Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye. . .

Mehmet Sait Eroğlu

Kompleks Analiz I

komplekskitap@gmail.com

Yıldız'a, Ilgım'a ve Ilgar'a...

KOMPLEKS ANALİZ I

KOMPLEKS ANALİZ II

Önsöz

> Gerçekten de bize en büyük sevinci veren bilmek değil öğrenmek, sahip olmak değil elde etmek, ve orada olmak değil oraya gitmektir. (Gauss; Bolyai'ye yazdığı bir mektuptan)

Kompleks sayılarla ilk ne zaman karşılaştık gibi tartışmalı bir konuya girmeden şunu söyleyebiliriz: Her ne kadar Euler, fonksiyonların incelenmesinde kompleks sayıların kullanılması fikrini ileri sürmüşse de, kompleks analizin temelleri ondokuzuncu yüzyılda, aralarında Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Riemann, Weierstrass ve Poincaré gibi dönemin büyük matematikçilerinin de bulunduğu matematikçiler tarafından atılmıştır.

Bugün kompleks analizin, gerçel analiz, cebirsel geometri, genel topoloji, cebirsel topoloji, harmonik analiz, sayılar teorisi ve dinamik sistemler gibi bir çok dalın buluştuğu bir alan olduğunu biliyoruz. Bu dirsek temasları kompleks analize inanılmaz bir zenginlik ve güzellik katar. Ancak şu da bir gerçektir ki, topoloji dalının ortaya çıkmasında en büyük pay kompleks analizindir. Okur kompleks analizde bölgelerin, özellikle ayrıntılı biçimde ele aldığımız basit bağlantılı bölgelerin çok önemli rol oynadığını görecektir.

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla gerçel ve kompleks sayılar cisimleri olsunlar. Kompleks analiz, $\mathbb{R}$'deki gerçel analizin $\mathbb{C}$'ye aktarılmasından mı ibarettir, yoksa kompleks analiz gerçel analizden daha mı karmaşıktır? Her iki soruya da yanıtımız "hayır"dır. Elimizden geldiğince kompleks analizin gerçel analizden farklı olduğu noktaları vurgulamaya çalıştık:

En basit fonksiyonlar polinomlardır ve polinomların bir adım ötesi kuvvet serileridir. $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olmak üzere U'da yerel olarak kuvvet serilerine açılabilen $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarına U'da analitik fonksiyonlar diyecek, bunların kümesini $\mathcal{A}(U)$ ile göstereceğiz. Weierstrass'ın çıkış noktası analitik fonksiyonlardır. U'da tanımlı $\mathbb{C}$-değerli fonksiyonların kompleks türevlenebilir olanların ailesini $\mathcal{H}(U)$ ile, U'da sürekli olup yerel olarak ilkele sahip olanların kümesini $\mathcal{I}(U)$ ile gösterirsek, biz $\mathcal{A}(U) = \mathcal{H}(U) = \mathcal{I}(U)$ olduğunu kanıtlayacağız. Bu eşitlikten, bir kuvvet serisinin tanımladığı fonksiyonun yakınsaklık dairesinde her mertebeden türevlenebilir olduğunu da gözetirsek, U'da bir kez kompleks türevlenebilir fonksiyonun her mertebeden kompleks türevlenebilir olduğunu görürüz. Diğer yandan gerçel analizden, bir aralıktaki her sürekli fonksiyonun bir ilkeli olduğunu biliyoruz. Üstteki eşitlik ise yalnızca U'da kompleks türevlenebilir fonksiyonların U'da yerel ilkeli olabileceğini söylüyor. Gerçel analizden ne kadar farklı sonuçlar!

Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = \exp x \quad \text{ve} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

olarak tanımlanan fonksiyonların her ikisi de $\mathbb{R}$'de reel-analitiktir. Her $a \in \mathbb{R}$ noktasında bu fonksiyonlar bir kuvvet serisine açılabilir. f'nin a'daki açılımının yakınsaklık yarıçapı a'dan bağımsız olarak daima $+\infty$ iken, g'nin a'daki açılımının yakınsaklık yarıçapı a'ya bağlıdır ve $\sqrt{1+a^2}$'dir. Gerçel analizde kaldığımız sürece fonksiyonlarımızın bu davranışlarının bir açıklaması yoktur. Öte yandan $\hat{f}(z) := \exp z$ fonksiyonu f'yi $\mathbb{C}$'ye, ve $\hat{g}(z) := 1/(1+z^2)$ fonksiyonu ise g'yi $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$'ye holomorf olarak genişletirler. $\hat{g}$ fonksiyonunun $\pm i$ noktalarında tekillikleri vardır. Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $h : U \to \mathbb{C}$ holomorf ve $a \in U$ olsun. Biz h fonksiyonunun a noktasındaki seri açılımının U'ya düşen a-merkezli her açık dairede yakınsak olduğunu göreceğiz. Buradan, $\mathbb{C}$'de holomorf bir h fonksiyonunun, açık ifadesini tanımadan ve herhangi bir işlem yapmadan, herhangi bir a noktasındaki seri açılımının yakınsaklık yarıçapının $+\infty$ olduğunu elde ederiz. Bu, f'nin davranışını açıklar. Şimdi $U := \mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$, $a \in U$ olmak üzere $h : U \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonunun $\pm i$ noktalarında tekillikleri olsun; örneğin $\hat{g}$ bu özelliklere sahiptir. r_a ile $\pm i$ noktalarının a'ya yakın olanının uzaklığını gösterelim. Biz h fonksiyonunun açık ifadesini bilmesek de, a noktasındaki seri açılımının yakınsaklık yarıçapının r_a'dan küçük olamayacağını ve $\pm i$'deki tekilliklerden dolayı ise daha büyük de olamayacağını söyleyebiliriz. Özetle, h fonksiyonunun a noktasındaki seri açılımının yakınsaklık yarıçapı r_a'dır ve $a \in \mathbb{R}$ için r_a tam da $\sqrt{1+a^2}$'dir. Bu da g'nin davranışını açıklar.

Diğer yandan gerçel analizde, döngülü ve sınırlı olan $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının, sınırsız ve döngüsüz olan $\exp x$ fonksiyonu ile bir bağlantısı olacağı akla gelmez. Bu fonksiyonları kompleks düzleme holomorf olarak genişlettiğimizde, tüm trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların $\exp x$'in $\mathbb{C}$'ye holomorf genişletmesi olan $\exp z$'den elde edilebileceğini göreceğiz. Dolayısıyla kompleks analiz gerçel analize ışık tuttuğu gibi, orada düşünemeyeceğimiz ilişkileri de sunar. Ayrıca, dördüncü bölümde ayrıntılı biçimde göstereceğimiz gibi, kompleks analiz gerçel analizdeki bazı integrallerin hesaplanmasında, bizi bazen oldukça sıkıntı yaratan ilkel bulma işinden kurtarıp bunu her zaman kısa ve kolay olan türev işlemine indirgeyerek kolaylık sağlar.

Kompleks analiz kitapları genellikle Cauchy yaklaşımı denen $\mathcal{H}(U)$'dan yola çıkar. Biz birinci bölümde Weierstrass yaklaşımı denen $\mathcal{A}(U)$'dan yola çıkacağız. Bunun nedeni, bu yolun bir yandan gerçel analizden minimal bir bilgi gerektirirken, diğer yandan tüm temel fonksiyonlara doğrudan ulaşmamızı sağlamasıdır. Ayrıca bu bölümde geometrinin temel kavramlarından birini, açı kavramını cebirsel temele oturtacağız.

İkinci bölümde Cauchy yaklaşımını ele alacağız. Kuşkusuz bu bölümün en önemli teoremleri Cauchy Teoremi ve Cauchy integral formülüdür. Üçüncü bölümde Cauchy, Riemann ve Weierstrass'ın katkıları vardır. Riemann yaklaşımı diyebileceğimiz konform dönüşümler Kompleks Analiz II adlı kitabımızda işlenecektir.

Kompleks Analiz II kitabımız, Kompleks Analizden Seçme Konular, Geometrik Fonksiyonlar Kuramı, Örtmeler ve Riemann Yüzeyleri adlarını taşıyan üç bölümden oluşacaktır. Tek değişkenli kompleks fonksiyonların işlendiği Kompleks Analiz I ve Kompleks Analiz II'de, okur çok değişkenli kompleks fonksiyonların kavramlarından bir kısmı ile de tanışmış olacaktır.

Dersin öğrenciler tarafından izlenebilirliğine önem veren herkes bilir ki, dersin hacmini önünde sonunda sınıftaki öğrenciler belirler. Bu nedenle, “haftalık şu kadar saatlik bir derste şu şu konular işlenebilir” diye bir önerimiz olmayacaktır. Yine de şu kadarını belirtelim: Banach Uzaylarında Diziler ve Seriler kısmı hariç, özellikle Evirme ve Basit Bağlantılılık olmak üzere bazı kısımları biraz daha dar tutularak, buna karşın Kompleks Analiz II kitabımıza bıraktığımız Möbius Dönüşümleri dahil edilerek, Kompleks Analiz I'in konuları yazar tarafından Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde yıllarca, haftalık 4 saat ders+2 saat uygulama olmak üzere, genellikle dördüncü yarıyılda işlenmiştir.

Kitabın hazırlanışında kavramlara ve tek türlü anlaşılırlığa önem verilmiş, bu nedenle her kavram ilk karşılaştığımız yerde koyu yazılmıştır. Tek türlü anlaşılırlık beraberinde im fazlalığını getirir; bunu göze aldık ve bunun “okur neyin kastedildiğini anlar” türünden bir yaklaşımdan daha iyi olduğunu düşünüyoruz. Fizik ve mühendislik bilimleri öğrencilerini de gözeterek beşinci bölümde Kompleks Analiz I için gerekli önbilgiler verilmiştir.

Kompleks Analiz kitaplarının yayınında yirminci yüzyılın ikinci yarısının başlarında bir azalma görülse de, bu yarının sonlarından itibaren bir tırmanış görülmektedir. Okura seçenekler sunmak için, kitabın sonunda verdiğimiz kaynakça listesini geniş tutup, kullandığımız kaynaklar dışında, bu kitapta kullanılmamış bazılarını da verdik. Kaynaklardan Goursat [28], Osgood [47] ve Carathéodory [13], [14] eski klasikler, Hurwitz-Courant [33], Saks-Zygmund [56], Behnke-Sommer [7] ve Ahlfors [1] klasikler olarak adlandırılabilir. Biz kitabımızda bu klasikler dışında en çok özellikle Conway [16], Fischer-Lieb [22], Gamelin [26], Grauert [30], Remmert [51], [52] ve Tauvel [61]'den yararlandık. Ayrıca problemlerin hazırlanmasında kaynakçalarda verilen problem kitaplarından da yararlanılmıştır. Kitabımızda kanıtı verilmeyen teoremler bir elin parmağını geçmez. Yalnızca onlar için kaynaklara atıf yapılmıştır.

Bu kitapta kullandığımız kısaltmalar şunlardır: a ve b terimler olmak üzere $a := b$ ve $b =: a$ gösterimleri a teriminin tanım gereği b terimine eşit olduğunu belirtir. p ve q önermeler olmak üzere $p :\Longleftrightarrow q$ ve $q \Longleftrightarrow: p$ gösterimleri p önermesinin q önermesine tanım gereği denk olduğunu söyler; burada p önermesi q üzerinden tanımlanan yeni bir kavram içerir. $\overset{*}{\Longrightarrow}$, $\overset{*}{\Longleftrightarrow}$ ve $\overset{*}{=}$ gösterimlerinde $*$, eğer ayrıca tanımlanmamışsa söz konusu çıkarım, denklik ve eşitliğin gerekçesini belirtir. Ayrıca "dd.=diğer deyişle" ve Kompleks Analiz II kitabımız için "KA II" kısaltmaları kullanılmıştır.

İki kişiye minnet borcum var: Yalnızca kitaptaki tüm şekilleri çizmekle ve kitabın formatlanmasını sağlamakla kalmayıp, kitabı baştan sona titiz bir şekilde gözden geçiren, eleştiri ve önerileriyle büyük katkı sağlayan oğlum ve meslektaşım Kemal Ilgar ile, sağladığı huzurlu çalışma ortamı ve görevlerimin çoğunu üstlenerek bana kazandırdığı fazladan zaman için eşim Yıldız'a sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak, hem kitaptaki düzeltmelere olan katkıları, hem de basım ve dağıtımındaki desteklerinden ötürü Ali Nesin'e ve Nesin Yayıncılık'a da ayrıca teşekkür ederim.

Mehmet Sait Eroğlu

1. $\mathbb{C}$'de Analiz: Weierstrass Yaklaşımı

Uzlaşma: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ sırasıyla doğal sayıların, tam sayıların, rasyonel sayıların, gerçel sayıların ve (aşağıda tanımlayacağımız) kompleks sayıların kümeleri olmak üzere, $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve $\mathbb{C}_{-\pi} := \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ olacaktır. Ayrıca, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, $\mathbb{D}^* := \mathbb{D}\backslash\{0\}$, $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z > 0\}$, $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z < 0\}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$ ve $\mathbb{H}^- := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z < 0\}$ olarak tanımlanmıştır.

1.1 $\mathbb{C}$ Cismi

Reel 2-boyutlu $\mathbb{R}^2$ vektör uzayımızı, bu yapıyı koruyarak, uygun işlemlerle bir cisim yapacağız. Toplama işlemimiz şimdiden var. $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \tag{1.1}$$

olduğunu anımsatalım.

Teorem 1.1.1. *$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ kümesi, her $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2,\ k = 1, 2$ için*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ z_1 \cdot z_2 &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan işlemlere göre bir değişmeli cisimdir.

Kanıt. Ödev. □

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cisminden söz ederken yalın olarak $\mathbb{C}$ cismi diyeceğiz. $z_1 \cdot z_2$ yerine yine yalın olarak z_1z_2 yazacağız. $\mathbb{C}$ cismine **kompleks** (**karmaşık**) **sayılar cismi** ve ögelerine **kompleks** (**karmaşık**) **sayılar** diyeceğiz. Her $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ için $-z = (-x, -y)$ ve $z \neq (0, 0)$ ise

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

olduğunu belirtelim.

Okur, $\widetilde{\mathbb{R}} := \{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin $\mathbb{C}$'nin bir alt cismi olduğunu ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\psi(x) := (x,0)$ ile tanımlanan $\psi : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümünün bir gömme olduğunu, dd. birebir ve her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$ ve $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ olduğunu kolayca görebilir. Bu nedenle, x gerçel sayısı ile $\tilde{x} := (x,0)$ kompleks sayısını, dolayısıyla $\mathbb{R}$ ile $\widetilde{\mathbb{R}}$'yi özdeş kılarak, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar cismini $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cisminin alt cismi olarak düşünebiliriz. Gösterimi yalınlaştırmak içinse $\tilde{x} = (x,0)$ kompleks sayısı yerine x yazmayı yeğleyeceğiz. Tanımlanan işlemlerle $\mathbb{C}$ bir yandan 2 boyutlu bir $\mathbb{R}$-vektör uzayıdır, diğer yandan her cisim gibi kendi üzerinden 1 boyutlu bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır; kısaca $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ ve $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. Yukarıdaki ψ gömmesinden dolayı $\mathbb{C}$-doğrusal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümleri aynı zamanda $\mathbb{R}$-doğrusal dönüşümlerdir; ancak bunun tersi doğru değildir. Biraz ileride bir örneğini vereceğiz.

$i := (0,1)$ olmak üzere, her $z = (x,y)$ kompleks sayısı (1.1)'den dolayı *tek bir biçimde*

$$z = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$$

şeklinde yazılabilir. $\operatorname{Re} z := x$ ve $\operatorname{Im} z := y$ sayılarına sırasıyla z kompleks sayılarının **gerçel** ve **sanal kısımları** denir.

Not 1.1.2. Altkısım 1.7.1'de herhangi bir geometrik argümana dayanmadan tümüyle analitik argümanlarla trigonometrik fonksiyonları ve onların bilinen özelliklerini, π sayısını ve $\ln x$ logaritma fonksiyonunu ve açıları sıfırdan kazanacağız. Ancak o ana kadar geometrinin görsel desteğinden tümüyle yoksun kalmamak için kısaca şunu belirtmekle yetinelim: (x,y) noktasının kutupsal koordinatları (r,φ) ise $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ olur. Burada $r = ||z|| = \sqrt{x^2+y^2}$, ancak φ tek olarak belirli değildir; φ yerine herhangi bir $k \in \mathbb{Z}$ ile $\varphi + 2k\pi$ alınabilir. $n = 1,2$ için $z_n = r_n(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)$ ise, $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ eşitliğini kanıtlamayı okura bırakıyoruz. Elbette bunun bir sonucu

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ ise } z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

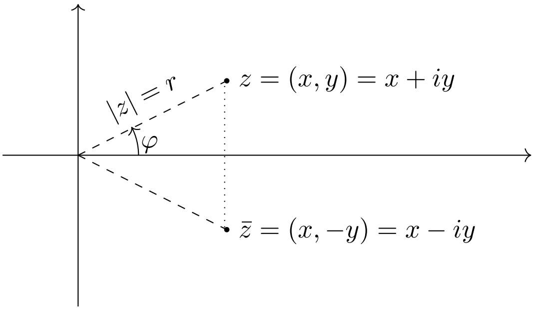
(**De Moivre Formülü**) eşitliğidir. Bu formülü okur elbette reel analiz bilgileriyle gösterecektir, ancak biz onu reel analize başvurmadan çok kolay elde edeceğiz (bkz. (1.39)).

$i^2 = -1$ olduğundan, i sayısı $x^2 = -1$ denkleminin $\mathbb{C}$ cisminde bir çözümüdür. Böylece, $\mathbb{R}$ cismini bir altcisim olarak içen $\mathbb{C}$ cisminde $x^2 + 1 = 0$ denkleminin bir çözümü vardır. $\mathbb{C}$ cismi, bir eşyapı dışında, bu özelliklere sahip en dar cisimdir (bkz. Problem 1.1.1). $\mathbb{C}$ cismi, $\mathbb{R}$ cisminin sahip olmadığı bir özelliğe sahiptir: $\mathbb{C}$ cismi cebirsel kapalıdır, dd. *kompleks katsayılı her polinomun* $\mathbb{C}$*'de kökü vardır.* Cebirin Anateoremi adını taşıyan bu önermenin birden fazla kanıtını vereceğiz.

$z = x + iy$ kompleks sayısını x-ekseninde yansıtarak elde ettiğimiz $\overline{z} := x - iy$ kompleks sayısına z kompleks sayısının **eşleniği** denir.

Önerme 1.1.3. *Her* $z, w \in \mathbb{C}$ *için*

(i) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,



Şekil 1.1

(ii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ *ve* $\overline{\overline{z}} = z$,

(iii) $w \neq 0$ *ise* $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

Kanıt. Doğrudan tanımlardan çıkarlar. □

Tanım 1.1.4. Her $z = x + iy$ için $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ sayısına z kompleks sayısının **mutlak değeri** denir.

Her $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ için $|z|$ mutlak değeri $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ **Öklid normu**dur. $\mathbb{C}$'yi herhangi bir şey belirtmeden metrik uzay olarak ele aldığımızda bu metrik daima $z_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2$ için

$$d(z_1, z_2) := |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

olarak tanımlanan **Öklid metriği** olacaktır. $|z|$, Öklid normundan başka bir şey olmadığından, aşağıdaki önermenin kanıtı atlanabilir. Bu norma gönderme yapmadan da kanıt basittir. Tanımdan $|\overline{z}| = |z|$ olduğu apaçıktır.

Önerme 1.1.5. *Her* $z, w \in \mathbb{C}$ *için*

(i) $|z| \geq 0$ *ve* $|z| = 0 \iff z = 0$,

(ii) $|zw| = |z|\,|w|$,

(iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$,

(iv) $||z| - |w|| \leq |z - w|$,

(v) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

Kanıt. (i) ve (v) apaçıktır. (iv) ise (iii)'ten gerçel sayılarda olduğu gibi elde edilir. Bu nedenle, salt (ii) ve (iii)'ü kanıtlayacağız. (ii) doğrudan

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z|\,|w|$$

eşitliklerinden çıkar. (iii) ise (ii) ve (1.1.3)(i) ile

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})\\ &= z\overline{z}+z\overline{w}+\overline{z}w+w\overline{w} = |z|^2+2\operatorname{Re} z\overline{w}+|w|^2\\ &\leq |z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2 = |z|^2+2|z||\overline{w}|+|w|^2\\ &= |z|^2+2|z||w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

eşitsizliğinden çıkar. □

(i), (ii) ve (iii) bize $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ dönüşümünün bir **değerlendirme** olduğunu söyler; bu ise $\mathbb{R}$'nin değerlendirmesini $\mathbb{C}$'ye genişletir. $\mathbb{R}$'de olduğu gibi $\mathbb{C}$'de de her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu göreceğiz. Böylece $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ **tam değerlendirilmiş**lerdir. Bir $\mathbb{K}$ cismindeki herhangi bir $|\cdot|$ değerlemesine, her $x \in \mathbb{K}$ için $|x| < |n \cdot 1|$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}^*$ doğal sayısı bulunabiliyorsa **arşimediktir** denir. Tam değerlendirilmiş birçok cisim olmasına karşın, bir eş-yapı dışında, *yalnızca* $\mathbb{R}$ *ve* $\mathbb{C}$ *cisimleri tam ve arşimedik değerlendirilmişlerdir* (Ostrowski).

Not. Herhangi bir $\mathbb{K}$ sıralı cisminde $-1 < 0$ ve her $0 \neq x \in \mathbb{K}$ için $x^2 > 0$ olur. Ancak, $\mathbb{C}$ cisminde $i^2 = -1$ olduğundan, $\mathbb{C}$ *cismi asla bir sıralanmış cisim yapılamaz*!

Önerme 1.1.5(iv)'ten dolayı $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mutlak değer fonksiyonu süreklidir. Toplama ve çarpma işlemlerimizin geometrik yorumunu verelim: $z = (x, y)$ ve $w = (u, v)$ kompleks sayılarının toplamı bunların $\mathbb{R}^2$ vektör uzayındaki toplamları olduğu için geometrik yorumları apaçıktır. Şimdi $\alpha = (a, b)$ kompleks sayısı ile $z = (x, y)$ kompleks sayısının çarpımını geometrik olarak yorumlayalım: $L_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü $L_\alpha(z) = \alpha z$ olarak tanımlansın. L_α dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusal olduğundan, elbette $\mathbb{R}$-doğrusaldır. $L_\alpha(x, y) = (ax - by, bx + ay)$ olduğundan $L_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünün, her iki tarafta da seçilen e_1, e_2 standart bazına göre matris gösterimi, vektörler sütun olarak yazılmak üzere,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}$$

olur. $\alpha \neq 0$ durumunda $a_* := a/|\alpha|$ ve $b_* := b/|\alpha|$ olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = |\alpha|\begin{pmatrix} a_* & -b_* \\ b_* & a_* \end{pmatrix} = |\alpha|\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = |\alpha|\, D(\theta)$$

ve θ ise, $[0, 2\pi)$ aralığında $a_* = \cos\theta$ ve $b_* = \sin\theta$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli açıdır[1]. Analitik geometriden bilindiği gibi $D(\theta)$ matrisi bir $z = (x, y)$

[1] Gerçel analizde, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a^2 + b^2 = 1$ ise, $a = \cos\theta$ ve $b = \sin\theta$ olacak biçimde bir tek $\theta \in (-\pi, \pi]$ olduğu kanıtlanır. Bunu Önsav 1.7.6'da ayrıca kanıtlayacağız.

vektörünü saatin ters yönünde, ki buna **pozitif yön** de denir, θ kadar döndürür[2]. Sonuçta αz çarpımı z vektörünü θ kadar döndürüp sonra $|\alpha|$ kadar genleştirir; daha doğrusu bu $|\alpha| > 1$ için bir germe, $|\alpha| < 1$ içinse bir sıkıştırmadır. Bu tür dönüşümlere **dönsıkger** dönüşümler diyelim. Özel olarak $\alpha = i$ alırsak, $z \mapsto iz$ dönüşümünün matrisi $D(\pi/2)$ olur, dd. bir z kompleks sayısını i ile çarpmak z vektörünü saatin ters yönünde $\pi/2$ kadar döndürmekten ibarettir.

Diğer yandan, $\mathbb{C}$-doğrusal herhangi bir $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü için $\alpha := L(1)$ olmak üzere, $L(z) = L(z \cdot 1) = zL(1) = \alpha z = L_\alpha(z)$ olur. Bu ise, L'nin standart tabana göre matrisinin $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ tipinde olduğunu söyler. Her $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrisine $z = x + iy$ için

$$L_A(z) \equiv L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanan $\mathbb{R}$-doğrusal bir $L_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü karşılık getirilir.

$\mathrm{Id}, \overline{\mathrm{Id}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümleri her $z \in \mathbb{C}$ için $\mathrm{Id}\,(z) := z$ ve $\overline{\mathrm{Id}}\,(z) := \overline{z}$ olarak tanımlansınlar. Id ve $\overline{\mathrm{Id}}$ dönüşümlerinin her ikisi de $\mathbb{R}$-doğrusaldır; buna karşın Id dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusalken $\overline{\mathrm{Id}}$ dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusal değildir. Örneğin her $z \in \mathbb{C}$ için $\overline{\mathrm{Id}}(iz) = -i\overline{\mathrm{Id}}(z)$ olur! Okur izleyen önermeleri kolayca kanıtlayabilir:

Önerme 1.1.6. *Bir $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümünün $\mathbb{R}$-doğrusal olması için gerek ve yeter koşul, $\alpha = \frac{1}{2}(L(1) - iL(i))$ ve $\beta = \frac{1}{2}(L(1) + iL(i))$ olmak üzere, her $z = x + iy$ için*

$$L(z) = L(1)x + L(i)y = \alpha z + \beta\,\overline{z} = \alpha \mathrm{Id}(z) + \beta\,\overline{\mathrm{Id}}(z)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.[3]

Önerme 1.1.7. *$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ verildiğinde $L_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümünün $\mathbb{C}$-doğrusal olması için gerek ve yeter koşul, $c = -b$ ve $d = a$, bir diğer deyişle $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ olmasıdır.*

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ vektör uzayında $z_k = x_k + iy_k, k = 1, 2$ vektörlerinin $1, i$ tabanına göre *öklidik iç çarpımlarının*

$$\langle z_1, z_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}) = \mathrm{Re}(z_2 \overline{z_1}) = \langle z_2, z_1 \rangle$$

[2]"Saatin ters yönü" elbette matematiksel bir kavram değildir. Akrep ve yelkovanlı saatler tarihe karıştığında yalnızca dijital saatle tanışan biri için "saatin ters yönü" hiçbir anlam taşımaz! Bu kavramın matematiksel tanımları için önbilgilerde 5.3.2 altkısmına veya Tanım 2.11.11'e bakınız.

[3]α ve β'nın ifadelerini (1.8) ve (1.9) denklemleriyle karşılaştırınız.

olduğu kolayca görülür. Her $z \in \mathbb{C}^*$ için, $\langle z, iz\rangle = \mathrm{Re}(z\overline{iz}) = \mathrm{Re}(-i|z|^2) = 0$ olduğundan, z ve iz daima birbirine diktirler. Doğrudan hesaplamayla

$$\forall w, z \in \mathbb{C} \text{ için } \ \langle w, z\rangle^2 + \langle iw, z\rangle^2 = |w|^2|z|^2$$

olduğu görülür ve buradan

$$|\langle w, z\rangle| \le |w||z|, \qquad \text{(Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)}$$
$$|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2\langle w, z\rangle \qquad \text{(Kosinüs Teoremi)}$$

bağıntıları elde edilir. Dolayısıyla, her $w, z \in \mathbb{C}^*$ için, *tek* olarak belirli bir $\varphi \in [0, \pi]$ ile

$$\cos\varphi = \frac{\langle w, z\rangle}{|w||z|}$$

olur. Bu açı $\sphericalangle(w, z)$ ile gösterilir (bkz. Altkısım 5.4.2). Tanım gereği daima $\sphericalangle(w, z) = \sphericalangle(z, w)$. İleride bu iki vektör arasında $\measuredangle(w, z)$ ile göstereceğimiz bir yönlenmiş açı tanımlayacağız; ancak bu kez $\measuredangle(w, z) = -\measuredangle(z, w)$ olacaktır!

Teorem 1.1.8 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)**.** *Her $z_1, \dots, z_n$ ve her $w_1, \dots, w_n$ kompleks sayıları için*

(i) $|\sum_{i=1}^n z_i w_i|^2 \le \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)$,

(ii) $|\sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}|^2 \le \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)$.

Kanıt. $|w_i| = |\overline{w_i}|$ olduğundan, (ii) doğrudan (i)'den çıkar. Şimdi (i)'i kanıtlayalım: $w_1 = \cdots = w_n = 0$ ise, (i)'in her iki yanı da 0 olur ve sav doğrudur. Şimdi en az bir i için $w_i \neq 0$ olsun. Bu durumda $B := \sum_{i=1}^n |w_i|^2 > 0$ olur. $A := \sum_{i=1}^n |z_i|^2$ ve $C := \sum_{i=1}^n z_i w_i$ olsun. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için, işlemler yapıldığında,

$$0 \le \sum_{i=1}^n |z_i - \lambda\overline{w_i}|^2 = A + |\lambda|^2 B - 2\,\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}C$$

olduğu görülür. Özel olarak $\lambda = C/B$ seçilirse,

$$0 \le A - \frac{|C|^2}{B} \overset{B>0}{\Longrightarrow} |C|^2 \le AB$$

elde edilir. Bu ise aranan eşitsizliktir. □

ℂ **Cisminin Tekliği**: Bir ℝ-vektör uzayı olan $\mathbb{R}^2$'de bir çarpım işlemi tanımlayarak bir ℂ cismine ulaştık. $r \in \mathbb{R}$ ile bir $z = (x, y)$ vektörü arasındaki çarpım $r \cdot (x, y) = (rx, ry)$ olarak tanımlanmıştır. r gerçel sayısını $(r, 0)$ kompleks sayısı olarak ℂ'ye gömdük. Çarpımları birbirinden ayırt etmek için ℂ'deki çarpımı geçici olarak $\bullet$ ile gösterirsek,

$$r \cdot (x, y) = (rx, ry) = (r, 0) \bullet (x, y)$$

olur, dd. $\mathbb{R}$ cismi $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ cismine öyle gömülmüştür ki, vektör uzayındaki skalarla çarpım, cisimdeki çarpıma eşittir. Şimdi bir **(K)** koşulunu şöyle tanımlayalım:

(K) *$n > 1$ için $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında bir çarpım tanımlayarak bir $\mathbb{K}$ cismi oluşturun öyle ki bu cisim $\mathbb{R}$ cismini bir altcisim olarak içersin ve bir $r \in \mathbb{R}$ skalarının bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü ile çarpımı, $\mathbb{K}$ cismindeki çarpımlarına eşit olsun.*

Aşağıdaki teoremler geçerlidir:

Teorem 1.1.9. *$\mathbb{R}^2$'de* **(K)** *koşulunu sağlayan her $\mathbb{K}$ cismi $\mathbb{C}$ ile eş yapılıdır.*

Teorem 1.1.10. *$n > 1$ için $\mathbb{R}^n$,* **(K)** *koşulunu sağlayan bir $\mathbb{K}$ cismi yapılabiliyorsa $n = 2$'dir.*

Bunların zor olmayan kanıtları için [17]'ye bakabilirsiniz. Bu teoremlerde önemli olan **(K)** koşuludur; yoksa her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\mathbb{R}^n$, gücü $\mathfrak{c}$ olan her X kümesi gibi, ister $\mathbb{R}$, ister $\mathbb{C}$ ile eşyapılı bir cisim yapılabilir.

Problemler

Problem 1.1.1. $\mathbb{K}, \mathbb{K}_1$ ve $\mathbb{K}_2$ cisimleri $\mathbb{R}$'yi altcisim olarak içeren değişmeli cisimler olsunlar; θ, θ_1 ve θ_2 ise bu cisimlerde $x^2+1=0$ denkleminin birer çözümü olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

(i) $\mathbb{C}_\theta := \{x + \theta y \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{K}$ bir altcisimdir; hem de $\mathbb{K}$'nin $\mathbb{R} \cup \{\theta\}$'yı içeren en dar altcismidir.

(ii) $\mathbb{C}_{\theta_1}$ ve $\mathbb{C}_{\theta_2}$ cisimleri eşyapılıdır.

Problem 1.1.2. $\mathbb{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ kümesinde $+$ ve $\circ$ işlemleri matrisler için toplama ve çarpma olmak üzere, $(\mathbb{K}, +, \circ)$ cisminin $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cismi ile eşyapılı olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.3. $\mathbb{R}[x]$ halkasında $p(x) = x^2 + 1$ polinomunun ürettiği ideal $\mathfrak{p}$ ise, $\mathbb{R}[x]/\mathfrak{p}$ cisminin $\mathbb{C}$ ile eşyapılı bir cisim olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.4. $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ olmak üzere, $(\mathbb{S}, \cdot)$ cisminin $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ cisminin bir altgrubu olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.5. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekli ve her $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \text{ ve } f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$$

ise, ya $f \equiv 0$, ya $f = \mathrm{Id}$ ya da $f = \overline{\mathrm{Id}}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.6. Her $z \in \mathbb{C}$ için $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|) \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.7. $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ve $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ için

$$|a_1 + \cdots + a_n| = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

ancak ve ancak 0'dan farklı a_i, a_j sayıları için $\frac{a_i}{a_j} \geq 0$ ise doğrudur, gösteriniz.

Problem 1.1.8. i^n $(n \in \mathbb{N})$, $(1+i2)^3$, $\frac{5}{-3+i4}$, $\left(\frac{2+i}{3-i2}\right)^2$ ve $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ için $\frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$, $\frac{z-1}{z+1}$ $(z \neq -1)$ ve z^4 sayılarının gerçel ve sanal kısımlarını hesaplayınız.

Problem 1.1.9. Her $a, w, z \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

(i) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Bu eşitliği geometrik olarak yorumlayınız.

(ii) $\langle w, z\rangle^2 + \langle iw, z\rangle^2 = |w|^2|z|^2$. Buradan $|\langle w, z\rangle| \leq |w||z|$ Cauchy-Schwarz eşitsizliğini elde ediniz.

(iii) $\langle az, aw\rangle = |a|^2 \langle z, w\rangle$ ve $\langle \overline{z}, \overline{w}\rangle = \langle z, w\rangle$.

Problem 1.1.10. Özel olarak $z^2 = i$ ve $z^2 = -i$ denklemlerinin çözümlerini bulunuz. Genel olarak $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z^2 = a + ib$'nin çözümlerini bulunuz.

Problem 1.1.11. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ denkleminin $\mathbb{C}$ cisminde çözülebilir olduğunu gösteriniz ve kökleri bulunuz.[4] Özel olarak $z^2 - 3z - 10i = 0$ ve $z^2 + 2iz + 3 = 0$ denklemlerini çözünüz.

Problem 1.1.12. $\alpha, \beta, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z = \alpha + i\beta$ sayısı

$$a_4 z^4 + i a_3 z^3 + a_2 z^2 + i a_1 z + a_0 = 0$$

denkleminin bir çözümüyse, bu denklemin α, β sayılarını kullanan ikinci bir çözümünü bulunuz.

Problem 1.1.13. $a, b \in \mathbb{C}$ ve $b \neq 0$ olsun. Bu durumda, $L := \{z \mid \operatorname{Im} \frac{z-a}{b} = 0\}$ kümesinin a noktasından b yönünde geçen doğru, $H_L^+ := \{z \mid \operatorname{Im} \frac{z-a}{b} > 0\}$ ve $H_L^- := \{z \mid \operatorname{Im} \frac{z-a}{b} < 0\}$ kümelerinin ise sırasıyla b yönünde baktığımızda L'nin solunda ve sağında kalan yarıdüzlemler olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.14. Öklid düzleminde $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}\right\}$ ve $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}\right\}$ kümelerini belirleyiniz.

Problem 1.1.15. $n \in \mathbb{N}^*$ için $z^n = 1$ denkleminin köklerini bulunuz.

Problem 1.1.16. $z \neq 1$ için $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ özdeşliği ve De Moivre Formülü'nden yararlanarak $\varphi \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ için

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\varphi]}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

eşitliğini gösteriniz.

---

[4] İleride, her $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomunun kökleri olduğunu kanıtlayacağız. Burada $\mathbb{C}[z]$ ile **kompleks katsayılı polinomlar halkası** gösterilmiştir.

Problem 1.1.17. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ve $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ise, z_1, z_2 ve z_3 noktalarının bir eşkenar üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.18. Köşeleri z_1, z_2, z_3 noktaları olan üçgenin bir eşkenar üçgen olması için $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ eşitliği gerek ve yeterlidir; gösteriniz.

Problem 1.1.19. $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$ sayıları orijinden geçen bir doğrunun belirlediği iki açık yarıdüzlemden birindeyseler, $\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_n}$ sayılarının da orijinden geçen bir doğrunun belirlediği iki açık yarıdüzlemden birine düştüğünü ve ayrıca $\sum_{i=1}^n z_i \neq 0$ ve $\sum_{i=1}^n z_i^{-1} \neq 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.20. $a, b, c, r \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$ olmak üzere, $ax+by = c$ doğru ve $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ çember denklemlerini, $z = x+iy$ olmak üzere, z ve $\bar{z}$ türünden denklemlere dönüştürünüz.

Problem 1.1.21.

$$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = p, \; p > 0, \; z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \; z_1 \neq z_2$$

denkleminin, $p = 1$ için z_1, z_2 noktalarından geçen doğruya dik olup, bunların orta noktası olan $\frac{z_1+z_2}{2}$'den geçen doğrunun; $p \neq 1$ içinse merkezi $(z_1 - p^2z_2)/(1 - p^2)$ ve yarıçapı $\left|(z_1 - z_2)p/(1 - p^2)\right|$ olan bir çemberin denklemi olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.22. $a, b \in \mathbb{C}$ sabit verilmiş kompleks sayılar ve $r > 0$ için

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| + |z - b| = r\} \text{ ve } B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| - |z - b| = r\}$$

kümelerini belirleyip geometrik adlarını söyleyiniz.

Problem 1.1.23. $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere, her $z \in \mathbb{S}$ için $1 - \bar{a}z \neq 0$ ise, $\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.24. $z, a \in \mathbb{C}$ ve $\bar{z}a \neq 1$ ise $T_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{z}a}$ olmak üzere, her $z, a \in \mathbb{D}$ için $T_a(z) \in \mathbb{D}$ ve ayrıca $z \in \mathbb{S}$ veya $a \in \mathbb{S}$ ise, $T_a(z) \in \mathbb{S}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.1.25. (1.1.6) ve (1.1.7) önermelerinin kanıtlarını veriniz.

Problem 1.1.26. $a \in \mathbb{C}^*$ için $\ell : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü $\ell(z) = az + b$ olarak tanımlansın. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

(i) ℓ'nin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul $|a| = 1$ olmasıdır.

(ii) ℓ bir izometri ve $a \neq 1$ ise, bir tek c sabit noktası olduğunu ve her z için $\ell(z) - c = a(z - c)$ olduğunu kanıtlayınız. İleride bunun c etrafında bir dönme anlamına geldiğini göreceğiz.

1.2 Süreklilik ve Türev

Çalışma alanımız Öklid metriği ile alınmış $\mathbb{C}$ uzayımızdır. Metrik uzaylara ilişkin kullanacağımız kavram ve teoremler için Kısım 5.2.2'ye bakabilirsiniz.

$a, b \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ gerçel sayısı için

$$\begin{aligned} D_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}, \; D_r^*(a) := D_r(a) \backslash \{a\}, \\ \overline{D}_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}, \\ C_r(a) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}, \\ [a, b] &:= \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansınlar. $D_r(a), \overline{D}_r(a), C_r(a)$ ve $[a, b]$ kümelerine sırasıyla a **merkezli** r **yarıçaplı açık daire, kapalı daire, çember** ve ab-**kapalı aralığı** denir. $D_r^*(a)$'ya **delinmiş daire** de denir. Burada eğer $a = 0$ ise, ilk üçünün yerine çoğu zaman yalın olarak D_r, C_r ve $\overline{D}_r$ yazacağız. Genelde $U \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, $f : U \to \mathbb{C}$ veya $u : U \to \mathbb{R}$ gibi fonksiyonları inceleyeceğiz. Bu nedenle, fonksiyonlarımızın tanım ve değer bölgeleri metrik uzaylar olacaklar.

Tanım 1.2.1. $U \subset \mathbb{C}$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun.

(i) $a \in \mathbb{C}$ noktası U kümesinin bir yığılma noktası ve $b \in \mathbb{C}$ olsun. Ancak ve ancak aşağıdaki koşul sağlandığında f fonksiyonunun a **noktasında limiti** vardır ve **limiti** b'dir denir:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall z \in U \;\; (0 < |z - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(z) - b| < \varepsilon).$$

Bu durumda $\lim_{z \to a} f(z) = b$ yazılır.

(ii) $a \in U$ olsun. Ancak ve ancak aşağıdaki koşul sağlandığında f fonksiyonu a **noktasında süreklidir** denir:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall z \in U \; (|z - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(z) - f(a)| < \varepsilon).$$

Eğer f fonksiyonu her $a \in U$ noktasında sürekli ise, U **kümesinde süreklidir** denir.

Limit varsa tektir (bkz. s. 371). Eğer $a \in U$ noktası U'nun bir yığılma noktası ise, f fonksiyonun a noktasında sürekli olması $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$ olmasına denktir. Diğer yandan, f fonksiyonu U kümesinin her ayrık noktasında süreklidir.

Her $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ ve $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$ olmak üzere, tek olarak belirli iki $u, v : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu karşılık getirilir. Bu durumda biz $f = u + iv$ yazacağız ve bir f fonksiyonu için böyle yazdığımızda hep $u = \operatorname{Re} f$ ve $v = \operatorname{Im} f$ olduğu, söylenmese de, varsayılacaktır.

Önerme 5.2.5 ve Önerme 1.1.5(v)'in doğrudan bir sonucu aşağıdaki önermedir:

Önerme 1.2.2. *$f = u + iv : U \to \mathbb{C}$, a ise U'nun bir yığılma noktası ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun.*

(i) $\lim_{z\to a} f(z) = \alpha \iff \lim_{z\to a} u(z) = \operatorname{Re}\alpha$ *ve* $\lim_{z\to a} v(z) = \operatorname{Im}\alpha$.

(ii) *Ayrıca, $a \in U$ ise, f fonksiyonunun a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul u ve v fonksiyonlarının a noktasında sürekli olmasıdır.*

Önerme 1.2.3. *$f, g : U \to \mathbb{C}$ ve $\lim_{z\to a} f(z) = \alpha$ ve $\lim_{z\to a} g(z) = \beta$ olsun. Bu durumda $\lim_{z\to a}(f \pm g)(z) = \alpha \pm \beta$ ve $\lim_{z\to a}(fg)(z) = \alpha\beta$ olur. Eğer ayrıca $\beta \neq 0$ ise, $\lim_{z\to a}(f/g)(z) = \alpha/\beta$ olur.*

Sonuç 1.2.4. *f, g fonksiyonları a noktasında sürekliyseler, $f \pm g$ ve fg fonksiyonları da a noktasında süreklidir. Eğer ayrıca $g(a) \neq 0$ ise, f/g fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt. Gerçel analizdeki gibi kanıtlanır. □

$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sürekli olduğundan, $f : U \to \mathbb{C}$ sürekliyse, iki sürekli fonksiyonun bileşimi olarak $|f| : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da süreklidir. Basit ancak yararlı bir önermemiz şudur:

Önerme 1.2.5. *a noktası U kümesinin bir yığılma noktası ve f ve g fonksiyonları $U\setminus\{a\}$ kümesinde tanımlı olsunlar. $\lim_{z\to a} f(z) = 0$ ve g fonksiyonu bir $R > 0$ için $U \cap D_R^*(a)$ kümesinde sınırlıysa, $\lim_{z\to a} f(z)g(z) = 0$.*

Kanıt. Koşulumuzdan bir $M > 0$ ile, her $z \in U \cap D_R^*(a)$ için $|g(z)| < M$. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\lim_{z\to a} f(z) = 0$ olduğundan, bir $r > 0$ sayısı, her $z \in U \cap D_r^*(a)$ için $|f(z)| < \varepsilon/M$ olacak biçimde vardır. Gerekirse küçülterek $r < R$ alabiliriz. Bu durumda, her $z \in U \cap D_r^*(a)$ için $|f(z)g(z)| < \varepsilon$ olur. Böylece $\lim_{z\to a} f(z)g(z) = 0$ elde edilir. □

Kompleks türevlenebilmeyi tanımlamadan önce, Önbilgiler bölümünde Altkısım 5.3.1'de verdiğimiz $\mathbb{R}$-türevlenebilmeyi kompleks sayı dilinde yeniden yazalım: $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme $f : U \to \mathbb{C}$ ve $z_0 \in U$ olsun. $u := \operatorname{Re} f$ ve $v := \operatorname{Im} f$ olsun. f fonksiyonun z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olmasının u ve v fonksiyonlarının z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olmasına denk olduğunu biliyoruz.

Teorem 1.2.6. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $z_0 \in U$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdirler:*

(i) $\operatorname{Re} f$ *ve* $\operatorname{Im} f$ *fonksiyonları z_0'da $\mathbb{R}$-türevlenebilirler.*

(ii) *f fonksiyonu z_0'da $\mathbb{R}$-türevlenebilir.*

(iii) *Tek olarak belirli $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sayıları ve U'da tanımlı, z_0 noktasında sürekli ve $\varepsilon(z_0) = 0$ olan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, her $z \in U$ için*

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \beta(\overline{z} - \overline{z_0}) + |z - z_0|\,\varepsilon(z) \tag{1.2}$$

olacak biçimde vardır. $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \alpha$ ve $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \beta$ olarak tanımlanır.

(iv) *z_0'da sürekli $f_1, f_2 : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları her $z \in U$ için*

$$f(z) = f(z_0) + f_1(z)(z - z_0) + f_2(z)(\overline{z} - \overline{z_0}) \tag{1.3}$$

olacak biçimde vardır. Ayrıca, $f_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $f_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$.

(v) *z_0'da sürekli $g_1, g_2 : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları her $z \in U$ için*

$$f(z) = f(z_0) + g_1(z)(x - x_0) + g_2(z)(y - y_0) \tag{1.4}$$

olacak biçimde vardır. Ayrıca, $g_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ ve $g_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Kanıt. $(i) \iff (ii)$ önbilgilerde gösterildi.

$(ii) \implies (iii)$: Tanım gereği f fonksiyonunun z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olması z_0 noktasında sürekli olup 0 değerini alan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ile

$$f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + \|z - z_0\|\, \varepsilon(z) \tag{1.5}$$

olmasıdır (bkz. 5.3.1). Burada $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir $\mathbb{R}$-doğrusal dönüşümdür. Dolayısıyla

$$L(z - z_0) = L\left((x - x_0) + i(y - y_0)\right) = (x - x_0)L(1) + (y - y_0)L(i)$$

Ancak 1 ve i kompleks sayılarımız $\mathbb{R}^2$ uzayımızda $e_1 = (1, 0)$ ve $e_2 = (0, 1)$ vektörlerine karşılık geldiğinden, (1.5) denklemi,

$$L(1) = L(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) =: f_x(z_0) \text{ ve } L(i) = L(e_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) =: f_y(z_0)$$

ve $|z - z_0| = \|z - z_0\|$ olduğunu da gözetirsek,

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) + |z - z_0|\varepsilon(z) \tag{1.6}$$

şeklini alır. Bu denklemde $x - x_0$ yerine $\frac{1}{2}\left[(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}\right]$ ve $y - y_0$ yerine $\frac{1}{2i}\left[(z - z_0) - \overline{(z - z_0)}\right]$ yazarsak,

$$\alpha := \frac{1}{2}\left(L(1) - iL(i)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) =: \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$
$$\beta := \frac{1}{2}\left(L(1) + iL(i)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) =: \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$$

olmak üzere, (1.2)'yi elde ederiz. Böyle bir gösterimde α ve β sayılarının tekliğini görmeyi ödev olarak bırakıyoruz.

$(iii) \implies (iv)$: (1.2) sağlansın. $f_2(z) \equiv \beta$ ve

$$f_1(z) := \begin{cases} \alpha, & z = z_0 \\ \alpha + \frac{|z-z_0|}{z-z_0}\varepsilon(z), & z \in U\backslash\{z_0\} \end{cases}$$

olsun. Bu tanımlarla (1.3) sağlanır; f_1, f_2 fonksiyonları z_0 noktasında sürekli ve $f_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $f_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$.

$(iv) \implies (v)$: (1.3)'te $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$ ve $\overline{z} - \overline{z_0} = (x - x_0) - i(y - y_0)$ yazarsak, $g_1 = f_1 + f_2$ ve $g_2 = i(f_1 - f_2)$ olmak üzere, (1.4) elde edilir. Savın kalanı tanımlardan apaçıktır.

$(v) \implies (i)$: (1.4) geçerli olsun. $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$, $u_k := \operatorname{Re} g_k$ ve $v_k := \operatorname{Im} g_k$ olmak üzere, (1.4)'ten

$$\begin{aligned} u(z) &= u(z_0) + u_1(z)(x - x_0) + u_2(z)(y - y_0), \\ v(z) &= v(z_0) + v_1(z)(x - x_0) + v_2(z)(y - y_0) \end{aligned} \tag{1.7}$$

elde ederiz. u_k ve v_k fonksiyonları z_0 noktasında süreklidirler. $a_k := u_k(z_0)$ olmak üzere, $\varepsilon_k(z) := u_k(z) - a_k$ fonksiyonları z_0 noktasında sürekli ve 0 değerini aldıklarından,

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} 0, & z = z_0 \\ \frac{x-x_0}{\|z-z_0\|}\varepsilon_1(z) + \frac{y-y_0}{\|z-z_0\|}\varepsilon_2(z), & z \in U\backslash\{z_0\} \end{cases}$$

fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir ve (1.7)

$$u(z) = u(z_0) + a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + \|z - z_0\|\,\varepsilon(z)$$

şeklini alır ki bu, u fonksiyonunun z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olması demektir. v fonksiyonunun z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olduğu benzer biçimde kanıtlanır. □

Teoremimizin kanıtında geçen

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \text{ ve} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \tag{1.9}$$

ifadelerine **Wirtinger türevleri** denir. Wirtinger türevleri yalın olarak f_z ve $f_{\overline{z}}$ ile de gösterilir. Bu gösterimle $f_z = 2^{-1}(f_x - if_y)$ ve $f_{\overline{z}} = 2^{-1}(f_x + if_y)$ olur. Bu formülleri anımsamanın kolay yolu z ve $\overline{z}$'ye biçimsel değişkenler olarak bakıp $f(x(z,\overline{z}), y(z,\overline{z}))$'de biçimsel olarak zincir kuralını uygulamaktır. Örneğin

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Her $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna doğal biçimde

$$\overline{f} : U \to \mathbb{C}, \quad \left(z \mapsto \overline{f(z)}\right)$$

ile tanımlanan bir $\overline{f} : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu karşılık gelir.

Teorem 1.2.7 (Wirtinger türevlerinin özellikleri)**.** (i) *Üstte tanımlanan* $\frac{\partial}{\partial z}$ *ve* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ *Wirtinger türev işlemcileri* $\mathbb{C}$*-doğrusaldır; dd.* f *ve* g *fonksiyonları* a *noktasında* $\mathbb{R}$*-türevlenebilir ve* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ise*

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial z}(a) \ ve \ \frac{\partial(\lambda f)}{\partial z}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}(a),$$
$$\frac{\partial(f+g)}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(a) \ ve \ \frac{\partial(\lambda f)}{\partial \overline{z}}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a).$$

(ii) *Çarpım özelliği geçerlidir:* f *ve* g *fonksiyonları* a *noktasında* $\mathbb{R}$*-türevlenebilirse*

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z}(a) = f(a)\frac{\partial g}{\partial z}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial z}(a),$$
$$\frac{\partial(fg)}{\partial \overline{z}}(a) = f(a)\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a).$$

(iii) f *fonksiyonu* a *noktasında* $\mathbb{R}$*-türevlenebilirse* $\overline{f}$ *fonksiyonu da* a *noktasında* $\mathbb{R}$*-türevlenebilir ve*

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a)} \ ve \ \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}. \tag{1.10}$$

(iv) ***(Zincir kuralı)*** $U, V \subset \mathbb{C}$ *açık kümeler,* $a \in U$*,* $b \in V$*,* $f : U \to V$ *fonksiyonu* a *noktasında* $\mathbb{R}$*-türevlenebilir,* $g : V \to \mathbb{C}$ *fonksiyonu* b *noktasında* $\mathbb{R}$*-türevlenebilir ve* $b = f(a)$ *ise*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(a) = \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(b)\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(a), \tag{1.11}$$
$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(b)\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(a). \tag{1.12}$$

Kanıt. Kanıtlar f_x, f_y, g_x, g_y kısmi türevlerin doğrusallığından, çarpım özelliğinden vs. yola çıkılarak verilebilir. Ancak biz Teorem 1.2.6(iv)'ten yararlanacağız ve kanıt daha yalın olacaktır. Örnek olmak üzere, (1.10)'u ve zincir kuralını kanıtlayacağız.

(iii) Teorem 1.2.6(iv)'ten a noktasında sürekli f_1, f_2 fonksiyonları ile

$$f(z) = f(a) + f_1(z)(z-a) + f_2(z)(\overline{z} - \overline{a}).$$

Burada eşleniğe geçersek,

$$\begin{aligned}\overline{f}(z) = \overline{f(z)} &= \overline{f(a)} + \overline{f_1(z)}(\overline{z} - \overline{a}) + \overline{f_2(z)}(z - a) \\ &= \overline{f}(a) + \overline{f_2}(z)(z - a) + \overline{f_1}(z)(\overline{z} - \overline{a})\end{aligned}$$

olur. $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ fonksiyonları a'da süreklidirler; bu savı verir.

(iv) b noktasında sürekli $g_1, g_2 : V \to \mathbb{C}$ fonksiyonları ile her $w \in V$ için

$$g(w) = g(b) + g_1(w)(w - b) + g_2(w)(\overline{w} - \overline{b}) \tag{1.13}$$

ve a noktasında sürekli $f_1, f_2 : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonları ile her $z \in U$ için

$$f(z) = f(a) + f_1(z)(z - a) + f_2(z)(\overline{z} - \overline{a}).$$

(1.13) denkleminde $w = f(z)$ ve $b = f(a)$ alırsak,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(z) = (g \circ f)(a) &+ (g_1 \circ f)(z)\left[f_1(z)(z - a) + f_2(z)(\overline{z} - \overline{a})\right] \\ &+ (g_2 \circ f)(z)\left[\overline{f_1(z)}(\overline{z} - \overline{a}) + \overline{f_2(z)}(z - a)\right]\end{aligned}$$

elde ederiz. $g_k \circ f$ fonksiyonları a noktasında süreklidirler; dolayısıyla $h_1 := (g_1 \circ f)f_1 + (g_2 \circ f)\overline{f_2}$ ve $h_2 := (g_1 \circ f)f_2 + (g_2 \circ f)\overline{f_1}$ fonksiyonları a noktasında süreklidirler. Yukarıdaki denklem bu gösterimlerle

$$(g \circ f)(z) = (g \circ f)(a) + h_1(z)(z - a) + h_2(z)(\overline{z} - \overline{a})$$

şeklini alır. Şimdi sav, Teorem 1.2.6(iv) ve (1.10)'dan çıkar. □

Ayrıca, (1.6)'dan dolayı

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy$$

olduğunu belirtelim.

Her cisim kendi üzerinden bir boyutlu bir vektör uzayı olduğu için $\mathbb{C}$ cismi de bir boyutlu bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır. Her $\alpha \neq 0$ kompleks sayısı bu uzayın bir tabanı olarak alınabilir.

Herhangi bir $\mathbb{C}$-doğrusal $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü $A(1) =: \alpha$ değeri ile tek olarak belirlidir. Gerçekten de her $z \in \mathbb{C}$ için $A(z) = A(z1) = zA(1) = z\alpha = \alpha z$ olmak zorundadır. Şimdi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $A, B : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümleri her $z \in \mathbb{C}$ için $A(z) := \alpha z$ ve $B(z) := \beta\overline{z}$ olarak tanımlansınlar. A dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusal iken, her $z, w \in \mathbb{C}$ için $B(z+w) = B(z)+B(w)$ olmasına karşın $\lambda \in \mathbb{C}$ için $B(\lambda z) := \beta\overline{(\lambda z)} = \overline{\lambda}\beta\overline{z} = \overline{\lambda}B(z)$ olduğundan, $\beta \neq 0$ ise B dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusal değildir; bu tip dönüşümlere **antidoğrusal** veya **yarıdoğrusal** denir. Her $r \in \mathbb{R}$ için $\overline{r} = r$ olduğundan, antidoğrusal dönüşümler de $\mathbb{R}$-doğrusaldır.

Tanım 1.2.8. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $z_0 \in U$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun. $\mathbb{C}$-doğrusal bir $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü ve z_0 noktasında sürekli ve $\varepsilon(z_0) = 0$ olan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, her $z \in U$ için

$$f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + |z - z_0|\, \varepsilon(z) \tag{1.14}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu z_0 **noktasında $\mathbb{C}$-türevlenebilir** veya **kompleks türevlenebilir** denir.

Not 1.2.9. Her $\mathbb{C}$-doğrusal dönüşüm aynı zamanda $\mathbb{R}$-doğrusal olacağından, f fonksiyonu a noktasında kompleks türevlenebilirse gerçel türevlenebilir. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = \overline{z}$ olarak tanımlanan yarıdoğrusal dönüşümümüz olsun. f fonksiyonu, her $a \in \mathbb{C}$ noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir. Her $z = x+iy \in \mathbb{C}$ için $u(z) := \operatorname{Re} f(z) = x$ ve $v(z) := \operatorname{Im} f(z) = -y$ fonksiyonları olabilecek en güzel özelliklere sahiplerdir: u ve v tüm $\mathbb{R}^2$'de her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptirler. Ancak f fonksiyonu hiçbir $a \in \mathbb{C}$ noktasında kompleks türevlenemez.

Teorem 1.2.10. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdirler:*

(i) *f fonksiyonu a noktasında kompleks türevlenebilir.*

(ii) *Bir $\alpha \in \mathbb{C}$ ve a noktasında sürekli ve orada 0 değerini alan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ ile her $z \in U$ için*

$$f(z) = f(a) + \alpha(z - a) + |z - a|\, \varepsilon(z).$$

(iii) *a noktasında sürekli ve $f_1(a) = \alpha$ olan bir $f_1 : U \to \mathbb{C}$ ile*

$$f(z) = f(a) + f_1(z)(z - a), \ \forall z \in U.$$

(iv)

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \alpha.$$

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii) (1.14)'te $\alpha := L(1)$ alınız.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $a \neq z \in U$ için $f_1(z) := \alpha + \frac{|z-a|}{z-a}\varepsilon(z)$ ve $f_1(a) := \alpha$ alınız.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) f_1'in a'daki sürekliliğinden apaçıktır.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Bu kez $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$\varepsilon(z) := \begin{cases} 0, & z = a \\ \left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - \alpha\right) \frac{z-a}{|z-a|}, & z \in U \backslash \{a\} \end{cases}$$

ve $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(w \mapsto \alpha w)$ doğrusal dönüşümünü alınız. □

Teorem 1.2.10'daki tek olarak belirli olan α sayısı

$$\frac{df}{dz}(a) \equiv f'(a) := \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

ile gösterilir.

Önerme 1.2.11. *$\mathbb{R}$-doğrusal bir $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümünün $\mathbb{C}$-doğrusal olması için gerek ve yeter koşul $0 \neq w \in \mathbb{C}$ olan bir w ile $L(iw) = iL(w)$ olmasıdır. $w = 1$ özel durumundaki $L(i) = iL(1)$ denklemine* ***Cauchy-Riemann denklemleri*** *denir.*

Kanıt. L dönüşümü $\mathbb{C}$-doğrusalsa, her $w \in \mathbb{C}$ için elbette $L(iw) = iL(w)$.

Şimdi L dönüşümü $\mathbb{R}$-doğrusal ve bir $0 \neq w \in \mathbb{C}$ ile $L(iw) = iL(w)$ olsun. $\mathbb{C}$ bir boyutlu bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı olduğundan, her $\alpha = a+ib \in \mathbb{C}$ için $L(\alpha w) = \alpha L(w)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten de

$$\begin{aligned} L(\alpha w) &= L(aw+ibw) \overset{(1)}{=} L(aw) + L(biw) \overset{(2)}{=} aL(w) + bL(iw) \\ &\overset{(3)}{=} aL(w) + ibL(w) = \alpha L(w) \end{aligned}$$

(1) ve (2)'de L dönüşümünün $\mathbb{R}$-doğrusallığı, (3)'te ise varsayım kullanılmıştır. □

$f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $a \in U$ noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve türev dönüşümü L olsun. Önerme 1.2.11'den dolayı L'nin $\mathbb{C}$-doğrusal olması, dd. f fonksiyonunun a noktasında $\mathbb{C}$-türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $L(i) = L(i \cdot 1) = iL(1)$ olmasıdır. Bu ise, bir yandan $f_y(a) = if_x(a)$, dd. $if_y(a) = -f_x$ demek olduğundan, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ ile eş anlamlıyken diğer yandan

$$\frac{\partial u}{\partial y}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y}(a) = i\left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)$$

eşitliğinden dolayı, **Cauchy-Riemann denklemleri** olarak bilinen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a) \tag{1.15}$$

denklemlerine denktir. Böylece aşağıdaki önerme geçerlidir:

Önerme 1.2.12. *a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir $f : u+iv$ fonksiyonun $\mathbb{C}$-türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$, dd. (1.15) denklemlerinin sağlanmasıdır.*

Sonuç 1.2.13. *f fonksiyonu a noktasında kompleks türevlenebilirse*

$$\frac{df}{dz}(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Önerme 1.2.12'yi Menchoff [43]'te aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir:

Teorem. *$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki sürekli $f \in \mathcal{C}(U)$ fonksiyonunun U'da kompleks türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in U$ noktası için bu noktadan geçen iki farklı L ve L' doğruları boyunca*

$$\lim_{z \in L, z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \textit{ve} \quad \lim_{z \in L', z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

limitlerinin var ve birbirine eşit olmasıdır.

Bu teoremin kanıtını [45]'te de bulabilirsiniz. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem. *$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki sürekli $f \in \mathcal{C}(U)$ fonksiyonunun U'da kompleks türevlenebilir olması için U'da Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanması yeterlidir.*

Bu yönde [29] ve [42]'ye de bakılabilir. Bu teoremler aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir ([12], s.51):

Teorem. *$f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde sürekli olsun, sayılabilir nokta dışında $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ türevleri var ve Lebesgue anlamında hemen her yerde Cauchy-Riemann denklemleri sağlansın. Bu koşullarda f fonksiyonu U'da kompleks türevlenebilir.*

Teorem 1.2.14. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve f ve g fonksiyonları a noktasında kompleks türevlenebilir olsun.*

(i) *$f \pm g$, fg ve λf fonksiyonları da a noktasında kompleks türevlenebilirler ve*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a),$$
$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

(ii) *Ayrıca, $g(a) \neq 0$ ise, f/g fonksiyonu da a noktasında kompleks türevlenebilir ve*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Kanıt. Teoremin ilk kısmını doğrudan Teorem 1.2.6'dan elde edebileceğimiz gibi tanımdan yola çıkarak analiz derslerindeki gibi kanıtlarız. Örnek oluşturmak üzere, ikinci savı kanıtlayacağız.

g fonksiyonu a noktasında sürekli ve $g(a) \neq 0$ olduğundan, bu noktanın bir V komşuluğunda f/g fonksiyonu tanımlıdır. Biz $1/g$ fonksiyonunun a noktasında kompleks türevlenebilir olduğunu savunuyoruz. g fonksiyonu a noktasında kompleks türevlenebilir olduğundan, a noktasında sürekli bir $g_1 : V \to \mathbb{C}$

fonksiyonuyla her $z \in V$ için $g(z) - g(a) = (z-a)g_1(z)$ olur. Buradan V'de

$$\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(a)} = (z-a)\left(-\frac{g_1(z)}{g(z)g(a)}\right) = (z-a)h(z)$$

olur. $h(z)$ fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, $1/g$ fonksiyonu a noktasında kompleks türevlenebilir ve türevi $h(a)$'dır, dd.

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = h(a) = -\frac{g_1(a)}{g(a)g(a)} = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}$$

elde edilir. $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ fonksiyonu a noktasında kompleks türevlenebilir iki fonksiyonun çarpımı olarak a noktasında kompleks türevlenebilir. Bu çarpıma çarpım kuralını uygulayınız. $\square$

Teorem 1.2.15 (Zincir Kuralı). (i) *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $f : U \to V$ fonksiyonu $a \in U$ noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve $g : V \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ise $f(a) = b$ noktasında kompleks türevlenebilir olsun. Bu durumda, $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve*

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(a) = g'(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a), \quad \frac{\partial(g\circ f)}{\partial \bar{z}}(a) = g'(b)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a), \quad b = f(a). \quad (1.16)$$

Özel olarak f fonksiyonu da a noktasında kompleks türevlenebilirse $g \circ f$ fonksiyonu da a'da kompleks türevlenebilir ve

$$\frac{d(f\circ g)}{dz}(a) = (g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = \frac{dg}{dw}(f(a))\frac{df}{dz}(a).$$

(ii) *$I \subset \mathbb{R}$ herhangi tipten bir aralık, $s \in I$, $A \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $\gamma : I \to A$ fonksiyonu s noktasında türevlenebilir[5] ve $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\gamma(s)$ noktasında kompleks türevlenebilirse $f \circ \gamma$ fonksiyonu s noktasında türevlenebilir ve*

$$\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(s) = (f\circ\gamma)'(s) = f'(\gamma(s))\gamma'(s) = \frac{df}{dz}(\gamma(s))\frac{d\gamma}{dt}(s).$$

Kanıt. (i): Her şeyden önce $g\circ f$ fonksiyonu a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir. Varsayımdan $\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) = 0$ olduğundan, (1.16) doğrudan (1.11) ve (1.12)'den çıkar. Ayrıca, f fonksiyonu a noktasında $\mathbb{C}$-türevlenebilirse $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ olacağından, (1.16)'dan bir yandan $\frac{\partial(g\circ f)}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ elde ederiz ki bu, $g \circ f$ fonksiyonunun a noktasında kompleks türevlenebilir olduğunu verir; dolayısıyla yine (1.16) ile

$$\frac{d(g\circ f)}{dz}(a) = \frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(a) = g'(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a) = g'(b)f'(a) = \frac{dg}{dw}(b)\frac{df}{dz}(a).$$

[5] a bir uç noktaysa elbette tek yanlı türev söz konusudur.

(ii): Varsayımlardan dolayı, s noktasında sürekli bir $\gamma_1 : I \to \mathbb{C}$ ve $a := \gamma(s)$'de sürekli bir $h : A \to \mathbb{C}$ ile

$$f(z) = f(a) + h(z)(z-a),\ z \in A,\ h(a) = f'(a),$$
$$\gamma(t) = \gamma(s) + \gamma_1(t)(t-s),\ t \in I,\ \gamma_1(s) = \gamma'(s)$$

olur. Buradan $z = \gamma(t)$ ve $a = \gamma(s)$ ile elde edeceğimiz

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= f(\gamma(s)) + h(\gamma(t))(\gamma(t) - \gamma(s)),\ t \in I \\ &= f(\gamma(s)) + h(\gamma(t))\gamma_1(t)(t-s),\ t \in I \end{aligned}$$

denkleminden, $h(\gamma(t))\gamma_1(t)$ fonksiyonu s noktasında sürekli olduğunu da gözetirsek, $f \circ \gamma$ fonksiyonunun s noktasında türevlenebilir ve $(f \circ \gamma)'(s) = f'(\gamma(s))\gamma'(s)$ olduğunu görürüz. □

Örnek 1.2.16. 1. Sabit fonksiyonlar kompleks türevlenebilir ve türevleri özdeş olarak 0'dır. $\mathrm{Id}(z) := z$ ile tanımlanan özdeşlik fonksiyonu kompleks türevlenebilir ve her z için$\mathrm{Id}'(z) = 1$. Buradan çarpım kuralı ile, her $1 \le n \in \mathbb{N}$ için $f(z) = z^n$ fonksiyonunun tüm ℂ'de kompleks türevlenebilir ve $\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$ olduğu görülür. Kolayca, her $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ polinomunun tüm ℂ'de kompleks türevlenebilir ve $p'(z) = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}$ olduğu görülür. Bunun bir sonucu $p(z)/q(z)$ rasyonel fonksiyonları en azından $q(z) \neq 0$ olan noktalarda kompleks türevlenebilir.

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(z \mapsto \overline{z})$ fonksiyonu ℂ'de ℝ-türevlenebilir, dolayısıyla sürekli iken, $f_{\overline{z}}(a) = 1 \neq 0$ olduğundan hiçbir yerde kompleks türevlenemez. Benzeri bir fonksiyonu, dd. sürekli, ancak hiçbir yerde türevlenemez bir fonksiyonu gerçel analizde bulmanın ne kadar zor olduğunu anımsayınız.

3. $f(z) := z\overline{z}$ ile ℂ'de tanımlanan fonksiyonumuz için

$$f(z) - f(a) = \overline{a}(z-a) + z\,(\overline{z} - \overline{a})$$

olduğundan, Teorem 1.2.6(iv)'ten $f_z(a) = \overline{a}$ ve $f_{\overline{z}}(a) = a$ elde ederiz. Dolayısıyla fonksiyonumuz her a noktasında ℝ-türevlenebilir ancak yalnız $a = 0$ noktasında kompleks türevlenebilir. Diğer yandan,

$$f(z) - f(a) = \overline{z}(z-a) + a(\overline{z} - \overline{a})$$

olduğundan, Teorem 1.2.6(iv)'teki f_1, f_2 fonksiyonlarının tek olarak belirli olmadıklarını görüyoruz; tek olarak belirli olan $f_1(z_0)$ ve $f_2(z_0)$ değerleridir.

4. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) := \begin{cases} \frac{xy}{z\overline{z}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu eksenler üzerinde özdeş olarak 0 değerini aldığından orijinde kısmi türevleri vardır ve $f_x(0) = f_y(0) = 0$, dolayısıyla $f_y(0) = if_x(0)$, dd. Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır. Ancak $z \neq 0$ ve $y = ax$ olmak üzere, orijinden geçen doğrular boyunca 0'a yaklaştığımızda

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{a}{1 + a^2}$$

ve bu değer a'ya bağlı olduğundan, f fonksiyonu 0 noktasında kompleks türevlenemez!

Uzlaşma: Kitabımızda "kompleks türevlenebilir" fonksiyonlarla ilgileneceğimizden, bundan sonra kısaca **"türevlenebilir**" fonksiyonlardan söz edeceğiz. Söz konusu $\mathbb{R}$-türevlenebilme ise bunu belirteceğiz.

Tanım 1.2.17. $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $f : U \to \mathbb{C}$ ve $a \in U$ olsun. f fonksiyonuna, a noktasının bir komşuluğunda türevlenebilirse a **noktasında holomorftur** denir. f fonksiyonu U kümesinde türevlenebilirse U **kümesinde holomorftur** denir. U kümesindeki holomorf fonksiyonların kümesi $\mathcal{H}(U)$ ile göstereceğiz[6]. $U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler olmak üzere, $f : U \to V$ bir tameşleme, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ ise f **biholomorftur** denir.

$\mathcal{H}(U)$ birim elemanlı bir halkadır ve $\mathcal{C}(U)$ sürekli fonksiyonlar halkasının bir althalkasıdır[7].

Not 1.2.18. Türevin geometrik yorumu: $\Omega \subset \mathbb{C}$ açık, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ve f fonksiyonu a noktasında türevlenebilir olsun. $u = \operatorname{Re} f$ ve $v = \operatorname{Im} f$ olmak üzere, f fonksiyonunu bir $f = (u, v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü olarak da düşünebiliriz. Cauchy-Riemann denklemlerinden dolayı

$$\begin{aligned}
\det J_f(a) &= u_x(a)v_y(a) - v_x(a)u_y(a) = u_x^2(a) + v_x^2(a) = |f_x(a)|^2, \\
\det J_f(a) &= |f'(a)|^2.
\end{aligned}$$

Bir $f = (u, v)$ dönüşümü Ω'da sürekli türevlenebilir ve $\det J_f(a) \neq 0$, yani $|f'(a)| \neq 0$ ise, gerçel analizden biliyoruz ki a ve $f(a)$ noktalarının U ve V açık komşulukları $f|U : U \to V$ bir tam eşleme ve $(f|U)^{-1}$ de sürekli reel türevlenebilir olacak biçimde bulunabilir. Biz ileride her $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ için $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ olduğunu, dolayısıyla, her holomorf f fonksiyonunun her mertebeden sürekli türevlenebilir olduğunu kanıtlayacağız. Bu koşullarda $g := (f|U)^{-1}$ fonksiyonu $f(a)$ noktasında türevlenebilir ve $g'(f(a)) = 1/f'(a)$ olur. Bunu az sonra kanıtlayacağız. Diğer yandan $\det J_f(a) > 0$ olduğundan, $f'(a)$ türev dönüşümü pozitif yönlenmiş tabanları pozitif yönlenmiş tabanlara resmeder.

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ dönüşümü a noktasında kompleks türevlenebilir ve $\alpha := f'(a) \neq 0$ ise, $|z - a|$ yeterince küçük olduğunda $f(z) - f(a) \approx \alpha(z - a)$ olur. Bu ise a merkezli bir dönsıkgerdir. a noktasında birbirini φ açısıyla kesen eğriler $f(a)$ noktasında, yönü koruyarak, birbirini φ ile kesen eğrilere resmedilirler. Bu nedenle, her $a \in \Omega$ için $f'(a)$ var ve $\neq 0$ ise, bu tür dönüşümlere **yerel konform** dönüşümler denir; bunlar yerel olarak yeterince küçük figürleri benzer figürlere resmederler. Holomorf fonksiyonları $\mathbb{R}^2$'nin açık altkümelerinden $\mathbb{R}^2$'ye konform dönüşümler olarak ele almak Riemann'ın yaklaşımdır. Konform dönüşümleri ileride KA II'de inceleyeceğiz.

Önerme 1.2.19. *$A, B \subset \mathbb{C}$ açık kümeler $f \in \mathcal{H}(A)$, $f : A \to B$ tameşleme, $a \in A$, $f'(a) \neq 0$ ise [ve f^{-1} fonksiyonu $b := f(a)$ noktasında sürekliyse][8], f^{-1} fonksiyonu b noktasında türevlenebilir ve*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{1.17}$$

[6] $\mathcal{H}(U)$ yerine $\mathcal{O}(U)$ gösterimi de yaygındır.

[7] $\mathcal{C}^k(U)$ yapılarının tanımı için Altkısım 5.3.1'e bakınız.

[8] $[\cdots]$ içindeki bilgiler aslında varsayılması gerekmeyen, otomatikman geçerli olan bilgilerdir. Onların doğru olduğu bu teorem ve sonuçları kullanılmadan görülecektir.

Sonuç 1.2.20. *$A \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(A)$, $\lceil f' \in \mathcal{C}(A) \rfloor$, $a \in A$ ve $f'(a) \neq 0$ ise, a ve $f(a)$ noktalarının açık U ve V komşulukları $f|U : U \to V$ biholomorf ve*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. a'da sürekli bir $h : A \to \mathbb{C}$ ile

$$f(z) - f(a) = h(z)(z - a). \tag{1.18}$$

$h(a) = f'(a) \neq 0$ ve h fonksiyonu a'da sürekli olduğundan, a noktasının bir U komşuluğu $h(z) \neq 0$ olacak biçimde seçilebilir. Yine f^{-1} fonksiyonu b noktasında sürekli olduğundan, b'nin açık bir V komşuluğu $f^{-1}(V) \subset U$ olacak biçimde seçilebilir. Her $w \in V$ için $z := f^{-1}(w)$, dolayısıyla $f(z) = w$ olmak üzere, (1.18)'den

$$w - b = h(f^{-1}(w))\left(f^{-1}(w) - f^{-1}(b)\right)$$
$$f^{-1}(w) - f^{-1}(b) = \frac{1}{h(f^{-1}(w))}(w - b) =: g(w)\,(w - b)$$

olur. g fonksiyonu b noktasında sürekli olduğundan, f^{-1} fonksiyonu b noktasında türevlenebilir; $g(b) = 1/h(a) = 1/f'(a)$ olduğu için de (1.17) doğrudur.

Sonucun kanıtı: $f' \in \mathcal{C}(A)$ varsayımı altında gerçel analizden a ve $b := f(a)$ noktalarının U ve V açık komşulukları $f|U : U \to V$ sürekli türevlenebilir tameşlemesi aynı zamanda $(f|U)^{-1}$ de sürekli türevlenebilir ve her $z \in U$ için $|f'(z)|^2 = \det J_f(z) \neq 0$ olacak biçimde bulunabilir (Teorem 5.3.16). Savımız Önerme 1.2.19'dan çıkar. □

Önerme 1.2.21. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ise, $f \in \mathcal{H}(B)$ için aşağıdaki önermeler birbirine denktirler:*

(i) *$|f|$ sabittir.*

(ii) *$f' = 0$.*

(iii) *f sabittir.*

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$ (ii): $u = \operatorname{Re} f$ ve $v = \operatorname{Im} f$ olsun. $|f|$ sabit $\iff$ bir $c \geq 0$ ile $u^2 + v^2 = |f|^2 = c$. Eğer $c = 0$ ise $u = 0$ ve $v = 0$ olacağından, $f' = f_x = u_x + iv_x = 0$ olur. $c > 0$ olsun. $u^2 + v^2 = c$ denkleminde sırasıyla x ve y değişkenlerine göre kısmi türev alarak Cauchy-Riemann denklemleriyle

$$0 \equiv u \cdot u_x + v \cdot v_x = u \cdot u_x - v \cdot u_y$$
$$0 \equiv u \cdot u_y + v \cdot v_y = v \cdot u_x + u \cdot u_y$$

Burada u_x ve u_y'ye göre bir doğrusal denklem sistemi var ve matrisinin determinantı $u^2 + v^2 = c \neq 0$ olduğu için denklem sisteminden B bölgesinde önce $u_x = u_y = 0$, bunlar ve Cauchy-Riemann denklemlerinden ise $v_x = v_y = 0$ elde edilir. Sonuçta B bölgesinde $f' = u_x + iv_x = 0$ olur.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): *1. Kanıt:* $0 = f' = u_x + iv_x$'ten $u_x = v_x = 0$ elde edilir. Cauchy-Riemann denklemleriyle $u_x = u_y = 0$ ve $v_x = v_y = 0$ elde ederiz. B bir bölge olduğundan, u ve v fonksiyonları B'de sabittir (Önerme 5.3.18). Dolayısıyla f sabittir.

2. Kanıt: B bir bölge olduğundan, f fonksiyonun yerel sabit olduğunu görmek yeterlidir. $D_r(a) \subset B$ olsun. $z \in D_r(a)$ keyfi verilsin ve $\gamma(t) := a + t(z - a)$ ile tanımlanan $\gamma : [0,1] \to D_r(a)$ fonksiyonu türevlenebilir olduğundan, Teorem 1.2.15'ten $g := f \circ \gamma$ için $g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \equiv 0$ olur. Dolayısıyla g sabittir ve $f(z) = g(1) = g(0) = f(a)$. Böylece f fonksiyonu $D_r(a)$ dairesinde sabittir.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) aşikâr. □

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-türevlenebilir olsun. (1.10)'dan

$$\forall a \in A : \frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0 \iff \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(a) = 0.$$

Eğer $\overline{f} \in \mathcal{H}(U)$ ise, f fonksiyonu U kümesinde **antiholomorftur** denir; bu, U'da $f_z = 0$ olmasına denktir.

Önerme 1.2.22. *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ olsun.*

(i) *f ve g antiholomorflarsa, $g \circ f$ holomorftur.*

(ii) *f ve g'den biri holomorf diğeri antiholomorfsa, $g \circ f$ antiholomorftur.*

Kanıt. Örnek olmak üzere, ilk önermeyi kanıtlayacağız. Zincir kuralı ile

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = 0\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}0 = 0$$

elde ederiz. □

Bu önermenin bir basit sonucu şudur: $f = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ ifadesindeki her bir f_i bir holomorf veya antiholomorf fonksiyonsa antiholomorf olanların sayısı çiftse f holomorf, tekse f antiholomorftur.

$U \subset \mathbb{C}$ açık olsun.

$$U^- := \{\overline{z} \mid z \in U\} \text{ ve } \forall z \in U^- : f^-(z) := \overline{f(\overline{z})} = (\overline{\mathrm{Id}} \circ f \circ \overline{\mathrm{Id}})(z)$$

olsun. U^- kümesi U kümesinin x-eksenine göre yansımasıdır. f^- fonksiyonuna da f'nin yansıması diyelim. Aşağıdaki önerme apaçıktır:

Teorem 1.2.23. *$f \in \mathcal{H}(U)$ ise $f^- \in \mathcal{H}(U^-)$.*

Problemler

Problem 1.2.1. $\mathbb{D}$'de $f(z) := \frac{1}{1-z}$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun $\mathbb{D}$'de sürekli ancak düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

Problem 1.2.2. $f(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ ile tanımlanan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun her yerde reel türevlenebilir, ancak hiçbir yerde kompleks türevlenemediğini gösteriniz. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} =?$

Problem 1.2.3. $f(z) := z \operatorname{Re} z$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun yalnızca $z = 0$'da türevlenebilir olduğunu gösterip $f'(0)$'ı hesaplayınız.

Problem 1.2.4. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $f(0) := 0$ ve $z \neq 0$ için $f(z) := \frac{z^5}{|z|^4}$ olarak tanımlansın. $g := \operatorname{Re} f$ ve $h := \operatorname{Im} f$ olsun. 0 noktasında g, h fonksiyonlarının kısmi türevlerinin var ve orada Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını, yine de f'nin 0'da kompleks türevlenemez olduğunu gösteriniz. Benzeri durumun $f(z) = f(x + iy) = \sqrt{|xy|}$ fonksiyonu için de geçerli olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.5. (1) $f(z) = 1 + z + \bar{z}^2$ fonksiyonunun yalnızca $z = 0$ noktasında kompleks türevlenebilir olduğunu gösteriniz. z ve $\bar{z}$'yi bağımsız değişkenler gibi düşünüp biçimsel olarak türev alırsak, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 2\bar{z} = 0 \iff z = 0$ buluruz. Bu bir önceki sonuçla uyumludur.

(2) $f(z) = f(x+iy) = x^2+y^2+i(x^2-y^2)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}$'de yalnızca $L = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ doğrusunun noktalarında kompleks türevlenebilir olduğunu kanıtlayınız. Aynı sonuca $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ dönüşümleriyle f'den elde ettiğimiz fonksiyonda biçimsel olarak aldığımız kısmi türevle $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ denkleminden ulaşınız.

Problem 1.2.6. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $u = \operatorname{Re} f$ ise her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial^m x \partial^n y} = \operatorname{Re} i^n f^{(m+n)}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.7. $r > 0$, $\zeta \in \mathbb{C}$ ve $f \in \mathcal{H}(D_r(\zeta))$ ve $\lceil f' \in \mathcal{C}(D_r(\zeta)) \rfloor$ olsun. (z_n), $(z'_n) \subset D_r(\zeta)$ dizileri için $\lim z_n = \lim z'_n = \zeta$ ve her n için $z_n \neq z'_n$ ise,

$$f'(\zeta) = \lim_{n \in +\infty} \frac{f(z_n) - f(z'_n)}{z_n - z'_n}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.8. $r > 0$, $\zeta \in \mathbb{C}$ ve $f \in \mathcal{H}(D_r(\zeta))$ ve $\lceil f' \in \mathcal{C}(D_r(\zeta)) \rfloor$ olsun. Her $0 < \sigma < r$ için f fonksiyonunun $\overline{D}_\sigma(\zeta)$'da düzgün türevlenebilir, dd. her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta_\varepsilon > 0$ ile

$$\forall z, z' \in \overline{D}_\sigma(\zeta) \left(|z - z'| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} - f'(z) \right| < \varepsilon \right)$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.9. $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{C})$, $a \in U$ ve $\lim_{h \to 0} \left| h^{-1}[f(a+h) - f(a)] \right|$ varsa ya f ya da $\overline{f}$ fonksiyonu a'da kompleks türevlenebilir, gösteriniz.

Problem 1.2.10. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f = u + iv \in \mathcal{H}(B)$ ve $u^2 = v$ ise f sabittir, gösteriniz.

Problem 1.2.11. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $u = \operatorname{Re} f$ ve $v = \operatorname{Im} f$ olsun. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $\alpha u + \beta v$ fonksiyonu B'de sabitse f'nin de B'de sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.12. $f = u+iv \in \mathcal{H}(U)$ ise, $\langle \nabla u, \nabla v\rangle \equiv \langle \mathrm{grad} u, \mathrm{grad} v\rangle = 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.13. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f = u + iv \in \mathcal{H}(U)$ ise, $s \in \mathbb{R}^2$ bir birim vektör ve $n = is$ olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

olduğunu gösteriniz. $\frac{\partial u}{\partial s}, \cdots$ tanımları için (5.3)'e bakınız.

Problem 1.2.14. $x = r\cos\varphi$ ve $y = r\sin\varphi$ olmak üzere, Cauchy-Riemann denklemlerinin kutupsal koordinatlarda $f = u + iv$ için

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.15. $f = u+iv \in \mathcal{H}(U)$ ve ayrıca $u, v \in \mathcal{C}^2(U)$ ise —ileride daima $u, v \in \mathcal{C}^\infty(U)$ olduğunu göreceğiz—, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ olmak üzere, $\Delta u = 0 = \Delta v$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.16. Bir $u(x, y) = ax^2+bxy+cy^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomunun bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ holomorf fonksiyonunun gerçel kısmı olması için gerek ve yeter koşulun $a = -c$ olduğunu gösteriniz. Bu koşul sağlandığında $\operatorname{Re} f = u$ olan tüm $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonlarını bulunuz.

Problem 1.2.17. $f = u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $u(x, y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ ise f'yi bulunuz.

Problem 1.2.18. $U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} U$, f sürekli, $g \in \mathcal{H}(V)$ olsun. Ayrıca, her $w \in V$ için $g'(w) \neq 0$ ve her $z \in U$ için $g(f(z)) = z$ ise, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f' = 1/(g' \circ f)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.19. $f, g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ fonksiyonları $f(z) = \frac{1}{z}$ ve $g(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ olarak tanımlansınlar. f'nin biholomorf, g'nin biantiholomorf olduğunu gösterip bu dönüşümlerin $\mathbb{D}, \mathbb{S}$ ve $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$'yi nerelere resmettiklerini belirleyiniz ve her $z \in \mathbb{C}^*$ için bir düzlemde $f(z)$ ve $g(z)$'yi görselleştiriniz.

Problem 1.2.20. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $w = f(z) = z^2$ olsun. Tanım bölgesinin noktalarını $z = x + iy$, değer bölgesindekileri ise $w = u + iv$ ile gösterelim. Tanım kümesindeki $x = a$, $y = b$, $y = x + 1$ doğruları ile $xy = 1$ hiperbolünün f altındaki resimlerini bulunuz.

Problem 1.2.21. $a \in \mathbb{D}$ ve $z \in \mathbb{C}\backslash\{1/\bar{a}\}$ için $T(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ olsun. $T'(z)$'yi hesaplayınız. Ayrıca, $\{z \,|\, |T(z)| = 1\}$, $\{z \,|\, |T(z)| < 1\}$ ve$\{z \,|\, |T(z)| > 1\}$ kümelerini belirleyiniz.

Problem 1.2.22. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi $\mathbb{C}$'den sanal eksen üzerideki $i[1, +\infty)$ ve $-i[1, +\infty)$ doğru parçalarını çıkararak elde edilsin. Her $z \in B$ için $f(z) := \frac{1+iz}{1-iz}$ olsun. $f : B \to \mathbb{C}_{-\pi}$'nin biholomorf olduğunu gösteriniz. $f(i[1, +\infty))$ ve $f(-i[1, +\infty))$ görüntülerini bulunuz.

Problem 1.2.23. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f : B \to \mathbb{C}$ holomorfsa, şu denklikleri kanıtlayınız: f sabittir $\iff \operatorname{Re} f$ sabittir $\iff \operatorname{Im} f$ sabittir $\iff \overline{f}$ holomorftur $\iff f' = 0 \iff |f|$ sabittir.

Problem 1.2.24. Önceki problemdeki $\operatorname{Re} f \equiv c$ ve $\operatorname{Im} f \equiv c$ doğrularının ayrıcalığı yoktur. $L \subset \mathbb{C}$ bir doğru, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f(\mathbb{C}) \subset L$ ise f sabittir; gösteriniz.

