Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye. . .

Mehmet Sait Eroğlu

Kompleks Analiz II

Önerileriniz ve düzeltmeler için adres: `komplekskitap@gmail.com`

Yıldız'a, Ilgım'a ve Ilgar'a…

KOMPLEKS ANALİZ I

KOMPLEKS ANALİZ II

Önsöz

Kompleks Analiz I kitabının devamı olan bu kitap üç bölümden oluşmaktadır. Bunlar ilk kitabın devamı şeklinde numaralandırılmışlardır. Seçme Konular başlığını taşıyan ilk bölümdeki kısımların çoğu, tek başlarına birer kitap konusu olmuşlardır. Burada konulara kısaca değinilmiş ve okura kompleks analizin zenginliğinden bir şeyler sunulmuştur. Bu bölüm Cauchy, Weierstrass ve Riemann'ın izlerini taşır.

İzleyen iki bölüm, kısmen Weierstrass'ın, ağırlıklı olarak Riemann'ın izlerini taşır. İkinci bölüm, isminin de belirttiği gibi kompleks analizin geometriyle ve kısmen cebirle buluştuğu bölümdür. Bu bölümün en önemli teoremi, insanın inanmakta zorlandığı savıyla, kuşkusuz Riemann Dönüşüm Teoremidir.

Örtmeler ve Riemann Yüzeyleri başlığını taşıyan son bölümde ne varsa –lif uzayları, örtmeler, katmanlılar, Riemann yüzeyleri– ayrıca konumuz olmadığı için yer almayan Riemann Geometrisi, tüm bunların hepsi varlıklarını kompleks analizin bir problemine borçludur: Düzlemde bir dairede verilen bir holomorf fonksiyonu olabildiğince büyük bir bölgeye holomorf genişletme, kısaca analitik genişletme problemine borçludur. Bu bölümde kompleks analiz, cebir, geometri, katmanlar, cebirsel topoloji bir arada iş görür; matematiği seven birisi için böyle bir buluşma harika bir şeydir.

Bu kitapta kullandığımız kısaltmalar şunlardır: a ve b terimler olmak üzere $a := b$ ve $b =: a$ gösterimleri a teriminin tanım gereği b terimine eşit olduğunu belirtir. p ve q önermeler olmak üzere $p :\Longleftrightarrow q$ ve $q \Longleftrightarrow: p$ gösterimleri p önermesinin q önermesine tanım gereği denk olduğunu söyler; burada p önermesi q üzerinden tanımlanan yeni bir kavram içerir. $\overset{*}{\Longrightarrow}$, $\overset{*}{\Longleftrightarrow}$ ve $\overset{*}{=}$ gösterimlerinde $*$, eğer ayrıca tanımlanmamışsa söz konusu çıkarım, denklik ve eşitliğin gerekçesini belirtir. Ayrıca "dd.=diğer deyişle" ve Kompleks Analiz II kitabımız için "KA II" kısaltmaları kullanılmıştır.

İki kişiye minnet borcum var: Yalnızca kitaptaki tüm şekilleri çizmekle ve kitabın formatlanmasını sağlamakla kalmayıp, kitabı baştan sona titiz bir şekilde gözden geçiren, eleştiri ve önerileriyle büyük katkı sağlayan oğlum ve meslektaşım Kemal Ilgar ile, sağladığı huzurlu çalışma ortamı ve görevlerimin çoğunu üstlenerek bana kazandırdığı fazladan zaman için eşim Yıldız'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, hem kitaptaki düzeltmelere olan katkıları, hem de basım ve dağıtımındaki desteklerinden ötürü Ali Nesin'e ve Nesin Yayıncılık'a da ayrıca teşekkür ederim.

Mehmet Sait Eroğlu

6. Seçme Konular

6.1 Runge'nin Yaklaşım Teoremleri

$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olmak üzere KA I Kısım 3.4'te tanımladığımız $(\mathcal{C}(U), \rho)$ ve $(\mathcal{H}(U), \rho)$ metrik uzaylarını kısaca $\mathcal{C}(U)$ ve $\mathcal{H}(U)$ ile göstereceğiz. $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ koşulunu sağlayan bir K kompakt kümesi verildiğinde K'de sürekli $\mathbb{C}$-değerli fonksiyonlarının $\mathcal{C}(K)$ vektör uzayının $\|\cdot\|_K$ normu ile bir Banach uzayı olduğunu biliyoruz. $\mathcal{H}(K)$, $\mathcal{C}(K)$ uzayının bir altuzayıdır[1]. $\mathcal{C}(K)$ ve $\mathcal{H}(K)$'yi daima $\|\cdot\|_K$ normu ile, dolayısıyla $d_K(f, h) := \|f - h\|_K$ metriği ile alacağız.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(K)$ ve $f \in \mathcal{C}(K)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $g \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\|f - g\|_K < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, ki bu tam da $f \in \overline{\mathcal{A}}$ demektir, f fonksiyonuna *$\mathcal{A}$'nın ögeleriyle K'de düzgün yaklaşabiliriz* diyeceğiz. Şimdi $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{C}(K)$ olsun. $\mathcal{A}$ ailesi $\mathcal{B}$'de yoğun ve $\mathcal{B}$ ailesi ise $\mathcal{C}$'de yoğunsa $\mathcal{A}$ ailesi $\mathcal{C}$'de yoğundur, dd. $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$ ve $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{B}}$ ise $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Bu özellikten "**geçişlilik**" olarak söz edeceğiz: K'de $\mathcal{C}$'nin ögelerine $\mathcal{B}$'nin ögeleriyle, $\mathcal{B}$'nin ögelerine ise $\mathcal{A}$'nın ögeleriyle düzgün yaklaşabiliyorsak K'de $\mathcal{C}$'nin ögelerine $\mathcal{A}$'nın ögeleriyle de düzgün yaklaşabiliriz.

Uzlaşma: $X \subset Y$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ve $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(Y, \mathbb{C})$ olsun. $\mathcal{F}$'de herhangi bir biçimde bir topoloji tanımlanmış olsun. Bu topolojiye göre "$\mathcal{G}|X$, $\mathcal{F}$'de yoğundur" yerine yalın olarak "$\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$'de yoğundur" diyeceğiz.

Her $\emptyset \neq E \subset \mathbb{C}_\infty$ için kutup notaları E'de olan rasyonel fonksiyonların kümesini $\mathbb{C}_E(z)$ ile gösterelim. Eğer $E = \{a\}$ ise, $\mathbb{C}_{\{a\}}(z)$ yerine yalın olarak $\mathbb{C}_a(z)$ yazacağız. Bu durumda $\mathbb{C}_\infty(z)$ tam da $\mathbb{C}[z]$ polinomlarımızdır.

$K \subset \mathbb{C}$ bir kompakt altküme ve $E \cap K = \emptyset$ ise elbette $\mathbb{C}_E(z)|K \subset \mathcal{H}(K)$. Şimdi $\mathbb{C}$'de açık U kümesi, K kompakt kümesini içersin. Elbette $\mathcal{H}(U)|K \subset \mathcal{H}(K)$. Bu kısımda özellikle

(i) hangi koşullarda $\mathbb{C}[z]$ veya $\mathbb{C}_E(z)$'nin $\mathcal{H}(K)$'de yoğun,

(ii) hangi koşullarda $\mathcal{H}(U)$'nun $\mathcal{H}(K)$'de yoğun ve

[1] Anımsatalım: $f \in \mathcal{C}(K)$ olsun. $f \in \mathcal{H}(K) :\Longleftrightarrow \exists U \subset \mathbb{C}$ açık, $K \subset U$ ve $\exists F \in \mathcal{H}(U)$ öyle ki $f = F|K$.

(iii) hangi koşullarda $\mathbb{C}[z]$ veya $\mathbb{C}_E(z)$'nin $\mathcal{H}(U)$'da yoğun olduğunu araştıracağız. İki basit duruma gözatmak öğretici olacaktır.

$\mathbb{C}$'de bir $D = D_r(a)$ dairesi ve bir $f \in \mathcal{H}(D)$ verilsin. K ise $K \subset D$ koşulunu sağlayan herhangi bir kompakt küme olsun. f fonksiyonunun D dairesinde bir $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisi açılımı vardır. $p_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i(z-a)^i$ olmak üzere, her kompakt $K \subset D$ için $p_n|K \Longrightarrow f|K$ olduğunu biliyoruz. Diğer deyişle $\mathcal{H}(D)$ metrik uzayında $\lim p_n = f$ (KA I Önerme 3.4.4(ii)). Özetle polinomlar $\mathcal{H}(D)$ metrik uzayında yoğundur.

$D^* := D_r^*(a)$ bölgesi için de aynı durum söz konusu mudur, dd. polinomlar $\mathcal{H}(D^*)$ uzayında da yoğun mudur? D^*'da holomorf $f(z) = \frac{1}{z-a}$ fonksiyonunu ele alalım. Bir an için bir (p_n) polinom dizisinin D^*'da f'ye kompakt düzgün yakınsadığını varsayalım. Bu durumda, $0 < \sigma < r$ olmak üzere, $p_n|\underline{\kappa_{\sigma,a}} \Longrightarrow f|\underline{\kappa_{\sigma,a}}$ olduğundan

$$0 = \lim \int_{\kappa_{\sigma,a}} p_n = \int_{\kappa_{\sigma,a}} \lim p_n = \int_{\kappa_{\sigma,a}} f = \int_{\kappa_{\sigma,a}} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

çelişkisine ulaşırız. Dolayısıyla polinomlar $\mathcal{H}(D^*)$ uzayında yoğun değildirler. D ve D^* bölgeleri arasında şöyle bir topolojik fark vardır: D basit bağlantılı iken D^* basit bağlantılı değildir; bu farkın belirleyici olduğunu göreceğiz. Sorularımızın yanıtlarında topoloji önemli yer tutacaktır.

$a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ ve $U := H(a; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z-a| < r_2\}$ olsun. Her $h \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu U'da $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ gibi bir Laurent serisine açılabilir ve bu seri her kompakt $K \subset U$ kümesinde mutlak düzgün yakınsak olduğundan, $r_n(z) = \sum_{-n}^{n} a_k(z-a)^k$ olmak üzere $r_n \overset{K}{\Longrightarrow} h$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{H}(U)$ uzayında $\lim r_n = h$. Burada her bir r_n bir rasyonel fonksiyondur ve bunların kutup noktaları $E := \{a, \infty\}$ kümesindedir. $\mathbb{C}_\infty \setminus U$'nun iki bağlantılı bileşeni vardır: $\overline{D}_{r_1}(a)$ ve $\mathbb{C}_\infty \setminus D_{r_2}(a)$. Böylece E kümesi $\mathbb{C}_\infty \setminus U$'nun her bir bağlantılı bileşeninden en az bir nokta içerir ve $(r_n) \subset \mathbb{C}_E(z)$. Dolayısıyla tartışmamızdan $\mathbb{C}_E(z)$'nin $\mathcal{H}(U)$'da yoğun olduğunu görüyoruz. Bu basit gözlemler sorularımızın çözümünde bize yol gösterecektir.

Runge teoremlerinin ilginç yanı şudur: *Yerel* olarak verilmiş $f \in \mathcal{H}(K)$ fonksiyonlarına *global* olarak tanımlanmış polinomlar veya rasyonel fonksiyonlarla düzgün yaklaşmayı araştırırlar.

Teorem 6.1.1. *$K \subset \mathbb{C}$ kompakt ve $f \in \mathcal{H}(K)$ olsun. Kutup noktaları K'de olmayan bir (q_n) rasyonel fonksiyonlar dizisi $q_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olacak biçimde vardır. Kısaca, $\mathbb{C}_{K^c}(z)$ ailesi $\mathcal{H}(K)$'de yoğundur.*

Kanıt. $f \in \mathcal{H}(K)$ olsun. Tanım gereği f fonksiyonu, K'yi içeren bir açık U kümesinde, yine f ile göstermekte sakınca görmediğimiz, bir holomorf fonksiyonun K'ye kısıtlanışıdır. KA I Önerme 2.12.7'ye göre U'da sıfıra homolog Γ

uygun ızgara çevrimini $K \subset \mathrm{I}(\Gamma)$ olacak biçimde seçelim. Homolojik Cauchy Teoremi, KA I 2.11.7'den dolayı

$$\forall z \in K \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Her şeyden önce $\delta := d(K, \underline{\Gamma}) > 0$. Gerekiyorsa Γ'nın kenarlarını küçük parçalara ayırarak, $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ parçalanışını her bir γ_k bir $D_{r_k}(c_k)$ dairesine düşecek, $0 < r_k < \delta$ ve $\overline{D}_{r_k}(c_k) \subset U$ olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda elbette $K \cap \underline{\gamma_k} = \emptyset$ olur. Şimdi, her bir

$$f_k(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}dw, \tag{6.1}$$

$\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma_k}$'de bir holomorf fonksiyon tanımlar. f_k'nin $H(c_k; r_k, +\infty)$ halkasında Laurent açılımı

$$f_k(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{k,i}(z-c_k)^{-i}$$

olsun. Serimiz bu halkada kompakt düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, $q_{k,n}(z) := \sum_{i=1}^n a_{k,i}(z-c_k)^{-i}$ olmak üzere $(q_{k,n})_n$ dizisi K'de f_k'ye düzgün yakınsar. Böylece $q_n := \sum_{k=1}^m q_{k,n}$ olmak üzere $q_n \overset{K}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^m f_k = f$. Burada q_n'ler kutup noktaları $c_1, \ldots, c_m$ olan rasyonel fonksiyonlardır. □

Kanıtımızdaki c_k merkezlerini $\underline{\Gamma}$'da seçebileceğimiz gibi orada seçmeyebiliriz de! Aslında kutup noktaları seçiminde bayağı bir özgürlüğümüz var. Kutup notaları $\{\infty\}$'da olan rasyonel fonksiyonların tam da polinomlar olduğunu da anımsatalım. Ayrıca $q_{k,n}$ rasyonel fonksiyonlarımız $p_{k,n}(w) := \sum_{i=1}^n a_{k,i}w^i$ polinomundan w yerine $(z-c_k)^{-1}$ yazarak elde edilmiştir, dd. $q_{k,n}(z) = p_{k,n}(\frac{1}{z-c_k})$. Bu nedenle, $q_{k,n}$'nin $\frac{1}{z-c_k}$'ye göre bir polinom olduğunu söyleyeceğiz ve bunların kümesini $\mathbb{C}\left[\frac{1}{z-c_k}\right]$ ile gösterelim.

Devam etmeden önce (6.1.1)'in Riemann toplamları üzerinden ikinci bir kanıtını vereceğiz. (6.1) denkleminde γ_k gezisi eksenlere koşut ve K kompakt kümesinin dışında bir basit gezidir. Teoremimiz için bilmemiz gereken şey, böyle bir eşitlikle tanımlanmış f_k gibi bir fonksiyona, K'de düzgün biçimde, kutup noktaları K^c'de olan rasyonel fonksiyonlarla yaklaşabileceğimizin kanıtlanmasıdır. Önermemizi $\gamma \in \mathcal{G}^1$ gezileri için formüle edeceğiz[2].

Teorem 6.1.2. *$K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash K$, $\gamma \in \mathcal{G}^1$ ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ise,*

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

[2] $\mathcal{G}^1$, $\mathbb{C}$'deki *KA I*-sınıfından gezilerin ailesini göstermektedir(bkz. KA I, s.142).

fonksiyonuna, yalnızca $\underline{\gamma}$'da basit kutup noktaları olan rasyonel fonksiyonlarla K'de düzgün yaklaşabiliriz.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $g(z,t) := f(\gamma(t))\,(\gamma(t)-z)^{-1}$ fonksiyonu $K \times [0,1]$ kompakt kümesinde düzgün süreklidir. γ bir sabit gezi ise sav aşikardır. γ sabit gezi olmasın; o zaman $M := \|\gamma'\|_{[0,1]} > 0$ olmak üzere $0 < L(\gamma) \leq M$ olur. $[0,1]$ aralığının bir $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ parçalanışı, $i = 0,\ldots,n$ için

$$\forall (z,t) \in K \times [t_i, t_{i+1}] : \quad |g(z,t) - g(z,t_i)| < \frac{\pi\varepsilon}{M}$$

olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} R(z) &:= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1} g(z,t_k)(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(\gamma(t_k))}{\gamma(t_k) - z}(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(\gamma(t_k))}{\gamma(t_k) - z}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma'(t)dt \end{aligned}$$

yalnızca $\gamma(t_0),\ldots,\gamma(t_{n-1})$ noktalarında birinci dereceden kutup yerleri olan bir rasyonel fonksiyondur ve her $z \in K$ için

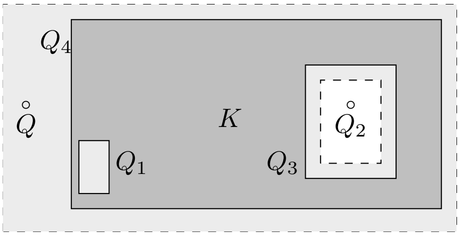
$$\begin{aligned} |F(z) - R(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_k}\left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_k))}{\gamma(t_k)-z}\right)\gamma'(t)dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\pi\varepsilon}{M}L(\gamma) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$w_k := \gamma(t_k)$ ve $a_k = \frac{1}{2\pi i} f(w_k)(w_{k+1} - w_k)$ olmak üzere

$$R(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{w_k - z} \tag{6.2}$$

olduğunu belirtelim. □

Bir sonraki önsavımıza ışık tutması bakımından Şekil 6.1'e bir gözatalım. $Q, Q_1, \ldots, Q_4$ kapalı dikdörtgenleri göstermek üzere $U := \mathring{Q}\setminus Q_2$ kümemiz $\mathbb{C}$'de açıktır (şekilde açık ve koyu gri kümelerin birleşimi). $K := Q_4\setminus(\mathring{Q}_1 \cup \mathring{Q}_3)$ kümesi ise (şekilde koyu gri küme) $\mathbb{C}$'de kompakttır ve $K \subset U$. Şimdi $U\setminus K$ kümemizin (şekilde açık gri küme) bağlantılı bileşenleri sırasıyla $\mathring{Q}_1, \mathring{Q}_3\setminus Q_2$ ve $\mathring{Q}\setminus Q_4$ bölgeleridir. B bu bileşenlerden herhangi biri ise, her zaman $U \cap \partial B \subset K$ olduğu kolayca görülür, ancak $\partial(\mathring{Q}_3\setminus Q_2) = \partial Q_3 \sqcup \partial Q_2 \not\subseteq K$ örneğinde olduğu gibi $\partial B \subset K$ olması gerekmez!



Şekil 6.1: $U := \mathring{Q}\backslash Q_2$, $K := Q_4\backslash(\mathring{Q}_1 \cup \mathring{Q}_3)$.

$\mathbb{C}\backslash K$'nin bağlantılı bileşenleri ise $\mathring{Q}_1, \mathring{Q}_3$ ve $\mathbb{C}\backslash Q_4$'tür ve bunların her birinin sınırı K'ye düşer. Bunlardan yalnızca $\mathring{Q}_1$ bileşeni U'ya düşer ve o bağlantılı bileşen aynı zamanda $U\backslash K$'nin de bağlantılı bileşenidir. Bu bileşen aynı zamanda sınırlı ve U'da göreceli kompakttır. Şimdi bu özelliklerin yalnıza örneğimizdeki U ve K için değil, her açık U ve $K \subset U$ olan her kompakt K için geçerli olduğunu kanıtlayacağız.

Önsav 6.1.3. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, K kompakt ve $K \subset U$ olsun.*

(i) $U\backslash K$'nin her bağlantılı B bileşeni için $U \cap \partial B \subset K$. Özellikle $U = \mathbb{C}$ ve B ise $\mathbb{C}\backslash K$'nin bir bağlantılı bileşeni ise $\partial B \subset K$.

(ii) $\mathbb{C}\backslash K$'nin bir B bağlantılı bileşeni için $B \subset U$ ise, B aynı zamanda $U\backslash K$'nin de bir bileşenidir. B ayrıca sınırlı ise $B \Subset U$.

Kanıt. (i) $U\backslash K$'nin B bağlantılı bileşeni verilsin. $a \in (U \cap \partial B)\backslash K$ olduğunu varsayalım. $U\backslash K$ açık olduğundan $\exists D_r(a) \subset U\backslash K$. Şimdi $a \in \partial B$ olduğundan $D_r(a) \cap B \neq \emptyset$, diğer yandan B ise $U\backslash K$'nin bir bağlantılı bileşeni olduğundan $D_r(a) \subset B$. Bu ise $a \in \partial B$ ile çelişir.

$U := \mathbb{C}$ alırsak $\partial B = \mathbb{C} \cap \partial B \subset K$ olur.

(ii) $\mathbb{C}\backslash K$'nin bir B bağlantılı bileşeni için $B \subset U$ olsun. Elbette $B \subset U\backslash K$ ve B bir bölge olduğundan $U\backslash K$'nin bir B_1 bağlantılı bileşenine düşer, yani $B \subset B_1$. Diğer yandan, B bölgesi $\mathbb{C}\backslash K$'de maksimal bağlantılı bölge olduğundan $B_1 \subset B$, dolayısıyla $B = B_1$ elde ederiz.

Ayrıca B'nin sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda $\overline{B} = B \cup \partial B$ kompakttır. (i) ile $\partial B \subset K$ olduğundan $\overline{B} \subset U \cup K = U$, dolayısıyla $B \Subset U$. □

Sonuç 6.1.4. *$U\backslash K$'nin B bağlantılı bileşeni U'da göreceli kompakt ise, her $f \in \mathcal{H}(U)$ için $\|f\|_B \leq \|f\|_K$.*

Kanıt. $B \Subset U$ ise $\partial B \subset U$, dolayısıyla 6.1.3(i) ile $\partial B \subset K$ olacağından, KA I Önerme 1.8.21 ile, her $f \in \mathcal{H}(U)$ için $\|f\|_B \leq \|f\|_{\partial B} \leq \|f\|_K$. □

Teorem 6.1.5 (Kutup Kaydırma)**.** *$K \subset \mathbb{C}$ bir kompakt küme ve $B \subset \mathbb{C}\backslash K$ bir bölge, B_∞ ise $\mathbb{C}\backslash K$'nin sınırsız bağlantılı bileşeni olsun.*

(i) *$a, b \in B$ olsun. Her $q \in \mathbb{C}_a(z)$ rasyonel fonksiyonuna K'de düzgün biçimde $p_n \in \mathbb{C}[w]$ olmak üzere $q_n(z) = p_n\left(\frac{1}{z-b}\right) \in \mathbb{C}_b(z)$ tipinde rasyonel fonksiyonlarla yaklaşabiliriz.*

(ii) *$a \in B_\infty$ ise, her $q \in \mathbb{C}_a(z)$ rasyonel fonksiyonuna K'de düzgün biçimde polinomlarla yaklaşabiliriz.*

(iii) *Tersine, $a \in \mathbb{C}\backslash K$ ve $\frac{1}{z-a}$ rasyonel fonksiyonuna K'de düzgün biçimde polinomlarla yaklaşabiliyorsak $a \in B_\infty$.*

Kanıt. (i) $a, b \in B$ olsun. B bir bölge olduğundan yol bağlantılıdır. B'de başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan bir γ gezisi seçelim. $\underline{\gamma}$ ve K ayrık kompakt kümeler olduğundan $\delta := d(\underline{\gamma}, K) > 0$. Şimdi γ'nın bir $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışı ve γ boyunca bir $D_r(a_0), \ldots, D_r(a_n)$ daireler zinciri şu koşullar sağlanacak biçimde seçilebilir: $r := \frac{1}{2}\delta$, γ_k'nın başlangıç noktası a_{k-1}, bitiş noktası a_k ve $1 \le k \le n$ için $\underline{\gamma_k} \subset D_r(a_{k-1}) \cap D_r(a_k)$. Geçişli özellikten dolayı, $0 \le k \le n-1$ için $q \in \mathbb{C}_{a_k}(z)$ rasyonel fonksiyonlarına K'de $q_m \in \mathbb{C}_{a_{k+1}}(z)$ rasyonel fonksiyonları ile düzgün yaklaşabileceğimizi kanıtlamak yeterlidir. Bunun içinse KA I Teorem 1.5.2'den dolayı, $(z - a_k)^{-1}$'e K'de düzgün biçimde $\mathbb{C}_{a_{k+1}}(z)$'deki rasyonel fonksiyonlara yaklaşabileceğimizi bilmek yeterlidir. Her $z \in K$ için

$$\left|\frac{a_k - a_{k+1}}{z - a_{k+1}}\right| < \frac{1}{2}$$

olduğundan, daha önce de kullandığımız yöntemle

$$\frac{1}{z - a_k} = \frac{1}{(z - a_{k+1})\left(1 - \frac{a_k - a_{k+1}}{z - a_{k+1}}\right)} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(a_k - a_{k+1})^\nu}{(z - a_{k+1})^{\nu+1}}$$

serisi K'de düzgün yakınsaktır. Bu serinin kısmi toplamları ise $\mathbb{C}_{a_{k+1}}(z)$'dedir. KA I Teorem 1.5.2 iki yerine KA I Teorem 3.3.1 Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'ni kullanarak yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{1}{(z - a_k)^m} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(\nu+1) \cdot \cdots \cdot (\nu+m)(a_k - a_{k+1})^\nu}{(m-1)!(z - a_{k+1})^{m+\nu+1}}$$

elde ederiz ve sağdaki seri K'de düzgün yakınsaktır. Ancak sağdaki serinin kısmi toplamları ise $\mathbb{C}_{a_{k+1}}(z)$'dedir. Dolayısıyla $q \in \mathbb{C}_{a_k}(z)$ rasyonel fonksiyonlarına $\mathbb{C}_{a_{k+1}}(z)$'deki rasyonel fonksiyonlar ile K'de düzgün yaklaşabiliriz.

(ii) $M := \sup_{z \in K} |z|$ olsun. $M < +\infty$ ve $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_{M+1}(0) \subset B_\infty$. Şimdi $b \in \mathbb{C}$'yi $|b| > M + 1$ olarak seçelim. $b \in B_\infty$. Ayrıca, $\left\|\frac{z}{b}\right\|_K \le \frac{M}{M+1} < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{z - b} = \frac{1}{b(\frac{z}{b} - 1)} = -\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n$$

serisi K'de düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $\frac{1}{z-b}$ fonksiyonuna polinomlarla K'de düzgün biçimde yaklaşabiliriz. Bundan ötürü, her $p(\frac{1}{z-b}) \in \mathbb{C}\left[\frac{1}{z-b}\right]$ rasyonel fonksiyonuna polinomlarla K'de düzgün yaklaşabiliriz. (i)'den dolayı her $q \in \mathbb{C}_a(z)$ fonksiyonuna K'de düzgün biçimde $q_n \in \mathbb{C}_b(z)$ fonksiyonları ile, q_n'lere ise az önce kanıtladığımıza göre K'de düzgün biçimde polinomlarla yaklaşabiliriz. Geçişli özellikten, her bir $q \in \mathbb{C}_a(z)$ fonksiyonuna K'de düzgün biçimde polinomlarla yaklaşabiliriz.

(iii) Şunu göstermek yeterlidir: a noktası $\mathbb{C}\backslash K$'nin bir sınırlı B bağlantılı bileşeninde ise, $\frac{1}{z-a}$ fonksiyonuna K'de düzgün biçimde polinomlarla yaklaşamayız. Şimdi B bölgesi $\mathbb{C}\backslash K$'nin bir sınırlı bileşeni, $a \in B$ ve (p_n) bir polinom dizisi olmak üzere $p_n \overset{K}{\Longrightarrow} \frac{1}{z-a}$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ sayısını, $d(\overline{B})$ sayısı $\overline{B}$'nin çapı olmak üzere, $\varepsilon d(\overline{B}) < \frac{1}{2}$ olacak biçimde seçelim. Bir n_0 doğal sayısı, her $n \geq n_0$ için $\left\|p_n - \frac{1}{z-a}\right\|_K < \varepsilon$ olacak biçimde vardır. (6.1.3)(i) ile $\partial B \subset K$ olduğundan, $n \geq n_0$ için

$$\forall z \in \partial B \quad |(z-a)p_n(z) - 1| < \varepsilon|z-a| \leq \varepsilon d(\overline{B}) < \frac{1}{2}$$

elde ederiz. Buradan KA I Önerme 1.8.21 ile, her $\forall z \in \overline{B}$ için

$$|(z-a)p_n(z) - 1| < \frac{1}{2}$$

olur. Bu eşitsizlik $a \in B$ olduğundan sağlanamaz! □

Teoremimizin (i) şıkkında, B'de a kutbunu b kutbuna kaydırdığımız, (ii)'de ise a kutbunu ∞'a kaydırdığımız söylemi kullanılır. Burada, ∞'da kutup noktası olan rasyonel fonksiyonlarımızın polinomlar olduğunu anımsatalım.

Teorem 6.1.6 (Kompakt Kümeler İçin Runge Teoremi)**.** $K \subset \mathbb{C}$ *kümesi kompakt olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) $\mathbb{C}[z]$ *polinomlarının* $\mathcal{H}(K)$*'de yoğun olması için gerek ve yeter koşul* $\mathbb{C}\backslash K$*'nin bağlantılı olmasıdır.*

(ii) $\mathbb{C}\backslash K$ *bağlantılı olmasın.* $S \subset \mathbb{C}$ *kümesinin,* $\mathbb{C}\backslash K$*'nin her sınırlı bağlantılı bileşeni ile arakesiti boş değilse,* $\mathbb{C}_S(z)$ *ailesi* $\mathcal{H}(K)$*'de yoğundur.*

Kanıt. Γ ızgara çevrimini (6.1.1)'in kanıtındaki gibi seçelim. $f \in \mathcal{H}(K)$ keyfi verilsin. (6.1.2) ve (6.2)'ye göre $w_1, \ldots, w_m \in \underline{\Gamma}$ ve $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$q(z) := \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{z - w_i} \tag{6.3}$$

tipinde fonksiyonlarla f fonksiyonuna K'de düzgün yaklaşabiliriz.

(i)(1) $\mathbb{C}\backslash K$ bağlantılı ise, $B_\infty = \mathbb{C}\backslash K$ ve $w_1, \ldots, w_m \in B_\infty$ olacağından, (6.1.5)(ii) Kutup Kaydırma teoremi ile, her bir $\frac{c_i}{z-w_i}$'ye K'de düzgün biçimde polinomlarla yaklaşabiliriz. Geçişlilik özelliğinden f'ye K'de polinomlarla yaklaşabiliriz.

(i)(2) $\mathbb{C}\backslash K$ bağlantılı değilse $\mathbb{C}\backslash K$'nin bir sınırlı B bağlantılı bileşeni vardır. $a \in B$ ve $h(z) = (z-a)^{-1}$ ise, $h \in \mathcal{H}(K)$ ve (6.1.5)(iii)'ten dolayı, polinomlarla h'ye K'de düzgün biçimde yaklaşamayız.

(ii) $\mathbb{C}\backslash K$ bağlantılı olmasın. B_∞ ile yine $\mathbb{C}\backslash K$'nin sınırsız bağlantılı bileşenini gösterelim. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (6.3)'teki q'yu $\|f-q\|_K \le \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçelim. $w_i \in B_\infty$ ise, bir $g_i \in \mathbb{C}[z]$ polinomunu $\|q-g_i\|_K < \frac{\varepsilon}{2m}$ olacak biçimde seçilebilir. $w_i \notin B_\infty$ ise, w_i noktası $\mathbb{C}\backslash K$'nin bir sınırlı B_i bağlantılı bileşenine düşer. Bu durumda w_i kutbunu bir $s_i \in S \cap B_i$ noktasına kaydırabiliriz ve bir $g_i \in \mathbb{C}\left[\frac{1}{z-s_i}\right]$ polinomunu $\|q-g_i\|_K < \frac{\varepsilon}{2m}$ olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda $g := \sum_{i=1}^m g_i \in \mathbb{C}_S(z)$ ve

$$\|f-g\|_K \le \|f-q\|_K + \|q-g\|_K < \varepsilon.$$

□

Teorem 6.1.7 (Runge Teoremi)**.** *$\mathbb{C}$'de U açık ve K kompakt kümesi $K \subset U$ olacak biçimde verilsinler. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) $U\backslash K$'nin U'da göreceli kompakt bağlantılı bileşeni yoktur.

(ii) $\mathbb{C}\backslash K$'nin her sınırlı bağlantılı bileşeni $\mathbb{C}\backslash U$'yu keser.

(iii) Her $f \in \mathcal{H}(K)$ için bir $(q_n) \subset \mathbb{C}_{U^c}(z)$ dizisi $\lim \|q_n - f\|_K = 0$ olacak biçimde vardır.

(iv) Her $f \in \mathcal{H}(K)$ için bir $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ dizisi $\lim \|f_n - f\|_K = 0$ olacak biçimde vardır.

(v) Her $a \in U\backslash K$ için bir $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu $|f(a)| > \|f\|_K$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii): Doğrudan Önsav 6.1.3(ii)'den çıkar.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Bu doğrudan Teorem 6.1.6(ii)'den çıkar.

(iii)$\Longrightarrow$(iv): Aşikar, çünkü $q_n \in \mathbb{C}_{U^c}(z)$ ise $q_n \in \mathcal{H}(U)$.

(iv)$\Longrightarrow$(i): $U\backslash K$'nin bir B bağlantılı bileşeni için $B \Subset U$ olduğunu varsayalım. $b \in B$ keyfi seçilsin, $\delta := \|z-b\|_K$ ve $f(z) := (z-b)^{-1}$ olsun. $\delta > 0$ ve $f \in \mathcal{H}(K)$ olduğundan, varsayımımızdan bir $g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu

$$\left\|(z-b)^{-1} - g(z)\right\|_K < \delta^{-1}, \text{ dolayısıyla } \|1-(z-b)g(z)\|_K < 1$$

olacak biçimde vardır. Sonuç 6.1.4'ten dolayı $\|1-(z-b)g(z)\|_B < 1$ olmalıdır; bu ise $b \in B$ olduğundan mümkün değildir.

Böylece (i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)$\Longleftrightarrow$(iv) kanıtlandı.

Şimdi (i)$\Longleftrightarrow$(v) olduğunu kanıtlayacağız.

(i)$\Longrightarrow$(v): $a \in U\backslash K$ keyfi verilsin. a noktası $U\backslash K$ kümesinin bağlantılı bileşenlerinden tam bir tanesinin içine düşer; bu bileşen B olsun. $B^* := B\backslash\{a\}$ dersek $U\backslash(K \cup \{a\})$ kümesi de açıktır ve bu kümenin bağlantılı bileşenleri $U\backslash K$'nin bağlantılı bileşenleri ile biri dışında örtüşür; tek değişiklik B'nin yerini B^* almıştır. Şimdi (i) geçerli olsun. Şimdiye kadar kanıtlanandan (iv) geçerlidir. (i), K yerine $K' := K \cup \{a\}$ aldığımızda da geçerli olduğundan (iv) de K' için geçerlidir.

$$g(a) := 1 \text{ ve } \forall z \in K \quad g(z) := 0$$

ile tanımlanan fonksiyonumuz $\mathcal{H}(K')$'dedir. (iv)'ten dolayı bir $h \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu $\|h - g\|_{K'} < \frac{1}{2}$ olacak biçimde vardır. Bu ise $|h(a)-1| < \frac{1}{2}$ ve $\|h\|_K < \frac{1}{2}$ demektir. Bunlardan $|h(a)| > \frac{1}{2} > \|h\|_K$, yani (v) çıkar.

(v)$\Longrightarrow$(i): Bunun için $\neg$(i) $\Longrightarrow$ $\neg$(v)'i kanıtlayacağız. $U\backslash K$'nin U'da göreceli kompakt B bileşeni bulunsun. Sonuç 6.1.4'ten dolayı, her $f \in \mathcal{H}(U)$ için $\|f\|_B \leq \|f\|_K$. Dolayısıyla hiç bir $a \in B$ için (v) sağlanamaz! $\square$

Bu teoremi $U = \mathbb{C}$ için uygularsak aşağıdaki sonuç çıkar:

Sonuç 6.1.8. $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt kümesi için aşağıdaki savlar denktirler:*

(i) Her $f \in \mathcal{H}(K)$ fonksiyonuna K'de polinomlarla düzgün biçimde yaklaşılabilir.

(ii) $\mathbb{C}\backslash K$ bağlantılıdır.

(iii) Her $a \in \mathbb{C}\backslash K$ için bir p polinomu $|p(a)| > \|f\|_K$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. Aslında (i)$\Longleftrightarrow$(ii) denkliğini 6.1.6'de göstermiştik. Önermemizi doğrudan Teorem 6.1.7'den şu iki bilgi yardımıyla kazanırız: (1) $\mathbb{C}\backslash K$'nin bağlantılı olması $\mathbb{C}\backslash K$'nin $\mathbb{C}$'de göreceli kompakt bağlantılı bileşeninin olmamasına denktir, (2) her $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonuna polinomlarla K'de düzgün biçimde yaklaşabiliriz. $\square$

Şimdi bir anlamda Teorem 6.1.6(ii)'nin tersini de kanıtlayabiliriz.

Sonuç 6.1.9. $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt,* $S \subset \mathbb{C}\backslash K$ *olsun. Her* $f \in \mathcal{H}(K)$ *fonksiyonuna* $\mathbb{C}_S(z)$*'deki fonksiyonlarla* K*'de düzgün biçimde yaklaşabiliyorsak* S *kümesi* $\mathbb{C}\backslash K$*'nin her sınırlı bağlantılı bileşenini keser.*

Kanıt. $\mathbb{C}\backslash K$'nin $B \cap S \neq \emptyset$ koşulun sağlayan her sınırlı bağlantılı B bileşeni için $B \cap S$ arakesitinden bir tek nokta seçerek S'nin bir T altkümesini oluşturalım. Kutup Kaydırma teoreminden dolayı, her $f \in \mathcal{H}(K)$ fonksiyonuna $\mathbb{C}_T(z)$'deki fonksiyonlarla K'de düzgün biçimde yaklaşabiliriz. Bu durumda $U := \mathbb{C}\backslash T$ bir açık kümedir ve $K \subset U$. $\mathbb{C}_T(z) \subset \mathcal{H}(U)$ olduğundan Teorem 6.1.7(iv) geçerlidir. Dolayısıyla aynı teoremin (ii)'si geçerlidir. Öyleyse $\mathbb{C}\backslash K$'nin her sınırlı bileşeni $T = \mathbb{C}\backslash U$'yu keser, böylece S'yi de keser. $\square$

Teorem 6.1.10 (Açık Kümeler İçin Runge Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık olsun.*

(i) Polinomların $\mathcal{H}(U)$'da yoğun olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{C}\backslash U$'nun sınırlı bağlantılı bileşeninin olmamasıdır.

(ii) $\mathbb{C}\backslash U$ bağlantılı olmasın ve $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $\overline{S}$ kümesinin, $\mathbb{C}\backslash U$'nun hiçbir sınırlı bağlantılı bileşeni ile arakesiti boş olmasın. Bu durumda $\mathbb{C}_S(z)$ ailesi $\mathcal{H}(U)$'da yoğundur.

Kanıt. U'yu tüketen bir (K_n) kompakt kümeler dizisini KA I Önerme 5.2.33'te olduğu gibi seçelim. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $U = \bigcup K_n$ ve $\mathbb{C}\backslash K_n$'nin her sınırlı bağlantılı bileşeni $\mathbb{C}\backslash U$'nun bir sınırlı bağlantılı bileşenini içerir. K kompakt ve $K \subset U$ ise, her $n \geq n_0$ için $K \subset K_n$ olacak biçimde bir n_0 vardır.

Şimdi bir $\mathcal{A}$ fonksiyon ailesinin $\mathcal{H}(U)$'da yoğun olduğunu göstermek istiyorsak $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinde $\rho(f, g) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $g \in \mathcal{A}$'nın varlığını kanıtlamalıyız. f ve ε verilsinler ve $K \subset U$ kompakt kümesi ve $\delta > 0$ sayısı KA I Önerme 3.4.3(i)'deki gibi seçilsinler. Bu durumda $\|f - g\|_K < \delta$ olacak biçimde bir g bulmak yeterlidir.

(i)(1) $\mathbb{C}\backslash U$'nun sınırlı bağlantılı bileşeni olmasın. $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin; K ve $\delta > 0$ yukarıdaki gibi seçilsinler. n doğal sayısını $K \subset K_n$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\mathbb{C}\backslash K_n$'nin de bir sınırlı bağlantılı bileşeni yoktur; böylelikle (6.1.6)'dan dolayı polinomlar $\mathcal{H}(K_n)$'de yoğundur. Dolayısıyla bir g polinomu $\|f - g\|_K \leq \|f - g\|_{K_n} < \delta$ olacak biçimde vardır.

(i)(2) $\mathbb{C}\backslash U$'nun bir B sınırlı bağlantılı bileşeni olsun. $a \in B$ ve $f(z) := (z - a)^{-1}$ olsun. Elbette $f \in \mathcal{H}(U)$. f'nin $\mathcal{H}(U)$'da polinomların limiti olamayacağı tıpkı (6.1.5)(iii) gibi kanıtlanır.

(ii) $f, \varepsilon, K, \delta$ ve K_n'ler (i)(1)'deki gibi olsunlar. $\mathbb{C}\backslash K_n$'nin bir B bağlantılı sınırlı bileşeni varsa bu, $\mathbb{C}\backslash U$'nun bir C sınırlı bağlantılı bileşenini içerir. Koşulumuzdan ötürü $\overline{S} \cap C \neq \emptyset$, dolayısıyla $\overline{S} \cap B \neq \emptyset$, ve B açık olduğundan ise $S \cap B \neq \emptyset$ olur. Böylelikle S'nin $\mathbb{C}\backslash K_n$'nin her sınırlı bağlantılı bileşeni ile arakesiti boştan farklı olur. Teorem 6.1.6(ii)'den dolayı $\mathbb{C}_S(z)$ ailesi $\mathcal{H}(K_n)$'de yoğundur. Dolayısıyla bir $g \in \mathbb{C}_S(z)$ için $\|f - g\|_K \leq \|f - g\|_{K_n} < \delta$. □

Sonuç 6.1.11. *$U_1 \subset U_2 \subset \mathbb{C}$ ve U_1, U_2 kümeleri açık olsunlar. $\mathbb{C}\backslash U_1$'in her bağlantılı bileşeni $\mathbb{C}\backslash U_2$'yi kesiyorsa, $\mathcal{H}(U_2)$ ailesi $\mathcal{H}(U_1)$'de yoğundur.*

Kanıt. $\mathbb{C}\backslash U_1$'in her bir bağlantılı bileşeninden bir nokta seçerek E kümesini oluşturalım. Teoremimizden $\mathbb{C}_E(z)$, $\mathcal{H}(U_1)$'de yoğundur. Her bir $a \in E$ noktasını, kendisini içeren bileşende bir $a' \in \mathbb{C}\backslash U_2$ noktasına bağlayalım ve böylece E' kümesini oluşturalım. Teorem 6.1.5'ten dolayı $\mathbb{C}_{E'}(z)$, $\mathcal{H}(U_1)$'de yoğundur. Sonuçta, $\mathbb{C}_{E'}(z)|U_2 \subset \mathcal{H}(U_2)$ olduğundan $\mathcal{H}(U_2)$, $\mathcal{H}(U_1)$'de yoğundur. □

Şimdi şu soruyu soralım: $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ise, hangi $f : K \to \mathbb{C}$ fonksiyonları için $p_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olacak biçimde (p_n) polinom dizileri vardır? Böyle bir f için zorunlu olarak $f \in \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{H}(\mathring{K})$ olur. Aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem (Mergelyan). *$K \subset \mathbb{C}$ kompakt ve $\mathbb{C} \backslash K$ bağlantılı olsun. Her $f \in \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{H}(\mathring{K})$ fonksiyonu için bir (p_n) polinom dizisi $p_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olacak biçimde vardır (bkz. [30]).*

Örnek 6.1.12. Runge teoremlerinden beklenmedik sonuçlar elde edilir. Bir örnekle yetinelim: Öyle bir (p_n) polinom dizisi bulunuz ki $\mathbb{C}$'de yakınsak olsun ve her $z \in \mathbb{H}$ için $\lim p_n(z) = 1$, her $z \in \mathbb{H}^-$ için $\lim p_n(z) = -1$ ve her $z \in \mathbb{R}$ içinse $\lim p_n(z) = 0$ olsun. Burada $\mathbb{H} = \{z | \operatorname{Im} z > 0\}$ ve $\mathbb{H}^- = \{z | \operatorname{Im} z < 0\}$ olduğunu anımsatalım. Şimdi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, her $z \in \mathbb{H}$ için $f(z) = 1$, her $z \in \mathbb{H}^-$ için $f(z) = -1$ ve her $x \in \mathbb{R}$ içinse $f(x) = 0$ olarak tanımlansın. Her $2 \leq n \in \mathbb{N}$ için

$$K_n := \overline{D}_n(0) \backslash \left\{ z \in \mathbb{C} | 0 < |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{n} \right\}, \quad f_n := f|K_n \text{ ve}$$
$$U_n := \left\{ z \in \mathbb{C} | \, |\operatorname{Im} z| > \frac{1}{n^2} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} | \, |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2n^2} \right\}$$

olsun. U_n açık kümesinin üç bağlantılı bileşeni vardır; üst yarıdüzleme düşen bir U_n^+ bileşeni, bunun U_n^- ile göstereceğimiz x-eksenine göre simetriği ve x-eksenini içeren bir U_{n0} yatay şeridi. f fonksiyonu bu bileşenlerin her birinde sabit olduğundan $f|U \in \mathcal{H}(U)$ olur. $K_n \subset U_n$ olduğundan, $f_n \in \mathcal{H}(K_n)$ olur. Son olarak $\mathbb{C} \backslash K_n$'nin bağlantılı olduğunu belirtelim. Teorem 6.1.6'dan dolayı polinomlar $\mathcal{H}(K)$'de yoğundur. Dolayısıyla, her $n \geq 2$ doğal sayısı için bir p_n polinomu $\|f_n - p_n\|_{K_n} < \frac{1}{n}$ olacak biçimde bulunabilir. $\mathbb{C} = \bigcup_{n \geq 2} K_n$ olduğundan, $(p_n)_{n \geq 2}$ dizisi işimizi görür.

Şimdi bu bağlamda, çok değişkenli kompleks fonksiyonlar kuramında daha da önemli olan birkaç kavramla tanışacağız. Bunlarla ilgili temel birkaç gerçeği problem olarak soracağız. $\mathbb{C}$'de U açık ve K kompakt kümeleri verilsin ve $K \subset U$ olsun. $U \backslash K$'nin, U'da göreceli kompakt bileşenlerinin ailesi $\{B_i\}_{i \in I}$ olsun. $\hat{K}_U := K \cup \bigcup_{i \in I} B_i$ kümesine K'nin U'daki **holomorf örtüsü** denir. $K = \hat{K}_U$ ise, K kompakt kümesi ***U*'da holomorfkonvekstir** denir. $U = \mathbb{C}$ durumunda $\hat{K}_{\mathbb{C}}$ yerine kısaca $\hat{K}$ yazılır. Örneğin Şekil 6.1'deki U ve K için $\hat{K}_U = K \cup Q_1$; bir anlamda $\hat{K}_U$, K ile K'deki deliklerin birleşimidir.

Problemler

Problem 6.1.1. $K := \{z \in \mathbb{C} | 1 \leq |z| \leq 2\}$, ve $f(z) = 1/z$ olsun; $f \in \mathcal{H}(D_3^*)$. Hiç bir $g \in \mathcal{H}(D_3)$ için $\|f - g\|_K < \frac{1}{4}$ olamayacağını gösteriniz.

Problem 6.1.2. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $K \subset U$ olsun. B ise $\mathbb{C} \backslash U$'nun bir bağlantılı bileşeni ve $\overline{B} \subsetneq U$ olsun. Bu koşullarda, her $a \in B$ noktası için bir γ gezisi, başlangıç noktası a ve ∂U'daki bitiş noktası dışında tümüyle B'de olacak biçimde bulunabilir.

Problem 6.1.3. Bir $K \subset \mathbb{C}$ kompakt kümesi için $\mathbb{C} \backslash K$'nin sınırlı bağlantılı bileşenlerinin sonsuz tane olabileceğini örnekleyiniz.

Problem 6.1.4. $\mathbb{C}$'de U, V açık kümeleri verilsin; $V \subset U$ ve $\partial V \cap U = \emptyset$ olsun. H, U'nun bir bağlantılı bileşeni ve $H \cap V \neq \emptyset$ ise, $H \subset V$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.1.5. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ve $\mathbb{C} \backslash K$ bağlantılı olsun. Her $f \in \mathcal{H}(K)$ için bir (p_n) polinomlar dizisi $p_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olacak biçimde bulunabilir.

Problem 6.1.6. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $\gamma \in \mathcal{G}^i(\mathbb{C} \backslash K)$ ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli olsun.

$$g(z) := \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \underline{\gamma}$$

ile tanımlanan g fonksiyonuna,

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{z - w_k}, \quad c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C} \text{ ve } w_1, \ldots, w_m \in \underline{\gamma}$$

tipinde rasyonel fonksiyonlarla, K'de düzgün biçimde yaklaşabileceğimizi gösteriniz.

Problem 6.1.7. a ve b noktaları $\mathbb{C} \backslash K$'nin farklı bileşenlerinde seçilirse 6.1.5(i)'in geçerliliğini yitireceğini örnekleyiniz. İpucu: $K = \partial \mathbb{D}$ alınız.

Problem 6.1.8. Runge Teoremi'nden yararlanarak bir $(p_n) \subset \mathbb{C}[z]$ dizisini,

$$\forall z \notin \mathbb{C} \backslash \mathbb{R} \, (\lim p_n(z) = 0) \ \text{ ve } \forall z \in \mathbb{R} \, (\lim p_n(z) = 1)$$

olacak biçimde bulunuz.

Problem 6.1.9. Runge Teoremi'nden yararlanarak bir $(p_n) \subset \mathbb{C}[z]$ dizisini, $p_n(0) = 0$ ve her $z \in \mathbb{C}^*$ için $\lim p_n(z) = 1$ olacak biçimde bulunuz.

Problem 6.1.10. (a) Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ sayıları $0 < b_n < a_n < n$ olacak biçimde seçilsinler. Bir p_n polinomunun

$$|p_n(z)| \begin{cases} \geq n, & z \in \overline{D} \text{ ve } \operatorname{Im} z = b_k \\ \leq 1/n, & z \in \overline{D} \text{ ve } \operatorname{Im} z \leq 0 \text{ veya } \operatorname{Im} z \geq a_n \end{cases}$$

olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

(b) Bir (p_n) polinom dizisini, her $z \in \mathbb{C}$ için $\lim p_n(z) = 0$ olacak biçimde bulunuz, öyle ki (p_n) dizisi $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$'de kompakt düzgün yakınsak, ancak her $x_0 \in \mathbb{R}$'nin hiçbir komşuluğunda düzgün yakınsak olmasın.

(c) Bir (p_n) polinom dizisini, her $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ için $\lim p_n(z) = 1$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim p_n(x) = 0$ olacak biçimde bulunuz.

Problem 6.1.11. $U \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\gamma \in \mathcal{G}^1(U)$ ise, $\int_\gamma f = 0$ olduğunu Runge Teoremleri üzerinden kanıtlayınız.

Problem 6.1.12. $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki her kompakt K için $\hat{K}_U$'nun da kompakt olduğunu gösteriniz.

Problem 6.1.13. $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki her kompakt K için

$$\hat{K}_U = \{z \in U | \forall z \in U : |f(z)| \leq \|f\|_K\}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem 6.1.14. $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki her kompakt K için
(a) $\hat{K}_U \subset \mathrm{con}(U)(=U$'nun konveks örtüsü) ve
(b) $\mathbb{C}\backslash\hat{K}_U$'nun sonlu sayıda bağlantılı bileşeni olduğunu gösteriniz.

Problem 6.1.15. $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde bir K kompakt kümesi verilsin. Her $f \in \mathcal{H}(K)$'nin K'de, bir $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ dizisinin düzgün limitinin olması için gerek ve yeter koşul $K = \hat{K}_U$ olmasıdır; kanıtlayınız.

6.2 Mittag-Leffler Teoremi

Eğer $R \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}$'deki kutup yerleri $a_1, \dots, a_n$ ve oradaki Laurent açılımlarının esas kısımları $g_1, \dots, g_n$ olan bir rasyonel fonksiyonsa, KA I Örnek 3.9.7(2)'de gösterdiğimiz gibi, bir $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomu ile $R = \sum_{i=1}^n g_i + p$. Bu gösterim gerçel analizde rasyonel fonksiyonların integrallerini hesaplarken başvurduğumuz kesirlere ayırmadan başka bir şey değildir. g_i esas kısımlarının ise, p_i'ler sabit terimleri olmayan polinomlar olmak üzere $g_i(z) = p_i\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ tipinde olduğunu biliyoruz.

Bu kısımda, bir $a \in \mathbb{C}$ noktasındaki bir g_a esas kısmından hep $t_a(z) = \sum_{n\geq 1} c_{a,n} z^n$ bir tam fonksiyon olmak üzere,

$$g_a(z) := t_a\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{c_{a,n}}{(z-a)^n} = \sum_{n<0} b_{a,n}(z-a)^n,\ b_{a,n} = c_{a,-n}$$

tipindeki esas kısımlar anlaşılacaktır.

Şimdi $\mathbb{C}$'de bir sonlu $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ kümesi ve bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash A)$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun bu noktalardaki esas kısımları $g_1, \dots, g_n$ olsun. Her a_i noktası f'nin ya bir kutup yeri ya da bir esaslı tekil noktası olsun. Bu durumda $g := \sum_{i=1}^n g_i \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash A)$ ve g'nin $a_1, \dots, a_n$'lerdeki esas kısımları $g_1, \dots, g_n$'dir. Dolayısıyla $\mathbb{C}\backslash A$'da $f - g$ holomorftur ve a_i'lerin bir $D^*_{r_i}(a_i)$ komşuluklarında sınırlı olduğundan, oralara da holomorf genişletilebilir. O halde $f - g$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de holomorf bir h fonksiyonuna genişletilebilir. Sonuçta *$\mathbb{C}$'de tekil noktaları $a_1, \dots, a_n$ ve oradaki esas kısımları $g_1, \dots, g_n$ olan $\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash A)$'daki tüm fonksiyonlarımız $\sum_{i=1}^n g_i + h$, $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonlarıdır.*

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ kümesi açık ve $A \subset U$ ise U'da yerel sonlu olsun. Her $a \in A$ için bir g_a esas kısmı verilsin. Bu durumda $\{(a, g_a) \mid a \in A\}$'ya U'da bir **ML-dağılımı** diyelim[3]. Ayrıca, her $a \in A$ için g_a'nın a'da bir kutup yeri varsa, yani yukarıdaki seride sadece sonlu sayıdaki $c_{a,n}$ katsayısı 0'dan farklı ise, bu dağılıma bir **meromorf ML-dağılımı** diyelim. $f \in \mathcal{H}(U\backslash A)$ ve her $a \in A$ noktasında f'nin ya bir kutup yeri ya da bir esaslı tekil noktaları varsa, f_a^- ile

[3] ML, Mittag-Leffler için bir kısaltma olarak seçilmiştir.

f'nin esas kısmını gösterirsek, $\mathrm{ML}(f) := \{(a, f_a^-) \mid a \in A\}$ bir ML-dağılımıdır. $\mathrm{ML}(f) = \{(a, g_a) \mid a \in A\}$ koşulunu sağlayan her $f \in \mathcal{H}(U \backslash A)$ fonksiyonuna $\{(a, g_a) \mid a \in A\}$ **dağılımın bir çözümü** denir. Yukarıdaki irdelemelerle, $f \in \mathcal{H}(U \backslash A)$ fonksiyonu $\{(a, g_a) \mid a \in A\}$ dağılımının bir çözümü ise, bu dağılımın tüm çözümlerinin $f + h$, $h \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları olduğu görülür. Bu durumda $f + h \in \mathcal{M}(U)$ olması için gerek ve yeter koşul, her bir g_a'nın a noktasında bir kutup yeri olmasıdır; bu ise $m_a \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere bir $p_a(z) = \sum_{k=1}^{m_a} c_{a,k} z^k$ polinomu ile $g_a(z) = p_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$ olması demektir.

Eğer A bir sonlu küme ise, $g := \sum_{a \in A} g_a$ fonksiyonu ML-dağılımının bir çözümüdür. A kümesi sonsuz olsun. A yerel sonlu olduğundan sayılabilir sonsuzdur; öğelerini (a_n) olarak sıralayalım. Yalınlık açısından g_{a_n} yerine g_n yazalım. İlk akla gelen $\sum g_n$ serisinin ML-dağılımının bir çözümü olup olmadığını araştırmaktır. Ancak önce bu serinin yakınsaklığından ne anlayacağız, netleştirelim. KA I Altkısım 3.9.3'te Kutup Koşulu kavramını verip, ardından meromorf fonksiyon serileri için yakınsaklık tanımları vermiştik. Şimdi esaslı tekilliklere izin verdiğimiz durumda da o tanımlar buraya aktarılır; teoremler de limit fonksiyonun meromorfluğundan vazgeçmek koşuluyla geçerli kalırlar. Her $K \subset U$ kompakt altkümesi için $A \cap K$ sonlu olduğundan, bir $n_K \in \mathbb{N}$ sayısı, her $n \geq n_K$ için $a_n \notin K$, dd. $g_n \in \mathcal{H}(K)$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda $\sum_{n \geq n_K} g_n$ serisinin K'de herhangi bir türden, örneğin düzgün, mutlak, normsal yakınsaklığından bahsedebiliriz. $\sum_{n \geq n_K} g_n$ serisi K'de düzgün, mutlak, normsal yakınsaksa $\sum_{n \geq 0} g_n$ serisi K'de düzgün, mutlak, normsal yakınsaktır denir. $\sum_{n \geq 0} g_n$ serisi her kompakt $K \subset U$ için K'de düzgün, mutlak, normsal yakınsak ise, $\sum_{n \geq 0} g_n$ serisi U'da düzgün, mutlak, normsal yakınsaktır denir. ML-dağılımımıza ilişkin $\sum_{n \geq 0} g_n$ serisinin U'da herhangi bir türden yakınsak olması gerekmez! Mittag-Leffler'in stratejisi şudur: Uygun seçilen $h_n \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları ile $\sum (g_n - h_n)$ serisinin yakınsaklığını sağlamaktır; o zaman bu toplam ML-dağılımımızın bir çözümüdür.

Örneğin $\pi \cot \pi z$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de meromorftur ve yalnızca $n \in \mathbb{Z}$ noktalarında birinci dereceden kutup yerleri vardır ve n'deki Laurent açılımının esas kısmı $g_n(z) = \frac{1}{z-n}$'dir. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{z-n}$ ve elbette $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{z+n}$ serileri, dolayısıyla $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-n}$ serisi yakınsak değildirler; yine de biz KA I Örnek 4.4.6'da

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty,\, n \neq 0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

olduğunu gösterdik. Bu ifadeye $\pi \cot \pi z$ fonksiyonunun kesirlere parçalanışı olarak bakabiliriz. Bu örnekte $h_n(z) \equiv -\frac{1}{n}$ sabit fonksiyonları işimizi görmüştür.

Özel olarak $U = \mathbb{C}$ durumuna yakından bakalım. A kümesi $\mathbb{C}$'de yerel sonlu bir sonsuz küme olsun. $0 \in A$ ise $a_0 = 0$ olmak üzere A'nın öğelerini $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olarak sıralayalım. A kümesi $\mathbb{C}$'de yerel sonlu olduğundan $\lim a_n = \infty$ olmak zorundadır.

Teorem 6.2.1 (Mittag-Leffler Teoremi)**.** *$\mathbb{C}$'deki her $\{(a, g_a) \,|\, a \in A\}$ ML-dağılımının çözümleri vardır. A sonsuz ve ögeleri $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olarak sıralandığında, $0 \in A$ ise $a_0 := 0$ alınacaktır, P_n polinomları*

$$f(z) := g_0(z) + \sum_{n \geq 1} (g_n(z) - P_n(z)) \tag{6.4}$$

serisi $\mathbb{C}$'de bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash A)$ fonksiyonuna normsal yakınsak olacak biçimde bulunabilir. f fonksiyonu ML- dağılımımızın bir çözümüdür. Eğer $z = 0$ noktası f'nin bir tekil yeri değilse bu gösterimde $g_0(z)$ olmayacaktır. ML- dağılımımızın tüm çözümleri ise, $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olmak üzere $f + h$ fonksiyonlarıdır.

Kanıt. $n \geq 1$ için $r_n := |a_n|/2$ olsun ve $\varepsilon_n > 0$ pozitif sayıları $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ serisi yakınsak olacak biçimde seçilsinler. $n \geq 1$ olmak üzere a_n'deki g_n esas kısmı $D_{2r_n}(0)$ dairesinde holomorf olduğundan, orada normsal yakınsak bir $\sum_{m \geq 0} c_{n,m} z^m$ kuvvet serisine açılabilir. $K_n := \overline{D}_{r_n}(0)$ olmak üzere bir k_n doğal sayısı

$$\left\| g_n - \sum_{m=0}^{k_n} c_{n,m} z^m \right\|_{K_n} \leq \varepsilon_n$$

olacak biçimde seçilebilir. $P_n(z) := \sum_{m=0}^{k_n} c_{n,m} z^m$ olsun. Açıkca $K_n \subset K_{n+1}$ ve (K_n) kompakt kümeler dizisi $\mathbb{C}$'yi tüketir. Dolayısıyla $f_n := g_n - P_n$ olmak üzere, $\sum_{n \geq 1} f_n$ serisi Weierstrass M-Ölçütünden dolayı $\mathbb{C} \backslash A$'da holomorf bir f^* fonksiyonuna kompakt normsal yakınsaktır. Her $n \geq 1$ için f^*'ın a_n'deki esas kısmı g_n'dir. Gerçekten de $h_n := \sum_{k \geq 1, k \neq n} f_k$ fonksiyonu a_n'de holomorftur; diğer yandan P_n de bir polinom olarak a_n'de holomorftur. Böylece $f = (h_n - P_n) + g_n$ olduğundan, f'nin a_n'deki esas kısmı g_n'dir.

Eğer $0 \notin A$ ise $f := f^*$ fonksiyonu, yok eğer $0 \in A$ ise $f := g_0 + f^*$ fonksiyonu ML-dağılımımızın bir çözümüdür. Daha önce tartışıldığı gibi tüm çözümler $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olmak üzere $f + h$ fonksiyonlarıdır. □

Teorem 6.2.2 (Kesirlere Ayırma)**.** *Her $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ fonksiyonuna karşılık bir $(r_n) \subset \mathbb{C}(z)$ rasyonel fonksiyonlar dizisi, $\sum r_n$ serisi $\mathbb{C}$'de normsal yakınsak ve $f = \sum r_n$ olacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. Her $a \in P_f$ için f'nin a noktasındaki Laurent serisinin esas kısmı g_a olsun. $g_a \in \mathbb{C}(z)$ olduğundan, P_f sonlu ise $\sum_{a \in P_f} g_a$ işimizi görür. P_f sonsuz ise, $P_n \in \mathbb{C}[z]$ polinomları (6.2.1)'deki gibi seçilsinler. $r_0 = g_0$ ve $r_n = g_n - P_n$ rasyonel fonksiyonları işimizi görür. □

Teorem 6.2.3. *Her açık $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ kümesinde her meromorf ML-dağılımının çözümü vardır.*

Kanıt. $U = \mathbb{C}$ durumunu (6.2.1)'de kanıtladık. Şimdi $U \subsetneq \mathbb{C}$ olsun. U'da $\{(a, g_a) \mid a \in A\}$ ML-dağılımı verilsin.

A sonlu ise kanıtlanacak bir şey yoktur. Şimdi A sonsuz olsun. A'nın öğelerini herhangi bir biçimde $a_1, a_2, \dots$ olarak sıralayalım. Yine g_{a_n} yerine yalın olarak g_n yazalım. A kümesi U'da yerel sonlu olduğundan, bir $(b_n) \subset \partial U$ dizisi $\lim |b_n - a_n| = 0$ olacak biçimde seçilebilir. $\varepsilon_n > 0$ pozitif sayıları $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ serisi yakınsak olacak biçimde seçilsinler. $r_n := d(b_n, a_n)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash \{a_n\})$ olduğundan, g_n fonksiyonu $H_n := H(b_n; r_n, +\infty)$ halkasında $\sum_{m \geq 1} c_{n,m}(z - b_n)^{-m}$ gibi bir Laurent serisine açılabilir ve bu seri H_n halkasında kompakt normsal yakınsaktır. Bu seri özellikle $K_n := \mathbb{C} \backslash D_{2r}(b_n) \subset H_n$'de normsal yakınsaktır (bkz. KA I Teorem 1.6.5). $q_k := \sum_{m=1}^{k} c_{n,m}(z - b_n)^{-m}$ olmak üzere m_n sayısını $\|g_n - q_{m_n}\|_{K_n} \leq \varepsilon_n$ olacak biçimde seçelim.

Şimdi $f_n := g_n - q_{m_n}$ olsun. Elbette $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash \{a_n, b_n\})$, özellikle $f_n \in \mathcal{H}(U \backslash \{a_n\}) \subset \mathcal{H}(U \backslash A)$. Bir $K \subset U$ kompakt kümesi keyfi verilsin. $\delta_K := d(K, \partial U) > 0$ ve $\lim r_n = 0$ olduğundan bir n_K doğal sayısı, her $n \geq n_K$ için $K \subset K_n$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda $\sum_{n \geq n_K} \|f_n\|_K = \sum_{n \geq n_K} \varepsilon_n$ toplamı sonlu olur. Dolayısıyla $f := \sum_{n \geq 1} f_n$ serisi U açık kümesinde normsal yakınsaktır. $f \in \mathcal{H}(U \backslash A)$ ve her $a_n \in A$ noktasında, esas kısmı g_n olan bir tekilliğe sahiptir.

İkinci kanıt: U'yu tüketen bir (K_n) kompakt kümeler dizisini KA I Önerme 5.2.33'teki gibi seçelim.

$$Q_n(z) := \sum_{a \in A \cap (K_n \backslash K_{n-1})} g_a(z) = \sum_{a \in A \cap (K_n \backslash K_{n-1})} p_a \left(\frac{1}{z - a} \right)$$

olsun. A yerel sonlu olduğundan bu toplam sonludur. Ayrıca, p_a'lar sabit terimi sıfır olan polinomlar olduğundan $Q_a \in \mathcal{H}(K_{n-1})$ olur. Runge Teoremi (iii)'ten, kutup noktaları $\mathbb{C} \backslash U$'da olan bir q_n rasyonel fonksiyonu $\|Q_n - q_n\|_{K_{n-1}} < 2^{-n}$ olacak biçimde seçilebilir. Dolayısıyla

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{+\infty} (Q_n(z) - q_n(z))$$

fonksiyonu ML-dağılımımızın bir çözümüdür. $\square$

Teorem 6.2.1'in bir özel durumuna, her a'nın bir basit kutup yeri olduğu duruma yakından bakalım. Kutup noktalarımız $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olarak sıralanmışlar olsunlar. Bu durumda $n \geq 1$ için $|a_n| > 0$ olur. ML-dağılımımızın g_n esas kısımları

$$g_n(z) = \frac{c_n}{z - a_n}, \; n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak verilmiş olsunlar. Önce basit bir bağıntı: $|w| < 1$ için

$$\frac{1}{w-1} = -\frac{1}{1-w} = -\sum_{\nu=0}^{+\infty} w^\nu = -\sum_{\nu=0}^{n-1} w^\nu - w^n \sum_{\mu=0}^{+\infty} w^\mu = -\sum_{\nu=0}^{n-1} w^\nu - \frac{w^n}{1-w}$$

olduğundan, $|w| < 1$ için $Q_n(w) := -\sum_{\nu=0}^{n-1} w^\nu$ olmak üzere

$$\frac{1}{w-1} - Q_n(w) = \frac{1}{w-1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} w^\nu = -\frac{w^n}{1-w} = \frac{w^n}{w-1}. \tag{6.5}$$

$n \geq 1$ ise, her $z \in D_{|a_n|}(0)$ için $|\frac{z}{a_n}| < 1$ olduğundan,

$$\frac{c_n}{z-a_n} = -\frac{c_n}{a_n\left(1-\frac{z}{a_n}\right)} = -\frac{c_n}{a_n}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{a_n}\right)^\nu.$$

$Q_n(z) := -\frac{c_n}{a_n}\sum_{\nu=0}^{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^\nu$ olmak üzere (6.5) ile $g_n(z) - Q_n(z)$ ifadesi

$$g_n(z) - Q_n(z) = -\frac{c_n}{a_n}\frac{\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}}{1-\frac{z}{a_n}} = \frac{c_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} \tag{6.6}$$

şeklini alır. Bu eşitlik bize (6.2.1) ile aşağıdaki sonucu verir:

Sonuç 6.2.4. *$\mathbb{C}$'de yerel sonlu, ancak sayılabilir sonsuz A kümesinin ögeleri $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olarak sıralanmışlar olsunlar. Her a_n'de birinci dereceden bir kutup yeri ve oradaki kalanı c_n olan $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ meromorf fonksiyonları uygun seçilmiş $k_n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları ile*

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n} + h(z),\ \ h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \tag{6.7}$$

fonksiyonlarıdır.

Elbette k_n'lerin seçimi c_n ve a_n'lere bağlıdır. Örneğin $A = \mathbb{Z}$ olsun ve her $n \in A$ için $g_n(z) = \frac{1}{z-n}$ olarak verilsin. Biz bir yandan $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n$ serisinin yakınsak olmadığını biliyoruz, diğer yandan şimdiden, yalnızca $n \in \mathbb{Z}$ noktalarında esas kısmı $g_n(z) = \frac{1}{z-n}$ olan $\mathbb{C}$'de meromorf bir fonksiyon tanıyoruz: $\pi \cot \pi z$ (bkz. KA I Örnek 4.4.6). Bu fonksiyon için KA I'deki (4.61) eşitliğinde verdiğimiz formüle teorem 6.2.1 bizi götüremez mi? $n \neq 0$ için $|z| < n$ olmak üzere

$$g_n(z) = \frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{z}{n}} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \cdots\right)$$

açılımda $P_n(z) = -\frac{1}{n}$, dd. $k_n = 0$ alırsak

$$g_n(z) - P_n(z) = \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = -\frac{z}{n^2}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^{\nu} = -\frac{z^2}{n^2}\frac{1}{1-\frac{z}{n}} = -\frac{z^2}{n(n-z)}$$

elde ederiz. g_n'nin seri açılımındaki ilk terim bizi KA I Örnek 4.4.6'daki eşitliğe götürür.

Önsav 6.2.5. $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}^*$, $\lim |a_n| = +\infty$ *olsun. Her* $r > 0$ *için*

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n}$$

serisi $\overline{D}_r(0)$*'da normsal yakınsak olacak biçimde* $(k_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ *dizileri vardır; örneğin* $k_n = n$ *işimizi görür.*

Kanıt. $n_r \in \mathbb{N}$ doğal sayısı, her $n \geq n_r$ için $|a_n| \geq 2r$ olacak biçimde seçilsin. Savımız doğrudan, her $n \geq n_r$ ve her $z \in \overline{D}_r\,(0)$ için

$$\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n} = \left|\frac{z}{a_n}\right|^{n} \leq \left(\frac{r}{2r}\right)^{n} = \frac{1}{2^n}$$

eşitsizliğinden çıkar. □

(6.7) eşitliğinde bir $m \in \mathbb{N}^*$ ile, her n için $k_n = m$ durumuna bakalım:

Sonuç 6.2.6. $\mathbb{C}$*'de yerel sonlu, ancak sayılabilir sonsuz* A *kümesinin ögeleri* $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ *olarak sıralanmışlar olsunlar.* $(c_n) \subset \mathbb{C}$ *ve bir* m *doğal sayısı ile*

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|c_i|}{|a_i|^{m+1}} < +\infty \tag{6.8}$$

ise, (6.7) eşitliğinde tüm k_n*'ler* m *alınabilir, dd.*

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m} + h(z),\ \ h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

fonksiyonları a_n *noktalarında birinci dereceden kutup yerleri olup oradaki kalanları* c_n *olan* $\mathbb{C}$*'de meromorf fonksiyonların ailesidir.*

Kanıt. $|w| < \frac{1}{2}$ için $|1-w| \geq 1 - |w| \geq \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\left|\frac{w^m}{1-w}\right| \leq 2|w|^m,\ \ |w| < \frac{1}{2}. \tag{6.9}$$

$K \subset \mathbb{C}$ kompakt kümesi keyfi verilsin. $r > 0$ sayısı $K \subset D_r(0)$ olacak biçimde seçilsin. $\lim a_n = \infty$ olduğundan bir n_r doğal sayısı, her $n \geq n_r$ için $|a_n| > 2r$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda, her $z \in D_r(0)$ ve her $n \geq n_r$ için $|z/a_n| < 1/2$ sağlanır. Dolayısıyla bu z ve n'ler için $w := z/a_n$ olmak üzere (6.9) eşitliğinden

$$\left|\frac{c_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m\right| = \left|-\frac{c_n}{a_n}\frac{w^m}{1-w}\right| \leq \left|\frac{c_n}{a_n}\right| 2 \left|\frac{z}{a_n}\right|^m \leq \frac{2r^m|c_n|}{|a_n|^{m+1}}$$

elde ederiz. (6.8) bağıntısından dolayı terimleri $\frac{2r^m|c_n|}{|a_n|^{m+1}}$ olan seri de yakınsaktır; o halde $\sum_{n=n_r} \frac{c_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m$ serisi $D_r(0)$'da, ve haydi haydi K'de normsal yakınsaktır. □

Örnek 6.2.7. KA I Örnek 3.9.27'deki meromorf fonksiyon serilerini uygun Mittag-Leffler dağılımlarının çözümleri olarak görmeyi okura bırakıyoruz.

Örnek 6.2.8. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n := n$ ve $g_n(z) = \frac{1}{z-n^2}$ olmak üzere $\{(n, g_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ML-dağılımı verilsin. Bu dağılım için Teorem 6.2.1'deki P_n polinomlarını $P_n(z) \equiv 0$ olarak seçebileceğimizi, dd. $\sum_{n\geq 0} g_n$ meromorf fonksiyonlar serisinin $\mathbb{C}$'de kompakt düzgün yakınsak olduğunu göstereceğiz. Her $n \geq 1$ için $\varepsilon_n := \frac{2}{n^2}$ seçelim; elbette $\sum_{n\geq 1} \varepsilon_n$ yakınsaktır. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt kümesi keyfi verilsin. K bir $D_r(0)$ dairesine düşer. n_0 doğal sayısını, her $n \geq n_0$ için $n^2 \geq 2r$ olacak biçimde seçelim. Her $z \in K$ ve her $n \geq n_0$ için[4]

$$|g_n(z)| = \frac{1}{|z-n^2|} \leq \frac{1}{n^2-|z|} \leq \frac{1}{n^2-r} \leq \frac{2}{n^2} = \varepsilon_n.$$

Dolayısıyla $\sum_{n\geq n_o} \|g_n\|_K$ serisi yakınsaktır; böylece $\sum g_n$ serimiz $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktır, haydi haydi $\mathbb{C}$'de kompakt düzgün yakınsaktır.

Örnek 6.2.9.[Weierstrass'ın $\wp$ fonksiyonu] $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$ sayıları $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız ve $\Omega = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ olsun (bkz. KA I Örnek 1.5.16). $p, q \in \mathbb{Z}$ için $w_{pq} := pw_1 + qw_2$ olmak üzere $g_{00}(z) = \frac{1}{z^2}$ ve $g_{pq}(z) := \frac{1}{(z-w_{pq})^2}$ olsun. Bu durumda $\{(w_{pq}, g_{pq}) \,|\, w_{pq} \in \Omega\}$, $\mathbb{C}$'de bir meromorf ML-dağılımıdır. Biz KA I Örnek 1.5.16'da

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-w_{pq})^2} - \frac{1}{w_{pq}^2}\right) \tag{6.10}$$

fonksiyonunun bu dağılımın bir çözümü olduğunu gösterdik. Burada Teorem 6.2.1'deki yöntemi uygulasaydık $\frac{1}{w_{pq}^2}$'ye nasıl ulaşacağımızı görelim: $w_{pq} \neq 0$ olmak üzere g_{pq} asal kısmı $D_{|w_{pq}|}(0)$ açık dairesinde holomorftur. Yine bu dairedeki

$$\frac{1}{z-w_{pq}} = -\frac{1}{w_{pq}}\frac{1}{1-\frac{z}{w_{pq}}} = -\frac{1}{w_{pq}}\left(1 + \frac{z}{w_{pq}} + \left(\frac{z}{w_{pq}}\right)^2 + \dots\right) \tag{6.11}$$

açılımından yola çıkarak; ister (6.11) eşitliğinde her iki tarafta da terim terim türev alarak, istersek seri çarpımlarından yola çıkarak aynı açık dairede

$$\frac{1}{(z-w_{pq})^2} = \frac{1}{w_{pq}^2} + \frac{2}{w_{pq}^3}z + \cdots$$

[4] $n^2 \geq 2r \Longrightarrow 2n^2 - 2r \geq r^2 \Longrightarrow 2(n^2-r) \geq n^2 \Longrightarrow \frac{2}{n^2} \geq \frac{1}{n^2-r}$

eşitliğine ulaşırız. Demek ki biz KA I Örnek 1.5.16'da yakınsalığı sağlayan terimler olarak bu açılımın ilk teriminin alınabileceğini, dd. $P_{pq}(z) = \frac{1}{w_{pq}^2}$ alınabileceğini göstermiş olduk.

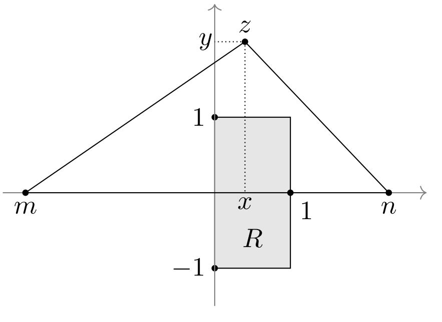
Örnek 6.2.10. $f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ fonksiyonunun kesirlere parçalanışının

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{6.12}$$

olduğunu göstereceğiz. Biz bunu aslında bir başka bağlamda KA I Örnek 4.4.5 (2)'de kanıtladık. Diğer yandan, KA I Örnek 4.4.6'da

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty,\, n\neq 0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

olduğunu kanıtladık. Ayrıca KA I Örnek 3.9.27 (1)'de bu serinin $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu gördük. Dolayısıyla bir yandan $(\cot z)' = -(\sin z)^{-2}$ olduğunu, diğer yandan ise yukarıdaki seride terim terim türev alabileceğimizi göz önünde tutarsak yine (6.12) eşitliğine ulaşırız. Şimdi bu bilgiler elimizde olmasaydı Mittag-Leffler Teoremi'nden (6.12) eşitliğini nasıl çıkaracağımızı görelim:



Şekil 6.2

f fonksiyonunun yalnızca her $n \in \mathbb{Z}$ noktasında esas kısmı $g_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2}$ olan kutup yerleri vardır. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n$ serisinin $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu KA I Örnek 3.9.27 (1)'deki gibi gösteririz. Dolayısıyla (6.2.1)'de tüm $P_n = 0$ olmak üzere bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ile

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + h(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(z) + h(z) =: g(z) + h(z)$$

olur. Geriye $h = 0$ olduğunu kanıtlamak kalıyor. f'nin periyodu 1'dir; $\mathbb{Z}+1 = \mathbb{Z}$ olduğundan, her $z \in \mathbb{C}$ için $g(z+1) = g(z)$. Sonuçta $h = g - f$ fonksiyonunun periyodu 1'dir. Bu nedenle, $\overline{S}_{0,1} := \{z = x + iy \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ şeridinde h'nin sınırlı olduğunu gösterirsek h fonksiyonu $\mathbb{C}$'de sınırlı, dolayısıyla Liouville Teoremi'nden dolayı sabit olur, dd. bir $c \in \mathbb{C}$ ile $h = c$. Ayrıca $c = 0$ olduğu kanıtlanırsa işimiz biter. $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olduğundan, her şeyden önce h fonksiyonu $R := [0,1] \times [-1,1]$ dikdörtgeninde sınırlıdır. h'nin $\overline{S}_{0,1}$ şeridinde sınırlı olduğunu görmek için f ve g fonksiyonlarının $\overline{S}_{0,1} \backslash R$'de sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. $\sin \pi z = \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})$'den yola çıkarak basit bir hesaplamayla $z = x + iy \in \overline{S}_{0,1} \backslash R$ için

$$\left|\sin^2 \pi z\right| = \frac{1}{4}\left(e^{2\pi y} + e^{-2\pi y}\right) - \frac{1}{2} \cos 2\pi x$$

olduğu kolayca görülür. x'e göre düzgün biçimde $\lim_{|y|\to+\infty}\left|\sin^2\pi z\right| = +\infty$ olduğundan, $\lim_{|y|\to+\infty}|f(z)| = 0$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu $\overline{S}_{0,1}$ şeridinde sınırlıdır.

Şimdi g'nin de $\overline{S}_{0,1}\backslash R$'de sınırlı olduğunu ve $\lim_{|y|\to+\infty} g(z) = 0$ olduğunu görelim: Bir dik üçgende hipotenüs, dik kenarların her birinden uzun olduğundan, onların aritmetik ortalamalarından da uzundur. Bu nedenle, her $z = x+iy \in \overline{S}_{0,1}\backslash R$ için

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : |z-n| \geq \frac{1}{2}[|y| + (n-x)] \geq \frac{1}{2}[|y| + (n-1)]$$
$$\forall m \in -\mathbb{N} : |z-m| \geq \frac{1}{2}[|y| + (|m|+x)] \geq \frac{1}{2}(|y| + |m|),$$

dolayısıyla, her $z = x+iy \in \overline{S}_{0,1}\backslash R$ için

$$\begin{aligned}|g(z)| &\leq 4\left[\sum_{v=1}^{+\infty}\frac{1}{[|y|+(\nu-1)]^2} + \sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{(|y|+|\nu|)^2}\right]\\ &\leq 8\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{(|y|+|\nu|)^2} \leq 8\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{\nu^2} < +\infty.\end{aligned}$$

Böylece g fonksiyonu da $\overline{S}_{0,1}\backslash R$'de sınırlıdır; orada iki sınırlı fonksiyonun farkı olarak h'de sınırlı olur. Daha önce h'nin R'de sınırlı olduğunu belirtmiştik. Sonuçta $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ bir sınırlı fonksiyon olarak sabittir, dd. bir $c \in \mathbb{C}$ ile $h = c$. Yukarıdaki eşitsizlikten $z \in \overline{S}_{0,1}$ ve $|z| > N$ için

$$|g(z)| \leq 8\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{1}{(N+|\nu|)^2} \leq 8\sum_{\nu=N}^{+\infty}\frac{1}{\nu^2} \to_{N\to+\infty} 0.$$

f'de olduğu gibi $\lim_{|y|\to+\infty} g(z) = 0$ olduğundan, $c = \lim_{|y|\to+\infty} h(z) = 0$ olur.

Her $n \in \mathbb{Z}$ noktasında birinci dereceden kutup yeri ve o noktalarda kalanları 1 olan $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ meromorf fonksiyonlarını arayalım. $\mathbb{Z}^*$'ın ögelerini herhangi bir biçimde $(a_n)_{n\geq 1}$ olarak sıralayalım ve $n \geq 1$ için $c_n = 1$ alalım. Bu durumda (6.8)'deki seri $m = 1$ için

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|c_i|}{|a_i|^{1+1}} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{|a_i|^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

yakınsak olduğundan, aradığımız f fonksiyonları $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^1 + h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{a_n}\right) + h(z).$$

Ancak a_n'ler $\mathbb{Z}^*$'ı taradığı ve serimiz mutlak yakınsak olduğu için bu

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right) + h(z)$$

demek olur. $\pi\cot\pi z$ fonksiyonu tam da $n \in \mathbb{Z}$ noktalarında kalanları 1 olmak üzere birinci dereceden kutup yerleri olduğu için böyle bir ifadeye sahip olmalıdır. Gerçekten de biz Kotanjant Teoremi'nde $h(z) \equiv 0$ ile

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right)$$

olduğunu kanıtlamıştık.

Problemler

Problem 6.2.1. $\mathbb{C}$'de yerel sonlu, ancak sayılabilir sonsuz A kümesinin ögeleri $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olarak sıralanmışlar olsunlar ve $(c_n) \subset \mathbb{C}$ olsun. $(k_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{N}$ dizisi kesin artan ve bir $M > 0$ sayısı

$$\forall n \geq 1 \text{ için } \sqrt[k_n]{\left|\frac{c_n}{a_n}\right|} \leq M \tag{6.13}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa, $\left\{\left(a_n, \frac{c_n}{z-a_n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ML-dağılımının $\mathbb{C}$'deki tüm çözümleri (6.7) eşitliği ile verildiğini gösteriniz.

Problem 6.2.2. Aşağıda $\mathbb{C}$'deki ML-dağılımlarının tüm çözümlerini bulunuz:

(i) $\{(n, \frac{n}{z-n}) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$,
(ii) $\left\{\left(a^n, \frac{a^n}{z-a^n}\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$, $a \in \mathbb{C}$ ve $|a| > 1$,
(iii) $\left\{\left(\sqrt{n}, \frac{1}{z-\sqrt{n}}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Problem 6.2.3. Aşağıda $\mathbb{C}$'deki ML-dağılımlarının tüm çözümlerini bulunuz:

(i) $\left\{\left((n, \frac{n}{(z-n)^2})\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
(ii) $\left\{\left(n, \frac{1}{z-n} + \frac{n^2}{(z-n)^2}\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Problem 6.2.4. Aşağıda $\mathbb{C}$'deki ML-dağılımlarının tüm çözümlerini bulunuz:

(i) $\{(n, g_n(z)) \mid n \in \mathbb{Z}^*\}$, $\mathrm{Res}(g_n, n) = |n|$,
(ii) $\{(n, g_n(z)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{Res}(g_n, n) = 1$,
(iii) $\{(n, g_n(z)) \mid n \in -\mathbb{N}\}$, $\mathrm{Res}(g_n, n) = 1$.

Problem 6.2.5. $\mathbb{C}$'deki $\{(n, 1/(z-n)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ML-dağılımının bir çözümünün

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2.6.

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2-n^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2.7.

$$\frac{1}{\cos \pi z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{z^2-(n-1/2)^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2.8.

$$\frac{1}{\sinh^2(\pi z)} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+in)^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2.9. $f(z) = 1/(e^z - 1)$ fonksiyonunu $\mathbb{C}$'de bir meromorf seriye açınız.

Problem 6.2.10. $\left\{\left(-n, \frac{(-1)^n}{z+n}\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ ML-dağılımının $\mathbb{C}$'deki tüm çözümlerini bulunuz.

6.3 Sonsuz Çarpımlar

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$'da ve $(\mathbb{C}, \cdot)$'da ayrı ayrı sonsuz çarpımların yakınsaklık tanımını vereceğiz. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$'da her şey beklenildiği gibidir; yapacağımız tek şey $(\mathbb{C}, +)$ Hausdorff topolojik grubundaki, yalnızca topolojik grup özelliklerine dayanan $\sum_{n\geq 0} a_n$ serilerine ilişkin kavram ve önermeleri $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ Hausdorff topolojik grubuna taşımaktır.

Tanım 6.3.1. $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}^*$dizisi verilisin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n := a_0 \cdot a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$ olmak üzere $(p_n)_{n\geq 0}$ **kısmi çarpımlar** dizisi bir $a \in \mathbb{C}^*$ sayısına yakınsaksa $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$ çarpımı $\mathbb{C}^*$**-yakınsaktır** ve $\mathbb{C}^*$**-çarpımı** a'dır diyecek ve bunu $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = a$ olarak göstereceğiz.

Burada terimlerimiz ve çarpımımız $\mathbb{C}^*$'dadır, dd. sahnemiz $\mathbb{C}^*$'dır. $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$ yerine bazen $\prod_{n\geq 0} a_n$ bazen de yalın olarak $\prod a_n$ yazacağız. $k, n \in \mathbb{N}$ ve $k \leq n$ olmak üzere $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımını inceliyorsak $p_{k,n}$'den

$$p_{k,n} := a_k \cdot a_{k+1} \cdot \cdots \cdot a_n$$

anlaşılacaktır. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\prod_{n=k}^{+\infty} a_n$ çarpımının $\mathbb{C}^*$-yakınsak ve $\mathbb{C}^*$-çarpımının $\widehat{a}_k$ olmasından, $(p_{k,n})_{n\geq k}$ dizisinin $\mathbb{C}^*$'da yakınsak ve limitinin $\widehat{a}_k$ olmasını anlayacağız, dd. bu $\exists \lim_{n\to+\infty} p_{k,n} = \widehat{a}_k \neq 0$ demektir. Genel olarak karşımıza $k = 0, 1$ durumları çıkar.

Aşağıdaki önermedeki savlarımız $(\mathbb{C}, +)$'daki serilere ilişkin bilgilerin $+ \mapsto \cdot$ ve $0 \mapsto 1$ geçişleriyle $(\mathbb{C}^*, \cdot)$'da çarpımlara aktarılmasından başka bir şey değildir:

Önerme 6.3.2. *$\mathbb{C}^*$'da $(a_n)_{n\geq 0}$ ve $(b_n)_{n\geq 0}$ dizileri verilsinler.*

(i) $\prod_{n\geq 0} a_n$, $\mathbb{C}^*$-yakınsaksa $\mathbb{C}^*$-çarpımı tek olarak belirlidir.

(ii) $\prod_{n\geq 0} a_n$ $\mathbb{C}^*$-yakınsak ve $\mathbb{C}^*$-çarpımı a ise, her $k \in \mathbb{N}$ için $\prod_{n\geq k} a_n$ de $\mathbb{C}^*$-yakınsaktır ve bu çarpımı $\hat{a}_k$ ile gösterirsek

$$\prod_{n\geq 0} a_n = a_0 \cdots a_{k-1} \cdot \prod_{n\geq k} a_n, \text{ dd. } a = a_0 \cdots a_{k-1} \cdot \hat{a}_k. \tag{6.14}$$

(iii) $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımı $\mathbb{C}^*$-yakınsaksa (a_n) ve $(\widehat{a}_n)$ dizileri de $\mathbb{C}^*$-yakınsaktırlar ve $\lim a_n = \lim \widehat{a}_n = 1$.

(iv) $\prod_{n\geq k} a_n$ *ve* $\prod_{n\geq k} b_n$*'ler sırasıyla* a *ve* b*'ye* $\mathbb{C}^*$*-yakınsaksalar* $\prod_{n\geq k} a_n b_n$ *ve* $\prod_{n\geq k} a_n b_n^{-1}$*'lerde sırasıyla* ab *ve* ab^{-1} *sayılarına* $\mathbb{C}^*$*-yakınsarlar.*

(v) $\prod_{n\geq k} a_n$ *çarpımında sonlu sayıda terimin yerini değiştirmek, çarpımın* $\mathbb{C}^*$*-yakınsaklık karakterini değiştirmez; eğer bu çarpım* $\mathbb{C}^*$*-yakınsaksa,* $\mathbb{C}^*$*-çarpımın değeri değişmez. Aynı çarpımda sonlu sayıda terimin* $\mathbb{C}^*$*'da kalmak üzere değerini değiştirirsek, çarpımın* $\mathbb{C}^*$*-yakınsaklık karakteri yine değişmez.*

Okur isterse bu önermeyi kanıtlayabilir; ancak bu kanıtlar seriler için benzeri önermelerin kanıtlarının sonsuz çarpımlara aktarımından başka bir şey olmayacaktır. Benzer biçimde aşağıdaki teoremi kanıtlamayı okura bırakıyoruz:

Teorem 6.3.3 (Cauchy Ölçütü)**.** $(a_n) \subset \mathbb{C}^*$ *olmak üzere* $\prod a_n$ *çarpımının* $\mathbb{C}^*$*-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul* $\lim_{m,n\to+\infty} \frac{p_n}{p_m} = 1$*, dd.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \left(n_\varepsilon \leq m \leq n \Longrightarrow \left| \frac{p_n}{p_m} - 1 \right| < \varepsilon \right). \tag{6.15}$$

olmasıdır.

Cauchy Ölçütü yalın olarak şöyle de ifade edilebilir: $\prod a_n$ *çarpımının* $\mathbb{C}^*$*-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul* $\lim_{m,n\to+\infty} p_{m,n} = 1$ *olmasıdır.* Özel olarak çarpımımız $\mathbb{C}^*$-yakınsaksa $\lim a_n = \lim p_{n,n} = 1$ olur.

Örnek 6.3.4. Bir kaç örnekle bazı noktalara dikkat çekeceğiz:
1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n := \frac{1}{n+1}$ olsun. $(a_n) \subset \mathbb{C}^*$ ve $\lim a_n = 0 \neq 1$ olduğundan, $\prod_{n\geq 0} a_n$ sonsuz çarpımı $\mathbb{C}^*$-yakınsak değildir. Yine de $p_n := a_0 a_1 \cdots a_n = \frac{1}{(n+1)!}$ kısmi çarpımlar dizisi $\mathbb{C}$'de 0'a yakınsaktır. Ancak $0 \notin \mathbb{C}^*$olduğundan $\prod_{n\geq 0} a_n$ sonsuz çarpımı $\mathbb{C}^*$-ıraksaktır.
2. Her $k \in \mathbb{N}^*$ için $a_k = 1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ olsun.

$$p_{1,n} = a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n} = n + 1$$

ve $\lim p_{1,n} = +\infty$ olduğundan, $\prod_{n\geq 1} a_n$ çarpımı ıraksaktır. Bu örnek bize aynı zamanda $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımının $\mathbb{C}^*$-yakınsaklığı için $\lim a_n = 1$ koşulunun gerekli, ancak yeteri olmadığını gösterir. Benzer biçimde $b_n := 1 - \frac{1}{n}$ olmak üzere $\lim b_n = 1$ olmasına karşın $q_{2,n} := b_2 b_3 \cdots b_n = \frac{1}{n}$ ve $\lim q_{2,n} = 0$ olduğundan, $\prod_{n\geq 2}(1 - \frac{1}{n})$ çarpımı $\mathbb{C}^*$-ıraksaktır.
3. $\prod_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$ sonsuz çarpımı $a_n = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ olmak üzere,

$$a_2 a_3 \cdots a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \cdots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

olduğundan $\mathbb{C}^*$-yakınsaktır ve $\mathbb{C}^*$-çarpımı $\frac{1}{2}$'dir.

Not 6.3.5. 1. Seriler için tanımlanmış mutlak yakınsaklık kavramını sonsuz çarpımlara olduğu gibi aktarabilir miyiz? Bir an için $\prod_{n\geq k} |a_n|$ $\mathbb{C}^*$-yakınsaksa $\prod_{n\geq k} a_n$ mutlak $\mathbb{C}^*$-yakınsaktır diyelim. Bu durumda $\prod_{n\geq 1}(-1)^n$ mutlak $\mathbb{C}^*$-yakınsak, ancak $\mathbb{C}^*$-yakınsak olmayacaktır. Buna karşın $\prod_{n\geq k} |a_n|$ sonsuz çarpımının kısmi çarpımlar dizisini $(q_{k,n})_{n\geq k}$ ile ve $\prod_{n\geq k} a_n$'nin kısmi çarpımlar dizisini $(p_{k,n})_{n\geq k}$ ile gösterirsek $\lim_{n\to+\infty} p_{k,n} = p$ ise, $q_{k,n} = |p_{k,n}|$ olduğundan $\lim q_{k,n} = |p|$ olur; böylece $\prod_{n\geq k} a_n$ $\mathbb{C}^*$-yakınsaksa $\prod_{n\geq k} |a_n|$ $\mathbb{C}^*$-yakınsak olur. Bu istenmeyen durumlar bu tanımda kullanılan $|\,|$ mutlak değerinin, topolojik gruplara ilişkin bir kavram olmamasından kaynaklanır. Mutlak değerin $+$ ve $\cdot$ grup işlemlerine ilişkin özellikleri farklıdır: Her $a, b \in \mathbb{C}$ için daima $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, buna karşın $|a+b| \leq |a| + |b|$ ve $|a+b| < |a| + |b|$ olabilir; daima $|-a| = |a|$ iken $a \neq 0$ için $|a^{-1}| = |a|^{-1}$, dolayısıyla genelde $|a^{-1}| \neq |a|$ olur!

2. Şimdi $(a_n) \subset \mathbb{C}$ dizisi verilsin ve yine $p_n = a_0 a_1 \cdots a_n$ olsun. Bu kez (p_n) dizisi bir $p \in \mathbb{C}$ sayısına yakınsaksa $\prod a_n$ çarpımı yakınsaktır diye tanımlarsak bizi hoş olmayan sürprizler karşılar. Artık $(\mathbb{C}, \cdot)$ bir grup olmadığından, zorunlu olarak bir şeyleri eğip bükeceğiz ve okur literatürde $\prod a_n$ çarpımının yakınsaklığının farklı tanımlarıyla karşılaşır. Kimi yazar eğer (p_n) kısmi çarpımlar dizisi $\mathbb{C}$'de yakınsak ve $\mathbb{C}$'deki limiti p ise, $\prod a_n$ çarpımına yakınsak der ve çarpımı olarak p'yi tanımlar. Bu yaklaşımın birçok sakıncası vardır. Böyle bir yaklaşımda bir tek n için $a_n = 0$ ise, tüm diğer terimler ne olursa olsun $\prod a_n$ çarpımı yakınsak ve çarpımı 0 olacaktır. Burada çok fazla bir gelişigüzellik vardır. Örneğin $a_0 = 0$ ve $n \geq 1$ için $a_n = 2$ olsun. Tanımı böyle seçersek, serilerden alışık olduğumuzun aksine, $\prod_{n\geq 0} a_n$ yakınsak, buna karşın $\prod_{n\geq 1} a_n$ ıraksak olacaktır. Yine $\prod_{n\geq 0} a_n$ yakınsak, ancak $\lim a_n = 2 \neq 1$ olacaktır! Bildiklerimizi ve beklentileri karşılayan $\mathbb{C}^*$-yakınsaklığının çoğu güzel özelliklerini böyle bir tanımda kaybederiz ve bunu istemiyoruz. $(\mathbb{C}, \cdot)$ bir grup olmadığından, burada tanımlayacağımız sonsuz çarpımın yakınsaklık kavramı elbette $\mathbb{C}^*$-yakınsaklık kavramından farklı olacaktır; ancak o kavramdan fazla uzaklaşmak da istemiyoruz.

Tanım 6.3.6. $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ dizisi verilsin. Bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, her $n \geq n_0$ için $a_n \neq 0$ ve $\prod_{n\geq n_0} a_n$ çarpımı $\mathbb{C}^*$-yakınsak olacak biçimde bulunabiliyorsa, $\prod_{n\geq 0} a_n$ **çarpımı yakınsaktır** veya **$\mathbb{C}$-yakınsaktır** denir ve $\prod_{n\geq 0} a_n$ **çarpımı**

$$\prod_{n\geq 0} a_n := a_0 a_1 \cdots a_{n_0-1} \cdot \prod_{n\geq n_0} a_n = (a_0 a_1 \cdots a_{n_0-1}) \cdot \hat{a}_{n_0} \tag{6.16}$$

olarak tanımlanır. Diğer koşullarda **çarpım ıraksaktır** denir.

Her şeyden önce bu tanım n_0 sayısının seçiminden bağımsızdır. Gerçekten de $m_0 > n_0$ ise, (6.3.2)(ii) ile

$$\begin{aligned}(a_0 a_1 \cdots a_{n_0-1}) \cdot \hat{a}_{n_0} &= (a_0 a_1 \cdots a_{n_0-1}) \cdot (a_{n_0} \cdots a_{m_0-1}) \hat{a}_{m_0} \\ &= a_0 a_1 \cdots a_{m_0-1} \hat{a}_{m_0}.\end{aligned}$$

Eğer $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}^*$ ise, $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımı için "$\mathbb{C}^*$-yakınsaklık" ve "yakınsaklık" kavramları örtüşürler. Diğer yandan Önerme 6.3.2, (iv) şıkkı dışında yakınsak çarpımlar için de geçerlidir. Bu şıktaki $\prod b_n$ çarpımından $\prod b_n^{-1}$ çarpımına, en az bir $b_n = 0$ ise geçemeyiz! $\prod_{n\geq 0} a_n$ yakınsaksa yine $\lim a_n = 1$ ve buna sıkça başvurulur. Bu tanım ışığında yakınsak bir çarpımın çarpımının 0 olması için en az bir teriminin 0 olması gerek ve yeterlidir. Bu tanımda da bazı gariplikler karşılaşırız; sonsuz çoklukta terimi sıfır olan, hatta tüm terimleri sıfır olan çarpımlar, tanım gereği ıraksaktır. Yine de bu tanımın artıları daha fazladır ve yaygın tanım budur.

$a_0, a_1, \ldots$ dizisinden sonlu sayıda 0 olan terimler atıldıktan sonra geriye kalan diziyi $(b_n)_{n\geq 0}$ ile gösterirsek $\prod_{n\geq 0} a_n$'nin yakınsak olması tam da $\prod_{n=0}^{+\infty} b_n$ çarpımının $\mathbb{C}^*$-yakınsak olmasına denktir. Bu durumu şöyle de dile getireceğiz: Yalnızca sonlu sayıda terimi 0 olan (a_n) dizileri için $\prod_{n\geq 0} a_n$'nin yakınsak olması $\prod_{a_n\neq 0, n\geq 0} a_n$'nin $\mathbb{C}^*$-yakınsak olması demektir.

Eğer $\prod a_n$ yakınsaksa $\lim a_n = 1$ olacağından, $0 < r < 1$ için, sonlu sayıda n dışında tüm a_n'ler $D_r(1)$ dairesine, dolayısıyla $\mathbb{C}_{-\pi}$'ye düşer. Gerektiğinde, genellikten bir şey kaybetmeden, tüm a_n'lerin bu koşulu sağladığını varsayabiliriz. Her $z \in \mathbb{C}^*$ için $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$ olmak üzere $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ olduğunu anımsatalım.

Teorem 6.3.7 (Logaritma Ölçütü)**.** *$(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}^*$ ise, $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımının $\mathbb{C}^*$-yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n$ serisinin yakınsak olmasıdır ve bu durumda*

$$\prod_{n\geq 0} a_n = e^{\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n}. \tag{6.17}$$

Kanıt. 1. $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n$ yakınsak ve toplamı s olsun. $s_n := \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Log} a_k$ olmak üzere, $p_n = a_0 a_1 \cdots a_n = e^{s_n}$ ve e^z fonksiyonu sürekli olduğundan (p_n) dizisi yakınsaktır ve $p := \lim p_n = \lim e^{s_n} = e^{\lim s_n} = e^s \neq 0$. Dolayısıyla $\prod_{n\geq 0} a_n$ yakınsaktır ve (6.17) geçerlidir.

2. Şimdi $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımı $p \neq 0$ sayısına yakınsak olsun. $w_n := p_n/p$ ve $\zeta_n := \operatorname{Log} w_n$ olsun. $\lim w_n = 1$ ve Log fonksiyonu 1 noktasında sürekli olduğundan, $\lim \zeta_n = \lim \operatorname{Log} w_n = \operatorname{Log} \lim w_n = \operatorname{Log} 1 = 0$ olur. Diğer yandan, bir $k_n \in \mathbb{Z}$ ile

$$\zeta_n = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{Log} a_i - \operatorname{Log} p + 2\pi i k_n = s_n - \operatorname{Log} p + 2\pi i k_n. \tag{6.18}$$

$\lim \zeta_n = 0$ ve $\lim \operatorname{Log} a_{n+1} = \operatorname{Log} \lim a_{n+1} = \operatorname{Log} 1 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} (k_{n+1} - k_n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\zeta_{n+1} - \zeta_n - \operatorname{Log} a_{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\lim \zeta_{n+1} - \lim \zeta_n - \lim \operatorname{Log} a_{n+1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $(k_n) \subset \mathbb{Z}$ olduğunu da gözetirsek bu dizi sonunda sabit olur; bir m_0 doğal sayısı ve bir $k \in \mathbb{Z}$ tam sayısı ile, her $n \geq m_0$ için $k_n = k$ olur. Böylece, her $n \geq m_0$ için $\zeta_n = s_n - \operatorname{Log} p + 2k\pi i$. Burada $\lim \zeta_n = 0$ olduğunu gözetirsek (s_n) yakınsak ve

$$\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n = \lim s_n = \operatorname{Log} p - 2k\pi i$$

$$e^{\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n} = e^{\operatorname{Log} p - 2k\pi i} = e^{\operatorname{Log} p} e^{-2k\pi i} = p = \prod_{n\geq 0} a_n$$

olur ve (6.17) geçerlidir. □

Sonuç 6.3.8. *$(a_n) \subset \mathbb{C}$ ve bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ile, her $n \geq n_0$ için $a_n \in \mathbb{C}^*$ olsun. Bu durumda $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımının yakınsak olması $\sum_{n\geq n_0} \operatorname{Log} a_n$ serisinin yakınsak olmasına denktir ve yakınsaklık durumunda*

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\right) \cdot e^{\sum_{n\geq n_0} \operatorname{Log} a_n}. \tag{6.19}$$

Eğer $\prod a_n$ yakınsaksa $\lim a_n = 1$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle genelde $u_n = a_n - 1$ olmak üzere $a_n = 1 + u_n$ yazılır ve $\prod(1+u_n)$ çarpımı incelenir. Bu çarpım yakınsaksa $\lim(1+u_n) = 1$ olacağından $\lim u_n = 0$ olur.

Önsav 6.3.9. *$(u_n) \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $\prod_{n\geq 0}(1+|u_n|)$ çarpımının yakınsak olması $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ serisinin yakınsak olmasına denktir.*

Kanıt. $x \geq 0$ için $1 + x \leq e^x$ olduğundan

$$|u_0| + \cdots + |u_n| \leq (1+|u_0|)\cdots(1+|u_n|) \leq e^{|u_0|+\cdots+|u_n|}$$

olur ve sav, Teorem 6.3.7 ile, buradan çıkar. □

Önsav 6.3.10. *Her $z \in D_{\frac{1}{2}}(0)$ için*

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\operatorname{Log}(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|. \tag{6.20}$$

Kanıt. $\operatorname{Log}(1+z)$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim dairesinde holomorftur ve orada

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \tag{6.21}$$

seri açılımına sahiptir. Bir yandan

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1, \tag{6.22}$$

diğer yandan $\mathbb{D}$'de

$$\begin{aligned} \left|1 - \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z}\right| &= \left|\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + - \cdots\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|z| + |z|^2 + \cdots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|z|}{1-|z|} \end{aligned}$$

olur. Bu $|z| \leq \frac{1}{2}$ için

$$\left|1 - \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z}\right| \leq \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini verir ve (6.20) buradan çıkar. □

Logaritma Ölçütü 6.3.7 sonsuz çarpımların incelenmesini sonsuz serilerin incelenmesine dönüştürür. Sonsuz çarpımlar için mutlak yakınsaklık kavramının akla ilk geldiği gibi tanımlanmasının doğru olmadığını (6.3.5)(1)'de vurgulamıştık. Diğer yandan, kompleks terimli seriler için *mutlak yakınsaklık* ve *değişmeli yakınsaklık* denk kavramlardır. Bunlardan değişmeli yakınsaklık sonsuz çarpımlara sorunsuz aktarılabilir.

Tanım 6.3.11. Her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonu için $\prod_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ yakınsaksa $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$ sonsuz çarpımı **değişmeli yakınsaktır** (veya yerleşik adlandırmayla **mutlak yakınsaktır**) denir.

Sonsuz çarpımlar için "mutlak yakınsaklık" kavramı yaygın olarak kullanılsa da biz okuru yanlış yönlendirecek olan bu kavramı kullanmamaya özen göstereceğiz.

Teorem 6.3.12. *$(a_n) \subset \mathbb{C}^*$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 1 + u_n$ olsun.*

(i) $\prod_{n\geq 0} a_n$'nin değişmeli yakınsak olması, $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n$ serisinin değişmeli –dolayısıyla mutlak– yakınsak olmasına denktir.

(ii) Eğer $\prod_{n\geq 0} a_n$ değişmeli yakınsaksa, her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonu için $\prod_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ aynı a sayısına yakınsar.

(iii) $\prod_{n\geq 0}(1 + u_n)$ çarpımının değişmeli yakınsak olması, $\sum_{n\geq 0} u_n$ serisinin değişmeli yakınsak olmasına, bu ise

$$\sum_{n\geq 0} |u_n|, \ \sum_{n\geq 0} |\operatorname{Log}(1 + u_n)| \ \text{ve} \ \sum_{n\geq 0} \operatorname{Log}(1 + |u_n|) \tag{6.23}$$

serilerinden herhangi birinin, dolayısıyla her birinin yakınsak olmasına denktir.

Sonuç 6.3.13. *$(u_n) \subset \mathbb{C}$ ve sonlu sayıda $u_n = -1$ ise, $\prod_{n\geq 0}(1 + u_n)$ çarpımının değişmeli yakınsak olması*

$$\sum_{n\geq 0} |u_n|, \quad \sum_{u_n \neq -1, n\geq 0} |\operatorname{Log}(1 + u_n)| \ \text{ve} \sum_{u_n \neq 1, n\geq 0} \operatorname{Log}(1 + |u_n|) \tag{6.24}$$

serilerinden herhangi birinin, dolayısıyla her birinin yakınsak olmasına denktir.

Kanıt. (i) Logaritma Ölçütünden, $\prod_{n\geq 0} a_n$ çarpımının değişmeli yakınsak olması, $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n$ serisinin değişmeli yakınsak, dolayısıyla $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n$ serisinin mutlak yakınsak olmasına denktir.

(ii) $\prod_{n\geq 0} a_n$ değişmeli yakınsaksa $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_n$ serisi değişmeli yakınsak, dolayısıyla mutlak yakınsaktır. Bir $b \in \mathbb{C}$ ile, her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonu için $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Log} a_{\sigma(n)} = b$ ve Logaritma Ölçütü ile $\prod_{n\geq 0} a_{\sigma(n)} = e^b =: a$ olur.

(iii) $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ çarpımının değişmeli yakınsak olması $\sum_{n\geq 0}|\operatorname{Log}(1+u_n)|$ serisinin yakınsak olmasına (bkz. (i)); bu ise (6.20)'den ve gerçel serilerdeki kıyaslama teoreminden, $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ serisinin yakınsak olmasına denktir. $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ serisinin yakınsak olması ise Önsav 6.3.9'dan $\sum_{n\geq 0}\operatorname{Log}(1+|u_n|)$ serisinin yakınsak olmasına denktir.

Sonuç doğrudan (iii)'ten çıkar. □

Sonuç 6.3.14. *$\prod a_n$ değişmeli yakınsaksa, her $\prod_{k\geq 0} a_{n_k}$ alt çarpımı da yakınsaktır. Ayrıca, paketleme teoremi geçerlidir, dd. $\mathbb{N}=\bigsqcup_{l\in L} I_l$ herhangi bir parçalanış olmak üzere*

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n = \prod_{l\in L}\left(\prod_{n\in I_l} a_n\right).$$

Kanıt. KA I Paketleme Teoremi 1.4.12 ve Logaritma Ölçütü 6.3.7'den çıkar. □

Özel olarak, her $n\in\mathbb{N}^*$ için $t_n\geq 0$ ise, $\sum_{n\geq 1} t_n$'nin yakınsak olması $\prod_{n\geq 1}(1+t_n)$'nin değişmeli yakınsaklığına denktir. Bunun bir sonucu olarak

$$\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^\sigma}\right) \text{ ve } \prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^\sigma}\right) \text{ çarpımları } \begin{cases}\sigma>1 \text{ için yakınsaktır.}\\ \sigma\leq 1 \text{ için ıraksaktır.}\end{cases}$$

Örnek 6.3.15. **[Euler Özdeşliği]** Sonsuz çoklukta olduğunu bildiğimiz asal sayılarımız küçükten büyüğe doğru $p_1, p_2, \ldots$ olarak sıralansın. Bu durumda

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-p_k^{-s}}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s},\quad s>1 \tag{6.25}$$

olduğunu savunuyoruz.

$$u_k := \frac{1}{1-p_k^{-s}}-1=\frac{1}{p_k^s-1} \text{ dersek } k\geq 2 \text{ için } 0<u_k<\frac{2}{p_k^s}. \tag{6.26}$$

(6.25) eşitliğinin sağ yanının yakınsaklığını analizden biliyoruz. O serinin bir alt serisi olarak $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{p_k^s}$ serisi yakınsaktır; dolayısıyla (6.26)'daki eşitsizlikler ile $\sum u_k$ serisi yakınsaktır. Ardından (6.3.13) bize $s>1$ için $\prod_{k\geq 1}(1+u_k)=\prod_{k\geq 1}\left(\frac{1}{1-p_k^{-s}}\right)$ çarpımının değişmeli yakınsaklığını verir. Böylece (6.25) eşitliğinin iki yanının yakınsak olduğunu gördük sıra eşitliklerini görmeye kaldı. $s>1$ için $0<p_k^{-s}<1$ olduğundan

$$\prod_{k\geq 1}\left(\frac{1}{1-p_k^{-s}}\right)=\prod_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq 0}p_k^{-ns}\right)=\prod_{k\geq 1}(1+p_k^{-s}+p_k^{-2s}+\cdots).$$

Bir an için sonsuz tane sonsuz çarpımda tıpkı sonlu toplamların sonlu çarpımlarında olduğu gibi dağıtma özelliğine sahip olduğumuzu *varsayarsak*

$$\prod_{k\geq 1}\left(\frac{1}{1-p_k^{-s}}\right) = 1 + \sum \left(p_{k_1}^{m_1}\cdot\dots\cdot p_{k_r}^{m_r}\right)^{-s} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$$

elde ederiz. Burada $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$ ve birbirinden farklı ve $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ alınacaktır. Burada, her $n \in \mathbb{N}^*$ doğal sayısının, terimlerin sırası dışında, tek bir biçimde $n = p_{k_1}^{m_1}\cdot\dots\cdot p_{k_r}^{m_r}$ gibi asal çarpanlarına ayrılmasını kullandık. Şimdi bir varsayıma dayanarak elde ettiğimizi gerçekten kanıtlamalıyız.

$P_m := \prod_{k=1}^m \left(\frac{1}{1-p_k^{-s}}\right)$ ve $\mathbb{N}_m$ ise 1 ve asal çarpanları $p_1, \dots, p_m$'ler arasında olan doğal sayıların kümesi olsun. KA I Seri Çarpımları Teoremi 1.3.9 ile

$$P_m = \prod_{k=1}^m \left(\frac{1}{1-p_k^{-s}}\right) = \left(\sum_{n\geq 0} p_1^{-ns}\right)\cdot\dots\cdot\left(\sum_{n\geq 0} p_m^{-ns}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}_m}\frac{1}{n^s}.$$

$\{1, 2, \dots, p_m\} \subset \mathbb{N}_m$ olduğundan, buradan $\mathbb{N}'_m := \mathbb{N}_m \backslash \{1, p_1, \dots, p_m\}$ ile

$$\sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n^s} < P_m = \sum_{n\in\mathbb{N}_m}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n^s} + \sum_{n\in\mathbb{N}'_m}\frac{1}{n^s} < \sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n^s} + \sum_{n>p_m}\frac{1}{n^s}$$

Bize $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinde bir $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı

$$\forall m \geq m_\varepsilon \quad \sum_{n>p_m}\frac{1}{n^s} < \varepsilon$$

olacak biçimde seçilebilir; bu ise her $m \geq m_\varepsilon$ için $0 < P_m - \sum_{n=1}^{p_m}\frac{1}{n^s} < \varepsilon$ demektir; dolayısıyla $\lim P_m = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$.

Holomorf Fonksiyonların Sonsuz Çarpımları

$X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ve $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ olsun. $p_n := \prod_{0\leq k\leq n} f_k$ olmak üzere $\prod f_n$ çarpımı için tanımlayacağımız kavramlar için önümüzde şu yollar vardır: Kavramlar (p_n) fonksiyon dizileri üzerinden, veya Logaritma Ölçütü'nden dolayı $\sum \operatorname{Log} f_n$ fonksiyon serileri üzerinden, veya (6.3.12) ile $u_n(z) := f_n(z) - 1$ yazarak $\sum u_n$ fonksiyon serileri üzerinden tanımlanabilirler; değişik kaynaklarda bunların üçü ile de karşılaşılır. Biz tanımlarımızı (p_n) dizileri üzerinden tanımlayacak, sonra onların $\sum u_n$ serileri türünden karşılıklarını vereceğiz. Her $x \in X$ için $\prod f_n(x)$ çarpımı yakınsak (veya değişmeli yakınsaksa) $\prod f_n$ çarpımı X'te **noktasal yakınsak** (veya **noktasal değişmeli yakınsak**tır) denir.

