Kanıtı: Sonuç 9'dan dolayı

$$T(x) = x \log x - x + S(x)$$

ve $|S(x)| \le \log x + 1$ olduğunu biliyoruz. Demek ki

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x}{5}\right) + T\left(\frac{x}{30}\right) \\ &= (x\log x - x + S(x)) - \left(\frac{x}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} + S\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &\quad - \left(\frac{x}{3}\log\frac{x}{3} - \frac{x}{3} + S\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \left(\frac{x}{5}\log\frac{x}{5} - \frac{x}{5} + S\left(\frac{x}{5}\right)\right) \\ &\quad + \left(\frac{x}{30}\log\frac{x}{30} - \frac{x}{30} + S\left(\frac{x}{30}\right)\right) \\ &= x\frac{\log 2}{2} + x\frac{\log 3}{3} + x\frac{\log 5}{5} - x\frac{\log 30}{30} \\ &\qquad - x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} - \frac{x}{30} + B(x) \\ &= cx + B(x), c \\ &= \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 30}{30} = \frac{\log 2^{14} 3^9 5^5}{30} \\ &\approx 0{,}92129 \end{aligned}$$

ve $|B(x)| \le 5\log x + 1$ olur. Buradan öncelikle

$$|\alpha(x) - cx| \le 5 \log x + 1$$

sonucunu ve buna dayanarak

$$cx - 5\log x - 1 \le \alpha(x) \le cx + 5\log x + 1$$

sonucunu elde ederiz. Ayrıca $x > 3000$ için,

$$5 \log x + 1 \le 0{,}021x$$

olur. Buradan da $x > 3000$ için

$$0{,}9x \le \alpha(x) \le 0{,}943x$$

elde ederiz. Demek ki $x > 3000$ için $A_2 = 0{,}9$ alabiliriz. Ayrıca $[350, 3000]$ aralığı için de

$$0{,}9x \le \psi(x)$$

olduğu kontrol edilebilir. Demek ki eğer $x > 350$ ise.

$$0{,}9x \le \psi(x)$$

A_1 sabitini bulmak için tekrar Önsav 5'i kullanırsak $x > 3000$ için

$$\begin{aligned} \psi(x) &\le \sum_{k \ge 0} \left(\psi\left(\frac{x}{6^k}\right) - \psi\left(\frac{x}{6^{k+1}}\right)\right) \\ &\le \sum_{k \ge 0} \alpha\left(\frac{x}{6^k}\right) \le 0{,}943\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right)x \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca hesaplayarak $x \ge 2$ için

$$\psi(x) \le 1{,}2x$$

olduğu da görülebilir. □

Sonuç 12. *Her $x \ge 37$ için $0{,}73x \le \theta(x) \le 1{,}2x$ olur.*

Kanıt: Hemen

$$\theta(x) \le \psi(x) \le 1{,}2x$$

olduğunu görebiliriz. Diğer bir yandan

$$\theta(x) \ge \psi(x) - \sqrt{x} \log x$$

olduğunu biliyoruz. $x \ge 350$ için

$$\sqrt{x} \log x \le 0{,}15x$$

olduğu gösterilebilir. Demek ki

$$\theta(x) \ge (0{,}9 - 0{,}15)x = 0{,}75x \in [37, 350]$$

aralığında ise yine

$$\theta(x) \ge 0{,}73x$$

olduğu kontrol edilebilir. □

Sonuç 13. *Eğer $x \ge 37$ ise*

$$0{,}73\frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le 3{,}4\frac{x}{\log x}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Sonuç 12'den ötürü $x \ge 37$ ise

$$0{,}73x \le \theta(x)$$

olduğunu biliyoruz; fakat

$$\theta(x) \le \pi(x) \log x$$

olduğu için eşitsizliğin sol tarafını elde ederiz.

Ayrıca

$$(\pi(x) - \pi(\sqrt{x}))\log\sqrt{x} \le \theta(x) - \theta(\sqrt{x}) \le \theta(x) \le 1{,}2x$$

olduğunu biliyoruz. Demek ki $x \ge 37$ için

$$\begin{aligned} \pi(x) &\le 2{,}4\frac{x}{\log x} + \pi(\sqrt{x}) \\ &\le 2{,}4\frac{x}{\log x} + \sqrt{x} \le 3{,}4\frac{x}{\log x} \end{aligned}$$

olur, çünkü $x \ge 1$ için $\log x \le \sqrt{x}$ eşitsizliği geçerlidir. □

Sonuç 14 (Bertrand Postülası). *Her $x \ge 2$ için, x ile $2x$ arasında her zaman bir asal sayı bulunur.*

Kanıt: Eğer $x < 37$ ise 2, 3, 5, 7, 13, 23 ve 43 asalları işimizi görür. Bundan böyle $x \ge 37$ diyebiliriz. Sonuç 12'den ötürü

$$0{,}73x \le \theta(x) \le 1{,}2x$$

olduğunu biliyoruz. Demek ki

$$\theta(2x) \ge 1{,}46x.$$

Dolayısıyla

$$\theta(2x) - \theta(x) \ge 1{,}46x - 1{,}2x \ge 0{,}26x \ge \frac{26 \cdot 37}{100} \ge 6$$

olur. Demek ki $\theta(2x) - \theta(x) = 0$ olamazmış. Buradan da $(x, 2x)$ aralığında bir asal olduğu çıkar. □

Aynı zamanda bu aralıktaki asalların sayısının x ile birlikte sonsuza gittiğini de görebiliriz.