Problem 1.2.25. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve dışbükey, $f \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}^1(U)$ ve U'da $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ olsun. Bu durumda, U'daki her $a \neq b$ için $g_{ab}(t) = \operatorname{Re}(b-a)^{-1} f[a + t(b-a)]$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında kesin artan ve f'nin birebir olduğunu gösteriniz.

Problem 1.2.26. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve dışbükey ve $f \in \mathcal{H}(U)$ olsun. $a, b \in U$ ve $a \neq b$ olsun. $c, d \in [a, b]$ noktalarının

$$f(b) - f(a) = (b-a)[\operatorname{Re} f'(c) + \operatorname{Im} f'(d)]$$

olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz. $F(t) = \frac{1}{b-a} f(a + t(b-a))$, $t \in [0,1]$ fonksiyonundan yararlanınız.

Problem 1.2.27. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu her $z, w \in \mathbb{C}$ için

$$f(z+w) = f(z)f(w)$$

eşitliğini sağlasın. Aşağıdakileri kanıtlayınız:

(i) $f \not\equiv 0$ ise $f(0) = 1$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z) \neq 0$.
(ii) $f \not\equiv 0$ ve $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ise, her $z \in \mathbb{C}$ için $f'(z) = f(z)f'(0)$.[9]
(iii) $g \not\equiv 0$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, her $z, w \in \mathbb{C}$ için $g(z+w) = g(z)g(w)$ ve $f'(0) = g'(0)$ ise $f = g$.

Problem 1.2.28. $f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun holomorf ve her $z, w \in \mathbb{C}$ için $f(z+w) = f(z)f(w)$, $f \not\equiv 0$ ve $f'(0) = 1$ eşitliklerini sağladığını gösteriniz.

Problem 1.2.29. Her $z \in \mathbb{C}^*$ için $f(z) = z + \frac{1}{z}$ ise, $f(C_r)$ görüntülerini bulunuz. Bu dönüşümün $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{D}}$'yi biholomorf $\mathbb{C} \backslash [-2,,2]$'ye resmettiğini gösteriniz.

1.3 Kompleks Diziler ve Seriler

Her $z, w \in \mathbb{C}$ için $d(z,w) := |z - w|$ olmak üzere, $(\mathbb{C}, d)$ metrik uzayında çalışacağımızdan, metrik uzaylara ilişkin önbilgilerde verdiğimiz tanımları yinelemeyeceğiz. Yakınsaklık, limit, Cauchy dizisi ve benzeri tanımlar için oraya bakılabilir. $\mathbb{C}$ uzayımız bir Hausdorff uzayı olduğundan, (z_n) dizisi yakınsaksa, limiti *tek* olarak belirlidir. $(z_n) \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z_n = x_n$, $\operatorname{Im} z_n = y_n$, $\operatorname{Re} \alpha = a$ ve $\operatorname{Im} \alpha = b$ olmak üzere,

$$|x_n - a|, |y_n - b| \leq |z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

[9] Dolayısıyla f her mertebeden kompleks türevlenebilir; ileride yalnızca bu özel holomorf fonksiyonun değil, her holomorf fonksiyonun her mertebeden kompleks türevlenebilir olduğunu göreceğiz.

eşitsizliklerinden hemen şunları elde ederiz:

1. (z_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_n) ve (y_n) dizilerinin yakınsak olmasıdır; ayrıca $\lim z_n = \alpha \iff \lim x_n = a$ ve $\lim y_n = b$.

2. (z_n) bir Cauchy dizisidir $\iff$ (x_n) ve (y_n) Cauchy dizileridir. Dolayısıyla (z_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, gerçel dizilerde olduğu gibi, bir Cauchy dizisi olmasıdır.

3. $\lim z_n = \alpha$ ve $\lim w_n = \beta$ ise, $\lim |z_n| = |\alpha|$, $\lim(z_n \pm w_n) = \alpha \pm \beta$, $\lim z_n w_n = \alpha\beta$ ve ayrıca $\beta \neq 0$ ise $\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{\alpha}{\beta}$.

4. $A \subset \mathbb{C}$ kümesine, bir $p > 0$ sayısı $A \subset \overline{D}_p(0)$ olacak biçimde, dd. $\forall a \in A : |a| \leq p$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **sınırlıdır** denir. $\{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlıysa, (z_n) **dizisi sınırlıdır** denir. Yakınsak diziler sınırlıdır. Gerçekten de $\lim z_n = a$ ise, $D_1(a)$ dairesinin dışında dizinin en fazla sonlu terimi bulunabilir. Bu terimlere $a_{k_1}, \ldots, a_{k_m}$ dersek, $r := \max\{|a_{k_1}|, \ldots, |a_{k_m}|, |a|\} + 1$ olmak üzere, her n için $|a_n| \leq r$ olur.

$\mathbb{C}_\infty$ ile $\mathbb{C}$ yerel kompakt uzayımızın 5.2.3 altkısmında anlattığımız tek nokta kompaktlaştırılmasını göstereceğiz[10]. Düzlemdeki her K kompakt kümesi bir D_r dairesinin içine düştüğünden,

$$\mathcal{B}(\infty) := \big\{(\overline{D}_r)^c \cup \{\infty\} \,|r > 0\big\}$$

ailesi $\mathbb{C}_\infty$ kompakt uzayımızda ∞ noktasının bir komşuluk bazıdır. Bu nedenle, bir $(z_n) \subset \mathbb{C}_\infty$ dizisinin $\mathbb{C}_\infty$ uzayında ∞ noktasına yakınsak olması her $r > 0$ sayısı için $\overline{D}_r$ kapalı dairesinde dizinin en fazla sonlu terimi olması demektir. Eğer dizimiz $\mathbb{C}$'de ise $\mathbb{C}_\infty$'da $\lim z_n = \infty$ olması, her $r > 0$ için bir n_r'nin her $n > n_r$ için $|z_n| > r$ olacak biçimde bulunmasına, dd. $\lim |z_n| = +\infty$ olmasına denktir.

Uzlaşma: Fonksiyonlar kuramında genellikle $\mathbb{C}$ uzayında çalışmamıza karşın yer yer $\mathbb{C}_\infty$ uzayında da çalışırız. Eğer $\mathbb{C}$'de çalışıyorsak bunu ayrıca belirtmeyeceğiz; ancak $\mathbb{C}_\infty$'de çalışıyorsak bunu belirteceğiz. Örneğin bir $(z_n) \subset \mathbb{C}$ dizisinin yakınsaklığından söz ettiğimizde, $\mathbb{C}$ uzayında çalıştığımız ve eğer varsa limitinin bir $a \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı olduğu varsayılacaktır.

Kompleks serilere ilişkin kavramlar gerçel serilerde olduğu gibidir.

Tanım 1.3.1. Her (a_n) kompleks dizisine $s_n = a_0 + \cdots + a_n$ olmak üzere, bir (s_n) kompleks dizisi karşılık getirilir. (s_n) dizisi yakınsak ve limiti s ise, **terimleri** a_n olan **seri yakınsaktır** denir ve bu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$ olarak gösterilir. s

[10] $\mathbb{C}_\infty$ yerine $\widehat{\mathbb{C}}$ ve $\overline{\mathbb{C}}$ gösterimleri de yaygındır.

sayısına serimizin **toplamı** denir. Terimleri $|a_n|$ olan seri yakınsaksa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ serisi için çoğu yerde $\sum a_n$ yalın gösterimini yeğleyeceğiz. Her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tameşlemesi için $\sum a_{\sigma(n)}$ serisi yakınsaksa $\sum a_n$ serisi **değişmeli yakınsaktır**, eğer her $\sum a_{\sigma(n)}$ serisi aynı değere yakınsaksa **güçlü değişmeli yakınsaktır** denir.

Not 1.3.2. Gerçel terimli serilere ilişkin teoremlerin çoğu kanıtları olduğu gibi korunarak kompleks serilere aktarılırlar. Burada da dizilere ilişkin çoğu teorem bize doğrudan serilere ilişkin teoremler verir. Bunlardan bazılarını not edeceğiz.

1. $\sum a_n = s \iff \sum \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} s$ ve $\sum \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} s$.

2. $\sum a_n = s$ ve $\sum b_n = t$ ise, her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha s + \beta t$.

3. $\alpha \neq 0$ ise, $\sum a_n$ ve $\sum \alpha a_n$ serilerinin yakınsaklık karakterleri aynıdır; dd. ya ikisi de yakınsak ya da ikisi de ıraksaktır.

4. Cauchy Ölçütü: $\sum a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ için bir n_ε doğal sayısının her $n_\varepsilon \leq p \leq q$ için $\left|\sum_{p \leq n \leq q} a_n\right| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir.

$$\left|\sum_{p \leq n \leq q} a_n\right| \leq \sum_{p \leq n \leq q} |a_n|$$

olduğundan, *mutlak yakınsak seriler yakınsaktır.* $\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ ve $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli olduğundan,

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|$$

5. $\sum a_n$ yakınsaksa $\lim a_n = 0$.

6. $\sum a_n$ serisi yakınsak ve toplamı a olsun. $k_0 = 0$ ve $(k_n) \subset \mathbb{N}$ kesin artan bir dizi olmak üzere, $b_m := \sum_{k_m \leq n < k_{m+1}} a_n$ olsun. $\sum b_m$ serisi $\sum a_n$ serisinden birbirini izleyen bazı sonlu terimler ayraçlar içine alınarak ve bunların toplamlarını yeni terimler olarak seçerek elde edilmiştir. $s_n := a_0 + \cdots + a_n$ ve $t_m := b_0 + \cdots + b_m$ olmak üzere, (t_m) dizisi (s_n) dizisinin bir altdizisi olduğundan, $\sum b_m = \lim t_m = \lim s_n = \sum a_n$ sağlanır. Başka sözlerle bir yakınsak seride, sırayı koruyarak, istediğimiz gibi ayraçlar yerleştirebiliriz.

Teorem 1.3.3 (Cauchy kök ölçütü)**.** $r := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ *olsun.* $\sum a_n$ *serisi*

(i) $r < 1$ *için mutlak yakınsaktır,*

(ii) $r > 1$ *için ıraksaktır,*

(iii) $r = 1$ *için seri yakınsak da olabilir ıraksak da olabilir.*

Kanıt. (i) $r := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ olsun. β sayısını $r < \beta < 1$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda bir n_0 doğal sayısı, her $n \geq n_0$ için $\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$ olacak biçimde seçilebilir. Dolayısıyla $n \geq n_0$ için $|a_n| < \beta^n$ olduğundan, (5.3.4) büyük ölçütü ve Not 5.3.5(1) ile $\sum_{n \geq n_0} |a_n|$ yakınsaktır.

(ii) $r > 1$ olsun. α sayısı $r > \alpha > 1$ olarak seçilirse sonsuz çoklukta n için $\sqrt[n]{|a_n|} > \alpha$, dd. sonsuz çoklukta n için $|a_n| > \alpha^n > 1$ olur. Dolayısıyla (a_n) bir 0 dizisi değildir; öyleyse, $\sum a_n$ yakınsak değildir.

(iii) $\sum \frac{1}{n}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ serilerinin her ikisi için de $r = 1$ iken bu serilerin ilki ıraksak, ikincisi yakınsaktır. $\square$

Şimdi vereceğimiz oran ölçütü, terimlerinin en fazla sonlu tanesi 0 olan seriler için anlamlıdır. Bu ölçütten söz ettiğimizde, ayrıca belirtilmese de, bu varsayılacaktır.

Teorem 1.3.4 (D'Alembert oran ölçütü)**.** *En fazla sonlu sayıda n için $a_n = 0$ olsun. $\sum a_n$ serisi*

(i) $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ *ise mutlak yakınsaktır,*

(ii) *Bir n_0 ile $a_{n_0} \neq 0$ ve her $n \geq n_0$ için $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ ise seri ıraksaktır, özellikle* $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ *ise serimiz ıraksaktır.*

(iii) $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 \leq \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *durumunda seri ıraksak da olabilir yakınsak da olabilir.*

Kanıt. (i) $r := \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ olsun ve β sayısı $r < \beta < 1$ olacak biçimde seçilsin. Bu durumda bir n_0 doğal sayısı, her $n \geq n_0$ için $a_n \neq 0$ ve $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \beta$ olacak biçimde vardır. Bu durumda, her $n \geq n_0$ için $|a_n| < |a_{n_0}|\beta^{n-n_0}$ olur. Dolayısıyla $\sum_{n \geq n_0} |a_{n_0}|\beta^{n-n_0}$ yakınsak olduğundan, $\sum_{n \geq n_0} |a_n|$ yakınsaktır; buradan ise $\sum |a_n|$ yakınsak olur.

(ii) Bir n_0 ile $a_{n_0} \neq 0$ ve her $n \geq n_0$ için $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ ise, her $n \geq n_0$ için $0 < |a_{n_0}| \leq |a_n|$ olacağından, (a_n) bir 0 dizisi değildir. Dolayısıyla $\sum a_n$ ıraksaktır. Şimdi $\rho := \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ olsun. α sayısını $1 < \alpha < \rho$ olarak seçersek, liminf'in tanımı gereği bir n_0 doğal sayısı, her $n \geq n_0$ için $1 < \alpha < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ olacak biçimde bulunabilir. Az önce kanıtladığımızdan, serimiz ıraksaktır.

(iii) $\sum \frac{1}{n}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ serilerinin her ikisi için de $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ sağlanır; ancak ilk seri ıraksak, ikinci seri yakınsaktır. □

Cauchy kök ölçütü ve d'Alembert oran ölçütleri özünde mutlak yakınsaklık ölçütleridir. Aşağıda kanıtlayacağımız Abel kuralı ise bir yakınsaklık ölçütüdür.

Teorem 1.3.5 (Abel Ölçütü)**.** *Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\sum z_n w_n$ serisi yakınsaktır:*

1. *Bir $M > 0$ sayısı, her $n \leq m$ için $|z_n + z_{n+1} + \cdots + z_m| < M$ olacak biçimde vardır.*

2. *$\sum |w_n - w_{n+1}|$ yakınsak ve* $\lim w_n = 0$.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $0 \leq n \leq m$ için $t_{n,m} := z_n + z_{n+1} + \cdots + z_m$ olmak üzere,

$$z_n w_n + \cdots + z_m w_m = w_n t_{n,n} + w_{n+1}(t_{n,n+1} - t_{n,n}) + \cdots + w_m(t_{n,m} - t_{n,m-1})$$

olur. Bu eşitliğin sağ yanını *Abel dönüşümü* ile

$$t_{n,n}(w_n - w_{n+1}) + t_{n,n+1}(w_{n+1} - w_{n+2}) + \cdots + t_{n,m-1}(w_{m-1} - w_m) + w_m t_{n,m}$$

olarak yazabiliriz. Buradan ve teoremin ilk koşulundan,

$$|z_n w_n + \cdots + z_m w_m| < M\left(|w_n - w_{n+1}| + \cdots + |w_{m-1} - w_m|\right) + M\,|w_m|$$

elde ederiz. Teoremin ikinci koşulundan, bir n_0 doğal sayısı, her $m \geq n \geq n_0$ için

$$|w_n - w_{n+1}| + \cdots + |w_{m-1} - w_m| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ve } |w_m| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda, her $m \geq n \geq n_0$ için

$$|z_n w_n + \cdots + z_m w_m| < \varepsilon$$

elde edilir ve dolayısıyla Cauchy Ölçütü ile $\sum z_n w_n$ yakınsak olur. □

Örnek 1.3.6. (p_n) kesin azalan ve 0'a yakınsayan bir gerçel dizi olsun, dd. $p_n \downarrow 0$. Bu durumda Teorem 1.3.5'in ikinci koşulu, $w_n = p_n$ olarak sağlanır. Şimdi $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ ve $z \neq 1$ olsun ve $z_n := z^n$ alınsın. O halde, $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n \leq m$ olmak üzere,

$$z_n + z_{n+1} + \cdots + z_m = z^n + z^{n+1} + \cdots + z^m = z^n \frac{z^{m-n+1} - 1}{z - 1}$$
$$|z_n + z_{n+1} + \cdots + z_m| \leq \frac{2}{|z-1|} =: M - 1$$

olduğundan, teoremimizin birinci koşulu da sağlanır. Böylece *$p_n \downarrow 0$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ ve $z \neq 1$ ise $\sum p_n z^n$ serisi yakınsaktır.*

Özel olarak $n \geq 1$ için $p_n = \frac{1}{n}$ alırsak, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ serisi $z \neq 1$ olmak koşuluyla her $|z| = 1$ için yakınsaktır. Diğer yandan bu seri $z = 1$ için ıraksak olan $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ harmonik serisidir.

$x \in \mathbb{R}$ için şimdilik $e^{ix} := \cos x + i \sin x$ olarak tanımlayalım. $z := e^{ix}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $z_n := z^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ olur. İleride Altkısım 1.7.1'de bunları göreceğiz. Bu durumda, $x \neq 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ için $|e^{ix}| = 1$ ve $e^{ix} \neq 1$ olacağından, $\sum p_n e^{inx}$ serisi, dolayısıyla

$$\sum p_n \cos nx \quad \text{ve} \quad \sum p_n \sin nx, \quad x \neq 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$$

serileri de yakınsaktır.

$p_n \in \mathbb{R}$ ve $p_n \geq 0$ ise, $\sum p_n$ serisi için yakınsaklık ve mutlak yakınsaklık kavramları örtüşür. Ayrıca, bu durumda (s_n) kısmi toplamlar dizisi monoton artan olacağından, $\sum p_n$ serisinin yakınsak olması (s_n) dizisinin üstten sınırlı olmasına denktir.

Teorem 1.3.7. (i) *Kompleks terimli $\sum z_n$ serisinin mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum \operatorname{Re} z_n$ ve $\sum \operatorname{Im} z_n$ serilerinin mutlak yakınsak olmasıdır.*

(ii) *Kompleks terimli $\sum z_n$ serisi mutlak yakınsaksa, her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonu için $w_n := z_{\sigma(n)}$ olmak üzere, $\sum w_n$ serisi de mutlak yakınsaktır ve $\sum w_n = \sum z_n$. Dolayısıyla, mutlak yakınsak $\sum z_n$ serileri güçlü değişmeli yakınsaktır.*

Kanıt. (i) Doğrudan yukarıda söylenenler ve

$$|\operatorname{Re} z_n|, |\operatorname{Im} z_n| \le |z_n| \le |\operatorname{Re} z_n| + |\operatorname{Im} z_n|$$

eşitsizliklerinden çıkar.

(ii) *Birinci kanıt:* $z_n = x_n + iy_n$ olmak üzere, $\sum z_n$ serisi mutlak yakınsak ve toplamı $a + ib$ ise, (i)'den dolayı $\sum x_n = a$, $\sum y_n = b$ ve her iki seri de mutlak yakınsaktır. Gerçel analizden, mutlak yakınsak bu serilerde, her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tameşlemesi için $\sum x_{\sigma(n)} = a$ ve $\sum y_{\sigma(n)} = b$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $\sum z_{\sigma(n)}$ serisi yakınsak ve toplamı $a + ib$'dir. Gerçel analizden bu bilgilere başvurmadan, gerçel seriler için de geçerli olan ikinci bir kanıt vereceğiz.

İkinci kanıt: $\sum z_n$ serimiz mutlak yakınsak olduğundan yakınsaktır; $\sum z_n = a$ olsun. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ herhangi bir permütasyon, $p_n := \sigma(n)$ ve $w_n := z_{p_n}$ olmak üzere, $s_n := \sum_{i=0}^n z_i$ ve $t_n := \sum_{i=0}^n w_i = \sum_{i=0}^n z_{p_i}$ olsun.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\sum |z_n|$ serisi yakınsak olduğundan, bir m sayısını $\sum_{n>m} |z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçebiliriz. Bir m' doğal sayısını

$$\{z_0, \ldots z_m\} \subset \{z_{p_0}, \ldots, z_{p_{m'}}\}$$

olacak biçimde seçelim. $p := \max\{p_0, \ldots, p_{m'}\}$ olsun. Bu durumda, her $n' > m'$ için $t_{n'} = s_m + b_{n'}$ olur. Burada $b_{n'}$ sayısı $z_{m+1}, \ldots, z_p$ terimlerinin bir kısmının —elbette tamamının da olabilir— toplamlarından oluşur; bunların damgalarının oluşturduğu kümeye J diyelim. Dolayısıyla,

$$|b_{n'}| = \left|\sum_{i \in J} z_i\right| \le \sum_{i \in J} |z_i| \le \sum_{m<n\le p} |z_n| \le \sum_{m<n} |z_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

buradan da, her $n' > m'$ için, $a = s_m + \sum_{m<n} z_n$ olduğunu da gözetirsek,

$$|t_{n'} - a| \le |s_m - a| + |b_{n'}| = \left|\sum_{m<n} z_n\right| + |b_{n'}| \le \sum_{n>m} |z_n| + |b_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Dolayısıyla, (t_n) yakınsak ve $\lim t_n = a$. □

Gerçel analizden biliyoruz ki gerçel terimli bir $\sum r_n$ serisi yakınsak, ancak mutlak yakınsak değilse, her a gerçel sayısına karşılık bir $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonu (=tameşlemesi) $\sum r_{\sigma(n)} = a$ olacak biçimde vardır. Başka sözlerle σ dönüşümü $\mathbb{N}$ kümesinin permütasyonlarını taradığında $\sum r_{\sigma(n)}$ serilerinin yakınsak olanlarının toplamlarının kümesi $\mathbb{R}$'dir. Steinitz'te [60], kompleks terimli yakınsak ancak mutlak yakınsak olmayan bir $\sum a_n$ serisi için, σ dönüşümü $\mathbb{N}$ kümesinin permütasyonlarını taradığında $\sum a_{\sigma(n)}$ serilerinin yakınsak olanlarının toplamlarının ya tüm $\mathbb{C}$'yi ya da düzlemde bir doğru oluşturduğunu kanıtlamıştır. $\sum a_n$ mutlak yakınsak değilse bu iki durumla karşılaşabileceğimizi görmek kolaydır; teorem başka bir durumla karşılaşmayacağımızı öne sürer. $\sum a_{\sigma(n)}$ serilerinin yakınsak olanların limitlerinin kümesini L ile gösterirsek:

1. $\sum \alpha_n$ gerçel serisi yakınsak, ancak mutlak yakınsak olmasın; $\sum \beta_n$ gerçel serisiyse mutlak yakınsak ve toplamı β olsun. Bu durumda, $\sum(\alpha_n + i\beta_n)$ için $L = \mathbb{R} + i\beta$ ve $\sum(\beta_n + i\alpha_n)$ için ise $L = \beta + i\mathbb{R}$ olur. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sum(\alpha_n + ik\alpha_n)$ serisi içinse L kümesi $y = kx$ doğrusudur.

2. $\sum \alpha_{2n}$ ve $\sum \alpha_{2n+1}$ gerçel serilerinin her ikisi de yakınsak, ancak mutlak yakınsak olmasın. Şimdi $\sum a_n$ serisini $a_{2n} := \alpha_{2n}$ ve $a_{2n+1} := i\alpha_{2n+1}$ olarak tanımlarsak, bu seri için $L = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \mathbb{C}$ olur.

Teorem 1.3.8 (Cauchy Çarpımı). *Yakınsak $\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ serilerinden en az biri mutlak yakınsaksa $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ olmak üzere, $\sum c_n$ serisi yakınsaktır ve toplamı AB'dir.*

Kanıt. $A_n := \sum_{i=0}^n a_i$, $B_n := \sum_{i=0}^n b_i$ ve $C_n := \sum_{i=0}^n c_i$ olsun. $\sum a_i$ serisi mutlak yakınsak ve toplamı A, $\sum b_i$ serisi yakınsak ve toplamı B olsun. Genelde $C_n \neq A_n B_n$ iken savımız yine de $\lim C_n = \lim A_n \lim B_n$ olduğudur ve kanıtlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0, \quad \beta_k := B_k - B \text{ alırsak} \\
&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\
C_n &= A_n B + (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0) = A_n B + \gamma_n \\
\gamma_n &:= a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0
\end{aligned}$$

elde ederiz. $A_n B \to AB$ olduğundan, $\gamma_n \to 0$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $\alpha := \sum |a_n|$ olsun. Varsayımımızdan $\alpha < +\infty$.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\lim \beta_n = 0$ olduğundan, n_ε doğal sayısını, her $n \geq n_\varepsilon$ için $|\beta_n| \leq \varepsilon$ olacak biçimde seçebiliriz. Böylece, her $n \geq n_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_{n_\varepsilon} a_{n-n_\varepsilon}| + |\beta_{n_\varepsilon+1} a_{n-n_\varepsilon-1} + \cdots + \beta_n a_0| \\
&\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_{n_\varepsilon} a_{n-n_\varepsilon}| + \alpha\varepsilon \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (1.19)'da n_ε sabit tutulur ve $\lim a_n = 0$ gözetilirse $\limsup |\gamma_n| \leq \alpha\varepsilon$ elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi seçilebildiğinden buradan $\limsup |\gamma_n| = 0$, dolayısıyla $\lim |\gamma_n| = 0$, buradan da $\lim \gamma_n = 0$ elde ederiz. □

$\sum c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right)$ serisine $\sum a_n$ ve $\sum b_m$ kompleks serilerinin **Cauchy çarpımı** denir. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ herhangi bir tameşleme ve her $i \in \mathbb{N}$ için $\sigma(i) = (n_i, m_i)$ olsun. Her i için $p_i := a_{n_i} b_{m_i}$ dersek, böylece elde ettiğimiz $\sum p_i$ serisine $\sum a_n$ ve $\sum b_m$ serilerinin bir **çarpım serisi** diyelim. Özetle çarpım serilerimiz $a_n b_m$ terimlerini herhangi bir biçimde doğrusal sıralayarak elde ettiğimiz serileridir.

Teorem 1.3.9 (Seri Çarpımları Teoremi)**.** *$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ serileri mutlak yakınsak ve $\sum p_i$ bunların herhangi bir çarpım serisiyse, $\sum p_i$ serisi de mutlak yakınsaktır ve*

$$\sum p_i = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_m\right).$$

Sonuç 1.3.10. *$\sum a_n$ ve $\sum b_m$ serileri mutlak yakınsaksa $c_n := \sum_{p+q=n} a_p b_q$ olmak üzere, $\sum c_n$ serisi de mutlak yakınsaktır ve*

$$\sum c_n = \sum_n \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_m\right).$$

Kanıt. $a := \sum a_n$, $b := \sum b_m$, $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ ve $t_m := \sum_{k=0}^{m} b_k$ olsun. $l \in \mathbb{N}$ keyfi verilsin. $n \in \mathbb{N}$ yerince büyük seçilirse $\{p_0, \ldots, p_l\} \subset \{a_v b_\mu \,|\, 0 \le \nu, \mu \le n\}$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$\sum_{i=0}^{l} |p_i| \le \left(\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\right)\left(\sum_{\mu=0}^{n} |b_\mu|\right) \le \left(\sum_{\nu=0}^{+\infty} |a_v|\right)\left(\sum_{\mu=0}^{+\infty} |b_\mu|\right) < +\infty$$

olduğundan, $p := \sum p_i$ mutlak yakınsaktır, dolayısıyla güçlü değişmeli yakınsaktır. Dolayısıyla, p değerini bulmak için $a_\nu b_\mu$ terimlerini istediğimiz gibi sıralayabiliriz. Bir $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonunu $q_i := \sigma(p_i)$ ve $\tau_n := \sum_{i=0}^{n} q_i$ olmak üzere, uygun k_n doğal sayılarıyla $\tau_{k_n} = s_n t_n$ olacak biçimde seçeceğiz. Bu çok değişik biçimde gerçekleştirilebilir. Şu sıralamayı seçelim: a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, $a_1b_1, \ldots$ olarak sıralayalım. Bu sıralamanın mantığı şöyledir: İlk terim a_0b_0 olacak, bunu s_1t_1 çarpımının, henüz seçilmemiş terimleri bir biçimde izlesin, onları s_2t_2 çarpımının henüz seçilmemiş terimleri bir biçimde izlesin vs... Bu durumda, $k_n := (n+1)^2$ ve $\tau_n := \sum_{i=0}^{n} q_i$ olmak üzere, $\tau_{k_n} = s_n t_n$ olduğundan, $\lim \tau_n = \lim \tau_{k_n} = \lim s_n \cdot \lim t_n = ab$ elde ederiz. Açık yazılımla

$$\sum p_n = \sum q_n = \lim \tau_n = ab = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$$

elde ederiz.

Sonucun kanıtı: Bu kez $a_v b_\mu$ terimleri şöyle sıralansın: c_n'deki $a_\nu b_\mu$ terimleri c_{n+1}'dekilerden önce gelecek şekilde herhangi bir biçimde sıralansınlar; örneğin $a_0b_0, a_0b_1, a_1b_0, a_0b_2, a_1b_1, a_2b_0, \ldots$. Bu terimleri yalın olarak $d_0, d_1, d_3, \ldots$ olarak gösterirsek, teoremden dolayı $\sum d_n$ mutlak yakınsak ve $\sum d_n = ab$ olur. Dolayısıyla, $\sum c_n$ mutlak yakınsak ve $\sum_{i=0}^{n} c_i = \sum_{j=0}^{\frac{n(n+1)}{2}} d_j$ olduğundan, $\sum c_i = \sum d_j = ab$ elde edilir. □

Aslında $\sum c_n$ serisi $\sum d_n$ serisinden uygun ayraçlamayla elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}\sum d_n &= d_0 + (d_1 + d_2) + (d_3 + d_4 + d_5) + \cdots \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots \\ &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots\end{aligned}$$

Not 1.3.11. Sonuç 1.3.10'un Teorem 1.3.8'den iki farkı var: Birincisi burada koşullar daha güçlüdür, her iki serinin mutlak yakınsaklığı varsayılmıştır, ikincisi sav da daha güçlüdür, $\sum c_n$ serisinin mutlak yakınsaklığı ileri sürülmüştür. Okur, Sonuç 1.3.10'un Teorem 1.3.8'in kanıtına benzer bir kanıtını verebilir.

Problemler

Problem 1.3.1. (p_n) pozitif terimli bir dizi ise

$$\liminf \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \liminf \sqrt[n]{p_n} \leq \limsup \sqrt[n]{p_n} \leq \limsup \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.2. $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ ise

$$\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n \text{ ve } \underline{\lim}(a_n + b_n) \geq \underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$, $b_n > 0$, $0 < \lim b_n =: b \in \mathbb{R}$ ve $a := \overline{\lim} a_n$ ise, $ab = \overline{\lim} a_n b_n$ olduğunu gösteriniz. Bu önermede a_n ve b_n terimlerinin pozitifliğinden vazgeçilemeyeceğini örnekleyiniz.

Problem 1.3.4. Her $m \in \mathbb{N}^*$ için $\lim \sqrt[n]{\binom{mn}{n}} = \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.5. $\left(\frac{1}{(1+i)^n}\right)$, $\left(\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}\right)$ ve $r > 0$ için $\left(\frac{r^n}{n!}\right)$, $(n^n r^n)$ dizilerinin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

Problem 1.3.6. (z_n) dizisi yakınsak, (w_n) dizisi ıraksak olsunlar. $(z_n + w_n)$ dizisinin daima ıraksak, buna karşın $(z_n w_n)$ ve $(\frac{z_n}{w_n})$ dizilerinin özel durumlarda yakınsak olabileceğini gösteriniz.

Problem 1.3.7. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ düzgün sürekliyse, bir $a \in \partial\mathbb{D}$ noktasına yakınsayan her $(z_n) \subset \mathbb{D}$ dizisi için $(f(z_n))$ dizisinin aynı $F(a)$ değerine yakınsadığını, böylece f'nin bir sürekli $F : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$'ye genişletilebileceğini gösteriniz.

Problem 1.3.8. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $x_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \ln n$ olmak üzere, (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu ve $E := \lim x_n$ Euler sabiti için $\frac{1}{2} < E < \frac{3}{5}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.9. $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ ve $\lim z_n = a$ ise, $w_n = \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$ olmak üzere, $\lim w_n = a$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.10. $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton azalan ve $\lim a_n = 0$ ise $\sum a_n z^n$ serisi belki $z = 1$ dışında her $z \in \mathbb{S}$'de yakınsaktır, gösteriniz.

Problem 1.3.11. (a_n) dizisi yakınsak ve $\sum b_n$ serisi mutlak yakınsaksa $\sum a_n b_n$ serisinin de yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.12. $\alpha = \sum_{n\geq 0} a_n$ ve $\beta = \sum_{n\geq 0} b_n$ iki yakınsak seri olsun. $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ olmak üzere, $\sum_{n\geq 0} c_n$ de yakınsak ve toplam γ ise, $\gamma = \alpha\beta$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.13. Aşağıdaki serilerin hangileri mutlak yakınsaktır?

$$\sum \frac{(3+7i)^n}{n!}, \sum \frac{(1+i)n}{(n+1)(n+2)}, \sum n\left(\frac{i}{2}\right)^n, \sum \frac{(n+1)(2+i)^n}{n!}.$$

Problem 1.3.14. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını araştırıp, yakınsak olanların toplamlarını bulunuz:

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2+i3}\right)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n+1}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{4}\right)^n \sin\frac{n\pi}{6}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2+i)^n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

Problem 1.3.15. $\sum_{n\geq 0} \frac{(z)^{2^n}}{1-(z)^{2^{n+1}}}$ serisi hangi z noktalarında yakınsaktır? Özel olarak $z = \frac{1-\sqrt{2}i}{2}$ ve $z = \sqrt{2}+i$ için serinin toplamını bulunuz.

Problem 1.3.16. $\sum a_n$ serisinin yakınsaklığı için $\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ koşulunun gerekli olmadığını örnekleyiniz.

Problem 1.3.17. $\operatorname{Re} z_n \geq 0$ olmak üzere, $\sum z_n$ ve $\sum z_n^2$ serileri yakınsaksa $\sum |z_n|^2$ serisinin de yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 1.3.18. $\sum_{n\geq 0} \frac{i^n}{\sqrt{n+1}}$ serisinin yakınsak ancak mutlak yakınsak olmadığını gösteriniz.

Problem 1.3.19. $e := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ dersek, her $N \in \mathbb{N}^*$ için

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq e \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + \frac{1}{N(N!)}$$

olduğunu ve bir hesap makinası ile $e = 2.718\cdots$ olduğunu gösteriniz.

1.4 Banach Uzaylarında Diziler ve Seriler

Bu kısım ilk okumada atlanabilir. Bu kısımda $\mathbb{K}$'den, gördüğümüz her yerde, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismini anlayacağız. Şimdiye kadar $\mathbb{K}$'deki diziler ve serilerle ilgilendik ve birçok ortak teoreme tanık olduk. Bu ortak tanım ve teoremlerin aktarıldığı daha geniş bir alan $\mathbb{K}$-Banach uzaylarıdır. Burada onları tanıyacak ve I sayılabilir sonsuz bir küme olmak üzere, $(x_i)_{i\in I}$ ailelerini inceleyeceğiz. $\mathbb{K}$'nin kendisi de bir $\mathbb{K}$-Banach uzayı olduğundan, bu kısımda kanıtlananlar $\mathbb{K}$'de de geçerli olacaktır.

X bir $\mathbb{K}$-vektör uzayı olsun. Bir $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne, aşağıdaki koşullar sağlandığında X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir **normlu vektör uzayı** denir:

1. $\forall x \in X \;\; \|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\forall x \in X \;\; \forall \alpha \in \mathbb{K} \;\; \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,
3. $\forall x, y \in X \;\; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

Eğer ilk koşulumuzda yalnızca $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$ olmasını istersek, o zaman $\|\cdot\|$ bir **yarınorm**dur denir. Yarınormlarda da ikinci özellikten dolayı, $\alpha = 0$ alırsak $\|0\| = 0$ sağlanır; buna karşın $x \neq 0$ için de $\|x\| = 0$ olabilir!

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzaysa okur, her $x_1, \ldots, x_n, x, y \in X$ için

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| \text{ ve } |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

olduğunu kolayca görür. Buradaki ikinci eşitsizlikten dolayı, X'te aşağıdaki gibi tanımlanan norm topolojisine göre $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ norm fonksiyonu süreklidir.

X vektör uzayındaki her $\|\cdot\|$ normu doğal olarak X üzerinde

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

ile açıklanan bir metrik tanımlar; biz X uzayını bu metriğin belirlediği topolojiyle ele alacağız. Bu uzayda bir (x_n) dizisinin bir **Cauchy dizisi** olması, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir n_ε doğal sayısının, her $m, n \geq n_\varepsilon$ için $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesi demektir. Eğer (X, d) metrik uzayımız tamsa $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayımız bir **Banach uzayıdır** denir.

Her şeyden önce $\mathbb{K}$ cismimiz bir $\mathbb{K}$-vektör uzayıdır ve $\|x\| := |x|$ bu uzayda bir normdur ve $\mathbb{K}$'ye daima bu normla bir normlu vektör uzayı olarak da bakacağız. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ve $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ birer Banach uzaylarıdır; dolayısıyla bu kısımdaki teoremlerimizin aynı zamanda $\mathbb{K}$'de birer teorem olduğunu unutmayalım.

$\mathbb{K}$'deki birçok tanım ve kanıt olduğu gibi X Banach uzaylarına aktarılır; yapacağımız tek şey $\mathbb{K}$'deki $|z|$ yerine şimdi $||x||$ almaktır.

Tıpkı $\mathbb{K}$'deki dizilerde olduğu gibi X normlu vektör uzayımızda (x_n) ve (y_n) yakınsak dizilerse $(x_n \pm y_n)$ dizlerinin de yakınsak ve $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$ olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Yine okur (x_n) yakınsaksa her $\lambda \in \mathbb{K}$ için (λx_n) dizisinin de yakınsak ve $\lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n$ olduğunu kolayca görebilir. Hatta daha fazlası geçerlidir:

$(\lambda_n) \subset \mathbb{K}$ ve $(x_n) \subset X$ dizileri için $\lim \lambda_n = \lambda$ *ve* $\lim x_n = x$ *ise* $\lim \lambda_n x_n = \lim \lambda_n \cdot \lim x_n = \lambda x$, *dd.* $\mathbb{K} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *süreklidir.*

Bunu

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|\lambda(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x + (\lambda_n - \lambda)(x_n - x)\| \\ &\leq |\lambda| \cdot \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|x_n - x\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden görmeyi okura bırakıyoruz.

X uzayımızda bir $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ serisi için aşağıdaki kısaltmaları kullanacağız: Her $0 \leq m \leq n$ için

$$s_n := x_0 + \cdots + x_n \text{ ve } s_{m,n} := \sum_{m \leq k \leq n} x_k$$

(x_n) dizisine (s_n) **kısmi toplamlar dizisi** karşılık getirilmiştir.

Tanım 1.4.1. $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayında $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ dizisi verilsin. Buna karşılık getirilen $(s_n)_{n\geq 0}$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve $\lim s_n = a$ ise, $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ **serisi yakınsaktır** ve **toplamı** a'dır denir. Eğer $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$ serisi yakınsaksa $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir. Yakınsak ancak mutlak yakınsak olmayan serilere **koşullu yakınsak** denir.

(s_n) dizisi yakınsaksa bir **Cauchy dizisidir**, dd. $0 \leq m \leq n$ olmak üzere, m ve n sonsuza giderken $\|s_{m,n}\|$ 0'a gider; açık yazılımla

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N} \ \ (n_\varepsilon \leq m \leq n \Longrightarrow \|s_{m,n}\| < \varepsilon) .$$

Eğer X bir Banach uzayıysa, $\sum x_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (s_n)'nin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Dizilere ilişkin limit kuralları serilere ilişkin kurallara dönüşürler. Örneğin X normlu vektör uzayında $\sum x_n = a$ ve $\sum y_n = b$ ise, $\sum(x_n \pm y_n) = \sum x_n \pm \sum y_n = a \pm b$ ve her $\lambda \in \mathbb{K}$ için $\sum \lambda x_n = \lambda \left(\sum x_n\right) = \lambda a$.

Teorem 1.3.7(ii)'nin ikinci kanıtında $\mathbb{C}$ yerine bir X Banach uzayı, $z \in \mathbb{C}$ yerine $x \in X$ ve $|z|$ yerine ise $\|x\|$ alırsak, aşağıdaki teoremi verir:

Teorem 1.4.2. *X Banach uzayında mutlak yakınsak seriler yakınsaktır, hatta güçlü değişmeli yakınsaktır, dd. $\sum x_n$ serisi mutlak yakınsaksa hem kendisi hem de her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tameşlemesi için $\sum x_{\sigma(n)}$ serisi de yakınsaktır ve $\sum x_n = \sum x_{\sigma(n)}$.*

Bu önemli teorem Banach uzayı olmayan vektör uzaylarında geçerli değildir (bkz. Problem 1.4.6). Abel Ölçütü kanıtı aynı olmak üzere, Banach uzaylarında da geçerlidir.

Teorem 1.4.3 (Abel Ölçütü). *X Banach uzayında bir (x_n) dizisi ile bir $(\lambda_n) \subset \mathbb{K}$ dizisi verilmiş olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\sum \lambda_n x_n$ serisi yakınsaktır:*

(i) *Bir* $M > 0$ *sayısı, her* $n \leq m$ *için* $\|x_n + x_{n+1} + \cdots + x_m\| < M$ *olacak biçimde vardır.*

(ii) $\sum |\lambda_n - \lambda_{n+1}|$ *yakınsak ve* $\lim \lambda_n = 0$.

Bazen I damga kümesi $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Z}^k$ ve $\mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^k$ gibi kümeler olan $(x_i)_{i\in I}$ aileleriyle karşılaşırız ve bunlar için de bir toplam tanımlamak isteriz.

$\sum x_n$ serilerinde $\mathbb{N}$ damga kümesinin bir doğal sıralaması vardır ve serinin yakınsaklığının tanımında bu sıralama devreye girer. Şimdi I bir sonsuz damga kümesi ve X bir normlu $\mathbb{K}$-vektör uzayı olmak üzere, her $i \in I$ için bir $x_i \in X$ vektörü verilsin. Bu durumda X'te bir $(x_i)_{i\in I}$ **aile**si verilmiştir diyeceğiz. Burada I'nın bir doğal sıralaması yoktur.

$\mathcal{S}_I$ ile I damga kümesinin *sonlu* altkümelerinin ailesini gösterelim. I'nın bir doğal sıralaması yoksa da $\mathcal{S}_I$'nın bir $\subset$ doğal sıralaması vardır; bundan yararlanacağız. Her $J \in \mathcal{S}_I$ için sonlu $(x_i)_{i\in J}$ ailesinin s_J toplamı $J = \emptyset$ ise $s_\emptyset := 0$, ve $J \neq \emptyset$ ise $s_J := \sum_{i\in J} x_i$ olarak tanımlansın. Bundan sonra *sonsuz* ailelere odaklanacağız.

Tanım 1.4.4. X Banach uzayımızda $(x_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin. Aşağıdaki koşul sağlandığında $(x_i)_{i\in I}$ ailesi **toplanabilir** ve **toplamı** $a \in X$'tir denir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_\varepsilon \in \mathcal{S}_I \ \ \forall J \in \mathcal{S}_I \ \ (J_\varepsilon \subset J \Longrightarrow \|s_J - a\| < \varepsilon)$$

ve bu $\sum_{i\in I} x_i = a$ ile gösterilir.

$(x_i)_{i\in I}$ *ailesi toplanabilirse* a*'nın tek olarak belirli olduğu apaçıktır.* Gerçekten de $(x_i)_{i\in I}$ ailesinin X'te a ve a' vektörlerine toplanabilir olduğunu varsayalım. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $J_\varepsilon, J'_\varepsilon \in \mathcal{S}_I$ sonlu kümeleri $J_\varepsilon \subset J$ ve $J'_\varepsilon \subset J'$ koşullarını sağlayan her sonlu $J, J' \in \mathcal{S}_I$ için

$$\|s_J - a\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ ve } \ \left\|s_{J'} - a'\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde vardır. Şimdi $K \in \mathcal{S}_I$ kümesi $J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon \subset K$ olarak seçilirse

$$\left\|a - a'\right\| \leq \|a - s_K\| + \left\|s_K - a'\right\| < \varepsilon$$

olur. ε keyfi olduğundan, $a = a'$ elde edilir.

Toplanabilir aileler için okur şunları kolayca görebilir:

1. $(x_i)_{i\in I}$ toplanabilir ve toplamı a olsun. $\sigma : K \to I$ herhangi bir tameşleme ve $y_k := x_{\sigma(k)}$ ise, $(y_k)_{k\in K}$ ailesi de toplanabilir ve toplamı a'dır. Özel olarak $K = I$ alırsak, her $\sigma : I \to I$ tameşlemesi için $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ ailesi de a'ya toplanabilir. Toplanabilirlik bir anlamda bir *değişmeli* özelliktir.

2. $(x_i)_{i\in I}$ ve $(y_i)_{i\in I}$ aileleri toplanabilir ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise, $(x_i+y_i)_{i\in I}$ ve $(\lambda x_i)_{i\in I}$ aileleri de toplanabilir ve

$$\sum_{i\in I}(x_i+y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i \text{ ve } \sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda\left(\sum_{i\in I} x_i\right).$$

Aşağıdaki koşul sağlanmışsa $(x_i)_{i\in I}$ ailesi **Cauchy Ölçütü**'nü sağlar denir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_\varepsilon \in \mathcal{S}_I \ \forall K \in \mathcal{S}_I \ \ (J_\varepsilon \cap K = \emptyset \Longrightarrow \|s_K\| < \varepsilon).$$

Teorem 1.4.5 (Cauchy Ölçütü)**.** *X Banach uzayındaki bir $(x_i)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul* ***Cauchy Ölçütü****'nün sağlanmasıdır.*

Kanıt. (1) $(x_i)_{i\in I}$ toplanabilir ve toplamı a olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. ε için $J_\varepsilon \in \mathcal{S}_I$ kümesini her $J_\varepsilon \subset J \in \mathcal{S}_I$ için $\|s_J - a\| < \varepsilon/2$ olacak biçimde seçelim. $K \in \mathcal{S}_I$ kümesi $K \cap J_\varepsilon = \emptyset$ olacak biçimde keyfi verilsin. $J := J_\varepsilon \cup K \in \mathcal{S}_I$ ve $J_\varepsilon \subset J$ olduğundan,

$$\|s_K\| = \|s_J - s_{J_\varepsilon}\| \leq \|s_J - a\| + \|s_{J_\varepsilon} - a\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir, dd. Cauchy Ölçütü sağlanır.

(2) Şimdi Cauchy Ölçütü sağlansın. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\varepsilon_n := 1/n$ olsun. Her ε_n için $J_n \in \mathcal{S}_I$ kümeleri, ölçütte olduğu gibi, $K \cap J_n = \emptyset$ koşulunu sağlayan her $K \in \mathcal{S}_I$ için $\|s_K\| < \varepsilon_n$ olacak biçimde seçilsinler. $y_n := s_{J_n}$ olarak tanımlansın. Her $n \geq m$ için $(J_n \backslash J_m) \cap J_m = \emptyset$ olduğundan,

$$\|y_n - y_m\| = \left\|s_{J_n \backslash J_m}\right\| < \varepsilon_m = \frac{1}{m}$$

olur. Dolayısıyla, (y_n) dizisi X'te bir Cauchy dizisidir ve bir a vektörüne yakınsar. Biz $(x_i)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir ve toplamının a olduğunu savunuyoruz.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $n_\varepsilon \geq 1$ doğal sayısını ise, her $n \geq n_\varepsilon$ için $\|y_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\frac{1}{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçelim. $J_{n_\varepsilon} \subset J$ koşulunu sağlayan her $J \in \mathcal{S}_I$ için $K = J \backslash J_{n_\varepsilon}$ olmak üzere,

$$\|s_J - a\| \leq \left\|s_J - s_{J_{n_\varepsilon}}\right\| + \left\|s_{J_{n_\varepsilon}} - a\right\| = \|s_K\| + \|y_{n_\varepsilon} - a\| < \frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olur. Tanım gereği $(x_i)_{i\in I}$ toplanabilir ve toplamı a'dır. □

Sonuç 1.4.6. *X Banach uzayında $(x_i)_{i\in I}$ ailesi toplanabilirse, her $K \subset I$ için $(x)_{i\in K}$ ailesi de toplanabilir.*

Kanıt. Cauchy Ölçütü $(x_i)_{i\in I}$ için sağlandığından, $(x_i)_{i\in K}$ için de sağlanır. □

Önerme 1.4.7. *X normlu uzayındaki $(x_i)_{i\in I}$ ailesi toplanabilirse aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) *Her $\varepsilon > 0$ için $\|x_i\| \geq \varepsilon$ ancak sonlu sayıda $i \in I$ için doğrudur, dd. sonlu sayıda x_i dışındakilerin tümü B_ε açık topundadır.*

(ii) *$\{i \mid x_i \neq 0\}$ sayılabilirdir.*

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin; J_ε ise Cauchy Ölçütü'ndeki gibi seçilsin. Her $j \in I \backslash J_\varepsilon$ için $x_j = s_{\{j\}} \in B_\varepsilon$ olur, dd. $\|x_i\| \geq \varepsilon$ ise $i \in J_\varepsilon$.

(ii) $\bigcap_{n\geq 1} B_{\frac{1}{n}} = \{0\}$. (i)'den dolayı $J_n := \{i \in I \mid x_i \notin B_{\frac{1}{n}}\}$ sonludur, dolayısıyla $\bigcup_{n\geq 1} J_n = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ sayılabilir. □

Uzlaşma: Eğer bir $(x_i)_{i\in I}$ ailesi toplanabilirse $J = \{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ sayılabilirdir. $(x_i)_{i\in I}$ ve $(x_j)_{i\in J}$ ailelerinin toplanabilme karakterleri ve toplamları aynı olduğundan, bundan sonra yalnızca sayılabilir sonsuz aileleri inceleyeceğiz.

Teorem 1.4.8. *X bir Banach uzayıysa, sayılabilir sonsuz $(x_i)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir olması, her $\sigma : \mathbb{N} \to I$ tameşlemesi için $\sum_{n\geq 0} x_{\sigma(n)}$ serisinin yakınsak olmasına denktir. Ayrıca, $\sum_{i\in I} x_i = a$ ise, her σ için $\sum_{n\geq 0} x_{\sigma(n)} = a$.*

Sonuç 1.4.9. *Banach uzaylarında seriler için değişmeli yakınsaklık ve güçlü değişmeli yakınsaklık denk kavramlardır.*[11]

Kanıt. (1) $(x_i)_{i\in I}$ ailesi toplanabilir ve toplamı a olsun. $\sigma : \mathbb{N} \to I$ herhangi bir tameşleme ise, $\sum x_{\sigma(n)}$ serisinin yakınsak ve toplamının a olduğunu kanıtlayacağız. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Varsayımdan dolayı sonlu bir $M_\varepsilon \in \mathcal{S}_I$ kümesi $M_\varepsilon \subset M$ koşulunu sağlayan her $M \in \mathcal{S}_I$ için $\|s_M - a\| < \varepsilon$ olacak biçimde vardır. $M_n := \{x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\}$ olmak üzere, bir n_ε doğal sayısını $M_\varepsilon \subset \{x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n_\varepsilon)}\}$ olacak biçimde seçelim. Her $n \geq n_\varepsilon$ için $M_\varepsilon \subset M_n \in \mathcal{S}_I$ olacağından, $s_n^\sigma := \sum_{k=0}^n x_{\sigma(k)}$ için

$$\|s_n^\sigma - a\| = \|s_{M_n} - a\| < \varepsilon$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\sum x_{\sigma(n)}$ serisi yakınsaktır ve toplamı a'dır.

(2) Her $\sigma : \mathbb{N} \to I$ tameşlemesi için $\sum x_{\sigma(n)}$ yakınsak olsun. Ailemizi toplanabilir olmadığını varsayalım. O zaman Cauchy Ölçütünü sağlamaz. Bu durumda,

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall J \in \mathcal{S}_I \;\; \exists K = K(J) \in \mathcal{S}_I \;\; (J \cap K = \emptyset \wedge \|s_K\| \geq \varepsilon)\,.$$

$\emptyset$'e karşılık bir $\emptyset \neq K_0 \in \mathcal{S}_I$'yı $\|s_{K_0}\| \geq \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. Ardından K_0 ile ayrık bir $\emptyset \neq K_1 \in \mathcal{S}_I$ kümesini $\|s_{K_1}\| \geq \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. Ardından

[11] Güçlü değişmeli yakınsaklık ve değişmeli yakınsaklık kavramları normlu vektör uzaylarda denk kavramlar değildirler. Genelde Banach uzaylarında çalışıldığından, bu ayrım gözden kaçar.

$K_0 \sqcup K_1$ ile ayrık bir $\emptyset \neq K_2 \in \mathcal{S}_I$ kümesini $\|s_{K_2}\| \geq \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. Böylece tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için boştan farklı ve ayrık $K_n \in \mathcal{S}_I$ kümeleri $\|s_{K_n}\| \geq \varepsilon$ olacak biçimde seçilir. Şimdi bir $\sigma : \mathbb{N} \to I$ tameşlemesini şöyle seçelim: Her $p \in \mathbb{N}$ için $\sigma^{-1}(K_p)$ birbirini izleyen $n_p, n_p+1, \ldots, n_p+m_p$ doğal sayılarından oluşsun[12]. $y_n := x_{\sigma(n)}$ olmak üzere,

$$\left\|\sum_{k=n_p}^{n_p+m_p} y_k\right\| = \left\|\sum_{k=n_p}^{n_p+m_p} x_{\sigma(k)}\right\| = \left\|\sum_{i\in K_p} x_i\right\| \geq \varepsilon$$

ve elimizde sonsuz tane ayrık K_p bulunduğundan, $\sum y_n$ serisi Cauchy Ölçütü'nü sağlamaz, dolayısıyla yakınsak değildir. Bu, hipotezimizle çelişir. $(x_i)_{i\in I}$ Cauchy Ölçütü'nü sağlar, dolayısıyla Teorem 1.4.5'ten dolayı toplanabilir. Toplama a dersek, (1)'den dolayı her $\sigma : \mathbb{N} \to I$ tameşlemesi için $\sum x_{\sigma(n)} = a$ olur.

Sonucun kanıtı: Güçlü değişmeli yakınsak seriler tanım gereği değişmeli yakınsaktır. Bir $\sum x_n$ serisi değişmeli yakınsaksa, teoremimizden dolayı $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi toplanabilir. Eğer toplam a ise, tüm $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tameşlemeleri için $\sum_{n\geq 0} x_{\sigma(n)} = a$ olur, dolayısıyla $\sum x_n$ serisi güçlü değişmeli yakınsaktır. □

Önerme 1.4.10. *$(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ ailesi I damga kümesinin bir sonlu parçalanışı olsun ve X normlu uzayımızda $(x_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin.*

(i) Her $\lambda \in L$ için $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ toplanabilirse $(x_i)_{i\in I}$ ailesi de toplanabilir ve

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\lambda\in L}\Big(\sum_{i\in I_\lambda} x_i\Big)$$

(ii) Eğer ayrıca X bir Banach uzayıysa, $(x_i)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul, her $\lambda \in L$ için $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ ailesinin toplanabilir olmasıdır ve bu durumda elbette yukarıdaki formül yine geçerlidir.

Kanıt. (i) Şimdi L iki ögeli, örneğin $L = \{1,2\}$ olsun. $(x_i)_{i\in I_1}$ ve $(x_i)_{i\in I_2}$ aileleri toplanabilir ve toplamları a_1 ve a_2 olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $J_{\varepsilon n} \in \mathcal{S}_{I_n}$ kümelerini her $J_{\varepsilon n} \subset H_n \in \mathcal{S}_{I_n}$ için $\left\|\sum_{i\in H_n} x_i - a_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçelim. $J_\varepsilon := J_{\varepsilon 1} \sqcup J_{\varepsilon 2} \in \mathcal{S}_I$ olmak üzere, her $J_\varepsilon \subset J \in \mathcal{S}_I$ için $J_k = J \cap I_k$ dersek,

$$\left\|\sum_{i\in J} x_i - (a_1+a_2)\right\| \leq \left\|\sum_{i\in J_1} x_i - a_1\right\| + \left\|\sum_{i\in J_2} x_i - a_2\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Böylece $(x_i)_{i\in I}$ toplanabilir ve $\sum_{i\in I} x_i = a_1 + a_2$. Buradan önerme tümevarımla, her sonlu L için kanıtlanır.

---

[12]Bunu görmeyi okura bırakıyoruz. Ancak $K := \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ olmak üzere, $K = I$ olması gerekmediğini belirtelim. $I \setminus K$'nin sonlu ve sayılabilir sonsuz olma durumlarını ayrı ayrı ele alıp önce σ^{-1}'i tanımlayınız.

(ii) $(x_i)_{i\in I}$ toplanabilirse Sonuç 1.4.6'dan her $\lambda \in L$ için $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ toplanabilir ve sav, (i)'den çıkar. □

Not 1.4.11. Önerme 1.4.10 (i)'de L'yi sonsuz alamayız. Örneğin I sonsuz kümesi iki ögeli I_λ $(\lambda \in L)$ kümelerine parçalansın. Elbette L sonsuzdur. Ayrıca, her $\lambda \in L$ için $\{x_i \,|\, i \in I_\lambda\} = \{-1, 1\}$ olsun. Her $\lambda \in L$ için $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ toplanabilirken $(x_i)_{i\in I}$ ailesi $\mathbb{R}$'de toplanamaz! Buna karşın $(x_i)_{i\in I}$ ailesi toplanabilirse "Birleştirme Teoremi" de denilen aşağıdaki "Paketleme Teoremi" geçerlidir:

Teorem 1.4.12 (Paketleme Teoremi)**.** *X Banach uzayındaki $(x_i)_{i\in I}$ ailesi toplanabilir ve $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ ise I damga kümesinin herhangi bir parçalanışı olsun. Her $\lambda \in L$ için $a_\lambda := \sum_{i\in I_\lambda} x_i$ olmak üzere, $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ ailesi toplanabilir ve*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\lambda\in L} a_\lambda, \text{ dd. } \sum_{i\in\bigsqcup_{\lambda\in L} I_\lambda} x_i = \sum_{\lambda\in L}\Big(\sum_{i\in I_\lambda} x_i\Big).$$

Kanıt. Her şeyden önce Sonuç 1.4.6'dan dolayı, her $\lambda \in L$ için $(x_i)_{i\in I_\lambda}$ toplanabilir ve a_λ'nın tanımı kusursuzdur. $a := \sum_{i\in I} x_i$ olsun. Her $J \in \mathcal{S}_I$ ve her $K \in \mathcal{S}_L$ için $s_J = \sum_{i\in J} x_i$ ve $t_K = \sum_{\lambda\in K} a_\lambda$ olsun.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Sonlu bir $K_\varepsilon \subset L$ kümesinin $K_\varepsilon \subset K$ olan her $K \in \mathcal{S}_L$ için $\|t_K - a\| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlarsak işimiz biter.

$\sum_{i\in I} x_i = a$ olduğundan, $J_\varepsilon \in \mathcal{S}_I$ kümesi

$$\forall J \in \mathcal{S}_I \ \left(J_\varepsilon \subset J \Longrightarrow \|s_J - a\| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{1.20}$$

olacak biçimde seçilebilir.

$K_\varepsilon := \{\lambda \in L \,|\, I_\lambda \cap J_\varepsilon \neq \emptyset\}$ kümesi sonludur. $K \in \mathcal{S}_L$ kümesi $K_\varepsilon \subset K$ olacak biçimde verilsin. K'nin öge sayısı n olsun. $\sum_{i\in I_\lambda} x_i = a_\lambda$ olduğundan, her $\lambda \in K$ için bir sonlu $H_\lambda \subset I_\lambda$ kümesi $I_\lambda \cap J_\varepsilon \subset H_\lambda$ ve

$$\|s_{H_\lambda} - a_\lambda\| < \frac{\varepsilon}{2n} \tag{1.21}$$

olacak biçimde seçilebilir. $J = \bigsqcup_{\lambda\in K} H_\lambda$ sonludur ve $J_\varepsilon \subset J$ olduğundan, (1.20) ve (1.21) ile

$$\left\|\sum_{\lambda\in K} s_{H_\lambda} - a\right\| = \left\|\sum_{i\in J} x_i - a\right\| = \|s_J - a\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\begin{aligned}\|t_K - a\| &= \left\|\sum_{\lambda\in K} a_\lambda - a\right\| = \left\|\sum_{\lambda\in K}(a_\lambda - s_{H_\lambda}) + \sum_{\lambda\in K} s_{H_\lambda} - a\right\| \\ &\leq \sum_{\lambda\in K} \|a_\lambda - s_{H_\lambda}\| + \left\|\sum_{\lambda\in K} s_{H_\lambda} - a\right\| < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$ toplanabilir ve $\sum_{\lambda\in K} a_\lambda = a$. □

Tanım 1.4.13. X normlu uzayında $(x_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin. $(\|x_i\|)_{i\in I}$ ailesi $\mathbb{R}$'de toplanabilirse $(x_i)_{i\in I}$ ailesi **mutlak toplanabilir** denir.

Teorem 1.4.14. *Banach uzaylarında mutlak toplanabilir aileler toplanabilir. Özellikle $\mathbb{K}$'de verilen $(x_i)_{i\in I}$ ailesi için $(|x_i|)_{i\in I}$ toplanabilirse $(x_i)_{i\in I}$ de toplanabilir.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $(\|x_i\|)_{i\in I}$ toplanabilirse bir $J_\varepsilon \in \mathcal{S}_I$ sonlu kümesi $K \cap J_\varepsilon = \emptyset$ koşulunu sağlayan her $K \in \mathcal{S}_I$ için $\sum_{i\in K} \|x_i\| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda ise,

$$\|s_K\| = \left\|\sum_{i\in K} x_i\right\| \leq \sum_{i\in K} \|x_i\| < \varepsilon$$

olur ve Cauchy Ölçütü'nden dolayı $(x_i)_{i\in I}$ ailesi yakınsaktır. □

Teorem 1.4.15. *$\mathbb{K}$'deki $(x_i)_{i\in I}$ ailesi için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *$(x_i)_{i\in I}$ ailesi toplanabilir.*

(ii) *$(|x_i|)_{i\in I}$ ailesi toplanabilir.*

Kanıt. (ii)$\Longrightarrow$(i): Bu doğrudan Teorem 1.4.14'ten çıkar.

(i)$\Longrightarrow$(ii): Savımızı önce $\mathbb{R}$'de toplanabilir $(x_i)_{i\in I}$ aileleri için kanıtlayalım: $I_p := \{i \,|\, x_i \geq 0\}$ ve $I_n := \{i \,|\, x_i < 0\}$ olsun. Sonuç 1.4.6'dan dolayı, $(x_i)_{i\in I_p} = (|x_i|)_{i\in I_p}$ ve $(x_i)_{i\in I_n}$ aileleri toplanabilir. $(x_i)_{i\in I_n}$ ailesi toplanabilir olduğundan, $(-x_i)_{i\in I_n} = (|x_i|)_{i\in I_n}$ ailesi de toplanabilir. $I = I_p \sqcup I_n$ olduğundan, Önerme 1.4.10'dan dolayı $(|x_i|)_{i\in I}$ toplanabilir.

Şimdi $\mathbb{C}$'de toplanabilir $(z_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin ve $z_i = (x_i, y_i)$ olsun. Elbette $(\overline{z_i})_{i\in I}$ ailesi de toplanabilir. $x_i = \frac{1}{2}(z_i + \overline{z_i})$ ve $y_i = \frac{1}{2i}(z_i - \overline{z_i})$ olduğundan, toplanabilir ailelerin toplam ve farkları olarak $(x_i)_{i\in I}$ ve $(y_i)_{i\in I}$ aileleri toplanabilir. Dolayısıyla, az önce kanıtladığımızdan $(|x_i|)_{i\in I}$ ve $(|y_i|)_{i\in I}$ aileleri toplanabilir. $|z_i| \leq |x_i| + |y_i|$ olduğundan, Problem 1.4.8 ile $(|z_i|)_{i\in I}$ toplanabilir. □

Teorem 1.4.16. *I sayılabilir sonsuz ise, $\mathbb{K}$'deki her $(x_i)_{i\in I}$ ailesi için aşağıdaki önermeler denktir:*

(i) *$(x_i)_{i\in I}$ değişmeli yakınsaktır, dolayısıyla Sonuç 1.4.9 ile güçlü değişmeli yakınsaktır.*

(ii) *$(x_i)_{i\in I}$ toplanabilir.*

(iii) *$(|x_i|)_{i\in I}$ toplanabilir.*

Kanıt. Teorem 1.4.8, Sonuç 1.4.9 ve Teorem 1.4.15. □

Bu teorem oldukça güçlüdür ve daha önce çarpım serilerine ilişkin elde ettiğimiz teoremleri bir başka yoldan kolayca kazanmamızı sağlar (bkz. Problem 1.4.9).

Teorem 1.4.17. *Sonlu boyutlu Banach uzaylarında toplanabilirlik ve mutlak toplanabilirlik denk kavramlardır.*

Kanıt. Sonlu boyutlu V Banach uzayı verilsin. $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ ise, V vektör uzayımızı $\mathbb{K}^n$ varsayabiliriz. $\mathbb{K}^n$'de tüm normlar denk olduğundan (bkz. Problem 1.4.4), normumuzun $\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = |x_1| + \cdots + |x_n|$ olduğunu varsayabiliriz. $\mathbb{K}^n$'de verilen bir $(x_i)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir olması, bileşenlerden oluşan her bir $(x_{ik})_{i\in I}$, $(1 \le k \le n)$ ailesinin toplanabilir olmasına denktir. Bu ise, Teorem 1.4.15'ten dolayı, her k için $(|x_{ik}|)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir olmasına denktir. Her k için $(|x_{ik}|)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir olmasıysa $(\|x_i\|)_{i\in I}$ ailesinin toplanabilir olmasına denktir. □

Pozitif terimli aileler için Paketleme Teoremi daha güzel bir şekil alır.

Teorem 1.4.18. *$(x_i)_{i\in I}$ herhangi bir pozitif aile ve $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ ise I'nın herhangi bir parçalanışı olsun. $(x_i)_{i\in I}$'nin toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul, her $\lambda \in L$ için $(x_i)_{i\in I_\lambda}$'nin toplanabilir olması ve bu toplama p_λ dersek, $\sum_{\lambda\in L} p_\lambda$'nın yakınsak olmasıdır. Bu durumda,*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\lambda\in L}\left(\sum_{i\in I_\lambda} x_i\right).$$

Kanıt. Bir yön Paketleme Teoremi'dir. Diğer yön ise, $p = \sum_{\lambda\in L} p_\lambda$ dersek, $\sup\{s_J \mid J \in \mathcal{S}_I\} \le p < +\infty$'dan çıkar (bkz. Problem 1.4.7). □

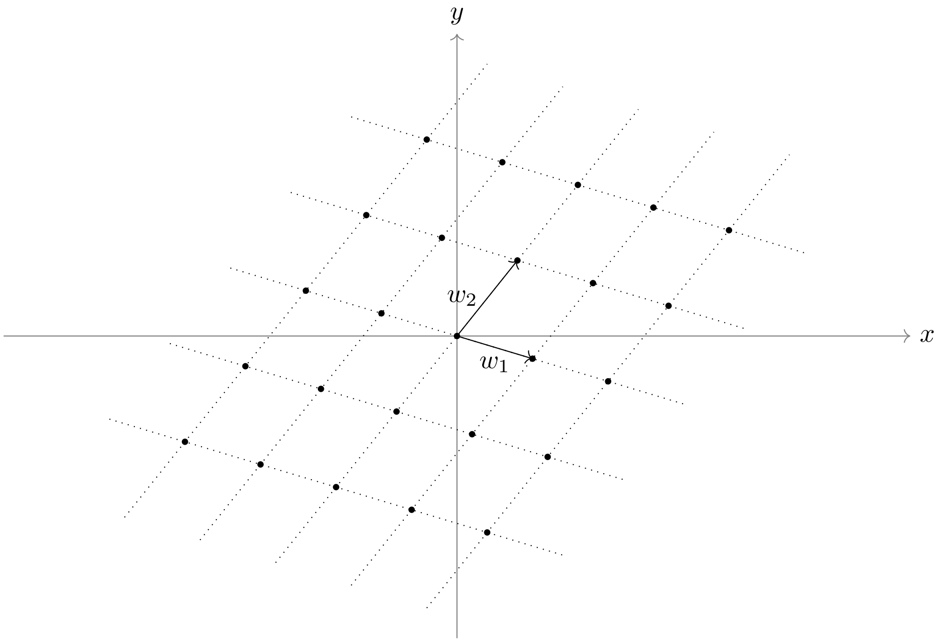
$w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$ kompleks sayıları $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız olsunlar. Dolayısıyla, $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$. Bu koşulda

$$\Omega \equiv \Omega(w_1, w_2) := \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

kafesi $\mathbb{C}$'nin bir ayrık ve kapalı altgrubudur. $\Omega^* := \Omega\setminus\{0\}$ olsun.

Önerme 1.4.19. *$\alpha > 2$ için $(|w|^{-\alpha})_{\alpha\in\Omega^*}$ ailesi toplanabilir.*

Kanıt. Ailemiz pozitif terimli olduğundan, terimlerini herhangi bir biçimde sıralayarak elde edilen bir serinin yakınsaklığını göstermek yeterlidir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\Omega_k := \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid |m_1| \le k, |m_2| \le k\}$ olsun. Ω_k'nin öge sayısı $(2k+1)^2$, $\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}$'in öge sayısıysa $8k$'dir. Şimdi köşeleri $0, w_1, w_2, w_1 + w_2$



Şekil 1.2: Kafes.

olan paralelkenarın yüksekliklerinin küçük olanın uzunluğu h olsun. Bu durumda, 5.3.5 ile

$$\sum_{w\in\Omega^*}\frac{1}{|w|^\alpha}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{w\in\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}\frac{1}{|w|^\alpha}\right)\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{8}{h^k}\frac{1}{k^{\alpha-1}}<+\infty$$

olur ve sav, Teorem 1.4.18'den çıkar. □

$\mathbb{R}^2$'de tüm normlar denk olduklarından, Önerme 1.4.19'da $\Omega=\mathbb{Z}^2$ alırsak —bu, $w_1=1$ ve $w_2=i$ demektir—, ve $||(x,y)||_1=|x|+|y|$ normuna geçersek

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{\mathbf{0}\}}\frac{1}{(|p|+|q|)^3}<+\infty.$$

Problemler

Problem 1.4.1. X bir Banach uzayı, $(x_n)\subset X$ bir dizi ve $a\in X$ olsun. (x_n) dizisinin her altdizisinin a'ya yakınsak bir altdizisi varsa, (x_n) dizisinin kendisinin de a'ya yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 1.4.2. Normdan kaynaklanan bir metrik için:

(a) $\forall x, y, a \in X \, : d\,(x-a, y-a) = d(x,y)$ (Ötelemeye göre değişmezlik),

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall x, y \in X \, : d\,(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, d(x,y)$ (homoteti)

sağlandığını gösteriniz.

Problem 1.4.3. Tersine, X vektör uzayında Problem 1.4.2'deki (a) ve (b) özelliklerini sağlayan her d metriğinin bize X üzerinde $\|x\| := d(x,0)$ ile tanımlanan bir norm verdiğini kanıtlayınız.

Problem 1.4.4. $n \in \mathbb{N}^*$ ve $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ olmak üzere, $\|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ ve

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|\,, \|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

olarak tanımlanan $\|\cdot\|_\infty\,, \|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ fonksiyonlarının her birinin $\mathbb{K}^n$ vektör uzayında bir norm olduğunu gösteriniz.

Problem 1.4.5. X vektör uzayında verilen iki $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|^*$ normu için $p, q > 0$ gerçel sayıları her $x \in X$ için $p\,\|x\| \le \|x\|^* \le q\,\|x\|$ olacak biçimde bulunabiliyorsa bu iki norma **denk**tir denir. Denk normların X uzayında aynı topolojiyi tanımladığını ve $\mathbb{K}^n$ üzerindeki herhangi iki normun birbirine denk olduğunu kanıtlayınız.

Problem 1.4.6. X normlu vektör uzayının bir Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul X'teki her mutlak yakınsak serinin yakınsak olmasıdır; kanıtlayınız.

Problem 1.4.7. $(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ ve her $i \in I$ için $x_i \ge 0$ ise, $(x_i)_{i \in I}$'nin toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul $\sup\{s_J \mid J \in \mathcal{S}_I\} < +\infty$ olmasıdır ve bu durumda $\sum_{i \in I} x_i = \sup\{s_J \mid J \in \mathcal{S}_I\}$.

Problem 1.4.8. $k \ge 0$ ve her $i \in I$ için $0 \le x_i \le k y_i$ olsun. $(y_i)_{i \in I}$ toplanabilirse $(x_i)_{i \in I}$ de toplanabilir ve $\sum_{i \in I} x_i \le k \cdot \sum_{i \in I} y_i$.

Problem 1.4.9. Karmaşık terimli $(z_\lambda)_{\lambda \in L}$ ve $(w_\mu)_{\mu \in M}$ aileleri toplanabilir ve toplamları sırasıyla a ve b ise, $(z_\lambda w_\mu)_{(\lambda,\mu) \in L \times M}$ ailesin de toplanabilir ve

$$\sum_{(\lambda,\mu) \in L \times M} z_\lambda w_\mu = \sum_{\lambda \in L} \left(\sum_{\mu \in M} z_\lambda w_\mu \right) = \sum_{\mu \in M} \left(\sum_{\lambda \in L} z_\lambda w_\mu \right) = ab.$$

Gösteriniz. İpucu: Paketleme Teoremi ve Teorem 1.4.15.

Problem 1.4.10. $\mathbb{R}^m$'deki herhangi bir $||\cdot||$ normu için $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^m \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{1}{\|x\|^\alpha} < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > m$$

olduğunu gösteriniz.

1.5 Fonksiyon Uzayları ve Topolojileri

X herhangi bir küme olmak üzere, bir $d : X \times X \to [0, +\infty]$ dönüşümü metrik tanımının tüm koşullarını sağlarsa d'ye X'te bir **pseudometrik**, eğer d

dönüşümü bir yarımetriğin tüm koşullarını sağlıyorsa, d'ye X'te bir **pseudoyarımetrik** diyelim. Bunların bir metrikten ve bir yarımetrikten tek farkı, farklı iki noktanın birbirine uzaklıklarının $+\infty$ olabilmesine izin verilmiş olmasıdır. Benzer biçimde bir vektör uzayındaki norm ve yarınorm tanımlarında ilk koşulu $0 \leq \|x\| \leq +\infty$ olarak zayıflatırsak, **pseudonorm** ve **pseudoyarınorm** kavramlarına ulaşırız[13]. Bunlarda bir $x \neq 0$ vektörü için $\|x\| = +\infty$ olmasına da izin veriyoruz.

X ve Y herhangi iki küme olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonlarının kümesini $\mathcal{F}(X, Y)$ ile göstereceğiz.

Şimdi X herhangi bir küme ve (Y, d) bir metrik uzay olsun. Özel olarak $Y = \mathbb{C}$ ise, d olarak $\mathbb{C}$'deki doğal metriği alacağız, dd. $\forall z, w \in \mathbb{C} : d(z, w) = |z - w|$ olacaktır.

$f, f_1, f_2, f_3, \cdots \in \mathcal{F}(X, Y)$ olmak üzere, $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $(f_n(x))$ dizisi Y uzayında $f(x)$'e yakınsaksa (f_n) dizisi f'ye A'**da (noktasal) yakınsaktır** denir ve bu durumu $f_n \overset{A}{\to} f$ ile göstereceğiz; $A = X$ durumundaysa yalın olarak $f_n \to f$ de yazacağız. Açık yazılımla $f_n \overset{A}{\to} f$'dan aşağıdaki önerme anlaşılacaktır:

$$\forall a \in A \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon(a) \;\; \forall n \in \mathbb{N} \, (n \geq n_\varepsilon(a) \Longrightarrow d(f_n(a), f(a)) < \varepsilon) \, .$$

Noktasal yakınsaklık iyi bir yakınsaklık kavramı değildir. Örneğin $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x^n$ alırsak, (f_n) dizisi X'te noktasal yakınsaktır. Her bir f_n fonksiyonu X'te sürekli iken f limit fonksiyonumuz $x = 1$ noktasında sürekli değildir. Bu nedenle, gerçel analizde düzgün yakınsak dizilere geçilir. Ancak bu kavram bile gerçel analizde tam isteneni sağlamaz! Örneğin Weierstrass Teoremi'nden biliyoruz ki, her sürekli $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $[0, 1]$'de f fonksiyonuna düzgün yakınsak olan bir (p_n) polinom dizisi bulabiliriz. Polinomlar her mertebeden sürekli türevlenebilirler; ancak biz $[0, 1]$'de türevlenemeyen sürekli fonksiyonlar olduğunu biliyoruz. Demek ki, düzgün yakınsaklık türevlenebilir fonksiyonların limitlerinin türevlenebilir olmasını garantilemiyor. Buna karşın kompleks analizde daha şanslı olduğumuzu ileride göreceğiz.

$\emptyset \neq A \subset X$ olsun. Her $f, g \in \mathcal{F}(X, Y)$ için

$$d_A(f, g) := \sup_{x \in A} d(f(x), g(x)) \in [0, +\infty]$$

olsun. d_A, $\mathcal{F}(X, Y)$'de bir pseudoyarımetriktir ve $d_A(f, g) = 0 \Longleftrightarrow f|A = g|A$. Dolayısıyla, $A \subsetneq X$ ve $d_A(f, g) = 0$ ise $f = g$ olması gerekmez; bu nedenle, d_A

[13] Genelde "pseudo" ön eki de "yarı" olarak dilimize çevrilir. Metrik ve norm tanımında, bunların tanım ve değer bölgelerini değiştirmeden koşulların biri zayıflatıldığında "yarı" ön ekini, koşullar korunup değer kümesi $+\infty$ ile genişletildiğinde ise "pseudo" ön ekini kullandık.

bir pseudoyarımetriktir. Buna karşın $d_X(f,g) = 0 \Longleftrightarrow f = g$ olduğundan, d_X bir pseudometriktir.

d_A gösteriminde d imi Y'nin metriğini vurgular. Bizim için özünde (Y,d) metrik uzayımız ya Öklid metriği ile $(\mathbb{C},d)$ ya da kiriş metriğiyle (Kısım 3.6'ya bkz.) $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$ olacaktır.

Belki bazen $+\infty$ değeri almak dışında d_X dönüşümü, görüldüğü gibi, bir metriğin tüm özelliklerine sahiptir. Bu pseudometrikle $\mathcal{F}(X,Y)$ uzayında açık toplar ve onlar aracılığıyla bir topoloji, aynen metrik uzaylarda olduğu gibi tanımlanır. d_X ile $\mathcal{F}(X,Y)$'de tanımlanan topolojiye **düzgün yakınsaklık topolojisi** denir. $f, f_1, f_2, f_3, \dots \in \mathcal{F}(X,Y)$ ve $A \subset X$ olmak üzere, (f_n) dizisinin f'ye A'**da düzgün yakınsak** olmasından,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ (n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d_A(f_n, f) < \varepsilon)\,, \tag{1.22}$$

dd. $\lim d_A(f_n|A, f|A) = 0$ anlaşılacaktır ve bu durumu $f_n \overset{A}{\Longrightarrow} f$ ile göstereceğiz. $A = X$ durumunu yalın olarak $f_n \Longrightarrow f$ olarak göstereceğiz.

Not 1.5.1. Eğer Y bir $\mathbb{K}$-vektör uzayıysa, $\mathcal{F}(X,Y)$ de bilindik işlemlerle bir $\mathbb{K}$-vektör uzayıdır. Eğer ayrıca Y bir normlu uzay ve normu $\|\cdot\|$ ise her $\emptyset \neq A \subset X$ için

$$\|f\|_A := \sup_{x \in A} \|f(x)\|$$

bize $\mathcal{F}(X,Y)$'de bir pseudoyarınorm verir. Bu nedenle, $\|\cdot\|_X$,

$$\mathcal{B}(X,Y) := \left\{ f \in \mathcal{F}(X,Y) \mid \|f\|_X < +\infty \right\}$$

vektör uzayında bir norm, $\|\cdot\|_A$ ise

$$\mathcal{B}_A(X,Y) := \left\{ f \in \mathcal{F}(X,Y) \mid \|f\|_A < +\infty \right\}$$

vektör uzayında bir yarınormdur. Biz $Y = \mathbb{C}$'ye odaklanacağız, çünkü konumuz gereği bizi $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ ilgilendirmektedir. Ancak izleyen sayfalarda verilen tanımlar Y bir normlu vektör uzay olmak üzere $\mathcal{F}(X,Y)$'ye aktarılabilir ve teoremlerin hemen hemen hepsi bir Y Banach uzayı için $\mathcal{F}(X,Y)$'de de geçerlidir.

Özel olarak $Y = \mathbb{C}$ olsun. Her $\emptyset \neq A \subset X$ ve $f : X \to \mathbb{C}$ için

$$\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|\,.$$

olur. Elbette $0 \leq \|f\|_A \leq +\infty$ ve $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ için

$$d_A(f,g) = \|f - g\|_A\,.$$

Bu gösterimle (1.22) şu şekli alır:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ (n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|f_n - f\|_A < \varepsilon)$$

$\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır. $\|\cdot\|_A$ neredeyse $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$'de bir yarınorm ve $\|\cdot\|_X$ neredeyse $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$'de bir norm gibidir.

$$\mathcal{B}(X,\mathbb{C}) := \{ f \mid f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{C}),\ \|f\|_X < +\infty \}$$

uzayı X kümesindeki $\mathbb{C}$-değerli **sınırlı** fonksiyonların uzayıdır. $\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ uzayımız $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$'nin bir alt vektör uzayıdır ve $\|\cdot\|_X$ bu alt vektör uzayında bir normdur. $(\mathcal{B}(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_X)$ bir normlu vektör uzayıdır. Bu normla $\mathcal{B}(X,\mathbb{C})$'de tanımlanan topoloji tam da d_X metriğinden kaynaklanan topolojidir. $\|\cdot\|_A$ ise,

$$\mathcal{B}_A(X,\mathbb{C}) := \{f \mid f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{C}),\ \|f\|_A < +\infty\}$$

vektör uzayında bir yarınormdur.

Teorem 1.5.2 (Limit Kuralları)**.** *$(f_n), (g_n) \subset \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$, $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$, $A \subset X$, ayrıca $f_n \overset{A}{\Longrightarrow} f$ ve $g_n \overset{A}{\Longrightarrow} g$ olsun.*

(i) *Her $a, b \in \mathbb{C}$ için $af_n + bg_n \overset{A}{\Longrightarrow} af + bg$.*

(ii) *$\|f\|_A < +\infty$ ve $\|g\|_A < +\infty$ ise $f_n g_n \overset{A}{\Longrightarrow} fg$. Özel olarak $f_n g \overset{A}{\Longrightarrow} fg$.*

Kanıt. (i)'i okura bırakıyoruz.

(ii) Her $a \in A$ için

$$\begin{aligned}|f_n(a)g_n(a) - f(a)g(a)| &\le |f_n(a)g_n(a) - f(a)g_n(a)| + |f(a)g_n(a) - f(a)g(a)| \\ &\le |f_n(a) - f(a)||g_n(a)| + |f(a)||g_n(a) - g(a)| \\ &\le \|f_n - f\|_A \|g_n\|_A + \|f\|_A \|g_n - g\|_A\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|f_n g_n - fg\|_A \le \|f_n - f\|_A \|g_n\|_A + \|f\|_A \|g_n - g\|_A$$

elde ederiz. $\|f\|_A$ sonlu ve $\lim \|g_n - g\|_A = 0$ olduğundan, bu eşitsizliği sağ yanındaki her iki terimin de $n \to +\infty$ için 0'a gittiği kolayca görülür. □

Teorem 1.5.3. *X bir küme ve (Y,d) bir tam metrik uzaysa, $(\mathcal{F}(X,Y), d_X)$ pseudometrik uzayı da tamdır. Özellikle $(\mathcal{F}(X,\mathbb{C}), d_X)$ pseudometrik uzayı tamdır.*

Kanıt. Y bir tam metrik uzay ve $(f_n) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ bir Cauchy dizisi olsun. Her $x \in X$ için $d(f_n(x), f_m(x)) \le d_X(f_n, f_m)$ olduğundan, $(f_n(x)) \subset Y$ bir Cauchy dizisidir. Bu durumda, Y tam olduğundan, $(f_n(x))$ dizisi yakınsaktır. $f(x) := \lim f_n(x)$ olsun. O halde $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ olur.

Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (f_n) bir Cauchy dizisi olduğundan, bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı

$$\forall m, n \in \mathbb{N}\ (m, n \ge n_\varepsilon \Longrightarrow d_X(f_m, f_n) \le \varepsilon) \tag{1.23}$$

olacak biçimde bulunabilir. Şimdi $m \ge n_\varepsilon$ ve $x \in X$ keyfi seçilip sabit tutulsunlar. (1.23)'te $n \to +\infty$ için limite geçersek, $d(f_m(x), f(x)) \le \varepsilon$ olur. Bu her $x \in X$ için geçerli olduğundan, $d_X(f_m, f) \le \varepsilon$ olur. Sonuçta, her $m \ge n_\varepsilon$ için $d_X(f_m, f) \le \varepsilon$ olur. Bu ise, $\varepsilon > 0$ keyfi verildiği için (f_n) dizisinin $(\mathcal{F}(X,Y), d_X)$ uzayında f'ye yakınsak olması demektir. □

Kolayca görüleceği gibi $(f_n) \subset \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ ve $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ olmak üzere, $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} f$ ise $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$. Gerçekten de n_1 doğal sayısını $\|f - f_{n_1}\|_X < 1$ olacak biçimde seçersek, her $x \in X$ için

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leq \|f - f_{n_1}\|_X + \|f_{n_1}\|_X < 1 + \|f_{n_1}\|_X$$

böylece $\|f\|_X \leq 1 + \|f_{n_1}\|_X$.

Dolayısıyla, $(\mathcal{B}(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_X)$ normlu vektör uzayımız bir Banach uzayıdır.

Şimdi X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere, $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ ile X'te tanımlı $\mathbb{C}$ değerli **sürekli** fonksiyonların uzaylarını gösterelim. Bazen $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ yerine $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$ de yazılır. Fonksiyonlar arasındaki toplama ve bir fonksiyonun skalarla çarpım işlemlerine göre $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ de bir $\mathbb{C}$-vektör uzayıdır. Her $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ için $|f| \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ olduğundan, eğer X bir kompakt topolojik uzaysa, $|f|$ fonksiyonu X'te maksimum ve minimumunu alır, dolayısıyla $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ ve özetle X bir kompakt uzay olduğunda $\mathcal{C}(X,\mathbb{C}) \subset \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ olur.

Teorem 1.5.4. *X bir topolojik uzay ve Y bir metrik uzay olsun. $(f_n) \subset \mathcal{C}(X,Y)$ ve $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} f$ ise $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ olur.*

Kanıt. $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsinler. (f_n) dizisi X'te f'ye düzgün yakınsak olduğundan, bir n_ε doğal sayısı, her $n \geq n_\varepsilon$ için $d_X(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak biçimde seçilebilir. Dolayısıyla,

$$\forall n \geq n_\varepsilon \;\; \forall x \in X \;\; d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.24}$$

$m \geq n_\varepsilon$ sabit tutulsun. f_m fonksiyonun a noktasında sürekli olduğundan, bu noktanın X'te bir V komşuluğu

$$\forall x \in V \;\; d(f_m(x), f_m(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.25}$$

olacak biçimde seçilebilir. (1.24) ve (1.25)'ten her $x \in V$ için

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(a)) + d(f_m(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. f'nin a noktasında sürekliliği kanıtlanmıştır. $a \in X$ keyfi seçildiğinden, f fonksiyonu her $a \in X$ noktasında süreklidir, dolayısıyla X'te süreklidir. □

Sonuç 1.5.5. *X bir topolojik uzay ve Y bir metrik uzay olsun.*
(i) *$\mathcal{C}(X,Y)$ uzayı $(\mathcal{F}(X,Y), d_X)$'te kapalıdır.*
(ii) *Y tamsa $\mathcal{C}(X,Y)$ de tamdır.*

Kanıt. (i) doğrudan Teorem 1.5.4'ten; (ii) ise (i) ve Teorem 1.5.3'ten çıkar. □

Teorem 1.5.4 ile doğrudan $(f_n) \subset \mathcal{C}(X,Y)$ ve $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} f$ ise, $a \in X$ için

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Teorem 1.5.3'ten biliyoruz ki, (Y,d) bir tam metrik uzaysa, $(\mathcal{F}(X,Y), d_X)$ de tamdır. Dolayısıyla, bir $(f_n) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ dizisinin d_X'e göre yakınsak olması d_X'e göre bir Cauchy dizisi olmasına denktir. Başka sözlerle:

Y tamsa $(f_n) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ dizisinin X'te düzgün yakınsak olması

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \forall m,n \in \mathbb{N} \;\; (m,n \ge n_\varepsilon \Longrightarrow d_X(f_m,f_n) < \varepsilon)$$

koşuluna denktir.