Tanım 6.3.16. *$X \neq \emptyset$, $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ve $p_n := \prod_{0\leq k\leq n} f_k$ olsun.*

(a) *$(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C}^*)$, $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}^*)$ ve $p_n \overset{X}{\Longrightarrow} f$ ise, $\prod f_n$ sonsuz çarpımı f fonksiyonuna* ***X'te düzgün $\mathbb{C}^*$-yakınsaktır*** *denir.*

(b) Bir m doğal sayısı, her $n \geq m$ için f_n fonksiyonlarının X'te sıfır yerleri olmayacak ve $\prod_{n\geq m} f_n$ sonsuz çarpımı X'te bir $\widehat{f_m} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}^*)$ fonksiyonuna X'te düzgün $\mathbb{C}^*$-yakınsak olacak biçimde bulunabiliyorsa, $\prod_{n\geq 0} f_n$ çarpımı **X'te $f := f_0 f_1 \cdots f_{m-1}\widehat{f_m}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır** denir.

Şunu belirtmekte yarar var: $\prod f_n$ çarpımı X'te f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve tanım 6.3.16'daki gibi $f := f_0 f_1 \cdots f_{m-1}\widehat{f_m}$ ise, $\widehat{f_m} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}^*)$ olduğu için, f fonksiyonunun X'teki sıfır yerlerinin kümesi, $f_0, , \ldots, f_{m-1}$ fonksiyonlarının sıfır yerleri kümelerinin birleşimidir. Ayrıca, her $x \in X$ için $\prod f_n(x)$ çarpımı Tanım 6.3.1 anlamında $f(x)$'e yakınsar.

Cauchy Ölçütü 6.3.3 düzgün yakınsaklık için aşağıdaki şekli alır ve onu görmeyi okura problem olarak bırakıyoruz:

Teorem 6.3.17 (Cauchy Ölçütü). *$\prod f_n$ çarpımının X'te düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için bir n_ε doğal sayısının, her $n > m \geq n_\varepsilon$ için $\left\|\prod_{m\leq k\leq n} f_k - 1\right\|_X < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir.*

Önsav 6.3.18. *$K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $(f_n) \subset \mathcal{C}(K)$ ve $f_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olsun. Bu koşullarda, her $g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ için $g \circ f_n \overset{K}{\Longrightarrow} g \circ f$.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. f sürekli olduğundan $L := f(K)$ kompakttır ve bir $\overline{D}_r$ kapalı topuna düşer. g sürekli fonksiyonu $\overline{D}_{r+1}$ kompakt kümesinde düzgün süreklidir. Dolayısıyla bir $0 < \delta \leq 1$ sayısı, her $w, \zeta \in \overline{D}_{r+1}$ için $|w - \zeta| \leq \delta$ ise $|g(w) - g(\zeta)| \leq \varepsilon$ olacak biçimde seçilebilir. $f_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olduğundan bir $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ile, her $n \geq N$ ve her $z \in K$ için $|f_n(z) - f(z)| \leq \delta$ olur. Tanım gereği $z \in K$ için $f(z) \in \overline{D}_r$ olduğundan, $n \geq N$ için $f_n(z) \in \overline{D}_{r+1}$ olur. Sonuçta, her $z \in K$ ve her $n \geq N$ için $|g(f_n(z)) - g(f(z))| \leq \varepsilon$ olur. □

Konumuz gereği biz holomorf fonksiyonların sonsuz çarpımları ile ilgileneceğiz. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ olsun. Holomorf serilerin incelenmesinde kompakt düzgün yakınsaklık ve normsal yakınsaklığın önemli kavramlar olduğunu biliyoruz. Benzeri holomorf fonksiyonların sonsuz çarpımları için de geçerlidir.

Teorem 6.3.19. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ olsun. Her kompakt $K \subset U$ kümesine karşılık bir n_K doğal sayısı*

(i) her $n \geq n_K$ için $\operatorname{Log} f_n$ fonksiyonu K'de tanımlı,

(ii) $\sum_{n\geq n_K} \operatorname{Log} f_n$ serisi K'de düzgün yakınsak

olacak biçimde bulunabiliyorsa, $p_n := \prod_{\nu=0}^{n} f_\nu$ olmak üzere, $(p_n) \subset \mathcal{H}(U)$ dizisi U'da bir $f \in \mathcal{H}(U)$ holomorf fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaktır.

Kanıt. $V \Subset U$ açık kümesi keyfi verilsin. $K := \overline{V} \subset U$ kompakttır. n_K ise (i) ve (ii)'yi sağlayacak biçimde seçilsin. Her şeyden önce $n \geq n_K$ için $s_{n_K,n} := \sum_{\nu=n_K}^{n} \operatorname{Log} f_\nu$ ve $g_K := \sum_{\nu \geq n_K} \operatorname{Log} f_\nu$ olmak üzere, hipotezimizden $s_{n_K,n} \overset{K}{\Longrightarrow} g_K$ olduğundan $g_K \in \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{H}(V)$ olur. Ayrıca, Önsav 6.3.18 ile

$$p_{n_K,n} := \prod_{\nu=n_K}^{n} f_\nu = e^{s_{n_K,n}} \overset{K}{\Longrightarrow} e^{g_K} =: \hat{f}_{n_K} = \prod_{\nu \geq n_K} f_v.$$

$p_{n_K-1} = f_0 f_1 \cdots f_{n_K-1}$ sınırlı olduğundan, $n \geq n_K$ için

$$p_n = p_{n_K-1} p_{n_K,n} \overset{K}{\Longrightarrow} \prod f_n = p_{n_K-1} e^{g_K} = f_0 f_1 \cdots f_{n_K-1} \widehat{f}_{n_K}. \tag{6.27}$$

Dolayısıyla (p_n) dizimiz U'da yerel düzgün, böylece kompakt düzgün yakınsaktır. $f := \lim p_n$ çarpımı U'da holomorf olan p_n fonksiyonlarının kompakt düzgün yakınsak limiti olarak U'da holomorftur. □

Gösterimler Teorem 6.3.19 ve kanıtındaki gibi olsun. (6.27) eşitliğinden dolayı, $f = \prod f_n = f_0 f_1 \cdots f_{n_K-1} e^{g_K}$ fonksiyonunun K'deki sıfır yerleri tamı tamına $f_0 f_1 \cdots f_{n_K-1}$ holomorf fonksiyonunun K'deki sıfır yerleridir. Ayrıca, her $z \in K$ için $\prod f_n(z)$ çarpımı Tanım 6.3.6 anlamında $f(z)$'ye yakınsak olduğu apaçıktır.

Teorem 6.3.20 (Logaritmik Türev Teoremi)**.** *Teorem 6.3.19'un koşullarına ek olarak, U bir bölge ve her n için $f_n \neq 0$ ise, U'da*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\left(\prod f_n\right)'(z)}{\prod f_n(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}, \quad z \in U \backslash \{z \mid f(z) = 0\} \tag{6.28}$$

meromorf fonksiyonlar serisi kompakt düzgün yakınsaktır.

Kanıt. Gösterimler 6.3.19'un kanıtındaki gibi olsunlar. V açık kümesinde $f = f_0 f_1 \cdots f_{n_K-1} e^{g_K}$ olduğundan, $h_K := e^{g_K}$ dersek,

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_{n_K-1}'}{f_{n_K-1}} + \frac{h_K'}{h_K}.$$

Diğer yandan $g_K = \sum_{n \geq n_K} \operatorname{Log} f_n$ serisi V'de düzgün yakınsak olduğundan terim terim türev alınabilir ve $g_K' = \sum_{n \geq n_K} (f_n'/f_n)$ serisi ise V'de kompakt yakınsaktır. Buradan

$$\frac{h_K'}{h_K} = g_K' = \sum_{n \geq n_K} (\operatorname{Log} f_n)' = \sum_{n \geq n_K} (f_n'/f_n)$$

elde edilir ve bu, savı verir. □

Teorem 6.3.19'un (i) ve (ii) koşullarını garantileyen kullanışlı koşullara bakalım. Şimdi $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ olmak üzere $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} 1$ olmasını istersek bir $N \in \mathbb{N}$ sayısını, her $n \geq N$ için $\|f_n - 1\|_X < 1$ olacak biçimde bulunabilir; dolayısıyla her $n \geq N$ için X'te $\operatorname{Log} f_n$ tanımlıdır ve (i) koşulu sağlanır. Aşağıdaki tanımda çıkış noktamız bu ve Sonuç 6.3.13'tür:

Tanım 6.3.21. $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\prod f_n$ çarpımı X'te **değişmeli düzgün yakınsak**tır (benzer biçimde **normsal yakınsak**tır) denir:

(i) $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} 1$. Bu durumda bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı ile her $n \geq N$ için $\operatorname{Log} f_n$ tanımlıdır.

(ii) N sayısı üstteki gibi olmak üzere, $\sum_{n \geq N} |\operatorname{Log} f_n|$ serisi X'te düzgün yakınsaktır (benzer biçimde $\sum_{n \geq N} \operatorname{Log} f_n$ serisi X'te normsal yakınsaktır, dd. $\sum_{n \geq N} \|\operatorname{Log} f_n\|_X < +\infty$).

Normsal yakınsaklık değişmeli düzgün yakınsaklıktan daha güçlüdür. $\prod f_n$ çarpımı X'te değişmeli düzgün yakınsaksa, her $x \in X$ için $\prod f_n(x)$ çarpımı değişmeli yakınsaktır. Bu durumda, her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tam eşlemesi için $\prod f_n = \prod f_{\sigma(n)}$.

Şimdi değişmeli düzgün yakınsaklık ve normsal yakınsaklık kavramlarını logaritmalardan kurtarıp daha kullanışlı hale getirelim.

Önsav 6.3.22. $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ *ve* $u_n = f_n - 1$ *olsun.*

(i) $\prod(1 + u_n)$ *çarpımı* X*'te değişmeli düzgün yakınsaktır* $\Longleftrightarrow$ $\sum |u_n|$ *serisi* X*'te düzgün yakınsaktır.*

(ii) $\prod(1+u_n)$ *çarpımı* X*'te normsal yakınsaktır* $\Longleftrightarrow$ $\sum u_n$ *serisi* X*'te normsal yakınsaktır, dd.* $\sum \|u_n\|_X < +\infty$.

Kanıt. Her iki önermede doğrudan Sonuç 6.3.13 ve (6.20)'den çıkar. Örnek oluşturmak üzere (ii)'yi kanıtlayalım:

(ii)$\Longrightarrow$: $\prod f_n$ çarpımı X'te normsal yakınsak olsun. Tanım 6.3.21(i)'den $\lim \|u_n\|_X = 0$. Ayrıca, (6.20) ile bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı, her $n \geq N$ için $\operatorname{Log} f_n$ tanımlı ve $\frac{1}{2}\|u_n\|_X \leq \|\operatorname{Log}(1 + u_n)\|_X = \|\operatorname{Log} f_n\|_X$ olacak biçimde vardır. O zaman $\sum_{n \geq N} \|u_n\|_X \leq 2 \sum_{n \geq N} \|\operatorname{Log} f_n\|_X < +\infty$. Dolayısıyla $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_X < +\infty$.

(ii)$\Longleftarrow$: $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_X < +\infty$ olsun. $u_n \overset{X}{\Longrightarrow} 0$, dolayısıyla $f_n = 1 + u_n \overset{X}{\Longrightarrow} 1$. Böylece Tanım 6.3.21(i) sağlanmıştır. Yine (6.20)'den bir N doğal sayısı, her $n \geq N$ için $\|\operatorname{Log} f_n\|_X \leq \frac{3}{2}\|u_n\|_X$ olacak biçimde bulunabilir. Böylece $\sum_{n \geq N} \|\operatorname{Log} f_n\|_X < +\infty$ olur. □

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ olmak üzere $\prod f_n$ çarpımı U'nun her kompakt altkümesinde değişmeli düzgün yakınsak (veya normsal yakınsaksa) $\prod f_n$

çarpımı U**'da kompakt değişmeli düzgün yakınsak**tır (veya U**'da kompakt normsal yakınsak**tır) diyelim. $\prod f_n$ çarpımı U'da kompakt değişmeli düzgün yakınsaksa (dd. U'da kompakt normsal yakınsaksa) Teorem 6.3.19 ve 6.3.20'nin koşulları sağlanır. Dolayısıyla aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 6.3.23. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ olmak üzere $\prod f_n$ çarpımı U'da değişmeli düzgün yakınsak (veya U'da kompakt normsal yakınsaksa) aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) $f := \prod f_n \in \mathcal{H}(U)$ *ve her* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tameşlemesi için* $\prod f_n = \prod f_{\sigma(n)}$.

(ii) *Her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $f = f_0 \cdots f_k \cdot \prod_{n \geq k+1} f_n$.

(iii) $\forall z \in U$ $(f(z) = 0 \iff \exists n \in \mathbb{N}\, f_n(z) = 0)$ *ve yalnızca sonlu sayıda n için* $f_n(z) = 0$ *olabilir. Her* $z \in U$ *için* $\operatorname{ord}_z f = \sum_{n \geq 0} \operatorname{ord}_z f_n$. *Eğer ayrıca U bir bölge ise, $f = 0$ olması için gerek ve yeter koşul en az bir n için $f_n = 0$ olmasıdır.*

(iv) *Eğer ayrıca U bir bölge ve her n için $f_n \neq 0$ ise, U'da*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\left(\prod f_n\right)'(z)}{\prod f_n(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}, \quad z \in U \backslash \{z \mid f(z) = 0\} \tag{6.29}$$

meromorf fonksiyonlar serisi kompakt düzgün yakınsaktır.

Kanıt. (i) ve (ii) Teorem 6.3.19'dan çıkar.

Şimdi (iii)'ü kanıtlayalım: $a \in U$ ise, $K = \{a\}$kompakt olduğundan, (6.27) geçerlidir. Dolayısıyla

$$f(a) = 0 \iff (f_0 f_1 \cdots f_{n_K - 1})(a) = 0$$

ve savımızın ilk kısmı buradan çıkar.

Şimdi U bir bölge olsun. En az bir n için $f_n = 0$ ise, $f = 0$ olduğu aşikardır. Tersine $f = 0$ olsun. $L := \overline{D}_r(a) \subset U$ seçilsin. Bu L için n_L sayısı Teorem 6.3.19'daki gibi seçilirse, $f|L \equiv 0$ olduğundan, $f_0, \ldots, f_{n_L - 1}$ fonksiyonlarının L'deki sıfır yerlerinin birleşimlerinin kümesi L olacaktır; dolayısıyla bu fonksiyonların en az birinin L'de sonsuz tane sıfır yeri vardır. L kompakt olduğundan bu sıfır yerlerinin L'de bir yığılma noktası vardır, böylelikle bu fonksiyon Özdeşlik Teoremi gereğince U'da özdeş olarak sıfır olur.

(iv) ise doğrudan Teorem 6.3.20'den çıkar. □

Örnek 6.3.24. [Euler'in sinüs formülü]

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.30}$$

Her $z \in \mathbb{C}$ için $f_0(z) = \pi z$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ içinse $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$ olarak tanımlansın. $K \subset \mathbb{C}$ herhangi bir kompakt küme ise, $m_K := \left\|z^2\right\|_K < +\infty$ olduğundan $\sum_{n \geq 1} \left\|z^2/n^2\right\|_K =$

$\sum_{n\geq 1} \frac{m_K}{n^2}$ yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{n\geq 1} \frac{z^2}{n^2}$ serisi $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktır ve $\prod_{n\geq 0} f_n$ çarpımı $\mathbb{C}$'de bir f holomorf fonksiyonuna kompakt normsal yakınsar. KA I Örnek 4.4.6 ve (6.3.23) ile $B := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \neq 0\}$ bölgesinde

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot \pi z = \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} \tag{6.31}$$

olur ve seri B'de kompakt normsal yakınsaktır. (6.31) eşitliğinden, B bölgesinde $f(z)$ ve $\sin \pi z$ fonksiyonlarının logaritmik türevleri birbirine eşittir; bunun bir sonucu olarak bir $c \in \mathbb{C}^*$ sabiti ile $f(z) = c \sin \pi z$ olur (bkz. KA I Problem 3.9.1).

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{\pi z} = 1 \text{ ve } \lim_{z\to 0} \frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1 \text{ olduğundan } c = 1 \text{ olur.}$$

(6.30) formülünde $z = \frac{1}{2}$ alırsak

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \prod_{n\geq 1} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \text{ (Wallis)}$$

formülünü ve $z = i$ alır ve $\sin \pi i = \frac{i}{2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$ olduğunu gözetirsek

$$\prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$

eşitliğini elde ederiz.

Problemler

Problem 6.3.1. $\prod_{n\geq 1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ve $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ çarpımları ıraksak olduğu halde, yine de $\prod_{n\geq 2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ çarpımının yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 6.3.2. $\prod_{n\geq 1}\left(1 + (-1)^{n+1}/n\right)$ çarpımının yakınsak, ancak değişmeli yakınsak olmadığını gösteriniz.

Problem 6.3.3. $\prod a_n$ çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısının, her $n \geq m \geq n_\varepsilon$ doğal sayları için $\left|\prod_{k=m}^{n} a_k - 1\right| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir (Cauchy Ölçütü).

Problem 6.3.4. $u_0, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$ için

$$p_n := \prod_{k=0}^{n} (1 + u_n) \quad \text{ve} \quad q_n := \prod_{k=0}^{n} (1 + |u_n|)$$

olsun. Bu durumda

$$q_n \leq e^{|u_0| + \cdots + |u_n|} \quad \text{ve} \quad |p_n - 1| \leq q_n - 1.$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem 6.3.5. Logaritma Ölçütü'ne başvurmadan Problem 6.3.4'ten yararlanarak $\prod(1 + |u_n|)$ yakınsaksa $\prod(1 + u_n)$'nin de yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 6.3.6. $\prod(1+u_n)$ yakınsaksa $\sum u_n$'nin yakınsak, tersine $\sum u_n$ yakınsaksa $\prod(1+u_n)$'nin yakınsak olması gerekmez; gösteriniz.

Problem 6.3.7. $\prod\left(1+\frac{i}{n}\right)$ yakınsak değil ancak $\prod\left|1+\frac{i}{n}\right|$ yakınsaktır. Kanıtlayınız.

Problem 6.3.8. Her n için $a_n \geq 0$ ve $a_n \neq 1$ olmak üzere $\prod(1-a_n)$ çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum a_n$ serisinin yakınsak olmasıdır.

Problem 6.3.9. $\prod_{n\geq 1}(1+z^n/n)$ çarpımının $\mathbb{D}$'de normsal yakınsak olduğunu ve tanımladığı f holomorf fonksiyonunun, her $n \in \mathbb{N}^*$ için mutlak değeri $\sqrt[n]{n}$ olan n basit kökünün olduğunu gösteriniz.

Problem 6.3.10. $\prod f_n$ çarpımının X'te düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için bir n_ε doğal sayısının, her $n > m \geq n_\varepsilon$ için $\left\|\prod_{m\leq k\leq n} f_k - 1\right\|_X < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir (düzgün yakınsaklık için Cauchy Ölçütü).

Problem 6.3.11. Her $a \in \mathbb{D}$ için $f(z) := \prod_{n\geq 1}(1+a^n z)$ çarpımının $\mathbb{C}$'de holomorf bir fonksiyon tanımladığını gösteriniz.

Problem 6.3.12. $\prod_{n\geq 2}\left[1+\frac{z}{n(\ln n)^2}\right]$ çarpımının bir tam fonksiyon tanımladığını gösteriniz.

Problem 6.3.13. Aşağıdaki çarpımların $\mathbb{C}$'de normsal yakınsak olduğunu gösteriniz:

$$\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad \text{ve} \quad \prod_{n\geq 1}\left[1+\frac{z(1-z)}{n(n+1)}\right]$$

Problem 6.3.14. (a) $0 < |a| < 1$ ve $|z| \leq r < 1$ ise

$$\left|\frac{a+|a|z}{(1-\overline{a}z)a}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < |a_n| < 1$ ve $\sum(1-|a_n|) < +\infty$ ise

$$B(z) := \prod_{n\geq 1}\frac{|a_n|}{a_n}\left(\frac{a_n - z}{1-\overline{a}_n z}\right)$$

çarpımının $\mathcal{H}(\mathbb{D})$'de yakınsak ve $|B(z)|$ olduğunu gösteriniz ($B(z)$'ye **Blaschke çarpımı** denir).

Problem 6.3.15. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sınırlı ise, sıfır yeri olmayan bir sınırlı $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ile $f = gB$ olduğunu gösteriniz (B Blaschke çarpımı).

Problem 6.3.16. $\prod_{n\geq 0}\left(1+z^{2^n}\right)$ çarpımının $\frac{1}{1-z}$ fonksiyonuna $\mathbb{D}$'de normsal yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 6.3.17. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$f_n(z) := \frac{n}{n+z}\left(\frac{n+1}{n}\right)^z, \ z \in \mathbb{C}\backslash\{-n\}$$

olsun. $f := \prod_{n\geq 1} f_n$ çarpımının $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}^*)$ 'da yakınsak ve orada bir holomorf fonksiyon tanımladığını gösteriniz. Ayrıca, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ve f'nin kutup yerlerinin kümesinin $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}^*)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 6.3.18. f bir önceki problemdeki fonksiyonsa, her $z-1 \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}^*)$ için

$$f(z-1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 6.3.19. $\sin 2x$ formülünden yola çıkarak aşağıdaki eşitliği kanıtlayınız:

$$\forall z \in \mathbb{C} \ \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{\pi z}{2^n}.$$

6.4 Weierstrass Çarpım Teoremi

$p(z) \in \mathbb{C}[z]$ bir polinom ve $p \neq 0$ olsun. p'nin 0'dan ve birbirinden farklı sıfır yerleri $a_1, \ldots, a_k$ ve bu noktaların katlılıkları $m_1, \ldots, m_k$ olsun. Eğer $z = 0$ da p'nin bir sıfır yeri ise bunun katlılığını m_0 ile gösterelim. Eğer $z = 0$ bir sıfır yeri değilse $m_0 = 0$ alıp $z^{m_0} = z^0 :\equiv 1$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$z^{m_0} \prod_{i=1}^{k} (z-a_i)^{m_i} \text{ veya } q(z) := z^{m_0} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)^{m_i}$$

polinomlarının sıfır yerleri ve bunların katlılıkları p polinomunun sıfır yerleri ve katlılıkları ile örtüşürler. Bir $0 \neq c \in \mathbb{C}$ ile, her $z \in \mathbb{C}$ için $p(z) = cq(z)$ olur. $n := m_1 + \cdots + m_k$ olmak üzere $a_1, \ldots, a_k$ sıfır yerlerini herhangi bir biçimde, her bir a_i tam m_i kez geçmek üzere $z_1, \ldots, z_n$ olarak sıralarsak $q(z)$ polinomunu $q(z) = z^{m_0} \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right)$ olarak da yazabiliriz. $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ holomorf fonksiyonunun sıfır yeri yoksa pg tam fonksiyonu ve p polinomunun sıfır yerleri ve onların katlılıkları örtüşürler.

Tersine herhangi bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonunun da sıfır yerleri p polinomumuzun sıfır yerleri ve onların katlılıklarıyla örtüşsün. Bu durumda $g := f/p$ fonksiyonunun bu sıfır yerlerinde kaldırılabilir tekil noktalar vardır ve bu fonksiyon $\mathbb{C}$'de sıfır yerleri olmayan bir tam fonksiyon tanımlar. Dolayısıyla, $\mathbb{C}$ basit bağlantılı olduğundan, KA I Teorem 2.12.6 (iv)'ten bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ile $g = e^h$ olur. Diğer yandan, her $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ için $e^h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonunun sıfır yerleri olmadığını gözetirsek şu sonuca ulaşırız: *p polinomu ile sıfır yerleri ve onların katlılıkları aynı olan tüm holomorf fonksiyonlar $\mathbb{C}$'de sıfıryerleri olmayan $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ holomorf fonksiyonları ile $f = pg$ fonksiyonlarıdır; $\mathbb{C}$ basit bağlantılı olduğu için bunlar tam da $f = pe^h$, $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonlarıdır.*

p polinomunun $a_1, \ldots, a_k$ sıfır yerleri için $a_i \neq 0$ ise, p polinomunu $p(z) = c\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)^{m_i}$ olarak yazmayı yeğleyeceğiz; bu durumda elbette $c = p(0)$.

Şimdi $0 \neq f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonunun sonsuz tane sıfır yeri varsa, onu da bir çarpım olarak yazabilir miyiz? $\mathbb{C}$ bir bölge ve $f \neq 0$ olduğundan, Özdeşlik Teoremi bize f'nin $A := \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = 0\}$ sıfır yerlerinin $\mathbb{C}$'de yerel sonlu olduğunu söyler. f'nin 0'dan farklı sıfır yerlerini, dd. $A^* := A\backslash\{0\}$ kümesinin ögelerini $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olacak biçimde sıralayalım. Her $r > 0$ için $\overline{D}_r$'de A'nın sonlu ögesi olduğundan $\lim a_n = \infty$ olur. f'nin a_i noktalarında m_i. dereceden sıfır yerleri olsun; f'nin 0'da m_0. dereceden bir sıfır yeri olsun ($0 \notin A$ ise $m_0 = 0$ alınacaktır). Yine A^* kümesinin ögelerini, her bir $a_i \in A^*$ tam m_i kez geçmek üzere $z_1, z_2, \ldots$ olarak sıralayalım. Yine $\lim z_n = \infty$. Eğer

$$z^{m_0} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{m_n} \text{ veya } z^{m_0} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \quad \left(z^0 \equiv 1!\right)$$

çarpımları bir g fonksiyonuna $\mathbb{C}$'de kompakt (değişmeli) düzgün yakınsaksa Teorem 6.3.23 bize $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olduğunu, f ve g fonksiyonlarının $\mathbb{C}$'de sıfır yerlerinin katlılıklarıyla birlikte örtüştüğünü söyler. Bu durumda yukarıdaki irdelemelerle bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ile $f = ge^h$ olur.

$\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ çarpımının bir K kompakt kümesinde değişmeli düzgün yakınsak olması Önsav 6.3.22'den dolayı, $\sum_{n \geq 1} \left|\frac{z}{z_n}\right|$ serisinin K'de düzgün yakınsak olmasına denktir. $c_K := \|z\|_K = \sup_{z \in K} |z|$ olmak üzere, her $z \in K$ için $\sum_{n \geq 1} \left|\frac{z}{z_n}\right| \leq c_K \sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|}$ olduğundan, eğer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|}$ serisi yakınsaksa $\sum_{n \geq 1} \left|\frac{z}{z_n}\right|$ serisi $\mathbb{C}$'de normsal yakınsak olur; dolayısıyla Teorem 6.3.23'ten $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ çarpımı $\mathbb{C}$'de holomorf bir f fonksiyonuna yakınsar. f fonksiyonun sıfır yerleri tamı tamına $f_n(z) = 1 - \frac{z}{z_n}$ çarpanlarının sıfır yerlerinden oluşur. Ancak $f_n(z) = 0 \iff z = z_n$ olduğundan, f'nin sıfır yerleri tam da $z_1, z_2, \ldots$ noktalarıdır.

Örnek olarak, her $n \geq 1$ için $n^2 \leq |z_n|$ ise, $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ çarpımı $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktır. Ancak genel durumda $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ çarpımının $\mathbb{C}$'de kompakt normsal (benzer biçimde kompakt değişmeli düzgün yakınsak) olması gerekmez. Weierstrass'ın yaklaşımı şöyledir: Her $n \geq 1$ için uygun seçilmiş ve sıfır yeri olmayan $g_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonları ile

$$\prod_{n \geq 1} \left[\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) g_n(z)\right] \tag{6.32}$$

çarpımının $\mathbb{C}$'de kompakt normsal (veya değişmeli düzgün) yakınsak olması sağlanabilir. O zaman bu çarpımın limiti istediğimiz türden bir fonksiyondur.

Tanım 6.4.1. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ bir açık küme ve $A \subset U$ kümesi ise U'da yerel sonlu olsun; ayrıca, her $a \in A$ için bir $m_a \in \mathbb{N}^*$doğal sayısı verisin. Bu durumda $\{(a, m_a) \mid a \in A\}$'ya U'da bir **W-dağılımı** denir[5]. Bir $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonuna, her $z \in U \backslash A$ için $f(z) \neq 0$ ve f'nin her $a \in A$ noktasında m_a. dereceden bir sıfır yeri varsa, bu dağılımın bir **çözümüdür** denir.

Weierstrass problemi Weierstrass dağılımlarının tüm çözümlerini bulmak demektir. Aslında Weierstrass, çarpım teoremini Mittag-Leffler Teoremi'nden önce kanıtlamıştır. Ancak son zamanlarda daha çok Weierstrass Çarpım Teoremi'nin Mittag-Leffler Teoremi üzerinden kazanıldığına tanık oluyoruz. Özünde bu teoremler birbirinden kazanılabilir; biraz ileride buna değineceğiz (bkz. 6.4.12). Biz bu teoremleri diğerine dayanmadan kanıtlamayı yeğliyoruz.

$\mathbb{D}$ simetrik, dd. $\mathbb{D} = -\mathbb{D}$ olduğundan, $1 \pm \mathbb{D} \subset D_1(1)$ olur. Dolayısıyla, her $z \in \mathbb{D}$ için $\operatorname{Log}(1+z)$ ve $\operatorname{Log}(1-z)$ fonksiyonları $\mathbb{D}$'de tanımlanmış ve orada holomorfturlar. $\mathbb{D}$'deki $(\operatorname{Log}(1+z))' = (1+z)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n$ ve $(\operatorname{Log}(1-z))' = -(1-z)^{-1} = -\sum_{n \geq 0} z^n$ özdeşliklerinden yola çıkıp $\overrightarrow{0z}$ gezisi üzerinden terim terim integral alarak, her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad \text{ve} \quad \operatorname{Log}(1-z) = -\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} \tag{6.33}$$

açılımlarına ulaşılır. $T_n(z) := \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k}$ ve $W_n(z) := \exp T_n(z)$ için

$$\operatorname{Log}[(1-z) W_n(z)] = \operatorname{Log}(1-z) + T_n(z) = -\sum_{k \geq n+1} \frac{z^k}{k} \tag{6.34}$$

elde edilir. Herhangi bir $K \subset \mathbb{D}$ kompakt kümesi verildiğinde, $\operatorname{Log}[(1-z)W_n(z)]$ fonksiyonu $\mathbb{D}$'de kompakt normsal yakınsak bir serinin kuyruğu olduğu için $\|\operatorname{Log}[(1-z)W_n(z)]\|_K$ istenildiği kadar küçük kılınabilir. Bundan, aşağıdaki teoremin kanıtında yararlanacağız:

Teorem 6.4.2 (Weierstrass Çarpım Teoremi I). *$\mathbb{C}$'de verilen her $\{(a, m_a) \mid a \in A\}$ W-dağılımının bir f çözümü vardır ve tüm çözümler ise sıfır yeri olmayan $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonları ile fh fonksiyonlarıdır.*

Kanıt. $A^* = A \backslash \{0\}$ kümesinin öğelerini, her bir $a \in A^*$ tam m_a kez geçmek üzere $z_1, z_2, \ldots$ olarak sıralayalım. Bir $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ pozitif sayılar dizisi $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n < +\infty$ olacak biçimde seçilsin. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\operatorname{Log}(1 - z_n^{-1} z)$ fonksiyonu $D_{|z_n|}(0)$ dairesinde holomorftur ve (6.33)'teki gibi orada kompakt normsal yakınsak bir $-\sum_{k \geq 1} k^{-1} (z_n^{-1} z)^k$ kuvvet serisine açılabilir. $K_n := \overline{D}_{2^{-1}|z_n|}(0)$ olmak üzere bir k_n sayısı ile $T_{k_n}(z_n^{-1} z) := \sum_{m=1}^{k_n} m^{-1} (z_n^{-1} z)^m$ Taylor polinomu

$$\left\| \operatorname{Log}(1 - z_n^{-1} z) + T_{k_n}(z_n^{-1} z) \right\|_{K_n} \leq \varepsilon_n$$

[5]Burada W bize Weierstrass'ı anımsatacaktır.

olacak biçimde seçilebilir.

$$f_n(z) := (1 - z_n^{-1}z)\exp T_{k_n}(z_n^{-1}z) = (1 - z_n^{-1}z)W_n(z_n^{-1}z)$$

olsun. $\prod_{n\geq 1} f_n$ çarpımının $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu savunuyoruz. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt kümesi keyfi verilsin. Bir $n_K \in \mathbb{N}^*$ sayısı, her $n \geq n_K$ için $K \subset K_n$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda

$$\sum_{n\geq n_K} \|\operatorname{Log} f_n\|_K = \sum_{n\geq n_K} \left\|\operatorname{Log}(1 - z_n^{-1}z) + T_{k_n}(z)\right\|_K = \sum_{n\geq n_K} \varepsilon_n < +\infty$$

olur ve bu, savımızı verir. Teorem 6.3.23'ten dolayı $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, ve f'nin sıfır yerleri ise f_n'lerin sıfır yerlerinden oluşur. Ancak, her f_n'nin bir tek sıfır yeri vardır ve o da z_n'dir. $f^* = \prod_{n\geq 1} f_n$ olsun.

Eğer $0 \notin A$ ise $f := f^*$, eğer $0 \in A$ ise $f(z) := z^{m_0} f^*(z)$ W-dağılımımızın bir çözümüdür. W-dağılımımızın tüm çözümlerinin, sıfır yeri olmayan $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonları ile fh fonksiyonları olduğunu daha önce tartıştık. □

Böylece $\mathbb{C}$'deki her W- dağılımının çözümü olduğunu gördük. Şimdi $(k_n) \subset \mathbb{N}$ dizilerini netleştirmek istiyoruz. Kanıtta kullandığımız $(1-z)e^{T_n(z)}$ tipindeki fonksiyonları yakından inceleyeceğiz. $E_0(z) := 1 - z$ ve

$$\forall n \geq 1 \quad E_n(z) := (1 - z)e^{T_n(z)} = (1 - z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}} \tag{6.35}$$

olarak tanımlanan $E_n(z)$ fonksiyonlarına **Weierstrass temel çarpanları** denir.

Önsav 6.4.3. *Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdakiler geçerlidir:*

$$\forall z \quad \left(|z| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow |\operatorname{Log} E_n(z)| \leq 2^{-n}\right) \tag{6.36}$$

$$\forall z \quad \left(|z| \leq 1 \Longrightarrow |1 - E_n(z)| \leq |z|^{n+1}\right). \tag{6.37}$$

Kanıt. (1) Önce (6.36)'yı kanıtlayalım. $|z| \leq \frac{1}{2}$ olsun. Savımız $n = 0$ için apaçık doğrudur. $n \geq 1$ içinse $E_n(z)$'nin tanımından

$$\begin{aligned}|\operatorname{Log} E_n(z)| &\leq \sum_{\nu\geq n+1} \left|\frac{z^\nu}{\nu}\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{n+1}(1 + |z| + |z|^2 + \cdots) \\ &\leq \frac{1}{n+1}\frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|} \leq \frac{2}{n+1}|z|^{n+1} \leq 2^{-n}.\end{aligned}$$

(2) Şimdi (6.37)'yi kanıtlayalım. $|z| \leq 1$ olsun. Savımız $n = 0$ için apaçık doğrudur. $n \geq 1$ keyfi verilip sabit tutulsun. $h := 1 - E_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olsun. $h(0) = 0$ ve basit bir hesaplama ile

$$h'(z) = -E_n'(z) = z^n \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right) \tag{6.38}$$

olduğu kolayca görülür. $h(0) = 0$ ve h''nün 0'da n. dereceden bir sıfır yeri olduğundan, h fonksiyonunun 0'da $(n+1)$. dereceden bir sıfır yeri vardır. Dolayısıyla $\varphi(z) := h(z)/z^{n+1}$ fonksiyonun kaldırılabilir bir tekilliği vardır. (6.38) eşitliğinden görülebileceği gibi h''nün 0'da seriye açılımının tüm katsayıları ≥ 0'dır. Böylece, $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$'nin 0'da seriye açılımı $\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ise, her n için $a_n \geq 0$ olur. Dolayısıyla, her $|z| \leq 1$ için

$$\left|\frac{1-E_n(z)}{z^{n+1}}\right| = |\varphi(z)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n z^n| \leq \sum_{n\geq 0} a_n |z|^n = \sum_{n\geq 0} a_n = \varphi(1) = 1$$

olur ve bu, savı verir. □

Teorem 6.4.4. *$\mathbb{C}$'de bir $\{(a, m_a)|a \in A\}$ Weierstrass dağılımı verilsin. $A^* := A\backslash\{0\}$'ın ögelerini, her a ögesi m_a kez geçmek üzere herhangi bir biçimde $z_1, z_2, \ldots$ olarak sıralayalım. Bir $(k_n) \subset \mathbb{N}$ dizisi, her $r > 0$ için*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{k_n+1} < +\infty \tag{6.39}$$

olacak biçimde seçilsin. Eğer $0 \notin A$ ise

$$g(z) := \prod_{n\geq 1} E_{k_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) = \prod_{n\geq 1}\left[\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\sum_{v=1}^{k_n}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{\nu}\right] \tag{6.40}$$

fonksiyonu, eğer $0 \in A$ ise $z^{m_0}g(z)$ fonksiyonu Weierstrass dağılımımızın bir çözümüdür. Tüm çözümler ise $0 \notin A$ ise $g(z)\exp h(z)$, $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $0 \in A$ ise $z^{m_0}g(z)\exp h(z)$, $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonlarıdır.

Sonuç 6.4.5. *$z^{m_0} \cdot \prod_{n\geq 1} E_{n-1}(z_n^{-1}z)$ W-dağılımımızın bir çözümüdür.*

Kanıt. Şimdi $r > 0$ keyfi verilsin. $\lim z_n = \infty$ olduğundan bir $n_r \in \mathbb{N}$ sayısı, her $n \geq n_r$ için $r \leq |z_n|$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda Önsav 6.4.3'ten, her $z \in \overline{D}_r(0)$ ve her $n \geq n_r$ için

$$\left|1 - E_{k_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{k_n+1} \leq \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{k_n+1}$$

elde ederiz. Bu ise, $\sum_{n\geq r}(1 - E_{k_n}(z/z_n))$ serisinin $\overline{D}_r(0)$'da normsal yakınsak olması demektir. Dolayısıyla $\sum_{n\geq 1}(1 - E_{k_n}(z/z_n))$ serisi $\overline{D}_r(0)$'da normsal yakınsaktır. $\mathbb{C}$'deki her kompakt küme bir $\overline{D}_r(0)$'ın içine düştüğünden, bu seri $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktır. Teorem 6.3.23'ten ise, (6.40)'taki çarpım $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsar ve $g(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in A^*$. Yine Teorem 6.3.23'ten $a \in A^*$ sıfır yerinin katlılığının m_a olduğunu elde ederiz.

Sonucun kanıtı: $r > 0$ keyfi verilsin. Bir n_r doğal sayısını, her $n > n_r$ için $|z_n| > 2r$ olacak biçimde seçersek $\sum_{n>n_r} |z_n^{-1} r|^n < \sum_{n>n_r} 2^{-n} < +\infty$. Böylece $k_n = n - 1$ ile (6.39) sağlanır. □

Not 6.4.6. Her şeyden önce (6.39)'u sağlayan (k_n) dizlerinin varlığını Önsav 6.2.5'ten biliyoruz. Gerçekten de $k_n = n - 1$ alınırsa (6.39)'un sağladığını okur kolayca görür.

Teorem 6.4.4'te bazı özel durumlarda (k_n) bir sabit dizi alınabilir. Örneğin $\sum \frac{1}{|z_n|}$ yakınsaksa, her n için $k_n = 0$ alınabilir. Bu durumda (6.40)

$$g(z) = \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

şeklini alır.

Eğer $\sum \frac{1}{|z_n|^2}$ yakınsaksa, her n için $k_n = 1$ alınabilir ve

$$g(z) = \prod_{n\geq 1} E_1\left(\frac{z}{z_n}\right) = \prod_{n\geq 1} \left[\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp \frac{z}{z_n}\right]$$

elde ederiz. Özel olarak, her $n \in \mathbb{N}^*$ için $z_n := n$ ise

$$g(z) = \prod_{n\geq 1} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp \frac{z}{n}\right]$$

fonksiyonu yalnızca $n \in \mathbb{N}^*$noktalarında birinci dereceden sıfır yerleri olan $\mathbb{C}$'de holomorf bir fonksiyondur. Bu örneklerde olduğu gibi (k_n) dizisinin sabit seçildiği çarpımlara **kanonik çarpım** denir.

Diğer yandan $n \geq 1$ için $|z_n| = \ln n$ ise, her $m \in \mathbb{N}$ için $\sum (1/|z_n|)^m = +\infty$ olacağından, bu durumda Weierstrass dağılımımızın kanonik çarpım olan bir çözümü yoktur.

Sonuç 6.4.7. *$\mathbb{C}$'de yığılma noktası olmayan, 0'dan ve birbirlerinden farklı $a_1, a_2, \ldots$ sayıları, $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olacak biçimde verilsinler ve $(m_n) \subset \mathbb{N}^*$ olsun. $(k_n) \subset \mathbb{N}$ dizisi, her $r > 0$ için*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{m_n}{k_n + 1} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{k_n+1} \tag{6.41}$$

serisi yakınsak olacak biçimde bulunabiliniyorsa

$$\prod_{n\geq 1} E_{k_n+1}^{m_n}(z) = \prod_{n\geq 1} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp \sum_{\nu=1}^{k_n+1} \frac{1}{\nu} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu}\right]^{m_n} \tag{6.42}$$

çarpımı $\mathbb{C}$'de bir f holomorf fonksiyonuna kompakt normsal yakınsaktır. Yalnızca a_n noktaları f'nin bir sıfır yeridir ve f'nin her bir a_n noktasında m_n. dereceden bir sıfır yeri vardır. (6.41) serisini yakınsak kılan k_n'ler daima vardır; örneğin $k_n = nm_n$ alınabilir. Eğer

$$\sum_{n\geq 1} \frac{m_n}{|a_n|^{k+1}} < +\infty \tag{6.43}$$

ise, her n için $k_n = k$ alınabilir.

Kanıt. $r > 0$ keyfi verilsin. $\lim a_n = \infty$ olduğundan bir $n_r \in \mathbb{N}$ sayısını, her $n \geq n_r$ için $|a_n| \geq 2r$ olacak biçimde seçebiliriz. Her $z \in \overline{D}_r(0)$ için $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{r}{|a_n|} \leq \frac{1}{2}$ olacağından, (6.36) ve (6.41)'den

$$\sum_{n\geq n_r} \left\|\operatorname{Log} E_{k_n+1}^{m_n}\right\|_{\overline{D}_r(0)} \leq \sum_{n\geq n_r} \frac{m_n}{k_n+1}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{k_n+1} < +\infty$$

olur. Her $K \subset \mathbb{C}$ kompakt kümesi bir $\overline{D}_r(0)$'a düştüğünden $\sum_{n\geq n_r} \operatorname{Log} E_{k_n+1}^{m_n}$ serisi, dolayısıyla $\sum_{n\geq 1} \operatorname{Log} E_{k_n+1}^{m_n}$ serisi $\mathbb{C}$'de normsal yakınsaktır. O halde $\prod_{n\geq 1} E_{k_n+1}^{m_n}(z)$ çarpımı $\mathbb{C}$'de holomorf bir f fonksiyonuna yakınsar ve f'nin sıfır yerleri $E_{k_n+1}^{m_n}(z)$ çarpanlarının sıfır yerleri ile örtüşür. Teoremin diğer savları apaçıktır. □

Teorem 6.4.8 (Weierstrass Çarpım Teoremi II)**.** *Her açık $U \subset \mathbb{C}$ kümesindeki her $\{(a, m_a) \mid a \in A\}$ Weierstrass dağılımının çözümü vardır.*

Kanıt. $U = \mathbb{C}$ durumunu Teorem 6.4.2'de kanıtladık. Şimdi $U \subsetneq \mathbb{C}$ olsun. Önce U'yu sınırlı seçebileceğimizi görelim. U sınırlı değilse bir $b \in \mathbb{C}\setminus U$ olmak üzere $h(z) := \frac{1}{z-b}$ ile tanımlanan $h : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü biholomorftur. Ancak şimdi $U' = h(U) \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı açık küme ve $A' := h(A)$ kümesi U''de yerel sonludur. U' ve A''nün belirlediği W-dağılımının g çözümleri bize başlangıçtaki W-dağlımının $g \circ h$ çözümlerini verir.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir açık küme olsun. A sonlu ise, $f(z) = \prod_{a\in A}(z-a)^{m_a}$ polinomu W-dağılımımızın bir çözümdür. A sonsuz olsun. O durumda A sayılabilir sonsuz ve U'da yerel sonludur. A'nın ögelerini, her bir $a \in A$ ögesi tam m_a kez geçecek biçimde $z_1, z_2, \ldots$ olarak sıralayalım. U sınırlı olduğundan ∂U kompakttır. Her z_n için bir $b_n \in \partial U$ noktası $d(z_n, b_n) = d(z_n, \partial U)$ olacak biçimde seçilebilir. A kümesi U'da yerel sonlu olduğundan $\lim |z_n - b_n| = 0$ olur. Dolayısıyla $r_n := 2|z_n - b_n|$ dersek $\lim r_n = 0$ olur.

$$f(z) := \prod_{n\geq 0} E_n\left(\frac{z_n - b_n}{z - b_n}\right) \tag{6.44}$$

fonksiyonunun Weierstrass dağılımımızın bir çözümü olduğunu savunuyoruz.

$K \subset U$ kompakt kümesi keyfi verilsin. ∂U ve K ayrık kompakt kümeler ve $\lim |z_n - b_n| = 0$ olduğundan, bir n_K doğal sayısı

$$\forall z \in K \quad \forall n \geq n_K \quad (|z - b_n| \geq d(K, \partial U) > r_n = 2|z_n - b_n|) \tag{6.45}$$

olacak biçimde seçilebilir. Dolayısıyla, her $n \geq n_K$ ve her $z \in K$ için

$$|(z_n - b_n)/(z - b_n)| \leq \frac{1}{2}$$

ve buradan ise Önsav 6.4.3 ile, her $n \geq n_K$ için

$$\left\| 1 - E_n\left(\frac{z_n - b_n}{z - b_n}\right) \right\|_K \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

olduğundan, Önsav 6.3.22 ile, $\prod_{n \geq 1} E_n\left(\frac{z_n - b_n}{z - b_n}\right)$ çarpımı K'de normsal yakınsaktır. Dolayısıyla bu çarpım U'da kompakt normsal yakınsaktır ve orada sıfır yerleri tamı tamına $z_1, z_2, \ldots$ olan bir holomorf fonksiyon tanımlar. □

Teorem 6.4.9. *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ise, her $h \in \mathcal{M}(U)$ meromorf fonksiyonuna karşılık $f, g \in \mathcal{H}(U)$ holomorf fonksiyonları $h = f/g$ olacak biçimde bulunabilir. Özellikle, her $\emptyset \neq B \subset \mathbb{C}$ bölgesi için*

$$\mathcal{M}(B) = \{f/g \,|\, f, g \in \mathcal{H}(B), g \neq 0\},$$

dd. $\mathcal{M}(B)$ cismi $\mathcal{H}(B)$ tamlık bölgesinin bölüm cismidir.

Kanıt. U için olan savı U'nun herhangi bir B bağlantılı bileşeni için kanıtlamak yeterlidir. B böyle bir bileşen olsun. KA I Teorem 3.9.9'dan $f, g \in \mathcal{H}(B)$ ve $g \neq 0$ ise, $f/g \in \mathcal{M}(B)$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi $h \in \mathcal{M}(B)$ keyfi verilsin. $h \in \mathcal{H}(B)$ ise, $f = h$ ve $g \equiv 1$ ile $h = f/g$ olur. Eğer $h \in \mathcal{M}(B) \backslash \mathcal{H}(B)$ ise, $A = P_h \neq \emptyset$ ve A kümesi B'de yerel sonludur. Her $a \in A$ noktasında h'nin m_a. dereceden bir kutup yeri olsun. (6.4.8)'den B'de $\{(a, m_a) \,|\, a \in A\}$ W-dağılımının bir $g \in \mathcal{H}(B)$ çözümü vardır. Bu durumda $B \backslash A$'da $f := hg$ fonksiyonu holomorftur ve f'nin her ayrık $a \in A$ tekil noktası bir kaldırılabilir tekil noktadır. Dolayısıyla f fonksiyonu B'ye holomorf genişletilebilir ve bu fonksiyonu da f ile gösterirsek $f, g \in \mathcal{H}(B)$ ve $h = f/g$ olur. □

Teorem 6.4.8'i $U \subset \mathbb{C}$ açık kümelerine şu şekilde genelleştireceğiz: A kümesi U'nun yerel sonlu bir alt kümesi olduğunda, her $a \in A$ için bir $m_a \in \mathbb{N}$ ve her $0 \leq n \leq m_a$ içinse $\alpha_{n,a}$ kompleks sayıları verilmiş olsunlar. Bu durumda bir $f \in \mathcal{H}(U)$ holomorf fonksiyonunun, her $a \in A$ için $f^{(n)}(a) = \alpha_{n,a}$ koşullarını sağlayacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayacağız. Bunun için basit bir ön hazırlık yararlı olacaktır.

g fonksiyonu $a \in A$ noktasının bir komşuluğunda holomorf olsun ve $m \geq 1$ olmak üzere a noktasında m. dereceden bir sıfır yeri bulunsun. $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ keyfi verilsinler ve

$$R(z) := \frac{c_1}{z-a} + \cdots + \frac{c_m}{(z-a)^m} \tag{6.46}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, gR ve g fonksiyonlarının a noktasının bir komşuluğunda

$$g(z)R(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{m-1}(z-a)^{m-1} + \cdots \tag{6.47}$$

ve $b_0 \neq 0$ olmak üzere

$$g(z) = (z-a)^m \left[b_0 + b_1(z-a) + \cdots + b_{m-1}(z-a)^{m-1} + \cdots\right] \tag{6.48}$$

gibi seri açılımları vardır. (6.46) eşitliğini (6.48) eşitliği ile çarpar ve (6.47) eşitliği ile kıyaslarsak

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_m \\ a_1 &= b_0 c_{m-1} + b_1 c_m \\ &\ \vdots \\ a_{m-1} &= b_0 c_1 + b_1 c_2 + \cdots + b_{m-1} c_m \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Sonuç olarak, $c_1, \ldots, c_m$ sayıları verilmişse, bu denklemle $a_0, \ldots, a_{m-1}$ katsayıları belirlenmiştirler. Tersine g verilmişse, dolayısıyla $b_0, \ldots, b_{m-1}$ verilmişse, $b_0 \neq 0$ olduğundan, bu denklemlerden sırasıyla $c_m, \ldots, c_1$ hesaplanır.

Teorem 6.4.10. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve A ise U'nun bir yerel sonlu altkümesi olsun. Her $a \in A$ için bir $m_a \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve her $0 \leq n \leq m_a$ içinse $\alpha_{n,a} \in \mathbb{C}$ sayıları verilmiş olsunlar. Bu koşullarda bir $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu, her $a \in A$ ve her $0 \leq n \leq m_a$ için $f^{(n)}(a) = n!\alpha_{n,a}$ olacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. $g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu $\{(a, m_a + 1) \mid a \in A\}$ Weierstrass dağılımının bir çözümü olsun. Yukarıdaki irdelemelerden, her $a \in A$ için $c_{1,a}, \ldots, c_{m_a,a} \in \mathbb{C}$ sayıları

$$R_a(z) := \frac{c_{1,a}}{z-a} + \cdots + \frac{c_{m_a,a}}{(z-a)^{m_a+1}}$$

olmak olmak üzere a'nın bir komşuluğunda

$$g(z)R_a(z) = \sum_{n=0}^{m_a} \alpha_{n,a}(z-a)^n + \sum_{n=m_a+1}^{+\infty} \beta_{n,a}(z-a)^n \tag{6.49}$$

olacak biçimde seçilebilirler. $h \in \mathcal{M}(U)$ fonksiyonu $\{(a, R_a) \mid a \in A\}$ ML-dağılımının bir çözümü ise, $f = gh \in \mathcal{H}(U)$ teoremimizin bir çözümüdür. $\square$

Şimdi KA I Altkısım 3.5.2'de söz ettiğimiz bir teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 6.4.11. *Her $U \subsetneq \mathbb{C}$ açık kümesine karşılık doğal sınırı ∂U olan bir $f \in \mathcal{H}(U)$ vardır.*

Kanıt. Teorem 6.4.8'in kanıtında olduğu gibi, U'yu sınırlı varsayabiliriz. Teoremi U'nun B bağlantılı bileşenleri için kanıtlamak yeterlidir. Böylece $B \subsetneq \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge olsun. Bu durumda ∂B sınırı $\mathbb{C}$'de kapalı ve sınırlı, dolayısıyla kompakt olur. Biz B'de yerel sonlu bir $A \subset B$ kümesini, her $c \in \partial B$ noktası A'nın bir yığılma noktası olacak biçimde oluşturacağız. ∂B'yi $c_1^1, \ldots, c_{m_1}^1$ merkezleri ∂B'de ve yarıçapları 1 olan sonlu sayıda $D_1^1, \ldots, D_{m_1}^1$daireleriyle örtebiliriz. Şimdi, her $1 \leq i \leq m_1$ için $a_i^1 \in B \cap D_i^1$ noktalarını keyfi seçelim. $A_1 := \{a_1^1, \ldots, a_{m_1}^1\}$ olsun. ∂B'yi $c_1^2, \ldots, c_{m_2}^2$ merkezleri ∂B'de ve yarıçapları $1/2$ olan sonlu sayıda $D_1^2, \ldots, D_{m_2}^2$daireleriyle örtebiliriz. Her $1 \leq i \leq m_2$ için $a_i^2 \in B \cap D_i^2$ noktalarını A_1'de olmayacak biçimde keyfi seçelim. $A_2 := \{a_1^2, \ldots, a_{m_2}^2\}$ olsun; elbette $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Böylece tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}^*$ için sonlu ve ikişer ikişer ayrık olan $A_1, A_2, \ldots$ kümelerini oluşturalım ve $A := \bigsqcup_{i \geq 1} A_i$ olsun. A kümesi B'de yerel sonludur ve her $s \in \partial B$ sınır noktası A'nın bir yığılma noktasıdır.

Teorem 6.4.8'den bir holomorf $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonu, sıfır yerlerinin kümesi A olacak biçimde bulunabilir. $s \in \partial B$ olmak üzere bir $D_r(s)$ dairesinde holomorf bir g fonksiyonu için $B \cap D_r(s)$'de $f = g$ ise, zorunlu olarak bu dairede $g \equiv 0$, dolayısıyla $B \cap D_r(s)$'de $f = 0$ olur ki bu, f'nin tanımıyla çelişir! $\square$

Teorem 6.4.12. *Weierstrass Çarpım Teoremi ve Mittag-Leffler Teoremi birbirlerinden kazanılabilirler.*

Kanıt. (1) $\left\{\left(a, m_a(z-a)^{-1}\right) | a \in A\right\}$ ML-dağılımı verilsin. Elimizde Weierstrass Çarpım Teoremi bulunsun. $A^* := A \setminus \{0\}$ kümesinin ögelerini $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olarak sıralayalım ve $m_n := m_{a_n}$ olsun. A^*'da çalışmak yeterlidir. Uygun seçilmiş ve sıfır yeri olmayan $g_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonları ile

$$f(z) := \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{m_n} g_n(z) \tag{6.50}$$

çarpımı $\{(a, m_a) \,|\, a \in A^*\}$ W-dağılımının bir çözümü olsun. g_n fonksiyonunu $h_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olmak üzere $g_n = e^{-h_n}$ olarak yazabiliriz. Bu durumda Logaritmik Türev Teoremi'nden

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{m_n}{z - a_n} - u_n(z)\right), \; u_n(z) = h_n'(z) \tag{6.51}$$

olduğundan, f'/f fonksiyonu $\left\{\left(a_n, m_n(z-a)^{-1}\right) |a_n \in A^*\right\}$ ML-dağılımının bir çözümüdür.

(2) Tersine $\{(a, m_a) \,|\, a \in A\}$ W-dağılımı verilsin. Elimizde Mittag-Leffler Teoremi bulunsun. g fonksiyonu $\left\{\left(a_n, m_a(z-a)^{-1}\right) |a \in A^*\right\}$ ML-dağılımının bir çözümü olsun. $B := \mathbb{C}\backslash A^*$ bölgesinden bir $b \in B$ noktasını keyfi seçip sabit tutalım. Her $z \in B$ ve $\gamma_z \in \mathcal{G}^i_{b,z}(B)$ integral gezileri için $\mathbf{H}(z;\gamma_z) := \int_{\gamma_z} g$ olarak tanımlayalım. $\mathbf{H}(z;\gamma_z)$ değeri genelde γ_z gezisine bağlıdır. Ancak, her $\eta_z \in \mathcal{G}^i_{b,z}(B)$ için $\gamma_z - \eta_z$ gezisi B'de bir kapalı gezi olduğundann KA I Kalan Teoremi 4.2.1 ile

$$\mathbf{H}(z;\gamma_z) - \mathbf{H}(z;\eta_z) = \int_{\gamma_z - \eta_z} g \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Dolayısıyla $\exp \int_{\gamma_z} g = \exp \int_{\eta_z} g$ olur ve $f(z) := \exp \int_{\gamma_z} g$ tanımı kusursuzdur. Tanım gereği, her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$. Şimdi $f \in \mathcal{H}(B)$ olduğunu görelim: $a \in B$ keyfi verilsin ve $D_r(a) \subset B$ olsun. G fonksiyonu ise g'nin $D_r(a)$'da bir ilkeli olsun. $G(a) = 0$ seçebiliriz. Bu durumda, bir $\gamma_a \in \mathcal{G}^i_{b,a}(B)$ ile, her $z \in D_r(a)$ için

$$f(z) = \exp\left(\int_{\gamma_a + \overrightarrow{az}} g\right) = \left(\exp \int_{\gamma_a} g\right)\left(\exp \int_{\overrightarrow{az}} g\right) = f(a)G(z)$$

olur. Dolayısıyla f önce $D_r(a)$'da, ardından B'de holomorftur. Şimdi f fonksiyonunun, $\mathbb{C}$'ye, her $a \in A^*$ noktasında m_a.cı dereceden bir sıfır yeri olacak biçimde, holomorf genişletilebileceğini göstereceğiz.

Her şeyden önce yukarıdaki denklemden kolayca B'de $f'/f = g$ olduğu kolayca görülür. Şimdi $r > 0$ sayısını $A \cap D^*_r(a) = \emptyset$ olacak biçimde seçelim ve $D^*_r(a)$'da $F(z) := (z-a)^{-m_a} f(z)$ olarak tanımlayalım. F fonksiyonunun a noktasına, $F(a) \neq 0$ olacak biçimde, holomorf genişletilebileceğini gösterirsek işimiz biter. $D^*_r(a)$'da

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{m_a}{z-a} = g(z) - \frac{m_a}{z-a}$$

olur. Bu eşitliklerde en sağdaki terim, g Mittag-Leffler dağılımının bir çözümü olduğundan, a noktasına holomorf genişletilebilir. Dolayısıyla F'/F fonksiyonu a noktasına holomorf genişler; öyleyse F fonksiyonu a noktasına, $F(a) \neq 0$ olacak biçimde holomorf genişler. Bu, işimizi bitirir.[6] □

Örnek 6.4.13. Örnek 6.3.24'te (6.30) sinüs formülünü kanıtlamıştık. O formülü Weierstrass çarpım teoreminden kolayca elde edebiliriz. $\sin \pi z$ fonksiyonunun sıfır yerleri $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesidir ve her bir $n \in \mathbb{Z}$ noktasında $\sin \pi z$ fonksiyonunun bir basit sıfır yeri vardır.

[6] Berlin'de Weierstrass'ın ders ve konferanslarına katılan Mittag-Leffler, Çarpım Teoremi'nden haberdardır. Kendisi, bu teoremin benzeri olan, Mittag-Leffler Teoremi olarak adlandırdığımız teoremi kanıtlamıştır. Weierstrass onun kanıtını hantal bulur, kendisi bir kanıt verir; kitabımızdaki kanıt Weierstrass'a aittir. Ancak Mittag-Leffler'in asıl hedefi daha büyüktü: Sonsuz çoklukta kutup yerleri ve esas tekillikleri olan fonksiyonların belirlenmesi. Buysa tam yedi yılını almıştır!

$\mathbb{Z}^*$'ın ögelerini $1, -1, 2, -2, \ldots$ olarak sıralayalım. Bu diziye $a_1, a_2, \ldots$ dersek $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^2} = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$ olduğundan, Not 6.4.6'da belirtiği gibi, her $k_n = 1$ alınabilir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} g(z) &= z \prod_{n\geq 1} E_1\left(\frac{z}{a_n}\right) = z \prod_{n\geq 1} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp \frac{z}{a_n}\right] \\ &= z\left(1 - \frac{z}{1}\right) e^{\frac{z}{1}} \left(1 - \frac{z}{-1}\right) e^{\frac{z}{-1}} \left(1 - \frac{z}{2}\right) e^{\frac{z}{2}} \left(1 - \frac{z}{-2}\right) e^{\frac{z}{-2}} \cdots \\ &= z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

fonksiyonu yalnızca $\mathbb{Z}$'nin noktalarında basit sıfır yerleri olan $\mathbb{C}$'de holomorf bir fonksiyondur. Bu durumda bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ile

$$\sin \pi z = e^{h(z)} z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

olur. Bu çarpım $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsak olduğundan, Logaritmik Türev Teoremi'nden

$$\cot \pi z = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

elde ederiz. Buradan KA I Örnek 4.4.6'da verilen Kotanjant Teoremi ile $h'(z) \equiv 0$, dolayısıyla $h = c$ sabit olur. $C := e^c$ olsun. Böylece $z \neq 0$ için

$$\frac{\sin \pi z}{z} = C \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

ve bu eşitlikte sağ yanda $\mathbb{C}$'de holomorf bir fonksiyon bulunduğundan, iki tarafta da $z \to 0$ için limite geçersek $\pi = C$ elde ederiz. Yeniden

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

sinüs formülüne ulaşırız.

Örnek 6.4.14. $\mathbb{R}$-bağımsız $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$'lar verilsin ve $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}_2\omega_2$ kafesi olsun.

$$\sigma(z) := \sigma_\Omega(z) := z \prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} E_2\left(\frac{z}{\omega}\right) = z \prod_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2}$$

çarpımı 6.4.3 ve KA I Önerme 1.4.19'dan görüleceği gibi $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktır. Dolayısıyla σ_Ω fonksiyonu yalnızca Ω'nın noktalarında sıfır değerini alır ve her bir $\omega \in \Omega$ birinci derecden bir sıfır yeridir. Bu fonksiyona 6.7.4 altkısmında tekrar döneceğiz.

Problemler

Problem 6.4.1. $|E_n(z) - 1| \leq 3\,|z|^{n+1}, \ |z| \leq \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.4.2. $\prod_{n\geq 1} E_m(z/2^n)$ çarpımının yakınsak olduğu en küçük $m \in \mathbb{N}$ sayısını bulunuz.

Problem 6.4.3. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdaki önermelerin eşit olduğunu kanıtlayınız:

(i) $f = g^n$ olacak biçimde bir $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ vardır.
(ii) f'nin her sıfır yerinin katlılığı n'ye bölünebilir.

Problem 6.4.4. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f, g \in \mathcal{H}(B)\backslash\{0\}$ ise, $f_1, g_1, h \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonlarının B'de ortak sıfır yerleri olmayacak, ancak $f = hf_1, g = hg_1$ olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.

Problem 6.4.5. Her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z+1) = f(z)$ bağıntısını sağlayan ve sıfır yerleri tamı tamına $e^z - 1$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin eşlenikleri olan bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ bulunuz (Problem 6.7.6'dan yararlanınız).

Problem 6.4.6. Aşağıdaki denklemlerde birini kanıtlayıp diğerini Logaritmik Türev Teoremi'nden kazanınız:

$$e^z - 1 = ze^{z/2} \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\right)$$

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2z \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Problem 6.4.7. Aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz:

(i) $\sinh \pi z = \pi z \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right).$

(ii) $\cos \pi z = \prod_{n \geq 0} \left[1 - \left(\frac{z}{n + \frac{1}{2}}\right)^2\right].$

Problem 6.4.8. $0 \neq f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonunun tüm sıfır yerleri ikinci dereceden ise, bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ile $f = h^2$ olduğunu gösteriniz.

6.5 $\mathcal{H}(U)$'nun cebirsel Yapısı

Biz halkalara ve cebirlere ilişkin temel kavramları biliniyor varsayacak, ancak bizi ilgilendiren kavramlara kısaca değineceğiz. $\mathbb{C}$'de boştan farklı bir U açık kümesi verildiğinde $\mathcal{H}(U)$ kümesi, $f, g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları arasında tanımlanan $+$ ve $\cdot$ işlemlerine göre birim ögeli bir değişmeli halkadır. U'da özdeş olarak 0 değerini alan fonksiyonu yine yalın olarak 0 ile ve özdeş olarak 1 değerini alan fonksiyonu yine yalın olarak 1 ile gösterirsek 0 ve 1 fonksiyonları sırasıyla $\mathcal{H}(U)$ halkasının sıfır ve birim ögeleridirler. Bu nedenle, biz bu kısımda *birim ögeli değişmeli* $(R, +, \cdot)$ *halkalarına* odaklanacağız, ayrıca 0 ve 1 bu halkanın sıfır ve birim ögeleri ise, tıpkı $\mathcal{H}(U)$ halkasında olduğu gibi, *daima* $0 \neq 1$ *olduğunu varsayacağız.* Biz $\mathcal{H}(U)$'nun ayrıca bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı, dolayısıyla bir $\mathbb{C}$-cebiri olduğunu biliyoruz ve $\mathcal{H}(U)$'da tanımlanmış bir topolojimiz de var.

Şimdi R yukarıdaki koşulları sağlayan bir halka, dd. birim elemanlı ve $0 \neq 1$ olan bir değişmeli halka olsun. $\mathfrak{a} \subset R$ altkümesine, $(\mathfrak{a}, +)$ bir grup ve her $r \in R$

için $r\mathfrak{a} \subset I$ ise R halkasında bir **ideal** denir. Her $a, a_1, \ldots, a_n \in R$ için

$$\langle a \rangle := Ra \text{ ve } \langle a_1, \ldots, a_n \rangle := Ra_1 + \cdots + Ra_n$$

birer idealdirler. Herhangi bir $\mathfrak{a} \subset R$ idealine bir $a \in R$ ile $\mathfrak{a} = Ra$ ise bir **esas ideal**, eğer bazı $a_1, \ldots, a_n \in R$ ögeleri ile $\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ ise **sonlu tiptendir** veya **sonlu üretilmiştir** denir. R halkasındaki her ideal esas idealse R bir **esas ideal halkasıdır**, eğer R'deki her ideal sonlu tiptense R bir **Noether halkasıdır** denir. $a, b \in R$ olmak üzere bir $c \in R$ ögesi $a = bc$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, b ögesi a'yı **böler** denir ve bu $b|a$ olarak gösterilir. 1'in bölenlerine **birim** denir. Birimler her $r \in R$ ögesinin bir bölenidirler; bu nedenle ilginç olan birim olmayan bölenlerdir. Bir $p \in R$ ögesine, her sonlu $a_1, \ldots, a_n \in R$ için

$$p|a_1 \ldots a_n \Longleftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots n\}\, p|a_i$$

ise bir **asal** öge denir. $\emptyset \neq A \subset R$ ve $b \in R$ olmak üzere, her $a \in A$ için $b|a$ ise, b ögesi A'nın bir bölenidir denir. $c \in R$ ögesi A'nın bir böleni ve A'nın her b böleni için $b|c$ ise, c'ye A'nın bir **en büyük ortak böleni** denir ve kısaca $\operatorname{ebob} A$ ile gösterilir. En büyük ortak bölenler *birim çarpanlar dışında* tek olarak belirlidirler. A'nın en büyük ortak böleni 1 ise, A kümesi **göreceli asaldır** veya A'nın öğeleri **aralarında asaldır** denir.

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ boştan farklı bir açık küme olsun. Her $f \in \mathcal{M}(U)$ fonksiyonu,

$$(f)(z) := \operatorname{ord}_z f,\ z \in U$$

olarak tanımlarsak, doğal olarak bir $(f) : U \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu tanımlar. f fonksiyonu U açık kümesinin hiçbir bileşeninde özdeş olarak sıfır değilse, (f) fonksiyonunun $\operatorname{des}(f) = \{z \in U \,|\, (f)(z) \neq 0\}$ desteği, U'da yerel sonlu $Z_0(f, U)$ ile yine U'da yerel sonlu olan f'nin $Z_\infty(f, U)$ kutup yerlerinin ayrık bileşimidir. Bu nedenle $\operatorname{des}(f)$ kümesi U'da yerel sonludur. Özellikle, her $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesi ve her $f \in \mathcal{M}(B)$ için $\operatorname{des}(f)$ kümesi B'de yerel sonludur. Desteği yerel sonlu olan $\mathfrak{d} : U \to \mathbb{Z}$ dönüşümlerine U'da **bölen**ler diyecek ve

$$\operatorname{Div} U := \{\mathfrak{d} \,|\, \mathfrak{d} : U \to \mathbb{Z};\, \operatorname{des}\mathfrak{d},\, U\text{'da yerel sonlu}\}$$

kümesine U'nun bölenleri diyeceğiz. $\mathfrak{d} \geq 0$ olan bölenlere **pozitif** denir. $f \in \mathcal{M}(U)$ için $Z_0(f, U)$ kümesi U'da yerel sonlu ise $(f) \in \operatorname{Div} U$ olur; bu tipteki (f) bölenlerine **anabölenler** denir. ve $\operatorname{des}(f) = Z_0(f, U)$ olduğu apaçıktır.

U açık kümesindeki her $W = \{(a, m_a) \,|\, a \in A\}$ W-dağılımına

$$\forall z \in U \text{ için } \mathfrak{w}(z) := \begin{cases} m_z, & z \in A \\ 0, & z \in U \setminus A \end{cases}$$

olarak tanımlanan bir $\mathfrak{w} \geq 0$ böleni, tersine $\mathfrak{d} \geq 0$ olan her $\mathfrak{d} \in \operatorname{Div} U$ bölenine U'da $\{(b, m_b) \,|\, b \in \operatorname{des}\mathfrak{d}\}$ olarak tanımlanan bir W-dağılımı karşılık gelir. Teorem 6.4.4 ve 6.4.9'u aşağıdaki gibi de dile getirebiliriz:

Teorem 6.5.1. *Her $\mathfrak{b} \in \operatorname{Div} U$ böleni bir $f \in \mathcal{M}(U)$'ya ilişkin, her pozitif $\mathfrak{b} \in \operatorname{Div} U$ böleni ise bir $f \in \mathcal{H}(U)$'ya ilişkin anabölenidir.*

$\mathcal{H}(U)$'yu incelemek, U'nun her bir B bağlantılı bileşeninde $\mathcal{H}(B)$'yi incelemeye denk olduğundan, bazı önermeleri $\mathcal{H}(B)$ için kanıtlayacağız. Bu kısımda U daima $\mathbb{C}$'nin boştan farklı bir açık kümesini, B ise U'nun bir bağlantılı bileşenini göstersin. $\mathcal{H}(U)^* := \mathcal{H}(U) \setminus \{0\}$ olsun.

Teorem 6.5.2 (Bölüm Ölçütü)**.** *$f, g \in \mathcal{H}(U)^*$ için*
(i) $f|g \iff (f) \leq (g)$ ve
(ii) $f|g \implies Z_0(f,U) \subset Z_0(g,U)$.

Kanıt. $f|g \iff \exists h \in \mathcal{H}(U)\, g = fh \iff \forall z \in B \operatorname{ord}_z g = \operatorname{ord}_z f + \operatorname{ord}_z h \iff (g) \geq (f)$. Diğer sav apaçıktır. □

Önerme 6.5.3. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\emptyset \neq F, G \subset \mathcal{H}(U)$ olsun.*

(i) F göreceli asaldır $\iff \bigcap_{f \in F} Z_0(f,U) = \emptyset$, dd. F'deki f'lerin ortak sıfır yeri yoktur.

(ii) $f = \operatorname{ebob} F$ ve $g = \operatorname{ebob} G$ ise, $\operatorname{ebob}\{f,g\} = \operatorname{ebob}(F \cup G)$.

(iii) $(h) = \min_{f \in F}(f)$ koşulunu sağlayan her $h \in \mathcal{H}(U)$ için $h = \operatorname{ebob} F$.

Kanıt. Doğrudan tanımlardan ve (6.5.2)'den çıkar. □

$\emptyset \neq B \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $\mathcal{H}(B)$'nin asal ögeleri, her $b \in B$ için $p_b(z) := z - b$ fonksiyonları ve elbette bunların birimlerle çarpımlarıdır. Dolayısıyla *$f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonunun sonsuz tane sıfır yeri varsa, bu fonksiyon sonlu sayıda asal ögenin çarpımı olarak yazılamaz!*

Önerme 6.5.4. *$U \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ açık kümeleri için $\mathcal{H}(U)$ bir Noether halkası değildir, dolayısıyla bir esas ideal halkası da değildir.*

Kanıt. U'da herhangi bir sayılabilir sonsuz ve yerel sonlu A kümesini seçelim. $\mathfrak{a} := \{f \in \mathcal{H}(U) \,|\, A \setminus Z_0(f,U) \text{ sonlu}\}$ olsun. $\mathfrak{a}$'nın bir ideal olduğu apaçıktır; bu idealinin sonlu tipten olduğunu varsayalım. Bu durumda $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(U)$ ögeleri $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ olacak biçimde vardır. Bu durumda, her $f \in \mathfrak{a}$ için $S := \bigcap_{i=1}^n Z_0(f_i, U) \subset Z_0(f,U)$ olacaktır. Elbette S kümesi U'da yerel sonludur ve $A \setminus S$ ise sonludur. Şimdi herhangi bir $c \in S$ ögesini seçelim ve Weierstrass Çapım Teoremi'ne göre sıfır yerlerinin kümesi $S \setminus \{c\}$ olan bir $g \in \mathcal{H}(U)$ oluşturalım. $\mathfrak{a}$'nın tanımı gereği $g \in \mathfrak{a}$ ancak $S \not\subset Z_0(g,U)$, çelişki! □

Önerme 6.5.5. *$F \neq \emptyset$ ve $F \neq \{0\}$ koşulunu sağlayan her $F \subset \mathcal{H}(U)$ kümesinin en büyük ortak böleni vardır.*

Kanıt. $\mathfrak{b} := \min\{(f) \,|\, 0 \neq f \in F\} \in \operatorname{Div} U$ olsun. $g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonunu (6.5.1)'e göre $(g) = \mathfrak{b}$ olacak biçimde seçersek (6.5.2) ile $g = \operatorname{ebob} F$ olur. □

Önsav 6.5.6 (Wedderburn). *$f_1, f_2 \in \mathcal{H}(U)$ aralarında asal iseler, $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları*

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1 \tag{6.52}$$

olacak biçimde bulunabilirler.

Kanıt. İlki Wedderburn'e ait olmak üzere iki kanıt vereceğiz. Her şeyden önce $f_1 = f_2$ ise, koşulumuz, her $z \in U$ için $f_1(z) \neq 0$ anlamına geleceğinden, $g_1 = g_2 = \frac{1}{2f_1}$ ile sav aşikardır. Fonksiyonlardan biri, örneğin $f_2 = 0$ ise, (6.5.3)(i)'den dolayı, her $z \in U$ için $f_1(z) \neq 0$ olur. Bu kez $g_1 := \frac{1}{f_1}$ ve $g_2 = 1$ işimizi görür. Kanıtın kalanını U'nun herhangi bir bağlantılı bileşeni B için kanıtlamak yeterlidir.

Birinci kanıt: Şimdi $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(B)$ olmak üzere yukarıdaki irdelemelerden dolayı $f_1 f_2 \neq 0$ varsayabiliriz. Koşulumuzdan $Z_0(f_1, U) \cap Z_0(f_2, U) = \emptyset$ olduğundan, $1/f_1 f_2 \in \mathcal{M}(B)$ ve bu fonksiyonun kutup yerlerinin kümesi $Z_0(f_1, U) \sqcup Z_0(f_2, U)$ ayrık birleşimidir. Mittag-Leffler Teoremi 6.3.3'ten dolayı, kutup yerleri $Z_0(f_i, U)$ ve her $a \in Z_0(f_i, U)$ de derecesi $-\operatorname{ord}_a f_i$ olan kutup yerlerine sahip $m_i \in \mathcal{M}(B)$ fonksiyonları ile

$$\frac{1}{f_1 f_2} = m_1 + m_2$$

dolayısıyla $g_1 := m_2 f_2$ ve $g_2 := m_1 f_1$ fonksiyonları holomorfturlar ve $1 = g_1 f_1 + g_2 f_2$.

İkinci kanıt: $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(U)$ aralarında asal olduklarından $Z_0(f_1, U)$ ve $Z_0(f_2, U)$ ayrıktır. Bir an için $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(U)$ ile $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $U \backslash Z_0(f_1, U)$ kümesinde $g_1 = (1 - g_2 f_2)/f_1$ olmalı ve bu fonksiyon $Z_0(f_1, U)$ kümesine holomorf genişletilebilmelidir. Bu durumda g_2 fonksiyonu için $Z_0(1 - g_2 f_2, U) \subset Z_0(f_1, U)$ olmalı ve her $a \in Z_0(f_1, U)$ için

$$m_a := \operatorname{ord}_a f_1 \leq \operatorname{ord}_a (1 - g_2 f_2) \tag{6.53}$$

sağlanmalıdır. Buradan sırasıyla $h := 1 - g_2 f_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
0 &= h(a) = 1 - g_2(a) f_2(a) \\
0 &= h'(a) = -g_2'(a) f_2(a) - g_2(a) f_2'(a) \\
&\vdots \\
0 &= h^{m_a - 1}(a) = -g^{(m_a - 1)}(a) f_2(a) - \cdots - g_2(a) f_2^{(m_a - 1)}(a)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $f_1(a) = 0 \Longrightarrow f_2(a) \neq 0$ olduğundan bu denklem sisteminden, her $a \in S_{f_1}$ için $g_2(a), \ldots, g^{(m_a - 1)}(a)$ hesaplanır. Teorem 6.4.10 ise bize bu koşulları sağlayan bir $g_2 \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonunu oluşturabileceğimizi söyler ve bu, kanıtı tamamlar. $\square$

Önerme 6.5.7. *$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}(U)$, $(n \geq 2)$ fonksiyonlarının bir en büyük ortak böleni d ise, $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları*

$$h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n = d \tag{6.54}$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. n üzerinden tümevarım uygulayacağız. $n = 2$ olsun. Bu durumda f_1/d ve f_2/d aralarında asal olacaklarından, (6.5.6) ile $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları $h_1 (f_1/d) + h_2 (f_2/d) = 1$ olacak biçimde bulunabilir. Elbette $h_1 f_1 + h_2 f_2 = d$.

Şimdi $n \geq 3$ ve sav $n-1$ için kanıtlanmış olsun. $d := \text{ebob}\{f_1, \dots, f_n\}$ ve $d^* := \text{ebob}\{f_2, \dots, f_n\}$ olsun. Önerme 6.5.3(ii)'den $d = \text{ebob}\{f_1, d^*\}$. Az önce kanıtlanandan $\exists h_1, h^* \in \mathcal{H}(U) : d = h_1 f_1 + h^* d^*$. Diğer yandan, tümevarım koşulundan $\exists h_2^*, \dots, h_n^* \in \mathcal{H}(U) : d^* = \sum_{i=2}^n h_i^* f_i$. Böylece $2 \leq i \leq n$ için $h_i := h^* h_i^*$ alırsak $d = \sum_{i=1}^n h_i f_i$ olur. □

Sonuç 6.5.8. *$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}(U)$ aralarında asalsa $\langle f_1, \dots, f_n \rangle = \mathcal{H}(U)$.*

Kanıt. Varsayımdan $\text{ebob}\{f_1, \dots, f_n\} = 1$ olduğundan, Önerme 6.5.7'den

$$\exists h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}(U) \quad h_1 f_1 + \cdots + h_n f_n = 1.$$

Dolayısıyla $1 \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle$, bunun sonucu ise $\langle f_1, \dots, f_n \rangle = \mathcal{H}(U)$. □

Problemler

Problem 6.5.1. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ise, her sonlu üretilmiş $\mathfrak{a} \subset \mathcal{H}(B)$ idealinin bir esas ideal olduğunu kanıtlayınız.

Problem 6.5.2. Her $\mathfrak{a} \subset \mathcal{H}(U)$ esas idealinin $\mathcal{H}(U)$ topolojik uzayında kapalı olduğunu gösteriniz.

Problem 6.5.3. U açık kümesindeki herhangi bir W-dağılımının f, g gibi iki çözümü için $\langle f \rangle = \langle g \rangle$ olduğunu; tersine bir $\mathfrak{a} \subset \mathcal{H}(U)$ esas idealinin için $\mathfrak{a} = \langle f \rangle = \langle g \rangle$ ise, f ve g'nin U'da aynı W-dağılımını belirlediğini gösteriniz.

Problem 6.5.4. $U \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ açık ve $A \subset U$ yerel sonlu ve sonsuz olsun. A'nın ögeleri $a_1, a_2, \dots$ olarak sıralansın. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için f_n fonksiyonu $W_n := \{(a_k, 1) \mid k \geq n\}$ dağılımının bir çözümü ise, $\mathfrak{a} = \langle f_1, f_2, \dots \rangle$ idealinin sonlu üretilemeyeceğini kanıtlayınız (bu (6.5.4)'ün ikinci kanıtı olur.).

6.6 Gamma Fonksiyonu

Doğal sayılar için $0! = 1$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için $n! := 1 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ bize bir

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, \ \ f(n) := (n-1)! \tag{6.55}$$

fonksiyonun verir; $f(n)$'in değerinin $n!$ değilde $(n-1)!$ olarak tanımlanması yalnızca tarihi nedenledir. f fonksiyonu tümevarımla

$$f(1) := 1 \text{ ve } n \in \mathbb{N}^* \text{ için } f(n+1) := nf(n) \tag{6.56}$$

olarak tanımlanır. Bu f fonksiyonunu ilk Euler bir $\Gamma : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ reel analitik fonksiyonuna genişletmiştir. Biraz ileride Euler'e dayanan bir tanımı vereceğiz. Fakat Gauss daha baştan bu fonksiyonun $\mathbb{C}$'ye genişletilmesi gerektiğini savunmuştur. Konumuz bağlamında biz elbette ilk baştan

$$f(1) = 1 \text{ ve } \forall z \in \mathbb{C}: \ f(z+1) = zf(z) \tag{6.57}$$

koşulunu sağlayan bir *holomorf* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun peşine düşeceğiz. Ancak (6.57) koşulunu sağlayan her f fonksiyonunun zorunlu olarak $-\mathbb{N}$'nin noktalarında birinci dereceden kutup yerleri olduğunu kanıtlayacağız ve böylece f için "holomorfluk" isteğinden vazgeçip "*meromorfluk*" ile yetineceğiz.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu (6.57)'yi sağlasın. Tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f(z+n+1) &= z(z+1)\cdot \cdots \cdot (z+n)\cdot f(z), \text{ ardından} \\ (z+n)\cdot f(z) &= \frac{f(z+n+1)}{z(z+1)\cdot \cdots \cdot (z+n-1)} \end{aligned}$$

elde ederiz. f en azından sürekli ise

$$\lim_{z\to -n} (z+n)\cdot f(z) = \frac{1}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{6.58}$$

olur. Bu demektir ki f'nin her $n \in \mathbb{N}$ için $-n$'de birinci dereceden bir kutup yeri vardır ve oradaki kalanı ise $(-1)^n/n!$'dir.

Sonuçta aradığımız, $-\mathbb{N}$'nin noktalarında birinci dereceden kutup yerleri olan bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N})$ fonksiyonudur, öyle ki

$$f(1) = 1 \text{ ve her } z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N} \text{ için } f(z+1) = zf(z) \tag{6.59}$$

olsun. Her şeyden önce şunu belirtelim ki, (6.59)'u sağlayan bir fonksiyon varsa, bu tek olarak belirli değildir. Eğer f fonksiyonu (6.59)'u sağlarsa, $f^*(z) = f(z)\cos 2\pi z$ fonksiyonu da (6.59)'u sağlar. f_1 ve f_2 fonksiyonları (6.59)'daki ikinci eşitliği sağlıyorlarsa, 1 sayısı f_1/f_2 fonksiyonun bir periyodudur. f_2 fonksiyonu (6.59)'un bir çözümü ve p ise 1 periyotlu ve $p(1) = 1$ koşulunu sağlıyorsa, $f_1 = pf_2$ de (6.59)'u sağlar(Problem 6.6.1).

Biz Euler, Gauss ve Weierstrass'ın (6.59)'u sağlayan Γ_E, Γ_G ve Γ_W çözümlerini verecek ve bunların birbirine eşit olduklarını kanıtlayacağız. Bu kanıttan sonra bu fonksiyonlar için Γ gösterimini kullanacağız. Ancak önce parametrik integrallere ilişkin bir teorem kanıtlayacağız.

Teorem 6.6.1. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in \mathbb{R}$ ve $f : B \times [a,+\infty) \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. Bir $M : [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ fonksiyonu ile $\int_a^{+\infty} M$ yakınsak ve*

$$\forall (z,t) \in B \times [a,+\infty) \text{ için } |f(z,t)| \le M(t)$$

olsun. Bu durumda $\int_a^{+\infty} f(z,t)dt$ integrali B'de düzgün ve mutlak yakınsaktır. Her $t \in [a,+\infty)$ için $f(\cdot,t) \in \mathcal{H}(B)$ ise, $z \in B$ için $g(z) := \int_a^{+\infty} f(z,t)dt$ ile tanımlanan g fonksiyonu B'de holomorftur.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $b \ge a$ sayısı $\int_b^{+\infty} M \le \varepsilon$ olacak biçimde seçilsin.

$$\forall z \in B \quad \forall c \ge b \quad \left|\int_b^c f(z,t)dt\right| \le \int_b^c |f(z,t)|\,dt \le \int_b^c M \le \varepsilon.$$

B'deki düzgün ve mutlak yakınsaklık Cauchy Yakınsaklık Ölçütü'nden çıkar. KA I Teorem 2.5.6'dan dolayı, her $a < r < s < +\infty$ için $g_{r,s}(z) := \int_r^s f(z,t)dt$ fonksiyonu B'de holomorftur. $a < r_n < s_n < +\infty$, $r_n \searrow a$, $s_n \nearrow +\infty$ olmak üzere $g_n(z) := g_{r_n,s_n}(z)$ ile tanımlanan $(g_n) \subset \mathcal{H}(B)$ dizisi B'de g'ye düzgün yakınsar; dolayısıyla $g \in \mathcal{H}(B)$. □

Euler Yaklaşımı: Her $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$\Gamma_E(n) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-1}dt$$

dersek okur kolayca $\Gamma_E(1) = 1$ ve kısmi integralle ($u(t) = t^{n-1}$, $v'(t) = e^{-t}$), $\Gamma_E(n+1) = n\Gamma_E(n)$ olduğunu görür. Bu $\Gamma_E : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ fonksiyonu (6.56)'yı sağlar. Gerçel analizde Euler'in bu Γ_E fonksiyonunu $(0,+\infty)$ aralığına

$$\Gamma_E(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \quad t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t} \tag{6.60}$$

ile genişlettiğini görürüz. Elbette $\Gamma_E > 0$. Bu fonksiyon $\mathbb{C}^+$'ya

$$\Gamma_E(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt, \quad t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} \tag{6.61}$$

olarak taşınır. $z = x+iy$, $x > 0$ için $\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = e^{-t}t^{x-1}$ olduğundan, (6.61)'deki integral Teorem 6.6.1'den dolayı mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla *bu denklem $\mathbb{C}^+$'da bir holomorf fonksiyon tanımlar.* Bunu şöyle de görebiliriz. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$f_n(z) := \int_{1/n}^{n} e^{-t}t^{z-1}dt, \quad z \in \mathbb{C}^+$$

olarak tanımlansın. KA I Teorem 2.5.6'dan dolayı $f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$. $\left|t^{z-1}\right| = t^{x-1}$ olduğundan, (f_n) dizisi $0 < a \le b < +\infty$ olmak üzere, her $\overline{S_{a,b}} = \{z =$

$x + iy | a \leq x \leq b\}$ kapalı dikey şeridinde düzgün yakınsaktır. Weierstrass yakınsaklık teoreminden dolayı

$$\Gamma_E(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n\to+\infty} f_n(z)$$

$\mathbb{C}^+$'da holomorftur. Ayrıca, her $z \in \mathbb{C}^+$ için $\Gamma_E(z) \neq 0$, $\Gamma_E(1) = 1$ ve

$$\begin{aligned} \Gamma_E(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = -\int_0^{+\infty} t^z d(e^{-t}) \\ &= \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma_E(z) \end{aligned}$$

olduğundan, Γ_E fonksiyonumuz (6.57)'yi sağlar. Öyleyse, yukarıdaki gibi $z \in \mathbb{C}^+$ için

$$\Gamma_E(z+n+1) = z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)\cdot\Gamma_E(z) \tag{6.62}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\mathbb{C}^+_{-n} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -n\}$ olmak üzere (6.62) denklemi Γ_E fonksiyonunu $\mathbb{C}^+_{-n} \setminus \{0, -1, \ldots, -(n-1)\}$'e

$$\Gamma_E(z) := \frac{\Gamma_E(z+n+1)}{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)} \tag{6.63}$$

olarak genişletmemizi sağlar. $n \in \mathbb{N}^*$ keyfi olduğundan ve tüm bu genişletmeler $\mathbb{C}^+$'da çakıştıklarından, sonuçta (6.61) ile tanımlanan Γ_E fonksiyonumuzu, $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$'de holomorf, $\mathbb{C}$'de meromorf ve yine Γ_E ile göstereceğimiz bir fonksiyona genişlettik. Γ_E aradığımız tipten bir fonksiyondur.

Gauss Yaklaşımı: f fonksiyonunu Gauss $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$'e, her $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ için

$$\Gamma_G(z) := \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z \cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)} \tag{6.64}$$

olarak tanımlayarak genişletir. Bu tanımın bir dayanağı, bir mantığı ne olabilir? $m, n \in \mathbb{N}^*$ için

$$(m-1)! = \frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdot\cdots\cdot(m+n)} n^m \left[\frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n}\cdots\frac{n+m}{n}\right]$$

özdeşliğinde köşeli parantez içindeki sayı $n \to +\infty$ için 1'e yakınsadığından

$$(m-1)! = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\cdot n^m}{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)\cdot\cdots\cdot(m+n)} \tag{6.65}$$

olur. Gauss (6.65)'te m yerine herhangi bir $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ koymuştur. Bir an her $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ için (6.64)'teki limitin varlığını varsayarsak okur kolayca $\Gamma_G(1) = 1$

ve $\Gamma_G(z+1) = z\Gamma_G(z)$ olduğunu görür. Ayrıca, biraz ileride (6.64) limitlerinin varlığını, $\Gamma_G \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N})$ ve f'nin her bir $k \in -\mathbb{N}$'de birinci dereceden kutup yeri olduğunu kanıtlayacağız. Dolayısıyla Γ_G de aradığımız tipten bir fonksiyondur.

Weierstrass: Şimdi biz $\Gamma_E \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ve Γ_E'nin kutup noktalarının kümesinin $-\mathbb{N}$ ve Γ_E'nin her bir $k \in -\mathbb{N}$'de birinci dereceden bir kutup yeri olduğunu biliyoruz. Ayrıca, her $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ için $\Gamma_E(z) \neq 0$. Dolayısıyla $1/\Gamma_E$ yalnızca $-\mathbb{N}$'ın noktalarında birinci dereceden sıfır yeri olan $\mathbb{C}$'de holomorf bir fonksiyondur. Weierstrass için, aradığımız fonksiyona Γ_W dersek, $1/\Gamma_W$ fonksiyonu yalnızca $-\mathbb{N}$'ın noktalarında birinci dereceden sıfır yeri olan $\mathbb{C}$'de holomorf bir fonksiyon olmalıdır. Şimdi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{-n}\right|^2$ yakınsak olduğundan, $1/\Gamma_W$ fonksiyonu

$$g(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \tag{6.66}$$

tipinde olacaktır(bkz. s.454). Şimdi h'yi uygun seçersek $g(1) = 1$ ve

$$g(z+1) = \frac{1}{\Gamma_W(z+1)} = \frac{1}{z\Gamma_W(z)} = \frac{1}{z} g(z), \text{ dd. } g(z) = zg(z+1) \tag{6.67}$$

eşitliklerinin sağlanabileceğini görelim. h'yi böyle seçebileceğimizi göstereceğiz, ancak önce gerçel analizden bir bilgiyi aktaracağız. $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$a_n := \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n$$

pozitif terimli azalan bir dizidir; dolayısıyla yakınsaktır. $E := \lim a_n$'e **Euler sabiti** denir.[7]

Teorem 6.6.2.

$$\Gamma_W(z) := e^{-Ez} \cdot \frac{1}{z} \cdot \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1} e^{z/m}$$

ile tanımlanan Γ_W fonksiyonu $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$'de holomorftur ve orada

$$\Gamma_W(z+1) = z\Gamma_W(z) \text{ ve } \Gamma_W(1) = 1 \tag{6.68}$$

eşitliklerini sağlar. Γ_W'nın her $n \in \mathbb{N}$ için $-n$'de birinci dereceden bir kutup yeri vardır ve oradaki kalanı ise $\frac{(-1)^n}{n!}$'dir. Ayrıca, her $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ için $\Gamma_W(z) \neq 0$.

[7] E yerine γ ve C gösterimleri daha yaygındır. Biz yavaşça kullanıma giren E'yi seçtik. Bu sayının değeri $E = 0.57721566490\ldots$ şeklindedir . Bugün için E sayısının rasyonel mi irrasyonel mi olduğu bilinmemektedir.

Kanıt. $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$g_n(z) := e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} = e^{h(z) - z\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}} \frac{1}{n!} \prod_{m=0}^{n} (z+m)$$

olmak üzere (6.66)'dan $g(z) = \lim_{n\to+\infty} g_n(z)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{zg(z+1)}{g(z)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{zg_n(z+1)}{g_n(z)} = \lim_{n\to+\infty} e^{h(z+1)-h(z)-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}} (z+n+1) \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{h(z+1)-h(z)-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}} \cdot e^{\ln n} \cdot \frac{1}{n}(z+n+1) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \exp\left[h(z+1) - h(z) - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} + \ln n\right] \cdot \frac{z+n+1}{n} \\
&= \exp[h(z+1) - h(z) - E].
\end{aligned}$$

Eğer (6.67)'nin sağlanmasını istiyorsak $\exp[h(z+1) - h(z) - E] \equiv 1$, dd. $h(z+1) - h(z) - E \equiv 0$ olan bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonuna gereksinimiz var. $h(z) = Ez$ bu işi görür. (6.66)'da $h(z) = Ez$ alarak elde ettiğimiz

$$g(z) = e^{Ez} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \tag{6.69}$$

ile $\Gamma_W = 1/g$ olur. g fonksiyonunu (6.67) sağlanacak biçimde belirlediğimizden, her $z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ için $\Gamma_W(z+1) = z\Gamma_W(z)$ sağlanır. Ayrıca

$$G(z) := \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{6.70}$$

olmak üzere, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$z \cdot e^{E(z+1)} \cdot (z+1) \cdot G(z+1) = z \cdot g(z+1) = g(z) = z \cdot e^{Ez} \cdot G(z).$$

Dolayısıyla $z \in \mathbb{C}^*$ için

$$e^{E} \cdot (z+1) \cdot G(z+1) = G(z)$$

Ancak G fonksiyonu 0'da sürekli olduğundan, $z \to 0$ için limite geçersek $e^E G(1) = G(0) = 1$ elde ederiz. Böylelikle $\Gamma_W(1) = e^{-E} \cdot 1 \cdot (G(1))^{-1} = 1$ elde edilir. $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olduğundan g'nin kutup yeri yoktur; dolayısıyla $\Gamma_W = 1/g$'nin sıfır yeri yoktur. Kalanla ilgili savımızın (6.68) denklemlerinin bir sonucu olduğunu bu kısmın başında tartıştık. □

Önerme 6.6.3. $\Gamma_W = \Gamma_G$.

Kanıt. (6.69)'dan yola çıkarak $p_n(z) = e^{Ez} \cdot z \cdot \prod_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}$ olarak tanımlarsak

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_{n\to+\infty} p_n(z) = \lim_{n\to+\infty} e^{Ez} \cdot \frac{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)}{n!} e^{-z\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{z\left(E-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}+\ln n\right)} \cdot e^{-z\ln n} \cdot \frac{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)}{n!} \qquad (6.71) \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{z\left(E-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}+\ln n\right)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)}{n!\cdot n^z} \qquad (6.72) \\ &= 1 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)}{n!\cdot n^z}. \end{aligned}$$

Burada, (6.71)'deki limit ve (6.72)'deki ilk limit var; bu ikinci limit 0'dan farklı olduğu için (6.72)'deki parçalama geçerlidir. $\mathbb{C}\setminus-\mathbb{N}$'de $g(z) \neq 0$ olduğu için

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus-\mathbb{N}: \ \Gamma_W(z) = \frac{1}{g(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\cdot n^z}{z(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)} = \Gamma_G(z).$$

Γ_G ve Γ_W fonksiyonlarının her ikisi de (6.57) eşitliklerini sağladığından, her $n \in \mathbb{N}$ için $-n$'de kalanı $(-1)^n/n!$ olmak üzere birinci dereceden kutup yerleri olan fonksiyonlardır. Böylece $\mathbb{C}$'de $\Gamma_G = \Gamma_W$. □

Böylece (6.64)'teki limitin varlığını da kanıtlamış olduk.

Teorem 6.6.4. $\Gamma_E = \Gamma_G = \Gamma_W$.

Kanıt. Önerme 6.6.3'ten $\Gamma_W = \Gamma_G$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\Gamma_G, \Gamma_E \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Bu nedenle Özdeşlik Teoremi'nden dolayı $(0,+\infty)$'da $\Gamma_E = \Gamma_G$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \geq 1$ olsun.

$$\Gamma_n(x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds, \ \left(s = \frac{t}{n}\right). \qquad (6.73)$$

olarak tanımlansın. Kısmi integral alarak

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)ds = \left[\frac{s^x}{x} - \frac{s^{x+1}}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x(x+1)}. \qquad (6.74)$$

Şimdi (6.73)'te kısmi integrasyon alırsak

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \frac{n^x}{x} \int_0^n (1-s)^n d(s^x) = -\frac{n^x}{x} \int_0^n s^x d(1-s)^n \\ &= \frac{n^{x+1}}{x} \int_0^1 s^x (1-s)^{n-1} ds = \left(\frac{n}{n-1}\right)^x \frac{n}{x} \Gamma_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$

Bu adım $n-1$ kez tekrarlanır ve (6.74) gözetilirse

$$\Gamma_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-2)}\Gamma_1(x+n-1) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

elde edilir. Böylece, her $x \in (0,+\infty)$ için

$$\Gamma_E(x) = \lim_{n\to+\infty}\Gamma_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma_G(x)$$

olur. $\mathbb{C}^+$'da holomorf olan Γ_E ve Γ_G fonksiyonları $(0,+\infty)$'da çakıştıkları için, Özdeşlik Teoremi'nden dolayı $\mathbb{C}^+$'da $\Gamma_E = \Gamma_G$ olur. □

Daha önce de söylediğimiz gibi, bundan böyle Γ_E, Γ_G ve Γ_W yerine yalın olarak Γ yazacağız. Böylece, her $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^z\cdot n!}{z\cdot(z+1)\cdot\cdots\cdot(z+n)}\\ &= e^{-Ez}\cdot\frac{1}{z}\cdot\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}\cdot e^{z/m}\end{aligned}$$

Önerme 6.6.5 (Euler)**.** $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$ *ve* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Kanıt. G, (6.70) ile tanımlanan fonksiyon olsun. Weierstrass'ın tanımı gereği $\Gamma(z) = 1/\left(e^{Ez}zG(z)\right)$. Şimdi $G(z)$'nin $-\mathbb{N}^*$'da birinci dereceden sıfır yerleri var. Dolayısıyla

$$G(z)G(-z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \quad (6.75)$$

fonksiyonun $\mathbb{Z}^*$'da birinci dereceden sıfır yerleri var. Ancak $\frac{\sin\pi z}{\pi z}$'nin de $\mathbb{Z}^*$'da birinci dereceden sıfır yerleri var. (6.75)'i (6.30) Euler sinüs formülü ile kıyasladığımızda

$$G(z)G(-z) = \frac{\sin\pi z}{\pi z}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}\Gamma(1-z)\Gamma(z) &= (-z)\Gamma(-z)\Gamma(z) = (-z)\frac{1}{e^{-Ez}(-z)G(-z)}\frac{1}{e^{Ez}zG(z)}\\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{G(-z)G(z)} = \frac{1}{z}\frac{\pi z}{\sin\pi z} = \frac{\pi}{\sin\pi z}.\end{aligned}$$

Bu formülde $z = \frac{1}{2}$ alırsak $\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi$, dolayısıyla $(0+\infty)$'da $\Gamma > 0$ olduğundan $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olur. □

Euler gamma fonksiyonunu tanımladıktan sonra matematikçiler $f(z+1) = zf(z)$ denkleminden yola çıkarak Γ fonksiyonunu diferansiyel denklemler yardımıyla belirlemeye çalışmıştır. Ancak 1887'de Hölder, Γ fonksiyonunun "*aşkın biçimde aşkın*" olduğunu kanıtladı. Bundan kastedilense hiçbir $0 \neq P \in \mathbb{C}[X, X_0, \ldots, X_n]$ polinomu için

$$P(z, \Gamma(z), \Gamma'(z), \ldots, \Gamma^{(n)}(z)) \equiv 0$$

olmadığıdır. Kanıt, böyle bir özdeşliğin $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ile bağdaşmadığı üzerine kuruludur.

$(\ln\Gamma)''(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{(x+n)^2}\right) > 0$ olduğundan(Problem 6.6.6) $\ln\Gamma$ fonksiyonu $(0,+\infty)$'da dışbükeydir[8]. Bohr-Møllerup $\ln\Gamma$ fonksiyonunun $(0,+\infty)$ aralığında dışbükey olmasından yola çıkarak $\Gamma|(0,+\infty)$'yı belirleyen aşağıdaki teoreme ulaştılar:

Teorem 6.6.6 (Bohr-Møllerup)**.** $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *için*

(i) $f(1) = 1$*,*

(ii) $f(x+1) = xf(x)$ *ve*

(iii) $\ln f$ *dışbükeyse(konveksse)*

her $x \in (0,+\infty)$ *için* $f(x) = \Gamma(x)$*.*

Kanıt. (ii)'den dolayı f'nin $(0,+\infty)$ aralığındaki değerlerinin $(0,1]$ aralığındaki değerleriyle tek olarak belirli olduğu tümevarımla kolayca görülür. Şimdi $0 < x \leq 1$ ve $n > 1$ bir doğal say olsun. Bu durumda $n-1 < n < n+x \leq n+1$ olur. $\ln f$ dışbükey olduğundan,

$$\frac{\ln f(n) - \ln f(n-1)}{n-(n-1)} < \frac{\ln f(n+x) - \ln f(n)}{(n+x)-n} \leq \frac{\ln f(n+1) - \ln f(n)}{(n+1)-n}.$$

(ii) ile $\ln f(n) = \ln(n-1) + \ln f(n-1)$, $\ln f(n+1) = \ln n + \ln f(n)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \ln(n-1) &< \frac{\ln f(n+x) - \ln f(n)}{x} \leq \ln n \\ x\ln(n-1) &< \ln\frac{f(n+x)}{f(n)} \leq x\ln n \\ (n-1)^x f(n) &< f(n+x) \leq n^x f(n) \end{aligned} \tag{6.76}$$

elde ederiz. (ii)'den

$$f(n+x) = (n-1+x)(n-2+x)\cdots(1+x)xf(x)$$

[8] $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ olmak üzere $G_f^+ := \{(x,y) \,|\, x \in I,\ f(x) \leq y\}$ kümesi dışbükeyse, f fonksiyonu I'da **dışbükeydir** denir. Gerçel analizde I'da f'' var ve $f'' \geq 0$ ise f'nin I'da dışbükey olduğu kanıtlanır.

olduğundan, (6.76)'den

$$\frac{(n-1)^x f(n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} < f(x) \leq \frac{n^x f(n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \tag{6.77}$$

elde ederiz. Bu eşitsizlikte ortadaki $f(x)$ sayısı n'den bağımsız olduğu için sol yanda $n \mapsto n+1$ geçişi yapabiliriz; sağ yanı ise $\frac{n}{n}\frac{x+n}{x+n}$ ile çarpar ve $f(n+1) = nf(n)$ ve ayrıca daha önceki irdelemelerimizden de bildiğimiz $f(n+1) = n!$ olduğunu da gözetirsek (6.77)'dan

$$\begin{aligned} \frac{n^x f(n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} < f(x) &\leq \frac{n^x f(n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{x+n}{n} \\ f(x)\frac{n}{n+x} &\leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} < f(x) \end{aligned} \tag{6.78}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan ise $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x)$ olur. □

Önsav 6.6.7. *Γ fonksiyonu, $0 < a \leq b < +\infty$ olmak üzere, her $\overline{S_{a,b}}$ dikey kapalı şeridinde sınırlıdır.*

Kanıt. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ için $|n^x| = n^x$ ve $|z| \geq x$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n^z (n-1)!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \right| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x (n-1)!}{|z(z+1)\cdots(z+n-1)|} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \Gamma(x). \end{aligned} \tag{6.79}$$

Γ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $\mathbb{R}$-değerli, pozitiftir ve sürekli olduğu için sınırlıdır. Dolayısıyla Γ fonksiyonu $\overline{S_{a,b}}$ kapalı dikey şeridinde sınırlıdır. □

Teorem 6.6.8 (Wielandt Teklik Teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bölgesi $S = [1,2) \times \mathbb{R}$ şeridini içersin. $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:*

(i) f fonksiyonu S şeridinde sınırlı olsun.

(ii) $\forall z \in B \quad (z+1 \in B \Longrightarrow f(z+1) = zf(z))$ olsun.

Bu koşullarda f fonksiyonu (ii)'deki fonksiyonel bağıntıyı koruyarak yine f ile göstereceğimiz bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N})$ fonksiyonuna, her $z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ için $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ olacak biçimde genişletilebilir. Eğer ayrıca $f(1) = 1$ olmasını istersek $f = \Gamma$ olur.

Kanıt. (ii)'deki fonksiyonel bağıntıdan yararlanarak $f(z+1) := zf(z)$ ile f fonksiyonu ardışık biçimde $1+B, 2+B, \ldots, n+B, \ldots$ bölgelerine holomorf olarak genişletilir; burada $n \in \mathbb{N}^*$. Yine aynı fonksiyonel bağıntıdan yararlanarak bu kez $f(z) := f(z+1)/z$ ile f fonksiyonu meromorf biçimde $-1+B, -2+B, \ldots, -n+B, \ldots$ bölgelerine meromorf olarak genişletilir. Sonuçta f fonksiyonu $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ bölgesine meromorf olarak genişletilir. Kısmın başındaki hesaplamalarla f'nin her $n \in \mathbb{N}$ için $-n$'de birinci dereceden bir kutup yeri ve oralarda kalanın ise $\frac{(-1)^n f(1)}{n!}$ olduğu görülür. Bu nedenle

$$h(z) := f(z) - f(1)\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$$

olarak tanımlanan h fonksiyonu tanım gereği $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$'de holomorftur. Her $n \in \mathbb{N}$ içinse h'nin $-n$'de en fazla birinci dereceden bir kutup yeri olabilir; ancak bu noktalardaki kalanı şimdi sıfır olduğundan, h fonksiyonu bu noktalarda da holomorftur. $h \equiv 0$ olduğunu gösterirsek işimiz biter.

$f(z+1) = zf(z)$ ve $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ bize, her $z \in \mathbb{C}$ için $h(z+1) = zh(z)$ bağıntısını verir. S şeridinde Önsav 6.6.7'den dolayı Γ, ve teoremin hipotezinden dolayı f sınırlı olduğundan, h fonksiyonu da S şeridinde sınırlıdır. Bunun bir sonucu ise, h'nin $\overline{S_{0,1}} := \{z = x+iy \,|\, 0 \le x \le 1\}$ kapalı dikey şeridinde sınırlı olduğudur. Gerçekten de h sürekli olduğundan, $K := [0,1] \times [-1,1]$ kompakt kümesinde sınırlıdır. $z \in \overline{S_{0,1}}\setminus K$ içinse $|z| > 1$ olduğundan, $|h(z)| = |h(z+1)/z| \le |h(z+1)|$ olur. Bu eşitsizlik ve h'nin S şeridindeki sınırlılığından ise h'nin $\overline{S_{0,1}}\setminus K$'de sınırlılığını elde ederiz. $g(z) := h(z)h(1-z)$ olarak tanımlansın. Açıkça $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Diğer yandan $z \in \overline{S_{0,1}}$ için $1-z \in \overline{S_{0,1}}$ olduğundan, g fonksiyonu $\overline{S_{0,1}}$ kapalı şeridinde sınırlıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} h(-z+1) = (-z)h(-z) \Longrightarrow h(-z) &= \frac{1}{-z}h(1-z) \text{ ve} \\ g(z+1) = h(z+1)h(-z) &= zh(z)\frac{1}{-z}h(1-z) \\ &= -h(z)h(1-z) = -g(z) \end{aligned}$$

olduğundan, g'nin $\overline{S_{0,1}}$ kapalı şeridindeki sınırlılığı tüm $\mathbb{C}$'ye taşınır. Liouville Teoremi'nden dolayı g sabittir. $h(1) = 0$ olduğundan, her $z \in \mathbb{C}$ için $g(z) = g(1) = h(1)h(0) = 0$ olur. Böylece $\mathbb{C}$'de $g \equiv 0$. Bunun bir sonucu ise, $\mathbb{C}$'de $h \equiv 0$. Gerçekten de bir $a \in \mathbb{C}$ için $h(a) \neq 0$ varsayarsak bir $D_r(a)$'da $h(z) \neq 0$ olur. Böylece, her $z \in D_r(a)$ için $h(z)h(1-z) = g(z) = 0$ olduğundan, her $z \in D_r(a)$ için $h(1-z) = 0$ olur. Özdeşlik Teoremi'nden, her $z \in \mathbb{C}$ için $h(1-z) = 0$, dolayısıyla her $z \in \mathbb{C}$ için $h(z) = 0$ olur. □

Teorem 6.6.9 (Legendre Formülü)**.**

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-z}\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}.$$

Kanıt.

$$f(z) = 2^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right), \quad z \in \mathbb{C}\backslash -\mathbb{N}$$

olarak tanımlansın. $f(z+1) = zf(z)$6.7.1 sağlanır ve f fonksiyonu $\overline{S_{1,2}}$ şeridinde sınırlıdır. Wielandt Teoremi'nin koşulları sağlanır. Böylece $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ ve önerme 6.6.5 ile $f(1) = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1) = \sqrt{\pi}$. İşimiz biter. □

Bu teoremden $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ elde edilir; buradan ise

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\frac{1}{s}2sds = 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds,$$

dd. $\int_0^{+\infty} e^{-s^2}ds = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ elde edilir.

Problemler

Problem 6.6.1. (i) Sıfır değerini almayan f_1 ve f_2 fonksiyonları (6.57)'yi sağlıyorlarsa, 1 sayısının f_1/f_2 fonksiyonunun bir periyodu olduğunu gösteriniz

(ii) f_2 fonksiyonu (6.59)'un ikinci eşitliğini sağlıyor ve 1 ise p'nin bir periyoduysa, $f_1 = f_2p$'nin de (6.59)'u sağladığını gösteriniz.

Problem 6.6.2. $n \in \mathbb{N}^*$ için $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ dizisinin azalan pozitif terimli bir dizi olduğunu, dolayısıyla yakınsak olduğunu gösteriniz. Bir ipucu: $1/x$ fonksiyonu $[1, +\infty)$'da azalan ve $\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x}$.

Problem 6.6.3. (a) Her $x_0 > 0$ sayısına karşılık bir $C > 0$ sayısının

$$\forall 0 < x \leq x_0 \quad \forall t \geq 1 \quad t^{x-1} \leq Ce^{t/2}$$

olacak biçimde bulunabileceğini, (b) ayrıca

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall t > 0 \quad \left(x = \operatorname{Re} z > 0 \Longrightarrow \left|t^{z-1}e^{-t}\right| < t^{x-1}\right)$$

olduğunu gösteriniz. $\operatorname{Re} z > 0$ için (a)'dan yararlanarak $\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$'nin, (b) ve $s < 1$ için $\int_0^1 \frac{1}{t^s}ds$'nin yakınsaklığından yararlanarak $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ mutlak yakınsak olduklarını gösteriniz.

Problem 6.6.4. Γ_G'nin tanımını kullanarak bir satırda $\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = z$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 6.6.5. G, (6.70) ile tanımlanan fonksiyon olsun. Önce $G(z-1)/zG(z)$'nin bir tam fonksiyon olduğunu dolayısıyla bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ile e^h'ye eşit olduğunu görünüz. Ardından logaritmik türevlere geçerek h'nin sabit ve E'ye eşit olduğunu bu kısımdaki herhangi bir bilgiye dayanmadan kanıtlayınız.

Problem 6.6.6. $(0, +\infty)$'da $(\ln\Gamma)''(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{(x+n)^2}\right) > 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.6.7. (6.60) eşitliğinde integral altında türev alınabileceğini ve dolayısıyla $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ln t dt,\ \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^2\, dt$ olduğundan yararlanarak $\ln\Gamma$ fonksiyonunun $(0,+\infty)$'da dışbükey olduğunu kanıtlayınız. İpucu

$$(\ln\Gamma)''(x) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}$$

bağıntısından ve her $x \in (0,+\infty)$ için $\Gamma(x)X^2+2\Gamma'(x)X+\Gamma''(x) > 0$ olmasından yararlanınız.

Problem 6.6.8. $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n\geq 1}\frac{n}{z+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^z$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.6.9. Aşağıdaki çarpımları Γ türünden ifade ediniz:

(i) $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{2n}\right)e^{1/2n}$

(ii) $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{z}{2n-1}\right)\left(1-\frac{z}{2n}\right)$

(iii) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots$.

6.7 Döngülü Fonksiyonlar

6.7.1 Döngülü Fonksiyonlara İlişkin Genel Notlar

$\emptyset \neq S \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $\omega \in \mathbb{C}$ ve $S \pm \omega = S$ olsun. Bu durumda S bölgesine ω'**ya koşut** bir **şerit** denir. $\mathbb{C}$'deki her bölgenin 0'a koşut olduğu apaçıktır. Daha önce tanıdığımız $S^{a,b}$ yatay şeritleri $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere r'ye, $S_{a,b}$ dikey şeritleri ise ir'ye koşut şeritlerdir. $\mathbb{C}$ ise, her $\omega \in \mathbb{C}$ için ω'ya koşut bir şerittir. $\omega \in \mathbb{C}^*$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $L := \{a+t\omega \mid t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu için $\mathbb{C}\backslash L$'nin S_1, S_2 bağlantılı bileşenlerinin her biri ω'ya koşut şeritlerdir. Ayrıca, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ve $a_1 \neq a_2$ olmak üzere $L_i := \{a_i + t\omega \mid t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2$ koşut doğruları arasındaki S bölgesi de ω'ya koşut bir şerittir.

Şimdi S bölgesi ω'ya koşut bir şerit ve $f \in \mathcal{M}(S)$ olsun.

$$\forall z \in S:\ f(z+\omega) = f(z) \tag{6.80}$$

ise, ω sayısı f fonksiyonun bir **döngüsüdür** veya **periyodudur** denir. 0 her f fonksiyonunun bir döngüsüdür, buna **önemsiz döngü** denir. Eğer f fonksiyonu sabitse, her ω sayısı f'nin bir döngüsüdür. f **fonksiyonunun döngülerinin kümesini** Ω_f ile gösterelim. $\Omega_f \neq \{0\}$ ise f bir **döngülü fonksiyon**dur denir. Eğer a noktası f fonksiyonunun k. dereceden bir sıfır yeri veya kutup noktası ise, her $\omega \in \Omega_f$ için $\omega + a$ da f'nin k. dereceden bir sıfır yeri veya kutup noktasıdır.