Sonuç 15. *Eğer $x > 37$ ise*

$$\pi(2x) - \pi(x) > \frac{0{,}26x}{\log 2x}$$

olur.

Kanıt: Eğer $x > 37$ ise

$$\theta(2x) - \theta(x) \geq 0{,}26x$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca tanımından ötürü

$$\begin{aligned}\theta(2x) - \theta(x) &= \sum_{x < p \leq 2x} \log p \\ &\leq (\pi(2x) - \pi(x)) \log 2x\end{aligned}$$

eşitsizliğini ve dolayısıyla istediğimiz sonucu elde ederiz. □

Sonuç 16. *Her $n \geq 13$ doğal sayısı için p_n n'inci asal sayıyı belirtmek üzere ve $c_1 = 5/17$ ve $c_2 = 200/73$ sabitleri için $c_1\, n \log n \leq p_n \leq c_2\, n \log n$ eşitsizlikleri doğrudur.*

Kanıt: İlk önce $n \geq 13$ için $p_n \geq 37$ olduğunu gözlemleyelim. Sonuç 13'ten ötürü her $x \geq 37$ için

$$\pi(x) \leq 3{,}4 \frac{x}{\log x}$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse $n \leq p_n$ olduğu için

$$n = \pi(p_n) \leq 3{,}4 \frac{p_n}{\log p_n} \leq 3{,}4 \frac{p_n}{\log n}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{3{,}4} n \log n = \frac{5}{17} n \log n \leq p_n$$

olur. Yine Sonuç 13'ten ötürü

$$0{,}73 \frac{x}{\log x} \leq \pi(x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan da

$$n = \pi(p_n) \geq 0{,}73 \frac{p_n}{\log n}$$

ve dolayısıyla

$$p_n \leq \frac{1}{0{,}73} n \log p_n = \frac{100}{73} n \log p_n$$

olur. Aynı zamanda $x \geq 3$ için

$$\frac{(\log x)^2}{x} \leq 0{,}73^2$$

ve dolayısıyla $(\log p_n)^2 \leq 0{,}73^2\, p_n$ eşitsizlikleri geçerlidir. Buradan da

$$p_n \leq \left(\frac{0{,}73\, p_n}{\log p_n}\right)^2 \leq \pi(p_n)^2 = n^2$$

olur. Yani $p_n \leq n^2$ ve dolayısıyla $\log p_n \leq 2 \log n$ olduğu için

$$p_n \leq \frac{200}{73} n \log n$$

olur. □

Not: Sonuç 12 ve Sonuç 13'teki sabitler yeterince büyük x'ler için 0,92 ve 1,11 ile değiştirilebilir, yani x yeterince büyükse $0{,}92x \leq \theta(x) \leq 1{,}11x$ ve benzer bir şekilde

$$0{,}92 \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq 1{,}11 \frac{x}{\log x}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Aslında Chebyshev'in kanıtından $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde yeterince büyük her x reel sayısı için

$$\left(x, \left(\frac{6}{5} + \varepsilon\right)x\right)$$

aralığında her zaman en az bir asal sayı içerdiği de gösterilebilir. Yani Bertrand Postülası'ndan daha kuvvetli bir sonuç gösterilebilir.

3 Bertrand Postülası için Ramanujan'ın Kanıtı

$$T(x) = \sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

olsun. O zaman

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \leq x} (-1)^{n+1} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

olur. Ayrıca

$$T(x) = x \log x - x + S(x)$$

ve $|S(x)| \leq \log x + 1$ olduğundan,

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = (\log 2)x + R(x)$$

ve $|R(x)| \leq 3 \log x + 3$ olur.

$$\sum_{n \leq x} (-1)^{n+1} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

işaret değiştiren bir seri olduğu ve ayrıca $(\psi(x/n))_n$ azalan bir dizi olduğu için,