Tanım 1.5.6. X bir topolojik uzay, Y bir metrik uzay ve $f, f_1, f_2, f_3 \dots \in \mathcal{F}(X,Y)$ olsun.

(i) Her $a \in X$ noktasının bir U komşuluğu $f_n|U \Longrightarrow f|U$ olacak biçimde bulunabiliyorsa ve ancak bu durumda (f_n) dizisi X **uzayında** f'ye **yerel düzgün yakınsaktır** denir ve bu durum $f_n \overset{yrl}{\Longrightarrow} f$ ile gösterilir.

(ii) Her kompakt $K \subset X$ için $f_n|K \Longrightarrow f|K$ ise, ve ancak bu durumda (f_n) dizisi **X'te f'ye kompakt düzgün yakınsaktır** denir ve bunu $f_n \overset{kmp}{\Longrightarrow} f$ ile göstereceğiz[14].

X kümesini vurgulamak gerekirse $f_n \overset{yrl}{\Longrightarrow} f$ yerine $f_n \overset{X,yrl}{\Longrightarrow} f$ ve $f_n \overset{kmp}{\Longrightarrow} f$ yerine $f_n \overset{X,kmp}{\Longrightarrow} f$ yazacağız.

Teorem 1.5.7. (i) *Yerel düzgün yakınsak diziler kompakt düzgün yakınsaktır.*

(ii) *Yerel kompakt X topolojik uzaylarında, özellikle $X \subset \mathbb{C}$ ve $X \subset \mathbb{C}_\infty$ uzaylarında "yerel düzgün yakınsaklık" ve "kompakt düzgün yakınsaklık" kavramları denktirler.*

Kanıt. (i) X bir topolojik uzay, Y bir metrik uzay ve $(f_n) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ olsun. (f_n) dizisi X'te f'ye yerel düzgün yakınsak olsun. Her $a \in X$ noktasının bir U_a komşuluğu $f_n|U_a \Longrightarrow f|U_a$ olacak biçimde seçilsin. $K \subset X$ kompakt kümesi keyfi verilsin. K kümesi sonlu tane $U_{a_1}, \dots, U_{a_k}$ ile örtülür. Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $n_j(\varepsilon)$ doğal sayısı, her $n \ge n_j(\varepsilon)$ için $d_{U_{a_j}}(f,f_n) < \varepsilon$ olacak biçimde seçilsin. $n_\varepsilon := \max\{n_1(\varepsilon), \dots, n_k(\varepsilon)\}$ olmak üzere, her $n \ge n_\varepsilon$ için $d_K(f,f_n) < \varepsilon$ elde ederiz. Dolayısıyla, $f_n|K \Longrightarrow f|K$.

(ii) X yerel kompakt ve (f_n) dizisi X'te kompakt düzgün yakınsak olsun. Her $a \in X$ noktasının bir kompakt K_a komşuluğu vardır ve $f_n \overset{K_a}{\Longrightarrow} f$ olduğundan, (f_n) dizisi X'te yerel düzgün yakınsaktır. □

[14]"X'te kompakt düzgün yakınsak" yerine, özellikle Alman kaynaklarında, yavaş yavaş terk edilmekte olan "X'in içinde yakınsak" da kullanılmaktadır.

Teorem 1.5.8 (Süreklilik Teoremi). *X bir topolojik uzay, Y bir metrik uzay, $(f_n) \subset \mathcal{C}(X,Y)$ ve $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ olsun.*

(i) *(f_n) dizisi X'te f'ye yerel düzgün yakınsaksa $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.*

(ii) *X yerel kompakt ve (f_n) dizisi X'te f'ye kompakt düzgün yakınsaksa $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.*

Kanıt. (i) (f_n) dizisi X'te f fonksiyonuna yerel düzgün yakınsaksa, her $a \in X$'in bir U_a komşuluğunda $f_n \overset{U_a}{\Longrightarrow} f$, dolayısıyla Teorem 1.5.4'ten dolayı f fonksiyonu U_a'da sürekli olur. Özellikle f fonksiyonu a'da süreklidir ve $a \in X$ keyfi olduğundan, f fonksiyonu X'te süreklidir.

(ii) Benzer biçimde X yerel kompakt ve $(f_n) \subset \mathcal{C}(X,Y)$ dizisi X'te f'ye kompakt düzgün yakınsaksa Teorem 1.5.7'den dolayı X'te f'ye yerel düzgün yakınsar ve (i)'den dolayı f fonksiyonu X'te süreklidir. □

Yerel düzgün yakınsaklık kavramının holomorf fonksiyonlar için çok uygun bir kavram olduğunu göreceğiz. $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olmak üzere, $(f_n) \subset \mathcal{H}(U) \subset \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ ve $f \in \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ olsun. İleride, 3.3.1 Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'nde (f_n) dizisi U'da f'ye yerel düzün yakınsaksa $f \in \mathcal{H}(U)$ ve (f_n') dizisinin de U'da f''ye yerel düzgün yakınsak olduğunu göstereceğiz.

X herhangi bir küme ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \to \mathbb{C}$ ve $s : X \to \mathbb{C}$ olsun. $s_n = f_0 + \cdots + f_n$ olmak üzere, (s_n) dizisi s fonksiyonuna nasıl yakınsaksa $\sum f_n$ serisinin s'ye öyle yakınsak olduğu söylenir. $\sum f_n$ serisi **X'te s'ye**, $s_n \overset{X}{\to} s$ ise **noktasal yakınsaktır**, $s_n \overset{X}{\Longrightarrow} s$ ise **düzgün yakınsaktır** denir. X bir topolojik uzaysa, $\sum f_n$ serisi X'te s'ye, $s_n \overset{yrl}{\Longrightarrow} s$ ise **yerel düzgün yakınsaktır**, (s_n) dizisi s'ye kompakt düzgün yakınsaksa **kompakt düzgün yakınsaktır** denir. $\sum |f_n|$ serisi X'te noktasal yakınsaksa $\sum f_n$ serisi X'te **mutlak yakınsaktır** denir.

Fonksiyon dizilerine ilişkin teoremler bize fonksiyon serilerine ilişkin teoremler verirler. Her şeyden önce Cauchy Ölçütü seriler için şu şekli alır:

Önerme 1.5.9 (Cauchy Ölçütü). *$\sum f_n$ serisinin X kümesinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \geq n_\varepsilon \quad \left\| \sum_{m \leq k \leq n} f_k \right\|_X \leq \varepsilon$$

olmasıdır.

Şimdi $(f_n) \subset \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ ve $f \in \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ olmak üzere, seriler için süreklilik teoremlerini ifade etmekle yetinelim.

Teorem 1.5.10. *$\sum f_n$ serisi X topolojik uzayında f fonksiyonuna yerel düzgün yakınsak ve her f_n sürekli ise, f de süreklidir.*

Teorem 1.5.11. *$\sum f_n$serisi yerel kompakt X topolojik uzayında f fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsak ve her f_n sürekli ise, f de süreklidir.*

Şimdiye kadar tanıdığımız holomorf fonksiyonlar, polinomlar ve rasyonel fonksiyonlarla elde ettiklerimizdir. Bunlar dışındakileri ancak limit kullanarak, özellikle seriler yardımıyla elde edeceğiz. Bu nedenle, fonksiyon serilerinin düzgün yakınsaklığını bilmek önem kazanır.

$$\left\| \sum_{m\leq k\leq n} f_k \right\|_X \leq \left\| \sum_{m\leq k\leq n} |f_k| \right\|_X \leq \sum_{m\leq k\leq n} \|f_k\|_X . \tag{1.26}$$

eşitsizlikleri $\sum f_n$ serisinin X'te düzgün yakınsak olmasından daha güçlü olan iki farklı yakınsaklığın, mutlak düzgün yakınsaklık ve aşağıda yalnızca fonksiyon serileri için tanımlanan normsal yakınsaklığın kaynağıdır.

Tanım 1.5.12. X herhangi bir küme, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \to \mathbb{C}$ olsun. $\emptyset \neq A \subset X$ olmak üzere, $\sum \|f_n\|_A$ serisi yakınsaksa $\sum f_n$ serisi A **kümesinde normsal yakınsaktır** denir.

X bir topolojik uzay ve $\sum f_n$ serisi, her $a \in X$ noktasının bir U_a komşuluğunda normsal yakınsaksa **X'te yerel normsal yakınsak**, her kompakt $K \subset X$ altkümesinde normsal yakınsaksa X **uzayında kompakt normsal yakınsaktır** denir.

$(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ olmak üzere, $\sum f_n$ serisinin X'te normsal yakınsak olması tanım gereği $\sum f_n$ serisinin $(\mathcal{B}(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında mutlak yakınsak olmasından başka bir şey değildir. Dolayısıyla, *$\sum f_n$ serisi X'te normsal yakınsaksa $\sum f_n$ serisi X'te değişmeli yakınsaktır.* Benzer biçimde $\sum f_n$ serisinin A'da normsal yakınsak olması da $\sum f_n|A$ serisinin $(\mathcal{B}(A, \mathbb{C}), \|\cdot\|_A)$ normlu uzayında mutlak yakınsak olmasıdır. Weierstrass aşağıdaki ölçütü düzgün yakınsaklık için vermişse de bu özünde bir normsal yakınsaklık ölçütüdür:

Teorem 1.5.13 (Weierstrass M-ölçütü)**.** *$(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, $p_n \geq 0$, $\sum p_n$ yakınsak ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\|f_n\|_X \leq p_n$ ise, $\sum f_n$ serisi X'te normsal yakınsaktır, dolayısıyla mutlak düzgün yakınsaktır ve aynı zamanda düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. Sav, doğrudan (1.26) ile

$$\left\| \sum_{m\leq k\leq n} f_k \right\|_X \leq \left\| \sum_{m\leq k\leq n} |f_k| \right\|_X \leq \sum_{m\leq k\leq n} \|f_k\|_X \leq \sum_{m\leq k\leq n} p_k$$

eşitsizliğinden çıkar. □

Görüldüğü gibi Weierstrass'ın bu ölçütü çok güçlüdür ve düzgün yakınsaklıktan daha fazlasını sağlar. Bizi, süreklilik ve türevlenebilme gibi, fonksiyonların yerel özellikleri ilgilendirdiği sürece düzgün yakınsaklık yerine yerel düzgün yakınsaklıkla çalışmamız doğaldır. Ancak yerel düzgün yakınsak serilerin de eksik yanları vardır. $\mathbb{R}$'de yerel düzgün yakınsak $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ serisinde olduğu gibi, bazı $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ permütasyonlarında $\sum_{n\geq 1} f_{\sigma(n)}(x)$ serisi artık ıraksak olabilir. Ancak Weierstrass'ın M-ölçütüne uyan seriler aynı zamanda mutlak yakınsak olduklarından, onlarda bu kusur yoktur ve bu bizi yeni bir kavrama götürür. Ayrıca, Weierstrass M-Ölçütü'nün hipotezi $\sum f_n$ serisinin X'te normsal yakınsak olmasından başka bir şey değildir. Böylece:
$\sum f_n$ serisi X'te normsal yakınsaksa

(i) *$\sum f_n$ serisi X'te düzgün yakınsaktır,*

(ii) *$\sum |f_n|$ serisi X'te düzgün yakınsaktır, dd. $\sum f_n$ serisi X'te* ***mutlak düzgün yakınsak****tır. Mutlak düzgün yakınsak serilerimiz elbette değişmeli yakınsaktırlar.*

Düzgün yakınsaklıkta olduğu gibi

(i) *$\sum f_n$ serisi X uzayında yerel normsal yakınsaksa kompakt normsal yakınsaktır.*

(ii) *Eğer X uzayımız yerel kompaktsa, bu uzayda seriler için yerel normsal yakınsaklık ve kompakt normsal yakınsaklık kavramları birbirine denktir.*

Elimizdeki farklı yakınsaklık kavramları için yalnızca şu çıkarımlar vardır:

normsal yakınsaklık $\Longrightarrow$ mutlak yakınsaklık $\Longrightarrow$ noktasal yakınsaklık
normsal yakınsaklık $\Longrightarrow$ düzgün yakınsaklık $\Longrightarrow$noktasal yakınsaklık

Noktasal yakınsaklıktan mutlak yakınsaklık veya düzgün yakınsaklık ve haydi haydi normsal yakınsaklık çıkmaz, bu apaçıktır.

Her $x \in X$ için $\sum f_n(x)$ mutlak yakınsaksa $\sum f_n$ serisinin X'te düzgün yakınsak olması, dolayısıyla normsal yakınsak olması gerekmez. Gerçekten de $X = [0, 1]$ ve her $x \in X$ için $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ olsun. Bu durumda, serimiz $x \neq 1$ için $f(x) = 1$ ve $x = 1$ içinse $f(x) = 0$ değerine yakınsar. Daima $f_n(x) \geq 0$ olduğundan, serimiz X'te mutlak yakınsaktır. Ancak her f_n fonksiyonu X'te sürekli iken f limit fonksiyonumuz X'te sürekli olmadığından, $\sum f_n$ serisi Süreklilik Teoremi (Teorem 1.5.10) nedeniyle X'te düzgün yakınsak, dolayısıyla normsal yakınsak da olamaz.

Düzgün yakınsak bir serinin mutlak yakınsak olması, dolayısıyla normsal yakınsak olması gerekmez. Yine $X = [0, 1]$ ve her $n \geq 1$ için $g_n(x) = (-1)^n n^{-1}$ olsun. $\sum g_n$ serisi X'te düzgün yakınsaktır, ancak mutlak yakınsak değildir.

Son olarak bir serinin mutlak düzgün yakınsak olsa bile normsal yakınsak olması gerekmediğini örnekleyelim: $X = [0,1]$ ve her $n \geq 1$ için

$$h_n(x) := \begin{cases} x \sin^2 \frac{\pi}{x}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. X'te hep $h_n(x) \geq 0$ olduğunu belirtelim. $h(0) := 0$ ve her $0 < x \leq 1$ için $h(x) = x \sin^2 \frac{\pi}{x}$ olsun. Her $n \geq 1$ için $J_n := (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ olmak üzere, $h_n|J_n = h|J_n$ ve $[0,1] \setminus J_n$ kümesinde ise $h_n \equiv 0$. Dolayısıyla, her $x \in J_n$ için $\sum h_m(x)$ serisinde $h_n(x)$ terimi dışındaki tüm terimler 0'dır ve $h_n(x) = h(x)$ olduğunu biliyoruz. Böylelikle, $(0,1]$'de $\sum h_m$ serisi mutlak yakınsaktır. Bu seri elbette $x = 0$'da da mutlak yakınsaktır. Demek ki $\sum h_n = h$. Bu yakınsaklık X'te düzgündür. Gerçekten de $s_n := h_1 + \cdots + h_n$ dersek, $(\frac{1}{n+1}, 1]$ aralığında $s_n(x) = h(x)$ ve $[0, \frac{1}{n+1}]$ aralığında ise $s_n(x) \equiv 0$ olduğundan, $\|s_n - h\|_X \leq \frac{1}{n+1}$ olur. Dolayısıyla, serimiz X'te düzgün yakınsaktır. Diğer yandan, her $n \geq 1$ için

$$\|h_n\|_X \geq \left| h_n \left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right) \right| = \frac{2}{2n+1}$$

olduğundan, $\sum \|h_n\|_X$ yakınsak değildir, dd. $\sum h_n$ normsal yakınsak değildir.

Kısaca fonksiyon ailelerine değinelim: Şimdi Y bir normlu vektör uzay olsun; elbette $Y = \mathbb{K}$ de olabilir. Bize bir $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}(X,Y)$ ailesi ve bir $f \in \mathcal{F}(X,Y)$ verilsin. $J \in \mathcal{S}_I$ ve $x \in X$ için $s_J(x) := \sum_{i \in J} f_i(x)$ olsun. Her $x \in X$ için $(f_i(x))_{i \in I}$ ailesi Y'de $f(x)$'e toplanabilirse $(f_i)_{i \in I}$ fonksiyon ailesi f'ye X'te (**noktasal**) **toplanabilir** denir.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_\varepsilon \in \mathcal{S}_I \ \ \forall J \in \mathcal{S}_I \ \ (J_\varepsilon \subset J \Longrightarrow \|s_J - f\|_X < \varepsilon)$$

ise, $(f_i)_{i \in I}$ fonksiyon ailesi X'te f fonksiyonuna **düzgün toplanabilir** denir. Aşağıdaki koşul sağlandığında $(f_i)_{i \in I}$ ailesi X'te **düzgün Cauchy Ölçütü**'nü sağlar denir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_\varepsilon \in \mathcal{S}_I \ \ \forall K \in \mathcal{S}_I \ \ (J_\varepsilon \cap K = \emptyset \Longrightarrow \|s_K\|_X < \varepsilon).$$

Aşağıdaki teorem ve sonucunu Teorem 1.4.5'e benzer biçimde kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Teorem 1.5.14. *Toplanabilir $(f_i)_{i \in I}$ ailesi için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *$(f_i)_{i \in I}$ ailesi X'te düzgün toplanabilir.*

(ii) *$(f_i)_{i \in I}$ ailesi X'te düzgün Cauchy Ölçütü'nü sağlar.*

Sonuç 1.5.15. *Y bir Banach uzayıysa, $(f_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}(X,Y)$ ailesinin X'te düzgün toplanabilir olması X'te düzgün Cauchy Ölçütü'nün sağlanmasına denktir.*

Şimdi Y bir normlu vektör uzayı olmak üzere, $(f_i)_{i\in I}\subset \mathcal{B}(X,Y)$ ailesi mutlak toplanabilirse, dd. $(\|f_i\|_X)_{i\in I}$ ailesi $\mathbb{R}$'de toplanabilirse $(f_i)_{i\in I}$ ailesi **normsal toplanabilir** de denir. $Y=\mathbb{C}$ durumunda olduğu gibi Y bir Banach uzayıysa, normsal toplanabilir aileler düzgün toplanabilirler. Özellikle X bir topolojik uzay ve Y bir Banach uzayı ise, bir $(f_i)_{i\in I}$ sürekli fonksiyonlar ailesi normsal yakınsaksa X'te sürekli bir f fonksiyonuna düzgün toplanabilir.

Örnek 1.5.16. $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ ile $\Omega=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ olsun. Ω kafesi $\mathbb{C}$'nin ayrık ve kapalı bir altgrubudur. $\Omega=-\Omega$ olduğundan, $z\notin\Omega$ ise, her $w\in\Omega$ için $z+w\neq 0$ olur. $\omega\in\Omega$ için f_ω fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_\omega(z) &:= \frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2},\quad 0\neq\omega\in\Omega \text{ ve } z\in\mathbb{C}\backslash\{\omega\},\\ f_0(z) &:= \frac{1}{z^2},\quad z\in\mathbb{C}^* \end{aligned}$$

olsun. Her f_ω fonksiyonu $z\in\mathbb{C}\backslash\{\omega\}$'da holomorftur ve ileride göreceğimiz terimlerle f_ω'nın ω'da ikinci dereceden bir kutup yeri vardır[15]. Her $r>0$ sayısı için $\Omega_r:=\{\omega\in\Omega\,|\,|\omega|\geq 2r\}$ olsun. $(f_\omega)_{\omega\in\Omega_r}$ *ailesi* $\overline{D}_r$*'de normsal toplanabilir.* Gerçekten, her $z\in\overline{D}_r$ ve her $\omega\in\Omega_r$ için

$$|f_\omega(z)|\leq\left|\frac{2z\omega-z^2}{(z-\omega)^2\omega^2}\right|\leq\frac{r\left(2+\frac{|z|}{|\omega|}\right)}{\left(1-\frac{|z|}{|\omega|}\right)^2}\frac{1}{|\omega|^3}\leq 10r\frac{1}{|\omega|^3}$$

olduğundan, savımız Önerme 1.4.19'dan çıkar. Dolayısıyla, her $z\in\mathbb{C}\backslash\Omega$ için

$$\wp_\Omega(z):=\sum_{\omega\in\Omega}f_\omega(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in\Omega\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

tanımı kusursuzdur.

Weierstrass'ın $\wp_\Omega(z)$ fonksiyonu kompleks analizin önemli fonksiyonlardan biridir. Her $\omega\in\Omega_r$ için $f_\omega\in\mathcal{H}(D_r)$ ve $\left(f_\omega|\overline{D}_r\right)_{\omega\in I_r}$ ailesi $\overline{D}_r$'de normsal yakınsak olduğundan, ileride elde edeceğimiz bilgilerle $h_r:=\sum_{\omega\in\Omega_r}f_\omega$ fonksiyonu D_r'de holomorftur. $J_r:=\Omega\backslash\Omega_r$ sonludur ve $q_r:=\sum_{\omega\in J_r}f_\omega$ ise sonlu sayıda rasyonel fonksiyonun toplamı olarak bir rasyonel fonksiyondur. Ayrıca, q_r'nin sonlu sayıdaki kutup yerleri Ω'dadır. Bu durumda, D_r dairesinde $\wp_\Omega(z)=q_r(z)+h_r(z)$ olur. Özetle bu, her $r>0$ için doğru olduğundan, $\wp_\Omega\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\Omega)$ ve $\wp_\Omega$'nın her $\omega\in\Omega$ noktasında ikinci dereceden bir kutup yeri vardır. $\wp_\Omega$'nın önemli özelliklerinden biri çift döngülü olmasıdır ve her $\omega\in\Omega$ ve her $z\in\mathbb{C}\backslash\Omega$ için kolayca görüleceği gibi $\wp_\Omega(z+\omega)=\wp_\Omega(z)$.

Problemler

Problem 1.5.1. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ serisinin $\mathbb{R}$'de bir f fonksiyonuna noktasal yakınsadığını gösteriniz. f'yi bulunuz. Bu seri $\mathbb{R}$'de 0'ın bir komşuluğunda düzgün yakınsak olabilir mi?

Problem 1.5.2. Her $z\in\mathbb{C}$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $f_n(z)=\frac{z^n}{1+z^n}$ ise, (f_n) dizisi hangi z noktalarında yakınsaktır? Yakınsaklık durumunda limitleri bulunuz.

[15] "Kutup" ve "meromorf" kavramları için Kısım 3.8'e bakınız.

Problem 1.5.3. $n \in \mathbb{N}^*$ için $f_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $f_n(z) := \frac{1}{nz}$ olarak tanımlansın. (f_n) dizisinin $\mathbb{C}^*$'da noktasal yakınsak ancak düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Problem 1.5.4. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f : X \to Y$ ve $\delta \geq 0$ olsun.

$$R_\delta := \{\rho(f(x), f(x')) \mid x, x' \in X \text{ ve } d(x, x') \leq \delta\}$$

olmak üzere, R_δ sınırlıysa $\omega_f(\delta) := \sup R_\delta$ olarak tanımlansın. $X \neq \emptyset$ için f'nin düzgün sürekli olması ω_f'nin tanım bölgesinin $\{0\}$'a indirgenmemiş ve ω_f'nin 0'da sürekli olmasına denktir, gösteriniz.

Problem 1.5.5. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ve $(c_n) \subset \mathbb{C}$ bir yakınsak dizi olmak üzere, her $m, n \in \mathbb{N}$ için $||f_n - f_m|| \leq |c_n - c_m|$ ise, (f_n) dizisinin X'te düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 1.5.6. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $(f_n) \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ ve $f_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olsun. $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekliyse, $g \circ f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \circ f$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.5.7. X bir kompakt uzay, $(f_n) \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ve $f_0 \geq f_1 \geq f_2 \geq \cdots$ olsun. Eğer (f_n) dizisi bir $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ fonksiyonuna noktasal yakınsaksa $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} f$ olduğunu gösteriniz (Dini Teoremi).

Problem 1.5.8. $X := [0, +\infty)$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f_n : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[(n-1)^2, n^2)$ aralığında $\frac{1}{n}$ değerini, bu aralık dışında ise 0 değerini alsın. $\sum f_n$ serisi X'te düzgün yakınsak ancak normsal yakınsak değildir, gösteriniz.

Problem 1.5.9. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2i}{z+i+1}\right)^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{z^n}$ ve $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{iz-1}{2+i}\right)^n$ serileri hangi z noktalarında yakınsaktırlar?

Problem 1.5.10. $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sürekli, $\underline{\gamma} := \gamma([\alpha, \beta])$ ve $D_r(a) \subset \mathbb{C} \backslash \underline{\gamma}$ ise, her $z \in D_r(a)$ için

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(z-a)^n}{(\gamma(t) - a)^{n+1}} \overset{[\alpha,\beta]}{\Longrightarrow} \frac{1}{\gamma(t) - z}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.5.11. $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ olmak üzere, $\sum_{n\geq 1} z_n$ serisi mutlak yakınsaksa $\sum_{n\geq 1} \frac{z_n}{1+z_n}$ serisi de mutlak yakınsaktır. Gösteriniz.

Problem 1.5.12. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $(f_n) \subset \mathcal{C}(U)$ ve $f \in \mathcal{C}(U)$ olsun. Aşağıdaki önermelerin denk olduklarını gösteriniz:

(a) Her $z \in U$ ve her $(z_n) \subset U$ için $\lim z_n = z$ ise, $\lim f_n(z_n) = f(z)$.

(b) Her $z \in U$ ve her $(z_n) \subset U$ için $\lim z_n = z$ ise, $\lim_{m,n\to+\infty} f_m(z_n) = f(z)$.

(c) (f_n) dizisi U'da f'ye kompakt düzgün yakınsaktır.

Problem 1.5.13. $\sum_{n\geq 0} z^{2n}$ serisinin $\mathbb{D}$'de $\frac{1}{1-z^2}$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Problem 1.5.14. $X \subset \mathbb{C}$, $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ve $s_n := \sum_{i=0}^{n} f_i$ olmak üzere, (s_n) dizisi X'te düzgün sınırlı olsun, dd. bir $M > 0$ ile, her $n \in \mathbb{N}$ için $||f_n||_X \leq M$ olsun. (p_n) pozitif terimli bir dizi ve $p_n \downarrow 0$ ise, $\sum p_n f_n$ serisi de X'te düzgün yakınsaktır.

Problem 1.5.15. $\sum_{n\geq 1} a_n$ kompleks serisi yakınsak ve $S(z) := \sum_{n\geq 1} a_n \frac{z^n}{1-z^n}$ olsun. Aşağıdakileri kanıtlayınız:

(a) S serisi $\mathbb{D}$'de kompakt normsal yakınsaktır.

(b) S serisi $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$'de kompakt düzgün yakınsaktır.

(c) Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $a_n = (-1)^n n^{-1}$ alındığında S serisi $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$'de kompakt normsal yakınsak değildir.

1.6 Kuvvet Serileri

Kuvvet serilerine bir anlamda genelleştirilmiş polinomlar olarak bakabiliriz. Bunlar Weierstrass yaklaşımının temel ögeleridir.

$a \in \mathbb{C}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

tipinde bir fonksiyonlar serisine **açılım noktası** a, **katsayıları** a_n sayıları olan bir **kuvvet serisi** denir.

Önerme 1.6.1 (D'Alembert Önsavı). *$a \neq c \in \mathbb{C}$ ile $(a_n (c-a)^n)$ dizisi sınırlıysa, örneğin $\sum a_n (c-a)^n$ yakınsaksa, $\sum a_n (z-a)^n$ kuvvet serisi, her $0 < r < |c-a|$ için $\overline{D}_r(a)$ kapalı dairesinde normsal yakınsaktır, dolayısıyla $R := |c-a|$ olmak üzere, $D_R(a)$ dairesinde kompakt normsal yakınsaktır.*

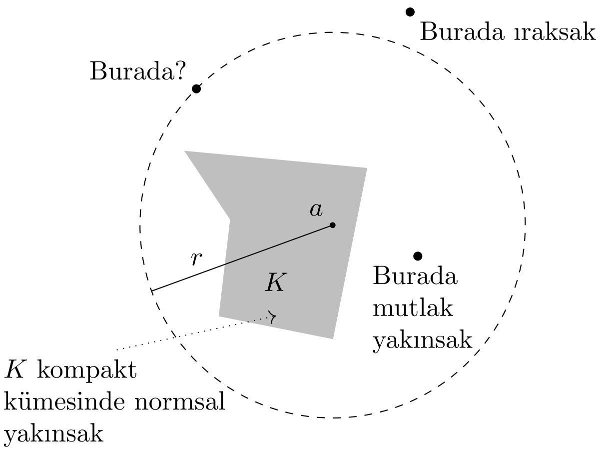
Kanıt. Varsayımdan dolayı, bir $M > 0$ sayısı, her $n \in \mathbb{N}$ için$|a_n (c-a)^n| \leq M$ olacak biçimde vardır. $0 < r < |c-a|$ ve $q := r/|c-a|$ olsun. $0 \leq q < 1$ olduğundan, $\sum q^n$ yakınsaktır.

$$\|a_n(z-a)^n\|_{\overline{D}_r(a)} = \left\| a_n(c-a)^n \frac{(z-a)^n}{(c-a)^n} \right\|_{\overline{D}_r(a)} \leq Mq^n =: p_n.$$

$\sum p_n$ yakınsak olduğundan, Weierstrass M-ölçütünden, $\sum a_n(z-a)^n$ serisi $\overline{D}_r(a)$ kapalı dairesinde normsal yakınsaktır.

$K \subset D_R(a)$ kompakt kümesi keyfi verilsin. $d(K, C_R(a)) > 0$ olduğundan, bir pozitif $r < R$ sayısı $K \subset \overline{D}_r(a)$ olacak biçimde bulunabilir. Seri $\overline{D}_r(a)$ kümesinde normsal yakınsak olduğundan, haydi haydi K kümesinde normsal yakınsaktır. □

Not 1.6.2. $\sum a_n(c-a)^n$ yakınsaksa $\lim a_n(c-a)^n = 0$, buradan $(a_n(c-a)^n)$ dizisi yakınsak, dolayısıyla sınırlıdır. $R := |c-a|$ olmak üzere, $\sum a_n(z-a)^n$ serisi her $K \subset D_R(a)$ kompakt



Şekil 1.3: Kuvvet serilerinin yakınsaklık davranışı.

kümesinde normsal yakınsaktır; dolayısıyla (a) K'de düzgün yakınsaktır, (b) her $z \in K$'de mutlak yakınsaktır. $D_R(a)$ yerel kompakt olduğundan, serimiz bu dairede yerel düzgün yakınsaktır. Her bir $p_n(z) := a_n(z-a)^n$ fonksiyonu $D_R(a)$ dairesinde sürekli olduğundan, $f(z) := \sum p_n(z)$ fonksiyonu bu dairede süreklidir.

$l := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ olmak üzere,

$$r := \begin{cases} +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \\ \frac{1}{l}, & 0 < l < +\infty \end{cases}$$

sayısına $\sum a_n (z-a)^n$ kuvvet serisinin **yakınsaklık yarıçapı**, $r > 0$ durumunda$D_r(a)$ dairesine kuvvet serimizin **yakınsaklık dairesi** denir[16]. Açıktır ki $D_{+\infty}(a) := \mathbb{C}$ alacağız.

Teorem 1.6.3. *$\sum a_n(z-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı r olsun. $r = 0$ ise seri yalnızca $z = a$ için yakınsaktır. $0 < r < +\infty$ ise, kuvvet serimiz:*

(i) *$D_r(a)$ yakınsaklık dairesinde kompakt normsal yakınsak, dolayısıyla bu dairede mutlak yakınsak ve yerel düzgün yakınsaktır.*

(ii) *$\mathbb{C} \backslash \overline{D}_r(a)$'da ıraksaktır.*

(iii) *$C_r(a)$ çemberinin noktalarının, seriye bağlı olarak, bazılarında yakınsak bazılarında ıraksak olabilir.*

[16] $r = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ ifadesine Hadamard formülü denir. Cauchy kök ölçütünün doğrudan sonucu olan bu formüle Cauchy'nin 1857'de ölümünden 8 yıl sonra doğan Hadamard'ın ismini ilk kim verdiyse yanlış yapmıştır; biz bu yanlışı sürdürmeyeceğiz. Mutlaka bir ad vermek istenirse bu ancak **Cauchy formülü** olur!

(iv)

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \ z \in D_r(a)$$

ile tanımlanan f fonksiyonu $D_r(a)$ açık dairesinde her mertebeden kompleks türevlenebilir ve her $k \geq 1$ ve her $z \in D_r(a)$ için

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^k}{dz^k} \left[a_n(z-a)^n\right]$$

ve sağ yandaki serilerin tümünün yakınsaklık yarıçapları yine r'dir.

(v) *Her $n \geq 1$ için $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$.*

Kanıt. (i), (ii), (iii): $l := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ olmak üzere,

$$r^* := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = |z-a| \, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = |z-a| \, l$$

olsun. Cauchy kök ölçütünden, kuvvet serimiz $r^* < 1$ için mutlak yakınsak, $r^* > 1$ için ıraksak ve $r^* = 1$ için seriye bağlı olarak ıraksak veya yakınsaktır. Bu $D_r(a)$'da kompakt normsal yakınsaklık dışındaki savları verir.

$l < +\infty$ olsun. Bu durumunda serimizin $r := 1/l$ olmak üzere, $D_r(a)$ yakınsaklık dairesinde mutlak yakınsaktır. $K \subset D_r(a)$ kompakt kümesi keyfi verilsin. D'Alembert Önsavı'nın kanıtında olduğu gibi $0 < \rho < r$ sayısı $K \subset D_\rho(a)$ olacak biçimde seçilebilir. Serimiz $a+\rho$ noktasında yakınsak olduğundan, D'Alembert Önsavı'yla $\overline{D_\rho(a)}$'da normsal yakınsaktır, özellikle $\sum \|a_n(z-a)^n\|_K$ yakınsaktır.

(iv) Yalnızca f'nin $D_r(a)$'da türevlenebilir,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-a)^{n-1}, \ z \in D_r(a) \tag{1.27}$$

ve bu serinin de yakınsaklık yarıçapının r olduğunu kanıtlamak yeterlidir; gerisi bir tümevarım işidir. (1.27)'deki seriyle $\sum n a_n (z-a)^n$ serilerinin yakınsaklık karakterleri aynıdır ve son serinin ise $\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ olduğundan, yakınsaklık yarıçapı yine r'dir.

Önce $a = 0$ olsun. $b \in D_r$ keyfi verilsin. ρ sayısını $|b| < \rho < r$ olacak biçimde seçelim. Türev serimiz D_r'de mutlak yakınsak olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \, |a_n| \, \rho^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n, \ p_n := n \, |a_n| \, \rho^{n-1} \tag{1.28}$$

yakınsaktır. $b \neq z \in D_\rho$ için

$$f(z) - f(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z^n - b^n) = (z-b) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$$

$$\varphi_n(z) = \frac{z^n - b^n}{z - b} = \sum_{j=0}^{n-1} z^j b^{n-1-j} \text{ ve (1.28)'den}$$

$$\|a_n \varphi_n(z)\|_{\overline{D}_\rho} \leq |a_n| \left\| \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |z|^j \, |b|^{n-1-j} \right\|_{\overline{D}_\rho} \leq n\,|a_n|\,\rho^{n-1}.$$

Weierstrass M-ölçütünden dolayı, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(z)$ serisi $\overline{D}_\rho$'da normsal yakınsak, dolayısıyla düzgün yakınsaktır ve orada bir sürekli h fonksiyonu tanımlar. Türev bir yerel özellik olduğundan, $\overline{D}_\rho$'da geçerli $f(z) - f(b) = (z-b)\,h(z)$ denklemi f fonksiyonunun b noktasında türevlenebilir ve türevinin

$$f'(b) = h(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \varphi_n(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n b^{n-1}$$

olduğunu söyler.

Eğer $a \neq 0$ ise, $w = g(z) := z - a$ ve $f_*(w) := \sum a_n w^n$ olmak üzere, $D_r(a)$'da $f = f_* \circ g$ olur. g her yerde türevlenebilir ve $g'(z) \equiv 1$ ve az önce kanıtlanandan ise, $f_*'(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n w^{n-1}$ olduğundan, $D_r(a)$'da

$$f'(z) = f_*'(g(z))g'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

elde edilir.

(v) Tümevarımla, her $n \geq 1$ için $D_r(a)$'da sürekli g_n fonksiyonları ile

$$f^{(n)}(z) = n! a_n + (z-a)\,g_n(z)$$

olduğu kanıtlanır ve buradan da

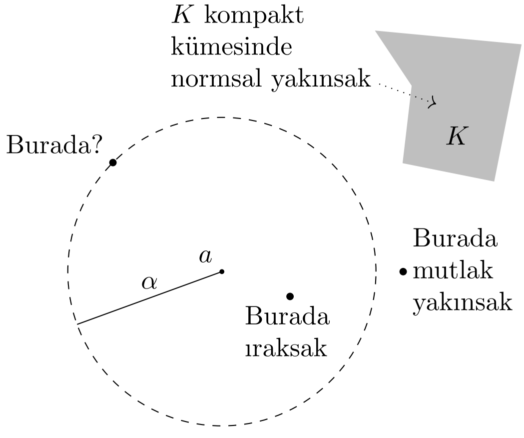
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

elde edilir. □

Örnek 1.6.4. 1. $\sum n^n z^n$ serisi yalnızca $z = 0$'da yakınsar; $r = 0$.

2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $r = 1$'dir. Bu seri C_1 yakınsaklık çemberi üzerindeki her z noktasında yakınsak, hatta mutlak yakınsaktır.

3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $r = 1$'dir. Örnek 1.3.6'da gördüğümüz gibi bu seri C_1 yakınsaklık çemberi üzerindeki bir tek $z = 1$ noktasında ıraksak bu çemberin diğer noktalarında yakınsaktır.



Şekil 1.4: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n}$ serisinin yakınsaklık davranışı.

4. $p \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^{pn}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı yine $r = 1$'dir. Bu seri C_1 birim çemberi üzerindeki $z^p = 1$ denkleminin çözümleri olan $z_1, z_2, \ldots, z_p$ noktalarında —ki bunlar, bir köşesi 1 noktası olan C_1'e çizilen düzgün p-genin köşeleridir— ıraksak, C'nin diğer noktalarında yakınsaktır.

5. $\sum z^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı yine $r = 1$'dir. Ancak $|z| = 1$ ise (z^n) bir 0 dizisi olmadığından, $\sum z^n$ ıraksaktır. Bu seri yakınsaklık çemberi üzerindeki her noktada ıraksaktır.

Teorem 1.6.5. $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ *olmak üzere,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^{-n}$$

serisi $D^*_\alpha(a)$ *dairesinde ıraksak,* $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$*'da kompakt normsal yakınsaktır ve orada holomorf bir*

$$h(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(z-a)^n} \tag{1.29}$$

fonksiyonu tanımlar; serimiz $C_\alpha(a)$ *çemberinin bazı noktalarında ıraksak, bazılarında yakınsak olabilir. Her* $k \in \mathbb{N}^*$ *için*

$$\frac{d^k}{dz^k} h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^k}{dz^k} \left(\frac{a_n}{(z-a)^n} \right)$$

ve bu seriler de $D^*_\alpha(a)$ *dairesinde ıraksak,* $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_\alpha(a)$*'da kompakt normsal yakınsaktırlar ve* $C_\alpha(a)$ *çemberinin bazı noktalarında ıraksak, bazılarında yakınsak olabilir.*

Ayrıca, her $\alpha < \beta < +\infty$ *için (1.29)'daki serimiz* $\mathbb{C}\backslash D_\beta(a)$*'da normsal yakınsaktır.*

Kanıt. $w(\infty) := 0$, $w(a) := \infty$ ve $z \in \mathbb{C}_\infty \backslash \{a, \infty\}$ için $w(z) := \frac{1}{z-a}$ ile tanımlanan $w : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü topolojiktir ve $D_\alpha(a)$ dairesini $\mathbb{C} \backslash \overline{D}_\alpha(a)$ açık kümesine resmeder. (1.29) serimiz yakınsaklık yarıçapı $r = 1/\alpha$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n$ kuvvet serisine dönüşür. Böylece

$$f(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n, \quad w \in D_r \tag{1.30}$$

olarak tanımlanan f için Teorem 1.6.3'ün savları geçerlidir. Diğer yandan,

$$|w(z)| < r = \frac{1}{\alpha} \Longleftrightarrow \alpha < |z-a|$$

olduğundan, $h(z) = f(w(z))$ serisi $\mathbb{C} \backslash \overline{D}_\alpha(a)$ açık kümesinde normsal yakınsaktır ve tüm diğer savlar Teorem 1.6.3'ten çıkar. Türevler için söylenenin ilk adımını vermekle yetinelim:

$$\begin{aligned} h'(z) = f'(w(z))w'(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \left(w(z)\right)^{n-1} \cdot \frac{-1}{(z-a)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-n) a_n \frac{1}{(z-a)^{n-1}} \cdot \frac{1}{(z-a)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n a_n}{(z-a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{a_n}{(z-a)^n} \right). \end{aligned}$$

Son savımız ise (1.30)'daki serimizin $\overline{D}_{1/\beta}(0)$ kompakt kümesinde normsal yakınsak olmasına denktir. □

Tanım 1.6.6. $\Omega \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. Her $a \in \Omega$ için bir açık $U_a \subset \Omega$ kümesi ve bir $F_a \in \mathcal{H}(U_a)$ fonksiyonu $f|U_a = F_a'$ olacak biçimde bulunabiliyorsa f'nin Ω'da **yerel ilkeli** vardır ve F_a'ya ise f'nin U_a'da bir **ilkeli** (antitürevi) denir. Ω'da yerel ilkeli olan fonksiyonların kümesini $\mathcal{I}(\Omega)$ ile gösterelim. Eğer $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ ve $F' = f$ ise F fonksiyonu Ω'da f'nin bir **ilkelidir** denir.

Kitabımızın amaçlarından biri

$$\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{I}(\Omega)$$

olduğunu kanıtlamaktır.

Önerme 1.6.7. *$\sum a_n(z-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık dairesi $D_r(a)$ ve orada tanımladığı fonksiyon f ise, $\sum \frac{1}{n+1} a_n (z-a)^{n+1}$ serisinin yakınsaklık dairesi de $D_r(a)$'dır ve orada tanımladığı fonksiyona F dersek, $F' = f$; dolayısıyla $f \in \mathcal{I}(D_r(a))$.*

Kanıt. (1): $z \neq a$ için $\sum \frac{1}{n+1} a_n (z-a)^{n+1}$ serisi ile

$$\sum \frac{1}{z-a} \frac{1}{n+1} a_n (z-a)^{n+1} = \sum \frac{1}{n+1} a_n (z-a)^n$$

serisinin yakınsaklık karakterleri aynıdır.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1} |a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

olduğundan, yakınsaklık yarıçapları örtüşür. F fonksiyonu $D_r(a)$'da türevlenebilir ve Teorem 1.6.3'ten

$$F'(z) = \sum \left[\frac{1}{n+1} a_n (z-a)^{n+1} \right]' = \sum a_n (z-a)^n = f(z).$$

□

Teorem 1.6.8 (Kuvvet serileri için özdeşlik teoremi)**.** *$\sum a_n (z-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $r > 0$ olsun ve $D_r(a)$'da f fonksiyonunu tanımlasın. (z_n) dizisi için $a \neq z_n \in D_r(a)$, $\lim z_n = a$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(z_n) = 0$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 0$, dolayısıyla $f = 0$.*

(z_n) ve f yukarıdaki gibi olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(z_n) = c$ ise, $D_r(a)$'da $f(z) \equiv c$.

Kanıt. f fonksiyonu $D_r(a)$'da sürekli olduğundan, $a_0 = f(a) = \lim f(a_n) = 0$ sağlanır. Şimdi $a_0 = \cdots = a_n = 0$ kanıtlanmış olsun. Bu durumda,

$$f(z) = (z-a)^{n+1} [a_{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+1+k} (z-a)^k] =: (z-a)^{n+1} (a_{n+1} + g(z))$$

Her $k \in \mathbb{N}$ için $z_k - a \neq 0$ olduğundan, $f(z_k) = 0 \iff a_{n+1} + g(z_k) = 0$ olur. Burada g fonksiyonu yakınsaklık yarıçapı r olan bir kuvvet serisiyle tanımlanmıştır; dolayısıyla $D_r(a)$'da süreklidir. Ayrıca, tanım gereği $g(a) = 0$. Böylece

$$0 = \lim_{k \to +\infty} (a_{n+1} + g(z_k)) = a_{n+1} + \lim_{k \to +\infty} g(z_k) = a_{n+1} + g(a) = a_{n+1}.$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(z_n) = c$ ise, az önce kanıtlanandan $h(z) := f(z) - c$ fonksiyonu $D_r(a)$'da özdeş olarak 0 olur, dd. bu dairede $f(z) \equiv c$ olur. □

Sonuç 1.6.9. *$M \subset D_r(a)$ ve a noktası M kümesinin bir yığılma noktası olsun.*

(i) *$\sum a_n (z-a)^n$ kuvvet serisi $D_r(a)$'da yakınsak olsun ve orada tanımladığı fonksiyona f diyelim. $f|M \equiv 0$ ise $D_r(a)$'da $f(z) \equiv 0$.*

(ii) *$f(z)=\sum a_n(z-a)^n$ ve $g(z)=\sum b_n(z-a)^n$ kuvvet serilerinin her ikisi de $D_r(a)$'da yakınsak ve $f\,|M=g|\,M$ ise, her $z\in D_r(a)$ için $f(z)=g(z)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n=b_n$.*

Kanıt. (i) Her $n\in\mathbb{N}$ için $a\neq z_n\in M$ ögeleri $\lim z_n=a$ olacak biçimde seçilebilir. Sav, Teorem 1.6.8'den çıkar.

(ii) (i)'den dolayı $h(z)=f(z)-g(z)=\sum(a_n-b_n)(z-a)^n$ fonksiyonu $D_r(a)$'da özdeş olarak 0'dır; dolayısıyla her $z\in D_r(a)$ için $f(z)=g(z)$. Teorem 1.6.3(v)'ten $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)=b_n$. □

Problemler

Problem 1.6.1. $\sum a_n\,(z-a)^n$ kuvvet serisinin r yakınsaklık yarıçapı için

$$r=\sup\{\rho\,|\,0\leq\rho<+\infty,\{|a_n|\rho^n\ n\in\mathbb{N}\}\text{sınırlı}\}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.6.2. $\sum a_n(z-2)^n$ serisi 0'da yakınsak, 3'te ıraksak olabilir mi?

Problem 1.6.3. $\sum[3-(-1)^n]^n z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Problem 1.6.4. $\sum_{n\geq1}nz^n$ ve $\sum_{n\geq1}n^2z^n$ kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını ve tanımladıkları fonksiyonları bulunuz.

Problem 1.6.5. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\sum a_n(z-c)^n$ ve $\sum n^\alpha a_n(z-c)^n$ serilerinin yakınsaklık yarıçaplarının aynı olduğunu gösteriniz.

Problem 1.6.6. a_n katsayısı sırasıyla $\frac{1}{n^p}$ $(p\in\mathbb{N})$, $\frac{1}{n^n}$, $n^{\ln n}$, $(\ln n)^n$ olan $\sum a_nz^n$ kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

Problem 1.6.7. $\sum\frac{(n!)^3}{(3n)!}z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Problem 1.6.8. $\sum a_nz^n$ ve $\sum a'_nz^n$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları sırasıyla r ve r' ise $\sum(a_n+a'_n)z^n$, $\sum(a_na'_n)z^n$ ve daima $a'_n\neq0$ ise $\sum\frac{a_n}{a'_n}z^n$ serilerinin yakınsaklık durumu hakkında ne söylenebilir?

Problem 1.6.9. $f(z)=\sum_{n\geq0}a_nz^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı r olsun.

$$\forall z\in D_r\ f(-z)=f(z)\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}\ a_{2n+1}=0,$$
$$\forall z\in D_r\ f(-z)=-f(z)\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}\ a_{2n+1}=0$$

olduğunu gösteriniz; başka sözlerle f fonksiyonu ancak ve ancak tüm tek (çift) indeksli katsayılar 0 ise bir çift (tek) fonksiyondur.

Problem 1.6.10. $f(z)=\sum_{n\geq0}z^n$ ile verilen kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 1, $g(z)=-\sum_{n\geq0}\frac{n-1}{n!}z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $+\infty$ olduğunu kanıtlayınız.

fg çarpım serisini bulunuz ve yakınsaklık yarıçapının $+\infty$ olduğunu kanıtlayınız.[17]

Problem 1.6.11. Sonlu terim dışında $a_n \neq 0$ ve $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $r > 0$ olsun. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n\geq 0} n^m a_n z^n$ kuvvet serisinin de yakınsaklık yarıçapının r olduğunu gösteriniz.

Problem 1.6.12. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ serisini yakınsaklık yarıçapını bulunuz ve $z = 1, -1, i$ noktalarında serinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Problem 1.6.13. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$, $\sum n^n z^n$, $\sum n! z^{n^2}$, $\sum a^{n^2} z^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\sum 2^n z^{n!}$ kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

Problem 1.6.14. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^{-n}(z-i)^n}{1+in^2}$ ve $\sum_{n\geq 0} \frac{n\sqrt{2}+i}{1+i2n} z^n$ kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz ve serilerin yakınsaklık çemberinde yakınsaklık karakterini inceleyiniz.

Problem 1.6.15. $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-z)^n}{n!}\right) = 1$ olduğunu gösteriniz (Teorem 1.3.8'i kullanınız).

Problem 1.6.16. $D_1(1)$ dairesinde $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonuna yakınsayan bir kuvvet serisi bulunuz. Ardından f'nin bu dairede $F(1) = 0$ koşulunu sağlayan bir ilkelini bulunuz.

Problem 1.6.17. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $+\infty$ olduğunu gösteriniz. Toplamına f dersek, f''yü ve $F(0) = 1$ koşulunu sağlayan ilkelini bulup $F = f = f'$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.6.18. $D_1(-1)$'de $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(z+1)^n$ olduğunu gösteriniz. İpucu: Önce $-\frac{1}{z}$'yi $D_1(-1)$'de bir kuvvet serisine açınız.

Problem 1.6.19. (p_n) pozitif terimli, azalan ve $\lim p_n = 0$ ise, $\sum p_n z^n$ serisinin, $\delta > 0$ olmak üzere, $K := \{z \in \overline{\mathbb{D}} \mid |z-1| \geq \delta\}$'da düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

1.7 Temel Fonksiyonlar

Bu kısımda ele alacağımız özel analitik fonksiyonları iyi kavramak kompleks analizde çok önemlidir. Bu kısımda üssel fonksiyonlar, logaritma, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar incelenecektir. Gerçel analizde örneğin e^x üssel fonksiyonu ile $\cos x$ ve $\sin x$ gibi trigonometrik fonksiyonları inceleriz. Ancak gerçel analizde kaldığımız sürece e^x üssel fonksiyonu ile $\cos x$, $\sin x$ fonksiyonları arasında hiçbir bağ kuramayız. O fonksiyonları tanımlarken çıkış kaynaklarımız farklıdır. Hatta bir bağ olanaksız gözükür: Çünkü $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonları döngülü ve sınırlıdır, buna karşın e^x fonksiyonu ne döngülüdür ne de sınırlı! Ancak komplekse geçtiğimizde bu fonksiyonların inanılmaz güzellikte birbiriyle

[17] Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \cdots - \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{n!}$.

kenetli olduklarını, trigonometrik fonksiyonların kendilerinin ve tüm geometrik özelliklerinin, analitik olarak tanımlanmış bir tek fonksiyondan, e^z fonksiyonundan elde edildiğini göreceğiz. Bu kısımda z kompleks değişken olmak üzere, e^z, $\cos z$, $\sin z$ ve diğer trigonometrik fonksiyonları tanımlayacak ve hiçbir geometrik argüman kullanmayacağız. π sayısını bir çemberin uzunluğuna ve çapına başvurmadan elde edeceğiz, ayrıca "açı" kavramını da geometrik olarak değil aritmetik olarak tanımlayacağız. Bu asla kompleks analizde geometrinin dışlanacağı anlamına gelmez. Tam tersine kompleks analiz geometri ve aritmetiğin buluştuğu bir alandır; ancak Geometrik Fonksiyonlar Kuramı KA II'de işlenecektir. Yine de bu kitapta da, kanıt için olmasa da, yer yer geometrinin görsel desteğinden yararlanacağız.

Kompleks analizin reel analizden önemli farklarından biri, birebir olmayan holomorf fonksiyonların da, uygun seçilen tanım bölgeleriyle holomorf terslerinin incelenmesidir. Bu çok değerli fonksiyonları incelemeyi gerektirir ve zorunlu olarak bizi Riemann yüzeylerine götürür. Bu ilk kez karşılaşanlara belirli zorluklar hazırlasa da alışmak uzun sürmez ve kurama zenginlik katar. Bu kısımda z^2 ve $\exp z$ fonksiyonların çok değerli terslerine kısaca değineceğiz.

1.7.1 Üssel ve Trigonometrik Fonksiyonlar

Kompleks z sayıları için tanımlayacağımız $e^z, \cos z, \sin z, \ldots$ fonksiyonlarının $z = x \in \mathbb{R}$ olduğunda gerçel analizdeki $e^x, \cos x, \sin x, \ldots$ fonksiyonları ile örtüşmesini istiyoruz. Dolayısıyla, sonuncuların bilinen bazı özelliklerinden yola çıkmalıyız. Kuramımızın temel taşları kuvvet serileri olacağından, gerçel analizdeki $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$, ve geometrik olarak tanımlanan cos ve sin fonksiyonların $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ve $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ kuvvet serilerinden yola çıkacağız. cos ve sin fonksiyonlarını incelerken hiçbir geometrik argümana başvurmayacak, böylece bunları ve bir sonraki altkısımda açı kavramını aritmetikleştireceğiz.

Tanım 1.7.1. Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(z) &:= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \ \exp z \equiv e^z := \mathrm{E}(z), \\
\cos z &:= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\
\sin z &:= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

olarak tanımlıyoruz.

Bu kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapının $+\infty$ olduğu apaçıktır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R} \;\; \mathrm{E}(x) = e^x, \cos x, \sin x \in \mathbb{R}, \\ &\forall z \in \mathbb{C} \;\; \cos(-z) = \cos z, \; \sin(-z) = -\sin z \end{aligned} \tag{1.31}$$

olduğu aşikârdır.

Teorem 1.7.2. (i) $\mathrm{E}, \cos, \sin$ *fonksiyonları* $\mathbb{C}$*'de holomorftur ve her* $z \in \mathbb{C}$ *için* $\mathrm{E}'(z) = \mathrm{E}(z)$*,* $(\cos z)' = -\sin z$*,* $(\sin z)' = \cos z$*.*

(ii) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *için* $z = x + iy$ *olmak üzere,*

$$\mathrm{E}(z+w) = \mathrm{E}(z) \cdot \mathrm{E}(w), \;\; \mathrm{E}(z) \neq 0, \;\; (\mathrm{E}(z))^{-1} = \mathrm{E}(-z), \tag{1.32}$$

$$\mathrm{E}(iz) = \cos z + i \sin z, \;\; \mathrm{E}(-iz) = \cos z - i \sin z, \tag{1.33}$$

$$\mathrm{E}(x) > 0, \;\; |\mathrm{E}(z)| = \mathrm{E}(x) = E(\operatorname{Re} z), \;\; |\mathrm{E}(iy)| = 1.$$

(iii) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *için*

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}(iz) + \mathrm{E}(-iz)\right), \;\; \sin z = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{E}(iz) - \mathrm{E}(-iz)\right), \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 z + \sin^2 z, \\ \cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \sin z \sin w, \\ \sin(z \pm w) &= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w. \end{aligned}$$

Kanıt. (i) Kuvvet serilerimizin yakınsaklık yarıçapları sonsuz olduğundan, E, cos ve sin fonksiyonlarımız $\mathbb{C}$'de holomorfturlar. Türevlere ilişkin savlar, serilerimizde terim terim türev alınarak görülür.

(ii) Her $p, q \in \mathbb{N}$ için $a_p = \frac{z^p}{p!}$ ve $b_q = \frac{w^q}{q!}$ olmak üzere,

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{p!q!} z^p w^q = \frac{1}{n!}(z+w)^n$$

olduğundan, Cauchy çarpım teoremi ile

$$\mathrm{E}(z)\mathrm{E}(w) = \sum_{n \geq 0} c_n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \mathrm{E}(z+w)$$

elde edilir. $\mathrm{E}(0) = 1$ olduğundan, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$1 = \mathrm{E}(z + (-z)) = \mathrm{E}(z)\mathrm{E}(-z) \implies \mathrm{E}(z) \neq 0 \text{ ve } (\mathrm{E}(z))^{-1} = \mathrm{E}(-z)$$

olur. Serilerimiz mutlak yakınsak, $i^{2n} = (-1)^n$ ve $i^{2n+1} = i(-1)^n$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \cos z + i \sin z &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = \sum_{n \geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} = \mathrm{E}(iz). \end{aligned}$$

Buradan da (1.31) ile

$$\mathrm{E}(-iz) = \cos(-iz) + i\sin(-iz) = \cos iz - i\sin iz$$

olur. Böylece (1.33) kanıtlanmıştır.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{E}(x) \in \mathbb{R}$ ve (1.32) ile

$$\mathrm{E}(x) = \mathrm{E}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \mathrm{E}(\frac{x}{2})\mathrm{E}(\frac{x}{2}) = \left(\mathrm{E}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$$

olur. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{E}(z)} &= \sum \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \mathrm{E}(\overline{z}), \\
|\mathrm{E}(z)|^2 &= \mathrm{E}(z)\overline{\mathrm{E}(z)} = \mathrm{E}(z)\mathrm{E}(\overline{z}) = \mathrm{E}\left(z + \overline{z}\right) = \mathrm{E}\left(2x\right) = (\mathrm{E}(x))^2 \\
&\Longrightarrow\ |\mathrm{E}(z)| = \mathrm{E}(x), \\
|\mathrm{E}(iy)| &= |\mathrm{E}(0 + iy)| = \mathrm{E}(0) = 1
\end{aligned}$$

(iii) (1.34) doğrudan (1.33)'ten çıkar. Diğer formüller (1.32) ve (1.34)'ten doğrudan dört işlemle çıkar. Örnek oluşturmak üzere, ilkini kanıtlayalım:

$$\begin{aligned}
\cos^2 z + \sin^2 z &= \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}(iz) + \mathrm{E}(-iz)\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2i}\left(\mathrm{E}(iz) - \mathrm{E}(-iz)\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(\mathrm{E}(iz) + \mathrm{E}(-iz))^2 - (\mathrm{E}(iz) - \mathrm{E}(-iz))^2\right] \\
&= \frac{1}{4}4\mathrm{E}(iz)\mathrm{E}(-iz) = \mathrm{E}(iz - iz) = \mathrm{E}(0) = 1.
\end{aligned}$$

Diğer formüller benzer biçimde kanıtlanır. □

Not 1.7.3. Yalnızca E fonksiyonundan yola çıkabiliriz. (1.34) eşitlikleri $\mathbb{C}$'de E'den elde ettiğimiz cos ve sin fonksiyonlarının $\mathbb{R}$'de bildiğimiz cos ve sin fonksiyonları ile örtüştüğünü söyler. Bu, $\mathbb{C}$'de tanımlayacağımız tüm diğer trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar için de aynen geçerli olacaktır. $\mathbb{R}$'deki trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlara ilişkin tüm özellikler, bunların geometriyle olan hiçbir bağıntısına başvurmadan çıkarılacaktır.

e^z'nin yorumu: $e := \mathrm{E}(1)$ olarak tanımlansın. Önce (1.32)'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{E}(n) = e^n$, ardından her $q \in \mathbb{N}^*$ için

$$e = \mathrm{E}(1) = \mathrm{E}\left(q\frac{1}{q}\right) = \mathrm{E}\left(\overbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}^{q\,\text{tane}}\right) = \left(\mathrm{E}\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q$$

olduğundan, $\mathrm{E}(\frac{1}{q}) = \sqrt[q]{e} = e^{\frac{1}{q}}$ olur. $r = p/q \in \mathbb{Q}^+$ ve $p, q \in \mathbb{N}^*$ için

$$\mathrm{E}(p/q) = \mathrm{E}\left(\overbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}^{p \text{ tane}}\right) = \underbrace{\mathrm{E}\left(\frac{1}{q}\right)\cdots\mathrm{E}\left(\frac{1}{q}\right)}_{p \text{ tane}} = \left(\sqrt[q]{e}\right)^p = e^{p/q},$$

dolayısıyla $\mathrm{E}\,(r) = e^r$ olduğu görülür; diğer yandan $\mathrm{E}(-r) = e^{-r}$ bağıntısı $(\mathrm{E}(r))^{-1} = (e^r)^{-1}$'den elde edilir. Her $r \in \mathbb{Q}$ için $\mathrm{E}(r) = e^r$ olur. Demek ki, rasyonel r sayıları için $\mathrm{E}(r)$ tam da e gerçel sayısının r. gücüdür. $x \in \mathbb{R}$ herhangi bir gerçel sayı ve (r_n) ise rasyonel sayıların $\lim r_n = x$ olan bir dizisi ise, E fonksiyonu sürekli olduğundan, $\mathrm{E}(x) = \lim \mathrm{E}(r_n) = \lim e^{r_n}$ sayısı da "e sayısının x. gücü" olarak tanımlanabilir ve $e^x = \mathrm{E}(x)$ gösterimi uygundur. Bu nedenle, her $z \in \mathbb{C}$ için de $e^z := \mathrm{E}(z)$ gösterimi yeğlenir. e^z fonksiyonun temel özellikleri, her $z, w \in \mathbb{C}$ için $z = x + iy$ olmak üzere,

$$e^{z+w} = e^z e^w,\ (e^z)' = e^z,\ e^0 = 1,\ |e^z| = e^x,\ \left|e^{iy}\right| = 1$$

şeklini alırlar.

$\ln x$ **fonksiyonu:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto e^x)$ türevlenebilir ve $f'(x) = e^x = (e^{x/2})^2 > 0$ olduğundan, f kesin artandır. $x > 0$ için $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots > 1 + x$ olduğundan, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ elde edilir. Buradan ise $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ olur. Sonuçta $f(x) = e^x$ fonksiyonu kesin artan biçimde $\mathbb{R}$'yi $(0, +\infty)$ aralığına resmeder; bunun ters fonksiyonu ln ile gösterilir:

$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad y = \ln x :\Longleftrightarrow\ x = e^y.$$

ln fonksiyonu kesin artandır, her yerde türevlenebilir ve temel özellikleri şunlardır:

$$\ln xy = \ln x + \ln y, \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x},$$
$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \quad \ln 1 = 0.$$

π **sayısı:** $x \in \mathbb{R}$ için $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonları her mertebeden türevleri olan $\mathbb{R}$-değerli fonksiyonlardır. Yeterince küçük $x > 0$ sayıları için $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının pozitif olduğu seri açılımlarından kolayca görülür. Diğer yandan $\cos' x = -\sin x$ ve $\sin' x = \cos x$ olduğundan, yeterince küçük $x \geq 0$ için $\cos x$ kesin azalan ve $\sin x$ kesin artandır. $\cos x$ fonksiyonunun serisi mutlak yakınsak olduğundan, istediğimiz gibi ayraçlar koyabiliriz; biz şöyle yazalım:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\right) - \cdots$$

Özel olarak $x = 2$ alırsak, ayraçlardaki sayıların her biri pozitif olacağından,

$$\cos 2 < 1 - \frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

dd. $\cos 2 < 0$ olur. Ayrıca, $\cos 0 = 1$ olduğundan, $\cos x$ fonksiyonun $[0, 2]$ aralığında en az bir sıfır yeri vardır. Diğer yandan $0 < x \leq 2$ ve $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4n+1)!} - \frac{x^2}{(4n+3)!} &> 0 \\ \sin x = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{(4n+1)!} - \frac{x^2}{(4n+3)!}\right)x^{4n+1} &> 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $(0, 2]$ aralığında $\cos' x = -\sin x < 0$ olduğu için $\cos x$ fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında kesin azalandır. Böylece, $\cos x$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığında bir tek sıfır yeri vardır; bunu $\frac{\pi}{2}$ ile göstereceğiz. Elbette $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Teorem 1.7.2(iii)'ten yararlanarak bilinen bağıntılar kanıtlanır: Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos z \cos\frac{\pi}{2} - \sin z \sin\frac{\pi}{2} = -\sin z, \\ \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin z \cos\frac{\pi}{2} + \cos z \sin\frac{\pi}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

Buradan $\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$, benzer biçimde $\sin\pi = 0$ ve ardından $\cos 2\pi = \cos(\pi + \pi) = \cos\pi\cos\pi - \sin\pi\sin\pi = 1$ ve benzer biçimde $\sin 2\pi = 0$ elde edilir. Sonunda bunlardan aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \quad \text{ve} \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z. \tag{1.35}$$

Tanım 1.7.4. $A, B \subset \mathbb{C}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} A \pm B &:= \{a \pm b \,|\, a \in A \text{ ve } b \in B\}, \\ AB &:= \{ab \,|\, a \in A \text{ ve } b \in B\}, \\ \alpha B &:= \{\alpha b \,|\, b \in B\}, \\ \alpha + B &:= \{\alpha + b \,|\, b \in B\}. \end{aligned}$$

Önerme 1.7.5. (i) cos *ve* sin *fonksiyonlarının ikisinin de döngüler kümesi* $2\pi\mathbb{Z}$*'dir.*

(ii) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ *için*

$$e^z = 1 \iff z \in 2\pi i\mathbb{Z} \quad \textit{ve} \quad e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

(iii) $\cos z = 0 \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ *ve* $\sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$.

Kanıt. (i) (1.35)'ten dolayı 2π sayısı cos ve sin fonksiyonlarının bir döngüsüdür. Her $z \in \mathbb{C}$ için $\sin(\frac{\pi}{2} + z) = \cos z$ olduğundan, cos ve sin fonksiyonlarının döngüleri aynıdır. $p \in \mathbb{C}$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $\sin(z+p) = \sin z$ ve $\cos(z+p) = \cos z$ olsun. Buradan $z = 0$ ile

$$0 = \sin 0 = \sin p = \frac{1}{2i}\left(e^{ip} - e^{-ip}\right) \Longleftrightarrow e^{ip} = e^{-ip}, \ (*)$$
$$1 = \cos 0 = \cos p = \frac{1}{2}\left(e^{ip} + e^{-ip}\right) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} e^{ip} = 1.$$

Şimdi $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $p = a + ib$ olsun.

$$1 = e^{ip} = e^{-b}e^{ia} = e^{-b}(\cos a + i \sin a) \Longleftrightarrow$$
$$b = 0, \ \ \cos a = 1, \ \sin a = 0, \ \ p = a \in \mathbb{R}.$$

Dolayısıyla, $\cos z$ ve $\sin z$ fonksiyonlarının tüm döngüleri reeldir. 2π bu fonksiyonların bir pozitif döngüsüdür. Fonksiyonlarımız sürekli olduklarından, döngülerinin yığılma noktaları da bir döngüdür. Diğer yandan Teorem 1.6.8'den dolayı, 0 sayısı pozitif döngülerimizin bir yığılma noktası olamaz. Böylelikle, bir en küçük $p > 0$ döngümüz vardır. Bu durumda, $0 < p \leq 2\pi$ olur. $n := [2\pi/p]$ olsun.[18] $2\pi - [2\pi/p]p$ de bir döngüdür ve $[2\pi/p]$ bir doğal sayı değilse, $0 < 2\pi - [2\pi/p]p < p$ eşitsizliği p'nın minimalliği ile çelişir. Dolayısıyla, $n \in \mathbb{N}^*$ olur. $n = 1$, dolayısıyla $\omega = 2\pi$ olduğunu savunuyoruz. Varsayalım ki $n > 1$ olsun. $n = 2$ olsaydı bu, $p = \pi$'nin bir döngü olması demek olurdu ki, o da $\sin(x + \pi) = -\sin x$ ile çelişir. O halde $n \geq 3$ olmalıdır. Bu durumda ise $0 < p \leq 2\pi/3$ olur ki, böylelikle $\sin p = 0$ ile bir çelişkiye ulaşırız, zira biz $\sin x$ fonksiyonunun $(0, \frac{2\pi}{3}]$ aralığında bir sıfır yeri olmadığını biliyoruz. Böylece $n = 1$ ve $p = 2\pi$ olur.

(ii) $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ ise $e^z = 1$ olduğu apaçıktır. $z = x + iy$ olmak üzere, $e^z = 1$ olsun. $1 = |e^z| = \left|e^x e^{iy}\right| = e^x \left|e^{iy}\right| = e^x$ olduğundan, $x = 0$ olur. Dolayısıyla, $1 = e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ve sonuç olarak $\cos y = 1$ ve $\sin y = 0$ olmalıdır. Böylece $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ ve $z \in i2\pi\mathbb{Z}$ olur.

$e^z = e^w \iff e^z e^{-w} = 1 \iff e^{z-w} = 1 \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(iii) ise (1.34) kullanılarak benzer biçimde kanıtlanır. □

Uyarı: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$ ve $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için $|\cos x| \leq 1$ ve $|\sin x| \leq 1$. Buna karşın $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\cos iy = \frac{1}{2}\left(e^{iiy} + e^{-iiy}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right)$ olduğundan, $\lim_{y \to \pm\infty} \cos iy = +\infty$ elde edilir. Dolayısıyla, cos ve benzer biçimde sin fonksiyonları $\mathbb{C}$'de sınırlı değildir. Bu bir rastlantı değildir. $\mathbb{C}$'de holomorf fonksiyonlara **tam fonksiyonlar** denir. İleride *sınırlı tam fonksiyonların sabit olduğunu* kanıtlayacağız. cos ve benzer biçimde sin tam fonksiyonları sabit olmadıklarından sınırlı olamazlar.

[18] Bir $x \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı için $[x]$ ile $n \leq x$ koşulunu sağlayan en büyük tam sayı gösterilir; buna Gauss gösterimi denir.

Diğer trigonometrik fonksiyonlar benzer biçimde tanımlanırlar, örneğin

$$z \in \mathbb{C} \backslash (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi) \text{ için } \tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \text{ ve } z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}\pi \text{ için } \coth z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

olarak tanımlanırlar. Her iki fonksiyonda tanım bölgelerinde holomorfturlar. Hiperbolik fonksiyonlar da gerçel analizdeki gibi tanımlanırlar. Örneğin her $z \in \mathbb{C}$ için:

$$\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right), \ \sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right).$$

Açıkça $\cosh, \sinh \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Komplekste trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonların sıkı biçimde kenetlendiklerini görürüz. Her şeyden önce cosh ve sinh döngüleri $2\pi i\mathbb{Z}$ olan döngülü fonksiyonlardır. $z = x + iy$ olmak üzere, kanıtlarını problem olarak bıraktığımız aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir:

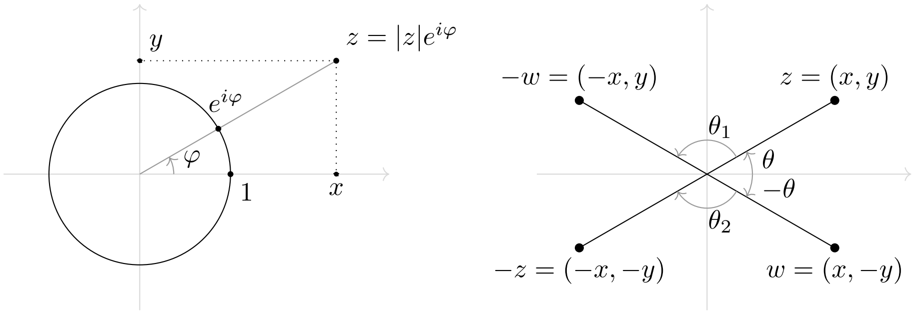
$$\begin{aligned}
\cosh z &= \cos iz, \ i \sinh z = \sin iz, \\
\sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, && (1.36) \\
\cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, && (1.37) \\
\sinh(z+w) &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \\
\cosh(z+w) &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w.
\end{aligned}$$

1.7.2 Argüman, Logaritma ve Yönlenmiş Açılar

Bu altkısımda bir yandan exp fonksiyonun bazı kısmi ters fonksiyonlarını inceleyecek, diğer yandan açıları, geometriye başvurmadan, aritmetik olarak tanımlayacağız. Geometride açılar başlangıç noktaları aynı olan yarıdoğrular için tanımlanan bir kavramdır. Biz, önce bunların aritmetik tanımını verip sonra aralarında yönlenmiş açıları tanımlayacağız. Ayrıca, bu altkısımda **arg**, **log** gibi küme değerli fonksiyonlarla karşılaşacağız. İlke olarak küme değerli fonksiyonları koyu yazacağız. $\mathbf{h} : X \to \mathcal{P}^*(Y)$ küme değerli bir fonksiyon ve $U \subset X$ ise, her $x \in U$ için $g(x) \in \mathbf{h}(x)$ koşulunu sağlayan $g : U \to Y$ fonksiyonlarına $\mathbf{h}$'nin U üzerideki **dal**ları denir. Kısım 1.9'da analitik dalları yakından inceleyeceğiz. Son olarak şunu belirtelim: $f : X \to Y$ örten, ancak birebir değilse $\mathbf{f}^{-1} : Y \to \mathcal{P}^*(X)$ küme değerlidir.

Önsav 1.7.6. *Her $z \in \mathbb{C}^*$ için tek olarak belirli bir $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ile $z = |z|e^{i\varphi}$. Böylece $r = |z|$ olmak üzere, $z = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ sağlanır.*

Kanıt. $z \in \mathbb{C}^*$ ve $w := \frac{z}{|z|} = a + ib$ olsun. Dolayısıyla, $a^2 + b^2 = |w|^2 = 1$ olur. Öyleyse $-1 \leq a \leq 1$ olur. cos fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığında kesin azalan ve $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$ olduğundan, tek olarak belirli bir $\theta \in [0, \pi]$ ile $a = \cos\theta$ olur. Eğer $a^2 = 1$ ise $b = 0$ olur; bu durumda $a = 1$ ise $\theta = 0$, $a = -1$ ise $\theta = \pi$ olur ve $\varphi = \theta$ aranan değerdir. Eğer $a^2 < 1$ ise zorunlu olarak $0 < \theta < \pi$



Şekil 1.5

olur. Diğer yandan, $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = b^2$ olur. Dolayısıyla, $b=\pm\sin\theta$ olur. $b=\sin\theta$ ise $w=\cos\theta+i\sin\theta$ olur. Bu durumda $\varphi=\theta$ alırız. Eğer $b=-\sin\theta$ ise, bu kez $-\pi<-\theta<0$ ve $\varphi=-\theta$ ile

$$a+ib=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $z=|z|e^{i\varphi}$. □

Önsav 1.7.6'nın kanıtından görüleceği gibi, önsavda geçen φ, ne cos ne de sin fonksiyonu ile tek başına belirli değildir.

Tanım 1.7.7. $z\in\mathbb{C}^*$ için $z=|z|e^{i\varphi}$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli $\varphi\in(-\pi,\pi]$ sayısına z sayısının **asıl argümanı** denir ve bu $\operatorname{Arg} z=\varphi$ olarak gösterilir.

$$\mathbf{arg}\, z := \operatorname{Arg} z + 2\pi\mathbb{Z}$$

kümesine ise z'nin **argümanlar kümesi** denir.

$\mathbf{arg}:\mathbb{C}^*\to\mathcal{P}^*(\mathbb{R})$ ve $\mathbf{arg}\, z=\{\theta\in\mathbb{R}\mid z=|z|e^{i\theta}\}$ olduğu kolayca görülür.

Not 1.7.8. Önsav 1.7.6'da $(-\pi,\pi]$ yerine $[-\pi,\pi)$ de alabilirdik. Daha fazlası da geçerlidir. $\alpha\in\mathbb{R}$ sayısı keyfi verilsin. cos ve sin fonksiyonları 2π döngülü olduklarından, her $z\in\mathbb{C}^*$ için tek olarak belirli $\varphi\in(\alpha,\alpha+2\pi]$ ve tek olarak belirli $\theta\in[\alpha,\alpha+2\pi)$ ile $\frac{z}{|z|}=e^{i\varphi}=e^{i\theta}$ olur. Her $z\in\mathbb{C}^*$ için $z=|z|e^{i\varphi}$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli $\varphi\in(\alpha,\alpha+2\pi]$ sayısını $\arg_\alpha z$ ile göstereceğiz. Böylece

$$\arg_\alpha:\mathbb{C}^*\to(\alpha,\alpha+2\pi].$$

Ayrıca, $\operatorname{Arg}=\arg_{-\pi}$.

$z\in\mathbb{C}^*$ için Şekil 1.5'in sağındaki çizimden

$$\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arg}(x+iy)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & x>0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0,\ y>0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & x<0,\ y<0\end{cases}$$

olduğu görülür. Örneğin $z = \sqrt{3} + i$ ve $w = \sqrt{3} - i$ için $\operatorname{Re} z > 0$ ve $\operatorname{Re} w > 0$ olduğundan, $\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ ve $\operatorname{Arg} w = \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$. Ayrıca, $\operatorname{Re}(-w) < 0$, $\operatorname{Im}(-w) > 0$ olduğundan, $\operatorname{Arg}(-w) = \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi$ ve $\operatorname{Re}(-z) < 0$, $\operatorname{Im}(-z) < 0$ sağlandığından, $\operatorname{Arg}(-z) = \arctan \frac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi$ olur. Böylece örneğin $\mathbf{arg}(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}$ ve $\mathbf{arg}(-\sqrt{3}+i) = -\frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ olur. Üstteki eşitlikten, Arg fonksiyonunun $\mathbb{C}_{-\pi}$'de $\mathcal{C}^\infty$ sınıfından olduğunu da görebiliriz[19].

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ve $a < b$ olmak üzere, $S^{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, a < \operatorname{Im} z < b\}$ kümesine bir **yatay şerit** denir. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} S_\alpha &:= S^{\alpha,\alpha+2\pi} = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, \alpha < y < \alpha + 2\pi\}, \\ d_\alpha &:= \{\rho e^{i\alpha} \,|\, 0 \le \rho < +\infty\},\ \mathbb{C}_\alpha := \mathbb{C}\backslash d_\alpha \end{aligned}$$

olsun. Böylece $\mathbb{C}_{-\pi} = \mathbb{C}\backslash d_{-\pi} = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ olur.

Her z için $\exp z \neq 0$ ve $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ olduğu kolayca görülür.

$$\mathbf{log}\, z := \mathbf{exp^{-1}}(z) = \{w \in \mathbb{C} \,|\, e^w \equiv \exp w = z\}\,,\ z \in \mathbb{C}^*,$$

Tanım 1.9.1'de verilen türden bir çok değerli fonksiyondur ve buna **logaritmalar fonksiyonu** diyelim. Önerme 1.7.5(ii)'den dolayı

$$\exp w = e^w = z \iff \mathbf{exp^{-1}}(z) = \mathbf{log}\, z = w + i2\pi\mathbb{Z}.$$

Dolayısıyla, w sayısı $e^\xi = z$ denkleminin bir çözümü ise, tüm diğer çözümler $w + 2\pi i\mathbb{Z}$ sayılarıdır. $\varphi = \operatorname{Arg} z$ ile $z = |z|e^{i\varphi}$ olacağından, $w = u + iv$ olarak yazılırsa $e^w = z$ denklemi $e^u e^{iv} = |z|e^{i\varphi}$ denklemine dönüşür. Bu ise $e^u = |z|$ ve $e^{iv} = e^{i\varphi}$ denklemlerine, dolayısıyla $u = \ln|z|$ ve $v \in \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$'ye denktir. Böylece $z = |z|e^{i\varphi}$ ve $\varphi = \operatorname{Arg} z$ için

$$e^w = z \iff w \in \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi\mathbb{Z} = \ln|z| + i\, \mathbf{arg}\, z$$

olur. Böylece, her $z \in \mathbb{C}^*$ için

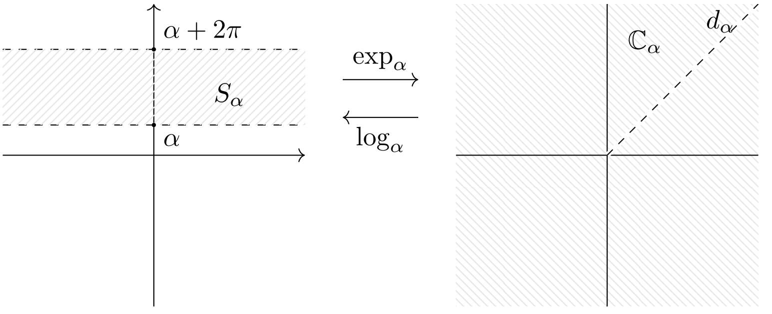
$$\mathbf{log}\, z = \ln|z| + i\, \mathbf{arg}\, z \tag{1.38}$$

olur. $\exp_\alpha := \exp|S_\alpha$ olsun.

$$\exp_\alpha : S_\alpha \to \mathbb{C}_\alpha,\ \ \exp_\alpha(z) = \ln|z| + i \arg_\alpha(z)$$

fonksiyonu (1.7.5)(ii) ve Not 1.7.8'den dolayı birebir üzerinedir. $z_0 \in \mathbb{C}$ içinse $S_{\alpha,z_0} := z_0 + S_\alpha$, $d_{\alpha,z_0} := z_0 + d_\alpha$ ve $\mathbb{C}_{\alpha,z_0} := z_0 + \mathbb{C}_\alpha$ olsunlar, dd. $w = \varphi(z) := z_0 + z$ olmak üzere, $S_{\alpha,z_0} = \varphi(S_\alpha)$, $d_{\alpha,z_0} = \varphi(d_\alpha)$ ve $\mathbb{C}_{\alpha,z_0} = \varphi(\mathbb{C}_\alpha)$ olsun. φ ve $\psi(w) := \varphi^{-1}(w) = w - z_0$ fonksiyonları kompleks türevlenebilir ve $\psi'(w) \equiv 1$ sağlanır.

[19] İleride, Arg fonksiyonunun $\mathbb{C}_{-\pi}$'de holomorf bir fonksiyonun sanal kısmı olmasından da bunun böyle olduğunu göreceğiz. Bu fonksiyon, bir sonraki teoremde verilendir.



Şekil 1.6: Üssel fonksiyonun davranışı ve $\mathbb{C}_\alpha, S_\alpha, d_\alpha$.

Teorem 1.7.9. *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\log_\alpha := \exp_\alpha^{-1} : \mathbb{C}_\alpha \to S_\alpha$ fonksiyonu türevlenebilir ve*

$$\frac{d\log_\alpha(z)}{dz} = \frac{1}{z},$$
$$\log_\alpha z = \ln|z| + i\arg_\alpha(z), \ z \in \mathbb{C}_\alpha.$$

Kanıt. exp fonksiyonu Teorem 1.6.3'ten dolayı ℂ'de her dereceden türevlere sahiptir. Ayrıca, her $z \in \mathbb{C}$ için $\exp'(z) = \exp(z) \neq 0$ olduğundan, $\exp_\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}_\alpha)$ sağlanır. Öte yandan Önerme 1.2.19'dan $\log_\alpha$ kompleks türevlenebilir ve $w = \log_\alpha(z)$, dolayısıyla $z = \exp_\alpha(w)$ olmak üzere,

$$\log_\alpha'(z) = \frac{1}{\exp_\alpha'(w)} = \frac{1}{\exp_\alpha(w)} = \frac{1}{z}$$

olur. Her $z \in \mathbb{C}_\alpha$ için $\log_\alpha(z) \in \mathbf{log}\, z$. olduğundan, $\log_\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{C}_\alpha$'de logaritmanın türevlenebilir bir dalıdır (bkz. Tanım 1.9.1).

Her $z \in \mathbb{C}_\alpha$ için tek olarak belirli bir $\varphi \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$ ile

$$w = \log_\alpha(z) = u + i\varphi \iff z = \mathrm{E}_\alpha(w) = e^u e^{i\varphi}$$

olur. Buradan $|z| = e^u$, dolayısıyla $u = \ln|z|$ ve $\varphi = \arg_\alpha(z)$ olur. □

Teoremimizin bir sonucu olarak $\mathbb{C}_\alpha$'da holomorf bir fonksiyonunun sanal kısmı olarak $\arg_\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{C}_\alpha$'da $\mathcal{C}^1$ sınıfındandır. $\mathrm{E}_{\alpha,z_0}(z) := \mathrm{E}_\alpha(z - z_0)$ ve $\log_{\alpha,z_0}(z) = \log_\alpha(z - z_0)$ olmak üzere, E_{α,z_0} fonksiyonu S_{α,ζ_0} şeridini biholomorf şekilde $\mathbb{C}_{\alpha,z_0}$'ye resmeder ve $\frac{d}{dz}\log_{\alpha,z_0}(z) = \frac{1}{z-z_0}$.

Tanım 1.7.10. $\log_{-\pi} : \mathbb{C}_{-\pi} \to S_{-\pi}$ fonksiyonuna **asıl logaritma fonksiyonu** veya **logaritmanın anadalı** denir ve biz $\log_{-\pi}$ yerine Log yazacağız

Bu tanımlarla toparlarsak, her $z \in \mathbb{C}^*$ için

$$\begin{aligned}\mathbf{log}\, z &= \ln|z| + i\, \mathbf{arg}\, z \\ &= \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2\pi\mathbb{Z} = \operatorname{Log} z + i2\pi\mathbb{Z}, \\ \mathbf{arg}\, z &= \operatorname{Arg} z + 2\pi\mathbb{Z}, \\ &\exists\varphi \in \mathbb{R}\left(z = |z|\, e^{i\varphi} \implies \mathbf{arg}\, z = \varphi + 2\pi\mathbb{Z}\right), \\ z = |z|\, e^{i\varphi} &\implies \forall m \in \mathbb{Z} : z^m = |z|^m e^{im\varphi}.\end{aligned}$$

Özellikle[20]

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi \;\; (\textbf{De Moivre formülü}). \tag{1.39}$$

Önerme 1.7.11. *Her $z, w \in \mathbb{C}$ için*

(a) $\mathbf{arg}(zw) = \mathbf{arg}\, z + \mathbf{arg}\, w$,

(b) $\mathbf{arg}(\frac{z}{w}) = \mathbf{arg}\, z - \mathbf{arg}\, w$,

(c) $\mathbf{arg}(z^{-1}) = -\,\mathbf{arg}\, z$.

(d) $\mathbf{log}(zw) = \mathbf{log}\, z + \mathbf{log}\, w$,

(e) $\mathbf{log}\, \frac{z}{w} = \mathbf{log}\, z - \mathbf{log}\, w$,

(f) $\mathbf{log}\, z^{-1} = -\,\mathbf{log}\, z$.

Kanıt. Apaçık. □

Not 1.7.12. $A \subset \mathbb{C}$ için $A + A = 2A$ olması gerekmez! Bu nedenle, her ne kadar $\mathbf{arg}(z^2) = \mathbf{arg}\, z + \mathbf{arg}\, z$ ise de $\mathbf{arg}(z^2) = 2\,\mathbf{arg}\, z$ olması gerekmez! Diğer yandan, Önerme 1.7.11'de verilen denklemlerin Arg veya **arg**'ın herhangi bir dalı için doğru olması gerekmez. Örneğin okur $z = e^{i\frac{4}{5}\pi}$ ve $w = e^{i\frac{3}{5}\pi}$ için kolayca $\operatorname{Arg}(zw) \neq \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$ olduğunu görür. Her ne kadar $\mathbf{log}(z^2) = \mathbf{log}\, z + \mathbf{log}\, z$ ise de $\mathbf{log}(z^2) = 2\,\mathbf{log}\, z$ olması gerekmez! Örneğin $\mathbf{log}\, i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + i2\pi\mathbb{Z} = i(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z})$ olduğundan, $i\frac{\pi}{2}, i(\frac{\pi}{2} + 2\pi) \in \mathbf{log}\, i$, dolayısıyla bunların toplamı $i\,(\pi + 2\pi) \in \mathbf{log}\, i + \mathbf{log}\, i = \mathbf{log}(i^2)$. Ancak $i\,(\pi + 2\pi) \notin 2i(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}) = 2\,\mathbf{log}\, i$. Böylece $2\,\mathbf{log}\, i \subsetneq \mathbf{log}(i^2)$. Önermemizdeki eşitliklerin, **arg**'da olduğu gibi, **log**'un dalları için geçerli olması gerekmez.

Şimdi biraz $\mathbb{C}$'nin geometrisine bakalım[21].

Teorem 1.7.13. *$\mathbb{C}$'nin eşuzaklı (izometrik) dönüşümleri, $a \in \mathbb{C}$ ve $u \in \mathbb{S}$ olmak üzere,*

$$f(z) = uz + a \;\; ve \;\; f(z) = u\bar{z} + a$$

dönüşümleridir.

[20] De Moivre Formülü'nü trigonometriye başvurmadan kolayca elde ettik.