(6.80)'den, her $\omega \in \Omega_f$ için $f(\omega) = f(0+\omega) = f(0)$, dolayısıyla $c = f(0)$ olmak üzere $\Omega_f \subset f^{-1}(c)$ elde ederiz. Başka sözlerle f'nin döngülerinin kümesi c yerlerinin bir altkümesidir. Böylece f sabit değilse Ω_f döngü kümesi S'de yerel sonludur. f'nin bazı kutup noktaları da f'nin bir döngüsü olabilir. Eğer

$\omega \in P_f \cap \Omega_f$ ise $c = \infty$ olacağından, bu durumda $\Omega_f \subset P_f$ olur. Örneğin

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

fonksiyonumuz için her $n \in \mathbb{Z}$ bir kutup yeri ve bir döngüdür.

Örneğin, her bir $k \in \mathbb{Z}$ için $2k\pi$ sayısı $\mathbb{C}$'de tanımlı $\cos z$ ve $\sin z$ fonksiyonlarının birer döngüleri iken $2k\pi i$ sayısı $\mathbb{C}$'de tanımlı e^z fonksiyonunun bir döngüsüdür[9]. $\cos z$ ve $\sin z$ fonksiyonlarının döngülerinin kümesi $2\pi\mathbb{Z}$ iken e^z fonksiyonunun döngülerinin kümesi $2\pi i\mathbb{Z}$'dir. $\omega \in \mathbb{C}^*$ ise, her $k \in \mathbb{Z}$ için $f_k(z) = \exp \frac{2\pi i}{\omega} kz$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de döngüsü ω olan bir holomorf fonksiyondur. Dolayısıyla, her $R \in \mathbb{C}(z)$ rasyonel fonksiyonu için ω sayısı $R(\exp(\omega^{-1}2\pi ikz))$'nin bir döngüsüdür. Elbette $\cos z$ ve $\sin z$ fonksiyonları her bir $S^{a,b}$ yatay şeridinde, e^z ise her bir $S_{a,b}$ dikey şeridinde döngülüdürler.

S şeridi $0 \neq \omega$'ya koşut ve ω ise $f \in \mathcal{M}(S)$'nin bir döngüsü olsun. Bu durumda $\frac{1}{\omega}S$ bölgesi 1'e koşuttur ve orada $g(z) := f(\omega z)$ olarak tanımlanan $g : \frac{1}{\omega}S \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonu, her $z \in \frac{1}{\omega}S$ için

$$g(z+1) = f(\omega(z+1)) = f(\omega z + \omega) = f(\omega z) = g(z)$$

olduğundan 1 döngülüdür. Bu nedenle f fonksiyonu ω döngülü ise, f'nin incelenmesi 1 döngülü bir g fonksiyonunun incelenmesine indirgenebilir.

(6.80) eşitliğinde türev alırsak $f'(z+\omega) = f'(z)$ olur. Dolayısıyla S şeridi ω'ya koşut ve ω ise $f \in \mathcal{M}(S)$'nin bir döngüsü ise, ω aynı zamanda f''nün de bir döngüsüdür. Ancak döngülü bir fonksiyonun ilkellerinin döngülü olması gerekmez! Örneğin $F(z) = z$ fonksiyonu döngülü değildir, ancak döngülü $f = 1$ fonksiyonun bir ilkelidir.

S bir şerit ve $f \in \mathcal{M}(S)$ olsun. S şeridi 0'a koşut ve 0 her fonksiyonun bir döngüsü olduğundan $0 \in \Omega_f$, öyleyse $\Omega_f \neq \emptyset$. Diğer yandan $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_f$ ise, her $z \in S$ için $z + \omega_1 - \omega_2 \in S$ ve

$$f(z + (\omega_1 - \omega_2)) = f((z-\omega_2) + \omega_1) = f(z-\omega_2) = f((z-\omega_2)+\omega_2) = f(z)$$

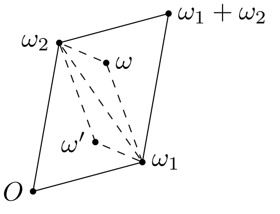
olduğundan $\omega_1 - \omega_2 \in \Omega_f$, dolayısıyla $(\Omega_f, +)$, $(\mathbb{C}, +)$'nın bir altgrubudur. Sonuç olarak,$1 \leq i \leq n$ için $\omega_i \in \Omega_f$ ve $m_i \in \mathbb{Z}$ ise, $\omega = \sum_{i=1}^n m_i\omega_i \in \Omega_f$.

Biz genelde $S = \mathbb{C}$ şeridine odaklanacağız.

Önerme 6.7.1. *$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ve f sabit değilse Ω_f döngüler kümesi $(\mathbb{C}, +)$'nın bir ayrık altgrubudur.*

Kanıt. Yukarıda $(\Omega_f, +)$'nın bir grup olduğunu gördük. $c = f(0)$ olmak üzere $\Omega_f \subset f^{-1}(c)$ olduğunu biliyoruz. $c = \infty$ ise, meromorfluk tanımından $f^{-1}(c) = P_f$ ayrıktır, $c \in \mathbb{C}$ içinse Özdeşlik Teoremi'nden dolayı $f^{-1}(c)$ yerel sonludur. Dolayısıyla $\Omega_f \subset f^{-1}(c)$ olduğundan Ω_f ayrıktır. □

[9]Buna karşın gerçel e^x fonksiyonunun $\mathbb{R}$'de döngülü olmadığına dikkat ediniz.



Şekil 6.3

$\omega \in \mathbb{C}^*$ için $\mathbb{R}\omega = \{t\omega \mid t \in \mathbb{R}\}$ düzlemimizde 0 ve ω'dan geçen bir doğrudur. cos ve sin fonksiyonları için $\Omega_{\cos} = \Omega_{\sin} = 2\pi\mathbb{Z}$ ve bu döngüler x-ekseni üzerinde bulunurlar. exp fonksiyonunun döngüler kümesi ise $2\pi i\mathbb{Z}$'dir ve bu noktalar y-ekseni üzerinde bulunurlar. $f(z) = \exp\left(\frac{2\pi i}{\omega} z\right)$ için $\Omega_f = \mathbb{Z}\omega \subset \mathbb{R}\omega$. Diğer yandan, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ sayıları $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız ve $\Omega(\omega_1, \omega_2) := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ olmak üzere KA I Örnek 1.5.16'da tanımlanan $\wp$ fonksiyonu için $\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ve $\Omega_\wp = \Omega(\omega_1, \omega_2)$. Karşılaşacağımız durumlar bunlardan oluşur: f sabit değilse Ω_f ya orijinden geçen bir doğru üzerindedir ya da $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ tipinde bir kafestir.

Teorem 6.7.2. *$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ döngülü fonksiyonu sabit değilse ya bir $\omega \in \mathbb{C}^*$ ile $\Omega_f = \mathbb{Z}\omega \subset \mathbb{R}\omega$ ya da $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ ile $\Omega_f = \Omega(\omega_1, \omega_2)$.*

Kanıt. f bir döngülü fonksiyon olduğundan $\Omega_f \neq \{0\}$.

(1) Bir L doğrusu ile $\Omega_f \subset L$ olsun. $0 \in \Omega_f$ olduğundan L doğrusu orijinden geçer. Önerme 6.7.1'den dolayı, $\Omega_f^* := \Omega_f \setminus \{0\}$'ın öğelerinin mutlak değerleri $\pm\omega$ gibi iki döngüde minimumunu alır. Elbette $\mathbb{Z}\omega \subset \Omega_f$; ancak biz burada $\mathbb{Z}\omega = \Omega_f$ olduğunu savunuyoruz. Tersini varsayalım ve $p \in \Omega_f \setminus \mathbb{Z}\omega$ olsun. $\Omega_f \subset L = \mathbb{R}\omega$ olduğundan, bir $m \in \mathbb{Z}$ ve bir $0 < \theta < 1$ ile $p = (m + \theta)\omega$ olacaktır. Bu durumda $\theta\omega = p - m\omega$ iki döngünün farkı olarak bir döngü ve $|\theta\omega| < |w|$ olacaktır; bu ise ω'nın tanımı ile çelişir. İşareti dışında tek olarak belirli olan ω'ya f'nin **temel döngüsü** diyelim.

(2) Şimdi Ω_f orijinden geçen bir doğru üzerinde bulunmasın. Ω_f ayrık ve $\Omega_f \neq \{0\}$ olduğundan, bir ω_1'i $|\omega_1| = \min\{|p| \mid p \in \Omega_f^*\}$ olacak biçimde seçebiliriz. $\Omega_f^* \setminus \mathbb{R}\omega_1$ kümesi varsayımdan $\neq \emptyset$ ve 6.7.1'den dolayı ayrıktır. Şimdi bir $\omega_2 \in \Omega_f^* \setminus \mathbb{R}\omega_1$ döngüsü $|\omega_2| = \min\{|\omega| \mid \omega \in \Omega_f^* \setminus \mathbb{R}\omega_1\}$ olacak biçimde seçilsin. Açıkça $|\omega_2| \geq |\omega_1|$. Ayrıca, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ noktaları aynı doğru üzerinde bulunmadıklarından $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsızdırlar ve $\Delta(0, \omega_1, \omega_2)$ kapalı üçgeninde yalnızca $0, \omega_1, \omega_2$ köşeleri birer döngüdür.

Köşeleri $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$ olan kapalı paralelkenarda Ω_f'ye ait noktaların bu köşelerden ibaret olduğunu savunuyoruz. Seçimimizden $\Delta(0, \omega_1, \omega_2)$ üçgenin yalnızca köşeleri Ω_f'dedir. Diğer yandan $\Delta(\omega_2, \omega_1, \omega_1 + \omega_2)$ üçgeni, köşeleri dışında bir ω döngüsünü içerseydi $\omega' := \omega_1 + \omega_2 - \omega$ da bir döngü olurdu. $\omega' - \omega_1 = \omega_2 - \omega$ olduğundan, $\omega', \omega_1, \omega, \omega_2$ noktaları bir köşegeni $[\omega_1, \omega_2]$ doğru parçası olan bir paralelkenarın köşeleri olduğundan, ω' döngüsü $\Delta(0, \omega_1, \omega_2)$

üçgeninin bir noktasıdır ve köşelerinden farklıdır (bkz. Şekil 6.3). Bu bir çelişkidir.

Her $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ için $\omega_{pq} := p\omega_1 + q\omega_2$ ve $\Omega(\omega_1,\omega_2) := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ olsun.

$$P(\omega_1,\omega_2) := \{sw_1 + tw_2 \mid s,t \in [0,1)\}$$

yarıaçık paralelkenarına bir **temelparalelkenar** diyelim ve bunu yalın olarak P ile gösterelim. $\overline{P}$ kapalı paralelkenarımız yalnızca $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ döngülerini içerdiğinden, P yalnızca 0 döngüsünü içerir. Her $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ için $P_{pq} := \omega_{pq} + P$ olarak tanımlarsak $P = P_{00}$ ve $\{P_{pq}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$'nin $\mathbb{C}$'nin bir parçalanışı olduğu apaçıktır. Şimdi $\Omega(\omega_1,\omega_2) \subset \Omega_f$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan $\omega \in \Omega_f$ ise, bir $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ ile $\omega \in P_{pq}$ olacaktır. Bu durumda $\omega - \omega_{pq} \in P$ de bir döngüdür; dolayısıyla $\omega - \omega_{pq} = 0$, dd. $\omega = \omega_{pq} \in \Omega(\omega_1,\omega_2)$. Böylece $\Omega(\omega_1,\omega_2) \supset \Omega_f$ ve sonuçta $\Omega(\omega_1,\omega_2) = \Omega_f$. □

Bu durumda sabit olmayan bir $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ verildiğinde Ω_f döngü grubu için şu seçenekler söz konusudur:

(i) $\Omega_f = \{0\}$, dd. f'nin bir $\omega \in \mathbb{C}^*$ döngüsü yoktur.

(ii) $\Omega_f = \mathbb{Z}\omega$, $\omega \in \mathbb{C}^*$. Bu durumda f **basit döngülüdür** denir.

(iii) $\mathbb{R}$-bağımsız ω_1, ω_2 ile $\Omega_f = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Bu durumda f **çift döngülü**dür denir.

En çok karşılaştığımız durum (i)'dir; örneğin f bir polinom veya bir rasyonel fonksiyonsa $\Omega_f = \{0\}$. Bir sonraki altkısımda (ii) durumunu ele alacağız. En ilginç olan kuşkusuz (iii) durumudur.

$\omega, \omega' \in \mathbb{C}^*$ve bunlar $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsızsa $\Omega(\omega,\omega') := \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$ modülüne bir **kafes** denir; çoğu zaman $\Omega(\omega,\omega')$ yerine kısaca Ω yazacağız. Bu modülün

$$|\omega_1| := \min\{|\omega| \mid \omega \in \Omega\} \text{ ve } |\omega_2| = \min\{|\omega| \mid \omega \in \Omega \backslash \mathbb{R}\omega_1\}$$

koşulunu sağlayan $\{\omega_1, \omega_2\}$ bazlarına **iyi baz**lar diyelim. Teorem 6.7.2'nin kanıtında, her kafesin bir iyi bazı olduğunu gösterdik. Eğer $\{\omega_1, \omega_2\}$ bir iyi bazsa $\{\pm\omega_1, \pm\omega_2\}$ de bir iyi bazdır.

Uzlaşma: Biz bu iyi bazlardan $0 < \operatorname{Arg} \frac{\zeta_2}{\zeta_1} < \pi$ koşulunu sağlayan biri ile çalışacağız. Ancak ζ_1, ζ_2 yerine yine ω_1, ω_2 yazacağız. Özetle, şu andan başlamak üzere $\{\omega_1, \omega_2\}$ iyi baz olsun dediğimizde bu baz pozitif sıralanmış, dd. $0 < \operatorname{Arg} \frac{\omega_2}{\omega_1} < \pi$ olacaktır. Tüm şekillerimiz bu seçime göre çizilmiştir.

6.7.2 Basit Döngülü Fonksiyonlar

Gerçel analizde, döngülü fonksiyonların bilindik basit döngülü $\cos mx$ ve $\sin mx$ fonksiyonlarının serilerine açılıp açılmayacağını araştırırız; bu bizi Fourier serilerine götürür. Benzerini komplekste yapacağız. S şeridi ω'ya koşut, $f \in$

$\mathcal{H}(S)$ ve $\omega \in \Omega_f$ olsun; burada f'nin çift döngülü de olabileceğini belirtelim. $\exp \frac{2\pi i}{\omega} kz$, $k \in \mathbb{Z}$ fonksiyonları $\mathbb{C}$'de, dolayısıyla S'de ω basit döngülü fonksiyonlardır. Biz f'nin S'de, kendisine kompakt düzgün yakınsayan bir $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \exp \frac{2\pi i}{\omega} kz$ serisine açılabileceğini kanıtlayacağız.

Önce $S_{a,b}$ dikey şerit kavramında $a = -\infty$ ve $b = +\infty$ olmasına da izin vereceğiz. Bu durumda $a \in \mathbb{R}$ için $S_{-\infty,a}$ şeridi $\operatorname{Re} z = a$ dikey doğrusunun solundaki, $S_{a,+\infty}$ ise bu doğrunun sağındaki şerittir. Diğer yandan $S_{-\infty,+\infty} = \mathbb{C}$.

Teorem 6.7.3. *$\omega \in \mathbb{C}^*$, $S \subset \mathbb{C}$ ise ω'ya koşut bir şerit ve $f \in \mathcal{H}(S)$ olsun. Keyfi seçilen bir $z_0 \in S$ ile, her $k \in \mathbb{Z}$ için*

$$a_k := \frac{1}{\omega} \int_{z_0}^{z_0+\omega} f(\xi) e^{-\frac{2\pi i}{\omega} k\xi} d\xi$$

olmak üzere, her $z \in S$ için

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{\frac{2\pi i}{\omega} kz}. \tag{6.81}$$

*Mutlak yakınsak bu seri S'de f'ye kompakt düzgün yakınsaktır ve bu seriye f'nin S'deki **Fourier açılımı** denir.*

Kanıt. Temel stratejimiz şudur: S şeridini uygun holomorf dönüşümlerle bir $H(0; r, R)$ halkasına resmedip f'yi bu halkada bir holomorf fonksiyona taşıyıp, taşınan fonksiyonun Laurent açılımdan (6.81) eşitliğini kazanmak. (6.81)'in sağındaki gibi bir seri S'de kompakt düzgün yakınsaksa, her bir $a_k \exp \frac{2\pi i}{\omega} kz$ fonksiyonu ω döngülü olduğundan, S'de ω döngülü bir fonksiyon tanımlar.

(1) $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ ve $\mathbb{C}_\zeta$ gibi üç ayrı kompleks düzlem alalım. S şeridimiz $\mathbb{C}_z$'de verilmiş olsun. $w := \varphi(z) := \frac{2\pi i}{\omega} z$ ile tanımlanan $\varphi : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$ dönüşümü biholomorftur. $\varphi^{-1}(w) = \frac{\omega}{2\pi i} w$. Kolayca görüleceği gibi φ dönüşümü S şeridini, $-\infty \le a < b \le +\infty$ olmak üzere bir $S_{a,b}$ dikey şeridine resmeder. $S_{a,b}$ şeridi $2\pi i$'ye koşuttur. $S_{a,b}$'de $g := f \circ (\varphi^{-1} | S_{a,b})$ olarak tanımlanan g fonksiyonu $S_{a,b}$ şeridinde holomorftur ve $2\pi i$ periyotludur. Gerçekten de

$$g(w + 2\pi i) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i}(w + 2\pi i)\right) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i} w + \omega\right) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i} w\right) = g(w).$$

(2) $\zeta = \psi(w) := e^w$ ile tanımlanan $\psi : \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}_\zeta$ dönüşümü yerel biholomorftur, ancak birebir değildir. $r := e^a$ ve $R = e^b$ olmak üzere $\psi(S_{a,b}) = H(0; r, R) =: H$; burada elbette $e^{-\infty} = 0$ ve $e^{+\infty} = +\infty$ alınacaktır. Bir $w_0 \in S_{a,b}$ için $\psi(w_0) = \zeta_0$ ise, $\psi^{-1}(\zeta_0) = w_0 + 2\pi i\mathbb{Z}$ ve her $w \in \psi^{-1}(\zeta_0)$ için $g(w) = g(w_0)$ olduğundan

$$\text{her } \zeta \in H(0; r, R) \text{ için } h(e^w) = h(\zeta) := g(w),\ \zeta = e^w \tag{6.82}$$

ile kusursuz biçimde bir $h : H \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlanır. $\psi(w_0) = \zeta_0$ ise, ψ yerel biholomorf olduğundan, ω_0 ve ζ_0 noktalarının açık U ve V komşulukları $\psi|U$ biholomorf olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda $(\psi|U)^{-1}$ logaritmanın bir holomorf dalıdır ve bunu log ile gösterirsek V'de $h = g \circ \log$ holomorf olur. Sonuçta $h \in \mathcal{H}(H)$. h fonksiyonu H halkasında, $r < \rho < R$ olmak üzere

$$h(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \zeta^k, \;\; a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \tag{6.83}$$

Laurent açılımına sahiptir ve serimiz halkada kompakt düzgün yakınsaktır. (6.82) ve (6.83) eşitliklerinden

$$g(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{kw}, \;\; w \in S_{a,b} \tag{6.84}$$

elde ederiz. Şimdi bir $w_0 \in S_{a,b}$ noktasını $\psi(w_0) = e^{w_0} \in \underline{\kappa_\rho}$ olacak biçimde keyfi seçelim. Bir yandan $\zeta = e^w, d\zeta = e^w dw$, diğer yandan $\gamma = \overrightarrow{w_0, w_0 + 2\pi i}$ olmak üzere $\psi \circ \gamma = \kappa_\rho$ olduğundan, KA I Değişken Değiştirme Teoremi 2.4.8 ve (6.82) ile

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{w_0}^{w_0+2\pi i} \frac{g(w)}{e^{(k+1)w}} e^w dw \tag{6.85}$$

Sonunda (6.84) ve (6.85)'te $w = \frac{2\pi i}{\omega} z$ dönüşümünü yaparsak

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{\frac{2\pi i}{\omega} kz} \text{ ve } a_k = \frac{1}{\omega} \int_{z_0}^{z_0+\omega} f(\xi) e^{\frac{2\pi i}{\omega} kz} d\xi \tag{6.86}$$

elde ederiz. (6.84)'teki serinin H'deki kompakt düzgün yakınsaklığı (6.86)'daki serinin S'deki kompakt düzgün yakınsaklığını verir. $\square$

S ve S^* şeritleri ω'ya koşut, $S^* \subset S$, $f \in \mathcal{M}(S)$ ancak $f|S^* \in \mathcal{H}(S^*)$ ise, f'nin S^*'da kompakt düzgün yakınsak olan (6.86) benzeri bir Fourier serisi açılımı vardır.

Teorem 6.7.3'ün kanıtında biz S şeridini bir biholomorf dönüşümle bir dikey şerite resmederek kanıta başladık. Ancak bir yatay şerite de resmedebilirdik. $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ ve $\mathbb{C}_\zeta$ gibi üç ayrı kompleks düzlem alalım. Bu kez $\varphi : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$ biholomorf dönüşümü $w = \varphi(z) := \frac{z}{\omega}$ olsun. Bu dönüşüm S şeridini, $-\infty \le a < b \le +\infty$ olmak üzere, bu kez bir $S^{a,b} = \frac{1}{\omega} S$ yatay şeridine resmeder. Burada da $a = -\infty$ ve $b = +\infty$ olabilir. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $S^{-\infty,a}$ şeridi $ia\mathbb{R}$ yatay doğrusunun altındaki, $S^{a,+\infty}$ ise $ia\mathbb{R}$ yatay doğrusunun üstündeki yarıdüzlemdir. Ayrıca $S^{-\infty,+\infty} = \mathbb{C}$. Diğer yandan $f \in \mathcal{H}(S)$ olmak üzere, $g(w) := f(\omega w)$ olarak tanımlanan $g : S^{a,b} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, bu altkısmın başında gösterildiği gibi, 1 döngülü holomorf bir fonksiyondur. Şimdi $\zeta = \psi(w) = e^{2\pi i w}$ olarak tanımlanan, yerel biholomorf $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ dönüşümü $S^{a,b}$ yatay şeridini, $r = e^{-2\pi b}$ ve $R = e^{-2\pi a}$ olmak üzere, $H(0; r, R)$ halkasına resmeder. 6.7.3'ün kanıtına benzer biçimde aşağıdaki teoremi kanıtlamayı okura bırakıyoruz:

Teorem 6.7.4. *$g : S^{a,b} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu 1 döngülü ise, tek olarak belirli $a_n \in \mathbb{C}$ katsayıları ile, her $w \in S^{a,b}$ ve her $w_0 = u_0 + iv_0 \in S^{a,b}$ için*

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n w} \text{ ve } a_n = \int_{u_0}^{u_0+1} g(u + iv_0) e^{-2\pi i n (u+iv_0)} du. \qquad (6.87)$$

ve (6.87)'deki seri $S^{a,b}$'de mutlak ve kompakt düzgün yakınsaktır.

Teorem 6.7.3 teorem 6.7.4'ten hemen çıkar.

Teorem 6.7.5. *$g \in \mathcal{H}(S^{a,+\infty})$ ve $\operatorname{Im} w \to +\infty$ için g sınırlı ise, g fonksiyonunun $S^{a,+\infty}$'da $g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n w}$ gibi bir Fourier açılımı vardır ve bu seri, her $b > a$ için $\overline{S^{b,+\infty}}$'da düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. Teorem 6.7.3'ün kanıtına benzer bir yol izleyeceğiz. $\zeta = \psi(w) = e^{2\pi i w}$ ile tanımlanan $\psi : \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}_\zeta$ yerel biholomorf dönüşümü $S^{a,+\infty}$ şeridini bu kez $R = e^{-2\pi a}$ olmak üzere $D_R^* = H(0; 0, R)$ halkasına resmeder. $\zeta = e^{2\pi i w} \in D_R^*$ için $h(\zeta) := g(w)$ tanımı kusursuzdur ve $h \in \mathcal{H}(D_R^*)$. Ancak varsayımımızdan dolayı şimdi h fonksiyonu 0'ın bir komşuluğunda sınırlı olduğundan, Riemann Genişletme Teoremi'yle sıfıra da holomorf genişletilir. Bu durumda h fonksiyonu D_R'de $h(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \zeta^n$ gibi bir kuvvet serisine açılabilir, dolayısıyla $S^{a,+\infty}$'da $g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n w}$. Ayrıca $b > a$ için $r := e^{-2\pi b}$ olmak üzere h'nin serisi $\overline{D_r}$'de düzgün yakınsak olduğundan, g'nin serisi $\overline{S^{b,+\infty}}$'da düzgün yakınsaktır. □

6.7.3 Elliptik Fonksiyonlar

Bu altkısımda $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ öğeleri $\mathbb{R}$- doğrusal bağımsız olmak üzere daima $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ve ayrıca $\{\omega_1, \omega_2\}$, daima Ω'nın bir iyi bazı olacak. Ayrıca

$$P = P_\Omega := \{s w_1 + t w_2 \mid s, t \in [0, 1)\}$$

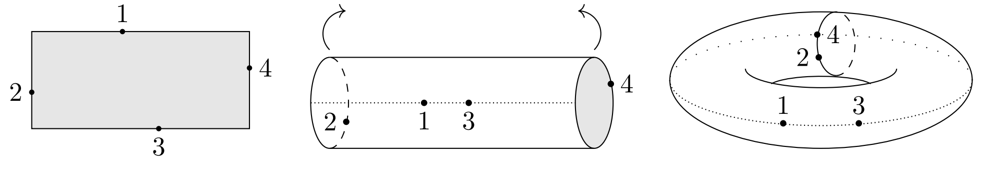
yarıaçık paralelkenarı daima Ω'nın bir temelparalelkenarını gösterecektir. Bir $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ meromorf fonksiyonuna, uygun bir $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ ile $\Omega_f = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ise çift döngülü demiştik; eğer yalnızca $\Omega(\omega_1, \omega_2) \subset \Omega_f$ olmasını istersek f'ye bir **eliptik fonksiyon** diyeceğiz. Bu tanımlara göre sabit fonksiyonlarımız çift döngülü değil ancak eliptik fonksiyonlardır.

Şimdi

$$K(\Omega) := \{f \mid f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \text{ ve } \Omega \subset \Omega_f\}.$$

olarak tanımlayalım. $K(\Omega)$'nın öğelerine Ω **kafesine ilişkin eliptik fonksiyonlar** denir. KA I Teoerem 3.9.9'dan $\mathcal{M}(\mathbb{C})$'nin bir cisim olduğunu biliyoruz. Kolayca görüleceği gibi $K(\Omega)$ da bir cisimdir. Ayrıca, $R \in \mathbb{C}(X_1, \dots, X_n)$ bir rasyonel fonksiyon ve $f_1, \dots, f_n \in K(\Omega)$ ise, $R(f_1, \dots, f_n) \in K(\Omega)$. Eğer $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomu sabit değilse $p \notin K(\Omega)$ olmalıdır. Diğer yandan Ω'ya ilişkin eliptik fonksiyon olan $\wp$ fonksiyonu $K(\Omega)$'dadır. Böylece $\mathbb{C} \subsetneq K(\Omega) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Ayrıca, f'nin döngüleri f''nün de döngüleri olduğundan, $f \in K(\Omega)$ ise $f' \in K(\Omega)$ olur. Şu basit bilgiyi ayrıca not etmekte yarar var: $f \in K(\Omega)$ *fonksiyonu* $\mathbb{C}$*'de aldığı her değeri* P *yarıaçık temelparalelkenarında ve* $a \in \mathbb{C}$ *olmak üzere* P*'nin her* $P_a := a + P$ *ötelemesinde de alır.* Açıktır ki, f fonksiyonu $f|P$ veya $a \in \mathbb{C}$ keyfi olmak üzere $f|P_a$ ile tek olarak belirlidir.

Not 6.7.6. $T_\Omega := \mathbb{C}/\Omega$ bölüm grubu bölüm topolojisi ile ele alınacaktır ve bize bir torus verir. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere T_Ω'nın öğeleri $[z] = z + \Omega$ denklik sınıflarından oluşur. $z, w \in \mathbb{C}$ ögelerine $[z] = [w]$ ise birbirlerine *denktir* denir; bu ise $z - w \in \Omega$ anlamına gelir. P yarıaçık temelparalelkenarın tanımından dolayı P'nin farklı noktaları asla denk değildirler. $q : \mathbb{C} \to T_\Omega$ dönüşümü $q(z) = [z]$ ile tanımlanan bölüm dönüşümümüz olsun. T_Ω'nın geometrik yapısı bir lastik tekerinin geometrik yapısıdır. Önce $\overline{P}$ kapalı temelparalelkenarını, $[0, \omega_2]$ kenarı üzerindeki $t\omega_2$ noktası $[\omega_1, \omega_1 + \omega_2]$ kenarı üzerindeki $\omega_1 + t\omega_2$ noktasına gelecek ve bir boru elde edecek biçimde bükünüz; ardından bu boruyu $[0, \omega_1]$ kenarı üzerindeki $s\omega_1$ noktası $[\omega_2, \omega_2 + \omega_1]$ kenarı üzerindeki $\omega_2 + s\omega_1$ noktasına gelecek ve bir teker elde edecek biçimde bükünüz(bkz. Şekil 6.4)[10].



Şekil 6.4: Torus

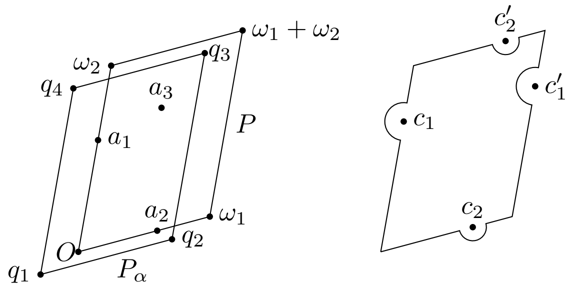
q dönüşümü sürekli, $\overline{P}$ kompakt ve $T_\Omega = q(\overline{P})$ olduğundan, T_Ω bir kompakt topolojik uzay verir. Aslında daha fazlası geçerlidir: İleride T_Ω'nın bir kompakt Riemann yüzeyi olduğunu göreceğiz. Şimdi $f \in K(\Omega)$ ise, f'ye $\hat{f}([z]) := f(z)$ kusursuz tanımıyla bir $\hat{f} : T_\Omega \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonu karşılık getirilir. İleride vereceğimiz tanımlarla $\hat{f} : T_\Omega \to \mathbb{C}_\infty$ bir meromorf fonksiyon olacaktır. Eğer f sabit değilse, her $a \in \mathbb{C}_\infty$ için $\hat{f}$'nin a yerlerinin sayısı sonlu olmak zorundadır. Tersine, her meromorf $\hat{g} \in \mathcal{M}(T_\Omega)$ fonksiyonu için $g(z) := \hat{g}([z])$ bize bir $g \in K(\Omega)$ verecektir. $\varphi(f) := \hat{f}$ ile tanımlanan $\varphi : K(\Omega) \to \mathcal{M}(T_\Omega)$ dönüşümü, cisimlerimiz arasında bir eşyapı dönüşümdür. Bu altkısımda bu bilgileri aklımızın bir kenarında tutmak yararlı olacaktır.

$f \in K(\Omega)$ sabit değilse Özdeşlik Teoremi'nden dolayı f'nin kutup yerleri ve sıfır yerleri yerel sonlu olduklarından, $\overline{P}$'de f'nin ancak sonlu sayıda sıfır yerleri ve sonlu sayıda kutup noktaları olabilir. Dolayısıyla uygun a'lar için P_a'nın sınırında f'nin sıfır yeri de kutup noktası da bulunmaz; sayılabilir çoklukta a dışından bu böyledir.

[10]Çizim kolaylığı için $\overline{P}$ paralelkenarımızı bir dikdörtgen olarak seçtik.

Tanım 6.7.7. $f \in K(\Omega)$ sabit değilse ve ∂P_a'da f'nin sıfır ve kutup yerleri yoksa P_a yarıaçık paralelkenarı f **için iyidir** diyelim.

$\varepsilon > 0$ için $a_\varepsilon := \varepsilon(\omega_1 + \omega_2)$ ise, okur kolayca yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için P_{a_ε}'nun f için iyi olduğunu görür. $f \in K(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}_\infty$ keyfi verilsinler ve $[z] = [w]$ olsun. z noktasının f'nin k. dereceden bir c-yeri olması w noktasının f'nin k. dereceden bir c-yeri olmasına denktir. Ayrıca $\text{Res}(f, z) = \text{Res}(f, w)$. Bu nedenle f'nin P'deki c-yerlerine, özellikle sıfır yerleri ve kutup yerlerine ilişkin bir önermenin doğru olması aynı önermenin herhangi bir P_a'da doğru olmasına denktir.



Şekil 6.5: Önsav 6.7.8'e ilişkin şekiller.

Önsav 6.7.8. *$f \in K(\Omega)$ ve P_a, f için iyi ise,* $\int_{\boldsymbol{\partial} P_a} f = 0$.

Kanıt. Pozitif yönlenmiş $\boldsymbol{\partial} P_a$ sınırı $\overrightarrow{q_1q_2q_3q_4q_1}$ ise, f fonksiyonumuz $\overline{P_a}$'nın birbirine koşut kenarları üzerinde aynı değerleri aldığından, $\int_{\overrightarrow{q_1q_2}} f + \int_{\overrightarrow{q_3q_4}} f = 0$ ve$\int_{\overrightarrow{q_2q_3}} f + \int_{\overrightarrow{q_4q_1}} f = 0$ olur. Böylece $\int_{\boldsymbol{\partial} P_a} f = 0$.

Bu gerçeği P_a'ya geçmeden şöyle de görebiliriz(bkz. Şekil 6.5'teki sağ şekil.). f fonksiyonunun $P \cap \partial P$'deki sonlu sayıdaki kutup yerleri $c_1, \ldots, c_m$ olsun. $\overline{P}$'nin c_i'yi içeren kenarına koşut olan kenarında bir c_i' için $[c_i] = [c_i']$. Böylece f'nin ∂P'deki kutup yerleri $c_1, \ldots, c_m, c_1', \ldots, c_m'$ noktalarıdır. $r_i > 0$ yeterince küçük seçilirse, $\overline{D}_{r_i}(c_i)$'de f'nin c_i dışında bir kutup yeri bulunmaz.

$$K := \left(\overline{P} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \overline{D}_{r_i}(c_i) \right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} D_{r_i}(c_i') \right)$$

kompakt kümesinin sınırı artık f'nin hiçbir kutup noktasını içermez. f'nin K ve P'deki kutup noktaları aynı $a_1, \ldots, a_n$ noktalarıdır. Yine yukarıdaki mantıkla $\int_{\boldsymbol{\partial} K} f = 0$ olduğundan, $\sum_{i=1}^{n} \text{Res}(f, a_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} K} f = 0$ olur. $\square$

Sabit olmayan basit döngülü tam fonksiyonlar gördük. Buna karşın $K(\Omega)$ kümesindeki holomorf fonksiyonlar için aşağıdaki kısıtlama geçerlidir:

Teorem 6.7.9 (Liouville I). *$f \in K(\Omega)$ sabit değilse $f \notin \mathcal{H}(\mathbb{C})$, dd. $f \in K(\Omega) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ise, f sabittir. Başka sözlerle: $\mathbb{C}$'deki çift döngülü holomorf fonksiyonlar sabittir.*

Kanıt. $f \in K(\Omega) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olsun. f alacağı tüm değerleri $\overline{P}$'de alacağından $f(\mathbb{C}) = f(\overline{P})$ kompakt, dolayısıyla sınırlıdır. Liouville Teoremi'nden, f sabittir. □

Şimdi $K(\Omega)$'daki çift döngülü meromorf fonksiyonlar için de bazı kısıtlamalar olduğunu göreceğiz. Teorem 6.7.9'a göre $f \in K(\Omega)$ çift döngülü ise $f \notin \mathcal{H}(\mathbb{C})$olur; sonuç olarak f'nin kutup yerleri vardır. f ise $\mathbb{C}$'de aldığı her değeri P temel paralelkenarında da alacağından, f'nin P'de de kutup yeri olacaktır. Diğer yandan kutup yerleri ayrık olduğundan, $\overline{P}$ kompakt kümesinde, dolayısıyla P'de f'nin en fazla sonlu sayıda kutup yeri olabilir.

Teorem 6.7.10 (Liouville II). *$f \in K(\Omega)$ ve f'nin P'deki farklı kutup yerleri $a_1, \ldots, a_n$ ise*

$$\sum_{a \in P_f \cap P} \operatorname{Res}(f, a) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i) = 0. \tag{6.88}$$

Kanıt. P_a yarıaçık paralelkenarını f için iyi olacak biçimde seçelim. Önsav 6.7.8 ile

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i) = \sum_{a \in P_f \cap P} \operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} P_a} f = 0.$$

□

Sonuç 6.7.11. *$f \in K(\Omega)$'nın P'de yalnızca bir tane kutup yeri varsa, bu kutup birinci dereceden olamaz.*

Kanıt. a birinci dereceden kutup yeri ise $\operatorname{Res}(f, a) \neq 0$. Önermenin koşullarında (6.88) eşitliği sağlanamaz! □

Teorem 6.7.12 (Liouville III). *$f \in K(\Omega)$ fonksiyonu sabit değilse P temelparalelkenarında her $c \in \mathbb{C}_\infty$ değerini, katlılıklarıyla sayılmak üzere aynı çoklukta alır.*

Kanıt. P_a paralelkenarı f için iyi olsun. Önsav 6.7.8 ve KA I Argüman İlkesi'nden, $\mathring{P}_a = \mathrm{I}(\boldsymbol{\partial} P_a)$ ile

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} P_a} \frac{f'}{f} = Z_0(f, \mathring{P}_a) - Z_\infty(f, \mathring{P}_a).$$

∂P_a'da f'nin sıfır ve kutup yerleri olmadığından buradan $Z_0(f, P) = Z_\infty(f, P)$ elde ederiz, dd. katlılıklarıyla sayılmak üzere f'nin P'deki sıfır yerlerinin sayısı oradaki kutup yerlerinin, yani ∞ yerlerinin sayısına eşittir. Şimdi $c \in \mathbb{C}$ keyfi verilsin. f'nin c-yerleri $g := f - c$'nin sıfır yerleriyle ve f'nin kutup yerleri g'nin kutup yerleri ile katlılıklarıyla örtüşürler. Böylece $Z_c(f, P) = Z_0(g, P) = Z_\infty(g, P) = Z_\infty(f, P)$. □

$Z_\infty(f, P)$'ye f'nin **derecesi** denir. Teorem 6.7.12'i şöyle de dillendirebiliriz: n. dereceden bir $f \in K(\Omega)\backslash\mathbb{C}$ fonksiyonu her c değerini, katlılıklarıyla sayılmak üzere n kez alır.

Teorem 6.7.13 (Liouville IV). *$f \in K(\Omega)\backslash\mathbb{C}$ fonksiyonunun P'deki sıfır ve kutup yerleri, katlılıklarıyla alınmak üzere sırasıyla $s_1, \ldots, s_n$ ve $p_1, \ldots, p_n$ ise*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \in \Omega.$$

Kanıt. P_a paralelkenarımız f için iyi olsun. KA I Teorem 4.2.10'daki (4.20) eşitliğinde $g(z) = z$ alırsak

$$\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} P_a} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \tag{6.89}$$

$\gamma_1 := \overrightarrow{a, a + \omega_2}$ ve $\gamma_2 := \overrightarrow{a, a + \omega_1}$ ve $h(z) := z\frac{f'(z)}{f(z)}$ olsun.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\partial} P_a &= \gamma_2 + (\omega_1 + \gamma_1) - (\omega_1 + \gamma_2) - \gamma_1, \\ \int_{\boldsymbol{\partial} P_a} h &= \int_{\gamma_1} (h(z + \omega_1) - h(z))\, dz - \int_{\gamma_2} (h(z + \omega_2) - h(z))\, dz \end{aligned} \tag{6.90}$$

ve $k = 1, 2$ için $f, f' \in K(\Omega)$ olduğunu da gözetirsek

$$\begin{aligned} h(z + \omega_k) - h(z) &= (z + \omega_k)\frac{f'(z + \omega_k)}{f(z + \omega_k)} - z\frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= [(z + \omega_k) - z]\frac{f'(z)}{f(z)} = \omega_k \frac{f'(z)}{f(z)}. \end{aligned} \tag{6.91}$$

Diğer yandan, γ_1 gezimizin başlangıç noktası a ve bitiş noktası $a + \omega_2$ olduğundan $f(a) = f(a + \omega_2)$ olur, dd. $f \circ \gamma_1$ ve benzer biçimde $f \circ \gamma_2$ gezilerimiz 0 noktasından geçmeyen kapalı gezilerdir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma_k} \frac{d\zeta}{\zeta} = n(f \circ \gamma_k, 0) =: n_k \in \mathbb{Z} \tag{6.92}$$

Böylece (6.88), (6.89), (6.90), (6.91) ve (6.92)'den

$$\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=1}^{n} p_i = n_1\omega_1 - n_2\omega_2 \in \Omega.$$

□

Teorem 6.7.12 ve 6.7.13, (f) anaböleni ile (bkz. s. 462) kısaca

$$\sum_{z\in P}(f)(z) = 0 \text{ ve } \sum_{z\in P}(f)(z)\cdot z \in \Omega$$

olarak ifade edilebilirler.

6.7.4 Weierstrass $\wp$ Fonksiyonu

Bu altkısımda da $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ kompleks sayıları $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız ve $\{\omega_1, \omega_2\}$, $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ modülünün bir iyi bazı ve P ise yarıaçık temelparalelkenarımızı gösterecektirler.

Şu ana kadar henüz çift döngülü bir fonksiyonla tanışmadık. $f \in K(\Omega)\backslash\mathbb{C}$ çift döngülü fonksiyonlar içerisinde en yalın olanları derecesi 2 olanlardır. Bunlar iki tipten olabilir:

(i) P'de birinci dereceden iki kutbu olanlar (Jacobi) ve

(ii) P'de ikinci dereceden bir kutbu olanlar (Weierstrass).

f fonksiyonu Weierstrass tipinde olacaksa bir D_r^*'deki Laurent açılımı bir $h \in \mathcal{H}(D_r)$ holomorf fonksiyonuyla $f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + h(z)$ şeklindedir. Ancak bu durumda f'nin P'deki kalanlarının toplamı a_{-1} olacağından, Liouville II Teoremi'nden $a_{-1} = 0$ ve dolayısıyla $f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + h(z)$ olur. Özel olarak $a_{-2} = 1$ olmasını isteyip $f(z) = \frac{1}{z^2} + h(z)$ tipindekilere odaklanırsak bunlar bir sabit dışında tek olarak belirlidir. Gerçekten de $f_1(z) = \frac{1}{z^2} + h_1(z)$ bir başka aynı tipten çift döngülü bir fonksiyonsa $f - f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \cap K(\Omega)$ olacağından, Liouville I Teoremi'nden $f - f_1$ sabittir. Dolayısıyla, ayrıca $h(0) = 0$ olmasını istersek f, varsa tek olarak belirlidir.

Biz Weierstrass'ın $\wp$ fonksiyonuyla önce KA I Örnek 1.5.16'da, sonra Örnek 6.2.7(3)'te karşılaşmıştık. Ancak oradaki w_1, w_2 yerine şimdi ω_1, ω_2 yazacak ve genellikten bir şey kaybetmeden $\{\omega_1, \omega_2\}$'nin Ω için bir iyi baz oluşturduğunu varsayacağız. (6.10)'da toplanabilir bir aile söz konusu olduğundan, $\Omega^* := \Omega\backslash\{0\}$ olmak üzere bu eşitlik

$$\wp(z) = \wp_\Omega(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega^*}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{6.93}$$

olur. Bu serinin $\mathbb{C}$'de kompakt normsal, dolayısıyla kompakt düzgün yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu seri, özellikle her $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$'da mutlak yakınsaktır. Biz bir kez Ω kafesini seçip sabit tutacağımızdan $\wp_\Omega(z)$ yerine yalın olarak $\wp(z)$ yazacak ancak asla $\wp$'nin daima bir Ω'ya ilişkin olduğunu unutmayacağız.

$\wp(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de meromorf, $\mathbb{C}\backslash\Omega$'da holomorftur. $\wp(z)$ fonksiyonunun, her $\omega \in \Omega$ noktasında esas kısmı $1/(z-\omega)^2$ olan ikinci dereceden bir kutup yeri vardır. $-\Omega = \Omega$ olduğundan, (6.93)'ten kolayca görüleceği gibi $\wp(z)$ *bir çift fonksiyondur*, dd. her $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ için $\wp(z) = \wp(-z)$.

Önerme 6.7.14. $\wp, \wp' \in K(\Omega)$.

Kanıt. (6.93)'teki serimizin yakınsaklık karakterinden terim terim türev alabiliriz ve yine bir $\wp' \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ elde ederiz ve $\mathbb{C}\setminus\Omega$'da

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}. \tag{6.94}$$

Her $\omega \in \Omega$ için $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ olduğu apaçıktır. Bunun bir sonucu olarak, keyfi verilen bir $\omega \in \Omega$ ile tanımlanan $h(z) := \wp(z+\omega) - \wp(z)$ için $\mathbb{C}\setminus\Omega$'da $h' \equiv 0$ olur. Dolayısıyla $h \equiv c \in \mathbb{C}$. Şimdi $\wp$'nin çift olduğunu gözetirsek $c = h(-\omega/2) = 0$, böylece $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ olur. Sonuçta $\wp, \wp' \in K(\Omega)$. □

$\wp$ fonksiyonunun P temelparalelkenarında bir tek $z = 0$ noktasında ikinci dereceden bir kutup yeri vardır. $\wp$ sabit olmadığı için Teorem 6.7.12'den, her $c \in \mathbb{C}_\infty$ değerini katlılıklarıyla sayılmak üzere iki kez alır. Diğer yandan, $\wp'$'nün P'de bir tek $z = 0$ noktasında üçüncü dereceden bir kutup yeri vardır. Dolayısıyla $\wp'$'nün P'de katlılıklarıyla sayılmak üzere sıfır sayısı üçtür. Biz $\wp'$'nün yalnızca $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ ve $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ noktalarında birinci dereceden sıfır yerleri olduğunu kanıtlayacağız. $\wp$'nin bu noktalarda aldığı değerlere sırasıyla c_1, c_2, c_3 dersek, $\wp$ bu değerlerin her birini ikinci dereceden alacağından, bunlar birbirinden farklıdır ve $\wp$ fonksiyonu P'de yalnızca bu değerleri ikinci dereceden alır. Dolayısıyla $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ ve $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ noktaları dışındaki her $a \in P$ noktasında $\wp'(a) \neq 0$ olduğundan, $\wp$ fonksiyonu a noktasında yerel biholomorftur.

Önsav 6.7.15. *$f \in K(\Omega)$ bir çift fonksiyonsa, her $z \in \mathbb{C}$ ve her $\omega \in \Omega$ için $f\left(\frac{\omega}{2}+z\right) = f\left(\frac{\omega}{2}-z\right)$ ve $\frac{\omega}{2}$ noktası f'nin bir kutup yeri değilse $f'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$. Bunun bir sonucu olarak $\wp'$'nün P'deki sıfır yerleri $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ ve $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ noktalarıdır.*

Kanıt. f bir çift fonksiyon olduğundan

$$f\left(\frac{\omega}{2}+z\right) = f\left(-\frac{\omega}{2}-z\right) = f\left(\omega-\frac{\omega}{2}-z\right) = f\left(\frac{\omega}{2}-z\right). \tag{6.95}$$

f fonksiyonu $\frac{\omega}{2}$'de analitik olduğundan, (6.95)'ten

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\omega}{2}+z\right) &= f\left(\frac{\omega}{2}\right) + f'\left(\frac{\omega}{2}\right)z + \cdots = f\left(\frac{\omega}{2}-z\right) = \\ &= f\left(\frac{\omega}{2}\right) - f'\left(\frac{\omega}{2}\right)z + \cdots . \end{aligned}$$

Seri açılımının tekliğinden $f'\left(\frac{\omega}{2}\right) = -f'\left(\frac{\omega}{2}\right)$, dolayısıyla $f'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$. Şimdi $\wp$ çifttir. Bir $\omega \in \Omega$ döngüsü ancak ve ancak $\omega_1, \omega_2, \omega_1+\omega_2$ döngülerinden biriyse şu iki koşul sağlanır: (1) $\frac{\omega}{2} \in P$, (2) $\frac{\omega}{2}$ döngüsü $\wp$'nin bir kutup yeri değildir. Az önce kanıtlanandan $\wp'(\frac{\omega_1}{2}) = \wp'(\frac{\omega_2}{2}) = \wp'(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}) = 0$ olur. □

$\wp$ fonksiyonunun derecesi iki olduğundan, ikinci dereceden aldığı

$$e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\ e_2 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right),\ \text{ve } e_3 := \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) \tag{6.96}$$

değerleri birbirinden farklıdır ve P'nin bir başka noktasında alınmazlar.

Teorem 6.7.16 ($\wp$'nin Diferansiyel Denklemi I)**.** *(6.96)'daki* e_1, e_2, e_3 *değerleriyle*

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3]. \tag{6.97}$$

Kanıt. $f(z) := \left(\wp'(z)\right)^2 - 4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3]$ olsun. Bir yandan $f \in K(\Omega)$, diğer yandan (6.93) ve (6.94) ile

$$f(z) = \left(\frac{4}{z^6}+\cdots\right) - 4\left(\frac{1}{z^6} - \frac{e_1+e_2+e_3}{z^4}+\cdots\right)$$

olur. $f \in K(\Omega)$ fonksiyonu sabit değilse, Liouville III Teoremi'nden dolayı P'de her $c \in \mathbb{C}_\infty$ değerini katlılıklarıyla sayılmak üzere aynı çoklukta alır. Şimdi f'nin P'de en fazla dördüncü dereceden bir kutup yeri olabilir, ancak katlılıklarıyla sayılmak üzere P'de en azından altı sıfır yeri vardır. Öyleyse f bir sabit fonksiyondur ve f fonksiyonu P'de sıfır değerini aldığından ($f(\omega_k/2)=0$ olduğunu hatırlayınız), bu sabit sıfırdır. $\square$

$|\zeta| < 1$ için $\frac{1}{1-\zeta} = \sum_{n\geq 0}\zeta^n$, dolayısıyla

$$\frac{1}{(1-\zeta)^2} = \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)' = \sum_{n\geq 1} n\zeta^{n-1}$$

olduğundan, $\omega \in \Omega^*$ olmak üzere $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ ve $\left|\frac{z}{\omega}\right| < 1$ için

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\omega}\right)^2}\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(1+2\frac{z}{\omega}+3\frac{z^2}{\omega^2}+\cdots\right). \tag{6.98}$$

$\wp$ fonksiyonunun P'de bir tek 0 noktasında ikinci dereceden bir kutup yeri olduğundan, oradaki kalanı $= 0$ olur. O halde, $\wp$'nin bir D_r^*'deki Laurent açılımı bir $h \in \mathcal{H}(D_r)$ holomorf fonksiyonuyla $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + h(z)$ şeklindedir. (6.93)'te mutlak yakınsaklık söz konusu olduğundan istediğimiz gibi paketleyebiliriz; (6.98)'i de gözeterek

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega^*}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{\omega^{k+1}}z^{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\sum_{\omega\in\Omega^*}\frac{1}{\omega^{k+1}}\right)z^{k-1}. \tag{6.99}$$

Ama $-\Omega = \Omega$ olduğundan, çift k'ler için $\sum_{\omega\in\Omega^*} \frac{1}{\omega^{k+1}} = 0$ olur.

$$G_{2k+2} := \sum_{\omega\in\Omega^*} \frac{1}{\omega^{2k+2}} \textbf{ Eisenstein serileri}$$

olmak üzere aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 6.7.17. *$\wp$'nin 0'ın bir komşuluğundaki Laurent açılımı aşağıdakidir:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(2k+1)G_{2k+2}z^{2k}. \tag{6.100}$$

Teorem 6.7.18 ($\wp$'nin Diferansiyel Denklemi II)**.** $g_2 := \sum_{\omega\in\Omega^*} \frac{1}{\omega^4}$ *ve* $g_3 := 140\sum_{\omega\in\Omega^*} \frac{1}{\omega^6}$ *olmak üzere*[11]

$$\big(\wp'(z)\big)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3. \tag{6.101}$$

Kanıt. (6.100)'deki serinin ilk bir kaç terimini yazar ve terim terim türev alırsak

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \cdots\\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \cdots\end{aligned}$$

Amacımız bir $p(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ polinomunu $f := p(\wp,\wp') = 0$ olacak biçimde bulmak. $f \in K(\Omega)$ olduğundan, Teorem 6.7.9'dan dolayı p'yi $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $f(0) = 0$ olacak biçimde seçmek yeterlidir.

Şimdi $\wp^3$ ve $\wp'^2$ fonksiyonlarının 0'da altıncı dereceden kutup yerleri vardır.

$$\begin{aligned}\wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + \cdots\\ \big(\wp'(z)\big)^2 &= \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \cdots\end{aligned}$$

olduğundan, $f := \wp'^2 - 4\wp^3 + 60G_4\wp + 140G_6$ fonksiyonunun P temelparalelkenarındaki yagâne olası kutup yeri 0'dır; ancak bu seçimimizle elimine edilmiştir. Böylece $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $f(0) = 0$ olduğundan, $f \equiv 0$. □

Teorem 6.7.19. *Her $f \in K(\Omega)$ fonksiyonuna karşılık $P, Q \in \mathbb{C}(X)$ rasyonel fonksiyonları*

$$f = R(\wp) + \wp' Q(\wp)$$

olacak biçimde bulunabilir($\wp = \wp_\Omega$ olduğunu unutmayalım!).

[11]Elbette g_2 ve g_3 sayıları Ω kafesine bağlıdır ve titiz davranıldığında onlar için $g_{\Omega,2}$ ve $g_{\Omega,3}$ gösterimleri kullanılmalıdır. Biz bu uyarının yeterli olduğunu düşünüyoruz.

Sonuç 6.7.20. $K(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)$.

Kanıt. f sabitse kanıtlanacak bir şey yoktur. $f \in K(\Omega)\backslash\mathbb{C}$ fonksiyonu m. dereceden olsun.

(1) f çift olsun. f''nün P temelparalelkenarındaki sıfır yerlerinin kümesine S' dersek, S' sonludur. f fonksiyonu her $c \in \mathbb{C}\backslash f(S')$ değerini P'de m farklı noktada alır. Bir $a \in P$ için $f(a) = c$ ise, f çift olduğundan $f(-a) = c$. Eğer $[a] = [-a]$, dd. $a \in -a + \Omega$ olsaydı $2a \in \Omega$ olurdu ve $a = \frac{2a}{2}$ ise f'nin bir kutup yeri olmadığından, 6.7.15'ten $f'(a) = 0$ olurdu ki bu, $a \notin S'$ ile çelişir. Dolayısıyla f'nin P'deki birinci dereceden c-yerleri, $n = m/2$ olmak üzere, birbirinden farklı $a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n$ şeklindedir. $d \in \mathbb{C}\backslash f(S')$ değerini $d \neq c$ olacak biçimde seçersek f'nin P'deki birbirinden farklı ve birinci dereceden d-yerleri $b_1, \ldots, b_n, -b_1, \ldots, -b_n$ şeklindedir. Bu durumda

$$F(z) := \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

ile tanımlanan $F \in K(\Omega)$ fonksiyonunun P'de, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, yalnızca $a_k, -a_k$ noktalarında birinci dereceden sıfıryerleri ve yalnıza $b_k, -b_k$ noktalarında birinci dereceden kutup noktaları vardır. $\wp$ ikinci dereceden olduğu için $g_k(z) := \wp(z) - \wp(a_k)$ fonksiyonunun P'deki yagâne sıfıryerleri, her biri birinci dereceden olmak üzere $\pm a_k$ noktalarıdır. Benzeri $\wp(z) - \wp(b_k)$ fonksiyonları için geçerlidir. Dolayısıyla

$$G(z) := \frac{(\wp(z) - \wp(a_1)) \cdots (\wp(z) - \wp(a_n))}{(\wp(z) - \wp(b_1)) \cdots (\wp(z) - \wp(b_n))}$$

fonksiyonunun P'deki sıfıryerleri ve kutup noktaları, katlılıklarıyla alınmak üzere, örtüşürler. Böylece $F/G \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve Liouville I Teoremi'nden, bir $\alpha \in \mathbb{C}$ ile $F/G = \alpha$. Bu denklemden f çekilirse, bir $R \in \mathbb{C}(X)$ rasyonel fonksiyonuyla $f = R(\wp)$ olur.

(2) $g \in K(\Omega)$ tek ise $g/\wp'$ çift olacağından, bir $Q \in \mathbb{C}(X)$ rasyonel fonksiyonu ile $g/\wp' = Q(\wp)$, dolayısıyla $g = \wp' Q(\wp)$ olur.

(3) Şimdi $f \in K(\Omega)\backslash\mathbb{C}$ keyfi verilsin.

$$f_c(z) := \frac{1}{2}\left(f(z) + f(-z)\right) \text{ ve } f_t(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) - f(-z)\right)$$

olmak üzere $f_c, f_t \in K(\Omega)$, $f = f_c + f_t$ olur. f_c bir çift, f_t ise bir tek fonksiyondur. Uygun $R, Q \in \mathbb{C}(X)$ ile $f_c = R(\wp)$ ve $f_t = \wp' Q(\wp)$ ve işimiz biter.

Sonucun kanıtı: $X \mapsto \wp$ ve $Y \mapsto \wp'$ ile tanımlanan $\mathbb{C}(X)[Y] \to K(\Omega)$ yapı dönüşümü teoremimizden dolayı örtendir ve 6.7.18'den dolayı çekirdeği $(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)$ idealidir. □

Önerme 6.7.21. *$f \in K(\Omega)$ çift ve $P_f \subset \Omega$ ise, dd. f'nin kutup yerleri Ω'daysa, bir $p \in \mathbb{C}[X]$ polinomu ile $f = p(\wp)$.*

Kanıt. f çift olduğundan bir D_r^*'daki Laurent açılımındaki tüm tek damgalı katsayılar $= 0$ olur. f ve $\wp$'nin D_r^*'daki Laurent açılımları

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-2n}z^{-2n} + a_{-2(n-1)}z^{-2(n-1)} + \cdots \\ \wp(z) &= z^{-2} + h(z), \quad h \in \mathcal{H}(D_r) \end{aligned}$$

olduğundan yapılacak iş bellidir. Şimdi$f_1(z) := f(z) - a_{-2n}\wp(z)^n$ olarak tanımlanan $f_1 \in K(\Omega)$ fonksiyonu da f gibi çifttir, $P_{f_1} \subset \Omega$ ve 0'da en fazla $2(n-1)$ dereceden bir kutup yeri vardır. Şimdi f ile yapılan f_1 ile tekrarlanır ve sonlu adımda bir $q \in \mathbb{C}[X]$ ile $f - q(\wp)$'nin 0'da kutup noktası yoktur; dolayısıyla temelparalelkenarda bir kutup noktası yoktur. Böylece Liouville I ile $f - q(\wp)$ bir c sabitidir. $p := q + c$ işimizi görür. □

Not 6.7.22. $\sigma(z) = \sigma_\Omega(z) = z\prod_{\omega\in\Omega^*} E_2(\frac{z}{\omega})$ örnek 6.4.14'teki holomorf fonksiyonumuz olsun. Logaritmik türev alarak

$$\zeta(z) := \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Omega^*}\left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right), \tag{6.102}$$

buradan da

$$\wp = -\zeta' = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'$$

olur. Dolayısıyla $\zeta' \in K(\Omega)$, özellikle keyfi seçilen $\omega \in \Omega$ için $\zeta'(z+\omega) - \zeta'(z) \equiv 0$ olduğundan, bir $\eta = \eta(\omega) \in \mathbb{C}$ sabitiyle $\zeta(z+\omega) - \zeta(z) = \eta$, eş anlamlı olarak

$$\frac{\sigma'(z+\omega)}{\sigma(z+\omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \eta.$$

Buradan integral alarak bir $c = c(\omega) \in \mathbb{C}$ sabitiyle

$$\sigma(z+\omega) = \sigma(z)e^{z\eta+c} \tag{6.103}$$

elde ederiz.

Şimdi 6.7.13 Liouville IV'ün tersinin de doğruluğunu kanıtlayabiliriz.

Teorem 6.7.23 (Abel Teoremi)**.** *$1 \le i \le n$ için $s_i, p_i \in P$, $\sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^n p_i \in \Omega$ ve daima $[s_i] \neq [p_k]$ ise, P temelparalelkenarındaki sıfıryerleri tamı tamına $s_1, \ldots, s_n$ ve kutup yerleri tamı tamına $p_1, \ldots, p_n$ olan bir $f \in K(\Omega)$ vardır. Sıfıryerlerinin bazıları kendi aralarında birbirine eşit olabilir; benzeri kutup yerleri için de geçerlidir.*

Kanıt. $\omega_0 := \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^n p_i \in \Omega$ ve $z \in \mathbb{C}\setminus\{p_1, \ldots, p_n\}$ için

$$f(z) := \frac{\sigma(z - s_1 + \omega_0)\cdot\prod_{i=2}^n \sigma(z - s_i)}{\prod_{i=1}^n \sigma(z - p_i)} \tag{6.104}$$

olsun. f fonksiyonu $g, h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $h \neq 0$ olmak üzere $f = g/h$ tipinde olduğundan $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. (6.103)'ten dolayı $\sigma(z - s_1 + \omega) = 0 \iff \sigma(z -$

$s_1) = 0$ olduğunu da gözetirsek, f'nin P'deki sıfır ve kutup yerlerine ilişkin savımız aşikârdır. Geriye $\Omega \subset \Omega_f$ olduğunu görmek kalıyor. $\omega \in \Omega$ keyfi verilsin. (6.104)'ten (6.103) ile

$$\begin{aligned} f(z+\omega) &= \frac{\sigma(z-s_1+\omega_0+\omega)\cdot\prod_{i=2}^n \sigma(z-s_i+\omega)}{\prod_{i=1}^n \sigma(z-p_i+\omega)} \\ &= f(z)\frac{e^{\eta(z-s_1+\omega_0)+c}\cdot\prod_{i=2}^n e^{\eta(z-s_i)+c}}{\prod_{i=1}^n e^{\eta(z-p_i)+c}} \\ &= f(z)e^{\eta\left(\omega_0-\sum_{i=1}^n s_i+\sum_{i=1}^n p_i\right)} = f(z). \end{aligned}$$

□

6.7.5 Eliptik İntegraller

Geniş kapsamlı olan bu konuya kısaca değineceğiz ve bu arada $K(\Omega)$'nın öğelerine niçin "eliptik fonksiyonlar" dendiğini de belirteceğiz.

Gerçel analizde, sabitleri, x^r $(r \in \mathbb{R}), e^x, \ln x$ ve tüm trigonometrik fonksiyonları ve terslerini içeren ve toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve fonksiyonların bileşimine göre kapalı olan en dar fonksiyonlar sınıfına **basit fonksiyonlar** sınıfı denir. Basit fonksiyonların türevleri de basit iken aynı şey ilkelleri (antitürevleri) için doğru değildir. Örneğin e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$ ve $\cos x^2$ fonksiyonlarının ilkelleri basit değildir. Bu altkısımda bazı basit olmayan fonksiyonlar tanıyacağız.

$R(x,y) \in \mathbb{R}(x,y)$ bir rasyonel fonksiyon ve $P \in \mathbb{R}[x]$ bir polinom olsun. P polinomunun derecesi ≤ 2 ise, $R(x,\sqrt{P(x)})$ tipindeki fonksiyonların ilkelleri basit fonksiyonlardır. Gerçel analizde çalıştığımız sürece $P(x) \geq 0$ almak zorundayız. Eğer $P(x)$ tüm sıfıryerleri basit olan üçüncü veya dördüncü dereceden bir polinom ise,

$$\int R(x,\sqrt{P(x)}dx \tag{6.105}$$

tipindeki integrallere **eliptik integraller** denir. Bunun nedeni bu tip integrallere elips veya lemniskat eğrilerinin uzunluklarını hesaplarken karşılaşmamızdır. Gerçekten de $a,b > 0$ gerçel sayılar olmak üzere $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ olarak verilen elipsin uzunluğu KA I Teorem 2.2.11(i) ile

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt \\ &\overset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} 4\int_0^1 \frac{\sqrt{4a^2x^2+b^2(1-x^2)^2}}{(1+x^2)^2}dx \end{aligned}$$

olur ve burada (6.105) tipinde bir eliptik integral söz konusudur. $P(x)$ tüm sıfıryerleri basit olan üçüncü veya dördüncü dereceden bir polinom olmak üzere

$R(x, \sqrt{P(x)})$ fonksiyonlarının integralleri basit fonksiyon değillerdir ve tümüyle yeni bir sınıf oluştururlar. Bu fonksiyonlar nasıl şeylerdir? Daha 1790'larda Gauss P ikinci dereceden olduğunda $R(x, \sqrt{P(x)})$ fonksiyonlarının ilkellerinin terslerinin basit döngülü fonksiyonlarla ifade edildiğini, buna karşın $1/\sqrt{1-x^4}$ gibi bazı fonksiyonların ilkellerinin ise çift döngülü olduğunu fark etmiş, bu yönde sunduğu bir çalışma Paris'te yayınlanmaya değer bulunmamıştı! Ancak 1820'lerde Abel ve Jacobi benzer sonuçlara ulaştılar ve eliptik integrallerle tanımlanan fonksiyonların terslerine *eliptik fonksiyonlar* dediler. Doğrudan verilen Ω kafeslerine ilişkin çift döngülü fonksiyonları araştırma 1840'lı yıllarda Liouville ve Eisenstein'la başladı. Ne Gauss ne de Weierstrass bu konudaki çalışmalarını yayınlamadılar. Weierstrass 1863'te sonuçlarının bir kısmını dikte ettirdi, bir kısmını ise derslerinde anlattı. Binsekizyüzlü yıllarda eliptik integrallere ilişkin atılan en önemli iki adım şunlardır. Birincisi gerçel doğrudan kompleks düzleme geçmektir. Ancak bu kez $\sqrt{P(z)}$ tek değerli olmadığından ister istemez Riemann yüzeylerine geçmemiz gerekmiştir. İkinci önemli adım alışık olduğumuz bir şeyi tersyüz etmek olmuştur. Açalım. Örneğin $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$ fonksiyonumuzun bir ilkeli F ise, $dF(x) = f(x)dx$ ve

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad 0 \le x_0 \le x \le 1. \tag{6.106}$$

F ilkeli, integralimizdeki bir uç noktanın fonksiyonudur. Biz $F(x) = \arcsin x$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (6.106)'dan

$$x - x_0 = \int_{\sin x_0}^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{6.107}$$

elde ederiz ve şimdi $\sin x$ uç noktamızı soldaki değişkenin bir fonksiyonu olarak elde ettik. Benzer biçimde (6.101)'den yola çıkar ve

$$dz = \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3}}$$

olduğunu gözetirsek

$$z - z_0 = \int_{\gamma, \wp(z_0)}^{\wp(z)} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}} \tag{6.108}$$

elde ederiz. Burada elbette kök içindeki fonksiyonun bir holomorf dalını seçecek ve γ yolu ise integralini aldığımız fonksiyonun holomorf olduğu bir bölgede olacaktır. (6.107) ve (6.108)'in benzerlikleri apaçık ortadadır.

Problemler

Problem 6.7.1. Eğer 1 sayısı f tam fonksiyonunun bir döngüsü ve $0 \leq x \leq 1$ için düzgün biçimde $\lim_{y \to \pm\infty} f(x+iy) = 0$ ise, $f = 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.7.2. (a) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ve terimleri birbirinden farklı bir $(\varepsilon_n) \subset \Omega_f$ dizisi $\lim \varepsilon_n = 0$ olacak biçimde varsa, f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

(b) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ve Ω_f'nin $\mathbb{C}$'de bir yığılma noktası varsa, bir $(\varepsilon_n) \subset \Omega_f$ dizisinin $\lim \varepsilon_n = 0$ olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

Problem 6.7.3. $f, g \in K(\Omega)$, $\Omega_f = \Omega_g$ ve her $a \in \Omega_f$ noktasında f ve g'nin esas kısımları aynı ise, bir $c \in \mathbb{C}$ ile $f = g + c$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.7.4. $f, g \in K(\Omega)$ fonksiyonlarının sıfır yerleri ve kutup yerleri katlılıklarıyla örtüşüyorsa, dd. $(f) = (g)$ ise, yani esas bölenleri eşitse bir $c \in \mathbb{C}$ ile $f = cg$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 6.7.5. Sabit olmayan polinom ve rasyonel fonksiyonların yalnızca önemsiz döngüsü olduğunu gösteriniz.

Problem 6.7.6. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z+1) = f(z)$ ise, bir $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ ile, her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = g(\exp 2\pi i z)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.7.7. Bir $C > 0$ saysının, her $z \in \overline{D}_R$ ve $|\omega| \geq 2R$ olan her $\omega \in \Omega$ için

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{C}{|\omega|^3}$$

olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

Problem 6.7.8. Bir $K > 0$ sayısının, her $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}$ için

$$|n_1\omega_1 + n_2\omega_2| \geq K\,|n_1 + in_2|$$

olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız. İpucu: $\varphi(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) := n_1 + in_2$ ile tanımlanan $\mathbb{R}$-doğrusal $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eşyapı ($\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$) dönüşümünün sürekliliğinden ve bu tip fonksiyonlar için $\|\varphi\|$'yi içeren eşitsizlikten yararlanınız.

Problem 6.7.9. $K > 0$ bir önceki problemdeki olmak üzere

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{1}{K^3} \sum_{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{3/2}}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 6.7.10. Bir önceki problemden yararlanarak

$$\sum_{\omega \in \Omega^*} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \frac{1}{K^3} \sum_{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0,0)\}} \frac{1}{|n_1 + in_2|^3} \leq 3\frac{8}{K} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

olduğunu gösteriniz. İpucu: Ortadaki toplamı $Q_n := [-n, n] \times [-n, n]$ olmak üzere $Q_n \cap \mathbb{Z}^2$'ler üzerinden paketleyiniz; burada elbette $n \geq 1$.

Problem 6.7.11. 6.7.7 ve 6.7.10 problemlerinden yararlanarak (6.93)'teki serinin $\mathbb{C} \backslash \Omega$'da mutlak yakınsak olduğunu kanıtlayınız.

Problem 6.7.12. $f := \exp \wp_\Omega$ için $\Omega_f = \Omega$ ancak $f \notin K(\Omega)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.7.13. Problem 6.7.4'te $f = (\wp')^2$ ve $g = \prod_{i=1}^{3}(\wp - e_i)$ alarak teorem 6.7.16'nın yeni bir kanıtını veriniz.

Problem 6.7.14. e_1, e_2, e_3 sayıları (6.96) ve g_2, g_3 sayıları ise 6.7.18'dekiler olmak üzere $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)$ ve $g_3 = 4e_1e_2e_3$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.7.15. $\wp = \wp_\Omega$ olmak üzere, her $z \in \mathbb{C} \backslash \Omega$ için γ başlangıç noktası 0 ve bitiş noktası z ve izi $\mathbb{C} \backslash \Omega$'da olan herhangi bir gezi ile

$$f(z) := \int_{\gamma,0}^{z} \left(\wp(w) - \frac{1}{w^2}\right) dw$$

olarak tanımlansın. f'nin tanımının kusursuz ve ζ (6.102) ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = \int_{\gamma,0}^{z} \left(\wp(w) - \frac{1}{w^2}\right) dw = -\zeta(z) + \frac{1}{z}$$

olduğunu gösteriniz.

6.8 Harmonik Fonksiyonlar

6.8.1 Temel Özellikler

$U \subset \mathbb{R}^2$ açık, $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ve $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ olmak üzere $\Delta f = 0$ denkleminin çözümleri fizikte sıkça karşımıza çıkar. Δ operatörüne **Laplace operatörü** ve $\Delta f = 0$ denkleminin çözümlerine ise **harmonik** veya **potansiyel fonksiyonlar** denir. Harmonik fonksiyonlar ve holomorf fonksiyonlar sıkı bir dirsek teması içerisindedirler. Önceleri holomorf fonksiyonlara ilişkin bazı özellikler hormonik fonksiyonlar üzerinden elde edilmiştir. Biz kitabımızda ters yolu izleyecek ve fazla ayrıntıya girmeden harmonik fonksiyonlara ilişkin bazı temel özellikleri holomorf fonksiyonlar üzerinden elde edeceğiz. Harmonik fonksiyonlarımızın $\mathbb{C}$ değerli olmalarına izin vereceğiz; ancak bunun önemli bir genelleme olmadığını göreceğiz.

Tanım 6.8.1. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{C})$ ve U'da $\Delta f = 0$ ise, f **fonksiyonu U'da harmoniktir** diyecek ve bunların kümesini $\mathrm{Har}(U)$ ile göstereceğiz. $\mathbb{R}$-değerli harmonik fonksiyonlarının kümesini ise, bunu vurgulamak istediğimizde, $\mathrm{Har}(U, \mathbb{R})$ ile göstereceğiz.

$\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$'nin tanımlarından, doğrudan $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{C})$ için

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} \tag{6.109}$$

olduğu görülür.

(6.109)'dan dolayı U'da holomorf fonksiyonlar da, antiholomorf fonksiyonlar da harmoniktirler. Ayrıca $f = u + iv \in \mathcal{H}(U)$ ise, $0 = \Delta f = \Delta u + i\Delta v$'den $\Delta u = \Delta v = 0$ elde edilir. Dolayısıyla U'da holomorf fonksiyonların kendileri, gerçel ve sanal kısımları da U'da harmoniktir. Benzer biçimde antiholomorf fonksiyonların gerçel ve sanal kısımları da harmoniktirler.

Tersine bize bir $u \in \mathrm{Har}(U, \mathbb{R})$ harmonik fonksiyonu verildiğinde

$$f(z) := u_x(z) - iu_y(z), \quad z \in U$$

ile tanımlanan fonksiyon U'da holomorftur. Gerçekten de $u^* := u_x$ ve $v^* := -u_y$ fonksiyonları U'da sürekli türevlenebilirler ve $u^*_x = u_{xx} = -u_{yy} = v^*_y$ ve $u^*_y = u_{xy} = u_{yx} = -v^*_x$ olduğundan $f = u^* + iv^* \in KA\ I(U)$ fonksiyonu Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar, dolayısıyla U'da holomorftur.

Not 6.8.2. **(1)** Δ doğrusal olduğundan $\mathrm{Har}(U)$ bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır, ancak bir cebir değildir. Örneğin $f(x, y) = xy$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de harmoniktir, ancak $f^2(x, y) = x^2y^2$ harmonik değildir.
(2) Δ doğrusal olduğundan, $f \in \mathrm{Har}(U) \iff \mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \in \mathrm{Har}(U)$. Bu nedenle, aslında yalnızca $\mathbb{R}$-değerli harmonik fonksiyonları incelemek yeterlidir.
(3) $\overline{\Delta f} = \Delta \overline{f}$ olduğundan

$$f \in \mathrm{Har}(U) \iff \overline{f} \in \mathrm{Har}(U)$$

(4) $f \in KA\ I(U)$ fonksiyonunun holomorf olması için $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ eşitliğinin gerek ve yeter koşul olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{C})$ için yine (6.109)'dan

$$f \in \mathrm{Har}(U) \iff \frac{\partial f}{\partial z} \in \mathcal{H}(U) \iff \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \text{ antiholomorf.} \tag{6.110}$$

(5) *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $f : U \to V$ holomorf veya antiholomorf ve $g \in \mathrm{Har}(V)$ ise, $g \circ f$ harmoniktir.* f holomorf olsun. KA I Teorem 1.2.7 ile

$$(g \circ f)_z = g_w f_z + g_{\overline{w}} \left(\overline{f}\right)_z = g_w f_z,$$
$$(g \circ f)_{z\overline{z}} = g_{ww} f_{\overline{z}} f_z + g_{w\overline{w}} \left(\overline{f}\right)_z f_z + g_w f_{z\overline{z}} = 0$$

olur. f antiholomorf ise kanıt benzer biçimdedir.

Örnek 6.8.3. $B \subset \mathbb{C}^*$ basit bağlantılı ve $\log z = \ln|z| + i \arg z$ ise $\mathbf{log}\, z$'nin B'de bir holomorf dalı olsun. $\mathrm{Re} \log z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\mathrm{Im} \log z = \arg z$ fonksiyonları B'de harmoniktirler. Özellikle, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\log_\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{C}_\alpha$'da holomorftur. $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ fonksiyonu $\mathbb{C}^*$'da yerel olarak bir holomorf fonksiyonun gerçel kısmı olarak harmoniktir. Bunu elbette $\Delta f = 0$ olduğunu göstererek de söyleyebiliriz. Ancak $\mathbf{arg}\, z$'nin $\mathbb{C}^*$'da bir harmonik dalı olamaz; aksi halde logaritmanın $\mathbb{C}^*$'da bir holomorf dalı olurdu!

$u \in \mathrm{Har}(U, \mathbb{R})$ ve $v : U \to \mathbb{R}$ olmak üzere$f = u + iv$ holomorf ise, v fonksiyonu U'da u'ya **harmonik eşleniktir** denir. Not 6.8.2'den $v \in \mathrm{Har}(U, \mathbb{R})$

olur. Bu durumda $if = -v + iu$ da holomorf olacağından, u da $-v$'nin harmonik eşleniğidir.

Önerme 6.8.4. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ve $v : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu B'de u'nun bir harmonik eşleniği ise, her $c \in \mathbb{R}$ için $v + c$ de B'de u'nun bir harmonik eşleniğidir ve tersine u'nun B'deki tüm harmonik eşlenikleri bu tiptendir.*

Kanıt. v_1 ve v_2 fonksiyonları u harmonik fonksiyonunun harmonik eşlenikleri iseler, $i = 1, 2$ için $f_i := u + iv_i$ fonksiyonları B'de holomorfturlar. Bu durumda B bölgesindeki $f_2 - f_1 = i(v_2 - v_1)$ holomorf fonksiyonları yalnız sanal değerler alır. $(f_2 - f_1)(B) \subset i\mathbb{R}$ olduğundan, Açık Dönüşüm Teoremi ile $f_2 - f_1$ sabittir ve bir c ile $i(v_2 - v_1) = f_2 - f_1 = ic$ olur. Böylece $v_2 = v_1 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Diğer yandan $f = u + iv \in \mathcal{H}(B)$ holomorfsa, her $c \in \mathbb{R}$ için $f = u + i(v + c)$ de holomorftur. □

Teorem 6.8.5. *$B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı olsun.*

(i) $f \in \mathrm{Har}(B)$ ise, f fonksiyonu B'de biri holomorf, diğeri antiholomorf olan iki fonksiyonun toplamıdır.

(ii) Eğer $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ise, u fonksiyonu B'de holomorf olan bir fonksiyonun gerçel kısmıdır, dd. u'nun B'de bir harmonik eşleniği vardır ve bu harmonik fonksiyon bir sabit dışında tek olarak belirlidir.

Kanıt. (i) (6.110)'dan dolayı $g := \frac{\partial f}{\partial z} \in \mathcal{H}(B)$. KA I Teorem 2.9.17(iii)'ten dolayı g'nin B'de bir G ilkeli vardır. Bu durumda $h := f - G$ dersek,

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial G}{\partial z} = g - G' = g - g = 0$$

olur. Dolayısıyla h antiholomorf, G holomorf ve $f = G + h$ olur.

(ii) G ve h yukarıdaki gibi olmak üzere $u = G + h$ olsun. $G + \overline{h} \in \mathcal{H}(B)$. Ayrıca $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ise, $u = \mathrm{Re}(G + h) = \mathrm{Re}(G + \overline{h})$ ve işimiz biter. Eğer $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(B)$ ve $u = \mathrm{Re}\, g_i$ ise, $g_2 - g_1 \in \mathcal{H}(B)$, $(g_2 - g_1)(B) \subset i\mathbb{R}$ ve B bir bölge olduğundan, Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı $g_2 - g_1$ sabittir. □

$u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ise, $\Delta u = 0$'dan $\frac{\partial}{\partial y}(-u_y) = \frac{\partial}{\partial x}(u_x)$ elde ederiz. Bu durumda $\omega = (-u_y)dx + u_x dy$ türevsel biçimi için, B basit bağlantılı bölgesinde $d\omega = 0$ olduğundan, gerçel analizden şunu biliyoruz: $z_0 = (x_0, y_0) \in B$ keyfi seçilip sabit tutulduğunda, her $z = (x, y) \in B$ için, $\gamma \in \mathcal{G}^1_{z_0,z}(B)$ olmak üzere

$$v(x, y) := \int_\gamma \omega = \int_\gamma ((-u_y)dx + u_x dy)$$

iyi tanımlıdır ve u'nun B'de bir harmonik eşleniğidir.

Sonuç 6.8.6. *(a) $f \in \mathrm{Har}(U, \mathbb{R})$ ise, f yerel olarak bir holomorf fonksiyonun gerçel kısmıdır.*

(b) $f \in \mathrm{Har}(U)$ ise, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ve f'nin tüm türevleri U'da harmoniktir.

Kanıt. (a) Her $z_0 \in U$ için $D_r(z_0) \subset U$ seçersek, $D_r(z_0)$ basit bağlantılı olduğundan sav, Teorem 6.8.5(ii)'den çıkar.

(b) $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ savı (a)'dan çıkar. f'nin tüm kısmi türevleri sürekli olduğundan, Schwarz Teoremi'nden dolayı, $\nu, \mu \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere

$$\Delta \frac{\partial^{\nu+\mu} f}{\partial x^\nu \partial y^\mu} = \frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \Delta f = 0$$

olur ve bu, savın kalanını verir. □

Önerme 6.8.7. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) Her $\overline{D}_r(a) \subset U$ için

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt, \tag{6.111}$$

(ii) Her $\overline{D}_r(a) \subset U$ için

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\overline{D}_r(a)} f(x + iy) dx dy. \tag{6.112}$$

Kanıt. Kutupsal koordinatlara geçersek

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\overline{D}_r(a)} f(x + iy) dx dy = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) dt \right) \rho d\rho \tag{6.113}$$

olur ve bu bize doğrudan (i)$\Longrightarrow$(ii) çıkarımını verir. Şimdi (ii) geçerli olsun. $R > 0$ sayısı $\overline{D}_R(a) \subset U$ olacak biçimde seçilsin. Her $0 \leq r < R$ için (6.113)'ten

$$\frac{r^2}{2} f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) dt \right) \rho d\rho$$

elde ederiz. İki yanın r'ye göre türevini alırsak (6.111) elde edilir. □

Tanım 6.8.8. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun.

(i) f sürekli ve her $\overline{D}_r(a) \subset U$ için (6.111) geçerli ise, f fonksiyonu U**'da ortalama değer özelliği**ne sahiptir denir.

(ii) f fonksiyonu, $|f|$'nin yerel maksimuma sahip olduğu her $a \in U$ noktasının bir komşuluğunda sabitse, f **fonksiyonu U'da maksimum ilkesini sağlar** denir.

$f \in \mathcal{H}(U)$ ise, her $\overline{D}_r(a) \subset U$ için

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt$$

olduğundan *U'da holomorf olan fonksiyonlar U'da ortalama değer özelliğine sahiptirler ve maksimum ilkesini sağlarlar*[12]. $|f|$ fonksiyonu a noktasında yerel maksimuma sahipse —her ne kadar doğru bir söylem olmasa da — f **fonksiyonu a'da yerel maksimuma sahiptir** denir.

Teorem 6.8.9. *$U \subset \mathbb{C}$ açık $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ olsun. f fonksiyonu U'da ortalama değer özelliğine sahipse f fonksiyonu U'da maksimum ilkesini sağlar.*

Kanıt. $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ fonksiyonu U'da ortalama değer özelliğine sahip olsun. $|f|$ fonksiyonumuzun $a \in U$ noktasında yerel maksimumu olsun. Bir $D_R(a) \subset U$ dairesi, her $z \in D_R(a)$ için $|f(z)| \leq |f(a)|$ olacak biçimde seçilsin. $f(a) = 0$ ise, bu dairede $f \equiv 0$ olur. $f(a) \neq 0$ için $g := \left(\overline{f(a)}/|f(a)|\right) f$ olarak tanımlarsak g fonksiyonu U'da ortalama değer özelliğine sahiptir ve $g(a) = |f(a)| > 0$, dolayısıyla $g(a) = |g(a)| > 0$ olur. Savı f için kanıtlamak g için kanıtlamaya denk olduğundan, biz daha baştan f fonksiyonumuzun $f(a) = |f(a)| > 0$ olarak verildiğini varsayabiliriz. f ortalama değer özelliğine sahip olduğundan, $0 < r < R$ için

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(a) - f(a+re^{it})]dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [|f(a)| - f(a+re^{it})]dt.$$

Buradan $\varphi_r(t) := |f(a)| - \mathrm{Re}\left(f(a+re^{it})\right)$ dersek

$$\int_0^{2\pi} \varphi_r(t)dt = \int_0^{2\pi} \left[|f(a)| - \mathrm{Re}\left(f(a+re^{it})\right)\right] dt = 0 \tag{6.114}$$

elde ederiz. Her $0 < r < R$ için φ_r fonksiyonu $[0, 2\pi]$'de sürekli ve baştaki koşulumuzdan $\varphi_r \geq 0$ olduğundan, (6.114)'ten $\varphi_r \equiv 0$, dolayısıyla her $z = a+re^{it} \in D_R^*(a)$ için $|f(a)| = f(a) = \mathrm{Re}\left(f(a+re^{it})\right)$ olur. Bunu $|f(a+re^{it})| \leq |f(a)|$ ile birleştirirsek, her $z \in D_R(a)$ için $f(z) = f(a)$ elde ederiz. □

Teorem 6.8.10. *Harmonik fonksiyonlar ortalama değer özelliğine sahiptirler.*

[12]Buradaki ortalama değer özelliğinin gerçel analizdekinden çok güçlü olduğunu belirtelim. Orada ileri sürülen, bir $[a, b]$ kapalı aralığındaki bir sürekli $\mathbb{R}$-değerli fonksiyonun, bu aralıktaki ortalama değerini bu aralığın *noktalarının birinde* aldığıdır; bu noktanın hangisi olduğu söylenmez!

Kanıt. Savımızı reel değerli harmonik fonksiyonlar için kanıtlamak yeterlidir. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $u \in \mathrm{Har}(U, \mathbb{R})$ olsun. $\overline{D}_r(a) \subset U$ keyfi verilsin. Bir $R > r > 0$ sayısını $D_R(a) \subset U$ olacak biçimde seçelim. Teorem 6.8.5(ii)'den dolayı $D_R(a)$'da holomorf bir $f = u + iv$ fonksiyonumuz vardır. Holomorf fonksiyonlar ortalama değer özelliğine sahip olduklarından, her $0 < r < R$ için

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

olur ve bu eşitlikte gerçel kısımlara geçersek

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt \tag{6.115}$$

olur ve bu, savı verir. □

Biz ileride Teorem 6.8.24'te bunun tersinin de doğru olduğunu, ortalama değer özelliğine sahip fonksiyonların harmonik olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 6.8.11. $u \in \mathcal{C}(\overline{D}_R(a), \mathbb{R}) \cap \mathrm{Har}(D_R(a), \mathbb{R})$ *ise*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + Re^{it}\right) dt.$$

Kanıt. Teorem 6.8.10'dan dolayı, her $0 < r < R$ için

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt.$$

İntegralini aldığımız fonksiyon $[0, R] \times [0, 2\pi]$ kompakt kümesinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir; bu nedenle $r \to R$ limitine geçebiliriz ve bu, savı verir. □

Teorem 6.8.9 ve Teorem 6.8.10 aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 6.8.12. *Harmonik fonksiyonlar maksimum ilkesini sağlarlar.*

B bir bölge ve $f : B \to \mathbb{C}$ maksimum ilkesini sağlasın. f fonksiyonu B'de maksimum ilkesini sağlarsa, $|f|$'nin yerel maksimum aldığı noktaların kümesi tanım gereği açıktır. Ancak bu küme aynı zamanda kapalıdır. Bunun bir sonucu olarak f maksimum ilkesini sağlar ve B'de bir noktada yerel maksimuma sahipse B'de sabittir. Dolayısıyla aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 6.8.13 (Harmonik Özdeşlik Teoremi)**.** *$\emptyset \neq B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde harmonik olan $u : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $D_r(a) \subset B$ dairesinde sabitse B'de sabittir. Dolayısıyla $u, v \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ve bir $D_r(a) \subset B$ dairesinde $u = v$ ise, B'de $u = v$.*

Teorem 6.8.14. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{B}, \mathbb{R})$ ise, u fonksiyonu $\overline{B}$'deki maksimumunu ve minimumunu ∂B'de alır. Bunlardan herhangi biri bir $b \in B$ noktasında alınırsa u sabittir.*

Kanıt. $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ise, $-u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ve u'nun minimumu $-u$'nun maksimumu olacağından, savı yalnızca maksimum için kanıtlamak yeterlidir.

$m := \sup u(\overline{B})$ ve $V := \{z \in B \mid u(z) = m\}$ olsun. $u|B$ sürekli olduğundan V kümesi B'de kapalıdır. Şimdi V'nin B'de açık olduğunu görelim: $a \in V$ olsun. $R > 0$ sayısı $D_R(a) \subset B$ olacak biçimde seçilsin. Her $z \in D_R(a)$ için $u(z) \leq u(a)$ olur. Bir $a + re^{it} \in D_R(a)$ için $u(a + re^{it}) < u(a)$ ise, bu eşitsizlik, u'nun sürekliliğinden dolayı, (r, t)'nin bir komşuluğunda da geçerli olacağından,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a) dt = u(a)$$

elde ederiz; bu ise u'nun ortalama değer özelliği ile çelişir. O halde $D_R(a) \subset V$. Böylece V açıktır. B bir bölge olduğundan, ya $V = \emptyset$, ve böylece her $z \in B$ için $u(z) < m$, ya da $V = B$, dolayısıyla $u \equiv m$. □

Sonuç 6.8.15. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge olmak üzere*

(i) $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{B}, \mathbb{R})$ *ve* $u|\partial B \equiv 0$ *ise* $u \equiv 0$,

(ii) $u, v \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{B}, \mathbb{R})$ *ve* $u|\partial B = v|\partial B$ *ise* $u = v$.

Kanıt. (i) Teorem 6.8.14'ten dolayı, u fonksiyonu B'deki maksimumunu da minimumunu da ∂B'de alır. Dolayısıyla, koşulumuzdan her $z \in B$ için $0 \leq u(z) \leq 0$ ve böylece $u \equiv 0$ olur.

(ii) (i)'i $v - u$'ya uygulayınız. □

6.8.2 İntegral Gösterimi

Harmonik fonksiyonlar kuramının önemli problemlerinden biri **Dirichlet Problemi**dir. Bir sınırlı B bölgesi ve bir sürekli $u : \partial B \to \mathbb{R}$ verildiğinde Dirichlet Problemi bu u'yu $\overline{B}$'ye $\overline{B}$'de sürekli ve B'de harmonik olacak biçimde genişletme problemidir. Aşağıdaki önerme doğrudan Sonuç 6.8.15(ii)'den çıkar.

Önerme 6.8.16. *Dirichlet Probleminin bir çözümü varsa, bu çözüm tek olarak belirlidir.*

Dirichlet Problemi'nin çözümünün varlığını herhangi bir sınırlı bölge için göstermek kolay değildir. Biz bunu daireler için vereceğiz. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $\overline{D}_R(a) \subset U$ ve $f \in \mathcal{H}(U)$ ise, Cauchy integral formülü her $z \in D_R(a)$ için $f(z)$ değerini f'nin $\partial D_R(a)$'daki değerleri yardımıyla hesaplamamızı sağlar. Holomorf ve harmonik fonksiyonlar böylesine kenetlenmişken, benzerini harmonik fonksiyonlar için araştırmak çok doğaldır. $f \in \mathcal{C}(\overline{D}_R) \cap \mathcal{H}(D_R)$ ise, her $z \in D_R(a)$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{R,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw \text{ , dd. } f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{it})}{Re^{it}+a-z}Re^{it}dt$$

olur. Bu iki integralin farkı şudur: İlki bize $\operatorname{Re} f$ için doğrudan bir integral gösterimi vermezken ikincisi verir. Dolayısıyla harmonik fonksiyonlar için bir integral gösterimi aradığımızda, ikinci gösterimle çalışmak daha mantıklıdır. Aşağıda bu yolu izleyeceğiz. $D_R = D_R(0)$ ve $C_R = C_R(0)$ yazdığımızı anımsatalım.

Tanım 6.8.17. $R > 0$ olsun. Her $(z, w) \in D_R \times C_R$ için

$$P(z,w) := \frac{R^2 - |z|^2}{|w-z|^2} \quad \text{ve} \quad Q(z,w) := \frac{w+z}{w-z}$$

olsunlar. $P(z, w)$'ye D_R'ye göre **Poisson çekirdeği**, $Q(z, w)$'ye D_R'ye göre **Cauchy çekirdeği** denir.[13]

Biz $\operatorname{Re}[Q(z, w)] = P(z, w)$ ve $0 \le r < R$ olmak üzere $z = re^{i\theta}$ için $P(z, Re^{it}) = P\left(r, Re^{i(t-\theta)}\right)$ olduğunu savunuyoruz. Gerçekten de:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[Q(z,w)] &= \operatorname{Re}\left[\frac{(w+z)(\overline{w}-\overline{z})}{|w-z|^2}\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[\frac{R^2-|z|^2+z\overline{w}-\overline{z}w}{|w-z|^2}\right] = P(z,w)\end{aligned}$$

ve $z = r^{i\theta}$ için

$$\begin{aligned}P(z, Re^{it}) = P(re^{i\theta}, Re^{it}) &= \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{i\theta}|^2} \\ &= \frac{R^2-r^2}{\left|Re^{i(t-\theta)}-r\right|^2} = P\left(r, Re^{i(t-\theta)}\right).\end{aligned}$$

Önce Cauchy integral formülünü amacımıza uygun dönüştüreceğiz.

Teorem 6.8.18 (Poisson Formülü I)**.** *$f \in \mathcal{C}(\overline{D}_R) \cap \mathcal{H}(D_R)$ ise, her $z \in D_R$ için:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})f(Re^{it})dt \quad \textit{ve} \tag{6.116}$$

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it}) \operatorname{Re} f(Re^{it})dt. \tag{6.117}$$

[13] Titiz olmak gerekirse, $P(z, w)$ yerine $P_{D_R}(z, w)$ ve $Q(z, w)$ yerine $Q_{D_R}(z, w)$ yazılmalıdır.

Sonuç 6.8.19. *$z \in D_R$ için* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})dt = 1$.

Kanıt. Cauchy İntegral Formülü'nden dolayı, her $z \in D_R$ için, $|w\overline{w}| = R^2$ de gözetilirse,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_R} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_R} \frac{f(w)\overline{w}}{R^2 - z\overline{w}}dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(w)R^2}{R^2 - z\overline{w}}dt, \quad w = Re^{it}. \end{aligned} \tag{6.118}$$

Keyfi seçilip sabit tutulan her $z \in D_R$ için $h(w) := \frac{1}{R^2 - \overline{z}w}$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\{R^2/\overline{z}\}$ kümesinde holomorf olduğundan, $g(w) := h(w)f(w) = \frac{f(w)}{R^2-\overline{z}w}$ fonksiyonu $\overline{D}_R$'nin bir komşuluğunda holomorftur ve (6.118) eşitliği g'ye uygulanırsa ve $w \in C_R$ için $w\overline{w} = R^2$, dolayısıyla $|R^2 - z\overline{w}| = |\overline{w}||w - z| = R|w - z|$ olduğu gözetilirse

$$\frac{f(z)}{R^2 - |z|^2} = g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(w)R^2}{R^2 - z\overline{w}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(w)R^2}{(R^2 - \overline{z}w)(R^2 - z\overline{w})}dt,$$

buradan ise

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(w)R^2(R^2 - |z|^2)}{|R^2 - z\overline{w}|^2}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(w)(R^2 - |z|^2)}{|w - z|^2}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w)P(z, w)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})P(z, Re^{it})dt \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan gerçel kısımlara geçilerek savın kalanı elde edilir.

Sonucun Kanıtı: (6.116)'yı $f \equiv 1$ fonksiyonuna uygulayınız. □

Sonuç 6.8.20. *$f \in \mathcal{C}(\overline{D}_R(a)) \cap \mathcal{H}(D_R(a))$ ise*

$$f(a+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})f(a + Re^{it})dt \ \text{ve} \tag{6.119}$$

$$\operatorname{Re} f(a+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it}) \operatorname{Re} f(a + Re^{it})dt \tag{6.120}$$

Kanıt. Şimdi bize bir $D_R(a)$ dairesi verilsin. $T(z) := z + a$ dönüşümü $\mathbb{C}$'de biholomorftur ve D_R dairesini $D_R(a)$'ya resmeder. Bu durumda $g := f \circ T$ fonksiyonu Teorem 6.8.18'in koşullarını sağlar. Dolayısıyla, her $z \in D_R$ için $a + z \in D_R(a)$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(a+z) = g(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})g(Re^{it})dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})f(a + Re^{it})dt \text{ ve} \\ \operatorname{Re} f(a+z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it}) \operatorname{Re} f(a + Re^{it})dt \end{aligned}$$

elde ederiz. □

(6.119) ve (6.120) eşitliklerinin açık ifadeleri aşağıdadır:

$$f(a+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} f(a + Re^{it})dt \text{ ve} \tag{6.121}$$

$$\operatorname{Re} f(a+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} \operatorname{Re} f(a + Re^{it})dt. \tag{6.122}$$

Şimdi Poisson Formülünü harmonik fonksiyonlar için verelim.

Teorem 6.8.21 (Poisson Formülü II)**.** *$u \in \mathcal{C}(\overline{D}_R, \mathbb{R}) \cap \operatorname{Har}(D_R, \mathbb{R})$ ise*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})u(Re^{it})dt \tag{6.123}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} u(Re^{it})dt \tag{6.124}$$

Kanıt. $u \in \operatorname{Har}(D_R, \mathbb{R})$ olduğundan, Teorem 6.8.5(ii)'den dolayı D_R'de holomorf bir f fonksiyonunun reel kısmıdır. $|z| < \rho < r < R$ olsun. $f \in \mathcal{C}(\overline{D}_r) \cap \mathcal{H}(D_r)$ olduğundan, (6.117) ile

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{it})u(re^{it})dt \tag{6.125}$$

elde ederiz. İntegralini aldığımız fonksiyon $[\rho, R]$'de düzgün sürekli olduğundan, (6.125)'te $r \to R$ limitine geçebiliriz ve bu, savı verir. □

(6.120) ve (6.122)'den yola çıkarak $u \in \mathcal{C}(\overline{D}_R, \mathbb{R}) \cap \operatorname{Har}(D_R, \mathbb{R})$ ise, her $z \in D_R$ için

$$u(a+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})u(a + Re^{it})dt \quad \text{ve} \tag{6.126}$$

$$u(a+z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} u(a + Re^{it})dt \tag{6.127}$$

elde edilir.

Şimdi bize bir $u : C_R \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Dirichlet Problemi'nde aranan $\overline{D}_R$'de sürekli, D_R'de harmonik ve $\hat{u}|C_R = u$ koşulunu sağlayan bir $\hat{u} : \overline{D}_R \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Önerme 6.8.16'da bu problemin bir çözümü varsa çözümün tekliğini gördük. Teorem 6.8.21 ise, eğer Dirichlet Problemi'nin bir çözümü varsa, bu çözümün (6.123) Poisson Formülü ile verilmesi gerektiğini söyler. Bunu kanıtlayalım. Önce bir tanım:

$$P_u(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{it})u(Re^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} u(Re^{it})dt.$$

Teorem 6.8.22. *$u : C_R \to \mathbb{R}$ sürekli ise*

$$\hat{u}(z) := \begin{cases} u(z), & z \in C_R \\ P_u(z), & z \in D_R \end{cases}$$

fonksiyonu için $\hat{u} \in \mathcal{C}(\overline{D}_R, \mathbb{R}) \cap \operatorname{Har}(D_R, \mathbb{R})$ ve $\hat{u}|C_R = u$.

Kanıt. $(z, w) \in D_R \times C_R$ için $\operatorname{Re} Q(z, w) = P(z, w)$ olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla $z \in D_R$ için

$$P_u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \operatorname{Re} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt \right)$$

elde ederiz. Diğer yandan

$$f(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt$$

ile $\mathbb{C} \backslash C_R$'de bir holomorf fonksiyon tanımlanır. Sonuç olarak D_R'de $P_u = \operatorname{Re} f$ olduğundan, $\hat{u}$ fonksiyonu D_R'de harmoniktir. $Re^{i\phi} \in C_R$ keyfi verilsin. Geriye kalan $z \in D_R$ olmak üzere $z \to Re^{i\phi}$ için $P_u(z) \to u(Re^{i\phi})$ olduğunu göstermektir. Poisson çekirdeği pozitif olduğundan, (6.8.19) ile

$$\left| P_u(z) - u(Re^{i\phi}) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| u(Re^{it}) - u(Re^{i\phi}) \right| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt.$$

Şimdi bir $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısını, her $t \in (\phi - \delta, \phi + \delta)$ için $\left| u(Re^{it}) - u(Re^{i\phi}) \right| < \varepsilon$ olacak biçimde seçebiliriz. Yukarıdaki integralin $\phi \neq 0$ için $[0, \phi - \delta] \cup [\phi + \delta, 2\pi]$ üzerindeki, eğer $\phi = 0$ ise $[\delta, 2\pi - \delta]$ üzerindeki kısmı $z \to Re^{i\phi}$ için, $R^2 - |z|^2 \to 0$ olduğundan, açıkça sıfıra gider. □

Elbette Dirichlet Problemi her $D_R(a)$'da da çözüme sahiptir, dd. eğer $u : C_R(a) \to \mathbb{R}$ sürekli ise, $\hat{u}|C_R(a) = u$ koşulunu sağlayan, tek olarak belirli bir $\hat{u} \in \mathcal{C}(\overline{D}_R(a), \mathbb{R}) \cap \operatorname{Har}(D_R(a), \mathbb{R})$ fonksiyonu vardır. İleride karşılaşacağımız (7.6.4) ve (7.7.1) teoremleriyle aşağıdaki teoreme ulaşırız:

Teorem 6.8.23. *$B \subset \mathbb{C}$ sınırlı basit bağlantılı ve ∂B bir kapalı Jordan gezisi olsun. Bu koşullarda, her sürekli $v : \partial B \to \mathbb{R}$ dönüşümü, B'de harmonik olacak biçimde bir sürekli $\hat{v} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ dönüşümüne genişletilebilir.*

Teorem 7.6.4'ten dolayı bir biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümü vardır. Teorem 7.7.1 ile f fonksiyonu bir topolojik $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişletilir. Şimdi $u := v \circ (F^{-1}|\partial\mathbb{D})$ olsun. Teorem 6.8.22'den dolayı u fonksiyonu $\mathbb{D}$'de harmonik olacak biçimde bir $\hat{u} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna genişler. $\hat{v} := \hat{u} \circ f$ aranan fonksiyondur (bkz.7.7.1).

Teorem 6.8.24. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. u'nun harmonik olması için gerek ve yeter koşul u'nun ortalama değer özelliğine sahip olmasıdır.*

Kanıt. Harmonik fonksiyonların ortalama değer özelliğine sahip olduklarını daha önce kanıtladık. Şimdi tersini görelim: B bölgesi U'nun bir bağlantılı bileşeni olsun; savımızı B için kanıtlamak yeterlidir. $a \in B$ için $R > 0$ sayısını $D := \overline{D}_R(a) \subset B$ olacak biçimde seçelim. Teorem 6.8.22'den dolayı bir $\hat{u} \in \mathcal{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{Har}(D)$ fonksiyonu $\hat{u}|\partial D = f|\partial D$ olacak biçimde vardır. Teorem 6.8.9'dan dolayı, f fonksiyonu B'de maksimum ilkesini sağlar. Teorem 6.8.14'ten ötürü, $\hat{u}$ fonksiyonu $\overline{D}$'de maksimumunu da minimumunu da ∂D'de alır. Dolayısıyla $f - \hat{u}$ fonksiyonu $\overline{D}$'de maksimumunu da minimumunu da ∂D'de alır. Ancak $f - \hat{u}$ fonksiyonu ∂D'de özdeş olarak sıfır olduğundan $f - \hat{u}|\overline{D} \equiv 0$. Böylece f fonksiyonu D'de harmoniktir. f fonksiyonu her $a \in B$ noktasının bir komşuluğunda harmonik olduğundan, B'de de harmoniktir. □

Teorem 6.8.24 bize bir sürekli $u : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ortalama değer özelliğine sahip olmasının ne kadar güçlü bir özellik olduğunu söyler. Böyle bir fonksiyon harmoniktir, $\mathcal{C}^\infty(U)$'dadır hatta U'da reel analitiktir.

Teorem 6.8.25 (Harmonik Fonksiyonlar İçin Yansıma İlkesi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bölgesi x-eksenine göre simetrik ve $B^+ = B \cap \mathbb{H}$, $B^- = B \cap \mathbb{H}^-$ olsun. $u \in \mathcal{H}(B^+, \mathbb{R})$ ve her $x \in B \cap \mathbb{R}$ için $\lim_{z \in B^+, z \to x} u(z) = 0$ olsun. Bu durumda u'yu, her $x \in B \cap \mathbb{R}$ için $u(x) = 0$ ve her $\overline{z} \in B^-$ için $u(\overline{z}) := -u(z)$ olarak tanımlayarak B'ye genişletelim. u fonksiyonu B'de harmoniktir.*

Kanıt. Harmoniklik bir yerel özelliktir. Teoremin verilerinden $u \in \mathcal{C}(B, \mathbb{R})$. Diğer yandan, tanım gereği u fonksiyonu $B^+ \cup B^-$'de harmonik olduğundan, her $\overline{D}_r(z_0) \subset B^+ \cup B^-$ için $u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt$. Eğer $x_0 \in B \cap \mathbb{R}$ ve $\overline{D}_r(x_0) \subset B$ ise $u(x_0) = 0 = \int_0^{2\pi} u(x_0 + re^{it})dt$ olur; çünkü bu integralin üst yarıdüzlemdeki kısmı alt yarıdüzlemdeki kısmını götürür. Sonuçta u sürekli fonksiyonu B'de ortalama değer özelliğine sahip olduğundan, (6.8.24)'ten dolayı u fonksiyonu B'de harmoniktir. □

Bu teorem, KA I Teorem 3.5.31(ii) 'nin kanıtına koşut olarak aşağıdaki teoreme genişletilir:

Teorem 6.8.26. *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve γ ise ∂U'nun bir serbest sınır parçası olsun. $v \in \mathrm{Har}(U, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(U \cup \underline{\gamma})$ ve $v|\underline{\gamma} \equiv 0$ ise, v fonksiyonu $U \cup \underline{\gamma}$'nın bir açık komşuluğuna harmonik olarak genişletilebilir.*

Önerme 6.8.27 (Harnack Eşitsizliği)**.** *$u \in \mathcal{C}(\overline{D}_R(a), \mathbb{R}) \cap \mathrm{Har}(D_R(a), \mathbb{R})$ ve $u \geq 0$ ise, her $z \in D_R(a)$ için*

$$\frac{R - |z-a|}{R + |z-a|} u(a) \leq u(z) \leq \frac{R + |z-a|}{R - |z-a|} u(a). \tag{6.128}$$

Kanıt. Yalınlık açısından kanıtı $a = 0$ için vereceğiz. Her $z \in D_R$ için

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} \le \frac{R^2-|z|^2}{(R+|z|)^2} \le \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{it}-z|^2} \le \frac{R^2-|z|^2}{(R-|z|)^2} = \frac{R+|z|}{R-|z|},$$

dolayısıyla

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} \le P(z, Re^{it}) \le \frac{R+|z|}{R-|z|}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği $u(Re^{it}) \ge 0$ ile çarpıp $[0, 2\pi]$ üzerinden ortalamalarını alırsak, dd. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ldots dt$ integrallerini alırsak (6.115) ve (6.124) savı verir. □

Teorem 6.8.28 (Harnack Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $(u_n) \subset \mathrm{Har}(U)$ olsun.*

(i) (u_n) dizisi U'da bir u fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaksa u fonksiyonu da U'da harmoniktir.

(ii) Eğer ayrıca U bir bölge ve u_n fonksiyonları $\mathbb{R}$-değerli ve (u_n) dizisi monoton artansa iki durum söz konusudur: Ya (u_n) dizisi bir $u \in \mathrm{Har}(U, \mathbb{R})$ fonksiyonuna U'da kompakt düzgün yakınsaktır, ya da her $z \in U$ için $\lim u_n(z) = +\infty$.

Kanıt. (i) u_n fonksiyonları U'da ortalama değer özelliğine sahiptirler. Her $\overline{D}_r(a) \subset U$ kapalı dairesinde (u_n) dizisi düzgün yakınsak olduğundan

$$u(a) = \lim u_n(a) = \lim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(a + re^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt$$

elde edilir. Özetle: u fonksiyonu U'da ortalama değer özelliğine sahiptir, dolayısıyla Teorem 6.8.24'ten u fonksiyonu U'da harmoniktir.

(ii) U bağlantılı olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $v_n := u_n - u_0$ olsun. Bu durumda $v_n \ge 0$ ve (v_n) de bir artan dizidir. Dolayısıyla, her $z \in U$ için $(v_n(z))$ dizisinin $[0, +\infty]$'da bir limiti vardır bunu $v(z)$ ile gösterelim.

$$V := \{z \in U \mid v(z) < +\infty\} \text{ ve } W := \{z \in U \mid v(z) = +\infty\}$$

olsun. (6.128) Harnack Eşitsizliğini v_n fonksiyonlarına uygularsak V ve W kümelerinin açık olduğunu görürüz. U bağlantılı olduğundan ya $W = U$ ve $v \equiv +\infty$, ya da $U = V$ ve her $z \in U$ için $v(z) < +\infty$. Bu ikinci durum söz konusu olsun. Eğer $\overline{D}_r(a) \subset U$ ve $m \le n$ ise, yine Harnack Eşitsizliğinden

$$0 \le v_n(z) - v_m(z) \le \frac{r + |z-a|}{r - |z-a|}\left(v_n(a) - v_m(a)\right),\ z \in D_r(a)$$

elde ederiz. Böylece $0 < \rho < r$ için (v_n) dizisi, dolayısıyla (u_n) dizisi $\overline{D}_\rho(a)$ da düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak (u_n) dizisi U'da yerel düzgün yakınsak olduğundan kompakt düzgün yakınsaktır. $u := \lim u_n$ fonksiyonu, (i)'den dolayı U'da harmoniktir. □

6.8.3 Fizikle İlişki

Fiziğin değişik alanlarında belli bir $B \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde $\mathcal{C}^2$ sınıfından olup $\Delta u = 0$ koşulunu sağlayan u fonksiyonlarını ararız. Bunlara genel olarak potansiyel fonksiyonları denir. Potansiyel fonksiyonlarımız harmonik fonksiyonlarımızdır ve bunların yerel olarak holomorf fonksiyonların gerçel kısımları olduğunu da gördük. $c \in \mathbb{R}$ için $\{z \in B \,|\, u(z) = c\}$ genelde B'de bir eğri tanımlar; bunlara **seviye eğrileri** veya **eş potansiyel eğrileri** denir. $\gamma : [a, b] \to B$ bir pürüzsüz gezi ve $u(\gamma(t)) \equiv c$ ise, $\operatorname{grad} u = (u_x, u_y)$ olmak üzere, her $t \in [a, b]$ için $u(\gamma(t)) = 0$ eşitliğinde t'ye göre türev alırsak

$$\operatorname{grad} u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) := \big\langle \operatorname{grad} u(\gamma(t)), \gamma'(t) \big\rangle = 0 \tag{6.129}$$

elde ederiz. $z = \gamma(t)$ olmak üzere γ seviye eğrisinin z noktasındaki $\gamma'(t)$ teğeti $\operatorname{grad} u(z)$ vektörüne diktir. z noktasında u potansiyeline uygun bir parçacık bulunduğunu varsayalım. Bu parçacık B bölgesinde u'ya uygun biçimde yer değiştirir ve bu yer değiştirme $-\operatorname{grad} u(z)$ yönünde olur. Bu parçacığın B'de pürüzsüz bir $\lambda : [\alpha, \beta] \to B$ ile gezindiğini varsayar ve buna bir **akış** ve $\underline{\lambda}$'ye bir **akış eğrisi** dersek (6.129) bize akışların daima eş potansiyel eğrilerine dik yönde olduğunu söyler.

$u : B \to \mathbb{R}$ bir potansiyel fonksiyonu olsun. Eğer B bölgesi basit bağlantılı ise, u'nun B'de bir v harmonik eşleniği vardır, dd. $f = u + iv$ fonksiyonu B'de holomorftur. Kısım 7.2'de ayrıntılı biçimde inceleyeceğimiz gibi holomorf fonksiyonlar türevlerinin 0'dan farklı olduğu yerlerde açıları yönleriyle birlikte korur. f fonksiyonunu $\mathbb{C}_z$ düzlemindeki B bölgesinden $\mathbb{C}_w$ düzlemine bir dönüşüm olarak düşünelim ve $\mathbb{C}_w$ düzleminde koordinat eksenlerini x- ve y- eksenlerine koşut olarak u- ve v-eksenleri olarak seçelim. $(c_1, c_2) \in f(B)$ olmak üzere $\mathbb{C}_w$ düzlemindeki $u = c_1$ ve $v = c_1$ doğruları birbirini dik kestikleri için B'deki $u(x, y) = c_1$ ve $v(x, y) = c_2$ seviye eğrileri birbirini dik keserler. Eğer u bizim potansiyel fonksiyonumuz ise $u(x, y) = c_1$ bize eş potansiyel eğrilerini verirken $v(x, y) = c_2$ seviye eğrileri bize potansiyel alanımızın akış eğrilerini verir.

Fizikçiler kendilerine özgü bir dil geliştirmişlerdir. Önce bu dili tanıyalım. Biz konumuz gereği $U \subset \mathbb{R}^2$ açık kümelerinde çalışacağımız için bu dili burada geliştireceğiz. Bu durumda U'da tanımlı iki tip fonksiyonla ilgileneceğiz, bunlar $u : U \to \mathbb{R}$ **skalar alanları** ve $f : U \to \mathbb{R}^2$ **vektör alanları**dır. U'daki her u türevlenebilir skalar alanı bize

$$\operatorname{grad} u := \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

ile tanımlanan bir vektör alanı verir. Eğer bir f vektör alanı için bir u skalar alanı ile $f = \operatorname{grad} u$ ise, f'ye bir **gradyan alanı** ve u'ya ise f'nin bir **ilkeli** denir. Eğer U bir bölge ise, f'nin U'daki tüm ilkelleri $u + c$, $c \in \mathbb{R}$ tipindedir.

$u \in KA\ I(U)$ ise gerçel analizden U'daki her γ parçalı $KA\ I$ gezisi için

$$\int_\gamma \operatorname{grad} u \cdot d\mathfrak{x} = \int_\gamma (u_x dx + u_y dy) = u(s_\gamma) - u(b_\gamma),\ d\mathfrak{x} = (dx, dy)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla sürekli $f = (f_1, f_2)$ vektör alanı U'da bir gradyan alanı ise, U'daki her parçalı $KA\ I$ gezisi için $\int_\gamma f \cdot d\mathfrak{x}$ integrali yalnızca γ'nın uç noktalarına bağlıdır ve ayrıca γ kapalı ise, $\int_\gamma f \cdot d\mathfrak{x} = 0$.