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq x \log 2 + R(x) \leq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır. İlk olarak $\psi(x)$ sayısına üst sınır bulalım. Şayet $2^k > x$ veya başka bir deyişle

$$k > \frac{\log x}{\log 2} \text{ ise } \psi\left(\frac{x}{2^k}\right) = 0$$

olacağından

$$\begin{aligned}\psi(x) &\leq \sum_{k=0}^{[\log x/\log 2]} \left(\psi\left(\frac{x}{2^k}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) \\ &\leq (\log 2)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} + R_1(x) \\ &= (2 \log 2)x + R_1(x)\end{aligned}$$

pi sayısı neden symbol çıkmıyor? Courier yaptım oldu! xxx

pi sayısı neden symbol çıkmıyor? Courier yaptım oldu! xxx

ve

$$\begin{aligned}|R_1(x)| &\leq \frac{\log x}{\log 2} |R(x)| \leq (2 \log x) \cdot (3 \log x + 3) \\ &= 6 \log^2 x + 6 \log x.\end{aligned}$$

Şimdi eşitsizliğin diğer tarafını da kullanırsak;

$$\begin{aligned}\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) &\geq (\log 2)x + R(x) - \psi\left(\frac{x}{3}\right) \\ &\geq (\log 2)x - (3 \log x + 3) - \left(\frac{2 \log 2}{3}\right)x \\ &\qquad - (6 \log^2 x + 6 \log x) \\ &= \frac{\log 2}{3} x - (6 \log^2 x + 9 \log x + 3)\end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Şimdi de

$$\theta(x) = \psi(x) + K(x)$$

olarak yazarsak Önsav 2'den ötürü $K(x) \leq 0$ ve

$$|K(x)| \leq \sqrt{x} \log x$$

olduğunu biliyoruz. Demek ki

$$\begin{aligned}\theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right) &= \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + K(x) - K\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + K(x) \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{x} \log x \\ &\geq \frac{\log 2}{3} x - (\sqrt{x} \log x + 6 \log^2 x + 9 \log x + 3) \\ &= \left(\frac{\log 2}{3}\right)x - \alpha(x)\end{aligned}$$

olur. Eğer $x \geq 20.000$ ise $\alpha(x) \leq x/9$ olduğu gösterilebilir. Zira $\alpha(x)/x$ azalarak 0'a giden bir fonksiyondur. Demek ki $x \geq 20.000$ ise

$$\theta(x) - \theta\left(\frac{x}{2}\right) \geq \left(\frac{\log 2}{3} - \frac{1}{9}\right)x \geq \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)x = \frac{x}{18}$$

sağlanır. Bu da bize $x \geq 20000$ ise x ile $x/2$ arasında bir asal olduğunu söyler. Yani $x \geq 10.000$ ise x ile $2x$ arasında her zaman en az bir tane asal vardır. Eğer 10.000'den küçük sayılar için 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 157, 313, 619, 1237, 2473, 4943, 9883, 19763 asallarını alırsak Bertrand Postülasını kanıtlamış oluruz. □

Chebyshev ve Ramanujan'ın ispatını karşılaştıracak olursak temel fikir olarak ikisi de $T(x)$ ile çalışmış ve işaret değiştiren serilerden yararlanmıştır. Ramanujan'ın ispatında

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq (\log 2)x + R(x)$$

Chebyshev'inkinde ise yeterince büyük x'ler için

$$\alpha(x) \leq 0{,}9213x$$

olmak üzere

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leq \alpha(x)$$

eşitsizlikleri vardır. Ayrıca $\log 2 \approx 0{,}69$ ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{6}{5},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

olduğundan, Ramanujan'ın yöntemiyle x yeterince büyükse $\psi(x) \leq 1{,}39x$, Chebyshev'in yöntemiyle ise $\psi(x) \leq 1{,}11x$, yani daha iyi bir üst sınır elde ediyoruz. Demek ki alt ve üstsınır bulmada

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi\left(\frac{x}{c^n}\right)$$

ile çalışırken c_1 sayısının büyük olması önemlidir

Bertrand Postülası için Erdös'ün Kanıtı. Erdös'ün kanıtı temel olarak beş sonuçtan oluşmaktadır. Temel fikir eğer her $n \geq 2$ doğal sayısı için n ile $2n$ arasında hiç asal yoksa

$$\binom{2n}{n}$$

sayısının olması gerekenden küçük kalacağına dayanmaktadır.

Önsav 17. *Her $x \geq 2$ için*

$$\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Diyelim q, x'i aşmayan en büyük asal olsun. O vakit

$$\prod_{p \leq q} p = \prod_{p \leq x} p \text{ ve } 4^{q-1} \leq 4^{x-1}$$

olduğu aşikardır. O zaman

$$\prod_{p \leq q} p \leq 4^{q-1}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayım $q = 2$ iken sağlandığına göre q'yü tek asal olarak, yani $2k + 1$ formunda görebiliriz. Tümevarımdan ötürü

$$\prod_{p \leq k+1} p \leq 4^k$$

olur. Aynı zamanda

$$\prod_{k+1 < p \leq 2k+1} p \,\Big|\, \binom{2k+1}{k}$$

olduğu için bu çarpımın

$$\binom{2k+1}{k}$$

sayısından küçük olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\begin{aligned}2\binom{2k+1}{k} &= \binom{2k+1}{k} + \binom{2k+1}{2k+1} \\ &\leq \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} = 2^{2k+1}\end{aligned}$$

olduğundan
$$\binom{2k+1}{k} \le 2^{2k}$$
eşitsizliğini de gözlemleyelim. Dolayısıyla çarpımı ikiye ayırırsak
$$\prod_{p \le 2k+1} p = \prod_{p \le k+1} p \cdot \prod_{k+1 < p \le 2k+1} p$$
$$\le 4^k \binom{2k+1}{k} \le 4^k 2^{2k} = 4^{2k}$$
sonucunu elde ederiz ki, bu da istediğimiz sonuçtur.