[21] Okurun s. 396'ye gözatması yararlıdır.

Kanıt. Teoremde ileri sürülen dönüşümler eşuzaklı dönüşümlerdir.

Şimdi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eşuzaklı olsun. Bu durumda $|f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$ olduğundan,

$$g(z) := \frac{z - f(0)}{f(1) - f(0)}$$

fonksiyonu da eşuzaklıdır. $h := g \circ f$ dönüşümü, iki eşuzaklı dönüşümün birleşimi olarak eşuzaklıdır ve $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ geçerlidir. Ayrıca, $|h(z)|^2 = |h(z) - h(0)|^2 = |z - 0|^2 = |z|^2$ ve benzer biçimde $|h(z) - 1|^2 = |z - 1|^2$ eşitliklerinden $\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} z$ elde edilir. Bunlar ve h'nin eşuzaklılığından ya $h(i) = i$ ya da $h(i) = -i$ olur. Her $z = x + iy$ için bir yandan $h(z) = x + iv$, diğer yandan $|h(z)|^2 = |z|^2$ ile $v = \pm y$ elde edilir. Böylece $h(z) = x \pm iy$ olur. Buradan $h(i) = i$ ise, $h(z) \equiv x + iy = z$ ve $h(z) \equiv x - iy = \overline{z}$ olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Veya aynı sonuca aşağıdaki gibi de ulaşırız:

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$'deki bir eşuzaklı dönüşüm, bir doğru üzerinde bulunmayan üç farklı noktada aldığı değerlerle tek olarak belirlidir. Şimdi $\mathbb{C}$'de Id ve $\overline{\text{Id}}$ dönüşümleri eşuzaklı dönüşümlerdir. Eğer $h(i) = i$ ise, h ile Id fonksiyonları $0, 1$ ve i'de aynı değeri aldıkları için $h = \text{Id}$, eğer $h(i) = -i$ ise, h ile $\overline{\text{Id}}$ fonksiyonları $0, 1$ ve i'de aynı değeri aldıkları için $h = \overline{\text{Id}}$ olur. Bu ise, $u = f(1) - f(0)$ ve $|u| = 1$ ile ilk durumda $f(z) = uz + f(0)$, ikinci durumda ise $f(z) = u\overline{z} + f(0)$ fonksiyonunu verir. □

$\text{Kh}(\mathbb{C}) := \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = uz + a,\ u \in \mathbb{S},\ a \in \mathbb{C}\}$ kümesinin öğelerine **katı hareketler** denir[22]. Bunlar $\mathbb{C}$'nin eşuzaklı grubunun bir altgrubunu oluştururlar. Kompleks analizde önemli olan bu altgruptur; az sonra tanımlayacağımız ve kompleks analizin önemli kavramlarından biri olan yönlenmiş açılar bu altgrubun değişmezleridir.

$a, b \in \mathbb{C}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere,

$$L(a, b) = \{a + bt \mid t \in [0, +\infty)\}$$

kümesine başlangıç noktası a olan b yönündeki **yarıdoğru** denir. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ ile $b = e^{i\alpha}$ ise, $L(0, e^{i\alpha}) = d_\alpha$ olur. $p > 0$ reel sayı olmak üzere, $p \cdot [0, +\infty) = [0, +\infty)$ olduğundan, $L(a, b) = L(a, pb)$ olur. Özel olarak $p = |b|^{-1}$ seçersek ve $u := |b|^{-1}b$ dersek, $L(a, b) = L(a, u)$ olur. $L(a, b)$ yarıdoğrusunun a başlangıç noktasını merkez kabul eden her çember yarıdoğrumuzu bir tek noktada keserken, yarıdoğrunun diğer noktalarını merkez kabul eden çemberler, yarıçapları yeterince küçük seçildiğinde yarıdoğrumuzu iki farklı noktada keser[23]. Bu özellikle yarıdoğruların başlangıç noktaları tek olarak belirlenmiştir. Şimdi $|u_1| = |u_2| = 1$ olmak üzere, $L(a_n, u_n)$ yarıdoğruları verilsinler.

$$L(a_1, u_1) = L(a_2, u_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ve } u_1 = u_2$$

[22] Rigid motion

[23] Bu özellik çember kavramı kullanılmadan da anlatılabilir. Her $r > 0$ sayısı için yarıdoğrumuzun a noktasına uzaklığı r olan bir tek noktası vardır vs.

olduğunu savunuyoruz. Sağ yan doğruysa, sol yan da doğrudur.

Şimdi sol yan doğru olsun. $a_1 \neq a_2$ olsaydı a_2-merkezli yeterince küçük çemberler $L(a_1, u_1)$'i, dolayısıyla $L(a_2, u_2)$'yi iki farklı noktada keser. Bu ise, a_2'nin $L(a_2, u_2)$'nin başlangıç noktası olmasıyla çelişir. Öyleyse, $a_1 = a_2$ olur. Bu ortak değere a dersek, $a+u_1 \in L(a, u_1)$. Böylece, bir $t > 0$ ile $a+u_1 = a+tu_2$ ve $u_1 = tu_2$ elde ederiz. Buradan ise $1 = |u_1| = t|u_2| = t$ ve sonuçta $u_1 = u_2$ olur.

$(L(a, z), L(a, w))$ *sıralı* ikisine bir **yönlenmiş açı** diyecek ve ona katı hareketlere göre bir sayısal değişmez karşılık getireceğiz.

Tanım 1.7.14. Başlangıç noktaları aynı olan $L(a, z)$ ve $L(a, w)$ için

$$\sphericalangle(L(a, z), L(a, w)) := \mathbf{arg}\frac{w}{z}$$

değerlerine $L(a, z)$'den $L(a, w)$'ye yönlenmiş açının **sayısal değerleri** denir ve

$$\sphericalangle(z, w) := \sphericalangle(L(0, z), L(0, w)) = \mathbf{arg}\frac{w}{z}$$

olarak tanımlanır.

Her şeyden önce

$$\sphericalangle(L(a, w), L(a, z)) = \mathbf{arg}\,\frac{z}{w} = -\,\mathbf{arg}\,\frac{w}{z} = -\sphericalangle(L(a, z), L(a, w)).$$

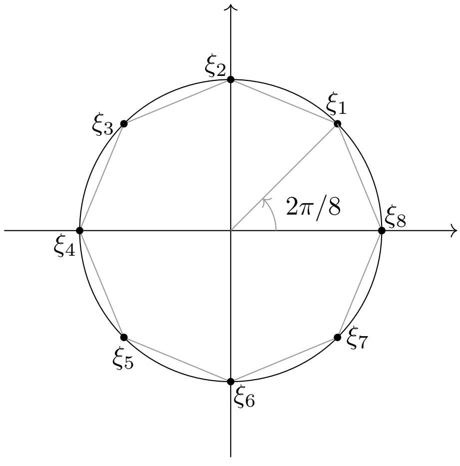
Diğer yandan, kutupsal koordinatlarda kullandığımız φ sayıları, $\sphericalangle(1, z)$'nin değerlerinden başkaları değildirler. Her $p > 0$ sayısı ve her $z \in \mathbb{C}^*$ için $\mathbf{arg}\, pz = \mathbf{arg}\, z$ olduğundan, $\sphericalangle(z, w) = \sphericalangle(\frac{z}{|z|}, \frac{w}{|w|})$ olur. Dolayısıyla, $u_1, u_2 \in \mathbb{S}$ olmak üzere, $\sphericalangle(u_1, u_2)$ açılarına yakından bakmak yeterlidir. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ dönüşümü $\gamma(t) = e^{it}$ dönüşümü olsun. t monoton arttığında $L(0, e^{it})$ yarıdoğrusu saatin ters yönünde döner ve e^{it} noktası $\mathbb{S}$ üzerinde gezinir; t monoton azaldığında ise bu ışın saat yönünde döner. Şimdi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ noktalarını, $t_1 \leq t_2$ ve $u_k = e^{it_k}$ olacak biçimde seçelim; bu seçimi sonsuz değişik biçimde yapabileceğimizi biliyoruz. Bu durumda,

$$t_2 - t_1 \in \mathbf{arg}\, e^{i(t_2 - t_1)} = \mathbf{arg}\, \frac{e^{it_2}}{e^{it_1}} = \mathbf{arg}\, \frac{u_2}{u_1} = \sphericalangle(u_1, u_2)$$

olur. Böylece $\sphericalangle(u_1, u_2) = t_2 - t_1 + 2\pi\mathbb{Z}$. Aynı zamanda $\gamma|[t_1, t_2]$ gezisinin uzunluğu $\int_{t_1}^{t_2} |\gamma'(t)| dt = t_2 - t_1$ olur (bkz. (2.2.10)(ii)).[24] Şimdi bir $m \in \mathbb{Z}$ sayısını yeterince büyük seçip $t_2 \leq t_3 := t_1 + 2m\pi$ olmasını sağlarsak, $u_1 = e^{it_3}$ olacağından,

$$\sphericalangle(u_2, u_1) = t_3 - t_2 + 2\pi\mathbb{Z} = -(t_2 - t_1) + 2m\pi + 2\pi\mathbb{Z} = -(t_2 - t_1) + 2\pi\mathbb{Z}$$

[24] $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{S}$, $\gamma(t) = e^{it}$ gezisi $\mathbb{S}$'yi bir kez turladığından, birim çemberin uzunluğu $\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi$ olur. Böylece π sayısının bir çemberin uzunluğu ile ilişkisi kurulmuş olur.



Şekil 1.7: $\xi^8 = 1$'in kökleri, birim kökler.

olur. Örneğin $\sphericalangle(\exp i\frac{\pi}{4}, \exp i\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}$ iken $\sphericalangle(\exp i\frac{\pi}{2}, \exp i\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}$; burada $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ ve $t_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ alınmıştır.

Şimdi $L(a, u_1), L(a, u_2)$ yarıdoğruları ve $f(z) = uz + c$ katı hareketi verilsin. $b = ua + c$ olmak üzere, f dönüşümü, $L(a, u_k)$ yarıdoğrularını başlangıç noktaları b olan $L(b, uu_k)$ yarıdoğrularına resmeder ve açıkça

$$\sphericalangle(L(b, uu_1), L(b, uu_2)) = \mathbf{arg}\,\frac{uu_2}{uu_1} = \mathbf{arg}\,\frac{u_2}{u_1} = \sphericalangle(L(a, u_1), L(a, u_2)).$$

Şimdi $l_k = L(a, u_k)$ ve $l_k^* = L(a^*, u_k^*)$ olmak üzere, $\sphericalangle(l_1, l_2) = \sphericalangle(l_1^*, l_2^*)$ olsun. Bu durumda, tek olarak belirli bir f katı hareketi ile $f(a) = a^*$ ve $f(l_k) = l_k^*$ olduğunu savunuyoruz. $u_k, u_k^* \in \mathbb{S}$ olarak seçilmiş olsunlar. $g(t) := a + tu_1$ katı hareketi $l_0 := L(0, 1)$'i l_1'e $g(0) = a$ olacak biçimde resmeder ve bu özellikle tektir. Benzer biçimde $g^*(t) = a^* + tu_1^*$ katı hareketi l_0 yarıdoğrusunu l_1^*'e $g^*(0) = a^*$ olacak biçimde resmeden tek harekettir. $f := g^* \circ g^{-1}$ aranan katı harekettir.[25]

1.7.3 Kompleks Üsler

$n \in \mathbb{N}^*$ için $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, her $z \in \mathbb{C}$ için $u_n(z) := z^n$ olarak tanımlansın. u_n fonksiyonuna n. **üs fonksiyonu** diyelim. $u_n(z) = z^n = 1$ ve $u_n(z) = z^n = w\,(w \in \mathbb{C})$ denklemlerini inceleyelim:

[25]Tüm bu irdelemeler aslında şunu gösteriyor: Düzlemde başlangıç noktaları aynı olan yarıdoğruların (l_1, l_2) sıralı ikililerinin—bunlara yönlenmiş köşeler diyebiliriz— kümesini $\mathcal{K}$ ile gösterelim. Köşelerin başlangıç noktalarının aynı olması gerekmez. Bir f katı hareketi ile $(l_1^*, l_2^*) = (f(l_1), f(l_2))$ ise, $(l_1^*, l_2^*) \sim (l_1, l_2)$ olarak tanımlarsak, $\sim$ bağıntısı $\mathcal{K}$'de bir denklik bağıntısıdır. Yönlenmiş açılar bu bağıntıya göre denklik sınıfları olarak tanımlanabilir.

$$z^n = 1 \iff z = e^{i\frac{2\pi}{n}k}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.40}$$

$z^n = 1$ denkleminin tam n farklı çözümü vardır; $\xi := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ olmak üzere, bu kökler

$$1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}$$

kompleks sayılarıdır.

$0 \neq w = \rho e^{i\psi}, \ \psi \in (0, 2\pi]$ olmak üzere, kolayca

$$z^n = w \iff z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{1.41}$$

olduğu görülür[26]. $\xi := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ve $\eta := \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\psi}{n}}$ olmak üzere, çözümlerimiz

$$\eta, \eta\xi, \eta\xi^2, \ldots, \eta\xi^{n-1}$$

sayılarıdır. Bunların her birine w sayısının bir n. **kökü** olarak bakabiliriz. Bu durumda, $n > 1$ için $\mathbf{u_n^{-1}}$ dar anlamda bir fonksiyon değildir; $\mathbf{u_n^{-1}} : \mathbb{C} \to \mathcal{P}^*(\mathbb{C})$. Yine de $\mathbf{u_n^{-1}}$'ye n. **kök fonksiyonu** diyeceğiz. O halde $\mathbf{u_n^{-1}}(0) = \{0\}$ ve her $w \neq 0$ içinse $\mathbf{u_n^{-1}}(w)$ kümesi n ögelidir. Görsel benzerliği sağlamak için $\mathbf{u_n^{-1}}(w)$ yerine $\sqrt[n]{\mathbf{w}}$ veya $\mathbf{w}^{\frac{1}{n}}$ yazmayı yeğleyeceğiz[27]. Dolayısıyla, w sayısının $\frac{1}{n}$. gücü söz konusu olduğunda bu bir sayı değil bir kümedir. Böylece $w \neq 0$ için yukarıdaki hesaplamamıza göre

$$\mathbf{u_n^{-1}}(w) \equiv \sqrt[n]{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{w}^{\frac{1}{n}} = \left\{\eta, \eta\xi, \eta\xi^2, \ldots, \eta\xi^{n-1}\right\}$$

olacaktır. Her $A \subset \mathbb{C}$ için

$$e^A := \{e^a \mid a \in A\}$$

olsun. Diğer yandan, $\psi = \operatorname{Arg} w$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n}\mathbf{log}\, w} &= \{e^{\frac{1}{n}(\ln\rho + i(\psi + 2\pi k))} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\sqrt[n]{\rho} e^{\frac{1}{n}i(\psi+2\pi k)} \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ e^{\frac{1}{n}\mathbf{log}\, w} &= \{\sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\psi}{n}} e^{i\frac{2\pi k}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\eta, \eta\xi, \ldots, \eta\xi^{n-1}\right\}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

(1.41) ve (1.42) formülleri argümanı seçtiğimiz aralıktan bağımsızdır. Bu denklemlerden çıkardığımız $\mathbf{w}^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\mathbf{log}\, w}$ eşitliği aşağıdaki tanıma ışık tutar:

Tanım 1.7.15. Her $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ve her $w \in \mathbb{C}$ için

$$\mathbf{z}^w := e^{w\,\mathbf{log}\, z} = e^{w(\operatorname{Log} z + 2\pi i\mathbb{Z})} = \left\{e^{w \operatorname{Log} z} e^{i2\pi wk} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$\mathbf{z}^w$'ye **z'nin w. güçlerinin** kümesi denir. $\mathbf{z}^w$'nin $\mathbb{C}_{-\pi}$'de holomorf olan $e^{w \operatorname{Log} z}$ dalına $\mathbf{z}^w$'nin **anadalı** denir ve alışıldık biçimde z^w ile gösterilir.

---

[26] Burada herhangi bir $(\alpha, \alpha + 2\pi]$ aralığından yola çıkılabilir, sonuç değişmez.

[27] $\mathbf{w}^{\frac{1}{n}}$ gösteriminde w'nin koyu yazıldığına dikkat ediniz. Bunun yerine $w^{\left[\frac{1}{n}\right]}$ gösterimi de kullanılmaktadır.

Özellikle $\sqrt[n]{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^{\frac{1}{n}}$'nin anadalı alışıldık biçimde

$$z^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{z} := \exp(\frac{1}{n}\operatorname{Log} z) = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$$

ile gösterilir. Ayrıca, (1.40) ile uyum içinde $\xi = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ olmak üzere,

$$\mathbf{1}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\mathbf{1}} = e^{\frac{1}{n}\mathbf{log}\, 1} = e^{\frac{1}{n}2\pi i\mathbb{Z}} = \{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)}\} = \{1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}\}.$$

Son bir not: $\mathbf{e}^z$'nin anadalı $e^{z\operatorname{Log} e} = e^{z(\ln e+0)} = e^z = \exp z$ olur.

Teorem 1.7.16. *$z \in \mathbb{C}^*$ keyfi verilsin.*

(i) $\forall m \in \mathbb{Z} : \mathbf{z}^m = \{z^m\}$.

(ii) *$p, q \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ ve $\eta_1, \ldots, \eta_q$ ise, $w^q = z$ denkleminin farklı kökleri olmak üzere, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ için*

$$\mathbf{z}^{\frac{p}{q}} = \{\eta_1^p, \ldots, \eta_q^p\}.$$

(iii) *Her $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ için $\mathbf{z}^w$ sayılabilir sonsuz bir kümedir.*

Kanıt. (i) $m \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^m &= e^{m(\ln|z|+i\,\mathbf{arg}\, z)} = e^{m\ln|z|}.e^{mi(\operatorname{Arg} z+2\pi\mathbb{Z})} = |z|^m\, e^{i\cdot m\operatorname{Arg} z}e^{m2\pi i\mathbb{Z}} \\ &= z^m e^{m2\pi i\mathbb{Z}} = \{z^m e^{m2\pi ik} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{z^m\}\,.\end{aligned}$$

(ii) $\psi \in (0, 2\pi]$ ve $\psi \in \mathbf{arg}\, z$ olmak üzere, $\mathbf{arg}\, z = \psi + 2\pi\mathbb{Z}$. Şimdi $\eta := \sqrt[q]{|z|}e^{i\frac{\psi}{q}}$ ve $\xi = e^{i\frac{2\pi}{q}}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^{\frac{p}{q}} &= e^{\frac{p}{q}(\ln|z|+i\psi+i2\pi\mathbb{Z})} = e^{\frac{p}{q}\ln|z|}e^{ip\frac{\psi}{q}}e^{i\frac{p}{q}2\pi\mathbb{Z}} = \left(\sqrt[q]{|z|}e^{i\frac{\psi}{q}}\right)^p e^{pi\frac{2\pi}{q}\mathbb{Z}} \\ &= \{\eta^p\xi^p, \eta^p(\xi^2)^p, \ldots, \eta^p\,(\xi^q)^p\} = \{\eta_1^p, \ldots, \eta_q^p\},\ \eta_k := \eta\xi^k\end{aligned}$$

Elbette η_k sayıları $w^q = z$ denkleminin tüm farklı kökleridir.

(iii) $\mathbf{z}^w = e^{w\,\mathbf{log}\, z}$ sonlu olsun. Bu durumda, $a, b \in \mathbf{log}\, z$ sayıları $e^{wa} = e^{wb}$ olacak biçimde vardır. Buradan $e^{w(a-b)} = 1$, dolayısıyla $w(a-b) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ elde edilir. Bir $p \in \mathbb{Z}$ ile $w(a-b) = 2\pi ip$. Diğer yandan, $a, b \in \mathbf{log}\, z$ olduğundan, bir $q \in \mathbb{Z}$ ile $a-b = 2\pi iq$. Böylece bir önceki denklemle $w2\pi iq = 2\pi ip$, buradan da $w = p/q \in \mathbb{Q}$ elde edilir. Teoremimizin (ii) savı ile birlikte şu savı elde ederiz: *$\mathbf{z}^w$'nin sonlu olması için gerek ve yeter koşul $w \in \mathbb{Q}$ olmasıdır.* Diğer yandan, $\mathbf{log}\, z$ sayılabilir olduğundan, tanım gereği $\mathbf{z}^w$ en fazla sayılabilir sonsuzdur. Dolayısıyla, her $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ için $\mathbf{z}^w$ sayılabilir sonsuzdur. □

$$\forall\alpha \in \mathbb{R}\ \forall w \in \mathbb{C}\ \forall z \in \mathbb{C}_\alpha\ \ u_{\alpha,w}(z) := e^{w\log_\alpha z} \tag{1.43}$$

ile tanımlanan $u_{\alpha,w}$ fonksiyonu iki holomorf fonksiyonun bileşimi olarak holomorftur.

$$\begin{aligned}\frac{du_{\alpha,w}(z)}{dz} &= e^{w\log_\alpha z}\cdot\frac{d(w\log_\alpha z)}{dz} = e^{w\log_\alpha z}\cdot\frac{w}{z} = e^{w\log_\alpha z}\cdot\frac{w}{e^{\log_\alpha z}}\\ &= we^{(w-1)\log_\alpha z} = wu_{\alpha,w-1}(z).\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\log : U\to\mathbb{C}$ logaritmanın herhangi bir türevlenebilir dalı ise, U'da yalın olarak $z^w = e^{w\log z}$ ve $z^{w-1} = e^{(w-1)\log z}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dz}z^w = wz^{w-1}$$

yazacağız; eşitliğin iki yanında da logaritmanın *aynı dalı* kullanılacaktır.

Örnek 1.7.17. (1) $\mathbf{i}^i = e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z})} = \{e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Beklenmeyen veya şaşırtıcı bir biçimde sanal i'nin sanal i güçlerinin her biri gerçel sayılardır.

(2) $\sqrt{\mathbf{-1}}\equiv(\mathbf{-1})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}i(\pi+2\pi\mathbb{Z})} = \{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\pi k}\mid k\in\mathbb{Z}\} = \{i,-i\}$. Bu nedenle, $(\mathbf{-1})^{\frac{1}{2}}$'yi, yani $\sqrt{\mathbf{-1}}$'i $\sqrt{-1}$'den özenle ayıracağız. $\sqrt{-1}$'den $\sqrt{\mathbf{-1}}$ kümesinin ögelerinden birini, i olanı anlıyoruz, dd. yaygın kullanımla $\sqrt{-1}=i$ anlaşılacaktır.

(3) $\forall z\in\mathbb{C}^*\ \ \mathbf{z}^0 = e^{0\,\mathbf{log}\,z} = \{1\}$.

Problemler

Problem 1.7.1. e^{e^z}'nin gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.

Problem 1.7.2. $\cos z = \frac{3}{4}+i\frac{1}{4}$ ve $\cos z = 4$ denklemlerinin tüm çözümlerini bulunuz.

Problem 1.7.3. $\sin z = 11$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Problem 1.7.4. e^{2+i}, $\cos(2+i)$ ve $\sin(1+i)$'yi $a+ib\,(a,b\in\mathbb{R})$ biçiminde ifade ediniz.

Problem 1.7.5. Aşağıda tanımlanan

$$u:\mathbb{R}\to\mathbb{S}\setminus\{-1\},\quad u(t) := \frac{1+it}{1-it} = \frac{1-t^2}{1+t^2}+i\frac{2t}{1+t^2}$$

fonksiyonunun bir tameşleme olduğunu kanıtlayınız.

Problem 1.7.6. exp fonksiyonu altında $S_{a,b} = \{z\in\mathbb{C}\mid a<\operatorname{Re}z<b\}$ ve $S^{a,b} = \{z\in\mathbb{C}\mid a<\operatorname{Im}z<b\}$ şeritleri ile D_r dairelerinin resimlerini bulunuz.

Problem 1.7.7. $0<\varepsilon<\pi$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $R_\varepsilon = [a-\varepsilon,a+\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$ karesinin exp altında resmini bulunuz $\lim_{\varepsilon\searrow 0}V_2(\exp(R_\varepsilon))/V_2(R_\varepsilon)$ limitini bulunuz.

Problem 1.7.8. $a,b\in\mathbb{R}$, ve $a\neq 0$ olmak üzere, $y=ax+b$ doğrusunun exp altındaki resmini bulunuz.

Problem 1.7.9. $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dönüşümü $f(z) := \frac{1}{z}$ olarak tanımlansın. $f(\mathbb{D}^*) = \mathbb{C}^* \setminus \overline{\mathbb{D}}$, $f(\mathbb{C}^* \setminus \overline{\mathbb{D}}) = \mathbb{D}^*$ ve $f(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.10. $\mathbb{K}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'yi göstermek üzere, $B \subset \mathbb{K}$ açık ve bağlantılı olsun. $f : B \to \mathbb{K}$ türevlenebilir ve bir $c \in \mathbb{K}$ ile $f' = cf$ ise, her $\xi, a \in B$ için $f(\xi) = f(a)e^{-ca}e^{c\xi}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.11. exp fonksiyonunun her $z, w \in \mathbb{C}$ için $f(z+w) = f(z)f(w)$ ve $f(0) = 1$ ve her z için $f'(z) = f(z)$ koşulunu sağlayan $\mathbb{C}$'de holomorf tek fonksiyon olduğunu kanıtlayınız.

Problem 1.7.12. $T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k$ olmak üzere, her $r > 0$ için bir $n_r \in \mathbb{N}$ sayısı, her $n \geq n_r$ için T_n'nin tüm kökleri $\mathbb{C} \setminus D_r$'de olacak biçimde bulunabilir; gösteriniz.

Problem 1.7.13. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \right| \leq \left| e^{|z|} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |z|^k \right| \leq |z|^{n+1} e^{|z|}$$

ve dolayısıyla, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$|e^z - 1| \leq \left| e^{|z|} - 1 \right| \leq |z| e^{|z|}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.14. Hangi $\theta \in [0, 2\pi)$ sayıları için $\lim_{r \to +\infty} e^{re^{i\theta}}$ limiti vardır?

Problem 1.7.15. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\mathrm{Re}(z^n) \geq 0$ ise, $z \in \mathbb{R}$ ve $z \geq 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.16. Tüm sürekli $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}, \cdot)$ grup yapıdönüşümlerini bulunuz. Problem 1.7.10'dan yararlanabilirsiniz.

Problem 1.7.17. $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\varphi(0) = \varphi(1)$ olsun. Bu durumda, bir sürekli $\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ dönüşümünün, her $t \in [0,1]$ için $\Phi(e^{i2\pi t}) = \varphi(t)$ olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.[28]

Problem 1.7.18. Aşağıdaki özdeşlikleri kanıtlayınız: $z = x + iy$ için

$$\begin{aligned}
\cosh z &= \cos iz, \ \ i \sinh z = \sin iz, \\
\sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\
\cos z &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\
\sinh(z+w) &= \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w, \\
\cosh(z+w) &= \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w.
\end{aligned}$$

Problem 1.7.19. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayınız: $z = x + iy$ için

$$\begin{aligned}
|\cos z|^2 &= \cos^2 x + \sinh^2 y = \cosh^2 y - \sin^2 x \\
|\sin z|^2 &= \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x.
\end{aligned}$$

[28] φ, ileride göreceğimiz anlamda, $\mathbb{C}$'de bir kapalı gezidir. Bu problem $\mathbb{C}$'deki kapalı gezileri sürekli $\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ dönüşümleri olarak da tanımlayabileceğimizi söyler.

olduğunu gösteriniz. Bu denklemler üzerinden yola çıkarak cos ve sin fonksiyonlarının sıfır yerleri ve döngülerini yeniden tartışınız.

Problem 1.7.20. $\cosh z$ ve $\sinh z$ fonksiyonların sıfır yerlerini ve döngülerini bulunuz.

Problem 1.7.21. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|e^y - e^{-y}\right| \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2}\left|e^y + e^{-y}\right| \\ \frac{1}{2}\left|e^y - e^{-y}\right| \leq |\cos z| \leq \frac{1}{2}\left|e^y + e^{-y}\right|,\end{aligned}$$

dolayısıyla $y \to \infty$ için $|\sin z| \sim \frac{1}{2}e^{|y|}$ ve $|\cos z| \sim \frac{1}{2}e^{|y|}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.22. $\sin 2z$ ve $\tan z$'nin gerçel ve sanal kısımlarını bulunuz.

Problem 1.7.23. $0 < y_0 \in \mathbb{R}$ ve $l = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \{y_0\}$ ise, $\sin l$'nin bir yarım elips olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.24. $\cos|S_{0,\pi/2} : S_{0,\pi/2} \to \mathbb{C}^+\backslash[1, +\infty)$ fonksiyonunun biholomorf olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.25. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ serisinin $\mathbb{R}$'de düzgün yakınsak, ancak $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nz}{n^2}$ serisinin $\mathbb{C}$'de noktasal yakınsak bile olmadığını gösteriniz (İpucu: Seriyi $z = i$ için inceleyiniz.).

Problem 1.7.26. $0 \not\equiv p \in \mathbb{C}[z]$ ve $\sum_{n\geq 0} p(n)e^{nz}$ yakınsaksa $\operatorname{Re} z < 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.27. $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ ve $\lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.28. $r > 0$ ve $f_n(z) = e^{-nz}$ ise, (f_n) dizisinin $\{z \mid \operatorname{Re} z \geq r\}$ yarıdüzleminde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.29. $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı keyfi verilsin. Her $z \in \mathbb{C}^*$ için tek olarak belirli $\varphi \in (\alpha, 2\pi]$ ve tek olarak belirli $\psi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$ ile $\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi} = e^{i\psi}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.30. $(a_n) \subset \mathbb{C}_{-\pi}$, $\lim |a_n| = r > 0$ ve $\lim \operatorname{Arg} a_n = \varphi \in \mathbb{C}_{-\pi}$ ise, $\lim a_n = re^{i\varphi}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.31. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_{-\pi}$ ve $\theta_k = \operatorname{Arg} z_k$ olmak üzere,

$$\operatorname{Log} z_1 z_2 = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi m i,\ m = \begin{cases} 0 & -\pi < \theta_1 + \theta_2 < \pi \\ -1 & \theta_1 + \theta_2 > \pi \\ 1 & \theta_1 + \theta_2 < -\pi \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 1.7.32. $n \geq 2$ doğal sayısı için $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ kompleks sayıları $z^n = 1$ denkleminin farklı çözümleri, dd. $\mathbf{1}^{\frac{1}{n}} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$ olsun. Aşağıdakileri kanıtlayınız:

(a) Her $\zeta \in \mathbf{1}^{\frac{1}{n}}$ için $\zeta \cdot \mathbf{1}^{\frac{1}{n}} = \mathbf{1}^{\frac{1}{n}}$, dd. $\{\zeta\zeta_1, \ldots, \zeta\zeta_n\} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$.
(b) $n \geq 2$ için $\zeta_1 + \cdots + \zeta_n = 0$.
(c) Her $1 \neq \zeta \in \mathbf{1}^{\frac{1}{n}}$ için $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.
(d) $\zeta_1\zeta_2 \cdots \zeta_n = (-1)^{n-1}$.
(e) $\sum_{i=1}^n \zeta_i^k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq n-1 \\ n, & k = n \end{cases}$.

Problem 1.7.33. $n \in \mathbb{N}^*$ ise,

$$z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$$

denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Problem 1.7.34. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:
(a) $e^{2z} + 2e^z = -2$,
(b) $\sin z = 3$,
(c) $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\pi/3}$.

Problem 1.7.35. $\mathbf{1}^2$, $\mathbf{1}^z$, $(\mathbf{1}+\mathbf{i})^i, (-\mathbf{1})^{\frac{1}{2}}$, $\mathbf{2}^2$, ve $(-\mathbf{2})^2$'yi hesaplayınız.

Problem 1.7.36. $\mathbf{log}\,\mathbf{1}^2$, $\mathbf{log}\,\mathbf{i}^i$ ve $\mathbf{log}(\mathbf{1}+\mathbf{i})^i$'yi bulunuz.

Problem 1.7.37. Her $z, w \in \mathbb{C}^*$ için $(\mathbf{zw})^a = \mathbf{z}^a\mathbf{w}^a$ olduğunu kanıtlayınız. Ancak anadal için $(zw)^a \neq z^a w^a$ olabileceğini örnekleyiniz.

Problem 1.7.38. $\mathbf{2}^i \cdot \mathbf{2}^{-i} \neq \mathbf{2}^0$? Dolayısıyla, genelde $\mathbf{z}^a\mathbf{z}^b \neq \mathbf{z}^{a+b}$. Yine de anadallar için $z^a z^b = z^{a+b}$ olduğunu gösteriniz.

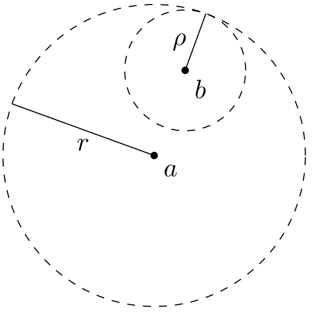
Problem 1.7.39. Genelde $(\mathbf{z}^w)^\eta \neq \mathbf{z}^{w\eta}$ ancak $(\mathbf{z}^w)^\eta = \mathbf{z}^{w\eta} \iff \eta \in \mathbb{Z}$ olduğunu kanıtlayınız. Burada $(\mathbf{z}^w)^\eta = \bigcup_{u \in \mathbf{z}^w} \mathbf{u}^\eta$ anlaşılacaktır.

Problem 1.7.40. $-\pi \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ ve $S(\theta_1, \theta_2) := \{z \in \mathbb{C}^* \mid \theta_1 < \operatorname{Arg} z < \theta_2\}$ ise, $\mathbb{C}_{-\pi}$'deki $f(z) = z^{\frac{3}{2}}$ ve $g(z) = z^i$ anadalları için $f(S(0, \frac{\pi}{6}))$ ve $g(S(0, \frac{\pi}{6}))$ resimlerini bulunuz.

Problem 1.7.41. $U \subset \mathbb{C}$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ ise U'da logaritmanın bir dalı ise, her $z \in U$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $z^n = e^{nf(z)}$ olduğunu gösteriniz.

1.8 Analitik Fonksiyonlar

İleride analitik fonksiyonlarla holomorf fonksiyonların örtüştüğünü kanıtlayacağız. Bu nedenle, bu kısımda geçen her "analitik" kelimesini aynı zamanda "holomorf" ve tersine her "holomorf" kelimesini de "analitik" olarak da okuyunuz.



Şekil 1.8: 1.8.3'ün kanıtının görselleştirilmesi.

1.8.1 Tanım ve Özdeşlik Teoremi

Tanım 1.8.1. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonu bir $D_r(a) \subset U$ dairesinde bir kuvvet serisine açılabilirse, dd. $D_r(a)$ dairesinde yakınsak bir $\sum a_n (z-a)^n$ kuvvet serisi

$$\forall z \in D_r(a): \; f(z) = \sum a_n (z-a)^n$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu a **noktasında analitiktir** denir. f fonksiyonu, her $a \in U$ noktasında analitikse U **kümesinde analitiktir** denir. U kümesinde analitik fonksiyonların kümesini $\mathcal{A}(U)$ ile göstereceğiz.

Teorem 1.6.3'ten şimdilik $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$ olduğunu biliyoruz. İleride

$$\mathcal{A}(U) = \mathcal{I}(U) = \mathcal{H}(U)$$

olduğunu göreceğiz.

$p \in \mathbb{C}[z]$, n. dereceden bir polinomsa, her $a, z \in \mathbb{C}$ için

$$p(z) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(z-a) + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Dolayısıyla, her p polinomu $\mathbb{C}$'de analitiktir.

Not 1.8.2. Teorem 1.6.3'ten dolayı, bir açık dairede bir kuvvet serisiyle tanımlanan bir fonksiyonun o dairede yine bir kuvvet serisiyle tanımlanan bir ilkeli vardır. Böylece, her açık $U \subset \mathbb{C}$ için $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{I}(U)$.

Diğer yandan,

$$\forall f, g \in \mathcal{A}(U) \implies f \pm g, fg \in \mathcal{A}(U)$$

olduğu aşikârdır, dd. $\mathcal{A}(U)$ bir halkadır. $fg \in \mathcal{A}(U)$ için bir açıklama vermekle yetinelim: f ve g fonksiyonlarının bir açık $D \subset U$ dairesinde $\sum a_n(z-a)^n$ ve $\sum b_n(z-a)^n$ gibi açılımları varsa, bu seriler D dairesinde mutlak yakınsak olduklarından, $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ olmak üzere, D dairesinde $\sum c_n(z-a)^n$ serisi fg'nin açılımıdır.

Önerme 1.8.3. *Her $\sum a_n(z-a)^n$ kuvvet serisi $D_r(a)$ yakınsaklık dairesinde bir f analitik fonksiyonu tanımlar. Her $b \in D_r(a)$ için $\rho := r - |b-a|$ olmak üzere, f fonksiyonu $D_\rho(b)$ dairesinde bir kuvvet serisini açılabilir ve bu seri f'nin b noktasındaki Taylor serisinden başka bir şey değildir, dd. her $z \in D_\rho(b)$ için*

$$f(z) = \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(b)(z-b)^{n}. \tag{1.44}$$

Kanıt. $\sum a_n(z-a)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı $r > 0$ ve $D_r(a)$'da tanımladığı fonksiyon f olsun. $b \in D_r(a)$ keyfi verilsin. $\rho := r - |b-a|$ seçersek, $D_\rho(b) \subset D_r(a)$ olur. Dolayısıyla, her $z \in D_\rho(b)$ için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[(z-b)+(b-a)\right]^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b-a)^{n-k}(z-b)^k\right]$$

yakınsaktır. Diğer yandan, $w := a + |b-a| + |z-b|$ ise $w \in D_r(a)$ olduğundan, serimiz w noktasında mutlak yakınsaktır, dd.,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|w-a|^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,(|b-a|+|z-b|)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,|b-a|^{n-k}\,|z-b|^k)\end{aligned}$$

yakınsaktır. Dolayısıyla, yukarıda $f(z)$'nin açılımında terimleri Paketleme Teoremi'nden istediğimiz gibi gruplayabiliriz ve biz, $z-b$'ye göre bir kuvvet serisi elde edecek biçimde gruplayarak toplarsak,

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} (b-a)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)\, a_n (b-a)^{n-k} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(b)\end{aligned}$$

olmak üzere, her $z \in D_\rho(b)$ için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k (z-b)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(z-b)^k$$

Taylor serisini elde ederiz. □

(1.44)'te $w := z-b$ yazarsak bu formül, her $w \in D_\rho(b)$ için

$$f(b+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} w^n$$

şeklini alır. $f = E$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{E}^{(n)}(b) = \mathrm{E}(b)$ ile

$$\mathrm{E}(b+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}(b)}{n!} w^n = \mathrm{E}(b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \mathrm{E}(b)\mathrm{E}(w)$$

olur ve biz E fonksiyonunun temel özelliğini (1.8.3) ile böyle de elde etmiş oluruz.

Teorem 1.8.4 (Analitik fonksiyonlar için özdeşlik teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f, g \in \mathcal{A}(B)$ olsun.*

(i) *Bir $c \in \mathbb{C}$ için $S_c(f) := \{z \in B \mid f(z) = c\} = f^{-1}(c)$ kümesinin B'de bir yığılma noktası varsa f sabittir, dd. her $z \in B$ için $f(z) = c$ olur.*

(ii) *$M \subset B$ kümesinin B kümesinde bir yığılma noktası var ve $f|M = g|M$ ise, her $z \in B$ için $f(z) = g(z)$.*

Sonuç 1.8.5. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f, g \in \mathcal{A}(B)$, $b \in B$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(b) = g^{(n)}(b)$ ise, her $z \in B$ için $f(z) = g(z)$ olur.*

Sonuç 1.8.6. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ise, $\mathcal{A}(B)$ bir tamlık bölgesidir*[29].

Kanıt. (i) $c \in \mathbb{C}$ keyfi verilsin. $S_c(f)$'nin B'de bir $b \in B$ yığılma noktası olduğunu varsayalım. $f \in \mathcal{A}(B)$ olduğundan, f fonksiyonu bir $D_r(b) \subset B$ dairesinde bir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-b)^n, \ z \in D_r(b)$$

kuvvet serisine açılabilir. Teorem 1.6.8'den $D_r(b) \subset S_c(f)$ olur. V kümesi $S_c(f)$ kümesinin içi olsun. Tanım gereği V açıktır ve $V \neq \emptyset$. Şimdi V'nin B'de kapalı olduğunu görelim: $b^* \in B$ noktası V'nin bir yığılma noktası ise az önceki irdelemeyle bir $r^* > 0$ ile $D_{r^*}(b^*) \subset V$, dolayısıyla $b^* \in V$ olur. V kümesi B'deki her yığılma noktasını içerdiğinden, B'de kapalıdır. $V \neq \emptyset$ kümesi B'de hem açık hem kapalı, B ise bir bölge olduğundan, $V = B$ olur. Böylece: $S_c(f)$'nin B'de bir yığılma noktası varsa f sabittir.

(ii) Şimdi (i)'i $h := f - g \in \mathcal{A}(B)$ analitik fonksiyonuna $c = 0$ ile uygulayalım ve $M \subset S_0(h)$ olduğunu gözetelim.

Sonuç 1.8.5'in kanıtı: $D_r(b) \subset B$ ise orada (1.8.3) ile

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n = \sum \frac{g^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n = g(z)$$

olur ve sav, Teorem 1.8.4(ii)'den çıkar.

[29] İngilizce kaynaklarda "integral domain", Almanca kaynaklarda "Integrietätsbereich" kullanılır. Bu halkalar birim elemanlı ve $0 \neq 1$ koşulunun sağlandığı **sıfırbölensiz** halkalardır; dd. bu halkalarda $ab = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olur.

Sonuç 1.8.6'nın kanıtı: $f, g \in \mathcal{A}(B)$, $f \neq 0$ ve $fg = 0$ olsun. $\exists a \in U$: $f(a) \neq 0$. Ancak f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, bir $D_r(a) \subset U$ dairesindeki her z için $f(z) \neq 0$ olur. Buradan $g|D_r(a) \equiv 0$, dolayısıyla teoremimizden $g = 0$ olur. □

Not 1.8.7. (1) $\mathbb{C}$'de kuvvet serileriyle tanımlanmış e^z, $\sin z$, $\cos z$ ve dolayısıyla tüm diğer trigonometrik fonksiyonlar ve hiperbolik fonksiyonlar tanım kümelerinde analitiktirler.

(2) *Logaritmanın türevlenebilir dalları analitiktirler.* $U \subset \mathbb{C}^*$ açık kümesinde $\log : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu logaritmanın bir türevlenebilir dalı ise, her $z \in U$ için $\frac{d \log z}{dz} = 1/z$ olduğunu biliyoruz (bkz. (1.2.20)). $a \in U$ keyfi verilsin.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + (z-a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-a}{a}} = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^n} (z-a)^n \tag{1.45}$$

serisi $\left|\frac{z-a}{a}\right| < 1$, dd. $|z-a| < |a|$ için yakınsaktır. Dolayısıyla, yeterince küçük bir r için $D_r(a)$ dairesinde bir $c \in \mathbb{C}$ ile

$$\frac{d \log z}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \Longrightarrow$$

$$\log z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (z-a)^{n+1} + c,\ c \in \mathbf{log}\, a.$$

Burada (1.45) ile $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonunun $\mathbb{C}^*$'da analitik olduğunu göstermiş olduk.

Teorem 1.8.8. *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler olsunlar.*

(i) *$f, g \in \mathcal{A}(U)$, $c \in \mathbb{C}$ ise, $f + g$, cf, $fg \in \mathcal{A}(U)$ olur.*

(ii) *$f \in \mathcal{A}(U)$, $g \in \mathcal{A}(V)$, $f(U) \subset V \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{A}(U)$.*

(iii) *$f, g \in \mathcal{A}(U)$ ve $\forall z \in U$ $g(z) \neq 0$ ise, $\frac{1}{g}, \frac{f}{g} \in \mathcal{A}(U)$ olur.*

(iv) *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to V$ bir tameşleme ve analitikse f^{-1} de analitiktir.*

Kanıt. (i) $fg \in \mathcal{A}(U)$ Cauchy Çarpım Teoremi'nden çıkar, gerisi aşikâr.

(ii) $z_0 \in U$ keyfi verilsin ve $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ ise f'nin bir $D_r(z_0)$'da açılımı olsun. $a_0 = f(z_0)$ olmak üzere, $g(w) = \sum_{m \geq 0} b_m (w - a_0)^m$ ise g'nin bir $D_\rho(a_0)$'da seri açılımı olsun. $f(z) - a_0 = \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n$ olduğunu gözetirsek, biçimsel

$$g(f(z)) = \sum_{m \geq 0} b_m \left(\sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n \right)^m = \sum d_k (z - z_0)^k \tag{1.46}$$

ifadesinin bir $D_\sigma(z_0)$'da yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Her şeyden önce

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| |z - z_0|^{n-1} \tag{1.47}$$

serisi de $D_r(z_0)$'da yakınsaktır. Özellikle (1.47) serisi $0 < r_1 < r$ için $\overline{D}_{r_1}(z_0)$'da normsal yakınsaktır, dolayısıyla bir $M > 0$ ile her $z \in \overline{D}_{r_1}(z_0)$ için (1.47) serisinin toplamı $\leq M$ olur. f analitik fonksiyonumuz sürekli olduğundan, $0 < \sigma \leq r_1$ sayısını yeterine küçük seçersek, $M\sigma < \rho$ olmasını sağlayabiliriz. Bu durumda, her $z \in \overline{D}_\sigma(z_0)$ için

$$\sum_{m\geq 0} |b_m| \left(\sum_{n\geq 1} |a_n|\, |z - z_0|^n \right)^m \leq \sum_{m\geq 0} |b_m|\, (M|z - z_0|)^m < +\infty$$

elde ederiz. Normsal toplanabilir ailelerde terimleri istediğimiz gibi sıralayabildiğimizden, (1.46)'daki biçimsel düzenleme $D_\sigma(z_0)$'da yakınsak bir seri verir. Sonuçta $g \circ f \in \mathcal{A}(U)$.

(iii) $h(z) := \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, g ve h analitik fonksiyonlar olduklarından, $\frac{1}{g} = h \circ g$ fonksiyonu (ii)'den dolayı analitiktir. Buradan (i) ile $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ analitik olur.

(iv)'ün yalnızca kuvvet serileri üzerinden kanıtını [15] ve [39]'da bulabilirsiniz. Biz bu önermeye başvurmadan ileride holomorfluk ve analitikliğin denk kavramlar olduğunu, ayrıca $f : U \to V$ bir holomorf tameşleme ise, f^{-1}'in de holomorf, dolayısıyla analitik olduğunu göreceğiz. □

Örnek 1.8.9.[Binom Serisi] **1.** $c \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) := (1+z)^c = \exp c(\mathrm{Log}(1+z))$$

fonksiyonu iki analitik fonksiyonunun birleşimi olarak $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -1]$'de analitiktir. Böylelikle f fonksiyonu $z = 0$ noktasında bir $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ kuvvet serisine açılabilir. Teorem 1.6.3(v)'ten dolayı

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} c(c-1)\cdots[c-(n-1)] =: \binom{c}{n} \text{ ile}$$

$$(1+z)^c = 1 + \sum_{n\geq 1} \binom{c}{n} z^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{c(c-1)\cdots[c-(n-1)]}{n!} z^n$$

olur[30]. İleride bu kuvvet serisinin $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -1]$'e düşen 0-merkezli en büyük dairede, yani $\mathbb{D}$'de yakınsak olduğunu göreceğiz. Ancak okur isterse bu serinin yakınsaklık yarıçapının $c \neq 0$ için 1 olduğunu doğrudan gösterebilir.

2. $f(z) := \tan z$ analitik fonksiyonunun 0 noktasında seri açılımının derecesi ≤ 5 olan terimlerinin katsayılarını bulalım: Elbette bu katsayılar $f^{(n)}(0)$, $1 \leq n \leq 5$ türevleri yardımıyla hesaplanabilirler. Ancak biz olaya teoremimizin mantığı çerçevesinde yaklaşacağız. tan fonksiyonu bir tek fonksiyon olduğundan, daha baştan $\tan z = \sum a_n z^n$ açılımında tüm çift numaralı katsayılarımızın 0 olacağını biliyoruz.

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - z^6 P_c(z) =: 1 - h(z)$$

---

[30]Eğer ayrıca $\binom{c}{0} := 1$ olarak tanımlarsak, $(1+z)^c = \sum_{n\geq 0} \binom{c}{n} z^n$ yazabiliriz.

olarak yazarsak, P_c ve h serileri $\mathbb{C}$'de yakınsaktırlar ve $h(0) = 0$ olduğundan, $r > 0$ yeterince küçük seçilirse, her $z \in D_r$ için $|h(z)| < 1$ olması sağlanır. Böylece $z \in D_r$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{1-h(z)} &= 1 + h(z) + h^2(z) + \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + z^6 P_c(z)\right) + \left(\frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + z^6 P_c(z)\right)^2 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + z^6 P^*(z)
\end{aligned}$$

olur. P^*, D_r'de yakınsak bir kuvvet serisidir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\tan z &= \sin z \cdot \frac{1}{\cos z} \\
&= \left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + z^7 Q(z)\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + z^6 P^*(z)\right) \\
&= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + z^7 Q^*(z)
\end{aligned}$$

olur; Burada Q^* ise D_r'de yakınsak bir kuvvet serisidir.

Not 1.8.10. Teorem 1.8.4'ten dolayı, gerçel analizde $\cos x$ ve $\sin x$ arasında $\mathbb{R}$'de geçerli olan her aritmetik bağıntı kendiliğinden $\mathbb{C}$'de $\cos z$ ve $\sin z$ arasında da geçerlidir. Örneğin $\mathbb{R}$'de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ olduğundan, $\mathbb{C}$'de de $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ olur. cos fonksiyonun sıfır yerlerinin kümesi $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ve sin fonksiyonunun sıfır yerlerinin kümesi $\pi\mathbb{Z}$ olduğundan, Teorem 1.8.8(ii)'den dolayı $\coth z$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$ bölgesinde, $\tan z$ fonksiyonu ise $\mathbb{C}\backslash(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ bölgesinde analitiktir. Dolayısıyla, gerçel analizde $\cos x$, $\sin x$, $\coth x$ ve $\tan x$ arasında geçerli olan her özdeşlik $\mathbb{C}$'ye geçtiğimizde de geçerlidir. Okura bu türden birkaç özdeşliği önce bu şekilde $\mathbb{C}$'ye aktarmasını, ardından bu bağıntıları doğrudan bu fonksiyonların tanımından yola çıkarak kanıtlamasını öneririz.

1.8.2 Analitik fonksiyonların Yerel Özellikleri

Tanım 1.8.11. $f \in \mathcal{A}(U)$, $a \in U$ ve $f(a) = b$ olsun. $k \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere,

$$f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \text{ ve } f^{(k)}(a) \neq 0$$

ise, a noktası f fonksiyonunun k. **dereceden b-yeridir** denir.

Birinci dereceden yerlerden kısaca **basit yerler** olarak bahsedeceğiz. f fonksiyonunun bir $D_r(a)$'da açılımı $f(z) = b + \sum_{n\geq 1} a_n(z-a)^n$ ise, a noktasının f fonksiyonunun k. dereceden bir b yeri olması tam da

$$a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0 \text{ ve } a_k \neq 0$$

olmasıdır. Böyle bir durumda

$$\begin{aligned}
f(z) - b &= (z-a)^k g(z),\ g(a) \neq 0, \\
g(z) &= a_k + \sum_{n\geq k+1} a_n(z-a)^{n-k},\ a_k \neq 0.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Burada g fonksiyonu elbette $D_r(a)$'da analitiktir.

Örnek 1.8.12. Temel örnek: $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}^*$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de analitik fonksiyondur. Bu fonksiyonun 0'da n. dereceden bir 0 yeri vardır. $\mathrm{Id}(z) = z$ özdeşlik dönüşümü de analitiktir. Her a noktası Id fonksiyonun birinci dereceden a yeridir ve $f(z) = (\mathrm{Id}(z))^n$. Ayrıca, $\varepsilon > 0$ için $f(D_\varepsilon) = D_{\varepsilon^n}$ ve yalnızca $z = 0$ için $f(z) = 0$ iken, her $w \in D^*_{\varepsilon^n}$ sayısı için $f(z) = w$ koşulunu sağlayan tam n farklı $z_1, \ldots, z_n \in D_\varepsilon$ vardır. f fonksiyonu D^*_ε *delinmiş dairesini n'ye 1 olarak* $D^*_{\varepsilon^n}$ *delinmiş dairesine resmeder* denir.

Şimdi $f(z) = b + (z-a)^n$ olsun. Elbette a noktası f fonksiyonunun n. dereceden bir b yeridir. $w - b = (z-a)^n$. Yine $h(z) = z - a$ dersek, bu bir analitik fonksiyondur ve $h'(z) \equiv 1$ olduğu için aldığı her değeri birinci dereceden alır. Bu kez her $\varepsilon > 0$ için $f(D_\varepsilon(a)) = D_{\varepsilon^n}(b)$ ve f fonksiyonu $D^*_\varepsilon(a)$ delinmiş dairesini n'ye 1 olarak $D^*_{\varepsilon^n}(b)$ delinmiş dairesi üzerine resmeder. Yine $D_\varepsilon(a)$ dairesinde tanımlı ve aldığı her değeri birinci dereceden alan bir h analitik fonksiyonu ile $f(z) = b + (h(z))^n$'dir. Bu tablonun a noktasında analitik olan fonksiyonlara aktarılabileceğini kanıtlayacağız.

Teorem 1.8.13. *f fonksiyonu $a \in \mathbb{C}$ noktasında analitik olsun ve orada k. dereceden bir b yeri bulunsun. Bu koşullarda a noktasının bir U açık komşuluğu ve a noktasında basit sıfır yeri olan bir $h \in \mathcal{A}(U)$ analitik fonksiyonu*

$$\forall z \in U \;\; f(z) = b + (h(z))^k \tag{1.49}$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. Varsayımlarımızdan bir $D_r(a)$ dairesinde

$$f(z) = b + (z-a)^k \left[a_k + \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n (z-a)^{n-k}\right] = b + (z-a)^k g(z)$$

olur. g fonksiyonu $D_r(a)$ dairesinde analitiktir ve $g(a) = a_k \neq 0$. Şimdi $\delta := \frac{|a_k|}{2} > 0$ olsun. g fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, bir $\rho > 0$ sayısı $\rho < r$ ve $g(D_\rho(a)) \subset D_\delta(a_k)$ olacak biçimde bulunabilir. $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısını $D_\delta(a_k) \subset \mathbb{C}_\alpha$ olacak biçimde seçelim ve

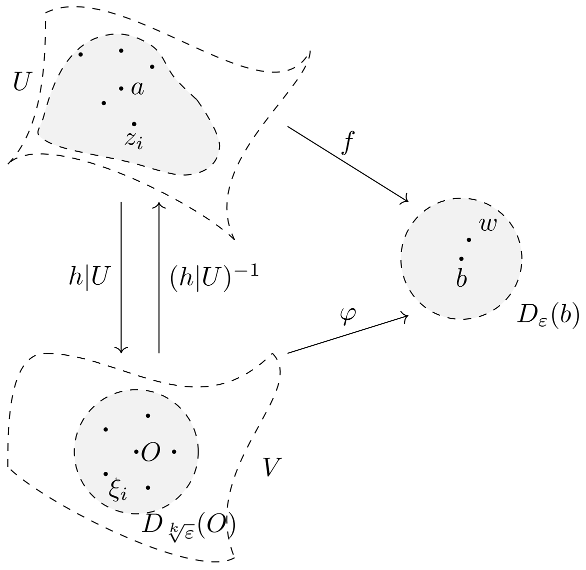
$$h^*(z) := e^{\frac{1}{k}\log_\alpha g(z)} \in (g(z))^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}}, \; z \in D_\rho(a)$$

olarak tanımlayalım.[31] Analitik fonksiyonların bileşimi olarak h^* fonksiyonu $D_\rho(a)$ dairesinde analitiktir ve asla 0 değerini almaz. Dolayısıyla, $D_\rho(a)$ dairesinde $h(z) := (z-a)\, h^*(z)$ olarak tanımlanan h fonksiyonu $D_\rho(a)$ dairesinde analitiktir ve yalnızca a noktasında bir basit sıfır yeri vardır. Her $z \in D_\rho(a)$ için

$$b + (h(z))^k = b + (z-a)^k (h^*(z))^k = b + (z-a)^k g(z) = f(z).$$

□

[31] h^* fonksiyonu $\mathbf{g}^{\frac{1}{k}}$'nin bir analitik dalı olduğundan, uzlaşmamız gereği, $h^* = \sqrt[k]{g}$ yazabiliriz. Böylece $f(z) = b + [(z-a)\sqrt[k]{g(z)}]^k$ olur.



Şekil 1.9: Analitik fonksiyonların yerel davranışı.

Teorem 1.8.14 (Dal sayısı)**.** *f fonksiyonu a noktasında analitik olsun ve a noktasında k. dereceden bir b yeri bulunsun. Bu durumda, bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı şunlar doğru olacak biçimde bulunabilir: Her $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ için a noktasının öyle bir açık U_ε komşuluğu bulunabilir ki, $f(U_\varepsilon) = D_\varepsilon(b)$ ve her $w \in D^*_\varepsilon(b)$ değeri U_ε komşuluğunda tam k farklı $z_1, \ldots, z_k$ noktalarında alınır ve her bir z_i bir basit w yeridir. Özellikle $k = 1$ ise $f|U_\varepsilon$ birebirdir. k sayısına f'nin a'daki* ***dal sayısı*** *denir.*

Sonuç 1.8.15. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{A}(U)$ ve f birebirse, her $z \in U$ için $f'(z) \neq 0$.*

Kanıt. Teorem 1.8.13'ten dolayı, a noktasının bir U' açık komşuluğunda analitik ve a noktasında bir basit sıfır yeri olan bir h fonksiyonu

$$f(z) = b + (h(z))^k, \ z \in U'$$

olacak biçimde vardır. h sürekli türevlenebilir ve $h'(a) \neq 0$ olduğundan, h fonksiyonu a noktasının bir $U \subset U'$ açık komşuluğunu $h(a) = 0$ noktasının bir V komşuluğuna biholomorf biçimde resmeder ve her $z \in U$ için $h'(z) \neq 0$. Elbette f fonksiyonu U'da analitiktir ve Teorem 1.8.8(iii)'ten dolayı $(f|U)^{-1}$ fonksiyonu V'de analitiktir.

$\rho > 0$ sayısını $D_\rho \subset V$ olacak biçimde seçelim. $\varepsilon_0 := \rho^k$ alalım. $w = \varphi(\xi) := b + \xi^k$ fonksiyonu D_ρ dairesini k'ye 1 olarak $D_{\varepsilon_0}(b)$ dairesinin üzerine resmeder. Her $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ için φ dönüşümü $D_{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ dairesini $D_\varepsilon(b)$ dairesi üzerine resmeder.

$\varphi(0) = b$ ve her $w \in D^*_\varepsilon(b)$ için $D_{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ dairesinin tam k farklı $\xi_1, \ldots, \xi_k$ noktası w noktasına resmedilir ve bunlar basit w yerleridirler.

$$U_\varepsilon := (h|U)^{-1}(D_{\sqrt[k]{\varepsilon}}) \text{ ve } z_\sigma := (h|U)^{-1}(\xi_\sigma),\ \sigma = 1, \ldots, k$$

olmak üzere,

$$f(z) = b + (h(z))^k = \varphi(h(z))$$

olduğundan, $f(z_\sigma) = w,\ \sigma = 1, \ldots, k$ ve

$$f'(z_\sigma) = h'(z_\sigma)\varphi'(h(z_\sigma)) = h'(z_\sigma)\varphi'(\xi_\sigma) \neq 0$$

sağlandığından, $z_1, \ldots, z_k$ noktaları f fonksiyonunun U_ε'daki tüm w yerleridir ve bunların her biri basit w yerleridir.

Sonuç 1.8.15'in kanıtı: f birebirse, sabit değildir. Bu durumda, bir $a \in U$ için $f'(a) = 0$ olsaydı bir $2 \leq k \in \mathbb{N}$ ile a noktası k. dereceden bir $b = f(a)$ yeri olurdu. ε ve U_ε yukarıdaki gibi olmak üzere, her $w \in D^*_\varepsilon(b)$ noktası U_ε'daki tam k farklı noktanın resmi olurdu ki bu, f'nin birebirliği ile çelişir. □

(1.8.15) bize kompleks analitik fonksiyonların gerçel analitik fonksiyonlarda olmayan güzel bir özelliğini verir. $f(x) = x^3$ gerçel analitik fonksiyonu $\mathbb{R}$'de birebirdir ancak $f'(0) = 0$ sağlanır! Holomorf fonksiyonların analitik fonksiyonlara denk olduğunu kanıtladığımızda (1.8.15) önermesi şu şekli alır: $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorf fonksiyonu birebirse, her* $z \in U$ *için* $f'(z) \neq 0$ *olur.*

(1.49) eşitliğindeki gösterimde h'nin a'da birinci dereceden bir b yeri olduğundan, U yeterince küçük seçilirse h'nin U'da birebir olması sağlanır. Sonuçta f fonksiyonunun a noktasında k. dereceden bir b yeri varsa a noktasının bir U açık komşuluğunda, orada birebir ve holomorf olan bir h fonksiyonu ile

$$\forall z \in U \ \ f(z) = f(a) + (h(z))^k.$$

Teorem 1.8.16 (Açık Dönüşüm Teoremi I)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in \mathcal{A}(B)$ analitik fonksiyonu sabit değilse $f(B)$ de bir bölgedir ve f bir açık dönüşümdür. Dolayısıyla, $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{A}(U)$ ve f fonksiyonun U'nun hiçbir bileşeninde sabit değilse $f : U \to \mathbb{C}$ bir açık dönüşümdür.*

Kanıt. B bir bölge, $U \subset B$ açık bir küme ve $b \in f(U)$ olsun. Bir $a \in U$ ile $b = f(a)$ olacaktır. f sabit olmadığından, a noktası bir $k \in \mathbb{N}^*$ ile k. dereceden bir b yeridir; böyle olmasaydı f fonksiyonu önce bir $D_r(a)$ dairesinde, ardından B bölgesinde sabit olurdu! Teorem 1.8.14'ten bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve a noktasının bir $U_\varepsilon \subset U$ komşuluğu $f(U_\varepsilon) = D_\varepsilon(b) \subset f(U)$ olacak biçimde bulunabilir; dolayısıyla $f(U)$ bir açık kümedir. Özellikle $f(B)$ açıktır. Diğer yandan, f sürekli olduğundan, $f(B)$ bağlantılıdır. Sonuçta $f(B)$ bir bölgedir. Savımızın kalanı aşikârdır. □

1.8.3 Açık Dönüşüm Teoremi'nin Basit Sonuçları

Önerme 1.8.17. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f \in \mathcal{A}(U)$ birebirse $V := f(U)$ kümesi de açıktır ve $f : U \to V$ bianaliktir, özellikle biholomorftur.*

Kanıt. f birebir olduğundan, U kümesinin hiçbir bağlantılı B bileşeninde sabit olamaz. Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı f bir açık dönüşümdür, dolayısıyla V kümesi açıktır. Teorem 1.8.8(iv)'ten dolayı $f^{-1} \in \mathcal{A}(V)$, dolayısıyla f bianalitiktir. Analitik fonksiyonlar holomorf olduklarından, f biholomorftur.

(1.8.8)(iv) kullanılmadan f'nin biholomorf olduğu şöyle de görülebilir: f açık olduğundan, f^{-1} süreklidir. Diğer yandan, Sonuç 1.8.15'ten her $z \in U$ için $f'(z) \neq 0$, dolayısıyla Önerme 1.2.19'un koşulları sağlanır ve f^{-1} türevlenebilir. □

Teorem 1.8.18 (Maksimum İlkesi)**.** *f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik, ancak sabit değilse $|f|$ fonksiyonunun B bölgesinde bir yerel maksimumu olamaz.*

Sonuç 1.8.19. *f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik, ancak sabit değilse* $\mathrm{Re}\, f$ *fonksiyonunun B bölgesinde bir yerel maksimumu olamaz.*

Sonuç 1.8.20 (Minimum İlkesi)**.** *f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik, sabit değil ve 0 değerini almıyorsa $|f|$ fonksiyonunun B bölgesinde bir yerel minimumu olamaz.*

Kanıt. Doğrudan Açık Dönüşüm Teoremi'nden çıkar. $b \in B$ noktası ve onun U açık komşuluğu keyfi verilsinler. $f(U)$ açık küme olacağından, bir $D_r(f(b))$ açık dairesini içerir; bu dairede ise $|f(b)| < |w|$ olan w noktaları vardır. Dolayısıyla, $|f|$'nin U'da b noktasında bir yerel maksimumu olamaz! b ve onun U komşuluğu keyfi seçildiklerinden, sav kanıtlanmıştır.

Sonuç 1.8.19*'un kanıtı*: $u := \mathrm{Re}\, f$ olsun. u'nun B'de bir yerel maksimumu olduğunu varsayalım. $g := e^f$ fonksiyonu B bölgesinde analitiktir ve $|g(z)| = e^{u(z)}$ olduğundan, $|g|$'nin B bölgesinde bir yerel maksimumu vardır; dolayısıyla teoremimizden g fonksiyonu B'de sabittir. Buradansa f'nin B'de sabit olduğu çıkar ki bu bir çelişkidir; bu nedenle varsayım yanlıştır.

Sonuç 1.8.20*'nin kanıtı*: Her $b \in B$ için $f(b) \neq 0$ ve $f(B)$ bir açık küme olduğundan, bir $r > 0$ sayısı $D_r(f(b)) \subset f(B) \subset \mathbb{C}^*$ olacak biçimde bulunabilir. Elbette bu dairede orijine $f(b)$ noktasından daha yakın noktalar vardır, dd. $|f(b)|$ yerel minimum olamaz.

Savı şöyle de kanıtlayabilirsiniz: $0 \notin f(B)$ olduğundan, $1/f$ fonksiyonu B bölgesinde analitiktir ve sabit değildir. Teoremimizden $1/|f|$ fonksiyonunun B'de yerel maksimumu yoktur; bu ise $|f|$ fonksiyonunun B'de yerel minimumu olmamasıyla eş anlamlıdır. □

Bu önermelerin karşı konumlarını da yazalım: $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve f fonksiyonu B bölgesinde analitik olmak üzere,

1. $|f|$'nin yerel maksimumu varsa sabittir.

2. $|f|$'nin sıfır yeri yok ve yerel minimumu varsa f sabittir.

Önerme 1.8.21. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ sürekli, sınırlı ve $f|U \in \mathcal{A}(U)$ ise, $\|f\|_{\overline{U}} = \|f\|_{\partial U}$ sağlanır.*

Kanıt. $\overline{U}$ kompakt ve $|f| \in \mathcal{C}\left(\overline{U}\right)$ olduğundan, $|f|$ bir $a \in \overline{U}$ noktasında maksimumunu alır. $a \in \partial U$ ise işimiz biter. $a \in U$ ise B kümesi a noktasının U'daki bağlantılı bileşeni olsun. Maksimum ilkesinden, f fonksiyonu B bölgesinde sabit olur: $\forall z \in B : f(z) = f(a)$. Buradan her $z \in \overline{B}$ için $f(z) = f(a)$ elde edilir. $\partial B \cap \partial U \neq \emptyset$ olduğunu da gözetirsek,

$$|f(a)| = \|f\|_{\overline{U}} = \|f\|_{\overline{B}} = \|f\|_{\partial U}$$

elde ederiz. □

Not 1.8.22. Önerme 1.8.21'de U'nun *sınırlı* olması önemlidir. Gerçekten de $U := \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$ şeridi bir açık kümedir ancak sınırlı değildir. Ayrıca $\partial U = \{x \pm i\frac{\pi}{2} \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesidir. $f(z) := e^{e^z}$ fonksiyonu, iki analitik fonksiyonun bileşimi olarak $\mathbb{C}$'de, özellikle U'da analitiktir. Her $x \pm i\frac{\pi}{2} \in \partial U$ için

$$\left|f(x \pm i\frac{\pi}{2})\right| = \left|e^{e^x e^{\pm i\frac{\pi}{2}}}\right| = \left|e^{\pm i e^x}\right| = 1$$

olduğundan, $\|f\|_{\partial U} = 1$ olur. Diğer yandan $\mathbb{R} \subset U$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{e^x} = +\infty \implies \|f\|_U = +\infty$$

ve böylece $\|f\|_U \neq \|f\|_{\partial U}$.

Maksimum ilkesi sınırlı olmayan U açık kümelerine şöyle genelleştirilebilir: $U \subset \mathbb{C}$ ve $a \in \overline{U}$ olsun. $f : U \to \mathbb{R}$ için

$$\limsup_{z \to a} |f(z)| \equiv \overline{\lim_{z \to a}} |f(z)| := \lim_{r \downarrow 0} \sup |f(D_r(a) \cap U)|,$$
$$\liminf_{z \to a} |f(z)| \equiv \underline{\lim}_{z \to a} |f(z)| := \lim_{r \downarrow 0} \inf |f(D_r(a) \cap U)|$$

olarak tanımlansın.

Teorem 1.8.23. *f fonksiyonu B bölgesinde analitik ve bir $M > 0$ pozitif sayısı ile*

$$\forall a \in \partial_\infty B : \overline{\lim_{z \to a}} |f(z)| \leq M$$

olsun. Bu durumda, $\|f\|_B \leq M$.

Kanıt. Her $\delta > 0$ için $B_\delta := \{z \in B \mid |f(z)| > M + \delta\}$ olsun. Her $\delta > 0$ için $B_\delta = \emptyset$ olduğunu kanıtlarsak işimiz biter. $|f|$ sürekli olduğundan, B_δ açıktır. Her $a \in \partial_\infty B$ için $\overline{\lim}_{z\to a} |f(z)| \le M$ olduğundan, bir $D_r(a)$ dairesi her $z \in B \cap D_r(a)$ için $|f(z)| < M + \delta$ olacak biçimde bulunabilir. Bu, B sınırlı değilse $a = \infty \in \partial_\infty B$ için de doğru olduğundan, B_δ sınırlıdır, dd. $\overline{B_\delta}$ kompakttır. Açıkça $\overline{B_\delta} \subset B$. Diğer yandan, her $z \in \partial B_\delta$ için $|f(z)| = M + \delta$; dolayısıyla $\overline{B_\delta} = \{z \in B \mid |f(z)| \ge M + \delta\}$. Önerme 1.8.21'den $\|f\|_{\overline{B_\delta}} = \|f\|_{\partial B_\delta}$. Bu durumda, $B_\delta = \emptyset$ veya f sabit olmalıdır. Ancak f'nin sabit olması da $B_\delta = \emptyset$ çıkarımını verir; dolayısıyla, her durumda $B_\delta = \emptyset$. □

Teorem 1.8.24 (Schwarz Önsavı)**.** *$f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ analitik fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde $f(z) = \sum a_n z^n$ ile tanımlanmış ve $f(0) = 0$ olsun. Bu koşullarda*

$$\forall z \in \mathbb{D}: \ |f(z)| \le |z| \quad \textit{ve} \quad \left|f'(0)\right| \le 1.$$

Eğer ayrıca $|f'(0)| = 1$ veya bir $a \in \mathbb{D}^*$ için $|f(a)| = |a|$ ise, bir $\varphi \in \mathbb{R}$ ile

$$\forall z \in \mathbb{D} \ \ f(z) = e^{i\varphi} z.$$

Not 1.8.25. İleride her $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ fonksiyonunun $\mathbb{D}$'de bir $\sum a_n z^n$ kuvvet serisine açılabileceğini göreceğiz. O zaman teoremimizin koşulları "$f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ holomorf ve $f(0) = 0$ olsun" olacaktır. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f_n(z) = z^n$ fonksiyonları teoremin koşullarını sağlar; $|f'(0)| = 1$ koşulunu ise yalnızca f_1 sağlar.

Kanıt. Koşullarımızdan

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n = z\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}\right) = zg(z).$$

g fonksiyonunu tanımlayan seri de en azından $\mathbb{D}$ dairesinde yakınsaktır ve $f'(0) = g(0)$. Şimdi $0 < r < 1$ olmak üzere, her $z \in C_r$ için $r\,|g(z)| = |f(z)| \le 1$ olduğundan, Önerme 1.8.21'den $\|g\|_{\overline{D}_r} = \|g\|_{C_r} \le \frac{1}{r}$. Buradan $r \nearrow 1$ ile her $z \in \mathbb{D}$ için $|g(z)| \le 1$ elde edilir. Böylece, her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| = |z|\,|g(z)| \le |z|$ ve $|f'(0)| = |g(0)| \le 1$.

(a) $|f'(0)| = 1$ ise $|g(0)| = 1 = \|g\|_{\mathbb{D}}$ eşitlikleri sağlanır.

(b) Bir $a \in \mathbb{D}$ ile $|f(a)| = |a|$ ise $|g(a)| = 1 = \|g\|_{\mathbb{D}}$ olur. Her iki durumda da maksimum ilkesinden, g fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde sabittir ve mutlak değeri 1 olduğundan, bir $\varphi \in \mathbb{R}$ ile $g(z) \equiv e^{i\varphi}$ olur. □

Teorem 1.8.26 (Cebirin Anateoremi)**.** *$n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, n. dereceden her $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomunun, katlılıklarıyla sayılmak üzere, n sıfır yeri vardır.*

Kanıt. p polinomunun derecesi ≥ 1 olduğundan, p sabit değildir ve böylece $\lim_{z\to\infty}|p| = +\infty$ olur. Savımızı kanıtlamak için, p polinomunun en az bir sıfır yeri olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall z \in \mathbb{C}$ için $p(z) \neq 0$ olduğunu *varsayalım.* Bu durumda, $f := \frac{1}{p} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ve $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = 0$ olur. $|f|$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de sınırlı olur ve ileride göreceğimiz Liouville Teoremi (Teorem 2.6.19) f'nin sabit olduğunu söyler ki, bu bir çelişkidir. Bu teoreme başvurmadan, elimizdeki bilgilerle yetinelim:

Şimdi bir $a \in \mathbb{C}$ sayısını keyfi seçelim. Varsayımdan $|f(a)| > 0$ ve biz bir $r > 0$ sayısını $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = 0$'dan dolayı

$$|a| < r \text{ ve } \forall z \ (|z| \geq r \implies |f(z)| < |f(a)|) \tag{1.50}$$

olacak biçimde seçebiliriz. $|f|$ fonksiyonu $\overline{D}_r$ kompakt kümesinde maksimumunu alır ve (1.50)'den bu aynı zamanda $\mathbb{C}$'deki maksimumdur. f fonksiyonu $\mathbb{C}$'de analitik olduğundan, maksimum ilkesinden, f sabit olur; bu ise p'nin sabit olması demektir ve bir çelişkidir. Varsayım yanlıştır ve bir $z_1 \in \mathbb{C}$ ile $p(z_1) = 0$ olmalıdır.

Derecesi $n-1$ olan bir $p_1(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomu ile $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ olur. $n - 1 \geq 1$ ise, aynı mantık bize p_1 polinomunun en az bir z_2 sıfır yerini verir ve bu irdelemeler, sonlu adımda savın kanıtını verir. □

Problemler

Problem 1.8.1. $f(z) := \sin\frac{\pi}{z}$ fonksiyonunun $\mathbb{C}^*$ bölgesinde analitik olduğunu gösteriniz. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f(\frac{1}{n}) = 0$ ve $f \not\equiv 0$; bunun Özdeşlik Teoremi ile niçin çelişmediğini açıklayınız.

Problem 1.8.2. $\sum a_n z^n$ kuvvet serisi D_r'de yakınsak olsun ve orada tanımladığı fonksiyon f olsun. Ayrıca, $(w_n), (\zeta_n) \subset D_r$ ve $\lim w_n = 0 = \lim \zeta_n$ olsun. $m, k \in \mathbb{N}$ ve $m \neq k$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(w_n) = w_n^m$ ve $f(\zeta_n)) = \zeta_n^k$ olabilir mi?

Problem 1.8.3. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonunun $\mathbb{C}\setminus\{1\}$'de analitik olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.4. $f(0) = 0$ ve $f'(z) = \frac{1}{1-z}$ koşulunun sağlayan bir tek $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ ve ayrıca her $z \in \mathbb{D}$ için $\exp f(z) = \frac{1}{1-z}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.5. $f \in \mathcal{A}(D_r)$ ve $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ise f'nin D_r'deki seri açılımı olsun. Eğer $|a_1| \geq \sum_{n\geq 2} n|a_n|r^{n-1}$ ise, f'nin birebir olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.6. p bir polinomsa bir $\varepsilon > 0$ sayısı, her $a \in D_\varepsilon^*$ için $p + a$ polinomunun tüm kökleri birinci dereceden olacak biçimde vardır.

Problem 1.8.7. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in \mathcal{A}(B)$ ise, aşağıdakileri kanıtlayınız:

(i) $\alpha := \sup\{|f(z)| \mid z \in B\}$ ise, ya her $z \in B$ için $|f(z)| < \alpha$, ya da f sabittir.

(ii) B bölgesi sınırlı ve bir $M \geq 0$ sayısı ile, $\lim z_n \in \partial B$ olan B'deki her (z_n) dizisi için eğer $\limsup_{n\to+\infty} |f(z_n)| \leq M$ ise, bu durumda her $z \in B$ için $|f(z)| < M$ veya f sabittir.

Problem 1.8.8. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in \mathcal{A}(B)$ ise, aşağıdakileri kanıtlayınız:

(i) $\beta := \inf\{|f(z)| \mid z \in B\}$ ise, ya her $z \in B$ için $|f(z)| > \beta$, ya da f sabittir.

(ii) B bölgesi sınırlı ve bir $m \geq 0$ sayısı ile, $\lim z_n \in \partial B$ olan B'deki her (z_n) dizisi için eğer $\liminf_{n\to+\infty} |f(z_n)| \geq m$ ise, bu durumda her $z \in B$ için $|f(z)| > m$ veya f sabittir.

Problem 1.8.9. $n \in \mathbb{N}^*$, $r > 0$ ve $a \in \mathbb{C}$ olsun. $|z^n + a|$'nin $\overline{D}_r$'deki maksimumu nedir ve bu değer hangi noktalarda alınır.

Problem 1.8.10. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $\overline{\mathbb{D}} \subset U$ ve $f \in \mathcal{A}(U)$ olsun. Bir $M > 0$ sayısı ile $|f(0)| < M$ ve her $z \in \partial\mathbb{D}$ için $|f(z)| \geq M$ ise, f'nin $\mathbb{D}$'de en az bir sıfır yeri olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.11. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}(B)$ ve her k için $f_k(B) \subset \mathbb{C}_{-\pi}$ olsun. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ve her $z \in B$ için $g(z) := \prod_{k=1}^{n} |f_k(z)|^{a_k}$ olsun. g'nin B'de yerel maksimumu varsa g'nin B'de sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.12. $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z^2)| \geq |f(z)|$ ise, f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.13. $a \in \mathbb{C}$, $|a| \leq 1$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) := \frac{a}{2} + (1 - |a|^2)z - \frac{\bar{a}}{2}z^2$$

olsun. $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.14. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{A}(B)$, $I := [0,1]$ ve $Q := I \times I \subset B$ olsun. Ayrıca, $I \times \{0\} \cup I \times \{1\}$'de $\operatorname{Re} f \equiv 0$ ve $\{0\} \times I \cup \{1\} \times I$'de $\operatorname{Im} f \equiv 0$ ise, B'de $f \equiv 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.15. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 ve orada tanımladığı fonksiyon f olsun. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdakiler olabilir mi?

(1) $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$?

(2) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$?

(3) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^3}$?

Problem 1.8.16. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 ve orada tanımladığı fonksiyon f olsun. f fonksiyonu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ noktalarında sırasıyla (a) $0,1,0,1,0,\ldots$ (b) $0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},\ldots$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$ ve (d) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots$ değerlerini alabilir mi?

Problem 1.8.17. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $0 \in U$, $f \in \mathcal{A}(U)$ ve f'nin 0'daki seri açılımı $\sum a_n z^n$ olsun. Eğer 0 noktası $X = U \cap \mathbb{R}$'in bir yığılma noktası ve $f(X) \subset \mathbb{R}$ ise, her n için $a_n \in \mathbb{R}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.18. $f(z) = \frac{1}{\cos z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$'de analitiktir. f'nin 0 noktasındaki kuvvet serisi açılımının ilk 5 terimini bulunuz.

Problem 1.8.19. $\sin^2 z$ ve e^{z^2} analitik fonksiyonlarının $z = 0$ noktasındaki seri açılımlarını bulunuz.

Problem 1.8.20. 0'ın bir komşuluğunda analitik olan $f(z) = (1 + z + z^2)^{-1}$ fonksiyonunu $z = 0$ noktasında bir kuvvet serisine açınız.

Problem 1.8.21. $\exp(1-z)^{-1}$ ve $\sin(1-z)^{-1}$ fonksiyonların $\mathbb{C}\backslash\{1\}$'de analitik olduğunu gösterip $z_0 = 0$'daki seri açılımlarını veriniz. İpucu: Binom serisinden yararlanınız.

Problem 1.8.22. $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ ve $f(0) = 0$ ise, $\sum_{n\geq 0} f(z^n)$ serisinin $\mathbb{D}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 1.8.23. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $\overline{\mathbb{D}} \subset U$, $f \in \mathcal{A}(U)$, $f(0) = 1$ ve her $z \in \partial\mathbb{D}$ için $|f(z)| > 1$ ise, f'nin $\mathbb{D}$'de en az bir sıfır yeri vardır; gösteriniz.

Problem 1.8.24. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ ve $f(\frac{1}{2}) = 0$ ise $|f(0)| \leq \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

1.9 Analitik Dallar

Bu kısımda katıksız Weierstrass yaklaşımını terk edip Riemann'la kısa bir dirsek temasına geçeceğiz. Birebir olmayan fonksiyonların bir biçimde tersleriyle ilgilenirsek, ister istemez, her z'ye boştan farklı bir $\mathbf{f}(z) \subset \mathbb{C}$ alt kümesi karşılık getiren dönüşümlerle ilgilenmek zorunda kalırız. Tanım gereği $\mathcal{P}^*(\mathbb{C})$ ile $\mathbb{C}$'nin boştan farklı olan altkümelerinin ailesini gösteriyoruz.

Tanım 1.9.1. $B \subset A \subset \mathbb{C}$, $\mathbf{f} : A \to \mathcal{P}^*(\mathbb{C})$ olsun. $g : B \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna, her $b \in B$ için $g(b) \in \mathbf{f}(b)$ ise $\mathbf{f}$'nin B'de bir **dalıdır** denir. g fonksiyonu B'de sürekli, türevlenebilir, analitik vb. ise B'de $\mathbf{f}$'nin **sürekli, türevlenebilir, analitik** vb. bir **dalı**dır denir.

$U, V \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to V$ örten olsun. Genelde $\mathbf{f}^{-1}$ çok değerlidir. $W \subset V$ açık ve $g : W \to U$ ise $\mathbf{f}^{-1}$'in bir dalı olsun. Dolayısıyla, her $z \in W$ için $f(g(z)) = z$ olur. Bunun bir sonucu olarak $g(z_1) = g(z_2)$ ise, $z_1 = f(g(z_1)) = f(g(z_2)) = z_2$ olur; bundan dolayı g fonksiyonu birebirdir. Not edelim: *$\mathbf{f}^{-1}$'in her dalı zorunlu olarak birebir bir fonksiyondur.* Konumuz gereği bizi holomorf (analitik) f fonksiyonları için $\mathbf{f}^{-1}$'in holomorf (analitik) dalları ilgilendirecektir.

$f : U \to V$ fonksiyonu örten ancak birebir değilse, bunun tersi çok değerli olacağından, $\mathbf{f}^{-1}$ ile gösterilecektir. Ancak $W \subset V$'de $\mathbf{f}^{-1}$'nin bir dalı söz konusu olduğunda onu f^{-1} ile göstereceğiz. Örneğin $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ örten ancak birebir değildir. Dolayısıyla, bunun tersi $\mathbf{exp}^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ çok değerlidir. Ancak çok bilinen ve kullanılan ve birebir olmayan $\exp, \cos, \sin, \ldots$ gibi fonksiyonlarımızın $\mathbf{exp^{-1}}$, $\mathbf{cos^{-1}}$, $\mathbf{sin^{-1}}, \ldots$ tersleri için yerleşmiş **log**, **arccos**, **arcsin**, $\ldots$ adlandırmaları da yaygındır. log, $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}, \ldots$ veya arccos, arcsin, $\ldots$ adlandırmalarını, ancak bu çok değerli fonksiyonların tek değerli dalları için kullanacağız.

Örnek 1.9.2. (1) $\log_\alpha : \mathbb{C}_\alpha \to S_\alpha$ fonksiyonu tanım gereği $\log_\alpha = (\exp|S_\alpha)^{-1}$ olduğundan, $\mathbf{log} = \mathbf{exp}^{-1}$'in bir analitik dalıdır. $\log_{-\frac{\pi}{2}}$'yi Log ile gösterip buna **log**'un anadalı demiştik. Her $0 < x \in \mathbb{R}$ için $\operatorname{Log} x = \ln x$ olur, dd. Log anadalımız gerçel analizden tanıdık ln fonksiyonunun $\mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$'ye analitik genişlemesidir.

(2) $\log_\alpha(z) = \ln|z| + i\arg_\alpha(z)$ olduğundan, $\arg_\alpha$ fonksiyonu **arg** çok değerli fonksiyonunun $\mathbb{C}_\alpha$'da her dereceden sürekli kısmi türevlenebilir bir dalıdır. Ancak d_α üzerindeki bir noktaya farklı yakalardan yaklaşırsak, $\arg_\alpha$ farklı limitlere sahip olur, dolayısıyla $\arg_\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{C}^*$'a sürekli genişletilemez![32]

(3) Her $w \in \mathbb{C}$ için

$$\mathbf{u_w} : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}^*(\mathbb{C}), \quad \mathbf{u_w}(z) := \mathbf{z}^w$$

olarak tanımlansın. $\mathbf{u_w}$ fonksiyonunua $\mathbf{w}$. **üsler fonksiyonu** diyelim; bu elbette küme (veya **çok değerli**) bir fonksiyondur. (1.43) ile $\mathbb{C}_\alpha$'da tanımlanan $u_{w,\alpha}$ fonksiyonu $\mathbf{u}_w$'nin bir analitik dalıdır. $u_{w,-\pi}$ fonksiyonuna $\mathbf{u}_w$'nin **anadalı** denir. Özel olarak $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ ise $u_{\frac{1}{n},-\pi}$ anadalını $\sqrt[n]{\ }$ ile gösterelim. Dolayısıyla, her $z \in \mathbb{C}_{-\pi}$ için

$$\sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} z} = e^{\frac{1}{n}|z|} \cdot e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}} \tag{1.51}$$

olur. Dolayısıyla, her $0 < x \in \mathbb{R}$ için (1.51) anlamındaki $\sqrt[n]{x}$ değeri gerçel analizden bildiğimiz $\sqrt[n]{x}$ değeri ile örtüşür, dd. $u_{\frac{1}{n},-\pi}$ anadalımız gerçel analizden tanıdık $\sqrt[n]{\ }$ fonksiyonun $\mathbb{C}_{-\pi}$'ye analitik genişlemesidir.

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık küme, F fonksiyonu gerçel analizden bilindik bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonun bir $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesine holomorf genişletilmişi ise, $\mathbf{F}^{-1}$'in g anadalını tanımlarken genel felsefemiz şudur: $x \in \mathbb{R}$ sayısı g'nin tanım bölgesinde ise, x noktasının $\mathbb{R}$'deki bir komşuluğunda $g = f^{-1}$ olmalıdır.

Önerme 1.9.3. *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $f : U \to V$ holomorf ve örten olsun. $B \subset V$ bir bölge, $g : B \to U$ ise $\mathbf{f}^{-1}$'in bir sürekli dalı olsun. $z_0 \in B$, $w_0 = g(z_0)$ ve $f'(w_0) \neq 0$ ise, g dalı z_0'da türevlenebilir ve $g'(z_0) = 1/f'(w_0)$. Eğer f''nün $g(B)$'de sıfır yeri yoksa g holomorftur ve her $z \in B$ için $g'(z) = 1/f'(g(z))$.*

Kanıt. $z \in B$ için $w := g(z)$ olsun. g birebir olduğundan, $z \neq z_0$ ise $w \neq w_0$ olur. g sürekli olduğundan, $z \neq z_0$ ve $z \to z_0$ ise $w \to w_0$ olacağından, sav

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{f(g(z)) - f(g(z_0))} = \frac{w - w_0}{f(w) - f(w_0)}$$

eşitliğinden çıkar. □

[32] Okur bunu kolayca görür; yine de biraz ileride göstereceğiz.

Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı, bir bölgede sabit olmayan analitik fonksiyonlar, açık kümeleri açık kümelere resmeder. Ayrıca, analitik (yani holomorf) ve birebir fonksiyonların türevleri hiçbir yerde 0 olamaz (bkz. Sonuç 1.8.15). Bunlar ve Önerme 1.2.19 ile şu sonuca ulaşırız: $f : U \to \mathbb{C}$ holomorf, $V \subset U$ açık ve $f|V$ birebirse $(f|V)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbf{f}^{-1}$'in bir holomorf dalıdır ve $\mathbf{f}^{-1}$'in tüm holomorf dalları böyle elde edilirler.

Teorem 1.9.4. *$X \subset \mathbb{C}$ bağlantılı ve $f, g : X \to \mathbb{C}$ olsun.*

(i) *f ve g argümanlar fonksiyonunun X'te herhangi iki sürekli dalı ise, tek olarak belirli bir $m \in \mathbb{Z}$ ile $\forall z \in X : f(z) = g(z) + 2m\pi$.*

(ii) *f ve g logaritmalar fonksiyonunun X'te herhangi iki sürekli dalı ise, tek olarak belirli bir $m \in \mathbb{Z}$ ile $\forall z \in X : f(z) = g(z) + 2m\pi i$.*

Kanıt. (i) Her $z \in X$ için $f(z), g(z) \in \mathbf{arg}\, z$ olduğundan, tek olarak belirli bir $k(z) \in \mathbb{Z}$ ile $f(z) = g(z) + 2\pi k(z)$. Bu durumda, $k := \frac{1}{2\pi}(f - g)$ fonksiyonu X bağlantılı uzayında sürekli ve $\mathbb{Z}$ değerli olduğundan, sabittir (bkz. (5.2.32)); bu sabite m dersek, sav çıkar.

(ii) f ve g fonksiyonları logaritmalar fonksiyonunun X'te sürekli iki dalı ise, bir yandan $\operatorname{Im} f$ ve $\operatorname{Im} g$ fonksiyonları X'te argümanlar fonksiyonunun sürekli dallarıdır ve (1)'den dolayı, bir $m \in \mathbb{Z}$ ile $\operatorname{Im} f - \operatorname{Im} g = 2\pi m$, diğer yandan ise $f - g = i(\operatorname{Im} f - \operatorname{Im} g) = i2\pi m$ olur. □

Sonuç 1.9.5. *$B \subset \mathbb{C}^*$ bir bölge $\arg_B$ ve $\log_B$ sırasıyla **arg** ve **log**'un B'de birer sürekli dalları ise, bunların B'deki tüm sürekli dalları, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, sırasıyla $\arg_B + 2k\pi$ ve $\log_B + i2k\pi$ fonksiyonlarıdır. Özellikle **log**'un $\mathbb{C}_\alpha$'daki tüm holomorf dalları $\log_\alpha + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$ fonksiyonlarıdır.*

Teorem 1.9.4'ün bir sonucu olarak **arg** *fonksiyonunun $\mathbb{C}^*$'da bir sürekli dalı olamayacağını* kolayca görürüz. Eğer θ fonksiyonu **arg** fonksiyonunun $\mathbb{C}^*$'da bir sürekli dalı olsaydı $\theta|\mathbb{C}_\alpha$ ve $\arg_\alpha$ fonksiyonları bağlantılı $\mathbb{C}_\alpha$'da **arg** fonksiyonunun iki sürekli dalı ve dolayısıyla bir $k \in \mathbb{Z}$ ile $\arg_\alpha = \theta|\mathbb{C}_\alpha + 2k\pi$ olurdu ki, bu daha önce gördüğümüzün aksine $\arg_\alpha$'nın $\mathbb{C}^*$'ya sürekli genişleyebileceğini söyler!

Her $w \in \mathbb{C}$ için $\exp' w = \exp w \neq 0$ olduğundan, Önerme 1.9.3'ten dolayı, **log**'un herhangi bir $B \subset \mathbb{C}^*$ bölgesindeki herhangi bir sürekli $\log_B$ dalı aynı zamanda holomorftur ve $\frac{d \log_B z}{dz} = \frac{1}{z}$ geçerlidir.

Önerme 1.9.6. *$n \geq 2$, B bir bölge ve g ise B'de $\sqrt[n]{\mathbf{z}}$'nin bir holomorf dalı olsun. $0 \notin B$ olmak zorundadır. $\sqrt[n]{\mathbf{z}}$'nin B'deki tüm holomorf dalları n tanedir ve bunlar $\xi = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ kompleks sayısı n. birim kök olmak üzere, $g, \xi g, \ldots, \xi^{n-1} g$ fonksiyonlarıdır.*

Kanıt. Tanım gereği, her $z \in B$ için $[g(z)]^n = z$. Dolayısıyla, her $z \in B$ için $n[g(z)]^{n-1} g'(z) = 1$ olur. Buradan, eğer $0 \in B$ ise zorunlu olarak $g(0) = 0$

olacağından, $n \cdot 0^{n-1} \cdot g'(0) = 1$ çelişkisine ulaşırız. Sonuç olarak $0 \notin B$ ve her $z \in B$ için $g(z) = w \neq 0$ olur.

$[g(z)]^n = z$ ise, her $m \in \mathbb{N}^*$ için $[\xi^m g(z)]^n = \xi^{nm}[g(z)]^n = 1^m z = z$ olduğundan, $k = 1, \ldots, n-1$ için birbirinden farklı olan $g, \xi g, \ldots, \xi^{k-1} g$ fonksiyonları da B'de $\sqrt[n]{\mathbf{z}}$'nin birer holomorf dalıdırlar. Şimdi B'de $\sqrt[n]{\mathbf{z}}$'nin başka holomorf dalı olmadığını görelim: h bir başka holomorf dal olsun. g ve h fonksiyonları B'de 0 değerlerini almadıkları için $f := h/g$ fonksiyonu da B'de 0 değerini almaz ve $(f(z))^n = (h(z))^n/(g(z))^n = z/z = 1$ olur. Buradan B'de $n(f(z))^{n-1} f'(z) = 0$ dolayısıyla $f'(z) = 0$ olur. $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $f' = 0$ olduğundan, Önerme 1.2.21'den f sabittir. $f \equiv c$ ise $c^n = f^n = 1$, böylece $c \in \{1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}\}$ olur ve bu, savı kanıtlar. □

Özel olarak $n = 2$ ise, $\sqrt{\mathbf{z}}$'nin bir $B \subset \mathbb{C}^*$ bölgesinde en fazla iki holomorf dalı olabilir. $\xi = \exp\left(\frac{2\pi i}{2}\right) = -1$ olduğundan, g fonksiyonu B'de $\sqrt{\mathbf{z}}$'nin bir holomorf dalı ise diğer holomorf dal $-g$'dir.

Örnek 1.9.7. $\sin \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ döngülü olduğundan birebir değildir, dolayısıyla $\mathbf{arcsin} = \mathbf{sin}^{-1}$ çok değerlidir. Şimdi $z = \sin w$ denkleminin çözümlerini arayalım: $z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw})$ eşitliğinden, ikinci dereceden $\left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$ denklemi, buradansa

$$\begin{aligned} e^{iw} &\in iz + \sqrt{\mathbf{1 - z^2}} = iz + (\mathbf{1 - z^2})^{\frac{1}{2}} \\ iw &\in \mathbf{log}\left(iz + \sqrt{\mathbf{1 - z^2}}\right) \\ \mathbf{arcsin}\, z &= \frac{1}{i}\,\mathbf{log}\left(iz + \sqrt{\mathbf{1 - z^2}}\right) = -i\,\mathbf{log}\left(iz + \sqrt{\mathbf{1 - z^2}}\right) \end{aligned} \tag{1.52}$$

elde edilir. Bu eşitlik $w \in \mathbf{arcsin}\, z \iff \sin w = z$ demektir. Karekök önüne $\pm$ koymadığımıza dikkat ediniz; nedeni zaten çok değerli karekök fonksiyonunu seçtiğimizdendir. Örnek olarak $\mathbf{arcsin}\, i$'yi belirleyelim:

$$\mathbf{arcsin}\, i = -i\,\mathbf{log}(-1 + \sqrt{\mathbf{2}}) = \begin{cases} -i\,\mathbf{log}(-1 + \sqrt{2}), & \sqrt{2} \in \sqrt{\mathbf{2}} \\ -i\,\mathbf{log}(-1 - \sqrt{2}), & -\sqrt{2} \in \sqrt{\mathbf{2}} \end{cases}$$

İlk şıktan dolayı, her $k \in \mathbb{Z}$ için $-i[\ln(-1 + \sqrt{2}) + 2\pi i k]$ değerleri, ikinci şıktan ise $-i[\ln(1 + \sqrt{2}) + i\pi + 2\pi i k]$ değerleri $\mathbf{arcsin}\, i$'dedir ve $\mathbf{arcsin}\, i$ tam da bu değerlerin birleşiminden oluşur. Ayrıca, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonları exp fonksiyonu üzerinden tanımladığımız için bunların **arccos**, **arcsin**, **arctan**, ... ters fonksiyonlarının $\mathbf{exp}^{-1} = \mathbf{log}$ aracılığı ile elde edilebilmesini beklemek doğaldır.

$$\begin{aligned} \mathbf{arccos}\, z &= -i\,\mathbf{log}(z + \sqrt{\mathbf{z^2 - 1}}) \text{ ve} \\ \mathbf{arctan}\, z &= \frac{1}{2i}\,\mathbf{log}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right) \end{aligned}$$

olduğunu görmeyi problem olarak bıraktık.

$\mathbf{arcsin}, \mathbf{arctan}, \ldots$ gibi bir takım çok değerli fonksiyonların holomorf dallarını bulmak istiyorsak, $\sin, \tan, \ldots$ fonksiyonlarının hangi U açık kümelerini hangi V açık kümelerine biholomorf resmettiğini araştırmamız gerekir.

Önsav 1.9.8. *$B \subset \mathbb{C}$ bir dışbükey bölge, $f \in \mathcal{A}(B)$ ve bir $a \in \mathbb{C}$ ile B'de $\operatorname{Re}(af') > 0$ ise, $f(B)$ de bir bölgedir ve $f : B \to f(B)$ bianalitiktir.*

Kanıt. $z_0, z_1 \in B$, $z_0 \neq z_1$ olsun. $[z_0, z_1] \subset B$ ve

$$a\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \int_0^1 af'(z_0 + (z_1 - z_0)t)dt =: \int_0^1 p(t)dt =: \beta$$

olur. $\operatorname{Re} p > 0$ olduğundan, $\operatorname{Re}\beta > 0$, dolayısıyla $\beta \neq 0$ olur. Böylece $f(z_0) \neq f(z_1)$ ve f birebirdir. Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı f bir açık dönüşümdür ve $f(B)$ açık ve bağlantılı olduğundan, bir bölgedir. Teorem 1.8.8(iv)'ten dolayı f bianalitiktir. □

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ve $a < b$ olmak üzere, $S_{a,b} := \{z | a < \operatorname{Re} z < b\}$'ye bir **dikey şerit** diyelim.

Sonuç 1.9.9. $\sin |S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} : S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} \to \mathbb{C}\backslash((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ *biholomorftur.*

Kanıt. $U := S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ ve $B := \mathbb{C}\backslash((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ olsun. Her şeyden önce, her $z \in U$ için $\sin' z = \cos z \neq 0$ olduğu kolayca görülür. Gerçekten de $z = x + iy \in U$ için $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ olduğundan, $\cos x > 0$ ve daima $\cosh y \geq 1$ olduğundan, (1.37) ile $\operatorname{Re}\sin' z = \operatorname{Re}\cos z = \cos x \cdot \cosh y > 0$, dolayısıyla $\sin' z = \cos z \neq 0$ olur. U dışbükey ve orada $\operatorname{Re}\sin' > 0$, böylece Önsav 1.9.8'den $\sin |U : U \to \sin(U)$ biholomorftur. Şimdi $\sin(U) = B$ olduğunu savunuyoruz. sin fonksiyonunu z-düzleminden w-düzlemine bir dönüşüm olarak düşünürsek, (1.36) ile $u + iv = w = \sin z = \sin(x + iy)$ dönüşümü şu şekli alır:

$$(u, v) = (\sin x \cosh y, \cos x \sinh y).$$

Dolayısıyla, sin dönüşümü z-düzlemindeki $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusunu, w-düzlemindeki $\{0\} \times \mathbb{R}$ doğrusuna resmeder. Yine sin dönüşümü z-düzlemindeki $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{0\}$ yatay doğru parçasını w-düzlemindeki $(-1, 1) \times \{0\}$ doğru parçasına resmeder. sin fonksiyonu $0 \neq a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için $\{a\} \times \mathbb{R}$ doğrusunu

$$H_a : \quad \left(\frac{u}{\sin a}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos a}\right)^2 = 1$$

hiperbolüne resmeder. Ayrıca, $a < 0$ ise bu doğruyu hiperbolün sol dalına, $a > 0$ ise sağ dalına resmeder. $b \in \mathbb{R}^*$ içinse $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \{b\}$ yatay doğru parçasının görüntüsü ise

$$E_b : \quad \left(\frac{u}{\cosh b}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh b}\right)^2 = 1$$

elipsinin üzerindedir; ayrıca $a < 0$ ise elipsin alt parçasında, $b > 0$ ise elipsin üst parçasındadır. Şimdi $(u, v) \in B$ noktası eğer u-ekseni üzerinde değilse tam bir tane H_a yarıhiperbolü üzerindedir. Eğer bu noktamız v-ekseni üzerinde de değilse tam bir tane E_b elipsi üzerindedir ve açıkça $\sin(a+ib) = u+iv$. Sonuçta $\sin(U) = B$. □

Tanım 1.9.10. $\text{Arcsin} := \left(\sin|\text{S}_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\right)^{-1} : \mathbb{C}\backslash((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)) \to S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ fonksiyonuna **arcsin**'ün **anadalı** denir.

Gerçel analizde $\sin : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to (-1,1)$ bir tameşlemedir ve tersi arcsin fonksiyonudur ve yukarıdaki irdelemelerden $(-1,1)$'de Arcsin = arcsin. (1.52) eşitliğinde karekök ve logaritmanın anadallarına geçersek, B bölgesinde

$$f(z) := -i\,\text{Log}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$$

analitik fonksiyonunu elde ederiz. $0 < x < 1$ için $w := ix + \sqrt{1-x^2}$ sayısı düzlemin birinci dörtlüğünde, $|w| = 1$ ve $w = e^{i\arcsin x}$ olduğundan, $f(x) = -i\,\text{Log}\,w = -i\cdot i\arcsin x = \arcsin x$ olur. Böylece B bölgesinde analitik olan Arcsinz ve $f(z)$ fonksiyonları B bölgesindeki $(0,1)$ aralığında çakıştıklarından, Özdeşlik Teoremi'nden dolayı B'de çakışırlar. Sonuçta

$$\text{Arcsin}z = -i\,\text{Log}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\ z\in\mathbb{C}\backslash((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)).$$

Hazır çok değerli fonksiyonlarla tanıştığımız şu noktada, aslında Geometrik Fonksiyonlar Kuramının konusu olan, $z = g(w) = w^2$ ve $\exp w = z$ fonksiyonlarının çok değerli $\sqrt{\mathbf{z}} = \mathbf{g}^{-1}(z)$ ve $\mathbf{log}\,z = \mathbf{exp}^{-1}\,z$ ters fonksiyonlarından tek değerli fonksiyonlar elde etmek istersek neler yapabiliriz, kısaca değineceğiz.

Orijinden d_α boyunca sonsuza baktığımızda d_α ışınının bir sol bir de sağ yakası vardır. $c_\alpha := \rho e^{i\alpha} \in d_\alpha\backslash\{0\}$ noktasına sağ yakadan, saatin ters yönünde, a_n noktalarıyla yaklaşırsak

$$\log_\alpha(c_\alpha^+) := \lim\log_\alpha(a_n) = \ln\rho + i(\alpha+2\pi) \tag{1.53}$$

olurken b_n noktalarıyla sol yakadan, saat yönünde yaklaşırsak

$$\log_\alpha(c_\alpha^-) := \lim b_n = \ln\rho + i\alpha \tag{1.54}$$

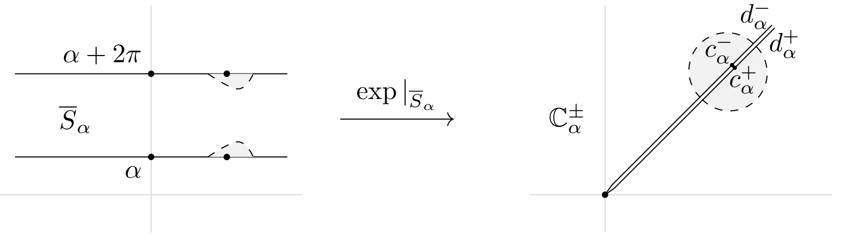
olur; böylece $a_n, b_n \to \rho e^{i\alpha}$ ancak $\lim\log_\alpha a_n \neq \lim\log_\alpha b_n$. Sonuç olarak, $\log_\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{C}^*$'a sürekli genişletilemez. Aynı zamanda

$$\arg_\alpha(c_\alpha^+) := \lim\arg_\alpha a_n = \alpha+2\pi \neq \alpha = \lim\arg_\alpha b_n =: \arg_\alpha(c_\alpha^-)$$

olduğundan, $\arg_\alpha$ fonksiyonu da $\mathbb{C}^*$'a sürekli genişletilemez. Ancak (1.53) ve (1.54) eşitlikleri $\log_\alpha$'nın nasıl bir topolojik uzaya sürekli genişletilebileceğinin ipucunu verirler.

$d_\alpha^* := d_\alpha\backslash\{0\}$ olmak üzere, bunun, ayrık düşüneceğimiz ve d_α^- ve d_α^+ ile göstereceğimiz iki örneği ile

$$\mathbb{C}_\alpha^\pm = \mathbb{C}_\alpha \sqcup d_\alpha^- \sqcup d_\alpha^+$$



Şekil 1.10

uzayını oluşturalım. Her $c_\alpha \in d^*_\alpha$ noktası bize birbirinden farklı $c^-_\alpha \in d^-_\alpha$ ve $c^+_\alpha \in d^+_\alpha$ noktalarını verir. $0 < r < |c_\alpha|$ olmak üzere, her $D_r(c_\alpha)$ dairesi iki ayrık yarıkapalı $D_r(c^-_\alpha)$ ve $D_r(c^+_\alpha)$ yarım dairelerini verir (bkz. Şekil 1.10)[33]. Bunların aileleri, sırasıyla bu noktaların, dd. c^- ve c^+ noktalarının birer komşuluk bazı olarak tanımlanırsa $\arg_\alpha$ ve $\log_\alpha$ fonksiyonları $\mathbb{C}^{\pm}_\alpha$'ya sürekli genişlerler ve $\exp|\overline{S}_\alpha : \overline{S}_\alpha \to \mathbb{C}^{\pm}_\alpha$ topolojiktir.

Diğer yandan,

$$\log_{\alpha-2\pi}(c^+_{\alpha-2\pi}) = \lim \log_{\alpha-2\pi} a_n = \lim \log_\alpha b_n = \log_\alpha c^-_\alpha \text{ ve} \tag{1.55}$$

$$\log_\alpha(c^+_\alpha) = \lim \log_\alpha a_n = \lim \log_{\alpha+2\pi} b_n = \log_{\alpha+2\pi}(c^-_{\alpha+2\pi}). \tag{1.56}$$

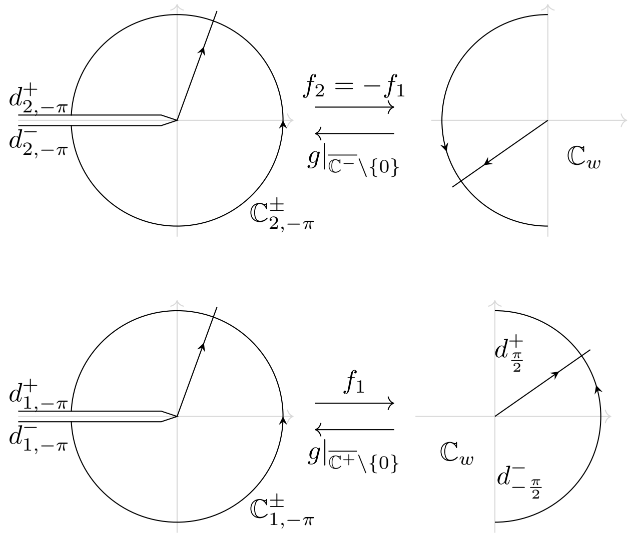
Bu eşitlikler bize çok değerli **log** fonksiyonundan tek değerli bir fonksiyon elde etmek istediğimizde ne yapmamız gerektiğinin ipucunu verir.

$\sqrt{\mathbf{z}}$'nin Riemann Yüzeyi: Şimdi fonksiyonlarımızın tanım ve değer bölgeleri için farklı $\mathbb{C}_z$ ve $\mathbb{C}_w$ düzlemleri seçelim. $g : \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}_z$ dönüşümü $z = g(w) = w^2$ olsun. g dönüşümü *süreklidir*, *açık dönüşüm*dür (bkz. Teorem 1.8.16) ve *ayrıktır*, dd. her z için $g^{-1}(z)$ ayrıktır. X, Y topolojik uzaylar ve $p : Y \to X$ sürekli, açık ve ayrıksa (Y, p, X) üçlüsüne bir **örtü uzayı** denir; bunları KA II'de ayrıntılı olarak inceleyeceğiz. $g'(w) = 2w$ türevi yalnızca $w = 0$ noktasında 0'dır. Dolayısıyla, Sonuç 1.2.20'den dolayı, her $w \neq 0$ noktasının bir komşuluğunda g fonksiyonu $\mathbb{C}^*_w$'da yerel topolojiktir. Teorem 1.8.14'ten dolayı ise, g fonksiyonu $w = 0$'ın hiçbir komşuluğunda birebir değildir. Bu nedenle, $w = 0$ noktası g'nin bir dallanma noktasıdır. $\mathbf{f} := \mathbf{g}^{-1} = \sqrt{\ }$ olsun. $\mathbf{f}(z) = \mathbf{z}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbf{z}} = \exp \frac{1}{2} \mathbf{log}\, z$ fonksiyonunun $\mathbb{C}_{z,-\pi} := \mathbb{C}_z \setminus (-\infty, 0]$'daki anadalı tam da

$$f_1(z) = \exp \frac{1}{2} \operatorname{Log} z = \exp \frac{1}{2}(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z) = \sqrt{|z|} \cdot \exp i \frac{\operatorname{Arg} z}{2}$$

fonksiyonumuzdur. Bu anadal yalın olarak $w = f_1(z) = \sqrt{z}$ ile gösterilir ve Önerme 1.9.6'dan dolayı, $\mathbf{g}^{-1}$'in $\mathbb{C}_{z,-\pi}$'deki tüm holomorf dalları f_1 ve $f_2 = -f_1$'den oluşur.

[33] $\mathbb{C}^{\pm}_\alpha$'yı görselleştirirken biraz zorlama olmuştur, ancak okurun doğru yorumlayacağına inanıyoruz.



Şekil 1.11

$\mathbb{C}^+_w$'de daima $g'(w) = 2w \neq 0$, dolayısıyla $\operatorname{Re} g'(w) = 2 \operatorname{Re} w > 0$ olur. Teorem 1.8.8'den dolayı, g fonksiyonu $\mathbb{C}^+_w$ sağ yarıdüzlemini $\mathbb{C}_{z,-\pi}$'ye bianalatik resmeder ve $f_1 = (g|\mathbb{C}^+_w)^{-1}$ olur. g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}^+}\setminus\{0\}$'ı ise $\mathbb{C}^{\pm}_{-\pi}$'ye topolojik olarak resmeder (bkz. Şekil 1.11). Bu arada orijin hariç pozitif sanal ekseni $d^+_{-\pi}$'ye, orijin hariç negatif sanal ekseni ise $d^-_{-\pi}$'ye resmeder. Benzer biçimde g fonksiyonu $\mathbb{C}^-_w$ sol yarıdüzlemini yine $\mathbb{C}_{z,-\pi}$'ye bianalitik ve benzer biçimde $\overline{\mathbb{C}^-}\setminus\{0\}$'ı ise $\mathbb{C}^{\pm}_{-\pi}$'ye topolojik olarak resmeder. Ancak bu kez orijin hariç pozitif sanal ekseni $d^-_{-\pi}$'ye ve orijin hariç negatif sanal ekseni ise $d^+_{-\pi}$'ye resmeder. Her $a \in \mathbb{C}^*_z$ için $g^{-1}(a)$ iki ögelidir. Bu nedenle, $g(\mathbb{C}^*_w)$, $\mathbb{C}^*_z$ düzlemini iki kat örter. Dolayısıyla, $\mathbf{g}^{-1}$'den tek değerli bir fonksiyon elde etmek istiyorsak, bu bir şekilde $\mathbb{C}^*_z$'ın iki örneğini içermelidir.

Şimdi $\mathbb{C}_{-\pi}$'nin, ayrık olarak düşüneceğimiz ve $\mathbb{C}_{k,-\pi}$, $k = 1, 2$ olarak adlandıracağımız iki örneğini alalım. g fonksiyonu $\mathbb{C}^+_w$'deki değerlerini $\mathbb{C}_{1,-\pi}$'de $\mathbb{C}^-_w$'deki değerlerini ise $\mathbb{C}_{2,-\pi}$'de alsın. Bu durumda, $f_1 := (g|\mathbb{C}^+_w)^{-1}$ ve $f_2 := (g|\mathbb{C}^-_w)^{-1}$ olsunlar. Bir önceki paragraftan şunları biliyoruz: f_1 dönüşümü $\mathbb{C}^{\pm}_{1,-\pi}$ kümesini topolojik olarak $\overline{\mathbb{C}^+_w}\setminus\{0\}$'a resmeder; f_2 ise $\mathbb{C}^{\pm}_{2,-\pi}$'yi topolojik olarak $\overline{\mathbb{C}^-_w}\setminus\{0\}$'a resmeder. Bu arada $r > 0$ için $z = -r$'ye $d^{\pm}_{k,-\pi}$ yakalarında karşılık gelen noktaları $(k, -r)^{\pm}$ ile gösterirsek, aşağıdaki denklemler geçerlidir:

[34]

$$f_1((1,-r)^+) = i\cdot\sqrt{r} = f_2((2,-r)^-) \text{ ve} \tag{1.57}$$
$$f_1((1,-r)^-) = -i\cdot\sqrt{r} = f_2((2,-r)^+). \tag{1.58}$$

Özetle f_1'in üst (alt) yakadaki değerleri f_2'nin alt (üst) yakalarındaki değerleri ile çakışır. Dolayısıyla,

$$(1,-r)^+ \equiv (2,-r)^- \text{ ve } (1,-r)^- \equiv (2,-r)^+$$

özdeşleşmelerini yaparsak, ayrık $\mathbb{C}^{\pm}_{1,-\pi}$ ve $\mathbb{C}^{\pm}_{2,-\pi}$ uzaylarından bağlantılı bir X uzayı elde ederiz. (1.57) ve (1.58) eşitliklerinden dolayı

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z) & z\in\mathbb{C}^{\pm}_{1,-\pi} \\ f_2(x) & z\in\mathbb{C}^{\pm}_{2,-\pi} \end{cases}$$

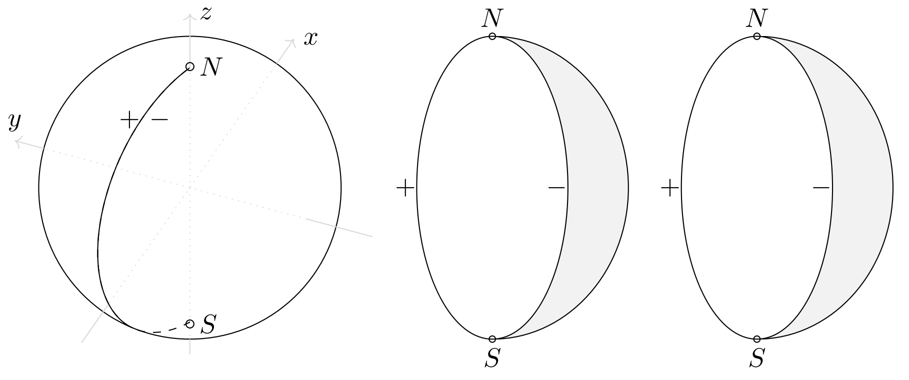
tanımı kusursuzdur. KA II'de X'in bir kompleks katmanlı ve $f : X \to \mathbb{C}^*$'ın biholomorf olduğunu göreceğiz. X katmanlısına $\sqrt{\mathbf{z}}$ çok değerli fonksiyonunun Riemann yüzeyi denir. Bu uzay şöyle görselleştirilir: $\mathbb{R}^3$'te xy-düzlemine koşut olarak, alta $\mathbb{C}^{\pm}_{1,-\pi}$ ve biraz yukarısına $\mathbb{C}^{\pm}_{2,-\pi}$ yerleştirilir ve $d^+_{1,-\pi} \equiv d^-_{2,-\pi}$ ve $d^-_{1,-\pi} \equiv d^+_{2,-\pi}$ ile bu iki parça birleştirilir. Her kompleks kitabında bunun görselleştirmesi vardır. Böyle bir görselleştirmede bu iki tabaka birbirini sanki negatif eksen boyunca keser gibi görünür. Okur gerekirse s. 275'da küp kökün yüzeyinden esinlenerek kendisi bir resim tasarlasın.

Burada iki noktaya dikkat çekeceğiz. Biz $\mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$'den yola çıktık; ancak herhangi bir $\alpha\in\mathbb{R}$ ile $\mathbb{C}_\alpha$'da da çalışabilir ve bir X_α katmanlısına ulaşabilirdik.

Biz X için bir başka görselleştirme vereceğiz. Küresel izdüşümler hakkında bilgisi olmayan okurların önce Kısım 3.6'ya kısaca bir gözatmasını öneririz. $\mathbb{S}^2$ ile $\mathbb{R}^3$'te orijin merkezli küre yüzeyini, N ve S ile de sırayla onun kuzey ve güney kutup noktalarını gösterelim. Kısım 3.6'da tanımlanan π_N küresel izdüşüm $\mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}$'yi $\mathbb{C}^*$'a topolojik olarak resmeder; dolayısıyla $X = \mathbb{S}^2\setminus\{N,S\}$ alınabilir. Bunu yukarıda yapılana koşut olarak da görebiliriz.

π_N^{-1} dönüşümü $d^+_{-\pi}, d^-_{-\pi}$ yakalarını, Şekil 1.12'de yalınlık açısından tek çizgi ile gösterilen meridyen yakalarına resmeder. Şimdi meridyen yakalarını ayırıp

[34] Bu adlandırmalar izlemeyi zorlaştırabilir. Ancak bir ime veya kavrama farklı anlamlar yüklemek, bunlarla karşılaşıldığında neyin kastedildiğini karıştırmayacak kadar olaya hakim olanlar için sakıncasızdır. Burada çoğu okur için yeni bir durum söz konusudur. Biraz aşağıda tanımlayacağımız X katmanlısının, $\sqrt{\mathbf{z}}$'nin Riemann yüzeyi olarak, her kompleks analiz kitabında bir görselleştirilmesi vardır (biz s. 275'da $\sqrt[3]{\mathbf{z}}$'nin Riemann yüzeyini görselleştirdik). Bu görselleştirmelerde birbirini bir yarıdoğru boyunca kesen iki yüzey yaprağı görürüz. Söylenen şudur: Her ne kadar yüzey yaprakları birbirini bu yarıdoğru boyunca kesiyor gibi görünüyorlarsa da birbirini kesmezler. Aslında *bir* yarıdoğru gördüğümüz yerde *ayrık iki* yarıdoğru vardır. Geometrik olarak görselleştiremediğimiz bu iki yarıdoğruyu analitik olarak verebiliriz. Titizliğimiz bundandır ve analitik olarak iki ayrık yarıdoğru oluşturduktan sonra geometrik olarak bir yarıdoğru görünen yerde iki ayrık yarıdoğru olduğu netlik kazanır.



Şekil 1.12

küre yüzeyimizi deforme ederek ortadaki yarım küreyi elde edelim. Bundan bir örnek daha oluşturalım. Böylece iki yakalı $\mathbb{C}^{\pm}_{k,-\pi}$ tipindeki uzaylarımızın yerini yakalı iki yarım küre alır. Yukarıda elde ettiğimiz X uzayını bu iki yarım kürenin zıt yönlü yakalarını özdeşleyerek elde edilmiş gibi düşünebiliriz. Ancak şimdi ikinci küreyi yüz seksen derece döndürür ve birinci yarım kürenin karşısına getirirsek, tam da özdeşlen yakalar karşı karşıya gelir ve bu yarım küreleri bu yakalar boyunca yapıştırarak biz $\mathbb{S}^2\backslash\{N,S\}$'yi elde ederiz.

Kısım 3.6'da $\mathbb{C}_\infty$'da analiz yapacağız ve bizim için $\mathbb{C}_\infty$ ve $\mathbb{S}^2$ aynı olacak. Bu özdeşleştirmede S güney kutbu orijinle eşleşirken N kuzey kutbu ∞ ile eşleşir. $g(\infty) := \infty$ olarak tanımlarsak, her $w \in \mathbb{C}$ için $g'(w) = 2w$ olduğundan, Teorem 1.8.14 ile $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü her $w \in \mathbb{C}^*$'da yerel biholomorftur. Ancak g fonksiyonu 0'da 0 değerini ve ∞'da ∞ değerini ikinci dereceden alır, dolayısıyla bu noktalarda yerel topolojik değildir! 0 ve ∞ noktaları g'nin dallanma noktalarıdır.

Not 1.9.11. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*_z$ bir sürekli dönüşüm olsun. γ, Tanım 2.2.1 anlamında, $\mathbb{C}^*_z$'da bir *gezi*dir. γ dönüşümünü sürekli $r(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonları ile $\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ olarak verilsin. Bu durumda, $\hat{\gamma}(t) := \sqrt{r(t)}e^{i\frac{\varphi(t)}{2}}$ ile tanımlanan $\hat{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}^*_w$ süreklidir, dd. $\mathbb{C}^*_w$'da bir gezidir ve $g \circ \hat{\gamma} = \gamma$ sağlanır. Ancak γ kapalı iken, dd. $\gamma(a) = \gamma(b)$ iken $\hat{\gamma}$'nın kapalı olması gerekmez. Örneğin $r > 0$ ve herhangi bir $\theta_0 \in \mathbb{R}$ ile $\gamma : [\theta_0, \theta_0 + 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ gezisi $\gamma(t) = re^{it}$ olarak verilsin. γ gezisi $\mathbb{C}_z$ düzlemine, 0-merkezli r yarıçaplı çember üzerindeki $re^{i\theta_0}$ noktasından başlar ve bu çemberi saatin ters yönünde bir kez turlar. Buna karşın $\hat{\gamma}$ gezisi $\mathbb{C}_w$ düzleminde 0-merkezli $\sqrt{r}$ yarıçaplı çember üzerindeki $\sqrt{r}e^{i\theta_0/2}$ noktasından başlar ve bu çember üzerinde $\sqrt{r}\exp\frac{i(\theta_0+2\pi)}{2} = -\sqrt{r}e^{i\theta_0/2}$ noktasına kadar turlar. Şimdi $\mathbb{C}^*$'da $\eta(t) := re^{it}$ ile tanımlanan $\eta : [-\pi, 3\pi] \to \mathbb{C}$ kapalı gezisini alalım. $\mathbb{C}$ düzleminde γ gezisi 0'ın etrafının bir kez turlarken η *iki* kez turlar; ancak bu kez $\hat{\eta}$ kapalıdır. Bu "iki" sayısı Teorem 1.8.14'teki dal sayısından başkası değildir.

log'un Riemann yüzeyi:

(1.55) ve (1.56) eşitlikleri çok değerli **log** fonksiyonundan tek değerli bir log fonksiyonu elde etmek istersek, bunun X ile adlandıracağımız tanım kümesinin nasıl olması gerektiğinin ipucunu verirler. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $\mathbb{C}^{\pm}_{-\pi}$'nin $\mathbb{C}^{\pm}_{m,-\pi}$ ile göstereceğimiz bir örneğini alalım ve $m \neq n$ için $\mathbb{C}^{\pm}_{m,-\pi}$ ve $\mathbb{C}^{\pm}_{n,-\pi}$ ayrık olarak alınsın. Eşitliklerimiz bu katmanları $d^{+}_{m,-\pi} \equiv d^{-}_{m+1,-\pi}$ özdeşlikleriyle birleştirmemizi söyler. Ayrıntı için Altkısım 3.5.4'e bakınız.

Şimdi $\mathbf{z}^w$'nin $\mathbb{C}_\alpha$'daki analitik dalını yine yalın olarak

$$f_\alpha(z) = z^w = \exp(w \log_\alpha z) = \exp[w(\ln|z| + i \arg_\alpha z)]$$

ile gösterelim. $0 < r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a := re^{i\alpha}$ noktasına sol yakadan yaklaştığımıza bunu $z \to a^-$ ile, sağ yakadan yaklaştığımızda $z \to a^+$ ile gösterirsek, $b^- := \lim_{z\to a^-} z^w = \exp w(\ln r + i\alpha)$ ve benzer biçimde $b^+ := \lim_{z\to a^+} z^w = \exp w(\ln r + i(\alpha + 2\pi))$ elde ederiz. Dolayısıyla, $b^+ = b^- \exp 2\pi i w = b^- e^{2\pi i w}$ olur. Bu durumu $f(a^+) = e^{2\pi i w} f(a^-)$ olarak gösterelim. Özetle C_r çemberi üzerinde d^-_α yakasında a^-'den yola çıkıp saat yönünde bir tur attığımızda $(a^+)^w = e^{2\pi i w}(a^-)^w$ olur. $e^{2\pi i w}$ sayısına z^w'nin 0'daki **faz çarpanı** denir. Eğer g fonksiyonu C_r'de sürekli herhangi bir fonksiyonsa gf_α'nın 0'daki faz çarpanı değişmez, yine $e^{2\pi i w}$'dir. Bu irdelemeler $\mathbf{z}^w$'nin $\mathbb{C}_\alpha$'daki tüm analitik dalları için aynen geçerlidir. Faz çarpanımız ancak ve ancak $w \in \mathbb{Z}$ için 1 değerini alır ve bu durumda $b^+ = b^-$ olur. Ancak $w \in \mathbb{Z}$ ise $\mathbf{z}^w$ tek değerlidir; $w = n \in \mathbb{N}$ ise önümüzde $\mathbb{C}$'de holomorf z^n fonksiyonu, $w = -n \in -\mathbb{N}^*$ ise $\mathbb{C}^*$'da holomorf $\frac{1}{z^n}$ fonksiyonu vardır ve hangi α'dan yola çıkarsak çıkalım $f_\alpha(a^-) = a^n = f_\alpha(a^+)$ olur.

Özel olarak $w = \frac{1}{2}$ ise, $f_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{z}$'nin 0'daki faz çarpanı $e^{2\pi i \frac{1}{2}} = -1$'dir. Böylece $\sqrt{a^+} = -\sqrt{a^-}$ olur.

Benzeri bir irdeleme $(z-z_0)^w$'nin bir holomorf dalı için yapılırsa, hangi daldan yola çıkarsak çıkalım, örneğin $\mathbb{C}_{\alpha,z_0}$'daki holomorf dal gibi, bu kez benzer adlandırmalarla $(a^+ - z_0)^w = (a^- - z_0)^w \cdot e^{2\pi i w}$ elde ederiz.

Aşağıdaki bazı problemlerin çözümünde işe yarayacak şu iki basit gerçeği ayrıca belirtmekte yarar var: exp fonksiyonu $l = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = \theta\}$ yatay doğrusunu başlangıç noktası hariç $L(0, e^{i\theta})$ yarıdoğrusuna, buna karşın $l = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a\}$ dikey doğrusunu ise merkezi orijin, yarıçapı e^a olan çembere resmeder. **log**'un holomorf dalları exp fonksiyonunun tersleri olduğu için, tanım alanına düşen $L(0, e^{i\theta})$ yarıdoğrusu parçalarını yatay yarıdoğru parçalarına ve orijin merkezli çemberlerin yay parçalarını ise dikey doğru parçalarına resmeder.

Problemler

Problem 1.9.1. $\mathbf{arccos}\, z = -i\,\mathbf{log}(z + \sqrt{\mathbf{z^2 - 1}}) = -i\,\mathbf{log}(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.9.2. $z = \cos w$ fonksiyonunun w-düzlemindeki $S_{0,\pi}$ dikey şeridini z-düzlemindeki $B := \mathbb{C} \setminus [(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)]$ bölgesine biholomorf resmettiğini gösteriniz. Arccos :=

$(\cos|S_{0,\pi})^{-1}$ fonksiyonuna **arccos**'un **anadalı** denir. Her $x \in (-1,1)$ için $\text{Arccosx} = \arccos \text{x}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.9.3. $\textbf{arctan}\, z = \frac{1}{2i} \textbf{log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.9.4. $w(z) := \frac{1+iz}{1-iz}$ ve $l := i[1,+\infty) \cup i(-\infty,-1]$ olsun. $w(z) \in (-\infty, 0] \Longleftrightarrow z \in l$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.9.5. $l := i[1,+\infty) \cup i(-\infty,-1]$ olmak üzere, tan fonksiyonunun $S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ şeridini biholomorf $\mathbb{C}\backslash l$'ye resmettiğini kanıtlayınız. Ayrıca, $\text{Arctan} := \left(\tan|S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\right)^{-1}$ olmak üzere, bu fonksiyona **arctan**'ın **anadalı** denir. Her $z \in \mathbb{C}\backslash l$ için

$$\text{Arctan}z = \frac{1}{2i}\,\text{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\text{Arctan}x = \arctan x$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.9.6. $\frac{d}{dz}\text{Arctan}z = \frac{1}{1+z^2}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 1.9.7. $a, b \in \mathbb{C}$ ve $a \neq b$ olmak üzere, $\text{Log}\,\frac{z-a}{z-b}$ fonksiyonunun $\mathbb{C}\backslash[a,b]$'de holomorf ve birebir olduğunu gösterip resmini belirleyiniz.

Problem 1.9.8. **arccos** çok değerli fonksiyonunun farklı holomorf dallarının türevlerinin farklı olabileceğini gösteriniz.

Problem 1.9.9. f fonksiyonu $\textbf{arcsin}\, z$'nin bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesindeki holomorf dalı olsun. $f'(z)$'yi hesaplayınız. $\textbf{arcsin}\, z$'nin farklı holomorf dallarının türevleri birbirine eşit midir?

Problem 1.9.10. $\textbf{tanh}^{-1}$'i ve anadalını bulunuz.

2. Kompleks İntegraller: Cauchy Yaklaşımı

2.1 Tek Reel Değişkenli $\mathbb{C}$-Değerli Fonksiyonlar

Bize bir $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verildiğinde bu bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonudur ve $f = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$ olduğundan, aşağıdaki tanım, Tanım 5.3.20'den başkası değildir:

Tanım 2.1.1. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekliyse

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f.$$

Önerme 2.1.2. *$f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun.*

(i) $\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$ *ve* $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

(ii) $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

(iii) $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ *sürekli türevlenebilirse*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\, \varphi', \quad dd. \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt.$$

(iv) $F(x) := \int_a^x f,\ a \leq x \leq b$ *sürekli türevlenebilir ve* $F' = f$.

(v) $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *sürekli türevlenebilirse* $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

(vi) $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$ *ise*

$$\int_a^b f = \int_{a_0}^{a_1} f + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f.$$

(vii) *Her* $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ *sürekli ve* $f_n \overset{[a,b]}{\Longrightarrow} f$ *ise f'de süreklidir ve* $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

(viii) *Her* $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ *sürekli ve* $\sum f_n = f$ *serisi* $[a,b]$*'de düzgün yakınsaksa* $\int_a^b f = \int_a^b \left(\sum f_n\right) = \sum \int_a^b f_n$.

Kanıt. Tüm bunlar, (ii) dışında integralin özelliklerinden çıkar. $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ ve $P = \{t_0, \ldots t_n\}$ ise $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı olmak üzere,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u(t_k)(t_k - t_{k-1}) + i\sum_{i=1}^{n} v(t_k)(t_k - t_{k-1})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_k)(t_k - t_{k-1})\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_k)|(t_k - t_{k-1})$$

elde ederiz. $|f|$ fonksiyonunun da sürekli olduğunu gözetirsek, integralin birinci temel özelliğinden (bkz. Altkısım 5.3.2) $\lim \|P_n\| = 0$ koşulunu sağlayan bir parçalanış dizisi ile yukarıdaki eşitsizlikte limite geçersek,

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b u + i\int_a^b v\right| \leq \int_a^b |f|$$

elde ederiz. □

Not 2.1.3. Önerme 2.1.2(ii)'nin sevilen bir kanıtı şudur. $r := \left|\int_a^b f\right|$ olmak üzere, bir φ ile $\int_a^b f = re^{i\varphi}$, dd. $r = e^{-i\varphi}\int_a^b f$ olduğundan,

$$\begin{aligned} r &= \int_a^b e^{-i\varphi} f = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} f\right) + i\int_a^b \operatorname{Im}\left(e^{-i\varphi} f\right) = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} f\right) \\ &= \left|\int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} f\right)\right| \leq \int_a^b \left|\operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} f\right)\right| \leq \int_a^b \left|e^{-i\varphi} f\right| = \int_a^b |f|. \end{aligned}$$

Bu geçişlerde hep r'nin bir gerçel sayı ve $r \geq 0$ olduğundan yararlanılmıştır. Ancak böyle bir kanıt, akılda tutacağımız bir nedeni olmadığından, biraz sihirbazlık gibi bir şeydir. Buna karşın yukarıda verdiğimiz kanıt okurun kendisinin de kolayca bulacağı ve akılda kalan bir mantığı olan bir kanıttır ve biz bu tür kanıtları yeğleyeceğiz.

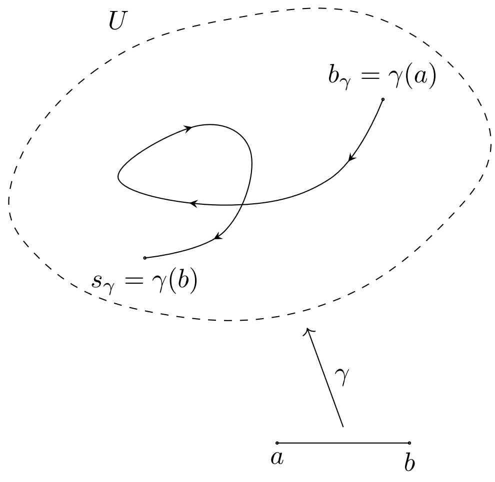
Problemler

Problem 2.1.1. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli ve $t \in [a,b]$ için $F(t) := \int_a^t f$ ise, F'nin türevlenebilir ve $F' = f$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.1.2. $(f_n) \subset \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ ve $f_n \overset{[a,b]}{\Longrightarrow} f$ ise, $\lim \int_a^b f_n = \int_a^b f$ olduğunu gösteriniz. Benzerini düzgün yakınsak $\sum f_n$ serileri için kanıtlayınız.

Problem 2.1.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g : f([a,b]) \to \mathbb{C}$ sürekliyse

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g = \int_a^b (g \circ f) f'$$



Şekil 2.1: U'da bir gezi örneği.

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.1.4. $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ ise, $a > -1$ için $\int_0^1 t^\alpha dt$ yakınsak ve $\left|\int_0^1 t^\alpha dt\right| \leq \frac{1}{1+a}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.1.5. $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ sürekliyse, $f(z) := \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-z} dt$ ile $\mathbb{C} \backslash [a, b]$'de türevlenebilir bir fonksiyon tanımlandığını ve

$$f'(z) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(t - z)^2} dt$$

olduğunu gösteriniz.

2.2 Geziler-Eğriler

Bazı yerleşmiş kavramları değiştirmek doğru olmasa da biz matematik literatüründeki, yanlış anlamalara yol açabilecek "eğri" ve "yol" kavramlarının kullanımlarını, olayı çok daha doğru yansıtan "gezi" kavramı ile değiştirdik. Çünkü bir "gezi" ve gezi sırasında yürünen "yol" çok farklı kavramlardır ve bunları karıştırmak söz konusu olamaz. Sürekli geziler ve bunlarla ilgili bazı kavramlar Tanım 5.2.27'de verilmiştir.

Tanım 2.2.1. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ve $U \subset \mathbb{C}$ olsun[1]. **U'da** bir γ **gezisinden** bir

[1] Burada $a < b$ seçtiğimizi özellikle vurgulayalım. Bu bize hiçbir şey kaybettirmeden, ileride tanımlayacağımız, geziler arasındaki denklik bağlamında $[a, b]$ aralığından, $\alpha < \beta$ olmak üzere, herhangi bir $[\alpha, \beta]$ parametre aralığına geçmemizi sağlayacaktır. Ayrıca, geziler arasında evirmeler incelenirken çoğu yazar $[0, 1] \times [0, 1]$ kapalı aralığında çalışır ve ayrıca belirtmeden bu koşulu varsayar.

sürekli $\gamma : [a,b] \to U$ dönüşümü anlaşılır. $\underline{\gamma} := \operatorname{Im} \gamma = \gamma([a,b])$ kümesine γ gezisinin **yolu** denir. $b_\gamma := \gamma(a)$ noktasına γ gezisinin **başlangıç noktası**, $s_\gamma := \gamma(b)$ noktasına ise γ gezisinin **bitiş noktası** denir[2]. γ fonksiyonu $\mathcal{C}^k$ sınıfındansa gezimiz $\mathcal{C}^k$ sınıfındandır deriz.

U'daki bir gezi elbette aynı zamanda **$\mathbb{C}$'de bir gezi**dir. U kümesindeki $\mathcal{C}^k$-sınıfından gezilerin kümesini $\mathcal{G}^k(U)$ ile göstereceğiz ve $\mathcal{G}^k(\mathbb{C})$ yerine yalın olarak $\mathcal{G}^k$ yazacağız. $\gamma \in \mathcal{C}^0$ bilindiği gibi γ süreklidir demektir. $\mathcal{C}^0$ yerine yalın olarak $\mathcal{C}$ yazacağız. $\gamma^-(t) := \gamma(a+b-t)$, $a \le t \le b$ olarak tanımlanan $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}$ gezisine ise γ gezisinin **tersi** denir[3]. γ'nın birebir olduğu gezilere **basit** geziler (veya **Jordan gezileri**) denir. $s_\gamma = b_\gamma$ ise γ gezisi **kapalıdır**, eğer γ kapalı ve $\gamma|[a,b)$ birebirse γ gezisi **basit kapalıdır** veya bir **kapalı Jordan gezisi**dir denir. Eğer bir $w \in \mathbb{C}$ ile $\gamma(t) \equiv w$ ise, γ'ya bir **sabit gezi** denir; bu geziyi c_w ile gösterelim.

Not 2.2.2. Aslında $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ olmak üzere, kapalı Jordan gezilerinden birebir ve sürekli $\gamma : \mathbb{S}^1 \to U$ dönüşümlerini anlamak çoğu zaman daha uygundur. Biraz ileride rota kavramını tanımlayacağız ve bizim için önemli olan tüm rotasal kavramlar, örneğin ileride tanımlayacağımız γ'nın uzunluğu, $\int_\gamma f$ integralinin değeri veya γ'nın U'da sıfıra evrilebilir olması gibi kavramlar, kapalı geziler için γ'nın başlangıç ve bitiş noktasının seçiminden bağımsızdırlar. Dolayısıyla, bir kapalı gezinin başlangıç (ve aynı zamanda bitiş) noktası olarak $\underline{\gamma}$'nın herhangi bir noktasını seçebiliriz. Bazı durumlarda ayrıca belirtmeden böyle davranacağız.

Diğer yandan, bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}_\infty$ gezisine, $\gamma : [a,b) \to \mathbb{C}$ ve $\gamma(b) = \infty$ olarak resmediliyorsa, $\mathbb{C}$'de sınırsız gezi denir. Bunlar, $\lim_{t\to b} \gamma(t) = \infty$ koşulunu sağlayan $\gamma : [a,b) \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümleri olarak düşünülebilir.

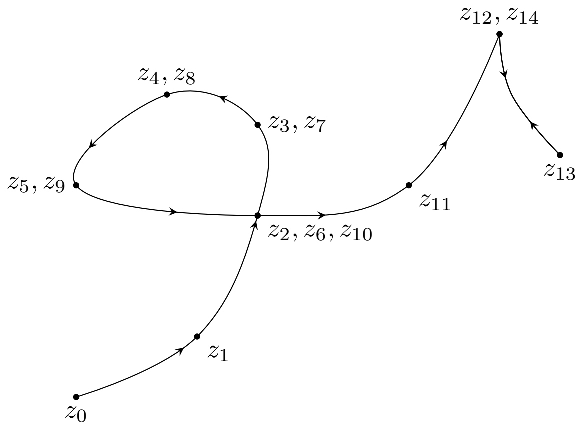
Bizim gezi olarak adlandırdığımız γ fonksiyonlarına genelde **eğri** denir; ancak biz eğri dendiğinde genellikle $\underline{\gamma}$ yolunu anlamaya koşullanmışızdır. Ancak aynı yolda sonsuz farklı biçimde gezinebiliriz. Gezi ismini bu nedenle yeğledik. $[a,b]$ bir zaman aralığı olarak düşünülürse γ gezisi $t = a$ anında U kümesinin $\gamma(a)$ noktasında başlar, $\underline{\gamma}$ yolu üzerinde gezinerek b anında $\gamma(b)$ bitiş noktasında son bulur. Bu bize bir **gezisel sıralama** verir. $z_0, \ldots, z_n \in \underline{\gamma}$ olmak üzere,

$$z_0 \prec \cdots \prec z_n :\Longleftrightarrow \exists t_0 < \cdots < t_n \;\; z_i = \gamma(t_i),\ i = 0, \ldots, n.$$

$\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ olsa bile eğer $t_1 < t_2$ ise $\gamma(t_1) \prec \gamma(t_2)$ olduğuna dikkat ediniz! Örneğin $m = 2$ durumunda üç boyutlu uzayımızda z-eksenini t-zaman ekseni olarak seçersek, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ olmak üzere, $t_1 < t_2$ iken $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ olsa bile daima $(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_1), t_1) \neq (\gamma_1(t_2), \gamma_2(t_2), t_2)$ olur, dd. fiziksel anlamda aynı noktadan farklı zamanlarda geçtiğimizden farklı olaylar söz konusudur. Gezilerimizin filmini çeksek, γ^- gezisinin filmi γ'nın filminin geri sararak oynatılmasıdır.

[2] Gezimizin bitiş noktası, gezimizin son noktası olduğu için $\gamma(b)$'yi s_γ ile gösterdik.

[3] γ^- yerine $-\gamma$ gösterimi de yaygındır. Ancak biz $-\gamma$ gösterimini başka bir anlamda kullanacağız.



Şekil 2.2: Gezilerin net gösterimi.

Gezimizi net olarak görselleştirmek için gerekli gördüğümüz yerde şu yolu izleyeceğiz. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ olmak üzere, bir $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışından yola çıkıp $z_k = \gamma(t_k)$ noktalarını oluşturacağız ve bunları $\underline{\gamma}$ üzerinde işaretleyeceğiz. Gezi sırasında yolumuzda en kısa yoldan z_{k-1}'den z_k'ye geçeceğiz.

Örneğin Şekil 2.2'de okları koymamış olsak da okur gezi hakkında net bir fikre sahip olur; küçük dairemsi yolu saatin ters yönünde iki kez turladığımız, gezimizin bitiş noktasının z_{14} olduğu ve gezimizin sonuna doğru yolumuzun bir kısmında geri dönüş yaptığımız oklar koymasak da hemen anlaşılır. Ancak gezinin okur tarafından doğru anlaşılacağını düşündüğümüz yerlerde yalnızca oklarla yetineceğiz.

Örnek 2.2.3. **1.** $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gezisi

$$\gamma(t) := a + t(b - a)$$

ile tanımlanmış olsun. Bu geziyi $\overrightarrow{ab}$ ile göstereceğiz (bkz. Şekil 2.3). Bu başlangıç noktası a, bitiş noktası b olup a noktasından b noktasına bir doğru üzerinde sabit $b - a$ hızı ile yapılan gezidir. Bu gezinin tersinin

$$\gamma^{-}(t) = a + (0 + 1 - t)(b - a) = b + t(a - b),\ 0 \leq t \leq 1$$

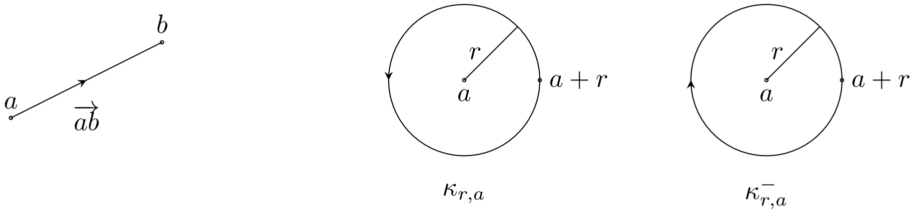
dolayısıyla $\overrightarrow{ba}$ olduğu kolayca görür. $\overrightarrow{ab}$ gezisinin izi düzlemde a ve b noktalarını birleştiren doğru parçasıdır; bunu da $[a, b]$ ile gösterip kapalı aralık olarak adlandırmakta bir sakınca görmeyeceğiz.

2. $a \in \mathbb{C}$ ve $0 < r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\kappa_{r,a} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gezisi

$$\kappa_{r,a}(t) := a + re^{it}$$

olarak tanımlansın (bkz. Şekil 2.3).[4] $\kappa'_{r,a}(t) = ire^{it}$ olduğundan, $n(t) := i\kappa'_{r,a}(t) = -re^{it}$ sağlanır. Dolayısıyla, her $0 \leq \varepsilon < 1$ için $\kappa_{r,a}(t) + \varepsilon n(t) = a + r(1 - \varepsilon)e^{it} \in D_r(a)$ olur.

[4] Bu noktada okura s. 392'ye gözatmasını öneririz.



Şekil 2.3: Temel geziler.

Böylelikle, 5.3.2 altkısmında verilen tanıma göre $\kappa_{r,a} = \boldsymbol{\partial} D_r(a)$, dd. $\kappa_{r,a}$ gezisi tam da $D_r(a)$ dairesinin pozitif yönlenmiş sınır gezisidir ve $D_r(a)$ bu gezinin matematiksel anlamda da solunda kalır. Bu pozitif yönde bir kez yürünmüş a merkezli r yarıçaplı çember gezisidir; bu gezide **saatin ters yönü**nde yürünmüştür denir. Tanım gereği

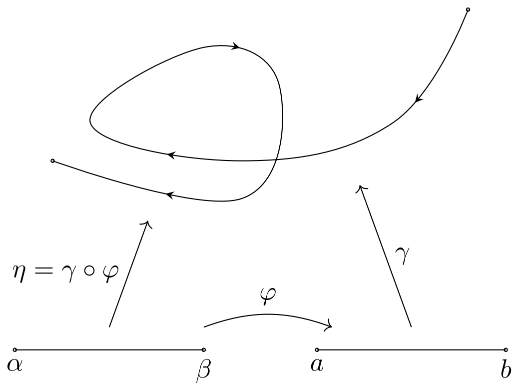
$$\kappa_{r,a}^{-}(t) = \kappa_{r,a}(0 + 2\pi - t) = a + re^{i(2\pi - t)} = a + re^{-it},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dolayısıyla, tam da beklendiği gibi $\kappa_{r,a}$ ile $C_r(a)$ çemberini $a+r$ noktasından başlayarak ve saatin ters yönünde her noktasından tam bir kez geçerek tekrar $a+r$ noktasına dönerken $\kappa_{r,a}^{-}$ ile $C_r(a)$ çemberini $a+r$ noktasından başlayarak ve saat yönünde her noktasından tam bir kez geçerek tekrar $a+r$ noktasına döneriz. Bu gezilerin başlangıç ve bitiş noktaları aynı $a+r$ noktalarıdır; bu geziler basit kapalıdırlar. $\kappa_{r,0}$ ve $\kappa_{r,0}^{-}$ yerine yalın olarak κ_r ve κ_r^{-} yazacağız.

Tanım 2.2.4. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ gezisi verilsin. Eğer $[a,b]$ aralığının bir sonlu $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ parçalanışı her bir $\gamma_\mu := \gamma|[a_{\mu-1}, a_\mu]$ gezisi $\mathcal{C}^k$ sınıfından olabilecek biçimde bulunabiliyorsa ve ancak bu durumda γ bir **parçalı $\mathcal{C}^k$ gezisidir** denir. Bir $U \subset \mathbb{C}$ kümesindeki parçalı $\mathcal{C}^k$ gezilerinin kümesini $\mathcal{G}_p^k(U)$ ile göstereceğiz. $\mathcal{G}_p^k(\mathbb{C})$ yerine yalın olarak $\mathcal{G}_p^k$ yazacağız.

Fonksiyonlar teorisinde bizi yalnızca $k = 0, 1$ durumları, dd. $\mathcal{G}^0(U)$, $\mathcal{G}_p^1(U)$ ve bir de ileride tanımlayacağımız ve $\mathcal{G}^i(U)$ ile göstereceğimiz integral gezileri ilgilendirecektir. $\mathcal{G}^0(U)$ yerine yalın olarak $\mathcal{G}(U)$ yazacağız. Bu gezi kümeleri için $\mathcal{G}_p^1(U) \subset \mathcal{G}^i(U) \subset \mathcal{G}(U)$ bağıntıları geçerlidir. Son zamanlarda yeğlenen yol $\mathcal{G}_p^1(U)$ gezilerinden yola çıkmaktır. $\gamma \in \mathcal{G}_p^1(U)$ ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekliyse $\int_\gamma f$ integrali tanımlanır; ardından Goursat Teoremi kanıtlandıktan sonra bu kez her $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ gezisi (gezileri genişlettik) ve her holomorf $f \in \mathcal{H}(U)$ için (fonksiyon ailesini daralttık) $\int_\gamma f$ tanımlanır. Biz ise, önce her $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ ve her sürekli $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ için $\int_\gamma f$ integralini tanımlayacağız ve Goursat Teoremi'nden sonra ise aynı şeyi yapacağız. Niçin daha dar ve dikine olan $\mathcal{G}_p^1(U)$'den yola çıkmadığımızı açıklamamız gerekir. Bunun nedeni bir yandan $\mathcal{G}^i(U)$'dan yola çıkmak biraz fazla zaman kaybına yol açsa da gerçel analizle olan bağı koparmaz ve en önemlisi bu yolla verilen tanımın matematiğin bütünlüğü içinde kendiliğinden anlaşılır bir mantığı vardır.

İleride her $\gamma \in \mathcal{G}^i$ (veya $\gamma \in \mathcal{G}_p^1$) gezisi ve her sürekli $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ için $\int_\gamma f$ integralini tanımlayacağız. γ gezisi bize $\underline{\gamma}$'da tanımlı $\mathbb{C}$-değerli sürekli fonksi-



Şekil 2.4: Parametre dönüşümü.

yonların $\mathcal{C}(\underline{\gamma})$ uzayında

$$\widetilde{\gamma}(f) := \int_\gamma f$$

ile tanımlanan bir $\mathbb{C}$-doğrusal $\widetilde{\gamma}$ dönüşümünü verecektir. Biz γ, η gibi iki geziye $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\eta}$ ise —integrasyon teorisi açısından— *aynı* gözü ile bakabiliriz; ileride bu düşünce bize yön verecektir.

(i) $\alpha < \beta$ ve $a < b$ olmak üzere, $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bir tam eşleme olsun. φ ve φ^{-1} sürekli ve φ kesin artansa, φ dönüşümüne bir ($\mathcal{C}$-sınıfından (veya **sürekli**)) **parametre dönüşümü** denir.

1. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ve $\eta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ gezileri verilsin. Bir sürekli φ parametre dönüşümü ile $\eta = \gamma \circ \varphi$ ise bu geziler **denktir** diyecek ve bunu $\eta \sim \gamma$ ile göstereceğiz.

$\alpha < \beta$ ve $a < b$ olmak üzere,

$$\varphi(s) := \frac{b-a}{\beta-\alpha}(s-\alpha) + a, \ \ \alpha \le s \le \beta$$

ile bir $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ parametre dönüşümü tanımlanır. Bize bir $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ gezisi ve $\alpha < \beta$ olmak üzere, herhangi bir $[\alpha, \beta]$ aralığı verildiğinde elimizde daima $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı ve γ gezisine denk bir $\gamma \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ gezimiz vardır. Ayrıca, φ her mertebeden sürekli türevlenebilir ve her s için daima $\varphi'(s) > 0$ olduğundan, $\mathcal{G}^k$'de çalışıldığında da parametre aralığını değiştirmekte kullanılabilir.

Özel olarak bir $z \in \mathbb{C}$ ile $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ve $\eta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ gezileri izleri $\{z\}$ olan $\gamma(t) \equiv z$ ve $\eta(s) \equiv z$ sabit gezileri olsunlar. Elbette $\eta \sim \gamma$ olur. Bu nedenle, *izi z noktası olan bir sabit gezi, tanım aralığı ne olursa olsun, c_z ile gösterilecektir.*

Parametre dönüşümleri kesin artandır ve tersleri de parametre dönüşümleridir. $\sim$ bağıntısının düzlemdeki $\mathcal{G}$ geziler kümesinde bir denklik bağıntısı olduğu apaçıktır. $\mathcal{R} := \mathcal{G}/\sim$ olsun. $\gamma \in \mathcal{G}$ gezisinin $\sim$ denklik bağıntısına göre $\mathcal{G}$'de denklik sınıfını $\boldsymbol{\gamma}$ ve γ^-'nin denklik sınıfınıysa $\boldsymbol{\gamma}^-$ ile gösterelim. $\boldsymbol{\gamma}$'ya γ gezisinin **rotası** diyelim.[5] Ayrıca, izi a noktasından oluşan sabit gezinin rotasını ise $\mathbf{c}_a$ ile gösterelim. Her bir $\eta \in \boldsymbol{\gamma}$ bu durumda $\boldsymbol{\gamma}$ rotasını izleyen bir gezidir. Bizim için önemli olan rotalardır ve dolayısıyla rotalar için anlamlı olan kavramlardır. Denklik sınıfları için tanımlanacak kavramlarımız adaylar üzerinden tanımlanır ve dolayısıyla bu kavramların adaydan bağımsız oldukları kanıtlanmalıdır. Örneğin geziler için şimdiye kadar tanımladığımız *gezilerin izi, başlangıç ve bitiş noktaları, basit gezi, kapalı gezi, bir gezinin tersi, gezisel sıralama gibi tüm bu kavramlar denk gezilerde korunan kavramlardır ve böylece* $\boldsymbol{\gamma}$ *denklik sınıfları, yani rotalar için de anlamlı kavramlardır.* $\boldsymbol{\gamma}$ rotamızın izini, başlangıç ve bitiş noktalarını herhangi bir adayının izi, başlangıç ve bitiş noktaları olarak tanımlarsak, bu tanımlar kusursuzdur. Yine $\boldsymbol{\gamma}$ rotamızın herhangi bir adayı kapalı (veya basit) ise $\boldsymbol{\gamma}$ kapalı (veya basittir) deriz ve bu tanımlar da kusursuzdur: $\eta \in \boldsymbol{\gamma}$ olmak üzere,

$$b_{\boldsymbol{\gamma}} := b_\eta,\ s_{\boldsymbol{\gamma}} := s_\eta,\ \underline{\boldsymbol{\gamma}} := \underline{\eta}.$$

$\boldsymbol{\gamma}$'nın tersini herhangi bir adayının tersinin denklik sınıfı olarak tanımlarsak, yine kusursuz bir tanım söz konusudur. Bu tür kavramlara **rotasal** diyelim. Özel olarak $\gamma \in \boldsymbol{\gamma}$ olduğundan, $\boldsymbol{\gamma}$ için tanımlanacak rotasal kavramlarda γ adayını kullanabiliriz ve bu, rotalara girmeyen kitaplarda verilen tanımlara bir koşutluk sağlar. Örneğin yukarıdaki tanımları $b_{\boldsymbol{\gamma}} := b_\gamma$, $s_{\boldsymbol{\gamma}} := s_\gamma$, $\underline{\boldsymbol{\gamma}} := \underline{\gamma}$ olarak da verebiliriz. Biraz yukarıda her zaman keyfi verilen bir $[\alpha, \beta]$ aralığını tanım bölgesi kabul eden bir $\eta \in \boldsymbol{\gamma}$ adayının varlığını gösterdik. Bu nedenle, $\boldsymbol{\gamma}$'nın parametre aralığından söz edilemez, dd. "parametre aralığı" kavramı rotasal değildir. Eğer $\gamma \sim \eta$ ise $\underline{\gamma} = \underline{\eta}$ olmak zorundadır, ayrıca her $c \in \underline{\gamma}$ için, γ ve η gezilerinin c noktasından $\gamma^{-1}(c)$ ve $\eta^{-1}(c)$ *geçiş kümeleri* eş güçlü olmak zorundadır.

Uzlaşma: Aslında $\mathcal{R} = \mathcal{G}/\sim$ **rotalar uzayında** çalışmamız gerekirken —yaygın kullanımla bağı koparmamak adına— biz de genelde $\mathcal{G}$'de çalışacağız ve rotasal kavramlara ilişkin önermeler söz konusu olduğunda $\boldsymbol{\gamma}$'nın adaylarından birinden diğerine serbestçe geçip bize uygun gelenle çalışacağız. Örneğin ileride "γ gezimizin parametre aralığını $[\alpha, \beta]$ olarak seçebiliriz" dediğimizde gerçekte bu "$\boldsymbol{\gamma}$'nın adaylarından parametre aralığı $[\alpha, \beta]$ olan birini seçebiliriz ve bu

[5]Şu benzetme de oldukça iyi fikir verir: Bir A şehrinden bir B şehrine giden uçaklar uçuşları (=gezileri) sırasında belli rotalar izlerler. Her uçuşun A başlangıç noktası, B bitiş noktası, izleyeceği yol, bu yol üzerindeki noktalardan geçiş sırası, uçuş uzunluğu ortaktır. Ancak, uçuşların sürelerinin aynı olması gerekmez ve genelde farklıdır. Yine rota izlenirken herhangi bir noktadaki hız vektörlerinin yönleri aynı olsa da büyüklükleri farklı olabilir.

adayı da γ ile gösterebiliriz" anlamına gelecektir. $\mathcal{G}$'de çalışırken tanımlanan kavramların rotasal olanlarını belirteceğiz.

Not 2.2.5. $\mathcal{G}^k(U)$'da çalışanlar bir $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ parametre dönüşümünden φ'nin bir tam eşleme olmasının yanı sıra φ ve φ^{-1} fonksiyonlarının $\mathcal{C}^k-$sınıfından ve daima $\varphi'(t) > 0$ olmasını anlarlar ve denkliği şöyle tanımlarlar: Eğer γ, η gezileri parçalı $\mathcal{C}^k$ gezileri ve $\mathcal{C}^k$ sınıfından bir $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ parametre dönüşümü ile $\eta = \gamma \circ \varphi$ ise, ve ancak bu durumda η gezisi γ gezisine $\mathcal{C}^k$ sınıfından **denktir** denir ve bu $\eta \overset{\mathcal{C}^k}{\sim} \gamma$ ile gösterilir. Bizim için parametre dönüşümü yukarıdaki tanım anlamında olacaktır.

Not 2.2.6. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ bir $\mathcal{C}^k$ gezisi ise, $\gamma^* := [-b, -a] \to \mathbb{C}$ gezisi $\gamma^*(s) := \gamma(-s)$ olarak tanımlansın. $\varphi : [a, b] \to [-b, -a]$ dönüşümü $\varphi(t) := t - a - b$ olarak tanımlanırsa bu, her $k \geq 0$ için $\mathcal{C}^k$ sınıfından bir parametre dönüşümüdür ve

$$\gamma^*(\varphi(t)) = \gamma(-\varphi(t)) = \gamma(a + b - t) = \gamma^-(t),$$

dd. $\gamma^- = \gamma^* \circ \varphi$ olduğundan, $\gamma^- \overset{\mathcal{C}^k}{\sim} \gamma^*$ elde ederiz, dolayısıyla $\boldsymbol{\gamma}^- = \boldsymbol{\gamma}^*$. Bu nedenle, ayrıca belirtmeseler de, aslında rotaları düşündüklerinden, kimi yazarlar γ gezisinin tersi olarak γ^*'ı seçer ve biz denk gezilere aynı gözüyle bakacağımızdan aynı şeyden söz ediyor olacağız.

$\boldsymbol{\gamma}_1$ rotasının bitiş noktası $\boldsymbol{\gamma}_2$ rotasının başlangıç noktası ise, $\underline{\gamma_1} \cup \underline{\gamma_2}$ yolunda önce $\boldsymbol{\gamma}_1$ rotasını ardından $\boldsymbol{\gamma}_2$ rotasını izlememizi bildiren rotaya, $\boldsymbol{\gamma}_2$ rotasının $\boldsymbol{\gamma}_1$ rotasına **eklenmesi** diyecek ve bunu $\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2$ ile göstereceğiz. Hemen şunu belirtelim ki $\eta_i \in \boldsymbol{\gamma}_i$ adaylarını seçtiğimizde —her ne kadar $s_{\eta_1} = b_{\eta_2}$ olsa da— bunların tanım bölgeleri $[a_i, b_i]$ ise, $b_1 = a_2$ olması gerekmez! Bu durumu biraz genelleyerek rotaların eklenmesinin matematiksel tanımını iki adımda verelim:

(1) $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ olmak üzere, $i = 1, \ldots, n$ için $\gamma_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{C}$ gezileri verilmiş ve $i = 1, \ldots, n-1$ için γ_i'nin bitiş noktası γ_{i+1}'in başlangıç noktası olsun. $[a_0, a_n]$ aralığında $\gamma|[a_{i-1}, a_i] := \gamma_i$ olarak tanımlanan γ gezisini $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n$ ile göstereceğiz, dd. $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n := \gamma$ ve $\boldsymbol{\gamma}_1 \cdots \boldsymbol{\gamma}_n$'den bu gezinin denklik sınıfını anlayacağız, dd.

$$\boldsymbol{\gamma}_1 \cdots \boldsymbol{\gamma}_n := \boldsymbol{\gamma}.$$

(2) $i = 1, \ldots, n$ için $\boldsymbol{\gamma}_i \in \mathcal{R}$ ve $1 \leq i \leq n-1$ için $\boldsymbol{\gamma}_i$'nin bitiş noktası $\boldsymbol{\gamma}_{i+1}$in başlangıç noktası olsun. $\gamma_i \in \boldsymbol{\gamma}_i$ gezilerinin tanım kümelerinin birinci durumdaki gibi olması gerekmez. Gerekirse denk gezilere geçerek bu sağlanır; bir $[\alpha, \beta]$ aralığını, onun uygun bir $\alpha = \alpha_0 < \cdots < \alpha_n = \beta$ parçalanışı ile $\eta_i : [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \to \mathbb{C}$ gezilerini $i = 1, \ldots, n$ için $\eta_i \sim \gamma_i$ olacak biçimde seçebiliriz. Şimdi ilk durumdakine benzer bir durumdayız ve $\eta = \eta_1\eta_2 \cdots \eta_n$ gezisini oluşturabiliriz. $\eta \in \mathcal{G}$ ve

$$\boldsymbol{\gamma}_1 \cdots \boldsymbol{\gamma}_n := \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1 \cdots \boldsymbol{\eta}_n$$

olarak tanımlanır. Eğer $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2 \cdots \boldsymbol{\gamma}_n$ ise, $\boldsymbol{\gamma}$ rotası $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_n$ **rotalarına parçalanmıştır** denir.

$\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2\cdots\boldsymbol{\gamma}_n$tanımlı ise, bunun herhangi bir adayını, birinci durumda olmasak da, $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$ ile göstermekte sakınca görülmez.

Bu tanımdaki ne $[\alpha,\beta]$ aralığı ne de onun $\{\beta_0,\ldots,\beta_n\}$ parçalanışı tek olarak belirli değillerdir. Ancak kolayca görüleceği gibi bir başka $[\alpha',\beta']$ aralığı, onun bir $\{\beta_0',\ldots,\beta_n'\}$ parçalanışı ve $\eta_i':[\beta_{i-1}',\beta_i']\to\mathbb{C}$ gezileri $\gamma_1\sim\eta_1',\ldots,\gamma_n\sim\eta_n'$ olarak verildiğinde $\eta_1'\cdots\eta_n'\sim\eta_1\cdots\eta_n$ olur, dolayısıyla tanımımız kusursuzdur.

Bu geziyi sürdürme işleminde γ_i gezisinin bitiş noktasının γ_{i+1} gezisinin başlangıç noktasına eşit olması gerekmektedir. Bu nedenle, $\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2$ tanımlı iken $\boldsymbol{\gamma}_2\boldsymbol{\gamma}_1$ tanımlı olmayabilir! $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2\cdots\boldsymbol{\gamma}_n$ ise elbette $\boldsymbol{\gamma}^-=\boldsymbol{\gamma}_n^-\cdots\boldsymbol{\gamma}_2^-\boldsymbol{\gamma}_1^-$.

Bazı kaynaklarda şöyle bir yol izlendiğini de görebilirsiniz: $\gamma_k:[a_k,b_k]\to\mathbb{R}^m, k=1,2$ gezileri verilsin ve $\gamma_1(b_1):=\gamma_2(a_2)$ olsun. Bu durumda $\gamma:[a_1,b_1+b_2-a_2]\to\mathbb{C}$ gezisi

$$\gamma(t):=\begin{cases}\gamma_1(t), & a_1\le t\le b_1\\ \gamma_2(t-b_1+a_2), & b_1\le t\le b_1+b_2-a_2\end{cases}$$

olarak tanımlanır. $\gamma_1\gamma_2:=\gamma$ olarak *tanımlanır* ve $\gamma_1\cdots\gamma_n$ tümevarımla tanımlanır. $\eta_1:=\gamma_1$ ve $b_1\le t\le b_1+b_2-a_2$ için $\eta_2(t):=\gamma_2(t-b_1+a_2)$ olmak üzere, $\gamma=\eta_1\eta_2$ ve bizim tanımımızla $\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\eta}_1\boldsymbol{\eta}_2$. Biz $\boldsymbol{\gamma}_1\boldsymbol{\gamma}_2$'nin herhangi bir adayını $\gamma_1\gamma_2$ olarak göstermekte bir sakınca görmeyeceğimizi belirtmiştik, dolayısıyla γ adayımızı da $\gamma_1\gamma_2$ ile gösterebiliriz ve aynı yerdeyiz.

$z_0,z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{R}^m$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{z_0\cdots z_n}:=\overrightarrow{z_0z_1}\,\overrightarrow{z_1z_2}\cdots\overrightarrow{z_{n-1}z_n}$$

gezilerine ve bunlara denk olan gezilere **poligonsal** denir. Karışıklığı önlemek için, gerekirse $\overrightarrow{z_0\cdots z_n}$ yerine $\overrightarrow{z_0,\ldots,z_n}$ yazacağız. Bizi denk geziler ilgilendirdiğinden, $\overrightarrow{z_0\cdots z_n}$ poligonsal gezisinin tanım aralığı olarak istediğimiz bozulmamış bir kapalı aralığı alabiliriz.

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ gezisi verilsin. γ gezisinin $L(\gamma)$ ile göstereceğimiz uzunluğundan ne anlayacağız? Her şeyden önce doğal olarak

$$L(\overrightarrow{z_0\cdots z_n})=\sum_{k=1}^{n}||z_k-z_{k-1}||$$

olmasını isteyeceğiz. $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ durumunda $||z_k-z_{k-1}||=|z_k-z_{k-1}|$ olduğunu anımsayalım. $[a,b]$ aralığının bir $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ parçalanışı verilsin. $z_i:=\gamma(t_i)$ olmak üzere, $b_\gamma=z_0\prec z_1\prec\cdots\prec z_n=s_\gamma$ sağlanır; $P_\gamma:=\{z_0,z_1,\ldots,z_n\}$'ye γ'nın P'ye ilişkin parçalanışı diyelim. $w_0,\ldots,w_n\in\underline{\gamma}$ olmak üzere, $b_\gamma=w_0\prec w_1\prec\cdots\prec w_n=s_\gamma$ koşulunu sağlayan her $\{w_0,\ldots,w_n\}$'e $\boldsymbol{\gamma}$'nın bir parçalanışı diyelim. Şu iki gerçek kolayca görülür: (1) $\boldsymbol{\gamma}$'nın her $\{w_0,\ldots,w_n\}$ parçalanışı $[a,b]$ aralığının bir P parçalanışına ilişkindir, (2) $\eta\sim\gamma$

ise, η'nın parçalanışları ile γ'nın parçalanışları örtüşür. Özetle $\boldsymbol{\gamma}$ rotasının parçalanışlarını, herhangi bir adayının parçalanışları olarak tanımlayabiliriz. Parçalanışlar ve biraz aşağıda tanımlayacağımız bir gezinin uzunluğu da rotasal kavramlardır.

$$\pi_P := \overrightarrow{\gamma(t_0)\cdots\gamma(t_n)} = \overrightarrow{\gamma(t_0)\gamma(t_1)}\cdots\overrightarrow{\gamma(t_{n-1})\gamma(t_n)}$$

olsun. $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere, $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ olduğundan, tanımlayacağımız uzunluk kavramı bir yandan $L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_n)$ koşulunu sağlamalı, diğer yandan, iki nokta arasındaki en kısa yol doğru yol olacağından, $L(\pi_P) \leq L(\gamma)$ sağlanmalıdır. $t_{k-1} < u < t_k$ ise, üçgen eşitsizliğinden

$$L(\overrightarrow{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)}) \leq L(\overrightarrow{\gamma(t_{k-1})\gamma(u)}) + L(\overrightarrow{\gamma(u)\gamma(t_k)})$$

olur. Bunun bir sonucu olarak, $\mathfrak{P}$ yine $[a, b]$ aralığının tüm parçalanışlarının kümesini göstermek üzere, $P, Q \in \mathfrak{P}$ ve $P \subset Q$ ise, $L(\pi_P) \leq L(\pi_Q)$ olur. Bu irdelemeler bizi aşağıdaki tanıma götürür:

Tanım 2.2.7. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ gezisi verilsin.

$$L(\gamma) := \sup_{P\in\mathfrak{P}} L(\pi_P) = \sup_{P\in\mathfrak{P}} \sum_{k=1}^{n} ||\gamma\,(t_k) - \gamma\,(t_{k-1})\,||$$

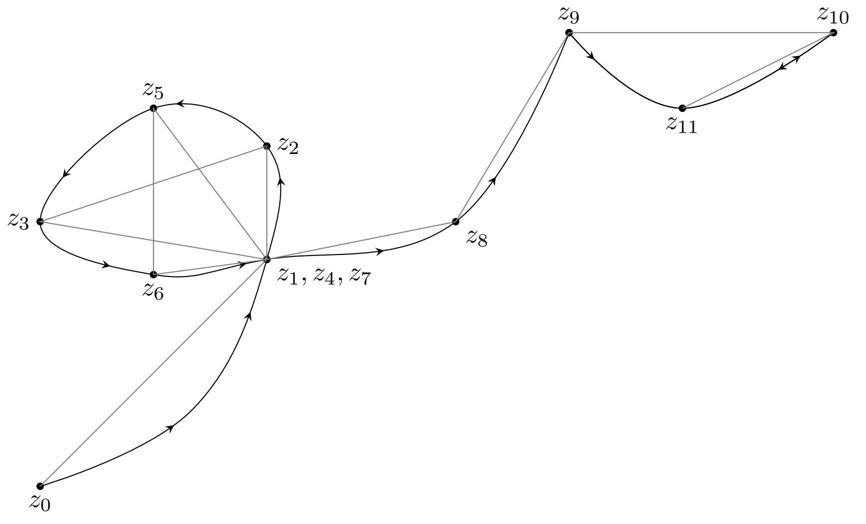
olarak tanımlansın. $L(\gamma) < +\infty$ ise, γ gezisi bir **integral gezisidir** denir ve bu durumda $L(\gamma)$ gerçel sayısına γ gezisinin **uzunluğu** denir[6]. İntegral gezilerinin kümesini $\mathcal{G}^i$ ile bunlardan izi U kümesinde olanların kümesini $\mathcal{G}^i(U)$ ile göstereceğiz.

$L(\gamma)$'ya γ'nın **değişimi** de denir; bu adlandırmayla integral gezileri **sınırlı değişimli** gezilerdir. $\gamma \sim \eta$ ise $L(\gamma) = L(\eta)$ olduğu apaçıktır, dd. *sınırlı değişimli ve uzunluk kavramı rotasaldır* ve $L(\boldsymbol{\gamma}) := L(\gamma)$ tanımı kusursuzdur. $\underline{\gamma}$'nın geometrik uzunluğu ile gezinin $L(\gamma)$ uzunluğu farklı kavramlardır. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{11} = b$ olmak üzere, $\gamma_1 := \gamma|[t_0, t_1]$, $\gamma_2 := \gamma|[t_1, t_4]$, $\gamma_3 := \gamma|[t_4, t_7]$, $\gamma_4 := \gamma|[t_7, t_{10}]$ ve $\gamma_5 := \gamma|[t_{10}, t_{11}]$ olsunlar. Şekil 2.5'te $z_i = \gamma(t_i)$ gösterimiyle bunu örnekledik. Bu durumda $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_5$ ve biraz ileride de belirtildiği gibi $L(\gamma) = \sum_{i=1}^{5} L(\gamma_i)$ ancak $\underline{\gamma}$ yolunun geometrik uzunluğu $L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + L(\gamma_4)$'tür. Gezimizin uzunluğu yolumuzun uzunluğundan $L(\gamma_3) + L(\gamma_5)$ kadar fazladır.

Not 2.2.8. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, (2.2.7) tanımında *herhangi bir* $\gamma : [a, b] \to X$ dönüşümü ile

$$L(\gamma) := \sup_{P\in\mathfrak{P}} L(\gamma_P) = \sup_{P\in\mathfrak{P}} \sum_{k=1}^{n} d(\gamma(t_k), \gamma(t_{k-1}))$$

[6] γ gezisinin uzunluğu ile $\underline{\gamma}$ yolunun uzunluğu ayrı kavramlardır. Örneğin $\underline{\gamma}$ yolu bir $C_r(a)$ çemberiyse, bu çemberin uzunluğu $2\pi r$'dir; buna karşın $L(\gamma)$, biraz ileride örneklediğimiz gibi çok değişik değerler alabilir.



Şekil 2.5: Gezi uzunluğu.

tanımından yola çıkabiliriz. $L(\gamma) < +\infty$ ise γ dönüşümü *sınırlı değişimlidir* denir. $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ olmak üzere, $V_\alpha^\beta(\gamma) := L(\gamma|[\alpha, \beta])$'ya γ'nın $[\alpha, \beta]$ **aralığındaki değişimi** denir. Özel olarak $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ ise kolayca görüleceği gibi γ'nın sınırlı değişimli olması her bir γ_i'nin sınırlı değişimli olmasına denktir. Her tekdüze (monoton) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı değişimlidir ve $L(\gamma) = V_a^b(\gamma) = |\gamma(b) - \gamma(a)|$. Dolayısıyla, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ bir gezi ve her bir γ_i tekdüze ise, γ bir integral gezisidir.

Yine tanımdan kolayca görüleceği gibi $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ ve $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun bir integral gezisi olması için gerek ve yeter koşul her bir γ_k'nın bir integral gezisi olmasıdır ve bu durumda

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_n).$$

Örnek 2.2.9. Her sürekli γ'nın bir integral gezisi olması gerekmez. Örneğin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sürekli gezisi $\gamma(0) := 0$ ve $0 < x \leq 1$ içinse $\gamma(x) := x \sin \frac{1}{x}$ olarak tanımlansın. $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, $x = \frac{1}{n\pi}$ ise $\gamma(x) = 0$ ve $x = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ise $\gamma(x) = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ olur. Harmonik seri ıraksak olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{m} \left| \gamma\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) - \gamma\left(\frac{1}{n\pi}\right) \right| = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

toplamları üstten sınırlı olamazlar!