$U \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : U \to \mathbb{C}$ vektör alanı verilsin. Bu tip vektör alanlarına fizikte, eğer hidrodinamik dili kullanırsak, **durağan düzlemsel** vektör alanları denir. Örneğin $f(z) := (f_1(z), f_2(z))$'yi akan bir sıvının hız vektörü olarak yorumlarsak, durağanlık her $z \in U$ için $f(z)$ hızının zamandan bağımsız olması anlamına gelir. Düzlemsellik ise tüm $f(z)$ hız vektörlerinin bir sabit düzleme paralel olması demektir. Biz bu düzlemi xy-düzlemi olarak seçtik. Böyle bir durumla ince düzlemsel levhalardaki ısı akışlarında veya elektrik akımlarında da karşılaşacağımız gibi $U \times \mathbb{R}$ silindirlerindeki sıvı veya ısı veya elektrik akımlarında da karşılaşırız; son durumda elbette her $(x, y, z) \in U \times \mathbb{R}$ için $f(x, y, z) = f(x, y)$ istenecektir.

Şimdi $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{C}$ bir sıvının hız vektörü olarak yorumlansın.

$$\operatorname{div} f(x, y) := \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y} \text{ ve } \operatorname{rot} f(x, y) := \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \quad (6.130)$$

kavramlarını gerçel analizde de fizik derslerinde de görürüz. $z = (x, y) = x + iy$ olmak üzere $\operatorname{div} f(z) > 0$ ise z bir **kaynak noktası**, $\operatorname{div} f(z) < 0$ ise z bir **yutak noktası**, $\operatorname{div} f(z) = 0$ ise z bir **durgun nokta** veya sıvımız z noktasında **sıkıştırılamaz** denir. Biz sıvımızın şu iki özelliğe sahip olmasını isteyeceğiz: Sıvımız U'da

$$\textbf{sıkıştırılamaz}\text{, dd. } \operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \equiv 0 \text{ ve} \quad (6.131)$$

$$\textbf{dönmesiz}\text{, dd. } \operatorname{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \equiv 0 \quad (6.132)$$

olsun. $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ vektör alanı $KA\ I$ sınıfından ve $\operatorname{grad} u = f$ ise

$$\operatorname{rot} f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

olur, dd. f'nin bir gradyan alanı olması için $\operatorname{rot} f = 0$ olması, dd. f'nin dönmesiz olması gereklidir. Eğer U basit bağlantılı ise, bu gerekli koşulun yeterli olduğunu gerçel analizde öğreniriz. Özellikle, her dönmesiz f vektör alanı yerel olarak gradyan alanıdır. Eğer f vektör alanı $KA\ I$ sınıfından, dönmesiz ve sıkıştırılamaz ise, yerel olarak bir $u \in \mathcal{C}^2$ ile $f = \operatorname{grad} u$ ile olduğundan

$$0 = \operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \Delta u$$

olur.

Şimdi $B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $f \in KA\ I(B, \mathbb{R}^2)$ dönmesiz ve sıkıştırılamaz bir vektör alanı ise, B'de harmonik bir u ile $f = \operatorname{grad} u$ olur. Teorem 6.8.5'ten dolayı, u fonksiyonu B bölgesinde bir sabit dışında tek olarak belirli bir holomorf fonksiyonun gerçel kısmıdır. $F = u + iv$ böyle bir fonksiyon olsun. $u, v \in \operatorname{Har}(B, \mathbb{R})$ ve Cauchy-Riemann denklemlerinin bir sonucu olarak $\operatorname{grad} u$ ve $\operatorname{grad} v$ vektörleri birbirine diktirler. Eğer $\emptyset \neq B \neq \mathbb{C}$ ve B basit bağlantılı bir bölge ise, Riemann Dönüşüm Teoremi 7.6.4 ile B'nin $\mathbb{D}$'ye, dolayısıyla $\mathbb{H}$'ye biholomorf resmedilebileceğini göreceğiz. Böylelikle bu teorem bize birim dairedeki veya üst yarıdüzlemdeki basit akış ve seviye eğrilerine sahip potansiyel fonksiyonlar aracılığı ile B'de karmaşık akış ve seviye eğrilerini inceleme fırsatı verir. Biz bunlara girmeyip iki kaynak vermekle yetineceğiz: (1) Krantz, S.-Complex Variables, A Physical Approach ve (2) Sato, K.- Complex Analysis for Practical Engineering, Springer 2015.

Problemler

Problem 6.8.1. Not 6.8.2 (5)'teki savı Teorem 6.8.5(ii)'den yararlanarak kanıtlayınız.

Problem 6.8.2. $\Delta u = 0$ denkleminin kutupsal koordinatlarda

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

şeklini aldığını gösteriniz.

Problem 6.8.3. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u(x,y) = ax^2 + 2bxy - y^2$ olmak üzere hangi a, b'ler için $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu harmoniktir? Bu a, b'ler için $\operatorname{Re} f = u$ olan bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ veriniz.

Problem 6.8.4. Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{C}$'de harmonik olduğunu gösterip harmonik eşlerini bulunuz: (a) $x^2 - y^2$, (b) $\sinh x \sin y$, (c) $e^x(x\cos y - y\sin x)$.

Problem 6.8.5. (a) $u(x,y) := f(x)$ veya $u(x,y) := f(xy)$ olarak tanımlanan $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının harmonik olduğu $\mathcal{C}^2$ sınıfından tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

Problem 6.8.6. Hangi $\mathcal{C}^2$ sınıfından $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümleri için

$$u : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := f\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$$

olarak tanımlanan u fonksiyonları harmoniktirler?

Problem 6.8.7. $u \in \operatorname{Har}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ sınırlı ise u'nun sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 6.8.8. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

(i) $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonik ve $u \geq 0$ ise, u sabittir.

(ii) $u \in \mathrm{Har}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ sabit değilse bir (z_n) dizisi $\lim z_n = \infty$ ve $\lim u(z_n) = 0$ olacak biçimde vardır.

Problem 6.8.9. B bir bölge, $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ve $A \subset B$ kümesinin B'de bir yığılma noktası olsun. $u|A \equiv 0$ ise $u \equiv 0$ olması gerekmediğini örnekleyiniz.

Problem 6.8.10. B bir bölge, $u \in \mathrm{Har}(B, \mathbb{R})$ ve $A = \{z \in B \mid u_x(z) = 0 = u_y(z)\}$ kümesinin B'de bir yığılma noktası varsa, u'nun sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 6.8.11. B bir bölge, $f = u + iv \in \mathcal{H}(B)$ ve $\overline{D}_r(a) \subset B$ olsun. $v|C_r(a) \equiv 0$ ise, f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 6.8.12. $u \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}) \cap \mathrm{Har}(\mathbb{D}, \mathbb{R})$ ise, $z \in \mathbb{D}$ için

$$g(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt$$

olsun. $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ve $u = \mathrm{Re}\, g$ olduğunu gösteriniz.

Problem 6.8.13. $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{C}^+}, \mathbb{R}) \cap \mathrm{Har}(\mathbb{C}^+, \mathbb{R})$ ise, her $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ için

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (y-t)^2} f(it) dt$$

olduğunu gösteriniz. İpucu: $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$ dönüşümü $\mathbb{C}^+$ yarıdüzlemini biholomorf $\mathbb{D}$'ye resmeder. T'den yararlanınız

7. Geometrik Fonksiyonlar Kuramı

Bu bölümde Weierstrass-Riemann yaklaşımı söz konusudur. $U \subset \mathbb{C}$ açık olmak üzere $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonlarının bir $f : U \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü olarak özelliklerine odaklanacağız. Özellikle biholomorf dönüşümleri diferansiyelgeometrik özellikleriyle karakterize etmeye çalışacağız.

7.1 Yeniden Açık Dönüşüm Teoremi

KA Teorem 1.8.16'da $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge $f \in \mathcal{A}(B)$ ve f sabit değilse $f : B \to \mathbb{C}$'nin bir açık dönüşüm olduğunu kanıtladık. İleride $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$ olduğunu kanıtladığımızda teoremin kendiliğinden apaçık olacağını belirtmiştik. Şimdi böyle bir kanıt verelim.

Teorem 7.1.1. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere f fonksiyonunun $z_0 \in B$ noktasında n. dereceden bir w_0 yeri bulunsun. Yeterince küçük her $D_r(z_0)$ dairesine karşılık bir $D_\rho(w_0)$ dairesi öyle bulunabilir ki, her $w \in D_\rho(w_0)$ değeri $D_r(z_0)$'da her biri birinci dereceden w- yeri olmak üzere n değişik $z_1(w), \ldots, z_n(w)$ noktalarında alınır; dolayısıyla $D_\rho(w_0) \subset f(D_r(z_0))$ ve bunun bir sonucu olarak f bir açık dönüşümdür.*

Kanıt. $n \geq 1$ olduğundan f fonksiyonu z_0'da yerel sabit değil, B bir bölge olduğundansa f fonksiyonu B'de sabit değildir. Dolayısıyla $f' \not\equiv 0$. Ancak f' ve $g(z) := f(z) - w_0$ fonksiyonlarının sıfır yerleri ayrıktır. Şimdi $R > 0$ sayısı $D_R(z_0) \subset B$ olacak biçimde seçilsin. Bir $r_0 > 0$ sayısı $2r_0 < R$ ve her $z \in D^*_{2r_0}(z_0)$ için $f'(z) \neq 0$ ve $g(z) \neq 0$ olacak biçimde seçilebilir. Şimdi $0 < r \leq r_0$ için z_0 merkezli r yarıçaplı pozitif yönlenmiş κ_{r,z_0} gezimizi kısaca γ ile gösterelim ve $\eta := f \circ \gamma$ olsun. $w_0 \notin \underline{\eta}$ olduğundan bir $\rho > 0$ sayısı $D_\rho(w_0) \cap \underline{\eta} = \emptyset$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda KA I Sonuç 4.2.11 ile

$$n(\eta, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\eta \frac{d\zeta}{\zeta - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} = Z_{w_0}(f, D_r(z_0)) = n$$

elde ederiz. $n(\eta, w)$, $D_\rho(w_0)$'da sabit olduğundan, her $w \in D_\rho(w_0)$ için

$$\begin{aligned} n = n(\eta, w_0) = n(\eta, w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\eta \frac{d\zeta}{\zeta - w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} = Z_w(f, D_r(z_0)). \end{aligned}$$

Dolayısıyla f fonksiyonu, her $w \in D_\rho^*(w_0)$ değerini $D_r^*(z_0)$'da katlılıklarıyla sayılmak üzere n kez alır. Ancak $D_r^*(z_0)$'da $f'(z) \neq 0$ olduğundan, her w yeri birinci derecedendir. □

Önerme 7.1.2. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ ve $a \in \Omega$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerlidir:*

(i) $f'(a) \neq 0$,

*(ii) f dönüşümü a noktasında **yerel birebirdir**, dd. a noktasının bir açık $V \subset \Omega$ komşuluğuyla $b = f(a)$ noktasının bir açık U komşuluğu*

$$f|V : V \to U$$

bir tameşleme olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii): $f'(a) \neq 0$ olsun. a noktası f'nin birinci dereceden bir b yeridir. Teorem 7.1.1'den $r, \rho > 0$ sayıları, her $w \in D_\rho(b)$ için $f(z) = w$ denkleminin $D_r(a)$'da birinci dereceden tam bir çözümü olacak biçimde bulunabilirler; bu çözme $z(w)$ diyelim. $V := f^{-1}(D_\rho(b)) \cap D_r(a)$ bir açık kümedir ve $f|V : V \to D_\rho(b)$ bir tameşlemedir.

(ii)$\Longrightarrow$(i): Karşıkonum ilkesiyle kanıtlayacağız, dd. $\neg$(i)$\Longrightarrow$ $\neg$(ii) önermesini kanıtlayacağız. $f'(a) = 0$ olsun. a noktası f'nin n. dereceden bir b yeridir ve $n \geq 2$. Yeterince küçük $r > 0$ sayıları için $f|D_r^*(a)$ dönüşümü n farklı $z_1(w), \ldots, z_n(w)$ noktasını aynı w noktasına resmeder. f yerel birebir olamaz! □

Uyarılar: (1) Önerme 7.1.2 gerçel değerli fonksiyonlar için yanlıştır. Örneğin $f(x) = x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-analitik bir tameşlemedir, ancak $f'(0) = 0$'dır.

(2) $U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler olmak üzere bir $f : U \to V$ holomorf fonksiyonu, örten ve yerel birebir, ancak bir tameşleme olmayabilir. Örneğin $f(z) = e^z$ ile verilen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ fonksiyonu holomorf, örten ve her $a \in \mathbb{C}$ için $f'(a) = e^a \neq 0$ olduğu için yerel birebirdir, ancak her $z \in \mathbb{C}$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(z + 2\pi i k) = f(z)$ olduğundan, f birebir değildir!

Teorem 7.1.3. *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler olmak üzere $f : U \to V$ holomorf ve tameşleme ise, $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$. Ayrıca $a \in U$ için $b = f(a)$ ise*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{7.1}$$

Kanıt. B kümesi U'nun bir bağlantılı bileşeni olsun. $f|B$ sabit olmadığından, Teorem 7.1.1'den dolayı bir açık dönüşümdür. Dolayısıyla f bir açık dönüşümdür. $f : U \to V$ tameşlemesi ayrıca sürekli olduğundan bir topolojik dönüşümdür. Böylece KA I Önerme 1.2.19'un koşulları sağlandığından, f^{-1} fonksiyonu b noktasında türevlenebilir ve türev (7.1) ile verilmiştir. □

Sonuç 7.1.4. *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık olmak üzere holomorf $f : U \to V$ tameşlemeleri biholomorftur.*

Şu ana kadar gördüklerimiz, KA I Önerme 1.2.19'un koşulları arasında $[\cdots]$ içinde yazılanların gerçekten de gereksiz olduğudur. $f \in \mathcal{H}(A)$ birebirse, otomatikman her $a \in A$ için $f'(a) \neq 0$ ve Teorem 7.1.3'ün kanıtında gösterildiği gibi f^{-1} ise $b = f(a)$ noktasında süreklidir.

KA I Ters Fonksiyon Teoremi 4.2.21'de birebir holomorf fonksiyonların, belli koşullarda bir anlamda global terslerinin integral ifadesini vermiştik. Şimdi ise biholomorf $f : U \to V$ fonksiyonlarının ters fonksiyonlarının kuvvet serileri üzerinden nasıl belirleneceğini göreceğiz.

$f : U \to V$ biholomorf, $a \in U$ ve $b = f(a)$ olsun. $r, \rho > 0$ sayılarını Teorem 7.1.1'deki gibi seçelim. Bu durumda $D_\rho(b) \subset f(D_r(a))$. f'nin $D_r(a)$'da

$$w = f(z) = b + \sum_{n=1}^{+\infty} a_\nu (z-a)^\nu \tag{7.2}$$

gibi bir seri açılımı, f^{-1}'in ise $D_\rho(b)$'de

$$z = f^{-1}(w) = a + \sum_{\mu=1}^{+\infty} b_\mu (w-b)^\mu \tag{7.3}$$

gibi bir seri açılımı vardır. Kuvvet serileri yakınsaklık dairelerinde mutlak yakınsak olduklarından, (7.3) eşitliğinde $w-b$ yerine (7.2) eşitliğinden çektiğimiz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_\nu (z-a)^\nu$ koyarak elde ettiğimiz

$$z - a = \sum_{\mu=1}^{+\infty} b_\mu \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_\nu (z-a)^\nu \right)^\mu$$

serisinin sağ yanını $(z-a)$'nın artan kuvvetlerine göre

$$z - a = b_1 a_1 (z-a) + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2)(z-a)^2 + \cdots$$

olarak düzenleyebiliriz. Seriler için özdeşlik teoreminden sırasıyla sonsuz çoklukta

$$\begin{aligned}1 &= b_1 a_1\\ 0 &= b_1 a_2 + b_2 a_1^2\\ 0 &= b_1 a_3 + 2b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3\\ &\vdots\end{aligned}$$

denklemlerini elde ederiz. f birebir olduğundan $a_1 = f'(a) \neq 0$. Bu bize yukarıdaki denklem sisteminden yinelgen biçimde b_μ katsayılarını hesaplama şansı verir. Örneğin b_1, b_2 ve b_3 için aşağıdaki değerleri buluruz:

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{1}{a_1}\\ b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3}\\ b_3 &= \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}\end{aligned}$$

Genel olarak b_μ için, $a_1, \ldots, a_\mu$'lere göre $(\mu - 1)$. dereceden homojen olan bir $P_{\mu-1}(a_1, \ldots, a_\mu)$ polinomu ile

$$b_\mu = \frac{P_{\mu-1}(a_1, \ldots, a_\mu)}{a_1^{2\mu-1}}, \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

gibi bir ifade elde edilir. b_μ katsayılarının hesaplama işlemine girmeyeceğiz. Böylece f^{-1} fonksiyonu önce bir $D_\rho(b)$'de belirlenir. Özdeşlik Teoremi'nden dolayı ise f^{-1} fonksiyonu V kümesinin $D_\rho(b)$ dairesini içeren bağlantılı bileşeninde tek olarak $f^{-1}|D_\rho(b)$ ile belirlidir. f^{-1} fonksiyonunun, bu bileşendeki değerleri –örneğin daireler zinciri boyunca– analitik genişletmelerle belirlenir. Bu işlemler V'nin her bağlantılı bileşeninde tekrarlanarak f^{-1} belirlenir.

7.2 Konform Dönüşümler

$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $U \subset \mathbb{R}^2$ bir açık küme olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ ve $g : U \to \mathbb{R}$ olsun. Bu fonksiyonların $\mathbb{R}^2$'deki $G_f := \{(x, f(x)) \,|\, x \in I\}$ ve $\mathbb{R}^3$'teki $G_g := \{(x, y, g(x, y)) \,|\, (x, y) \in U\}$ grafları bu fonksiyonların incelenmesinde son derece yararlı görsel araçlardır.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ verilsin. f'nin tanım bölgesinde noktalarımızı $z = (x, y)$ ve değer bölgesindeki noktalarımız $w = (u, v)$ ile gösterirsek, yukarıda olduğu gibi f'nin grafını çizmeye kalkarsak $\mathbb{R}^4$'te çalışmamız gerekecek ve bu görselleştiremeyeceğimiz bir durumdur. Bu durumda Riemann iki kompleks düzlemle çalışmayı yeğler: birisi tanım bölgemizi içerir ve bunu bazen

$\mathbb{C}_z$ ile göstereceğiz, diğeri ise değerlerin alındığı ikinci düzlemdir ve bunu da bazen $\mathbb{C}_w$ ile göstereceğiz.

Bu kısmın amacı birebir holomorf fonksiyonları diferansiyel özellikleriyle karakterize etmektir. $f \in \mathcal{H}(U)$ birebirse, her şeyden önce $f \in \mathcal{C}^1(U)$ ve her $a \in U$ için $f'(a) \neq 0$ olur. Ayrıca, her $a \in U$ için $\Delta_f(a) > 0$ olur(bkz. (7.10)). Diğer yandan $0 \leq \varphi(a) < 2\pi$ ve $r(a) > 0$ gerçel sayısı ile $f'(a) = r(a)e^{i\varphi(a)}$ olsun. $b := f(a)$ ve $w = f(z)$ olmak üzere $z - a = |z-a|e^{i\theta(z-a)}$, $0 \leq \theta(z-a) < 2\pi$ ise

$$f(z) - f(a) \approx r(a)e^{i\varphi(a)}(z-a) = r(a)|z-a|e^{i(\theta(z-a)+\varphi(a))}. \tag{7.4}$$

Burada $\approx$ imi "yaklaşık olarak eşit" anlamında kullanılmıştır ve z sayısı a'ya yaklaştıkça $\approx$ imi $=$ imine yaklaşır. (7.4)'ün özetle söylediği, aşağıda daha da netleştireceğimiz anlamda şudur: a noktasının yeterince küçük komşuluğunda $f(z) - f(a)$'yı bulmak için yapılacak iş $z - a$ vektörünü orijinin etrafında $\varphi(a)$ kadar saatin ters yönünde döndürüp uzunluğunu $r(a)$ ile çarpmaktır. Burada önemli olan $\varphi(a)$ ve $r(a)$'nın $\theta(z-a)$'dan, dolayısıyla z'den bağımsız olmasıdır. $z_1, z_2 \in U$ noktaları a'ya yeterince yakın olduklarında $f(z_k) - f(a)$'yı bulmak için $z_k - a$'yı $\varphi(a)$ kadar saatin ters yönünde döndürdüğümüzden $f(z_1) - f(a)$ ve $f(z_2) - f(a)$ vektörleri arasındaki açı $z_1 - a$ ve $z_2 - a$ vektörleri arasındaki açıya eşittir. Özetle, her a noktasında f fonksiyonu, a'ya bağlı olan bir benzerlik dönüşümüdür. Toparlarsak, $f \in \mathcal{H}(U)$ birebirse aşağıdaki diferansiyel geometrik özelliklere sahiptir:

(a) $f \in \mathcal{C}^1(U)$ birebirdir ve her $z \in U$ için $f'(z) \neq 0$,

(b) f **yön koruyandır**, dd. her $z \in U$ için $\Delta_f(z) > 0$,

(c) f her $a \in U$ noktasında açıları korur,

(d) f her $a \in U$ noktasında bir sıkger dönüşümdür.

Her şeyden önce (b)'nin bir sonucu olarak, her $z \in U$ için $\Delta_f(z) \neq 0$'dır, dd. f dönüşümü U'da **düzgün**dür. Bu kısmın amacı ise herhangi bir $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun (a), (b) ve (c)'yi sağlıyorsa (bkz. Teorem 7.2.10), veya (a), (b) ve (d)'yi sağlıyorsa (bkz. (7.2.16)) U'da holomorf olduğunu kanıtlamaktır. Bu nedenle, açıları yönleriyle koruyan dönüşümler Riemann için önemlidirler, onlar *sonsuz küçükte (infinitesimal ölçekte) benzerlik dönüşümleridirler.*

$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir birebir $\mathbb{R}$-doğrusal dönüşümü olsun. Her $z, w \in \mathbb{C}^*$ için $\sphericalangle(Lz, Lw) = \sphericalangle(z, w)$ ise, L dönüşümü **açı koruyan**dır denir (bkz. KA I Tanım 5.4.1). KA I (5.23) eşitliğinden dolayı L'nin açı koruyan olması

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \;\; (|Lz||Lw| \langle z, w\rangle = |z||w| \langle Lz, Lw\rangle) \tag{7.5}$$

önermesine denktir.[1]

[1] $z_k = x_k + iy_k$ için $\langle z_1, z_k\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = \mathrm{Re}(z_2\overline{z_1})$.

Önerme 7.2.1. *$\mathbb{R}$-doğrusal ve birebir olan $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü için aşağıdaki önermeler eşdeğerlidirler:*

(i) $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *açıları korur.*

(ii) Bir $a \in \mathbb{C}^*$ sayısı, ya her z için $Lz = az$, ya da her z için $Lz = a\overline{z}$ olacak biçimde vardır.

(iii) Bir $p > 0$ pozitif sayısı daima $\langle Lz, Lw\rangle = p\,\langle z, w\rangle$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii): L açıları koruduğundan ve her $0 \neq z \in \mathbb{C}$ için z ve iz vektörleri birbirine dik olduklarından $\langle z, iz\rangle = 0$. Özellikle $\langle L1, Li\rangle = 0$ ve $\langle L(1+i), L(-1+i)\rangle = 0$. İkinci denklemden

$$0 = \langle L(1+i), L(-1+i)\rangle = \cdots = \langle Li, Li\rangle - \langle L1, L1\rangle = |Li|^2 - |L1|^2$$

elde edilir. Böylece $L1$ ve Li uzunlukları aynı ve birbirine dik olduklarından, $Li = \pm iL1$ olur. $\alpha := L1 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere Önerme 1.2.11'de olduğu gibi $Li = iL1$ ise, her z için $Lz = \alpha z$ ve L dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusaldır; eğer $Li = -iL1$ ise, her $z = x + iy$ için $Lz = xL1 + yLi = xL1 - iyL1 = \alpha\,(x - iy) = \alpha\overline{z}$ elde ederiz ve L dönüşümü antidoğrusaldır.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Her $z, w \in \mathbb{C}$ için $\langle Lw, Lz\rangle = \langle aw, az\rangle = |a|^2\,\langle w, z\rangle$ ve $\langle \overline{w}, \overline{z}\rangle = \langle w, z\rangle$ olduğundan, her iki durumda da $p := |a|^2 > 0$ ile $\langle Lw, Lz\rangle = p\,\langle w, z\rangle$ olur.

(iii)$\Longrightarrow$(i): Her $z \in \mathbb{C}$ için $|Lz| = \sqrt{p}|z|$ olduğundan, $z \neq 0$ için $Lz \neq 0$ olur. Dolayısıyla L doğrusal dönüşümümüz birebirdir; $\mathbb{R}^2$ sonlu boyutlu olduğundan ise bir eşyapı dönüşümüdür. Ayrıca, her $w, z \in \mathbb{C}$ için

$$|w||z|\,\langle Lw, Lz\rangle = |w||z|p\,\langle w, z\rangle = |Lw||Lz|\,\langle w, z\rangle$$

olduğundan, L açı koruyandır. □

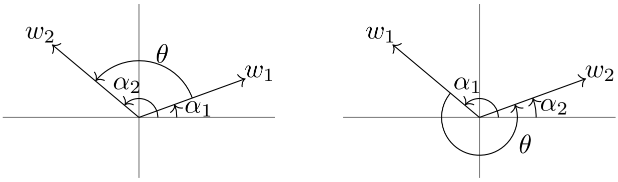
$\mathbb{R}$-doğrusal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü açıları korusun. Önerme 7.2.1'in kanıtının (i)$\Longrightarrow$(ii) adımında, standart bazlarda L dönüşümünün matrisinin $M_L = (L1, Li)$ olduğunu gördük[2]. $0 \neq \alpha = a + ib = L1$ ve $A = (L1, iL1)$ olmak üzere $\det A = |\alpha|^2 > 0$. Yine (i)$\Longrightarrow$(ii)'nin kanıtında $Li = \pm iL1$ olduğunu kanıtlamıştık. Dolayısıyla $M_L = \pm A$ olduğundan $\det M_L = \pm \det A$ olur. Böylece aşağıdaki önsavı elde ederiz:

Önsav 7.2.2. *Açı koruyan $\mathbb{R}$-doğrusal L dönüşümü*

(i) $\mathbb{C}$-*doğrusaldır*$\Longleftrightarrow \det M_L > 0$ *ve*

(ii) $\mathbb{C}$-*antidoğrusaldır* $\Longleftrightarrow \det M_L < 0$.

[2] Bu tip yazılımda $L1$ ve Li sütün vektörleri olarak düşünülür.



Şekil 7.1

Durumları birbirinden ayırt etmek için $1, i \mapsto \alpha, i\alpha$ olan $\mathbb{R}$-doğrusal dönüşümümüzü L ile ve $1, i \mapsto \alpha, -i\alpha$ olan $\mathbb{R}$-doğrusal dönüşümümüzü ise T ile gösterelim. $\det M_L > 0$ olduğundan $(\alpha, i\alpha)$ sıralı bazı pozitif yönlenmişken, $\det M_T < 0$ olduğundan $(\alpha, -i\alpha)$ sıralı bazı negatif yönlenmiştir. $\overline{\mathrm{Id}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(z \mapsto \overline{z})$ dönüşümü $\mathbb{R}$-doğrusaldır ve standart bazlara göre matrisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olduğundan, $\det M_{\overline{\mathrm{Id}}} = -1 < 0$ ve $\overline{\mathrm{Id}}$ yön değiştirendir. $T = L \circ \overline{\mathrm{Id}}$ bağıntısından bir kez daha T'nin yön değiştiren olduğu elde edilir.

$z_1 = 1 = e_1 = (1,0)$, $z_2 = i = e_2 = (0,1)$ ve $w_k := Le_k = u_k + iv_k$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi)$ olmak üzere $w_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ ve $w_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$ olsun. $0 \le \theta < 2\pi$ olmak üzere w_1 vektörünü saatin ters yönünde θ kadar çevirdiğimizde w_2 doğrultusuna gelsin(bkz. Şekil 7.1). w_1, w_2 doğrusal bağımsız olduklarından $\theta \neq 0, \pi$, dolayısıyla ya $0 < \theta < \pi$ ya da $\pi < \theta < 2\pi$. Eğer $\alpha_1 < \alpha_2$ ise $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, yok eğer $\alpha_2 < \alpha_1$ ise $\theta = 2\pi - (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\pi + (\alpha_2 - \alpha_1)$. Her iki durumda da $\theta \in \mathbf{arg}\, \frac{w_2}{w_1}$ olduğuna dikkat edelim. Diğer yandan $u_k = r_k \cos\alpha_k$ ve $v_k = r_k \sin\alpha_k$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \det M_L &= u_1 v_2 - v_1 u_2 = r_1 r_2 (\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_2) \\ &= r_1 r_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = r_1 r_2 \sin\theta. \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\det M_L > 0 \iff 0 < \theta < \pi \text{ ve } \det M_L < 0 \iff \pi < \theta < 2\pi \tag{7.7}$$

elde ederiz. $\mathbb{C}_w$ düzlemini $\mathbb{R}^3$'e $\mathbb{C}_w \times \{0\}$olarak gömersek (7.6) eşitliğinden dolayı, $w_1 \times w_2$ vektöryel çarpımı için

$$w_1 \times w_2 = \det M_L e_3 = (0, 0, \det M_L)$$

elde ederiz. Böylece L dönüşümünün yön koruyan olması $w_1 \times w_2$ vektörünün e_3 ile aynı yönde olması, tersine yön değiştiren olması $w_1 \times w_2$ vektörünün e_3 ile zıt yönde olması demektir.

Tanım 7.2.3. $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ açık, $f = (u, v) : U \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $a \in U$ noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve $f'(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bir eşyapı dönüşümü olsun. $f'(a)$ açı koruyan veya yön koruyan ise, f fonksiyonu a **noktasında açı koruyan** veya **yön koruyandır** denir. f fonksiyonu her $a \in U$ noktasında açı koruyan veya yön koruyan ise, f fonksiyonu U**'da açı koruyan** veya **yön koruyan**dır denir.

$U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ açık, $f = (u, v) : U \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $a \in U$ noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilirse, $f'(a) = df(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünün standart bazlara göre fonksiyonel determinantı

$$\Delta_f(a) = \det \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{pmatrix} = u_x(a)v_y(a) - u_y(a)v_x(a). \tag{7.8}$$

$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$, $\overline{f_z} = \overline{f}_{\overline{z}}$ ve $\overline{f}_z = \overline{f_{\overline{z}}}$ olduğundan, basit bir hesaplamayla

$$\Delta_f = \det \begin{pmatrix} f_z & \overline{f}_z \\ f_{\overline{z}} & \overline{f}_{\overline{z}} \end{pmatrix} = |f_z| - |f_{\overline{z}}|^2 \tag{7.9}$$

olduğu kolayca görülür. *f fonksiyonu a noktasında $\mathbb{C}$-türevlenebilir ve $f'(a) \neq 0$ ise,* $f'(a) = f_z(a)$ ve $f_{\overline{z}}(a) = 0$ olacağından

$$\Delta_f(a) = |f'(a)|^2 > 0, \tag{7.10}$$

ve buradan

$$\det \Delta_{\overline{f}} = \det \begin{pmatrix} \overline{f}_z & f_z \\ \overline{f}_{\overline{z}} & f_{\overline{z}} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \Delta_{\overline{f}}(a) = -|f'(a)|^2 < 0 \tag{7.11}$$

elde edilir. Bu bize önerme 7.2.1 ile birlikte aşağıdaki önermeyi verir:

Önerme 7.2.4. *$f \in \mathcal{H}(U)$ ve $a \in U$ için $f'(a) \neq 0$ ise, f fonksiyonu a noktasında açı koruyan ve yön koruyan buna karşın $\overline{f}$ ise a noktasında açı koruyan ancak yön değiştirendir.*

Teorem 7.2.5. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge $f : B \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli reel türevlenebilir olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler.*

(i) Ya $f \in \mathcal{H}(B)$ ve her $z \in B$ için $f'(z) \neq 0$ ya da $\overline{f} \in \mathcal{H}(B)$ ve her $z \in B$ için $\left(\overline{f}\right)'(z) \neq 0$.

(ii) f fonksiyonu B bölgesinde açıları korur.

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii) Doğrudan önerme 7.2.4'ten çıkar.

(ii)$\Longrightarrow$(i) $a \in B$ olsun.

$$df(a) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ df(a)h = f_z(a)h + f_{\overline{z}}(a)\overline{h}$$

doğrusal dönüşümü açı koruduğundan, (7.2.1)(ii)'den ya "$f_z(a) \neq 0$, $f_{\overline{z}}(a) = 0$" ya da "$f_z(a) = 0$, $f_{\overline{z}}(a) \neq 0$" elde ederiz. Bu koşullarda

$$\varphi(a) := \frac{f_z(a) - f_{\overline{z}}(a)}{f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)}, \ a \in B$$

fonksiyonu B'de iyi tanımlı, sürekli ve yalnızca ± 1 değerlerini alan bir fonksiyondur. B bir bölge olduğundan φ sabittir. Eğer $\varphi \equiv 1$ ise B'de $f_{\overline{z}} \equiv 0$, dolayısıyla $f \in \mathcal{H}(B)$ ve her $a \in B$ için $f_z(a) \neq 0$ olur. Eğer $\varphi \equiv -1$ ise benzer biçimde bu kez $f_z \equiv 0$, $\overline{f} \in \mathcal{H}(B)$ ve her $a \in B$ için $\left(\overline{f}\right)_z(a) \neq 0$ olur. $\square$

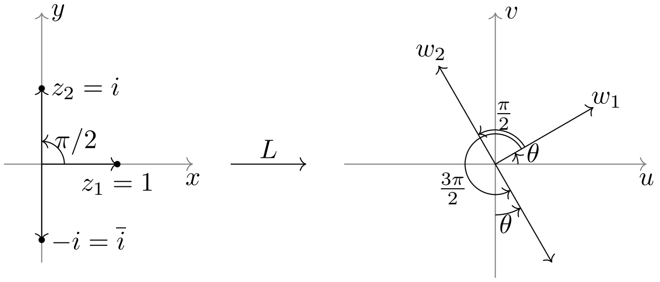
(7.10) bağıntısı ve teorem 7.2.5'in doğrudan sonucu aşağıdaki teoremdir:

Teorem 7.2.6. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli reel türevlenebilir olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler.*

(i) $f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $z \in U$ için $f'(z) \neq 0$.

(ii) f fonksiyonu U'da açıları ve yönü korur.

Özetle holomorf fonksiyonlar türevlerinin 0'dan farklı olduğu yerlerde açı ve yön koruyan, buna karşın antiholomorf fonksiyonlar ise türevlerinin 0'dan farklı olduğu yerlerde açı koruyan ancak yön değiştiren dönüşümlerdir.



Şekil 7.2

$\alpha = a + ib \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}$-doğrusal $Lz = \alpha z$ ve $Tz = \alpha\bar{z}$ dönüşümleri açı koruyan dönüşümlerdir. Dolayısıyla $\sphericalangle(e_1, e_2) = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\sphericalangle(L1, Li) = \sphericalangle(\alpha, i\alpha) = \frac{\pi}{2}$ ve $\sphericalangle(T1, Ti) = \sphericalangle(\alpha, -i\alpha) = \frac{\pi}{2}$ olur. Yine de L ile T arasında önemli bir fark var: L yönü korurken T yönü korumuyor! Bu farkı açılar türünden dile getirmeye çalışırsak bu bizi *yönlenmiş açı* kavramına götürür. $i\alpha = e^{i\frac{\pi}{2}}\alpha$ iken $-i\alpha = e^{i\frac{3\pi}{2}}\alpha$. Dolayısıyla α vektörünü orijin etrafında saatin ters yönünde döndürerek $i\alpha$ doğrultusuna getirmek istersek $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürürken α vektörünü orijin etrafında saatin ters yönünde döndürerek $-i\alpha$ doğrultusuna getirmek istersek $\frac{3\pi}{2}$ kadar döndürürüz. Bu bizi daha önce KA I Tanım 1.7.14'te karşılaştığımız yönlenmiş açı kavramına götürür. Orada $z, w \in \mathbb{C}^*$ ise

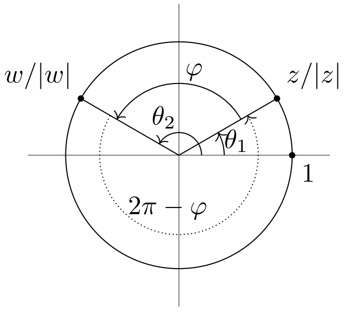
$$\measuredangle(z, w) := \mathbf{arg}\,\frac{w}{z}\text{'ye}$$

z'den w'ye **yönlenmiş açı** demiştik.

Tanımdan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere

$$\measuredangle(z_2, z_1) = -\measuredangle(z_1, z_2) \text{ ve } \measuredangle(z_1, z_3) = \measuredangle(z_1, z_2) + \measuredangle(z_2, z_3)$$

olduğu apaçıktır. $\varphi \in [0, 2\pi)$ olmak üzere z vektörünü saatin ters yönünde φ kadar döndürdüğümüzde w ile aynı yöne geliyorsa, dd. $\frac{w}{|w|} = e^{i\varphi}\frac{z}{|z|}$ ise, $\measuredangle(z, w) = \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$ olur. Genelde $\measuredangle(z, w)$'den $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\varphi + 2m\pi$ değerlerinden herhangi biri anlaşılır.



Şekil 7.3

Örneğin

$$\measuredangle(1,-i) = \frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z},\ \measuredangle(-i,1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z},$$

dolayısıyla $\measuredangle(1,-i) = -\measuredangle(-i,1)$ ancak $\sphericalangle(1,-i) = \sphericalangle(-i,1) = \frac{\pi}{2}$'dir.

Tanım 7.2.7. $\mathbb{R}$-doğrusal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ birebir dönüşümüne, her $z, w \in \mathbb{C}^*$ için

$$\measuredangle(Lz, Lw) = \measuredangle(z, w)$$

ise, L dönüşümü **yönlenmiş açıları korur** veya **konform**dur diyeceğiz.

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $a \in U$ noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve $df(a)$ dönüşümü birebir olsun. $df(a)$ konformsa f **fonksiyonu** a **noktasında konformdur** denir.

Şekil 7.2'den de görüldüğü gibi $\mathbb{R}$-doğrusal $\overline{\mathrm{Id}}$ dönüşümü yönlenmiş açıları korumaz! Gerçekten de $z, w \in \mathbb{C}^*$ için $\measuredangle(\overline{\mathrm{Id}}z, \overline{\mathrm{Id}}w) = \measuredangle(\overline{z}, \overline{w}) = -\measuredangle(z, w)$.

Teorem 7.2.8. *$\mathbb{R}$-doğrusal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ için aşağıdaki önermeler eşdeğerlidirler:*

(i) L açıları ve yönü korur.

(ii) L dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusaldır, dd. bir $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ile, her z için $Lz = \alpha z$.

(iii) L konformdur.

Kanıt. (i)$\Longleftrightarrow$(ii): Bu doğrudan Önsav 7.2.2'den çıkar.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Bir $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ile $Lz = \alpha z$ ise, her $z, w \in \mathbb{C}^*$ için

$$\measuredangle(Lz, Lw) = \mathbf{arg}\,\frac{Lw}{Lz} = \mathbf{arg}\,\frac{\alpha w}{\alpha z} = \mathbf{arg}\,\frac{w}{z} = \measuredangle(z, w).$$

(iii)$\Longrightarrow$(ii): L konform olsun. Her $z, w \in \mathbb{C}^*$ için

$$\mathbf{arg}\,\frac{Lw}{Lz} = \mathbf{arg}\,\frac{w}{z} \Longrightarrow \mathbf{arg}\,\frac{Lw}{w} = \mathbf{arg}\,Lw - \mathbf{arg}\,w = \mathbf{arg}\,Lz - \mathbf{arg}\,z = \mathbf{arg}\,\frac{Lz}{z}$$

olur. Dolayısıyla $\mathbb{C}^*$'da $\mathbf{arg}\,\frac{Lz}{z}$ sabittir. Bu ise, her $z \in \mathbb{C}^*$için $\frac{Lz}{z}$'nin orijinden geçen bir yarıdoğru üzerinde olması demektir. KA I Önerme 1.1.6'dan dolayı $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sayıları, her $z \in \mathbb{C}^*$için $Lz = \alpha z + \beta \overline{z}$ olacak biçimde vardır. Bu durumda

$$\frac{Lz}{z} = \alpha + \beta\frac{\overline{z}}{z},\ z \in \mathbb{C}^* \tag{7.12}$$

olur. (7.12) eşitliği α merkezli $|\beta|$ yarıçaplı bir çemberin denklemidir. $\frac{Lz}{z}$ değerleri ancak $\beta = 0$ ise bir yarıdoğru üzerinde bulunurlar. Dolayısıyla $\beta = 0$ ve L birebir olduğundan ise, $\alpha \neq 0$ elde ederiz. □

Bu teorem bize başka sözlerle şunu söylüyor: $\mathbb{R}$-doğrusal ve birebir $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümleri için *"açıları ve yönü korumak"*, "$\mathbb{C}$-*doğrusal olmak*" ve "*yönlenmiş açıları korumak*" denk kavramlardır.

Tanım 7.2.9. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında f'ye bir **konform dönüşüm**dür denir:

(a) Her $z \in U$ için $\Delta_f(z) \neq 0$,

(b) f birebirdir,

(c) Her $a \in U$ için $df(a)$ konformdur.

Teorem 7.2.10. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ birebir olsun. f'nin bir konform dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul $f \in \mathcal{H}(U)$ olmasıdır.*

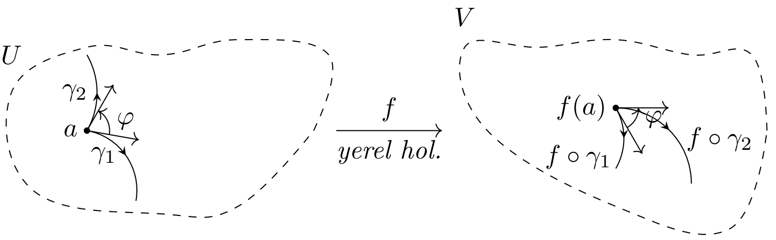
Kanıt. 1. $f : U \to \mathbb{C}$ bir konform dönüşüm olsun. Teorem 7.2.8(i)'den dolayı f fonksiyonu U'da açıları ve yönü korur. Teorem 7.2.6(i)'den dolayı $f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $a \in U$ için $f'(a) \neq 0$.

2. $f \in \mathcal{H}(U)$ birebir olsun. $f \in \mathcal{H}(U)$ olduğu için $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Ayrıca f birebir olduğundan, KA I Sonuç 1.8.15'ten dolayı, her $a \in U$ için $f'(a) \neq 0$, dolayısıyla her $a \in U$ için bir yandan $df(a)$ konform, diğer yandan $\Delta_f(a) = |f'(a)|^2 > 0$. Sonuçta, f bir konform dönüşümdür. □

Sonuç 7.2.11. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f : U \to \mathbb{C}$ konform ve $V := f(U)$ ise, V de açıktır ve f^{-1} de konform dönüşümdür. Özellikle konform tameşlemeler bikonformdur, dd. f ve f^{-1} konform dönüşümlerdir.*

Kanıt. U açık olmak üzere $f : U \to \mathbb{C}$ konformsa birebir holomorf fonksiyon olacağından, Açık Dönüşüm Teoremi'nden $V = f(U)$ eşitliği açıktır. Holomorf fonksiyonların tersleri varsa onların da holomorf olduğunu biliyoruz. Öyleyse f^{-1} holomorf ve birebir olduğundan, Teorem 7.2.10 ile konformdur. □

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ olmak üzere, her $a \in U$ noktasının bir U_a açık komşuluğu $f|U_a$ konform olacak biçimde bulunabiliyorsa, f fonksiyonu



Şekil 7.4

U'da **yerel konform**dur denir. Örneğin $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu birebir olmadığından konform değildir, ancak yerel konformdur. Elbette yerel konform dönüşümler yönlenmiş açıları korurlar.

Pürüzsüz gezileri tanımlayacak ve başlangıç noktaları aynı olan pürüzsüz geziler arasında yönlenmiş açı tanımlayacağız. Parametre aralığının seçimi önemsiz olduğundan, bu kısımda inceleyeceğimiz tüm gezilerin parametre aralıklarını $[0,1]$ olarak alacağız. $\mathbb{C}$'de $\mathcal{C}^1$ sınıfından bir γ gezisine, her $t \in [0,1]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise bir **pürüzsüz** gezi denir. Burada elbette $t = 0$'da sağdan limit, $t = 1$'de ise soldan limit söz konusudur. $\gamma(0) = a$ ise

$$a + s\gamma'(0),\ 0 \leq s < +\infty$$

ile γ gezisinin a noktasında **yarıteğeti** parametrelenmiştir.

KA I Not 2.2.6'da $\mathcal{C}^1$ sınıfından geziler için φ parametre dönüşümlerinin daima $\varphi'(t) > 0$ koşulunu sağlamasını istemiştik. Bu nedenle pürüzsüzlük bir rotasal kavramdır. γ_1 ve γ_2 *başlangıç noktaları aynı* olan iki pürüzsüz gezi olsun. $\varphi_i : [0,1] \to [0,1]$ iki $\mathcal{C}^1$ sınıfından parametre dönüşümü ve $\eta_i := \gamma_i \circ \varphi_i$, $i = 1,2$ olsun. $p := \frac{\varphi_2' 0)}{\varphi_1' 0)} > 0$ olacağından

$$\mathbf{arg}\,\frac{\eta_2'(0)}{\eta_1'(0)} = \mathbf{arg}\,\frac{\gamma_2'(\varphi_2(0))\varphi_2' 0)}{\gamma_1'(\varphi_1(0))\varphi_1' 0)} = \mathbf{arg}\,\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} + \mathbf{arg}\,p = \mathbf{arg}\,\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \qquad (7.13)$$

olur. Dolayısıyla şu tanım kusursuzdur: $a := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ olmak üzere

$$\sphericalangle(\boldsymbol{\gamma_1, \gamma_2}) := \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)$$

$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)$ değeri a noktasında γ_1 ve γ_2 **gezileri arasındaki yönlenmiş açı** olarak tanımlanır. (7.13) eşitliğinden, yönlenmiş açı kavramının rotasal olduğunu biliyoruz; bu nedenle adaylarla, yani gezilerle çalışabiliriz ve parametre aralığını istediğimiz gibi seçebiliriz. Ayrıca $\nu = 1, 2$ için $p_\nu > 0$ ve $z_\nu \neq 0$ ise, $\mathbf{arg}\, \frac{p_2 z_2}{p_1 z_1} = \mathbf{arg}\, \frac{z_2}{z_1}$ olduğundan

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0) = \sphericalangle\left(\frac{\gamma_1'(0)}{|\gamma_1'(0)|}, \frac{\gamma_2'(0)}{|\gamma_2'(0)|}\right) \tag{7.14}$$

γ_1, γ_2 ve γ_3'ler başlangıç noktaları aynı olan pürüzsüz gezilerse,

$$\sphericalangle(\gamma_2, \gamma_1) = -\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2),\ \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_1) = 0 + 2\pi\mathbb{Z}$$
$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_3) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) + \sphericalangle(\gamma_2, \gamma_3).$$

Önerme 7.2.12. *$U \subset \mathbb{R}^2$ açık, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ düzgün ise, her pürüzsüz $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ gezisi için $f \circ \gamma$ gezisi de pürüzsüzdür.*

Kanıt. $f = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ ve $\eta = f \circ \gamma$ ise, basit bir türev alma ile f'nin düzgünlüğü ve $\begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$'dan

$$(f \circ \gamma)'(t) = \eta'(t) = \begin{pmatrix} g_x(\gamma(t)) & g_y(\gamma(t)) \\ h_x(\gamma(t)) & h_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

olduğu kolayca görülür. □

Yalın yazılımla (7.15) eşitliği

$$df(\gamma(t))\gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t) \tag{7.16}$$

demektir. Özellikle $t = 0$ için $a := \gamma(0)$ ve $b := f(a)$ dersek f dönüşümü başlangıç noktaları a olan γ pürüzsüz gezilerini başlangıç noktaları b olan $f \circ \gamma$ pürüzsüz gezilerine dönüştürür; $df(a)$ ise bu γ eğrilerinin a'daki teğetlerini $f \circ \gamma$'nin b'deki teğetlerine dönüştürür. $df(a)$'ya verilen adlardan biri olan **teğetsel dönüşüm**ün kaynağı budur.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f'(a) \neq 0$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}^1(U)$ ve a noktasının bir U_a komşuluğunda her $z \in U_a$ için $f'(z) \neq 0$, dolayısıyla $\Delta_f(z) \neq 0$. Eğer γ_1, γ_2 pürüzsüz gezilerinin başlangıç noktaları a ise

$$\mathbf{arg}\, \frac{(f \circ \gamma_2)'(0)}{(f \circ \gamma_1)'(0)} = \mathbf{arg}\, \frac{f'(a)\gamma_2'(0)}{f'(a)\gamma_1'(0)} = \mathbf{arg}\, \frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$$

olduğundan

$$\sphericalangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) \tag{7.17}$$

olur. Kısaca *holomorf fonksiyonlar türevlerinin* 0*'dan farklı olduğu noktalarda eğriler arasındaki yönlenmiş açıları korurlar.* Bu bilgi $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonlarını

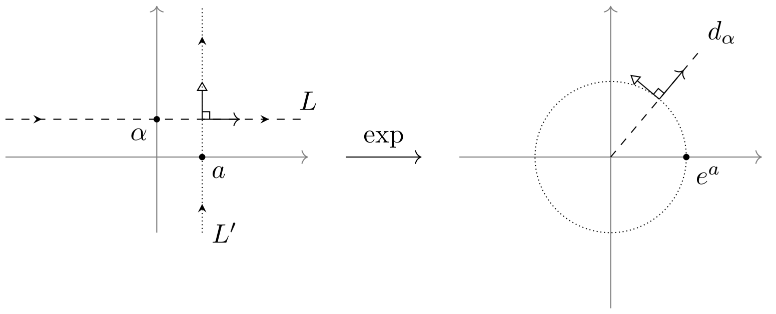
$f : U \to \mathbb{R}^2$ dönüşümleri olarak incelemek istediğimizde oldukça yararlı destek sağlar.

Örnek. Şimdi iki örnek verelim.

(1) $\exp : \mathbb{C}_z \to \mathbb{C}_w$. Şimdi $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{C}_z$ düzlemindeki

$$L(t) = t + ib \text{ ve } L'(t) = a + it,\ t \in \mathbb{R}$$

açık gezileri birbirini $z_0 = (a, b)$ noktasında dik keserler.



Şekil 7.5

Dolayısıyla

$$(\exp \circ L)(t) = e^t e^{ib} \text{ ve } (\exp \circ L')(t) = e^a e^{it}$$

açık gezileri birbirini $\mathbb{C}_w$ düzleminin $w_0 = e^{z_0}$ noktasında yönleri koruyarak dik keserler. Burada $\exp \circ L$ gezisinin izi d_b ışını, $\exp \circ L'$ gezisinin izi ise e^a yarıçaplı 0-merkezli çemberdir.

(2) Trigonometrik fonksiyonlara örnek olmak üzere $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu inceleyelim. $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ olduğundan böylece sin de aradan çıkmış olur. cos fonksiyonu 2π döngülü olduğundan onu $(-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ şeridinde, ayrıca çift olduğundan $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ şeridinde incelemek yeterlidir. Biz önce $(0, \pi) \times \mathbb{R}$ şeridine odaklanacağız.

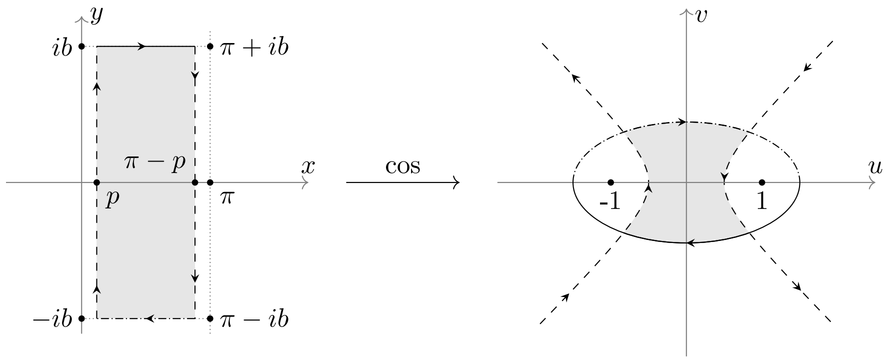
$z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere KA I Problem 1.7.18 ile

$$w = \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$
$$u = \cos x \cosh y \text{ ve } v = -\sin x \sinh y.$$

Şimdi $b > 0$ olsun. $\overrightarrow{ib, \pi + ib}$ gezisinin izindeki uçlar dışındaki noktalar

$$\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$$

elipsinin alt yarıdüzlemdeki noktalarına resmedilirler. b noktası $(0, +\infty)$ aralığını tararken bu yarı elipsler alt yarıdüzlemi tarar. Benzeri biçimde $\overrightarrow{\pi + ib, -ib}$ gezisinin uç noktalar dışındaki noktaları ise bu elipsin üst yarıdüzlemdeki kısmına resmedilirler ve bunlar da üst yarıdüzlemi tarar. cos fonksiyonu $(0, \pi) \times \{0\}$ aralığını $(-1, 1) \times \{0\}$ aralığına resmeder. Diğer yandan cos fonksiyonu $\{0\} \times (0, +\infty)$'u $(1, +\infty) \times \{0\}$'a ve $\{\pi\} \times (-\infty, 0)$'ı ise $(-\infty, -1) \times \{0\}$'a resmeder. $0 < p < \frac{\pi}{2}$ ise, cos fonksiyonu $\{p\} \times \mathbb{R}$'yi Şekil 7.6'daki sağ hiperbol dalına ve $\{\pi - p\} \times \mathbb{R}$'yi Şekil 7.6'daki sol hiperbol dalına resmeder. Ayrıca bu elipsler ve hiperboller tanım kümesinde birbirini dik kesen doğruların resimleri olduğundan, bu elips ve hiperbollerin de birbirlerini dik kestiklerini görmeyi okura bırakıyoruz.



Şekil 7.6

Şimdi devre dışı bıraktığımız bir duruma el alacağız. $f'(a) = 0$ durumuna bir basit örnekte gözatalım. $f(z) = z^2$ ve $a = 0$ olsun. $f'(0) = 0$. r_1, r_2 pozitif gerçel sayılar, $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $\gamma_\nu(t) = tr_\nu e^{i\theta_\nu}$ olsun. $\eta_\nu(t) := (f \circ \gamma_\nu)(t) = t^2 r_\nu^2 e^{i2\theta_\nu}$ olur. γ_1 ve γ_2 başlangıç noktaları a olan iki pürüzsüz gezidir ve a noktasında $\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \theta_2 - \theta_1 + 2\pi\mathbb{Z} =: \theta + 2\pi\mathbb{Z}$'dir. Ancak $\eta'_\nu(0) = 0$ olduğundan, η_ν gezilerimiz $f(a) = f(0) = 0$ noktasında pürüzsüz geziler değildirler. Yine de bu gezilerimizin $\underline{\eta}$ yollarına baktığımızda bu gezilerimize birim uzunluklu teğetler olarak $e^{i2\theta_\nu}$ vektörlerini alabileceğimizi görürüz. $\sphericalangle(\eta_1, \eta_2)$ yönlenmiş açısını $\sphericalangle(e^{i2\theta_1}, e^{i2\theta_2}) = 2(\theta_2 - \theta_1) + 2\pi\mathbb{Z} = 2\theta + 2\pi\mathbb{Z}$ olarak tanımlarsak $\sphericalangle(\eta_1, \eta_2) = 2\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)$ olduğunu görürüz. Demek ki a noktasında ikinci dereceden bir $f(a)$ yeri olan fonksiyonumuz, başlangıç noktası a olan γ_1, γ_2 pürüzsüz gezileri arasındaki açıyı ikiye katladı. Şimdi başlangıç noktası a olan bazı $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gezileri için, pürüzsüz gezileri de kapsayacak biçimde a noktasında teğet kavramını tanımlayacağız.

Tanım 7.2.13. Başlangıç noktası a olan $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gezisi verilsin.

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\gamma(t) - a}{|\gamma(t) - a|}$$

limiti varsa, γ'nın a **noktasında teğeti vardır** ve bu limite ise γ'nın a **noktasındaki birim teğeti** diyeceğiz.

Eğer γ'nın a'da bir teğeti varsa, bu teğet $0 \leq \varphi < 2\pi$ koşulunu sağlayan bir φ ile bir $e^{i\varphi}$'dir. Diğer yandan $\exists \gamma'(0) \neq 0$ ise, $t > 0$ olduğundan

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\gamma(t) - a}{|\gamma(t) - a|} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} \left| \frac{t - 0}{\gamma(t) - \gamma(0)} \right| = \frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|}. \tag{7.18}$$

Dolayısıyla γ pürüzsüzse a noktasında teğeti vardır.

Şimdi γ_1, γ_2 gezilerinin a noktasında, $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$ olmak üzere $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}$ teğetleri bulunsun. a noktasında bunlar arasındaki yönlenmiş açı

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{arg}\, \frac{e^{i\varphi_2}}{e^{i\varphi_1}} = \varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi\mathbb{Z} \tag{7.19}$$

olarak tanımlanır. (7.14) ve (7.18) eşitliklerinden dolayı bu tanım, geziler pürüzsüz iseler, pürüzsüz geziler için verdiğimiz tanımla örtüşür.

Önerme 7.2.14. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in B$, $f \in \mathcal{H}(B)$, $n \geq 1$, f'nin a noktasında n. dereceden bir $b := f(a)$ yeri bulunsun ancak f sabit olmasın. B'de başlangıç noktaları a olan γ_1, γ_2 gezileri pürüzsüzse $f \circ \gamma_1$ ve $f \circ \gamma_2$ gezilerinin b'de teğetleri vardır ve*

$$\sphericalangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = n \cdot \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Kanıt. a noktasının B'ye düşen bir $D_r(a)$ komşuluğu ve orada asla sıfır değerini almayan bir $g \in \mathcal{H}(D_r(a)$ holomorf fonksiyonu, her $z \in D_r(a)$ için $f(z) - b = (z-a)^n g(z)$ olacak biçimde bulunabilir. γ ise başlangıç noktası a olan B'de herhangi bir gezi ise, $\eta := f \circ \gamma$ için

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\eta(t) - b}{|\eta(t) - b|} = \lim_{t \downarrow 0} \left[\left(\frac{\gamma(t) - a}{|\gamma(t) - a|} \right)^n \cdot \frac{g(\gamma(t))}{|g(\gamma(t))|} \right] = \left(\frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} \right)^n \frac{g(a)}{|g(a)|}.$$

Dolayısıyla η'nın b noktasında bir teğeti vardır. $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$ olmak üzere γ'nın a noktasındaki birim teğet vektörü $\frac{\gamma'(0)}{|\gamma'(0)|} = e^{i\varphi}$ ve $\frac{g(a)}{|g(a)|} = e^{i\psi}$ olsun. Burada ψ açısı γ'dan bağımsızdır. Böylece η'nın b'deki birim teğet vektörü $e^{in\varphi}e^{i\psi}$ olur. Dolayısıyla başlangıç noktaları a ve, $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$ olmak üzere, oradaki birim teğet vektörleri sırasıyla $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}$ olan γ_1, γ_2 pürüzsüz gezileri verildiğinde bunlar b'deki birim teğetleri $e^{in\varphi_1}e^{i\psi}$ ve $e^{in\varphi_2}e^{i\psi}$ olan $\eta_1 = f \circ \gamma_1$ ve $\eta_2 = f \circ \gamma_2$ gezilerine resmedilirler. Böylece $e^{in\varphi_1}e^{i\psi}$'i saatin ters yönünde $(n\varphi_2 + \psi) - (n\varphi_1 + \psi) = n(\varphi_2 - \varphi_1)$ kadar döndürerek $e^{in\varphi_2}e^{i\psi}$'ye getiririz. Dolayısıyla $\sphericalangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = n \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)$. □

Birebir ve $\mathbb{R}$-doğrusal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümüne, bir $p > 0$ gerçel sayısı her $z \in \mathbb{C}$ için $|Lz| = p|z|$ olacak biçimde bulunabiliyorsa bir sıkger dönüşümü demiştik. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve $df(a)$ bir sıkger dönüşüm ise, f fonksiyonu a **noktasında** bir **sıkger** dönüşümdür diyelim. Eğer f fonksiyonu her $a \in U$ noktasında bir sıkger dönüşümse, f fonksiyonu U**'da sıkger dönüşüm**dür diyelim.

Teorem 7.2.15. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{C}^1(B)$ ve her $a \in B$ için $\Delta_f(a) \neq 0$ olsun. Bu koşullarda aşağıdaki önermeler geçerlidir:*

(i) f fonksiyonu a'da sıkgerdir $\Longleftrightarrow$ Ya $f_{\overline{z}}(a) = 0$ ya da $f_z(a) = 0$.

(ii) f fonksiyonu B'de sıkgerdir$\Longleftrightarrow$Ya $f \in \mathcal{H}(B)$ ya da $\overline{f} \in \mathcal{H}(B)$.

Kanıt. (i) $\alpha := f_z(a)$ ve $\beta := f_{\overline{z}}(a)$ olmak üzere $df(a)(z) = \alpha z + \beta\overline{z}$. Varsayımımızdan $\Delta_f(a) \neq 0$, dolayısıyla $df(a)$ birebirdir ve α ve β'nın ikisi birden sıfır olamaz. $df(a)$'nin bir sıkger dönüşüm olması, bir $p > 0$ ile her $z \in \mathbb{C}$ için $|df(a)(z)| = p|z|$ olmasıdır. Dolayısıyla bu $0 \neq z = |z|e^{i\theta}$ ile

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{df(a)(z)}{z}\right| = \left|\alpha + \beta\frac{\overline{z}}{z}\right| = \left|\alpha + \beta e^{-i2\theta}\right| \equiv p$$

olması demektir. Bu ise $\beta = 0$ veya $\alpha = 0$ demektir. Bu, savı verir.

(ii)(a) f fonksiyonu her $a \in B$ noktasında bir sıkger dönüşüm olsun. Teoremimizin (i) şıkkından dolayı, $df(a)$ ya $\mathbb{C}$-doğrusaldır ya da anti doğrusaldır. Önerme 7.2.1'den dolayı f fonksiyonu B bölgesinde açıları korur. Teorem 7.2.5'e göre ya $f \in \mathcal{H}(B)$, ya da $\overline{f} \in \mathcal{H}(B)$ olmalıdır.

(ii)(b) $f \in \mathcal{H}(B)$ ise, her $a \in B$ için $f_{\overline{z}}(a) = 0$, ancak $f_z(a) \neq 0$, yok eğer $\overline{f} \in \mathcal{H}(B)$ ise $\left(\overline{f}\right)_{\overline{z}}(a) = f_z(a) = 0$, ancak $\left(\overline{f}\right)_z(a) = f_{\overline{z}}(a) \neq 0$ olur. Önermemizin (i) şıkkından dolayı f fonksiyonu B'de sıkgerdir. □

Teoremimizin koşullarında "f yön korur $\Longleftrightarrow$ $f \in \mathcal{H}(B)$" olacağından, aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 7.2.16. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ birebir olsun. $f \in \mathcal{H}(U)$ olması için gerek ve yeter koşul f'nin U'da $\mathcal{C}^1$ sınıfından, U'da yön koruyan bir sıkger dönüşümü olmasıdır.*

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\gamma : [0,1] \to U$ bir pürüzsüz gezi olsun. Her $t \in [0,1]$ için $\gamma_t := \gamma|[0,t]$ dersek

$$L(\gamma_t) = \int_0^t \left|\gamma'(\tau)\right| d\tau \tag{7.20}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla γ_t'nin $z_0 := \gamma(0)$ noktasındaki uzunluk elemanı

$$ds = \left|\gamma'(0)\right| dt$$

olur. Şimdi $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0'ın bir komşuluğunda $f'(z) \neq 0$ olacağından, yeterince küçük t'ler için $\gamma_t^* := f\circ\gamma_t$ gezileri de pürüzsüz ve

$$L(\gamma_t^*) = \int_0^t \left|f'(\gamma(\tau)\right| \cdot \left|\gamma'(\tau)\right| d\tau \tag{7.21}$$

olur. Dolayısıyla γ_t^*'nin $w_0 = \gamma(0)$'daki uzunluk elemanı

$$ds^* = \left|f'(z_0)\right| \cdot \left|\gamma'(0)\right| dt = \left|f'(z_0)\right| \cdot ds \tag{7.22}$$

olur. Ancak $ds^* = |f'(z_0)| \cdot ds$ eşitliğinde γ görünmez, dd. f dönüşümü başlangıç noktaları z_0 olan pürüzsüz gezileri, uzunluk elemanlarını aynı oranda değiştirerek başlangıç noktaları w_0 olan gezilere dönüştürür.

Tanım 7.2.17. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$ ve $f \in \mathcal{C}^1(U)$ fonksiyonu U'da düzgün olsun. Bir $0 \neq p(a) \in \mathbb{R}$ sayısı, başlangıç noktası a ve a'daki uzunluk elemanı ds olan U'daki her pürüzsüz γ gezisi için $\gamma^* = f \circ \gamma$ gezisinin $b = f(a)$ noktasındaki ds^* uzunluk elemanı $ds^* = p(a)ds$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, f dönüşümü a noktasında **uzunluklara sadıktır**[3] denir.

Önerme 7.2.18. *$a \in U$ noktasında düzgün olan $f \in \mathcal{C}^1(U)$ fonksiyonunun a noktasında uzunluklara sadık olması için gerek ve yeter koşul ya $f_{\overline{z}}(a) = 0$ ya da $f_z(a) = 0$ olmasıdır.*

Kanıt. γ izi U'da ve başlangıç noktası a olan bir pürüzsüz gezi ise, $\gamma^* := f \circ \gamma$ başlangıç noktası $b := f(a)$ olan bir pürüzsüz gezidir. γ^*'ın b noktasındaki uzunluk elemanı

$$\begin{aligned} ds^* &= \left| f_z(a)\gamma'(0) + f_{\overline{z}}(a)\overline{\gamma'(0)} \right| dt \\ &= \left| f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)\frac{\overline{\gamma'(0)}}{\gamma'(0)} \right| \left|\gamma'(0)\right| dt \\ &= \left| f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)\frac{\overline{\gamma'(0)}}{\gamma'(0)} \right| ds \end{aligned} \tag{7.23}$$

olur. $\gamma'(0) = re^{i\alpha} \neq 0$ ise $\frac{\overline{\gamma'(0)}}{\gamma'(0)} = e^{-i2\alpha}$ olur. Bu durumda

$$ds^* = \left| f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)e^{-i2\alpha} \right| ds. \tag{7.24}$$

Diğer yandan, her $\alpha \in [0, 2\pi)$ için $\gamma_\alpha(t) := a + te^{i\alpha}$, $0 \leq t \leq 1$ başlangıç noktası a olan bir pürüzsüz gezidir ve bu gezinin başlangıç kısmı U'ya düşer. Dolayısıyla (7.24) denklemi her $\alpha \in [0, 2\pi)$ için geçerlidir. Bu nedenle f'nin a noktasında uzunluğa sadık olması için gerek ve yeter koşul $\left|f_z(a) + f_{\overline{z}}(a)e^{-i2\alpha}\right|$'nin $[0, 2\pi)$'de sabit olmasıdır. Bu ise $f_z(a) = 0$ veya $f_{\overline{z}}(a) = 0$ olması demektir. Diğer yandan f fonksiyonu a'da düzgün olduğundan $f_z(a)$ ve $f_{\overline{z}}(a)$'nin ikisi birden sıfır olamaz! □

Teorem 7.2.10 ve 7.2.16'nın kanıtlarındaki aynı argümanlar bize aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 7.2.19. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ birebir olsun. $f \in \mathcal{H}(U)$ olması için gerek ve yeter koşul f'nin U'da $\mathcal{C}^1$ sınıfından, U'da yön koruyan ve U'da uzunluklara sadık bir dönüşüm olmasıdır.*

Teorem 7.2.20. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$, γ ise B'de $\mathrm{I}(\gamma) \subset B$ koşulunu sağlayan basit kapalı bir integral gezisi ve $\Gamma = f \circ \gamma$ olsun. Eğer $f|\underline{\gamma}$ birebirse $f(\mathrm{I}(\gamma)) \subset \mathrm{I}(\Gamma)$ ve $f|\mathrm{I}(\gamma) : \mathrm{I}(\gamma) \to \mathrm{I}(\Gamma)$ bikonformdur.*

[3] Almanca "streckentreu".

Kanıt. Gösterilmesi gereken f'nin $\mathrm{I}(\gamma)$'da birebir ve $f(\mathrm{I}(\gamma)) = \mathrm{I}(\Gamma)$ olduğudur. Genellikten bir şey kaybetmeden γ'nın pozitif yönlenmiş, dd. $\boldsymbol{\partial}\mathrm{I}(\gamma) = \gamma$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda KA I'deki (4.28) eşitliği, her $a \notin \underline{\Gamma}$ için $n(\Gamma, a) = Z_a(f, \mathrm{I}(\gamma))$ olduğunu söyler. Bu denklemden şunları okuruz. Bir: f fonksiyonu $\mathrm{I}(\gamma)$'da hiçbir $a \in \mathrm{D}(\Gamma)$ değerini almaz. İki: Bir yandan Γ bir basit kapalı integral gezisi olduğundan her $a \in \mathrm{I}(\Gamma)$ için $n(\Gamma, a) = \pm 1$, diğer yandan $Z_a(f, \mathrm{I}(\gamma))$ negatif değerler alamayacağından, denklemimizden her $a \in \mathrm{I}(\Gamma)$ için $n(\Gamma, a) = Z_a(f, \mathrm{I}(\gamma)) = 1$ elde ederiz. Bu ise bir yandan her $a \in \mathrm{I}(\Gamma)$ değerinin $\mathrm{I}(\gamma)$'da tam bir kez alındığını söyler, diğer yandan ise Γ'nın $\mathrm{I}(\Gamma)$'nın pozitif yönlenmiş sınırı olduğunu dile getirir. Geriye f'nin $\mathrm{I}(\gamma)$'da hiçbir $a \in \underline{\Gamma}$ değerini almadığını göstermek kalıyor.

$a \in \underline{\Gamma}$ olsun ve $a \in f(\mathrm{I}(\gamma))$ olduğunu varsayalım. B bir bölge ve $f|\underline{\gamma}$ birebir olduğundan f sabit değildir, dolayısıyla f bir açık dönüşümdür. Bu durumda bir $r > 0$ sayısı $D_r(a) \subset f(\mathrm{I}(\gamma))$ olacak biçimde vardır. Bu $D_r(a)$ dairesinde $\mathrm{D}(\Gamma)$'ya ait noktalar da vardır. Ancak biraz yukarıda f'nin $\mathrm{I}(\gamma)$'da hiçbir $w \in \mathrm{D}(\Gamma)$ değerini almadığını gördük. Bu bir çelişkidir; dolayısıyla varsayımımız yanlıştır. □

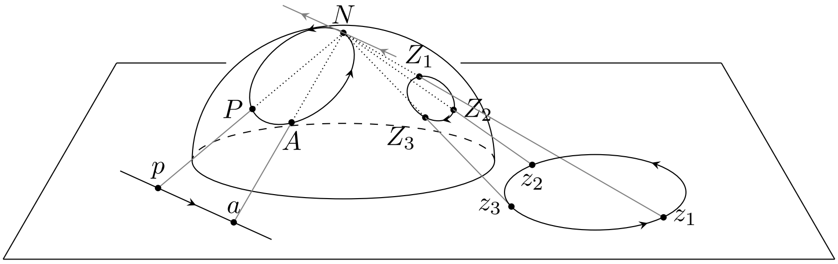
Şimdiye kadar ele aldığımız konform dönüşümlerin tanım ve değer kümeleri $\mathbb{C}$'deydi. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ ve $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ olduğunda f'nin konform olmasının tanımını teorem 7.2.10'u baz alarak vereceğiz.

Tanım 7.2.21. Birebir meromorf fonksiyonlara **konform dönüşüm**ler diyeceğiz.

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ ve $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ bir konform dönüşüm, dd. birebir ve meromorf olsun. f'nin en fazla bir kutup noktası olabilir. $U_* := (U \cap \mathbb{C}) \setminus P_f$ olsun. U_* kümesi U'dan en fazla iki nokta, ∞ ve eğer varsa kutup noktası çıkarılarak elde edildiğinden, $\mathbb{C}$'de açık bir kümedir. $f|U_*$ bilindik anlamda konformdur, dolayısıyla f dönüşümü her $z \in U_*$ noktasında açıları yönleriyle korur. 7.2.21 tanımını daha önceki tanım mantığında vermek istersek, başlangıç noktaları ∞ olan ve orada teğetleri olan geziler arasında açı tanımını vermemiz gerekir. Bunun yolu ise değişmez. γ_1, γ_2 başlangıç noktaları ∞ olan ve orada teğetleri olan iki gezi ise, $\frac{1}{\gamma_1}$ ve $\frac{1}{\gamma_2}$ başlangıç noktaları 0 olup orada teğetleri olan iki gezidir ve biz bu durumda

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) := \sphericalangle\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right)$$

olarak tanımlıyoruz. Bu tanımla önerme 7.2.14, $B \subset \mathbb{C}_\infty$ ve $f \in \mathcal{M}(B)$ olduğunda da aynen geçerlidir. Eğer bu f ayrıca konformsa birebir olduğundan, en fazla bir a noktasında birinci dereceden kutup yeri olacağından, her a noktasında açıları yönleriyle korur.



Şekil 7.7: $\mathbb{S}^2$'de yön.

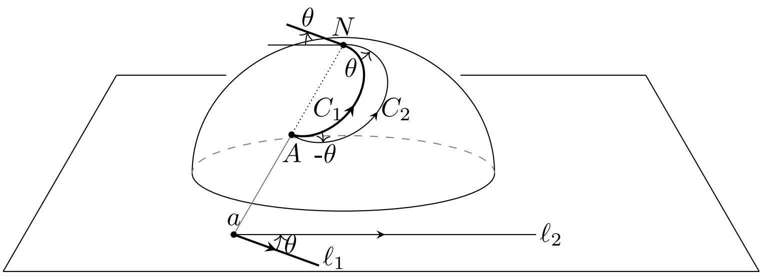
Bu açı kavramına görsellik kazandırmanın yolu $\mathbb{C}_\infty$'dan π_N^{-1} ile $\mathbb{S}^2$'ye geçmektir.

$\mathbb{C}$'de başlangıç noktası a olan pürüzsüz γ_1, γ_2 gezileri verilsin. π_N^{-1} bu gezileri $\mathbb{S}$'de başlangıç noktaları $A = \pi_N^{-1}(a)$ olan iki pürüzsüz Γ_1, Γ_2 gezilerine resmeder. Biz $\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)$ ve $\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2)$ açıları arasındaki ilişkiyi incelemek istiyoruz. η_1 ve η_2 yine başlangıç noktaları a olan iki pürüzsüz gezi olsun ve γ_i'nin ve η_i'nin a'daki birim teğet vektörleri örtüşsünler. Bu durumda $\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2) = \sphericalangle(\eta_1, \eta_2)$ olacaktır. Ayrıca $\Lambda_i := \pi_N^{-1} \circ \eta_i$ olmak üzere Γ_i ve Λ_i'nin A noktasındaki birim teğet vektörleri örtüşür; dolayısıyla $\sphericalangle(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sphericalangle(\Lambda_1, \Lambda_2)$ olacaktır. Bu nedenle biz başlangıç noktaları a olan pürüzsüz γ_1, γ_2 gezileri yerine onların yarıteğetlerinden yola çıkabiliriz.

π_N^{-1} dönüşümünün $\mathbb{C}_\infty$'daki Möbius çemberlerini $\mathbb{S}^2$'nin çemberlerine resmettiğini biliyoruz (bkz. Şekil 7.7). Ancak burada bir şey dikkatimizi çekiyor: $\mathbb{C}$'de pozitif yönlenmiş bir C_1 çemberi küre yüzeyine dışarıdan baktığımızda negatif yönlenmiş bir C_1' çemberine resmedilmektedir. Eğer yönün korunmasını istiyorsak C_1' çemberine içeriden, küremizin merkezinden bakmalıyız[4]. Diğer yandan düzlemde a noktasından geçen bir l_∞ doğrusu N kutup noktasından geçen bir C çemberine dönüşür. Bu çember elbette $l := l_\infty \setminus \{\infty\}$ doğrusunu ve N kuzey kutbunu içeren düzlemin $\mathbb{S}^2$ ile arakesitinden başka bir şey değildir. Ayrıca bu düzlem $\mathbb{S}^2$'nin kuzey kutbundaki teğet düzlemini l'ye koşut bir doğru boyunca keser ki C çemberinin N'deki teğeti bu doğru üzerindedir.

Şimdi düzlemde başlangıç noktaları a olan pürüzsüz γ_1, γ_2 gezileri verisin. Onların yerine başlangıç noktaları a olan l_1, l_2 yarıteğetlerini alalım (bkz. Şekil 7.8). $\theta := \sphericalangle(l_1, l_2)$ olsun. Bunları, yani l_1, l_2 yarıteğetlerini π_N^{-1} dönüşümü A ve N noktasından geçen çembersel C_1, C_2 yay parçalarına resmeder. C_1 ve C_2 arasındaki A ve N noktalarındaki açılar birbirine eşit, ancak yönce zıttırlar. Küre yüzeyine dışarıdan bakıldığında, N kutup noktasında C_1, C_2'in teğetleri l_1, l_2'lere koşuttur ve bu eğriler arasındaki N'deki yönlenmiş açı θ'dır. Dolayısıyla içeriden bakıldığında C_1, C_2'in aralarındaki yönlenmiş açı N'de $-\theta$ iken

[4]Burada eski ustalara saygı bağlamında içeriden bakmayı kabullendik. Aslında dışarıdan bakıp "antikonform" olduğunu söylemek daha doğru olurdu!



Şekil 7.8

A'da θ'dır. Böylece, her $a \in \mathbb{C}$ noktasında π_N^{-1} yönlenmiş açıları korur.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}_\infty$ ve $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ meromorf olsun. $a \in U$ ve $b = f(a)$ olsun. Tanım bölgemiz z-düzleminde, değer bölgemiz ise w-düzleminden olsun. γ_1 ve γ_2 başlangıç noktaları a ve orada 0'dan farklı teğetleri olan iki gezi olsun. Eğer $a = \infty$ ise, $i = 1, 2$ için $\Gamma_i := \pi_N^{-1} \circ \gamma_i$ şimdi $\mathbb{S}^2$'de başlangıç noktası N olan bir gezidir. Yukarıda verdiğimiz tanıma göre γ_1 ve γ_2'nin ∞'da aralarındaki yönlenmiş açı tanım gereği $\frac{1}{\gamma_1}$ ve $\frac{1}{\gamma_2}$ gezilerinin 0 noktasında aralarındaki yönlenmiş açıdır. Ancak tanım düzlemimizdeki $z \mapsto \frac{1}{z}$ dönüşümü, KA I Önerme 3.6.3'ten, $\mathbb{S}^2$'deki x_1-ekseni etrafındaki π'lik $R_{1\pi}$ rotasyonuna karşılık gelir. Ancak rotasyonlar konform dönüşümlerdir ve açıları yönleriyle korur. $R_{1\pi}$ rotasyonu N kuzey kutbundaki Γ_1, Γ_2 gezilerini aralarındaki yönlenmiş açıyı koruyarak S güney kutbundaki Λ_1, Λ_2 gezilerine taşısın. Bu durumda $\frac{1}{\gamma_i} = \pi_N \circ \Lambda_i$ olur ve biz biraz yukarıda S noktasındaki $\sphericalangle(\Lambda_1, \Lambda_2)$ yönlenmiş açının 0 noktasındaki $\sphericalangle\left(\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right)$ yönlenmiş açısına eşit olduğunu gördük. Dolayısıyla başlangıç noktası ∞ olan γ_1, γ_2 gezileri arasındaki yönlenmiş açı bunları π_N^{-1} ile $\mathbb{S}^2$'ye taşıdığımızda elde ettiğimiz Γ_1, Γ_2 gezilerinin N kuzey kutbunda aralarındaki yönlenmiş açıdır. Eğer $b = \infty$ ise, bu kez ikinci düzlemde $w \mapsto \frac{1}{w}$ dönüşümünü kullanırız ve aynı irdelemeler geçerlidir.

$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge ve $f : B \to \mathbb{C}_\infty$ konformsa, Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı $G = f(B)$ de bir bölgedir ve f^{-1} de konformdur. $U, V \subset \mathbb{C}_\infty$ açık kümeler olmak üzere bir $f : U \to V$ tameşlemesinin kendisi ve tersi de konformsa f **bikonformdur**, ayrıca U ve V **konform denktir** denir. Eğer $U, V \subset \mathbb{C}$ ise, $f : U \to V$'nin bikonform olması biholomorf olması ile eş anlamlıdır. Konform dönüşümlerin bileşimleri de konformdur. Dolayısıyla

$$\operatorname{Aut} B := \{f \mid f : B \to B \text{ konform ve tameşleme}\}$$

$\circ$ işlemine göre bir gruptur. $\operatorname{Aut} B$ tamı tamına bikonform $f : B \to B$ dönüşümlerinden oluşur; bu f'lere B'nin **otomorfizma**ları ve $\operatorname{Aut} B$'ye ise B'nin **otomorfizmalar grubu** denir. Bazı B bölgeleri için $\operatorname{Aut} B$'yi belirleyeceğiz ve sonra hangi B, B' bölgelerinin konform denk olduğunu araştıracağız. Özellikle,

$\emptyset \neq B \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölgeyse B'nin $\mathbb{D}$ birim dairesine konform denk olduğunu kanıtlayacağız (bkz. Teorem 7.6.4).

Problemler

Problem 7.2.1. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve B'de $\operatorname{Re} f' > 0$ olsun. $a \neq b$ koşulunu sağlayan her $a, b \in B$ için $\operatorname{Re} \frac{f(a+t(b-a))}{b-a}$ fonksiyonu $[0,1]$'de kesin artandır. Bundan yararlanarak $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayılarının, $\alpha \operatorname{Re} f' + \beta \operatorname{Im} f'$'nün B'de sıfır yeri olmayacak biçimde bulunabileceğini, böylece f'nin birebir olduğunu gösteriniz.

Problem 7.2.2. $f(z) = z + 1/z$ fonksiyonunun konform olduğu noktaları belirleyiniz. Her w için $f(z) = w$ denkleminin en fazla iki çözümü olduğunu gösteriniz. $r > 1$ için $f(C_r) = f(C_{1/r})$ ve bunun bir elips olduğunu gösteriniz.

Problem 7.2.3. $B := \mathbb{D} \cap D_1(1)$ bölgesini $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmediniz.

Problem 7.2.4. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{C}^1(B, \mathbb{C})$ ve her $z \in B$ için $\det J_f(z) \neq 0$ olsun. Eğer ayrıca f dönüşümü, birbirini dik kesen gezileri birbirini dik kesen gezilere gönderiyorsa, ya f ya da $\overline{f}$ fonksiyonu holomorftur.

Problem 7.2.5. Q sıfır merkezli bir açık kare, $f : \mathbb{D} \to Q$ biholomorf ve $f(0) = 0$ ise, her $z \in \mathbb{D}$ için $f(iz) = if(z)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 7.2.6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin dışını biholomorf $\mathbb{D}$'ye resmediniz.

7.3 Möbius Dönüşümleri

Tanım 7.3.1. $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - cb \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \\ \infty, & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \end{cases} \tag{7.25}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ tipindeki dönüşümlere **Möbius dönüşümleri** denir[5]. Möbius dönüşümlerinin kümesini Möb ile gösterelim.

Not 7.3.2. Tanıma ilişkin bazı notlar verelim.

(i) f dönüşümü (7.25) ile verilmişse

$$g(w) := \begin{cases} \frac{dw-b}{-cw+a}, & w \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\} \\ \infty, & w = a/c \\ -\frac{d}{c}, & w = \infty \end{cases} \tag{7.26}$$

[5] Möbius dönüşümü için yaygın kullanılan diğer isimler şunlardır: linear transformation, linear fractional transformation, bilinear transformation, homographic transformation.

ile tanımlanan $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü de bir Möbius dönüşümüdür ve $g = f^{-1}$. Möbius dönüşümleri tameşleme ve meromorf olduklarından, her f Möbius dönüşümü için $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$, dd. Möb $\subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$. İzleyen kısımda Möb $= \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$ olduğunu kanıtlayacağız.

(ii) (7.25)'te $c = 0$ ise, tanımın koşulundan $a, d \neq 0$ ve $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ve $f^{-1}(w) = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a}$ şeklini alır.

(iii) (7.25)'te $(c, d) \neq (0, 0)$ olmak koşuluyla $ad - cb \neq 0$ koşulundan vazgeçersek o tanım bize yine bir $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonu verir. Herhangi bir $z \in \mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ noktasında

$$f'(z) = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2} \tag{7.27}$$

olduğundan, $ad - cb = 0$ durumunda $\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$'de $f' \equiv 0$, dolayısıyla f orada sabit olur. Böyle bir f konform olmayacağından $\operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$'da olamaz!

(iv) (7.25)'te a, b, c, d yerine $\alpha \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d$ sayılarına geçersek $\alpha a \alpha d - \alpha c \alpha b \neq 0$ olur ve bu yeni katsayılarla tanımlanan fonksiyon yine f'dir.

Möbius dönüşümlerini genellikle $S, T, \ldots$ ile göstereceğiz. $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ için $0 \neq \det A = ad - bc$ olduğundan, Tanım 7.3.1'in koşulu sağlanır ve biz oradaki f fonksiyonunu şimdi T_A ile göstereceğiz. Bu gösterim bazı hesaplamalarda kolaylık sağlar. Basit bir hesaplamayla $\mathrm{I}_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ birim matris olmak üzere, her $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ için

$$T_{A \circ B} = T_A \circ T_B, \ T_{A^{-1}} \circ T_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty} \ \text{ ve} \tag{7.28}$$

$$T_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty} \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}^* \ (A = \alpha \mathrm{I}_2) \tag{7.29}$$

olduğu görülür. Buradan Möbius dönüşümlerinin Möb kümesinin $\circ$ işlemine göre bir grup olduğu kolayca görülür. Diğer yandan

$$\Phi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \text{Möb}, \quad A \mapsto T_A$$

dönüşümü bir grup yapı dönüşümüdür. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ olmak üzere Not 7.3.2'de $(T_A)^{-1} = T_B$ olduğunu gördük. Diğer yandan, basit bir hesaplamayla $A \circ B = \det A \cdot \mathrm{I}_2$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $B = A^{-1}$ olması için gerek ve yeter koşul $\det A = 1$ olmasıdır. Φ dönüşümüne ve Möb grubuna ilişkin bazı cebirsel gerçekleri problemlere taşıyacağız.

Bazı özel Möbius dönüşümleri şunlardır: $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z \mapsto z + a$ *ötelemeleri*, $a \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $z \mapsto az$ *dönsıkgerleri* ve $z \mapsto \frac{1}{z}$ **terslemesi**. Bu terslemeyi KA I Kısım 3.6'da χ ile göstermiştik, dd. $\chi(z) = \frac{1}{z}$. Şimdi bu dönüşümlerin Möb'ün bir üreten sistemi olduğunu kanıtlayacağız.

Önerme 7.3.3. *Her $T \in$ Möb dönüşümü ötelemeler, dönsıkgerler ve terslemenin bileşimi olarak yazılabilir.*

Kanıt. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olsun. $c \neq 0$ için $T(z) = \frac{bc-ad}{c^2(z+d/c)} + \frac{a}{c}$.

1. $c = 0$ ise, $T_1(z) = \frac{a}{d}z$ ve $T_2(z) = z + \frac{b}{d}$ olmak üzere $T = T_2 \circ T_1$.

2. $c \neq 0$ ise, $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $T_2(z) = \chi(z) = 1/z$, $T_3(z) = \frac{-\det A}{c^2} z$ ve $T_4(z) = z + \frac{a}{c}$ olmak üzere $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$. □

Düzlemdeki tüm çember ve doğruların denklemleri

$$az\overline{z}+bz+\overline{bz}+c=0,\ \ a,c\in\mathbb{R},\ ac<|b|^2 \tag{7.30}$$

ile verilmiştir. Bu denklem $a\neq 0$ için merkezi $-\frac{\overline{b}}{a}$ ve yarıçapı $\frac{1}{a^2}(|b|^2-ac)$ olan

$$\left|z+\frac{\overline{b}}{a}\right|^2=\frac{1}{a^2}(|b|^2-ac)$$

çemberinin denklemine denktir. (7.30) denklemi $a=0$ için

$$2\operatorname{Re}b\cdot x-2\operatorname{Im}b\cdot y+c=0 \tag{7.31}$$

doğru denkleminden başka bir şey değildir.

KA I'de, $l\subset\mathbb{C}$ bir doğru olmak üzere $l_\infty:=l\cup\{\infty\}$ kümesine $\mathbb{C}_\infty$**'da bir doğru** demiş ve $\mathbb{C}_\infty$'da bir **Möbius çemberi**nden ise $\mathbb{C}$'de bir çember veya $\mathbb{C}_\infty$'da bir l_∞ doğrusunu anlamıştık. Yine KA I Teorem 3.6.2'de $\pi_N:\mathbb{S}^2\to\mathbb{C}_\infty$ dönüşümünün $\mathbb{S}^2$'nin çemberlerini $\mathbb{C}_\infty$'daki Möbius çemberlerine ve tersine π_N^{-1}'nin ise $\mathbb{C}_\infty$'daki Möbius çemberlerini $\mathbb{S}^2$'nin çemberlerine resmettiğini kanıtlamıştık.

Teorem 7.3.4. *Möbius dönüşümleri Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmeder.*

Kanıt. Ötelemeler ve dönsıkger dönüşümleri doğruları doğrulara ve çemberleri çemberlere, dolayısıyla Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmeder. Bu geometrik argümanı okur yeterli bulmuyorsa, $a\neq 0$ olmak üzere $w=az+b$'den çekilen $z=\frac{w-b}{a}$'yi (7.30)'da yerine koyarak savlarımızın analitik yanıtına ulaşır. Önerme 7.3.3'ten dolayı, terslemenin Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmettiğini göstermek yeterlidir.

Bunu aslında KA I Sonuç 3.6.4'te kanıtlamıştık. Şöyle de görebiliriz. (7.30) denkleminde z yerine $1/w$ yazarsak

$$cw\overline{w}+\overline{b}w+\overline{\overline{b}w}+a=0,\ a,c\in\mathbb{R},\ \ ac<\left|\overline{b}\right|^2 \tag{7.32}$$

denklemini elde ederiz. Bu da (7.30) tipinde bir denklemdir ve $c\neq 0$ için bir çemberin $c=0$ için bir doğrunun denklemidir. □

Her ne kadar ötelemeler ve dönsıkgerler doğruları doğrulara ve çemberleri çemberlere götürse de aynı şey χ terslemesi için geçerli değildir. (7.30), (7.31) ve (7.32) denklemlerinde şunları okuruz:

(i) (7.30) orijinden geçmeyen bir çember tanımlıyorsa, dd. $a\neq 0, c\neq 0$ ise, χ bunu yine orijinden geçmeyen bir çembere resmeder.

(ii) (7.30) orijinden geçen bir çember tanımlıyorsa, dd. $a\neq 0, c=0$ ise, χ bunu orijinden geçmeyen bir doğruya resmeder.

(iii) (7.30) orijinden geçmeyen bir doğru tanımlıyorsa, dd. $a = 0, c \neq 0$ ise, χ bunu orijinden geçen bir çembere resmeder.

(iv) (7.30) orijinden geçen bir doğru tanımlıyorsa, dd. $a = 0, c = 0$ ise, χ bunu orijinden geçen bir doğruya resmeder.

Teorem 7.3.5. *Eğer $T \in$ Möb özdeşlik dönüşümü değilse en az bir en fazla iki sabit noktası vardır.*

Sonuç 7.3.6. $S, T \in$ Möb *ve* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ *üç farklı nokta olmak üzere* $i = 1, 2, 3$ *için* $S(z_i) = T(z_i)$ *ise,* $S = T$.

Kanıt. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olsun. $c = 0$ ise, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere $T(z) = \alpha z + \beta$ olarak yazılabilir. $\alpha = 1$ ise $T \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty}$ olduğundan, $\beta \neq 0$ olur ve bu durumda $z = T(z) = z + \beta$ denkleminin tek çözümü ∞'dır. $\alpha \neq 1$ içinse $z = T(z)$'nin çözümleri ∞ ve $z = \beta/(1 - \alpha)$'dır.

$c \neq 0$ içinse

$$z = T(z) \iff z = \frac{az + b}{cz + d} \iff cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

olduğundan, T'nin en az bir en fazla iki sabit noktası vardır.

Sonucun kanıtı: Üç farklı $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ noktalarında $S(z_i) = T(z_i)$ ise, $S \circ T^{-1}$Möbius dönüşünün üç farklı sabit noktası olacağından, teoremimizden $S \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty}$, dolayısıyla $S = T$ olur. □

$T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ise, T_A'nın tanımında a, b, c, d gibi dört parametrenin olduğu, dolayısıyla T_A'yı belirleyebilmek için en az dört değerinin bilinmesi gerektiği düşünülebilir. Ancak $\det A \neq 0$ olduğundan a ve c'nin ikisi birden sıfır olamaz! Pay ve paydayı bunlardan sıfır olmayan birine böldüğümüzde T_A değişmez ve $T_A(z) = \frac{z+\beta}{\gamma z+\delta}$ veya $T_A(z) = \frac{\alpha z+\beta}{z+\delta}$ gibi üç parametreli bir ifadeye ulaşırız. Şimdi bir Möbius dönüşümünün üç farklı noktadaki değerleriyle belirlenebileceğini bekleyebiliriz.

Not 7.3.7. Altkısım 6.7.3'te $T_\Omega = \mathbb{C}/\Omega$ toruslarıyla tanıştık ve Örnek 8.5.15 (5)'te T_Ω'da doğal bir kompleks yapı tanımlayacağız. T_Ω torusları, $a \notin \Omega$ olmak üzere $z \mapsto z + a$ ötelemelerinden kaynaklanan sabit noktası olmayan otomorfizmalara sahiptirler. Dolayısıyla herhangi bir topolojik bilgiye sahip olmadan teorem 7.3.5 ve $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}_\infty$ =Möb'ten (bkz. (7.4.3)) şunu söyleyebiliriz: $\mathbb{C}_\infty$ *ve* T_Ω *konform denk değillerdir.*

Şimdi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ üç farklı nokta olsun. $\alpha \in \mathbb{C}^*$ için

$$T(z) := \alpha \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

ile $T(z_1) = 0$ ve $T(z_3) = \infty$ olan bir Möbius dönüşümü tanımlanır. Ayrıca $T(z_2) = 1$ olmasını istiyorsak $T(z_2) = 1$ denkleminden $\alpha = (z_2 - z_3)/(z_2 - z_1)$, ve dolayısıyla

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

olur. $T(z)$'nin değeri z, z_1, z_2, z_3 (sıralama önemli) sayılarının **çiftoran** adını alır ve biz onu $[z, z_1, z_2, z_3]$ ile göstereceğiz, dd.

$$[z, z_1, z_2, z_3] := \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \tag{7.33}$$

Bu gösterimle $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$ dönüşümü, $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ noktalarını sırasıyla $0, 1, \infty$ noktalarına gönderen tek olarak belirli Möbius dönüşümüdür.

Not 7.3.8. Çiftoranın tanımında bir uzlaşma yoktur. En yaygın olanı Ahlfors'un da kullandığı

$$[z, z_1, z_2, z_3]_A := \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

tanımıdır. $[z, z_1, z_2, z_3]_A$ sayısı, $z_1 \mapsto 1, z_2 \mapsto 0$ ve $z_3 \mapsto \infty$ koşulunu sağlayan, tek olarak belirli Möbius dönüşümünün z'deki değeridir. Bu nedenle $[z, z_1, z_2, z_3]_A = [z, z_2, z_1, z_3]$. Bunlardan herhangi biri Möbius dönüşümleri altında değişmezse diğeri de değişmez, biri bir gerçel sayı ise diğeri de bir gerçel sayıdır vs... Bu nedenle çiftoranın farklı seçimleri teoremlerimizi özünde etkilemez.

Teorem 7.3.9. *Üç farklı $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ noktası verildiğinde $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$ ve $z_3 \mapsto \infty$ koşullarını sağlayan tek olarak belirli bir T Möbius dönüşümü vardır.*

Kanıt. Teklik sonuç 7.3.6'dan aşikar. Varlığı gösterelim: z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ ise, $T(z) := [z, z_1, z_2, z_3]$ (7.33) ile verilmiştir, dd.

$$T(z) = [z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \tag{7.34}$$

Herhangi bir $z_i = \infty$ ise, aranan fonksiyon (7.34)'te $z_i \to \infty$ limitine geçerek elde edilir. Örneğin

$$T(z) = [z, \infty, z_2, z_3] = \lim_{z_1 \to \infty} \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \lim_{z_1 \to \infty} \frac{\frac{z}{z_1} - 1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{\frac{z_2}{z_1} - 1}$$

$$T(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} \tag{7.35}$$

elde edilir. Benzer hesaplamalarla

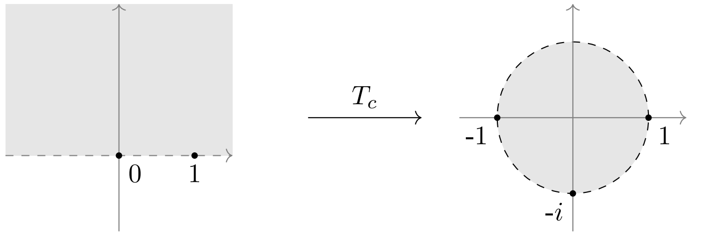
$$T(z) = [z, z_1, \infty, z_3] = \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad \text{ve} \quad T(z) = [z, z_1, z_2, \infty] = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{7.36}$$

□

Sonuç 7.3.10. *$z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ noktaları $i \neq j$ için $z_i \neq z_j$ ve $w_i \neq w_j$ olacak biçimde verildiğinde $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$ koşullarını sağlayan tek olarak belirli bir Möbius dönüşümü vardır ve $w = T(z)$ olmak üzere bu fonksiyon*

$$[T(z), w_1, w_2, w_3] = [w, w_1, w_2, w_3] = [z, z_1, z_2, z_3] \tag{7.37}$$

denkleminden çekilir.



Şekil 7.9: Cayley dönüşümü.

Kanıt. $T_1(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$, $T_2(z) = [z, w_1, w_2, w_3]$ ve $T := T_2^{-1} \circ T_1$ olsun. İki Möbius dönüşümünün bileşimi olarak T bir Möbius dönüşümüdür ve $1 \le i \le 3$ için $T(z_i) = w_i$ sağlanır. Teklik 7.3.6'dan çıkar. $T := T_2^{-1} \circ T_1$'den $T_2(T(z)) = T_1(z)$ dolayısıyla (7.37) sağlanır. □

Sonuç 7.3.11. *çiftoran Möbius dönüşümlerine göre bir değişmezdir, dd. T bir Möbius dönüşümü, $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ ve z_1, z_2, z_3 noktaları birbirlerinden farklı iseler*

$$[z, z_1, z_2, z_3] = [T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)]. \tag{7.38}$$

Kanıt. (7.37)'de w_i yerine $T(z_i)$ yazınız. □

z-düzleminde bir C Möbius çemberi ve üzerinde üç farklı z_1, z_2, z_3 noktası verilsin. C bir sıradan çember ve içi D dairesi ise, $\mathbb{C}_\infty$'u $D \sqcup C \sqcup \big(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}\big)$ olarak parçalar. Eğer C bir l_∞ doğrusu ise, $\mathbb{C}_\infty$'u $\mathbb{C}$'de ayrık iki H_l ve H_r yarıdüzlemleriyle $\mathbb{C}_\infty = H_l \sqcup l_\infty \sqcup H_r$ olarak parçalar. C yolunda basit kapalı bir γ ile $z_1 \prec z_2 \prec z_3$ olacak biçimde gezinelim. Şimdi w- kapalı düzleminde herhangi bir K Möbius çemberi ve K'de birbirinden farklı w_1, w_2, w_3 noktaları verilsin. $T(z_i) = w_i$ koşulunu sağlayan bir tek Möbius dönüşümü vardır. Bir yandan w_1, w_2, w_3 noktalarından geçen bir tek Möbius çemberi vardır, diğer yandan Möbius dönüşümleri Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmeder. Dolayısıyla $K = T(C)$ ve $T \circ \gamma$ basit kapalı gezisi K'yi $w_1 \prec w_2 \prec w_3$ olacak biçimde turlar. T bir konform dönüşüm olduğundan, γ'nın solunda kalanları $T \circ \gamma$'nın soluna, γ'nın sağında kalanları $T \circ \gamma$'nın sağına resmeder. Bu basit irdelemelerden görüyoruz ki herhangi bir sıradan çemberin içi herhangi bir çemberin içine, dışına veya herhangi bir yarıdüzleme konform resmedilebilir.

Örnek 7.3.12. (1) $\mathbb{H}$ üst yarıdüzlemini $\mathbb{D}$ birim dairesine bir Möbius dönüşümü ile bikonform resmetmek istiyoruz. Bu tür Möbius dönüşümleri sayılamaz çokluktadır. Biz $l_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Möbius çemberi üzerinde $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ ve $z_3 = \infty$ noktalarını seçiyoruz. Bu seçimin belirlediği yöne göre $\mathbb{H}$ yarıdüzlemi sağda kalır.

$\mathbb{S}$ çemberi üzerinde birbirinden farklı w_1, w_2, w_3 noktalarını öyle seçelim ki $\mathbb{D}$ sağda kalsın. Biz $w_1 = -1$, $w_2 = -i$ ve $w_3 = 1$ olarak seçiyoruz. Bu durumda aranan çözüm (7.37) ile $[w, -1, -i, 1] = [z, 0, 1, \infty]$ denkleminden elde edilir. Dolayısıyla Teorem 7.3.9 ile

$$\frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-i-1}{-i+1} = \frac{z-0}{1-0} \Longrightarrow w = T^+(z) = \frac{z-i}{z+i}. \tag{7.39}$$

(7.39) ile verilen T^+ Möbius dönüşümüne **Cayley dönüşümü** denir.

Bu fonksiyona elbette $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = T_A(z)$, $\det A \neq 0$ ifadesinden de yola çıkarak ulaşabiliriz. $T(\infty) = 1$ olmasını istediğimizden $a = c \neq 0$ olmak zorundadır. Pay ve paydayı a^{-1} ile çarparsak $T(z) = \frac{z+\alpha}{z+\beta}$ tipinde olmalıdır. $-1 = T(0) = \frac{\alpha}{\beta}$'dan $\alpha = -\beta$ ve son olarak $-i = T(1) = \frac{1-\beta}{1+\beta}$'dan $\beta = i$ ve yine $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ olur.

(2) $T(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ Möbius dönüşümü $\partial\mathbb{D}$ üzerindeki $-1, -i, 1$ noktalarını sırasıyla $\mathbb{R}_\infty$ üzerindeki $0, 1, \infty$ noktalara resmeder. Noktaların bu dizilişleri $\partial\mathbb{D}$ ve $\mathbb{R}_\infty$'da birer yön belirler ve T yön koruduğundan, bu yönlere göre $\partial\mathbb{D}$'nin solunu, yani $\mathbb{D}$'yi, $\mathbb{R}_\infty$'un soluna, yani $\mathbb{H}$'ye resmeder. Veya şöyle de bu sonuca varabiliriz. Biholomorf T dönüşümü $\mathbb{D}$'yi ya $\mathbb{H}$'ye ya da $\mathbb{H}^-$'ye resmeder. Hangisine resmettiğini bulmak için bir $a \in \mathbb{D}$ için $T(a)$'nın nereye düştüğüne bakmak yeterlidir. Şimdi $0 \in \mathbb{D}$ ve $T(0) = i \in \mathbb{H}$ olduğu için $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ olur.

Eğer elimizde bir $q : \mathbb{H} \to U \subset \mathbb{C}$ biholomorf dönüşümümüz varsa, elbette $q \circ T : \mathbb{D} \to U$ da biholomorf olacaktır. Örneğin okur $q(z) := z^2$ olarak tanımlanan $q : \mathbb{H} \to \mathbb{C}_0$ dönüşümünün biholomorf olduğunu kolayca görür. Bu durumda iki biholomorf dönüşümün bileşimi olarak $f := q \circ T|\mathbb{D} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_0$ dönüşümü biholomorftur. f'nin açık ifadesi

$$\forall z \in \mathbb{D}:\ f(z) = \left(i\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2.$$

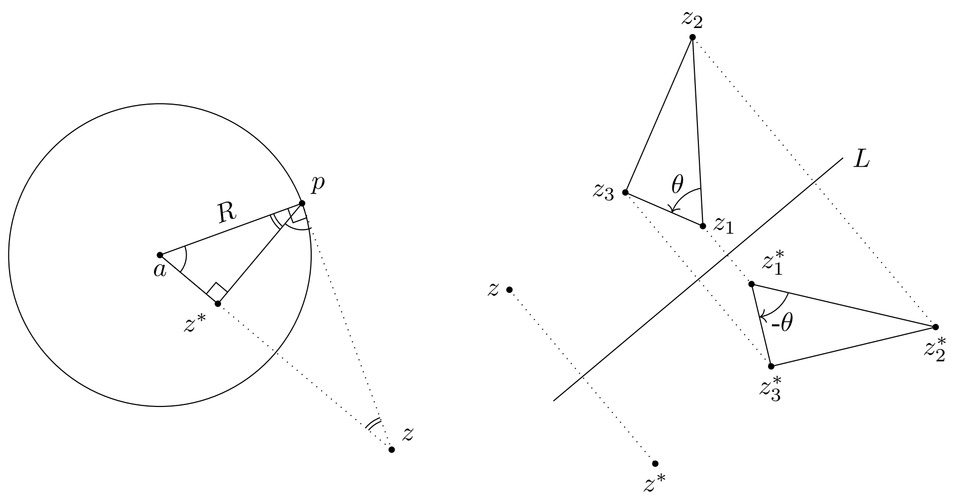
Önerme 7.3.13. *$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ birbirinden farklı ve C bunlardan geçen Möbius çemberi olmak üzere herhangi bir $z \in \mathbb{C}_\infty$ noktasının C'de olması için gerek ve yeter koşul $[z, z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ olmasıdır.*

Kanıt. z_1, z_2, z_3 noktalarından geçen tek olarak belirli Möbius çemberimiz C olsun. $T(z) := [z, z_1, z_2, z_3]$ bir Möbius dönüşümüdür ve $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$, $z_3 \mapsto \infty$ koşullarını sağlar. T, Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmettiği için, $T(C) = \mathbb{R}_\infty$ ve $T^{-1}(\mathbb{R}_\infty) = C$. Dolayısıyla herhangi bir $z \in \mathbb{C}_\infty$ için $z \in C \iff T(z) \in \mathbb{R}_\infty$. □

$C \subset \mathbb{C}$, düzlemimizde a merkezli R yarıçaplı bir çember olsun. $z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$ için az ışını üzerindeki

$$|z-a|\,|z^*-a| = R^2 \tag{7.40}$$

koşulunu sağlayan tek olarak belirli z^* noktasına z'nin C **çemberine göre yansıması** denir ve $\Theta_C(z) := z^*$ yazılır. Elbette z^*'ın C'ye göre yansıması ise z, dd. $\Theta_C(z^*) = z$'dir. Bu nedenle z ve z^* noktaları C çemberine göre birbirinin yansıması veya **simetriği**dir denir. Ayrıca $\Theta_C(\infty) := a$ ve $\Theta_C(a) := \infty$ olarak tanımlayarak $\Theta_C : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümüne ulaşırız. Böylece $\Theta_C \circ \Theta_C = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty}$. Bu tanımdan, her $z \in C$ için $\Theta_C(z) = z$ olduğu kolayca görülür. Burada az ışının z'den geçip C'yi dik kesen tek doğru olduğunu belirtelim. z^*'ın geometrik bilgilerle nasıl bulunacağı Şekil 7.10'da sağda gösterilmiştir. p noktası a noktasından C'ye çizilen teğetlerden birinin C'yi kestiği nokta olmak üzere $\Delta(a, z, p)$ ve $\Delta(a, p, z^*)$ üçgenlerinin benzerliğinden hemen (7.40) eşitliğine varılır.



Şekil 7.10: Yansımanın geometrik tanımı.

Düzlemde bir C çemberi yerine bir l doğrusu verildiğinde bir $z \in \mathbb{C}$ noktasının l **doğrusuna göre** z^* **simetriğinden**, eş anlamlı olarak l'ye göre yansımasından tam da l'ye göre ayna yansıması anlaşılır. z^* noktası z'den l doğrusuna dik doğru üzerinde ve z, z^* noktaları l'ye eşit uzaklıktadırlar. ∞ noktasının l doğrusuna göre simetriği yine ∞ olarak tanımlanır; aslında şimdi C'nin yerini gerçekte l_∞ aldığından, her $z \in l_\infty$'un l_∞'a göre simetriği elbette z olmalıdır. Yine $\Theta_l(z) = z^*$ yazarsak $\Theta_l(z^*) = z$ ve $\Theta_l \circ \Theta_l = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty}$ olur. Θ_l dönüşümünün sabit noktaları l_∞ Möbius çemberidir. Θ_C ve Θ_l dönüşümlerinin her ikisi de antikonformdur (bkz. (7.42) ve (7.43)). Θ_l yansıması Şekil 7.10'da sağda gösterilmiştir. Yansımalar, tümüyle geometrik araçlarla kanıtlanan, çok ilginç özelliklere sahiptirler. Bunlar analitik araçlarla da kanıtlanır. Önce yansımayı analitik olarak ifade edelim

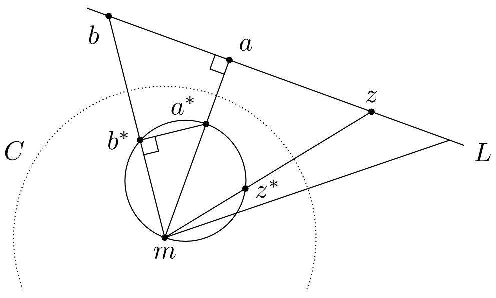
C, merkezi a olan bir çember, $z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$ ve $\Theta_C(z) = z^*$ olmak üzere $z - a = re^{i\varphi}$ ise, tanım gereği $z^* - a = \frac{R^2}{r}e^{i\varphi}$, dolayısıyla

$$(z^* - a)(\overline{z} - \overline{a}) = (z^* - a)\overline{(z - a)} = R^2 \tag{7.41}$$

olur.

Tersine bize $a, z, z^* \in \mathbb{C}$ olmak üzere (7.41) eşitliği verilmişse, bir yandan $|z^* - a| \cdot |z - a| = R^2$, diğer yandan $z - a = re^{i\varphi}$ ise $z^* - a = \frac{R^2}{r}e^{i\varphi}$ olmak zorundadır. Dolayısıyla z^* noktası az ışını üzerindedir. Dolayısıyla C düzlemde bir çemberse, (7.41) eşitliğinden

$$\Theta_C(z) = \begin{cases} \frac{a\overline{z} + R^2 - |a|^2}{\overline{z} - \overline{a}}, & z \in \mathbb{C}\backslash\{a\} \\ a, & z = \infty \\ \infty, & z = a. \end{cases} \tag{7.42}$$



Şekil 7.11

Eğer l doğrusu $bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$, $b \neq 0, c \in \mathbb{R}$ ile verilmişse

$$\Theta_l(z) = \begin{cases} (-\overline{b}/b)\overline{z} - (c/b), & z \in \mathbb{C} \\ \infty, & z = \infty \end{cases} \tag{7.43}$$

olduğu kolayca görülür. (7.42) ve (7.43) eşitliklerinden herhangi bir C Möbius çemberine göre Θ_C yansımasının, bir $A \in GL(2, \mathbb{C})$ ile

$$z^* = \Theta_C(z) = T_A(\overline{\mathrm{Id}}(z)) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} = \overline{\mathrm{Id}}(T_{\overline{A}}(z)) \tag{7.44}$$

tipinde bir dönüşüm olduğu görülür. Dolayısıyla yansımalarımız antiholomorfturlar.

Önerme 7.3.14. *C herhangi bir Möbius çemberi olmak üzere $\Theta_C : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ yansıması Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine dönüştüren antikonform bir dönüşümdür.*

Kanıt. $\overline{\infty} := \infty$ olmak üzere $\overline{\mathrm{Id}}$, x-eksenine göre bir yansıma olduğundan, Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmeden antikonform bir dönüşümdür. Konform bir dönüşümün bir antikonform dönüşümle bileşimi antikonform olduğundan sav, (7.44) eşitliğinden çıkar. □

Geometri sevenler için m merkezli bir C çemberine göre onun dışındaki bir L doğrusunun yansıması şekil 7.11'de gösterilmiştir.

Her bir Θ_C yansıması, S, T Möbius dönüşümleri ile $\Theta_C = \overline{\mathrm{Id}} \circ S$ ve $\Theta_C = T \circ \overline{\mathrm{Id}}$ tipinde bir dönüşüm olduğundan, $S_1, \ldots, S_n$'lerin her biri bir Möbius dönüşümü veya bir yansıma olmak üzere, bunlar arasındaki yansımaların sayısı *çift* ise, $S_1 \circ \cdots \circ S_n$ bir Möbius dönüşümüdür.

Teorem 7.3.15 (Simetri Teoremi)**.** *C herhangi bir Möbius çemberi ve T herhangi bir Möbius dönüşümü olmak üzere*

$$T \circ \Theta_C = \Theta_{T(C)} \circ T. \tag{7.45}$$

Özellikle $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ noktaları C'ye göre birbirinin yansıması ise, $T(z)$, $T(z^*)$ noktaları $T(C)$'ye göre birbirinin yansımasıdır.

Kanıt. (7.45) denklemi $f := T^{-1} \circ \left(\Theta_{T(C)}\right)^{-1} \circ T \circ \Theta_C = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty}$denklemine denktir. $\left(\Theta_{T(C)}\right)^{-1} = \Theta_{T(C)}$ olduğundan $f := T^{-1} \circ \Theta_{T(C)} \circ T \circ \Theta_C$ ve burada çift sayıda yansıma bulunduğundan f bir Möbius dönüşümüdür ve $f|C \equiv \mathrm{Id}_C$ olduğundan, Sonuç 7.3.6 ile $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty}$ olur. Dolayısıyla (7.45) sağlanır.