Önsav 18. *$p > \sqrt{2}$n eşitsizliğini sağlayan asallar*
$$\binom{2n}{n}$$
sayısında en fazla bir kez bulunurlar.

Kanıt: Kolayca görülebileceği üzere $(2n)!$ sayısının içinde p tamtamına
$$\sum_{k=1} \left[\frac{2n}{p^k}\right]$$
kez geçer. Eğer $p > \sqrt{2n}$ ise, bu toplam
$$\left[\frac{2n}{p}\right]$$
sayısına eşittir. Aynı şekilde eğer $p > \sqrt{2n}$ ise $n!$ sayısının içinde de tam tamına
$$\left[\frac{n}{p}\right]$$
kez geçer.
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
olduğu için,
$$\binom{2n}{n}$$
ifadesinin içindeki $p > \sqrt{2n}$ eşitsizliğini sağlayan asalların sayısı
$$\left(\left[\frac{2n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p}\right]\right) < \frac{2n}{p} - 2\left(\frac{n}{p} - 1\right) = 2$$
olur, yani ya bir tane vardır yada hiç yoktur. □

Şimdi ispatlayacağımız Önsav Erdös'ün belirttiği gibi kanıt için anahtar bir rol oynamaktadır.

Önsav 19. *$2n/3 < p < n$ eşitsizliğini sağlayan p asalları*
$$\binom{2n}{n}$$
sayısını bölmez.

Kanıt: Bu eşitsizliği sağlayan asallar $(2n)!$ sayısının içinde açıkça tam iki tane vardırlar. Üç tane olamaz çünkü $3p > 2n$ olur. Kolayca görülebileceği üzere $n!$ içinde de tam bir tane vardırlar.
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
olduğu için bu asallar
$$\binom{2n}{n}$$
sayısını bölmezler. □

Önsav 20. *Her $n \ge 1$ doğal sayısı için*
$$\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n}$$
eşitsizliği sağlanır.

Kanıt: Aşağıdaki
$$\binom{2n}{n}$$
sayısını açarsak hemen
$$2n\binom{2n}{n} = 2n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$
$$= \frac{2}{1}\frac{3}{1}\frac{4}{2}\frac{5}{2}\frac{6}{3}\frac{7}{3}\cdots\frac{2n-2}{n-1}\frac{2n-1}{n-1}\frac{2n}{n}\frac{2n}{n} > 2^{2n}$$
olduğunu görebiliriz. □

Önsav 21. *Eğer*
$$p^m \,\Big\|\, \binom{2n}{n}$$
ise, $p^m \le 2n$ olmak zorundadır.

Kanıt: Biliyoruzki p asalı $n!$'in içinde
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$
kez geçer. Dolayısıyla
$$p^m \,\Big\|\, \binom{2n}{n}$$
olduğu için;
$$m = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$$
olur. Şimdi diyelim ki $p^m > 2n$ olsun. O zaman parantezin içi en fazla 1 olacağından
$$m = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right) \le m - 1$$
olur. Demek ki $p^m \le 2n$ olmak zorundadır. □

Bertrand Postülası'nın Kanıtı.
$$\binom{2n}{n}$$
sayısını asal çarpanlarına ayırırsak
$$\binom{2n}{n} = \prod_{\substack{p \le \sqrt{2n} \\ p^n \| \binom{2n}{n}}} p^a \cdot \prod_{\substack{\sqrt{2n} < p < \frac{2}{3}n \\ p^b \| \binom{2n}{n}}} p^b \cdot \prod_{\substack{\frac{2n}{3} < p \le n \\ p^c \| \binom{2n}{n}}} p^c \cdot \prod_{\substack{n < p \le 2n \\ p^d \| \binom{2n}{n}}} p^d$$

elde ederiz. Şimdi Önsav 18, 19 ve 21'den ötürü
$$\binom{2n}{n} \le \prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \le 2n} p$$
olur. Fakat Önsav 20'den ötürü bu çarpımda
$$\prod_{p \le \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \le 2n} p \ge \frac{4^n}{2n}$$
eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $\sqrt{(2n)}$ sayısını aşmayan en fazla $\sqrt{(2n)}$ tane asal olabileceği için
$$4^n \le 2n^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \le 2n} p$$
eşitsizliğini elde ederiz. Eğer Bertrand Postülası yanlışsa, n ile $2n$ arasında asal yok demektir. Diyelim ki Bertrand Postülası yanlış. Demek ki
$$\prod_{n < p \le 2n} p = 1$$
olur. O zaman Önsav 13'ten ötürü
$$4^n \le 2n^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} p \le 2n^{1+\sqrt{2n}} \cdot 4^{2n/3}$$
yani
$$4^{n/3} \le 2n^{1+\sqrt{2n}}$$
olur ki bu sonuç $n \ge 468$ için yanlıştır. Eğer $n < 468$ ise 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 157, 313, 619 asalları işimizi görür.