Teorem 2.2.10. (i) *$\mathcal{C}^1$ sınıfından her $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ gezisi sonlu uzunlukludur ve*

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\| \gamma' \right\|.$$

(ii) *$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sürekli ve bir $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ parçalanışı için* *her* $\gamma_k := \gamma|[a_{k-1}, a_k] \in \mathcal{C}^1$ *ise* γ *sonlu uzunlukludur ve*

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_n).$$

Kanıt. (i) $[a,b]$ aralığının her $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışı için (5.3.21) ile

$$L(\pi_P) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma' \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'\| = \int_a^b \|\gamma'\|,$$

dolayısıyla $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'\|$ olur. Şimdi ters yönü görelim:

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. γ' düzgün sürekli olduğundan, bir $\delta > 0$ sayısı

$$\forall s, t \in [a,b] \ \big(|s-t| < \delta \Longrightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| < \varepsilon\big)$$

olacak biçimde seçilebilir. $[a,b]$'nin $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışı için $\|P\| < \delta$ olsun. $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$ olmak üzere, her $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ için $\|\gamma'(t)\| \leq \|\gamma'(t_i)\| + \varepsilon$ ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'\| \leq \|\gamma'(t_i)\| \Delta t_i + \varepsilon \Delta t_i &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\gamma' + \gamma'(t_i) - \gamma'\big) \right\| + \varepsilon \Delta t_i \\
&\leq \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma' \right\| + \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \big(\gamma'(t_i) - \gamma'\big) \right\| + \varepsilon \Delta t_i \\
&\leq \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + \varepsilon \Delta t_i + \varepsilon \Delta t_i
\end{aligned}$$

ve bunları $i = 1, \ldots, n$ için toplayarak

$$\left\| \int_a^b \gamma' \right\| \leq L(\pi_P) + 2\varepsilon(b-a) \leq L(\gamma) + 2\varepsilon(b-a)$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, bu bize $\left\| \int_a^b \gamma' \right\| \leq L(\gamma)$ eşitsizliğini verir.

(ii) doğrudan (i)'den çıkar. □

Her şeyden önce $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))$ bir $\mathcal{C}^1$ gezisiyse,

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'|| = \int_a^b \sqrt{{\gamma'_1}^2 + \cdots + {\gamma'_m}^2}$$

gerçel analizden de bildiğimiz bir gerçektir. Özel olarak $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilirse $\gamma(x) := (x, f(x))$ ile tanımlanan $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gezisi $\mathcal{C}^1$ sınıfındandır ve uzunluğu $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$ olur.

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ ve $\kappa_{r,c}^2 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ gezileri sırasıyla $a, b \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere, $\gamma(t) = a + t\,(b-a)$ ve $c \in \mathbb{R}^2$, $0 < r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\kappa_{r,c}^2(t) = c + re^{it}$

olarak tanımlanan geziler olsunlar. Her üç $\gamma, \kappa_{r,c}, \kappa_{r,c}^2$ gezisi de $\mathcal{C}^1$ sınıfından olduğundan,

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^1 \left\|\gamma'\right\| = \int_0^1 \|b-a\| = \|b-a\|\,, \\
L(\kappa_{r,c}) &= \int_0^{2\pi} \left\|\kappa_{r,c}'\right\| = \int_0^{2\pi} \left|ire^{it}\right| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r, \\
L(\kappa_{r,c}^2) &= \int_0^{4\pi} \left\|(\kappa_{r,c}^2)'\right\| = \int_0^{4\pi} \left|ire^{it}\right| dt = \int_0^{4\pi} r dt = 4\pi r
\end{aligned}$$

elde ederiz. Gezilerin uzunluğu kavramı sezgilerimizle örtüşür. $\kappa_{r,c}$ ile $C_r(c)$ çemberinde bir kez turlarken $\kappa_{r,c}^2$ ile iki kez turlarız; $\kappa_{r,c}$ ve $\kappa_{r,c}^2$ gezilerinin yolları aynı $C_r(c)$ çemberi olmasına karşın $\kappa_{r,c}^2$ gezisinin uzunluğu $\kappa_{r,c}$ gezisinin uzunluğunun iki katıdır. Rotalara geçersek $\boldsymbol{\kappa_{r,c}^2} = \boldsymbol{\kappa_{r,c}\kappa_{r,c}}$ olduğundan, bu daha da net anlaşılır.

Problemler

Problem 2.2.1. $b \in \mathbb{C}$ için $\gamma(t) := e^{it} + be^{-it},\ 0 \leq t \leq 2\pi$ gezilerini betimleyiniz.

Problem 2.2.2. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ve $\eta : [-1,1] \to \mathbb{C}$ gezileri $\gamma(t) = t + it$ ve $\eta(t) = t^2 + it^2$ olsunlar. $\underline{\gamma} = \underline{\eta}$ olduğunu, ancak bu gezilerin denk olmadığını gösteriniz. $L(\gamma)$ ve $L(\eta)$'yı hesaplayınız. γ^- ve η^- gezilerinin açık ifadelerini veriniz.

Problem 2.2.3. $w \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ve $\eta : [c,d] \to \mathbb{C}$ gezileri $\gamma(t) \equiv w$ ve $\eta(s) \equiv w$ olarak verilmişlerse, $\gamma \sim \eta$ olduğunu gösteriniz. Sonuç: c_w sabit gezisinin tanım aralığını herhangi bir bozulmamış aralık seçebiliriz.

Problem 2.2.4. $a, b > 0$ ve $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ ise, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gezisinin izini belirleyiniz.

Problem 2.2.5. $a, b > 0$ ve $t \in \mathbb{R}$ için $\gamma(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$ ise, $\gamma(\mathbb{R})$ görüntüsü nedir?

Problem 2.2.6. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir Lipschitz fonksiyonu ise, dd. bir $M > 0$ sayısı ile her $s, t \in [a,b]$ için $|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq M|s-t|$ geçerliyse, γ'nın sınırlı değişimli olduğunu gösteriniz.

Problem 2.2.7. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-t)e^{2\pi i/(1-t)}, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. γ'nın bir gezi, ancak bir integral gezisi olmadığını gösteriniz.

Problem 2.2.8. Teorem 2.2.10'dan $\mathcal{C}^1$ sınıfından her γ gezisinin bir integral gezisi olduğunu biliyoruz. Türevlenebilir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$'nin bir integral gezisi olması gerekmez! Örneğin γ :

$[0,1] \to \mathbb{C}$ gezisi $\gamma(0) := 0$ ve $0 < x \leq 1$ için $\gamma(t) := \big(t, t^2\cos(\pi/t^2)\big)$ ise, γ'nın türevlenebilir, ancak bir integral gezisi olmadığını gösteriniz.

Problem 2.2.9. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ gezisi $\mathcal{C}^1$-sınıfından ve pürüzsüz olsun, dd. daima $\gamma'(t) \neq 0$ olsun. $l = L(\gamma)$ olmak üzere, $\varphi(t) := \int_0^t \gamma'(u)du$ ile tanımlanan $\varphi : [a,b] \to [0,l]$, $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir parametre dönüşümüdür. $\eta := \gamma \circ \varphi^{-1}$ gezisi γ gezisine denktir ve daima $|\eta'(s)| = 1$ geçerlidir; diferansiyel geometride η parametrelenmesi yeğlenir. Savları kanıtlayınız.

Problem 2.2.10. Bir $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesi için aşağıdakilerin denk olduğunu gösteriniz:

(a) U'nun herhangi iki noktası U'da, kenarları eksenlere koşut bir poligonla birbirine bağlanabilir.

(b) $\nabla f = 0$ koşulunu sağlayan her $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ sabittir.

(c) U bağlantılıdır.

2.3 Stieltjes İntegrali

Bu kısımda $-\infty < a < b < +\infty$ varsayılacak, $\mathbb{K}$ ise $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olacaktır. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}$ gezisi daima sınırlı değişimli bir fonksiyon, dd. bir integral gezisi olacaktır. Biz bu kısımda "sınırlı değişimli" sözcüğünü yeğleyeceğiz. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ olmak üzere, $P = \{t_0, \ldots, , t_n\}$ sonlu kümesine $[a,b]$ kapalı aralığının bir **parçalanışı** ve

$$\|P\| := \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$$

sayısına ise P parçalanışının **normu** denir. $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$ olmak üzere, parçalarından τ_k ögeleri seçilmiş P parçalanışını kısaca $P(\tau)$ ile gösterelim ve buna bir **seçili parçalanış** diyelim. $\tau_k = t_k$ özel durumunda $P(\tau)$ yerine yalın olarak P yazalım. $[a,b]$ aralığının parçalanışlarının kümesini yine $\mathfrak{P}$ ile, seçili parçalanışlarının kümesini ise $\mathfrak{P}^s$ ile göstereceğiz (Altkısım 5.3.2'ye bkz.). $P, Q \in \mathfrak{P}$ ve $P \subset Q$ ise, Q parçalanışı P parçalanışının bir **incelmişidir** denir; bu durumda elbette $\|Q\| \leq \|P\|$. Her $\delta > 0$ için $\mathfrak{P}_\delta := \{P \in \mathfrak{P} \mid \|P\| < \delta\}$ ve $\mathfrak{P}^s_\delta := \{P \in \mathfrak{P}^s \mid \|P\| < \delta\}$ olsun.

$f : [a,b] \to \mathbb{K}$ ve $P(\tau) \in \mathfrak{P}^s$ için

$$S(f, P(\tau), \gamma) := \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$$

olarak tanımlansın.

Uyarı: γ gezisi $\underline{\gamma}$ yolunda geri dönüşler yapabileceğinden, yolumuzdaki $\gamma(t_k)$ noktası daha önce geçtiğimiz bir nokta, hatta $\gamma(t_{k-1})$ noktası bile olabilir!

Tanım 2.3.1. $f, \gamma : [a,b] \to \mathbb{K}$ ve $I \in \mathbb{K}$ olsun. Ancak ve ancak

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall P(\tau) \in \mathfrak{P}^s_\delta \quad |S(f, P(\tau), \gamma) - I| < \varepsilon$$

olması durumunda

$$\int_a^b f d\gamma := I =: \lim_{\|P\|\to 0} S(f, P, \gamma)$$

olarak tanımlanır ve $\int_a^b f d\gamma$ sayısına f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında γ'ya göre **Stieltjes integrali** denir.

Not 2.3.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ve $\gamma(t) \equiv t$ özel durumunda $\int_a^b f d\gamma$ bilindik $\int_a^b f(t)dt$ Riemann integraline dönüşür.

Önsav 2.3.3. *$\gamma : [a, b] \to \mathbb{K}$ sınırlı değişimli, $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ ise $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı olsun. Her $[t_{k-1}, t_k]$ aralığında f fonksiyonunun salınımı[7] σ sayısından küçük olsun. Bu koşullarda $P \subset Q$ olmak üzere, her seçili $P(\tau), Q(\tau')$ için*

$$\left|S(f, P(\tau), \gamma) - S(f, Q(\tau'), \gamma)\right| < \sigma L(\gamma).$$

Kanıt. $z_i := \gamma(t_i)$ olsun. $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı Q'daki yeni noktalarla $t_{k-1} = t'_{k0} < t'_{k1} < \cdots < t'_{kp_k} = t_k$ olarak parçalanmış ve $z'_{kj} := \gamma(t'_{kj})$ olsun. $L := L(\gamma)$ ve $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere, $L_k = L(\gamma_k)$ olsun. τ_k ve τ'_{kj} seçili noktalarımız olmak üzere, $z_k - z_{k-1} = \sum_{j=1}^{p_k}(z'_{kj} - z'_{k,j-1})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d_k &:= f(\tau_k)(z_k - z_{k-1}) - \sum_{j=1}^{p_k} f(\tau'_{kj})(z'_{kj} - z'_{k,j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{p_k}[f(\tau_k) - f(\tau'_{kj})](z'_{kj} - z'_{k,j-1}) \end{aligned}$$

ve böylece

$$|d_k| < \sigma \sum_{j=1}^{p_k} \left|z'_{kj} - z'_{k,j-1}\right| \leq \sigma L_k$$

olur ve buradan

$$\left|S(f, P(\tau), \gamma) - S(f, Q(\tau'), \gamma)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} d_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |d_k| < \sigma \sum_{k=1}^{n} L_k = \sigma L$$

elde edilir. □

[7]"salınım" ve ω_f, $\omega_f(\sigma)$ kavramları için 5.2.2 altkısmına bakınız.

Teorem 2.3.4. *$\gamma : [a,b] \to \mathbb{K}$ sınırlı değişimli ise, her sürekli $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ fonksiyonu γ'ya göre $[a,b]$'de Stieltjes integrallenebilir ve*

$$\left| \int_a^b f d\gamma \right| \leq \|f\|_{[a,b]} L(\gamma). \tag{2.1}$$

Ayrıca, $\lim \|P_n\| = 0$ *koşulunu sağlayan her (P_n) parçalanış dizisi için, τ ara noktalarının seçiminden bağımsız olarak*

$$\int_a^b f d\gamma = \lim_{n\to+\infty} S(f, P_n(\cdot), \gamma).$$

Sonuç 2.3.5. *Sürekli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$'de Riemann integrallenebilir.*

Kanıt. $L(\gamma) = 0$ ise, dd. γ tek noktadan oluşuyorsa açıkça her $P(\tau)$ için $S(f, P(\tau), \gamma) = 0$ olduğundan, $\exists \int_a^b f d\gamma = 0$. Şimdi $L := L(\gamma) > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin.

(1) f fonksiyonu $[a,b]$'de düzgün sürekli olduğundan, bir $\delta > 0$ sayısı $\omega_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{4L}$ olacak biçimde seçilebilir. $P, Q \in \mathfrak{P}_\delta$ keyfi verilsinler. R ise P ve Q'nun bir ortak incelmişi, örneğin $R = P \cup Q$ olmak üzere, ara noktalar nasıl seçilmiş olursa olsunlar, Önsav 2.3.3'ten

$$\begin{aligned} |S(f,P,\gamma) - S(f,Q,\gamma)| &\leq |S(f,P,\gamma) - S(f,R,\gamma)| \\ &\quad + |S(f,R,\gamma) - S(f,Q,\gamma)| < 2\frac{\varepsilon}{4L}L = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

olur.

(2) $\delta > 0$ sayımız (1)'deki olsun. Şimdi $P_n \in \mathfrak{P}^s$, $\lim \|P_n\| = 0$ ve $\alpha_n := S(f, P_n(\cdot), \gamma)$ olsun. Bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $\|P_n\| < \delta$ olacak biçimde seçilirse (2.2) ile

$$\forall n, m \geq n_0 : |\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Dolayısıyla, $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ bir Cauchy dizisidir ve yakınsaktır. $I := \lim \alpha_n$ olsun. n_1 doğal sayısı her $n \geq n_1$ için $|\alpha_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçilsin. $n_* := \max\{n_0, n_1\}$ olsun. Her $P \in \mathfrak{P}^s_\delta$ için

$$|S(f, P(\cdot), \gamma) - I| \leq |S(f, P(\cdot), \gamma) - \alpha_{n_*}| + |\alpha_{n_*} - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Böylece

$$\lim_{n\to+\infty} S(f, P_n(\cdot), \gamma) = I = \lim_{\|P\|\to 0} S(f, P, \gamma) = \int_a^b f d\gamma.$$

(3) α_n sayıları (2)'dekiler olmak üzere, her n için $|\alpha_n| \leq \|f\|_{[a,b]} L(\gamma)$ ve $I = \lim \alpha_n$ olduğundan,

$$\left| \int_a^b f d\gamma \right| = |I| = \lim |\alpha_n| \leq \|f\|_{[a,b]} L(\gamma).$$

Sonuç için $\gamma(t) \equiv t$ alınız. □

Not 2.3.6. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ ve P ise $[a,b]$'nin bir parçalanışı olsun. $\gamma(t) \equiv t$ olduğunda $S(f,P,\gamma)$ yerine yalın olarak $S(f,P)$ yazalım. Elbette

$$S(f,P) = S(\operatorname{Re} f, P) + iS(\operatorname{Im} f, P) = S(u,P) + iS(v,P)$$

olur. f sürekli olsun; bu durumda u ve v de süreklidirler. $(P_n) \subset \mathfrak{P}$ dizisi $\lim \|P_n\| = 0$ koşulunu sağlasın. $\alpha_n := S(f,P_n)$, $a_n := \operatorname{Re} \alpha_n = S(u,P_n)$ ve $b_n := \operatorname{Im} \alpha_n = S(v,P_n)$ olmak üzere,

$$I = \int_a^b f(t)dt = \lim \alpha_n = \lim a_n + i \lim b_n = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Bu sonuç, (2.1.1) tanımıyla örtüşür.

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir integral gezisi olsun. $\varphi := \operatorname{Re} \gamma$ ve $\psi := \operatorname{Im} \gamma$ fonksiyonları da integral gezileridir. $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$ olmak üzere, her $P\,(\tau)$ seçili parçalanış için $f(\tau_k)(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))$ ifadesi u, v, φ ve ψ türünden yazılırsa kolayca

$$S(f,P,\gamma) = S(u,P,\varphi) - S(v,P,\psi) + i[S(u,P,\psi) + S(v,P,\varphi)]$$

elde edilir. Bu bize aşağıdaki önermeyi verir:

Önerme 2.3.7. *$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir integral gezisi ve $\gamma = \varphi + i\psi$ ise, her sürekli $f = u + iv : [a,b] \to \mathbb{C}$ için*

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b u d\varphi - \int_a^b v d\psi + i \left[\int_a^b u d\psi + \int_a^b v d\varphi \right]. \tag{2.3}$$

(2.3) akılda şu şekilde tutulabilir: $f = u + iv$ ve $\gamma = \varphi + i\psi$ için biçimsel olarak $d\gamma = d\varphi + id\psi$ yazıp kompleks sayıları çarpar gibi

$$f d\gamma = (u + iv)(d\varphi + id\psi) = u d\varphi - v d\psi + i[u d\psi + v d\varphi]$$

ifadesine ulaşılır. Her iki tarafa $\int_a^b$ konur ve sağdaki dağıtılır.

Şimdi γ bir $\mathcal{C}^1$ gezisi olduğunda önemli bir teorem vereceğiz. Bu durumda $\int_a^b f d\gamma$ Stieltjes integrali $\int_a^b f(t)\gamma'(t)dt$ Riemann integraline dönüşür.

Teorem 2.3.8. *$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir parçalı $\mathcal{C}^1$ gezisiyse, her sürekli $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ için*

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f\gamma' = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt. \tag{2.4}$$

Kanıt. $\gamma = \varphi + i\psi$ fonksiyonun parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından olması φ ve ψ fonksiyonlarının parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından olması demektir. Bu ve Önerme 2.3.7'den dolayı, (2.4) formülünü $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^1$ sınıfından ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli iken kanıtlamak yeterlidir. γ ve f böyle olsunlar.

$P(\tau)$ seçili parçalanış verilmiş olsun. γ fonksiyonu her $[t_{k-1}, t_k]$ aralığında sürekli türevlenebilir olduğundan, bir $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) = \gamma'(t'_k)(t_k - t_{k-1})$$

olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda

$$S(f, P(\tau), \gamma) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\gamma'(t'_k)(t_k - t_{k-1})$$

dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\left|S(f, P(\tau), \gamma) - S(f\gamma', P(\tau))\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)[\gamma'(t'_k) - \gamma'(\tau'_k)](t_k - t_{k-1})\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k)| \cdot |\gamma'(t'_k) - \gamma'(\tau'_k)|(t_k - t_{k-1}) \\
&\leq \|f\|_{[a,b]}\, \omega_{\gamma'}(\|P\|)\,(b-a)\,.
\end{aligned}$$

γ' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli olduğundan, $\lim_{\|P\|\to 0} \omega_{\gamma'}(\|P\|) = 0$ elde edilir. Böylece, (2.3.4) ile

$$\int_a^b f d\gamma = \lim_{\|P\|\to 0} S(f, P(\tau), \gamma) = \lim_{\|P\|\to 0} S(f\gamma', P(\tau)) = \int_a^b f\gamma'$$

olur. □

Not 2.3.9. Stieltjes integralinin tanımından kolayca görülebilecek bazı gerçekleri sıralayalım: $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $\gamma, \eta : [a,b] \to \mathbb{C}$ sınırlı değişimli olmak üzere:

1. $a < c < b$ ise, $\int_a^b f d\gamma = \int_a^c f d\gamma + \int_c^b f d\gamma$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $\int_a^b (\alpha f \pm \beta g)\, d\gamma = \alpha \int_a^b f d\gamma \pm \beta \int_a^b g d\gamma$.
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $\int_a^b f d\,(\alpha\gamma + \beta\eta) = \alpha \int_a^b f d\gamma + \beta \int_a^b f d\eta$.
4. $a = a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = b$ ve $\gamma_k := \gamma|[a_{k-1}, a_k]$ ise —ki bu durumda $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ olacaktır—,
$$\int_a^b f d\gamma = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f d\gamma_k$$
5. $(f_n) \subset \mathcal{C}[a,b]$ ve $f_n \overset{[a,b]}{\Longrightarrow} f$ ise $\int_a^b f d\gamma = \lim \int_a^b f_n d\gamma$.

Burada (5) için (2.1)'in kullanılacağını belirtmekle yetineceğiz. Diğerleri doğrudan tanımdan çıkar.

Teorem 2.3.10. *$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ parçalı $\mathcal{C}^1$ sınıfından ve bir $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ parçalanışı için her bir $\gamma_k := \gamma|[a_{k-1}, a_k]$ gezisi $\mathcal{C}^1$ sınıfından olsun. Bu durumda, her sürekli $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ için*

$$\int_a^b f d\gamma = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\gamma'(t)dt.$$

Kanıt. Doğrudan (2.3.8) ve (2.3.9) 4.'ten çıkar. □

Problemler

Problem 2.3.1. Not 2.3.9'daki önermeleri kanıtlayınız.

2.4 Gezisel İntegraller

Tanım 2.4.1. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ bir integral gezisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekliyse,

$$\int_\gamma f \equiv \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b (f \circ \gamma)d\gamma$$

sayısına f fonksiyonunun γ **gezisi boyunca integrali** denir.

Veriler tanımdaki gibi olmak üzere, $P = \{t_0, \dots, t_n\}$, $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı olsun. $z_k := \gamma(t_k)$ ve $\xi_k = \gamma(\tau_k)$ için

$$S(f \circ \gamma, P(\tau), \gamma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

olduğundan,

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \tag{2.5}$$

sağlanır. Stieltjes integraline girmeyen kitaplarda (2.5), eğer limit varsa $\int_\gamma f$'nin tanımı olarak seçilir. Bu ifade bize Riemann integralinin tanımını anımsatmaktadır. $\underline{\gamma}$ yolunda γ gezisi ile gezinirken f fonksiyonun değerleri ile bir $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$ toplaması yapıyoruz. γ'nın tanımladığı sıralamayla $z_0 \preceq \xi_0 \preceq z_1 \preceq \xi_1 \preceq \cdots \preceq \xi_n \preceq z_n$ olduğunu biliyoruz; ancak bu sıralama $i \neq j$ için $z_i = z_j$, $z_i = \xi_j$ veya $\xi_i = \xi_j$ olmasını dışlamaz. Aslında γ ve P parçalanışından yola çıkmak yerine $\boldsymbol{\gamma}$ rotasından ve onun $z_0 \preceq z_1 \preceq \cdots \preceq z_n$ parçalanışları ve $z_k \preceq \xi_k \preceq z_{k+1}$ koşulunu sağlayan ara noktalarla çalışmak daha yalın ve uygundur.

Not 2.4.2. Bazen yukarıdaki (2.5) eşitliğinde, sağdaki $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$ toplamı yerine $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\overline{z_k} - \overline{z_{k-1}})$ alarak

$$\int_\gamma f(z)\overline{dz} := \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\overline{z_k} - \overline{z_{k-1}})$$

integrali tanımlanır. Ancak $\overline{\gamma}(t) := \overline{\gamma(t)}$, $g(\overline{z}) := f(z)$, $w_k = \overline{z_k}$ ve $\eta_k := \overline{\xi_k}$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\overline{z_k} - \overline{z_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n} g(\eta_k)(w_k - w_{k-1})$$

olduğundan, $\int_\gamma f(z)\overline{dz} = \int_{\overline{\gamma}} g(w)dw$ elde ederiz. Dolayısıyla, $\int_\gamma f(z)dz$ tipinde integralleri incelemek yeterlidir.

Ayrıca, (2.5)'te $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$ yerine $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|z_k - z_{k-1}|$ alarak

$$\int_\gamma f ds \equiv \int_\gamma f\,|dz| := \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,|z_k - z_{k-1}|$$

integrali tanımlanır.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bir $\mathcal{C}^1$ gezisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekliyse, (2.3.8) ile

$$\int_\gamma f = \int_a^b (f\circ\gamma)d\gamma = \int_a^b (f\circ\gamma)\gamma' = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \text{ ve} \tag{2.6}$$

$$\int_\gamma f ds \equiv \int_\gamma f|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \tag{2.7}$$

elde edilir. $g := (f\circ\gamma)\gamma'$ olmak üzere, $\int_\gamma f = \int_a^b \operatorname{Re} g + i\int_a^b \operatorname{Im} g$ olur. Ayrıca, (2.7)'de $f \equiv 1$ alırsak, $\int_\gamma ds \equiv \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = L(\gamma)$ elde ederiz.

Kimi yazarlar Stieltjes integrallerine girmez ve yalnızca $\mathcal{C}^1$ gezileri ile çalışırlar ve bizim için sonuç olan (2.6)'yı tanım olarak seçerler.

Önerme 2.4.3. *$\gamma; [a,b] \to \mathbb{C}$ bir integral gezisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli olsun.*

(i) *$\eta \sim \gamma$ ise, $\int_\eta f = \int_\gamma f$.*

(ii) *$a = a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n = b$ ve $\gamma_k := \gamma|[a_{k-1}, a_k]$ ise,*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f.$$

(iii) *$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$.*

Kanıt. (i) $\eta : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ bir parametre dönüşümü ve $\eta = \gamma\circ\varphi$ olsun. φ sürekli, kesin artan ve üzerinedir. $[\alpha,\beta]$ aralığının her

$Q = \{s_0, \ldots, s_n\}$ parçalanışı bize $t_k = \varphi(s_k)$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığının bir $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışını verir.

$$\pi_{\gamma,P} := \overrightarrow{\gamma(t_0)\cdots\gamma(t_n)} \text{ ve } \pi_{\eta,Q} := \overrightarrow{\eta(s_0)\cdots\eta(s_n)}$$

olsun. $z_k := \eta(s_k) = \gamma(\varphi(s_k)) = \gamma(t_k)$ olduğundan, açıkça $L(\pi_{\eta,Q}) = L(\pi_{\gamma,P}) \leq L(\gamma)$ olur; dolayısıyla, her şeyden önce η bir integral gezisidir. Tersine $[a, b]$'nin her P parçalanışı bize $L(\pi_{\eta,Q}) = L(\pi_{\gamma,P})$ olan $[\alpha, \beta]$'nın bir Q parçalanışını verdiğinden, şu an için bizi ilgilendirmese de $L(\eta) = L(\gamma)$.

$\varepsilon_n > 0$ gerçel sayıları $\varepsilon_n \downarrow 0$ olacak biçimde seçilsinler. φ düzgün sürekli olduğundan, her ε_n için bir δ_n sayısı $0 < \delta_n < \varepsilon_n$ ve $[\alpha, \beta]$ aralığındaki $|s - s'| \leq \delta_n$ koşulunu sağlayan her s, s' için $|\varphi(s) - \varphi(s')| < \varepsilon_n$ olacak biçimde seçilsin. Elbette $\lim \delta_n = 0$. Şimdi $Q_n = \{s_{n,0}, \ldots, s_{n,m_n}\}$, $[\alpha, \beta]$ aralığının $\|Q_n\| < \delta_n$ koşulunu sağlayan bir parçalanışı ise, $P_n := \{\varphi(s_{n,0}), \ldots, \varphi(s_{n,m_n})\}$ de $[a, b]$ aralığının $\|P_n\| < \varepsilon_n$ koşulun sağlayan bir parçalanışıdır. $\lim \|Q_n\| = \lim \|P_n\| = 0$ olduğundan, (2.3.4) ile

$$\begin{aligned}
\int_\eta f = \int_\alpha^\beta (f \circ \eta) d\eta &= \lim_n S(f \circ \eta, Q_n, \eta) \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (f \circ \eta)(s_{n,i})[\eta(s_{n,i}) - \eta(s_{n,i-1})] \\
&= \lim_n \sum_{i=1}^{m_n} (f \circ \gamma)(\varphi(s_{n,i}))[\gamma(\varphi(s_{n,i})) - \gamma(\varphi(s_{n,i-1}))] \\
&= \lim_n S(f \circ \gamma, P_n, \gamma) = \int_a^b (f \circ \gamma) d\gamma = \int_\gamma f
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(ii) Doğrudan Not 2.3.9(4)'ten çıkar.

(iii) $[a, b]$'nin bir seçilmiş parçalanışı $P(\tau) = \{t_0, \ldots, t_n\}$ ise, γ'ya göre $z_0 \preceq \xi_0 \preceq z_1 \preceq \xi_1 \preceq \cdots \preceq \xi_n \preceq z_n$ olan sıralama γ^- için $z_n \preceq \xi_n \preceq z_{n-1} \preceq \xi_{n-1} \preceq \cdots \preceq \xi_0 \preceq z_0$ sıralamasına dönüşür. Bu nedenle,

$$S(f \circ \gamma^-, P(\tau), \gamma^-) = -S(f \circ \gamma, P(\tau), \gamma)$$

olur ve savımız (2.5) ile buradan çıkar. □

Not 2.4.4. Önerme 2.4.3(i)'den dolayı, gezisel integral kavramı gerçekten de rotasaldır ve her $\gamma \in \mathcal{G}^i$ ve her sürekli $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ için $\eta \in \boldsymbol{\gamma}$ olmak üzere,

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f := \int_\eta f$$

tanımı kusursuzdur; özellikle daima $\int_{\boldsymbol{\gamma}} f = \int_\gamma f$ olduğundan, ileride herhangi bir gezisel integralde geçen tüm $\gamma, \lambda, \eta, \ldots$ gezileri yerine onların $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ rotalarını ve tüm

$L(\gamma), L(\lambda), L(\eta), \ldots$ yerine $L(\boldsymbol{\gamma})$, $L(\boldsymbol{\lambda})$, $L(\boldsymbol{\eta}), \ldots$ yazabiliriz. $\gamma = c_w$ bir sabit gezi ise, her $f : \{w\} \to \mathbb{C}$ için $\int_{\mathbf{c}_w} f = 0$ olduğu apaçıktır.

(i) $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ için $\|f\|_\gamma := \sup_{z\in\underline{\gamma}} |f(z)| = \|f\|_{\underline{\gamma}}$.

(ii) $\int_z^w f := \int_{\overrightarrow{zw}} f$.

(iii) Eğer γ gezisinin başlangıç noktası z ve bitiş noktası w ise ve bunu vurgulamak bizim için önemliyse, $\int_\gamma f$ yerine $\int_{z,\gamma}^w f$ yazacağız.

(2.5) eşitliğinin bir basit sonucu şudur: γ'nın başlangıç noktası z ve bitiş noktası w ve ayrıca $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ bir sabit fonksiyon ise, örneğin $f(\xi) \equiv c$ ise, her P parçalanışı için $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = c(w - z)$ olacağından, daima

$$\int_{z,\gamma}^w c = c(w - z) \tag{2.8}$$

olur.

Teorem 2.4.5. *γ integral gezisi, $f, g : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\alpha \in \mathbb{C}$ ise:*

(i) $\int_\gamma (f \pm g) = \int_\gamma f \pm \int_\gamma g$ *ve* $\int_\gamma \alpha f = \alpha \int_\gamma f$,

(ii) $\left|\int_\gamma f\right| \leq L(\gamma) \|f\|_\gamma$.

Kanıt. (i) doğrudan Tanım 2.4.1 ve Stieltjes integrallerinin özelliklerinden çıkar. (ii) ise (2.5) ve

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leq \sum_{k=1}^n \|f\|_\gamma |z_k - z_{k-1}| \leq \|f\|_\gamma L(\gamma)$$

eşitsizliğinden çıkar. □

Teorem 2.4.6. (i) *γ bir integral gezisi, $(f_n) \subset \mathcal{C}(\underline{\gamma}, \mathbb{C})$, $f_n \overset{\gamma}{\Longrightarrow} f$ ise, f de $\underline{\gamma}$'da süreklidir ve*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \lim f_n = \lim \int_\gamma f_n.$$

(ii) *γ bir integral gezisi, $(f_n) \subset \mathcal{C}(\underline{\gamma}, \mathbb{C})$ ve $\sum f_n$ serisi $\underline{\gamma}$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaksa f de $\underline{\gamma}$'da süreklidir ve*

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \left(\sum f_n\right) = \sum \int_\gamma f_n.$$

Kanıt. (i) f fonksiyonunun sürekliliği aşikârdır ve sav doğrudan

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| \leq L(\gamma) \|f_n - f\|_\gamma$$

eşitsizliğinden çıkar.

(ii) $s_n := \sum_{k=0}^n f_n$ olmak üzere, varsayımımız $s_n \overset{\gamma}{\Longrightarrow} f$ demektir. (i)'den dolayı f sürekli ve $\lim \int_\gamma s_n = \int_\gamma f$ demektir ki $\int_\gamma s_n = \sum_{k=0}^n \int_\gamma f_k$ olduğundan, bu, tam da savımızdır. □

Teorem 2.4.7 (Değişken değiştirme)**.** *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler, $g : V \to U$ holomorf, $\gamma \in \mathcal{G}_p^1(V)$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ sürekli ise*

$$\int_{g\circ\gamma} f = \int_\gamma (f\circ g)g'$$

veya açık yazılımla

$$\int_{g\circ\gamma} f(w)dw = \int_\gamma f(g(z))g'(z)dz, \quad w = g(z),\ dw = g'(z)dz.$$

Kanıt. (i) $\gamma \in \mathcal{G}^1(V)$ ve $\gamma : [a, b] \to V$ olsun. Bu durumda $g\circ\gamma \in \mathcal{G}^1(U)$ olur ve

$$\begin{aligned}\int_{g\circ\gamma} f(w)dw &= \int_a^b f((g\circ\gamma)(t))(g\circ\gamma)'(t)dt \\ &= \int_a^b (f\circ g)(\gamma(t))g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b [(f\circ g)g'](\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma [(f\circ g)g'](z)dz.\end{aligned}$$

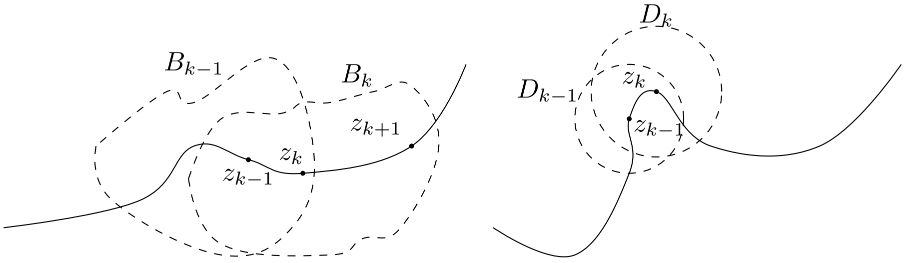
(ii) $\gamma_i \in \mathcal{G}^1(V)$ olmak üzere, $\gamma = \gamma_1\cdots\gamma_n$ ise $g\circ\gamma = (g\circ\gamma_1)\cdots(g\circ\gamma_n)$ olacağından,

$$\int_{g\circ\gamma} f = \sum_{i=1}^n \int_{g\circ\gamma_i} f \overset{(i)}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} (f\circ g)g' = \int_\gamma (f\circ g)g'$$

elde ederiz. □

İleride holomorf fonksiyonların herhangi bir gezi üzerinden integralini tanımlayacağız ve bu teoremin $\gamma \in \mathcal{G}(V)$ gezileri için de doğru olduğunu kanıtlayacağız (bkz. Teorem 2.8.7)).

$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde bir $\gamma : [a, b] \to U$ gezisi verilsin. U'da γ **boyunca** bir $B_0, \ldots, B_n$ **bölgeler zincirinden** şunu anlayacağız: $[a, b]$ aralığının bir $a_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışı ve $1 \le k \le n$ için $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere, $B_k \subset U$ bölgeleri $\underline{\gamma_k} \subset B_{k-1} \cap B_k$ olacak biçimde verilmiş olacaklar. Böyle bir durumda $B_0, \ldots, B_n$ bölgeler dizisinin $\gamma = \gamma_1\cdots\gamma_n$ parçalanışına veya $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışına **uyduğunu** söyleyeceğiz. Özel olarak B_k



Şekil 2.6: Bölgeler ve daireler zincirleri.

bölgeleri $z_k = \gamma(t_k)$ merkezli ve U'da olan $D_{r_k}(z_k)$ daireleri seçilmişse o zaman U'da γ boyunca $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışına uyan bir **daireler zincir**inden söz edeceğiz. Kenarları eksenlere koşut olan poligonsal gezilere ise **ızgara gezileri** diyelim.

Daha yalın bir söylemle U'daki $\boldsymbol{\gamma}$ rotasının bir $\boldsymbol{\gamma}_1 \cdots \boldsymbol{\gamma}_n$ parçalanışı verilmiş ve U'daki $B_0, \ldots, B_n$ bölgeleri ile $\underline{\boldsymbol{\gamma_k}} \subset B_{k-1} \cap B_k$ sağlanmışsa $B_0, \ldots, B_n$ bölgeleri U'da $\boldsymbol{\gamma}$ boyunca, dolayısıyla, her $\eta \in \boldsymbol{\gamma}$ boyunca, bir bölgeler zinciridir.

Önerme 2.4.8. *Ω açık kümesinde bir $\gamma : [a, b] \to \Omega$ gezisi verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısı $[a, b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan her P parçalanışına ilişkin Ω'da γ boyunca P parçalanışına uyan bir daireler zinciri bulunabilecek biçimde vardır.*

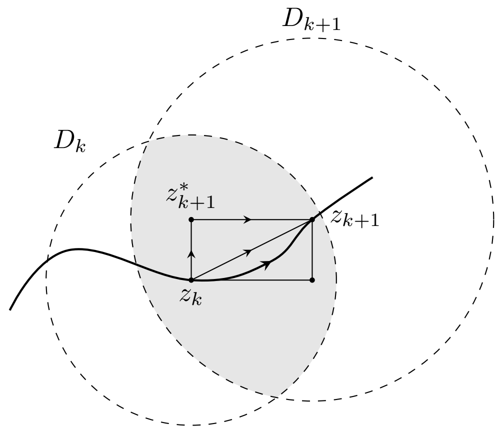
Kanıt. γ bir sabit geziyse kanıtlanacak bir şey yoktur, $D_r(\gamma(a)) \subset \Omega$ koşulunu sağlayan bir tek daire işimizi görür. Şimdi γ bir sabit gezi olmasın.

Eğer $\Omega = \mathbb{C}$ ise işimiz yine kolaydır. $\underline{\gamma}$ kompakt olduğundan, $d(\underline{\gamma}) = \sup_{z,w \in \underline{\gamma}} |z - w|$ sonludur. Bu durumda herhangi bir $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ parçalanışı için $z_k = \gamma(t_k)$ ve $r = 2d(\gamma)$ olmak üzere, $D_r(z_0), \ldots, D_r(z_n)$ daireleri γ boyunca bu parçalanışa uyan bir daireler zinciridir. Tartışılan iki durumda da $\delta := r$ işimizi görür.

Şimdi $\Omega \neq \mathbb{C}$ olsun. $\underline{\gamma}$ kompakt ve $\partial\Omega \neq \emptyset$ kapalı ve $\underline{\gamma} \cap \partial\Omega = \emptyset$ olduğundan, Önsav 5.2.20 ile $d := d(\underline{\gamma}, \partial\Omega) > 0$. γ düzgün sürekli olduğundan, bir $\delta > 0$ sayısı

$$\forall t, t' \in [a, b] \quad \big(|t - t'| < \delta \Longrightarrow |\gamma(t) - \gamma(t')| < d\big)$$

olacak biçimde vardır. $[a, b]$ aralığının $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışı için $\|P\| < \delta$ sağlansın. Bu durumda, her $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ için $|\gamma(t) - z_k| = |\gamma(t) - \gamma(t_k)| < d$ olduğundan, $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere, $\underline{\gamma_k} \subset D_d(z_k)$ ve benzer biçimde $\underline{\gamma_k} \subset D_d(z_{k-1})$ ve böylece $\underline{\gamma_k} \subset D_d(z_{k-1}) \cap D_d(z_k)$ olur. Dolayısıyla, $D_d(z_0), \ldots, D_d(z_n)$ daireleri Ω'da γ boyunca P parçalanışına uyan bir daireler zinciridir. □



Şekil 2.7: Gezilere poligon ve ızgaralarla yaklaşım.

$D_0, \ldots, D_n$ daireleri Ω'da $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışına uyan bir daireler zinciri olsun ve bu parçalanış ise bir $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışı ile verilmiş olsun. Daireler dışbükey kümeler olduğundan, $\Pi_P := \overrightarrow{z_0 \cdots z_n}$ poligonu da Ω'dadır. Π_P poligonunun köşelerinin $\underline{\gamma}$ üzerinde olduğunu not edelim. $z_k = x_k + iy_k$ olmak üzere, z^*_{k+1} noktası olarak $x_k + iy_{k+1}$ veya $x_{k+1} + iy_k$ noktasını alırsak, $\overrightarrow{z_k z^*_{k+1} z_{k+1}}$ ızgara gezisi D_k dairesindedir. $\overrightarrow{z_k z^*_{k+1} z_{k+1}}$ gezisinden bir parametre dönüşümü ile kendisine denk $\iota_k : [t_{k-1}, t_k] \to D_k$ gezisine geçelim. Bu poligonumuzda her bir $\overrightarrow{z_k z_{k+1}}$ gezisini D_k dairesinde seçilen uygun bir z^*_{k+1} noktası ile $\iota_{k+1} := \overrightarrow{z_k z^*_{k+1} z_{k+1}}$ ızgara gezisi ile değiştirirsek, yine Ω'da olan bir $\iota_P := \iota_1 \cdots \iota_n = \overrightarrow{z_0 z^*_1 z_1 \cdots z_{n-1} z^*_n z_n}$ ızgara gezisi elde ederiz. Bu Π_P poligonu ve ι_P ızgara gezisi bizim için γ gezisine Ω'da yaklaşımlar olacaklardır. Bu gösterimlerle

Sonuç 2.4.9. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ açık, $\gamma \in \mathcal{G}(\Omega)$ ve Ω'daki $D_0, \ldots, D_n$ daireleri γ'nın bir P parçalanışı ile belirlenmiş $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışına uyan bir daireler zinciriyse, yine Ω'daki $\Pi_P := \overrightarrow{z_0 \cdots z_n}$ poligonu ve $\iota = \iota_1 \cdots \iota_n$ ızgara gezisi için $[z_{k-1}, z_k] \subset D_{k-1} \cap D_k$ ve $\underline{\iota_k} \subset D_{k-1} \cap D_k$ sağlanır.*

Teorem 2.4.10. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\gamma : [a, b] \to U$ bir integral gezisi ve $f : U \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı ve U'da bir $\Pi = \overrightarrow{z_0 \cdots z_n}$ poligonu ve bir ι ızgara gezisi aşağıdaki koşullar sağlanacak biçimde vardır:*

(i) *γ ve Π'nin başlangıç ve bitiş noktaları örtüşür ve Π poligonunun z_k köşeleri $\underline{\gamma}$'dadır; Π poligonun köşeleri $z_0 \preceq z_1 \preceq \cdots \preceq z_n$ ise ι ızgarası $z_0 \preceq z^*_1 \preceq z_1 \preceq z^*_2 \preceq \cdots \preceq z^*_n \preceq z_n$ biçimindedir.*

(ii) *$\underline{\Pi}, \underline{\iota} \subset V_\delta(\underline{\gamma}) \subset U$, yani poligonumuz ve ızgaramız $\underline{\gamma}$'nın δ komşuluğundadır,*

(iii) $\left|\int_\gamma f - \int_\Pi f\right| < \varepsilon$ *ve* $\left|\int_\gamma f - \int_\iota f\right| < \varepsilon$.

(iv) *İstenirse* Π *ve* ι*'nın önceden verilen ve* $\underline{\gamma}$*'yı içeren herhangi bir* $V_\sigma(\underline{\gamma})$ *şeridinde olması sağlanabilir.*

Kanıt. γ bir sabit geziyse kanıtlanacak bir şey yoktur. $L(\gamma) > 0$ olsun.

$\Omega = \mathbb{C}$ ise $d = 1$, ve $\Omega \neq \mathbb{C}$ ise $d = d(\underline{\gamma}, \partial\Omega)$ olsun. $K := \overline{V_{d/2}(\underline{\gamma})}$ kümesi kompakttır ve $K \subset \Omega$. Şimdi f fonksiyonu K kompakt kümesinde sürekli olduğundan, bir $\delta'' > 0$ sayısını

$$\forall z, w \in K \quad \left(|z - w| < \delta'' \Longrightarrow |f(z) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2L(\underline{\gamma})}\right) \tag{2.9}$$

olacak biçimde seçebiliriz. Son olarak $\delta''' > 0$ sayısını $\omega_\gamma(\delta''') < d/2$ olacak biçimde seçelim, dd. her $t, t' \in [a, b]$ için $|t - t'| < \delta'''$ ise $|\gamma(t) - \gamma(t')| < d/2$ olsun. $\delta := \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ olsun. Şimdi $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışı $\|P\| < \delta$ olacak biçimde seçilsin. Önerme 2.4.8'in kanıtından görülebileceği gibi $D_{d/2}(z_0), \ldots, D_{d/2}(z_n)$ daireleri γ boyunca P parçalanışına uyan $V_{d/2}(\underline{\gamma})$'da bir zincirdir. Dolayısıyla, $\Pi = \overrightarrow{z_0 z_1} \cdots \overrightarrow{z_{n-1} z_n}$ poligonu $V_{d/2}(\underline{\gamma}) \subset \Omega$'dadır. Öte yandan, (2.8)'den $f(z_k)\,(z_k - z_{k-1}) = \int_{\overrightarrow{z_{k-1} z_k}} f(z_k)$ olduğunu biliyoruz. Böylelikle,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Pi f - \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (f - f(z_k))\right| \\
&\le \sum_{k=1}^n \|f - f(z_k)\|_{\overrightarrow{z_{k-1} z_k}} |z_k - z_{k-1}| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2L(\underline{\gamma})} L(\Pi) \le \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradansa $S(f, P, \gamma) = \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1})$ olmak üzere, (2.10) ve (2.9) ile

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f - \int_\Pi f\right| &\le \left|\int_\gamma f - S(f, P, \gamma)\right| + \left|\sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) - \int_\Pi f\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Savımızı önce poligonlar için kanıtlayacağız. $\delta' > 0$ sayısı $[a, b]$ aralığının $\|P\| < \delta'$ koşulunu sağlayan her P parçalanışı ve her τ seçimi için

$$\left|\int_\gamma f - S(f, P(\tau), \gamma)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde seçilsin. Özel olarak $\tau_k = t_k$ seçersek, $z_k = \gamma(t_k)$ olmak üzere, $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ ve $\|P\| < \delta'$ ise

$$\left| \int_\gamma f - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.10}$$

olur.

(iv) Poligonumuzun bir $V_\sigma(\underline{\gamma})$ şeridinde olmasını istiyorsak, yukarıda U'da yaptıklarımızı $U' := U \cap V_\sigma(\underline{\gamma})$ açık şeridinde tekrarlarız.

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\varepsilon' = \varepsilon/3$ olsun. Γ poligonu yukarıdaki koşulları sağlayacak ve $\left| \int_\gamma f - \int_\Pi f \right| < \varepsilon'$ olacak ve (2.9) ise ε' ile sağlanacak biçimde biçimde seçilsin. ι ızgarası $D_{d/2}(z_k)$ dairelerinde uygun seçilen z_k^* noktalarıyla oluşturulsun. $\iota_k := \overrightarrow{z_{k-1} z_k^* z_k}$ olmak üzere, $\iota = \iota_1 \cdots \iota_n$ ve $\lambda_k = \iota_k \overrightarrow{z_k z_{k-1}}$ izi $D_{d/2}(z_k)$ dairesinde olan bir kapalı yoldur ve $L(\lambda_k) \le 3\,|z_k - z_{k-1}| \le 3L(\gamma_k)$. Burada $\gamma_k = \gamma|\,[t_{k-1}, t_k]$. Dolayısıyla,

$$\left| \int_{\iota_k} f - \int_{\overrightarrow{z_{k-1} z_k}} f \right| = \left| \int_{\lambda_k} f \right| \le 3L(\lambda_k)\, \|f\|_{\lambda_k} \le 3L(\gamma_k) \frac{\varepsilon'}{2L(\underline{\gamma})},$$

$$\left| \int_\iota f - \int_\Pi f \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\iota_k} f - \int_{\overrightarrow{z_{k-1} z_k}} f \right) \right| \le \sum_{k=1}^{n} L(\gamma_k) \frac{3\varepsilon'}{2L(\underline{\gamma})} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \int_\gamma f - \int_\iota f \right| \le \left| \int_\gamma f - \int_\Pi f \right| + \left| \int_\Pi f - \int_\iota f \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. □

Kanıtını [7] ve [64]'te bulabileceğiniz, bu bağlamda önemli bir teoremi kanıtsız verelim:

Teorem 2.4.11. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve ∂B bir basit kapalı integral gezisi ve $f \in \mathcal{C}(\overline{B})$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için izi B'de olan basit kapalı bir Π_ε poligonu*

$$\left| \int_{\partial B} f - \int_{\Pi_\varepsilon} f \right| < \varepsilon$$

olacak biçimde vardır.

Bu teoremin Teorem 2.4.10'a göre fazladan önemli isteği Π_ε poligonunun basit kapalı olmasıdır.

Teorem 2.4.12. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f' \in \mathcal{C}(U)$ ise (ileride, her $f \in \mathcal{H}(U)$ için $f' \in \mathcal{C}(U)$ olduğunu göreceğiz), her $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ için*

$$\int_\gamma f' = f(s_\gamma) - f(b_\gamma). \tag{2.11}$$

Özellikle her kapalı $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ için $\int_\gamma f' = 0$.

Kanıt. (1) $\gamma \in \mathcal{G}^1$ ve $\gamma : [a,b] \to U$ olsun.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f' &= \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f\circ\gamma)'dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(s_\gamma) - f(b_\gamma).\end{aligned}$$

(2) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathcal{G}^1(U)$ ve $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n \in \mathcal{G}_p^1(U)$ olsun. γ_k gezisinin başlangıç noktasına z_{k-1} ve bitiş noktasına z_k dersek ve bu durumda $b_\gamma = z_0$ve $z_n = s_\gamma$ olduğunu gözetirsek,

$$\int_\gamma f' = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1},\gamma_k}^{z_k} f' \overset{(i)}{=} \sum_{k=0}^{n} (f(z_k) - f(z_{k-1})) = f(s_\gamma) - f(b_\gamma)$$

elde edilir.

(3) $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Önerme 2.4.8 ile uç noktaları γ'nın uç noktalarıyla örtüşen U'da bir Π poligonu $\left|\int_\gamma f - \int_\Pi f\right| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilir. $\Pi \in \mathcal{G}_p^1(U)$ olduğundan, (2) ile

$$\left|\int_\gamma f' - (f(s_\gamma) - f(b_\gamma))\right| < \varepsilon$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan, $\int_\gamma f' = f(s_\gamma) - f(b_\gamma)$ olur.

$\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ kapalıysa $b_\gamma = s_\gamma$ olacağından, $\int_\gamma f' = 0$ olur. □

Not 2.4.13. (1) $f \in \mathcal{A}(U)$ ise teoremin koşulu sağlanır. (2.11) formülüne Kompleks Analizin Anateoremi olarak bakabiliriz.

(2) Her $\mathbb{C}_{\alpha,z_0}$ açık kümesinde $\log_{\alpha,z_0}$ holomorftur ve $\left(\log_{\alpha,z_0} z\right)' = \frac{1}{z-z_0}$ fonksiyonu $\mathbb{C}_{\alpha,z_0}$ açık kümesinde süreklidir. Her $\gamma \in \mathcal{G}_p^i(\mathbb{C}_{\alpha,z_0})$ için

$$\int_{a,\gamma}^{b} \frac{1}{z-z_0}dz = \log_{\alpha,z_0} b - \log_{\alpha,z_0} a.$$

(3) $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ gerçel sayısı ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\int_{\kappa_{r,a}} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}.$$

Gerçekten de $n \neq -1$ için $F_n(z) = \frac{1}{n+1}(z-a)^{n+1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $F_n'(z) = (z-a)^n$, dolayısıyla $\kappa_{r,a}$ kapalı olduğundan, $n \neq -1$ için $\int_{\kappa_{r,a}} (z-a)^n dz = 0$ olur. $\kappa_{r,a}$ gezisi $\kappa_{r,a}(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ gezisi olduğundan, $\kappa_{r,a}'(t) = ire^{it}$ olduğunu gözetirsek,

$$\int_{\kappa_{r,a}} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+re^{it}-a} ire^{it}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

olur. Bu basit örneğin bize gösterdiği bir şey şudur: $f(z) = \frac{1}{z-a}$ fonksiyonu $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ açık kümesinde türevlenebilir ancak $\mathbb{C}\setminus\{a\}$'da türevlenebilen bir F fonksiyonun türevi olamaz, çünkü $\int_{\kappa_{r,a}} f \neq 0$. Yani f fonksiyonunun $\mathbb{C}\setminus\{a\}$'da yerel ilkelleri vardır, ancak ilkeli yoktur.

Problemler

Problem 2.4.1. $\int_{\kappa_1} x dz$, $\int_{\kappa_{r,a}} x dz$ ve $\int_{\overrightarrow{a,b}} x dz$ integrallerini hesaplayınız. İlk iki integralin, gezilerin çevrelediği bölgelerin alanıyla bir ilişkisi var mıdır?

Problem 2.4.2. γ bir integral gezisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekliyse, $\int_\gamma f = \int_\gamma f dx + i \int_\gamma f dy$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.3. $\int_{\kappa_1} \frac{1}{\bar{z}} dz = 0$ ve $\int_{\kappa_1} \bar{z} dz = 2\pi i$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.4. $\Delta = \Delta(0, 1, i)$ köşeleri $0, 1, i$ olan üçgen ve $\gamma = \boldsymbol{\partial}\Delta$ olmak üzere, $\int_{\boldsymbol{\partial}\Delta} \operatorname{Re} z dz$, $\int_{\boldsymbol{\partial}\Delta} \operatorname{Im} z dz$ ve $\int_{\boldsymbol{\partial}\Delta} z dz$ integrallerini hesaplayınız. Son integralin gerçel ve sanal kısımlarını ilk integrallerle kıyasladığınızda ne dikkatinizi çeker?

Problem 2.4.5. $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ ise, $\left| \int_\gamma \frac{\exp z}{z} dz \right| \le e\pi$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.6. $\operatorname{Re} \int_\gamma f = \int_\gamma \operatorname{Re} f$ olması gerekmediğini örnekleyiniz.

Problem 2.4.7. $m \in \mathbb{Z}$ için $\int_{\kappa_1} z^m dz$, $\int_{\kappa_1} (\bar{z})^m dz$ ve $\int_{\kappa_1} z^m |dz|$ integrallerini hesaplayınız.

Problem 2.4.8. $f : \mathbb{C} \backslash \overline{D}_\sigma \to \mathbb{C}$ sürekli ve $r > \sigma$ için $M_r := ||f||_{C_r}$ olmak üzere, $\lim_{r\to+\infty} r \cdot M_r = 0$ ise, $\lim_{r\to+\infty} \int_{\kappa_r} f = 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.9. $\int_{\gamma^-} f |dz| = \int_\gamma f |dz|$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.10. γ parçalı türevlenebilir ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekliyse,

$$\left| \int_\gamma f \right| \le \int_\gamma |f||dz|$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.11. $a \in \mathbb{C}$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z_1 = a - \varepsilon - i\varepsilon$, $z_2 = a + \varepsilon - i\varepsilon$, $z_3 = a + \varepsilon + i\varepsilon$ ve $z_4 = a - \varepsilon + i\varepsilon$ olsunlar. $\gamma := \overrightarrow{z_1 z_2 z_3 z_4 z_1}$ olmak üzere, $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ integralini hesaplayınız.

Problem 2.4.12. $a, b > 0$ ve $\gamma := \overrightarrow{0, a, (a+ib), (bi), 0}$, dd. γ gezisi $[0, a] \times [0, b]$ dikdörtgeninin saatin ters yönünde bir kez yürünmüş çevresiyse, $\int_\gamma e^z dz = 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.13. $B \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge ve $\boldsymbol{\partial}B$ basit kapalı bir $\mathcal{C}^1$ gezisi olsun. B'nin alanı $V_2(B)$ ile gösterilirse

$$\int_{\boldsymbol{\partial}B} x dz = -i \int_{\boldsymbol{\partial}B} y dz = \frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{\partial}B} \bar{z} dz = i V_2(B)$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.14. $-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ ve $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ise, $\gamma(t) = e^{it}$ ve $\gamma_{\theta_1\theta_2} := \gamma|[\theta_1, \theta_2]$

olmak üzere, $\int_\gamma f = \lim_{\theta_1 \to -\pi, \theta_2 \to \pi} \int_{\gamma_{\theta_1 \theta_2}} f$ eşitliğinden yararlanarak $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.15. $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $a \in U$ noktasının bir komşuluğunda $\mathcal{C}^1$-sınıfından olsun. f'nin a'da kompleks türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşulun

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\kappa_{r,a}} f(z)dz = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.16. Her $a \in \mathbb{D}$ için $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z-a} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.4.17. $f(z) = \sqrt{z}$ anadal ve $\gamma(t) = e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, $\int_\gamma f \equiv \int_\gamma \sqrt{z}dz = i2\sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz. İpucu: Teorem 2.4.12'den yararlanınız.

Problem 2.4.18. $f(z) = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log} z}$ ve $g(z) = e^{\frac{1}{2} \log_{-\frac{\pi}{2}} z}$ fonksiyonları sırasıyla $\sqrt{\mathbf{z}}$ çok değerli fonksiyonunun $\mathbb{C}_{-\pi}$ ve $\mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$'deki analitik dalları olsunlar. $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ gezisi $\gamma(t) = e^{it}$ olsun. $\int_\gamma f = \int_\gamma g = \frac{2}{3}(-1 - i)$ olduğunu gösteriniz.

2.5 Parametreye Bağlı İntegraller

Teorem 2.5.1. *$\gamma \in \mathcal{G}^i$, $A \subset \mathbb{C}$ ve $f : \underline{\gamma} \times A \to \mathbb{C}$ sürekli olsun.*

$$g(z) := \int_\gamma f(w, z)dw, \ \ (z \in A)$$

ile tanımlanan g fonksiyonu A'da süreklidir.

Kanıt. $a \in A$ keyfi verilsin. Metrik uzaylarda süreklilik için geçerli olan dizi ölçütünden dolayı, $\lim z_n = a$ olan her $(z_n) \subset A$ dizisi için $\lim g(z_n) = g(a)$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Her $w \in \underline{\gamma}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(w) := f(w, z_n) \text{ ve } h(w) := f(w, a)$$

olarak tanımlansın. $f_n \overset{\gamma}{\Longrightarrow} h$ olduğunu savunuyoruz.

$K := \{z_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ kümesi kompakttır. Dolayısıyla, f fonksiyonu $\underline{\gamma} \times K$ kompakt kümesinde düzgün süreklidir. Bu nedenle, her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ pozitif sayısı $|z - z'| < \delta$ ve $|w - w'| < \delta$ koşulunu sağlayan her $(w, z), (w', z') \in \underline{\gamma} \times K$ için $|f(w, z) - f(w', z')| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilir. Özellikle $|z - z'| < \delta$ için $|f(w, z) - f(w, z')| < \varepsilon$ olur. Şimdi $n_0 = n_0(\delta)$ doğal sayısını, her $n \geq n_0$ için $|z_n - a| < \delta$ olacak biçimde seçersek,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall w \in \underline{\gamma} \ \ (|f_n(w) - h(w)| < \varepsilon) .$$

Bu ise $f_n \overset{\gamma}{\Longrightarrow} h$ demektir ve (2.4.6)(i) ile

$$\lim g(z_n) = \lim \int_\gamma f_n(w)dw = \int_\gamma h(w)dw = \int_\gamma f(w,a)dw = g(a)$$

elde ederiz. □

Teorem 2.5.2. *$\gamma \in \mathcal{G}^i$, $I = [\alpha, \beta]$ ve $f : \underline{\gamma} \times I \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. Her $z \in \underline{\gamma}$ için $f(z, \cdot)$ fonksiyonu I aralığında türevlenebilir olsun ve $\frac{\partial f}{\partial t}$ ise $\underline{\gamma} \times I$ kompakt kümesinde sürekli olsun. Bu koşullarda*

$$g(t) := \int_\gamma f(z,t)dz, \ (t \in I)$$

ile tanımlanan g fonksiyonunun I'da sürekli türevlenebilir ve

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\int_\gamma f(z,t)dz = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial t}(z,t)dz, \ (t \in I)\,. \tag{2.12}$$

Kanıt. $L(\gamma) = 0$ için $g = 0$ ve sav aşikârdır. Şimdi $L(\gamma) > 0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\frac{\partial f}{\partial t}$ fonksiyonu $\underline{\gamma} \times I$'da düzgün sürekli olduğundan, bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ pozitif sayısı, her $z \in \underline{\gamma}$ ve $|t_2 - t_1| < \delta$ koşulunu sağlayan her $t_1, t_2 \in I$ için

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(z,t_2) - \frac{\partial f}{\partial t}(z,t_1) \right| < \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} \tag{2.13}$$

olacak biçimde bulunabilir.

$t_0 \in I$ ve $z \in \underline{\gamma}$ keyfi verilsinler. Ortalama Değer Teoremi'nden, $t_0 + h \in I$ koşulunu sağlayan her $h \neq 0$ için bir $\theta = \theta(z, t_0)$ sayısı $0 < \theta < 1$ ve

$$f(z, t_0 + h) - f(z, t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(z, t_0 + h\theta)h$$

olacak biçimde bulunabilir. Buradan $z \in \underline{\gamma}$ ve $h \neq 0$ için

$$A(z) := \frac{f(z,t_0+h) - f(z,t_0)}{h} - \frac{\partial f}{\partial t}(z,t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(z,t_0+h\theta) - \frac{\partial f}{\partial t}(z,t_0)$$

elde ederiz. Böylece $|h\theta| \leq |h| < \delta$ olduğundan, (2.13) ile

$$\left| \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial t}(z,t_0)dz \right| = \left| \int_\gamma A(z)dz \right| \leq \|A\|_\gamma \, L(\gamma) \leq \varepsilon$$

elde ederiz ve bu, (2.12)'yi kanıtlar. g''nün sürekliliği Teorem 2.5.1'den çıkar. □

Teorem 2.5.3. *$\gamma \in \mathcal{G}^i$, $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f : \underline{\gamma} \times U \to \mathbb{C}$, her $z \in U$ için $f(\cdot, z) \in \mathcal{C}(\underline{\gamma})$ ve her $w \in \underline{\gamma}$ için $f(w, \cdot) \in \mathcal{H}(U)$ ve $\frac{\partial f}{\partial z} \in \mathcal{C}(\underline{\gamma} \times U)$ olsun.*

$$g(z) := \int_\gamma f(w,z)dw, \ \ (z \in U)$$

ile tanımlanan g fonksiyonu U'da holomorftur ve

$$g'(z) = \frac{d}{dz}\int_\gamma f(w,z)dw = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(w,z)dw.$$

Kanıt. $z_0 \in U$ keyfi verilsin. $\exists \overline{D}_r(z_0) \subset U$. Her $z \in D_r^*(z_0)$ için:

$$I(z) := \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(w, z_0)$$

olsun. $\lim_{z \to z_0} I(z) = 0$ olduğunu gösterirsek işimiz biter. (2.8) eşitliği ve Teorem 2.4.12 ile

$$\begin{aligned} &\int_{\overrightarrow{z_0 z}} \frac{\partial f}{\partial z}(w,z)dz = f(w,z) - f(w,z_0) \text{ ve} \\ &\int_{\overrightarrow{z_0 z}} \frac{\partial f}{\partial z}(w,z_0)dz = (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(w,z_0). \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_\gamma \left(\frac{f(w,z) - f(w,z_0)}{z - z_0} - \frac{\partial f}{\partial z}(w,z_0) \right) dw \\ &= \int_\gamma \left[\frac{1}{z - z_0} \int_{\overrightarrow{z_0 z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(w,z) - \frac{\partial f}{\partial z}(w,z_0) \right) dz \right] dw. \end{aligned} \tag{2.14}$$

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\underline{\gamma} \times \overline{D}_r(z_0)$ kompakt kümesinde sürekli olduğundan, orada düzgün süreklidir. Dolayısıyla, $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı $\forall w \in \underline{\gamma}$ ve $\forall z, z' \in \overline{D}_r(z_0)$ için

$$|z - z'| < \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{\partial f}{\partial z}(w,z) - \frac{\partial f}{\partial z}(w,z') \right| < \varepsilon \tag{2.15}$$

olacak biçimde bulunabilir. $\delta_\varepsilon < r$ seçebiliriz. Sonuç olarak, (2.14) ve (2.15)'ten

$$\begin{aligned} |I(z)| &\le L(\gamma) \left\| \frac{1}{z - z_0} \int_{\overrightarrow{z_0 z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(w,z) - \frac{\partial f}{\partial z}(w,z_0) \right) dz \right\|_\gamma \\ &\le L(\gamma) \frac{1}{|z - z_0|} |z - z_0| \varepsilon \end{aligned}$$

ve buradan da $\lim_{z \to z_0} I(z) = 0$ elde ederiz. □

Teorem 2.5.4. *$\gamma \in \mathcal{G}^i$, $\varphi : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ve*

$$f(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z} dw, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \underline{\gamma}$$

olsun. Bu durumda:

(i) *$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma})$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için*

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

(ii) *$f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma})$ ve $D_R(a) \subset \mathbb{C}\backslash\underline{\gamma}$ koşulunu sağlayan her açık dairede f fonksiyonu*

$$a_n = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

olmak üzere, $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ gibi bir kuvvet serisine açılabilir.

Kanıt. (i) doğrudan tümevarımla Teorem 2.5.3'ten çıkar. Aynı zamanda (ii)'den (i)'in çıktığı da apaçıktır. Dolayısıyla, Teorem 2.5.3'e başvurmadan (ii)'nin kanıtlanması yeterlidir.

(ii) $a \in \mathbb{C}\backslash\underline{\gamma}$ keyfi verilsin ve $D_R(a)$ açık dairesi a merkezli dairelerden $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma}$'ya düşenlerin en büyüğü ve $M := \|\varphi\|_\gamma < +\infty$ olsun.

$0 < r < R$ olsun. $\underline{\gamma}$ ve $\overline{D}_r(a)$ ayrık kompakt kümeler olduklarından, birbirine uzaklıkları pozitiftir. δ sayısı $0 < \delta < d(\underline{\gamma}, \overline{D}_r(a))$ olacak biçimde seçilsin. $\forall z \in \overline{D}_r(a)$ ve $\forall w \in \underline{\gamma}$

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{|w-a|} < \frac{r}{r+\delta} =: q < 1 \text{ ve}$$
$$\left\|\frac{\varphi(w)}{w-a} \cdot \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n}\right\|_\gamma \leq \frac{M}{r+\delta} q^n =: p_n$$

olsun. $\sum p_n$ yakınsak olduğu için sabit tutulan her $z \in \overline{D}_r(a)$ için

$$\frac{\varphi(w)}{w-z} = \frac{\varphi(w)}{(w-a)-(z-a)} = \frac{\varphi(w)}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \sum \frac{\varphi(w)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$$

serisi $\underline{\gamma}$'de düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z} dw = \int_\gamma \left(\sum \frac{\varphi(w)}{w-a}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n\right) dw \\ &= \sum \left(\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}} dw\right)(z-a)^n. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Elbette bu serinin katsayısı

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = a_n = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}}dw.$$

(2.16) açılımı her $r < R$ için geçerli olduğundan, bu açılım $D_R(a)$ dairesinde de geçerlidir. $\square$

Bu teoremdeki f fonksiyonu $\underline{\gamma}$'ya holomorf olarak genişletilebilir mi? Bu sorunun yanıtı hayırdır; sürekli olarak bile genişletilemeyebilir (bkz. Problem 2.5.8).

Teorem 2.5.5. *$\gamma, \eta \in \mathcal{G}^i$ ve $f : \underline{\gamma} \times \underline{\eta} \to \mathbb{C}$ sürekliyse,*

$$\int_\gamma \left(\int_\eta f \right) = \int_\eta \left(\int_\gamma f \right). \tag{2.17}$$

Kanıt. Bu teoremin [7]'de Fubini Teoremi'ni kullanmayan, doğrudan tanım ve Teorem 2.5.1'i kullanan bir kanıtını bulabilirsiniz. Biz teoremin yalnızca $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_p^1$ için Fubini Teoremi üzerinden bir kanıtını vereceğiz.

Her şeyden önce Teorem 2.5.1'den dolayı, $g(z) = \int_\gamma f(w,z)dw$ fonksiyonu $\underline{\eta}$'da sürekli olduğundan (2.17)'nin sağ yanı, ve $h(w) = \int_\eta f\,(w,z)\,dz$ fonksiyonu $\underline{\lambda}$'da sürekli olduğundan, aynı eşitliğin sol yanı tanımlıdır.

(i) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ve $\eta : [c,d] \to \mathbb{C}$ ve $\gamma, \eta \in \mathcal{G}^1$ olsun. Bu durumda $f^*(t,s) := f(\gamma(t), \eta(s))\gamma'(t)\eta'(s)$ fonksiyonu $[a,b] \times [c,d]$'de sürekli olduğundan, Fubini Teoremi ile

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(\int_\eta f(z,w)dw \right) dz &= \int_a^b \left(\int_c^d f(\gamma(t), \eta(s))\eta'(s)ds \right) \gamma'(t)dt = \\
\int_a^b \left(\int_c^d f^*\,(t,s)\,ds \right) dt &= \int_c^d \left(\int_a^b f^*\,(t,s)\,dt \right) ds \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b f(\gamma(t), \eta(s))\gamma'(t)dt \right) \eta'(s)ds \\
&= \int_\eta \left(\int_\gamma f(z,w)dz \right) dw.
\end{aligned}$$

(ii) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathcal{G}^1$ ve $\eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathcal{G}^1$ olmak üzere, $\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i$ ve $\eta =$

$\sum_{j=1}^{m} \eta_j$ olsunlar. Bu durumda

$$\int_{\gamma}\left(\int_{\eta} f(z,w)dw\right)dz = \sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i}\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{\eta_j} f(z,w)dw\right)dz =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma_i}\left(\int_{\eta_j} f(z,w)dw\right)dz\right) \overset{(i)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{\eta_j}\left(\int_{\gamma_i} f(z,w)dz\right)dw\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{\eta}\left(\int_{\gamma_i} f(z,w)dz\right)dw = \int_{\eta}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} f(z,w)dz\right)dw$$

$$= \int_{\eta}\left(\int_{\gamma} f(z,w)dz\right)dw$$

elde ederiz. □

Teorem 2.5.6. *γ bir integral gezisi, $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f : U \times \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ve her $w \in \underline{\gamma}$ için $f(\cdot, w) \in \mathcal{H}(U)$ ise*

$$g(z) := \int_{\gamma} f(z,w)dw$$

fonksiyonu U'da holomorftur.

Kanıt. Teorem 2.5.1'den $g \in \mathcal{C}(U)$. Şimdi bir $\Delta \subset U$ kapalı üçgeni verilsin. Teorem 2.5.5'ten dolayı

$$\int_{\partial\Delta} g = \int_{\partial\Delta}\left(\int_{\gamma} f\right) = \int_{\gamma}\left(\int_{\partial\Delta} f\right) = 0$$

sağlanır. Sav, bir sonraki kesimde kanıtlayacağımız Morera Teoremi'nden (Teorem 2.6.13) çıkar. □

Problemler

Problem 2.5.1. $I = [a,b]$, $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt ve $f : I \times K \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu verilsin.

$$g(z_1, \ldots, z_n) := \int_a^b f(t, z_1, \ldots, z_n)dt, \text{ veya } g(\mathbf{z}) := \int_a^b f(t, \mathbf{z})dt$$

ile tanımlanan g fonksiyonu K'de süreklidir.

Problem 2.5.2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ sürekli ise

$$g(z) := \int_a^b f(t,z)\,dt, (z \in \Omega)$$

fonksiyonu Ω'da süreklidir; gösteriniz. Problem 2.5.1'den yararlanınız.

Problem 2.5.3. $I = [a,b]$, $J = [c,d]$ kapalı aralıkları, $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt kümesi ve $f : I \times J \times K \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Her $(u, \mathbf{z}) \in J \times K$ için $f(\cdot, u, \mathbf{z})$ fonksiyonu I aralığında sürekli, $\frac{\partial f(t,u,\mathbf{z})}{\partial u}$ kısmi türevi var ve $I \times J \times K$'de sürekli olsun. Bu koşullarda

$$g(u, \mathbf{z}) := \int_a^b f(t, u, \mathbf{z}) dt$$

ile tanımlanan fonksiyonun $J \times K$ kümesinde u'ya göre kısmi türevi vardır, bu türev $J \times K$'de süreklidir ve

$$\frac{\partial g(u, \mathbf{z})}{\partial u} = \int_a^b \frac{\partial f(t, u, \mathbf{z})}{\partial u} dt.$$

Bu önerme K yerine bir açık $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ alındığında da doğrudur. Gösteriniz.

Problem 2.5.4. $\Omega \subset \mathbb{C}$ açık, $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ ve her $z \in \Omega$ için $f(\cdot, z)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. $\frac{\partial f(t,z)}{\partial x}$ var ve $[a,b] \times \Omega$'da sürekliyse,

$$g(z) = \int_a^b f(t,z) dt \text{ için } \frac{\partial g}{\partial x}(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial x} dt$$

ve bu türev $[a,b] \times \Omega$'da süreklidir. Benzer koşullarda benzeri $g_y(z)$ için geçerlidir.

Problem 2.5.5. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ kapalı $\mathcal{C}^1$ gezisi için

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \ z \in \mathbb{C} \backslash \underline{\gamma}$$

fonksiyonunun $\mathbb{Z}$-değerli ve sürekli, dolayısıyla $\mathbb{C} \backslash \underline{\gamma}$'nin bağlantılı bileşenlerinde sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.6. $\Omega \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. Her $t \in [a,b]$ için $f(\cdot, t) \in \mathcal{H}(\Omega)$ ve f_z türevi $\Omega \times [a,b]$'de sürekli olsun. Bu durumda

$$g(z) := \int_a^b f(z,t) dt, \ z \in \Omega$$

ile tanımlanan g fonksiyonu Ω'da holomorftur ve

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) dt.$$

Problem 2.5.7. $\gamma \in \mathcal{G}^i$ ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekliyse, $g(w) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz$ ile tanımlanan g fonksiyonu $\mathbb{C} \backslash \underline{\gamma}$'da holomorftur.

Problem 2.5.8. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve her $z \in \mathbb{C} \backslash [a,b]$ için $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dt}{t-z}$ olsun. f'nin $\mathbb{C} \backslash [a,b]$'de holomorf olduğunu, ancak $\mathbb{C}$'ye sürekli olarak bile genişletilemeyeceğini gösteriniz. İpucu: $x \in (a,b)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.9. Teorem 2.5.4 genelleştirilebilir: $\gamma \in \mathcal{G}^i$, $\varphi, g : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ve $U := \mathbb{C} \setminus g(\underline{\gamma})$ ise, $z \in U$ için

$$f(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{g(w) - z} dw$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu U'da holomorftur ve $D_r(a) \subset U$ ise, her $z \in D_r(a)$ için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-a)^k, \ a_k = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(g(w) - a)^{k+1}} dw, \ k \in \mathbb{N}$$

olduğunu gösteriniz. İpucu: Her $z \in D_r(a)$ için

$$\frac{1}{g(w) - z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^k}{(g(w)-a)^{k+1}}$$

ve bu serinin $\underline{\gamma}$'da düzgün yakınsaklığından yararlanınız.

Problem 2.5.10. Her $z \in \mathbb{C}$ için $F(z) := \int_0^1 e^{-z^2 x^2} dx$ ile tanımlanan F fonksiyonunun $\mathbb{C}$'de holomorf olduğunu gösterip $F'(z)$ türevini hesaplayınız.

Problem 2.5.11. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve γ bir integral gezisiyse, $F(z) := \int_\gamma e^{zw} f(w) dw, \ z \in \mathbb{C}$ olsun. F'nin tam olduğunu gösterip F' ve F'''yü bulunuz.

Problem 2.5.12. Her $z \in \mathbb{D}$ için $\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - z} ds = 2\pi$ olduğunu gösteriniz. İpucu: $g(t) := \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is} - tz} ds$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.13. Problem 2.5.12'den de yararlanarak **Yerel Cauchy Teoremi**'ni kanıtlayınız: $U \subset \mathbb{C}$ *açık* $f \in \mathcal{H}(U)$ *ve* $\overline{D}_r(a) \subset U$ *ise, her* $z \in D_r(a)$ *için*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

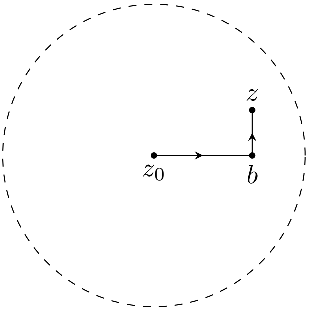
kanıtlayınız.

2.6 Goursat Teoremi ve İlk Sonuçları

Teorem 2.6.1. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f' \in \mathcal{C}(U)$ ise —ileride bunun hep sağlandığını göreceğiz— f fonksiyonu U'da yerel ilkele sahiptir.*

Kanıt. $z_0 \in U$ keyfi verilsin ve bir $r > 0$ sayısı $D_r(z_0) \subset U$ olacak biçimde seçilsin. Biz $D_r(z_0)$ dairesinde $F'(z) = f(z)$ koşulunu sağlayan bir F fonksiyonu tanımlayacağız. $z_0 = x_0 + iy_0$ olsun ve $z = x + iy \in D_r(z_0)$ keyfi verilsin. Bu durumda $b := x + iy_0$ olmak üzere, $\overrightarrow{z_0 b z}$ poligonunun izi $D_r(z_0)$ dairesindedir (bkz. Şekil 2.8).

$$F(z) := \int_{\overrightarrow{z_0 b z}} f = \int_{z_0}^{b} f + \int_b^z f = \int_{x_0}^{x} f(s, y_0) ds + \int_{y_0}^{y} i f(x,t) dt \qquad (2.18)$$



Şekil 2.8

olarak tanımlıyoruz. F fonksiyonun bu dairede kompleks türevlenebilir ve $F' = f$ olduğunu savunuyoruz. Bunun içinse F fonksiyonunun $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığını ve ayrıca $F_x = f$ olduğunu göstereceğiz.

Her şeyden önce (2.18)'den açıkça $F_y = if$. Diğer yandan, Problem 2.5.3 ve f için geçerli olan Cauchy-Riemann denklemlerinden, (2.18) ile

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= f(x,y_0) + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} if(x,t)dt = f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} if_x(x,t)dt \\ &= f(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} f_y(x,t)dt = f(x,y) \end{aligned}$$

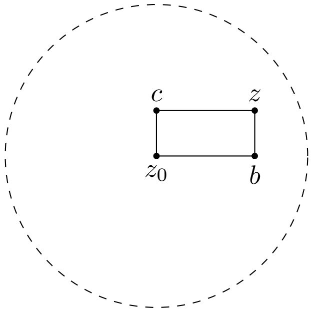
elde ederiz. $D_r(z_0)$ dairesinde F_x, F_y kısmi türevleri var ve sürekli olduklarından, F orada $\mathbb{R}$-türevlenebilir; ayrıca orada $F_y = if = iF_x$ olduğundan Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır ve F böylece dairemizde $\mathbb{C}$-türevlenebilir ve $F' = F_x = f$. □

Teorem 2.6.2. *$f \in \mathcal{C}(U)$ ve U açık kümesindeki her kapalı Δ üçgeni için $\int_{\partial\Delta} f = 0$ ise f fonksiyonunun $D_r(z_0) \subset U$ koşulunu sağlayan her dairede bir ilkeli vardır, dolayısıyla U'da yerel ilkeli vardır.*

Kanıt. Bu teoremin iki kanıtını vereceğiz. İlki gerçel analizden bilgiler kullanırken ikincisi kompleks analizde kalacaktır; yeğleyeceğimiz ikincisi olacaktır. Her $R \subset U$ kapalı dikdörtgeni herhangi bir köşegeni ile Δ_1 ve Δ_2 gibi iki kapalı üçgene $\partial R = \partial\Delta_1 + \partial\Delta_2$ olarak parçalanabileceğinden, koşulumuzdan $\int_{\partial R} f = 0$ olur.

Birinci kanıt: $z_0 \in U$ verildiğinde $r > 0$ sayısını $D_r(z_0) \subset U$ olacak biçimde seçelim. $z = x + iy \in D_r(z_0)$ olmak üzere, $b := (x, y_0)$ ve $c = (x_0, y)$ olsunlar. Köşeleri z_0, b, z, c olan kapalı dörtgen (bkz. Şekil 2.9) dairemizin içine düşer ve varsayımımızdan dolayı

$$\int_{z_0}^{b} f + \int_{b}^{z} f = \int_{z_0}^{c} f + \int_{c}^{z} f$$



Şekil 2.9

olur. Bu ortak değere $F(z)$ dersek, Teorem 2.6.1'in kanıtından $F_y(z) = if(z)$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan,

$$F(z) = \int_{z_0}^{c} f + \int_{c}^{z} f = \int_{y_0}^{y} if(x_0, s)ds + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt$$

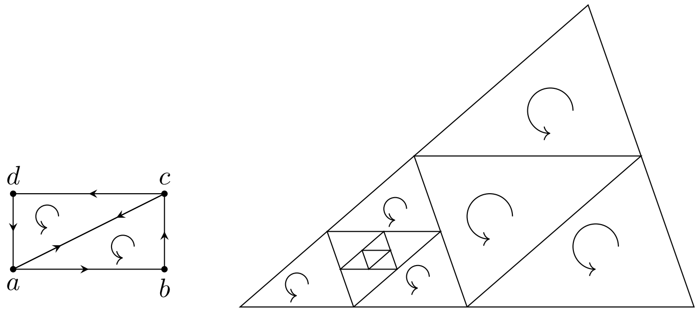
eşitliğindense $F_x(z) = f(z)$ elde ederiz. F fonksiyonunun $D_r(z_0)$'da kısmi türevleri var ve bunlar bir yandan sürekli olduklarından, diğer yandan da Cauchy-Riemann denklemlerini sağladıklarından F fonksiyonu $D_r(z_0)$'da kompleks türevlenebilir ve $F'(z) = F_x(z) = f(z)$.

İkinci kanıt: $z_0 \in U$ ve $D_r(z_0) \subset U$ olsun. Her $z \in D_r(z_0)$ için $F(z) := \int_{z_0}^{z} f$ olarak tanımlayalım. F'nin her $a \in D_r(z_0)$ noktasında türevlenebilir ve $F'(a) = f(a)$ olduğunu savunuyoruz. Her $z \in D_r(z_0)$ için $\Delta = \Delta(z_0, a, z) \subset U$ olduğundan, $\int_{\partial\Delta} f = 0$ koşulumuzdan $F(z) - F(a) = \int_a^z f$ olur. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısını $D_{\delta_\varepsilon}(a) \subset D_r(z_0)$ ve her $z \in D_{\delta_\varepsilon}(a)$ için $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde seçebiliriz. Her $z \in D_{\delta_\varepsilon}(a)$ için, $L(\overrightarrow{az}) = |z - a|$ olduğunu da gözetirsek,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a)\right| &= \left|\frac{1}{z - a}\int_a^z (f(z) - f(a))dz\right| \\ &\leq \frac{1}{|z - a|}|z - a|\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $\exists F'(a) = f(a)$. □

Şimdi kanıtlayacağımız Goursat Teoremi öncesinde matematikçiler U açık kümesindeki holomorf fonksiyonlardan daima U'da $\mathbb{C}$-türevlenebilir ve türevleri U'da sürekli olan fonksiyonları anlamışlardır. Goursat Teoremi'nin önemi " türevin sürekli" olması koşulundan vazgeçilebileceğini, bunun başka şeylerle birlikte "türevlenebilmenin" bir sonucu olduğunu kanıtlamış olmasıdır.



Şekil 2.10

Teorem 2.6.3 (Goursat Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $P \subset U$ sonlu ve $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U \backslash P)$ olsun. Her kapalı $\Delta \subset U$ üçgeni, dolayısıyla her kapalı $R \subset U$ dikdörtgeni için*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0 \quad ve \quad \int_{\partial R} f = 0.$$

Kanıt. Savımızı üçgenler için kanıtlamak yeterlidir. Bu, gerçekten de $\partial R = \overrightarrow{abcda}$ ise, $\Delta_1 = \Delta(a, b, c)$ ve $\Delta_2 = \Delta(a, c, d)$ üçgenleri olmak üzere, $\int_{\partial R} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f$ bağıntısından görülür (bkz. Şekil 2.10).

Δ üçgenimiz bozulmuşsa, dd. tüm köşeleri bir doğru üzerinde ise savımızın doğruluğu kolayca görülür. Dolayısıyla, üçgenimiz bozulmamış olsun. $\partial\Delta$ gezimizin uzunluğunu $L := L(\partial\Delta)$ ile gösterelim.

(i) $\Delta \cap P = \emptyset$ olsun. Üçgenimizin kenarlarının orta noktalarını birleştirerek $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(4)}$ gibi dört küçük üçgen elde ederiz. Elbette

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta^{(1)}} f + \cdots + \int_{\partial\Delta^{(4)}} f.$$

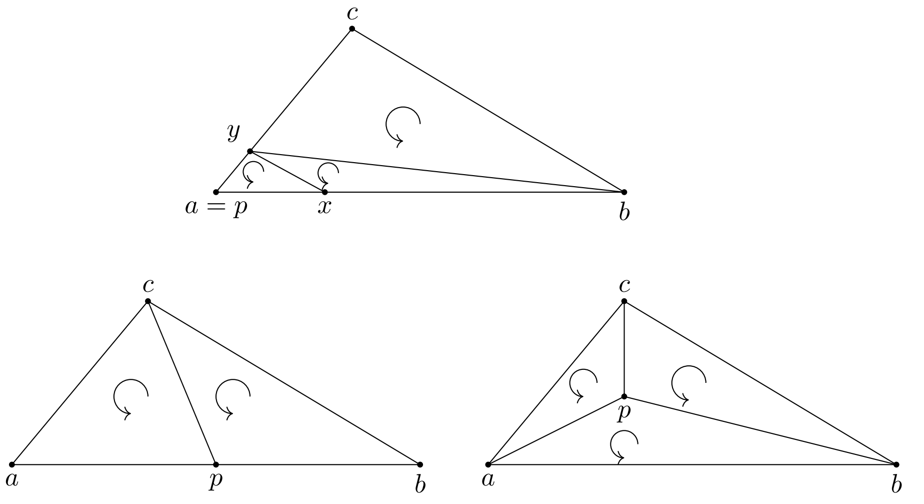
Sağ yandaki integrallerden mutlak değerce maksimum olan birini seçelim; onun üçgenine Δ_1 diyelim. Bu durumda elbette

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq 4^1 \left|\int_{\partial\Delta_1} f\right| \quad \text{ve} \quad L_1 := L(\partial\Delta_1) = \frac{L}{2^1}.$$

Δ ile yaptığımızı Δ_1 ile tekrarlayarak ve böyle devam ederek U kümesinde iç içe (Δ_n) kapalı üçgenler dizisi elde ederiz öyle ki

$$U \supset \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots, \quad L(\partial\Delta_n) = \frac{L}{2^n} \text{ ve } \left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f\right|.$$

Her adımda üçgenlerin kenar uzunlukları yarılandığından, Δ_n üçgenlerinin çapları $n \to +\infty$ için 0'a gider. Dolayısıyla Cantor Teoremi'nden (Teorem 5.2.11),



Şekil 2.11: p noktasının farklı konumları.

tek olarak belirli bir $z_0 \in \Delta$ ile $\bigcap \Delta_n = \{z_0\}$ olur. f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilir olduğundan, bir $\alpha \in \mathbb{C}$ ve bir $\eta : U \to \mathbb{C}$ ile $f(z) = f(z_0)+\alpha(z-z_0)+\eta(z)(z-z_0)$ ve $\lim_{z\to z_0} \eta(z) = 0$ olur. $g(z) := f(z_0)+\alpha(z-z_0)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de sürekli ve $G(z) := f(z_0)z + \frac{\alpha}{2}(z - z_0)^2$ fonksiyonunun türevi olduğundan, g'nin $\mathbb{C}$'deki her kapalı yol üzerinden integrali 0'dır (bkz. Teorem 2.4.12). Özellikle her n için

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\partial}\Delta_n} f(z)dz &= \int_{\boldsymbol{\partial}\Delta_n} (f(z_0) + \alpha(z - z_0) + \eta(z)(z - z_0))\, dz \\ &= \int_{\boldsymbol{\partial}\Delta_n} \eta(z)(z - z_0)dz.\end{aligned}$$

U açık bir küme olduğundan, $r > 0$ sayısı $D_r(z_0) \subset U$ olacak biçimde seçilebilir. Bir n_1 doğal sayısı, her $n \geq n_1$ için $\Delta_n \subset D_r(z_0)$ olacak biçimde bulunabilir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi verilsin. $\lim_{z\to z_0} \eta(z) = 0$ olduğundan, bir n_2 doğal sayısı, her $n \geq n_2$ için $\|\eta\|_{\boldsymbol{\partial}\Delta_n} < \frac{\varepsilon}{L^2}$ olacak biçimde seçilebilir. $n_\varepsilon := \max\{n_1, n_2\}$ olsun. Her $z \in \Delta_n$ için $|z - z_0| < L(\boldsymbol{\partial}\Delta_n)$ olduğunu da gözetirsek, her $n \geq n_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned}|I| &\leq 4^n \left|\int_{\boldsymbol{\partial}\Delta_n} f\right| \leq 4^n \left|\int_{\boldsymbol{\partial}\Delta_n} \eta(z)(z - z_0)\right| \\ &\leq 4^n L(\boldsymbol{\partial}\Delta_n)\, \|\eta(z)(z - z_0)\|_{\boldsymbol{\partial}\Delta_n} \leq 4^n \frac{L}{2^n}\frac{\varepsilon}{L^2}\frac{L}{2^n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Böylece, $I = 0$.