Şimdi $z \in \mathbb{C}_\infty$ ve $z^* = \Theta_C(z)$ olsun. (7.45) denkleminden

$$\Theta_{T(C)}(T(z)) = T(\Theta_C(z)) = T(z^*)$$

elde ederiz ki bu da $T(z)$'nin $T(C)$'ye göre simetriği $T(z^*)$ demektir. □

Sonuç 7.3.16. *$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ birbirinden farklı üç nokta ve C ise bu noktalardan geçen tek olarak belirli Möbius çemberi olmak üzere, her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için*

$$[\Theta_C(z), z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}. \tag{7.46}$$

Kanıt. Tanım gereği, her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$ Möbius dönüşümü z_1, z_2, z_3 noktalarını sırasıyla $0, 1, \infty$ noktalarına resmeder. Dolayısıyla $T(C) = \mathbb{R}_\infty$ olur. Ayrıca $T(\Theta_C(z)) = [\Theta_C(z), z_1, z_2, z_3]$. Eğer $z \in C$ ise, $\Theta_C(z) = z$ ve $T(C) = \mathbb{R}_\infty$ olduğundan, (7.46) sağlanır. Eğer $z \in \mathbb{C}_\infty \backslash C$ ise, Teorem 7.3.15'ten $T(z)$ ve $T(\Theta_C(z))$ noktaları $T(C) = \mathbb{R}_\infty$'ye göre simetrik olmak zorundadırlar, dd. $\overline{T(z)} = T(\Theta_C(z))$ olur. Bu ise (7.46) demektir. □

KA I Altkısım 3.5.5'te kanıtlanan Yansıma Teoremleri, $\mathbb{R}_\infty$'a göre veya herhangi bir C çemberine göre Θ_C yansımalarına geçtiğimizde de korunurlar. $C \subset \mathbb{C}_\infty$ bir Möbius çemberi ve $B \subset \mathbb{C}_\infty$ olmak üzere, her $z \in B$ için $\Theta_C(z) \in B$ ise, B **bölgesi C'ye göre simetriktir** diyelim. $\mathbb{C}_\infty \backslash C$ boştan farklı iki ayrık G_1, G_2 bölgesinin birleşimi olduğundan, B bölgesi C'ye göre simetrikse $B \cap C \neq \emptyset$, aksi halde $B = (G_1 \cap B) \sqcup (G_2 \cap B)$ ile B'yi boştan farklı iki açık kümeye parçalamış olurduk. B bölgesi C'ye göre simetrikse $B \backslash C$ birbirinin simetriği olan, B^+ ve B^- ile göstereceğimiz iki ayrık bölgenin birleşimidir. KA I Altkısım 3.5.5'te kanıtlanan, $\mathbb{R}_\infty$'a göre yansımanın devrede olduğu Yansıma Teoremleri, oldukları gibi herhangi bir C Möbius çemberine göre yansımanın söz konusu olduğu duruma aktarılırlar. Bunlar aşağıdaki şekli alırlar; bunların yalnızca ilkinin kanıtını aktarmakla yetineceğiz:

Teorem 7.3.17. *C bir Möbius çemberi ve $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi C'ye göre simetrik olsun. $g \in \mathcal{H}(B)$ ve her $z \in B \cap C$ için $g(z) \in \mathbb{R}$ ise, her $z \in B$ için $g(\Theta_C(z)) = \overline{g(z)}$.*

Kanıt. C Möbius çemberini $\mathbb{R}_\infty$ çemberine, $T(B^+) \subset \mathbb{H}$ olacak biçimde resmeden bir T Möbius dönüşümü alalım. T dönüşümü B bölgesini bir G bölgesine resmeder. T dönüşümü simetrik noktaları simetrik noktalara resmettiğinden, G bölgesi $\mathbb{R}_\infty$'a göre simetriktir. Her $z \in B$ için $w := T(z)$ olsun. Simetrik noktalar simetrik noktalara resmedildiğinden, $T(\Theta_C(z)) = \overline{T(z)} = \overline{w}$ olur. T biholomorf olduğundan, $f := g \circ T^{-1} \in \mathcal{H}(G)$ ve her $x \in G \cap \mathbb{R}$ için $f(x) \in \mathbb{R}$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu KA I Teorem 3.5.24'ün koşullarını sağlar. Dolayısıyla, her $w \in G$ için $f(\overline{w}) = \overline{f(w)}$ olur; bu ise $w := T(z)$ ile $g(\Theta_C(z)) = \overline{g(z)}$ demektir. □

Teorem 7.3.18. *B bölgesi C Möbius çemberine göre simetrik, B^+ ise $B\backslash C$'nin bağlantılı bileşenlerinden biri ve $\sigma := B \cap C$ olsun. σ'da reel değerler alan her $f^+ \in \mathcal{H}(B^+) \cap \mathcal{C}(B^+ \cup \sigma)$ fonksiyonu B bölgesine holomorf olarak genişletilebilir.*

Artık yansıma tanımını en genel haliyle verebilecek durumdayız.

Tanım 7.3.19. $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge, $C \subset B$ ise bir açık analitik eğri, veya basit kapalı bir analitik eğri olsun. B_1 ve B_2 boştan farklı bölgeler olmak üzere $B = B_1 \sqcup C \sqcup B_2$ ve $\Theta_C : B \to B$ bir biantiholomorf dönüşüm olsun. Eğer ayrıca $\Theta_C(B_1) = B_2$, $\Theta_C(B_2) = B_1$, her $z \in \underline{\gamma}$ için $\Theta_C(z) = z$ ve $\Theta_C \circ \Theta_C = \mathrm{Id}_B$ koşulu sağlanmışsa Θ_C dönüşümüne B'nin C'**ye göre bir yansıma**sı ve B'ye de C'**ye göre simetriktir** denir.

$B = \mathbb{C}_\infty$ ve C bir Möbius çemberi ise, daha önce tanımladığımız Θ_C yansıması bu tanıma göre de bir yansımadır. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi x-eksenine göre simetrik ve $I := B \cap \mathbb{R}$ bir açık aralıksa, $\gamma(t) \equiv t$ olmak üzere $I = \underline{\gamma}$ bir açık analitik eğridir ve $\Theta_I := \overline{\mathrm{Id}}|B$ olmak üzere Θ_I, B'nin I'ya göre bir yansımasıdır. C eğrisine göre yansımalar vardır ve aşağıdaki anlamda tek olarak belirlidir:

Önerme 7.3.20. *C'ye göre simetrik B bölgeleri vardır. $\Theta_C : B \to B$ ve $\Theta'_C : B' \to B'$, C'ye göre iki yansıma ve D de $B \cap B'$'nün C'yi içeren bağlantılı bileşeni ise, $\Theta_C|D = \Theta'_C|D$.*

Kanıt. Şimdi $B \subset \mathbb{C}_\infty$ olsa da değişen bir şey yok, KA I Önsav 3.5.32'de olduğu gibi, $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere I'ya göre simetrik bir G bölgesi, C'yi içeren bir B bölgesi ve bir biholomorf $h : G \to B$ dönüşümü $h(I) = C$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda $\Theta_C := h \circ \overline{\mathrm{Id}} \circ h^{-1}$ (bkz. KA I (3.42) eşitliği) dönüşümü B'de bir yansımadır.

$f := \Theta'_C \circ \Theta_C^{-1} : D \to D$ bir tameşlemedir ve iki antiholomorf dönüşümün birleşimi olarak holomorftur. Diğer yandan her $z \in C$ için $f(z) = z = \mathrm{Id}(z)$ olduğundan, Özdeşlik Teoremi'nden $f = \mathrm{Id}$, dolayısıyla D'de $\Theta_C = \Theta'_C$ olur. □

Şimdi KA Altkısım 3.5.5'teki teoremler olduğu gibi bu son duruma aktarılırlar.

Teorem 7.3.21. *C bir açık analitik eğri veya basit kapalı bir analitik eğri olsun. B bölgesi C'ye göre simetrik ve B_1, B_2 ayrık bölgeler olmak üzere $B := B_1 \sqcup C \sqcup B_2$ olsun. $f : B_1 \cup C \to \mathbb{C}$ sürekli, $f|B_1 \in \mathcal{H}(B_1)$ ve her $x \in C$ için $f(x) \in \mathbb{R}$ ise, f fonksiyonu B bölgesine holomorf genişletilebilir.*

Teorem 7.3.22. *C bir açık analitik eğri veya basit kapalı bir analitik eğri ve $B \subset \mathbb{C}_\infty$ ise C'ye göre simetrik bir bölge olsun. $B \setminus C$'nin bağlantılı bileşenlerinden biri B^+ olsun. Bir $f \in \mathcal{H}(B^+)$ verilsin. Eğer bir C' açık analitik eğri veya basit kapalı bir analitik eğrisi, her $a \in B \cap C$ için $\exists \lim_{z \in B^+, z \to a} f(z) \in C'$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, f fonksiyonu B bölgesine, C'ye göre simetrik noktaları C''ye göre simetrik noktalara resmedecek biçimde holomorf genişletilebilir. Başka anlatımla $\exists g \in \mathcal{H}(B)$ öyle ki $g|B^+ = f$ ve her $z, z^* \in B$ için $z^* = \Theta_C(z)$ ise, $g(z^*) = \Theta_{C'}(g(z))$.*

Bazı Biholomorf Dönüşümler

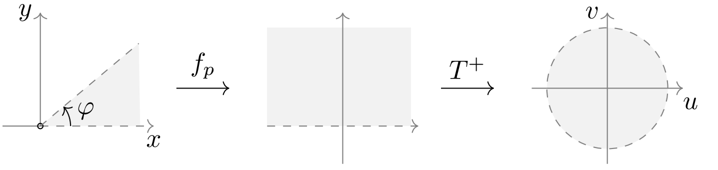
İleride Riemann Dönüşüm Teoremi 7.6.4 ile, her basit bağlantılı $\emptyset \neq B \subsetneq \mathbb{C}$ bölgesinin $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmedilebileceğini göreceğiz. Dolayısıyla bu tipten iki basit bağlantılı B_1, B_2 bölgeleri verildiğinde bunlar birbirine biholomorf resmedilebilir. Gerçekten de $f_k : B_k \to \mathbb{D}$ biholomorfsa $f_2^{-1} \circ f_1 : B_1 \to B_2$ biholomorftur.

Aşağıdaki incelemelerde sınırsız bölgeler söz konusu olduğunda bu bölgeyi $\mathbb{C}_\infty$'da, eş anlamlı olarak $\mathbb{S}^2$'de düşünmek epeyce kolaylık sağlar. Örneğin $\mathbb{C}^+$ yarıdüzlemi için $\partial_\infty \mathbb{C}^+ = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ bir Möbius çemberidir. Dolayısıyla T herhangi bir Möbius dönüşümü ise, $T(\partial_\infty \mathbb{C}^+)$ ya bir l_∞ doğrusu ya da sıradan bir C çemberidir. Dolayısıyla $T(\mathbb{C}^+)$ ya bir yarıdüzlem, ya da C'nin içi veya dışıdır.

(a) KA I'de düzlemde birbirine koşut iki doğru arasında kalan basit bağlantılı bölgeye bir şerit demiştik. Ayrıca $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $S^{a,b} = \{z \,|\, a < \operatorname{Im} z < b\}$ yatay ve $S_{a,b} = \{z \,|\, a < \operatorname{Re} z < b\}$ dikey şeritlerini tanımlamıştık. Düzlemdeki herhangi bir S şeridi uygun bir öteleme ve onu izleyen uygun bir döndürmeyle herhangi bir yatay veya dikey şerite bir tameşlemeyle resmedilebilir. Ötelemeler ve döndürmeler biholomorf olduklarından, demek ki herhangi bir S şeridi herhangi bir yatay veya dikey şerite biholomorf resmedilebilir.

Düzlemdeki herhangi bir doğrunun sağındaki ve solundaki açık yarıdüzlemler basit bağlantılıdır; özellikle $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{C}^+$ yarıdüzlemlerimiz basit bağlantılı bölgelerdir. Herhangi bir $\mathbb{Y}$ açık yarıdüzlemi uygun bir öteleme ve onu izleyen uygun bir döndürmeyle $\mathbb{H}, \mathbb{H}^-, \mathbb{C}^+$ ve $\mathbb{C}^-$ yarıdüzlemlerinden herhangi birine biholomorf resmedilebilir. Diğer yandan

$$T^+(z) = \frac{z-i}{z+i}, \; T^-(z) := \frac{z+i}{z-i}, \; T_+(z) := \frac{z-1}{z+1}, \; T_-(z) := \frac{z+1}{z-1} \qquad (7.47)$$



Şekil 7.12

Möbius dönüşümleri sırasıyla $\mathbb{H}, \mathbb{H}^-, \mathbb{C}^+$ ve $\mathbb{C}^-$ yarıdüzlemlerini biholomorf olarak $\mathbb{D}$'ye resmederler, dd.

$$\mathbb{H} \xrightarrow{T^+} \mathbb{D},\ \ \mathbb{H}^- \xrightarrow{T^-} \mathbb{D},\ \ \mathbb{C}^+ \xrightarrow{T_+} \mathbb{D},\ \ \mathbb{C}^- \xrightarrow{T_-} \mathbb{D}$$

dönüşümleri biholomorftur.

(b) $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$S(a;\varphi_1,\varphi_2) := \{a + re^{it} \,|\, 0 < r < +\infty,\ \varphi_1 < t < \varphi_2\}$$

açık kümesi basit bağlantılıdır. $S(a;\varphi_1,\varphi_2)$ kümesine, $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$ olmak üzere, a **köşeli bir φ-dilimi** diyelim. $a = 0$ ise, $S(a;\varphi_1,\varphi_2)$ yerine yalın olarak $S(\varphi_1,\varphi_2)$ yazacağız. Şimdi $S(a;\varphi_1,\varphi_2)$ ve $S(b;\psi_1,\psi_2)$ herhangi iki φ-dilimi ise, uygun bir öteleme ve onu izleyen uygun bir döndürmeyle $S(a;\varphi_1,\varphi_2)$ dilimi $S(b;\psi_1,\psi_2)$ dilimine biholomorf resmedilebilir. Dolayısıyla, her $S(a;\varphi_1,\varphi_2)$ φ-dilimi $S(0,\varphi)$ dilimine biholomorf resmedilebilir. $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$'da logaritmanın holomorf dalını KA I'de $\log_0$ ile göstermiştik. Her $z \in \mathbb{C}_0$ için $\log_0 z = \ln|z| + i\arg_0 z$, $\arg_0 z \in \mathbf{arg}\, z$ ve $0 < \arg_0 z < 2\pi$. Şimdi $p := \frac{\pi}{\varphi}$ dersek $f_p(z) := e^{p\log_0 z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}_0$'da holomorftur ve $S(0,\varphi)$ dilimini biholomorf $\mathbb{H}$'ye resmeder. f_p fonksiyonu $\mathbf{z}^p$ çok değerli fonksiyonunun $\mathbb{C}_0$'da bir holomorf dalıdır. Böylece

$$f_p : S(0,\varphi) \to \mathbb{H},\ \ (f_p(z) = e^{p\log_0 z} = |z|^p e^{ip\theta},\ \theta = \arg_0 z) \tag{7.48}$$

dönüşümü biholomorftur. $[z^p]_0 := f_p(z)$ dersek

$$T^+ \circ f_p : S(0,\varphi) \to \mathbb{D},\ \ \left(z \mapsto w = \frac{e^{p\log_0 z} - i}{e^{p\log_0 z} + i} = \frac{[z^p]_0 - i}{[z^p]_0 + i}\right) \tag{7.49}$$

biholomorftur (bkz Şekil 7.12). Eğer $0 < \varphi \leq \pi$ ise, üstyarıdüzlemde $\log_0$ ve Log fonksiyonları çakıştığından, (7.49)'da $[z^p]_0$ yerine z^p alabiliriz.

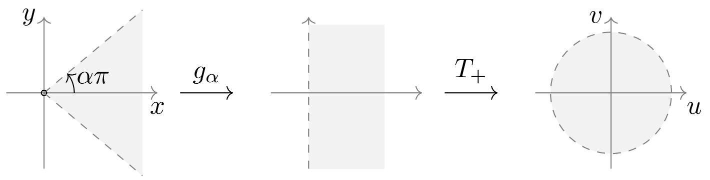
(c) $0 < \alpha \leq 1$ ve $\Delta_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \,|\, -\alpha\pi < \operatorname{Arg} z < \alpha\pi\}$ olmak üzere $\mathbb{C}^+$'da tanımlı $f_\alpha(z) = z^{2\alpha}$ fonksiyonu $\mathbf{z}^{2\alpha}$'nın anadalı olmak üzere $f_\alpha : \mathbb{C}^+ \to \Delta_\alpha$ biholomorftur. Dolayısıyla

$$g_\alpha := f_\alpha^{-1} : \Delta_\alpha \to \mathbb{C}^+,\ \ g_\alpha(z) = z^{\frac{1}{2\alpha}} \tag{7.50}$$

biholomorftur. Dolayısıyla

$$T_+ \circ g_\alpha : \Delta_\alpha \to \mathbb{D}, \quad \left(z \mapsto w = \frac{z^{\frac{1}{2\alpha}} - 1}{z^{\frac{1}{2\alpha}} + 1} \right) \tag{7.51}$$

biholomorftur (bkz Şekil 7.13).



Şekil 7.13

Özellikle $\alpha = 1$ için $\Delta_1 = \mathbb{C}_{-\pi}$ ve $g_1(z) = \sqrt{z}$ olur ve önceden de bildiğimiz gibi $\mathbb{C}_{-\pi} \overset{\sqrt{}}{\to} \mathbb{C}^+$ biholomorftur. Dolayısıyla

$$T_+ \circ \sqrt{} : \mathbb{C}_{-\pi} \to \mathbb{D}, \quad \left(z \mapsto w = \frac{\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z} + 1} \right)$$

biholomorftur.

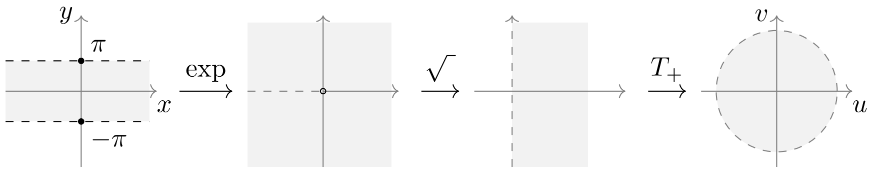
(d) Ayrıca

$$\exp |S^{-\pi,\pi} : S^{-\pi,\pi} \to \mathbb{C}_{-\pi}$$

dönüşümünün biholomorf olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

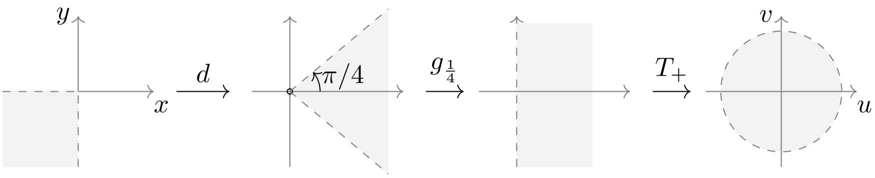
$$T_+ \circ \sqrt{} \circ \exp : S^{-\pi,\pi} \to \mathbb{D}, \quad \left(z \mapsto w = \frac{\sqrt{e^z} - 1}{\sqrt{e^z} + 1} \right) \tag{7.52}$$

biholomorftur (bkz Şekil 7.14).



Şekil 7.14

Bu dönüşümler bize düzlemdeki herhangi bir S şeridini veya herhangi bir dilimi $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmetme olanağını verirler. Örnek oluşturmak üzere eksenlerin düzlemde belirlediği dilimlerden üçüncüsünü $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmeden bir dönüşüm verelim. Üçüncü dilime Q dersek, onu saatin ters yönünde $\frac{3\pi}{4}$ kadar döndürürsek $\Delta_{1/4}$ dilimini elde ederiz. Bu döndürme $d(z) = e^{i\frac{3\pi}{4}} z$



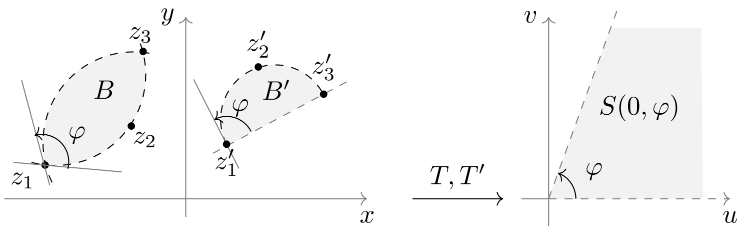
Şekil 7.15

fonksiyonu ile verilmiştir. Dolayısıyla $\alpha = \frac{1}{4}$ olmak üzere (7.51) eşitliğinden, $\frac{1}{2\alpha} = 2$ olduğunu da gözetirsek

$$T_+ \circ g_\alpha \circ d : Q \to \mathbb{D}, \quad \left(z \mapsto w = \frac{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} z\right)^2 - 1}{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} z\right)^2 + 1} \right)$$

biholomorf dönüşümüne ulaşırız (bkz Şekil 7.15).

(e) B ve B' basit bağlantılı bölgeleri, düzlemde birbirini kesen iki Möbius çemberinin belirlediği bölgeler olsunlar (bkz. Şekil 7.16).

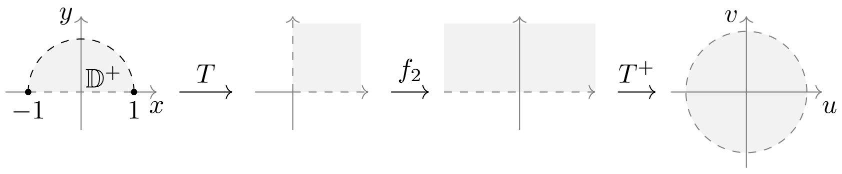


Şekil 7.16

B (benzer biçimde B') bölgesini belirleyen Möbius çemberleri z_1(benzer biçimde z_1') noktasında birbirlerini φ açısı ile kessinler. T ve T' Möbius dönüşümleri, z_1, z_2, z_3 ve z_1', z_2', z_3' noktalarını sırasıyla $0, 1, \infty$ noktalarına resmetsinler. Bu durumda $T : B \to S(0, \varphi)$ ve $T' : B' \to S(0, \varphi)$ dönüşümleri biholomorfturlar; $\mathbb{C}_\infty$'da düşündüğümüzde $S(0, \varphi) \cup \{\infty\}$'un B tipinde bir bölge olduğunu belirtelim. Dolayısıyla (7.49) ile

$$T^+ \circ f_p \circ T : B \to \mathbb{D} \;\; \text{ve} \;\; T^+ \circ f_p \circ T' : B' \to \mathbb{D}$$

dönüşümleri biholomorfturlar. Bir örnek oluşturmak üzere $\mathbb{D}^+ = \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$ üst birim yarım daireyi $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmeden bir dönüşüm verelim (bkz. Şekil 7.17). T Möbius dönüşümü $-1, 0, 1$ noktalarını sırasıyla $0, 1, \infty$ noktalarına resmetsin. $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ olduğunu okur kolayca görür.



Şekil 7.17

T dönüşümü x-eksenini yönünü koruyarak kendisine resmettiğinden, solunda kalan $\mathbb{D}^+$'yı yine soluna resmeder. $\mathbb{D}^+$'yı belirleyen yay ve doğru parçası -1 noktasında birbirini dik kestiklerinden, görüntüleri olan doğru parçaları birbirini 0 notasında dik keserler. Özetle T dönüşümü $\mathbb{D}^+$'yı $S(0, \frac{\pi}{2})$ dilimine biholomorf resmeder. $f_2(z) = z^2$ olduğundan, (7.49) ile

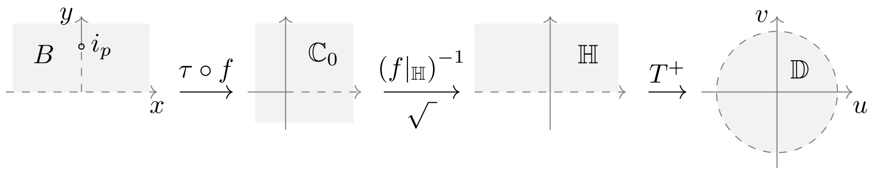
$$T^+ \circ f_2 \circ T : \mathbb{D}^+ \to \mathbb{D} \quad \left(z \mapsto w = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - i}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + i} \right)$$

biholomorf dönüşümünü elde ederiz.

(f) Biri diğerinin içinde ve birbirine bir d noktasında teğet olan iki C_1, C_2 çemberi arsındaki bölgeye B diyelim. $T(d) = \infty$ koşunun sağlayan herhangi bir T Möbius dönüşümü bu çemberleri birbirine koşut $l_{1\infty}, l_{2\infty}$ doğrularına resmeder. Dolayısıyla B'yi bir şerite resmedebiliriz. $T(d) = \infty$ koşunu sağlayan T dönüşümlerinin denklemleri $Tz = \frac{az+b}{z-d}$ ile verilir. a, b parametreleri uygun seçilerek S şeridinin yatay veya dikey olması sağlanabilir.

Devam etmeden önce bir basit gerçeği dile getirmekte yarar vardır. Biz bazı basit B bölgelerini $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmeden f dönüşümleri veriyoruz. Herhangi bir bölge bir h ile bu bölgelerden birine biholomorf resmedilebilirse, elbette bu bölge de $f \circ h$ ile $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmedilir. Örneğin L_a düzlemde başlangıç noktası a olan bir yarıdoğru ise, önce $T(z) = z - a$ ötelemesi ile L_a yarıdoğrusu düzlemde başlangıç noktası 0 olan L_0 yarıdoğrusuna taşınır. Sonra uygun bir $d(z) = e^{i\theta} z$ döndürmesiyle L_0 yarıdoğrusu $(-\infty, 0]$ yarıdoğrusuna taşınır. Böylece $g = d \circ T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorf dönüşümü $\mathbb{C} \setminus L_a$ basit bağlantılı bölgesini $\mathbb{C}_{-\pi}$ basit bağlantılı bölgesine biholomorf resmeder. Ancak biz bir biholomorf $f : \mathbb{C}_{-\pi} \to \mathbb{D}$ dönüşümünü oluşturduk; dolayısıyla $f \circ g : \mathbb{C} \setminus L_a \to \mathbb{D}$ biholomorf bir dönüşümdür. Benzeri irdelemeler verdiğimiz her durum için geçerlidir.

(g) $p > 0$ olmak üzere $B := \mathbb{H} \setminus [0, ip]$ olsun. B basit bağlantılıdır ve $\mathbb{H}$'den y-ekseni boyunca 0'dan ip'ye kadar bir kesik atılarak elde edilmiştir. $f(z) = z^2$ dönüşümü $\mathbb{H}$'de biholomorf olduğundan haydi haydi B'de biholomorftur ve $f(B) = \mathbb{C} \setminus [-p^2, +\infty)$. Öte yandan $T(z) := z + p^2$ biholomorf ötelemesi ile $(T \circ f)(B) = \mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ olur. $f|\mathbb{H} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}_0$ biholomorf olduğundan, $(f|\mathbb{H})^{-1} \circ T \circ f : B \to \mathbb{H}$ biholomorftur.



Şekil 7.18

Dolayısıyla $(f|\mathbb{H})^{-1}$ yerine yalın olarak $\surd$ yazarsak,

$$T^+ \circ (f|\mathbb{H})^{-1} \circ T \circ f : B \to \mathbb{D} \quad \left(z \mapsto w = \frac{\sqrt{z^2+p^2} - i}{\sqrt{z^2+p^2} + i} \right)$$

biholomorftur (bkz. Şekil 7.18). $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log_0 z}$ alınacak!

(h) $[a,b] \subset \mathbb{C}$ herhangi bir kapalı aralık olsun. Bu durumda $\mathbb{C}_\infty \backslash [a,b]$ bölgesi $\mathbb{C}_\infty$'da basit bağlantılıdır. Bu bölge birbirini izleyen uygun öteleme, döndürme ve sıkger ile $B = \mathbb{C}\backslash[-1,1]$ bölgesine biholomorf resmedilir. Şimdi T Möbius dönüşümünü $T(1) = \infty$, $T(0) = -1$ ve $T(-1) = 0$ olacak biçimde seçelim. $Tz = \frac{z+1}{z-1}$ olduğu kolayca görülür. T dönüşümü $[-1,1]$ kapalı aralığını $(-\infty, 0] \cup \{\infty\}$'a resmeder; dolayısıyla T dönüşümü B bölgesini biholomorf $\mathbb{C}_{-\pi}$'ye resmeder. Dolayısıyla

$$T_+ \circ \surd \circ T : \mathbb{C}\backslash[-1,1] \to \mathbb{D} \quad \left(z \mapsto w = \frac{\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} - 1}{\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} + 1} \right) \tag{7.53}$$

biholomorftur. $f := (T_+ \circ \surd \circ T)$ biholomorf dönüşümünün tersi

$$f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash[-1,1] \quad \left(w \mapsto \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w} \right) \right)$$

aerodinamik ve hidrodinamikte çok önemli olan Joukovsky[6] fonksiyonudur.

$r > 0$ için $C_r^+ := \{re^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ ve $I = (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \cup \{\infty\}$ olsun. $\mathbb{C}_\infty \backslash C_r^+$ ve $\mathbb{C}_\infty \backslash I$ bölgeleri $\mathbb{C}_\infty$'un basit bağlantılı bölgeleridir. T_1, T_2 Möbius dönüşümlerini $T_1(C_r^+) = (-\infty, 0] = T_2(I)$ olmak üzere oluşturursak T_1 dönüşümü $\mathbb{C}\backslash C_r^+$'yi, T_2 ise $\mathbb{C}\backslash I$'yı biholomorf olarak $\mathbb{C}_{-\pi}$'ye resmederler; dolayısıyla

$$T_+ \circ \surd \circ T_1 : \mathbb{C}\backslash C_r^+ \to \mathbb{D} \text{ ve } T_+ \circ \surd \circ T_2 : \mathbb{C}\backslash I \to \mathbb{D}$$

biholomorf dönüşümlerdir. Örneğin T_1 Möbius dönüşümü $r, ir, -r$ noktalarını sırasıyla $\infty, -1, 0$ noktalarına ve T_2 ise b, ∞, a noktalarını sırasıyla $0, -1, \infty$ noktalarına resmeden Möbius dönüşümü alınabilir.

[6] Literatürde Joukovski veya Zhukovskii olarak da geçer.

(i) Son olarak, bazılarını KA I'de gösterdiğimiz veya problem olarak sorduğumuz exp, log ve trigonometrik fonksiyonlara ilişkin bazı gerçekleri vereceğiz. $S_+^{a,b} := S^{a,b} \cap \mathbb{C}^+$, $S_-^{a,b} := S^{a,b} \cap \mathbb{C}^-$, $S_{a,b}^+ := S_{a,b} \cap \mathbb{H}$ ve $S_{a,b}^- := S_{a,b} \cap \mathbb{H}^-$ olmak üzere aşağıdaki dönüşümler biholomorftur:

$$\begin{aligned}
\sin : S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus ((-\infty,-1] \cup [1,+\infty)) \\
\sin : S^+_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} &\longrightarrow \mathbb{H} \\
\tan : S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus (i(-\infty,-1] \cup i[1,+\infty)) \\
\tan : S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} &\longrightarrow \mathbb{D}
\end{aligned}$$

Poblemler

Problem 7.3.1. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ kümesinin, matrislerin çarpımına göre $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$'nin bir altgrubu olduğunu gösteriniz. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$'ye **özel linear grup** denir.

Problem 7.3.2. $\Phi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \text{Möb},\ A \mapsto T_A$ dönüşümünün bir örten grup yapı dönüşümü ve $\ker \Phi = \{\pm \mathrm{I}_2\}$, dolayısıyla $\text{Möb} \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{I}_2\}$ olduğunu kanıtlayınız. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{I}_2\}$'ye **projektif özel grup** denir.

Problem 7.3.3. $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) := \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) / \{\alpha \mathrm{I}_2 \mid \alpha \in \mathbb{C}^*\}$'ye **genel projektif grup** denir.

$$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \cong \text{Möb}$$

olduğunu kanıtlayınız. Bu eşyapıdan dolayı Möb'e projektif grup da denir.

Problem 7.3.4. Aşağıdaki Möbius dönüşümlerinin bir grup oluşturduğunu gösteriniz:

$$z,\ \frac{1}{z},\ 1-z,\ \frac{1}{1-z},\ \frac{z}{z-1},\ \frac{z-1}{z}.$$

Problem 7.3.5. $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}$ ve $\det A = 1$ olsun. Bu koşulda T_A'nın $a+d = \pm 2$ için tam bir tane, diğer durumda tam iki tane sabit noktası olduğunu gösteriniz.

Problem 7.3.6. Bir önceki problemden yararlanarak terslemenin Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine dönüştürdüğünü kanıtlayınız.

Problem 7.3.7. İki C_1ve C_2 Möbius çemberi ve $z_1 \notin C_1$, $z_2 \notin C_2$ noktaları verildiğinde C_1 çemberini C_2 çemberine ve z_1 noktasını z_2 noktasına resmeden bir Möbius dönüşümünün varlığını kanıtlayınız.

Problem 7.3.8. Tüm Möbius çemberlerinin

$$\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = p,\ p > 0,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 \neq z_2$$

denklemleri ile verildiğini kanıtlayınız (Appollonius çemberleri). Bu denklem $p = 1$ için z_1, z_2 noktalarından geçen doğruya dik olup bunların $\frac{z_1+z_2}{2}$ orta noktasından geçen doğrunun,

$p \neq 1$ içinse merkezi $(z_1 - p^2 z_2)/(1-p^2)$ ve yarıçapı $\left|(z_1 - z_2)p/(1-p^2)\right|$ olan bir çemberin denklemidir.

Problem 7.3.9. $T_1(z) = \frac{2z-i}{iz+2}$, $T_2(Z) = \frac{z-r}{z+r}$, $T_3(z) = \frac{z}{z-1}$ olmak üzere, $T_1(\mathbb{D}^+)$, $T_2(D_r \cap \mathbb{H})$, $T_3(S(0, \frac{\pi}{4})$ ve $T_3(H(0;1,2)$ bölgelerini belirleyiniz.

Problem 7.3.10. $\lambda := [z, z_1, z_2, z_3]_A = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ olmak üzere z, z_1, z_2, z_3'lerin 24 permütasyonu ile elde edeceğimiz sayıların λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$, $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 7.3.11. İki C_1ve C_2 Möbius çemberi ve $z_1 \notin C_1$, $z_2 \notin C_2$ noktaları verildiğinde C_1 çemberini C_2 çemberine ve z_1 noktasını z_2 noktasına resmeden bir Möbius dönüşümünün varlığını kanıtlayınız.

Problem 7.3.12. $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = p$, $p > 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ile tanımlanan Möbius çemberi C ise, $z_2 = \Theta_C(z_1)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 7.3.13. $a \in \mathbb{H}$ ise, Simetri Teoremi'nden yararlanarak $T(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$ ve $T(a) = 0$ koşulunu sağlayan Möbius dönüşümlerinin $Tz = e^{it}\frac{z-a}{z-\overline{a}}$, $t \in \mathbb{R}$ dönüşümleri olduğunu gösteriniz.

Problem 7.3.14. Düzlemde iç içe, arakesitleri boş olan iki C_1, C_2 çemberi verilsin; bunların merkezleri farklı olabilir. C_1 çemberi C_2'nin içine düşsün ve bunların arasındaki bölgeye H halkası diyelim. H'de her iki çemberimize teğet bir C_1^* çemberi çizelim. Sonra saatin ters yönünde hem C_1, C_2'ye hem de C_1^*'a teğet bir C_2^* çemberi çizelim. Bu işlemi sürdürürsek, işimiz ya C_1^*'a teğet bir C_n^* çemberiyle biter, ya aksi olur. Bu sonucun H'nin bir özelliği olup ilk C_1^* çemberinin seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz. İpucu: Bir Möbius dönüşümüyle C_1, C_2 çemberlerini aynı merkezli C_1', C_2' çemberlerine dönüştürünüz (Steiner).

Problem 7.3.15. Bir holomorf $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H} \cap \mathbb{C}^+$ fonksiyonunu birebir ve $f(0) = 1 + i$ olacak biçimde bulunuz.

Problem 7.3.16. C herhangi bir Möbius çemberi ve $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ olsun. z^*'ın C'ye göre simetriğinin olması için gerek ve yeter koşulun, $T(C) = \mathbb{R}_\infty$ eşitliğini sağlayan herhangi bir Möbius dönüşümüyle $Tz^* = \overline{Tz}$ olması gerektiğini gösteriniz.

Problem 7.3.17. İki Möbius dönüşümünün değişimli olması için ortak bir sabit noktaları olması gerektiğini gösteriniz.

Problem 7.3.18. (a) C_1 çemberi ve (b) $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün C_1 çemberine göre yansımalarını bulunuz.

Problem 7.3.19. C herhangi bir Möbius çemberi ve $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ olsun. z^*'ın C'ye göre simetriğinin olması için gerek ve yeter koşulun, $T(C) = \mathbb{R}_\infty$ eşitliğini sağlayan herhangi bir Möbius dönüşümüyle $Tz^* = \overline{Tz}$ olması gerektiğini gösteriniz.

Problem 7.3.20. C_1, C_2 iki Möbius çemberi ve $z_1 \notin C_1$, $z_2 \notin C_2$ olsun. $T(C_1) = C_2$ ve $Tz_1 = z_2$ olacak biçimde bir T Möbius dönüşümünün varlığını gösteriniz.

Problem 7.3.21. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf ve $a \in \mathbb{D}$ ise

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)} f(z)} \right| \le \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \right|, \quad z \in \mathbb{D}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 7.3.22. $f(z) = 1/z$ dönüşümünün $\mathbb{H} \cap D_1(1)$ yarım dairesini $S(\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{2}, 0)$ köşesine biholomorf resmettiğini gösteriniz.

Problem 7.3.23. $a \in \mathbb{R}^*$ ve $Tz = \frac{a+z}{a-z}$ olsun. Bu durumda T'nin $\mathbb{C}^+$ yarıdüzlemini $a > 0$ ise $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$'ye ve $a < 0$ ise $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmettiğini gösteriniz.

Problem 7.3.24. $Q_1 := \{z = x + iy \,|\, x > 0,\, y > 0\}$ bölgesini $\mathbb{D}$'ye biholomorf resmediniz.

7.4 Bazı Bölgelerin $\mathrm{Aut}\,B$ Grupları

Bu kısımda bazı $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgeleri için $\mathrm{Aut}\,B$ guruplarını, özellikle $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$, $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}_\infty$, $\mathrm{Aut}\,\mathbb{D}$, $\mathrm{Aut}\,\mathbb{H}$ guruplarını belirleyecek ve bu gruplardaki dönüşümlerin özelliklerini araştıracağız.

Teorem 7.4.1. $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ *grubu tamı tamına* $a, b \in \mathbb{C}$ *ve* $a \neq 0$ *olmak üzere* $f(z) = az + b$ *tipindeki* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dönüşümlerinden oluşur, dolayısıyla* $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C} \subset \text{Möb}$.

Kanıt. 1. $a \neq 0$ ve $f(z) = az + b$ olsun. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ elbette biholomorftur.

2. Tersine $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorf olsun. f bir yandan bir topolojik dönüşüm, diğer yandan bir tam fonksiyondur. Bir tam fonksiyon olarak f, ya bir polinomdur ya da tam aşkındır. f tam aşkın olsaydı ∞'da bir esaslı tekilliği olurdu ve Casorati-Weierstrass Teoremi'nden dolayı $f(\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}})$ kümesi $\mathbb{C}$'de yoğun olurdu. Diğer yandan f topolojik olduğundan $f(\mathbb{D})$ açık, ve f birebir olduğundan ise $f(\mathbb{D}) \cap f(\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}) = \emptyset$ olur. Buysa $f(\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}})$'nin $\mathbb{C}$'de yoğun olmasıyla çelişir. Öyleyse f tam aşkın değil, bir polinomdur. f birebir olduğundan, bu polinom birinci dereceden, dd. uygun $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ ile $f(z) = az + b$ olmak zorundadır. □

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık ve G ise $\mathrm{Aut}\,U$'nun bir altgrubu olsun. Her $z, z' \in U$ için $f(z) = z'$ olacak biçimde bir $f \in G$ bulunabiliyorsa, G **grubu U'da geçişlidir** veya U **kümesi G'ye göre homojendir** denir. $z \in U$ için $A_z := \{f \in \mathrm{Aut}\,U \,|\, f(z) = z\}$, $\mathrm{Aut}\,U$'nun bir altgrubudur ve A_z'ye z'nin **izotropi grubu** denir.

Önerme 7.4.2. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ *açık ve* $G \subset \mathrm{Aut}\,U$ *altgrup olsun.* G *grubu* U*'da geçişli ve en az bir* $z_0 \in U$ *için* $A_{z_0} \subset G$ *ise,* $G = \mathrm{Aut}\,U$.

Kanıt. $f \in \operatorname{Aut} U$ keyfi verilsin. G, U'da geçişli olduğundan, $g(z_0) = f(z_0)$ koşulunu sağlayan bir $g \in G$ vardır. Bu durumda $\left(g^{-1} \circ f\right)(z_0) = z_0$ olur ve varsayımımızdan $g^{-1} \circ f \in A_{z_0} \subset G$. Buradan $g \circ \left(g^{-1} \circ f\right) = f \in G$. □

Teorem 7.4.3. $\operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty = \text{Möb} \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{I}_2\}$.

Kanıt. Her şeyden önce $\text{Möb} \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \{\pm \mathrm{I}_2\}$ (Problem 7.3.2).

Birinci kanıt: Not 7.3.2(i)'den $\text{Möb} \subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$ olduğunu biliyoruz. Önerme 7.4.2'de G olarak Möb'ü alalım. Elbette Möb grubu $\mathbb{C}_\infty$'da geçişlidir. Önermede $z_0 = \infty$ alırsak, her $f \in A_\infty$ için $f|\mathbb{C} \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}$ olur. Teorem 7.1.1'den, uygun $a, b \in \mathbb{C}$ ile her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = az + b$. Dolayısıyla $f \in$ Möb. Böylece $A_\infty \subset$ Möb ve sav Önerme 7.4.2'den çıkar.

İkinci kanıt: $\text{Möb} \subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$ olsun. Biz f'nin bir rasyonel fonksiyon olduğunu ve her değeri katlılıklarıyla sayılmak üzere aynı çoklukta aldığını biliyoruz. Şimdi birer $p, q \in \mathbb{C}[z]$ ile $f = p/q$ yazalım. f tameşleme olduğundan birinci dereceden tek bir sıfır yeri vardır, dolayısıyla $p(z) = az + b$ tipinde olmak zorundadır. Ayrıca f'nin tam bir tane birinci dereceden bir kutup yeri vardır, dolayısıyla $q(z) = cz + d$ tipinde olmak zorundadır. Dolayısıyla $f = (az + b)/(cz + d)$ bir Möbius dönüşümüdür.

Üçüncü kanıt: $\text{Möb} \subset \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$ olsun. Eğer $f(\infty) = \infty$ ise $f|\mathbb{C} \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}$, dolayısıyla uygun $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ ile $\mathbb{C}$'de $f(z) = az + b$. Dolayısıyla $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile $f = T_A$. Şimdi $f(\infty) = c \in \mathbb{C}$ olsun.

$$g(z) = \frac{1}{z - c} \text{ ve } h := g \circ f$$

olsun. $f, g \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$ olduğundan $h \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty$. Ayrıca $h(\infty) = \infty$ olduğundan, yukarıdaki irdelemeyle $h \in$ Möb. Buradan da $g^{-1}, h \in$ Möb olduğundan $f = g^{-1} \circ h \in$ Möb. □

Şimdi $\operatorname{Aut} \mathbb{D}$'yi belirlemek istiyoruz. Her şeyden önce $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ ve $T(\partial \mathbb{D}) = \partial \mathbb{D}$ koşullarını sağlayan T Möbius dönüşümlerinin varlığını biliyoruz. Şimdi bize böyle bir Möbius dönüşümü verilmiş olsun. Bu durumda tek olarak belirli bir $a \in \mathbb{D}$ için $T(a) = 0$ olur. a'nın $\partial \mathbb{D}$ çemberine göre simetriği $\frac{1}{\overline{a}}$ olduğundan, bunu 0'ın simetriğine, yani ∞'a resmeder.

$$T_a(z) := \frac{z - a}{-\overline{a} z + 1} \tag{7.54}$$

olarak tanımlanan dönüşüm determinantı $1 - |a|^2 > 0$ olan ve $T_a(a) = 0$ koşulunu sağlayan bir Möbius dönüşümüdür. Eğer $z \in \partial \mathbb{D}$ ise, $z^{-1} = \overline{z}$ olacağından,

$$|T_a(z)| = \left| \frac{z - a}{-\overline{a} z + 1} \right| = \left| \frac{1}{z} \frac{z - a}{\overline{z} - \overline{a}} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| \left| \frac{z - a}{\overline{z} - \overline{a}} \right| = 1$$

olur, dolayısıyla $T_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Her $u \in \partial\mathbb{D}$ için elbette uT_a dönüşümü de $(uT_a)(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ ve $(uT_a)(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ koşulunu sağlar. Her bir $uT_a \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$'dedir ve şimdi $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$'nin uT_a'lar dışında öğesi olmadığını kanıtlayacağız.

Teorem 7.4.4. $\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \{uT_a | a \in \mathbb{D} \text{ ve } u \in \partial\mathbb{D}\}$, *açık yazılımla*

$$\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \left\{ e^{i\varphi}\frac{z-a}{-\overline{a}z+1} \mid a \in \mathbb{D} \text{ ve } \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \subset \text{Möb}. \tag{7.55}$$

Kanıt. (7.55)'teki eşitliğin sol yanının sağ yanını içerdiğini biliyoruz. Şimdi tersini göstereceğiz. $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ olsun. Bir $a \in \mathbb{D}$ için $f(a) = 0$ olacaktır. Bu durumda $g := f \circ T_a^{-1} \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ve $g(0) = 0$. Bu durumda Schwarz Önsavı'ndan, bir $\varphi \in [0, 2\pi)$ ile her $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = e^{i\varphi}z$. Buradan $e^{i\varphi}T_a(z) = g(T_a(z)) = \left(f \circ T_a^{-1}\right)(T_a(z)) = f(z)$ ve işimiz biter. □

Teorem 7.4.5.

$$\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \left\{ T_A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}),\ \det A = |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}.$$

Kanıt. (1) $T_A(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ ve $\det A = |a|^2 - |b|^2 = 1$ olsun. Bu durumda $a \neq 0$ ve $|a| > |b|$ olur. Bir θ ile $\frac{a}{\overline{a}} = e^{i\theta}$ ve $z_0 := -\frac{b}{a}$ dersek $|z_0| < 1$, dolayısıyla $z_0 \in \mathbb{D}$ olur. Böylece Teorem 7.4.4 ile

$$T_A(z) = \frac{a}{\overline{a}} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{\overline{\left(\frac{b}{a}\right)}z + 1} = e^{i\theta} \cdot \frac{z - z_0}{-\overline{z_0}z + 1} = e^{i\theta}T_{z_0} \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}.$$

(2) Şimdi $e^{i\theta}T_{z_0} \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ verildiğinde $a, b \in \mathbb{C}$ sayılarının

$$e^{i\theta} \cdot \frac{z - z_0}{-\overline{z_0}z + 1} = \frac{a}{\overline{a}} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{\overline{\left(\frac{b}{a}\right)}z + 1} = \frac{az+b}{\overline{b}z + \overline{a}} \text{ ve } |a|^2 - |b|^2 = 1 \tag{7.56}$$

olacak biçimde bulunabilineceğini göstermeliyiz. r, s, ρ pozitif reel sayıları ile $a = re^{i\alpha}$, $b = se^{i\beta}$ ve $-z_0 = \rho e^{i\gamma}$ olsun. Bu durumda (7.56) denklemlerinden $e^{i\theta} = e^{i2\alpha}$ ($\Longrightarrow$ (a) $\theta = 2\alpha + 2k\pi$), (b) $r^2 - s^2 = |a|^2 - |b|^2 = 1$, $\frac{s}{r}e^{i(\beta-\alpha)} = \frac{b}{a} = -z_0 = \rho e^{i\gamma}$ ($\Longrightarrow$(c) $\frac{s}{r} = \rho$ ve (d) $\beta - \alpha = \gamma$ eşitliklerini elde ederiz. (a), (b), (c) ve (d) denklemlerinden α, β, r, s'ler, dolayısıyla (7.56) eşitliklerini sağlayan a ve b sayıları kolayca hesaplanır. □

$B, B' \subset \mathbb{C}_\infty$ iki bölge ve $\psi : B \to B'$ biholomorfsa, her $f' \in \operatorname{Aut} B'$ için $f := \Psi(f') := \psi^{-1} \circ f' \circ \psi$ ile tanımlanan $\Psi : \operatorname{Aut} B' \to \operatorname{Aut} B$ bir eşyapı dönüşümüdür. Dolayısıyla $\operatorname{Aut} B'$'yi biliyorsak $\operatorname{Aut} B$'yi de biliyoruz demektir. Örneğin $\mathbb{H}$ ve $\mathbb{D}$ bölgeleri için $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$'yi biliyoruz ve elimizde Örnek 7.3.12'de gördüğümüz $T^+(z) = \frac{z-i}{z+i}$ olarak tanımlanmış $T^+ : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ biholomorf Cayley dönüşümü var. Böylece $\operatorname{Aut}\mathbb{H} = \{(T^+)^{-1} \circ f \circ T^+ \mid f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}\}$ der işi burada bırakabilirdik; ancak biz $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$ hakkında biraz daha fazlasını söylemek istiyoruz.

Teorem 7.4.6. $\operatorname{Aut}\mathbb{H} \subset$ Möb *ve tam olarak*

$$\operatorname{Aut}\mathbb{H} = \left\{ T_A \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \text{ ve } \det A > 0 \right\}. \tag{7.57}$$

Kanıt. Teorem öncesi $\operatorname{Aut}\mathbb{H} = \{(T^+)^{-1} \circ f \circ T^+ \mid f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}\}$ olduğunu gördük; burada $T^+ : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ Cayley dönüşümüdür. Her $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ve T^+ birer Möbius dönüşümü olduklarından, $(T^+)^{-1} \circ f \circ T^+$ de bir Möbius dönüşümdür. Dolayısıyla $\operatorname{Aut}\mathbb{H} \subset$ Möb.

Şimdi $S \in$ Möb dönüşümü verilsin ve $S(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ olsun. Bu durumda $S(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ olacaktır. Dolayısıyla tek olarak belirli α, β, γ reel sayıları için $S(\alpha) = 0$, $S(\beta) = 1$ ve $S(\gamma) = \infty$ olur. Bu durumda, her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için

$$w = S(z) = \frac{z-\alpha}{z-\gamma} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} =: \frac{az+b}{cz+d}$$

olmak zorundadır. Burada $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olduğu apaçıktır. Ayrıca $i \in \mathbb{H}$ olduğundan $S(i) \in \mathbb{H}$, dolayısıyla $\operatorname{Im} S(i) > 0$ olmalıdır. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ olduğundan

$$2i \operatorname{Im} S(i) = S(i) - \overline{S(i)} = \frac{ai+b}{ci+d} - \frac{-ai+b}{-ci+d} = 2i \frac{\det A}{c^2+d^2}.$$

Buradan $\operatorname{Im} S(i) > 0 \iff \det A > 0$ olur ve işimiz biter. □

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $G \subset \operatorname{Aut}\mathbb{C}_\infty$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere kendi aralarında ikişer ikişer farklı $a_1, \ldots, a_n \in U$ ve yine kendi aralarında ikişer ikişer farklı $b_1, \ldots, b_n \in U$ nasıl verilirse verilsin bir $g \in G$, her $1 \leq i \leq n$ için $g(a_i) = b_i$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, G grubu U'da **n-geçişli işler** denir; eğer ayrıca bu g tek olarak belirli ise **düzgün n-geçişli işler** denir. 1-geçişli işler yerine **basit geçişli işler** de denir (bkz. s.602).

Önerme 7.4.7. *(i)* $\operatorname{Aut}\mathbb{C}_\infty$*,* $\mathbb{C}_\infty$*'da düzgün 3-geçişli işler.*
(ii) $\operatorname{Aut}\mathbb{C}$*,* $\mathbb{C}$*'de düzgün 2-geçişli işler.*
(iii) $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$*,* $\mathbb{D}$*'de basit geçişli işler, ancak 2-geçişli işlemez.*
(iv) $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$*,* $\mathbb{H}$*'de basit geçişli işler, ancak 2-geçişli işlemez.*

Kanıt. (i) doğrudan sonuç 7.3.10'dan çıkar. (ii) ise doğrudan (i)'den çıkar. Çünkü bir yandan her $g \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}$ için $g \in$ Möb ve $g(\infty) = \infty$ olduğunu, diğer yandan ise $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ noktaları $a_1 \neq a_2$ ve $b_1 \neq b_2$ olacak biçimde nasıl verilirse verilsinler $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ ve $f(\infty) = \infty$ koşulunu sağlayan bir tek $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{C}_\infty$ olduğunu biliyoruz. (iii)'e gelince $a, b \in \mathbb{D}$ nasıl verilirse verilsin $f := T_b^{-1} \circ T_a \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ve $f(a) = b$ olduğundan $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$, $\mathbb{D}$'de basit geçişli işler. Schwarz Önsavı'ndan dolayı bir $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ için $f(0) = 0$ ise, f

bir dönmedir. Bu nedenle $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $|a| \neq |b|$ ise, $f(0) = 0$, $f(a) = b$ koşulunu sağlayan bir $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ yoktur. $\operatorname{Aut} \mathbb{H} \cong \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ olduğu içinse (iv), (iii)'ten çıkar. □

Teorem 7.4.8. *(i) Her birebir holomorf $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ biholomorftur, dolayısıyla $f(z) = az + b$, $a \neq 0$ tipindedir.*

(ii) Her birebir holomorf $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ biholomorftur ve $a, z \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere ya $c_a(z) := az$ ya da $\theta_a(z) := az^{-1}$ tipindedir. Ayrıca $\operatorname{Aut} \mathbb{C}^* = \{c_a, \theta_a \,|\, a \in \mathbb{C}^*\}$.

Kanıt. (i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ birebir ve holomorf olsun. Bu durumda $f^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f^*(z) := f(z^{-1})$ fonksiyonu da birebir ve holomorftur. f tam aşkın olsaydı f^*'ın 0'da bir esaslı tekilliği olurdu ki bu Casorati-Weierstrass Teoremi'nden dolayı olamaz. Dolayısıyla f bir polinomdur. Öyleyse f' de bir polinomdur. f birebir olduğundan, her $z \in \mathbb{C}$ için $f'(z) \neq 0$. Cebirin Anateoremi'ne göre f' sabittir, dd. bir $a \in \mathbb{C}^*$ ile $f'(z) \equiv a$. Dolayısıyla bir $b \in \mathbb{C}$ ile her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = az + b$ ve $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}$.

(ii) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ birebir ve holomorf olsun. $B := \mathbb{C}$ ve $A := \{0\}$ olmak üzere KA Teorem 3.8.6'dan dolayı iki durum söz konusudur.

(ii)(1) f'nin 0'da bir kaldırılabilir tekilliği vardır ve bir birebir $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonuna genişletilebilir. Teoremimizin (i) şıkkından dolayı $\hat{f}(z) = az + b$, $a \neq 0$ ve $\hat{f}$ biholomorftur. $b = 0$ olmak zorundadır; aksi durumda $b \neq 0$ olsaydı $-ba^{-1} \in \mathbb{C}^*$ ve $f(-ba^{-1}) = 0$ olurdu ki bu, $f(\mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}^*$ ile çelişir. Böylece $a \neq 0$ ile $f(z) = az = c_a(z)$ ve $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ biholomorftur.

(ii)(2) f'nin 0'da birinci dereceden bir kutup yeri vardır. Bu durumda $g := \frac{1}{f} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ birebir, holomorf ve 0'da bir kaldırılabilir tekilliği vardır. Az önce kanıtlanandan, bir $b \neq 0$ ile $g(z) = bz$. Dolayısıyla, her $z \in \mathbb{C}^*$ için $a = b^{-1} \neq 0$ olmak üzere $f(z) = az^{-1} = \theta_a(z)$ ve f biholomorftur.

Kanıtlananlardan $\operatorname{Aut} \mathbb{C}^* = \{c_a, \theta_a \,|\, a \in \mathbb{C}^*\}$ apaçıktır. □

Her birebir ve türevlenebilir bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir tam eşleme ve tersinin de türevlenebilir olması gerekmez; f'nin reel analitik olmasını istesek bile! Örneğin $f(x) = e^x$ fonksiyonu reel analitik ve birebir, ancak örten değildir.

Problemler

Problem 7.4.1. $\operatorname{Aut} \mathbb{C}_\infty, \operatorname{Aut} \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Aut} \mathbb{D}$ gruplarının değişmeli olmadığını gösteriniz.

Problem 7.4.2. $G := \{f \in \operatorname{Aut} \mathbb{C} \,|\, f(z) = z + a, a \in \mathbb{C}\}$'nin $\operatorname{Aut} \mathbb{C}$'nin değişmeli bir normal altgrubu olduğunu ve $\mathbb{C}$'de geçişli işlediğini kanıtlayınız.

Problem 7.4.3. $G_c := \{c_a \,|\, a \in \mathbb{C}^*\}$ ve $G_\theta := \{\theta_a \,|\, a \in \mathbb{C}^*\}$'ın her birinin $\operatorname{Aut} \mathbb{C}^*$'ın $\mathbb{C}^*$'la eşyapılı bir altgrubu olduğunu ve G_c'nin ise $\operatorname{Aut} \mathbb{C}^*$'ın değişmeli bir normal altgrubu olduğunu gösteriniz.

Problem 7.4.4. $\varphi(A) := T_A$ ile tanımlanan $\varphi : \mathrm{SLG}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}\,\mathbb{H}$ dönüşümünün bir örten homomorfizm ve $\ker\varphi = \{\pm \mathrm{I}\}$olduğunu gösteriniz.

Problem 7.4.5. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf ve birden fazla sabit noktaya sahipse, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ olduğunu kanıtlayınız. Uygun bir biholomorf $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dönüşümü ile $g := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ en az iki sabit noktası ve bunlardan biri 0 olan $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf fonksiyonuna Schwarz Önsavı'nı uygulayınız.

Problem 7.4.6. $m \geq 3$ ve $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}_\infty$ birbirinden farklı ve $B := \mathbb{C}_\infty \backslash \{z_1, \ldots, z_m\}$ olmak üzere $\mathrm{Aut}\,B$'nin eleman sayısı $\leq m!$'dir.

Problem 7.4.7. $a_1, a_2 \in \mathbb{H}$, $a_1 \neq a_2$ olmak üzere $f(a_1) = a_2$ ve $f(a_2) = a_1$ koşulunu sağlayan tüm biholomorf $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ dönüşümlerini belirleyiniz.

Problem 7.4.8. Q, merkezi orijinde ve iki köşesi y-ekseni üzerinde olan bir açık altıgen ise, $\mathrm{Aut}\,Q$'yu belirleyiniz. Burada, ileride kanıtlayacağımız Riemann Dönüşüm Teoremi'nden, bir biholomorf $\varphi : Q \to \mathbb{H}$ dönüşümünün varlığından yararlanınız.

Problem 7.4.9. Birbirinden farklı $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ile $B := \mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ ise, her $f \in \mathrm{Aut}\,B$ bir Möbius dönüşümüdür ve $f|\{a_1, \ldots, a_n, \infty\}$ bir permütasyonudur.

7.5 Geometriler-Hiperbolik Geometri

Felix Klein 1872'de, sonradan *Erlangen Programı* olarak adlandırılan [19] çalışmasında, her geometrik kuram için belirleyici olan temel ilkeleri formüle etti. Buna göre inşa edeceğimiz geometrinin iki ayağı olacak. Önce geometrimizin noktalarının kümesi olacak bir X kümesi belirleyeceğiz. Ardından $\mathrm{Per}(X) := \{f \mid f : X \to X \text{ tameşleme}\}$ permütasyon grubunun bir $\mathfrak{G}$ altgrubunu seçeceğiz. $(X, \mathfrak{G})$ ikilisi bir geometri belirler. Bu geometrinin amacı X'te tanımlanan büyüklüklerin, bağıntıların vs. $\mathfrak{G}$ altında değişmez olanlarını incelemektir. $\mathrm{Per}(X)$'in ne kadar altgrubu varsa, X kümesinde o kadar geometri vardır; biz bunlardan bizi ilgilendiren bir kaç tanesi ile ilgileniriz.

Bir sonraki kısımda Riemann Dönüşüm Teoremi 7.6.4 ile şunu göreceğiz: $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ basit bağlantılı ise, şu üç durumdan biri ve ancak biri geçerlidir, (i) $\Omega = \mathbb{C}_\infty$, (ii) $\mathbb{C}_\infty \backslash \Omega$ tek noktadan oluşuyorsa Ω bölgesi $\mathbb{C}$'ye biholomorf resmedilebilir, (iii) $\mathbb{C}_\infty \backslash \Omega$ en az iki nokta içeriyorsa Ω bölgesi biholomorf $\mathbb{D}$'ye resmedilebilir. Biz ayrıca $\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$'nin birbirlerine biholomorf resmedilemeyeceklerini biliyoruz. Konumuz gereği kompleks bir boyutlu katmanlılarla ilgileneceğiz. Kısım 8.5'te Riemann yüzeylerini inceleyecek ve Teorem 8.10.2'de ise, herhangi bir basit bağlantılı Riemann yüzeyinin biholomorf olarak $\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$'den birine biholomorf resmedilebileceğini göreceğiz. Bu kısımda ise Ω bölgelerinde ρ konformal metriklerini tanımlayacak, onlar aracılığı ile Ω'da bir d_ρ metriği tanımlayacağız. Ω ve Ω' bölgeler ve $f : \Omega' \to \Omega$ biholomorf olsun. Ω'da verilen bir konformal ρ metriğini $f^*\rho$ olarak geriye çektiğimizde

$f : (\Omega', d_{f^*\rho}) \to (\Omega, d_\rho)$'nun bir izometri olduğunu göstereceğiz. Dolayısıyla $\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$'deki geometrilere odaklanmak yeterli olacaktır.

Hepimiz okulda, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ kümesinde bir geometriyle, Öklid geometrisiyle tanıştık. $M \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ bir ortagonal matris ve $a \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}^2$ için $f(x) := a + Mx$ tipindeki $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümlerine $\mathbb{R}^2$'de bir hareket demiştik. $\mathbb{R}^2$'deki hareketlerin kümesini $\mathcal{M}^2$ ile gösterirsek elbette $\mathcal{M}^2 \subset \mathrm{Per}(\mathbb{R}^2)$ (bkz. KA I, s.396). Düzlemdeki **Öklid geometrisi** $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}^2)$ geometrisidir.

Bir $(\mathbb{C}_\infty, \mathfrak{G})$ geometrisini incelemek, $(\mathbb{S}^2, \pi_N^{-1} \circ \mathfrak{G} \circ \pi_N)$ geometrisini incelemeye denktir; burada π_N küresel izdüşümdür. $\mathbb{S}^2$'nin rotasyonlarının kümesi $\mathfrak{R}$ olmak üzere $(\mathbb{S}^2, \mathfrak{R})$ **küresel geometri** adını alır.

$$\mathcal{U} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Big| |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \text{ ve } T_{\mathcal{U}} := \{T_A | A \in \mathcal{U}\}$$

olmak üzere $\mathfrak{R} = \pi_N^{-1} \circ T_{\mathcal{U}} \circ \pi_N$ (bkz. [2]). Dolayısıyla $(\mathbb{S}^2, \mathfrak{R})$ ve $(\mathbb{C}_\infty, T_{\mathcal{U}})$ geometrileri denktirler. $(\mathbb{S}^2, \mathfrak{R})$'ye kısaca gözatacağız.

$a, b \in \mathbb{R}^2$ ve $a \neq b$ ise, Öklid geometrisinde a noktasını b noktası ile birleştiren doğru parçası, düzlemde uç noktaları a, b olan parçalı $\mathcal{C}^1$-eğrilerinin (Öklid anlamındaki) uzunluğu en küçük olanıdır. Bilindiği gibi $\mathbb{R}^3$'te orijinden geçen düzlemlerin $\mathbb{S}^2$ ile arakesitlerine büyük çemberler denir. $a \neq b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{S}^2$ noktaları simetrik değillerse, dd. $b \neq -a$ ise, bu iki noktadan geçen bir tek büyük $C(a, b)$ çemberi vardır; bu da $a, b, 0$ noktalarından geçen, tek olarak belirli düzlemin $\mathbb{S}^2$ ile arakesitidir. $\mathbb{S}^2$'de, uç noktaları a, b olan parçalı $\mathcal{C}^1$ eğrileri içinde uzunluğu en kısa olan, $C(a, b)$ büyük çemberinin uç noktaları a, b olan yay parçalarından uzunluğu kısa olanıdır ($b \neq -a$ ve $a \neq b$ seçtiğimizi unutmayalım!); bunu $[a, b]_s$ ile gösterelim. $[a, b]_s$'ye a ile b arasında bir **küresel kısayol** veya bir **küresel geodezi** denir[7]. Öklid geometrisine koşut adlandırmalar yapmak istersek, $[a, b]_s$, küresel geometride a ve b noktalarını birleştiren **küresel doğru parçası** ve büyük çemberler küresel geometrimizde **küresel doğrularımız** olacaktır. $[a, b]_s$'nin uzunluğuna a, b noktalarının **küresel uzaklığı** diyeceğiz; bunu şimdilik $d_s(a, b)$ ile gösterelim. $[a, b]_s$'nin, merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı bir çemberdeki bir yay parçası ve $\sphericalangle(a, b) = \frac{\langle a,b \rangle}{||a|| \cdot ||b||} = \langle a, b \rangle$ olduğunu düşünürsek $d_s(a, b) = \arccos \langle a, b \rangle$ olur; burada $\arccos \langle a, b \rangle \in [0, \pi]$ alınacaktır.

$a \in \mathbb{S}^2$ ise, $-a \in \mathbb{S}^2$ ve $a, 0, -a$'yı içeren sonsuz çoklukta düzlem olduğundan, a ve $-a$'dan geçen sonsuz çoklukta küresel doğru(=büyük çember) ve a ile $-a$ arasında sonsuz çoklukta küresel kısayol vardır. Örneğin, her boylam N kuzey kutbu ile S güney kutbu arasında bir küresel kısayoldur. Daha şimdiden Öklid geometrisinden ne kadar uzaklaştık. İki farklı büyük çember birbirini daima iki noktada keser; dolayısıyla *küresel geometride paralel doğrular yoktur*!

[7]"Kısayol" için türkçemizde çok güzel bir sözcük vardır; "kestirme".

Her boylam ekvatoru dik keser. N kuzey kutbunda birbirini dik kesen iki boylam alalım. Boylamların ekvatoru kestiği noktalara a, b dersek köşeleri N, a, b ve kenarları $[N, a]_s, [a, b]_s$ ve $[b, N]_s$ olan bir (küresel) üçgen elde ederiz. Bu, her açısı $\pi/2$ olan bir eşkenar diküçgendir! Öklid geometrisinden oldukça farklı olan bu geometriyle ayrıntılı ilgilenmeyeceğiz.

Biz katmanlılarla kısım 8.4'te tanışacağız. Okur Riemann geometrisiyle, katmanlılarla henüz tanışmamış olabilir, sorun değil. Şu iki şeyi kabullenmesi yeterlidir: Her açık $U \subset \mathbb{C}_\infty$ bir katmanlıdır ve bu katmanlı, her $z \in U$ noktasında bir $T_z(U)$ teğet vektöruzayına sahiptir. Bizim katmanlımız için daima $T_z(U) = \mathbb{R}^2$; $\mathbb{C}$ reel vektör uzayı alınmak üzere $T_z(U) = \mathbb{C}$. Her $T_z(U)$ teğet uzayımızda Öklid geometrisinden bildiğimiz bir $\langle , \rangle$ iç çarpım ve ondan kaynaklanan $\|\cdot\|$ norm ve açı kavramı var. Her $\rho(z) \in (0, +\infty)$ bize $T_z(U)$'da

$$\forall \xi, \eta \in T_z(U) \ \ \langle \xi, \eta \rangle_{\rho,z} := \langle \rho(z)\xi, \rho(z)\eta \rangle = (\rho(z))^2 \langle \xi, \eta \rangle \tag{7.58}$$

ile tanımlanan bir iç çarpım verir. Bu tanımla $T_z(U)$ teğet uzayımızdaki iç çarpım z konumuna bağlı duruma getirilmiştir. Bu iç çarpım ise bize $T_z(U)$'da bir $\|\xi\|_{\rho,z} := \sqrt{\langle \xi, \eta \rangle_{\rho,z}} = \rho(z) \|\xi\|$ normu ve bir $\sphericalangle_{\rho,z}(\xi, \eta)$ açısı verir. Ancak

$$\cos \sphericalangle_{\rho,z}(\xi, \eta) = \frac{\langle \xi, \eta \rangle_{\rho,z}}{\|\xi\|_{\rho,z} \|\eta\|_{\rho,z}} = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\xi\| \|\eta\|} = \cos \sphericalangle(\xi, \eta)$$

olduğundan açılar korunur. Aşağıdaki tanımdaki "konformal" sözcüğünün gerekçelerinden biri bu eşitliktir.

Tanım 7.5.1. $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge ise, $\mathcal{C}^1$ sınıfından her $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ fonksiyonuna, $\rho^{-1}(0)$ kümesi Ω'da ayrıksa, Ω'da bir **konformal metrik** denir[8]. Her $z \in \Omega$ ve her $\xi \in \mathbb{C}$ için $\|\xi\|_{\rho,z} := \rho(z) \|\xi\|$ sayısına ξ **vektörünün** z **noktasında** ρ**'ya göre normu** denir. Biz $\xi \in \mathbb{C}$ için $\|\xi\|$ normunu yalın olarak $|\xi|$ ile göstermede uzlaşmıştık; dolayısıyla $\|\xi\|_{\rho,z} := \rho(z) |\xi|$ de yazabiliriz.

$\gamma : [0, 1] \to \Omega$, $\mathcal{C}^1$sınıfından bir gezi ise,

$$L_\rho(\gamma) := \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_{\rho,\gamma(t)} \, dt = \int_0^1 \rho(\gamma(t)) \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_\gamma \rho(z) \, |dz| \tag{7.59}$$

sayısına γ'**nın** ρ**-uzunluğu** denir. Bu tanım alışıldık biçimde parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından gezilere aktarılır. ρ konformal metriği z'ye bağlı bir

$$d_\rho s(z) := \rho(z) \, |dz|$$

[8]Elbette ρ, gerçekte bir metrik değildir; ancak onun aracılığı ile Ω'da bir d_ρ^Ω metriği tanımlayacağız (bkz. (7.60)). Yaygın olduğu için bu adlandırmaya uyduk. Kimi yazarlar $\rho \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ve $\rho : \Omega \to (0, +\infty)$ olmasını isterler.

ρ-uzunluk elamanı belirler ve $L_\rho(\gamma) = \int_\gamma d_\rho s$ olur. $L_\rho(\gamma)$ kavramı rotasaldır, dd. γ'nın parametrelenmesinden bağımsızdır. $a, b \in \Omega$ olsun ve $\mathcal{G}^1_{a,b,p}(\Omega)$ ile Ω'daki başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından gezilerin kümesini gösterelim.

$$d^\Omega_\rho(a,b) := \inf\left\{L_\rho(\gamma) | \gamma \in \mathcal{G}^1_{a,b,p}(\Omega)\right\} \tag{7.60}$$

sayısına a ve b noktalarının **Ω'da ρ-uzaklığı** denir. $d^\Omega_\rho(a,b)$ hem ρ'ya hem de Ω'ya bağlıdır. $d^\Omega_\rho : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$'un gerçekten bir metrik olduğunu kanıtlamayı problem olarak bıraktık.

$c \in \mathbb{C}$ ve $|c| = 1$ ise, $\|c \cdot \xi\|_{\rho,z} = \|\xi\|_{\rho,z}$ olur; dolayısıyla ξ vektörünün z'deki uzunluğu, ξ'in yönünden bağımsızdır. Konform metrikleri kompleks analizde önemli kılan bu ve $\sphericalangle_{\rho,z}(\xi,\eta) = \sphericalangle(\xi,\eta)$ özellikleridir.

$\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgeler ve $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ ise sabit olmayan bir holomorf dönüşüm olsun. Ω_1 bir bölge olduğundan $f' \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ de sabit değilidir. Buradan $\rho : \Omega_2 \to [0, +\infty)$ bir konform metrikse Ω_1'de

$$(f^*\rho)(z) := \rho(f(z))\left|f'(z)\right|$$

ile Ω_1'de tanımlanan $f^*\rho$'nun da bir konform metrik olduğu görülür. $f^*\rho$ konformal metriğine ρ'nun Ω_1'e **çekilmişi** denir. Her $\xi \in \mathbb{C}$ için

$$\|\xi\|_{f^*\rho,z} = \rho(f(z))\left|f'(z)\right| \cdot |\xi| = \rho(f(z))\left|f'(z) \cdot \xi\right|$$

olur. $\gamma : [a,b] \to \Omega_1$ bir $\mathcal{C}^1$gezisi ise, $f_*\gamma := f \circ \gamma$ gezisine γ'nın f ile Ω_2'ye **ötelenmişi** denir.

Önerme 7.5.2. *Veriler yukarıdaki gibi olmak üzere Ω_1'deki parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından her γ gezisi için*

$$L_{f^*\rho}(\gamma) = L_\rho(f_*\gamma) = L_\rho(f \circ \gamma). \tag{7.61}$$

Eğer ayrıca f bikonformsa, her $a, b \in \Omega_1$ için

$$d^{\Omega_1}_{f^*\rho}(a,b) = d^{\Omega_2}_\rho(f(a), f(b)), \tag{7.62}$$

dd. $f : (\Omega_1, d^{\Omega_1}_{f^*\rho}) \to (\Omega_2, d^{\Omega_2}_\rho)$ bir izometridir.

Kanıt. Savın ilk kısmını $\mathcal{C}^1$ sınıfından γ gezileri için kanıtlamak yeterlidir. $\gamma : [0,1] \to \Omega_1$ bir $\mathcal{C}^1$ gezisi olsun. (7.59) ile

$$\begin{aligned}
&L_\rho(f_*\gamma) = L_\rho(f \circ \gamma) \\
&\quad = \int_0^1 \left\|(f\circ\gamma)'(t)\right\|_{\rho, f(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \rho(f(\gamma(t)))\left|(f\circ\gamma)'(t)\right| dt \\
&\quad = \int_0^1 \rho((f\circ\gamma)(t)) \cdot \left|(f'(\gamma(t))\right| \cdot \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_0^1 \left\|\gamma'(t)\right\|_{f^*\gamma,\gamma(t)} dt = L_{f^*\rho}(\gamma).
\end{aligned}$$

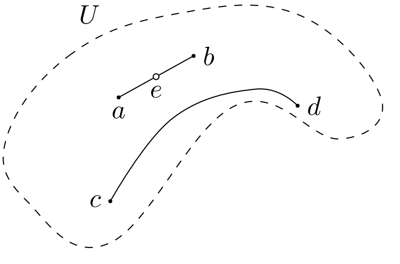
f biholomorfsa, Ω_2'de başlangıç noktası $f(a)$ ve bitiş noktası $f(b)$ olan her parçalı $\mathcal{C}^1$ eğrisi η için $\gamma := f^{-1} \circ \eta$, Ω_1'de başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan bir parçalı $\mathcal{C}^1$ gezisidir. Ayrıca $f_*\gamma = \eta$ olduğundan $L_{f^*\rho}(\gamma) = L_\rho(\eta)$ ve bu, (7.62) eşitliğini verir. □

Beklenti (7.61) eşitliğinin (7.62) eşitliğini vermesi yönündedir; ancak f birebir değilse bunun doğru olmadığı kolayca görülür.

Sonuç 7.5.3. *Ω'da ρ konformal metriği verilsin. Her $f \in \operatorname{Aut}\Omega$ için $f : (\Omega, d^\Omega_{f^*\rho}) \to (\Omega, d^\Omega_\rho)$ bir izometridir. Özel olarak, her $f \in \operatorname{Aut}\Omega$ için $f^*\rho = \rho$ ise, her $f \in \operatorname{Aut}\Omega$ için $f : (\Omega, d^\Omega_\rho) \to (\Omega, d^\Omega_\rho)$ bir izometridir.*

Örnek 7.5.4. Biz özel Ω'lar ve özel ρ konformal metrikleriyle ilgileneceğiz.

1. $\rho \equiv 1$ olsun. Bu durumda $\Omega \subset \mathbb{C}$ dışbükeyse, özellikle $\Omega = \mathbb{C}$ ise, d Öklid metriği olmak üzere, $d^\Omega_\rho = d|\Omega$ olduğu kolayca görülür.



Şekil 7.19

Genel durumda $d^\Omega_\rho \neq d|\Omega$ olabilir; hatta bazı $a, b \in \Omega$ noktaları arasında bir kısayol olmayabilir (bkz. Şekil 7.19). Orada a, b noktaları arasında bir kısayol yoktur.

2. $\Omega = \mathbb{C}_\infty$ olsun. KA I'den $Z_1, Z_2 \in \mathbb{S}^2$ ve $z_k = \pi_N(Z_k)$ ise

$$d(Z_1, Z_2) = d_\infty(\pi_N(Z_1), \pi_N(Z_2)) = d_\infty(z_1, z_2) = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin en sağındaki ifadede $z_1 \to z_2$ yakınlaştırmasını yaparsak $\frac{2|dz|}{1+|z|^2}$ uzunluk elemanına ulaşırız. Eğer $\hat\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından bir gezi ve $\gamma := \pi_N \circ \hat\gamma$ ise, kolayca

$$L(\hat\gamma) = L(\pi_N \circ \hat\gamma) = L(\gamma) = \int_\gamma \frac{2}{1 + |z|^2}\,|dz|$$

olduğu görlür. $\rho(z) = \frac{2}{1+|z|^2}$'ye **küresel konformal metrik** denir. $T_{\mathcal{U}} \subset$ Möb biraz yukarıda geçen grup olmak üzere $(\mathbb{C}_\infty, T_{\mathcal{U}})$ geometrisi, $(\mathbb{S}^2, \mathfrak{R})$ geometrisine denk bir geometridir. Bu geometrinin doğruları, büyük çemberlerin π_N altındaki resimleridirler. Bu geometride $a, b \in \mathbb{C}_\infty$ noktaları arasındaki, $[a, b]_\infty$ ile göstereceğimiz doğru parçası ise $\pi_N([\pi_N^{-1}(a), \pi_n^{-1}(b)]_s)$'dir.

Şimdi **hiperbolik geometri** denen $(\mathbb{D}, \operatorname{Aut}\mathbb{D})$ geometrisine kısaca değineceğiz. $\mathbb{R}^2$'deki Öklid geometrisinde olduğu gibi bu geometrinin de kendi *nokta-*

ları ve *doğruları* olmalıdır. Noktalarımız $\mathbb{D}$'nin noktaları olacaktır. Doğrularımız ise $\partial\mathbb{D}$'yi dik kesen Möbius çemberlerinin $\mathbb{D}$'de kalan yay parçaları olacaktır. Örneğin bizim işleyeceğimiz hiperbolik geometride bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz tane paralel çizilebilecektir.

İlk iş olarak $\mathbb{D}$'de her $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$'yi bir izometri kılan bir metriğin peşindeyiz. Sonuç 7.5.3 bir ipucu veriyor: Her $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ için $f^*\rho = \rho$ koşulunu sağlayan bir konformal metrikten elde edeceğimiz $d_\rho^{\mathbb{D}}$ metriği işimizi görür. Böyle bir ρ'yu ise $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$'nin değişmezlerinden çıkarabiliriz. Biz şimdiden $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$'nin bir değişmezini biliyoruz; çiftoran! Aranan metriği çiftoran üzerinden kazanmayı deneyebilirdik. Ancak, çıkış noktamız şimdi kanıtlayacağımız Schwarz-Pick Önsavı'ndan elde edeceğimiz, $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$'nin, her $w, z \in \mathbb{D}$ için

$$\delta(w,z) := \left|\frac{z-w}{\overline{w}z-1}\right| = |-T_w(z)| = |T_w(z)| \tag{7.63}$$

olarak tanımlanan $\delta(w,z)$ değişmezi olacak ve ileride (7.72)'de çiftoranla buluşacağız. Diğer yandan T_a dönüşümünün sağladığı

$$T_a^{-1} = T_{-a},\ T_a'(0) = 1-|a|^2,\ T_a'(a) = \left(1-|a|^2\right)^{-1}$$

özdeşliklerinden aşağıdaki önsavın kanıtında yararlanacağız:

Önsav 7.5.5 (Schwarz-Pick Önsavı)**.** *Her holomorf $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ için*

$$\forall z, w \in \mathbb{D} : \delta(f(w), f(z)) \leq \delta(w,z) \ \textit{ve} \tag{7.64}$$

$$\forall z \in \mathbb{D} : \left|f'(z)\right| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{7.65}$$

Eğer ayrıca $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ise, (7.64) ve (7.65)'te eşitlikler vardır. Eğer (7.64)'te birbirinden farklı $a, b \in \mathbb{D}$ noktaları için eşitlik varsa $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ olur. Yine (7.65)'te bir $z \in \mathbb{D}$ için eşitlik varsa $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$.

Kanıt. Elbette $h_w := T_{f(w)} \circ f \circ T_w^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Ayrıca $h_w(0) = 0$ olduğundan Schwarz Önsavı ile $|h_w(\zeta)| \leq |\zeta|$ olur. Buradan, (7.63) ve $T_{f(w)} \circ f = h_w \circ T_w$ olduğundan,

$$\delta(f(w), f(z)) = \left|T_{f(w)}(f(z))\right| = |h_w(T_w(z))| \leq |T_w(z)| = \delta(w,z) \tag{7.66}$$

elde ederiz. Eğer ayrıca $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ise, Teorem 7.4.4'ten bir $a \in \mathbb{D}$ ve bir $\varphi \in \mathbb{R}$ ile $h = e^{i\varphi}T_a$. Buradan $h(0) = 0$ ile $a = 0$ ve ardından $h(z) = e^{i\varphi}z$ olur. Dolaysıyla, her $z \in \mathbb{D}$ için $|h(z)| = |z|$ olur. Bundan dolayı, (7.66)'daki $\leq$ yerine $=$ yazabiliriz.

Şimdi, $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{D}$, $z = a$ ve $w = b$ aldığımızda, (7.64)'te eşitlik olsun. Bu durumda $|h_a(T_a(b))| = |T_a(b)|$ olur ve $T_a(b) \neq 0$ olduğundan, Schwarz

Önsavı gereğince h_a orijin etrafında bir dönme, dolayısıyla $h \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$, ardından $f = T_{f(a)}^{-1} \circ h_a \circ T_a \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ olur.

$a \in \mathbb{D}$ ve $b := f(a)$ olsun. $g := T_b \circ f \circ T_a^{-1}$ alalım. Elbette $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorftur ve $g(0) = 0$. Bir yandan Schwarz Önsavı'ndan $|g'(0)| \leq 1$, diğer yandan

$$\begin{aligned} g'(0) &= (T_b \circ f)' \left(T_a^{-1}(0)\right) T'_{-a}(0) = (T_b \circ f)'(a)(1 - |a|^2) \\ &= T'_b(b) f'(a)(1 - |a|^2) = \frac{1 - |a|^2}{1 - |b|^2} f'(a) \\ &= \frac{1 - |a|^2}{1 - |f(a)|^2} f'(a). \end{aligned} \tag{7.67}$$

Buradan $|g'(0)| \leq 1$ ile (7.65) elde edilir.

$f \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ ise, $g \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ ve ayrıca $g(0) = 0$ olduğundan g bir dönme, dolayısıyla $|g'(0)| = 1$ olur ve (7.65)'te eşitlik elde ederiz. Tersine, bir $a \in \mathbb{D}$ için (7.65)'te eşitlik söz konusu ise, yine önce $|g'(0)| = 1$ ve ardından Schwarz Önsavı ile g'nin 0-merkezli bir dönme olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla $g \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$, buradan da $f = T_b^{-1} \circ g \circ T_a \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ olur. □

δ, $\operatorname{Aut} \mathbb{D}$ altında bir değişmezdir. (7.65)'ten $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ için

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} |dz| = \frac{1}{1 - |z|^2} |dz|, \ z \in \mathbb{D} \tag{7.68}$$

elde ederiz. Bu tam da aradığımız şeydir.

Tanım 7.5.6. Her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\pi(z) := \frac{1}{1 - |z|^2} \text{ ve } d_\pi s(z) := \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$$

olsun. π konformal metriğine **Poincaré metriği** veya **hiperbolic metrik**, $d_\pi s(z)$'ye ise π-uzunluk elemanı veya **hiperbolik uzunluk elemanı** denir.[9]

π konformal metriği $\mathbb{D}$'de bir $d_\pi^{\mathbb{D}}$ metriği tanımlar. (7.68) eşitliği, her $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ için $f^* \pi = \pi$ olduğunu söyler. Sonuç (7.5.3)'ten aşağıdaki önerme çıkar:

Sonuç 7.5.7. *Her $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ için $f : (\mathbb{D}, d_\pi^{\mathbb{D}}) \to (\mathbb{D}, d_\pi^{\mathbb{D}})$ bir izometridir.*

[9] Bu metriğe, Poincaré'yi anımsatması adına, π adını verdik. $\delta(z, w)$'de $z \to w$ limitine geçersek $\pi(z)\,|dz|$ uzunluk elemanına ulaşırız. Poincaré metriğine böyle de ulaşabiliriz. $c > 0$ herhangi bir pozitif sayı olmak üzere $c\pi$ konformal metriği ile çalışabilir; bu, işin özünü değiştirmeyen, denk bir metriğe geçmek demektir. Çoğu yazar π yerine 2π'den yola çıkar; nedeni, Gauss-Bonnet Teoremi 7.5.14'te göreceğimiz gibi, bazı formüllerin daha şık görünmesidir.

$z \in \mathbb{D}$ olmak üzere $z \to \partial\mathbb{D}$ için $\lim \pi(z) = +\infty$ olduğundan, $\lim \|\xi\|_{\pi,z} = \lim \pi(z)\,|\xi| = +\infty$ olur.

Parçalı $\mathcal{C}^1$sınıfından $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ gezisinin **π-uzunluğu** veya **hiperbolik uzunluğu**

$$L_\pi(\gamma) = \int_\gamma d_\pi s = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt$$

olur.

$$L_\pi(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \geq \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

olduğundan $L_\pi(\gamma) \geq L(\gamma)$, dd. γ'nın π-uzunluğu Öklidik uzunluğundan daha kısa değildir.

$0 \leq r < 1$ olmak üzere $\gamma := \overrightarrow{0r}$, dd. $\gamma : [0,r] \to \mathbb{D}$ gezisi $\gamma(t) = t$ olsun. O zaman

$$L_\pi(\overrightarrow{0r}) = \int_0^r \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^r = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}. \tag{7.69}$$

Dolayısıyla $\lim_{r\nearrow 1} L_\pi(\overrightarrow{0r}) = +\infty$.

Teorem 7.5.8. $0 \leq r < 1$ *olmak üzere* $\mathbb{D}$*'de başlangıç noktası* 0 *ve bitiş noktası* r *olan parçalı* $\mathcal{C}^1$ *sınıfından her* γ *gezisi için* $L_\pi\left(\overrightarrow{0r}\right) \leq L_\pi(\gamma)$. *Dolayısıyla* $\overrightarrow{0r}$ *gezisinin izi* $(\mathbb{D}, d_\pi^{\mathbb{D}})$*'de* 0 *noktasını* r *noktasına bağlayan tek kısayoldur.*

Kanıt. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ parçalı $\mathcal{C}^1$ gezisi ve $\gamma_1 := \operatorname{Re}\gamma$ ve $\gamma_2 := \operatorname{Im}\gamma$ olsun. Bir yandan $\gamma_1'(t) \leq |\gamma_1'(t)| \leq |\gamma'(t)|$, diğer yandansa

$$1 - |\gamma(t)|^2 = 1 - \gamma_1^2(t) - \gamma_2^2(t) \leq 1 - \gamma_1^2(t)$$

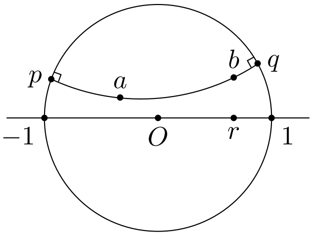
olduğundan

$$\begin{aligned} L_\pi(\gamma) &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_1'(t)}{1-\gamma_1(t)^2}dt = \\ &= \int_{\gamma_1(a)}^{\gamma_1(b)} \frac{dx}{1-x^2} = \int_0^r \frac{dx}{1-x^2} = L_\pi(\overrightarrow{0r}). \end{aligned}$$

□

$[0,1,r,-1] = \frac{1+r}{1-r}$ olduğundan, Teorem 7.5.8 ve (7.69) bize

$$d_\pi^{\mathbb{D}}(0,r) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{2}\ln[0,1,r,-1] \tag{7.70}$$



Şekil 7.20: Hiperbolik uzaklık.

olduğunu söyler. Bu bize herhangi iki $a, b \in \mathbb{D}$ noktası verildiğinde $d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b)$ π-uzaklığını hesaplamamızı, ayrıca a'dan b'ye giden bir geodezik gezi bulmamızı sağlar.

$f_1 \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ dönüşümü $f_1(z) = (z-a)\,/\,(\overline{a}z-1)$ olsun. $f_1(a) = 0$ ve $b' := f_1(b)$ olsun. $a \neq b$ varsayabiliriz. Bu durumda $0 < r := |b'| < 1$ olur. Uygun bir θ ile $f_2(z) = e^{i\theta}z$ dönmesi ile $f_2(b') = r$ sağlanır. Böylece $f = f_2 \circ f_1 \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ için $f(a) = 0$ ve $f(b) = r$ olduğundan $d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = d_\pi^{\mathbb{D}}(0,r)$ olur. $g := f^{-1} \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ olduğundan bir yandan $g(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ sağlanır, diğer yandan g bir konform dönüşüm olduğu için birbirini dik kesen $\partial\mathbb{D}, \mathbb{R}_\infty$ Möbius çemberlerini yine birbirini dik kesen $\partial\mathbb{D}, C$ çemberlerine resmeder. $p := g(-1)$, $q := g(1)$ olsun. Tanım gereği $a = g(0)$ ve $b = g(r)$. Şimdi C çemberi $\partial\mathbb{D}$ çemberini p ve q noktalarında dik olarak keser. p, a, b, q noktaları C çemberi üzerindedirler ve bu noktaların bu sıralanışı C'nin pozitif yönü ile uyumludur. Möbius dönüşümleri çiftoranı koruduklarından $[a,q,b,p] = [0,1,r,-1]$ olur. Böylece $d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = d_\pi^{\mathbb{D}}(0,r)$ olduğunu bildiğimizden (7.70) ile

$$d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = \frac{1}{2}\ln\,[a,q,b,p] \tag{7.71}$$

elde ederiz[10].

$d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b)$'yi $\delta(a,b)$ değişmezi ile de ifade edebiliriz. Gerçekten de

$$d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\delta(a,b)}{1-\delta(a,b)} \tag{7.72}$$

Bunu kolayca görebiliriz. Önce $a = 0$ ve $0 < b < 1$ ise, $\delta(0,b) = b$ olduğundan sav, (7.70)'tir. Şimdi $a, b \in \mathbb{D}$ keyfi verilsinler. $T_a \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ile $T_a(a) = 0$ ve $|T_a(b)| = \delta(a,b)$. Buradan

$$d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = d_\pi^{\mathbb{D}}(T_a(a), T_a(b)) = d_\pi^{\mathbb{D}}\,(0, T_a(b)) \overset{*}{=} d_\pi^{\mathbb{D}}\,(0, |T_a(b)|) = d_\pi^{\mathbb{D}}\,(0, \delta(a,b))$$

(7.70) ile işimiz biter. $\overset{*}{=}$'nın gerekçesi: π-uzaklığını koruyan bir döndürmeyle $0, T_a(b)$ noktaları sırasıyla $0, |T_a(b)|$ noktalarına taşınır.

[10] Bu denklem bazı kitaplarda karşılaştıklarınızla örtüşmüyorsa, nedeni, daha önce de vurguladığımız gibi, çiftoran tanımının farklı seçilmiş olmasıdır.

(7.71) veya (7.72) eşitliklerinden herhangi biri $d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b)$'nin tanımı olarak da alınabilir; ancak bunu işin özünü örttüğü için yeğlemedik. $L_\pi(\gamma)$ ve $d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b)$ değerleri $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$'nin değişmezleri olduklarından, her $g \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$, kısayolları kısayollara resmeder. Dolayısıyla C çemberi üzerindeki, başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan $g(\overrightarrow{0r})$ gezisi a'dan b'ye bir geodezik gezidir. Bu gezinin izi C üzerindeki a, b arasındaki yaydır; bu yayı $[a,b]_\pi$ ile gösterecek buna bir **hiperbolik** veya π-**doğru parçası** diyeceğiz. $\gamma := g(\overrightarrow{0r})$ izi C'de olup başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan $\mathcal{C}^1$ sınıfından bir Jordan gezisidir. C, $\partial\mathbb{D}$'ye dik bir Möbius çemberi olmak üzere $C_{\mathbb{D}} := C \cap \mathbb{D}$'ye kısaca bir π-**doğrusu** veya bir **dikçember** diyelim. Bu tanıma göre elbette $\mathbb{D}$'nin açık çapları da π-doğrularıdırlar.

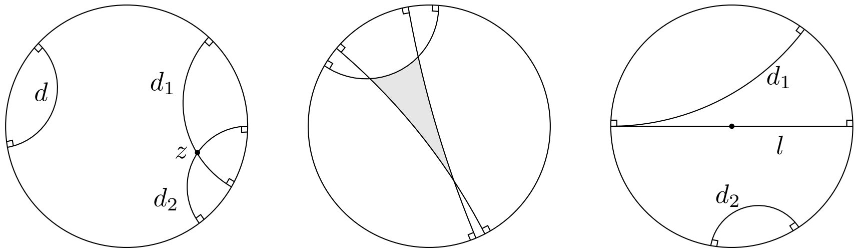
$\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}^2\right)$ Öklid geometrisinin iki temel kavramı var: *noktalar* ve *doğrular.* $\mathcal{M}^2$ doğruları doğrulara resmeder. d, $\mathbb{R}^2$'nin Öklid metriği ve $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ olmak üzere bu metriğe göre $\overrightarrow{ab}$ başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan geodezik gezidir ve $d(a,b) = L\left(\overrightarrow{ab}\right)$. Bu gezinin izi a, b noktalarından geçen doğru üzerindedir. Birbirini kesmeyen doğrulara *paralel* doğrular denir. Bir an için Öklid'in paralelaksiyomu dışındaki aksiyomlarına uyan, ayrıca o aksiyomda bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen paralel doğrunun *tekliğinden* vazgeçerek

(P) *Bir doğruya üzerinde olmayan her noktadan geçen en az bir paralel doğru vardır*

aksiyomunu alalım.

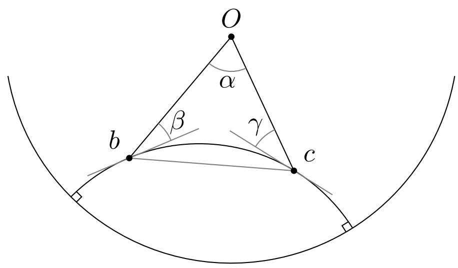
Eğer $(\mathbb{D}, \operatorname{Aut}\mathbb{D})$'nin bu kuramın bir modeli olabileceğini düşünüyorsak, bu modelde doğruların ne olacağını belirlememiz gerekir. $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$ dik çemberleri dik çemberlere resmeder. Ayrıca $a, b \in \mathbb{D}, a \neq b$ ise, bu noktalardan *bir tek* dikçember geçer. Bunu görelim: T_a Möbius dönüşümü birebir olduğundan, a ve b'den geçen farklı dikçemberleri –eğer varsalar– $\partial\mathbb{D}$'yi dik kesen farklı dikçemberlere resmeder. $T_a(a) = 0$ ve $b' = T_a(b)$ olsun. 0 ve b''den geçen ve $\partial\mathbb{D}$'ye dik olan bir tek Möbius çemberi vardır; bu da bu noktalardan geçen tek olarak belirli Öklidik l doğrusudur. Dolayısıyla $C := T_a^{-1}(l)$ olmak üzere $C_{\mathbb{D}}$ dik çemberi a ve b'den geçen tek dikçemberdir. γ izi C'de ve başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan $\mathcal{C}^1$ sınıfında bir Jordan gezisi ise, $d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = L_\pi(\gamma)$. Bütün bu irdelemeler $(\mathbb{D}, \operatorname{Aut}\mathbb{D})$ modelimizde *doğrular* olarak *dikçemberleri,* dd. π-*doğrularını* almamızın mantıklı olacağını gösterir.

Gerçekten de o zaman Öklid'in paralelaksiyomu dışındaki aksiyomları artı (P) aksiyomu sağlanır. Bu geometride bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen bu doğruya paralel sonsuz tane doğru bulunabilir. Şekil 7.21'de en soldaki şekilde d doğrusuna dışındaki bir z noktasından geçen iki paralel çizilmiştir; elbette sonsuz çoklukta çizilebileceği apaçıktır. $C_{\mathbb{D}}$ bir dik çember, $C \cap \partial\mathbb{D} = \{p, q\}$ ve a, b noktaları $C_{\mathbb{D}}$'de üzerinde kalmak üzere $\lim_{a \to p} d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = +\infty$



Şekil 7.21

ve $\lim_{b\to q} d_\pi^{\mathbb{D}}(a,b) = +\infty$. Bu nedenle $\partial\mathbb{D}$'ye hiperbolik geometrimizin sonsuz uzaktaki noktalarının kümesi olarak bakabiliriz. $C_{\mathbb{D}}$ ve $C'_{\mathbb{D}}$ iki paralel doğru olsun, dd. $C_{\mathbb{D}} \cap C'_{\mathbb{D}} = \emptyset$. İki durumla karşılaşırız: $C \cap C' \cap \partial\mathbb{D} = \emptyset$, bu durumda bu iki paralel doğru sonsuzda da kesişmezler ve $C \cap C' \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$, bu durumda paralel doğrularımız sonsuzda kesişirler (Şekil 7.21'de en sağdaki şekle bkz.).



Şekil 7.22: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

Yine uygun $C_{\mathbb{D}}, C'_{\mathbb{D}}$ ve $C''_{\mathbb{D}}$ doğrularını kesiştirerek oluşturduğumuz üçgenlerin iç açıları toplamı π'den küçüktür(Şekil 7.21'de ortadaki şekle bkz.). Bunu görmek çok kolaydır. Bize köşeleri a', b', c' olan herhangi bir hiperbolik Δ' üçgeni verilsin; bu üçgenin bu köşelerdeki açıları sırasıyla α, β, γ olsun. Bir $T \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ile bu üçgeni köşeleri $a = O, b, c$ olan Δ hiperbolik üçgenine taşıyalım (bkz. Şekil 7.22). Konformal metrikler açıları koruduklarından, Δ üçgeninin iç açıları da α, β ve γ'dır. T dönüşümü açıları koruduğundan, Δ ve Δ' üçgenlerinin iç açılarının toplamları birbirine eşittir. Orijinden geçen yagâne doğrularımız çaplar olduğundan, Δ üçgeninin $[a,b]_\pi$ ve $[a,c]_\pi$ kenarları Öklidik anlamda doğru parçalarıdır, $[b,c]_\pi$ kenarı ise orijine doğru bükük bir yay parçasıdır. Dolayısıyla Δ hiperbolik üçgeni, köşeleri a, b, c olan Δ'' Öklidik üçgenin içine düşer. Δ'nın iç açıları toplamı olan $\alpha+\beta+\gamma$, Δ'' Öklid üçgeninin iç açıları toplamından, yani π'den küçüktür.

Not 7.5.9. Hiberbolik geometri hakkında en güzel görsel desteği M.C.Escher'in Circle Limit adını taşıyan eserleri verir. R. Penrose'un "The Road to Reality" ve "The Large, the

Small and the Human Mind" adlı kitaplarında Circle Limit'in bir örneğini ve bunun yanı sıra hiperbolik geometri ve onun fizikte kullanımı hakkında bilgiler bulursunuz. Escher'in bu eserinde birim daire beyaz ve siyah balıklarla kaplanmıştır. Balıklar orijine yaklaştıkça seyrekleşir ve büyürler, orijinden uzaklaştıkça, uzaklığa bağlı olarak sıklaşır ve küçülürler; sanki sonsuz çoklukta balık, küçülerek $\partial\mathbb{D}$ sınırına yığılmış gibidir. Bizim, Öklidik ölçekle gördüğümüz budur. Ancak $\mathbb{D}$'de yaşayan bir hiperbolik yaratık için durum tümden farklıdır; o kendi evrenini, dd. $\mathbb{D}$'yi, aynı büyüklükte siyah ve beyaz balıklarla kapladığında bizim göreceğimiz bu fotoğraftaki gibi olacaktır. Bu şu iki gerçeğe dayanır: (1) $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\lim_{z\to\partial\mathbb{D}} \pi(z) = +\infty$ olduğundan, her $0 \neq \xi \in \mathbb{C}$ için $\lim_{z\to 1} \|\xi\|_{\pi,z} = +\infty$ olur, (2) $z \in \mathbb{D}$ ve $r = |z|$ olmak üzere (7.69) ile $\lim_{|z|\nearrow 1} L_\pi(\overrightarrow{0z}) = \lim_{|z|\nearrow 1} L_\pi(\overrightarrow{0r}) = +\infty$. Özetle hiperbolik evrende, orijinden bir sınır noktasına doğru yola çıkan bir sürüngen, hızı ne olursa olsun, asla hedefine ulaşamaz ve orijinden uzaklaştıkça boyu, öklidik gözler için küçülür. Ayrıca, orada anlatılan işlem sürdürülürse, Şekil 8.10 da iyi bir fikir verir.

Şimdi problem olarak bırakacağımız bazı bilgileri paylaşalım. $a \in \mathbb{D}$ ve $r > 0$ için $C_r^\pi(a) := \{z \in \mathbb{D} | d_\pi^{\mathbb{D}}(z,a) = r\}$ ve $D_r^\pi(a) := \{z \in \mathbb{D} | d_\pi^{\mathbb{D}}(z,a) < r\}$ kümelerine sırasıyla a-**hiperbolik merkezli** r-yarıçaplı **hiperbolik çember** (veya π-**çemberi)** ve **hiperbolik açık daire** (veya π-**açık dairesi**) diyelim. Her hiperbolik çember ve açık daire, Öklid anlamında da bir çember ve açık dairedir. Ancak yarıçapları örtüşmez ve merkezleri yalnızca $a = 0$ için örtüşür. Dolayısıyla, d ile Öklid metriğini gösterirsek, d ve $d_\pi^{\mathbb{D}}$ metrikleri $\mathbb{D}$'de aynı topolojiyi tanımlarlar. Yine de aralarında önemli bir fark vardır: $(\mathbb{D}, d)$ uzayı tam değilken, $(\mathbb{D}, d_\pi^{\mathbb{D}})$ uzayı tamdır. Ayrıca, her $a \in \mathbb{D}$ için

$$\lim_{z\to a} \frac{d_\pi^{\mathbb{D}}(z,a)}{d(z,a)} = \lim_{z\to a} \frac{d_\pi^{\mathbb{D}}(z,a)}{|z-a|} = \frac{1}{1-|a|^2}$$

geçerlidir (bkz problem 7.5.7). Bu ne anlama gelir? Bu a'nın çok küçük bir komşuluğunda bir $c > 0$ ile $d_\pi^{\mathbb{D}} \approx cd$ olması demektir. Bu ise, a'nın çok küçük bir komşuluğunda, hiperbolik geometrimizin öklidik geometriye benzer olması demektir.

Hiperbolik geometrinin modelleri olarak neredeyse yalnızca $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{H}$ ile karşılaşırız. Aşağıda $\mathbb{D}$'ye konform denk olan her basit bağlantılı Ω bölgesinin doğal bir hiperbolik metriğe sahip olduğunu kanıtlayacağız.

Önsav 7.5.10. *$\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ ve $\mathbb{C}_\infty \backslash \Omega$ en az iki nokta içeren basit bağlantılı bir bölge olsun. $f, g : \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorf dönüşümlerse, $f^*\pi = g^*\pi$.*

Kanıt. $z \in \Omega$ keyfi verilsin. $w := f(z)$ ve $\zeta := g(z)$ olsun.

$$(f^*\pi)(z) = \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \pi(w)|f'(z)| \text{ ve } (g^*\pi)(z) = \frac{|g'(z)|}{1-|g(z)|^2} = \pi(\zeta)|g'(z)|.$$

Dolayısıyla $\pi(w)\,|f'(z)| = \pi(\zeta)\,|g'(z)|$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $h := g \circ f^{-1} \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ olduğundan, (7.68) ile

$$\begin{aligned}\pi(w)\,\left|f'(z)\right| &= \pi(h(w)) \cdot \left|h'(w)\right| \cdot \left|f'(z)\right| \\ &= \pi(h(w)) \cdot \left|g'(f^{-1}(w))(f^{-1})'(w)\right| \cdot \left|f'(z)\right| \\ &= \pi(\zeta)\end{aligned}$$

□

Bu önsavdan dolayı aşağıdaki tanım kusursuzdur:

Tanım 7.5.11. $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ basit bağlantılı ve $f : \Omega \to \mathbb{D}$ biholomorfsa $\pi_\Omega := f^*\pi$'ye **Ω'nın Poincaré metriği** diyelim.

$(\mathbb{H}, \operatorname{Aut}\mathbb{H})$ de hiberbolik geometrimizin bir modeli olarak seçilebilir. Kısaca $(\mathbb{H}, \operatorname{Aut}\mathbb{H})$ geometrisine değineceğiz. $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ Cayley dönüşümü olsun. Basit bir hesaplamayla

$$\pi_{\mathbb{H}}(z) = (T^*\pi)(z) = \frac{|T'(z)|}{1-|T(z)|^2} = \frac{1}{2\operatorname{Im} z} = \frac{1}{2y} \tag{7.73}$$

olduğu kolayca görülür. Önerme 7.5.2'den dolayı $\mathbb{H}$'deki her γ parçalı $\mathcal{C}^1$-eğrisi ve her $a, b \in \mathbb{H}$ için

$$L_{\pi_{\mathbb{H}}}(\gamma) = L_\pi(T \circ \gamma) \quad \text{ve} \quad d^{\mathbb{H}}_{\pi_{\mathbb{H}}}(a,b) = d^{\mathbb{D}}_\pi(T(a), T(b))$$

olur. Dolayısıyla $S := T^{-1}$ dönüşümü, $(\mathbb{D}, \operatorname{Aut}\mathbb{D})$ geometrisinin kısayollarını ve doğrularını $(\mathbb{H}, \operatorname{Aut}\mathbb{H})$ geometrisinin kısayolları ve doğrularına resmeder. S bir Möbius dönüşümü ve $S(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R}_\infty$ olduğundan, $\partial\mathbb{D}$'yi dik kesen Möbius çemberlerini $\mathbb{R}_\infty$'u dik kesen Möbius çemberlerine resmeder. Dolayısıyla $\mathbb{H}$'de doğrularımız, $\mathbb{H}$'deki $\mathbb{R}_\infty$'u dik kesen doğrularla merkezi $\mathbb{R}$'de olan C çemberlerinin $\mathbb{H}$'de olan kısımları, dd. $C_{\mathbb{H}} := C \cap \mathbb{H}$'ler olur; bunlara **$\pi_{\mathbb{H}}$-doğruları** diyelim. Şimdi $a^*, b^* \in \mathbb{H}$ noktaları $a^* \neq b^*$ olacak biçimde keyfi verilsinler. Bu noktalardan bir tek $\pi_{\mathbb{H}}$-doğrusu geçer; bu L^* olsun. $a = T(a^*)$ ve $b = T(b^*)$ dersek $L = T(L^*)$ bir π-doğrusudur. L^*'ın sınırdaki noktaları p^*, q^* ve $p = T(p^*)$, $q = T(q^*)$ olsun. Adlandırmaları uygun yaparsak p, a, b, q'nun konumları Şekil 7.20'deki gibi olur. Möbius dönüşümleri çiftoranı koruduğundan

$$d^{\mathbb{H}}_{\pi_{\mathbb{H}}}(a^*, b^*) = d^{\mathbb{D}}_\pi(a,b) = \frac{1}{2}\ln[a,q,b,p] = \frac{1}{2}\ln[a^*,q^*,b^*,p^*]$$

olur.

Hiperbolik Geometri ana konularımız içinde olmadığından, bu konuyu burada noktalamak istiyoruz. Son noktayı Gauss-Bonnet Teoremi ile koyacağız.

Ω bölgesinde bir ρ konformal metriği verilmiş olsun. Bu metriğe $d_\rho s = \rho(z)\,|dz|$ uzunluk elemanı karşılık getirmiştik. Dolayısıyla dx, dy Öklidik uzunluk elemanlarına sırasıyla $\rho(z)dx, \rho(z)dy$ ρ-uzunluk elamanları; bunun sonucu olarak $dxdy$ Öklidik alan elamanına

$$dA_\rho(z) := (\rho(z))^2 dxdy$$

ρ-alan elamanı karşılık getirilir. $U \subset \Omega$ Jordan ölçülebilirse

$$A_\rho(U) := \iint\limits_U dA_\rho(z) = \iint\limits_U (\rho(z))^2 dxdy$$

sayısına U'nun ρ-**alanı** denir. A_ρ sonlu toplamsaldır, dd. $U_1, \dots, U_n \subset \Omega$ Jordan ölçülebilir ve $i \neq j$ için $\mathring{U}_i \cap \mathring{U}_j = \emptyset$ ise, $A_\rho(U_1 \cup \cdots \cup U_n) = \sum_{i=1}^n A_\rho(U_i)$. Söylenen koşulu sağlayan $U_1, \dots, U_n$'lere **girişimsiz** diyelim.

Önsav 7.5.12. *$\Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ bölgeler, ρ ise Ω''de bir konformal metrik olsun. Her biholomorf $f : \Omega \to \Omega'$ ve her Jordan ölçülebilir $U \subset \Omega$ için*

$$A_\rho(f(U)) = A_{f^*\rho}(U). \tag{7.74}$$

Kanıt. KA I, Not 1.2.18'de gösterildiği gibi $\det J_f(z) = |f'(z)|^2$ olduğundan $z = x + iy$, $w = u + iv$ ve $w = f(w)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_\rho(f(U)) &= \iint\limits_{f(U)} (\rho(w))^2 du dv = \iint\limits_{U} (\rho(f(z)))^2 \det J_f(z) dx dy \\ &= \iint\limits_{U} \left(\rho(f(z)) \left|f'(z)\right|\right)^2 dx dy = \iint\limits_{U} ((f^*\rho)(z))^2 dx dy = A_{f^*\rho}(U). \end{aligned}$$

□

Sonuç 7.5.13. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı ve $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ en az iki nokta içeriyorsa, π_Ω-alanı bir* $\operatorname{Aut}\Omega$ *değişmezidir.*

Kanıt. Savı önce $\mathbb{D}$ için görelim: Daha önce de (7.68) eşitliğinden, her $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ için $f^*\pi = \pi$ olduğunu belirtmiştik. Bu, (7.74) ile birlikte savı $\mathbb{D}$ için verir, dd. her Jordan ölçülebilir $U \subset \mathbb{D}$ ve her $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ için $A_\pi(f(U)) = A_\pi(U)$.

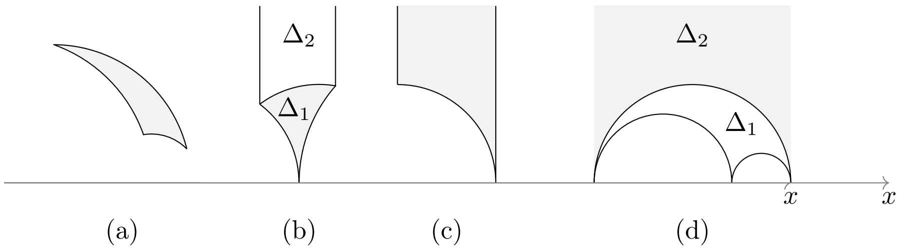
Şimdi Ω basit bağlantılı bölgesi koşullarımızı sağlıyorsa, bir biholomorf $h : \Omega \to \mathbb{D}$ vardır (bkz. Teorem 7.6.4). Şimdi $U \subset \Omega$ Jordan ölçülebilir olsun ve $g \in \operatorname{Aut}\Omega$ keyfi verilsin. Bir $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ ile $g = h^{-1} \circ f \circ h$ olacağından, (7.74) ile

$$A_{\pi_\Omega}(U) = A_\pi(h(U)) = A_\pi(f(h(U))) = A_{\pi_\Omega}(h^{-1}(f(h(U)))) = A_{\pi_\Omega}(g(U)).$$

□

Bir hiperbolik π_Ω-üçgenin π_Ω-alanını hesaplayalım. Önsav 7.5.12'den dolayı bunu herhangi bir modelde yapmak yeterlidir. Biz $\mathbb{H}$'de çalışacağız. $\mathbb{D}$ ve $\mathbb{H}$'deki hiperbolik geometrimizde, doğal biçimde, sonsuz uzakta sırasıyla $\partial\mathbb{D}$ ve $\mathbb{R}_\infty$ sınır noktalarımız vardır. $\mathbb{H}$'deki bir $\pi_\mathbb{H}$-üçgeninin kenarları $\pi_\mathbb{H}$-doğru parçalarından oluşur: Yani bunlar ya y-eksenine koşut bir Öklidik doğru parçası, ya da merkezi $\mathbb{R}$'de olan bir çember üzerideki bir yay parçasıdır.

Önce üçgenlerimizin sınırda köşeleri olmasına izin vereceğiz. En az bir köşesi sınırda, dd. $\mathbb{R}_\infty$'da olan bir üçgene **aşkın** diyelim. Şekil 7.23'te görüldüğü gibi dört tip üçgenimiz vardır; soldan sağa sırasıyla, sınırdaki köşe sayıları 0, 1, 2



Şekil 7.23: Hiperbolik üçgen tipleri. (a), (b), (c) ve (d)'deki üçgenlerimizin sonsuzdaki köşe sayıları sırasıyla 0, 1, 2 ve 3'tür.

ve 3 olanlar. Üçgenimizin bir köşesi a ve bu köşedeki iç açısı α olsun. $a \in \mathbb{R}$ ise, bu köşeden çıkan kenarlarımızın her ikisi de x-eksenine dik oldukları için; yok eğer $a = \infty$ ise, bu köşeden çıkan kenarlar birbirine paralel oldukları için $\alpha = 0$ olur. Özetle, bir aşkın üçgenin sınırdaki köşelerdeki iç açıları sıfırdır.

(7.73)'ten dolayı

$$dA_{\pi_{\mathbb{H}}}(z) = \frac{dxdy}{4y^2}$$

olur.[11] $\hat{\pi}_{\mathbb{H}} = 2\pi_{\mathbb{H}}$ konformal metriği içinse $dA_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(z) = 4dA_{\pi_{\mathbb{H}}}(z) = \frac{dxdy}{y^2}$ olur. Dolayısıyla, Jordan ölçülebilir her $U \subset \mathbb{H}$ için $A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(U) = 4A_{\pi_{\mathbb{H}}}(U)$.

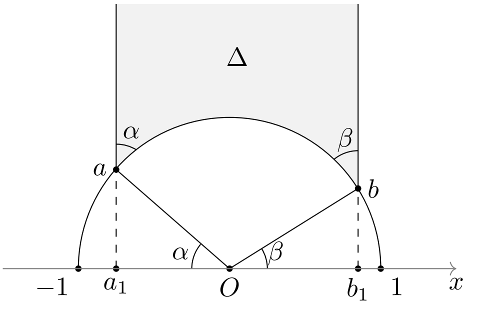
Teorem 7.5.14 (Gauss-Bonnet)**.** *Aşkın da olabilen $\Delta \subset \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_\infty$ üçgeninin iç açıları α, β, γ ise*

$$4A_{\pi_{\mathbb{H}}}(U) = A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(U) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Kanıt. (1) $a, b \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_\infty$ olmak üzere Δ aşkın üçgenimizin köşeleri a, b, ∞ ve iç açıları sırasıyla $\alpha, \beta, 0$ olsun. Üçgenimizin $[a, \infty]_{\pi_{\mathbb{H}}}$ ve $[b, \infty]_{\pi_{\mathbb{H}}}$ kenarları x-eksenine dik yönde öklidik yarıdoğrulardır. $[a, b]_{\pi_{\mathbb{H}}}$ kenarı ise merkezi x-ekseni üzerinde olan bir çemberin bir yay parçasıdır. Bir Möbius dönüşümüyle bu üçgeni, $a', b' \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_\infty$ ve $|a'| = |b'| = 1$ olacak biçimde köşeleri a', b', ∞ olan bir Δ' $\pi_{\mathbb{H}}$-üçgenine taşıyalım.

Bu taşımada açılar ve $\pi_{\mathbb{H}}$-alanı korunduğundan (bkz. Sonuç 7.5.13), savı bu üçgen için kanıtlamak yeterlidir. Dolayısıyla daha baştan $|a| = |b| = 1$ varsayabiliriz (bkz. Şekil 7.24). $[a, \infty]_{\pi_{\mathbb{H}}}$ ve $[b, \infty]_{\pi_{\mathbb{H}}}$ kenarlarının uzantıları x-eksenini a_1 ve b_1 noktalarında kessinler. $a = a_1 = -1$ veya $b = b_1 = 1$ olabilir.

[11]Eğer $\mathbb{D}$'de $\pi(z) = |dz| / (1 - |z|^2)$ konformal metriği ile çalışıyor olsaydık, bu kez $dxdy$ öklidik alan elemanına $dA_\pi(z) = dxdy/(1 - |z|^2)^2$ alan elemanını karşılık getirirdik.



Şekil 7.24

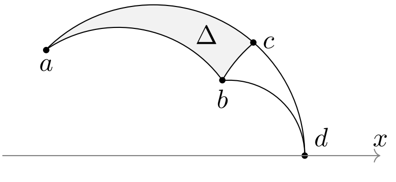
Bu durumda

$$A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(\Delta) = \iint\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{y^2} = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\stackrel{*}{=} \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin t}{\sin t} dt = \pi - \alpha - \beta.$$

$\stackrel{*}{=}$'da $x = \cos t \, (0 \leq t \leq \pi)$ değişken değişimi yapılmıştır.