Mertens'in Asal Sayı Teoremleri (1874)

Daha önce her $x \ge 2$ için
$$\theta(x) \le \psi(x) \le 1{,}2x$$
olduğunu görmüştük. Ayrıca Önsav 4 ve Sonuç 9'dan
$$\sum_{d \le x} \Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right] = x\log x - x + S(x)$$
ve $|S(x)| \le \log x + 1$ olduğunu da biliyoruz. Chebyshev yukarıdaki sonuçları elde etmiştir. İlginç bir şekilde aşağıdaki teoremi kanıtlayan Mertens'dir.

Teorem 22 (Mertens, 1874). *Her $x \ge 3$ için:*

(i) $\displaystyle\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + c_1(x), |c_1(x)| \le 5$

(ii) $\displaystyle\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + c_2(x), |c_2(x)| \le 10$

(iii) $\displaystyle\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + c + c_3(x), |c_3(x)| \le \frac{20}{\log x}$

eşitlikleri geçerlidir. Burada c bir sabittir.

(iii) bize asalların sonsuzluğunun başka bir kanıtını daha verir ve toplamın ıraksadığı ilk defa Euler tarafından gösterilmiştir. Ayrıca burada $c_i(x)$'ler için bulduğumuz sınırlar en iyisi değil. Önemli olan ana terimler olan $\log x$ ve $\log\log x$ fonksiyonlarıdır. Sonuç 2'deki
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n \le x} \frac{1}{n} - \log x\right)$$
ifadesinin yakınsaması gibi (iii)'ten dolayı
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{p \le x} \frac{1}{p} - \log\log x\right)$$
ifadesi de yakınsar.

Teorem 22'nin Kanıtı:

(i)
$$x\log x - x + S(x) = \sum_{d \le x} \Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right]$$
$$= \sum_{d \le x} \Lambda(d)\left(\frac{x}{d} - \left\{\frac{x}{d}\right\}\right)$$
$$= x\sum_{d \le x} \frac{\Lambda(d)}{d} - \sum_{d \le x} \Lambda(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}$$
Demek ki
$$x\sum_{d \le x} \frac{\Lambda(d)}{d} = x\log x - x + S(x) + \sum_{d \le x} \Lambda(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}$$
ve
$$\sum_{d \le x} \Lambda(d)\left\{\frac{x}{d}\right\} \le \psi(x) \le 1{,}2x$$
olduğu için,
$$\left|-x + S(x) + \sum_{d \le x} \Lambda(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}\right| \le x + \log x + 1 + 1{,}2x$$
$$\le 5x$$
olur. Demek ki
$$x\sum_{d \le x} \frac{\Lambda(d)}{d} = x\log x + R(x)$$
ve $|R(x)| \le 5x$. Buradan da
$$\sum_{d \le x} \frac{\Lambda(d)}{d} = \log x + c_1(x)$$
ve $|c_1(x)| \le 5$ olduğu çıkar.

(ii)
$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \sum_{\substack{p^m \le x \\ m \ge 2}} \frac{\log p}{p^m}$$
$$\le \sum_{p \le x} \log p \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{p^m}$$
$$= \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p^2}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p^2\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p^2 - p}$$
$$\le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 - n}.$$

Ayrıca

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2-n} \le \frac{\log 2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 - \frac{n^2}{2}}$$
$$= \frac{\log 2}{2} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$
$$\le \frac{1}{2} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2}$$
$$= \frac{1}{2} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$
$$\le \frac{1}{2} + 2\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{2} + 2\left(\left.\frac{-2}{\sqrt{x}}\right|_1^{\infty}\right) = \frac{1}{2} + 2\cdot 2 \le 5$$

Demek ki $|c_2(x)| \le |c_1(x)| + 5 \le 10$.

(iii) a fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } n \text{ asalsa} \\ 0 & n \text{ asal değilse} \end{cases}.$$

(ii)'den dolayı

$$A(x) = \sum_{n \le x} \frac{a(n)\log n}{n} = \log x + c_2(x)$$

ve $|c_2(x)| \le 10$ olduğunu biliyoruz. $x < 2$ için

$$A(x) = 0$$

olduğuna da dikkat çekelim. Şimdi

$$f(t) = \frac{1}{\log t}$$

olsun. Buradan da

$$f'(t) = -\frac{1}{t\log^2 t}$$

olur.