(ii) $\Delta \cap P \neq \emptyset$ olsun. P'nin öge sayısı üzerinden tümevarım uygulayacağız.

(ii.1) P tek ögeli ve $P = \{p\}$ olsun. İki durum söz konusudur.

(ii.1.1) p noktası Δ üçgeninin köşelerinden biri, örneğin $p = a$ olsun. $x \in (a, b)$ ve $y \in (a, c)$ noktalarını a noktasından farklı olarak seçerek $\Delta(a, x, y)$, $\Delta(x, b, y)$ ve $\Delta(b, c, y)$ üçgenlerini elde edelim. Son iki üçgen p noktasını içermediğinden dolayı, (i) ve f'nin sürekliliğinden,

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta(a,x,y)} f + \int_{\partial\Delta(x,b,y)} f + \int_{\partial\Delta(b,c,y)} f = \int_{\partial\Delta(a,x,y)} f,$$

dolayısıyla,

$$\left|\int_{\partial\Delta(a,x,y)} f\right| \le (|x-a| + |y-x| + |a-y|)\,\|f\|_{\Delta(a,x,y)} \xrightarrow[x,y\to a]{} 0$$

ile $\int_{\partial\Delta} f = 0$ olur.

(ii.1.2) $p \in \Delta\backslash\{a, b, c\}$ olsun. İki durum söz konusudur. Birincisi p bir kenar, örneğin $[a, b]$ üzerindedir. Bu durumda f'nin $\partial\Delta$ üzerinden integrali f'nin $\partial\Delta(a, p, c)$ ve $\partial\Delta(p, b, c)$ üzerinden integrallerinin toplamına eşittir. Ancak son iki integral (ii.1.1)'den dolayı 0'dır. İkinci olarak p noktası Δ üçgeninin bir iç noktasıdır. Bu kez $\Delta(a, b, p)$, $\Delta(b, c, p)$ ve $\Delta(c, a, p)$ üçgenleriyle çalışırız. Bunların pozitif yönlenmiş sınır gezileri üzerinden f fonksiyonun integralleri yine (ii.1.1)'den 0'dır; diğer yandan bunların toplamı tam da f fonksiyonunun $\partial\Delta$ üzerinden integralidir.

(ii.2) Sav, n ögeli P kümeleri için kanıtlanmış ve bize şimdi $n+1$ ögeli P kümesi verilmiş olsun. Bu durumda köşelerden en az birini karşı kenar üzerindeki bir nokta ile birleştirerek Δ üçgeni, her birindeki P kümesine ait öge sayısı $\le n$ olacak biçimde iki Δ_1, Δ_2 üçgenine ayırabiliriz. Tümevarım koşulundan $\int_{\partial\Delta_i} f = 0$ ve $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \int_{\partial\Delta_2} f = 0$ olur. □

Teorem 2.6.4. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, yıldız biçimli (bkz. Altkısım 5.2.4) ve $f \in \mathcal{C}(U)$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*

(i) $\exists F \in \mathcal{H}(U):\ F' = f$.

(ii) $\exists F : U \to \mathbb{C}$ *öyle ki, her* $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ *için* $\int_\gamma f = F(s_\gamma) - F(b_\gamma)$ *olur.*

(iii) *Her kapalı* $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ *için* $\int_\gamma f = 0$.

(iv) *Her kapalı* $\Delta \subset U$ *üçgeni için* $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Sonuç 2.6.5 (Yıldız biçimli kümeler için Cauchy Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve yıldız biçimli ve $P \subset U$ sonlu ise, her $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U\backslash P)$ ve her kapalı $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ için*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Kanıt. Teorem 2.4.12'den (i) $\Longrightarrow$ (ii). Ayrıca, (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ve (iii) $\Longrightarrow$ (iv) ise aşikârdır. Geriye (iv) $\Longrightarrow$ (i) olduğunu kanıtlamak kalıyor.

U kümesi $a \in U$ noktasına göre yıldız biçimli olsun. Her $z \in U$ için $[a, z] \subset U$ olduğundan,

$$F(z) := \int_a^z f = \int_{\overrightarrow{az}} f$$

tanımı kusursuzdur.

$z_0 = (x_0, y_0) \in U$ keyfi verilsin ve $D_r(z_0) \subset U$ olsun. $z = (x, y) \in D_r(z_0)$ olmak üzere, $b = (x, y_0)$ ve $c = (x_0, y)$ olsunlar. $[z_0, z] \subset D_r(z_0)$ ve U bölgemiz a noktasına göre yıldız biçimli olduğundan, $\Delta(a, z, z_0) \subset U$ ve ayrıca $\Delta(z_0, b, z), \Delta(z_0, c, z) \subset D_r(z_0)$ olduğundan, varsayımımız bize

$$\begin{aligned} F(z) &= F(z_0) + \int_{z_0}^z f = F(z_0) + \int_{z_0}^b f + \int_b^z f = F(z_0) + \int_{z_0}^c f + \int_c^z f \\ &=: F(z_0) + G(z) \end{aligned}$$

verir. Teorem 2.6.2'den $G \in \mathcal{H}(D(z_0))$ ve her $z \in D_r(z_0)$ için $G'(z) = f(z)$. Dolayısıyla, $D_r(z_0)$'da $\exists F'(z) = f(z)$. Ancak $z_0 \in U$ keyfi seçilmişti; öyleyse U'da $\exists F' = f$.

Sonuç doğrudan Goursat Teoremi ve Teorem 2.6.4(iv)'ten çıkar. □

Teorem 2.6.6 (İlkel Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f \in \mathcal{C}(U)$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) $\exists F \in \mathcal{H}(U)\ \ F' = f$.

(ii) $\exists F : U \to \mathbb{C}$ *öyle ki, her* $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ *için* $\int_\gamma f = F(s_\gamma) - F(b_\gamma)$ *olur.*

(iii) *Her kapalı* $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ *için* $\int_\gamma f = 0$.

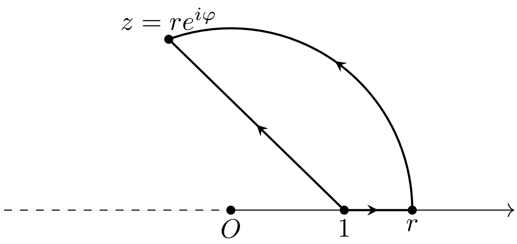
Kanıt. Savımızı U'nun bağlantılı bileşenleri için kanıtlamak yeterlidir. Genellikten bir şey kaybetmeden U'yu bağlantılı varsayabiliriz.

(i)$\Rightarrow$(ii) Doğrudan Teorem 2.4.12'den çıkar.

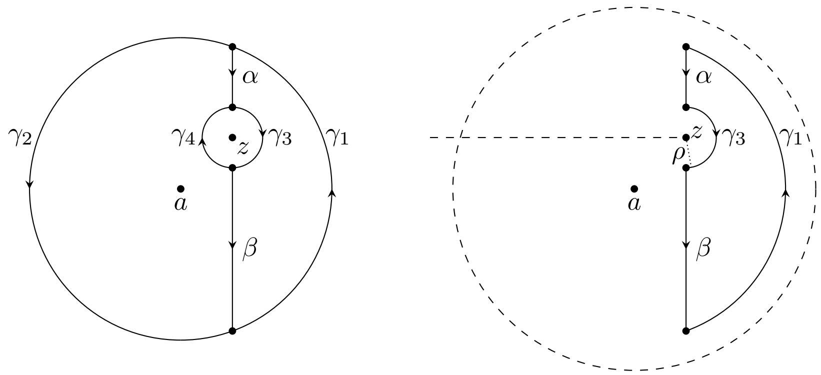
(ii)$\Rightarrow$(iii) aşikâr.

(iii)$\Rightarrow$(i) Bir $a \in U$ noktasını sabit seçelim. U yol bağlantılı olduğundan, her $z \in U$ için U'da başlangıç noktası a ve bitiş noktası z olan γ integral gezileri vardır ve varsayımımızdan $F(z) := \int_{a,\gamma}^z f$ tanımı kusursuzdur. $b \in U$ ve $D_r(b) \subset U$ olarak seçilsin. $\lambda \in \mathcal{G}^i(U)$, a noktasını b noktasına bağlayan herhangi bir gezi ve $c := \int_\lambda f$ olsun. $z \in D_r(b)$ için $h(z) := \int_{\overrightarrow{bz}} f$ tanımlansın. $D_r(b)$ yıldız biçimli olduğundan, h fonksiyonu Teorem 2.6.4'ten bu dairede holomorftur. Böylece $F = h + c$ fonksiyonu $D_r(b)$'de holomorftur. Ancak $b \in U$ keyfi seçildiğinden, F fonksiyonu U'da holomorftur ve $F'(z) = h'(z) = f(z)$. □

Teorem 2.6.7. *Her açık* $U \subset \mathbb{C}$ *için* $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{I}(U)$.



Şekil 2.12: Asıl logaritma.



Şekil 2.13: Merkezileştirme.

Kanıt. $a \in U$ keyfi verilsin. $\exists D_r(a) \subset U$. Şimdi Teorem 2.6.3'ten dolayı, her kapalı $\Delta \subset D_r(a)$ üçgeni için $\int_{\partial\Delta} f = 0$ eşitliği sağlanır ve Teorem 2.6.4'ten dolayı $\exists F \in \mathcal{H}(D_r(a))$ öyle ki $F' = f|D_r(a)$ olur. $\square$

Örnek 2.6.8. (1) $\mathbb{C}_{-\pi}$ kümesi her pozitif p gerçel sayısına göre yıldız biçimlidir. $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}_{-\pi}$'de holomorftur ve her $z \in \mathbb{C}_{-\pi}$ için $F(z) = \int_{\overrightarrow{1z}} f(z)dz$ ile tanımlanan F fonksiyonu $\mathbb{C}_{-\pi}$'de f fonksiyonunun bir ilkelidir. Teorem 2.6.4(ii)'den dolayı, $F(z)$ değeri, $r = |z|$ ve $\varphi = \operatorname{Arg} z$ ve $\gamma(t) := re^{it}$, $t \in [0, \varphi]$ olmak üzere, $\overrightarrow{1r}+\gamma$ gezisi üzerinden (bkz. Şekil 2.12)

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\overrightarrow{1r}} f + \int_\gamma f = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^\varphi \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= \ln r + i\varphi = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \operatorname{Log} z \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. F ve Log fonksiyonları f fonksiyonunun $\mathbb{C}_{-\pi}$ bölgesindeki iki ilkeli olarak bir c sabiti kadar fark ederler. Ancak $F(1) = 0 = \operatorname{Log} 1$ olduğundan $c = 0$, dolayısıyla $F = \operatorname{Log}$ olur.

(2) **Merkezileştirme.** Her $z \in D_r(a)$ için

$$n(\kappa_{r,a}, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{r,a}} \frac{dw}{w - z} = 1$$

olduğunu göstereceğiz. Not 2.4.13(3)'te $z = a$ olduğunda, dd. z noktası $\kappa_{r,a}$ çemberimizin merkezi olduğunda $n(\kappa_{r,a}, a) = 1$ olduğunu görmüştük. Savımızı kanıtlamak için uygun bir ρ ile $n(\kappa_{r,a}, z) = n(\kappa_{\rho,z}, z)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ ve α, β gezileri Şekil 2.13'teki gibi olsunlar. $0 < \rho < r$ olsun. $\mathbb{C}_{-\pi}(z)$ yıldız biçimli ve $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{w-z}$ fonksiyonu orada holomorf olduğundan, $\int_{\gamma_1\alpha\gamma_3\beta} f = 0$ olur. Benzer biçimde $\mathbb{C}_0(z)$ yıldız biçimli ve f orada holomorf olduğundan, $\int_{\gamma_2\beta^-\lambda_4\alpha^-} f = 0$. Dolayısıyla,

$$0 = \int_{\gamma_1\alpha\gamma_3\beta} f + \int_{\gamma_2\beta^-\gamma_4\alpha^-} f = \int_{\kappa_{r,a}} f + \int_{\kappa_\rho^-, z,} f$$

elde ederiz. Bu ise, $n(\kappa_{r,a}, z) = \int_{\kappa_{r,a}} f = \int_{\kappa_{\rho,z}} f = n(\kappa_{\rho,z}, z) = 1$ demektir.

İkinci örneğimizde $z \in D_r(a)$ ve $f(w) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w-z}$ olmak üzere, $\overline{D}_\rho(z) \subset D_r(a)$ ise $\int_{\kappa_{r,a}} f = \int_{\kappa_{\rho,z}} f$ olduğunu gösterdik ve beklentimiz $\int_{\kappa_{\rho,z}} f$ integralinin $\int_{\kappa_{r,a}} f$ integralinden daha kolay hesaplanacağı yönündedir. Ana fikri bir önsav altında verelim:

Önsav 2.6.9 (Merkezileştirme)**.** *U açık ve $0 < \rho < r$ olmak üzere, $\overline{D}_\rho(b) \subset \overline{D}_r(a) \subset U$ olsun. Her $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{b\})$ için $\int_{\kappa_{r,a}} f = \int_{\kappa_{\rho,b}} f$. Eğer ayrıca f fonksiyonu b noktasının bir komşuluğunda sınırlıysa, $\int_{\kappa_{r,a}} f = 0$.*

Kanıt. Savın ilk kısmı aynen örneğimizde olduğu gibi kanıtlanır. Eğer her $z \in D^*_\sigma(b)$ için $|f(z)| \leq M$ ise, her $\rho \leq \sigma$ için $\left|\int_{\kappa_{r,a}} f\right| = \left|\int_{\kappa_{\rho,b}} f\right| \leq 2\pi\rho M$ olur ve buradan $\rho \to 0$ ile savın kalanı elde edilir. □

$\gamma \in \mathcal{G}^i$ kapalı ve $z \in \mathbb{C}\setminus\underline{\gamma}$ olsun.

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

sayısına γ gezisinin z noktası etrafındaki **dönme sayısı** denir. Kısım 2.10'da bunu farklı tanımlayıp ayrıntılı olarak inceleyeceğiz. Şimdilik şu kadarını bilmek yeterlidir: $n(\gamma, z)$ tam değerlidir ve $\mathbb{C}\setminus\underline{\gamma}$'nın bağlantılı bileşenlerinde sabittir. Biraz yukarıda her $z \in D_r(a)$ için

$$n(\kappa_{r,a}, z) = n(\kappa_{r,a}, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{dw}{w-a} = 1$$

olduğunu gördük.

Teorem 2.6.10 (Cauchy formülü)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve yıldız biçimli; $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ kapalı olsun. Bu durumda, her $z \in U\setminus\underline{\gamma}$ için*

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Kanıt. $z \in U\setminus\underline{\gamma}$ sabit tutulsun ve

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & \zeta \in U\setminus\{z\} \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $g \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U \backslash \{z\})$ olduğundan, (2.6.5) ile

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)n(\gamma, z)$$

ve bu, savımızdır. □

Teorem 2.6.11. *f fonksiyonu U açık kümesinde holomorf ve $D_R(a) \subset U$ ise, f fonksiyonu $D_R(a)$ dairesinde $\sum a_n(z-a)^n$ gibi bir kuvvet serisine açılabilir. $0 < r < R$ ise,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta, \ n \in \mathbb{N}, \ \textit{dolayısıyla} \tag{2.19}$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

Sonuç 2.6.12. *Her açık $U \subset \mathbb{C}$ için $\mathcal{A}(U) = \mathcal{H}(U) = \mathcal{I}(U)$.*

Kanıt. $D_R(a) \subset U, f \in \mathcal{H}(U)$ ve $0 < r < R$ olsun. $D_R(a)$ dışbükey ve her $z \in D_r(a)$ için $n(\kappa_{r,a}, z) = 1$ olduğundan, (2.6.10) ile

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \ z \in D_r(a) \tag{2.21}$$

olur. Teorem 2.5.4'ten dolayı, (2.21)'in sağ yanı $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma_r}$'de bir analitik fonksiyon tanımlar ve bu fonksiyon $D_r(a)$ açık dairesinde katsayıları (2.19) ile verilen bir kuvvet serisine açılır; ancak bu seri $D_r(a)$'da f fonksiyonudur. Aynı mantıkla herhangi bir $r < r_* < R$ için f fonksiyonu $D_{r_*}(a)$ dairesinde bir $\sum b_n(z-a)^n$ kuvvet serisine açılabilir. Ancak $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = b_n$ olduğundan bu seriler özdeştirler ve aynı zamanda (2.20) geçerlidir.

Sonucun kanıtı: Teorem 2.6.7 ile $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{I}(U)$, ve Teorem 2.6.11 ile $\mathcal{A}(U) = \mathcal{H}(U)$ olduğundan, $\mathcal{H}(U) \supset \mathcal{I}(U)$ bağıntısını göstermek yeterlidir. $f \in \mathcal{I}(U)$ ise, f fonksiyonu yerel olarak bir holomorf fonksiyonun türevidir. Ancak Teorem 2.6.11'den dolayı holomorf fonksiyonlar her mertebeden türevlenebilir olduklarından, f fonksiyonu yerel olarak türevlenebilir, dolayısıyla, türevlenebilirdir. □

Sonuç 2.6.12 bize bir yandan gerçel analizle kompleks analiz arasındaki önemli farklardan birini gösterir: Bir $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu U açık kümesinde bir kez kompleks türevlenebilirse orada her mertebeden kompleks türevlenebilir, buna karşın biz her $n \in \mathbb{N}^*$ için bir (a, b) aralığında n kez türevlenebilen ancak $n+1$ kez türevlenemeyen fonksiyonların olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, Sonuç 2.6.12 Goursat öncesi çalışmalardaki "$f \in \mathcal{H}(U)$ ve $f' \in \mathcal{C}(U)$" koşullarının yerine salt "$f \in \mathcal{H}(U)$" koşulunu alabileceğimizi söyler.

Teorem 2.6.13 (Morera Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{C}(U)$ ve her kapalı $\Delta \subset U$ üçgeni için $\int_{\partial\Delta} f = 0$ ise, $f \in \mathcal{H}(U)$ olur.*

Kanıt. Her $D_r(a) \subset U$ dışbükey olduğundan, Teorem 2.6.4'ten dolayı $f \in \mathcal{I}(U)$. Bu ise, (2.6.12) ile $f \in \mathcal{H}(U)$ demektir. □

$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinin bir kapalı A altkümesi verilsin. $f \in \mathcal{H}(U \backslash A)$ ve $F : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu f'nin bir genişlemesi olsun. $F \in \mathcal{C}(U)$ (veya $F \in \mathcal{H}(U)$) ise, F fonksiyonu f fonksiyonunu A'ya **sürekli** (veya **holomorf**) **genişletir** denir.

Teorem 2.6.14 (Riemann Genişletme Teoremi)**.** *A kümesi $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinin kapalı ve ayrık bir altkümesi ve $f \in \mathcal{H}(U \backslash A)$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *f fonksiyonu A'ya holomorf genişletilebilir.*
(ii) *f fonksiyonu A'ya sürekli genişletilebilir.*
(iii) *f fonksiyonu, her $a \in A$ noktası için bir $D_r^*(a)$'da ($r = r(a)$) sınırlıdır.*
(iv) *Her $a \in A$ için $\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$.*

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv) aşikâr. Şimdi (iv)$\Longrightarrow$(i)'i kanıtlayalım:

Her $a \in A$ için $\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$ olsun ve $a \in A$ keyfi verilsin. A ayrık olduğundan, bir r yarıçapı $D_r^*(a) \subset U \backslash A$ olacak biçimde seçilebilir. Her $z \in D_r^*(a)$ için $g(z) := (z-a)f(z)$ ve $g(a) = 0$ olarak tanımlanan g fonksiyonu koşullarımızdan dolayı $D_r^*(a)$'da holomorf ve $D_r(a)$ dairesinde süreklidir. $D_r(a)$ dairesinde $h(z) := (z-a)g(z)$ olarak tanımlanan fonksiyonun $D_r^*(a)$'da holomorfluğu aşikârdır. Ancak $h(a) = 0$ ve g fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, $h(z) = (z-a)g(z)$ eşitliğinden ve türevin tanımından h fonksiyonunun a noktasında da türevlenebilir ve $h'(a) = g(a) = 0$ olduğu görülür. Böylece h fonksiyonu $D_r(a)$'da holomorftur ve orada

$$h(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k(z-a)^k = (z-a)^2[a_2 + a_3(z-a) + \cdots] =: (z-a)^2 F(z)$$

gibi bir yakınsak kuvvet serisine açılabilir. F fonksiyonu $D_r(a)$ dairesinde holomorftur ve $D_r^*(a)$'da ise f ile örtüşür. Böylece f fonksiyonumuz $a \in A$ noktasına holomorf genişletilebilir. □

Böyle bir şey reel analizde söz konusu değildir. $\mathbb{C}^*$'da tanımlı $f(x,y) = \sin\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right)$ fonksiyonu $\mathcal{C}^\infty$ sınıfından ve tüm $\mathbb{C}^*$'da sınırlıdır; ancak bırakın $z = 0$ noktasına türevlenebilir biçimde genişletmeyi, sürekli olarak bile genişletilemez!

$B \subset \mathbb{C}$ sınırlı bölgesi $a \in B$ noktasına göre yıldız biçimli ve $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ise B'nin pozitif yönlenmiş sınır gezisi $\gamma = \boldsymbol{\partial} B$ olsun. Ayrıca, γ basit kapalı bir integral gezisi olsun. Her $0 < r < 1$ için $\gamma_r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ gezisi

$$\gamma_r(t) := a + r(\gamma(t) - a) = (1 - r)a + r\gamma(t) \tag{2.22}$$

olarak tanımlansın. Her bir γ_r gezisi de, B yıldız biçimli olduğundan basit kapalıdır ve ayrıca her $t, t' \in [\alpha, \beta]$ için $|\gamma_r(t) - \gamma_r(t')| = r\,|\gamma(t) - \gamma(t')|$ olduğundan, γ_r bir integral gezisidir. γ_r'nin çevrelediği bölgeye B_r dersek, $K_r := \overline{B} \backslash B_r$ bir kompakt kümedir.

Önsav 2.6.15. *B, γ, γ_r ve K_r yukarıdaki gibi olmak üzere, bir $0 < r_0 < 1$ için $f \in \mathcal{C}(K_{r_0})$ ise $\lim_{r \nearrow 1} \int_{\gamma_r} f = \int_\gamma f$.*

Kanıt. $r_0 < r < 1$ olmak üzere, her $z \in \underline{\gamma}$ için $f_r(z) := rf\,(a + r(z - a))$ olarak tanımlansın. $f_r \in \mathcal{C}\left(\underline{\gamma}\right)$ ve $r \nearrow 1$ için f_r fonksiyonları $\underline{\gamma}$'da f'ye düzgün yakınsarlar; bu nedenle, $\int_\gamma f = \lim_{r \nearrow 1} \int_\gamma f_r$. Diğer yandan, $\int_\gamma f_r = \int_{\gamma_r} f$ ve bu savı verir. □

Teorem 2.6.16. *Yıldız biçimli $B \subset \mathbb{C}$ sınırlı bölgesinin pozitif yönlenmiş $\boldsymbol{\partial} B$ sınırı basit kapalı bir integral gezisiyse, her $f \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{H}(B)$ ve her $z \in B$ için*

$$\int_{\boldsymbol{\partial} B} f = 0 \;\; \text{ve} \;\; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Kanıt. $\gamma := \boldsymbol{\partial} B$ olmak üzere, her $0 < r < 1$ için γ_r gezisi (2.22) ile verilsin. Sonuç 2.6.5'ten $\int_{\gamma_r} f = 0$ olduğundan, 2.6.15'ten $\int_\gamma f = \lim_{r \nearrow 1} \int_{\gamma_r} f = 0$ olur.

$z \in B$ keyfi verilsin. K_r Önsav 2.6.15'teki gibi tanımlansın. r_0 sayısı $z \notin K_{r_0}$ olacak biçimde seçilirse her $r_0 < r < 1$ için $z \notin K_r$ olacağından, $g(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ile tanımlanan g fonksiyonu K_{r_0}'da sürekli olur ve Teorem 2.6.10 ile

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{r \nearrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) n(\gamma, z) = f(z).$$

Üstte en sağdaki eşitliğin gerekçesini verelim: İleride Kısım 2.10'da γ, sınırlı B bölgesinin —B yıldız biçimli olmasa da— pozitif yönlenmiş basit kapalı sınırıysa, her $z \in B$ için $n(\gamma, z) = 1$ olduğunu göreceğiz. Şimdilik yıldız biçimli bölgeler için şunu söylemekle yetinelim: B bölgesi a noktasına göre yıldız biçimli olsun. Bir $r_0 > 0$ sayısın $\overline{D}_{r_0}(a) \subset B$ olacak biçimde seçelim. $\kappa_{r_0, a}$ gezisini B'de $a\gamma(t)$ ışını boyunca γ gezisine sürekli biçimde öteleyebiliriz ve bu durumda ileride (2.9) Evirmeler kısmında göreceğimiz gibi, her $z \in D_{r_0}(a)$ için

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{r_0, z}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = n(\kappa_{r_0, z}, z) \overset{**}{=} 1$$

olur (okur bunu Önsav 2.6.15'e benzer biçimde kanıtlamayı deneyebilir); $\stackrel{**}{=}$ (2.6.8) Merkezileştirme örneğinde gösterilmiştir. Şimdi $n(\gamma, z)$ fonksiyonu B bölesinde sürekli, $\mathbb{Z}$-değerli olduğundan, her $z \in B$ için 1 değerini alır. □

Bu teoremin şu özel durumu izleyen teoremin kanıtında işimize yarayacaktır: Δ *bir kapalı üçgen ve* $f \in \mathcal{C}(\Delta) \cap \mathcal{H}(\mathring{\Delta})$ *ise,* $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Teorem 2.6.17. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, A ise sonlu sayıda nokta ve sonlu sayıda doğru veya doğru parçalarından oluşan bir küme olsun. $f \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}(U \backslash A)$ ise, $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Kanıt. Morera Teoremi'nden (Teorem 2.6.13) dolayı, her kapalı $\Delta \subset U$ üçgeni için $\int_{\partial\Delta} f = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Böyle bir Δ verilsin. Δ üçgeni sonlu sayıda $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ üçgenlerine, her i için $\mathring{\Delta}_i \cap A = \emptyset$ olacak biçimde parçalanabilir. Sonuç olarak $\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta_1} f + \cdots + \int_{\partial\Delta_n} f = 0$ ve işimiz biter. □

Bu teoremin benzeri gerçel analizde doğru değildir! Örneğin $f(x) = |x|$ ile tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir, $f|\mathbb{R}^*$ türevlenebilir, ancak $\mathbb{R}$'ye türevlenebilir biçimde genişletilemez!

Teorem 2.6.18 (Cauchy eşitsizlikleri)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\overline{D}_r(a) \subset U$ ise*

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!\,\|f\|_{C_r(a)}}{r^n}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

Kanıt. Bir $R > r$ pozitif sayısı $D_R(a) \subset U$ olacak biçimde seçilebilir. Teorem 2.6.11 ile f fonksiyonu $D_r(a)$'da $\sum a_n(z-a)^n$ gibi bir kuvvet serisine açılabilir ve

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$$

olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{\|f\|_{C_r(a)}}{r^{n+1}} = \frac{n!\,\|f\|_{C_r(a)}}{r^n}$$

eşitsizliği geçerlidir. □

Teorem 2.6.19 (Liouville Teoremi)**.** *$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $|f|$ sınırlıysa, f sabittir.*

Kanıt. Varsayımdan dolayı, bir $M > 0$ ile $\|f\|_{\mathbb{C}} \leq M$. f fonksiyonunu 0 noktasında $\mathbb{C}$'de yakınsak $f(z) = \sum a_n z^n$ serisine açarsak, (2.6.18) ile, her $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $r > 0$ için

$$|a_n| = \left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{M}{r^n}$$

elde ederiz ki $r \to +\infty$ ile, her $n \in \mathbb{N}^*$ için $a_n = 0$ dd. $f(z) \equiv a_0$ olur. □

Daha önce de belirtmiştik: $\cos z$ ve $\sin z$ fonksiyonları $\mathbb{C}$'de holomorf ancak sabit olmadıklarından sınırlı olamazlar. İleride Tam Fonksiyonlar kısmında bu fonksiyonları ayrıntılı olarak inceleyeceğiz. Diğer yandan, Liouville Teoremi'nin bir basit sonucu —her holomorf $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ sabit olacağından—, $\mathbb{C}$'nin biholomorf olarak $\mathbb{D}$'ye resmedilemeyeceğidir. Ancak $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ topolojik dönüşümleri vardır.

$U \subset \mathbb{C}$ açık, $\overline{D}_r(a) \subset U$, $f \in \mathcal{H}(U)$ ise, f'nin a noktasındaki seri açılımı

$$f(z) = \sum a_n (z-a)^n = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

olduğundan, Cauchy eşitsizlikleri

$$|a_n| r^n \leq \|f\|_{C_r(a)}$$

şeklini alır. Aslında f fonksiyonu $f(z) \equiv a_n(z-a)^n$ gibi bir monom değilse daima $|a_n| r^n < \|f\|_{C_r(a)}$ (bkz. Teorem 3.1.17).

Problemler

Problem 2.6.1. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $R \subset U$ bir kapalı dikdörtgen ve $f \in \mathcal{C}^1(U)$ ise

$$\iint_R \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy = \frac{1}{2i} \int_{\partial R} f dz$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.6.2. (a) İntegral almadan, her $r > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_{\kappa_r} \frac{\sin z}{z^{n+1}} dz \ \text{ ve } \ \int_{\kappa_r} \frac{\cos z}{z^{n+1}} dz$$

integrallerini hesaplayınız.

(b) Her $\beta \in \mathbb{C}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{\beta^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_1} \frac{\beta^n e^{\beta z}}{n! z^{n+1}} dz$$

olduğunu gösteriniz. İpucu: Cauchy integral formülünden yararlanınız.

Problem 2.6.3. Cauchy integral formülü uygun bir f fonksiyonu, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ ve γ kapalı gezisi için $\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ tipinde integrallerinin hesaplamasında kullanılabilir. Örnek olarak,

1. $\displaystyle\int_{\kappa_1} \frac{e^z + z}{z-2} dz$ 2. $\displaystyle\int_{\kappa_1} e^z z^{-n} dz \quad (n \in \mathbb{N})$ 3. $\displaystyle\int_{\kappa_2} \frac{dz}{1+z^2}$
4. $\displaystyle\int_{\kappa_1} \frac{\cos(z^2)}{z} dz$ 5. $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\frac{1}{2}}} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$ 6. $\displaystyle\int_{\kappa_{1,\frac{1}{2}}} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$

integrallerini hesaplayınız. Benzeri biçimde kendiniz dört örnek tasarlayıp integralleri hesaplayınız.

Problem 2.6.4. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$, $\overline{D}_r(a) \subset B$ ve $M = ||f||_{C_r(a)}$ ise

$$\forall z_1, z_2 \in \overline{D}_{r/2}(a) \;\; |f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{4M}{r}|z_1 - z_2|$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.5. $\log_0 z = \ln|z| + i\varphi$, $\varphi \in \mathbf{arg}\, z$, $0 < \varphi < 2\pi$ logaritmanın $\mathbb{C}\backslash[0, +\infty)$'daki holomorf dalı ve $f(z) = \sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2}\log_0 z)$ ise $\sqrt{\mathbf{z}}$'nin aynı yerdeki holomorf dalı olsun. $0 < r < 2\pi$ olmak üzere, $\gamma_r : [r, 2\pi - r] \to \mathbb{C}$ gezisi ise $\gamma_r(t) := e^{it}$ ile verilmiş olsun.

$$I_r := \int_{\gamma_r} \sqrt{z}dz := \int_{\gamma_r} f = -\frac{4}{3}\cos\frac{3r}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız. Bir yandan $r \searrow 0$ için γ_r gezisi $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ kapalı gezisine yakınsar, diğer yandan $\lim_{r\to 0} I_r = -\frac{4}{3}$ sağlanır. Bu sonuç Cauchy Teoremi'yle niçin çelişmez?

Problem 2.6.6. $\int_{\kappa_1} |z+1|^2 dz$ integralini Cauchy integral formülünden yararlanarak hesaplayınız. İpucu: $z \in \underline{\kappa_1} = \mathbb{S}$ için $\overline{z} = 1/z$ olduğundan yararlanınız.

Problem 2.6.7. $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{H}})$ ve K, p pozitif sayıları ile, her $z \in \overline{\mathbb{H}}$ için $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ ise, her $z \in \mathbb{H}$ için

$$f(z) = \mathrm{CPV}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt$$

olduğunu gösteriniz. İpucu: $r > 0$ için $\kappa_r^+ := \kappa_r|[0, \pi]$, dd. 0 merkezli r yarıçaplı κ_r gezimizin $\overline{\mathbb{H}}$'deki kısmı ve $\gamma_r^+ := \overrightarrow{(-r)r} + \kappa_r^+$ olmak üzere, yeterince büyük r değerleri için γ_r^+ gezileriyle çalışınız.

Problem 2.6.8. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $(f_n) \subset \mathcal{C}(B)$ dizisi B'de kompakt düzgün yakınsak olsun. Her f_n fonksiyonunun B'de bir ilkeli var ve $f := \lim f_n$ ise, f'nin de B'de bir ilkeli olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.9. $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomunun derecesi ≥ 2 ise, bir $R > 0$ sayısının, her $r \geq R$ için $\int_{\kappa_r} \frac{dz}{p(z)} = 0$ olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.

Problem 2.6.10. (a) Her $z \in \mathbb{H}$ için $f(z) := \frac{z-i}{z+i}$ ise, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ ve $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{D}$ olduğunu gösteriniz.

(b) (a)'dan yararlanarak sabit olmayan bir $h : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ holomorf fonksiyonunun olamayacağını gösteriniz.

Problem 2.6.11. Maksimum İlkesini Cauchy integral formülü üzerinden kanıtlayınız.

Problem 2.6.12. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\overline{D_r(a)} \subset U$ olsun.

$$|f(a)| < \min_{|z-a|=r} |f(z)|$$

ise, f'nin $D_r(a)$'da sıfır yeri olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.6.13. Hiçbir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ için $|f'(0)| > ||f||_{\partial\mathbb{D}}$ olamayacağını gösteriniz.

Problem 2.6.14. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ ise, $a = 0$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, (2.23) Cauchy Eşitsizlikleri hangi r için en iyisidir, dd. hangi $0 < r < 1$ için bu eşitsizliğin sağ yanı minimaldir?

Problem 2.6.15. $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, her $z \in \partial\mathbb{D}$ için $f(z) = z^{-n}$ koşulunu sağlayan bir $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ var mıdır?

Problem 2.6.16. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in \mathcal{H}(B)$ sabit değilse f'nin bir açık dönüşüm olduğunu Problem 2.6.12'den yararlanarak kanıtlayınız.

Problem 2.6.17. $B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge, $f \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{H}(B)$ ve f sabit değilse $\partial f(B) \subset f(\partial B)$ olduğunu gösterip $\partial f(B) \subsetneq f(\partial B)$ olabileceğini örnekleyiniz.

Problem 2.6.18. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, D bir açık daire, $\overline{D} \subset B$ ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olsun. f fonksiyonu D'de sabit değil ancak $|f|$ fonksiyonu ∂D'de sabitse f'nin D'de en az bir sıfır yeri vardır; gösteriniz.

Problem 2.6.19. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in B$, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $(f^{(n)}(a))$ dizisi yakınsak olsun.

(a) $F|B = f$ olacak biçimde tam bir $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$'nin varlığını kanıtlayınız.

(b) $(F^{(n)})$ dizisinin $\mathbb{C}$'de kompakt düzgün yakınsaklığını kanıtlayınız.

Problem 2.6.20. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ve $f(0) = 0$ ise, $\sum_{n\geq 0} f(z^n)$ serisinin $\mathbb{D}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.21. $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$ ve $g(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ ise, aşağıdakileri gösteriniz:

(1) $F(z) = \sum_{n\geq 1} a_n g(z^n)$ ve $G(z) = \sum_{n\geq 1} b_n f(z^n)$ serilerinin $\mathbb{D}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu gösteriniz.

(2) F ve G'nin $a = 0$ noktasındaki seri açılımlarını bulup $F = G$ olduğunu gösteriniz.

(3) Her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Log}(1 + z^n) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{z^n}{1 - z^n} \quad \text{ve}$$

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1 + z^n}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.22. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ve $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ise, her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

olduğunu gösteriniz. Problem 1.1.24'teki T_a dönüşümünden yararlanabilirsiniz.

Problem 2.6.23. $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf ve iki farklı $a, b \in \mathbb{D}$ için $f(a) = a$ ve $f(b) = b$ ise, her $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.24. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a\})$ ve f fonksiyonu a noktasının bir komşuluğunda sınırlı olsun. Her $z \in U$ için $h(z) := (z - a)f(z)$ olarak tanımlayıp $h \in$

$\mathcal{C}(U)$ olduğunu kanıtlayıp Morera Teoremi'ni kullanarak f'nin a'da bir kaldırılabilir tekilliği olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.6.25. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ve bağlantılı, $a, b \in K$ ise, $f(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$ fonksiyonunun $\mathbb{C} \backslash K$'de $\exp F(z) = \frac{z-a}{z-b}$ koşulunu sağlayan bir F ilkeli olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.26. $U := \mathbb{C} \backslash [-1, 1]$ ve $V := \mathbb{C} \backslash ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ olmak üzere, $U \cup V$'de tanımlı $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ fonksiyonunun U ve V açık kümelerinde birer ilkeli olduğunu, ancak $U \cup V$'de bir ilkeli olmadığını gösteriniz.

Problem 2.6.27. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$'nin $z = 0$'daki seri açılımı $\sum a_n z^n$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| \leq (1 - |z|)^{-1}$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| < (n+1)e$ olduğunu kanıtlayınız; burada $e = \exp 1$.

Problem 2.6.28. $(f_n) \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ve $f_n(z) = \sum_{k \geq 0} a_{n,k} z^k$ olsun. Bir $M > 0$ sayısı ile her $n, k \in \mathbb{N}$ için $|a_{n,k}| \leq M$ olsun ve her k için $(a_{n,k})_{n \geq 0}$ dizisi bir a_k sayısına yakınsak olsun. Bu koşullarda (f_n) dizisinin $\mathbb{D}$'de kompakt düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.29. $f(z) := \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1}, & z \in D_{2\pi}^* \\ 1, & z = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanan f fonksiyonunun $D_{2\pi}$'de holomorf olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.30. Problem 2.6.29'daki f'nin $D_{2\pi}$'deki seriye açılımı

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$$

ise, B_n sayılarına **Bernoulli sayıları** denir.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B_{n-k}}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 0 \end{cases}$$

ve ayrıca, her tek $n \geq 3$ için $B_n = 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.31. Cauchy formülünden yararlanarak

$$\int_{\kappa_1} \left(z - \frac{1}{z} \right)^n \frac{dz}{z}$$

integralini hesaplayınız.

Problem 2.6.32. $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $|f(z)| < |g(z)|$ ise, bir $a \in \mathbb{C}$ ile $f = ag$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.6.33. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve her $z \in B$ için $f'(z) \neq 0$ ise

$$\{\operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Im} f(z) \mid z \in B\}$$

kümesinin $\mathbb{R}$'de açık olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.34. $|f'| < |f|$ koşulunu sağlayan tüm $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

Problem 2.6.35. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ sayıları $\mathbb{R}$-doğrusal bağımsız, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $f(z+\omega_i) = f(z), i = 1, 2$ olsun. f'nin sabit olduğunu gösteriniz. İpucu: f fonksiyonu $\mathbb{C}$'de aldığı her değeri köşeleri 0, ω_1, ω_2, $\omega_1 + \omega_2$ olan kapalı paralelkenarda alır.

2.7 Geçmişe Bir Bakış

Goursat Teoremi kanıtlanmadan önce Cauchy Teoremi, Green Teoremi (bkz. Teorem 5.3.23) üzerinden kanıtlanırdı. Altkısım 5.3.1'de gerçel katsayılı türevsel biçimlerden söz edilmiştir. Şimdi katsayıların kompleks sayılar olmasına izin vereceğiz. $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde **birinci dereceden bir türevsel biçimden** $P, Q : U \to \mathbb{C}$ ve her zaman ki gibi $z = (x, y)$ olmak üzere, $\omega(z) = P(z)dx + Q(z)dy$ ifadelerini anlayacağız. $P, Q \in \mathcal{C}(U)$ (veya $P, Q \in \mathcal{C}^1(U)$) ise ω türevsel biçimi U'da süreklidir (veya sürekli türevlenebilirdir) denir. $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-türevlenebilirse yine $df = f_x dx + f_y dy$ bize U'da birinci dereceden bir türevsel biçim verir. Özellikle $\mathrm{Id}(z) = z$ ve $\overline{\mathrm{Id}}(z) = \overline{z}$ ile tanımlanan $\mathrm{Id}, \overline{\mathrm{Id}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonları için $d\mathrm{Id} = dx + idy$ ve $d\overline{\mathrm{Id}} = dx - idy$ olur ve biz de geleneğe uyarak $d\mathrm{Id}$ ve $d\overline{\mathrm{Id}}$ yerine dz ve $d\overline{z}$ yazacağız. Bu gösterimlerle $dz = dx + idy$ ve $d\overline{z} = dx - idy$ olur. Buradan

$$df = f_x dx + f_y dy = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z} \tag{2.24}$$

görülebilir. Diğer yandan,

$$dz \wedge dz = d\overline{z} \wedge d\overline{z} = 0 \quad \text{ve} \quad d\overline{z} \wedge dz = -dz \wedge d\overline{z} = 2idx \wedge dy \tag{2.25}$$

olduğu kolayca görülür (bkz. s. 387). Kompleks analizde biz genellikle $\omega(z) = f(z)dz$ tipinde türevsel biçimlerle ilgileniriz. γ bir integral gezisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ise, $\omega = fdz$ türevseli için tanım gereği

$$\int_\gamma \omega \equiv \int_\gamma f(z)dz := \int_\gamma f.$$

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir açık küme $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ ve $f \in \mathcal{C}^1(U)$ olsun. (2.24) ve (2.25) ile $\omega(z) = f(z)dz$ için

$$\begin{aligned} d\omega(z) &= df(z) \wedge dz = [f_z(z)dz + f_{\overline{z}}(z)d\overline{z}] \wedge dz \\ &= f_{\overline{z}}(z)d\overline{z} \wedge dz = 2if_{\overline{z}}(z)dx \wedge dy \end{aligned} \tag{2.26}$$

elde ederiz. $f = u + iv$ için $\omega = fdz = f(dx + idy) = fdx + ifdy = Pdx + Qdy$ olduğunu gözetirsek, (5.3.23) Green Teoremi'nden aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 2.7.1. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve ∂B sonlu sayıda basit kapalı integral gezisinden oluşsun. $f = u + iv \in \mathcal{C}(\overline{B})$ ve u_x, u_y, v_x, v_y türevleri B'de var ve orada sürekli ve sınırlı iseler, $\boldsymbol{\partial} B$ pozitif yönlenmiş olmak üzere,*

$$\int_{\boldsymbol{\partial} B} f(z)dz = \int\int_B f_{\overline{z}}(z)d\overline{z} \wedge dz = 2i \int\int_B \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)dxdy.$$

Sonuç 2.7.2 (Cauchy Teoremi)**.** *$f \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{C}^1(B) \cap \mathcal{H}(B)$ ise*

$$\int_{\boldsymbol{\partial} B} f(z)dz = 0.$$

Kanıt. Teorem doğrudan (5.3.23) Green Teoremi ve (2.26)'dan çıkar. $f \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{C}^1(B) \cap \mathcal{H}(B)$ ise, B'de $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) \equiv 0$ olduğundan, bir yandan teoremin koşulları sağlanır, diğer yandan $\int\int_B \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)d\overline{z} \wedge dz = 0$ olur ve bu, bize (2.7.2) sonucunu verir. □

Biz artık Goursat Teoremi'nden sonra Sonuç 2.7.2'deki $f \in \mathcal{C}^1(B)$ koşulunun $\mathcal{H}(B)$'nin bir sonucu olduğunu biliyoruz. Şimdi **Cauchy-Green** veya **Pompeiu Formülü** olarak adlandırılan bir formülü kanıtlayacağız.

Teorem 2.7.3. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve ∂B sonlu sayıda basit kapalı integral gezisinden oluşsun. Her $f \in \mathcal{C}^1(\overline{B})$ ve her $z \in B$ için*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\int_B \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\overline{\zeta} \wedge d\zeta \qquad (2.27) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int\int_B \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z} dudv. \end{aligned}$$

Sonuç 2.7.4 (Cauchy Formülü)**.** *Aynı koşullarda ayrıca $f \in \mathcal{H}(B)$ ise her $z \in B$ için*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Kanıt. $z \in B$ keyfi verilsin. ζ'nin kartezyen koordinatları u, v olsun. $\varepsilon > 0$ sayısını $\overline{D_\varepsilon}(z) \subset B$ olacak biçimde seçelim. $U_\varepsilon := B \backslash \overline{D_\varepsilon}(z)$ sınırlı açık kümesinin sınırı sonlu sayıda basit kapalı integral gezilerinden oluşur; özetle $\boldsymbol{\partial} U_\varepsilon$ yönlenmiş sınırı $\boldsymbol{\partial} B$ ve $\kappa^-_{\varepsilon,z}$'den oluşur. Şimdi Sonuç 2.7.2'de B yerine U_ε alıp bu teoremi $\omega(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ türevseline uygulayacağız. $h(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ fonksiyonunun $B \backslash \{z\}$'de holomorf, dolayısıyla orada $\frac{\partial h}{\partial \overline{\zeta}} = 0$ ve $d\zeta \wedge d\zeta = 0$ olduğunu da gözetirsek,

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)d\zeta + \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)d\overline{\zeta}\right) \wedge d\zeta \\ &= \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(f(\zeta)\cdot\frac{1}{\zeta - z}\right)d\overline{\zeta}\wedge d\zeta = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta - z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta \\ &= \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta - z}2i du\wedge dv \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\int_{\partial B}\omega - \int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\omega = \int_{\partial U_\varepsilon}\omega = \int\int_{U_\varepsilon} d\omega = \int\int_{U_\varepsilon}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta - z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta,$$

ve buradan

$$\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int\int_{U_\varepsilon}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta - z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta \tag{2.28}$$

elde ederiz. $\varepsilon \to 0$ için

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)2\pi i$$

olduğunu gösterirsek, (2.28)'den sav çıkar.

$$\int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta$$

ve $\int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)2\pi i$ olduğu doğrudan integral tanımından hesaplanır. $f \in \mathcal{C}^1(\overline{B})$ olduğundan, $\overline{D}_r(z) \subset B$ koşulunu sağlayan bir kapalı dairede $df(\zeta)$ türev dönüşümün normu üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, bir $c > 0$ sabiti, her $\zeta, w \in \overline{D}_r(z)$ için $|f(\zeta) - f(w)| \leq c\,|\zeta - w|$ olacak biçimde bulunabilir[8]. Özellikle $0 < \varepsilon < r$ için buradan

$$\left|\int_{\kappa_{\varepsilon,z}}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq c2\pi\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

olur ve teoremle işimiz biter.

Eğer ayrıca $f \in \mathcal{H}(B)$ ise, $\partial f/\partial\overline{\zeta} = 0$ olduğundan, savımız (2.27)'den çıkar. □

[8] Bu, Ortalama Değer Teoremi'nin bir basit sonucudur.

Goursat Teoremi ister istemez Green Teoremi'ni genelleştirme çalışmalarına yol açmıştır ve Lebesgue integral kavramı burada da güçlü bir araç olmuştur. Biz bilgi olarak [10]'da bulabileceğiniz aşağıdaki teoremi vermekle yetineceğiz:

Teorem 2.7.5. *$B \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bölge, ∂B sonlu sayıda basit integral gezilerinden oluşsun. P, Q fonksiyonları $\overline{B}$'de sürekli ve B'de $\mathbb{R}$-türevlenebilir olsunlar. Ayrıca, $\Phi := Q_x - P_y$ fonksiyonu B'de Lebesgue integrallenebilir ve her $(x_0, y_0) \in B$ için*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\int_{D_\varepsilon(a)} (\Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0)) = 0 \tag{2.29}$$

ise, $\omega = Pdx + Qdy$ ve ∂B pozitif yönlenmişse,

$$\int_{\partial B} Pdx + Qdy = \int_{\partial B} \omega = \int\int_B d\omega = \int\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Burada $P, Q \in \mathcal{C}^1(\overline{B})$ koşulundan vazgeçilmiştir ve diğer varsayımlar altında (2.29) koşulu B'de zaten hemen her yerde kendiliğinden sağlanır.

Sonuç 2.6.5'te $B \subset \mathbb{C}$ dışbükeyse, her kapalı $\gamma \in \mathcal{G}^i(B)$ ve her $f \in \mathcal{H}(B)$ için $\int_\gamma f = 0$ olduğunu gördük. Bu teoremin geçerli olduğu bölgeleri belirleme çabaları bizi basit bağlantılı bölge kavramına götürmüştür. Çıkış noktasınıysa Jordan Teoremi oluştur. Kanıtını atlayacağımız bu teoremi verelim:

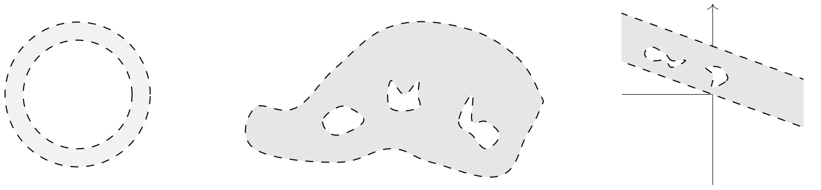
Teorem 2.7.6 (Jordan Teoremi)**.** *$\mathbb{C}_\infty$'daki her basit kapalı γ gezisi için $\mathbb{C}_\infty \backslash \underline{\gamma}$ iki ayrık B_1, B_2 bölgesinin birleşimidir ve $\partial B_1 = \partial B_2 = \underline{\gamma}$.*

B_1, B_2 bölgelerine **γ'nın yanları** denir. Özel olarak γ kapalı Jordan gezimizin izi $\mathbb{C}$'de ise, bu durumda γ'nın yanlarından biri ∞ ögesini içerir, diğeri içermez; içermeyen yana **γ'nın içi** diyecek ve $\mathrm{I}(\gamma)$ ile, ∞ ögesini içeren yanına **γ'nın $\mathbb{C}_\infty$'daki dışı** diyecek ve $\mathrm{D}_\infty(\gamma)$ ile göstereceğiz. Elbette $\mathbb{C}_\infty = \mathrm{I}(\gamma) \sqcup \underline{\gamma} \sqcup \mathrm{D}_\infty(\gamma)$.

Genelde $\mathbb{C}$ kümesinde çalışıldığından, γ'nın **$\mathbb{C}$'deki dışı olarak** $\mathrm{D}(\gamma) := \mathrm{D}_\infty(\gamma) \backslash \{\infty\}$ bölgesini alırız. Bu tanımla, her basit kapalı $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ gezisi için $\partial \mathrm{I}(\gamma) = \partial \mathrm{D}(\gamma) = \underline{\gamma}$ ve $\mathbb{C} = \mathrm{I}(\gamma) \sqcup \underline{\gamma} \sqcup \mathrm{D}(\gamma)$.

Topolojik kavramlar olan iç ve dış veya sağ ve sol yan için 2.10 kısmında analitik tanımlar vereceğiz ve bu kavramları kapalı gezilere genişleteceğiz. Şimdilik amacımız bugünün kavramlarına nerelerden geldiğimiz hakkında bir fikir vermektir.

$\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{C})$ bir basit kapalı gezi olsun. $\mathbb{C} \backslash B = \partial B \cup \mathrm{D}(\gamma)$ kümesi $\mathbb{C}$'de açık ve bağlantılı olan $\mathrm{D}(\gamma)$ bölgesinin $\mathbb{C}$'deki kapanışıdır. $\mathbb{C} \backslash B$ kümesi $\mathbb{C}$'de bağlantılı olan $\mathrm{D}(\gamma)$ bölgesinin $\mathbb{C}$'deki kapanışı olarak bağlantılıdır, ancak kompakt değildir. Buna karşın $\mathbb{C}_\infty \backslash B = \partial B \cup \mathrm{D}(\gamma) \cup \{\infty\}$ kümesi bağlantılı $\mathrm{D}(\gamma)$ kümesinin $\mathbb{C}_\infty$ uzayındaki kapanışı olarak bağlantılıdır. Diğer yandan, bu küme



Şekil 2.14: Basit bağlantılı olmayan bölgelere örnekler.

kompakt Hausdorff uzayı olan $\mathbb{C}_\infty$ uzayının kapalı altkümesi olarak kompakttır, dolayısıyla $\mathbb{C}_\infty \setminus B$ bağlantılı ve kompakttır. Bağlantılı ve kompakt uzaylara **kontinuum** diyeceğiz. $B \subset \mathbb{C}_\infty$ herhangi bir bölge ise, $\mathbb{C}_\infty \setminus B$ kapalıdır ve bunun bağlantılı bileşenleri ise bu kapalı altkümenin bileşenleri olarak yine $\mathbb{C}_\infty$ kompakt uzayında kapalı, dolayısıyla kompakttırlar. Böylece, $\mathbb{C}_\infty \setminus B$'nin bağlantılı bileşenleri birer kontinuumdurlar.

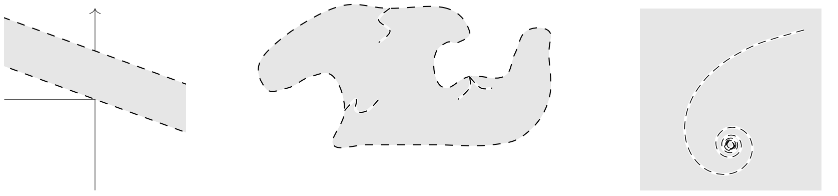
Tanım 2.7.7. $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge olsun. $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, $\mathbb{C}_\infty \setminus B$'nın bağlantılı bileşenleri sonlu sayıda ve n tane ise, B bölgesi n **kez bağlantılıdır** denir; $n = 1$ veya $B = \mathbb{C}_\infty$durumunda ise, dd. $\mathbb{C}_\infty \setminus B$ bağlantılı veya $B = \mathbb{C}_\infty$ ise, B bölgesi **basit bağlantılıdır** denir. $\mathbb{C}_\infty \setminus B$'nın bağlantılı bileşenleri sonsuz çoklukta ise B bölgesi **sonsuz kez bağlantılıdır** denir.

Bu tanıma göre B bölgesinin basit bağlantılı olması tam da $\mathbb{C}_\infty \setminus B$'nin bağlantılı olması demektir. Ayrıca, $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ topolojik dönüşümleri basit bağlantılı kümeleri basit bağlantılı kümelere resmeder. Yukarıda söylenenden $\mathbb{C}_\infty$'deki her kapalı γ Jordan gezisinin yanlarının her biri basit bağlantılıdır. Özellikle eğer $\underline{\gamma} \subset \mathbb{C}$ ise, γ'nın yanları olan $\mathrm{I}(\gamma)$ içi ve $D_\infty(\gamma)$ dışı basit bağlantılı iken, $\mathrm{D}(\gamma)$ dışı basit bağlantılı değildir; çünkü $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathrm{D}(\gamma)$ kümesi iki ayrık $\{\infty\}$ ve $\mathrm{I}(\gamma) \cup \underline{\gamma}$ kontinuumlarının birleşimi olarak bağlantılı değildir. İleride evrimsel basit bağlantılılık ve homolojik basit bağlantılılık kavramlarını verecek ve bu üç kavramın birbirine denk olduğunu kanıtlayacağız (bkz. Teorem 2.12.8).

$U \subset \mathbb{C}$ açık olsun. U**'nun bir deliğinden** $\mathbb{C} \setminus U$'nun bir kompakt bileşeni anlaşılır[9]. V bir açık küme K bir kontinuum ve $K \subset V$ olsun. Bu koşullarda K kümesi $U = V \setminus K$ açık kümesinin bir deliğidir. Şekil 2.14'te verilen basit bağlantılı olmayan bölgelerin soldan sağa sırasıyla 1, 3 ve 2 deliği vardır.

$n \geq 2$ ve $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi n kez bağlantılı olsun. $K_1, \ldots, K_n$ kümeleri, $\mathbb{C}_\infty \setminus B$ kümesinin bağlantılı bileşenleri olsunlar. Bunların her biri kompakt $\mathbb{C}_\infty \setminus B$ kümesinin bağlantılı kapalı altkümeleri olarak birer kontinuumdur. Bu durumda $\mathbb{C}_\infty \setminus B$ kümesi ayrık $K_1, \ldots, K_n$ kontinuumlarının birleşimidir. Bunlardan biri ∞ ögesini içerecektir, ki bu K_n olsun. Bu durumda $U := B \sqcup K_1 \cdots \sqcup K_{n-1}$ kümesi $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ açık kümesinden başka bir şey değildir ve $\mathbb{C}_\infty \setminus U = K_n$ bağlantılı olduğundan, U açık kümesi basit bağlantılıdır. Dolayısıyla, n kez bağlantılı

[9]Bizi açık kümeler ve onların delikleri ilgilendirdiğinden bu tanımla yola çıktık. Ancak herhangi bir $A \subset \mathbb{C}$ altkümesinin deliklerinden de söz edebiliriz (bkz. Problem 2.7.2).



Şekil 2.15: Basit bağlantılı olan kümelere örnekler.

B bölgesini U basit bağlantılı kümesinden ayrık $K_1, \ldots, K_{n-1}$ kontinuumlarını atarak elde ederiz. $K_1, \ldots, K_{n-1}$ kümelerinin her biri B bölgesinin birer deliğidir. Böylece $\mathbb{C}$'deki basit bağlantılı bölgelerimiz delikleri olmayan bölgelerdir ve bu bölgelerdeki kapalı Jordan gezilerinin içleri de bu bölgededir (bkz. Önerme 2.12.9). Burada herhangi bir K_i kontinuumu bir tek noktadan veya bir $\underline{\gamma}$ gezi izinden veya bir $\overline{D}_r(a)$ kapalı dairesinden de vs. oluşabilir.

Bir B bölgesinin deliksiz olmasını bir sonraki kısımdaki *evrilebilirlik* kavramı ile belirleyeceğiz; bu ise kabaca izi B'de olan kapalı gezilerin B'yi terk etmeden sürekli biçimde sabit gezilere dönüştürülebileceği anlamına gelecektir, ileride netleştireceğiz.

Tanım gereği $\mathbb{C}_\infty$ basit bağlantılıdır; $\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{C} = \{\infty\}$ ve $\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{D}$ bağlantılı olduklarından, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ basit bağlantılıdırlar. Düzlemdeki herhangi bir doğrunun herhangi bir tarafı, özellikle

$$\mathbb{H} := \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

üst yarıdüzlemi basit bağlantılıdır. $\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{C}^* = \{0\} \sqcup \{\infty\}$, $\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{D}^* = (\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{D}) \sqcup \{0\}$ ve $\{0\}$, $\{\infty\}$,$\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{D}$ birer kontinuum olduklarından, $\mathbb{C}^*$ ve $\mathbb{D}^*$ iki kez bağlantılı bölgelerdir. $0 < r_1 < r_2$ olmak üzere,

$$H(a; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z - a| < r_2\}$$

kümesine a **merkezli ve** r_1, r_2 **yarıçaplı halka** denir. $\mathbb{C}_\infty \backslash H(a; r_1, r_2)$ kümesi $\overline{D}_{r_1}(a)$ ve $\mathbb{C}_\infty \backslash D_{r_2}(a)$ ayrık kontinuumlarının birleşimi olduğundan, $H(a; r_1, r_2)$ halkası 2 kez bağlantılıdır.

Örneklerimizin ∂_∞ sınırlarına bakalım: $\partial_\infty \mathbb{C} = \{\infty\}$, $\partial_\infty \mathbb{D} = C_1$ olduklarından, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$ basit bağlantılı bölgelerinin ∂_∞ sınırları birer kontinuumdan oluşur. Diğer yandan, $\partial_\infty \mathbb{C}^* = \{0\} \sqcup \{\infty\}$, $\partial_\infty H(a; r_1, r_2) = C_{r_1} \sqcup C_{r_2}$ ve $\partial_\infty \mathbb{D}^* = C_1 \sqcup \{0\}$ olduğundan, iki bağlantılı $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{D}^*$ ve $H(a; r_1, r_2)$ bölgelerimizin ∂_∞ sınırlarının ikişer ayrık kontinuumdan oluştuğunu gözlemliyoruz. Bu bir rastlantı değildir. Bir $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgesinin n kez bağlantılı olmasının tanımı olarak $\partial_\infty B$ sınırının n ayrık kontinuumundan oluşması da seçilebilir [7], [9]. Riemann kaynaklı bir başka yaklaşım için Not 2.12.12'ye bakınız. Biz bunlara girmeyeceğiz. Genelde $\partial B \neq \partial_\infty B$, ancak sınırlı $A \subset \mathbb{C}$ kümeleri için

$\partial A = \partial_\infty A$ olduğunu belirtelim. Dolayısıyla, sınırlı bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin n kez bağlantılı olması ∂B sınırının n ayrık kontinuumun birleşimi olması demektir.

Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{C}_\infty \backslash \mathbb{C}_\alpha = d_\alpha \cup \{\infty\} =: K_\alpha$ bir kontinuum olduğundan, $\mathbb{C}_\alpha$ bölgeleri ve benzer biçimde $\mathbb{C}_\alpha(a)$ bölgeleri basit bağlantılı bölgelerdir (burada aynı zamanda $K_\alpha = \partial_\infty \mathbb{C}_\alpha$ olduğunu belirtelim). $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $S_{a,b}$ dikey ve $S^{a,b}$ yatay şeritleri de basit bağlantılı bölgelerdir. $S_{a,b}$ bölgesinin $\mathbb{C}$'deki sınırı ayrık $l_a = \{z | \operatorname{Re} z = a\}$ ve $l_b = \{z \mid \operatorname{Re} z = b\}$ doğrularından oluşur, dd. $\partial S_{a,b} = l_a \sqcup l_b$. Yine de bu $S_{a,b}$'nin basit bağlantılı olmasıyla çelişmez, çünkü $\partial_\infty S_{a,b} = l_a \sqcup l_b \sqcup \{\infty\}$ bir kontinuumdur; tüm olayı Riemann küresinde daha anlaşılır şekilde görselleştirebiliriz. Aslında $l_a \sqcup l_b \sqcup \{\infty\}$ Riemann küresinde, eş anlamlı olarak $\mathbb{C}_\infty$'da bir Jordan kapalı gezisinin izidir ve $S_{a,b}$ şeridi bu gezinin yanlarından biridir. $S^{a,b}$ şeridi için benzer irdelemeleri yapmayı okura bırakıyoruz.

γ, $\mathbb{C}$'de bir kapalı Jordan gezisi ve $B = \mathrm{I}(\gamma)$ olsun. $\underline{\gamma} = \partial B$'de birbirinden farklı olan $p_1, \ldots, p_m$ noktaları seçelim ve γ_i gezilerini başlangıç noktaları p_i ve $\underline{\gamma_i}$ izleri p_i noktaları dışında tümüyle B'de olup birbirlerini kesmeyecek biçimde seçelim. $B^* := B \backslash \bigcup_{i=1}^m \underline{\gamma_i}$ olsun. B^* bir bölgedir ve $\partial_\infty B^* = \partial B^* = \partial B \cup \bigcup_{i=1}^m \underline{\gamma_i}$ bir kontinuum olduğundan basit bağlantılıdır, ancak artık ∂B^* bir kapalı Jordan gezisinin izi değildir; gerçekten de izi ∂B^* olan bir kapalı gezi $\underline{\gamma_i}$ izleri üzerindeki her bir noktadan en az iki kez geçmek zorundadır, dolayısıyla basit değildir.

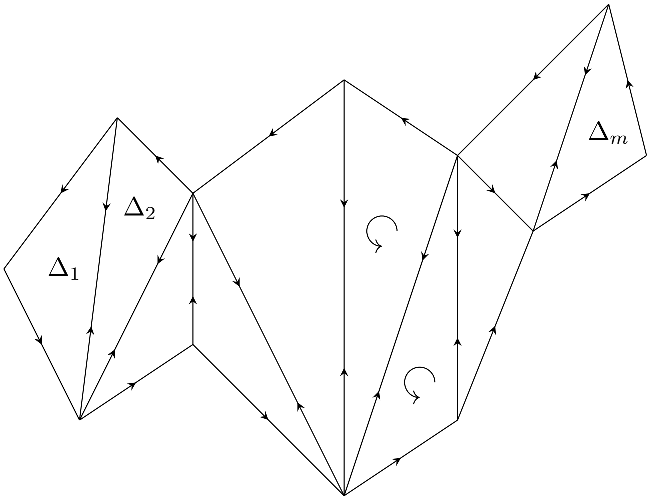
Not 2.7.8. Jordan Teoremi'ni kanıtsız olarak verdik. Yine kanıtsız olarak şu bilgileri paylaşalım: *Bir B bölgesinin basit bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul, B'deki her basit kapalı Jordan gezisinin yanlarından birinin B'de olmasıdır.* Diğer yandan, *her basit bağlantılı $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi $\mathbb{C}$'ye topolojik olarak resmedilebilir.* Bu teorem ileride kanıtlayacağımız Riemann Dönüşüm Teoremi'nin topolojik karşılığı olarak düşünülebilir. Basit bağlantılı $S_{a,b}$ bölgesinin $\mathbb{C}$'deki tümleyeninin bileşenlerinin sınırlı olmadığını belirtelim. Örnek olarak verdiğimiz $B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgelerin tümü için bu geçerlidir ve bu $\mathbb{C}$'deki basit bağlantılığı karakterize eder: $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin basit bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{C} \backslash B$ kümesinin sınırlı bağlantılı bileşeni olmamasıdır.

Teorem 2.7.9 (Cauchy Teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılıysa, her kapalı $\gamma \in \mathcal{G}^i(B)$ ve her $f \in \mathcal{H}(B)$ için $\int_\gamma f = 0$.*

Sonuç 2.7.10. *$B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılıysa, her $f \in \mathcal{H}(B)$'nin B'de bir F ilkeli vardır.*

Kanıt. $B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge olsun. Her şeyden önce $G \subset \mathbb{C}$ bir başka bölge ve $G \cap \partial B = \emptyset$ ise, ya $G \subset B$ ya da $G \subset \mathbb{C} \backslash \overline{B}$ olmak zorundadır. Bu nedenle, izi B'de olan her basit kapalı γ gezisinin $\mathrm{I}(\gamma)$ içi de B'dedir.

Şimdi kapalı bir $\gamma \in \mathcal{G}^i(B)$ gezisi ve bir $f \in \mathcal{H}(B)$ keyfi verilsinler. Teorem 2.4.10(iii) ile, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık B'de kapalı bir Π poligonu $\left|\int_\gamma f - \int_\Pi f\right| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilir. Böylece izi B'de olan her kapalı Π poligonu için $\int_\Pi f = 0$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir.



Şekil 2.16: Üçgenleştirme.

Şimdi B'de kapalı Π poligonu keyfi verilsin. Şunları bilmek yeterlidir:

(a) B'de basit kapalı $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ poligonları $\int_\Pi f = \sum_{i=1}^k \int_{\Pi_i} f$ olacak biçimde bulunabilir.

(b) B'deki her basit kapalı Π poligonu B'de *üçgenleştirilebilir*.

Π poligonunun B'de üçgenleştirilmesinden kastedilen şudur: $\Delta_1, \ldots, \Delta_m \subset B$ kapalı üçgenleri $\mathrm{I}(\Pi) \cup \underline{\Pi} = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$ ve $1 \le i < j \le m$ için $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ veya $\Delta_i \cap \Delta_j$ arakesiti bu iki üçgenin bir ortak kenarı veya bir ortak köşesi olabilecek biçimde bulunabilir (bkz. Şekil 2.16). Bu durumda Π ve $\partial\Delta_i$'ler pozitif yönlenmiş olmak üzere, $\partial\Delta_i$'lerin Π'de geçmeyen her kenarı, bir başka $\partial\Delta_j$'de zıt yönde karşımıza çıktığı için

$$\int_\Pi f = \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Delta_i} f \tag{2.30}$$

olur. Dolayısıyla, (b) ve Goursat Teoremi'nden, B'deki her basit kapalı Π poligonu için $\int_\Pi f = 0$ olur.

Şimdi B'de herhangi bir kapalı Π poligonu verilsin ve B'deki basit kapalı $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ poligonları ise (a)'da belirtildiği gibi seçilirse (2.30) ile

$$\int_\Pi f = \sum_{i=1}^k \int_{\Pi_i} f = 0$$

ve teorem kanıtlanmış olur. Şimdi sırasıyla (a) ve (b)'nin nasıl gerçekleştirilebileceklerini görelim:

$\Pi : [a,b] \to B$ poligonu basit kapalı olmasın. Poligonumuzun köşeleri $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışı ile verilmiş ve köşelerimiz $z_0, \ldots, z_n$ olsun. Gezi sırasında bir kenar üzerinde gidip hemen aynı kenar üzerinde kısmen veya tamamen geri dönüş yapıyorsak, örneğin $z_{k+1} \in [z_{k-1}, z_k]$ ise $\int_{z_{k-1}}^{z_k} f + \int_{z_k}^{z_{k+1}} f = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f$ olduğundan, $\Pi' = \overrightarrow{z_0 \cdots z_{k-1} z_{k+1} \cdots z_n}$ olmak üzere, $\int_\Pi f = \int_{\Pi'} f$ olur. Bu nedenle, biz daha baştan Π poligonumuzda böyle geri dönmelerin olmadığını varsayabiliriz. Poligonumuzun sonlu sayıda kenarı olduğu için de bazı kenarların çaprazlama kesişme noktaları varsa bunların sayısı sonludur.

Varsayımımızdan dolayı, $a \leq s_1 < s_2 < b$ sayıları $\Pi(s_1) = \Pi(s_2)$ olacak biçimde vardır. $\Pi_1' := \Pi|\,[a, s_1]$, $\Pi_2' := \Pi|\,[s_2, b]$ olsun. Π_1' poligonunun bitiş noktası Π_2' poligonunun başlangıç noktası olduğundan, Π_2' gezisi Π_1' gezisine eklenebilir ve $\Pi' := \Pi_1'\Pi_2'$ gezisi de bir kapalı poligondur. Ayrıca, $\Pi'' := \Pi|\,[s_1, s_2]$ poligonu da kapalıdır ve

$$\int_\Pi f = \int_{\Pi_1'} f + \int_{\Pi''} f + \int_{\Pi_2'} f = \int_{\Pi_1'} f + \int_{\Pi_2'} + \int_{\Pi''} f = \int_{\Pi'} f + \int_{\Pi''} f$$

Eğer Π' ve Π'' poligonları basit kapalı iseler işimiz biter; bunlardan basit kapalı olmayan(lar)la aynı işlem tekrarlanır ve Π'nin kenarlarının kesişme noktaları sonlu sayıda olduğu için sonlu adımda B'de basit kapalı Π_i poligonları $\int_\Pi f = \sum_{i=1}^k \int_{\Pi_i} f$ olacak biçimde bulunur.

Şimdi B'deki basit kapalı her Π poligonunun üçgenleştirilebileceği tümevarımla kolayca görülür. Her bir poligonumuz $n \geq 3$ olmak üzere, bir n-gendir. $n = 3$ için önümüzde zaten bir üçgen var. Savımız basit kapalı n-genler için kanıtlanmış ve şimdi bize B'de basit kapalı bir $(n+1)$-gen verilmiş olsun. $z_i, z_j \in \Pi$ poligonumuzun farklı köşeleri olmak üzere, $(z_i, z_j) \subset \mathrm{I}(\Pi)$ ise $[z_i, z_j]$ doğru parçasına Π'nın bir *köşegeni* denir. Düzlem geometrisinden, her basit kapalı Π poligonunun en az bir köşegeni olduğu görülür [9]. Genellikten bir şey kaybetmeden Π poligonumuzu pozitif yönlenmiş alabiliriz. Herhangi bir köşegen yardımıyla Π poligonumuz basit kapalı iki Π_1, Π_2 poligonuna ayrılır. Bu poligonların kenar sayıları $\leq n$ olduğundan, tümevarım koşulundan üçgenleştirilebilirler ve bu üçgenleştirmelerin bize Π'nın bir üçgenleştirilmesini verdiği apaçıktır.

Sonuç doğrudan (2.6.6) İlkel Teoremi'nden çıkar. □

İleride bu teoremi Jordan Teoremi'ne başvurmadan kanıtlayacak ve ayrıca herhangi bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi için Teorem 2.7.9'un savı sağlanmışsa, dd. her $\eta \in \mathcal{G}^i(B)$ ve her $f \in \mathcal{H}(B)$ için $\int_\eta f = 0$ ise, bu B bölgesinin basit bağlantılı olduğunu göstereceğiz.

[40]'ta şöyle bir yol izlenir: Her dışbükey kapalı poligon üçgenleştirilebilir; herhangi bir köşesini diğer köşelerle bir doğruyla birleştirmek yeterlidir. Sonra herhangi bir kapalı poligon üzerinden integralin sonlu sayıda kapalı dışbükey poligonlar üzerinden integrallerin toplamı olarak yazılabileceği gösterilir.

Problemler

Problem 2.7.1. $P, Q \in \mathcal{C}^1(H(0; r, R))$ ve orada $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ise, Green Teoremi'nden yararlanarak, $\omega = Pdx + Qdy$ olmak üzere, her $r < \sigma < \rho < R$ için $\int_{\kappa_\sigma} \omega = \int_\rho \omega$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.7.2. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir altküme olmak üzere, $\mathbb{C}_\infty \backslash A$'nın ∞'u içermeyen her bileşenine A'nın bir **deliği** diyelim. Aşağıdakileri kanıtlayınız:
1. A sınırlıysa, delikleri $\mathbb{C} \backslash A$'nın sınırlı bileşenleridir.
2. A bir açık kümeyse, delikleri kompakttır.
3. A açıksa delikleri tam da $\mathbb{C} \backslash A$'nın sınırlı bileşenleridir.

Problem 2.7.3. $B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge, γ ise B'de kapalı bir geziyse, $\underline{\gamma}$'nın delikleri B'dedir.

Problem 2.7.4. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\mathbb{C}_\infty \backslash U$ bağlantılı olsun. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ve $K \subset U$ ise, aşağıdakileri kanıtlayınız:

(a) $\mathbb{C}_\infty \backslash K$'nin sınırlı bağlantılı bileşenleri U'dadır.

(b) K ile $\mathbb{C}_\infty \backslash K$'nin sınırlı bağlantılı bileşenlerinin birleşimine $\hat{K}$ dersek, $\hat{K}$ bağlantılı ve kompakttır. Ayrıca, K bağlantılıysa, $\mathbb{C}_\infty \backslash \hat{K}$'nin sınırlı bağlantılı bileşeni yoktur.

(c) $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ kapalı geziyse, her $z \in \mathbb{C} \backslash \hat{\underline{\gamma}}$ için $n(\gamma, z) = 0$, dd. $\mathrm{I}(\gamma) \subset \hat{\gamma}$.

2.8 Geziler Üzerinden İntegraller ve İlkeller

Goursat Teoremi'nin bir sonucu olarak $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{I}(U)$ olduğunu gördük (Teorem 2.6.7). Bu bize herhangi bir $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki holomorf fonksiyonların buradaki tüm geziler için integralini tanımlama fırsatı verir.

$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ olsun. $\gamma : [a, b] \to U$ gezimizin, $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ ve $\gamma_i := \gamma|[t_{i-1}, t_i]$ olmak üzere, bir $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışı ve $U_i \subset U$ açık kümeleri şu şekilde seçilmiş olsunlar: Her bir i için $\underline{\gamma_i} \subset U_i$ ve U_i açık kümesinde $f|U_i$ fonksiyonun bir F_i ilkeli vardır. γ_i'nin başlangıç noktası z_{i-1} ve son noktası z_i olsun. Eğer $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ ise

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f = \sum_{i=1}^n (F_i(z_i) - F_i(z_{i-1})) \tag{2.31}$$

olduğunu biliyoruz.

Tanım 2.8.1. γ yalnızca sürekli oluğunda da $\int_\gamma f$ integralini (2.31) olarak tanımlıyoruz.

Önce bu tanımın kusursuz olduğunu görelim: Öncelikle, Teorem 2.6.2'den biliyoruz ki U'daki her açık dairede f fonksiyonumuzun bir ilkeli vardır. Diğer yandan, U'da γ boyunca daireler zinciri seçebileceğimizi de biliyoruz. Öyleyse, her $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ gezisi ve her $f \in \mathcal{H}(U)$ için böyle γ_i, U_i ve F_i'ler vardır, hatta

U_i kümelerini daireler olarak seçebiliriz. Şimdi (2.31)'in sağ yanının bunların seçiminden bağımsız olduğunu görelim:

Önce γ_i gezilerini sabit tutalım ve $\underline{\gamma_i}$ yolunu içeren V_i açık kümeleri ve orada $f|V_i$ fonksiyonlarının G_i ilkellerini seçtiğimizi varsayalım. B_i ile $U_i \cap V_i$'nin $\underline{\gamma_i}$ yolunu içeren bağlantılı bileşenini gösterirsek, $z_{i-1}, z_i \in B_i$ ve B_i kümesinde $F_i - G_i$ sabit olduğundan, $F_i(z_i) - F_i(z_{i-1}) = G_i(z_i) - G_i(z_{i-1})$ ve

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i(z_i) - F_i(z_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} (G_i(z_i) - G_i(z_{i-1}))$$

olur. Dolayısıyla, $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışı verildiğinde (2.31)'in sağ yanı U_i ve F_i'lerin seçiminden bağımsızdır. Şimdi parçalanıştan bağımsızlığı görmek için şu basit adım yeterlidir: $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ parçalarından birini, diyelim ki γ_i gezisini $t_{i-1} < s_i < t_i$ olmak üzere, $\gamma_i = \gamma_i|[t_{i-1}, s_i] \cdot \gamma_i|[s_i, t_i] =: \gamma_{i1}\gamma_{i2}$ gibi parçalarsak, $\xi_i = \gamma(s_i)$ olmak üzere, $F_i(z_i) - F_i(z_{i-1}) = (F_i(\xi_i) - F_i(z_{i-1})) + (F_i(z_i) - F_i(\xi_i))$ olduğundan, $\gamma_1 \cdots \gamma_{i1}\gamma_{i2} \cdots \gamma_n$ parçalanışı için tanımlanan toplam (2.31)'deki toplama eşittir. Şimdi gerisi aşikârdır: İki farklı parçalanışla verilen toplamlardan, her defasında parçalanışa bir nokta ekleyerek, sonlu adımda bir ortak parçalanıştaki toplamlara geçilir. Sonuncuların birbirine eşit olduğunu az önce tartıştık ve geçişlerde değerler değişmiyor; dolayısıyla tanım kusursuzdur. $\eta \sim \gamma$ ise $\int_\eta f = \int_\gamma f$ olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Böylelikle, bu kavram rotasaldır ve $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ ve $f \in \mathcal{H}(U)$ için

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f := \int_\eta f\,,\ \eta \in \boldsymbol{\gamma}$$

tanımı kusursuzdur.

Tanım 2.8.2. $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\gamma : [a,b] \to U$ bir gezi olsun. Aşağıdaki koşul sağlandığında bir sürekli $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun γ **boyunca bir ilkeli** denir: Her $t_0 \in [a,b]$ için t_0 noktasının $[a,b]$'de açık bir I_0 komşuluğu, $\gamma(t_0)$ noktasının U'da açık bir V_0 komşuluğu ve f'nin V_0'da bir F_0 ilkeli, her $t \in I_0$ için $F(t) = F_0(\gamma(t))$ olacak biçimde vardır.

Teorem 2.8.3. *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\gamma : [a,b] \to U$ bir gezi olsun.*

(i) *f'nin γ boyunca bir $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ ilkeli vardır. f'nin γ boyunca herhangi iki ilkelinin farkı sabittir.*

(ii) *g fonksiyonu f'nin γ boyunca bir ilkeliyse, $\int_\gamma f = g(b) - g(a)$ sağlanır.*

Kanıt. (i) U'da γ boyunca bir $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri seçelim, dd. $[a,b]$'nin bir $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ parçalanışı, $z_k = \gamma(t_k)$ merkezli ve U'ya düşen D_k daireleri, $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere, daima $\underline{\gamma_k} \subset D_{k-1} \cap D_k =: B_k$ olacak biçimde bulunabilirler. Her bir D_k dairesinde f'nin bir F_k ilkelini seçelim.

$G_0 := F_0$ olsun. B_1 bölgesinde bir c_1 sabiti ile $G_0 - F_1 = F_0 - F_1 = c_1$ olur. $G_1 := F_1 + c_1$ olsun. Böylece G_1 fonksiyonu G_0'ın D_1'e bir dolaysız analitik genişlemesidir. Bu işlemle $[t_0, t_1]$ aralığında $g_1(t) := G_0(\gamma(t))$ ile tanımlanan sürekli $g_1$fonksiyonu, $[t_0, t_2]$ aralığına, $g_2|[t_0, t_1] := g_1|[t_0, t_1]$ ve her $t \in [t_1, t_2]$ için $g_2(t) := G_1(\gamma(t))$ ile tanımlanan g sürekli fonksiyonuna genişletilir. Böylece sonlu adımda bir sürekli $g := g_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna ulaşırız ve bu fonksiyon tanımı gereği γ boyunca f'nin bir ilkelidir.

$g, h : [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonları f fonksiyonunun γ boyunca iki ilkeli olsun. f fonksiyonun herhangi bir bölgedeki iki ilkelinin farkı sabit olduğundan, $h - g$ sürekli fonksiyonu yerel sabittir ve $[a, b]$ bağlantılı olduğu içinse sabittir.

(ii) Tanım gereği

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} (G_k(z_k) - G_k(z_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} (g(z_k) - g(z_{k-1})) = g(b) - g(a).$$

□

Önsav 2.8.4. *Eğer $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonunun U'da bir F ilkeli varsa, $\gamma : [a, b] \to U$ bir gezi olmak üzere,*

$$\int_\gamma f = F(s_\gamma) - F(b_\gamma).$$

Özellikle γ kapalı ise, $\int_\gamma f = 0$.

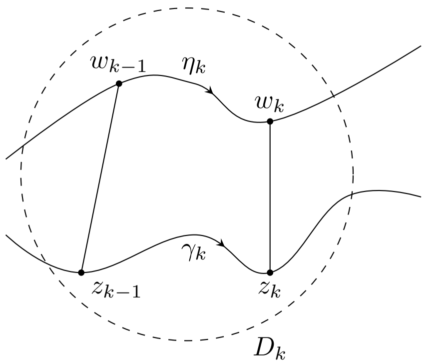
Kanıt. Her $t \in [a, b]$ için $g(t) := F(\gamma(t))$ ile tanımlanan sürekli g fonksiyonu f'nin γ boyunca bir ilkelidir ve

$$\int_\gamma f = g(b) - g(a) = F(s_\gamma) - F(b_\gamma)$$

olur; bu, savı kanıtlar. □

Buna karşın f fonksiyonunun U'da bir global ilkeli yoksa, γ kapalı iken $g(b) \neq g(a)$ ve dolayısıyla $\int_\gamma f \neq 0$ olabilir. Teorem 2.8.3'ün kanıtında daireler zinciriyle çalıştık, açıktır ki bölgeler zinciri ile de çalışabiliriz. Örneğin $U := \mathbb{C}^*$ ve $f(z) = \frac{1}{z}$ olsun. $\gamma : [0, 2\pi] \to U$ gezisi ise $\gamma(t) = re^{it}$, $r > 0$ ile verilmiş olsun. Biz şimdiden $B_0 := \mathbb{C}_{-\pi}$, $B_1 := \mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$, $B_2 := \mathbb{C}_0$ ve $B_3 = \mathbb{C}_{\frac{\pi}{2}}$ bölgelerinde f fonksiyonunun ilkelleri olduğunu biliyoruz ve sırasıyla

$$F_0(z) = \log_{-\pi}(z) = \ln|z| + i \arg_{-\pi}(z), \quad -\pi < \arg_{-\pi}(z) < \pi,$$
$$F_1(z) = \log_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \ln|z| + i \arg_{-\frac{\pi}{2}}(z), \quad -\frac{\pi}{2} < \arg_{-\frac{\pi}{2}}(z) < \frac{3\pi}{2},$$
$$F_2(z) = \log_0(z) = \ln|z| + i \arg_0(z), \quad 0 < \arg_0(z) < 2\pi,$$
$$F_3(z) = L_{\frac{\pi}{2}}(z) = \ln|z| + i \arg_{\frac{\pi}{2}}(z), \quad \frac{\pi}{2} < \arg_{\frac{\pi}{2}}(z) < \frac{5\pi}{2}$$



Şekil 2.17

ilkellerini seçelim. $[0, 2\pi]$ aralığının $\{t_0, \dots, t_4\} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$ parçalanışını seçelim. $\overline{\gamma_k} \subset B_{k-1} \cap B_k$ koşulu sağlanır. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $g_1(t) = L_{-\pi}(\gamma(t)) = L_{-\pi}(re^{it}) = \ln r + it$ ve $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ aralığında $L_{-\frac{\pi}{2}}(\gamma(t)) = \ln r + it$ ve $L_{-\pi}(re^{i\frac{\pi}{2}}) = L_{-\frac{\pi}{2}}(re^{i\frac{\pi}{2}})$ olduğundan, $[0, \pi]$'de $g_2(t) = \ln r + it$ olur. Benzer biçimde devam ederek $[0, 2\pi]$ aralığında $g(t) = \ln r + it$ fonksiyonunun γ boyunca $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonun bir ilkeli olduğu kolayca görülür. γ kapalıdır ancak daha önce başka yöntemlerle hesapladığımız gibi

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{dz}{z} = g(2\pi) - g(0) = 2\pi i.$$

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\gamma, \eta : [a, b] \to U$ iki gezi olsun. $[a, b]$'nin bir $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ parçalanışı ve $1 \leq k \leq n$ için $\gamma_k = \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ ve $\eta_k = \eta|[t_{k-1}, t_k]$ olsun. U kümesinde açık $D_0, \dots, D_n$ daireleri, her k için $\overline{\gamma_k}, \overline{\eta_k} \subset D_k$ olacak biçimde bulunabiliyorlarsa, γ ve η **gezileri U'da birbirine yakındır** denir.

Teorem 2.8.5. *γ ve η gezileri U açık kümesinde birbirine yakın olsunlar. Bunların ya ikisi de kapalı olsun, ya da aynı başlangıç ve aynı bitiş noktalarına sahip olsunlar. Bu koşullarda her $f \in \mathcal{H}(U)$ için $\int_\gamma f = \int_\eta f$.*

Kanıt. P parçalanışı, $D_0, \dots, D_n$ daireleri, γ_k ve η_k gezileri yukarıdaki gibi seçilsinler. $0 \leq k \leq n$ için $z_k = \gamma(t_k)$ ve $w_k = \eta(t_k)$ olsun. D_k daireleri dışbükey olduğundan, $[z_{k-1}, w_{k-1}]$ ve $[z_k, w_k]$ aralıkları D_k dairesindedir (bkz. Şekil 2.17). f'nin her bir D_k dairesinde bir F_k ilkelini seçelim. Bu durumda

$$\int_{\eta_k} f = \int_{w_{k-1}}^{z_{k-1}} f + \int_{\gamma_k} f + \int_{z_k}^{w_k} f$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}\int_\eta f = \sum_{k=1}^n \int_{\eta_k} f &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{w_{k-1}}^{z_{k-1}} f + \int_{\gamma_k} f + \int_{z_k}^{w_k} f \right) \\ &= \int_{w_0}^{z_0} f + \int_\gamma f + \int_{z_n}^{w_n} f = \int_\gamma f\end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin gerekçesi: Ya $z_0 = w_0$ ve $z_n = w_n$ ve dolayısıyla $\int_{w_0}^{z_0} f + \int_{z_n}^{w_n} f = 0 + 0 = 0$ ya da $z_0 = z_n$ ve $w_0 = w_n$ ve dolayısıyla $\int_{w_0}^{z_0} f + \int_{z_n}^{w_n} f = \int_{w_0}^{z_0} f + \int_{z_0}^{w_0} f = 0$. □

Not 2.8.6. Teorem 2.8.5 bize $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ için $\int_\gamma f$ integralini başka türlü tanımlama fırsatı verir. U'da γ'ya yakın herhangi bir $\eta \in \mathcal{G}^i(U)$ (veya $\eta \in \mathcal{G}_p^1(U)$) ile —bunların var olduğunu biliyoruz—, $\int_\gamma f = \int_\eta f$ olarak tanımlayabiliriz.