(2) $a, b \in \mathbb{H}$ olmak ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere Δ aşkın üçgenimizin köşeleri a, b, c ise bu, iç açılar ve $\pi_{\mathbb{H}}$-alanı korunarak, bir Möbius dönüşümü ile köşeleri $a', b' \in \mathbb{H}$ ve $c' = \infty$ olan bir Δ' üçgenine taşınır. Böylece (1) ile $A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(\Delta) = A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(\Delta') = \pi - \alpha - \beta$ olur.

(3) Δ üçgenimiz aşkın olmasın, dd. $a, b, c \in \mathbb{H}$ (bkz. Şekil 7.25).



Şekil 7.25

$[a, c]_{\hat{\pi}}$ kenarını d sınır noktasına kadar uzatalım. Köşeleri a, b, d olan hiperbolik üçgenimize Δ' ve köşeleri b, c, d olan hiperbolik üçgenimize Δ'' dersek savımız doğrudan $A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(\Delta) + A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(\Delta'') = A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(\Delta')$ eşitliğinden çıkar. □

Bir $U \subset \mathbb{H}$ kümesine, bir $a \in U$ iç noktası her $z \in U$ için $[a, z]_{\pi_{\mathbb{H}}} \subset U$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, a'ya göre **hiperbolik** veya $\pi_{\mathbb{H}}$**-yıldız biçimli** diyelim.

Sonuç 7.5.15. *P, açıları $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ olan bir yıldız biçimli $\pi_{\mathbb{H}}$-poligonuysa*

$$A_{\hat{\pi}_{\mathbb{H}}}(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Kanıt. P eğer $a \in P$'ye göre $\pi_{\mathbb{H}}$-yıldız biçimli ise, P'nin her bir k_i köşesini $[k_i, a]_{\pi_{\mathbb{H}}}$ doğru parçası ile a ile birleştirelim. Böylece P poligonu girişimsiz $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ $\pi_{\mathbb{H}}$-üçgenlerine parçalanır (bir şekil çiziniz). Sav $A_{\pi_{\mathbb{H}}}(P) = \sum_{i=1}^{n} A_{\pi_{\mathbb{H}}}(\Delta_i)$ eşitliğinden çıkar. □

Poblemler

Problem 7.5.1. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $g \in \mathcal{C}^2(B, \mathbb{R})$ pozitif değerler alsın. $\gamma : [a, b] \to B$ gezisi $\mathcal{C}^1$ sınıfındansa

$$L_g(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g(\gamma(t))}|\gamma'(t)|dt \text{ ve her } z_1, z_2 \in B \text{ için}$$
$$d_g(z_1, z_2) := \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{G}^1_{z_1,z_2,p}(B)\}$$

olsun. Burada $\mathcal{G}^1_{a,b,p}(B)$, B'de başlangıç noktası $z_1$ve bitiş noktası z_2 olan parçalı $\mathcal{C}^1$ gezilerinin kümesidir. $d_g : B \times B \to \mathbb{R}$'nin bir metrik olduğunu gösteriniz.

Problem 7.5.2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $\rho : \Omega \to [0, +\infty)$ bir konform metrikse d^{Ω}_{ρ}'nun bir metrik olduğunu gösteriniz.

Problem 7.5.3. Her holomorf $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonunun $d^{\mathbb{D}}_{\pi}$ metriğine göre bir büzülme, dd. her $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ için $d^{\mathbb{D}}_{\pi}(f(z_1), f(z_2)) \leq d^{\mathbb{D}}_{\pi}(z_1, z_2)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 7.5.4. $(\mathbb{D}, d^{\mathbb{D}}_{\pi})$ uzayının bir tam metrik uzay olduğunu gösteriniz.

Problem 7.5.5. $0 < r \in \mathbb{R}$ ve $\rho = (e^{2r} - 1)/(e^{2r} + 1)$ olmak üzere $D^{\pi}_r(0) = D_{\rho}(0)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 7.5.6. $C^{\pi}_r(a)$ hiperbolik çemberi hangi Öklidik çemberdir, bulunuz.

Problem 7.5.7. (7.72) ve $\frac{1}{2} \ln \frac{1+s}{1-s} = s + s^3 + \cdots$ açılımından yararlanarak, her $a \in \mathbb{D}$ için

$$\lim_{z \to a} \frac{d^{\mathbb{D}}_{\pi}(z, a)}{d(z, a)} = \lim_{z \to a} \frac{d^{\mathbb{D}}_{\pi}(z, a)}{|z - a|} = \frac{1}{1 - |a|^2}$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak $d^{\mathbb{D}}_{\pi}$ ve d metriklerinin $\mathbb{D}$'de aynı topolojiyi tanımladığını kanıtlayınız.

Problem 7.5.8. (7.63) ile $\mathbb{D}$'de bir metrik tanımlandığını gösteriniz.

Problem 7.5.9. $c \in [a, b]_{\pi}$ ise $d^{\mathbb{D}}_{\pi}(a, b) = d^{\mathbb{D}}_{\pi}(a, c) + d^{\mathbb{D}}_{\pi}(c, b)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 7.5.10. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dönüşümü $d^{\mathbb{D}}_{\pi}$-ye göre bir izometri ise, ya $f \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ ya da ya $\overline{f} \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ olduğunu gösteriniz.

7.6 Riemann Dönüşüm Teoremi

Konform dönüşümler kuramının temel konularından biri, B_1, B_2 gibi verilen iki bölgenin konform denk olup olmadıklarını araştırmaktır; başka sözlerle biholomorf bir $f : B_1 \to B_2$ dönüşümünün olup olmadığını araştırmaktır. Biholomorf dönüşümler özellikle topolojik dönüşümler olduklarından, B_1 ve B_2 bölgelerinin konform denk olabilmeleri için topolojik olarak denk olmaları gereklidir. Ancak biz KA I'de, Liouville Teoremi'nin bir sonucu olarak, topolojik denk olan $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ bölgelerinin konform denk olmadıklarını gördük. Bu sonuca doğrudan 7.4.8(i)'den de ulaşılır.

Önümüzdeki problem bu haliyle çok geneldir. Biz bu kısımda $\mathbb{D}$'ye konform denk olan $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgelerini belirleyeceğiz. Yukarıda $\mathbb{C}$'nin $\mathbb{D}$'ye konform denk olmadığını belirttik. $\mathbb{C}_\infty$ kompakt, $\mathbb{D}$ ise kompakt olmadığından, $\mathbb{C}_\infty$ da $\mathbb{D}$'ye holomorf denk değildir.

Teorem 7.6.1. *$B, B^* \subset \mathbb{C}$ bölgeler ve $\varphi : B \to B^*$ biholomorf olsun. B homolojik basit bağlantılı ise, B^* da homolojik basit bağlantılıdır.*

Kanıt. Genellikten bir şey kaybetmeden kanıtta karşılaşacağımız tüm gezilerinin parametre aralığını $[0, 1]$ olarak seçebiliriz.

B^*'ın homolojik basit bağlantılı olmadığını varsayalım. Bu durumda bir kapalı $\gamma^* \in \mathcal{G}^1(B^*)$ gezisi ve bir $c \in \mathbb{C}\backslash B^*$ noktası $n = n(\gamma^*, c) \neq 0$ olacak biçimde vardır. $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma^*}$'ın c noktasını içeren bağlantılı bileşenine D^* diyelim. $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma^*}$'ın bir tek sınırsız bileşeni vardır ve orada γ^*'ın dönme sayısı 0'dır. Dolayısıyla D^* sınırlıdır ve $D^* \cap B^* \neq \emptyset$. Şimdi $a^* \in D^* \cap B^*$ olsun. Elbette $n(\gamma^*, a^*) = n$ olur. $a := \varphi^{-1}(a^*)$ ve $\gamma := \varphi^{-1} \circ \gamma^*$ olsun, dolayısıyla $a^* = \varphi(a)$ ve $\gamma^* = \varphi \circ \gamma$ olur. a ve γ tek olarak belirlidirler. Ayrıca $\gamma \in \mathcal{G}^1(B)$ de kapalıdır. Bu gösterimlerle

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{dw}{w-a^*} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(\gamma^*(t))'}{\gamma^*(t)-a^*}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\varphi'(\gamma(t))\gamma'(t)}{\varphi(\gamma(t))-\varphi(a)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(a)}d\xi, \quad f(\xi) := \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(a)} \\
&= n(\gamma, a)\,\mathrm{Res}(f, a) = n(\gamma, a), \quad (\mathrm{Res}(f, a) = 1)\,.
\end{aligned}
$$

Burada şunu belirtmekle yetinelim: φ biholomorf olduğundan f fonksiyonunun yalnızca $\xi = a$ noktasında birinci dereceden bir kutup yeri vardır. Böylece $0 \neq n = n(\gamma^*, a^*) = n(\gamma, a)$ sonucuna ulaştık.

$B\backslash\underline{\gamma}$'nın a noktasını içeren bağlantılı bileşeni D olsun. $n(\gamma, a) \neq 0$ olduğundan D sınırlıdır. Diğer yandan D^* bağlantılı, $c, a^* \in D^*$ ve $c \notin B^*$ ve $a^* \in B^*$ olduğundan, D^*'da a^* noktasını c noktasına bağlayan bir gezi ∂B^*'ı keser, dd. $D^* \cap \partial B^* \neq \emptyset$ olur. $d^* \in D^* \cap \partial B^*$ olsun. Başlangıç noktası a^* ve bitiş noktası d^* olan bir $\sigma^* : [0, 1] \to B^*$ gezisini $\sigma^*|[0, 1) \subset D^*$ olacak biçimde seçebiliriz.

$[0,1)$'de $\sigma := \varphi^{-1} \circ \sigma^*$ olarak tanımlansın. σ süreklidir. $\sigma([0,,1)) \subset D \cap B$ ve D sınırlı olduğundan, $t \to 1$ için $\sigma(t)$'nin yığılma noktaları vardır. ζ böyle bir yığılma noktası olsun. Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı $\zeta \notin B$, öyleyse $\zeta \in \partial B$ olur. Tanım gereği $\underline{\sigma^*}$ ve $\underline{\gamma^*}$ ayrık kompakt kümeler ve φ biholomorf olduğundan, bir yandan $\underline{\sigma} \cap \underline{\gamma} = \emptyset$ olur, diğer yandan $t \to 1$ için $\sigma(t)$'nin $\underline{\gamma}$'da yığılma noktası olamaz. Böylece $\zeta \in D$ ve dolayısıyla $n(\gamma, \zeta) = n \neq 0$ olur. $\zeta \in \partial B$, dolayısıyla $\zeta \notin B$, ancak $n(\gamma, \zeta) \neq 0$ olduğundan bu, B'nin homolojik basit bağlantılılığı ile çelişir. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır ve B^* homolojik basit bağlantılıdır. □

Teorem 7.1.1 olduğu gibi $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgelerine de aktarılır. Ancak bunun için bir $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesinin homolojik basit bağlantılı olmasından ne anlayacağımızı tanımlayacağız. Her şeyden önce $\mathbb{C}_\infty$'u homolojik basit bağlantılı olarak tanımlıyoruz. Bir $B \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ için $\infty \notin B$ ise eski tanım korunacak ve $\infty \in B$ ise, $\chi(z) = 1/z$ olmak üzere, $B^* = \chi(B) \subset \mathbb{C}$ kümesi eski anlamda anlamında homolojik basit bağlantılı ise, dd. B^*'daki her Γ çevrimi sıfıra homologsa, $B \subset \mathbb{C}_\infty$ **homolojik basit bağlantılıdır** diyeceğiz. Bu tanımla B, B^* bölgeleri için de 7.6.1 geçerlidir. Ayrıca KA I Teorem 2.12.8, $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgeleri için de aynen geçerli kalır.

$\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ bölgelerinin her biri üç anlamda da basit bağlantılıdır. $\partial_\infty \mathbb{C}_\infty = \emptyset$, $\partial_\infty \mathbb{C} = \{\infty\}$ ve $\partial_\infty \mathbb{D} = \partial \mathbb{D} = \mathbb{S}$; bunlardan yalnızca $\partial \mathbb{D}$ birbirinden farklı iki nokta içerir. Bir $a \in \mathbb{C}$ için $T(z) := 1/(z-a)$ ile tanımlanan bikonform $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü, $B := \mathbb{C}_\infty \backslash \{a\}$ kümesini bikonform olarak $\mathbb{C}$'ye resmeder. $\mathbb{C}$ üç anlamda da basit bağlantılı olduğundan, B de üç anlamda da basit bağlantılıdır. İnanılması zor olan homolojik basit bağlantılı olan bir $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesinin, eğer $\partial_\infty B$ sınırı en az iki farklı nokta içeriyorsa, $\mathbb{D}$'ye konform denk olduğudur. Riemann Dönüşüm Teoremi bunu ileri sürer ve bunu kanıtladığımızda KA I Teorem 2.12.8'in kanıtındaki eksik adım da tamamlanmış olacaktır. Topolojik dönüşümler evrimsel (homotopik) basit bağlantılılığı korur. $B \subset \mathbb{C}_\infty$ homolojik basit bağlantılı bir bölge ise, üç durum söz konusudur: (1) $B = \mathbb{C}_\infty$, (2) Bir $a \in \mathbb{C}_\infty$ ile $B = \mathbb{C}_\infty \backslash \{a\}$ ve (3) $\partial_\infty B$ en az farklı iki nokta içerir. $\mathbb{C}_\infty$ evrimsel basit bağlantılıdır. B bölgesi ikinci durumda $\mathbb{C}$'ye, üçüncü durumda ise, Riemann Dönüşüm Teoremi kanıtlandığında, $\mathbb{D}$'ye topolojik denk olduğundan evrimsel basit bağlantılıdır.

$a, b \in \mathbb{C}_\infty$, $a \neq b$ ve $B \subset \mathbb{C}_\infty \backslash \{a, b\}$ homolojik basit bağlantılı olsun. Eğer $b = \infty$ değilse bir Möbius dönüşümüyle bu sağlanabileceğinden, genellikten bir şey kaybetmeden baştan $b = \infty$ olduğunu varsayabilir ve $B \subsetneq \mathbb{C}$ homolojik basit bağlantılı bölgelerine odaklanabiliriz.

Önerme 7.6.2. *$B \subsetneq \mathbb{C}$ homolojik basit bağlantılı olsun ve bir $b \in B$ keyfi verilsin. $0 \in D \subset \mathbb{D}$ koşulunu sağlayan bir D bölgesi ve $f(b) := 0$ koşulunu sağlayan bir biholomorf $f : B \to D$ dönüşümü vardır.*

Kanıt. $a \in \mathbb{C}\backslash B$ ve her $z \in B$ için $h(z) = z - a$ olsun. h birebirdir ve her $z \in B$ için $h(z) \neq 0$. KA I Teorem 2.12.10(vi)'dan dolayı $\mathbf{log}\, h$'nin B'de holomorf bir $\log h$ dalı vardır; bu ise bize B'de $\sqrt{h}$'nin bir holomorf g dalını verir. Yani bir $g \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonumuz $g = \sqrt{h}$ olacak biçimde vardır. $z, w \in B$ için

$$g(z) = \pm g(w) \Longrightarrow h(z) = h(w) \Longrightarrow z = w \tag{7.75}$$

olduğundan, g birebirdir.

$B_1 := g(B)$ olsun. g birebir holomorf fonksiyon olarak bir açık dönüşümdür, dolayısıyla B_1 de bir bölgedir ve $g : B \to B_1$ biholomorftur. Elbette $0 \notin B_1$. Şimdi, $w \in B_1$ ise $-w \notin B_1$ olduğunu savunuyoruz. Gerçekten de $z_1, z_2 \in B_1$ noktalarıyla $w = g(z_1) = -g(z_2)$ ise, (7.75)'ten $z_1 = z_2$, ardından da $w = -w$, dolayısıyla $-w = w \Longrightarrow w = 0$ çelişkisine ulaşırız. B_1'de bir $D_{2r}(b) \subset B_1$ dairesi seçelim. Az önce kanıtlanandan $D_{2r}(-b) = -D_{2r}(b) \subset \mathbb{C}\backslash B_1$ olur.

Şimdi $c := -b$ olmak üzere $T_1(z) := \frac{r}{z-c}$ ile tanımlanan Möbius dönüşümü B_1 bölgesini bir $B_2 \subset \mathbb{C}$ bölgesine biholomorf resmeder. Ayrıca, her $z \in B_1$ için $|z - c| \geq 2r$ olduğundan $|T_1(z)| \leq 1/2$, dolayısıyla $B_2 \subset \mathbb{D}$ olur. Eğer $d := T_1(g(b)) = 0$ ise, $f := T_1 \circ g$ ve $D := B_2$ işimizi görür; eğer $d \neq 0$ ise, bu kez $T_d(z) := \frac{z-d}{\bar{d}z-1}$ olmak üzere $f = T_d \circ T_1 \circ g$ ve $D := T_d(B_2)$ işimizi görür. □

Şimdi B ve $b \in B$ yukarıdaki gibi olmak üzere

$$\mathcal{F} := \{f \mid f : B \to \mathbb{D} \text{ birebir, holomorf ve } f(b) = 0\}$$

olsun. Önerme 7.6.2'den dolayı $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Bizim aradığımız $\mathcal{F}$'nin öğelerinden aynı zamanda örten olanlardır. Bunları aramanın yollarından biri herhangi bir bağlamda ekstrem olanlarına bakmaktır. $f(B) = \mathbb{D}$ olması için f'nin herhangi bir $c \in B\backslash\{b\}$ noktasını 0'dan olabildiğince uzağa resmetmesi gerektiğini düşünüyoruz. Dolayısıyla bir $c \in B\backslash\{b\}$ seçip

$$\rho := \sup\{|f(c)| \mid f \in \mathcal{F}\}$$

olarak tanımlıyoruz. Her $f \in \mathcal{F}$ için $f(c) \neq 0$ olduğundan, $\rho > 0$ olur.

Bu kısımda $\mathcal{F}$ ve ρ daima bu anlamlara sahip olacaklardır.

Önerme 7.6.3. *Veriler yukarıdaki gibi olmak üzere $|f(c)| = \rho$ koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{F}$ fonksiyonları vardır, dd. $\rho := \max\{|f(c)| \mid f \in \mathcal{F}\}$.*

Kanıt. Tanım gereği bir $(f_n) \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{H}(B)$ dizisi $\lim |f_n(c)| = \rho$ olacak biçimde vardır. KA I Montel Teoremi 3.3.5'ten dolayı, (f_n) dizisinin B'de kompakt yakınsak bir (f_{n_k}) alt dizisi vardır. $f = \lim f_{n_k}$ olsun. Şimdi $f \in \mathcal{F}$ olduğunu savunuyoruz. Her şeyden önce $f(b) = 0$ ve $|f(c)| = \rho > 0$ olduğundan, f sabit değildir. KA I Birebirliğin Korunumu 4.2.24'ten dolayı f birebirdir, sonunda $f \in \mathcal{F}$ olur. Diğer yandan $f(B)$ açık ve $f(B) \subset \overline{\mathbb{D}}$ olduğundan, $f(B) \subset \mathbb{D}$ olur. □

Teorem 7.6.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ homolojik basit bağlantılı ve $\mathbb{C}_\infty \backslash B$ en az iki farklı nokta içeriyorsa, keyfi seçilen her $b \in B$ için $f(b) = 0$ koşulunu sağlayan biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümleri vardır. Özellikle Önerme 7.6.3'ün koşullarında $|f(c)| = \rho$ koşulunu sağlayan her $f \in \mathcal{F}$ için $f : B \to \mathbb{D}$ biholomorftur.*

Kanıt. Daha önce irdelediğimiz gibi $B \subsetneq \mathbb{C}$ varsayabiliriz. $b \in B$ ve $c \in B\backslash\{b\}$ olmak üzere $f \in \mathcal{F}$ fonksiyonu $|f(c)| = \rho$ olacak biçimde seçilsin; (7.3.3) böyle f'lerin varlığını garantiler. Biz $f(B) = \mathbb{D}$, dolayısıyla $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümünün biholomorf olduğunu savunuyoruz. Tersini varsayalım ve $w \in \mathbb{D}\backslash f(B)$ olsun. O zaman $|g(c)| > \rho$ koşulunu sağlayan bir $g \in \mathcal{F}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayıp bir çelişkiye ulaşacağız.

$T_w \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ dönüşümü (bkz. (7.54)) için $T_w(0) = w$, $T_w(w) = 0$ ve $T_w^{-1} = T_w$. Dolayısıyla $T_w \circ f : B \to \mathbb{D}$ birebir ve $B' := (T_w \circ f)(B)$ dersek, B' bir yandan homolojik basit bağlantılı, diğer yandan $0 \notin B'$. Dolayısıyla B''de $\sqrt{\mathrm{Id}}$ fonksiyonun bir holomorf dalı vardır, dd. B''de holomorf bir k fonksiyonu $k(z) = \sqrt{z}$ olacak biçimde vardır. k'nin birebir olduğu, (7.6.2)'de olduğu gibi, kolayca görülür. Şimdi

$$B \xrightarrow{f} \mathbb{D} \xrightarrow{T_w} B' \xrightarrow{k} \mathbb{D} \xrightarrow{T_{k(w)}} \mathbb{D}$$

ve $g := T_{k(w)} \circ k \circ T_w \circ f$ olsun. $g : B \to \mathbb{D}$ birebir, holomorf ve $g(b) = 0$ olduğundan $g \in \mathcal{F}$ olur. $k^{-1}(\zeta) = \zeta^2$ ve her $a \in \mathbb{D}$ için $T_a^{-1} = T_a$ olduğunu gözetirsek $h(z) := T_w((T_{k(w)}(z))^2)$ ile tanımlanan $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonu holomorftur. Ayrıca $h \circ g = f$ ve $h(0) = 0$. Ancak h'nin tanımında bir yerde kare aldığımızdan h birebir değildir. Dolayısıyla Schwarz Önsavı'ndan, her $z \in \mathbb{D}^*$ için $|h(z)| < |z|$ özellikle $g(c) \in \mathbb{D}^*$ olduğundan $|f(c)| = |h(g(c))| < |g(c)|$ eşitsizliği sağlanır ki bu, aradığımız çelişkidir.

İkinci Kanıt: Önerme 7.6.2'den dolayı, B bölgesi $0 \in D \subset \mathbb{D}$ koşulunu sağlayan bir D bölgesine biholomorf resmedilir. Bu D'yi biholomorf $\mathbb{D}$'ye resmedersek işimiz biter. Eğer $D = \mathbb{D}$ ise, işimiz zaten bitmiştir. Dolayısıyla $D \subsetneq \mathbb{D}$ ve $b \in \mathbb{D}\backslash D$ olsun. T_b'nin yagâne sıfır yeri b olduğundan onun D'de sıfır yeri yoktur. Dolayısıyla, D homolojik basit bağlantılı olduğundan, $h^2 = T_b$ olacak biçimde bir $h \in \mathcal{H}(D)$ fonksiyonumuz vardır. Her $z \in D$ için $|T_b(z)| < 1$ ve T_b birebir olduğundan, aynı zamanda $|h(z)| < 1$ ve h de birebirdir. Şimdi $c := h(0)$ olsun ($0 \in D$). Bu durumda $\varphi := T^+ \circ h : D \to \mathbb{D}$ birebir ve holomorftur. Açık yazılımla

$$\varphi(z) = \frac{h(z) - c}{\bar{c}h(z) - 1} \text{ ve } \varphi(0) = 0.$$

Basit bir hesaplamayla

$$|\varphi'(0)| = \frac{|b| + 1}{2 \cdot \sqrt{|b|}} > 1$$

olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz.

$$\mathcal{F}_D := \{f : D \to \mathbb{D} \,|\, f \text{ holomorf, birebir ve } f(0) = 0\}$$

ve

$$M := \sup\{|f'(0)| \,|\, f \in \mathcal{F}_D\}$$

olsun. $\varphi \in \mathcal{F}_D$ olduğundan $\mathcal{F}_D$ boştan farklıdır. Ayrıca $|\varphi'(0)| > 1$ olduğundan $M > 0$ olmalıdır ve $M = +\infty$ olasılığı baştan dışlanamaz. Bir $(f_n) \subset \mathcal{F}_D$ dizisini $\lim |f_n'(0)| = M$ olacak biçimde seçelim. KA I Montel Teoremi 3.3.15'ten dolayı, (f_n) dizisinin B'de kompakt yakınsak bir (f_{n_k}) alt dizisi vardır. $f = \lim f_{n_k}$ olsun. Şimdi $f \in \mathcal{F}_D$ olduğunu savunuyoruz. Her şeyden önce $f \in \mathcal{H}(D)$ ve $f(0) = 0$ olur. Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'e göre $\mathcal{H}(D)$'de $f' = \lim f'_{n_k}$ olduğundan, $|f'(0)| = \lim |f'_{n_k}(0)| = M > 0$ ve M sonlu olur. $f'(0) \neq 0$ olduğundan f sabit olamaz. Bu ve Birebirliğin Korunumu Teoremi'nden dolayı f birebirdir, sonunda $f \in \mathcal{F}_D$ olur.

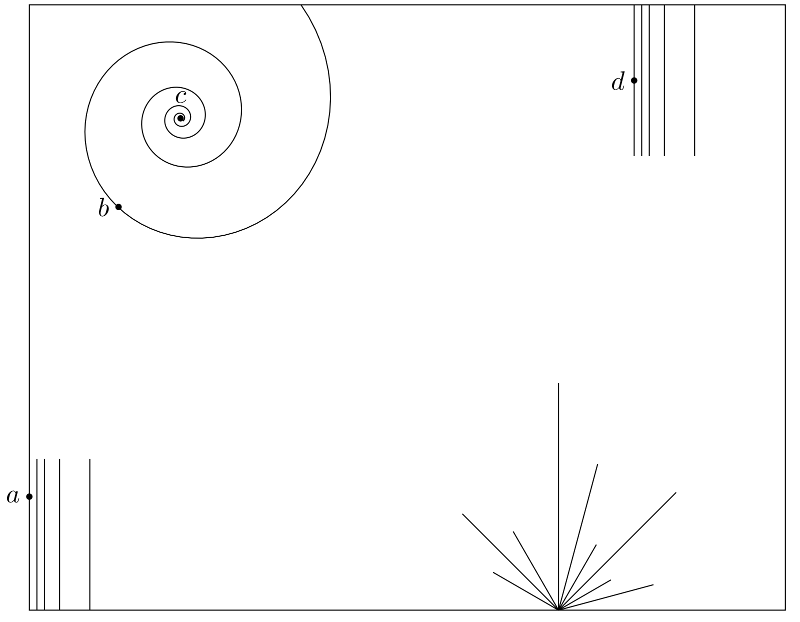
Şimdi $f \in \mathcal{F}_D$ ve $|f'(0)| = M$ ise, $f : D \to \mathbb{D}$'nin biholomorf olduğunu savunuyoruz (f'yi yine bir ekstrem özellikle seçtiğimize dikkat ediniz). $f(D) =: D_* \subsetneq \mathbb{D}$ olduğunu varsayalım. $f : D \to D_*$ biholomorf ve $0 \in D_*$ olduğundan, ilk paragrafta D için yaptığımız gibi bir $\varphi_* \in \mathcal{F}_{D_*}$ holomorf dönüşümünü $\varphi_*(0) = 0$ ve $\varphi_*'(0) > 1$ olacak biçimde bulabiliriz. Bu durumda $g := \varphi_* \circ f \in \mathcal{F}_D$ ve

$$|g'(0)| = |\varphi_*'(f(0))| \cdot |f'(0)| = |\varphi_*'(0)| \cdot |f'(0)| > |f'(0)|$$

olur ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $f : D \to \mathbb{D}$ biholomorftur. $\square$

Sonuç 7.6.5. *Herhangi bir $B \subset \mathbb{C}_\infty$ basit bağlantılı bölgesi $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}_\infty$'den birine ve ancak birine biholomorf resmedilebilir.*

7.6.4 Riemann Dönüşüm Teoremi son derece güçlü bir teoremdir. Bir yandan holomorf fonksiyonların oldukça katı olduklarını, dd. çok az bilgi ile belirlendiklerini gördük. Diğer yandan teoremimizin koşullarını sağlayan B basit bağlantılı bölgelerinden çok sayıda vardır. Bunların bazılarının ∂B sınırları son derece karmaşık olabilir, bkz. Şekil 7.26. Bu şekildeki tüm çubukları sayılabilir sonsuz olarak düşününüz. Altta sağdaki şekilde de birbirini kesmeyen sayılabilir çıkıntının sıklaşarak tabana yaklaştığını düşününüz. Ardından bu figürün sayılabilir birbirini kesmeyen, gittikçe küçülen kopyalarını sağ kenara doğru yaklaştırın. Elimizde sınırı çok karmaşık bir basit bağlantılı bölge var. $\partial\mathbb{D}$ bir analitik gezi iken, sınırı, bırakalım analitik bir gezi olmayı, bir integral gezisi bile olmayan basit bağlantılı bölgeler var! Buna rağmen bu bölgelerin, $\mathbb{D}$ gibi çok yalın bir bölgeye biholomorf olarak, dolayısıyla açıları yönleriyle koruyarak resmedilebilir olmaları inanılacak gibi değil! Ayrıca (7.6.4)'ten dolayı, $B \subset \mathbb{C}_\infty$ homolojik basit bağlantılı ve $\mathbb{C}_\infty \backslash B$ en az iki nokta içeriyorsa B bölgesi $\mathbb{D}$'ye topolojik denktir, dolayısıyla basit bağlantılıdır.



Şekil 7.26: Sınırı kısmen karmaşık bir basit bağlantılı bölge.

Bu kısmın ilk problemi, aşağıda ip uçlarını verdiğimiz, bu kez sup yerine inf ile çalışan üçüncü bir kanıtın verilen adımlarını tamamlamaktır.

$\Omega \subset \mathbb{C}$ sınırlı ve homolojik basit bağlantılı ve $z_0 \in \Omega$ keyfi verilsin.

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ birebir, holomorf, } f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0\} \tag{7.76}$$

ve

$$\mu := \inf_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_\Omega$$

olsun. İki şeyi hemen söyleyebiliriz. $z \in \Omega$ için $f(z) := z - z_0$ ise $f \in \mathcal{F}$, dolayısıyla $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ve ayrıca Ω sınırlı olduğundan $\|f\|_\Omega < +\infty$, ve bunun bir sonucu olarak $\mu < +\infty$. İzleyen ipuçlarında bu verileri ve gösterimleri saklı tutacağız.

(1) $\mu = \min_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_\Omega$. Kullanacağınız araçlar yukarıdaki kanıtlarda olduğu gibi Montel Teoremi, Weierstrass Yakınsaklık Teoremi ve Birebirliğin Korunumu teoremleridirler.

(2) $\Omega \subset \mathbb{C}$ *homolojik basit bağlantılı sınırlı bir bölge ve* $z_0 \in \Omega$ *keyfi seçilmiş ise, biholomorf bir* $h : \Omega \to \mathbb{D}$ *dönüşümü* $h(z_0) = 0$ *ve* $h'(z_0) > 0$ *olacak biçimde vardır.* İpucu: (1)'den dolayı bir $f \in \mathcal{F}$ fonksiyonu $\|f\|_\Omega = \mu$ olacak biçimde seçilebilir. Önce $f(\Omega) = D_\mu(0)$ ise, $h := \frac{1}{\mu} f$ işimizi görür. Geriye kalan $f(\Omega) \subsetneq D_\mu(0)$ varsayımının bizi bir çelişkiye götürdüğünü kanıtlamaktır.

$w_0 \in D_\mu(0) \backslash f(\Omega)$ ve $w_0 = re^{i\alpha}$ olsun. Şimdi

$$\Omega \xrightarrow{f} D_\mu(0) \xrightarrow{f_1} \mathbb{D} \xrightarrow{f_2} G(\subset \mathbb{D}) \xrightarrow{f_3} f_3(G) \xrightarrow{f_4} D_R(0)$$

birebir holomorf $f_1, \ldots, f_4$ dönüşümlerini şöyle tanımlayınız. Bu fonksiyonların tanım kümelerindeki değişkenleri sırasıyla $w, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ olarak gösterelim. Fonksiyonlarımız şunlar olacaktır.

$$\begin{aligned}
f_1(w) &:= -\frac{e^{-i\alpha}}{\mu} w, \;\; w \in D_\mu(0) \\
f_2(\zeta_1) &:= \frac{\zeta_1 - a}{1 - a\zeta_1}, \;\; a = -\frac{r}{\mu}, \; \zeta_1 \in \mathbb{D}, \\
f_3(\zeta_2) &:= \sqrt{\zeta_2}, \;\; \zeta_2 \in G := f_2(f_1(f(\Omega))), \\
f_4(\zeta_3) &:= \rho \frac{\zeta_3 - C}{1 - C\zeta_3}, \;\; \zeta_3 \in f_3(G), \, C = \sqrt{-a} > 0, \, \rho \text{ serbest parametre.}
\end{aligned}$$

Bu durumda $f_0 := f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f : \Omega \to D_{|\rho|}(0)$ birebir ve holomorftur. $f(z_0) = 0$'dır ve ρ parametresini $f_0'(z_0) = 1$ olacak biçimde seçersek $f_0 \in \mathcal{F}$ ancak $\|f_0\|_\Omega < \mu$ olur ve bu bir çelişkidir.

(3) Aşağıdaki teoremi kanıtlayınız:

Teorem 7.6.6 (Riemann Dönüşüm Teoremi)**.** $B \subset \mathbb{C}_\infty$ *basit bağlantılı bölgesi,* $\mathbb{C}_\infty$*'nin en az iki farklı noktasını içermesin ve* $z_0 \in B$ *keyfi verilsin. Bu durumda* $f(z_0) = 0$ *ve* $f'(z_0) = 1$ *koşulunu sağlayan tek olarak belirli bir biholomorf* $f : B \to \mathbb{D}$ *dönüşümü vardır.*

Bu teorem (7.6.4)'ten daha güçlüdür, nedeni ise $\mathcal{F}$'nin tanımında fazladan $f'(z_0) = 1$ talebimiz olmuştur.

İpucu: B'yi biholomorf olarak bir sınırlı $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesine resmetmektir. O zaman (7.6.4) ile biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümlerinin varlığına ulaşılır; bu arada $f'(z_0) > 0$ olması da sağlanabilir. $f_1, f_2 : B \to \mathbb{D}$ biholomorf ve $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$, $f_1'(z_0) > 0$, $f_2'(z_0) > 0$ koşulları sağlansın. Bu durumda $T := f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorftur, dolayısıyla bir Möbius dönüşümüdür ve buradan $f_1 = f_2$ elde edilir.

İpucunun ipucu: Şimdi $a, b \in \mathbb{C}_\infty$, $a \neq b$ ve $B \subset \mathbb{C}_\infty \backslash \{a, b\}$ homolojik basit bağlantılı olsun. Eğer $a = 0$ ve $b = \infty$ değilse bir Möbius dönüşümüyle bu sağlanabileceğinden, genellikten bir şey kaybetmeden baştan $b = \infty$ ve $a = 0$ olduğunu varsayabiliriz. Böylece $B \subset \mathbb{C}^*$ varsayabiliriz. (7.6.4)'ün kanıtında kullandığımız argümanlarla $\sqrt{z}$'nin B'de birebir ve holomorf bir dalı vardır. Şimdi bir $w_0 \in h(B)$ keyfi verilsin $r > 0$ sayısını $D_r(w_0) \subset h(B)$ olacak biçimde seçelim. $0 \notin h(B)$ olduğundan $D_r(w_0) \cap D_r(-w_0) = \emptyset$. Ayrıca açıkça $D_r(-w_0) = -D_r(w_0)$ olduğundan $h(B) \cap D_r(-w_0) = \emptyset$. Dolayısıyla $z \in B$ için $g(z) := 1/\left(h(z) + w\right)$ olarak tanımlanan $g : B \to g(B)$ biholomorftur. Ancak şimdi $\Omega := g(B)$ bir sınırlı bölgedir ve Teorem 7.6.1'den dolayı homolojik basit bağlantılıdır.

Not 7.6.7. 2 -bağlantılı $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgeleri için ne söyleyebiliriz? Kanıt vermeden kısaca bilgilendireceğiz. En basit iki bağlantılı bölgeler, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ olmak üzere, $H(r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$ halkalarıdır. Beklenti bu tipten iki halkanın konform denk olmalarıdır; ama hayır! *$H(r_1, r_2)$ halkasından $H(r_1', r_2')$ halkasına biholomorf bir f dönüşümünün bulunması için gerek ve yeter koşul bir $p > 0$ sayısı ile $r_1' = pr_1$ ve $r_2' = pr_2$ olmasıdır.* Bu savın bir yönü aşikardır: Böyle bir p varsa $f(z) = pz$ dönüşümü işimizi görür. *İki bağlantılı herhangi bir $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesi ise bir uygun $H(r_1, r_2)$ halkasına biholomorf resmedilebilir.* $a \neq b$ olmak üzere $\mathbb{C}_\infty \backslash B = \{a, b\}$ ise bunu görmek kolaydır: $T(a) = 0$ ve $T(b) = \infty$ koşulunu sağlayan herhangi bir Möbius dönüşümü B'yi $\mathbb{C}^* = H(0, +\infty)$ halkasına biholomorf resmeder. Şimdi $\mathbb{C}_\infty \backslash B$'nin bağlantılı bileşenleri X ve Y olsun ve Y en az iki nokta içersin.

Problemler

Problem 7.6.1. Kısmın sonunda verilen üçüncü kanıtın adımlarını gösteriniz.

Problem 7.6.2. $A \neq \emptyset$ kümesi bir Möbius çemberinin tek noktadan oluşmayan bir bağlantılı alt kümesi olsun. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf ve $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \backslash A$ ise, f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 7.6.3. $\emptyset \neq B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $c \in B$ olsun. $M := \{f'(c) \,|\, f \in \mathcal{H}(B)\}$ kümesi sınırlı mıdır? ($B = \mathbb{C}$ ve $B \subsetneq \mathbb{C}$ durumlarını ayrı ayrı inceleyiniz)

Problem 7.6.4. $Q = (-1, 1) \times (-1, 1)$ ve $f : \mathbb{D} \to Q$ fonksiyonu, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli biholomorf fonksiyonumuz olsun.

$$\forall z \in \mathbb{D} \;\; f(z) = -f(-z) = -if(iz) = \overline{f(\overline{z})}$$

olduğunu gösteriniz.

7.7 Biholomorf Dönüşümlerin Topolojik Genişlemeleri

Basit bağlantılı bölgelerin sınırlarının çok karmaşık olabileceğini söylemiştik. Şekil 7.26'daki basit bağlantılı bölgenin bazı sınır noktalarının farklı karakterde olduğun görülür. Bir $\alpha \in \partial B$ sınır noktasına, bir $\gamma : [0, 1] \to \overline{B}$ gezisi $\gamma([0, 1)) \subset B$ ve $\gamma(1) = \alpha$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **ulaşılabilir** diyelim. Bu durumda γ'ya bir **sınır kesiti** denir. $\gamma|[0, 1)$ yarıaçık gezisi B'dedir ve izinde olmayan yagâne yığılma noktası α'dır. Bu tanıma göre şeklimizdeki a sınır noktası ulaşılamazdır. d sınır noktasına soldan ulaşabiliriz, sağdan ulaşamayız.

$\alpha \in \partial B$ sınır noktasına, $\lim z_n = \alpha$ koşulunu sağlayan her $(z_n) \subset B$ dizisi için bir $\gamma : [0, 1] \to \overline{B}$ gezisi ve monoton artan bir $(t_n) \subset [0, 1)$ dizisi,

$\gamma([0,1)) \subset B$ ve $z_n = \gamma(t_n)$ olacak biçimde bulunabiliyorsa bir **basit sınır noktası** denir. Basit sınır noktaları ulaşılabilir noktalardır. Eğer $\lambda \subset \partial B$ basit pürüzsüz analitik eğrisi B'nin serbest sınır parçası ise, her $z \in \lambda$ noktası B'nin bir basit sınır noktasıdır.

$B \subset \mathbb{C}_\infty$ basit bağlantılı ve $\overline{B} \neq \mathbb{C}_\infty$ olsun. Bu durumda (7.6.4)'ten dolayı bir $f : B \to \mathbb{D}$ biholomorf dönüşümümüz vardır. Şimdi B bu koşulu sağlamak üzere verilen herhangi bir biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümü bir topolojik $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişletilebilir mi, bunu araştıracağız. Şimdi $a \in \mathbb{C}_\infty \backslash \overline{B}$ olmak üzere $T(z) = (z-a)^{-1}$ ile tanımlanan biholomorf $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ Möbius dönüşünü B'yi sınırlı ve basit bağlantılı $B' := T(B)$ bölgesine resmeder. Problemimizi B' için çözersek B için de çözmüş olacağız. Dolayısıyla daha baştan B'yi sınırlı seçebiliriz. Son şekliyle problemimiz şu olacaktır: $B \subset \mathbb{C}$ *sınırlı ve basit bağlantılı olmak üzere, her biholomorf* $f : B \to \mathbb{D}$ *dönüşümü bir topolojik* $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ *dönüşümüne genişletilebilir mi?*

F problemimizin bir çözümü ise, $\kappa_1 = \boldsymbol{\partial}\mathbb{D}$ bir Jordan gezisi olduğundan $\boldsymbol{\partial} B = F^{-1} \circ \kappa_1$ de bir Jordan gezisi olmalıdır. Sorumuz şimdi şu şekli alır: B bir sınırlı basit bağlantılı bölge ve ∂B bir Jordan gezisi ise, her biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümü bir topolojik $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişletilebilir mi? Aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 7.7.1 (Carathéodory)**.** *Sınırlı basit bağlantılı B bölgeleri için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *∂B bir Jordan gezisidir.*

(ii) *∂B basit noktalardan oluşur.*

(iii) *Her biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümü bir topolojik $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişletilebilir.*

Bu konular [4] ve [6]'da ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Ancak (ii)$\Longleftrightarrow$(iii)'ün [13]'te (ii)$\Longrightarrow$(iii)'ün ise [30]'da daha kısa kanıtlarını bulabilirsiniz. Biz burada (ii)$\Longrightarrow$(iii)'ün daha güzel özellikli ∂B sınırları için kanıtını vereceğiz; ancak bu, bir sonraki kısımda Küçük Picard Teoremi'nin kanıtı için yeteli olacaktır.

Her ne kadar (7.7.1)'in kanıtını vermeyecek olsak da, ondan çıkarılan şu teoremi verelim.

Teorem 7.7.2. *B_1 ve B_2 sınırlı basit bağlantılı bölgeler ve ∂B_1 ve ∂B_2 Jordan gezileri olsunlar.*

(i) *Her biholomorf $f : B_1 \to B_2$ dönüşümü bir $F : \overline{B_1} \to \overline{B_2}$ topolojik dönüşümüne genişletilebilir.*

(ii) *$f, g : B_1 \to B_2$ biholomorf dönüşümler ve $F, G : \overline{B_1} \to \overline{B_2}$ onların topolojik genişlemeleri olsunlar. ∂B_1'deki üç farklı noktada F ve G çakışırlarsa, $F = G$.*

(iii) ∂B_1 *üzerinde üç farklı* z_1, z_2, z_3 *noktaları* $\boldsymbol{\partial} B_1$ *yönünde ve benzer biçimde* ∂B_2 *üzerinde üç farklı* w_1, w_2, w_3 *noktaları* $\boldsymbol{\partial} B_2$ *yönünde olacak biçimde keyfi seçilsinler. Bu koşullarda bir biholomorf* $f : B_1 \to B_2$ *dönüşümü, kendisinin* $F : \overline{B}_1 \to \overline{B}_2$ *topolojik genişlemesi* $F(z_i) = w_i$ *olacak biçimde vardır ve* F *tek olarak belirlidir.*

Kanıt. (i) Riemann Dönüşüm Teoremi'nden dolayı bir biholomorf $g : B_2 \to \mathbb{D}$ dönüşümümüz vardır ve bu, (7.7.1)'den dolayı bir topolojik $G : \overline{B}_2 \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişler. Yine $h := g \circ f : B_1 \to \mathbb{D}$ biholomorf dönüşümü bir topolojik $H : \overline{B}_1 \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişler. Bu durumda $F := G^{-1} \circ H$ aranan topolojik genişlemedir.

(ii) Riemann Dönüşüm Teoremi'nden dolayı bir biholomorf $h_i : B_i \to \mathbb{D}$ dönüşümlerimiz vardır ve (7.7.1)'den dolayı bu dönüşümler topolojik $H_i : \overline{B}_i \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümlerine genişlerler. $T_f := H_2 \circ F \circ H^{-1}$ ve $T_g := H_2 \circ G \circ H^{-1}$'ler Möbius dönüşümleridirler ve varsayımımızdan dolayı $\partial\mathbb{D}$'deki üç farklı noktada çakışırlar. Dolayısıyla (7.3.10)'dan $T_f = T_g$ ve buradan ise $F = G$ olur.

(iii) Riemann Dönüşüm Teoremi'nden dolayı, biholomorf $h_i : B_i \to \mathbb{D}$ dönüşümlerimiz vardır ve (7.7.1)'den dolayı bu dönüşümler topolojik $H_i : \overline{B}_i \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümlerine genişlerler. $a_i := H_1(z_i)$ ve $c_i := H_2(w_i)$ olmak üzere a_1, a_2, a_3 ve c_1, c_2, c_3 sıralaması $\boldsymbol{\partial}\mathbb{D}$ ile uyumludur. $T \in \operatorname{Aut}\mathbb{D}$ Möbius dönüşümünü $T(a_i) = c_i$ olarak seçersek $f := h_2^{-1} \circ T \circ h_1$ ve $F = H_2^{-1} \circ T \circ H_1$ aranan çözümlerdir. Teklik (ii)'den çıkar. □

$B \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ basit bağlantılı ve $\partial_\infty B$ basit kapalı bir gezi olsun. $a \notin \mathbb{C}_\infty \backslash B$ olmak üzere $T_a(z) = (z-a)^{-1}$ ile $B' := T_a(B)$ olsun. Bu durumda B' basit bağlantılı ve $\partial B'$ basit kapalı bir gezidir. T_a biholomorf olduğundan, (7.7.1) ve (7.7.2) teoremlerinde basit bağlantılı bölgelerimizi $\mathbb{C}_\infty$'da seçebiliriz. Kullanacağımız kadarını bir teoremde toplayalım.

Teorem 7.7.3. $B, B_1, B_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ *basit bağlantılı bölgeler ve* $\partial_\infty B$*,* $\partial_\infty B_1$ *ve* $\partial_\infty B_2$ *basit kapalı geziler olsun.*

(i) Her biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ *dönüşümü bir topolojik* $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ *dönüşümüne genişletilebilir.*

(ii) ∂B_1 *üzerinde üç farklı* z_1, z_2, z_3 *noktaları* $\boldsymbol{\partial} B_1$ *yönünde ve benzer biçimde* ∂B_2 *üzerinde üç farklı* w_1, w_2, w_3 *noktaları* $\boldsymbol{\partial} B_2$ *yönünde olacak biçimde keyfi seçilsinler. Bu koşullarda bir biholomorf* $f : B_1 \to B_2$ *dönüşümü, kendisinin* $F : \overline{B}_1 \to \overline{B}_2$ *topolojik genişlemesi* $F(z_i) = w_i$ *olacak biçimde vardır ve* F *tek olarak belirlidir.*

$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve $(z_n) \subset U$ olsun. $\lim d(z_n, \partial U) = 0$ ise, bu dizi ∂U sınırına yaklaşır denir; bunu $z_n \to \partial U$ ile gösterelim. $z_n \to \partial U$ olması, her $K \subset U$ kompakt kümesine karşılık bir n_K doğal sayısının, her $n > n_K$ için $z_n \notin K$ olacak biçimde bulunmasına denktir.

Önsav 7.7.4. *(i) $U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler ve $f : U \to V$ sürekli fonksiyonu için kompakt kümelerin ters resimleri de kompakt olsun. Bu durumda, $z_n \to \partial U$ ise $f(z_n) \to \partial V$.*

(ii) $f : U \to \mathbb{D}$ topolojikse, $(z_n) \subset U$ ve $z_n \to \partial U$ için $|f(z_n)| \to 1$.

Kanıt. (i) $(z_n) \subset U$ ve $z_n \to \partial U$ olsun. $K' \subset V$ kompakt kümesi keyfi verilsin. $K := f^{-1}(K')$ kompakt kümesine karşılık n_K doğal sayısı, her $n > n_K$ için $z_n \notin K$ olacak biçimde seçilirse, her $n > n_K$ için $f(z_n) \notin K'$ olur ve bu, savı verir.

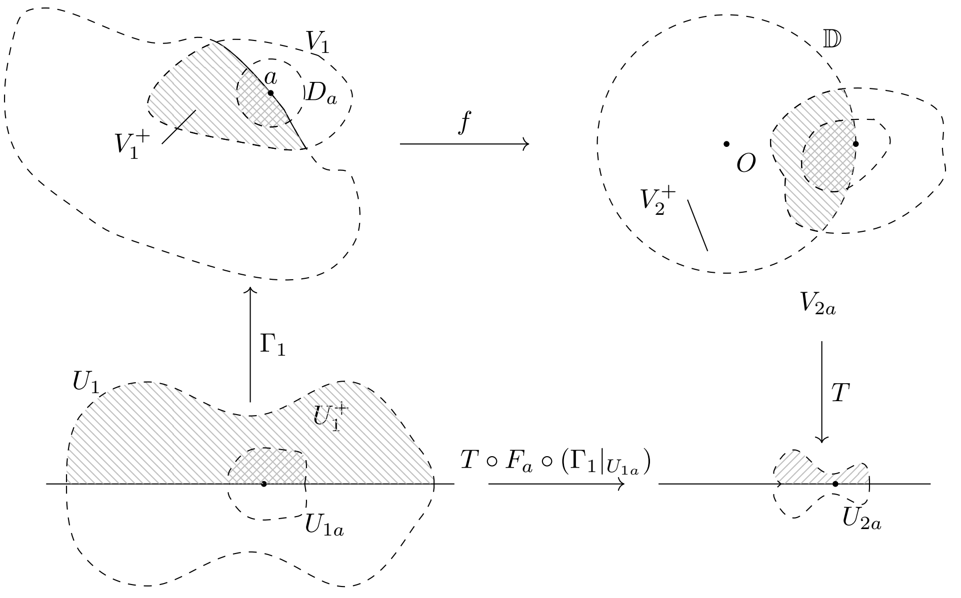
(ii) $(z_n) \subset U$ ve $z_n \to \partial U$ ise, (i)'den $f(z_n) \to \partial \mathbb{D}$, dolayısıyla $|f(z_n)| \to 1$ olur. □

Teorem 7.7.5. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ basit ve pürüzsüz reel analitik gezi, $\underline{\gamma} \subset \partial B$ ve $\underline{\gamma}$ ise B'nin bir serbest sınır parçası olsun. $f : B \to \mathbb{D}$ biholomorfsa, f fonksiyonu $\underline{\gamma}^\circ$'nın $\underline{\gamma}$'ya göre simetrik bir V komşuluğuna biholomorf genişletilebilir.*

Kanıt. x-eksenine göre simetrik U_1, U_2 açık bölgeleri ile γ'ya ve $\partial\mathbb{D}$'ye göre simetrik V_1 ve V_2 komşulukları ve $\Gamma_i : U_i \to V_i$ biholomorf dönüşümleri, $\Gamma_1(U_1^+) \subset B$, $\Gamma_2(U_2^+) \subset \mathbb{D}$ ve $f(V_1^+) \subset V_2^+$ olacak biçimde Şekil 7.16'daki gösterildiği gibi seçilebilirler. Önsav 7.7.4(ii)'den dolayı, V_1 kümesini $f(V_1^+) \subset D_1(1)$ olacak biçimde seçebiliriz (bkz. Şekil 7.16). Bu durumda $h(z) := \operatorname{Log} f(z)$ fonksiyonu V_1^+'de holomorftur. Dolayısıyla V_1^+'da $v := \ln |f| = \operatorname{Re} h$ bir harmonik fonksiyondur ve yine (7.7.4)(ii)'den $\lim_{z \to \partial B} v(z) = 0$ olur. Her $z \in \underline{\gamma}$ için $v(z) := 0$ olarak tanımlarsak $v \in \mathcal{C}(V_1^+ \cup \underline{\gamma})$ olur. Teorem 6.8.26'dan dolayı v fonksiyonu V_1'e harmonik olarak genişler.

Savımız yerel karakterlidir. $a \in \underline{\gamma}^\circ$ ve V_1'e düşen a-merkezli D_a dairesi verildiğinde, v fonksiyonu bu dairede holomorf bir g_a fonksiyonunun gerçel kısmıdır. D_a^+ da f ve g_a en fazla bir sanal sayı kadar fark ederler. Dolayısıyla, gerekirse g_a'ya sanal bir sabit ekleyerek D_a^+'da $f = g_a$ sağlanır. Böylece D_a'da f'yi g_a olarak holomorf genişletmiş oluruz. Şimdi $C_1^\circ := \underline{\gamma} \cap D_a$ ve $C_2 := V_2 \cap \partial\mathbb{D}$ olmak üzere $f|D_a^+$ fonksiyonu, Schwarz'ın Büyük Yansıma Teoremi'ne göre, C_1°'ın kendisine göre göre simetrik bir V_{1a} komşuluğuna simetrik noktalar simetrik noktalara gidecek biçimde holomorf bir F_a fonksiyonuna genişletilir. $V_{2a} := F_a(V_{1a})$ ve $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ ise, $\mathbb{D}$'yi üst yarıdüzleme resmeden herhangi bir Möbius dönüşümü olmak üzere $U_{2a} := T(V_{2a})$ olsun. $U_{1a} := \Gamma_1^{-1}(V_{1a})$ olmak üzere $T \circ F_a \circ (\Gamma_1 | V_{1a}) : V_{1a} \to V_{2a}$ dönüşümü (KA I Teorem 3.5.29'un koşullarını sağlar, dolayısıyla biholomorftur. Buradan ise F_a biholomorf olur. Dolayısıyla $V := \bigcup_{a \in \underline{\gamma}^\circ} V_{1a}$ işimizi görür. □

Bu teoremin bir sonucu şudur: ∂B pürüzsüz reel analitik bir Jordan eğrisi ve ∂B'nin her noktası B'nin bir serbest sınır noktası ise, her biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$



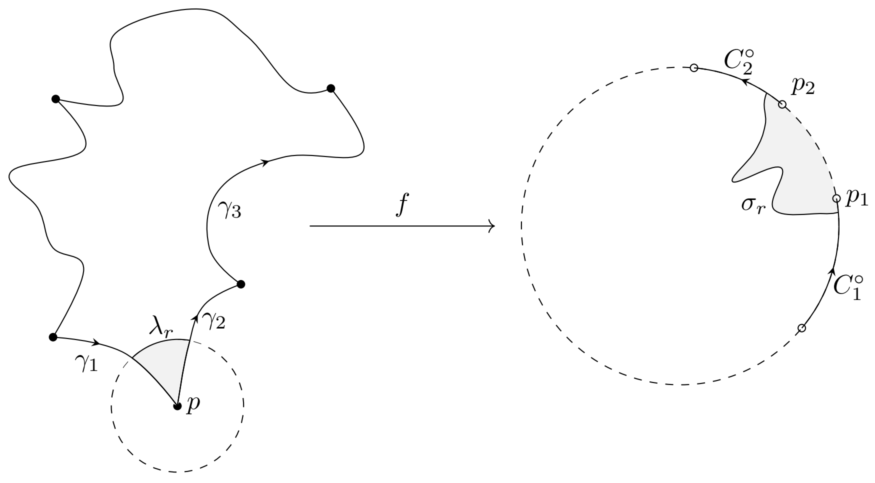
Şekil 7.27

dönüşümü, $\overline{B}$'nin bir açık komşuluğuna, $f(\partial B) \subset \partial\mathbb{D}$ olacak biçimde biholomorf genişletilebilir. Dolayısıyla f fonksiyonu bir topolojik $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişletilebilir. Biz bu genişletmenin ∂B Jordan eğrisi sonlu sayıda, B'nin bir yakasına düştüğü sonlu sayıda pürüzsüz analitik geziden oluştuğunda da doğru olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 7.7.6. *B sınırlı basit bağlantılı, $\gamma_i : [\alpha_i, \beta_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$ basit pürüzsüz reel analitik geziler olmak üzere $\boldsymbol{\partial} B = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ bir Jordan gezisi olsun. Ayrıca, her bir $\underline{\gamma}_i^\circ$ eğrisi ∂B'nin bir serbest sınır parçası olsun. Bu koşullarda, her biholomorf $f : B \to \mathbb{D}$ dönüşümü bir topolojik $F : \overline{B} \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişletilebilir.*

Kanıt. Teorem 7.7.5'ten dolayı f dönüşümü, her bir $\underline{\gamma}_i^\circ$'nin, kendisine göre simetrik bir V_i komşuluğuna biholomorf, dolayısıyla topolojik biçimde genişletilebilir. Bu topolojik genişleme altında $\underline{\gamma}_i^\circ$, $\partial\mathbb{D}$ üzerindeki bir C_i° açık pürüzsüz analitik eğrisine Şekil 7.28'de olduğu gibi resmedilir. p, p_1 ve p_2 noktaları şekildeki gibi olsunlar. Biz $p_1 = p_2$ olduğunu kanıtlarsak işimiz biter. $r > 0$ sayısını yeterince küçük seçersek $C_r(p) \cap B \neq \emptyset$ olur; bu durumda λ_r gezisi $\kappa_{r,p}$'nin B'ye düşen parçası ve $\sigma_r := f \circ \lambda_r$ olsun. $0 \leq c_r < d_r \leq 2\pi$ olmak üzere $\lambda_r(t) = f(p + re^{it})$, $t \in (c_r, d_r)$ ise

$$l(r) := L(\sigma_r) = \int_{c_r}^{d_r} |f'(p + re^{it})| \cdot |rie^{it}|dt = \int_{c_r}^{d_r} |f'(p + re^{it})|rdt$$



Şekil 7.28

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$l(r)^2 \leq \left(\int_{c_r}^{d_r} |f'(p+re^{it})|^2 r^2 dt\right)\left(\int_{c_r}^{d_r} dt\right)$$

$$\frac{l(r)^2}{r} \leq 2\pi \int_{c_r}^{d_r} |f'(z)|^2 ds \quad (ds = |dz| = r dt) \tag{7.77}$$

elde ederiz. Elbette $|q_2 - q_1| \leq l(r)$. Dolayısıyla $\lim_{r\searrow 0} l(r) = 0$ olduğunu gösterirsek $F(p) := q_1 = q_2$ ile F fonksiyonumuz p'ye de sürekli genişletilir.

Şimdi $\delta > 0$ verilsin ve $0 < \varepsilon < R$ için $B(\varepsilon, R) := B \cap \overline{H}(p; \varepsilon, R)$ olsun. Her $r \in [\varepsilon, R]$ için $\delta \leq l(r)$ ise, (7.77)'de, $[\varepsilon, R)]$ aralığında r üzerinden integral alırsak (7.10) ile

$$\delta^2 \ln \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi \int\int_{B(\varepsilon,R)} |f'(z)|^2 dxdy = 2\pi \cdot \int\int_{f(B(\varepsilon,R))} dudv \leq 2\pi^2$$

olur. Ancak sol yan $\varepsilon \searrow 0$ için $+\infty$'a gider. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\delta > 0$ nasıl verilirse verilsin, istenildiği kadar küçük $r > 0$ sayıları $l(r) < \delta$ olacak biçimde vardır. Sonuçta $\lim_{r\searrow 0} l(r) = 0$ ve işimiz biter. $\square$

Problemler

Problem 7.7.1. $\emptyset \neq B \subset \mathbb{C}$ sınırlı, basit bağlantılı ve her $\zeta \in \partial B$ ulaşılabilir olsun. Bu durumda B'de Dirichlet problemlerinin çözümü vardır, dd. her sürekli $u : \partial B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu B'de harmonik ve $\overline{B}$'de sürekli bir $\hat{u}$ fonksiyonuna genişletilebilir.

Problem 7.7.2. $\emptyset \neq B \subset \mathbb{C}$ sınırlı, basit bağlantılı ve her $\zeta \in \partial B$ ulaşılabilir olsun. $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli ve 0 değerini almıyorsa, $\mathbf{log}\, f$'nin B'de bir sürekli dalı olduğunu gösteriniz.

Problem 7.7.3. Her $2 \leq n \in \mathbb{N}$ için $I_n := \{\frac{1}{n} + it \,|\, 0 < t < \frac{1}{2}\}$ olmak üzere $I := \bigsqcup_{n \geq 2} I_n$, $Q := (0,1) \times (0,1)$ ve $B := Q \backslash I$ olsun. B ve $\mathbb{D}$'nin konform denk olduklarını, ancak bunlar arasındaki herhangi bir biholomorf dönüşümün asla $\overline{B}$ ve $\overline{\mathbb{D}}$ arasında bir topolojik dönüşüme genişletilemeyeceğini gösteriniz.

8. Örtmeler ve Riemann Yüzeyleri

8.1 Lif Uzayları

Her şeyden önce kompleks analizde örtmelerle niçin ilgileniyoruz, bunu tanımlayalım. $\emptyset \neq B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in \mathcal{H}(B)$ sabit olmayan bir holomorf dönüşüm olsun. $f : B \to \mathbb{C}$ dönüşümü şu üç topolojik özelliğe sahiptir: f süreklidir, açıktır ve ayrıktır, dd. her $z \in \mathbb{C}$ için $f^{-1}(z)$ ayrıktır. Bu önermenin X bir Riemann yüzeyi olduğunda da doğru olduğunu ileride göreceğiz. X, Y herhangi iki topoloji uzay olmak üzere sürekli, açık ve ayrık olan $p : X \to Y$ dönüşümlerine *örtme* diyecek ve bunları araştıracağız. $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $p_n(z) = z^n$ olsun. $n \geq 2$ için $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ örtmesi her $a \in \mathbb{C}^*$ noktasında yerel topolojik, buna karşın 0 noktasında yerel topolojik değildir; çünkü 0'ın hiçbir komşuluğunun topolojik olarak $p_n(0)$'ın bir komşuluğuna resmedilemeyeceğini biliyoruz (bkz. KA I Teorem 1.8.14). 0 bu örtmenin bir dallanma noktasıdır diyeceğiz.

X ve Y herhangi iki topolojik uzay ve $p : Y \to X$ bir sürekli dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $Y_x^p := p^{-1}(x)$ kümesine **p'nin x üzerindeki lifi** ve (Y, p, X) üçlüsüne bir X **tabanlı lif uzayı** denir. Y_x^p'deki noktalar x noktasının üzerindedir denir. X tabanlı lif uzaylarının kategorisinde (Z, q, X) lif uzayından (Y, p, X) lif uzayına bir f morfizmden $p \circ f = q$ koşulunu sağlayan bir sürekli $f : Z \to Y$ dönüşümü anlaşılacaktır (bkz. Şekil 8.1)[1]. Bu morfizmlere **lifsel dönüşümler** diyeceğiz; bu dönüşümler, her $x \in X$ için $f(Z_x^q) \subset Y_x^p$ olmasıyla karakterize edilen sürekli dönüşümlerdir. Bu yaklaşımla bu kategorinin eşyapı dönüşümleri topolojik lifsel dönüşümlerdir. (Y, p, X), (Z, q, X) lif uzaylarına, $f : Y \to Z$ ve $g : Z \to Y$ lifsel dönüşümleri $g \circ f = \mathrm{Id}_Y$ ve $f \circ g = \mathrm{Id}_Z$ olacak biçimde varsa, **denk**tirler denir. Veya yalın biçimde f ve g'ye denktir denir.

Ancak yaygın ve yerleşmiş adlandırma farklıdır: f'ye q'nun (p'ye göre) bir

[1] Aslında (Z, q, W)'den (Y, p, X)'e bir morfizmden, $f : Z \to Y$ ve $g : W \to X$ sürekli olmak üzere, $p \circ f = g \circ q$ koşulunu sağlayan bir (f, g) ikilisi anlaşılır. Ancak biz aynı X tabanlı lif uzaylarına ve morfizmlerden ise daima $g = \mathrm{Id}_X$ olanlarına odaklanacağımızdan tanımı böyle verdik.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Şekil 8.1: Lifsel dönüşüm.

çekilmişi veya **kaldırılmışı** denir[2]. Yine bir başka yaygın söylem şudur: p, **q'yu (f olarak) çeker**. Yerine göre her iki adlandırmayı da kullanacağız. $p \circ f = q$ eşitliğinden yola çıkarak f dönüşümü q'nun bir p bileşeni de denir.

Teorem 8.1.1 (Lifsel Dönüşümlerin Tekliği I)**.** *X ve Y iki topolojik uzay, Y bir Hausdorff uzayı, $p : Y \to X$ yerel topolojik, Z bir bağlantılı topolojik uzay ve $q : Z \to X$ sürekli olsun. (Z, q, X)'ten (Y, p, X)'e iki f_1, f_2 lifsel dönüşüm için bir $z_0 \in Z$ noktasında $f_1(z_0) = f_2(z_0)$ ise, $f_1 = f_2$ olur.*

Kanıt. $E := \{z \in Z \,|\, f_1(z) = f_2(z)\}$ olsun. Z bağlantılı olduğundan, E'nin boştan farklı ve hem açık hem de kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$z_0 \in E$, dolayısıyla $E \neq \emptyset$. Ayrıca Y bir Hausdorff uzayı olduğundan $\Delta = \{(y, y) \,||y \in Y\}$ köşegeni kapalıdır, dolayısıyla $F := (f_1, f_2)$ dönüşümü sürekli olduğundan $E = F^{-1}(\Delta)$ kümesi kapalıdır.

Şimdi $z \in E$ ve $y = f_1(z) = f_2(z)$ ve $p(y) = x$ olsun. p yerel topolojik olduğundan, y ve x noktalarının V ve U açık komşulukları $p|V : V \to U$ topolojik olacak biçimde bulunabilir. f_1, f_2 fonksiyonları sürekli olduklarından, z noktasının bir W açık komşuluğu $f_i(W) \subset V$, $i = 1, 2$ olacak biçimde vardır. f_1, f_2 fonksiyonları q'nun çekilmişleri olduklarından, her $w \in W$ için $p(f_1(w)) = q(w) = p(f_2(w))$ olur. Buradan ve $p|V$'nin birebirliğinden, her $w \in W$ için $f_1(w) = f_2(w)$, dolayısıyla $W \subset E$ olur. Sonuçta E kümesi her z noktasının bir W komşuluğunu içerdiğinden bir açık kümedir. □

Teorem 8.1.2 (Homotopik Gezileri Çekme)**.** *X, $\hat{X}$ iki Hausdorff topolojik uzay ve $p : \hat{X} \to X$ yerel topolojik olsun. $a, b \in X$ ve $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ olsun. $I = [0, 1]$ olmak üzere, $H : I \times I \to X$ dönüşümü X'te başlangıç noktaları a ve bitiş noktaları b olan γ_0 ve γ_1 gezileri için uç noktaları koruyan bir evirme olsun. Her $s \in I$ için $\gamma_s(t) = H(t, s)$ olmak üzere, her γ_s gezisi başlangıç noktası $\hat{a}$ olan bir $\hat{\gamma_s}$ gezisine çekilebiliyorsa, bir $\hat{b} \in p^{-1}(b)$ ile, her $s \in I$ için $\hat{\gamma_s}(1) = \hat{b}$ olur ve H evirmesi $\hat{X}$'te uç noktaları koruyan ve $\hat{\gamma_0}$ gezisini $\hat{\gamma_1}$ gezisine eviren bir $\hat{H}$ evirmesine çekilir.*

[2]İngilizce kaynaklarda "lift", Almanca kaynaklarda "Liftung" olarak geçer. Zihnimizde görsel bir destek olarak Y'yi X'in yukarısında olarak düşünürsek, f dönüşümü q'nun z'deki $q(z)$ değerini, $q(z)$'in üzerindeki $f(z)$'ye kaldırır veya çeker.

Kanıt. $\hat{H} : I \times I \to \hat{X}$ dönüşümü $\hat{H}(t,s) := \hat{\gamma}_s(t)$ olarak tanımlansın. Şimdilik $\hat{H}$'yi sürekli varsayalım.

$$(p \circ \hat{H})(t,s) = p\left(\hat{\gamma}_s(t)\right) = \left(p \circ \hat{\gamma}_s\right)(t) \stackrel{*}{=} \gamma_s(t) = H(t,s)$$

olduğundan, $\hat{H}$ dönüşümü H dönüşümünün bir çekilmişidir. $\stackrel{*}{=}$ eşitliği $\hat{\gamma}$, γ'nin bir çekilmişi olduğu için geçerlidir. Her şeyden önce teoremin koşullarından $\hat{H}(0,s) = \hat{\gamma}_s(0) = \hat{a}$. $H\left(\{1\} \times I\right) = \{b\}$ olduğundan $\hat{H}\left(\{1\} \times I\right) \subset p^{-1}(b)$ olur. $\{1\} \times I$ bağlantılı ve $\hat{H}$ sürekli olduğundan, $\hat{H}\left(\{1\} \times I\right)$ bağlantılıdır ve $p^{-1}(b)$ ayrık[3] kümesinin altkümesi olduğundan, bir $\hat{b} \in p^{-1}(b)$ ile $\hat{H}\left(\{1\} \times I\right) = \{\hat{b}\}$ olur. Sonuçta $\hat{H}$ dönüşümü uç noktaları koruyan bir evirmedir. Dolayısıyla $\hat{H}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterirsek işimiz biter.

$\hat{a}$ noktasının bir açık V komşuluğu ve a noktasının bir açık U komşuluğunu $p|V : V \to U$ topolojik olacak biçimde seçelim. $q := (p|V)^{-1}$ olsun.

H dönüşümü sürekli ve $H(\{0\} \times I) = \{a\}$ olduğundan, bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı $H\left([0,\varepsilon_0) \times I\right) \subset U$ olacak biçimde seçilebilir. $\hat{\gamma}_s|[0,\varepsilon_0)$ ve $q \circ \left(\gamma_s|[0,\varepsilon_0)\right)$ dönüşümlerinin her ikisi de $\gamma_s|[0,\varepsilon_0)$ dönüşümünün 0'da aynı değeri alan iki çekilmişi olduğundan, Lifsel Dönüşümlerin Tekliği teoreminden birbirine eşittirler, dd.

$$\hat{\gamma}_s|[0,\varepsilon_0) = q \circ \left(\gamma_s|[0,\varepsilon_0)\right).$$

$I \times I$'nın $[0,\varepsilon_0) \times I$ açık kümesinde $\hat{H} = q \circ H$ ve $\hat{H}$ orada süreklidir.

Şimdi $\hat{H}$'nın $I \times I$'da sürekli olduğunu savunuyoruz. $\hat{H}$'nin bir $(t_0,\sigma) \in I \times I$ noktasında sürekli olmadığını *varsayalım.*

$$\tau := \inf\left\{t \,|\, \hat{H},\ (t,\sigma)\text{'da sürekli değil}\right\}$$

ise $\tau \geq \varepsilon_0$ olur. $x := H(\tau,\sigma)$ ve $\hat{x} := \hat{H}(\tau,\sigma) = \hat{\gamma}_\sigma(\tau)$ olsun. $\hat{x}$ ve x'in açık V' ve U' komşuluklarını $p|V' : V' \to U'$ topolojik olacak biçimde seçelim ve $q' := (p|V')^{-1}$ olsun. H sürekli olduğundan, bir $\varepsilon > 0$ sayısı $H\left(I_\varepsilon(\tau) \times I_\varepsilon(\sigma)\right) \subset U'$ olacak biçimde seçilebilir. Özel olarak $\gamma_\sigma\left(I_\varepsilon(\tau)\right) \subset U'$. Yine Lifsel Dönüşümlerin Tekliği teoreminden

$$\hat{\gamma}_\sigma|I_\varepsilon(\tau) = q' \circ \left(\gamma_\sigma|I_\varepsilon(\tau)\right) \tag{8.1}$$

elde ederiz. Şimdi $\tau_1 \in I_\varepsilon(\tau)$ sayısını $\tau_1 < \tau$ olacak biçimde seçelim. $\hat{H}$'nin tanımından ve (8.1) eşitliğinden $\hat{H}(\tau_1,\sigma) = \hat{\gamma}_\sigma(\tau_1) \in V'$ olur. Bu durumda ise $\hat{H}$'nin (τ_1,σ)'daki sürekliliğinden, bir $0 < \delta \leq \varepsilon$ sayısını, her $s \in I_\delta(\sigma)$ için $\hat{H}(\tau_1,s) = \hat{\gamma}_s(\tau_1) \in V'$ olacak biçimde seçebiliriz.

Bir kez daha Lifsel Dönüşümlerin Tekliği teoreminden, her $s \in I_\delta(\sigma)$ için $\hat{\gamma}_s|I_\varepsilon(\tau) = q' \circ \left(\gamma_s|I_\varepsilon(\tau)\right)$ elde ederiz. Dolayısıyla $I_\varepsilon(\tau) \times I_\delta(\sigma)$'da $\hat{H} = q' \circ H$ olur ve $\hat{H}$ orada süreklidir. Bu ise τ'nun tanımı, dolayısıyla t_0'ın varlığı ile çelişir. Sonuçta varsayımımız yanlıştır ve $\hat{H}$ tüm $I \times I$'da süreklidir. $\square$

[3] p'nin yerel topolojikliğinin basit bir sonucudur ve bir kanıt Önerme 8.2.3'ün kanıtında verilmiştir.

Tanım 8.1.3. İzleyen koşul sağlandığında $p : \hat{X} \to X$ sürekli dönüşümü **gezileri çekme özelliği**ne sahiptir denir: Her $\gamma : [0,1] \to X$ gezisi ve $a = \gamma(0)$ olmak üzere, her $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ için γ'nın p'ye göre $\hat{\gamma}(0) = \hat{a}$ koşulunu sağlayan bir $\hat{\gamma}$ çekilmişi vardır, dd. $([0,1], \gamma, X)$'den $(\hat{X}, p, X)$'e $\hat{\gamma}(0) = \hat{a}$ koşulunu sağlayan bir $\hat{\gamma}$ lifsel dönüşümü vardır.

Teorem 8.1.4 (Lifsel Dönüşümlerin Varlığı I)**.** *X, Y Hausdorff uzayları, Z ise basit bağlantılı, yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı olsun. Ayrıca $p : Y \to X$ yerel topolojik ve gezileri çekme özelliğine sahip ve $f : Z \to X$ sürekli olsun. Bu koşullarda keyfi verilen $x_0 \in X$, $z_0 \in f^{-1}(x_0)$ ve $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ için tek olarak belirli bir $\hat{f} : (Z, f, X) \to (Y, p, X)$ lifsel dönüşümü $\hat{f}(z_0) = y_0$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. Her şeyden önce aradığımız $\hat{f}$ bir lifsel dönüşümdür ve Teorem 8.1.1'den dolayı, varsa tektir.

$\hat{f}$'nin tanımı: $z \in Z$ keyfi verilsin. Z'de başlangıç noktası z_0 ve bitiş noktası z olan γ gezileri vardır. $\gamma : [0,1] \to Z$ böyle bir gezi olsun. Şimdi $\gamma^* := f \circ \gamma$, X'te başlangıç noktası $x_0 = f(z_0)$ ve bitiş noktası $x = f(z)$ olan bir gezidir. Koşullarımızdan p fonksiyonu γ^*'ı Y'ye, başlangıç noktası y_0 olmak üzere tek bir biçimde bir $\hat{\gamma^*}$ gezisine çeker. $\hat{f}(z) := \hat{\gamma^*}(1)$ olarak tanımlıyoruz. Önce bu tanımın kusursuz olduğunu görelim: Z'de başlangıç noktası z_0 ve bitiş noktası z olan bir başka γ_1 gezisi alalım. Z basit bağlantılı olduğundan γ gezisi Z'de uç noktaları koruyarak γ_1 gezisine evrilir. Dolayısıyla γ^* gezisi uç noktaları koruyarak $\gamma_1^* = f \circ \gamma_1$ gezisine evrilir. Teorem 8.1.2'den dolayı, $\hat{\gamma^*}$ gezisi Y'de uç noktaları koruyarak $\hat{\gamma_1^*}$ gezisine evrilir. Dolayısıyla $\hat{\gamma^*}(1) = \hat{\gamma_1^*}(1)$ ve $\hat{f}$'nin tanımı kusursuzdur. Elbette $f = p \circ \hat{f}$.

$\hat{f}$'nin sürekliliği: $z \in Z$ keyfi verilsin ve V ise $y = \hat{f}(z)$'nin bir komşuluğu olsun. z'nin bir W komşuluğunun $\hat{f}(W) \subset V$ olacak biçimde bulunabileceğini göstermeliyiz. p yerel topolojik olduğundan, gerekirse V'yi küçülterek $U := p(V)$ olmak üzere $p|V : V \to U$'nun topolojik olması sağlanır. $\varphi := (p|V)^{-1}$ olsun. f sürekli ve Z yerel yol bağlantılı olduğundan, z'nin bir yol bağlantılı W komşuluğu $f(W) \subset U$ olacak biçimde seçilebilir. Şimdi z_0, x_0, x noktaları ve γ, γ^* gezileri yukarıdaki paragraftakiler olsunlar. $w \in W$ keyfi verilsin. W'de z noktasını w noktasına bağlayan bir η gezisi vardır. $\eta^* := f \circ \eta$ gezisi U'da x noktasını $f(w)$ noktasına bağlayan bir gezidir. $\hat{\eta^*} := \varphi \circ \eta^*$ gezisi η^* gezisinin başlangıç noktası y ve bitiş noktası U'da olan bir çekilmişidir. Dolayısıyla $\hat{\gamma^*}\hat{\eta^*}$ gezisi $\gamma^*\eta^* = f \circ (\gamma\eta)$ gezisinin başlangıç noktası y_0 olan bir çekilmişidir ve tanım gereği bu gezinin, V'de olan, bitiş noktası$\hat{f}(w)$'dir. Böylece $f(W) \subset V$ ve $\hat{f}$ fonksiyonu z'de süreklidir. $\square$

8.2 Örtmeler

Tanım 8.2.1. X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere bir $p : Y \to X$ dönüşümüne, sürekli, açık ve ayrık ise bir **örtme**dir, (Y, p, X) lif uzayına X **tabanlı** bir **örtü uzayı** ve Y**'ye** X**'in bir örtü**sü denir.

Burada p'nin ayrık olmasından ise, her $x \in X$ için Y_x^p lifinin Y'de ayrık olması anlaşılacaktır. $p(y) = x$ durumunda p örtmesine göre y noktası x noktasının **üzerindedir** ve x noktası ise p örtmesine göre y'nin **izidir** denir.

X tabanlı örtü uzaylarımız X tabanlı özel lif uzaylarıdır. X tabanlı örtü uzaylar kategorisinin morfizmleri yine lifsel dönüşümlerdir, dd. $q \circ f = p$ koşulunu sağlayan sürekli $f : Y \to Z$ dönüşümleridir.

Tanım 8.2.2. $p : Y \to X$ bir örtme ve $y \in Y$ olsun. y noktasının bir V komşuluğu $p|V$ birebir olacak biçimde bulunamıyorsa, y noktasına p**'nin** veya (Y, p, X)**'in** bir **dallanma noktası**dır denir. p'nin hiç dallanma noktası yoksa p'ye bir **dalsız örtme** ve (Y, p, X)'e ise bir **dalsız örtü uzayı** denir.

Önerme 8.2.3. *Bir sürekli $p : Y \to X$ dönüşümünün bir dalsız örtme olması için gerek ve yeter koşul yerel topolojik olmasıdır.*

Kanıt. p bir dalsız örtme ise p açık, sürekli ve yerel birebir olduğundan, yerel topolojiktir. Tersine yerel topolojik p dönüşümleri her şeyden önce sürekli ve açıktırlar. Ayrıca bu p'ler ayrıktırlar. Gerçekten de $y \in Y_x^p$ ise, y'nin bir V komşuluğu ile x'in bir U komşuluğu $p|V : V \to U$ topolojik olacak biçimde vardır. Dolayısıyla $Y_x^p \cap V = \{y\}$ ve bunun bir sonucu olarak Y_x^q ayrıktır. □

Örnek 8.2.4. Aşağıda verilen örneklerdeki söylemleri kanıtlamayı problemler olarak bırakıyoruz.

(1) X herhangi bir topolojik uzay ve S herhangi bir ayrık uzay olmak üzere, $p : X \times S \to X$ dönüşümü $p(x, s) := x$ olarak tanımlanırsa, p bir dalsız örtmedir. Böyle örtmelere **basit örtme**ler denir.

(2) $1 \le i \le n$ için (Y_i, p_i, X_i) örtme ise, $\left(\prod_i Y_i, \prod p_i, \prod_i X_i\right)$ de bir örtmedir.

(3) Her $t \in \mathbb{R}$ için $p(t) := \exp 2\pi i t = (\cos 2\pi i t, \sin 2\pi i t)$ olmak üzere, $(\mathbb{R}, p, \mathbb{S}^1)$ bir dalsız örtmedir.

(4) $p(t_1, \ldots, t_n) := (\exp 2\pi i t_1, \ldots, \exp 2\pi i t_n)$ olmak üzere, $(\mathbb{R}^n, p, \mathbb{S}^n)$ bir dalsız örtmedir.

(5) $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $p_n(z) = z^n$ olmak üzere, $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir örtmedir. p_1 bir dalsız örtme iken $n \ge 2$ için p_n bir dallanmış örtmedir ve bu durumda p_n'nin yagâne dallanma noktası 0 noktasıdır. Buna karşın $(\mathbb{C}^*, p_n|\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ bir dalsız örtmedir.

(6) $(\mathbb{C}, \exp, \mathbb{C}^*)$ bir dalsız örtme uzayıdır.

(7) $\wp = \wp_\Omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü bir örtmedir. $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ ise, $\wp$'nin P temelparalelkenarındaki dallanma noktaları $0, \omega_1/2, \omega_2/2$ ve $(\omega_1 + \omega_2)/2$ noktalarıdır.

Tanım 8.2.5. X, Y topolojik uzaylar olmak üzere bir $p : Y \to X$ dönüşümüne, her $x \in X$ noktasının bir açık U komşuluğu ve $J \ne \emptyset$ olmak üzere, Y'de açık

V_j, $j \in J$ kümeleri $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ ve her $j \in J$ için $p|V_j : V_j \to U$ topolojik olacak biçimde bulunabiliniyorsa, bir **yerel düzgün örtme** diyelim[4].

Literatürde "örtme" çoğunlukla "yerel düzgün örtme" anlamında kullanılmaktadır.

Her şeyden önce yerel düzgün p örtmelerinin örten olduğunu belirtelim. Bu tanımda p herhangi bir dönüşüm olarak seçilmiştir. Yine de p bu tanıma göre bir yerel düzgün örtme ise, Tanım 8.2.2 anlamında bir dalsız örtmedir. Basit örtüler açıktır ki yerel düzgün örtmelerdir. U ve V_j'ler tanımdaki gibi iseler, U **kümesi** V_j'lerle **düzgün biçimde örtülmüştür** ve V_j'lere ise Y'nin U üzerindeki **yaprakları** veya **kesitleri** denir. Düzgün biçimde örtülen kümelere kısaca (p'**ye göre**) **düzgün** veya (p'yi) **basitleştiren** diyelim. J'yi ayrık topolojiyle alırsak $p^{-1}(U)$ topolojik uzayı $U \times J$ topolojik uzayına denktir. Her V_j

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p|_{\tilde{U}}"'] & & U \times S \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Şekil 8.2: Basit örtü.

yaprağında $\varphi(y) := (p(y), j)$ olarak tanımlanan $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times J$ dönüşümü topolojiktir. π_1 birinci koordinata izdüşüm olmak üzere, $(U \times J, \pi_1, U)$ basit örtüsü yalnızca bir yerel düzgün örtme değil, bir bütünsel düzgün örtmedir. Özünde $\tilde{U} := p^{-1}(U)$ olmak üzere, $\varphi : (\tilde{U}, p|\tilde{U}, U) \to (U \times J, \pi_1, U)$ bir lifsel eşyapı dönüşümüdür. Şekil 8.2'deki diyagram değişmelidir. Bu durumda *yerel düzgün örtmeler düzgün U kümeleri üzerinde basit örtüler gibidirler.* Biz $(\tilde{U}, p|\tilde{U}, U)$'ya da *basit* diyeceğiz ve $(U \times J, \pi_1, U)$ lifsel uzayında yaptıklarımızı, lifsel uzay olarak burada da yapabileceğimizi unutmayacağız.

Her yerel düzgün örtme bir dalsız örtmedir, ancak bunun tersi doğru değildir (bkz. Problem 8.2.3). Eğer ayrıca U düzgün kümesi bağlantılı ise, V_j'ler $p^{-1}(U)$'nun bağlantılı bileşenlerinden başkaları değildir.

Önerme 8.2.6. *$p : Y \to X$ bir yerel düzgün örtme ve X bağlantılı ise, tüm Y_x^p lifleri eş üçlüdür.*

Kanıt. α bir kardinal sayı olmak üzere $X_\alpha := \{x \in X \mid Y_x^p\text{'in gücü} = \alpha\}$ olsun. $X_\alpha \neq \emptyset$ ise $a \in X_\alpha$ keyfi seçilsin. a'nın bir U açık komşuluğu düzgün biçimde örtülmüştür, dolayısıyla $U \subset X_\alpha$. Öyleyse X_α açıktır. Her β kardinal sayısı

[4] "Yerel düzgün örtme" yerine "sınırsız dalsız örtme" de denir.

için X_β boş veya boştan farklı bir açık küme olduğundan, farklı α, β kardinal sayıları için $X_\alpha \neq \emptyset$ ve $X_\beta \neq \emptyset$ olması X'in bağlantılılığı ile çelişir. Dolayısıyla bir α ile $X = X_\alpha$. □

Önerme 8.2.6'daki α sayısına p yerel düzgün örtmesinin **yaprak sayısı** veya **dal sayısı** denir.

Örneğin $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $z \in \mathbb{C}^*$ için $p_n(z) = z^n$ olarak tanımlanırsa, $(\mathbb{C}^*, p_n, \mathbb{C}^*)$ yaprak sayısı n olan bir yerel düzgün örtmedir. Gerçekten de $\mathbb{C}^*$'da $p_n'(z) \neq 0$ olduğundan, p_n yerel topolojiktir. Keyfi verilen $a \in \mathbb{C}^*$ için $b \in \mathbb{C}^*$ sayısı $p_n(b) = a$ olacak biçimde seçilsin. a ve b noktalarının U ve V komşuluklarını $p_n|V : V \to U$ topolojik olacak biçimde seçebiliriz. Bu durumda $\xi := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ olmak üzere $(p_n)^{-1}(U) = \bigsqcup_{i=1}^n \xi^i V$ olduğundan, U düzgün örtülmüştür.

Diğer yandan $(\mathbb{C}, \exp, \mathbb{C}^*)$ ise, yaprak sayısı sayılabilir sonsuz olan bir yerel düzgün örtmedir. Her $z \in \mathbb{C}^*$ için $\exp'(z) \neq 0$ olduğundan, exp yerel topolojiktir. Şimdi $a \in \mathbb{C}^*$ keyfi verildiğinde bir $b \in \mathbb{C}$'yi $\exp b = a$ olacak biçimde seçelim. a ve b noktalarının U ve V komşuluklarını $\exp|V : V \to U$ topolojik olacak biçimde seçebiliriz. V kümesi zorunlu olarak 2π genişliğinde bir yatay şeride düşer ve $\exp^{-1}(U) = \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}}(2\pi i m + V)$ olur.

Basit topolojik önermeler içeren aşağıdaki teoremin kanıtını okura bırakıyoruz:

Teorem 8.2.7. *$p : Y \to X$ bir yerel düzgün örtme ise aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) X'teki U açık kümesi Y'nin V_j, $j \in J \neq \emptyset$ açık kümeleri ile düzgün biçimde örtülmüş, $B \subset Y$ bir bağlantılı altküme ve $p(B) \subset U$ ise, bir $j \in J$ ile $B \subset V_j$ olur,

(ii) X uzayının düzgün biçimde örtülmüş açık altkümeleri X'in topolojisinin bir bazını, bunların üzerindeki yapraklarsa Y'nin topolojisinin bir bazını oluşturur,

(iii) X'in topolojisi Y'nin p'ye göre bölüm topolojisidir.

Teorem 8.2.8 (Çekilmişlerin Tekliği)**.** *$p : \hat{X} \to X$ bir yerel düzgün örtme, Z bir bağlantılı topolojik uzay ve $f : Z \to X$ sürekli olsun. $f_1, f_2 : Z \to \hat{X}$ sürekli fonksiyonları f'nin çekilmişleri iseler ve bir $z_0 \in Z$ için $f_1(z_0) = f_2(z_0)$ ise, $f_1 = f_2$.*

Kanıt. $E = \{z \in Z \mid f_1(z) = f_2(z)\}$ olsun. $z_0 \in E$ olduğundan $E \neq \emptyset$. Eğer E'nin hem açık hem de kapalı olduğunu gösterirsek işimiz biter.

$z \in Z$ keyfi verilsin. $f(z)$ 'nin bir açık ve düzgün U komşuluğunu alalım. U'nun üzerindeki yapraklardan biri, biz ona $\hat{V}_1$ diyelim $f_1(z)$'yi, ve biri, ona da $\hat{V}_2$ diyelim, $f_2(z)$'yi içerecektir. Bu durumda $W := f_1^{-1}(\hat{V}_1) \cap f_2^{-1}(\hat{V}_2)$ kümesi z'nin bir açık komşuluğudur.

Eğer $z \in E$ ise $\hat{V}_1 = \hat{V}_2$. Dolayısıyla f_1, f_2 fonksiyonlarının her ikisi de W'yi $\hat{V}_1$'e resmeder. Diğer yandan, $p \circ f_1 = p \circ f_2$ ve $p|\hat{V}_1 : \hat{V}_1 \to U$ topolojik olduğundan $f_1|W = f_2|W$, dolayısıyla $W \subset E$ olur. Böylece E açıktır.

Şimdi $z \notin E$ olsun. Bu durumda $f_1(z) \neq f_2(z)$ olduğundan $\hat{V}_1 \cap \hat{V}_2 = \emptyset$ olur. $f_i(W) \subset \hat{V}_i$ olduğundan, her $z \in W$ için $f_1(z) \neq f_2(z)$, dolayısıyla $W \subset Z \backslash E$ olur. Dolayısıyla $Z \backslash E$ de açıktır, dolayısıyla E kapalıdır. □

Bu teorem ile (8.1.1)'in koşulları arasındaki farka dikkat edelim. Buradaki yerel düzgün örtme (8.1.1)'deki yerel topolojiklikten daha güçlüdür. Diğer yandan, bu teoremde (8.1.1)'deki Hausdorff'luk koşulundan vazgeçilmiştir.

Teorem 8.2.9 (Gezileri Çekme Teoremi). *$p : Y \to X$ bir yerel düzgün örtme olsun. $a \in X$ ve $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ keyfi verilsinler. X'te başlangıç noktası a olan her γ gezisi, Y'de başlangıç noktası $\hat{a}$ olan tek olarak belirli bir $\hat{\gamma}$ gezisine çekilebilir.*

Kanıt. Teklik (8.2.8)'den çıkar; varlığı kanıtlayalım:

$\gamma : [0,1] \to X$ gezisi ve $a = \gamma(0)$ olmak üzere bir $\hat{a} \in Y_a^p$ keyfi verilsinler. $I = [0,1]$, dolayısıyla $\gamma(I)$ kompakt olduğundan, Teorem 8.2.7(ii) ile I'nın bir $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ parçalanışını ve düzgün örtülmüş $U_1, \ldots, U_n$ açık kümelerini, her $k = 1, \ldots, n$ için $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ olacak biçimde seçebiliriz. U_k düzgün, öyleyse $p^{-1}(U_k) = \bigsqcup_{j \in J_k} V_{kj}$ ve $p|V_{kj} : V_{kj} \to U_k$ topolojiktir. $\varphi_{kj} := (p|V_{kj})^{-1}$ olsun.

$1 \leq i \leq n$ için $\gamma_i := \gamma|[t_{i-1}, t_i]$ olsun. Tek olarak belirli bir $j \in J_1$ ile $\hat{a} \in V_{1j}$'dir. Şimdi $\hat{\gamma}_1 := \varphi_{1j} \circ \gamma_1$ gezisi γ_1 gezisinin $\hat{a}$'dan başlayan bir $\hat{\gamma}_1$ çekilmişidir. Ardından benzer biçimde γ_2 gezisi, $\hat{\gamma}_1(1)$'den başlayan bir $\hat{\gamma}_2$ gezisine çekilir. Böylece devam ederek elde edilen $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_n$ gezileri ile $\hat{\gamma} := \hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_2 \cdots \hat{\gamma}_n$ gezisi γ'nın $\hat{a}$'dan başlayan bir çekilmişidir. □

Teoremimizdeki tek olarak belirli $\hat{\gamma}$ çekilmişinin $\hat{a}$ başlangıç noktasını vurgulamak gerektiğinde $\hat{\gamma}$ yerine $\hat{\gamma}_{\hat{a}}$ yazacağız.

Uyarı: Kapalı bir gezinin çekilmişinin kapalı olması gerekmez! Örneğin $2 \leq n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $p_n(z) = z^n$ yerel düzgün örtmesini ele alalım. $\xi := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ olmak üzere $p^{-1}(1) = \{1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}, \}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $\mathbb{C}^*$ tabanında, $k \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, başlangıç ve bitiş noktaları 1 olan $\gamma_k(t) := \exp(2\pi i k t)$ ile tanımlanmış $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ gezilerini ele alalım. Bu geziler kapalı gezilerdir. Bunları $\mathbb{C}^*$ örtüsüne başlangıç noktaları yine 1 olan geziler olarak çekersek, $\hat{\gamma}_k(t) = \exp\left(\frac{2\pi i k t}{n}\right)$ olmak üzere $\hat{\gamma}_k : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ gezilerini elde ederiz. $1 \leq k \leq n-1$ için $\hat{\gamma}_k$'nin başlangıç noktası 1, bitiş noktası ise ξ^k'dir, dolayısıyla bunlar kapalı değildirler; $\underline{\hat{\gamma}_k}$ ise birim çember üzerinde saatin ters yönünde 1'den ξ^k'ye giden yay parçasıdır. Kolayca görüleceği gibi $\hat{\gamma}_k$'nin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $n|k$ olmasıdır.

Önsav 8.2.10. *$p : \hat{X} \to X$ yerel düzgün örtme, Z bir topolojik uzay ve $B \subset Z$ bağlantılı olsun. $f : Z \to X$ ve $g : B \to \hat{X}$ sürekli dönüşümleri verilsinler ve $p \circ g = f|B$ olsun. Eğer $f(Z)$ bir düzgün $U \subset X$ açık kümesine düşerse, bir sürekli $\hat{f} : Z \to \hat{X}$ dönüşümü $p \circ \hat{f} = f$ ve $\hat{f}|B = g$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. $a \in B$ olsun. U'nun üzerindeki yapraklardan tam bir tanesi $g(a)$'yı içerir; bunu $\hat{U}$ ile gösterelim. $\hat{f} := (p|\hat{U})^{-1} \circ f$ olarak tanımlansın. $\hat{f}$ süreklidir ve $p \circ \hat{f} = f$ geçerlidir. Ayrıca $p \circ \hat{f}|B = p \circ g$ ve $\hat{f}(a) = g(a)$. Böylece g ve $\hat{f}|B$ fonksiyonları $f|B : B \to X$ fonksiyonun iki çekilmişidir; dolayısıyla (8.2.8)'den $\hat{f}|B = g$ olur. □

Teorem 8.2.11 (Monodromi Teoremi)**.** *$p : \hat{X} \to X$ bir yerel düzgün örtme, $I = [0, 1]$ olmak üzere $H : I \times I \to X$ sürekli, $H(0, 0) = a$ ve $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ olsun. Bu koşullarda H'nin $\hat{H}(0, 0) = \hat{a}$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli $\hat{H}$ çekilmişi vardır.*

Kanıt. X'in düzgün açık kümelerinin ailesi $\mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{V} := H^{-1}(\mathcal{U})$ ailesi $Q = I \times I$ kompakt metrik uzayımızın bir açık örtüsüdür. KA I Lebesgue Örtü Önsavı 5.2.14'ten bir $\delta > 0$ sayısı, kenar uzunlukları δ'dan küçük olan her R dikdörtgeni en az bir $V \in \mathcal{V}$'ye düşecek biçimde bulunabilir. Böyle bir R için $H(R)$ en az bir U düzgün kümesine düşer. Şimdi bir $n \in \mathbb{N}^*$ sayısını $\frac{1}{n} < \delta$ olacak biçimde seçip Q karesini

$$Q_{i,j} := \left\{ (s, t) \in Q \mid \frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n} \text{ ve } \frac{j-1}{j} \leq t \leq \frac{j}{n} \right\}$$

karelerine bölelim ve onları

$$Q_{1,1}, Q_{1,2}, \ldots, Q_{1,n}, Q_{2,1}, Q_{2,2}, \ldots, Q_{2,n}, Q_{3,1}, \ldots, Q_{n,1}, Q_{n,2}, \ldots, Q_{n,n}$$

olarak sıralayalım. Önsav 8.2.10 ile önce $H|Q_{1,1}$ dönüşümü $\hat{H}(0, 0) = \hat{a}$ olacak biçimde $\hat{H}|Q_{1,1}$'e çekilir. Ardından $Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$ bağlantılı olduğundan, aynı önsavla tek biçimde $\hat{H}|Q_{1,1}$ dönüşümü $\hat{H}|Q_{1,1} \cup Q_{1,2}$'ye genişletilir ve bu $H|Q_{1,1} \cup Q_{1,2}$'nin çekilmişidir. Benzer sonlu adımda işimiz biter. $\hat{H}$, H'nin bir çekilmişidir ve teklik (8.2.8)'den çıkar. □

Sonuç 8.2.12. *$p : \hat{X} \to X$ yerel düzgün örtme, $a, b \in X$, $\hat{a} \in p^{-1}(a)$, $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$ ve $\gamma_0 \simeq_{uk} \gamma_1$ olsun. $\hat{\gamma}_0$ ve $\hat{\gamma}_1$ gezileri sırasıyla γ_0 ve γ_1 gezilerinin $\hat{a}$'dan başlayan çekilmişleri ise, $\hat{\gamma}_0 \simeq_{uk} \hat{\gamma}_1$.*

Kanıt. Gerçekten de $H : \gamma_0 \simeq_{uk} \gamma_1$ ve $H(0, 0) = a$ olsun. $\hat{H}$ dönüşümü H'nin (8.2.11)'e göre $\hat{H}(0, 0) = \hat{a}$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli çekilmişi ise, $\hat{H} : \hat{\gamma}_0 \simeq_{uk} \hat{\gamma}_1$. □

Teorem 8.2.13 (Lifsel Dönüşümün Varlığı II). *X, Y Hausdorff topolojik uzayları, Z ise yerel yol bağlantılı ve basit bağlantılı olsun. $p : Y \to X$ bir yerel düzgün örtme ve $f : Z \to X$ sürekli olsun. Bu koşullarda keyfi verilen $x_0 \in X$, $z_0 \in f^{-1}(x_0)$ ve $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ için tek olarak belirli bir $\hat{f} : (Z, f, X) \to (Y, p, X)$ lifsel dönüşümü $\hat{f}(z_0) = y_0$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. Doğrudan 8.1.4 ve 8.2.9'dan çıkar. □

Teorem 8.2.14 (Lifsel Dönüşümün Varlığı III). *Y yol bağlantılı, Z basit bağlantılı, yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı, $p : Y \to X$ yerel düzgün örtme, $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ve $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ sürekli olsun[5]. Bu durumda $\hat{f}(z_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir lifsel dönüşümün olması için gerek ve yeter koşul $f_\#(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_\#(\pi_1(Y, y_0))$ olmasıdır.*

Kanıt. Böyle bir lifsel dönüşüm varsa $f = p \circ \hat{f}$ olacağından, $f_\# = p_\# \circ \hat{f}_\#$ olur ve bu, $f_\#(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_\#(\pi_1(Y, y_0))$'yi verir.

Şimdi $f_\#(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_\#(\pi_1(Y, y_0))$ olsun. $z \in Z$ keyfi verilsin. Z yol bağlantılı olduğundan bir $\gamma \in \mathcal{G}_{z_0,z}(Z)$ gezisi vardır. Bu durumda $\eta := f \circ \gamma \in \mathcal{G}_{x_0,f(z)}(X)$. Teorem 8.2.9'dan dolayı η gezisi, Y'de başlangıç noktası y_0 olan bir $\hat{\eta}$ gezisine çekilir. Biz $\hat{\eta}(1)$'in γ'nın seçiminden bağımsız olduğunu, dolayısıyla $\hat{f}(z) := \hat{\eta}(1)$ tanımının kusursuz olduğunu savunuyoruz. Şimdi ayrıca $\gamma' \in \mathcal{G}_{z_0,z}(Z)$ ve $\eta' = f \circ \gamma' \in \mathcal{G}_{x_0,f(z)}(X)$ olsun. $\gamma(\gamma')^- \in \mathcal{T}_{z_0}(Z)$ olduğundan varsayımımız gereği $f_\#([\gamma(\gamma')^-]) = [f \circ (\gamma(\gamma')^-)] = [(f \circ \gamma)(f \circ \gamma')^-] = [\eta(\eta')^-] \in p_\#(\pi_1(Y, y_0))$ olur. Bu ise, bir $\sigma \in \mathcal{T}_{y_0}(Y)$ ile $[p \circ \sigma] = [\eta(\eta')^-]$ demektir. Dolayısıyla $\mathcal{T}_{x_0}(X)$'deki $p \circ \sigma$ ve $\eta(\eta')^-$ turları birbirine evrilebilir (homotoptur). Dolayısıyla bunların çekilmişleri olan σ ve $\hat{\eta}(\hat{\eta'})^-$ homotoptur. Böylece $\hat{\eta}(\hat{\eta'})^- \in \mathcal{T}_{y_0}(Y)$ ve $\hat{\eta}(1) = \hat{\eta'}(1)$ olur. Açıkça $f = p \circ \hat{f}$ olduğundan, geriye yalnızca $\hat{f}$'nin sürekliliğini göstermek kalıyor.

$z \in Z$ keyfi verilsin. U kümesi $f(z)$'nin bir düzgün açık komşuluğu ve V ise U üzerinde $\hat{f}(z)$'yi içeren yaprak olsun. Z yerel yol bağlantılı olduğundan, z noktasının bir W yol bağlantılı komşuluğu $f(W) \subset U$ olacak biçimde seçilebilir. Z yol bağlantılı olduğundan, en az bir $\gamma \in \mathcal{G}_{z_0,z}(Z)$ vardır; böyle bir geziyi seçip sabit tutalım. W yol bağlantılı olduğundan, her $w \in W$ için $\lambda \in \mathcal{G}_{z,w}(W)$ gezileri vardır. Dolayısıyla $w \in W$ için $\hat{f}(w)$'nin tanımında $f \circ (\gamma\lambda)$ gezisini kullanabiliriz. Bu durumda $\sigma := f \circ \lambda$ ve $\hat{\sigma}$ ise σ'nın $\hat{f}(z)$'den başlayan çekilmişi olmak üzere $\hat{f}(w) = \hat{\sigma}(1)$olur. Şimdi $\underline{\sigma} \subset f(W) \subset U$ olduğundan σ'nın U üzerindeki her yaprakta bir çekilmişi vardır ve $\hat{f}(z) \in V$'den başlayan çekilmişi tümüyle V yaprağına düşer. Üstelik, zorunlu olarak $\hat{f}(w) = (p|V)^{-1}(\sigma(1)) = (p|V)^{-1}(f(w))$ olur. Böylece $\hat{f}|W = (p|V)^{-1} \circ (fW)$ olduğundan $\hat{f}$ fonksiyonu W'de, dolayısıyla Z'de süreklidir. □

[5] $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ sürekli demek, $f : Z \to X$ sürekli ve $f(z_0) = x_0$ demektir. $[\gamma] \in \pi_1(Z, z_0)$ için $f_\#([\gamma] := [f \circ \gamma]$ olarak tanımlanmıştır (bkz. KA I, s. 234).

Önsav 8.2.15. *$p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ yerel düzgün örtme ise, $p_\# : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ birebirdir ve $p_\#(\pi_1(Y, y_0))$ kümesi tam da y_0'dan başlayan, $\hat{\tau}$ çekilmişleri de tur olan $\tau \in \mathcal{T}_{x_0}(X)$ turlarının $[\tau]$ sınıflarından oluşur.*

Kanıt. $\hat{\tau} \in \mathcal{T}_{y_0}(Y)$ ise tanım gereği $p_\#([\hat{\tau}]) = [p \circ \hat{\tau}]$. Şimdi $\tau := p \circ \hat{\tau}$ dersek $\tau \in \mathcal{T}_{x_0}(X)$ ve $\hat{\tau}$ turu τ'nın y_0'dan başlayan çekilmişidir. Dolayısıyla $\tau \simeq c_{x_0}$ ise $\hat{\tau} \simeq c_{y_0}$ olur. Bu, $p_\#([\hat{\tau}]) = [c_{x_0}]$ ise $[\hat{\tau}] = [c_{y_0}]$ olması, dd. $p_\#$'nin birebir olması demektir. Savın kalanı aşikârdır. □

$p : Y \to X$ bir yerel düzgün örtme, $a \in X$ ve $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ olsun. Teorem 8.2.9'dan dolayı, X'te başlangıç noktası a olan herhangi bir γ gezisi, Y'de başlangıç noktası $\hat{a}$ olan bir tek $\hat{\gamma}_{\hat{a}}$ gezisine çekilir. Ayrıca $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$ ve $\gamma \simeq_{uk} \eta$ ise, (8.2.12)'den $\hat{\gamma}_{\hat{a}} \simeq_{uk} \hat{\eta}_{\hat{a}}$, dolayısıyla $\hat{\gamma}_{\hat{a}}(1) = \hat{\eta}_{\hat{a}}(1)$ olduğunu biliyoruz. Özel olarak $\tau \in \mathcal{T}_a(X)$ turlarının $\hat{a}$'dan başlayan çekilmişlerine odaklanırsak $\phi_{\hat{a}}([\tau]) := \hat{\tau}_{\hat{a}}(1) \in p^{-1}(a)$ tanımı kusursuzdur.

$$\phi_{\hat{a}} : \pi_1(X, a) \to p^{-1}(a),\ \phi_{\hat{a}}([\tau]) := \hat{\tau}_{\hat{a}}(1) \tag{8.2}$$

dönüşümüne yakından bakalım.

Önerme 8.2.16. *$p : (Y, \hat{a}) \to (X, a)$ bir yerel düzgün örtme ise, aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) Y yol bağlantılı ise $\phi_{\hat{a}}$ örtendir.

(ii) Y basit bağlantılı ise, $\phi_{\hat{a}}$ bir tameşlemedir.

Kanıt. (i) Gerçekten de, her $\hat{b} \in p^{-1}(a)$ için en az bir $\eta \in \mathcal{G}_{\hat{a},\hat{b}}(Y)$ gezimiz var. Bu durumda $\gamma := p \circ \eta \in \mathcal{T}_a(X)$ olur. γ'nın $\hat{a}$'dan başlayan $\hat{\gamma}_{\hat{a}}$ çekilmişi η olmak zorundadır. Böylece $\phi_{\hat{a}}([\gamma]) = \hat{\gamma}_{\hat{a}}(1) = \eta(1) = \hat{b}$.

(ii) $\tau, \sigma \in \mathcal{T}_a(X)$ için $\phi_{\hat{a}}([\tau]) = \phi_{\hat{a}}([\sigma])$ olduğunu varsayalım. $\hat{\tau}_{\hat{a}}$ ve $\hat{\sigma}_{\hat{a}}$ bu turların $\hat{a}$'dan başlayan çekilmişleri ise, $\phi_{\hat{a}}$'nın tanımından $\hat{\tau}_{\hat{a}}(1) = \hat{\sigma}_{\hat{a}}(1)$ olur. Bu durumda $\hat{\tau}_{\hat{a}}$ ve $\hat{\sigma}_{\hat{a}}$ gezileri basit bağlantılı Y uzayında başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan iki gezi olduğundan, KA I Teorem 2.9.13'ten bir $\hat{H} : \hat{\tau}_{\hat{a}} \simeq_{uk} \hat{\sigma}_{\hat{a}}$ evirmesi vardır. Dolayısıyla $H := p \circ \hat{H} : \tau \simeq_{uk} \sigma$ ve biz $[\tau] = [\sigma]$ elde ederiz. Dolayısıyla $\phi_{\hat{a}}$ birebirdir. Tanım gereği basit bağlantılı uzaylar yol bağlantılı olduğu için, (i)'den $\phi_{\hat{a}}$ örtendir. Sonuçta $\phi_{\hat{a}}$ bir tameşlemedir. □

Örneğin $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi i t, \sin 2\pi i t) = \exp 2\pi i t$ bir yerel düzgün örtme ve $\mathbb{R}$ basit bağlantılı ve $a = (1, 0)$ ise, $p^{-1}(a) = \mathbb{Z}$ olduğundan $\phi_{\hat{a}} : \pi_1(\mathbb{S}^1, a) \to \mathbb{Z}$ bir tam eşlemedir; aslında bu yalnızca bir tam eşleme değil bir grup eşyapı dönüşümüdür, ancak konumuz bu değilse de ana fikri verelim. $\mathbb{S}^1$'i $\mathbb{C}$'de düşünerek, her $m \in \mathbb{Z}$ için $\gamma_m(t) = \exp 2\pi i m t$ olarak tanımlansın. Bu durumda, her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $\gamma_m \gamma_n = \gamma_{m+n}$ ve her $\gamma \in \mathcal{T}_1(\mathbb{S}^1)$ için $\gamma \simeq_{uk} \gamma_m \iff n(\gamma, 0) = n(\gamma_m, 0)$ kolayca gösterilir ve sav bundan çıkar.

Not 8.2.17. Cebirden Bazı Bilgiler: G herhangi bir grup ve $H \subset G$ bir altgrup olsun. Her $g \in G$ için $gHg^{-1} = H$ ise, H'ye G'de **normal**dir denir. H altgrubunun G'de normal olması, her $g \in G$ için $gH = Hg$ olması, dd. sol yansınıflarının sağ yansınıflarına eşit olması demektir.

$$N_G(H) := \{g \mid g \in G \text{ ve } gHg^{-1} = H\}$$

olsun. $N_G(H)$, G'nin bir altgrubudur ve H grubu $N_G(H)$'de normaldir. Ayrıca $N_G(H)$ grubu, H'nın normal olduğu G'nin altgrupları arasında $\subset$ bağıntısına göre en büyük olanıdır. $N_G(H)$'ye H'nin **normalleştireni** denir. Yine cebirden biliyoruz ki, $G/H := \{gH \mid g \in G\}$ yan sınıflar kümesinin $g_1H * g_2H := (g_1g_2)H$ olarak tanımlanan işleme göre bir grup olması için gerek ve yeter koşul H'nin G'de normal olmasıdır. Böylece $N_G(H)/H$ bir gruptur. $H, H' \subset G$ altgruplarına bir $g \in G$ ile $gH = gH'$ sağlanıyorsa, dd. $H = gH'g^{-1}$ ise, **eşleniktir** denir.

G etkisiz ögesi 1 olan bir grup ve M herhangi küme olmak üzere, bir $\phi : M \times G \to M$ dönüşümü verilsin. $\phi(x, g)$ yerine yalın olarak $x \cdot g$ yazacağız. Aşağıdaki koşullar sağlanmışsa G **grubu** M**'de** (ϕ aracılığı ile) **sağdan işler** denir:

(i) $\forall g_1, g_2 \in G \;\; \forall m \in M \;\; (m \cdot g_1) \cdot g_2 = m \cdot (g_1g_2)$,

(ii) $\forall m \in M \;\; m \cdot 1 = m$.

G grubunun M'de bir $\varphi : G \times M \to M$ ile (φ aracılığı ile) **soldan işleme**si benzer biçimde tanımlanır. Biz sağdan işleme ile çalışacağız. G grubu M'de (ϕ aracılığı ile) sağdan işlerse, her $H \subset G$ altgrubu da M'de ($\phi|M \times H$ aracılığı ile) sağdan işler. Her $H \subset G$ altgrubu G'de doğal biçimde hem sağdan hem de soldan işler.

Her $m, n \in M$ için $n = m \cdot g$ olacak biçimde bir g varsa, G **geçişli** (veya **homojen**) **işler** denir; eğer bu tanımdaki g tek olarak belirli ise, G **düzgün işler** denir[6]. $m \cdot G := \{m \cdot g \mid g \in G\}$ kümesine m**'in** G**-yolu** denir. $m = m \cdot g$ koşulunu sağlayan m noktalarına g'nin **sabit noktaları** denir. $m \in M$ için m'yi sabit bırakan g'ler G'nin bir $G_m := \{g \in G \mid m \cdot g = m\}$ altgrubunu oluşturur; bu altgruba m**'nin sabitleyici** (veya **izotropi**) **altgrubu** denir. G'nin 1 etkisiz öğesinin dışındaki ögelerinin sabit noktaları yoksa G **sabit noktasız** (veya **serbest**) **işler** denir. Her $m \in M$ için $m \cdot g = m$ yalnızca $g = 1$ için sağlanmışsa G **etkin** işler denir. $m, m' \in M$ için

$$m' \sim_G m :\Longleftrightarrow m' \in m \cdot G$$

ile M'de bir denklik bağıntısı tanımlanır. Bu denklik bağıntısına göre m'nin denklik sınıfı m'in G-yolu olan $m \cdot G$'dir. Bu denklik sınıflarının kümesi M/G ile gösterilir. $[m]_G := m \cdot G$ yazılır; bağlamdan anlaşıldığında da $[m]_G$ yerine yalın olarak $[m]$ yazılır.

Her $g \in G$ için bir $\phi_g : M \to M$ dönüşümü $\phi_g(m) := m \cdot g$ ile tanımlansın. $\phi_g \in \operatorname{Per} M$ olduğunu görelim: Her $m \in M$ için $m = m \cdot (g^{-1}g) = (m \cdot g^{-1}) \cdot g$ olduğundan, ϕ_g örtendir. $\phi_g(m) = \phi_g(n)$ ise, $m \cdot g = n \cdot g$ ve buradan da $m = m \cdot (gg^{-1}) = (m \cdot g) \cdot g^{-1} = (n \cdot g) \cdot g^{-1} = n \cdot (gg^{-1}) = n$ elde edilir. Dolayısıyla ϕ_g aynı zamanda birebir, sonuçta bir tameşleme olur. Diğer yandan $\phi_h(\phi_g(m)) = (m \cdot g) \cdot h = m \cdot (gh) = \phi_{gh}(m)$ olur. Dolayısıyla $\Phi(g) := \phi_g$ ile tanımlanan $\Phi : G \to \operatorname{Per} M^{op}$ bir grup yapı dönüşümüdür[7]. Φ dönüşümünün birebir olması için gerek ve yeter koşul G'nin etkin işlemesidir. Tersine bize bir $\Phi : G \to \operatorname{Per} M^{op}$ verilseydi G grubu, $x \cdot g := \phi(x, g) := \Phi(g)(x)$ olarak tanımlarsak, ϕ ile M'de sağdan işler.

Her $m \in M$ için $\phi_m : G \to m \cdot G$ dönüşümü $\phi_m(g) := m \cdot g$ olarak tanımlansın. Bu bir örten dönüşümdür. Ayrıca $\phi_m(g_1) = \phi_m(g_2) \Longleftrightarrow m = m \cdot (g_2g_1^{-1}) \Longleftrightarrow g_2g_1^{-1} \in G_m \Longleftrightarrow g_2 \in G_mg_1$. Böylece ϕ_m dönüşümü $m \cdot G$ ile G_mg_1 yan sınıfları arasında bir tameşlemedir.

$(\hat{X}, p, X)$ bir yerel düzgün örtme ve $a \in X$ olsun. Bir $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ seçelim. $\gamma \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$'in $\hat{a}$'dan başlayan tek olarak belirli $\hat{\gamma}_{\hat{a}}$ çekilmişi ile

$$\hat{a} \cdot \hat{\gamma}_{\hat{a}} := \hat{\gamma}_{\hat{a}}(1) \tag{8.3}$$

[6]"Düzgün işler" yerine "*normal işler*" veya *"Galois işler*" de denir.