Ayrıca

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \sum_{\frac{3}{2} < n \le x} \frac{a(n)\log n}{n} \cdot f(n)$$

olduğunu da gözlemleyelim.

O zaman Abel toplam formülünden dolayı:

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = A(x)\cdot f(x) + \int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{A(t)\,dt}{t\log^2 t}$$
$$= \frac{\log x + c_2(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + c_2(t)}{t\log^2 t}\,dt$$
$$= \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{c_2(t)\,dt}{t\log^2 t} + 1 + \frac{c_2(x)}{\log x}$$
$$= \log\log x \underbrace{- \log\log 2 + 1 + \int_2^{\infty} \frac{c_2(t)\,dt}{t\log^2 t}}$$
$$- \int_x^{\infty} \frac{c_2(t)\,dt}{t\log^2 t} + \frac{c_2(x)}{\log x}$$
$$= \log\log x + c + c_3(x)$$

olur. Dolayısıyla

$$c_3(x) = -\int_x^{\infty} \frac{c_2(t)\,dt}{t\log^2 t} + \frac{c_2(x)}{\log x}$$

olur. Şimdi de $c_3(x)$ fonksiyonuna sınır bulacağız. İlk olarak

$$\int_x^{\infty} \frac{dt}{t\log^2 t} = -\left.\frac{1}{\log t}\right|_x^{\infty} = \frac{1}{\log x}$$

olduğunu gözlemleyelim. Demek ki

$$|c_3(x)| \le 10\int_x^{\infty} \frac{dt}{t\log^2 t} + \frac{10}{\log x} = \frac{20}{\log x}.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 23. *Aşağıdaki üç önerme denktir*:

i. $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$. **ii.** $\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$.

iii. $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$.

Demek ki Asal Sayı Teoremini kanıtlamak için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

ya da denk olarak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Kanıt: İlk olarak (i) ile (ii)'nin denk olduğunu, daha sonra da (ii) ile (iii)'ün denk olduğunu göstereceğiz. Şimdi $\psi(x) = \theta(x) + K(x)$ yazarsak

$$K(x) \le \sqrt{x}\log x$$

olduğunu Önsav 2 sayesinde biliyoruz. Buradan da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{K(x)}{x} = 0$$

olduğu için (i) ile (ii)'nin denk olduğu görülür. Şimdi de

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ asalsa} \\ 0 & n \text{ asal değilse} \end{cases}$$

ve

$$f(t) = \frac{1}{\log t}$$

olsun. Abel Toplam formülünden,

$$\pi(x) = \sum_{\frac{3}{2} < n \le x} a(n)\log n \cdot \frac{1}{\log n}$$
$$= \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_{\frac{3}{2}}^{x} \frac{\theta(t)\,dt}{t\log^2 t}$$

olur. Demek ki

$$\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \frac{\theta(x)}{x} + \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)\,dt}{t\log^2 t}$$

olur çünkü $x < 2$ olduğunda $\theta(x) = 0$ olur. Buradan da (ii) ve (iii)'ün denk olduğunu göstermek için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\theta(t)\,dt}{t\log^2 t} = 0$$

olduğunu kanıtlamalıyız. Bunun için de

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,dt = 0$$

olduğunu kanıtlamak yeterlidir, çünkü $\theta(t)/t$ fonksiyonu Sonuç 6'dan dolayı sınırlı bir fonksiyondur. Şimdi $x > 4$ olduğunu varsayarsak

$$\int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,dt = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{\log^2 t}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\log^2 t}$$
$$\le \frac{\sqrt{x}-2}{\log^2 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\log^2 \sqrt{x}} \le \frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{4x}{\log^2 x}$$

olur. Demek ki

$$\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,dt \le \frac{\log x}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{\log^2 2} + \frac{4x}{\log^2 x}\right)$$
$$= \frac{\log x}{\sqrt{x}\log^2 2} + \frac{4}{\log x}$$

olduğu için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{1}{\log^2 t}\,dt = 0$$

elde ederiz.

Teorem 24 (Chebyshev).

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \le 1 \le \limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Demek ki limit varsa, 1'e eşit olmak zorundadır. Limit varsa 1'e eşit olmak zorundadır ama Asal Sayı Teoremi'nin zorluğu limitin varlığını göstermektir. İlk önce bir önsav kanıtlayalım.

Önsav 25. $x \ge 2$ *iken* $R(x)$ *sınırlı bir fonksiyon ve* $|R(x)| \le 6{,}2$ *olmak üzere*

$$\int_1^x \frac{\psi(t)\,dt}{t^2} = \log x + R(x)$$

esitligi saglanir.