[7]G soldan işleseydi $\Phi : G \to \operatorname{Per} M$ bir grup yapı dönüşümü olurdu.

olarak tanımlayalım, dd. $\hat{a}\cdot\hat{\gamma}_{\hat{a}}$ noktası γ'nın $\hat{a}$'dan başlayan çekilmişinin bitiş noktasıdır. $\gamma\eta$ tanımlı ise $(\hat{a}\cdot\hat{\gamma}_{\hat{a}})\cdot\hat{\eta}_{\hat{a}\cdot\hat{\gamma}_{\hat{a}}} = \hat{a}\cdot\widehat{(\gamma\eta)}_{\hat{a}}$ olduğu kolayca görülür. $\eta \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$, $\gamma \simeq_{uk} \eta$ ve $\hat{\eta}$ gezisi η'nın başlangıç noktası $\hat{a}$ olan bir çekilmişi ise, $\hat{\gamma}(1) = \hat{\eta}(1)$ olduğundan $\hat{a}\cdot\hat{\gamma}_{\hat{a}} = \hat{a}\cdot\hat{\eta}_{\hat{a}}$ olur. Dolayısıyla $\hat{a}\cdot\hat{\gamma}_{\hat{a}}$ aslında $[\gamma]$ denklik sınıfına bağlıdır ve $\hat{a}\cdot[\gamma] := \hat{\gamma}(1)$ tanımı kusursuzdur.

Şimdi $\gamma \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$ ve $\eta \in \mathcal{G}_{b,c}(X)$ olsunlar. $\hat{\gamma}$ gezisi γ'nın $\hat{a}$'dan başlayan çekilmişi ve $\hat{\eta}$ ise η'nın $\hat{b}$'den başlayan çekilmişi ise, $\gamma\eta$'nın $\hat{a}$'dan başlayan çekilmişi $\widehat{\gamma\eta}$ olmak üzere, $(\hat{a}\cdot\gamma)\cdot\eta = \hat{a}\cdot(\gamma\eta)$ olduğundan $(\hat{a}\cdot[\gamma])\cdot[\eta] = \hat{a}\cdot[\gamma\eta]$ olur. Özellikle $\tau \in \mathcal{T}_a(X)$ bir tur ise, her $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ için $\hat{a}\cdot[\tau] \in p^{-1}(a)$ olduğundan

$$\phi : p^{-1}(a) \times \pi_1(X,a) \to p^{-1}(a),\ \phi(\hat{a},[\tau]) = \hat{a}\cdot[\tau] = \hat{a}\cdot\hat{\tau}_{\hat{a}} = \hat{\tau}_{\hat{a}}(1) \qquad (8.4)$$

ile $\pi_1(X,a)$ grubu $p^{-1}(a)$'da sağdan işler. Bu ϕ ve $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ için biraz yukarıda tanımlanan $\phi_{\hat{a}}$ dönüşümü (8.2)'deki $\phi_{\hat{a}}$ dönüşümü ile örtüşür. Önerme 8.2.16'dan biliyoruz ki $\hat{X}$ *yol bağlantılı ise,* $\pi_1(X,a)$ *grubu* $p^{-1}(a)$*'da geçişli işler*; eğer $\hat{X}$ basit bağlantılı ise $\phi_{\hat{a}}$ birebirdir. *Dolayısıyla* $\hat{X}$ *yol bağlantılı ve basit bağlantılı ise,* $\pi_1(X,a)$ *grubu* $p^{-1}(a)$*'da düzgün işler.*

Önsav 8.2.18. *$p : \hat{X} \to X$ bir yerel düzgün örtme, $\hat{X}$ ve X yol bağlantılı ve $p(\hat{a}) = a$ ise, $p_\#(\pi_1(Y,\hat{a}))$ grubunun $\pi_1(X,a)$ grubundaki yan sınıflarının kümesi $p^{-1}(a)$ sapı ile eş güçlüdür.*

Kanıt. (8.4)'teki tanımla $G := \pi_1(X,a)$ grubu $p^{-1}(a)$ sapında sağdan işler. $\hat{X}$ yol bağlantılı olduğundan, G'nin geçişli işlediğini biliyoruz. Dolayısıyla $\hat{a}$ ögesinin $\hat{a}\cdot G$ yolu $p^{-1}(a)$ sapıdır. Bir $[\tau] \in G$'nin $\hat{a}$'nın $G_{\hat{a}}$ izotropi grubunda olması tam da τ'nun $\hat{a}$'dan başlayan $\hat{\tau}$ çekilmişinin kapalı olması, bu da $[\tau] = p_\#([\hat{\tau}]) \in p_\#(\pi_1(\hat{X},\hat{a}))$ olması demektir. Bu, savı verir. □

Not 8.2.19. Tanımlardan görüleceği gibi $p_\#(\pi_1(\hat{X},\hat{a}))$ altgrubu $\hat{a}$'nın seçimine bağlıdır. Şimdi $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in p^{-1}(a)$ olsun. $\hat{X}$ yol bağlantılı ise, (8.2.16)'dan, $\pi_1(X,a)$ grubunun $p^{-1}(a)$ sapında geçişli işlediğini biliyoruz. $[\tau] \in \pi_1(X,a)$ ile $\hat{a}_2 = \hat{a}_1\cdot[\tau]$ olsun, dd. τ'nın $\hat{a}_1$'den başlayan $\hat{\tau}$ çekilmişinin bitiş noktası $\hat{a}_2$ olsun. Şimdi $\sigma \in \mathcal{T}_a(X)$'in $\hat{a}_2$'den başlayan $\hat{\sigma}$ çekilmişinin bitiş noktasının yine $\hat{a}_2$ olması $\tau\sigma\tau^- \in \mathcal{T}_a(X)$ turunun $\hat{a}_1$'den başlayan çekilmişinin $\hat{a}_1$ olmasına denktir. Başka sözlerle, $\hat{a}_2 = \hat{a}_1\cdot[\tau]$ ise, $\hat{a}_2 = \hat{a}_2\cdot[\sigma]$ olması $\hat{a_1} = \hat{a_1}\cdot\big([\tau][\sigma][\tau^-]\big)$ olmasına denktir. Böylece $p_\#(\pi_1(\hat{X},\hat{a}_2)) = [\tau]p_\#(\pi_1(\hat{X},\hat{a}_1))[\tau^-]$ olur. *Dolayısıyla $\hat{X}$ yol bağlantılı ise, $\pi_1(X,a)$'nın $p_\#(\pi_1(\hat{X},\hat{a}_1))$ ve $p_\#(\pi_1(Y,\hat{a}_2))$ altgrupları birbirinin eşleniğidirler.*

Herhangi bir (Y,p,X) örtü uzayı için $f : Y \to Y$ lifsel eşyapı dönüşümlerine, dd. $p = p \circ f$ koşulunu sağlayan $f : Y \to Y$ topolojik dönüşümlerine (Y,p,X) örtü **uzayının deste dönüşümleri** denir. Bunların kümesini D_p veya $D(Y/X)$ ile gösterirsek fonksiyonların $\circ$ bileşim işlemine göre D_p bir gruptur. [8]

---

[8] Genelde $\mathrm{Deck}(Y/X)$ veya $\mathrm{Deck_p}(Y/X)$ gösterimleri yaygındır. Ancak p fonksiyonu, kendiliğinden X ve Y'yi bünyesinde barındırdığından, D_p yalın gösterimini yeğledik.

Teorem 8.2.20. *X yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı olmak üzere, (Y, p, X) ve (Y', p', X) iki yol bağlantılı yerel düzgün örtme, $x_0 \in X$, $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ ve $y_0' \in (p')^{-1}(x_0)$ olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) Her $f : Y \to Y'$ lifsel dönüşümü bir yerel düzgün örtmedir, dd. f sürekli ve $p' \circ f = p$ ise, f bir yerel düzgün örtmedir.

(ii) Bir $f : Y \to Y'$ lifsel dönüşümünün olması için gerek ve yeter koşul $p_\#(\pi_1(Y, y_0))$'ın $\pi_1(X, x_0)$'da $p'_\#(\pi_1(Y', y_0'))$'ın bir altgrubunun eşleniği olmasıdır.

(iii) p ve p' örtmelerinin denk olmaları için gerek ve yeter koşul $p_\#(\pi_1(Y, y_0))$ ve $p'_\#(\pi_1(Y', y_0'))$'ın $\pi_1(X, x_0)$'da eşlenik olmasıdır.

(iv) $G := \pi_1(X, x_0)$ ve $H := p_\#(\pi_1(Y, y_0))$ ise, $D_p \cong N_G(H)/H$.

Kanıt. (i) $a \in X$ keyfi verilsin. Bu noktanın her iki örtmeye göre de düzgün olan açık ve bağlantılı U komşulukları vardır; U böyle olsun. $p^{-1}(U)$ ve $(p')^{-1}(U)$ kümeleri ayrık bağlantılı açık kümelerin birleşimleridirler. Bunlardan y_0'ı içeren V ve $f(y_0')$'ı içeren V' olsun. $p|V : V \to U$ ve $p'|V' : V' \to U$ topolojik dönüşümler ve $p' \circ f = p$ olduğundan, $f|V = (p'|V')^{-1} \circ (p|V) : V \to V'$ dönüşümü topolojiktir. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ ise, $f^{-1}(V')$ kümesi $V_j \cap f^{-1}(y_0') \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan V_j'lerin ayrık birleşimidir. Dolayısıyla $f : Y \to Y'$ yerel düzgün örtmedir.

(ii) $y_0'' \in p^{-1}(x_0)$ keyfi verilsin. $\pi_1(X, x_0)$ grubu $(p')^{-1}(x_0)$ sapında geçişli işlediğinden, bir $[\tau] \in \pi_1(X, x_0)$ ile $y_0'' = y_0' \cdot [\tau]$ olur. Not 8.2.19'a göre $p_\#(\pi_1(Y', y_0'')) = [\tau] p_\#(\pi_1(Y', y_0'))[\tau]^{-1}$ eşitliği sağlanır. Teorem 8.2.14'ten dolayı, $f(y_0) = y_0''$ koşulunu sağlayan bir lifsel dönüşümün olması için gerek ve yeter koşul $p_\#(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_\#(\pi_1(Y', y_0''))$ olmasıdır. Bu iki bilgi savı verir.

(iii) Eşleniklik (ii)'den dolayı gereklidir. Şimdi koşulumuz sağlansın. Bu durumda bir $\tau \in \mathcal{T}_{x_0}(X)$ ile $p_\#(\pi_1(Y, y_0)) = [\tau] p_\#(\pi_1(Y', y_0'))[\tau]^{-1}$ olur. Bu ise, $y_0'' := y_0' \cdot [\tau]$ olmak üzere, $p_\#(\pi_1(Y, y_0)) = p_\#(\pi_1(Y', y_0'))$ demektir. Dolayısıyla (8.2.14)'ten dolayı $f(y_0) = y_0''$ koşulunu sağlayan $f : Y \to Y'$, ve $g(y_0'') = y_0$ koşulunu sağlayan $g : Y' \to Y$ lifsel dönüşümlerimiz vardır. $g \circ f : Y \to Y$ lifsel dönüşümü için $(g \circ f)(y_0) = y_0$ olur; dolayısıyla (8.1.1)'den $g \circ f = \mathrm{Id}_Y$. Benzer biçimde $g \circ f = \mathrm{Id}_{Y'}$ elde edilir. Böylece (Y, p, X) ve (Y', p', X) lifsel uzayları denktirler.

(iv) Her $f \in D_p(Y/X)$ bir lifsel dönüşümdür; bu nedenle (8.1.1)'den dolayı f dönüşümü $f(y_0)$ değeri ile tek olarak belirlenmiştir. Y yol bağlantılı olduğundan G grubu $p^{-1}(x_0)$ sapında geçişli işler; dolayısıyla bir $[\tau] \in G$ ile $f(y_0) = y_0 \cdot [\tau]$ olur. Not 8.2.19'dan dolayı $p_\#(\pi_1(Y, f(y_0)) = [\tau] H [\tau]^{-1}$. Teorem 8.2.14'ten dolayı $[\tau] H [\tau]^{-1} \subset H$ olur. Dolayısıyla $[\tau] \in N_G(H)$ olur. Bir $[\sigma] \in G$ ile $y_0 \cdot [\tau] = y_0 \cdot [\sigma]$ ise, $y_0 = y_0 \cdot ([\tau][\sigma]^{-1})$ olur; bu da $[\tau][\sigma]^{-1} \in H$ demektir. Bu ise, $[\tau]$'nin $N_G(H)/H$'deki denklik sınıfını $[\tau]_H$ ile gösterirsek $[\tau]_H = [\sigma]_H$ demektir. Dolayısıyla $[\tau]_H$ yalnızca f'ye bağlıdır ve $f \mapsto [\tau]_H$ ile tanımlanan $D_p(Y/X) \to N_G(H)/H$ dönüşümü birebirdir.

$[\tau] \in N_G(H)$ ise $H = [\tau]H[\tau]^{-1} = p_\#(\pi_1(Y, y_0\cdot[\tau]))$ olduğundan, (8.1.1)'den dolayı $f(y_0) = y_0 \cdot [\tau]$ olan bir $f \in D_p(Y/X)$ vardır ve $f \mapsto [\tau]_H$ olduğundan, dönüşümümüz örtendir. Geriye dönüşümümüzün bir yapı dönüşümü olduğunu görmek kalıyor.

Şimdi $[\tau] \in \pi_1(X, x_0)$ ve $y \in p^{-1}(x_0)$ keyfi verilsinler. τ'nın y'den başlayan çekilmişini $\hat{\tau}_y$ ile gösterirsek tanım gereği $y \cdot [\tau] = \hat{\tau}_y(1)$. Şimdi $f \in D_p(Y/X)$ ise, $f \circ \hat{\tau}_y = \hat{\tau}_{f(y)}$ olur, dd. $f \circ \hat{\tau}_y$ dönüşümü τ'nın $f(y)$'den başlayan çekilmişidir. Dolayısıyla

$$f(y \cdot [\tau]) = f(\hat{\tau}_y(1)) = (f \circ \hat{\tau}_y)(1) = \hat{\tau}_{f(y)}(1) = f(y) \cdot [\tau] \tag{8.5}$$

olur. Böylece $f, g \in D_p(Y/X)$ ve $f(y_0) = y_0 \cdot [\tau]$ ve $g(y_0) = y_0 \cdot [\sigma]$ ise, (8.5)'ten $(g \circ f)(y_0) = g(f(y_0)) = g(y_0 \cdot [\tau]) = g(y_0) \cdot [\tau]) = (y_0 \cdot [\sigma]) \cdot [\tau] = y_0 \cdot ([\sigma][\tau])$ olur. Bu ise $g \circ f \mapsto [\sigma][\tau]$ demektir ve işimiz biter. □

Dönme Sayıları: Biz dönme sayılarını açılar üzerinden tanımladık. Sonra dönme saylarının integrallerle verilebileceğini gördük. Şimdi ise dönme sayılarının topolojik olarak tanımlanabileceğini göstereceğiz.

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ kapalı gezisi verilsin ve $w \notin \underline{\gamma}$ olsun. Bu durumda $\eta(t) := \gamma(t) - w$ ile tanımlanan η gezisinin izi $\mathbb{C}^*$'dadır. γ kapalı olduğundan η da kapalıdır. $a := \eta(0) = \eta(1)$ olsun. $\hat{a} \in \exp^{-1}(a)$'dan keyfi seçilsin. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ bir yerel düzgün örtme olduğundan, η gezisi başlangıç noktası $\hat{a}$ olan bir $\hat{\eta} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gezisine çekilebilir. η kapalı olduğundan, bu gezinin $\hat{b}$ bitiş noktası da $\exp^{-1}(a) = \hat{a} + 2\pi i\mathbb{Z}$ sapındadır. Bu durumda $\frac{1}{2\pi i}(\hat{\eta}(1) - \hat{\eta}(0)) \in \mathbb{Z}$. Şimdi $\hat{\eta}_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gezisi η'nın başlangıç noktası $\hat{a}_1$ ve bitiş noktası $\hat{b}_1$ olan bir başka çekilmişi ise,

$$\frac{1}{2\pi i}(\hat{\eta}(1) - \hat{\eta}(0)) = \frac{1}{2\pi i}(\hat{\eta}_1(1) - \hat{\eta}_1(0))$$

olduğunu savunuyoruz. Gerçekten de $\exp \hat{\eta}_1(t) = \exp \hat{\eta}(t)$ olduğundan, bağlantılı $[0, 1]$ uzayında tanımlı ve $\mathbb{Z}$-değerli $\sigma := \frac{1}{2\pi i}(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta})$ sürekli fonksiyonu sabittir. Dolayısıyla bir $m \in \mathbb{Z}$ ile, her t için $\hat{\eta}_1(t) - \hat{\eta}(t) \equiv 2\pi i m$ olur. Buradan $\hat{\eta}(1) - \hat{\eta}(0) = \hat{\eta}_1(1) - \hat{\eta}_1(0)$ elde edilir.

Önerme 8.2.21. *$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ bir kapalı gezi, $w \notin \underline{\gamma}$, ve $\hat{\eta}$ gezisi $(\mathbb{C}, \exp, \mathbb{C}^*)$ yerel düzgün örtü uzayında $\eta := \gamma - w$ gezisinin herhangi bir çekilmişi ise,*

$$n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i}(\hat{\eta}(1) - \hat{\eta}(0)).$$

Kanıt. Bu önermeyi parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından γ gezileri için kanıtlamakla yetineceğiz. Bunun içinse $\mathcal{C}^1$ sınıfından geziler için kanıtlamak yeterlidir. γ gezisi $\mathcal{C}^1$ sınıfından olsun. $\hat{\eta}$ gezisi $(\mathbb{C}, \exp, \mathbb{C}^*)$'de $\gamma - w$'nin bir çekilmişi olsun. Bu durumda $\exp \hat{\eta}(t) = \gamma(t) - w$ olduğundan,

$$\gamma'(t) = \hat{\eta}'(t) \exp \hat{\eta}(t) = \hat{\eta}'(t)(\gamma(t) - w)$$

olur. Böylece $\hat{\eta}'(t) = \gamma'(t)/(\gamma(t) - w)$ ile

$$\begin{aligned} n(\gamma, w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \hat{\eta}'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}(\hat{\eta}(1) - \hat{\eta}(0)). \end{aligned}$$

□

Problemler

Problem 8.2.1. $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $p(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_2)$ ve

$$V = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

vida eğrisi olmak üzere, $p|V : V \to \mathbb{S}^1$'in bir yerel düzgün örtme olduğunu gösteriniz.

Problem 8.2.2. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) := e^{2\pi i t}$ için $\big(\mathbb{R}, p, \mathbb{S}^1\big)$'in bir yerel düzgün örtme olduğunun gösteriniz. Aynı p ile $\big(\mathbb{R}^2, p \times id, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\big)$ ve $\big(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, id \times p, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1\big)$'lerinde birer yerel düzgün örtme olduğunu gösteriniz. Diğer yandan $p|(-2, 2) : (-2, 2) \to \mathbb{S}^1$'in bir dalsız örtme olduğunu, ancak yerel düzgün örtme olmadığını gösteriniz.

Problem 8.2.3. $p : (-2, 2) \to \mathbb{S}^1$ dönüşümü $p(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ olsun. p'nin bir dalsız örtme olduğunu, ancak $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ noktasının hiç bir komşuluğunun düzgün örtülemeyeceğini kanıtlayınız.

Problem 8.2.4. X, Y Hausdorff topolojik uzaylar, X yol bağlantılı ve $p : Y \to X$ yerel topolojik olsun. Aşağıdaki önermelerin denkliğini kanıtlayınız:
(i) Her $\gamma \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$ ve her $\hat{a} \in p^{-1}(a)$ için γ'nın $\hat{a}$'dan başlayan bir çekilmişi vardır.
(ii) Her son noktasız $\hat{\gamma} : [0, 1) \to Y$ gezisi de, eğer $\gamma = p \circ \hat{\gamma}$ son noktasız gezisi $[0, 1]$'de bir geziye genişletilebiliyorsa, $[0, 1]$'de bir geziye genişletilebilir.

Problem 8.2.5. X, Y Hausdorff topolojik uzaylar, X yol bağlantılı ve $p : Y \to X$ yerel düzgün örtme ise, bir önceki problemdeki (i) ve (ii)'nin sağlandığını gösteriniz.

Problem 8.2.6. $X := \mathbb{C}\backslash\{\pm 1\}$, $Y := \mathbb{C}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ ise, $(Y, \sin, X)$'in bir yerel düzgün örtme olduğunu gösteriniz. $\gamma_k : [0, 1] \to X$ gezileri $\gamma_1(t) = 1 - e^{2\pi i t}$ ve $\gamma_2(t) = -1 + e^{2\pi i t}$ olarak verilsinler. $\eta_1 := \gamma_1\gamma_2$ ve $\eta_2 := \gamma_2\gamma_1$ gezilerinin başlangıç noktaları $0 \in Y$ olan çekilmişleri için $\hat{\eta}_1(1) = 2\pi$ ve $\hat{\eta}_2(1) = -2\pi$ olduğunu gösteriniz. Buradan da $\pi_1(X, 0)$'ın değişmeli olmadığını gösteriniz.

8.3 Evrensel Örtmeler

Bu kesimde tüm gezilerimizin parametre aralığını $I = [0, 1]$ olarak seçelim.

$p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ yerel düzgün örtme ise

$$p_\# : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

dönüşümü birebirdir (bkz. (8.2.15)). Bunu, eğer ayrıca X ve Y uzaylarımızı yol bağlantılı seçersek, kabaca şöyle yorumlayabiliriz: Y'nin, dd. örten uzayın $\pi_1(Y)$ temel grubu, örttüğü uzayın $\pi_1(X)$ grubundan daha küçüktür. Olabilecek en küçük grup basit gruptur; bu ise Y'nin basit bağlantılı olması demektir. Y'nin basit bağlantılı olması durumunda ise, (8.2.18)'den Y örtüsünün saplarının $\pi_1(X, x_0)$ ile eşgüçlü olduğunu biliyoruz. Ayrıca Y'nin yerel yol bağlantılı olmasını istersek, her yol bağlantılı $p' : (Y', y_0') \to (X, x_0)$ yerel düzgün örtmesi için, $f(y_0) = y_0'$ koşulunu sağlayan bir $f : (Y, p, X) \to (Y', p', X)$ lifsel dönüşümü vardır (bkz. (8.2.14)). Teorem 8.2.20(i)'den bu f lifsel dönüşümünün bir yerel düzgün örtme olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla (Y, p, X) örtüsü, X'in her yerel düzgün örtüsünü yerel düzgün biçimde örter. Böyle bir örtü, eğer varsa, *evrensel* adını hak eder.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Şekil 8.3: Evrensel örtü.

Tanım 8.3.1. Bir $p : Y \to X$ yerel düzgün örtmesine şu koşul sağlandığında X'in bir **evrensel örtüsüdür** denir: Z'nin bağlantılı olduğu her $q : Z \to X$ yerel düzgün örtmesi ve $p(y_0) = q(z_0)$ koşulunu sağlayan her $y_0 \in Y$ ve $z_0 \in Z$ için, $f(y_0) = z_0$ koşulunu sağlayan bir tek $f : (Y, p, X) \to (Z, q, X)$ lifsel dönüşümü vardır (bkz. Şekil 8.3).

Önsav 8.3.2. *X, Y, Z bağlantılı uzaylar ve (Y, p, X), (Z, q, X) iki evrensel örtü ise, bunlar lifsel uzaylar olarak eşyapılıdır.*

Kanıt. $y_0 \in Y$ ve $z_0 \in Z$ öğeleri $p(y_0) = q(z_0)$ olacak biçimde keyfi verilsinler. Tanımdan dolayı $f : (Y, p, X) \to (Z, q, X)$ ve $g : (Z, q, X) \to (Y, p, X)$ lifsel dönüşümleri $f(y_0) = z_0$ ve $g(z_0) = y_0$ olacak biçimde vardır. Bu durumda $g \circ f$ dönüşümü (Y, p, X) lif uzayından kendisine $(g \circ f)(y_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir lifsel dönüşümdür. Ancak Id_Y de (Y, p, X) lif uzayından kendisine $\mathrm{Id}_Y(y_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir başka lifsel dönüşümdür. Evrensel örtünün tanımından, bu koşulu sağlayan bir tek lifsel dönüşümümüz vardır; dolayısıyla $g \circ f = \mathrm{Id}_Y$ ve benzer irdelemelerle $f \circ g = \mathrm{Id}_Z$ olur. Dolayısıyla $g = f^{-1}$ ve X tabanlı (Y, p, X), (Z, q, X) lif uzayları, lifsel uzaylar olarak eşyapılıdır. Sonuçta X'in bir evrensel örtüsü varsa bu, eşyapı dışında tek olarak belirlidir. □

X, Y, Z Hausdorff uzayları olmak üzere, Y yerel yol bağlantılı ve basit bağlantılı olsun. Her yerel düzgün $p : Y \to X$ bir evrensel örtmedir. $q : Z \to X$

de bir yerel düzgü örtme ise, $q \circ f = p$ koşulunu sağlayan bir sürekli $f : Y \to Z$ dönüşümü vardır. Bir anlamda X'in evrensel örtüleri en büyük örtülerdir.

Şimdi bazı X uzaylarının evrensel örtülerinin varlığını araştıracağız. $\hat{X}$ basit bağlantılı olmak üzere, $p : \hat{X} \to X$ bir evrensel örtü olacaksa Önerme 8.2.16'dan biliyoruz ki, her $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ ve $\pi_1(X, x)$ eş güçlü olmalıdırlar. Eğer ayrıca X'i bağlantılı varsayarsak, her $x \in X$ için $\pi_1(X, x) = \pi_1(X)$ olur. Bu durumda $U \subset X$ açık kümesi düzgün örtülmüşse, $\big(p^{-1}(U), p|p^{-1}(U), U\big)$ örtü uzayının, $\pi_1(X)$ ayrık topolojiyle alınmak üzere $(U \times \pi_1(X), p_1, U)$ örtü uzayı ile eşyapılı olduğunu biliyoruz; burada p_1 birinci koordinata izdüşümdür. Uygun X uzayları için evrensel örtünün varlığının değişik kanıtları vardır. Bunlardan biri bu tip U'larla X'i örtüp, bunları uygun biçimde yapıştırarak $(\hat{X}, p, X)$'i elde etmektir (bkz. [**?**]). Biz bu yolu izlemeyeceğiz.

Tanım 8.3.3. X bir topolojik uzay ve $U \subset X$ açık olsun. U'daki her kapalı γ gezisi X'te sıfıra evrilebilirse, U'ya **iyi** diyelim. X topolojik uzayına, her $x \in X$ noktasının bir iyi komşuluğu varsa, **yarı yerel basit bağlantılıdır** denir. Yol bağlantılı, yerel yol bağlantılı ve yarı yerel basit bağlantılı topolojik uzaylara kısaca **yeterince bağlantılı** denir.

Özel olarak, her $D_r(x) \subset \mathbb{C}$ dairesi basit bağlantılı olduğundan, her $X \subset \mathbb{C}$ açık kümesinin her x noktasının bir (çok) iyi komşuluğu vardır. Dolayısıyla, her $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi yeterince bağlantılıdır.

Her $n \in \mathbb{N}^*$ için C_n, düzlemde, merkezi $(1/n, 0)$'da ve yarıçapı $1/n$ olan çember olmak üzere $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$ olsun. X'e Hawaii küpeleri denir. X yol bağlantılı, yerel yol bağlantılı ancak yarı yerel basit bağlantılı değildir. $X \times [0, 1]$ silindirinin tabanını bir kapakla kapatarak elde ettiğimiz uzay yarı yerel basit bağlantılı, ancak yerel basit bağlantılı değildir.

$p : \hat{X} \to X$ yerel düzgün örtme ve $\hat{X}$ basit bağlantılı ise, X uzayı yarı yerel basit bağlantılı olmak zorundadır. Gerçekten de $a \in X$ verildiğinde a'nın düzgün örtülmüş bir açık U komşuluğunu seçelim ve V ise U üzerinde bir yaprak ve $\hat{a} \in V \cap p^{-1}(a)$ olsun. Şimdi $\gamma \in \mathcal{T}_a(U)$ ise, $\hat{\gamma} := (p|V)^{-1} \circ \gamma$ gezisi bir yandan γ'nın çekilmişi, diğer yandansa $\hat{X}$'te kapalıdır. $\hat{X}$ basit bağlantılı olduğundan $\hat{\gamma} \overset{\hat{X}}{\simeq} 0$. Şimdi $\hat{H} : \hat{\gamma} \overset{\hat{X}}{\simeq} 0$ ise, $H := p \circ \hat{H}$ olmak üzere $H : \gamma \overset{X}{\simeq} 0$, böylece U iyidir.

Teorem 8.3.4 (Evrensel Örtünün Varlığı)**.** *Her yeterince bağlantılı X Hausdorff topolojik uzayının bir $p : \hat{X} \to X$ evrensel örtüsü vardır ve evrensel örtüleri basit bağlantılıdır.*

Kanıt. (a) *$\hat{X}$ ve p'nin tanımı*: Bir $a \in X$ noktasını seçip sabit tutalım. Her $x \in X$ için $\mathrm{G}_{a,x}(X) := \mathcal{G}_{a,x}(X)/\simeq_{uk}$ olsun; $\alpha \in \mathcal{G}_{a,x}(X)$'in denklik sınıfını da $[\alpha]$ ile gösterelim. $\hat{X} := \bigsqcup_{x \in X} \mathrm{G}_{a,x}(X)$ ve $p : \hat{X} \to X$ dönüşümü $\alpha \in \mathcal{G}_{a,x}(X)$ için $p([\alpha]) := x$ olarak tanımlansın. Bu tanımla $p^{-1}(x) = \mathrm{G}_{a,x}(X)$ olduğu apaçıktır. $\hat{X}$'te tanımlayacağımız uygun bir topolojiyle p'nin bir evrensel örtme olmasını sağlayacağız. Genellikle gezilerimizin parametre aralığını $I = [0,1]$ alacağız; bir α gezisi için $\alpha(1)$, bu gezinin bitiş noktasını gösterecektir.

(b) *$\hat{X}$'in topolojisi*: $[\alpha] \in \hat{X}$ noktası keyfi verilsin ve $\alpha \in \mathcal{G}_{a,x}(X)$ olsun. $U \subset X$ kümesi x noktasının bir iyi komşuluğu ise,

$$\hat{U}([\alpha]) := \{[\beta] \mid \exists y \in U,\, \exists \delta \in \mathcal{G}_{x,y}(U) \text{ öyle ki } \beta = \alpha\delta\}$$

olsun. Önce bu tanımın kusursuz olduğun, dd. δ'nın seçiminden bağımsız olduğunu görelim: $\delta, \delta' \in \mathcal{G}_{x,y}(U)$ olsun. U iyi olduğundan $\delta(\delta')^- \overset{X}{\simeq} 0$ olur. KA I Teorem 2.9.13'ün kanıtındaki argümanla $\delta \simeq_{uk} \delta'$ dolayısıyla $\alpha\delta \simeq_{uk} \alpha\delta'$ ve buradan da $[\beta]$'nın, dolayısıyla $\hat{U}([\alpha])$'nın tanımı kusursuz olur[9]. *Eğer $[\beta] \in \hat{U}([\alpha])$ ve $\beta \in \mathcal{G}_{x,y}(X)$ olmak üzere, V kümesi y'nin $V \subset U$ koşulunu sağlayan bir iyi komşuluğu ise* $\hat{V}([\beta]) \subset \hat{U}([\alpha])$. Gerçekten de bir $\delta \in \mathcal{G}_{x,y}(U)$ ile $\beta = \alpha\delta$. Şimdi $[\gamma] \in \hat{V}([\beta])$ ise, bir $z \in V$ ve bir $\delta' \in \mathcal{G}_{y,z}(V)$ ile $\gamma = \beta\delta'$. Dolayısıyla $\gamma = \alpha\delta\delta'$ ve $[\gamma] \in \hat{U}([\alpha])$ olur.

$$\mathcal{B}([\alpha]) := \left\{\hat{U}([\alpha]) \mid U, x\text{'in bir iyi komşuluğu}\right\}$$

olsun. Şimdi $\hat{U}([\alpha]), \hat{V}([\alpha]) \in \mathcal{B}([\alpha])$ ise, x'in $W \subset U \cap V$ olacak biçimde bir iyi W komşuluğu vardır. Açıkça $\hat{W}([\alpha]) \subset \hat{U}([\alpha]) \cap \hat{V}([\alpha])$. Dolayısıyla $\hat{X}$'te $\mathcal{B}([\alpha])$ ailesini $[\alpha]$ noktasının bir komşuluk bazı kabul eden bir topoloji vardır. $\hat{X}$ bu topolojiyle alınacaktır.

(c) *$p : \hat{X} \to X$ yerel düzgün örtmedir.* Gerçekten de, her iyi U için $p|\hat{U}([\alpha]) : \hat{U}([\alpha]) \to U$ topolojiktir ve $x \in U$ ise, $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\alpha]\in \mathrm{G}_{a,x}(X)} \hat{U}([\alpha])$. Teorem 8.2.9'dan dolayı, p gezileri çekme özelliğine sahiptir.

(d) *$\hat{X}$ bir Hausdorff uzayıdır.* $[\alpha], [\beta] \in \hat{X}$ ve $\alpha(1) := x \neq y =: \beta(1)$ olsun. X bir Hausdorff uzayı olduğundan, x ve y noktalarının U ve V iyi komşulukları $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde seçilebilir. O zaman $\hat{U}([\alpha]) \cap \hat{V}([\beta]) = \emptyset$ olur. Şimdi $x = y$ ve $[\alpha] \neq [\beta]$ olsun. U, x'in bir iyi komşuluğu ise, $\hat{U}([\alpha]) \cap \hat{U}([\beta]) = \emptyset$ olmak zorundadır. Tersini varsayalım ve $[\gamma]$ bu arakesitte olsun. Bu durumda, eğer $\gamma(1) = c$ ise, $\delta, \delta' \in \mathcal{G}_{x,c}(U)$ ile $[\lambda] = [\alpha\delta]$ ve $[\lambda] = [\beta\delta']$ olur. Dolayısıyla $[\alpha][\delta] = [\beta][\delta']$ ve buradan da U'nun basit bağlantılı, dolayısıyla KA I Teorem 2.9.13 ile $[\delta] = [\delta']$ olduğunu gözetirsek $[\alpha] = [\beta]$ olur ve bu bir çelişkidir.

(e) *$\hat{X}$ bağlantılıdır.* Önce $\hat{X}$'in yol bağlantılı olduğunu görelim: c_a, izi a olan sabit gezi olmak üzere $[c_a] \in \hat{X}$. Biz her $[\gamma] \in \hat{X}$ noktasının, $\hat{X}$'teki bir $\hat{\gamma}$ gezisi ile $[c_a]$ noktasına bağlanabileceğini göstereceğiz. $\gamma \in \mathcal{G}_{a,x}(X)$ olmak üzere $[\gamma] \in \hat{X}$ keyfi verilsin. Her $s, t \in I$ için $\gamma_s(t) := \gamma(st)$ olarak tanımlansın (γ_s gezisi $\gamma|[0,s]$'den bir parametre değişimi ile elde edilmiştir.). $\gamma_0 = c_a$ ve

[9]Eğer U basit bağlantılı ise, doğrudan KA I Teorem 2.9.13'ten $\delta \simeq_{uk} \delta'$ elde edilir. Katmanlılara odaklanırsak, onlar yerel basit bağlantılı olduklarından, U daha baştan basit bağlantılı seçilir.

$\gamma_s(1) = \gamma(s)$ olduğunu belirtelim. $\hat{\gamma} : I \to \hat{X}$ dönüşümü $\hat{\gamma}(t) := [\gamma_t]$ olarak tanımlansın. Şimdi $\hat{\gamma}$'nın sürekli olduğunu gösterelim. $\tau \in I$ keyfi verilsin. $\hat{\gamma}(\tau)$'ın bir $\hat{V}$ komşuluğu verilsin. U, $\gamma(\tau)$'ın bir iyi komşuluğu olmak üzere, genellikten bir şey kaybetmeden $\hat{V} = \hat{U}([\gamma_\tau])$ alabiliriz. γ sürekli olduğundan, τ'ın I'da bir I^* komşuluğu $\gamma(I^*) \subset U$ olacak içimde vardır. Eğer $\tau < t \in I^*$ ise $[\gamma_t] = [\gamma_\tau \gamma|[\tau, t]]$ ve $\gamma([\tau, t]) \subset U$ olduğundan $\hat{\gamma}([\tau, t]) \subset \hat{U}([\alpha_\tau])$, ve benzer biçimde $t \in I^*$ olmak üzere $t < \tau$ ise, $\hat{\gamma}([t, \tau]) \subset \hat{U}([\alpha_\tau])$ olur. Özetle $\hat{\gamma}(I^*) \subset \hat{U}([\alpha_\tau])$. Böylece $\hat{\gamma}$ fonksiyonu τ'da, ve τ keyfi seçildiğinden I'da süreklidir. Dolayısıyla $\hat{\gamma}$ gezisi $[\gamma_0] = [c_a]$ noktasını $[\gamma]$ noktasına bağlar. $\hat{X}$'in herhangi herhangi bir noktası $[c_a]$'ya bir yolla bağlanabildiğinden, $\hat{X}$'in herhangi iki noktası birbirine bir yolla bağlanabilir. Özetle $\hat{X}$ yol bağlantılıdır. Ayrıca $\mathcal{B}$ bazındaki $\hat{U}([\alpha])$ yol bağlantılı, dolayısıyla $\hat{X}$ yerel yol bağlantılı olduğundan, $\hat{X}$ bağlantılı olur. Ayrıca $p \circ \hat{\gamma} = \gamma$ olduğundan, $\hat{\gamma}$ gezisi γ'nın bir çekilmişidir.

(f) Şimdi $\hat{X}$'in basit bağlantılı olduğunu görelim: $\hat{X}$ yol bağlantılı olduğundan, $\pi_1(\hat{X}, [c_a])$'nın basit olduğunu görmek yeterlidir. Şimdi $\hat{X}$'te bir $\hat{\gamma} \in \mathcal{T}_{[c_a]}(\hat{X})$ turu keyfi verilsin. Bu durumda $\gamma := p \circ \hat{\gamma} \in \mathcal{T}_a(X)$ olur ve $\hat{\gamma}$ turu γ turunun $[c_a]$'dan başlayan çekilmişidir. γ_s gezileri (e)'deki geziler olmak üzere, $H(t, s) := \gamma_s(t)$ ile tanımlanan $H : I \times I \to X$ evirmesi c_a sabit gezisini γ'ya evirir. H'nin $\hat{H}$ çekilmişi ise, (8.1.2)'den dolayı $c_{[c_a]}$ sabit gezisini $\hat{\gamma}$'ya evirir, dd. $\hat{\gamma} \simeq 0$.

(g) Sonuçta Teorem 8.1.4'ten dolayı $(\hat{X}, p, X)$ evrenseldir. (Y, q, X) bir başka evrensel örtü ise, bunlar (8.3.2)'den dolayı lifsel uzay olarak denktirler. Sonuç olarak $\hat{X}$ ve Y topolojik olarak denktirler; böylece $\hat{X}$ basit bağlantılı olduğundan Y de basit bağlantılıdır. $\square$

Teorem 8.3.5. *Y basit bağlantılı ve X ise yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı olmak üzere, (Y, p, X) yerel düzgün örtmesi verilsin. Aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) D_p grubu, her $p^{-1}(x)$ sapında düzgün işler.

(ii) $\pi_1(X) \cong D_p$, dd. bu gruplar eşyapılıdır.

Kanıt. (i) Doğrudan evrensel örtünün tanımından çıkar. $a \in X$ ve $b_1, b_2 \in p^{-1}(a)$ olsunlar. Evrensel örtünün tanımından, tek olarak belirli birer $f, g : (Y, p, X) \to (Y, p, X)$ lifsel dönüşümü, $f(b_1) = b_2$ ve $g(b_2) = b_1$ olacak biçimde vardır. Yine evrensel örtünün tanımından $g \circ f = \mathrm{Id}_Y$ ve $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Dolayısıyla f, g topolojik, böylece $f \in D_p$ ve $f(b_1) = b_2$ olur. Demek ki, D_p grubu p'nin saplarında düzgün işler.

(ii) $\pi_1(Y)$ grubu basit olduğundan, sav doğrudan (8.2.20)(iv)'ten çıkar. $\square$

Örnek 8.3.6. (1) $\mathbb{C}$ basit bağlantılı olduğundan $(\mathbb{C}, \exp, \mathbb{C}^*)$ yerel düzgün örtmesi evrenseldir. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $t_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü $t_m(z) := z + 2\pi i m$ ötelemeleri olmak üzere, açıkça $t_m \in D_{\exp}$. Diğer yandan $f \in D_{\exp}$ keyfi verilsin. Tanım gereği $\exp(f(0)) = \exp 0 = 1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla bir $m \in \mathbb{Z}$ ile $f(0) = 2\pi i m$ olur. Sonuçta $f(0) = t_m(0)$ olduğundan, evrensel örtü tanımından $f = t_m$ olur. Böylece $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong D_{\exp} = \{t_m \,|\, m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ olur.

(2) $\mathbb{C}^-$ sol yarıdüzlem olmak üzere, $p : \mathbb{C}^- \to \mathbb{D}^*$ dönüşümü $p(z) = e^z$ olarak tanımlansın. $\mathbb{C}^-$ basit bağlantılı ve p bir yerel düzgün örtme olduğundan, bu bir evrensel örtüdür.

(3) $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ile $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ve $q : \mathbb{C} \to T_\Omega$ olsun. $\omega \in \Omega$ için $t_\omega(z) := z + \omega$ olmak üzere, örnek (1)'dekine benzer irdelemelerle $\pi_1(T_\Omega) \cong D_q \cong \{t_\omega \,|\, \omega \in \Omega\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ elde edilir.

Problemler

Problem 8.3.1. X bağlantılı ve yerel yol bağlantılı topolojik uzay, $p : Y \to X$ bir evrensel örtü, $a \in X$ ve $b \in p^{-1}(a)$ olsun. Her $f \in D_p$ için $\Phi(f) := f(b)$ olarak tanımlanan $\Phi : D_p \to p^{-1}(a)$ dönüşümünün bir tameşleme olduğunu gösteriniz.

Problem 8.3.2. $p : Y \to X$ evrensel örtü ise, $\varphi([y]) := p(y)$ ile tanımlanan $\varphi : Y/D_p \to X$ ile tanımlanan φ dönüşümünün topolojik olduğunu gösteriniz.

Problem 8.3.3. $n \in \mathbb{N}^*$ ve $p : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto z^n$ olsun. $\xi_k := \exp i\frac{2\pi}{n}k$, $1 \le k \le n$ olmak üzere $\varphi_k : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dönüşümü $\varphi_k(z) := \xi_k z$ olarak tanımlansın. $D_p = \{\mathrm{I}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ olduğunu kanıtlayınız.

8.4 Katmanlılar

Tanım 8.4.1. X bir Hausdorff topolojik uzay olmak üzere, her $a \in X$ öğesinin bir U açık komşuluğu, $\mathbb{R}^n$'de açık bir V açık kümesi ve bir $\varphi : U \to V$ topolojik dönüşümü bulunabiliyorsa, X bir n-**boyutlu katmanlıdır** denir. (U, φ, V) üçlüsüne, veya yalın biçimde (U, φ) ikilisine X'te bir **harita** denir. X uzayında bir $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ haritalar ailesine, $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ sağlanmışsa bir **atlas** denir.[10]

Katmanlılar yerel olarak $\mathbb{R}^n$'deki bir B_r topu gibi olduklarından yerel yol bağlantılı, yerel basit bağlantılı, dolayısıyla yarı-yerel basit bağlantılıdır. Yol bağlantılı, dolayısıyla bağlantılı katmanlılar yeterince bağlantılı olduklarından, (8.3.4)'ten aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 8.4.2. *Her bağlantılı katmanlının basit bağlantılı bir evrensel örtüsü vardır.*

Önerme 8.4.3. *X ve $\hat{X}$ bağlantılı katmanlılar olmak üzere $p : \hat{X} \to X$ yerel topolojik olsun. Ayrıca X basit bağlantılı ve p gezileri çekme özelliğine sahipse p dönüşümü topolojiktir, dolayısıyla $\hat{X}$'te basit bağlantılıdır.*

Kanıt. $\hat{a} \in \hat{X}$ ve $a := p(\hat{a})$ ve $I = [0, 1]$ olsun.

[10] Kimi yazar "katmanlı" yerine "topolojik katmanlı" der. Biz kısaca "katmanlı" diyeceğiz.

(1) p örtendir. Gerçekten de $x \in X$ keyfi verilsin. X'te bir $\gamma : I \to X$ gezisini başlangıç noktası a ve bitiş noktası x olacak biçimde seçelim. $\hat{\gamma}$ gezisi γ'nın bir çekilmişi ve $\hat{x} = \hat{\gamma}(1)$ ise, $p(\hat{x}) = x$.

(2) p birebirdir. $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \hat{X}$ ve $p(\hat{a}_1) = p(\hat{a}_2) = a$ olduğunu varsayalım. $\hat{\gamma} : I \to \hat{X}$ gezisini $\hat{\gamma}(0) = \hat{a}_1$ ve $\hat{\gamma}(1) = \hat{a}_2$ olacak biçimde seçelim. $\gamma := p \circ \hat{\gamma} : I \to X$, başlangıç noktası ve bitiş noktası a olan bir kapalı gezidir. X basit bağlantılı olduğundan, γ'yı X'te başlangıç noktası ve bitiş noktası a olan c_a sabit gezisine eviren bir $\{\gamma_s\}_{s \in I}$ evrimi $\gamma_0 = \gamma$ ve $\gamma_1 = c_a$ olacak biçimde vardır. Teorem 8.1.2'den dolayı her bir γ_s gezisi $\hat{X}$'te bir $\hat{\gamma}_s$ gezisine, $\{\hat{\gamma}_s\}_{s \in I}$ bir evirme, $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0$ ve her s için $\hat{\gamma}_s(0) = \hat{a}_1$ ve her $s, s' \in I$ için $\hat{\gamma}_s(1) = \hat{\gamma}_{s'}(1)$ olacak biçimde evrilir. Böylece

$$a_2 = \hat{\gamma}(1) = \hat{\gamma}_0(1) = \hat{\gamma}_1(1) = a_1$$

olur; dolayısıyla p birebirdir.

(1) ve (2)'den p bir tam eşlemedir; ayrıca yerel topolojik olduğu için açık ve süreklidir. Böylece p bir topolojik dönüşümdür. □

Teorem 8.4.4. *$\hat{X}$ ve X katmanlı olmak üzere, bir $p : \hat{X} \to X$ dalsız örtmesinin bir yerel düzgün örtme olması için gerek ve yeter koşul gezileri çekme özelliğinin olmasıdır.*

Kanıt. (1) Teorem 8.2.9'da yerel düzgün örtmelerin gezileri çekme özelliği olduğunu kanıtladık.

(2) Şimdi p gezileri çekme özelliğine sahip olsun. X'in her x noktası için X'te başlangıç noktası x olan geziler vardır; bu ve p'nin gezileri çekme özelliğinden p örten olmak zorundadır. Şimdi $a \in X$ keyfi verilsin ve U ise bu noktanın basit bağlantılı bir komşuluğu olsun. $p^{-1}(U)$'nun bağlantılı bileşenlerine parçalanışı $\bigsqcup_{j \in J} \hat{U}_j$ olsun. Her $j \in J$ için $p|\hat{U}_j : \hat{U}_j \to U$'nun da gezileri çekme özelliği olduğunu savunuyoruz. Gerçekten de $\hat{a}_j \in \hat{U}_j$ ve $p(\hat{a}_j) =: a_j \in U$ olsun. U'da başlangıç noktası a_j olan bir γ gezisi verildiğinde p bunu $\hat{X}$'de başlangıç noktası $\hat{a}$ olan bir $\hat{\gamma}$ gezisine çeker. $\underline{\hat{\gamma}}$ bağlantılı olduğundan, $p^{-1}(U)$'nun bağlantılı bileşenlerinden bir tanesindedir ve $\underline{\hat{\gamma}} \cap \hat{U}_j \neq \emptyset$ olduğundan, $\underline{\hat{\gamma}} \subset \hat{U}_j$ olmak zorundadır. Özetle $p|\hat{U}_j$ gezileri çeker. Sonuçta $\hat{U}_j$ ve U bağlantılı katmanlılar, U basit bağlantılı ve $p|\hat{U}_j$ gezileri çekme özelliğine sahip olduğundan, Önerme 8.4.3'ten her $j \in J$ için $p|\hat{U}_j$ topolojiktir; dolayısıyla $p : \hat{X} \to X$ yerel düzgün örtmedir. □

Teorem 8.4.5. *X ve Y bağlantılı katmanlılar, Y basit bağlantılı ise, her yerel düzgün $p : Y \to X$ örtüsü evrenseldir.*

Kanıt. Doğrudan tanım ve 8.2.13'ten çıkar. □

$(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı verilsin. $\mathcal{T}$ topolojisinin bir sayılabilir bazı varsa, kısaca X'in **topolojisi sayılabilir** denir.

Önsav 8.4.6. *X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ sürekli, açık ve örten olsun. X'in topolojisi sayılabilirse Y'ninki de sayılabilir.*

Kanıt. $\mathcal{B}$, X'in sayılabilir bir bazı ise, $f(\mathcal{B}) := \{f(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$'nin Y'nin topolojisinin bir bazı olduğunu savunuyoruz.

f bir açık dönüşüm olduğundan, her $U \in \mathcal{B}$ için $f(U)$ açıktır. $V \subset Y$ açık kümesi keyfi verilsin ve $y \in V$ olsun. f örten olduğundan $f(x) = y$ olan bir $x \in X$ vardır. f sürekli ve $\mathcal{B}$ bir baz olduğundan, bir $U_y \in \mathcal{B}$ kümesi $x \in U_y \subset f^{-1}(V)$ ve $f(U_y) \subset V$ olacak biçimde seçilebilir. Her $y \in V$ için $y \in f(U_y)$ olduğundan $V = \bigcup_{y \in V} f(U_y)$ olur ve bu, savı kanıtlar. □

Teorem 8.4.7 (Poincaré-Volterra)**.** *X bağlantılı bir katmanlı ve Y sayılabilir bir bazı olan Hausdorff topolojik uzay olsun. Eğer bir $f : X \to Y$ sürekli dönüşümü her $y \in Y$ için, $f^{-1}(y)$ sapı ayrık olacak biçimde varsa, X'in de bir sayılabilir bir bazı vardır.*

Kanıt. $\mathcal{B}$, Y'nin topolojisinin sayılabilir bir bazı olsun. $\mathcal{U}$ ise X'in aşağıdaki iki koşulu sağlayan açık altuzaylarının ailesi olsun:

(i) U'nun topolojisi sayılabilir,

(ii) U bir $V \in \mathcal{B}$ için $f^{-1}(V)$'nin bir bağlantılı bileşenidir.

(a) $\mathcal{U}$'nun X'in topolojisinin bir bazı olduğunu savunuyoruz. X katmanlısının her (U', φ', V') haritası için U''nün topolojisi sayılabilirdir. Şimdi X'in bir A açık kümesi ve $x \in A$ keyfi seçilsinler. X yerel kompakt Hausdorff uzayı ve f ayrık olduğundan, x noktasının göreceli kompakt bir $W \Subset A$ komşuluğu $\partial W \cap f^{-1}(f(x)) = \emptyset$ olacak biçimde seçilebilir. Haritaların topolojileri sayılabilir olduğundan W'nin topolojisi sayılabilir. f sürekli olduğundan $f(\partial W)$ kompakttır ve bir Hausdorff uzayının kompakt altkümesi olarak kapalıdır ve $f(x)$ noktasını içermez. Dolayısıyla bir $V \in \mathcal{B}$ kümesi $f(x) \in V$ ve $V \cap f(\partial W) = \emptyset$ olacak biçimde vardır. Şimdi U açık kümesi $f^{-1}(V)$'nin x'i içeren bağlantılı bileşeni olsun. Şimdi $U \cap \partial W = \emptyset$ olduğundan $x \in U \subset W \Subset A$, dolayısıyla $U \in \mathcal{U}$ olur. Böylece $\mathcal{U}$, X'in bir bazıdır.

(b) $U_0 \in \mathcal{U}$ keyfi verilsin. Ancak sayılabilir çoklukta $U \in \mathcal{U}$ için $U_0 \cap U \neq \emptyset$ olduğunu savunuyoruz. U_0'ın topolojisi sayılabilir olduğundan, her $V \in \mathcal{B}$ için $f^{-1}(V)$'nin bağlantılı bileşenlerinden ancak sayılabilir tanesi U_0'ı keser. $\mathcal{B}$'nin sayılabilirliği savı verir.

(c) Şimdi $\mathcal{U}$'nun sayılabilir olduğunu savunuyoruz. Bir $U^* \in \mathcal{U}$ seçilip sabit tutulsun. $U_0 = U^*$ olmak üzere, $U_0, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ ve $1 \leq i \leq n$ için $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan n-zincirlerinin son parçaları olan U_n'lerin ailesini $\mathcal{U}_n$ ile gösterelim. X bağlantılı olduğundan $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Dolayısıyla, her $\mathcal{U}_n$'in sayılabilir olduğunu görmek yeterlidir.

$\mathcal{U}_0 = \{U^*\}$ elbette sayılabilir. $\mathcal{U}_n$ sayılabilirse, (b)'den dolayı $\mathcal{U}_{n+1}$ sayılabilir. Bu, savı tamamlar. □

Problemler

Problem 8.4.1. Katmanlı tanımında Hausdorff'luk koşulunun gereksiz olmadığını, dd. haritalarla örtülebilen bir X topolojik uzayının mutlaka Hausdorff uzayı olması gerekmediğini örnekleyiniz.

Problem 8.4.2. Bağlantılı X katmanlısı için aşağıdaki önermelerin denk olduğunu kanıtlayınız:

(i) X'in topolojisinin sayılabilir bir bazı vardır.
(ii) X kompakt tüketilebilir, dd. $K_n \subset X$ kompakt altkümeleri $K_0 \subset K_1 \subset \cdots$ ve $X = \bigcup_{n \geq 0} K_n$ olacak biçimde vardır.

Problem 8.4.3. X bir katmanlı, $K \subset X$ kompakt ve $(x_n) \subset K$ ise, bu dizinin yakınsak bir altdizisinin olduğunu kanıtlayınız.

Problem 8.4.4. X bir katmanlı ve Y bir Hausdorff topolojik uzay olmak üzere, gezileri çekme özelliğine sahip her dalsız $p : Y \to X$ örtmesinin aslında bir yerel düzgün örtme olduğunu gösteriniz.

8.5 Riemann Yüzeyleri

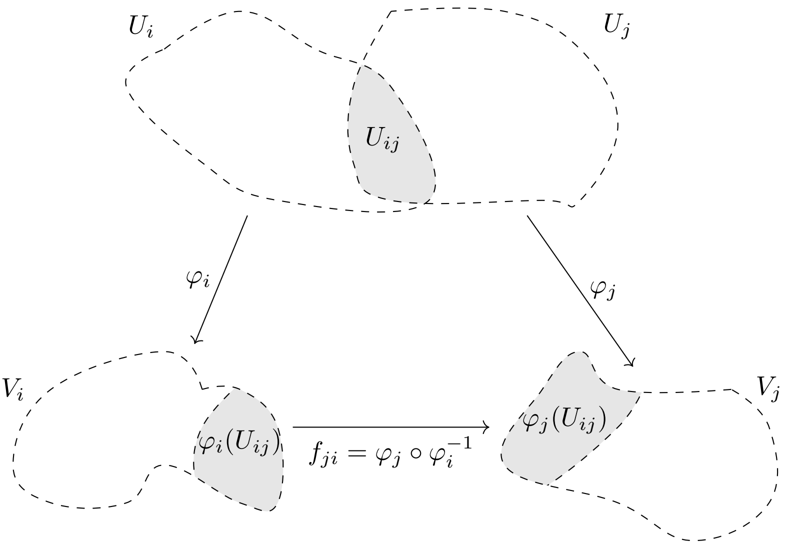
Şimdiye kadar elimizde $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık bir küme olmak üzere, $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ tipindeki fonksiyonlar için tanımlanmış bir *holomorfluk* kavramı var. Riemann'ın düşüncesi bir X yüzeyi ve $U \subset X$ açık kümesi verildiğinde $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ tipindeki fonksiyonlar için bir holomorfluk kavramı tanımlamak olmuştur.

Uzlaşma: Bundan sonra yalnızca kompleks 1-boyutlu, dolayısıyla reel 2-boyutlu katmanlılarla çalışacağız.

Şimdi bize 2-boyutlu bir X katmanlısı verilsin. (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j) bu katmanlıda $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan iki harita olsun. $k \in \mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$\varphi_{ji} := (\varphi_j | U_{ij}) \circ (\varphi_i | U_{ij})^{-1} : \varphi_i(U_{ij}) \to \varphi_j(U_{ij}) \qquad (8.6)$$

dönüşümü $\mathcal{C}^k$ sınıfındansa (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j) haritaları **$\mathcal{C}^k$-uyumludur**, eğer φ_{ji} dönüşümü biholomorfsa (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j) haritaları **holomorf** (veya **analitik**) **uyumludur** denir. φ_{ji} dönüşümlerine ise **koordinat değişimi** denir. Anlatımı kolaylaştırmak açısından, $U_i \cap U_j = \emptyset$ olduğunda da (U_i, φ_i) ve (U_j, φ_j) haritalarına $\mathcal{C}^k$ veya holomorf uyumludur diyelim. X uzayımızdaki bir



Şekil 8.4: Uyumlu haritalar.

$\mathfrak{A}$ atlasına, bu atlastaki haritalar birbiriyle holomorf (veya $\mathcal{C}^k$) uyumlu iseler, bir **kompleks** (veya bir $\mathcal{C}^k$) **atlas** denir. X'te $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlasları verilsin. $\mathfrak{A}$ kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlasının her haritası $\mathfrak{A}'$ kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlasının her haritası ile holomorf (veya $\mathcal{C}^k$) uyumlu ise, $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{A}'$ atlasları birbirine **denk**tir denir ve bu $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$ ile gösterilir. X üzerindeki kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlaslar kümesinde $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre $\mathfrak{A}$'nın denklik sınıfını $[\mathfrak{A}]$ ile gösterelim.

Tanım 8.5.1. 2-boyutlu X katmanlısındaki $\mathfrak{A}$ kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlaslarının $[\mathfrak{A}]$ denklik sınıflarına X'te **kompleks** (veya $\mathcal{C}^k$) **yapı**lar denir.

X'te $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlasları için $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$ olması $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$'nün de X'te bir kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlası olmasına denktir. Bu nedenle, $\mathfrak{A}^* := \bigcup_{\mathfrak{A}' \in [\mathfrak{A}]} \mathfrak{A}'$ de X'te bir kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlastır. Elbette her $\mathfrak{A}' \in [\mathfrak{A}]$ için $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}^*$, dd. $\mathfrak{A}^*$ atlası $[\mathfrak{A}]$'da $\subset$ bağıntısına göre maksimaldir. Açıkça $\mathfrak{A}^*$ kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) atlası $\mathfrak{A}$'nın her bir haritası ile holomorf (veya $\mathcal{C}^k$) uyumlu olan X'teki tüm haritaların ailesidir.

Tanım 8.5.2. X, 2-boyutlu bir katmanlı ve $[\mathfrak{A}]$ ise X'te bir kompleks (veya $\mathcal{C}^k$) yapı olmak üzere, $\mathcal{X} = (X, [\mathfrak{A}])$ ikilisine bir **kompleks** (veya $\mathcal{C}^k$) **katmanlı** denir.

Uzlaşma: $[\mathfrak{A}]$ kompleks yapısı $\mathfrak{A}$ veya $\mathfrak{A}^*$ ile tek olarak belirli olduğu için $(X, [\mathfrak{A}])$ yerine yalın olarak $(X, \mathfrak{A}^*)$ veya $(X, \mathfrak{A})$ da yazacağız. Eğer söz konusu

$\mathfrak{A}$ atlası belli ise, $\mathcal{X} = (X, [\mathfrak{A}])$ kompleks katmanlısı yerine kısaca X kompleks katmanlısından söz edebiliriz. (U, φ) ikilisi X kompleks katmanlısının bir haritası olsun dediğimizde kast edilen $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}^*$ olacaktır.

Not 8.5.3. (1) X katmanlısında $\mathfrak{A}$ herhangi türden bir atlas ve $U \subset X$ bir açık altküme ise, $\mathfrak{A}|U := \{U \cap V \mid V \in \mathfrak{A}\}$ da U'da aynı türden bir atlas ve $(U, [\mathfrak{A}|U])$ aynı türden bir yapıdır ve biz U açık alt kümelerini hep bu yapı ile alınmış varsayacağız.

(2) $\mathfrak{A}$ hangi türden atlas olursa olsun, $(U, \varphi, V) \in \mathfrak{A}$ ise, her açık $U_1 \subset U$ için $V_1 := \varphi(U_1)$ olmak üzere $(U_1, \varphi|U_1, V_1) \in \mathfrak{A}^*$. Bu nedenle $a \in U$ için, gerektiğinde V_1'i $\varphi(a)$ merkezli yeterince küçük açık top olarak seçebiliriz. $\varphi(a)$-merkezli açık topumuzu herhangi bir $r > 0$ için 0-merkezli r-yarıçaplı açık topa biholomorf resmedebildiğimizden $(X, \mathfrak{A})$ katmanlısı ve $a \in X$ nasıl verilirse verilsin $a \in U$ koşulunu sağlayan $(U, \psi, B_r) \in \mathfrak{A}^*$ haritalarımız vardır.

(3) $\mathrm{Id}, \overline{\mathrm{Id}}$ dönüşümleri $\mathrm{Id}(z) = z$ ve $\overline{\mathrm{Id}}(z) = \overline{z}$ olmak üzere, $\mathbb{C}$'deki $(\mathbb{C}, \mathrm{Id}, \mathbb{C})$ ve $(\mathbb{C}, \overline{Id}, \mathbb{C})$ haritaları holomorf uyumlu değillerdir; dolayısıyla $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{C}, \mathrm{Id}, \mathbb{C})\}$ ve $\overline{\mathfrak{A}} = \{(\mathbb{C}, \overline{\mathrm{Id}}, \mathbb{C})\}$ atlasları $\mathbb{C}$'de iki farklı kompleks yapı tanımlar.

Genelde $\mathcal{X} = (X, [\mathfrak{A}])$ yerine yalın olarak $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A})$ yazılır; biz de çoğunlukla böyle yapacağız. Katmanlılar yerel olarak B_r açık topları gibi olduklarından yerel yol bağlantılı, yerel bağlantılı ve yerel basit bağlantılı uzaylardır.

Tanım 8.5.4. Bağlantılı kompleks katmanlılara **Riemann yüzeyleri** diyeceğiz.

Kimi yazarlar Riemann yüzeylerinin "bağlantılı " olmasını istemezler. Özünde bu gerçek anlamda bir genelleme değildir. Şöyle ki, bir Riemann yüzeyinde çalışmak, onun her bir bağlantılı bileşeninde çalışmaya denktir. Çoğu teoremlerimiz bağlantılı kompleks katmanlılar için geçerli olduğundan genel yaklaşım, "bağlantılılığı" Riemann yüzeyi kavramına katmaktır. Kimi yazarlar Riemann yüzeylerinin topolojilerinin ikinci sayılabilir olmasını isterler. Ancak Radó, bağlantılı Riemann yüzeylerinin topolojilerinin ikinci sayılabilir olduğunu kanıtlamıştır; bu nedenle bu koşulu Riemann yüzeyi tanımı içine almadık.

Tanım 8.5.5. $\mathcal{X} = (X, [\mathfrak{A}]), \mathcal{Y} = (Y, [\mathfrak{B}])$ iki kompleks katmanlı (veya $\mathcal{C}^k$ katmanlısı) olsun. $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ ve $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ olsun. $f : X \to Y$ sürekli dönüşümüne, her $i \in I, j \in J$ için

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \to \psi_j(V_j) \tag{8.7}$$

klasik anlamda holomorf (veya $\mathcal{C}^k$ sınıfından) ise, $\mathcal{X}$ kompleks katmanlısından (veya $\mathcal{C}^k$ katmanlısından) $\mathcal{Y}$ kompleks katmanlısına (veya $\mathcal{C}^k$ katmanlısına) bir **holomorf dönüşüm**dür (veya bir $\mathcal{C}^k$ **dönüşümüdür**) denir. Eğer f tameşleme ve f ve f^{-1}'in her ikisi de holomorf (veya $\mathcal{C}^k$ dönüşümü) ise, f **biholomorf**tur veya **bianalitiktir**(veya $\mathcal{C}^k$ **eşyapı dönüşümü**dür, dd. $\mathcal{C}^k$ **diffeomorfizmi**dir) denir. $\mathcal{X}$ kompleks katmanlısından $\mathcal{Y}$ kompleks katmanlısına biholomorf bir f dönüşümü varsa, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$'ye **analitik denk**tir veya **izomorf**tur diyecek ve bunu $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$ ile göstereceğiz.

$\mathcal{X}$ kompleks katmanlısından $\mathcal{Y}$ kompleks katmanlısına holomorf dönüşümlerin kümesini $\mathcal{H}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ ile göstereceğiz. Söz konusu $[\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{B}]$ kompleks yapıları belli olduğunda, yalın olarak $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ yerine X,Y ve $\mathcal{H}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ yerine $\mathcal{H}(X,Y)$ gösterimini yeğleyeceğiz. Bir X katmanlısındaki iki $[\mathfrak{A}]$, $[\mathfrak{B}]$ kompleks yapıları için $[\mathfrak{A}] \neq [\mathfrak{B}]$ iken yine de $(X,[\mathfrak{A}])$, $(X,[\mathfrak{B}])$ kompleks katmanlıları analitik denk olabilirler (bkz. Problem 8.5.4)!

Örnek 8.5.6. $U \subset \mathbb{C}$ boştan farklı bir açık küme ve $\mathrm{Id}_U : U \to U$ özdeşlik dönüşümü olmak üzere, $\mathfrak{A} := \{(U, \mathrm{Id}_U)\}$ bir kompleks atlas ve $(U,\mathfrak{A})$ bir kompleks katmanlı, U bir bölge ise bir Riemann yüzeyidir. Her $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ açık kümesini bundan sonra bu $(U,\mathfrak{A})$ kompleks katmanlısı olarak ele alacağız. U bir bölge ise $(U,\mathfrak{A})$, özellikle de $(\mathbb{C},\mathfrak{A})$ bir Riemann yüzeyidir.

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ ise, elimizde f için daha önce tanımlanmış bir holomorfluk kavramı var; buna, vurgulamak gerektiğinde *klasik anlamda holomorfluk* diyelim. Şimdi U ve $\mathbb{C}$ kompleks katmanlı olarak alındığında $f : U \to \mathbb{C}$'nin bir *holomorf dönüşüm* olması tam da f'nin *klasik anlamda bir holomorf fonksiyon* olması demektir.

Tanım 8.5.7. X bir kompleks katmanlı, $\mathbb{C}$ ise $\{(\mathbb{C}, \mathrm{Id}_{\mathbb{C}})\}$ atlasıyla alınmış Riemann yüzeyi olmak üzere, $f : X \to \mathbb{C}$ holomorf dönüşümlerine X'te **holomorf fonksiyon**lar denir ve bu durumda $\mathcal{H}(X,\mathbb{C})$ yerine yalın olarak $\mathcal{H}(X)$ yazılır. Yine

$$\operatorname{Aut} X := \{f \mid f : X \to X \text{ biholomorf}\}$$

olarak tanımlanır.

$Y \subset X$ açık olmak üzere bir $f : Y \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun holomorf olması, her $(U,\varphi) \in \mathfrak{A}$ haritası için $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun klasik anlamda holomorf olması demektir. Y'deki holomorf fonksiyonların kümesi yine yalın olarak $\mathcal{H}(Y)$ ile gösterilir.

Kompleks katmanlılar arasındaki holomorf dönüşümlerin bileşimi de holomorftur. Her $i \in I \neq \emptyset$ için bir $U_i \subset \mathbb{C}$ açık kümesi verilsin ve $U := \bigcup_{i\in I} U_i$ olsun. Klasik anlamdaki **Yerel-Tümel-İlke** şunu söyler: Bir $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun holomorf olması için gerek ve yeter koşul, her $f|U_i$ kısıtlanışının holomorf olmasıdır. Yerel-Tümel-İlke holomorf dönüşümler için de geçerlidir: X,Y kompleks katmanlılar, her $i \in I \neq \emptyset$ için $U_i \subset X$ bir açık altküme, $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ ve $f : X \to Y$ olmak üzere, f'nin bir holomorf dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul, her $i \in I$ için $f|U_i : U_i \to Y$'nin bir holomorf dönüşüm olmasıdır.

Not 8.5.8. (1) Eğer $(X,\mathfrak{A})$ bir kompleks katmanlı ve $(U,\varphi,V) \in \mathfrak{A}$ ise, $\varphi : U \to V$ dönüşümü $(U,\mathfrak{A}|U)$ kompleks katmanlısından V kompleks katmanlısına bir biholomorf dönüşümdür.

(2) Bir $(X,[\mathfrak{A}])$ kompleks katmanlı bir anlamda yerel olarak $\mathbb{C}$'de bir açık küme gibidir. $a \in X$ ise, atlasımızda $a \in U$ koşulunu sağlayan en az bir (U,φ,V) haritamız vardır. U'da yapmak istediklerimizi V'de yapmak isteriz. Ancak a noktasını içeren birden fazla haritamız olabileceğinden ve koordinat değişimlerimizin biholomorf olmasını istediğimizden a için tanımlayacağımız kavramlar biholomorf dönüşümlere göre değişmez olmak zorundadır.

Uzlaşma: $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık ve $\mathbb{S}^2$ bir Riemann yüzeyi olarak ele alındığında bunlar sırasıyla örnek (8.5.15) (1) ve (2)'de verilen $\mathfrak{A}$ kompleks atlaslarının belirlediği kompleks yapı ile alınacaktırlar. Bu durumda şimdi verdiğimiz $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}_\infty)$ tanımı KA I Tanım 3.6.8 ile örtüşür.

$\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A})$ herhangi bir kompleks katmanlı olmak üzere, $f \in \mathcal{H}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ holomorf dönüşümlerine daha önce $\mathcal{X}$'te holomorf fonksiyonlar demiş ve bunların kümesini yalın olarak $\mathcal{H}(X)$ ile göstermiştik.

X, Y kompleks katmanlılar ve $f : X \to Y$ sürekli olsun. Bu koşullarda f'nin holomorf olması, her açık $V \subset Y$ ve her $h \in \mathcal{H}(V)$ için $h \circ f \in \mathcal{H}(f^{-1}(V))$ olması demektir. Böylece, her $f : X \to Y$ holomorf fonksiyonu her açık $V \subset Y$ için bir

$$f^* : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(f^{-1}(V)), \quad (h \mapsto h \circ f)$$

fonksiyonu tanımlar. $f^*(h)$'ye h'nin f ile **geri çekilmişi** denir. Doğal işlemlerle $\mathcal{H}(U)$'lar birer halkadır ve $f^* : \mathcal{H}(V) \to \mathcal{H}(f^{-1}(V))$ bir halka yapıdönüşümüdür.

X, Y ve Z kompleks katmanlılar, $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ holomorf dönüşümlerse, $g \circ f : X \to Z$ dönüşümü de holomorftur. $W \subset Z$ açık, $V := g^{-1}(W)$ ve $U = f^{-1}(V)$ olmak üzere $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ olur.

Şu basit gerçeği belirtmekte yarar var: Her $\mathfrak{A}$ kompleks atlası aynı zamanda her $k \in \mathbb{N}_\infty$ için bir $\mathcal{C}^k$ atlasıdır ve kompleks katmanlılar arasındaki her holomorf dönüşüm aynı zamanda her $k \in \mathbb{N}_\infty$ için bir $\mathcal{C}^k$ dönüşümüdür.

Teorem 8.5.9 (Yapı Çekme İlkesi)**.** *$\hat{X}$ bir Hausdorff topolojik uzay ve X bir kompleks katmanlı olmak üzere $p : \hat{X} \to X$ bir dalsız örtme, dd. yerel topolojik olsun. Bu koşullarda $\hat{X}$'de p dönüşümünü yerel biholomorf kılan, tek olarak belirli bir kompleks yapı vardır.*

Kanıt. (1) X'teki kompleks yapı $\mathfrak{A}$ atlası ile tanımlanmış olsun. Her $\hat{x} \in \hat{X}$ için, $x := p(\hat{x})$ olmak üzere, bir $(U, \varphi) \in [\mathfrak{A}]$ haritası $x \in U$ ve $\hat{x}$'in açık bir $\hat{U}$ komşuluğu $p|\hat{U} : \hat{U} \to U$ topolojik olacak biçimde vardır. $\hat{\varphi} := \varphi \circ (p|\hat{U})$ olmak üzere $(\hat{U}, \hat{\varphi})$, $\hat{X}$'de bir haritadır. Bu tür haritaların ailesine $\hat{\mathfrak{A}}$ dersek, $\hat{\varphi}_j \circ (\hat{\varphi}_i)^{-1} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ biholomorf olduğundan $\hat{\mathfrak{A}}$, $\hat{X}$'te bir kompleks atlastır ve $p : \left(\hat{X}, \left[\hat{\mathfrak{A}}\right]\right) \to (X, [\mathfrak{A}])$ yerel biholomorftur.

(2) $\hat{\mathfrak{A}}'$,$\hat{X}$'de bir başka kompleks atlas ve $p : \left(\hat{X}, \left[\hat{\mathfrak{A}}'\right]\right) \to (X, [\mathfrak{A}])$ yerel biholomorf olsun. Bu durumda bir tameşleme olan $\mathrm{Id} : \left(\hat{X}, \left[\hat{\mathfrak{A}}'\right]\right) \to \left(\hat{X}, \left[\hat{\mathfrak{A}}\right]\right)$ yerel biholomorf, dolayısıyla biholomorf olur. Böylece $\left[\hat{\mathfrak{A}}'\right] = [\mathfrak{A}]$ ve $[\mathfrak{A}]$ yapısı tek olarak belirlidir. □

(8.5.9) ile tek olarak belirli olan $\hat{X}$'deki $\hat{\mathfrak{A}}$ **yapısına $\mathfrak{A}$'nın $\hat{X}$'e çekilmişi** denir.

Teorem 8.5.10 (Bölüm İlkesi)**.** *X bir kompleks katmanlı ve Y bir Hausdorff topolojik uzay ve $p : X \to Y$ yerel topolojik ve örten olsun. X'te aynı sapta verilen a, b noktaları için her zaman bu noktaların U, V komşulukları ve bir $\varphi : (U, a) \to (V, b)$ biholomorf dönüşümü $p|U = p \circ \varphi$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, Y'de p'yi yerel biholomorf kılan bir tek kompleks yapı vardır.*

Kanıt. X katmanlısının $\mathfrak{A}^*$ maksimal atlasından, $p|U : U \to p(U)$ topolojik olan (U, h) haritalarından oluşturduğumuz atlas $\mathfrak{A}$ olsun. $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{A}^*$ atlasları X'te aynı kompleks yapıyı tanımlarlar. Bu durumda $\mathfrak{B} := \{(p(U), h \circ (p|U)^{-1} \,|\, (U, h) \in \mathfrak{A}\}$ olsun. p örten olduğundan, $\mathfrak{B}$'deki haritaların tanım bölgeleri Y'yi örter. Şimdi koordinat dönüşümlerinin biholomorf olduğunu görelim: $(U, h), (V, g) \in \mathfrak{A}$, $a \in U$, $b \in V$ ve $p(a) = p(b) = c$ olsun. Bu durumda a, b noktalarının sırasıyla U', V' komşulukları $U' \subset U, V' \subset V$ ve bir $\varphi : (U', a) \to (V', b)$ biholomorf dönüşümü $p|U' = p \circ \varphi$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda $(p|V')^{-1} \circ (p|U') = \varphi$ olur. Dolayısıyla $h \circ (p|U)^{-1}(c)$'nin bir komşuluğundaki $g \circ (p|V)^{-1} \circ (p|U) \circ h^{-1}$ koordinat dönüşümü $g \circ \varphi \circ h^{-1}$ biholomorf dönüşümüdür. Dolayısıyla $\mathfrak{B}$'deki haritalarımız holomorf uyumludurlar.

$h \circ (p|U)^{-1}$ ve h biholomorf olduklarından $p|U$ biholomorftur. Y'deki kompleks yapının tekliği apaçıktır. □

Yapı Çekme İlkesi ve Bölüm İlkesi aynen $\mathcal{C}^k$ katmanlıları için de geçerlidir.

X bir topolojik uzay ve $\operatorname{Top} X := \{f \,|\, f : X \to X \text{ topolojik}\}$ olsun. $G \subset \operatorname{Top} X$ bir altgrup olsun. $\phi : X \times G \to X$ dönüşmü $x \cdot g \equiv \phi(x, g) := g(x)$ olarak tanımlanırsa, G grubu ϕ aracılığı ile sağdan işler. $x \in X$ için $[x] \equiv x \cdot G = G(x) := \{g(x) \,|\, g \in G\}$ kümesi x'in G izidir. $X/G := \{[x] \,|\, x \in X\}$ ve $q : X \to X/G$ ise $q(x) := [x]$ olarak tanımlanan bölüm dönüşümü olsun. X/G'yi q'nun tanımladığı bölüm topolojisiyle ele alacağız.

Önsav 8.5.11. *$q : X \to X/G$ dönüşümü açık, örten ve süreklidir.*

Kanıt. Tanım gereği q örten ve süreklidir. Şimdi $A \subset X$ bir açık kümeyse, her $g \in G$ bir topolojik dönüşüm olduğundan, $g(A)$ da açıktır. Dolayısıyla $q^{-1}(q(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A)$ açıktır. Dolayısıyla $q(A)$ açıktır. □

Önsav 8.5.12. *X, Y, Z topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ örten ve Y'nin topolojisi f'nin tanımladığı bölüm topolojisi olsun. $g : Y \to Z$ için $h : X \to Z$ fonksiyonu $g \circ f$ fonksiyonu olsun. Bu durumda h açıksa g de açıktır. Eğer f ve g açıksa h de açıktır.*

Kanıt. f ve g açıksa $h = g \circ f$'nin de açık olduğu aşikârdır. Geriye h açıksa g'nin de açık olduğunu görmek kalıyor. Şimdi h açık olsun. f örten olduğundan, her $B \subset Y$ için $f(f^{-1}(B)) = B$ olur. Buradan $h(f^{-1}(B)) = g(f(f^{-1}(B))) = g(B)$ elde edilir. B açıksa $f^{-1}(B)$ açıktır, dolayısıyla $g(B) = h(f^{-1}(B))$ açıktır. □

Tanım 8.5.13. X bir topolojik uzay ve $G \subset \operatorname{Top} X$ olmak üzere, her kompakt $K \subset X$ için
$$\{g \in G \,|\, g(K) \cap K \neq \emptyset\}$$
sonlu ise, G grubu X'te **süreksiz** (veya **kesintili**) **işler** denir.

Teorem 8.5.14. *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge ve $G \subset$ Möb altgrubu aşağıdaki koşulları sağlasın:*

(i) Her $g \in G$ için $g(B) = B$.

(ii) $\mathrm{Id} \neq g \in G$ ise, g'nin B'de sabit noktası yoktur.

(iii) G grubu B'de süreksiz işler.

Bu koşullarda B/G uzayı $q : B \to B/G$ dönüşümünü yerel biholomorf kılan tek olarak belirli bir kompleks yapıya sahiptir.

Kanıt. (i)'den dolayı $G \subset \operatorname{Top} B$. Şimdi $q : B \to B/G$, $(x \mapsto G(x))$ bölüm dönüşümü olsun ve B/G bölüm topolojisiyle alınsın. Önsav 8.5.11'den q dönüşümü sürekli, örten ve açıktır. Dolayısıyla B bağlantılı olduğundan B/G de bağlantılıdır. $b \in B$ ve $A \subset B$ için $q(b)$ ve $q(A)$ yerine $[b]$ ve $[A]$ yazalım.

Şimdi B/G'nin bir Hausdorff uzayı olduğunu görelim: Şimdi $b_1, b_2 \in B$ ve $[b_1] \neq [b_2]$ olsun. Elbette bu durumda $b_1 \neq b_2$ olur. Şimdi $r > 0$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için $A_n := D_{r/n}(b_1)$ ve $B_n := D_{r/n}(b_2)$ olarak tanımlansın. $r > 0$ sayısını $K := \overline{A_1} \cup \overline{B_1} \subset B$ olacak biçimde seçelim. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için
$$[A_n] \cap [B_n] \neq \emptyset \tag{8.8}$$
olduğunu varsayalım. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}^*$ için bir $a_n \in A_n$ ve bir $g_n \in G$ ögesi $g_n(a_n) \in B_n$ olacak biçimde vardır. Dolayısıyla $g_n(K) \cap K \supset g_n(A_n) \cap B_n \neq \emptyset$. (iii) koşulumuzdan dolayı $\{g_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ kümesi sonludur. Dolayısıyla bir n_0 ve bir $g \in G$ ile her $n \geq n_0$ için $g_n = g$ olur. Buradan ise
$$b_2 = \lim_{n \to +\infty} g_n(a_n) = \lim_{n \to +\infty} g(a_n) = g(b_1)$$
elde edilir ki bu, $[b_1] \neq [b_2]$ ile çelişir. Dolayısıyla (8.8) varsayımı yanlıştır. Şimdi bir n için $[A_n] \cap [B_n] = \emptyset$ olsun. q dönüşümü açık olduğundan $[A_n]$ ve $[B_n]$ kümeleri açık kümelerdir; bunlardan ilki b_1'in, ikincisi ise b_2'nin açık komşuluklarıdır ve bu noktaları ayırırlar. Dolayısıyla B/G uzayımız Hausdorff'tur.

Her $z \in B$ için z merkezli bir kapalı K_z dairesini $K_z \subset B$ olacak biçimde seçelim. Şimdi $\mathrm{Id} \neq g \in G$ ve $g(K_z) \cap K \neq \emptyset$ olsun. (ii)'den dolayı $g(z) \neq z$ ve g bir topolojik dönüşüm olduğundan, K_z'nin yarıçapını küçülterek $g(K_z) \cap K = \emptyset$ olmasını sağlarız. (iii)'ten dolayı ancak sonlu sayıda $g \in G$ için $g(K_z) \cap K \neq \emptyset$. Az önceki adımla şu sonuca ulaşırız: Her $z \in B$ için z merkezli bir kapalı $K_z \subset B$ dairesi, her $\mathrm{Id} \neq g \in G$ için $g(K_z) \cap K_z = \emptyset$ olacak biçimde seçilebilir. q dönüşümü sürekli ve açık olduğundan, $q_z := q|\mathring{K}_z$ olmak üzere $q_z : \mathring{K}_z \to [\mathring{K}_z]$ dönüşümü sürekli ve açık olan bir tameşlemedir, dolayısıyla topolojiktir.

B bir kompleks katmanlı, B/G bir Hausdorff topolojik uzay ve $q : B \to B/G$ yerel topolojik ve örtendir. Şimdi $z, w \in B$ noktaları q'nun aynı sapında ise, bir $g \in G$ ile $w = g(z)$ olur. g bir Möbius dönüşümü ve $V := g(\mathring{K}_z) \subset B$ olduğundan, $g|\mathring{K}_z : \mathring{K}_z \to V$ biholomorftur ve $q_z = q \circ g|\mathring{K}_z$ geçerlidir. Böylece (8.5.10)'un tüm koşulları sağlanır. Dolayısıyla B/G uzayı q dönüşümünü yerel biholomorf kılan tek olarak belirli bir kompleks yapıya sahiptir. □

Bu teorem çok önemlidir. İleride Birbiçimlendirme Teoremi 8.10.3 ile tüm Riemann yüzeylerinin bu biçimde elde edilebileceğini göreceğiz.

Örnek 8.5.15. Şimdi bir kaç örnek verelim.

(1) $X = \mathbb{C}_\infty$ olsun. X bir Hausdorff topolojik uzaydır. $U_0 := \mathbb{C}$, $V_0 := \mathbb{C}$ ve $\varphi_0 : U_0 \to U_0$ özdeşlik dönüşümü, $U_1 := \mathbb{C}^*_\infty := \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$, $V_1 := \mathbb{C}$ ve $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ dönüşümü $\varphi_1(\xi) := 1/\xi$ olarak tanımlansın; uzlaşmamız gereği $\varphi_1(\infty) = 0$ olduğunu anımsatalım. (U_0, φ_0) ve (U_1, φ_1)'ler $\mathbb{C}_\infty$'da birer haritadırlar. $\mathbb{C}_\infty = U_0 \cup U_1$ olduğundan, $\mathfrak{A} := \{(U_i, \varphi_i) | i = 0, 1\}$ bir atlastır. $U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^*$ ve her $z \in \mathbb{C}^*$ için $(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(z) = \frac{1}{z}$ olduğundan, $(\varphi_1|\mathbb{C}^*) \circ (\varphi_0|\mathbb{C}^*)^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dönüşümü biholomorftur. Dolayısıyla $\mathfrak{A}$ bir kompleks atlastır ve biz kısaca $\mathbb{C}_\infty$ Riemann yüzeyinden söz ettiğimizde daima bu $(\mathbb{C}_\infty, \mathfrak{A})$ Riemann yüzeyini anlayacağız.

(2) $X = \mathbb{S}^2$ olsun. X bir Hausdorff topolojik uzaydır. Daha önceki irdelemelerimizden biliyoruz ki, $\mathbb{S}^2$'de (U_N, φ_N) ve (U_S, φ_S) birer haritadırlar. $U_N \cup U_S = \mathbb{S}^2$ olduğundan, $\mathfrak{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ ailesi $\mathbb{S}^2$'de bir atlastır. $U_{NS} = U_N \cap U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ ve $\varphi_0(U_{NS}) = \mathbb{C}^* = \varphi_1(U_{NS})$. Diğer yandan, her $z \in \mathbb{C}^*$ için $\left(\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}\right)(z) = \frac{1}{z}$ olduğundan, $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ biholomorftur. Böylece $\mathfrak{A}$ bir kompleks atlastır. $\mathbb{S}^2$ bağlantılıdır ve biz $\mathbb{S}^2$ Riemann yüzeyi dediğimizde daima bu $(\mathbb{S}^2, \mathfrak{A})$ anlaşılacaktır.

(3) $(\mathbb{C}^2)^* := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$'da

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \ (z_0, z_1) = \lambda(w_0, w_1) \, (= (\lambda w_0, \lambda w_1))$$

ile bir denklik bağıntısı tanımlanır. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesi $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ile gösterilir ve bir boyutlu kompleks projektif uzay olarak adlandırılır. (z_0, z_1)'nin denklik sınıfını $[z_0 : z_1]$ ile gösterelim. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^2)^*/\sim$ bölüm topolojisi ile alınacaktır. Bu uzayın bir bağlantılı Hausdorff uzayı olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz.

$$U_0 := \left\{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \,|\, z_0 \neq 0\right\} \text{ ve } U_1 := \left\{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \,|\, z_1 \neq 0\right\}$$

olsun. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup U_1$ olduğu apaçıktır. Diğer yandan, $\varphi_0([z_0 : z_1]) := z_1/z_0$ ve $\varphi_1([z_0 : z_1]) := z_0/z_1$ ile tanımlanan $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ ve $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ dönüşümleri topolojiktirler. $\varphi_0^{-1}(z) = [1 : z]$ ve $\varphi_1^{-1}(z) = [z : 1]$ olduğu kolayca görülür. Diğer yandan $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^* = \varphi_1(U_0 \cap U_1)$. Her $z \in \mathbb{C}^*$ için $\left(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}\right)(z) = \varphi_1([1 : z]) = 1/z$ olduğundan $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ biholomorftur. Dolayısıyla $\{(U_0, \varphi_0, \mathbb{C}), (U_1, \varphi_1, \mathbb{C})\}$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$'de bir kompleks atlastır. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ daima bu kompleks yapı ile alınır. $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dönüşümü, her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) := [z : 1]$ ve $f(\infty) := [1 : 0]$ olarak tanımlansın. f biholomorftur.

(4) $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$ kompleks sayıları $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız, dd. $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$ olsun.

$$\Omega := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{mw_1 + nw_2 \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

olmak üzere, her $\omega \in \Omega$ için $t_\omega : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü $t_\omega(z) = z + \omega$ ötelemesi olsun. Bu durumda $G_\Omega := \{t_\omega \,|\, \omega \in \Omega\} \subset$ Möb bir altgruptur ve $B = \mathbb{C}$ olmak üzere Teorem 8.5.14'ün koşulları sağlanır. Dolayısıyla $\mathbb{C}/G_\Omega$'da $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/G$ bölüm dönüşümünü yerel biholomorf kılan tek olarak belirli bir kompleks yapı vardır. Bu yapı ile $\mathbb{C}/G_\Omega$ bir Riemann yüzeyidir.

$\mathbb{C}$'de $z_1 R_\Omega z_2 :\Longleftrightarrow z_1 - z_2 \in \Omega$ ile bir denklik bağıntısı tanımlanır. Bu denklik bağıntısına göre $z \in \mathbb{C}$'nin denklik sınıfını $z + \Omega$'dır ve bu ise $[z] = G_\Omega(z)$'den başkası değildir. Bu nedenle

$T_\Omega := \mathbb{C}/R_\Omega = \mathbb{C}/G_\Omega$ olur ve biz $\mathbb{C}/G_\Omega$ yerine, G_Ω'yı doğrudan belirleyen Ω ile $T_\Omega = \mathbb{C}/R_\Omega$ gösterimini yeğleyeceğiz. $\mathbb{C} \to T_\Omega$ bölüm dönüşümünü yine q ile gösterecek ve $[z] = q(z)$ yazacağız. $K := \{sw_1 + tw_2 | s, t \in [0, 1]\}$ bir kompakt küme ve $T_\Omega = q(K)$ olduğundan, T_Ω kompakttır.

T_Ω uzayımızı K paralelkenarından denk noktaları özdeşleyerek elde ederiz (bkz. Şekil 6.4). Koşulumuzdan, her z için tek olarak belirli $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ sayıları $z = t_1w_1 + t_2w_2$ olacak biçimde bulunabilir. $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ birim çember ve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\psi(q(t_1w_1 + t_2w_2)) = \psi([t_1w_1 + t_2w_2]) := \left(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}\right)$$

ile tanımlanan $\psi : T_\Omega \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ dönüşümünün topolojik olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz.

(5) Holomorf fonksiyonların grafları: $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f \in \mathcal{H}(U)$ ile

$$G_f := \{(z, f(z)) \,|\, z \in U\} \subset \mathbb{C}^2$$

olsun ve G_f kümesi $\mathbb{C}^2$'deki göreli topoloji ile alınsın. $\pi_1 : G_f \to U$ fonksiyonu $\pi_1(z, f(z)) := z$ ile tanımlanan birinci koordinata izdüşüm olsun. (G_f, π_1, U) bir kompleks harita ve $\mathfrak{A} = \{(G_f, \pi_1, U)\}$ ise G_f'de bir kompleks atlastır. Böylece $(G_f, \mathfrak{A})$ bir kompleks katmanlıdır. Ayrıca U bağlantılı ise G_f de bağlantılıdır, dolayısıyla $(G_f, \mathfrak{A})$ bir Riemann yüzeyidir.

(6) Bu örnek kanıtsız bazı bilgiler kullanacağımız bir bilgilendirme örneği olacaktır ve yerel olarak bir holomorf fonksiyonun grafı olan özel kompleks katmanlısına ilişkindir. $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere, $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ noktası $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ ile özdeş kılınır. $U \subset \mathbb{C}^2$ açık olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{C}^1$ sınıfından bir $F : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna U'da $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ ve $\frac{\partial F}{\partial \overline{w}} \equiv 0$ ise U'da holomorftur denir. Gerçel analizden bilinen kapalı fonksiyonlar teoreminin kompleks analizde de geçerli olan benzeri vardır: *$F : U \to \mathbb{C}$ holomorf, $X := \{(z, w) \in U \,|\, F(z, w) = 0\}$ ve $a = (z_0, w_0) \in U$ olmak üzere $\frac{\partial F}{\partial w}(a) \neq 0$ ise, $D_r(z_0)$ ve $D_\rho(w_0)$ daireleri $D_r(z_0) \times D_\rho(w_0) \subset U$ ve bir holomorf $\varphi : D_r(z_0) \to D_\rho(w_0)$ fonksiyonu*

$$X_{r,\rho}(a) := X \cap (D_r(z_0) \times D_\rho(w_0)) = \{(z, \varphi(z) \,|\, z \in D_r(z_0)\} \tag{8.9}$$

olacak biçimde vardır. Benzeri $\frac{\partial F}{\partial z}(a) \neq 0$ için geçerlidir.

Şimdi $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ holomorf ve

$$X = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, F(z, w) = 0\right\}$$

olsun. X'in bir holomorf fonksiyonun grafı olması gerekmez; ancak yukarıdaki teoremden görüyoruz ki, her $x \in X$ için $\frac{\partial F}{\partial z}(x)$ ve $\frac{\partial F}{\partial w}(x)$ türevlerinden en az biri 0'dan farklı ise –ki bu durumda F fonksiyonu x noktasında **düzgündür** veya **tekil değildir** denir– X yerel olarak $z = \psi(w)$ veya $w = \varphi(z)$ tipinde bir holomorf fonksiyonun grafıdır. Eğer $\frac{\partial F}{\partial w}(a) \neq 0$ ve (8.9) durumundaysak π_1 birinci koordinata izdüşüm ise, $(X_{r,\rho}(a), \pi_1, D_r(z_0))$ X'te bir haritadır. Eğer $\frac{\partial F}{\partial z}(a) \neq 0$ ise, bu kez uygun r, ρ ve bir holomorf $\psi : D_\rho(w_0) \to D_r(z_0)$ ile $X_{r,\rho} = \{(\psi(w), w) \,|\, w \in D_\rho(w_0)\}$ olur. Bu kez π_2 ikinci koordinata izdüşüm ise, $(X_{r,\rho}(a), \pi_2, D_\rho(w_0))$ X'te bir haritadır. Sonuçta, her $x \in X$ noktasında F fonksiyonu düzgünse bu haritalar X'te bir $\mathfrak{A}$ kompleks atlası oluştururlar ve $(X, \mathfrak{A})$ bir kompleks katmanlıdır. Gerçekten de bu haritalar arasındaki koordinat dönüşümleri ya $z \mapsto z$ veya $w \mapsto w$ özdeşlik dönüşümleri, ya da $z \mapsto \varphi(z)$ veya $w \mapsto \psi(w)$ holomorf dönüşümleridirler. $U = \mathbb{C}^2$ durumunda $X = \{(z, w) \,|\, F(z, w) = 0\}$'a bir **analitik eğri**, eğer $F \in \mathbb{C}[z, w]$ bir polinomsa bir **cebirsel eğri** denir. Cebirsel Geometri'nin önemli bir teoremi p polinomu parçalanamazsa X'in bağlantılı olduğunu söyler; bu durumda $(X, \mathfrak{A})$ bir Riemann yüzeyidir. X'ten "eğri" olarak söz etmek yerleşmiş bir adlandırmadır.

Örneğin $F(z,w) = z - w^2$ polinomu ve $X = F^{-1}(0)$ olsun. Bu durumda $(z,w) \in X \iff z = w^2 =: \psi(w)$ olduğundan, X cebirsel eğrisi $z = \psi(w)$ fonksiyonunun grafıdır. Diğer yandan $\frac{\partial F}{\partial w}(z,w) = 2w$ olduğundan, $(z,w) \in X \backslash \{(0,0)\}$ için $\frac{\partial F}{\partial w}(z,w) \neq 0$ olur ve $X \backslash \{(0,0)$ yerel olarak bir holomorf fonksiyonun grafıdır; bu holomorf fonksiyon ise $\sqrt{z}$ ile gösterilir. Bu X, daha önce yaptığımız gibi $\mathbb{C}$'nin iki ayrık örneğini alıp, negatif eksenler boyunca kesip yapıştırmalarla elde edilen yüzeyden daha yalındır.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}\,(\mathbb{C}_\infty) \\ X \arrow[ur, dashed, "\mathbf{g}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "I"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathbb{C} \\ \mathbb{C}^* \arrow[ur, dashed, "\mathbf{log}"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 8.5

X, Y Riemann yüzeyleri ve $p : Y \to X$ bir holomorf örtü olsun. Y, X üzerinde bir **Riemann bölgesidir** denir. Bu durumda herhangi bir $f : Y \to \mathbb{C}(\mathbb{C}_\infty)$ holomorf (meromorf) fonksiyonuna doğal biçimde bir çok değerli $\mathbf{g} : X \to \mathbb{C}(\mathbb{C}_\infty)$ fonksiyonu karşılık getirilir. $x \in X$ ve $p^{-1}(x) = \{y_j\}_{j \in J}$ ise, $\mathbf{g}$ çok değerli fonksiyonumuz x noktasında $f(y_j)$, $j \in J$ değerlerini alır. Şimdi p örtüsü $y \in Y$ noktasında yerel biholomorf ve $p(y) = x$ ise, x noktasının bir açık U komşuluğu ve y noktasının bir açık V komşuluğu $p|V : V \to U$ biholomorf olacak içimde seçilebilir. Bu durumda $g := f \circ (p|V)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbf{g}$'nin U'da bir holomorf (meromorf) dalıdır (bkz. Şekil 8.5). Bu nedenle, kimi yazarlar f fonksiyonu X'te çok değerli bir holomorf (meromorf) fonksiyondur der.

Örneğin $Y = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^*$, $p = \exp$ ve $f = \mathrm{Id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ özdeşlik dönüşümü ise, $\mathbf{g} = \mathbf{log}$ olduğu aşikârdır.

Ergin Fonksiyonların Riemann Yüzeyleri: KA I Altkısım 3.5.4'te incelediğimiz ergin fonksiyonlara yeniden dönelim. Orada $\mathbf{log}$ ve $\sqrt[3]{\ }$ ergin fonksiyonları için onları tek değerli fonksiyonlar yapan tanım bölgeleri vermiştik. Şimdi o tanım bölgelerinin birer Riemann yüzeyi olduğunu biliyoruz. Bu ise tüm ergin fonksiyonlar için geçerlidir. Burada klasik anlamdaki ana fikri verecek, bazılarını okurun kolayca görebileceği bazı bilgiler sunacağız. Kısım 8.9'da ise uygun bir dil geliştirdikten sonra tüm bunlar kanıtlanacaktır.

KA I'de daireler zinciri boyunca analitik genişlemeleri incelemiştik. Eğer $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ açık daireler ve $f_k \in \mathcal{H}(D_k)$ olmak üzere, $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ ve $D_1 \cap D_2$'de $f_1 = f_2$ ise, f_2 fonksiyonu f_1'in dolaysız analitik genişlemesi demiş ve bu durumu $(f_1, D_1) \overset{d}{\sim} (f_2, D_2)$ ile göstermiştik.

Şimdi bize bir açık $D \subset \mathbb{C}_\infty$ dairesi ve bir $f \in \mathcal{H}(D)$ verilsin. Genellikten bir şey kaybetmeden D'nin merkezini 0 seçebiliriz. f'nin bir Z zincirinden

$$
\begin{tikzcd}
 & R_f \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "F"] & \\
\hat{R}_f \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "\hat{\pi}"'] & & \mathbb{C} \\
 & G_f \arrow[ur, "\mathbf{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 8.6: Ergin analitik fonksiyon.

aşağıdaki verileri anlayalım:

$$Z: \quad (f,D) \overset{d}{\sim} (f_0^Z, D_0^Z) \overset{d}{\sim} (f_1^Z, D_1^Z) \overset{d}{\sim} \cdots \overset{d}{\sim} (f_n^Z, D_{n_Z}^Z), \; D^Z \subset D.$$

Bu zincirlerin kümesini $\mathfrak{Z}_f$ ile gösterirsek

$$G^Z := \bigcup_{i=0}^{n_Z} D_i^Z \quad \text{ve} \quad G_f := \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}_f} G^Z$$

olsun. Her G^Z ve G_f açıkça yol bağlantılıdır.

f ile f'nin ergin fonksiyonunu göstermiştik (bkz. KA I Altkısım 3.5.4). Bizim amacımız, genelde çok değerli olan bu **f** fonksiyonlarından, tanım bölgelerini uygun Riemann yüzeyleri seçerek tek değerli holomorf fonksiyonlar elde etmektir. Temel sıkıntı bir z'nin birden fazla $Z \in \mathfrak{Z}_f$ ve j için $z \in D_j^Z$ koşulunu sağladığında karşımıza çıkar. İşe önce farklı fonksiyon elemanlardaki daireleri ayırarak başlayacağız.

$$\hat{R}_f := \bigsqcup_{Z \in \mathfrak{Z}_f, 0 \le j \le n_Z} D_j^Z \times \{j\} \times \{Z\} = \bigsqcup_{Z \in \mathfrak{Z}_f, 0 \le j \le n_Z} U_j^Z$$

olsun. Burada $U_j^Z := D_j^Z \times \{j\} \times \{Z\}$ alınmıştır. U_j^Z'yi çarpım topolojiyle alırsak $\varphi_j^Z(\zeta, j, Z) = \zeta$ olarak tanımlanan $\varphi_j^Z : U_j^Z \to D_j^Z$ dönüşümü topolojiktir. $\hat{R}_f$, genelde bağlantılı olmayan, bir Hausdorff topolojik uzaydır ve $\hat{\mathfrak{A}} := \{(U_j^Z, \varphi_j^Z, D_j^Z) \,|\, Z \in \mathfrak{Z}_f, 0 \le j \le n_Z\}$ ise $\hat{R}_f$'de bir kompleks yapı olur. $\hat{R}_f$, genelde bağlantılı olmayan bir kompleks katmanlıdır. $\hat{\pi}(z,j,Z) := z$ olarak tanımlanan $\hat{\pi} : \hat{R}_f \to G_f$ dönüşümü yerel biholomorf ve örtendir. Şimdi $\hat{R}_f$'de bir $\approx$ denklik bağıntısını şöyle tanımlayacağız:

$$(z,j,Z) \approx (z',j',Z') :\Longleftrightarrow z = z' \,\text{ve}\, D_j^Z \cap D_{j'}^{Z'}\text{'de } f_j^Z = f_{j'}^{Z'} \tag{8.10}$$

Şimdi $R_f := \hat{R}_f/\approx$ ve $q : \hat{R}_f \to R_f$ bölüm dönüşümümüz olsun. $\approx$ ile D_{f_1} ve D_{f_2} bölgeleri U boyunca yapıştırılır. R_f'yi bölüm topolojisiyle alacağız. Bölüm İlkesi 8.5.10 ile R_f'de q'yu yerel biholomorf kılan tek olarak belirli bir kompleks yapı ve R_f'nin bağlantılı olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Dolayısıyla R_f bir Riemann yüzeyidir. $(z, j, Z) \in \hat{R}_f$ için $[z, j, Z] := q(z, j, Z)$ yazalım ve bir $F : R_f \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu $F([z, j, Z]) := f_j^Z(z)$ ile tanımlayalım; bu tanım (8.10)'dan dolayı kusursuzdur. Sonunda Şekil 8.6'daki gibi bir durumla karşılaşırız. Burada $\pi([z, j, Z]) = z$ izdüşümdür. Bu diyagram değişmelidir ve tüm $\hat{\pi}, \pi, q$ ve F fonksiyonları holomorftur; bunların ilk üçü yerel biholomorftur. Çok değerli $\mathbf{f}$ ergin fonksiyonuna bir $G_f \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesini yerel biholomorf örten bir R_f Riemann yüzeyi karşılık getirilmiştir ve F ise $\mathbf{f}$ ergin fonksiyonuna karşılık getirilen tek değerli holomorf fonksiyondur. R_f, G_f üzerinde bir Riemann bölgesi olduğundan şunu görüyoruz: *Ergin fonksiyonlarımız bizi doğal biçimde $G \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgeleri üzerinde Riemann bölgeleri olan Riemann yüzeylerine götürür.* Burada kanıtsız verdiğimiz, okurun görebileceğini umduğumuz şeyler Kısım 8.9'da, yeni bir dil geliştirilerek kanıtlanacaktır.

Biz (f, D) analitik fonksiyon elemanlarının analitik genişlemelerini inceledik. Bu genişletmelerdeki temel dayanağımız analitik fonksiyonlar için Özdeşlik Teoremi olmuştur. Ancak meromorf fonksiyonlar için de Özdeşlik Teoremi'miz var. Dolayısıyla daireler zinciri boyunca meromorf genişlemeleri de benzer biçimde inceleyebiliriz. Kanıtsız vereceğimiz aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 8.5.16. *Her X Riemann yüzeyinde sabit olmayan bir meromorf fonksiyon vardır; dolayısıyla X Riemann yüzeyi bir $G \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesinin örtüsüdür. Özel olarak, her kompakt Riemann yüzeyi $\mathbb{C}_\infty$'un bir örtüsüdür.*

Riemann yüzeylerinin tanımında herhangi bir fonksiyon elemanından yola çıkmadık. Tanımımızın analitik genişlemelerle hiçbir bağıntısı yoktu! Ancak bu teorem bize, ilk bakışta daha genel görünen bu soyut tanımla klasik anlamdaki Riemann yüzeylerinden daha fazlasını kazanmadığımızı söyler. Özellikle, her Riemann yüzeyinin topolojisinin sayılabilir bir bazı vardır.

Problemler

Problem 8.5.1. $\mathbb{C}$'deki $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{C}, \mathrm{Id}, \mathbb{C}\}$ atlası için

$$\mathfrak{A}^* = \{(U, \varphi, V) \,|\, U, V \subset \mathbb{C} \text{ açık ve } \varphi : U \to V \text{ biholomorf}\}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 8.5.2. (U, φ, V), X'te bir kompleks harita olsun. $W \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : V \to W$ biholomorf ise, $(U, f \circ \varphi, W)$ de X'te bir kompleks haritadır ve bu harita φ'nin uyumlu olduğu her harita ile uyumludur; kanıtlayınız.

Problem 8.5.3. $\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A})$ bir Riemann yüzeyi, $a \in X$ ve $f : X \to \mathbb{C}$ olsun. Aşağıdaki önermelerin denk olduğunu kanıtlayınız.

(i) $a \in U$ koşulunu sağlayan <u>bir</u> $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ için $f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu $\varphi(a)$'da holomorftur.
(ii) $a \in U$ koşulunu sağlayan <u>her</u> $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ için $f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu $\varphi(a)$'da holomorftur.

Problem 8.5.4. $\mathbb{C}$'de $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{C}, \mathrm{Id}, \mathbb{C})\}$ ve $\overline{\mathfrak{A}} = \{(\mathbb{C}, \overline{\mathrm{Id}}, \mathbb{C}\}$ kompleks atlaslarının farklı kompleks yapı tanımladığını, dd. $[\mathfrak{A}] \neq [\overline{\mathfrak{A}}]$ olduğunu, ancak yine de $\overline{I} : (\mathbb{C}, \mathfrak{A}]) \to (\mathbb{C}, [\overline{\mathfrak{A}}])$ dönüşümünün biholomorf, dolayısıyla $(\mathbb{C}, \mathfrak{A}])$ ve $(\mathbb{C}, [\overline{\mathfrak{A}}])$ Riemann yüzeylerinin analitik denk olduğunu kanıtlayınız.

Problem 8.5.5. $\mathbb{C}$'de $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{C}, \mathrm{Id}, \mathbb{C})\}$ ve $t : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ herhangi bir topolojik dönüşüm olmak üzere, $\mathfrak{A}' = \{(\mathbb{C}, t, \mathbb{D})\}$ atlasları için $[\mathfrak{A}] \neq [\mathfrak{A}']$ olduğunu gösteriniz.

Problem 8.5.6. $\mathcal{X} = (X, [\mathfrak{A}])$ bir Riemann yüzeyi, W ise $a \in X$ noktasının bir açık komşuluğu ve $f : W \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorf olsun. $a \in U$ koşulunu sağlayan her $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ için $f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonunun $\varphi(a)$'da bir kaldırılabilir tekilliği (veya bir kutup noktası veya bir esaslı tekilliğinin) olması için gerek ve yeter koşul bir tek $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ için $f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonunun $\varphi(a)$'da bir kaldırılabilir tekilliği (veya bir kutup noktası veya bir esaslı tekilliğinin) olmasıdır; bunu kanıtlayınız.

Problem 8.5.7. $q : (\mathbb{C}^2)^* \to \mathbb{P}$ bölüm dönüşümü olmak üzere, $f : (\mathbb{C}^2)^* \to \mathbb{C}_\infty$ ve $g : \mathbb{P} \to \mathbb{C}_\infty$, $w \neq 0$ ise $f(z, w) := z/w =: g([z : w)])$ ve $f(z, 0) := \infty = g([z : 0)])$ olarak tanımlansın. f'nin sürekli, açık ve örten g'nin bir topolojik dönüşüm olduğunu gösteriniz.

Problem 8.5.8. B, G, $\mathring{K}_z$ ve q_z'ler Teorem 8.5.14'ün kanıtındakiler olmak üzere, $\mathfrak{A} := \{([\mathring{K}_z], q_z^{-1}, \mathring{K}) \,|\, z \in B\}$'nin B/G'de bir kompleks yapı tanımladığını kanıtlayınız.

Problem 8.5.9. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ ögeleri $\mathbb{R}$-bağımsız ise, her $z \in \mathbb{C}$ tek olarak belirli $x_1(z), x_2(z) \in \mathbb{R}$ ile $z = x_1(z)\omega_1 + x_2(z)\omega_2$ olur. $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ dönüşümü $\pi(z) := (e^{2\pi i x_1(x)}, e^{2\pi i x_2(x)})$ olarak tanımlansın. $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ kafesi olsun. π'nin toplamsal $\mathbb{C}$ grubundan $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ çarpım grubuna bir grup yapı dönüşmü ve $\ker \pi = \Omega$ olduğunu, ardından buradan elde edilen $q : \mathbb{C}/\ker \pi (= T_\Omega) \to \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ grup eşyapı dönüşümünün aynı zamanda topolojik olduğunu gösteriniz.

Problem 8.5.10. $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $S = \{x + iy \,|\, a < y < b\}$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $T_n(z) = z + n$ ötelemesi olmak üzere, $G = \{T_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ olsun. S/G Riemann yüzeyinin $H(0; e^{-2\pi b}, e^{-2\pi a})$ halkasına analitik denk olduğunu kanıtlayınız.

Problem 8.5.11. S bir önceki problemdeki şerit olmak üzere, $f \in \mathcal{H}(S)$ ve her $z \in S$ için $f(z + 1) = f(z)$ ise, f'nin S'de $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ gibi bir Fourier açılımı olduğunu kanıtlayınız.

8.6 Temel Teoremler

$\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}_\infty$'da holomorf ve meromorf fonksiyonlara ilişkin bildiğimiz çoğu temel teorem oldukları gibi Riemann yüzeylerine aktarılırlar. Bazılarını vermekle yetineceğiz ve böylece daha önce $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{C}_\infty$ için kazandığımız çoğu teorem daha genel teoremlerin özel halleri olacaklardır.

Tanım 8.6.1. X bir Riemann yüzeyi olmak üzere, bir $f \in \mathcal{H}(X, \mathbb{C}_\infty)$ holomorf dönüşümüne $f \not\equiv \infty$ ise X'te bir **meromorf** fonksiyon denir ve X'teki meromorf fonksiyonların kümesi $\mathcal{M}(X)$ ile gösterilir.

Teorem 8.6.2 (Özdeşlik Teoremi)**.** *X Riemann yüzeyi, Y bir kompleks katmanlı ve $f_1, f_2 : X \to Y$ holomorf dönüşümler olsunlar. $A \subset X$ kümesinin X'te bir a yığılma noktası var ve $f_1|A = f_2|A$ ise, $f_1 = f_2$.*

Kanıt. X kümesinin bir E altkümesini şöyle oluşturacağız: x'in bir açık U komşuluğunda $f_1|U = f_2|U$ ise ve ancak bu durumda $x \in E$ olarak tanımlayacağız. E tanım gereği açıktır. $a \in E$ ve dolayısıyla $E \neq \emptyset$ olduğunu savunuyoruz. $b_i := f_i(a)$ olmak üzere Y'de (U_i, ψ_i, V_i) haritalarını $b_i \in U_i$ olacak biçimde seçelim. Şimdi X'te bir (U, φ, V) haritasını $a \in U$ ve U bağlantılı olacak ve $f_i(U) \subset U_i$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\psi_i \circ f_i \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{C}$ fonksiyonları $V \subset \mathbb{C}$ bağlantılı kümesinde klasik anlamda holomorf olan ve V'de $\varphi(a)$'da bir yığılma noktası olan $\varphi(A \cap U)$'da örtüşen iki fonksiyondur. Dolayısıyla $\mathbb{C}$'deki Özdeşlik Teoremi'ne göre bu iki fonksiyon V'de çakışır; bunun sonucu olarak $f_1|U = f_2|U$ ve $U \subset E$ olur.

Şimdi E'nin kapalı olduğunu savunuyoruz. $b \in \partial E$ olsun. f_1 ve f_2 fonksiyonları tanım gereği X'te sürekli olduklarından $f_1(b) = f_2(b) =: c$ olur. Bu kez, yukarıda olduğu gibi, X'te b'yi içeren bağlantılı bir (U', φ', V') haritasıyla Y'de c'yi içeren bir (W, ψ) haritasını $f_i(U') \subset W$ olacak biçimde seçersek, klasik anlamda holomorf olan $g_i := \psi \circ f_i \circ (\varphi')^{-1} : V' \to \mathbb{C}$ fonksiyonları $\varphi'(E \cap U')$'de çakışırlar; ancak $\varphi'(E \cap U')$ kümesi V' bölgesinde bir $\varphi'(b)$ yığılma noktasına sahip olduğundan, $\mathbb{C}$'deki Özdeşlik Teoremi'nden dolayı g_1, g_2 fonksiyonları V''de çakışırlar, dolayısıyla f_1, f_2 fonksiyonları U''de çakışırlar. Dolayısıyla $b \in E$ ve E kapalıdır.

Sonuçta E kümesi bağlantılı X uzayının boştan farklı, hem açık hem de kapalı altkümesi olduğundan, $E = X$ olur. □

Teorem 8.6.2'de Y olarak $\mathbb{C}$'yi seçersek Riemann yüzeylerinde holomorf fonksiyonlar için özdeşlik teoremini, eğer Y olarak $\mathbb{C}_\infty$'u alırsak meromorf fonksiyonlar için özdeşlik teoremini elde ederiz. Özellikle $f \in \mathcal{M}(X)$ meromorf fonksiyonu sabit değil ise, her $a \in \mathbb{C}_\infty$ için $f^{-1}(a)$ kümesi X'te kapalı ve ayrıktır, dd. yerel sonludur. Dolayısıyla f'nin ∞ değerini aldığı yerlere f'nin **kutup yerleri** dersek *f'nin kutup yerleri* X'te *yerel sonludur.*

Tanım 8.6.3. X bir Riemann yüzeyi ve $U \subset X$ açık ise, U'**da meromorf** bir f **fonksiyonu**ndan şunu anlayacağız: U'nun bir açık U' altkümesi

(i) $U \backslash U'$ ayrık ve $f|U' : U' \to \mathbb{C}$ holomorf ve

(ii) her $a \in U \backslash U'$ için $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$ olacak biçimde vardır.

$U \backslash U'$'nün noktalarına f'nin kutup noktaları denir. Her $a \in A := U \backslash U'$ için $f(a) = \infty$ olarak tanımlayarak f'yi bir $\hat{f} : U \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonuna genişletirsek f'nin meromorf olması $\hat{f}$'nin holomorf olmasına denktir. Tanım 8.6.3, KA I Tanım 3.9.4 ile örtüşür. U'daki meromorf fonksiyonların kümesi $\mathcal{M}(U)$ ile gösterilir. Okur aynen KA I Teorem 3.9.9 gibi aşağıdaki teoremi kanıtlayabilir:

Teorem 8.6.4. *X bir Riemann yüzeyi ise $\mathcal{M}(X)$ bir cisimdir.*

X bir kompleks katmanlı, $U \subset X$ açık ve D_r ise $\mathbb{C}$'de 0 merkezli r yarıçaplı herhangi bir açık daire olmak üzere bir biholomorf $f : (U, a) \to (D_r, 0)$ dönüşümü varsa, U'ya bir **a-merkezli disk** diyelim. T^+ Cayley dönüşümü (bkz. s.542) olmak üzere $T^+ : (\mathbb{H}, i) \to (\mathbb{D}, 0)$ biholomorf olduğundan, $\mathbb{H}$ üst yarıdüzlemi bir i merkezli disktir. Bu örnek ve Riemann Dönüşüm Teoremi, bir a-merkezli U diskini her zaman gözümüzde bir biçimde orta yerinde a'nın olduğu bir yüzey diski olarak tasarlamanın doğru olmadığını söyler. Bu tanımda D_r yerine $D_r(c)$ dairelerini de kullanabiliriz. (U, φ, V) katmanlımızın bir haritası ise, her $x, y \in U$ için $d_\varphi(x, y) := d(\varphi(x), \varphi(y))$ ile U'da bir metrik tanımlanır. Dolayısıyla, her katmanlı bir yerel metrik uzayıdır. $a \in U$ ve $c = \varphi(a)$ ve $D_r(c) \subset V$ ise, $U_r^\varphi(a) := \varphi^{-1}(D_r(c)) = \{x \in U \mid d_\varphi(x, a) < r\}$ kümesi a-merkezli bir disktir.

$\mathcal{X} = (X, [\mathfrak{A}])$ bir kompleks katmanlı ise, $a \in X$ nasıl verilirse verilsin, istenildiği kadar küçük bir $U \subset X$ açık kümesi ve biholomorf bir $\varphi : (U, a) \to (D_r, 0)$ dönüşümü $(U, \varphi, D_r) \in [\mathfrak{A}]$ olacak biçimde bulunabilir. Özetle yeterince küçük a-merkezli (U, φ) disklerimiz vardır. Bu durumda elbette U bir bölgedir.

Teorem 8.6.5 (Açık Dönüşüm Teoremi III)**.** *X Riemann yüzeyi ve Y herhangi bir kompleks katmanlı ise, sabit olmayan $f : X \to Y$ holomorf dönüşümleri açık dönüşümlerdir.*

Kanıt. $A \subset X$ açık kümesi ve $a \in A$ keyfi verilsin. a merkezli (U, φ, D_r) haritasını $U \subset A$ olacak biçimde seçelim ve (V, ψ, D_ρ) ise $f(a)$ merkezli bir disk olsun. Bu durumda 8.6.2 Özdeşlik Teoremi'nden dolayı $f|U$ sabit değildir. Bunun bir sonucu olarak $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : D_r \to D_\rho$ holomorf fonksiyonu sabit değildir ve KA I Açık Dönüşüm Teoremi 1.8.16'dan dolayı $W := h(D_r) \subset D_\rho$ açıktır. Dolayısıyla $\psi^{-1}(W) = f(U)$ açıktır. Sonuçta, her $a \in A$ için $f(A)$ kümesi $f(a)$'nın bir $f(U)$ komşuluğunu içerdiğinden, $f(A)$ açıktır. □

Sonuç 8.6.6. *X, Y Riemann yüzeyleri, $f : X \to Y$ fonksiyonu bir tameşleme ve holomorf ise, f biholomorftur.*

Kanıt. f birebir olduğundan sabit değildir, dolayısıyla (8.6.5)'e göre f açıktır. Sonuçta f bir topolojik dönüşümdür. $b \in Y$ keyfi verilsin ve $a \in X$ noktası $b := f(a)$ olacak biçimde seçilsin. X'te a merkezli (U, φ, D_r) haritasını ve Y'de b merkezli (V, ψ, D_ρ) haritalarını $f(U) = V$ olacak biçimde seçersek $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : D_r \to D_\rho$ holomorf fonksiyonu bir tameşleme olduğundan, KA Önerme 1.8.17 ile biholomorftur. Dolayısıyla $f|U : U \to V$ biholomorftur; özellikle $f^{-1}|V = (f|U)^{-1}$ fonksiyonu V'de holomorftur. Yerel-Tümel İlke'den dolayı f^{-1} holomorftur. □

Sonuç 8.6.7. *Y Riemann yüzeyi, X kompleks katmanlı ve $f : Y \to X$ holomorf dönüşümü sabit değilse (Y, f, X) bir örtü uzayıdır.*

Teorem 8.6.8 (Radó Teoremi). *Riemann yüzeylerinin topolojileri sayılabilir.*

Kanıt. Doğrudan (8.5.16), (8.6.7) ve Poincaré-Volterra Teoremi'nden çıkar. □

X Riemann yüzeylerinde bir holomorf veya meromorf fonksiyonun yerel özelliklerini ayrıca incelemenin hiç bir anlamı yoktur; çünkü bunlar herhangi bir $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki holomorf fonksiyonların yerel özellikleriyle aynıdır. Bu nedenle genellikle tümel özelliklere odaklanılır. Yine de şimdi, tümel özellik için gereksindiğimiz bir yerel özelliğe döneceğiz.

X bir Riemann yüzeyi, $\Omega \subset X$ açık, $a \in \Omega$ ve $f : \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorf olsun. Riemann yüzeyimizde $i = 1, 2$ için (U_i, φ_i) haritaları $a \in U_i \subset \Omega$ olacak biçimde verildiğinde $U = U_1 \cap U_2$ açık kümesi de a noktasını içerir ve $(U, \varphi_i|U)$ da yüzeyimizin bir haritasıdır. $V_i := \varphi_i(U)$ olmak üzere, $x \in U$ için $z = \varphi_1(x)$ ve $w = \varphi_2(x)$ yazalım ve $z_0 := \varphi_1(a)$ ve $w_0 = \varphi_2(a)$ olsun. Bu durumda $V_1\backslash\{z_0\}$'da $f_1(z) := \left(f \circ \varphi_1^{-1}\right)(z)$ ve $V_2\backslash\{w_0\}$'da $f_2(w) := \left(f \circ \varphi_2^{-1}\right)(w)$ olarak tanımlanan fonksiyonlar holomorfturlar. f_1'in z_0'da ve f_2'nin w_0'da Laurent açılımları sırasıyla

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n \text{ ve } f_2(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\,(w - w_0)^n$$

olsunlar. Elbette, her n için $a_n = b_n$ olmasını bekleyemeyiz. Bir $n_0 \in \mathbb{Z}$ için $a_{n_0} \neq 0$ ve her $n < n_0$ tam sayısı içinse $a_n = 0$ olsun, dd. $n_0 = \min\{n \mid a_n \neq 0\} = \operatorname{ord}_{z_0} f_1$ olsun. $f_2 = f \circ \varphi_2^{-1} = f \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = f_1 \circ \varphi_{12}$ olduğundan, $V_2\backslash\{w_0\}$'da $f_2(w) = f_1(\varphi_{12}(w))$ olur. Dolayısıyla f_2'nin w_0'daki Laurent açılımını f_1'in z_0'daki açılımında z yerine $\varphi_{12}(w)$ yazarak buluruz. $\varphi_{12} : V_2 \to V_1$ ise $\varphi_{12}(w_0) = z_0$ koşulunu sağlayan bir biholomorf dönüşüm olduğundan $\varphi_{12}'(w_0) \neq 0$, ve w_0'ın bir komşuluğunda $z = \varphi_{12}(w)$ için

$$z - z_0 = \varphi_{12}(w) - \varphi_{12}(w_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(w - w_0)^n,\ c_1 \neq 0$$

olur. $f_1(z) = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0} + \ldots$ olduğundan $f_2(w) = a_{n_0}c_1(w-w_0)^{n_0} + \ldots$ olur. Ayrıca, $b_{n_0} = a_{n_0}c_1 \neq 0$ olduğu için $n_0 = \operatorname{ord}_{w_0} f_2 = \operatorname{ord}_{z_0} f_1$ olur. Dolayısıyla $a \in \Omega \subset X$ ve $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$ ise, Riemann yüzeyimizin a noktasını içeren herhangi bir (U, φ) atlası ile $\operatorname{ord} f_a := \operatorname{ord}_{\varphi(a)}\left(f \circ \varphi^{-1}\right)$ tanımı kusursuzdur.

Şimdi holomorf dönüşümlerin yerel davranışının KA I Teorem 1.8.13 ve 1.8.14'te anlatılanın aynısı olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 8.6.9 (Holomorf Dönüşümlerin Yerel Davranışı). *X Riemann yüzeyi, Y kompleks katmanlı ve $f : X \to Y$ sabit olmayan bir holomorf dönüşüm olsun. $a \in X$ ve $b = f(a)$ ise, a merkezli bir (U, φ, D_r) diski, b merkezli bir (V, ψ, D_ρ) diski ve tek olarak belirli bir $n \in \mathbb{N}^*$ sayısı $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : D_r \to D_\rho$ dönüşümü $F(z) = z^n$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. X'te a merkezli $(U_1, \varphi_1, D_{r_1})$ diski ile Y'de b merkezli (V, ψ, D_ρ) diskini $f(U_1) \subset V$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $F_1 := \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1} : D_{r_1} \to D_\rho$ sabit olmayan ve $F_1(0) = 0$ koşulunu sağlayan bir holomorf fonksiyondur. 0 noktası F_1'in n. dereceden bir sıfır yeri olsun. Bu n tek olarak belirlidir. D_{r_1}'deki değişkeni ζ ile gösterelim. KA I Teorem 1.8.13'ten dolayı, 0 noktasının bir $W \subset D_{r_1}$ açık komşuluğu ve 0'da birinci dereceden sıfır yeri olan bir $h \in \mathcal{H}(W)$ fonksiyonu, her $\zeta \in W$ için $F_1(\zeta) = (h(\zeta))^n$ olacak biçimde vardır. $h'(0) \neq 0$ olduğundan, $z = h(\zeta)$ fonksiyonu 0'ın bir W' komşuluğunu bir D_r dairesine biholomorf şekilde resmeder. $U := \varphi_1^{-1}(W')$ ve $\varphi := h \circ (\varphi_1|U)$ olmak üzere (U, φ, D_r), X'te a merkezli bir disktir, ayrıca $f(U) \subset V$ ve $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : D_r \to D_\rho$ dönüşümü için $F(z) = F_1(h^{-1}(z)) = F_1(\zeta) = (h(\zeta))^n = z^n$ olur. □

Teorem 8.6.9'daki n sayısına f fonksiyonunun a **noktasındaki katlılığı** denir; bunu $\mu(f,a)$ ile gösterelim. $\mu(f,a) \geq 2$ ise, a noktasına f fonksiyonun **dallanma noktası** ve $b = f(a)$ değerine ise f fonksiyonunun bir **kritik değeri** denir. Tüm olay KA I Teorem 1.8.13 ve KA I Teorem 1.8.14 teoremlerinde dile getirilenlerin aynısıdır. a ve b noktalarının A ve B açık komşulukları $f(A) = B$ ve her $y \in B\setminus\{b\}$ için $A \cap f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tam n öğeli olacak biçimde bulunabilir. f'nin her bir x_i'deki katlılığı 1'dir; dolayısıyla f, her bir x_i noktasında yerel topolojiktir. f'nin kritik noktaları tamı tamına f'nin yerel topolojik olmadığı noktalardır. Tüm bu söylenenler ise $\mu(f,a)$'nin özünde bir topolojik kavram olduğunu söyler.

Sonuç 8.6.10. *X, Y kompleks katmanlılar, $f : (X,a) \to (Y,b)$ holomorf ve $\mu(f,a) \geq 1$ olsun. Yeterince küçük a merkezli U diskleri için: (a) $f|U$ açıktır, (b) $f^{-1}(b) \cap U = \{a\}$ ve (c) her $x \in U\setminus\{a\}$ için $\mu(f,a) = 1$ sağlanır. f'nin a'da yerel biholomorf olması için gerek ve yeter koşul $\mu(f,a) = 1$ olmasıdır.*

Kanıt. KA I Teorem 1.8.13, KA I Teorem 1.8.14 ve Teorem 8.6.9. □

Buradan doğrudan aşağıdaki teorem çıkar:

Teorem 8.6.11 (Açık Dönüşüm Teoremi IV)**.** *Kompleks katmanlılar arasındaki $f : X \to Y$ holomorf dönüşümü hiçbir yerde yerel sabit olmasın. Bu durumda f bir açık dönüşümdür, f'nin her sapı ve f'nin dallanma noktalarının kümesi yerel sonludur. Eğer ayrıca f birebirse, f dönüşümü X'i Y'nin $f(X)$ açık altkümesine biholomorf resmeder.*

Teorem 8.6.12 (Maksimum İlkesi)**.** *X bir Riemann yüzeyi ve $f : X \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonu sabit değilse $|f|$ fonksiyonu X'te maksimumunu alamaz.*

Kanıt. Bir an için bir $a \in X$ ile $r := |f(a)| = \max_{x \in X} |f(x)|$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir yandan $f(X) \subset \overline{D}_r$, diğer yandan $f(X)$ açık olduğundan $f(X) \subset D_r$ olur ve bu, $r = |f(a)|$ ile çelişir. □

X bir kompleks katmanlı, $U \subset X$ açık, $a \in U$ ve $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a\})$ olsun. (U, φ, V) katmanlımızın $a \in U$ koşulunu sağlayan herhangi bir haritası olmak üzere, $f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonunun $\varphi(a)$ noktasında bir kaldırılabilir tekil noktası (veya bir kutup yeri veya bir esaslı tekil noktası) varsa, f fonksiyonunun a noktasında bir **kaldırılabilir tekil noktası** (veya bir **kutup yeri** veya bir **esaslı tekil noktası**) vardır denir. Koordinat değişimleri biholomorf olduğundan, bu tanımlar haritanın seçiminden bağımsızdırlar.

Teorem 8.6.13 (Riemann Kaldırılabilir Tekillik Teoremi)**.** *X bir kompleks katmanlı, $U \subset X$ açık, $a \in U$ ve $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a\})$ olsun. f fonksiyonu a noktasının bir komşuluğunda sınırlı ise, a noktasına tek biçimde holomorf genişletilebilir.*

Kanıt. X'te a noktasını içeren bir (V, φ, W) haritasını $V \subset U$ olacak biçimde seçelim. $b = \varphi(a)$ olmak üzere, $g := f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu KA I 2.6.14(iii)'ten dolayı b'ye holomorf genişler. Dolayısıyla $f = g \circ \varphi$ fonksiyonu a noktasına $f(a) := g(b)$ ile holomorf genişler ve bu genişlemenin tekliği apaçıktır. □

Sonuç 8.6.14 (Kaldırılabilirlik Teoremi)**.** *X, Y kompleks katmanlılar ve $A \subset X$ kümesi X'te yerel sonlu olsun. $f : X \to Y$ sürekli dönüşümü $X \backslash A$'da holomorf ise, X'te de holomorftur.*

Kanıt. Doğrudan (8.6.13)'ten çıkar. □

Önerme 8.6.15 (Holomorfluk Ölçtü 1)**.** *X, Y ve Z kompleks katmanlılar, $f : X \to Y$ sürekli ve $g : Y \to Z$ holomorf ve açık olsun. Bu koşullarda $g \circ f$ holomorfsa f de holomorftur.*

Kanıt. $a \in X$ keyfi verilsin. $b := f(a)$ ve $c := g(b)$ olsun.

(i) $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında yerel sabit olsun. Bu durumda a merkezli bir V parçası ile $f(V) \subset g^{-1}(c)$ olur. (8.6.11)'den dolayı $g^{-1}(c)$ sapı yerel sonludur, böylece $f(V) \subset \{a\}$ ve f dönüşümü a'da holomorf olur.

(ii) $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında yerel sabit olmasın. (8.6.14)'ten dolayı a noktasının bir U komşuluğunu, f dönüşümü $U \backslash \{a\}$'da holomorf olacak biçimde bulmak yeterlidir. (8.6.10)'dan dolayı b noktasının bir V açık komşuluğu, her $y \in V \backslash \{b\}$ için $\mu(g, y) = 1$ olacak biçimde seçilebilir; elbette g dönüşümü $V \backslash \{b\}$'de yerel biholomorftur. Şimdi a noktasının bir U komşuluğu $f(U) \subset V$ ve $c \notin (g \circ f)(U \backslash \{a\})$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda, her $z \in U \backslash \{a\}$ için g fonksiyonu $f(z)$'de yerel biholomorf olduğundan, V'ye düşen $f(z)$ merkezli bir $P \subset V$ diskinde $g|P$ biholomorftur. Bu durumda $W := U \cap f^{-1}(P)$'de $f = (g|P)^{-1} \circ (g \circ f)$ holomorftur. □

Sonuç 8.6.16. *X, Y Riemann yüzeyleri ve $p : Y \to X$ bir dalsız örtme ise, $D_p \subset \operatorname{Aut} Y$.*

Önerme 8.6.17 (Holomorfluk Ölçütü 2)**.** *X, Y, Z holomorf katmanlılar olmak üzere, $f : X \to Y$ örten, açık ve holomorf bir dönüşüm ve $g : Y \to Z$ sürekli olsun. Bu durumda $g \circ f$ holomorfsa g de holomorftur.*

Kanıt. f'nin dallanma noktalarının kümesine A dersek, A yerel sonludur. $B := \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\}$ olsun. B'nin Y'de yerel sonlu olduğunu savunuyoruz. X uzayımız $A \cap U$'nun sonlu olduğu U açık kümeleriyle örtülür. Gerçekten de Y uzayı, U bu tipten olmak üzere, $f(U)$ açık kümeleriyle örtülür ve açıkça $f(U) \cap B$ sonludur. (8.6.14)'ten dolayı g'nin $Y \backslash B$'de holomorf olduğunu göstermek yeterlidir. $y \in Y \backslash B$ keyfi verilsin. f örten olduğunda bir $x \in X \backslash A$ ile $f(x) = y$ olur. f fonksiyonu x'te yerel biholomorf olduğundan, x noktasının bir açık U komşuluğunu y'nin açık $f(U)$ komşuluğuna biholomorf resmeder. Dolayısıyla $g|f(U) = (g \circ f) \circ (f|U)^{-1}$ holomorftur. (8.6.17)'den g holomorftur. Sapların eşit olması durumundaysa g holomorf ve tameşleme olacağından, biholomorftur. □

Teorem 8.6.18 (Bileşenlere Ayırma)**.** *X, Y, Z kompleks katmanlılar, $p : X \to Y$ örten, açık ve holomorf olsun. $f : X \to Z$ ise, p'nin her sapında sabit olan bir holomorf dönüşüm olsun. Bu durumda tek olarak belirli bir holomorf $g : Y \to Z$ ile $f = g \circ p$. Eğer f ve p aynı saplara sahipseler g biholomorftur.*

Kanıt. $y \in Y$ ve $x \in p^{-1}(y) \neq \emptyset$ için $g(y) := f(x)$ tanımı kusursuzdur. $f = g \circ p$ sağlanır ve g'nin tekliği apaçıktır. Şimdi g'nin holomorf olduğunu görelim: $W \subset Z$ açık ise $f^{-1}(W)$ açıktır. p bir açık dönüşüm olduğu için $g^{-1}(W) = p(f^{-1}(W))$ açık, dolayısıyla g sürekli olur. (8.6.17)'den dolayı g holomorftur. Sapların aynı olması durumunda g bir tameşlemedir; dolayısıyla Açık Dönüşüm Teoremi ile g biholomorftur. □

Örnek 8.6.19. $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$'nin gerdiği kafes Ω olmak üzere, kanonik $q : \mathbb{C} \to T_\Omega$ bölüm dönüşümümüz açık, örten ve holomorftur. Bize bir $f \in \mathcal{H}(T_\Omega, \mathbb{C}_\infty) = \mathcal{M}(T_\Omega)$ verilmişse $F := f \circ q \in K(\Omega)$'dir. Diğer yandan bize bir $F \in K(\Omega)$ verilmişse, (8.6.18)'in koşulları sağlandığından, tek olarak belirli bir $f \in \mathcal{M}(T_\Omega)$ ile $F = f \circ q$ olur. Dolayısıyla $K(\Omega)$ *eliptik fonksiyonlarını incelemek* $\mathcal{M}(T_\Omega)$ *meromorf fonksiyonlarını incelemeye denktir.* Böylece Altkısım 6.7.3'te kazandığımız eliptik fonksiyonlara ilişkin teoremlerimiz $\mathcal{M}(T_\Omega)$ meromorf fonksiyonlarına ilişkin teoremlerdir.

Teorem 8.6.20. *X, Y Riemann yüzeyleri ve $f : X \to Y$ sabit olmayan bir holomorf dönüşüm olsun. Eğer ayrıca X kompaktsa f örtendir ve Y de kompakttır.*

Kanıt. Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı f açıktır. Diğer yandan, f sürekli olduğundan $f(X)$ kümesi kompakttır ve bir Hausdorff uzayının kompakt altkümesi olarak kapalıdır. Sonuçta Y bağlantılı bir uzay ve $f(X) \neq \emptyset$ kümesi bu uzayın hem kapalı hem de açık bir altkümesi olduğundan, $f(X) = Y$ ve Y de kompakttır. □

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathbb{C}/G = T_\Omega \arrow[rr, "f"'] & & \mathbb{C}_\infty \end{tikzcd}$$

Şekil 8.7

Bu teorem yalnızca kompakt X Riemann yüzeylerine ilişkindir, $\mathbb{C}$'de bir karşılığı yoktur; $\mathbb{C}$'nin hiçbir altkümesi, doğal topolojisiyle alınmak kaydıyla, bir kompakt Riemann yüzeyi değildir. Teorem 8.6.20 daha önce kanıtlanan bazı teoremlerin kolayca çıkarılmasını sağlar.

Sonuç 8.6.21. *X bir kompakt Riemann yüzeyi ise, her $f : X \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonu sabittir, dd. $\mathcal{H}(X) = \mathbb{C}$.*

Kanıt. $f : X \to \mathbb{C}$ holomorf ve sabit değilse (8.6.20)'den dolayı $f(X) = \mathbb{C}$'nin kompakt olması gerekir; bu söz konusu değildir. □

Sonuç 8.6.22 (Liouville)**.** *Her sınırlı holomorf $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sabittir.*

Kanıt. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu holomorf ve sınırlı ise, (8.6.13) ile bir $F : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna holomorf genişletilebilir; dolayısıyla önce F, ardından f sabittir. □

Sonuç 8.6.23 (Cebirin Anateoremi)**.** *Derecesi $n \geq 1$ olan her $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomu her $w \in \mathbb{C}$ değerini alır; özellikle sıfır yeri vardır.*

Kanıt. p'yi $p(\infty) = \infty$ tanımıyla sabit olmayan bir holomorf $p \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\infty)$'ye genişletiriz. (8.6.20)'den p örtendir, dolayısıyla her $w \in \mathbb{C}$ değerini alır; özellikle bir sıfır yeri vardır. □

Sonuç 8.6.24. *$\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}(z)$, dd. her meromorf $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ bir rasyonel fonksiyondur.*

Kanıt. $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ meromorf olsun. $\mathbb{C}_\infty$ kompakt olduğundan f'nin sonlu sayıda kutup noktaları vardır. Bunlar $a_1, \ldots, a_n$ olsunlar. ∞ noktası bir kutup noktası olmasın ve fonksiyonumuzun a_i noktasındaki esas kısmı h_i olsun. Bu durumda $g := f - \sum_{i=1}^n h_i$ ise, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C})$ ve 8.6.21'den g sabit olur. Dolayısıyla bir $c \in \mathbb{C}$ ile $f = \sum_{i=1}^n h_i + c \in \mathbb{C}(z)$ olur. Eğer ∞ noktası f'nin bir kutup yeri ise, $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$'nin bir kutup yeri değildir. Az önce kanıtlanandan $1/f$ rasyonel, dolayısıyla f rasyonel olur. □

Sonuç 8.6.25 (Liouville I)**.** *$f \in K(\Omega) \cap \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ise f sabittir.*

Kanıt. Örnek 8.6.19'dan bir $g \in \mathcal{H}(T_\Omega, \mathbb{C})$ ile $f = g \circ q$. (8.6.21)'den g sabittir, dolayısıyla f sabittir. □

Sonuç 8.6.26. *$f \in K(\Omega)$ sabit değilse, her $w \in \mathbb{C}_\infty$ değerini alır.*

Kanıt. Örnek 8.6.19'dan bir $g \in \mathcal{H}(T_\Omega, \mathbb{C}_\infty)$ ile $f = g \circ q$. Buradan $g(T_\Omega) = \mathbb{C}_\infty$ olduğundan, $f(T_\Omega) = \mathbb{C}_\infty$ olur. □

Bu sonucu Liouville III 6.7.12 de içerir.

Riemann yüzeylerinde harmonik fonksiyonlar konusuna girmeyeceğiz. X bir Riemann yüzeyi, $a \in X$ ve a'nın bir Ω komşuluğunda tanımlı $\mathbb{C}$-değerli bir f fonksiyonu verilsin. $U \subset \Omega$ olmak üzere, bir (U, φ, V) haritası için $f \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonu V'de harmonikse f fonksiyonu **a'da harmoniktir** denir. Koordinat dönüşümleri biholomorf olduklarından, bu tanım kartın seçiminden bağımsızdır. f fonksiyonu her $a \in \Omega$ noktasında harmonikse, Ω'da harmoniktir denir. Holomorf ve meromorf fonksiyonlarda olduğu gibi $\mathbb{C}$'de harmonik fonksiyonlara ilişkin çoğu teorem Riemann yüzeylerine aktarılır.

Problemler

Problem 8.6.1. X bir kompleks katmanlı $A \subset X$ kapalı ve ayrık bir alt küme ve $f \in \mathcal{H}(X \backslash A)$ olsun. f'nin X'te meromorf bir fonksiyona genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul, her $a \in A$ noktasının f'nin ya bir kaldırılabilir tekil noktası ya da bir kutup noktası olmasıdır; kanıtlayınız.

Problem 8.6.2. Riemann yüzeylerinde her meromorf f fonksiyonun iki holomorf g, h fonksiyonu ile $f = g/h$ olarak yazılamayacağını örnekleyiniz. Bunun Teorem 6.4.9'dan farkının kaynağı nedir?

Problem 8.6.3. $\mathbb{C}$'de $\mathbb{R}$-bağımsız ω_1, ω_2 ve ω_1', ω_2' ikilileri verilsinler. $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$ olması için gerek ve yeter koşul $\det A = 1$ koşulunu sağlayan bir $A \in M^{2\times 2}(\mathbb{Z})$ ile

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

olmasıdır; kanıtlayınız.

Problem 8.6.4. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$ kompleks sayıları $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız ve $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ olsun. Ω' bir başka kafes ve $\Omega \subset \Omega'$ ise, doğal $\phi : T_\Omega \to T_{\Omega'}$, $([z] = z + \Omega \mapsto [z]' = z + \Omega')$ holomorf olduğunu kanıtlayınız. Ayrıca, ϕ'nin ancak ve ancak $\Omega = \Omega'$ ise biholomorf olduğunu gösteriniz.

Problem 8.6.5. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir kafes ve $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ise

$$\phi : T_\Omega \to T_{\Omega'}, \ \ z + \Omega \mapsto \alpha z + \alpha\Omega$$

dönüşümünün biholomorf olduğunu gösteriniz.

Problem 8.6.6. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir kafes ve $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Omega$ bölüm dönüşümü ise, bunun bir evrensel örtme olduğunu gösteriniz ve D_q grubunu belirleyiniz.

Problem 8.6.7. X, Y Riemann yüzeyleri ve $f : X \to Y$ sabit olmayan bir holomorf fonksiyon ise, $A := \{a \in X | \mu(f, a) > 1\}$'nın ayrık olduğunu gösteriniz.

8.7 Holomorf Örtmeler

Önerme 8.7.1. *X bir kompleks katmanlı, Y bir Riemann yüzeyi ve $p : Y \to X$ holomorf dönüşümü sabit değilse (Y, p, X) bir örtü uzayıdır.*

Kanıt. p tanım gereği süreklidir, Özdeşlik Teoremi'nin bir sonucu olarak ayrıktır ve Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı ise açıktır. □

X, Y ve p Önerme 8.7.1'deki gibi olmak üzere, p örtmesinin y dallanma noktalarını tam da $\mu(p, y) \geq 2$ olan noktalardır. Biz "örtme" tanımını, Riemann yüzeyleri arasındaki sabit olmayan her holomorf dönüşüm bir örtme olacak biçimde verdik. Bu durumda Önerme 8.2.3 şu şekli alır:

Önerme 8.7.2. *X bir kompleks katmanlı, Y bir Riemann yüzeyi ve $p : Y \to X$ holomorf dönüşümü sabit değilse p'nin bir dalsız örtme olması için gerek ve yeter koşul p'nin yerel topolojik, dolayısıyla yerel biholomorf olmasıdır.*

Bu önermeye ilişkin standart örnekler, daha önce de söz ettiğimiz $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ dalsız örtmesi ve $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, $f_n|\mathbb{C}^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dalsız örtmeleridir.

Teorem 8.7.3. *X, Y ve Z Riemann yüzeyleri ve $p : Y \to X$ bir dalsız örtme olsun. Eğer ayrıca p holomorfsa, her holomorf $f : Z \to X$ dönüşümünün her $\hat{f} : Z \to Y$ çekilmişi de holomorftur.*

Kanıt. Doğrudan Önerme 8.6.15'ten çıkar. □

Örnek 8.7.4. Bir fonksiyonun logaritması: X basit bağlantılı bir Riemann yüzeyi ve $f : X \to \mathbb{C}^*$ bir holomorf fonksiyon ve $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ olsun. Biz $\exp \hat{f} = f$ koşulunu sağlayan $\hat{f} \in \mathcal{H}(X)$ holomorf fonksiyonlarını arıyoruz. Bir $x_0 \in X$ ve bir $c \in \mathbb{C}$ ile $\exp c = f(x_0)$ olsun. (8.2.13)'ten f'nin $\hat{f}(x_0) = c$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli bir $\hat{f} : X \to \mathbb{C}$ çekilmişi vardır. (8.7.3)'ten dolayı $\hat{f} \in \mathcal{H}(X)$. Bu bir çözümdür ve tüm diğer çözümlerin ise $\hat{f} + 2\pi i m$, $m \in \mathbb{Z}$ ile verildiği aşikârdır. Tanım gereği $\log f := \hat{f}$ problemimizin $\hat{f}(x_0) = c$ koşulunu sağlayan çözümüdür.

Ω, Ω' iki kafes olmak üzere T_Ω ve $T_{\Omega'}$ torusları, her biri $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$'e topolojik denk olduklarından birbirine topolojik denktirler. Buna karşın aşağıdaki teorem geçerlidir:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[d] \\
T_\Omega \arrow[r, shift left, "\phi"] & T_{\Omega'} \arrow[l, shift left, "\phi^{-1}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\phi \circ p"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "p'"] \\
 & T_{\Omega'}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\phi^{-1} \circ p'"] \\
T_\Omega &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 8.8: Torusların denkliği.

Teorem 8.7.5. *T_Ω ve $T_{\Omega'}$ toruslarının analitik denk olmaları için gerek ve yeter koşul bir $a \in \mathbb{C}^*$ ile $\Omega' = a\Omega$ olmasıdır.*

Kanıt. (1) Eğer bir $a \in \mathbb{C}^*$ ile $\Omega' = a\Omega$ ise, $f(z) = az$ ile tanımlanan biholomorf $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü bize T_Ω ve $T_{\Omega'}$ arasından bir biholomorf dönüşüm verir.

Şimdi bir $\phi : T_\Omega \to T_{\Omega'}$ biholomorf dönüşümü verilsin. Gerekirse bir sabit ekleyerek genellikten bir şey kaybetmeden $\phi(0^*) = 0'^*$ varsayabiliriz. 8.8'deki ortadaki diyagramdan görüleceği gibi $\phi \circ p$ holomorf dönüşümü $\alpha(0) = 0$ koşulunu sağlayan bir $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonuna, benzer biçimde en sağdaki diyagramdan görüleceği gibi, $\phi^{-1} \circ p'$ holomorf fonksiyonu ise $\beta(0) = 0$ koşulunu sağlayan bir $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonuna çekilir. $\beta \circ \alpha$ dönüşümü T_Ω'nın özdeşlik dönüşümünün çekilmişi olarak özdeşlik dönüşümüdür. Benzer biçimde $\alpha \circ \beta$ da özdeşlik dönüşümüdür. Sonuçta $\alpha \in \operatorname{Aut} \mathbb{C}$ ve (7.4.1)'den dolayı, uygun $a, b \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0$ ile $\alpha(z) = az + b$ olur. Ancak $\alpha(0) = 0$'dan $b = 0$ olur ve işimiz biter.

Biz bu sonuca şöyle de ulaşabilirdik. $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ve $\Omega' = \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$olsun. Herhangi bir $f : T_\Omega \to T_{\Omega'}$ holomorf dönüşümü için bir $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf dönüşümü ile $p' \circ F = f \circ p$ sağlansın. Örneğin $f = \phi$ ve $F = \alpha$. Bu durumda, her $m, n \in \mathbb{Z}$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$$F(z + m\omega_1 + n\omega_2) = F(z) + m_*(z)\omega'_1 + n_*(z)\omega'_2$$

olur. Burada m_* ve n_* fonksiyonlarının yerel sabit olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Bu eşitlikte türeve geçersek $F'(z + m\omega_1 + n\omega_2) = F'(z)$ olur, dd. F' fonksiyonu Ω'ya göre bir çift döngülü holomorf fonksiyondur, dolayısıyla Liouville I 6.7.9'dan dolayı F' sabittir. Bunun sonucu olarak uygun $a, b \in \mathbb{C}$ ile $F(z) = az + b$ olur. Eğer ayrıca $F'(0) = 0$ seçmişsek $a \neq 0$, $F(z) = az$ ve dolayısıyla $a\Omega \subset \Omega'$ elde ederiz. Eğer f'yi biholomorf seçmişsek ayrıca $a^{-1}\Omega' \subset \Omega$, dolayısıyla $\Omega' = aa^{-1}\Omega' \subset a\Omega \subset \Omega'$; buradan da $\Omega' = a\Omega$ elde ederiz. □

X, Y topolojik uzayları arasındaki bir sürekli $f : Y \to X$ dönüşümüne, eğer ayrıca her kompakt kümenin ters resmi de kompakt ise bir **uygun dönüşüm** denir.

Önsav 8.7.6. *Yerel kompakt uzaylar arasındaki her uygun dönüşüm kapalıdır, dd. kapalı kümeleri kapalı kümelere resmeder.*

Kanıt. $f : X \to Y$ bir uygun dönüşüm ve $A \subset X$ bir kapalı altküme olsun. $b \in Y \backslash f(A)$ keyfi verilsin. b'nin bir açık W komşuluğunun $W \cap f(A) = \emptyset$ olacak biçimde bulunabileceğini göstermek yeterlidir. b'nin bir açık V komşuluğunu $\overline{V}$ kompakt olacak biçimde seçelim. Dolayısıyla $f^{-1}(\overline{V}) \cap A$ kompakttır; buradan da $\overline{V} \cap f(A) = f\left(f^{-1}(\overline{V}) \cap A\right)$ kompakt olur. Böylece $W := V \backslash \left(\overline{V} \cap f(A)\right)$ açık kümesi b'nin bir komşuluğudur ve $W \cap f(A) = \emptyset$. □

Önerme 8.7.7. *X, Y yerel kompakt Hausdorff uzayları, $p : Y \to X$ ayrık ve uygunsa aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) Her $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ sonludur.

(ii) Her $x \in X$ ve $p^{-1}(x)$'in her V komşuluğu için x'in bir U komşuluğu $p^{-1}(U) \subset V$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. (i) Her $x \in X$ için $p^{-1}(x)$ ayrık ve kompakttır, dolayısıyla sonludur.

(ii) $x \in X$ ve V kümesi $p^{-1}(x)$'in bir açık komşuluğu olsun. $Y \backslash V$ kapalı olduğundan $A := p(Y \backslash V)$ kapalıdır. $x \notin A$ olduğundan, $U := X \backslash A$ kümesi x'in bir açık komşuluğu ve $p^{-1}(U) \subset V$ olur. □

Teorem 8.7.8. *X, Y yerel kompakt Hausdorff uzayları arasındaki $p : Y \to X$ uygun dalsız örtmeleri yerel düzgündür.*

Kanıt. $x \in X$ keyfi verilsin. Önerme 8.7.7(i)'den dolayı $p^{-1}(x)$ sonludur. $i \neq j$ için $y_i \neq y_j$ olmak üzere, $p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$ olsun. p yerel topolojik olduğundan, y_i noktasının bir V_i açık komşuluğu ile x'in bir açık U_i komşuluğu $p|V_i : V_i \to U_i$ topolojik olacak biçimde vardır. Burada V_i'leri ayrık seçebiliriz. $V := V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_n$ kümesi $p^{-1}(x)$'in bir açık komşuluğu olduğundan, Önerme 8.7.7(ii) ile x'in bir açık $U \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ komşuluğu $p^{-1}(U) \subset V$ olacak biçimde vardır. $W_i := V_i \cap p^{-1}(U)$ dersek $p^{-1}(U) = W_1 \sqcup \cdots \sqcup W_n$ ve her i için $p|W_i : W_i \to U$ topolojiktir. Dolayısıyla p bir yerel düzgün örtmedir. □

Şimdi X, Y Riemann yüzeyleri ve $f : X \to Y$ sabit olmayan bir uygun holomorf dönüşüm olsun. Açık Dönüşüm Teoremi 8.6.5'ten dolayı $f(X) \neq \emptyset$ açık ve f uygun olduğundan, $f(X)$ kapalıdır. Y bağlantılı olduğundan $f(X) = Y$ olur. f'nin dallanma noktalarının kümesine A dersek, (8.6.9)'dan dolayı A kapalı ve ayrıktır. f uygun olduğundan, f'nin $B := f(A)$ kritik değerler kümesi kapalıdır.

$Y' := Y \backslash B$ ve $X' := X \backslash f^{-1}(B) \subset X \backslash A$ olsun. Bu durumda $f|X' : X' \to Y'$ bir uygun dalsız örtmedir. Teorem 8.7.8'den dolayı bu örtme yerel düzgündür. Önerme 8.2.6'dan dolayı, her $y \in Y'$ için $f^{-1}(y)$ sapı eşgüçlüdür.

Önerme 8.7.7(i)'den dolayıysa bu saplar sonludur. Dolayısıyla tek olarak belirli bir $n \in \mathbb{N}^*$ ile her $y \in Y'$ için $f^{-1}(y)$ sapı n ögelidir, dd. her $y \in Y'$ değeri X''deki n farklı noktada alınır. Bu durumda f fonksiyonu, n **yapraklı bir örtü**dür denir. Şimdi uygun bir tanımla, katlılıklarıyla sayılmak üzere, f'nin her $y \in Y$ değerini n kez almasını sağlayacağız. Her $y \in Y$ için

$$m(f, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu(f, x)$$

olarak tanımlansın. Biz f fonksiyonu y **değerini** $m(f, y)$ **kez alır** diyeceğiz.

Teorem 8.7.9. *X, Y Riemann yüzeyleri ve $f : X \to Y$ ise sabit olmayan bir uygun holomorf fonksiyon olsun. Her $y \in Y$ için $m(f, y) \equiv n$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}^*$ doğal sayısı vardır; dolayısıyla f fonksiyonu her y değerini, katlılıklarıyla sayılmak üzere, n kez alır.*

Kanıt. A, B, X' ve Y' teorem öncesi irdelemelerdeki gibi olsunlar. f örtüsünün yaprak sayısı $n \in \mathbb{N}^*$ olsun. Geriye her $b \in B$ kritik değeri için de $m(f, b) = n$ olduğunu görmek kalıyor. f uygun olduğundan $f^{-1}(b)$ sonludur; $f^{-1}(b) = \{a_1, \ldots, a_r\}$ ve $i = 1, \ldots, r$ için $\mu(f, a_i) = k_i$ olsun. Teorem 8.6.9 ve izleyen irdelemelerden şunu biliyoruz: a_i noktalarının ayrık U_i komşulukları ve b noktasının V_i komşulukları, her $y \in V_i \setminus \{b\}$ için $f^{-1}(b) \cap U_i$ kümesi k_i ögeli olacak biçimde bulunabilir. Önerme 8.7.7(ii)'den dolayı, b noktasının bir $V \subset \bigcap_{i=1}^{r} V_i$ komşuluğu $f^{-1}(V) \subset \bigsqcup_{i=1}^{r} U_i$ olacak biçimde bulunabilir. Her $y \in Y' \cap V$ için $f^{-1}(y)$ kümesinin öge sayısı bir yandan $k_1 + \cdots + k_r$, diğer yandan n'dir. Böylece, her $y \in Y$ için $m(f, y) = n$ olur. □

Sonuç 8.7.10. *X bir kompakt Riemann yüzeyi ise, sabit olmayan herhangi bir $f : X \to \mathbb{C}_\infty$ meromorf fonksiyonu her değeri, katlılıklarıyla sayılmak üzere aynı çoklukta alır. Özellikle, katlılıklarıyla sayılmak üzere, f'nin kutup yerlerinin sayısı ve sıfır yerlerinin sayısı birbirine eşittir.*

Kanıt. f bir uygun holomorf dönüşümdür; sav teoremden çıkar. □

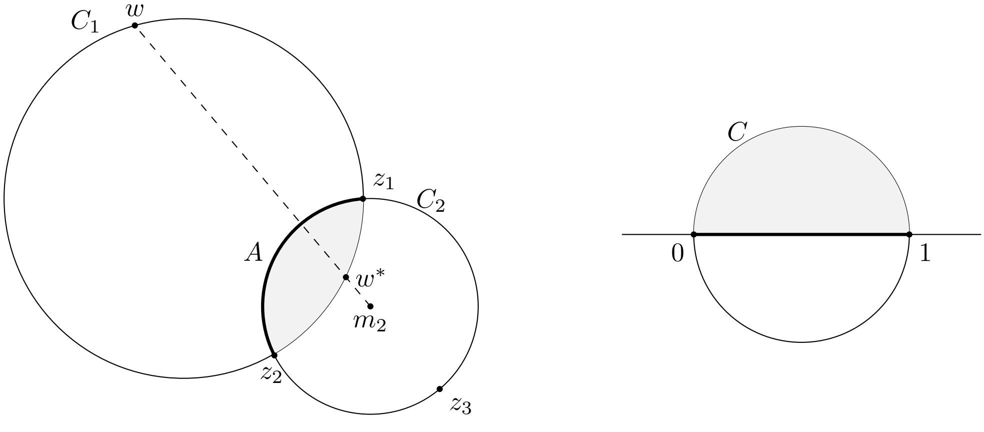
Problemler

Problem 8.7.1. X bir kompakt Riemann yüzeyi olsun. Eğer X'te yalnızca bir noktada birinci dereceden bir kutup yeri olan bir meromorf fonksiyon varsa, X yüzeyi $\mathbb{C}_\infty$'a analitik denktir.

Problem 8.7.2. X, Y Riemann yüzeyleri, $f : X \to Y$ sabit olmayan, bir uygun holomorf dönüşüm olsun. $A := \{x \in X \mid \mu(f, x) > 1\}$ ise, $f(A)$'nın ayrık olduğunu gösteriniz.

8.8 Picard Teoremleri

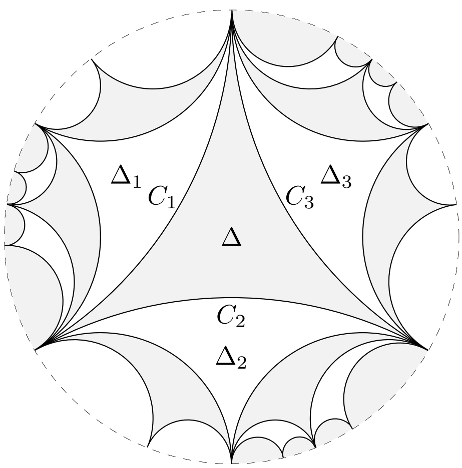
Düzlemde birbirini dik kesen C_1, C_2 çemberleri verilsinler; bunların çevreledikleri açık daireler D_1, D_2 olsun (bkz. Şekil 8.9). Ayrıca C_1 çemberinin, C_2'nin m_2-merkezinden geçmediğini varsayalım. C_2 üzerinde z_1, z_2, z_3 noktalarını şekildeki gibi seçelim. T Möbius dönüşümünü $T(z_1) = 0, T(z_2) = 1$ ve $T(z_3) = \infty$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda $T(D_2) = \mathbb{H}$ ve $T(C_2) = \mathbb{R}_\infty$ olur. T dönüşümü, C_1 çemberini, 0 ve 1 noktalarından geçip $\mathbb{R}_\infty$'a dik olan bir çembere resmeder. Bu çember, çaplarından biri $[0, 1]$ kapalı aralığı olan bir çemberdir; yani şekilde sağdaki çember. Bu çembere C ve çevrelediği açık daireye D diyelim. $D_1^+ := D_1 \cap D_2$, $D_1^- := D_1 \backslash (A \cup D_1^+)$, $D^+ := D \cap \mathbb{H}$ ve $D^- := D \cap \mathbb{H}^-$ olsun. T dönüşümü D_1 dairesini ya D'ye, ya da $\mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}$'ye resmeder. Ancak $T(D_1^+) \subset \mathbb{H}$ olduğundan, $T(D_1) = D$ olmak zorundadır. Elbette $T(D_1^+) = D^+$, $T(D_1^-) = D^-$ ve $T[A] = [0, 1]$.



Şekil 8.9

A yayındaki Θ_A yansımasını C_2 çemberindeki Θ_{C_2} yansıması olarak tanımlamıştık, dd. $\Theta_A = \Theta_{C_2}$. Tanım gereği $\Theta_{C_2} = T^{-1} \circ \overline{\mathrm{Id}} \circ T$ olduğunu biliyoruz. T ve T^{-1} dönüşümleri, Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmeder ve biholomorf olduğundan açıları yönleriyle korur. $\overline{\mathrm{Id}}$ de Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmeder, ancak açıları yönlerini değiştirerek korur. Dolayısıyla Θ_A dönüşümü, birbirini dik kesen Möbius çemberlerini birbirini dik kesen Möbius çemberlerine resmeder. Özellikle Θ_A dönüşümü birbirin dik kesen C_1 ve C_2 çemberlerini birbirini dik kesen Möbius çemberlerine resmeder. Θ_A dönüşümü C_2'de bir özdeşlik dönüşümü olduğundan, $\Theta_A(C_2) = C_2$ ve özellikle $\Theta_A(z_i) = z_i, i = 1, 2$. Dolayısıyla $\Theta_A(C_1)$ Möbius çemberi z_1, z_2 noktalarından geçip C_2'ye dik olmak zorundadır; böyle tek bir çember olduğundan $\Theta_A(C_1) = C_1$. Dolayısıyla $w \in C_1 \backslash \{z_1, z_2\}$ ise $w^* := \Theta_A(z) \in C_1 \backslash \{z_1, z_2\}$ olur; $w \in C_1^+ (C_1^-)$ ise $w^* \in C_1^- (C_1^+)$. Ayrıca, $i = 1, 2$ için w ve z_i'den geçip C_1'e dik olan bir çember, w^* ve z_i'den geçip C_1'e dik olan bir çembere resmedilir.

Şimdi yukarıdaki irdelemeleri $C_1 = \mathbb{S} = \partial\mathbb{D}$ ve $D_1 = \mathbb{D}$ özel durumuna uygulayacağız. $\Delta \subset \overline{\mathbb{D}}$ köşeleri sonsuzda olan bir hiberbolik π-üçgeni olsun ve Δ'nın hiçbir kenarı bir çap olmasın. Başka sözlerle Δ'nın a, b, c köşeleri $\mathbb{S}^1$ birim çemberindedir ve kenarları 0'dan geçmez. Yukarıda söylenenlerden şu çıkar: Δ'yı $[a, b]_\pi$, $[b, c]_\pi$ ve $[c, a]_\pi$ kenarlarında yansıtarak, köşeleri yine $\mathbb{S}$'de olan, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ gibi üç yeni π-üçgeni elde ederiz. Bunları kendi kenarlarında yansıtarak, aynı tipten altı yeni π-üçgeni elde ederiz. Bu işlemi yineleyerek elde ettiğimiz π-üçgenlerimizin köşeleri dışındaki noktalarının birleşimi $\mathbb{D}$'dir. Her yansıtma gözümüze daha küçük görünen π-üçgenleri verse de bunların π-alanları birbirine eşittir; nedeni ise bu üçgenlerin iç açılarının toplamının daima sıfır olması ve Gauss-Bonnet Teoremi'dir. $\mathbb{D}$'nin bu örtmelerinin göze en hoş gözükenleri, $a \in \mathbb{S}$ keyfi olmak üzere $b := a \exp\frac{2\pi i}{3}$, $c := b \exp\frac{2\pi i}{3}$ olanlarıdır. Bu durumda $[a, b]_\pi$, $[b, c]_\pi$ ve $[c, a]_\pi$ yaylarının öklidik uzunlukları birbirine eşittir; Δ bir tür eşkenar üçgen gibidir.



Şekil 8.10

Şimdi bir $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ yerel düzgün örtmesi tanımlamak istiyoruz. Araçlarımız Riemann Dönüşüm Teoremi ile Schwarz Yansıma İlkesi olacaktır. Oluşturacağımız p dönüşümü, Şekil 8.10'daki ortadaki boyalı olan aşkın hiperbolik π-üçgenin Δ içini, Riemann Dönüşüm Teoremi ile $\mathbb{H}$'ye uygun biçimde biholomorf resmedecektir. Δ'nın kendi kenarlarında yansımaları Δ_i hiperbolik π-üçgenleri olsun. Bundan sonra Schwarz Yansıma İlkesi devreye girecek ve p'yi $\mathring{\Delta} \cup C_i^\circ \cup \mathring{\Delta}_i$'ye $p|\mathring{\Delta}_i : \mathring{\Delta}_i \to \mathbb{H}^-$ biholomorf olacak biçimde genişletilecektir (C_i° burada C_i'den uç noktaları atılarak elde edilen açık yaydır!). Sonra Δ_i'ler kendi kenarlarında yansıtılarak altı yeni Δ_{ij} hiperbolik π-üçgene ulaşılır ve bu işlem sürdürülürse, bir $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ yerel düzgün örtmesine ulaşılır, öyle ki p her boyalı üçgenin içini $\mathbb{H}$'ye, her beyaz üçgenin içini $\mathbb{H}^-$'ye biholomorf resmeder.

Δ hiperbolik π-üçgenimizin köşeleri $a := i$, $b := a \exp \frac{2\pi i}{3}$, $c := b \exp \frac{2\pi i}{3}$ olsun. Bu, hiçbir kenarı çap olmayan bir π-üçgenidir. Riemann Dönüşüm Teoremi'nden dolayı bir biholomorf $\varphi : \mathring{\Delta} \to \mathbb{D}$ dönüşümümüz vardır. Öte yandan Teorem 7.7.6'ya göre bu dönüşüm bir topolojik $\Phi : \overline{\Delta} \to \overline{\mathbb{D}}$ dönüşümüne genişletilebilir. T Möbius dönüşümünü $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$, $T(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}_\infty$ ve $T(\Phi(a)) = \infty$, $T(\Phi(b)) = 0$ ve $T(\Phi(c)) = 1$ olacak biçimde seçelim. Sonuçta $f := T \circ \varphi : \mathring{\Delta} \to \mathbb{H}$ biholomorftur ve topolojik $F := T \circ \Phi : \overline{\Delta} \to \overline{\mathbb{H}}_\infty$ dönüşümüne $F(a) = \infty$, $F(b) = 0$ ve $F(c) = 1$ olacak biçimde genişler. Burada $\overline{\mathbb{H}}_\infty = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_\infty$, $\mathbb{H}$'nin $\mathbb{C}_\infty$'daki kapanışıdır, ayrıca $\partial_\infty \mathbb{H} = \mathbb{R}_\infty$ olduğunu biliyoruz. Şimdi F dönüşümü C_1 kenarını $I_1 := [\infty, 0]$'a, C_2 kenarını $I_2 := [0, 1]$'e ve C_3 kenarını ise $I_3 = [1, \infty]$'a topolojik olarak resmeder.

Şimdi Δ π-üçgenimizi C_i kenarlarında yansıtarak $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ π-üçgenlerini elde ederiz. Önce $p|\mathring{\Delta}$'yi f olarak tanımlıyoruz. Dolayısıyla p dönüşümümüz $\mathring{\Delta}$ π-üçgenini biholomorf olarak $\mathbb{H}$'ye resmeder. $\Theta_{C_i} : \mathring{\Delta} \to \mathring{\Delta}_i$ biantiholomorf ve $\Theta_{C_i}^{-1} = \Theta_{C_i}$ olduğundan, $p|\mathring{\Delta}_i := \overline{\mathrm{Id}} \circ f \circ \Theta_{C_i}^{-1} = \overline{\mathrm{Id}} \circ f \circ \Theta_{C_i}$ dönüşümü $\mathring{\Delta}_i$'yi biholomorf $\mathbb{H}^-$'ye resmeder. Böylece yansıma ilkesi ile $p|\mathring{\Delta}$ dönüşümü $\mathring{\Delta} \sqcup C_i^\circ \sqcup \mathring{\Delta}_i$'ye biholomorf olarak genişletilir ve bu kümeyi biholomorf olarak $\mathbb{H} \sqcup \mathring{I}_i \sqcup \mathbb{H}^- \subset \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$'e resmeder. Her Δ_i'nin Δ ile ortak olmayan iki yeni C_{i1}, C_{i2} kenarı vardır. Bu kez Δ_i π-üçgenini bu yeni kenarlarda yansıtarak Δ_{i1}, Δ_{i2} üçgenlerini elde ederiz. Bu yansımalar $\Theta_{C_{ij}}$ olmak üzere $p|\mathring{\Delta}_{ij} := f \circ \Theta_{C_i} \circ \Theta_{C_{ij}}$ dönüşümü, bir biholomorf ve iki biantiholomorf dönüşümün birleşimi olarak $\mathring{\Delta}_{ij}$'yi biholomorf olarak $\mathbb{H}$'ye resmeder. Bu olay yinelenerek, $\mathbb{D}$'ye düşen ayrık $\mathring{\Delta}, \mathring{\Delta}_i, \mathring{\Delta}_{ij}, \mathring{\Delta}_{ijk}, \mathring{\Delta}_{ijkl}, \mathring{\Delta}_{ijklm}, \ldots$ π-üçgenlerine ulaşırız. p'nin bu üçgenlere nasıl genişletileceğini artık biliyoruz. p dönüşümü, bu üçgenlerden çift damgalı olanlarını, dd. Şekil 8.10'da boyalı üçgenleri biholomorf olarak $\mathbb{H}$'ye, tek damgalı olanları, yani şeklimizdeki beyaz üçgenleri ise biholomorf olarak $\mathbb{H}^-$'ye resmeder.

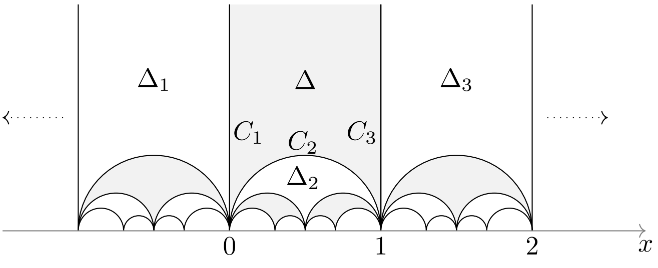
p fonksiyonunu $\partial\Delta\backslash\{a, b, c\}$'de F olarak tanımlayalım. $z_i \in C_i \cap \mathbb{D}$ noktalarını keyfi seçelim ve $x_i := F(z_i) \in \mathring{I}_i$ olsun. z_i noktasının yeterince küçük ve C_i'ye göre simetrik bir V_i komşuluğunu seçelim. Bu durumda p fonksiyonu V_i'i x_i'nin x-eksenine göre simetrik bir $U_i(x_i)$ komşuluğuna resmeder. $U_i^+(x_i) := U_i(x_i) \cap \mathbb{H}$ ve $U_i^-(x_i) := U_i(x_i) \cap \mathbb{H}^-$ ise, p dönüşümü $\mathring{\Delta} \cap V_i$'yi biholomorf $U_i^+(x_i)$'e, $\mathring{\Delta}_i \cap V_i$'yi ise biholomorf $U_i^-(x_i)$'e resmeder ve ayrıca $p|C_i \cap V_i$ topolojiktir. Teorem 7.3.21'den dolayı $p|V_i : V_i \to U_i(x_i)$ biholomorftur[11]. Eğer V_i, yeterince küçük seçilirse, yukarıdaki yansımalarımızda, her biri $U_i(x_i)$'ye biholomorf resmedilen ayrık açık kümelere taşınır. Sonuçta aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 8.8.1. $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ *yerel biholomorf dönüşümü bir yerel düzgün*

[11] Aslında $U_i(x)$ olarak $\mathring{\Delta} \sqcup C_i^\circ \sqcup \mathring{\Delta}_i$ ve $V_i(x)$ olarak $\mathbb{H} \sqcup \mathring{I}_i \sqcup \mathbb{H}^-$ de alınabilir.

örtmedir.

$\mathbb{D}$'de yaptığımızı $\mathbb{H}$'de de yapabiliriz. Örneğin Şekil 8.11'de gösterilen Δ $\pi_{\mathbb{H}}$-üçgeni ile başlanabilir.



Şekil 8.11

$\mathbb{D}$'de yaptığımızı burada tekrarlayalım. Şu yeterlidir: Ardışık yansıtmalarla Δ'nın altını doldurun, ardından bunu sürekli olarak bir birim sağa ve sola kaydırın ve her kaydırmada üçgenlerimizin rengini değiştirin. Böylece bir $p_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ oluşturmayı problem olarak bırakıyoruz.

Teorem 8.8.2 (Picard'ın Küçük Teoremi)**.** *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\infty$ meromorf fonksiyonu birbirinden farklı üç $a, b, c \in \mathbb{C}_\infty$ değerlerini almıyorsa, f sabittir.*

Kanıt. Bir Möbius dönüşümüyle a, b, c noktaları $0, 1, \infty$ noktalarına resmedilebileceğinden, daha baştan f fonksiyonumuzun $0, 1, \infty$ değerlerini almadığını varsayabiliriz. Bu durumda $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ holomorf olur. Teorem 8.8.1'den dolayı bir $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ yerel düzgün örtmemiz vardır. Teorem 8.2.13'ten dolayı bir sürekli $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ dönüşümü $f = p \circ \hat{f}$ olacak biçimde vardır.Teorem 8.7.3'ten dolayı $\hat{f}$ holomorftur. Liouville Teoremi'den dolayı $\hat{f}$ sabittir, dolayısıyla f sabittir. □

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ olsun. KA I Tanım 3.4.7'den dolayı, $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(U)$ ailesinin $\mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ içinde normal olması, her $(f_n) \subset \mathcal{F}$ dizisinin ρ_∞ metriğine göre bir yakınsak altdizisinin olması demektir. Bu normalliğe kısaca **ρ_∞-normal** diyelim. Bu altdizinin limitine f dersek, KA I Teorem 3.9.19'dan dolayı, ya $f \in \mathcal{M}(U)$ ya da $f \equiv \infty$. Yine aynı teoremden dolayı, bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$'den yola çıkmışsak $\mathcal{F}$ ailesi ρ_∞-normalse ya $f \in \mathcal{H}(U)$ ya da $f \equiv \infty$ olduğunu biliyoruz.

Teorem 8.8.3 (Montel)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ ailesindeki her $f \in \mathcal{F}$ için $f(U) \subset \mathbb{C}\setminus\{a,b\}$ ise, $\mathcal{F}$ ailesi ρ_∞-normaldir.*

Kanıt. Bir ailenin normal olması bir yerel özellik olduğundan, savı basit bağlantılı bölgeler için kanıtlamak yeterlidir. $U = B$ basit bağlantılı olsun. Genellikten bir şey kaybetmeden $\{a, b\} = \{0, 1\}$ alabiliriz. $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

dönüşümü (8.8.1)'deki yerel düzgün örtmemiz olsun. Yine (8.8.1) ve 8.7.3'ten, her $f \in \mathcal{F}$ dönüşümü için $p \circ \hat{f} = f$ koşulunu sağlayan bir $\hat{f} : B \to \mathbb{D}$ holomorf fonksiyonu vardır. Bu durumda $\hat{\mathcal{F}} := \{\hat{f} \mid f \in \mathcal{F}\}$ ailesi $\mathcal{C}(B, \mathbb{C})$ normaldir, ancak bunun $\mathcal{F}$ için doğru olması gerekmez. Şimdi bir $(f_n) \subset \mathcal{F}$ dizisi verilsin. $z_0 \in B$ noktasını keyfi seçelim. $\mathbb{C}_\infty$ kompakt ve tam metrik uzay olduğundan, $(f_n(z_0))$ dizisinin bir yakınsak altdizisi vardır. Bu altdiziyi yine $(f_n(z_0))$ olarak gösterelim. $w_0 = \lim f_n(z_0)$ olsun.

(1) $w_0 \notin \{0, 1, \infty\}$ olsun. $\hat{\mathcal{F}}$ normal olduğundan, $(\hat{f}_n)$ dizsinin $\mathcal{C}(B, \mathbb{C})$'de yakınsak bir altdizisi vardır; yalınlık açısından bu altdiziyi yine $(\hat{f}_n)$ ile gösterelim. $g := \lim \hat{f}_n$, dd. $\lim \rho(\hat{f}_n, g) = 0$ olsun. Biz $g \in \mathcal{H}(B)$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan açıkca $||g||_B \leq 1$. Eğer bir $z_1 \in B$ noktasında $|g(z_1)| = 1$ olsaydı, maksimum ilkesinden $g \equiv c$ sabit ve $|c| = 1$ olurdu ki bu, $\lim |\hat{f}_n(z_0)| = 1$ ve $\lim f_n(z_0) = w_0 \notin \{0, 1, \infty\}$ ile çelişir. Dolayısıyla, her $z \in B$ için $|g(z)| < 1$ olur. Şimdi $K \subset B$ kompakt kümesi keyfi verilsin. $||g||_K < r_K < 1$ seçersek, $\hat{f}_n \overset{K}{\Longrightarrow} g$ olduğundan bir n_K doğal sayısı, her $n \geq n_K$ için $||\hat{f}_n|| \leq r_K$ olacak şekilde seçilebilir. p dönüşümü yerel biholomorf olduğundan, $p(\overline{D}_{r_K})$ kompakttır ve bir $\overline{D}_{R_K}$'ye düşer. Dolayısıyla, her $n \geq n_K$ için $||f_n||_K \leq R_K$ olur. $M_K := \max\{R_K, \max_{0 \leq n < n_K} ||f||_K\}$ dersek, her n için $||f_n||_K \leq M_K$ olur. Dolayısıyla (f_n) dizisi B'de kompakt düzgün sınırlıdır. KA I Montel Teoremi 3.3.15'ten dolayı (f_n)'nin $\mathcal{H}(B)$'de yakınsak bir alt dizisi vardır.

(2) $w_0 = 1$ olsun. B basit bağlantılı ve f_n'ler B'de 0 değerini almadığından, B'de holomorf $h_n := \sqrt{f_n}$ dallarını $\tilde{w}_0 = \lim h_n(z_0) = -1$ olacak biçimde seçebiliriz. h_n'ler 0 ve 1 değerini almazlar ve $\tilde{w}_0 \notin \{0, 1, \infty\}$ olduğundan, (1)'den (h_n)'nin, dolayısıyla (f_n)'in $\mathcal{H}(B)$'de yakınsak altdizileri vardır.

(3) $w_0 = 0$ olsun. Bu kez $g_n := 1 - f_n$ olsun. g_n'ler 0 ve 1 değerini almazlar ve $w^* := \lim g_n(z_0) = 1$ olur. (2)'den dolayı (g_n)'nin, buradan da (f_n)'in $\mathcal{H}(B)$'de yakınsak bir altdizisi vardır.

(4) $w_0 = \infty$ olsun. Bu kez $g_n := 1/f_n$ olsun. Yine $g_n \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonları 0 ve 1 değerini almazlar. Bu durumda $\breve{w}_0 := \lim g_n(z_0) = 0$ olur. (3)'ten dolayı, (g_n)'in bir (g_{n_k}) altdizisi $\mathcal{H}(B)$'de bir $g \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonuna yakınsar. $g(z_0) = 0$ olduğundan, KA I Sonuç 4.2.23 ile $g \equiv 0$, dolayısıyla $\lim f_{n_k} \equiv \infty$ olur. □

Teorem 8.8.4 (Picard'ın Büyük Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a\})$ ve a noktası f'nin bir esaslı tekilliği olsun. f fonksiyonu, belki bir değer dışındaki her değeri, her $D_r^*(a) \subset U$'da sonsuz kez alır.*

Kanıt. Genellikten bir şey kaybetmeden $a = 0$ olsun. Şimdi $D_r^* \subset U$ ve f fonksiyonu D_r^*'de iki değeri almasın. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için D_r^*'de $g_n(z) := f(2^{-n} z)$ olarak tanımlansın. $\mathcal{F} := \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{H}(D_r^*)$ ailesi (8.8.3)'ten dolayı ρ_∞-normaldir. Dolayısıyla (g_n)'nin bir altdizisi ρ_∞ metriğinde bir g'ye yakınsar. Genellikten bir şey kaybetmeden bu altdizinin (g_n) olduğunu varsayabiliriz. KA I Teorem

3.9.19'dan dolayı, ya $g \in \mathcal{H}(D_r^*)$ ya da $g \equiv \infty$. Şimdi σ sayısını $0 < \sigma < r$ olarak seçelim ve sabit tutalım. Bir $M > 0$ sayısını $|z| = \sigma$ için $|g(z)| < M$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda bir n_0 doğal sayısı, her $n \geq n_0$ ve her $|z| = \sigma$ için $|g_n(z)| < M$ olacak biçimde seçilebilir; bu durumda her $n \geq n_0$ ve her $|z| = 2^{-n}\sigma$ için $|f(z)| < M$ olur. Dolayısıyla Maksimum İlkesinden, yeterince büyük n'ler için, $2^{-n}\sigma \leq |z| \leq \sigma$ kapalı halkasında $|f(z)| < M$ olur. Böylece $n \to +\infty$ için halkamız $0 < |z| \leq \sigma$ halkasına dönüşeceğinden, f fonksiyonumuz D_σ^* da sınırlı olur. Dolayısıyla f'nin 0'da bir kaldırılabilir tekilliği vardır. Eğer $g \equiv \infty$ ise, az önceki argümanlarımızı $1/f$ fonksiyonuna uygularsak bu fonksiyonun 0'a holomorf genişletilebilir, dd. f'nin 0'da bir kutup yeri vardır. □

8.9 Analitik Genişlemeler ve Demetler

Her alanda yeni kavramlarla dilimizin zenginleşmesi bize aynı gerçeğin değişik anlatımlarını sunar ve kavrama seçeneğimizi artırır. KA I Altkısım 3.5.4'te ergin analitik fonksiyonların tanım bölgelerinin nasıl verilebileceğinin ipucunu vermiştik. Sayfa 623'te bu konuyu yeniden ele almıştık. Şimdi örtü uzaylarıyla kısaca o ipucunu izleyecek, ardından holomorf fonksiyon demetleriyle aynı olaya farklı yönden yaklaşacağız.

KA I Altkısım 3.5.4'te $\mathbb{C}$'nin bir D dairesinde verilen bir $f \in \mathcal{H}(D, \mathbb{C})$ holomorf fonksiyonun analitik genişlemelerini incelerken tüm söylenenlerin temel dayanağı Özdeşlik Teoremi olmuştur. Özdeşlik Teoremi meromorf fonksiyonlar için de geçerli olduğundan, orada meromorf fonksiyonların da analitik genişlemelerinin benzer biçimde ele alınabileceğini belirtmiştik. Riemann yüzeyleri arasında da Özdeşlik Teoremi geçerli olduğundan, şimdi olaya en genel şekliyle yaklaşabiliriz. X, Y Riemann yüzeyleri, $B \subset X$ bir bölge ve $f \in \mathcal{H}(B, Y)$ bir holomorf dönüşüm olsun.

$$\mathcal{DE}(X,Y) := \{(f,B) \,|\, B \,\text{bir bölge}, f : B \to Y \text{ holomorf}\}$$

kümesinin öğelerine X'te Y'ye **holomorf dönüşüm elemanları** denir. $X = G \subset \mathbb{C}$ ve $Y = \mathbb{C}$ özel durumunda $\mathcal{DE}(X, \mathbb{C})$ tam da KA I Altkısım 3.5.4'te incelediğimiz $\mathcal{FE}(G)$ fonksiyon elemanlarımızdır.

$\mathcal{DE}(X,Y)$'de (f_1, B_1) ve (f_2, B_2) gibi iki eleman verildiğinde

$$B_{12} := B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \text{ ve } f_1|B_{12} = f_2|B_{12} \text{ ise bunu } (f_1, B_1) \stackrel{d}{\sim} (f_2, B_2)$$

olarak gösterelim ve f_2'ye f_1'in $B_1 \cup B_2$'ye **dolaysız genişlemesi** diyelim. Özdeşlik Teoremi'nden dolayı, f_2 varsa tek olarak belirlidir. $\mathcal{DE}(X,Y)$'deki $\stackrel{d}{\sim}$ bağıntısı bakışımlı ve yansımalıdır, ancak geçişli değildir. Yine de ondan bir

$\sim$ denklik bağıntısı elde edebiliriz. Şimdi, eğer (f,B), $(\tilde{f},\tilde{B}) \in \mathcal{DE}(X,Y)$ için $(f_1,B_1),\ldots,(f_n,B_n) \in \mathcal{DE}(X,Y)$ holomorf dönüşüm elemanları

$$(f,B) \overset{d}{\sim} (f_1,B_1) \overset{d}{\sim} \cdots \overset{d}{\sim} (f_n,B_n) \overset{d}{\sim} (\tilde{f},\tilde{B}) \tag{8.11}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa, $(f,B) \sim (\tilde{f},\tilde{B})$ olarak tanımlıyoruz. Elbette $\sim$ bağıntısı $\mathcal{DE}(X,Y)$'de bir denklik bağıntısıdır ve bu bağıntının denkli sınıflarına X'ten Y'ye **ergin analitik dönüşümler** denir. f'nin denklik sınıfını yine $\mathbf{f}$ ile gösterelim. Bizim amacımız, tanım kümelerini X'te düşündüğümüzde, genelde çok değerli olan bu dönüşümlerden, tanım bölgelerini uygun Riemann yüzeyleri seçerek tek değerli holomorf dönüşümler elde etmektir.

KA I Altkısım 3.5.4'e koşut olarak çalışmak istersek burada B bölgelerini diskler olarak seçebiliriz. Bu bir şey değiştirmeyeceği için esnek davranıp, elemanların tanım kümelerini bölgeler olarak seçtik. $\mathbf{f}$ ergin analitik dönüşümüne tanım kümesi olarak karşılık getireceğimiz R_f Riemann yüzeyini sezgisel olarak sayfa 623'teki gibi elde edeceğiz. Özetle $(f,B),(g,D) \in \mathcal{DE}(X,Y)$, $x \in B \cap D$ ve x'in bir $U \subset B \cap D$ komşuluğunda $f|U = g|U$ ise, $B_f = B \times \{f\}$ ve $D_g \times \{g\}$'yi U boyunca yapıştıracağız.

Şimdi X, Y Riemann yüzeyleri verilsin. X'in topolojisi $\mathcal{T}$ olsun ve her $x \in$ için $\mathfrak{T}_x$ ile x noktasının açık komşuluklarının ailesini gösterelim.

$$\mathcal{H}(\mathfrak{T}_x,Y) := \{(f,U)\,|\,U \in \mathfrak{T}_x \,\text{ve}\, f: U \to Y \text{ holomorf}\}$$

olsun. Her $(f,U),(g,V) \in \mathcal{H}(\mathfrak{T}_x,Y)$ için

$$(f,U) \overset{x}{\sim} (g,V) :\Longleftrightarrow \exists W \in \mathfrak{T}_x \quad (W \subset U \cap V \text{ ve } f|W = g|W) \tag{8.12}$$

olarak tanımlanan $\overset{x}{\sim}$ bağıntısı $\mathcal{H}(\mathfrak{T}_x,Y)$'de bir denklik bağıntısıdır. (f,U)'nun $\overset{x}{\sim}$ bağıntısına göre $[(f,U)]_x$denklik sınıfını yalın olarak f_x ile gösterecek, bunlara x noktasındaki **Y-değerli holomorf dönüşüm tohumları** diyeceğiz. Tanım gereği, her f_x tohumu uygun bir A_x ile $\{(f_\alpha,U_a)\}_{\alpha\in A_x}$ gibi bir kümedir. $\bigcap_{\alpha\in A_x} U_\alpha = \{x\}$ olduğundan, $a,b \in X$ ve $a \neq b$ ise, daima $f_a \neq g_b$ olur.

$$\mathcal{O}_{X,x}(Y) := \{f_x\,|\,(f,U) \in \mathcal{H}(\mathfrak{T}_x,Y)\}$$

kümesine x noktasındaki **Y-değerli holomorf dönüşüm tohumları sapı** dersek, saplarımız ayrık kümelerdir.

$$\mathcal{O}_U(Y) := \bigsqcup_{x\in U} \mathcal{O}_{X,x}(Y)$$

ayrık birleşimine ise U'daki **Y-değerli holomorf dönüşümler demeti** denir. $Y = \mathbb{C}$ durumunda $\mathcal{O}_{X,x}(Y)$ ve $\mathcal{O}_U(Y)$ yerine, yalın olarak $\mathcal{O}_{X,x}$ ve $\mathcal{O}_U$ yazacağız. $\mathcal{O}_U$'ya U üzerindeki **holomorf fonksiyon tohumları demeti** diyeceğiz.

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ yerine yalın olarak $\mathcal{O}$ yazacağız; böylece $\mathcal{O}$, $\mathbb{C}$'deki holomorf fonksiyon tohumlarının demetini gösterecektir.

$(f_1, U_1), (f_2, U_2) \in f_x$ ise $f_1(x) = f_2(x)$ olduğu apaçıktır. Dolayısıyla herhangi bir $(g, U) \in f_x$ ile yapılan $f_x(x) := g(x)$ tanımı kusursuzdur; özellikle $f_x(x) = f(x)$. Diğer yandan, f_x tohumu (f, U) dönüşüm elemanının belirlediği $\mathbf{f}$ ergin dönüşümünü de tek olarak belirler. Yanlış anlamalar olabileceğini düşündüğümüz yerde $[(f, U)]_x$ gösterimini kullanacağız.

$U \subset X$ açık olmak üzere, her $f \in \mathcal{H}(U, Y)$ için

$$f_U := \{f_x \mid x \in U\}$$

olarak tanımlansın[12]. $p : \mathcal{O}_X(Y) \to X$ ise $p(f_x) := x$ ile tanımlanan izdüşüm olsun.

Teorem 8.9.1. *$\mathcal{O}_X(Y)$, $p : \mathcal{O}_X(Y) \to X$ dönüşümünü yerel biholomorf kılan tek olarak belirli bir kompleks yapıya sahiptir. p bir örten dalsız örtmedir.*

Kanıt. (1) Önce $\mathfrak{B} := \{f_U \mid f \in \mathcal{H}(U, Y),\ U \subset X \text{ açık}\}$ ailesinin $\mathcal{O}_X(Y)$'de bir topolojinin bazı olduğunu savunuyoruz. $\mathcal{O}_X(Y) = \bigcup \mathfrak{B}$ olduğu apaçıktır. Diğer yandan $f_U, g_V \in \mathfrak{B}$ ve $f_U \cap g_V \neq \emptyset$ olsun. $\zeta \in f_U \cap g_V$ ise, bir $a \in U \cap V$ ile $\zeta = f_a = g_a$ olur. Dolayısıyla a-merkezli bir $W \subset U \cap V$ diskinde $f|W = g|W$ olur. Buradan $f_W \subset f_U \cap g_V$ olur. Sonuçta $f_U \cap g_V$ arakesiti $\mathfrak{B}$'deki f_W tipinde kümelerin birleşimidir. Bu, savı tamamlar.

(2) Bu topolojiyle $\mathcal{O}_X(Y)$ bir Hausdorff uzayıdır. Gerçekten de $f_a, g_b \in \mathcal{O}_X(Y)$ ve $f_a \neq g_b$ olsun. a ve b noktalarının U ve V açık komşuluklarıyla f_a ve g_b'nin (U, f) ve (V, g) temsilcilerini seçelim. İki durum söz konusudur: (i) $a \neq b$ ve (ii) $a = b$. (i) durumunda U ve V açık komşuluklarını ayrık seçebiliriz; böylece f_U ve g_V kümeleri sırasıyla f_a ve g_b'nin komşuluklarıdır ve $f_U \cap g_V = \emptyset$. (ii) durumunda ise $f_a \neq g_a$. Şimdi a-merkezli bir D diskini $D \subset U \cap V$ olacak biçimde seçelim. Eğer bir $x \in D$ için $f_x = g_x$ olsaydı, tanım gereği x'nin bir açık $W \subset D$ komşuluğunda $f|W = g|W$, ardından da Özdeşlik Teoremi'yle D'de $f = g$, dolayısıyla $f_a = g_a$ olurdu! Böylece $f_D \cap g_D = \emptyset$ ve işimiz biter.

(3) Her $x \in X$ için $\mathcal{O}_{X,x}(Y) \neq \emptyset$ olduğundan p örtendir. $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}(Y)$ keyfi verilsin. a'nın bir açık U komşuluğu ile $f_a \in f_U$ olur. Her $z \in U$ için $p(f_z) = z$ olduğundan $p|f_U : f_U \to U$ dönüşümü tameşlemedir. V açık ve $a \in V$ ise, $f_{U \cap V}$ kümesi f_a'nın bir açık komşuluğu ve $p(f_{U \cap V}) = U \cap V \subset V$ olduğundan, p fonksiyonu f_a noktasında süreklidir. Diğer yandan, her $g \in \mathfrak{B}$ için $p(g_W) = W$ olduğundan p bir açık dönüşümdür. Her sürekli, açık ve yerel birebir dönüşüm yerel topolojiktir. Savımızın kalanı Yapı Çekme İlkesi'nden çıkar. $\square$

Uyarı: Cebirsel topolojide önemli olan örtmeler yerel düzgün örtmelerdir. Ancak $p : \mathcal{O}_X(Y) \to X$ bir örten dalsız örtmedir, ancak asla bir yerel düzgün

[12] f_x yerine $[f, x]$ ve f_U yerine ise $[f, U]$ gösterimleri de yaygındır.

örtme değildir! Önerme 8.7.1'de gördüğümüz gibi kompleks analizde olağan olan yerel düzgün örtmeler değil Tanım 8.2.1'de tanımladığımız örtmelerdir. (8.4.4)'ten dolayı, bir dalsız örtmenin bir yerel düzgün örtme olması için gerek ve yeter koşul gezileri çekme özelliğinin olmasıdır. Örneğin $X = Y = \mathbb{C}$, $p : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ özel durumunda $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gezisi $\gamma(t) = 1 - t$ olsun ve $(1/z, \mathbb{C}^*)$ fonksiyon elemanını alalım. $f(z) = 1/z$ olmak üzere, γ gezisinin $\hat{\gamma}(0) = f_{\gamma(0)} := (1/z)_1$ koşulunu sağlayan bir $\hat{\gamma}$ çekilmişi yoktur. Bu örnek genel duruma aktarılır.

Not 8.9.2. $\mathcal{O}_X(Y)$ bir özel demettir. Genel **demet** kavramını bu özel demetten elde edeceğiz. Yine $\mathcal{T}$ ile X'in topolojisini gösterelim. Her $U \in \mathcal{T}$ için $\mathcal{F}(U) := \mathcal{H}(U, Y)$ olsun. Eğer $Y = \mathbb{C}$ ise, $\mathcal{F}(U)$ bir halkadır. $V, U \in \mathcal{T}$ ve $V \subset U$ ise| $r_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ dönüşümü $r_V^U(f) := f|V$ kısıtlaması olsun. Eğer $Y = \mathbb{C}$ ise, r_V^U dönüşümleri halka yapı dönüşümleridir. r_V^U'lere kısıtlama dönüşümleri denir. Bu veriler şu özelliklere sahiptirler:

(a) Her $U \in \mathcal{T}$ için $r_U^U = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$.
(b) $W, V, U \in \mathcal{T}$ ve $W \subset V \subset U$ için: $r_W^U = r_V^U \circ r_W^V$.
(c) $U, U_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$ ve $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ise

  (i) $f, g \in \mathcal{F}(U)$ ve her $i \in I$ için $r_{U_i}^U(f) = r_{U_i}^U(g)$ ise, $f = g$.
  (ii) Her $i \in I$ için $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ve her $i, j \in I$ için

$$r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(f_j)$$

  ise, tek olarak belirli bir $f \in \mathcal{F}(U)$, her $i \in I$ için $r_{U_i}^U(f) = f_i$ olacak biçimde vardır.

Şimdi topolojisi $\mathcal{T}$ olan bir X topolojik uzayı verilsin. Her $U \in \mathcal{T}$'ye bir $\mathcal{F}(U)$ kümesi karşılık getirilsin. $\mathcal{F}(U)$'lar aynı türden bir $\mathfrak{A}$ cebirsel yapıya, örneğin grup, halka, cisim, bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı vs. sahip olabilirler. $\mathcal{F} := (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{T}}$ olsun. Ayrıca, $V \subset U$ koşulunu sağlayan $U, V \in \mathcal{T}$ için bir $r_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ dönüşümü verilmiş olsun. Eğer her $\mathcal{F}(U)$ bir $\mathfrak{A}$ yapısı ise, her r_V^U bir $\mathfrak{A}$-yapı dönüşmü olsun. $r := \{r_V^U \,|\, U, V \in \mathcal{T},\ V \subset U\}$ olmak üzere, $(\mathcal{F}, r)$ ikilisine (a) ve (b) sağlanmışsa bir **demetsi**, eğer (a), (b) ve (c) sağlanmışsa bir $\mathfrak{A}$**-demeti** denir. Eğer kümeler, gruplar, halkalar, vs. ise o zaman, yerine göre kümeler, gruplar, halkalar, vs. demetsisi veya demetinden söz ederiz. Her ne kadar artık r_V^U'lerin gerçek anlamda bir kısıtla olmaları gerekmese de bunlardan yine de *kısıtlama* diye söz edilir.

Herhangi bir $(\mathcal{F}, r)$ demetsisi verilsin. Nasıl devam edileceği bellidir. $U, V \in \mathfrak{T}_x$, $f \in \mathcal{F}(U)$ ve $g \in \mathcal{F}(V)$ ise

$$f \overset{x}{\sim} g :\Longleftrightarrow \exists W \in \mathfrak{T}_x \ \ r_W^U(f) = r_W^V(g)$$

olarak tanımlanır. $\overset{x}{\sim}$, her $x \in X$ için $\bigcup_{U \in \mathfrak{T}_x} \mathcal{F}(U)$'da bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının $\mathcal{F}_x := \bigcup_{U \in \mathfrak{T}_x} \mathcal{F}(U)/\overset{x}{\sim}$ denklik sınıfları kümesine demetsinin x'teki **sap**ı denir. $U \in \mathfrak{T}_x$ ve $f \in \mathcal{F}(U)$ için f'nin $\overset{x}{\sim}$ bağıntısına göre denklik sınıfı f_x ile gösterilir ve bir $r_x^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$ dönüşümü $r_x^U(f) := f_x$ olarak tanımlanır. $\mathcal{F}_X := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ olsun ve $p : \mathcal{F}_X \to X$ dönüşümü, her $f_x \in \mathcal{F}_x$ için $p(f_x) = x$ olarak tanımlansın. Son olarak, her $f \in \mathcal{F}(U)$ için $f_U := \{f_x \,|\, x \in U\}$ tanımıyla bu bilgilendirmeyi noktalayacağız. Okurun kolayca tahmin edeceği bir kaç basit gerçeği problem olarak soracağız.

Şimdi tekrar işimize dönelim; X ve Y Riemann yüzeyleri olsunlar. $\mathcal{O}_X(Y)$ yerel yol bağlantılıdır, bu nedenle bağlantılı bileşenleri de yol bağlantılı ve birer Riemann yüzeyidir. Diğer yandan B_1, $B_2 \subset X$ bölgeler ve $(f_1, B_1) \overset{d}{\sim} (f_2, B_2)$ ise, f_{B_1} ve f_{B_2} bölge ve $f_{B_1} \cap f_{B_2} \neq \emptyset$ olacağından, $f_{B_1} \cup f_{B_2}$ de bir bölgedir.

Bunun bir sonucu olarak $(f,B)\in\mathcal{DE}(X,Y)$ bir holomorf dönüşüm elemanı ve $J\neq\emptyset$ ile $\mathbf{f}=\{(f_j,B_j)\,|\,j\in J\}$ bu elemana ilişkin ergin holomorf dönüşümse,

$$X_f := \bigcup_{j\in J}(f_j)_{B_j}$$

de bağlantılıdır. $(g,D)\in\mathcal{DE}(X,Y)$ ve $\mathbf{g}$ ise bu elemana ilişkin ergin holomorf dönüşüm olmak üzere, $\mathbf{f}\neq\mathbf{g}$ ise $X_f\cap X_g=\emptyset$ olduğu apaçıktır. Biz X_f'nin yalnız bağlantılı olarak kalmayıp $\mathcal{O}_X(Y)$'nin bir bağlantılı bileşeni olduğunu göstereceğiz. Bunu gösterdiğimizde $\mathcal{O}_X(Y)$'nin bağlantılı bileşenlerinin her biri bir X_f olarak karşımıza çıkar. Bir $F:X_f\to Y$ dönüşümünü şöyle tanımlayacağız: Her $f_x\in X_f$ için $F(f_x):=f(x)=f(p(f_x))$ olarak tanımlayalım. F dönüşümünün $(f_j)_{B_j}$ açık kümesine kısıtlanışı $f_j\circ\big(p|(f_j)_{B_j}\big)$'dir ve iki holomorf dönüşümün birleşimi olarak holomorftur. Yerel-Tümel İlke'den dolayı $F:X_f\to Y$ dönüşümü holomorftur. Bu F holomorf dönüşümü, çok değerli olan $\mathbf{f}$ ergin holomorf dönüşümüne karşılık gelen tek değerli dönüşümümüz olacaktır. $B\subset X$ bir bölge ve $f:B\to Y$ holomorfsa $F|f_B:f_B\to Y$ holomorf dönüşümü bir anlamda $f:B\to Y$ holomorf dönüşümünün X_f'deki kopyasıdır.

Tanım 8.9.3. $\gamma:[a,b]\to X$ bir gezi olsun ve bir $f_{\gamma(a)}\in\mathcal{O}_{X,\gamma(a)}(Y)$ holomorf dönüşüm tohumu verilsin. $p:\mathcal{O}_X(Y)\to X$ dalsız örtmesinde γ'nın $f_{\gamma(a)}$'dan başlayan bir $\hat{\gamma}$ çekilmişi varsa, $\hat{\gamma}(b)$'ye $f_{\gamma(a)}$**'nın γ boyunca bir analitik genişlemesi**dir denir.

Az yukarıda uyarıda belirttiğimiz gibi γ ve $f_{\gamma(a)}$ verildiğinde $f_{\gamma(a)}$'nın γ boyunca bir analitik genişlemesi olması gerekmez. Bu tanımın $\mathbf{f}$ ergin dönüşümüzle ilişkisini netleştirelim. Önce $B\subset X$ bir bölge, $f:B\to Y$ holomorf olsun ve $x_0,x_1\in B$ noktaları verilsin. B bir bölge olduğundan $\gamma\in\mathcal{G}_{x_0,x_1}(B)$ gezileri vardır. $p|f_B:f_B\to B$ topolojik olduğundan, $\hat{\gamma}:=(p|f_B)^{-1}\circ\gamma$ sürekli dönüşümü γ'nın f_{x_0}'dan başlayan bir çekilmişidir. Dolayısıyla f_{x_1} tohumu f_{x_0}'ın γ boyunca bir analitik genişlemesidir. Elbette f_{x_0} tohumu ise f_{x_1} tohumunun γ^- boyunca bir analitik genişlemesidir.

Şimdi $(f,B)\overset{d}{\sim}(\tilde{f},\tilde{B})$ olsun ve $x_0\in B$ ve $\tilde{x}_0\in\tilde{B}$ noktaları keyfi verilsinler. $x_1\in B\cap\tilde{B}$ keyfi seçilsin. $\gamma_1\in\mathcal{G}_{x_0,x_1}(B)$ ve $\gamma_2\in\mathcal{G}_{x_1,\tilde{x}_0}(\tilde{B})$ gezileri keyfi seçilsinler. $\hat{\gamma}_1:=(p|f_B)^{-1}\circ\gamma_1$ ve $\hat{\gamma}_2:=(p|\tilde{f}_{\tilde{B}})^{-1}\circ\gamma_2$ olsun. $f|B\cap\tilde{B}=\tilde{f}|B\cap\tilde{B}$ olduğundan, $\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2$ bir gezidir ve $\gamma_1\gamma_2\in\mathcal{G}_{x_0,\tilde{x}_0}(B\cup\tilde{B})$ gezisinin f_{x_0}'dan başlayan bir çekilmişidir. Dolayısıyla $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}$ tohumu f_{x_0} tohumunun $\gamma_1\gamma_2$ boyunca bir analitik genişlemesidir.

Şimdi $(f,B)\overset{d}{\sim}(f_1,B_1)\overset{d}{\sim}\cdots\overset{d}{\sim}(f_n,B_n)\overset{d}{\sim}(\tilde{f},\tilde{B})$ olsun. $x_0\in B$ ve $\tilde{x}_0\in\tilde{B}$ keyfi verilsinler. Yukarıdaki adım yinelenerek sonlu adımda $D:=B\cup(\bigcup_{i=1}^n B_i)\cup\tilde{B}$ bölgesinde bir $\gamma\in\mathcal{G}_{x_0,\tilde{x}_0}(D)$ gezisi $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}$ tohumu f_{x_0} tohumunun γ boyunca bir analitik genişlemesi olacak içimde bulunur. Elbette f_{x_0} tohumu da $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}$ tohumunun γ^- boyunca bir analitik genişlemesidir. Böylece:

(a) *Herhangi iki $f_{x_0}, \tilde{f}_{\tilde{x}_0} \in X_f$ tohumu uç noktaları $x_0, \tilde{x}_0$ olan X'teki bir γ gezisi boyunca birbirlerinin analitik genişlemeleridirler.*

Tersine bize iki $f_{x_0}, \tilde{f}_{\tilde{x}_0} \in \mathcal{O}_X(Y)$ tohumu verilsin ve $J = [a, b]$ olmak üzere $\Gamma : J \to \mathcal{O}_X(Y)$ gezisinin başlangıç noktası f_{x_0} ve bitiş noktası $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}$ olsun. Bu durumda $\gamma := p \circ \Gamma : J \to X$ başlangıç noktası x_0 ve bitiş noktası $\tilde{x}_0$ olan bir gezidir ve $\Gamma = \hat{\gamma}$ olur. $t \in J$ ve $\Gamma(t)$'nin bir U açık komşuluğu keyfi verilsinler. Γ sürekli olduğundan, t'nin J'de açık bir T komşuluğu $\Gamma(T) \subset U$ olacak biçimde vardır. $\Gamma(t) \in \mathcal{O}_{X,\gamma(t)}(Y)$ olduğundan, U açık komşuluğunu, $\gamma(t) \in B$ ve $(g, B) \in \mathcal{DE}(X, Y)$ olmak üzere, $U = g_B$ olarak seçebiliriz. J kompakt olduğundan, J'nin $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışı ve (f_i, B_i), $i = 1, \ldots, n$ holomorf dönüşüm elemanları $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset B_i$ ve aşağıdaki koşullar sağlanacak biçimde seçilebilirler:

(i) $f_{x_0} = (f_1)_{x_0}$ ve $(f_n)_{\tilde{x}_0} = \tilde{f}_{\tilde{x}_0}$.

(ii) $i = 1, \ldots, n-1$ için D_i bölgesi $B_i \cap B_{i+1}$'in $\gamma(t_i)$'yi içeren bağlantılı bileşeni olmak üzere, $f_i|D_i = f_{i+1}|D_i$.

Bu durumda $(f_i, B_i) \overset{d}{\sim} (f_{i+1}, B_{i+1})$ olması gerekmez, ancak

$$(f_1, B_1) \overset{d}{\sim} (f_1, D_1) \overset{d}{\sim} (f_2, B_2) \overset{d}{\sim} \cdots \overset{d}{\sim} (f_n, D_n) \overset{d}{\sim} (f_n, B_n)$$

sağlanır. Dolayısıyla $\tilde{f}_{\tilde{x}_0} = (f_n)_{\tilde{x}_0} \in X_f$ olur. Böylece şunu göstermiş olduk:

(b) *$(f, B) \in \mathcal{DE}(X, Y)$, $x_0 \in B$ ise, f_{x_0}'ın $\mathcal{O}_X(Y)$'deki bağlantılı bileşeni X_f'dir.*

(a) ve (b) bize aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 8.9.4. *X, Y Riemann yüzeyleri, $B \subset X$ bir bölge, $f : B \to Y$ holomorf, $a \in B$ ve $f_a = [(f, B)]_a \in \mathcal{O}_{X,a}(Y)$ olsun. X_f tamı tamına $\mathcal{O}_X(Y)$'de f_a'nın bağlantılı bileşenidir. Diğer yandan Z, $\mathcal{O}_X(Y)$'in herhangi bir bağlantılı bileşeni ve $f_a \in Z$ ise, $Z = X_f$.*

Analitik denk Riemann yüzeylere aynı gözüyle bakarsak olaya farklı yönden yaklaşabiliriz. Şimdilik Şekil 8.12'deki sol şekil durumundayız. Burada $B \subset X$ bir bölge, $f : B \to Y$ holomorf ve $j = (p|f_B)^{-1}$, açık yazılımla, her $x \in B$ için $j(x) = f_x$ gömmesidir. Bu diyagram değişmelidir, dd. $f = F \circ j$ ve $p \circ j = \mathrm{Id}_B$. Dikkat edilirse j dönüşümü B bölgesini biholomorf olarak f_B bölgesine gömer. Dolayısıyla $f_B \subset G \subset X_f$ ve G bir bölge ise, $F|G$'ye de f'nin G'ye bir holomorf genişlemesi olarak bakabiliriz ve bu genişleme, Özdeşlik Teoremi'nden dolayı tek olarak belirlidir. f_a tohumunun geziler boyunca analitik genişlemelerine başvurmadan, analitik denklik bağlamında X_f'ye ulaşmaya çalışacağız.

Şimdi X, Y ve Z Riemann yüzeyleri ve $p : Z \to X$ yerel biholomorf olsun (Şekil 8.12'deki sağ şekle bkz). $c \in Z$ ve $a = p(c)$ olsun. Her $[(f, U)]_a = f_a \in \mathcal{O}_{X,a}(Y)$ için $p_c^*(f_a) := (f \circ p)_c$ olarak tanımlanan $p_c^* : \mathcal{O}_{X,a}(Y) \to \mathcal{O}_{Z,c}(Y)$ bir tameşlemedir, eğer bu saplar aynı $\mathfrak{A}$-yapısındansalar p_c^* bir $\mathfrak{A}$ eşyapı dönüşümüdür. $p_{*c} := (p_c^*)^{-1}$ olsun. Açık yazılımla $p_{*c} : \mathcal{O}_{Z,c}(Y) \to \mathcal{O}_{X,p(c)}(Y)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X_f \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "F"] & \\
X & B \arrow[l, "Id"'] \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\hat{f}"] & \\
X & & Y \\
 & \tilde{Z} \arrow[ul, "\check{p}"] \arrow[uu, "g"] \arrow[ur, "\hat{\tilde{f}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 8.12: Tam analitik genişleme.

Tanım 8.9.5. X ve Y Riemann yüzeyleri, $a \in X$ ve $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}(Y)$ ise, aşağıdaki koşullar sağlandığında $(Z, q, \hat{f}, c)$ dörtlüsüne f_a **tohumunun bir analitik genişlemesi** denir:

(i) Z bir Riemann yüzeyi ve $q : Z \to X$ yerel biholomorftur.

(ii) $\hat{f} : Z \to Y$ holomorftur.

(iii) $c \in Z$, $q(c) = a$ ve $q_{*c}(\hat{f}_c) = f_{q(c)} = f_a$.

Eğer ayrıca f_a tohumunun her $(\tilde{Z}, \tilde{q}, \hat{\tilde{f}}, \tilde{c})$ analitik genişlemesine karşılık $\hat{\tilde{f}} = \hat{f} \circ g$ koşulunu sağlayan bir $g : (\tilde{Z}, \tilde{q}, X) \to (Z, q, X)$ holomorf lifsel dönüşümü bulunabiliyorsa, $(Z, q, \hat{f}, c)$ analitik genişlemesi **maksimaldir** denir.

Her şeyden önce (8.9.4)'te $Z = X_f$, $c := f_a$, $q = p$ ve $\hat{f} = F$ alırsak (X_f, p, F, f_a)'nın f_a tohumunun bir analitik genişlemesi olduğunu görürüz.

Önsav 8.9.6. *f_a tohumunun herhangi iki maksimal analitik genişlemesi birbirine analitik denktirler.*

Kanıt. f_a tohumunun $(Z, q, \hat{f}, c)$ ve $(\tilde{Z}, \tilde{q}, \hat{\tilde{f}}, \tilde{c})$ gibi iki maksimal analitik genişlemesi verilsin. Tanım gereği $h : Z \to \tilde{Z}$ ve $g : \tilde{Z} \to Z$ holomorf dönüşümleri $\hat{f} = \hat{\tilde{f}} \circ h$ ve $\hat{\tilde{f}} = \hat{f} \circ g$ olacak biçimde varlar. $g \circ h : (Z, q, X) \to (Z, q, X)$ bir lifsel dönüşümdür ve (8.2.8)'den dolayı $g \circ h = \mathrm{Id}_Z$ ve benzer argümanlarla $h \circ g = \mathrm{Id}_{\tilde{Z}}$ olur, ve bunlar savı verir. $\square$

Dolayısıyla analitik genişlemeler için maksimallik bir evrensel özelliktir.

Önsav 8.9.7. *X bir Riemann yüzeyi, $a \in X$, $f_a \in \mathcal{O}_{X,a}(Y)$ ve $(Z, q, \hat{f}, c)$ ise f_a tohumunun bir analitik genişlemesi olsun. $z \in Z$ ve $x = q(z)$ olmak üzere $\hat{\gamma} \in \mathcal{G}_{c,z}(Z)$ ise, $q_{*z}(\hat{f}_z) \in \mathcal{O}_{X,x}(Y)$ tohumu f_a'nın $\gamma = q \circ \hat{\gamma}$ boyunca analitik genişlemesidir.*

Kanıt. $\hat{\gamma} : [0,1] \to Z$ ve $\gamma := p \circ \hat{\gamma}$ olsun. Her $t \in [0,1]$ için $\varphi_t := q_{*\hat{\gamma}(t)}(\hat{f}_{\hat{\gamma}(t)}) \in \mathcal{O}_{X,\gamma(t)}$ olsun. Bu durumda $\varphi_0 = f_a$ ve $\varphi_1 = q_{*z}(\hat{f}_z)$. Şimdi $t_0 \in [0,1]$ keyfi verilsin. q yerel biholomorf olduğundan, $\hat{\gamma}(t_0)$'ın bir açık V komşuluğu ile $\gamma(t_0)$'ın bir açık U komşuluğu, $q|V : V \to U$ biholomorf olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda $h := \hat{f} \circ (q|V)^{-1} \in \mathcal{H}(U, Y)$ olur. Bu durumda, her $w \in V$ için

$q_{*w}(\hat{f}_w) = g_{q(w)}$ olur. t_0'ın $[0,1]$'de bir T komşuluğunu $\hat{\gamma}(T) \subset V$, dolayısıyla $\gamma(T) \subset U$ olacak biçimde seçelim. O zaman her $t \in T$ için $g_{\gamma(t)} = q_{*\hat{\gamma}(t)}(\hat{f}_{\hat{\gamma}(t)}) = \varphi_t$ olur. Bu ise savımızı kanıtlar. □

Şimdi X herhangi bir Riemann yüzeyi, $a \in B \subset X$, B bir bölge ve $f \in \mathcal{H}(B,Y)$ olsun.

Teorem 8.9.8. *(X_f, p, F, f_a) analitik genişlemesi maksimaldir.*

Kanıt. Daha önce de belirttiğimiz gibi (X_f, p, F, f_a), f_a tohumunun bir analitik genişlemesidir.

Şimdi $(Z, q, \hat{f}, c)$, f_a tohumunun herhangi bir analitik genişlemesi olsun. Bu durumda tanımdan $a = q(c)$, $\hat{f} : Z \to Y$ holomorf ve $q_{*c}(\hat{f}_a) = f_{q(c)} = f_a$. Şimdi $z \in Z$ keyfi verilsin. Önsav 8.9.7'den biliyoruz ki $q_{*z}(\hat{f}_z)$, X'te f_a'nın, başlangıç noktası a ve bitiş noktası $x := q(z)$ olan bir gezi boyunca analitik genişlemesidir. Dolayısıyla tek olarak belirli bir $\eta \in X_f$ ile $q_{*z}(\hat{f}_z) = \eta$. Şimdi $g : Z \to X_f$ dönüşümü $g(z) := \eta$ olarak tanımlansın. $g : (Z, q, X) \to (X_f, p, X)$ bir holomorf lifsel dönüşümdür ve $F \circ g = \hat{f}$ □

Özellikle $X = Y = \mathbb{C}$ ve bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi için $f : B \to \mathbb{C}$ bir holomorf fonksiyonsa **f** ergin fonksiyonunun tanım bölgesi $X_f \subset \mathcal{O}$ Riemann yüzeyidir.

$\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ özel durumuna biraz yakından bakalım. $a \in \mathbb{C}$ ve $(U,f) \overset{a}{\sim} (V,g)$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $(U, f^{(n)}) \overset{a}{\sim} (V, g^{(n)})$ olacağından, $n \geq 1$ için $f_a^{(n)}(a) := f^{(n)}(a)$ tanımları kusursuzdur. $f_a, g_a \in \mathcal{O}_a$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. $f_a = [(U,f)]_a$ ve $g_a = [(V,g)]_a$ ise, $W := U \cap V$ olmak üzere

$$f_a + g_a := [(W, f+g)]_a\,,\ f_a \cdot g_a := [(W, f \cdot g)]_a \text{ ve } \lambda \cdot f_a := [(U, \lambda f)]_a$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlar kusursuzdur ve bu işlemelere göre $\mathcal{O}_a$ bir değişmeli halka ve bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır. $\mathcal{O}_a$ halkasının birim olmayan öğeleri bir maksimal $\mathfrak{m}_a$ ideali oluştururlar ve $f_a \in \mathfrak{m}_a$ olması için gerek ve yeter koşul $f_a(a) = 0$ olmasıdır. $(f, U) \in f_a \in \mathcal{O}_a$ ise, f holomorf fonksiyonu a noktasında, yakınsaklık yarıçapı r_a olan tek olarak belirli bir $P_{f,a}(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-a)^n$ kuvvet serisine açılır. $\mathbb{C}\{z-a\}$ ile açılım noktası a olan yakınsak kuvvet serilerinin halkasını gösterirsek $\varphi(f_a) := P_{f,a}$ ile tanımlanan $\varphi : \mathcal{O}_a \to \mathbb{C}\{z-a\}$ bir halka eşyapı dönüşümüdür.

Problemler

Problem 8.9.1. $\varphi \in \mathcal{O}_{X,\gamma(a)}(Y)$ ve $\psi \in \mathcal{O}_{X,\gamma(b)}(Y)$ olmak üzere, ψ'nin $\gamma : [a,b] \to X$ boyunca φ'nin analitik genişlemesi olmasının şuna denk olduğunu gösteriniz: Her $t \in [a,b]$ için bir $\varphi_t \in \mathcal{O}_{X,\gamma(t)}(Y)$ öyle seçilebilir ki, her $t \in [a,b]$'nin bir açık $I_t \subset [a,b]$ komşuluğu ve $\gamma(I_t)$'yi içeren X'te açık bir U komşuluğu ve bir $g \in \mathcal{H}(U,Y)$ dönüşümü, her $t \in I_t$ için $\varphi_t = g_{\gamma(t)}$ olacak biçimde bulunabilir.

Problem 8.9.2. $\mathcal{O}_a$'nın bir değişmeli halka ve $\mathfrak{m}_a$ idealinin bu halkada maksimal olduğunu gösteriniz.

Problem 8.9.3. $\varphi(f_a) := P_{f,a}$ ile tanımlanan $\varphi : \mathcal{O}_a \to \mathbb{C}\{z-a\}$ bir halka eşyapı dönüşümü olduğunu gösteriniz.

Problem 8.9.4. X topolojik uzayında bir $(\mathcal{F}, r)$ demeti verilsin. Her açık $U \subset X$ ve her $f \in \mathcal{F}(U)$ için $f_U := \{f_x \,|\, x \in U\}$ olmak üzere, $\mathfrak{B} := \{f_U \,|\, U \subset X \text{ açık ve } f \in \mathcal{F}(U)\}$'nun $\mathcal{F}_X$'te bir topolojinin bazı olduğunu gösteriniz. $\mathcal{F}_X$ bu topoloji ile alındığında $p : \mathcal{F}_X \to X$ dönüşümünün örten ve yerel topolojik olduğunu gösteriniz.

Problem 8.9.5. Veriler bir önceki problemdeki gibi olsunlar. Her $B \subset X$ bölgesi ve her $f, g \in \mathcal{F}(B)$ için "Bir $a \in B$ için $f_a = g_a \implies f = g$" ise $\mathcal{F}$ Özdeşlik Teoremi'ni sağlar diyelim. $\mathcal{F}$ demeti Özdeşlik Teoremi'ni sağlıyorsa, $\mathcal{F}_X$'in topolojisi Hausdorff'tur, gösteriniz.

Problem 8.9.6. $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve her $U \in \mathcal{T}$ için $\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ olsun. $U, V \in \mathcal{T}$ ve $V \subset U$ ise, $f \in \mathcal{C}(U)$ için $r_V^U(f) := f|V$ olarak tanmlansın. $(\mathcal{C}, r)$'nin bir $\mathbb{C}$-vektör uzayları demeti olduğunu gösteriniz.

Problem 8.9.7. X bir katmanlı ve her açık $U \subset X$ için $\mathcal{C}^k(U) = \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ olsun. $U, V \subset X$ açık kümeler ve $V \subset U$ için r_V^U yine doğal kısıtlama ise $(\mathcal{C}^k, r)$'nin bir $\mathbb{R}$-vektör uzayları demeti olduğunu gösteriniz.

Problem 8.9.8. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ demeti için bir $d : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ dönüşümü şöyle tanımlansın: $a \in \mathbb{C}$, $f_a \in f_U$ için $d(f_a) := (f')_a$ olarak tanımlansın. Bu tanımın kusursuz olduğunu ve $(\mathcal{O}, d, \mathcal{O})$'nun bir yerel düzgün örtme olduğunu gösteriniz.

8.10 Riemann Dönüşüm Teoremi

Artık her X Riemann yüzeyinin basit bağlantılı bir $p : \hat{X} \to X$ evrensel örtüsü olduğunu biliyoruz. p'nin bir yerel düzgün örtme olduğunu ve evrensel örtülerin analitik denklik dışında tek olarak belirli olduklarını anımsatalım. Böylece, her X Riemann yüzeyine karşılık bir

$$p : \hat{X} \to X, \quad \hat{X} \in \{\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$$

yerel düzgün örtmesi vardır. (8.3.5)'ten dolayı $\pi_1(X) \cong D_p$ olduğundan ve $\pi_1(X)$ grubu $p^{-1}(x)$'te düzgün işlediğinden, D_p grubu $p^{-1}(x)$ saplarında düzgün işler. Yani, her $\hat{a}, \hat{b} \in p^{-1}(x)$ için $f(\hat{a}) = \hat{b}$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli bir $f \in D_p$ deste dönüşümü vardır. Özellikle, sabit noktası olan yagâne deste dönüşümü $\mathrm{Id}_{\hat{X}}$ özdeşlik dönüşümüdür. Tüm bunlara ek olarak aşağıdaki önerme geçerlidir:

Önerme 8.10.1. *$X, \hat{X}$ Riemann yüzeyleri ve $p : \hat{X} \to X$ evrensel örtme ise, D_p grubu $\hat{X}$'te süreksiz işler.*

Kanıt. $K \subset \hat{X}$ bir kompakt altküme olsun. Sonsuz farklı deste dönüşümü için, örneğin $g_0, g_1, g_2, \ldots \in D_p$ için $K \cap g_n(K) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için, $z_n, w_n \in K$ noktaları $w_n = g_n(z_n)$ olacak biçimde vardır. K kompakt olduğundan, gerekirse altdizilere geçerek, $z^*, w^* \in K$ olmak üzere $\lim z_n = z^*$ ve $\lim w_n = w^*$ olduğunu varsayabiliriz. Şimdi p sürekli ve $p = p \circ g_n$ olduğundan

$$p(z^*) = \lim p(z_n) = \lim p(g_n(z_n)) = \lim p(w_n) = p(w^*)$$

olur. Dolayısıyla z^* ve w^* noktaları aynı sapta bulunurlar; $a = p(w^*)$ ise bu sap $p^{-1}(a)$ sapıdır. Deste dönüşümleri geçişli işlediğinden, $g(z^*) = w^*$ koşulunu sağlayan bir g deste dönüşümümüz vardır. p yerel topolojik olduğundan, w^*'ın bir V komşuluğunu a'nın bir U komşuluğuna topolojik olarak resmeder. $\lim g(z_n) = g(\lim z_n) = g(z^*) = w^*$ ve $\lim w_n = w^*$ olduğundan, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısını her $n \geq n_0$ için $g(z_n), w_n \in V$ olacak biçimde seçelim. Şimdi $g(z_n)$ ve $w_n = g_n(z_n)$'ler daima aynı saptadırlar ve $p|V : V \to U$ birebir olduğundan, her $n \geq n_0$ için $g(z_n) = g_n(z_n)$ olur. Lifsel dönüşümün tekliğinden, her $n \geq n_0$ için $g = g_n$ olur; bu ise g_n'lerin farklı olma varsayımımızla çelişir. $\square$

$\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}_\infty$ Riemann yüzeylerinin birbirine analitik denk olmadıklarını biliyoruz. Diğer yandan ise, (7.6.5)'te, her basit bağlantılı $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesinin $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}_\infty$'den birine ve yalnız birine analitik denk olduğunu gördük. Aşağıdaki teorem bunun basit bağlantılı Riemann yüzeyleri için de geçerli olduğunu söyler.

Teorem 8.10.2 (Riemann Dönüşüm Teoremi)**.** *Herhangi bir basit bağlantılı Riemann yüzeyi $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ Riemann yüzeylerinden birine ve yalnız birine analitik denktir.*

Biz bu teoremin kanıtını vermeyeceğiz. Kanıtı Riemann yüzeylerine ilişkin çoğu kitapta, örneğin [11] ve [24]'te bulabilirsiniz. Bu teorem ve (8.5.14) ve (8.10.1)'den aşağıdaki önemli teoremi elde ederiz:

Teorem 8.10.3 (Birbiçimlendirme Teoremi)**.** *X bir Riemann yüzeyi ve $\hat{X}$ ise $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$'den biri olmak üzere, $p : \hat{X} \to X$ evrensel örtü dönüşümü ve $G := D_p$ olsun. $\hat{X}/G$ uzayı (8.5.14)'teki kompleks yapı ile alınsın. Aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) $G \subset \mathrm{Möb}$ *ve G grubu $\hat{X}$'te süreksiz işler.*

(ii) *$g \in G$ özdeşlik dönüşümü değilse sabit noktası yoktur.*

(iii) $G \cong \pi_1(X)$.

(iv) *X Riemann yüzeyi $\hat{X}/G$'ye analitik denktir.*

Kanıt. (i) Sonuç 8.6.16'dan dolayı $G \subset \operatorname{Aut} \hat{X}$, ve kısım 7.3'ten ise $\operatorname{Aut} \hat{X} \subset$ Möb. Önerme 8.10.1'den dolayı G grubu $\hat{X}$'te süreksiz işler.

(ii) Lifsel dönüşümünün tekliğinden çıkar.

(iii) Doğrudan Teorem 8.3.5(i)'den çıkar.

(iv) Teorem 8.5.14'ten biliyoruz ki $q : \hat{X} \to \hat{X}/G$ yerel biholomorf ve örtendir. $\hat{x} \in \hat{X}$ ve $p(\hat{x}) = x$ ise, $q(\hat{x}) = [\hat{x}] = \hat{x} \cdot G = \{g(\hat{x}) \mid g \in G\} = p^{-1}(x)$. Diğer yandan p dönüşümü de yerel biholomorftur, hatta $p : \hat{X} \to X$ bir yerel düzgün örtmedir. Sonuçta $h([\hat{x}]) := p(\hat{x})$ olarak tanımlanan $h : \hat{X}/G \to X$ dönüşümü bir tameşleme ve süreklidir. $p = h \circ q$ olduğundan, Önerme 8.6.17'den h holomorftur. h ayrıca bir tam eşleme olduğundan h biholomorftur; $\hat{X}/G$ ve X Riemann yüzeyleri analitik denktirler. $\square$

Sembol Listesi

Sembol	s.		Sembol	s.		Sembol	s.		Sembol	s.
$L_{\mathbb{D}}(\gamma)$	567									
$d_{\mathbb{D}}(a,b)$	566									
(Y,p,X)	591									
$\phi_{\hat{a}}$	601									

Kaynakça

[1] **Ahlfors L.V.**, *Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1979.

[2] **Beardon, A.F**, *Algebra and Geometriy.* Camb. Un. Press 2005.

[3] **Beardon, A. F.**, *A Primer on Riemann Surfaces.* Camb. Un. Press 1984.

[4] **Behnke H.**, **Sommer F.**, *Theorie der analytischen Funktionen einer Veränderlichen.* 3.baskı. Springer (1965).

[5] **Carathéodory C.**, *Theory of Fuctions of a Complex Variable I*, Chelsea Publishing, 1954.

[6] **Carathéodory C.**, *Theory of Fuctions of a Complex Variable II*, Chelsea Publishing, 1954.

[7] **Dolbeault, A.**, *Analyse Complexe.* Masson 1990.

[8] **Donaldson, S.K.**, *Riemann Surfaces.* Oxford 2011.

[9] **Farkas, H. M.-Kra, I.**, *Riemann Surfaces.* Springer 1980.

[10] **Fulton, W.**, *Algebraic Topology.* Springer 1997.

[11] **Forster, O.**, *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer 1981.

[12] **Fischer W.**, **Lieb I.**, *A Course in Complex Analysis.* Vieweg-Teubner 2010.

[13] **Fischer W.**, **Lieb I.**, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenthorie.* Vieweg, 1988.

[14] **Freitag E.**, **Busam, R.**, *Complex Analysis.* Springer, 2005.

[15] **Gamelin T. W.**, *Complex Analysis.* Springer 2001.

[16] **Heins M.**, *Complex Function Theory.* Academic Press 1968.

[17] **Hurwitz A.**, **Courant R.**, **Röhrl H.**, *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen.* 4. baskı. Springer 1964.

[18] **Jones G.A.**, **Singerman D.**, *Complex Analysis.* Camb.Un. Press, 1987.

[19] **Klein F.**, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Math. Annallen, Bd. 43.

[20] Kranz, S.G., Geometric Function Theory. Birkhäuser, 2006.

[21] **Lamotke, K.**, *Riemannsche Flächen.* Springer 2009.

[22] **Marshall D.E.,** *Complex Analysis.* Camb. Univ. Press, 2019.

[23] **Narashimhan R.**, *Complex Analysis in One Variable.* Birkhäuser (1985).

[24] **Napier,T.-Ramachandran,M.**, *A Introduction to Riemann Surfaces.* Birkhäuser 2011.

[25] **Noguchi J.**, *Introduction to Complex Analysis.* Am. Math. Soc. 1998.

[26] **Ponnusamy S., Silverman H.**, *Complex Variables with Applications,* Birkhäuser, 2006.

[27] **Priestley H.A**, *Introduction to Complex Analysis.*Oxford Press. 2003.

[28] **Remmert R.**, **Schumacher G.**, *Funktionentheorie 2,* 3. baskı. Springer 2007.

[29] **Rodriguez R.E.**, **Kra I.**, **Gilman J.P.**, *Complex Analysis.* Springer, 2013.

[30] **Rudin W.**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[31] **Schlag, W.,** *A Cours in Complex Analysis and Riemann Surfaces.* AMS 2014.

[32] **Stöcker, R.-Zieschang, H.**, *Algebraische Topology.* Teubner 1994.

Dizin