Kanıt: Abel toplam formülünden

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)\,dt}{t^2}$$

olduğunu gözlemleyelim. Demek ki

$$\int_1^x \frac{\psi(t)\,dt}{t^2} = \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \frac{\psi(x)}{x}$$
$$= \log x + c_1(x) - \frac{\psi(x)}{x}$$

olduğunu görürüz. Ayrıca

$$\left|c_1(x) - \frac{\psi(x)}{x}\right| \le 5 + 1{,}2 = 6{,}2$$

olur. Demek ki

$$\int_1^x \frac{\psi(t)\,dt}{t^2} = \log x + R(x)$$

ve $x \ge 2$ iken $|R(x)| \le 6{,}2$ olur.

Teorem 24'ün Kanıtı: İlk önce

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \le 1$$

olduğunu görelim. Diyelim ki

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = A > 1$$

olsun. O zaman öyle $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \ge 2$ vardır ki $x \ge x_0$ için

$$\psi(x) \ge (1+\varepsilon)x$$

olur. Buradan da $x \ge x_0$ için,

$$\int_1^x \frac{\psi(t)\,dt}{t^2} = \int_1^{x_0} \frac{\psi(t)\,dt}{t^2} + \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)\,dt}{t^2}$$
$$\ge \int_1^{x_0} \frac{\psi(t)\,dt}{t^2} + \int_{x_0}^x \frac{(1+\varepsilon)\,dt}{t}$$
$$\ge (1+\varepsilon)\log x - (1+\varepsilon)\log x_0$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Önsav 25'ten ötürü

$$\int_1^x \frac{\psi(t)\,dt}{t^2} = \log x + R(x)$$

ve $R(x)$ sınırlı bir fonksiyon olduğu için de, bu eşitsizlik x yeterince büyük ise bozulur. Demek ki $A \le 1$ olmak zorundadır.

Benzer bir şekilde

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = B \ge 1$$

olduğu da gösterilebilir. □

Not:

$$0 \le \frac{\psi(x)}{x} \le 1{,}2$$

olduğu için liminf ve limsup vardır.

Riemann Zeta Fonksiyonu

Riemann 1859 yılında reel kısmı 1'den kesin büyük olan karmaşık s sayıları için

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

fonksiyonunu tanımlamış ve asal sayıları araştırmak için bu fonksiyonu çalışmak gerektiğini keşfetmiştir. Aynı yıl, ς fonksiyonunu tüm kompleks düzleme genişletmiş ve bu fonksiyonun sıfırlarıyla asal sayılar arasında bir ilişki bulmuştur. -2, -4, -6, ..., yani tüm negatif çift sayılarda ς sıfır değerini almaktadır. Bu sayılara ς fonksiyonunun bariz sıfırları denir. ς'nın bariz olmayan sıfırlarına, ς'nın kritik sıfırları denir ve kritik sıfırların reel kısmı 0 ile 1 arasında düşer.

Riemann Hipotezi. *ς'nın tüm kritik sıfırlarının reel kısmı* 1/2*'ye eşittir.*

Bu hipotezin asal sayılarla tam olarak şöyle bir ilişkisi vardır:

Riemann Hipotezi $\Leftrightarrow \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + R(x)$

ve bir c sabiti için

$$|R(x)| < c\sqrt{x}\log x$$

olur. Yani Riemann Hipotezi bize asal sayıları çok küçük bir hatayla sayabile477ceğimizi söyler. Bugüne kadar bilinen hata terimli asal sayı teoremleri Riemann Hipotezi'yle elde edilen sonuçtan çok uzaktır ve bilinen en iyi sonuç 1958'de I. M. Vinogradov ve N. M. Korobov tarafından bağımsızca kanıtlanan, c_1 ve c_2 pozitif sabitleri için

$$|R_1(x)| \le c_1 x \exp\left(-c_2 \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)$$

sağlanırken

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + R_1(x)$$

sonucudur. Aslında kritik kökler ile asal sayıların neden ilgili olduğunu veren Riemann-Von Mangoldt formülü vardır.

Riemann-Von Mangoldt Formülü. $x > 1$ asal güç olmayan bir sayı, ρ, ς'nın kritik sıfırı ve

$$\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} = \lim_{T\to\infty} \sum_{|\mathrm{Im}_\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho}$$

olmak üzere

$$\psi(x) = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

eşitliği sağlanır.

Ayrıca

$$-\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{2m}$$

olduğunu gözlemlersek bu toplam da ς'nın bariz sıfırları üzerinden bir toplamdır. Daha evvel kanıtladığımız gibi asal sayı teoremi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

ifadesine denktir. Buradan da eğer ρ ς'in kritik sıfırı ise $\mathrm{Re}(\rho) \ne 1$ olmaması gerektiği görülür. Aslında şöyle bir denklik vardır:

Asal Sayı Teoremi $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \varsigma(1 + it) \ne 0$.

Demek ki

Riemann Hipotezi $\Rightarrow$ Asal Sayı Teoremi.

Asal sayıların dağılımını çalışmak için genel yöntem

$$\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)$$

fonksiyonunu çalışmak olmuştur. Bu toplamı da çalışmak için $\Lambda(n)$'nin Dirichlet serisi olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\varsigma'(s)}{\varsigma(s)}$$

fonksiyonunun analitik özelliklerini çalışmak gerekmektedir. Buradan da yine asal sayıları çalışmak için $\varsigma(s)$'nin sıfırlarının önemli olduğunu görürüz.

Riemann Hipotezi doğruysa Gauss'un tahmin ettiği gibi, $\mathrm{Li}(x)$ fonksiyonu $\pi(x)$ için çok iyi bir yaklaşım verir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}} = 1$$

olmasına rağmen

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + R_2(x)$$

şeklinde yazarsak öyle pozitif c_3 ve c_4 sabitleri vardır ki, yeterince büyük x'ler için

$$c_3 \frac{x}{\log^2 x} \le R_2(x) \le c_4 \frac{x}{\log^2 x}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Yani $\pi(x)$ için $\mathrm{Li}(x)$ daha iyi bir yaklaşımdır. Gauss yeterince büyük x'ler için $\mathrm{Li}(x) > \pi(x)$ olduğunu iddia etmiştir. Daha sonra Littlewood $\pi(x)$ ve $\mathrm{Li}(x)$'in sonsuz kere yer değiştirdiğini göstermiştir. Kanıtı da ilginç bir şekilde Riemann Hipotezi doğruysa ve yanlışsa diye ikiye ayrılır. Ayrıca $\pi(x)$'in $\mathrm{Li}(x)$'i geçtiği ilk yerine $1{,}65 \times 10^{1165}$ sayısından küçük olduğu bilinmektedir. Dahası

$$1{,}53 \times 10^{1165} \text{ ve } 1{,}65 \times 10^{1165}$$

arasında en az 10^{500} ardışık n sayısı için

$$\pi(n) > \mathrm{Li}(n)$$

olduğu gösterilmiştir. Yine de $\pi(x)$ fonksiyonunun $\mathrm{Li}(x)$ fonksiyonunu ilk olarak nerede geçtiği tam olarak bilinmemektedir.

x	$p(x)$	$x/\log x$	$\mathrm{Li}(x)$
10^3	168	145	178
10^4	1.229	1.086	1.246
10^5	9.592	8.686	9.630
10^6	78.498	72.382	78.628
10^7	664.579	620.420	664.918
10^8	5.761.455	5.428.681	5.762.209
10^{13}	346.065.536.839	334.072.678.400	346.065.645.810

Asal Sayaç Fonksiyonu ve Yaklaşımları

x	$\mathrm{Li}(x) - p(x)$	$p(x) - x/\log x$	$p(x)/(x/\log x)$	$\mathrm{Li}(x)/p(x)$
10^3	10	23	1,159	1,05952
10^4	17	143	1,132	1,01383
10^5	38	906	1,104	1,00396
10^6	130	6.116	1,084	1,00166
10^7	339	44.159	1,071	1,00051
10^8	754	332.774	1,061	1,00014
10^{13}	108.971	11.992.858.439	1,036	1,000000315

Asal Sayaç Fonksiyonu ve Yaklaşımlarının Fark ve Oranları

Alıştırmalar

1. Her $n \ge 7$ sayısını birbirinden farklı asalların toplamı olarak yazılabileceğini gösteriniz.

2. $n > 1$ için

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

sayısının tam sayı olamayacağını ispatlayınız.

3. $n!$ sayısının tam kare olamayacağını gösteriniz.

4. Her $x \ge 4$ reel sayısı için

$$c_1\sqrt{x} \le \psi(x) - \theta(x) \le c_2\sqrt{x}$$

eşitsizliklerini sağlayan sabit c_1 ve c_2 sayılarının varlığını gösteriniz. Bu sayıları tam olarak bulabilir misiniz? $x \ge 4$ olması neden önemlidir?

5. Sonuç 10'dan

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

toplamının ıraksadığını bir kez daha gösteriniz.

6.

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{\sqrt{x} < p \le x} \frac{1}{p} = \log 2$$

olduğunu ispatlayınız.

7. Asal p ve q sayıları için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{p\cdot q \le x} \dfrac{1}{p\cdot q}}{(\log\log x)^2} = 1$$

olduğunu ispatlayınız. ♣

Kaynakça

1. Aigner, M. ve Ziegler, Günter M., (2009), **Kitap'tan Deliller**, İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları.

2. Apostol, T., (1976), **Introduction to Analytic Number Theory**, Springer-Verlag.

3. Davenport, H., (2000), **Multiplicative Number Theory**, Springer-Verlag.

4. Landau, E., (1909), **Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen**, B. G. Teubner Verlag.

5. Narkiewicz, W., (2000), **The Development of Prime Number Theory**, Springer-Verlag.