Teorem 2.8.7. *$U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler ve $f : U \to V$ holomorfsa, her $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ gezisi ve her $g \in \mathcal{H}(V)$ için*

$$\int_{f\circ\gamma} g = \int_\gamma (g \circ f) f'.$$

Kanıt. $\gamma : [0,1] \to U$ ve $\psi : [0,1] \to \mathbb{C}$ ise g fonksiyonunun $f \circ \gamma$ boyunca bir ilkeli olsun. Tanım gereği, her $t_0 \in [0,1]$ için bu noktanın $[0,1]$'de bir I_0 komşuluğu ile $f(\gamma(t_0))$'ın V'ye düşen bir açık W_0 komşuluğu ve g'nin W_0'da bir G_0 ilkeli, her $t \in I_0$ için $\psi(t) = G_0((f \circ \gamma)(t))$ olacak biçimde vardır. Şimdi $f^{-1}(W_0)$ açıktır ve her $z \in f^{-1}(W_0)$ için $(G_0(f(z)))' = g(f(z))f'(z)$ olur. Dolayısıyla, $G_0 \circ f$ fonksiyonu $(g \circ f)f'$'nün bir yerel ilkelidir. Sonuç olarak, ψ aynı zamanda $(g \circ f)f'$'nün $f \circ \gamma$ boyunca bir ilkelidir. Sav, buradan çıkar. □

Problemler

Problem 2.8.1. Aşağıdaki savları birer cümleyle doğrulayınız:

(i) γ kapalı geziyse, $\int_\gamma 3z^2 e^{z^3} dz = 0$ ve $\int_\gamma 2z \cos z^2 dz = 0$ eşitlikleri sağlanır.

(ii) $0 < r < 1$ ise $\int_{\kappa_r} \frac{1}{1+z} dz = 0$.

(iii) $f(z) = \overline{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de süreklidir, ancak orada bir ilkeli yoktur.

Problem 2.8.2. (1) $\operatorname{Log} z$'nin $\mathbb{C}_{-\pi}$'de bir ilkelini bulunuz.
(b) $\int_{\overrightarrow{1,2}} \operatorname{Log} ix dx$ integralini hesaplayınız.

Problem 2.8.3. Aşağıdaki fonksiyonların uygun bölgelerde ilkellerini bulunuz:

1.	$ze^z - \sin z$,	2.	$z \sinh z^2$,	3.	$ze^{z^2} - \frac{1}{z}$
4.	$z \operatorname{Log} z$,	5.	$\frac{\operatorname{Log} z}{z}$,	6.	$\log_0 z - \log_{\pi/2} z$.

Ardından, f bu fonksiyonlardan herhangi biri ve γ ise f'nin ilkelinin bulunduğu bir bölgede bir gezi olmak üzere, $\int_\gamma f$ integrallerini hesaplayınız.

Problem 2.8.4. $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ fonksiyonunun $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 1]$'de bir ilkelini bulunuz ve $\int_{\kappa_{1,1}} f$ integralini hesaplayınız.

Problem 2.8.5. $\gamma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$ gezisi $\gamma(t) = e^{it}$ ile verilmişse $\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}} dz = 2\sqrt{2}i$ olduğunu gösteriniz.

2.9 Evirme (Homotopi)

$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve $f \in \mathcal{H}(U)$ olsun. f'nin U'da bir F ilkeli varsa, $a, b \in U$ olmak üzere, her $\gamma \in \mathcal{G}^i_{a,b}(U)$ için $\int_\gamma f = F(b) - F(a)$ olduğunu gördük, dd. bu koşullarda her $\eta \in \mathcal{G}^i(U)$ için $\int_\eta f$ değeri yalnızca η'nın uç noktalarına bağlıdır. f'nin U'da bir ilkeli yoksa bunun böyle olmadığını biliyoruz. Yine de söyleyeceğimiz bir şey var. Bu kısımda şu önemli teoremi kanıtlayacağız: $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\gamma, \eta \in \mathcal{G}^i_{a,b}(U)$ olmak üzere, γ gezisini, uç noktaları koruyarak, U'da η gezisine evirebiliyorsak $\int_\gamma f = \int_\eta f$. İlk işimiz evirmenin matematiksel tanımını vermektir.

2.9.1 Evirme Kavramı

X, Y topolojik uzaylar ve $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ iki sürekli dönüşüm olsun. $J = [a, b]$ herhangi bir dejenere olmamış aralık olmak üzere, $H : X \times J \to Y$ sürekli dönüşümlerine $\mathcal{C}(X, Y)$'de bir **evirme** denir. Her $s \in J$ için $H_s : X \to Y$ dönüşümü her $x \in X$ için $H_s(x) := H(x, s)$ olarak tanımlanırsa $H_s \in \mathcal{C}(X, Y)$ olduğu açıktır. Bu durumda $\{H_s\}_{s \in J}$'ye $\mathcal{C}(X, Y)$'de sürekli parametrelenmiş bir aile denir. Ayrıca, H dönüşümü H_a **fonksiyonunu** H_b **fonksiyonuna evirir** denir ve bu durum $H : H_a \simeq H_b$ ile gösterilir. Özel olarak $f = H_a$ ve $g = H_b$ ise, H evirmesi f'yi g'ye evirir ve bu $H : f \simeq g$ olarak gösterilir. f fonksiyonunu g fonksiyonuna eviren bir evirme varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna **evrilebilir** veya **homotoptur** denir ve bu $f \simeq g$ ile gösterilir. Bizi ilgilendiren $f \simeq g$ olup olmadığıdır; H'nin kendisi değil varlığı önemli olacaktır.

Önsav 2.9.1. *$H : f \simeq g$ ve $J' = [a', b']$ dejenere olmamış herhangi bir aralık ve $\varphi : J' \to J$ ise $\varphi(a') = a$ ve $\varphi(b') = b$ koşulunu sağlayan herhangi bir sürekli dönüşüm, özellikle bir parametre dönüşümü ise, $H'(x, s') := H(x, \varphi(s'))$ ile tanımlanan $H' : X \times J' \to Y$ dönüşümü de f fonksiyonu g fonksiyonuna evirir.*

Kanıt. Aşikâr. □

Dolayısıyla, f fonksiyonu g fonksiyonuna evrilebiliyorsa J kapalı aralığını istediğimiz gibi seçebileceğimiz evirmelerimiz vardır. Bu nedenle, cebirsel topoloji kitaplarında J olarak daima $I = [0,1]$ kapalı aralığı alınır. $\simeq$ bağıntısı $\mathcal{C}(X,Y)$'de bir *denklik bağıntısıdır*. Gerçekten de $H(x,s) := f(x)$ olarak tanımlanan $H : X \times I \to Y$ dönüşümü f'yi f'ye evirir, dd. $f \simeq f$. Şimdi $f \simeq g$ ve $H : X \times [0,1] \to Y$ evirmesi f'yi g'ye eviriyorsa, $G(x,s) := H(x, 1-s)$ ile tanımlanan $G : X \times [0,1] \to Y$ de bir evirmedir ve g'yi f'ye evirir, dd. $g \simeq f$. Şimdi $f \simeq g$ ve $g \simeq h$ olsun. J kapalı aralığını istediğimiz gibi seçebileceğimizden $J_1 = [a,b]$ ve $J_2 = [b,c]$ olmak üzere, f'yi g'ye eviren $H_1 : X \times J_1 \to Y$ ve g'yi h'ye eviren $H_2 : X \times J_2 \to Y$ evirmelerini seçersek, $J = J_1 \cup J_2 = [a,c]$ olmak üzere, $H|X \times J_i := H_i$ olarak tanımlanan $H : X \times J \to Y$, Önsav 5.2.4'ten dolayı süreklidir, dolayısıyla bir evirmedir ve f'yi h'ye evirir. Eğer cebirsel topolojide olduğu gibi daima $J = J_1 = J_2 = I = [0,1]$ olmasını istersek, bu kez benzer biçimde, $H_1, H_2 : X \times I \to X$ evirmeleri verildiğinde

$$H(x,s) := \begin{cases} H_1(x,2s), & (x,s) \in X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ H_2(x,2s-1), & (x,s) \in X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{2.32}$$

olarak tanımlanan H evirmesine H_1 evirmesine H_2 evirmesinin *eklenmesi* diyelim ve bu durumda $H = H_1H_2$ yazalım. Eğer $[0,1]$ zaman aralığı olarak yorumlanırsa, cebirsel topolojide evirmelerin daima bir zaman biriminde tamamlanması istenir; örneğin bir saatte! O zaman (2.32) Şöyle yorumlanır: İlk yarım saatte iki kat hızla H_1 ile f fonksiyonu g fonksiyonuna, ardından H_2 ile son yarım saatte yine iki kat hızla g fonksiyonu h'ye evrilir. Böylece oluşturulan evirme H_1H_2 evirmesidir.

$H : X \times J \to Y$ bir evirme ve f'yi g'ye eviriyor ve $Z \subset Y$ olmak üzere, $H(X \times J) \subset Z$ ve bunu vurgulamak önemliyse, H, **f'yi g'ye Z'de evirir** der ve bunu $f \overset{Z}{\simeq} g$ ile gösteririz. $\overset{Z}{\simeq}$ de $\mathcal{C}(X,Y)$'de bir denklik bağıntısıdır.

Şimdi X, Y topolojik uzaylar, $A \subset X$ ve $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$ olmak üzere, $f|A = g|A$ olsun. Eğer f'yi g'ye eviren bir $H : X \times J \to Y$ evirmesi, ayrıca her $s \in J$ için $H_s|A = f|A = g|A$ olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu **A'ya göre g'ye evrilebilir** denir ve bu $f \simeq g \operatorname{rel} A$ ile gösterilir. Bu da bir denklik bağıntısıdır.

Biz konumuz gereği rotaların, ancak alışkanlıklara uyarak bunların yerine daha çok gezilerin birbirlerine evrilmesini inceleyeceğiz.

Şimdi X herhangi bir topolojik uzay ve $z, w \in X$ olmak üzere, $\mathcal{G}_{z,w}(X)$ ile izi X'te ve başlangıç noktası z, bitiş noktası w olan gezilerin kümesini, $\mathcal{R}_{z,w}(X)$ ile izi X'te ve başlangıç noktası z, bitiş noktası w olan rotaların kümesini gösterelim. $z = w$ durumunda $\mathcal{G}_{z,z}(X)$ ve $\mathcal{R}_{z,z}(X)$ yerine yalın olarak sırasıyla $\mathcal{G}_z(X)$ ve $\mathcal{R}_z(X)$ yazalım. İzi X'te olan rotaların kümesini $\mathcal{R}(X)$ ile gösterelim. $\mathcal{G}_{kap}(X)$ ve $\mathcal{R}_{kap}(X)$ kümeleriyse, sırasıyla X kümesindeki kapalı gezilerin ve kapalı rotaların kümesi olsunlar. Bu kısımda $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(X)$ rotaları verildiğinde

$\boldsymbol{\gamma}$ rotasının X'te sürekli biçimde $\boldsymbol{\eta}$ rotasına evrilmesini inceleyeceğiz. Bunun için işe önce gezilerin birbirine evrilmesi ile başlayacağız.

$[a,b]$ ve $[c,d]$ bozulmamış iki kapalı aralık olmak üzere, $H:[a,b]\times[c,d]\to X$ tipindeki evirmelerle ilgileneceğiz. Bu durumda, her $s\in[c,d]$ için $\gamma_s\equiv H_s(\cdot,s)$ bize X'te bir gezi verir. c_x ile izi $\{x\}$ olan sabit geziyi gösterdiğimizi anımsatalım.

Biz evirmelerde $[c,d]$ için herhangi bir dejenere olmamış aralığını kullanabileceğimizi biliyoruz. Genel olarak bu aralık olarak $[0,1]$ aralığı kullanılır ve bundan sonra biz de genelde öyle yapacağız ve zorluk çıkarmadığı durumlarda evirmelerin tanım aralıkları olarak $[a,b]\times[0,1]$ tipinde dikdörtgenler kullanacağız. Bu durumda elimizde her $s\in[0,1]$ için bir $H_s:[a,b]\to X$ gezimiz var, $H_0=\gamma_0$ ve $H_1=\gamma_1$ ve $\{H_s\}_{s\in[0,1]}$ ailesi sürekli parametrelenmiştir.

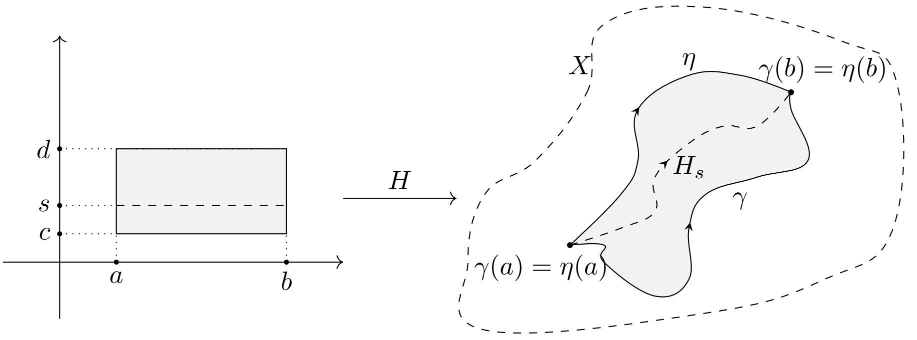
Kompleks fonksiyonlar kuramında bizi $X\subset\mathbb{C}_\infty$ açık kümelerinde iki tip evirme ilgilendirir. Birincisi, uç noktaları aynı olan, dd. $b_{\gamma_0}=b_{\gamma_1}$ ve $s_{\gamma_0}=s_{\gamma_1}$ olan $\gamma_0,\gamma_1\in\mathcal{G}(X)$ gezileri arasındaki evirmelerdir; bu durumda her bir H_s gezisinin de aynı uç noktalara sahip olmasını isteyeceğiz. İkincisi ise kapalı γ_0,γ_1 gezileri arasındaki evirmedir; burada ise her bir H_s gezisinin de kapalı olmasını isteyeceğiz.

Tanım 2.9.2. $\gamma,\eta:[a,b]\to X$ geziler ve uç noktaları aynı, örneğin $\gamma,\eta\in\mathcal{G}_{z,w}(X)$ olsun. Bir $H:[a,b]\times[c,d]\to X$ evirmesi, her bir $s\in[c,d]$ için $H_s\in\mathcal{G}_{z,w}(X)$ ve $\gamma=H_c$, $\eta=H_d$ olacak biçimde varsa γ gezisi η gezisine X uzayında **uç noktalar korunarak evrilebilir (homotoptur**) denir. Biz bu durumu $\gamma\simeq_{uk}\eta$, eğer H evirmesini de vurgulamak istiyorsak $H:\gamma\simeq_{uk}\eta$ ile göstereceğiz.

γ ve η tanımdaki gibi olmak üzere, $\gamma\simeq_{uk}\eta\iff\gamma\simeq\eta\,\mathrm{rel}\{a,b\}$ olduğunu belirtelim; dolayısıyla $\simeq_{uk}$ bağıntısı $\mathcal{C}([a,b],X)$'te bir denklik bağıntısıdır. Bu ilişkiye karşın niye $\simeq_{uk}$ gösterimini yeğlediğimizi açıklamamız gerekir. Cebirsel topolojide gezilerin tanım aralığı hep $[0,1]$ kapalı aralığı seçildiğinden karşımızda yalnızca $\simeq\mathrm{rel}\,\{0,1\}$ bağıntısı vardır. Biz ise gezilerimizin tanım aralığı olarak herhangi bir bozulmamış kapalı aralığı seçmek ve parametre dönüşümleriyle başka aralıklara geçmek istiyoruz; ayrıca tanım aralığı bir rotasal kavram değildir. Bu durumda $\simeq_{uk}$ gösterimi daha uygundur.

(i) $\gamma,\eta:[a,b]\to X$ gezilerinin her ikisi de kapalı olsun. X'te γ gezisini η gezisine dönüştüren bir $H:[a,b]\times[c,d]\to X$ evirmesi, her $s\in[c,d]$ için H_s kapalı ve $\gamma=H_c$, $\eta=H_d$ olacak biçimde bulunabiliyorsa γ gezisi η gezisine **kapalı gezi olarak** X'te **evrilebilir** denir ve bunu $\gamma\simeq_k\eta$ ile, H'yi de vurgulamak istersek, $H:\gamma\simeq_k\eta$ ile gösterelim.

1. $\gamma\in\mathcal{G}_{kap}(X)$ kapalı gezisi, kapalı gezi olarak X'te bir c_x, $(x\in X)$ sabit gezisine evrilebilirse, γ gezisi X'te **sıfıra evrilebilir** veya γ



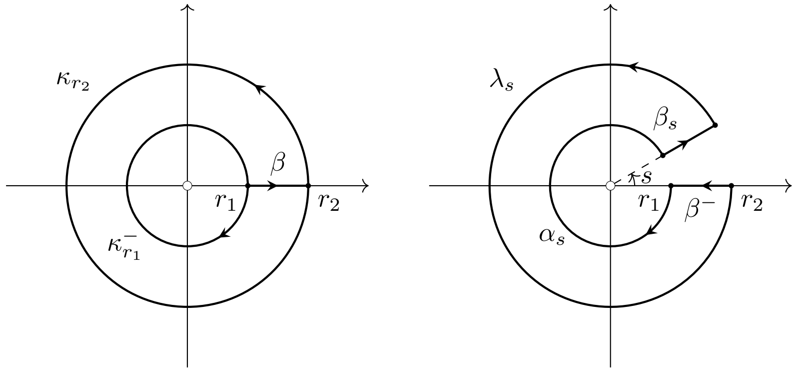
Şekil 2.18: Uç noktalar korunarak evrilme.

gezisi X'te x **noktasına evrilebilir (büzülebilir)** denir ve bu $\gamma \simeq_k 0$ ile gösterilir.

Her şeyden önce $H : \gamma \simeq \eta\,\mathrm{rel}\{a, b\}$ ve γ kapalıysa, $H : \gamma \simeq_k \eta$ olduğu açıktır. Diğer yandan, $\simeq$ rel bağıntısının $\mathcal{G}_{z,w}(X)$'te ve $\simeq_k$ bağıntısının $\mathcal{G}_{kap}(X)$'te da bir denklik bağıntısı olduğu apaçıktır. Her iki kavramın ortak yanı, her ikisinde de H fonksiyonu X'te γ gezisini η gezisine sürekli biçimde dönüştürür. Bunun dışında istenen ilkinde γ, η ve her H_s gezisinin uç noktalarının aynı olması, ikincisinde ise her H_s gezisinin de kapalı olmasıdır. Yalnızca bu iki tipten evrilmelerle ilgileneceğimizden, bağlamdan hangi durumda olduğumuz net ise, kısaca γ gezisi η gezisine X'te evrilebilir diyecek ve $\simeq_{uk}$ ve $\simeq_k$ bağıntılarının her birini yalın olarak $\simeq$ ile göstermekte bir sakınca görmeyeceğiz.

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gerçel sayıları $a_1 < a_2$ ve $b_1 < b_2$ koşullarını sağlasınlar; $J_1 := [a_1, a_2]$, $J_2 := [b_1, b_2]$ ve $R = J_1 \times J_2$ olsun. $\gamma, \eta : J_1 \to X$ gezileri verilsin. Herhangi bir $H : R \to X$ evirmesi verildiğinde her $s \in J_2$ için $H_s(t) := H(t, s)$ ile $H_s : J_1 \to X$ gezileri elde ederiz. Burada elimizde $s \in J_2$ ile sürekli parametrelenmiş, izleri X'te olan bir $\{H_s\}_{s \in J_2}$ gezi ailesi var. Eğer $H_{b_1} = \gamma$ ve $H_{b_2} = \eta$ ise, H dönüşümü X'te γ gezisini sürekli biçimde η gezisine evirir. Bizi γ gezisinin X kümesinde η gezisine evrilip evrilemeyeceği ilgilendirir; evrilme söz konusuysa bunu sağlayan H evirmeleri bizi o kadar ilgilendirmez. Biz J_2'den bozulmamış herhangi bir J_2' kapalı aralığına geçeceğimizi biliyoruz. Ancak şimdi γ, η geziler olduğu ve denk gezilere aynı gözüyle baktığımız için elimiz daha rahattır ve J_1'den de bozulmamış herhangi bir J_1' kapalı aralığına geçebileceğimizi görelim:

Şimdi $a_1' < a_2'$ ve $b_1' < b_2'$ olmak üzere, $J_1' = [a_1', a_2']$ ve $J_2' = [b_1', b_2']$ olmak üzere, $R' := J_1' \times J_2'$ olsun. $\varphi_1 : [a_1', a_2'] \to [a_1, a_2]$ herhangi bir parametre dönüşümü ve $\varphi_2 : J_2 \to J_2'$ ise $\varphi_2(b_k) = b_k'$ olan herhangi bir sürekli dönüşüm olsun. $\gamma' := \gamma \circ \varphi_1$ ve $\eta' := \eta \circ \varphi_1$ olmak üzere, $\gamma' \sim \gamma$ ve $\eta' \sim \eta$. Ayrıca, kolayca görüleceği gibi R''de tanımlı $H'(t', s') := H(\varphi_1(t'), \varphi_2(s'))$ dönüşümü X'te γ' gezisini η' gezisine evirir. Özetle: γ *gezisini* η *gezisine eviren* $R = J_1 \times J_2$



Şekil 2.19: Not 2.9.3'e ilişkin şekil.

dikdörtgeninde tanımlı bir H evirmesi varsa, bozulmamış her $R' = J_1' \times J_2'$ dikdörtgeninde tanımlı, γ'ya denk bir $\gamma' : J_1' \to X$ gezisini η'ya denk bir $\eta' : J_1' \to X$ gezisine eviren bir H' evirmesi vardır. Bizi özünde rotaların evirmeleri ilgilendirdiğinden denk gezilere geçerek istediğimiz R' dikdörtgeninde çalışabiliriz; özellikle $R' = [0,1] \times [0,1]$ alabiliriz ve bazı yazarlar, özellikle cebirsel topolojide, yalnızca bu R' ile çalışır.

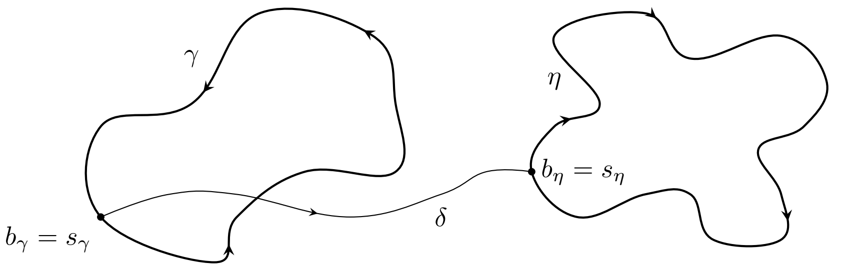
Not 2.9.3. Birbirine evrilenlerin, gezilerin izlerinin değil, gezilerin kendilerinin olduğunun altını çizelim. Örneğin $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ olmak üzere, $\mathbb{C}^*$ açık kümesi $\overline{H}(0; r_1, r_2)$ kapalı halkasını içerir. $\alpha := \kappa_{r_1}^-$, $\beta := \overrightarrow{r_1 r_2}$, $\lambda := \kappa_{r_2}$ olmak üzere, $\gamma := \alpha\beta\lambda\beta^-$ ve $\eta = \beta\beta^-$ olsun (bkz. Şekil 2.19).

$\underline{\gamma} = C_{r_1} \cup [r_1, r_2] \cup C_{r_2}$ kümesinin $\mathbb{C}^*$ açık kümesinde $\underline{\eta} = [r_1, r_2]$ aralığına sürekli biçimde dönüştürülemeyeceği apaçıktır. Buna karşın $\mathbb{C}^*$ kümesinde γ gezisini η gezisine eviren bir $H : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ evirmesi

$$H(t,s) := \begin{cases} r_1 e^{i[2\pi - 4(2\pi - s)t]}, & (t,s) \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \times [0, 2\pi] \\ e^{is}\left[r_1 + 4\left(t - \frac{1}{4}\right)(r_2 - r_1)\right], & (t,s) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \times [0, 2\pi] \\ r_2 e^{i\left[4(2\pi - s)\left(t - \frac{2}{4}\right) + s\right]}, & (t,s) \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right] \times [0, 2\pi] \\ e^{is}\left[r_1 + \left(1 - 4\left(t - \frac{3}{4}\right)\right)(r_2 - r_1)\right], & (t,s) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \times [0, 2\pi] \end{cases}$$

ile tanımlanır. H_s gezisi $\alpha_s\beta_s\lambda_s\beta^-$ gezisidir (bkz. Şekil 2.19). $\boldsymbol{\alpha}_{2\pi}$ rotası $\mathbf{r}_1$ sabit rotası, $\boldsymbol{\lambda}_{2\pi}$ rotası $\mathbf{r}_2$ sabit rotası, $\boldsymbol{\beta}_{2\pi}$ rotası $\boldsymbol{\beta}$ rotasıdır. Dolayısıyla $\mathbf{H}_{2\pi} = \mathbf{r}_1\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}_2\boldsymbol{\beta}^- = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^-$. $\beta\beta^-$ gezisinin ise sabit c_{r_1} gezisine evrileceği apaçıktır (Sonuç (2.9.7)(ii)). Biraz ileride art arda uygulanan evrilmelerin de bir evrilme olduğunu göreceğiz. Özetle γ gezimiz $\mathbb{C}^*$'da c_{r_1} sabit gezisine evrilebilir, ancak $\underline{\gamma}$ izi $\mathbb{C}^*$'da c_{r_1} noktasına sürekli biçimde ötelenemez!

Bazen evrilme şu anlatımla görselleştirilir: $\gamma \in \mathcal{G}(X)$ olmak üzere, $\underline{\gamma}$ izine bir lastik şerit yerleştirelim; X kümesini terk etmeden ve lastik şeridi hiçbir zaman koparıp yapıştırmadan, ancak yer yer gererek veya sıkıştırarak, yer yer içe doğru veya dışa doğru çekerek $\underline{\eta}$'ya öteleyebiliyorsak, γ gezisi X'te η gezisine evrilebilir. Örneğimiz, basit kapalı geziler için doğru olan bu görsel anlatımın gerçeği tam olarak yansıtmadığını, basit kapalı olmayan geziler için yanlış olabileceğini gösterir. Bu görselleştirme şu değişimle doğru kılınır: Lastik



Şekil 2.20: Kapalı geziler olarak evrilmenin uç noktalar korunarak evrilmeye dönüştürülmesi.

şeritleri gezilerin izlerine yerleştirmeyelim, onları gezinirken izlere döşeyelim. Bu şekilde örneğimizde γ ve η için döşenen lastik şeritler bir öncekilerin aksine $[r_1, r_2]$ aralığında *iki katlıdır* ve bu katlarda farklı zamanlarda gezindiğimizden, onlar birbirinden ayrılabilirler.

Not 2.9.4. γ kapalı gezisi kapalı gezi olarak X'te η gezisine evrilebiliyorsa, tanımdan da görülebileceği gibi bu tür evrilmede diğerine göre bir tür serbestlik vardır. Bu nedenle, kimi yazar bu tür evrilmeye *serbest* evrilme de der. Yine de her iki tür evrilme arasında, Şekil 2.20'de görselleştirilen bir ilişki vardır. $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_{kap}(X)$ ve $\gamma \simeq_k \eta$ olsun. Genellikten bir şey kaybetmeden $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ dönüşümü γ kapalı gezisini η kapalı gezisine evirsin. X'te bir $\delta : [0,1] \to X$ gezisi $\delta(s) := H_s(0) = H(0,s)$ olarak tanımlansın. H_s gezilerinin başlangıç noktaları δ'nın izini oluştururlar. γ'nın başlangıç ve bitiş noktası w ise, $\widetilde{\eta} := \delta\eta\delta^-$ gezisinin de başlangıç ve bitiş noktaları w'dir. Her $s \in [0,1]$ için $\delta_s := \delta|[0,s]$ dersek, X'teki $\psi_s := \delta_s H_s \delta_s^{-1}$ gezilerinin de başlangıç ve bitiş noktaları w'dir. $\Psi(t,s) := \psi_s(t)$ ile tanımlanan $\Psi : [0,1] \times [0,1] \to X$ dönüşümü uç noktaları koruyarak γ gezisini $\widetilde{\eta}$ gezisine evirir, dd. $\gamma \simeq_{uk} \widetilde{\eta}$.

Şimdiye kadar γ ve η gezilerinin birbirine evrilebilmesinden, ancak bunların tanım kümeleri aynı ise söz edebildik. Ancak evrilebilme özünde bir rotasal özelliktir. Rotaların birbirine evrilebilmesinden söz etmeden önce bir önerme kanıtlayacağız.

Önerme 2.9.5. *(i) $k = 0, 1$ olmak üzere, $\gamma_k : [a_k, b_k] \to X$ gezileri birbirine denk iseler, $\varphi_k : [0,1] \to [a_k, b_k]$ birer parametre dönüşümü ve $\eta_k := \gamma_k \circ \varphi_k$ olmak üzere, $\eta_0, \eta_1 : [0,1] \to X$ gezileri X'te, uç noktaları koruyarak birbirine evrilebilir, dd. $\gamma_0 \sim \gamma_1$ ise, $\eta_0 \simeq_{uk} \eta_1$.*

(ii) $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1 \in \mathcal{R}_{z,w}(X)$ (veya $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1 \in \mathcal{R}_{kap}(X)$) rotalarının herhangi bir $[a,b]$ aralığında tanımlı herhangi iki γ_0, γ_1 adayı birbirine X'te uç noktaları koruyarak (veya kapalı geziler olarak) evrilebiliyorlarsa, herhangi bir $[a', b']$ aralığındaki herhangi iki γ'_0, γ'_1 adayı da birbirine X'te uç noktaları koruyarak (veya kapalı geziler olarak) evrilebilir.

Kanıt. (i) Verilerden $\eta_k \sim \gamma_k$ ve varsayımdan $\gamma_0 \sim \gamma_1$ olduğundan $\eta_0 \sim \eta_1$. Dolayısıyla, $\eta_0, \eta_1 : [0,1] \to X$ ve bir $\psi : [0,1] \to [0,1]$ parametre dönüşümü ile

$\eta_1(t) = \eta_0(\psi(t))$. Şimdi

$$H(t,s) := \eta_0[s\psi(t) + t(1-s)],\ (t,s) \in [0,1] \times [0,1]$$

ile tanımlanan H dönüşümü süreklidir ve $\operatorname{Im} H \subset X$. Diğer yandan, $H_0 = \eta_0$ ve $H_1 = \eta_1$, dolayısıyla H, η_0 gezisini η_1 gezisine dönüştürür. γ_0 ve γ_1 denk geziler olduklarından uç noktaları çakışır; böylece, her $s \in [0,1]$ için H_s de aynı uç noktalara sahiptir. Eğer γ_0 ve γ_1 gezileri kapalı iseler H_s gezileri de kapalıdır. Her iki durumda da $\eta_0 \simeq_{uk} \eta_1$.

(ii) Örneğin $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1 \in \mathcal{R}_{z,w}(X)$, γ_0 ve γ_1 bu rotaların $[a,b]$ aralığında tanımlı adayları olsun ve $H : [a,b] \times [0,1] \to X$ ise X'te uç noktaları koruyarak γ_0 gezisini γ_1 gezisine evirsin. $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ herhangi bir parametre dönüşümü olmak üzere, $\Phi(t,s) := H(\varphi(t), s)$ ile tanımlanan $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to X$ dönüşümü $\gamma_0 \circ \varphi$ gezisini $\gamma_1 \circ \varphi$ gezisine uç noktaları koruyarak evirir ve böylece $\gamma_0 \circ \varphi \simeq_{uk} \gamma_1 \circ \varphi$. Şimdi rotalarımızın bir $[a', b']$ aralığında γ_0', γ_1' adayları verilsin. Herhangi bir $\psi : [0,1] \to [a', b']$ parametre dönüşümü ile $\gamma_k' \circ \psi$ gezilerine geçersek, $\gamma_k' \circ \psi \sim \gamma_k \circ \varphi$ olduğundan, önermenin birinci kısmından dolayı $\gamma_k' \circ \psi \simeq_{uk} \gamma_k \circ \varphi$ olur. Böylece $\gamma_0' \circ \psi \simeq_{uk} \gamma_0 \circ \varphi$, $\gamma_0 \circ \varphi \simeq_{uk} \gamma_1 \circ \varphi$ ve $\gamma_1 \circ \varphi \simeq_{uk} \gamma_1' \circ \psi$. Buradan, $\simeq_{uk}$ bir denklik bağıntısı olduğundan, $\gamma_0' \circ \psi \simeq_{uk} \gamma_1' \circ \psi$ elde ederiz. $\Psi : [0,1] \times [0,1] \to X$ dönüşümü uç noktaları koruyarak $\gamma_0' \circ \psi$ gezisini $\gamma_1' \circ \psi$ gezisine evirirse $\Theta(t,s) := \Psi(\psi^{-1}(t), s)$ ile tanımlanan $\Theta : [a', b'] \times [0,1] \to X$ dönüşümü uç noktaları koruyarak γ_0' gezisini γ_1' gezisine evirir. $\square$

Bu önermeden dolayı aşağıdaki tanım kusursuzdur:

Tanım 2.9.6. $a, b \in X$ ve $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}_{a,b}(X)$ (veya $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}_{kap}(X)$) olsun. $\boldsymbol{\gamma}$ ve $\boldsymbol{\eta}$ rotaların herhangi bir $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı herhangi iki γ, η adayı birbirine uç noktaları koruyarak (veya kapalı geziler olarak) X'te evrilebiliyorlarsa **$\boldsymbol{\gamma}$ rotası $\boldsymbol{\eta}$ rotasına** X'te uç noktaları koruyarak (veya kapalı rotalar olarak) **evrilebilir** denir ve bu $\boldsymbol{\gamma} \simeq_{uk} \boldsymbol{\eta}$ (veya $\boldsymbol{\gamma} \simeq_k \boldsymbol{\eta}$) ile gösterilir. $\gamma \simeq_k 0$ ise, $\boldsymbol{\gamma}$ **rotası X'te sıfıra evrilebilir** denilir ve bu $\boldsymbol{\gamma} \simeq_k \mathbf{0}$ ile gösterilir.

Önerme 2.9.7. (i) *$1 \leqslant i \leqslant n$ için $\boldsymbol{\gamma_i}, \boldsymbol{\eta_i} \in \mathcal{R}(X)$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 \cdots \boldsymbol{\gamma_n}$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1 \cdots \boldsymbol{\eta}_n$ ve $\boldsymbol{\gamma}$'nın başlangıç noktası a olsun. $1 \leq i \leq n$ için $\boldsymbol{\gamma}_i \simeq_{uk} \boldsymbol{\eta}_i$ ise $\boldsymbol{\gamma}_1 \cdots \boldsymbol{\gamma}_n \simeq_{uk} \boldsymbol{\eta}_1 \cdots \boldsymbol{\eta}_n$ sağlanır.*

(ii) *$\boldsymbol{\gamma}$'nın başlangıç noktası a ise, $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^- \simeq_{uk} \mathbf{c}_a$, dolayısıyla $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^- \simeq \mathbf{0}$ olur.*

(iii) *$\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}(X)$ uç noktaları aynı rotalar ve $\boldsymbol{\gamma} \simeq \boldsymbol{\eta}$ ise $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}^- \simeq_{uk} \mathbf{c_a}$, böylelikle $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}^- \simeq 0$ sağlanır.*

(iv) *$\simeq_{uk}$ bağıntısı $\mathcal{R}_{a,b}(X)$'te bir denklik bağıntısıdır.*

(v) *Rotalar kapalı olmak üzere, (i)–(iv) önermeleri —(iv)'te $\mathcal{R}_{a,b}(X)$ yerine $\mathcal{R}_a(X)$ alınmak koşuluyla—, $\simeq_{uk}$ yerine $\simeq_k$ alındığında da doğrudurlar.*

Kanıt. (i) Rotalarımızın $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \eta, \eta_1, \ldots, \eta_n$ adaylarını, tanım aralıklarını istediğimiz bir bozulmamış J kapalı aralığı olacak biçimde seçelim. $0 = s_0 < \cdots < s_n = 1$ ise $[0,1]$ aralığının bir parçalanışı olsun. $R_i := J \times [s_{i-1}, s_i]$ olmak üzere, γ_i gezisini η_i gezisine uç noktaları koruyarak eviren $H_i : R_i \to X$ evirmelerimiz vardır. Bu durumda $1 \le i \le n$ için $H|R_i := H_i$ olmak üzere, tanımlanan $H : J \times [0,1] \to X$ dönüşümü X'te γ gezisini uç noktaları koruyarak η gezisine evirir.

(ii) $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^-$ ve $\boldsymbol{\eta} := \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^-$ rotalarımızın γ, γ^- ve η adaylarını tanım bölgeleri sırasıyla $[0,1], [1,2]$ ve $[0,2]$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\eta|[0,1] := \gamma$ ve $\eta|[1,2] := \gamma^-$, dd. her $t \in [1,2]$ için $\eta(t) := \gamma(2-t)$ ile tanımlanan η gezisi $\boldsymbol{\eta}$ rotamızın bir adayıdır. Şimdi

$$H(t,s) := \begin{cases} \eta(ts), & (t,s) \in [0,1] \times [0,1] \\ \eta(s(2-t)), & (t,s) \in [1,2] \times [0,1] \end{cases} \tag{2.33}$$

olarak tanımlanan $H : [0,2] \times [0,1] \to X$ dönüşümü süreklidir ve hep $H_s(0) = H_s(2) = a$ olduğundan, c_a sabit gezisini uç noktaları koruyarak $\eta = \gamma\gamma^-$ gezisine evirir, dd. $H : c_a \simeq_{uk} \eta$, böylece $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^- \overset{X}{\simeq} \mathbf{0}$. Dolayısıyla, c_a ve η kapalı olduklarından, aynı zamanda $c_a \simeq_k \eta$.

(iii) Önermemizin (i) ve (ii) savlarından,

$$\boldsymbol{\gamma} \simeq_{uk} \boldsymbol{\eta} \overset{(i)}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}^- \simeq_{uk} \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^- \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}^- \simeq_{uk} \mathbf{c}_a,$$

dolayısıyla $\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}^- \simeq 0$.

(iv) $\simeq$ bağıntısı $\mathcal{G}_{z,w}(X)$'te (ve benzer biçimde $\mathcal{G}_{kap}(X)$'te) bir denklik bağıntısıdır; sav doğrudan bundan çıkar. □

Önsav 2.9.8. *$a \in X$, $\gamma; [0,1] \to X$ ve $\gamma \in \mathcal{G}_a(X)$ ise, $\gamma \simeq_{uk} c_a\gamma$ ve $\gamma \simeq_{uk} \gamma c_a$ olur.*

Kanıt. $c_a : [0,1] \to X$ gezisi $c_a(t) \equiv a$ ve $Q = [0,1] \times [0,1]$ olsun.

$$\varphi_0(t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2t-1, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \varphi_1(t) := \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $\Phi_i(t,s) := \gamma((1-s)t + s\varphi_i(t))$ ile tanımlanan $\Phi_i : Q \to X$ evirmeleri için $\Phi_0(t,0) = \gamma(t)$, $\Phi_0(t,1) = \gamma(\varphi_0(t)) = (c_a\gamma)(t)$, $\Phi_1(t,0) = \gamma(t)$ ve $\Phi_1(t,1) = (\gamma c_a)(t)$ olur. Böylece $\Phi_0 : \gamma \simeq_{uk} c_a\gamma$ ve $\Phi_1 : \gamma \simeq_{uk} \gamma c_a$. □

Şimdi X bir topolojik uzay, $a \in X$ olmak üzere, $\simeq_{uk}$ bağıntısının $\mathcal{R}_a(X)$'te bir denklik bağıntısı olduğunu biliyoruz. $\boldsymbol{\pi}_1(X,a) := \mathcal{R}_a(X)/\simeq_{uk}$ olsun. $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{R}_a(X)$'in denklik sınıfını $[\boldsymbol{\gamma}]$ ile gösterelim. $[\boldsymbol{\gamma}], [\boldsymbol{\eta}] \in \boldsymbol{\pi}_1(X,a)$ için

$$[\boldsymbol{\gamma}][\boldsymbol{\eta}] := [\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}] \tag{2.34}$$

olarak tanımlansın. Önerme 2.9.7 ve Önsav 2.9.8'den aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

Önerme 2.9.9. *(2.34) ile tanımlanan işlemle $\boldsymbol{\pi}_1(X,a)$, birim ögesi $[\mathbf{c}_a]$ olan bir gruptur.*

Bu gruba X uzayının a **tabanlı temel grubu** denir. $a, b \in X$ ve $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{R}_{a,b}(X)$ ise, $[\gamma] \in \boldsymbol{\pi}_1(X,a)$ için $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}}([\boldsymbol{\gamma}]) := [\boldsymbol{\sigma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\sigma}]$ ile tanımlanan $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\pi}_1(X,a) \to \boldsymbol{\pi}_1(X,b)$ *dönüşümü bir eşyapı dönüşümüdür*; $(\varphi_{\boldsymbol{\sigma}})^{-1} = \varphi_{\boldsymbol{\sigma}^-}$ olduğunu belirtmekle yetinelim (Problem 2.9.3). $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}}$ dönüşümü genelde $\boldsymbol{\sigma}$'ya bağlıdır. *X yol bağlantılıysa, her $a, b \in X$ için $\boldsymbol{\pi}(X,a) \cong \boldsymbol{\pi}_1(X,b)$ olur.* Dolayısıyla, bu gruplardan herhangi biri $\boldsymbol{\pi}_1(X)$ ile gösterilir ve **X'in temel grubu** olarak adlandırılır.

2.9.2 Temel Grup

Şimdi esnek yolumuzu terk edip, cebirsel topolojide genellikle izlenen yolla bu konuya yaklaşacağız. X herhangi bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun. Denk gezileri birbirinden ayırt etmeyeceğimizden ve her geziye $I = [0,1]$ kapalı aralığında tanımlı denk gezilerimiz bulunduğundan, tüm gezilerin tanım bölgesi olarak I kapalı aralığı ve tüm evirmelerin tanım aralığı olarak ise $Q = I \times I$ dikdörtgeni kullanılabilir ve öyle yapacağız. Bu elbette bir yalınlaştırmadır, daha doğrusu bir kısıtlamadır; bunun karşılığı başka bir noktada bir zorluk olacaktır, göreceğiz. $\mathcal{T}_a(X) := \mathcal{C}(I,X) \cap \mathcal{G}_a(X)$ olsun. $\mathcal{T}_a(X)$'nın ögelerine a **tabanlı tur**lar diyelim. Şimdi $\gamma, \eta \in \mathcal{T}_a(X)$ turları verildiğinde $\gamma\eta$'nın da bir tur olmasını isteyeceğimizden, bunun da $\gamma\eta : [0,1] \to X$ olacak biçimde tanımlanması gerekir.

$$(\gamma\eta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0,1/2] \\ \eta(2t-1), & t \in [1/2,1] \end{cases} \tag{2.35}$$

olarak tanımlanır[10]. Eğer t zaman olarak yorumlanırsa ve kendimizi bütün gezilerin bir saatte tamamlanmasına zorlarsak, ilk yarım saatte iki kat hızla γ ile gezinir, ardından da son yarım saatte η ile iki kat hızla gezinirsek, $\gamma\eta$ ekleme gezintisini elde ederiz. $\gamma \in \mathcal{T}_a(X)$ ise $\gamma^- \in \mathcal{T}_a(X)$ olur. Şimdi $\gamma, \eta, \lambda \in \mathcal{T}_a(X)$ turları verildiğinde $\gamma(\eta\lambda)$ turu şu anlama gelir: ilk yarım saatte iki kat hızla γ turu, izleyen çeyrek saatte dört kat hızla η turu ve son çeyrekte ise dört kat hızla γ turu tamamlanır. Buna karşın $(\gamma\eta)\lambda$ ise şu anlama gelir: İlk çeyrekte dört kat hızla γ, izleyen çeyrekte dört kat hızla η turu ve son yarım

[10] $0 < \alpha < 1$ ve $I_1 = [0,\alpha], I_2 = [\alpha,1]$ olmak üzere, $\varphi_1 : I_1 \to I$ ve $\varphi_2 : I_2 \to I$ parametre dönüşümleri olmak üzere, $\gamma_* := \gamma \circ \varphi_1$ ve $\eta_* := \eta \circ \varphi_2$ olsun. η_* gezisi doğal biçimde γ_* gezisine eklenerek, dd. $(\gamma_*\eta_*)|I_1 := \gamma_*$ ve $(\gamma_*\eta_*)|I_2 = \eta_*$ olarak tanımlayarak $\gamma_*\eta_* : I \to X$ gezisi elde edilir. Sayılamaz çokluktaki bu seçeneklerden (2.35)'teki tanımda yalnızca $\alpha = 1/2$ ve $\varphi_1(t) = 2t$, $\varphi_2(t) = 2t - 1$ seçimiyle yetinilmiştir.

saatte ise iki kat hızla λ turu tamamlanır. Genelde $\gamma(\eta\lambda) \neq (\gamma\eta)\lambda$. Daha önceki yaklaşımımızla uygun γ', η', λ' denk gezilerine geçerek kolayca $\gamma'(\eta'\lambda') = (\gamma'\eta')\lambda'$ olması, dolayısıyla (2.9.1) ile $\gamma(\eta\lambda) \simeq_{uk} \gamma'(\eta'\lambda') \simeq_{uk} (\gamma'\eta')\lambda' \simeq_{uk} (\gamma\eta)\lambda$ olduğu görülebilir. Şimdiyse $H : \gamma(\eta\lambda) \simeq_{uk} (\gamma\eta)\lambda$ olacak biçimde bir $H : Q \to X$ evirmesinin varlığını kanıtlamak zorundayız. Şimdi $\gamma, \eta \in \mathcal{T}_a(X)$ turlar olmak üzere, $\gamma \simeq_{uk} \eta$'dan γ'yı η'ya eviren bir $H : Q \to X$ evirmesinin varlığını anlayacağız.

Benzer biçimde $H_1, H_2 : Q \to X$ evirmeleri verildiğinde, $H = H_1H_2$ eklemesi (2.33)'teki gibi tanımlanır.

Bir $\gamma \in \mathcal{T}_a(X)$ turunun $\mathcal{T}_a(X)/\simeq_{uk}$ kümesindeki denklik sınıfını yine $[\gamma]$ ile gösterelim. Şimdi γ, γ', η, $\eta' \in \mathcal{T}_a(X)$ olmak üzere, $H_1 : \gamma \simeq_{uk} \gamma'$ ve $H_2 : \eta \simeq_{uk} \eta'$ ise, $H_1H_2 : \gamma\eta \simeq_{uk} \gamma'\eta'$ olduğundan, $\pi_1(X, a) := \mathcal{T}_a(X)/\simeq_{uk}$ kümesinde $[\gamma\eta] = [\gamma'\eta']$, dolayısıyla $\pi_1(X, a)$ kümesinde $[\gamma][\eta] := [\gamma\eta]$ tanımı kusursuzdur.

Teorem 2.9.10. *$\pi_1(X, a)$ yukarıda tanımlanan işleme göre etkisiz ögesi $[c_a]$ olan bir gruptur ve $\boldsymbol{\pi}_1(X, a) \cong \pi_1(X, a)$.*

Kanıt. Önce $\pi_1(X, a)$'daki işlemin birleşmeli olduğunu görelim:

$$\varphi(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ 2t - 1, & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ bir parametre dönüşümüdür. $\alpha := (\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ ve $\beta := \gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ olmak üzere, $\beta = \alpha \circ \varphi$ olur. Ayrıca, $H(t, s) := \alpha((1 - s)t + s\varphi(t))$ ile tanımlanan $H : Q \to X$ bir evirmedir ve uç noktaları koruyarak α'yı β'ya evirir; dolayısıyla $[\alpha] = [\beta]$, bu ise tam da $([\gamma_1][\gamma_2])\,[\gamma_3] = [\gamma_1]\,([\gamma_2][\gamma_3])$ anlamına gelir. İşlemimiz birleşmelidir.

Önsav 2.9.8'den $[c_a][\gamma] = [\gamma] = [\gamma][c_a]$ elde ederiz. Dolayısıyla, $[c_a]$ etkisiz öğedir.

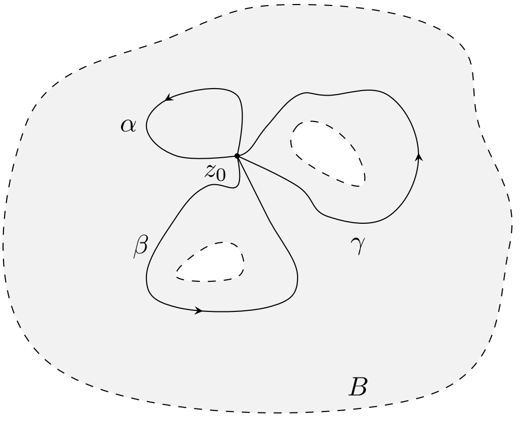
$\gamma \in \mathcal{T}_a(X)$ verildiğinde $\Psi : Q \to X$ evirmesi

$$\Psi(t, s) := \begin{cases} \gamma(2ts), & (t, s) \in [0, 1/2] \times [0, 1] \\ \gamma(2s(1 - t)), & (t, s) \in [1/2, 1] \times [0, 1] \end{cases}$$

ise Ψ, uçları koruyarak c_a gezisini $\gamma\gamma^-$ gezisine evirir. Böylece $[c_a] = [\gamma][\gamma^-]$ olur. γ ve γ^-'nin yerlerini değiştirerek $[c_a] = [\gamma^-][\gamma]$ elde ederiz. Böylece $[\gamma]^{-1} = [\gamma^-]$.

Elbette $\pi_1(X, a) \to \boldsymbol{\pi}_1(X, a)$, $[\gamma] \to [\boldsymbol{\gamma}]$ bir eşyapı dönüşümüdür. □

Cebirsel topolojide $\pi_1(X, a)$ ile çalışılır. Bu gruba X uzayının a **tabanlı temel grubu** denir.



Şekil 2.21: $\pi(B, z_0)$ grubu $[\boldsymbol{\beta}]$ ve $[\boldsymbol{\gamma}]$ tarafından üretilmiştir.

$a, b \in X$ ve $\sigma \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$ ise, $[\gamma] \in \pi_1(X, a)$ için $\varphi_\sigma([\gamma]) := [\sigma^{-1}\gamma\sigma]$ ile tanımlanan $\varphi_\sigma : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$ *dönüşümü bir eşyapı dönüşümü ve* $(\varphi_\sigma)^{-1} = \varphi_{\sigma^-}$. Dolayısıyla, *X yol bağlantılıysa, her $a, b \in X$ için $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$ olur*. Böylelikle, bu gruplardan herhangi biri $\pi_1(X)$ ile gösterilir ve **X'in temel grubu** olarak adlandırılır.

Tanım 2.9.11. Bir X topolojik uzayına, X yol bağlantılı ve bir $a \in X$ için $\pi_1(X, a)$ basitse, dd. $\pi_1(X, a) = \{[c_a]\}$ ise **evrimsel** (veya **homotopik**) **basit bağlantılıdır** denir.

Teorem 2.9.12. *X evrimsel basit bağlantılı, $a, b \in X$ ve $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_{a,b}(X)$ tanım kümeleri aynı olan iki geziyse, $\gamma \simeq_{uk} \eta$ sağlanır.*

Kanıt. Gerekirse bir parametre dönüşümü ile denk gezilere geçerek γ, η gezilerinin tanım aralığını $I = [0, 1]$ seçebiliriz. $\pi_1(X, a) = \{[c_a]\}$ ve $\gamma\eta^- \in \mathcal{T}_a(X)$ olduğundan, $[\gamma\eta^-] = [c_a]$, dolayısıyla $\gamma\eta^- \simeq_{uk} c_a$. Buradan ve Önerme 2.9.7(i)'den

$$\gamma c_b \simeq_{uk} \gamma\eta^-\eta \simeq_{uk} c_a\eta \tag{2.36}$$

olur. Aşağıda tanımlanan $H : I \times I \to X$ dönüşümü ile $H : \gamma c_b \simeq_{uk} \gamma$ olur:

$$H(t, s) := \begin{cases} \gamma((2-s)t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \\ b, & \frac{1}{2} + \frac{s}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Benzer biçimde, $c_a\eta \simeq_{uk} \eta$ olduğu görülür. Böylece (2.36) ile $\gamma \simeq_{uk} \gamma c_b \simeq_{uk} c_a\eta \simeq_{uk} \eta$ elde ederiz. □

Not 2.9.4'ten yararlanarak aşağıdaki önerme kolayca kanıtlanır:

Önerme 2.9.13. *Yol bağlantılı X topolojik uzayının evrimsel basit bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul herhangi iki $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_{kap}(X)$ kapalı gezisinin kapalı geziler olarak birbirine evrilebilmeleridir.*

X, Y kümeler, $a \in X, b \in Y$, $f : X \to Y$ ve $b = f(a)$ ise $f : (X, a) \to (Y, b)$ yazacağız. Şimdi ayrıca X, Y topolojik uzaylar ve $f : (X, a) \to (Y, b)$ sürekli olsun. $\gamma, \eta \in \mathcal{T}_a(X)$ ve $H : \gamma \simeq_{uk} \eta$ ise, $f \circ H : f \circ \gamma \simeq_{uk} f \circ \eta$ sağlanır. Dolayısıyla, her $[\gamma] \in \pi_1(X, a)$ için $f_\#([\gamma]) := [f \circ \gamma]$ olarak tanımlanan

$$f_\# : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. $(f \circ \gamma)(f \circ \eta) = f \circ (\gamma\eta)$ olmasından yararlanarak, $f_\#$'nin bir grup yapı dönüşümü olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Z bir başka topolojik uzay ve $g : (Y, b) \to (Z, c)$ ise

$$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#.$$

$\mathrm{Id} : X \to X$ özdeşlik dönüşümü ise, $\mathrm{Id}_\#$ de özdeşlik dönüşümüdür. Eğer $f : (X, a) \to (Y, b)$ bir topolojik dönüşümse $f_\#$ de bir eşyapı dönüşümüdür. Böylece temel gruplarla bir *cebirsel yapı* karşımıza bir *topolojik değişmez* olarak çıkar.

X yol bağlantılı, $a \in X$, $\pi(X, a)$ grubu sonlu üretilmiş ve $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_{n-1}]$ bu grubun minimal uzunluklu bir üreten sitemi ise, X **evrimsel n-bağlantılıdır** denir. İleride Teorem 2.11.7'de "basit bağlantılılık" ve "evrimsel basit bağlantılılık" kavramlarının denk olduğunu kanıtlayacağız. Dolayısıyla, bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin evrimsel basit bağlantılı olması B'nin deliksiz olması demektir (açıklama için Önerme 2.12.7 ve Teorem 2.12.8'e bakınız). Kanıtına girmeden şu bilgileri verelim: B bölgesinin evrimsel n-bağlantılı olması tam da $n - 1$ tane deliğinin olması anlamına gelir. B bölgemizdeki iki kapalı λ_1, λ_2 gezisinin B'de birbirlerine evrilebilir olmaları, B'nin her bir deliği etrafındaki aynı yöndeki turlama sayılarının birbirine eşit olması demektir. B bölgemizin n tane deliği varsa ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gezileri başlangıç ve bitiş noktaları $z_0 \in B$ olup sırasıyla B'de bu delikleri çevreleyen basit kapalı gezilerse, $[\lambda_1], \ldots, [\lambda_n]$ ögeleri $\pi(B, z_0)$ grubunun bir minimal üreten sistemidir. Eğer $\pi(B, z_0)$ sonlu üretilemiyorsa B bölgesi **evrimsel sonsuz bağlantılıdır** denir. $\pi(B, x_0)$ sonlu üretilemiyorsa üreteç sayısının sayılabilir sonsuz olduğu kolayca görülür. $b \in B$ noktasının koordinatlarını rasyonel olarak seçelim. Her $\boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{R}_b(B)$ rotası B kümesinde köşeleri rasyonel olan bir kapalı $\boldsymbol{\iota}$ ızgara rotasına evrilebilir. B kümesindeki başlangıç ve bitiş noktası b noktası olan ve köşeleri $\mathbb{Q}^2$'de olan ızgara rotalarının kümesini $\mathcal{I}_r$ ile gösterirsek, $\mathcal{I}_r$ ve dolayısıyla $\pi(B, b) = \{[\boldsymbol{\iota}] \mid \boldsymbol{\iota} \in \mathcal{I}_r\}$ *sayılabilir çokluktadır.*

Uzlaşma: İleride bizi yalnızca $\simeq_{uk}$ ve $\simeq_k$ evirmeleri ilgilendirecek ve her zaman bunlardan hangisinin söz konusu belli olacağından, bu iki bağıntı yerine yalın olarak $\simeq$ yazacağız.

2.9.3 Homotopik Cauchy Teoremi

$X \subset \mathbb{R}^n$ kümesi a merkezli yıldız biçimli ise, X evrimsel basit bağlantılıdır. Gerçekten de bir yandan X yol bağlantılıdır, diğer yandan $\gamma \in \mathcal{T}_a(X)$ ise $H(t,s) = \gamma(t) + s\,(a - \gamma(t))$ ile tanımlanan $H : I \times I \to X$ evirmesi için $H : \gamma \simeq c_a$ geçerlidir. Dolayısıyla, $\pi_1(X,a) = \{[c_a]\}$. Özellikle $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi bir $a \in B$ noktasına göre yıldız biçimliyse, evrimsel basit bağlantılıdır.

$\mathbb{C}$'deki dışbükey bölgeler yıldızbiçimli olduklarından evrimsel basit bağlantılıdır. Dolayısıyla, $D_r(a)$, $\mathbb{C}$, $S_{a,b}$ ve $S^{a,b}$ şeritleri dışbükey olduklarından ve $\mathbb{C}_\alpha$ bölgesiyse yıldızbiçimli olduğundan evrimsel basit bağlantılıdır. $0 < \delta_k < r$ ve $\theta_k \in [0, 2\pi]$ olmak üzere, $B := D_r(a) \setminus \left[a + \delta_k e^{i\theta_k}, a + re^{i\theta_k}\right]$ bölgesi a noktasına göre yıldız biçimli olduğundan evrimsel basit bağlantılıdır.

$B \subset \mathbb{C}$ bir dışbükey bölge ise, uç noktaları aynı olan B'deki herhangi iki gezi birbirine uç noktaları koruyarak evrilebilir. Gerçekten de $\gamma, \eta : [a,b] \to B$ uç noktaları aynı olan iki geziyse, $H(t,s) := \gamma(t) + s(\eta(t) - \gamma(t))$ ile tanımlanan $H : [a,b] \times [0,1] \to B$ dönüşümü γ ile η arasında B'de uç noktaları koruyan bir evirmedir. Eğer $\gamma, \eta \in \mathcal{G}(B)$ gezileri kapalı ise, aynı evirme γ gezisini B'de kapalı geziler olarak η'ya evirir.

$U \subset \mathbb{C}$ bir açık altküme olsun. *$\gamma, \eta \in \mathcal{G}_{z,w}(U)$ gezileri U'da birbirine yakın ise, U'da uç notaları koruyarak birbirlerine evrilebilirler, dd. $\gamma \overset{U}{\simeq} \eta$.* Bu doğrudan Önerme 2.9.7'den çıkar.

Bir açık U kümesinde bir $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ verildiğinde Sonuç 2.4.9'da U'ya düşen bir daireler zinciri yardımıyla izleri U'da olan $\Pi = \overrightarrow{z_0 z_1 \cdots z_n}$ poligonu ve $\iota = \iota_1 \cdots \iota_n$ ızgara gezilerini oluşturmuştuk. Ayrıca, $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışı ile $\gamma_k, \overrightarrow{z_{k-1} z_k}$ ve ι_k gezilerinin başlangıç ve bitiş noktaları aynıdır ve bunların izleri $D_k \subset U$ dairelerindedir ve D_k dışbükey olduğundan, bunlar uç noktaları koruyarak birbirine D_k'de, dolayısıyla U'da evrilebilirler. Önerme 2.9.7'den dolayı $\gamma \overset{U}{\simeq} \Pi$ ve $\gamma \overset{U}{\simeq} \iota$ olur. Başka sözlerle aşağıdaki önerme geçerlidir:

Önerme 2.9.14. *$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki herhangi bir gezi, uç noktaları koruyarak, U kümesinde bir poligona, hatta bir ızgara gezisine evrilebilir.*

Teorem 2.9.15 (Homotopik Cauchy Teoremi). (i) *$\gamma, \eta \in \mathcal{G}(U)$ uç noktaları aynı iki gezi ve $\gamma \overset{U}{\simeq} \eta$ ise, her $f \in \mathcal{H}(U)$ için*

$$\int_\gamma f = \int_\eta f.$$

(ii) *$\gamma, \eta \in \mathcal{G}(U)$ iki kapalı gezi ve $\gamma \overset{U}{\simeq} \eta$ ise, her $f \in \mathcal{H}(U)$ için*

$$\int_\gamma f = \int_\eta f.$$

(iii) *$\gamma \in \mathcal{G}(U)$ kapalı gezi ve $\gamma \overset{U}{\simeq} 0$ ise, her $f \in \mathcal{H}(U)$ için*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Kanıt. $\gamma, \eta : [a,b] \to U$ ve $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ ise bu iki gezi arasında, iki tipin herhangi birinden bir evirme olsun. H sürekli ve $R := [a,b] \times [0,1]$ kompakt olduğundan, $H(R)$ kompakttır. $U = \mathbb{C}$ ise $\varepsilon = 1$ ve $U \neq \mathbb{C}$ ise $\varepsilon > 0$ sayısı $2\varepsilon < d(H(R), \partial U)$ olacak biçimde seçilmiş olsun. H düzgün sürekli olduğundan, bir $\delta > 0$ sayısı her $(t,s), (t',s') \in R$ için

$$\left(\left|t - t'\right| < \delta\right) \wedge \left(\left|s - s'\right| < \delta\right) \Longrightarrow \left|H(t,s) - H(t',s')\right| < \varepsilon$$

olacak biçimde vardır. Şimdi $m, n \in \mathbb{N}^*$ doğal sayılarını $\frac{b-a}{m} < \delta$ ve $\frac{1}{n} < \delta$ olacak biçimde seçelim. Şimdi $t_i := a + i\frac{b-a}{m}$, $i = 0, \ldots, m$, $s_j := \frac{j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$ ve $z_{ij} := H(t_i, s_j)$ olsun. $\gamma_j := H_{s_j}$ olarak tanımlarsak, $\gamma_0 = \gamma$ ve $\gamma_n = \eta$ olur. $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için $R_{i.j} := [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ olmak üzere, $H(R_{ij}) \subset D(z_{i-1,j-1}, 2\varepsilon) \subset U$ olduğundan, γ_{j-1} gezisi U'da γ_j gezisine yakındır ve Teorem 2.8.5 ile

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f = \cdots = \int_{\gamma_n} f = \int_\gamma f.$$

Böylece (i) ve (ii) aradan çıkar. Sabit geziler üzerinden integraller $= 0$ olduğundan, teoremin ikinci kısmından üçüncü kısmı çıkar. □

Teorem 2.9.16. *$B \subset \mathbb{C}$ evrimsel basit bağlantılı bir bölge ise*

(i) *Her kapalı $\gamma \in \mathcal{G}(B)$ ve her $f \in \mathcal{H}(B)$ için $\int_\gamma f = 0$.*

(ii) *$\gamma, \eta \in \mathcal{G}(B)$ uç noktaları aynı iki geziyse, her $f \in \mathcal{H}(B)$ için $\int_\gamma f = \int_\eta f$.*

(iii) *Her $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonunun B'de bir ilkeli vardır.*

Kanıt. (i) $\gamma \in \mathcal{G}_{kap}(B)$ ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olsun. B evrimsel basit bağlantılı olduğundan, $\gamma \overset{B}{\simeq} 0$ ve Teorem 2.9.15'ten $\int_\gamma f = 0$.

(ii) $\gamma, \eta \in \mathcal{G}(B)$'nin uç noktaları aynı ise $\gamma\eta^- \in \mathcal{G}_{kap}(B)$ ve dolayısıyla az önce kanıtlanandan $\int_\gamma f - \int_\eta f = \int_{\gamma\eta^-} f = 0$.

(iii) $f \in \mathcal{H}(B)$ verilsin. Bir $a \in B$ noktasını keyfi seçelim. Her $z \in B$ için $\gamma \in \mathcal{G}(B)$ gezisi başlangıç noktası a ve bitiş noktası z olan herhangi bir gezi olmak üzere, $F(z) := \int_\gamma f$ tanımı, teoremimizin ikinci kısmından dolayı kusursuzdur. $F' = f$ olduğu tıpkı Teorem 2.6.2 ve Teorem 2.6.4'ün kanıtlarındaki gibi gösterilir. □

Bilinen bir gerçeği son kez tekrarlayalım: Teorem 2.9.15 ve Teorem 2.9.16'da geçtiği her yerde γ, η gezileri yerine onların $\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta}$ rotalarını yazabiliriz.

Teorem 2.9.17. *$B \subset \mathbb{C}\backslash\{a\}$ bir basit bağlantılı bölge, $z_0 \in B$ ve $\theta_0 \in \mathbf{arg}(z_0 - a)$ keyfi verilsinler.* **log** *çok değerli fonksiyonunun B'de $\log_B(z_0) = \ln|z_0 - a| + i\theta_0$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli bir $\log_B$ holomorf dalı vardır. Bu $\log_B$ fonksiyonu B'de holomorf olan $f(z) = (z-a)^{-1}$ fonksiyonunun bir ilkelidir.*

Kanıt. Genellikten bir şey kaybetmeden $a = 0$ olduğunu varsayabiliriz. Teorem 2.9.16(iii)'e göre, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ fonksiyonunun B'de bir F ilkeli vardır. İlkeller bir sabit dışında belirli olduklarından $F(z_0) = \ln|z_0| + i\theta_0$ varsayabiliriz. Şimdi her $z \in B$ için $h(z) := z\exp(-F(z))$ olarak tanımlansın. $h \in \mathcal{H}(B)$ ve B'de $h'(z) \equiv 0$ olduğundan, h fonksiyonu B'de sabittir. Diğer yandan, $h(z_0) = 1$, dolayısıyla $h \equiv 1$. Böylece her $z \in B$ için $\exp F(z) = z$, böylece $F(z) \in \mathbf{log}\, z$ olur. Biz B'de $\log_B := F$ olarak tanımlıyoruz.

F_1 fonksiyonu B'de **log**'un bir başka holomorf dalı olsun. Teorem 1.9.4'ten dolayı, bir $k \in \mathbb{Z}$ ile B'de $F_1 - F = 2\pi i k$ olur. Eğer ayrıca $F_1(z_0) = F(z_0)$ olmasını istersek, $k = 0$ ve $F_1 = F$ olur. $\square$

Problemler

Problem 2.9.1. (X, d) bir metrik uzaysa, $a, b \in X$ olmak üzere, $\mathcal{G}_{a,b}$'deki her $\gamma, \eta : [0,1] \to X$ için $\rho(\gamma, \eta) := \sup_{t\in[0,1]} d(\gamma(t), \eta(t))$ ile $\mathcal{G}_{a,b}$'de bir ρ metriği tanımlandığını ve X'te γ ve η arasındaki bir $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ evirmesinin bize $(\mathcal{G}_{a,b}, \rho)$ metrik uzayında başlangıç noktası γ ve bitiş noktası η olan ve $\Gamma(s) := H_s$ ile tanımlanan bir gezi verdiğini ve tersine, böyle Γ gezilerinin ise X'te γ ve η arasında uç noktaları koruyan bir evirme tanımladığını gösteriniz.

Problem 2.9.2. X bir topolojik uzay, $a, b \in X$ ve $\pi(X; a, b) := \mathcal{G}_{a,b}(X)/\simeq_{uk}$ olsun. $c, d \in X$ ve $\lambda \in \mathcal{G}_{a,c}(X)$ ve $\eta \in \mathcal{G}_{b,d}(X)$ olmak üzere, $\Phi([\gamma]) := [\lambda^{-1}\gamma\eta]$ olarak tanımlanan $\Phi : \pi(X; a, b) \to \pi(X; c, d)$ dönüşümünün bir tameşleme olduğunu gösteriniz.

Problem 2.9.3. Sayfa 195'te tanımlanan φ_σ için $(\varphi_\sigma)^{-1} = \varphi_{\sigma^-}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.9.4. $H := H(0; r, R)$ halkasında $\gamma : [0,1] \to H$ kapalı gezisi verilsin. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $\gamma_m : [0,1] \to H$ gezisi $\gamma_m(t) = \gamma(0)e^{2\pi i m t}$ olsun. Bir m için γ'nın H'de γ_m'e evrilebildiğini gösteriniz.

Problem 2.9.5. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ bir açık küme, $a, b \in U$ ve γ ise U'da başlangıç noktası a, bitiş noktası b olan bir gezi olsun. γ'nın U'da uç noktaları koruyarak bir parçalı türevlenebilir η gezisine evrilebileceğini gösteriniz. ∞'da türev için Tanım 3.6.7'ye bakınız. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\lambda_{\alpha,\beta,\infty} : [0, +\infty] \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü $t \in [0, +\infty)$ için $\gamma(t) := \alpha + t(\beta - \alpha)$ ve $\gamma(+\infty) = \infty$ olarak tanımlansın. Önce, $\mathbb{C}_\infty$'da poligonal gezilerin $\lambda_{\alpha,\beta,\infty}$ ve $\lambda^-_{\alpha,\beta,\infty}$ tipinde gezileri de içermesine izin verirsek, γ'ya poligonlarla yaklaşabileceğimizi gösteriniz.

2.10 Dönme Sayıları

Altkısım 1.7.2'de $z, w \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $\sphericalangle(w,z) = \mathbf{arg}\, \frac{z}{w}$ olarak tanımladık ve $\sphericalangle(w,z) = -\sphericalangle(z,w)$ olduğunu biliyoruz. Herhangi farklı iki $w, z \in \mathbb{C}$ noktaları için "başlangıç noktası w olup z noktasından geçen ışın" yerine kısaca wz **ışını** diyeceğiz. Bize bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{w\}$ gezisi verilsin. Şimdi t parametresi a'dan başlayıp b'ye giderken $w\gamma(t)$ ışını w'nin çevresinde, saatin ters yönünde tarananlar pozitif ve saat yönündekiler negatif alınmak üzere, $\sphericalangle(\gamma, w)$ ile göstereceğimiz bir yönlenmiş açı tarar. Biz $\sphericalangle(\gamma, w)$'nin önce analitik tanımını verip, ardından geometrik yorumunu vereceğiz.

$V \subset \mathbb{C}$ ve $\mathbf{g} : V \to \mathcal{P}^*(\mathbb{C})$ ise çok değerli bir fonksiyon olsun. $\gamma : [a,b] \to V$ gezisi verildiğinde $\mathbf{g}$'nin γ boyunca bir **(sürekli) dal**ından $\mathbf{g} \circ \gamma$'nin $[a,b]$'de (bir sürekli) dalını anlayacağız.

Teorem 2.10.1. (i) $\mathbf{log}(z-w)$ *ve* $\mathbf{arg}(z-w)$ *fonksiyonlarının her* $\gamma : [a,b] \to \mathcal{G}(\mathbb{C}\backslash\{w\})$ *gezisi boyunca sürekli dalları vardır ve bunlar herhangi bir* $c \in [a,b]$ *noktasındaki değerleriyle tek olarak belirlidir.*

(ii) $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu* $\mathbf{arg}(z-w)$*'nin* $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{C}\backslash\{w\})$ *gezisi boyunca bir sürekli dalıysa,* $\theta(b) - \theta(a)$ *sayısı* θ *sürekli dalının seçiminden bağımsızdır ve ayrıca* γ *kapalıysa,*

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Kanıt. $f(z) := \frac{1}{z-w}$ fonksiyonu $U := \mathbb{C}\backslash\{w\}$ açık kümesinde holomorftur. Teorem 2.8.3'ten f'nin γ boyunca bir $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ ilkeli olduğunu, herhangi iki ilkelin bir sabit kadar fark ettiğini ve

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \int_\gamma f = g(b) - g(a)$$

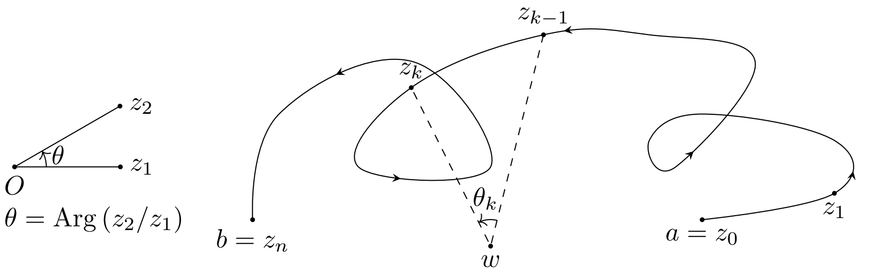
olduğunu biliyoruz. Her $t \in [a,b]$ için, $f(z)$'nin ilkelleri yerel olarak $\log(z - w)$ olduğundan, aynı zamanda $g(t) \in \mathbf{log}(\gamma(t) - w)$ olacağından, bir $\theta(t) \in \mathbf{arg}(\gamma(t) - w)$ ile $g(t) = \ln|\gamma(t) - w| + i\theta(t)$ olur. Buradan

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \ln \frac{|\gamma(b) - w|}{|\gamma(a) - w|} + i\left(\theta(b) - \theta(a)\right) \tag{2.37}$$

elde ederiz. Sonuçta g fonksiyonu $\mathbf{log}(\gamma(t) - w)$'nin, θ ise $\mathbf{arg}(\gamma(t) - w)$'nin $[a,b]$'de sürekli dallarıdır. Teorem 1.9.4'ten dolayı, g ve θ birer sabit dışında tek olarak belirlidirler. Dolayısıyla, $\theta(b) - \theta(a)$ sayısı θ dalının seçiminden bağımsızdır. γ kapalı ise, (2.37) eşitliği

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = i\left(\theta(b) - \theta(a)\right)$$

şeklini alır. $\gamma(a) = c = \gamma(b)$ ise, $\theta(b), \theta(a) \in \mathbf{arg}(c - w)$ olduklarından, bir $k \in \mathbb{Z}$ ile $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$ olur. □



Şekil 2.22: Yönlenmiş açı ve bir gezinin taradığı açı.

Tanım 2.10.2. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{w\}$ bir gezi ve $\theta : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbf{arg}(\gamma(t) - w)$'nin bir sürekli dalı ise,

$$\sphericalangle(\gamma, w) := \theta(b) - \theta(a) = \mathrm{Im} \int_\gamma \frac{dz}{z - w} \tag{2.38}$$

sayısına **γ'nın w çevresinde taradığı yönlenmiş açı** diyelim[11]. Eğer ayrıca γ bir kapalı geziyse,

$$n(\gamma, w) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - w} \in \mathbb{Z} \tag{2.39}$$

tam sayısına γ'nın w çevresindeki **dönme sayısı** denir.[12]

Not 2.10.3. $\sphericalangle(\gamma, w)$'nin geometrik yorumu: $[a,b]$ kapalı aralığının bir $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışını alalım ve $D_0, D_1, \ldots, D_n$ dairelerini Teorem 2.8.3'teki gibi seçelim. Ayrıca, $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbf{arg}(\gamma(t) - w)$'nin bir sürekli dalı olsun. $\{w\}$ ve $\underline{\gamma}$ ayrık kompakt kümeler olduğundan, bu daireleri $w \notin D_k$ olacak biçimde seçebiliriz. $z_k := \gamma(t_k)$ olmak üzere, wz_k ışını başlangıç noktası w olan $z_k - w$ yönündeki yarıdoğrudan başkası değildir. $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olsun. D_k dairelerinde $\mathbf{log}(z - w)$ logaritmasının türevlenebilir $\log_k$ dalları vardır. Bu dallar, yine D_k dairesinde $\mathbf{arg}(z - w)$'nin bir sürekli $\arg_k$ dalı ile $\log_k(z - w) = \ln|z - w| + i\arg_k(z - w)$ şeklindedir. Bu durumda $[t_{k-1}, t_k]$ aralığında θ ve $\arg_k(\gamma(t) - w)$ fonksiyonları $\mathbf{arg}(z - w)$'nin sürekli dalları olarak birbirlerinden bir sabit kadar fark ettiklerinden,

$$\theta_k := \theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) = \arg_k(z_k - w) - \arg_k(z_{k-1} - w)$$

olur. $w\gamma(t)$ ışının $[t_{k-1}, t_k]$ aralığında taradığı yönlenmiş açı, dd. bu aralıktaki argüman değişikliği

$$\theta_k := \arg_k(z_k - w) - \arg_k(z_{k-1} - w) \in \mathbf{arg}\,\frac{z_k - w}{z_{k-1} - w} = \sphericalangle(z_{k-1} - w, z_k - w)$$

[11] $\mathbf{arg}(\gamma(t) - w)$'nin γ boyunca değişimi de denilir.

[12] $\gamma = \kappa_1^- \kappa_1^- \kappa_1 \kappa_1 \kappa_1$ ve $\eta = \kappa_1$ için $n(\gamma, 0) = 1 = n(\eta, 0)$; ancak γ gezisi 0'ın çevresinde önce saat yönünde iki kez turlar, ardından saatin ters yönünde üç kez turlarken buna karşın η yalnızca bir kez saatin ters yönünde turlar. "Dönme sayısı" bunları ayırt etmez. "Dönmeler toplamı" veya başka bir uygun isim verilmesi gerekir; ancak öylesine yerleşmiş bir kavram ki, öylece bıraktık.

olur. $\frac{d}{dz}\log_k(z-w) = \frac{1}{z-w}$ ve $\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-w}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z-w} &= \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} d\log_k(z-w) = \sum_{k=1}^m (\log_k(z_k-w) - \log_k(z_{k-1}-w))\\ &= \sum_{k=1}^n \left(\ln\frac{|z_k-w|}{|z_{k-1}-w|} + i\theta_k\right)\\ &= \ln\left|\frac{z_n-w}{z_0-w}\right| + i\left(\sum_{k=1}^n \theta_k\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece γ boyunca $w\gamma(t)$ ışının taradığı açı

$$\sum_{k=1}^n [\arg_k(z_k-w) - \arg_k(z_{k-1}-w)] = \operatorname{Im}\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \sphericalangle(\gamma, w)$$

olur. Eğer burada her bir γ_k gezisi w'den geçen bir L_k doğrusunun belirlediği bir H_k yarıdüzlemindeyse, $\theta_k = \arg_0 \frac{z_k-w}{z_{k-1}-w}$ alınabilir (bkz. Problem 2.10.4).

$w \notin \underline{\gamma}$ ve $\eta \sim \gamma$ ise $\sphericalangle(\eta, w) = \sphericalangle(\gamma, w)$ olduğu apaçıktır. Dönme sayısı rotasaldır ve $\sphericalangle(\boldsymbol{\gamma}, w) := \sphericalangle(\eta, w)$ tanımı kusursuzdur. (2.38) ve (2.39)'dan aşağıdaki önerme aşikârdır:

Önerme 2.10.4. *(i) γ bir sabit geziyse, $\sphericalangle(\gamma, w) = 0$ olur.*

(ii) $\sphericalangle(\gamma^-, w) = -\sphericalangle(\gamma, w)$.

(iii) Her $a \in \mathbb{C}$ için $\sphericalangle(\gamma, w) = \sphericalangle(\gamma + a, w + a)$. Özellikle $\sphericalangle(\gamma, w) = \sphericalangle(\gamma - w, 0)$.

(iv) $\gamma\eta$ tanımlı ve $w \notin \underline{\gamma} \cup \underline{\eta}$ ise, $\sphericalangle(\gamma\eta, w) = \sphericalangle(\gamma, w) + \sphericalangle(\eta, w)$.

(v) $\sphericalangle(\gamma, w)$ fonksiyonu $\mathbb{C}\setminus\underline{\gamma}$'da kompleks türevlenebilir.

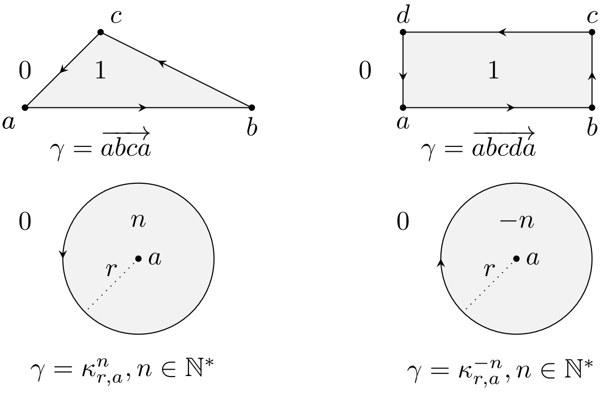
(vi) γ kapalıysa, $n(\gamma, w)$ fonksiyonu $\mathbb{C}\setminus\underline{\gamma}$'nın bağlantılı bileşenlerinde sabittir.

(vii) γ kapalıysa, $\mathbb{C}\setminus\underline{\gamma}$'nın bir tek sınırsız bileşeni vardır ve orada $n(\gamma, w) \equiv 0$.

(viii) γ ve η gezileri $\mathbb{C}\setminus\{w\}$'de birbirine uç noktaları koruyarak evrilebiliyorlarsa $\sphericalangle(\gamma, w) = \sphericalangle(\eta, w)$; eğer γve η'nın her ikisi de kapalı ve $\mathbb{C}\setminus\{w\}$'de kapalı geziler olarak birbirine evrilebiliyorlarsa $n(\gamma, w) = n(\eta, w)$.

Kanıt. Problem 2.10.2. □

Elbette yukarıdaki kanıtlar analitik olarak verileceklerdir. Ancak savların çoğu geometrik olarak aşikârdır. $r > 0$ olmak üzere, $\gamma_{r,w}(t) := r\frac{\gamma(t)-w}{|\gamma(t)-w|}$ olarak tanımlarsak, $w\gamma(t)$ ve $w\gamma_{r,w}(t)$ aynı ışınlardır, γ ve $\gamma_{r,w}$ sürekli gezileri w çevresinde aynı açıları tararlar, dd. $\sphericalangle(\gamma, w) = \sphericalangle(\gamma_{r,w}, w)$. Bu eşitlik analitik olarak $\mathbb{C}\setminus\{w\}$'de γ gezisi $\gamma_{r,w}$ gezisine evrilebildiği için geçerlidir. Şimdi ise $\gamma_{r,w}$ gezisinin izi $C_r(w)$ çemberi olduğundan, $\varphi = \arg_0 \frac{\gamma(b)-w}{\gamma(a)-w}$ olmak üzere, $\sphericalangle(\gamma_{r,w}, w)$ taranan açısının $\varphi + 2\pi m$ tipinde olması gerektiği apaçıktır. Gezimiz kapalıysa, $\varphi = 0$ olacağından, taranan açı $2\pi m$ tipinde olmak zorundadır. Dolayısıyla, γ



Şekil 2.23: Bazı basit rotaların iç ve dışları.

kapalı gezileri için $\sphericalangle(\gamma, w)$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma}$'da sürekli ve değerleri $2\pi\mathbb{Z}$ ayrık uzayında olduğu için, $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma}$'nın bağlantılı bileşenlerinde sabittir.

Şimdi γ bir kapalı gezi olsun. $\underline{\gamma}$ bir kompakt küme olduğundan bir $D_r(a)$ içine alınabilir, $\mathbb{C}\backslash D_r(a)$ bağlantılı olduğundan, $U := \mathbb{C}\backslash\underline{\gamma}$'nın bir bağlantılı bileşeni içine düşer. Dolayısıyla, U'nın *tek bir sınırsız bağlantılı bileşeni* vardır; buna B diyelim. $w, \zeta \in B$ ve $\zeta \in \mathbb{C}\backslash D_r(a)$ olsun. Bir yandan $\sphericalangle(\gamma, z)$ fonksiyonu B'de sabittir, diğer yandan γ gezisi ζ noktasının etrafında turlayamayacağı için $\sphericalangle(\gamma, w) = \sphericalangle(\gamma, \zeta) = 0$ olur.

Örnek 2.10.5.
κ_1 pozitif yönlenmiş $\boldsymbol{\partial}\mathbb{D}$ sınırı ve $n \in \mathbb{N}^*$ için $\gamma := \kappa_1^n$ olsun. Her $a \in D$ için $n(\gamma, a) = n$, dolayısıyla $n(\gamma^-, a) = -n$ ve her $b \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}$ içinse $n(\gamma, a) = n(\gamma^-, a) = 0$ olur. Görsel olarak γ ve γ^- gezilerinin içinden D'yi ve bu gezilerin dışından ise $\mathbb{C}\backslash\overline{D}$ kümesini anlarız. Bu ve Şekil 2.23'te verilen gezilerin dönme sayıları, aşağıdaki tanımın mantığını açıklar:

Tanım 2.10.6. γ bir kapalı gezi olmak üzere,

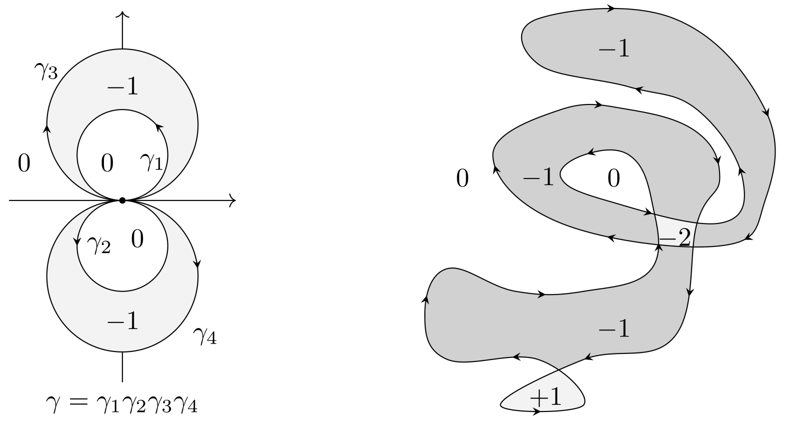
$$\mathrm{I}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash\underline{\gamma} \,|\, n(\gamma, z) \neq 0\} \text{ ve } \mathrm{D}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C}\backslash\underline{\gamma} \,|\, n(\gamma, z) = 0\}$$

kümelerine sırasıyla **$\boldsymbol{\gamma}$ kapalı gezisinin içi** ve **dışı** denir.

Biraz yukarıda söylenenden biliyoruz ki $\underline{\gamma} \subset D_r(a)$ ise, kapalı γ gezileri için $\mathbb{C}\backslash D_r(a) \subset \mathrm{D}(\gamma)$ olur ve bunun bir sonucu olarak $\mathrm{I}(\gamma)$ içi $D_r(a)$ dairesinin bir alt kümesidir, dolayısıyla sınırlıdır.

Dönme sayısı bir rotasal kavram olduğundan, iç ve dış, rotasal kavramlardır. Bir $\eta \in \boldsymbol{\gamma}$ ile tanımlanan $\mathrm{I}(\boldsymbol{\gamma}) := \mathrm{I}(\eta)$ ve $\mathrm{D}(\boldsymbol{\gamma}) := \mathrm{D}(\eta)$ kavramları adaydan bağımsızdırlar. Ayrıca, her kapalı γ gezisi için açıkça

$$\mathbb{C} = \mathrm{I}(\gamma) \sqcup \underline{\gamma} \sqcup \mathrm{D}(\gamma)$$



Şekil 2.24

$\mathbb{C}$'nin bir parçalanışıdır. Şekil 2.23 ve Şekil 2.24'te bazı rotaların iç ve dışları belirtilmiştir. Dönme sayısının 0 olduğu bölgeler beyaz bırakılmıştır. Özellikle Şekil 2.24 öğreticidir; yukarıdaki tanım verilmeden, oradaki gezilerin içi olarak düşünebileceğimiz bazı bölgelerin bu tanıma göre bu gezilerin dışında olduğu görülür.

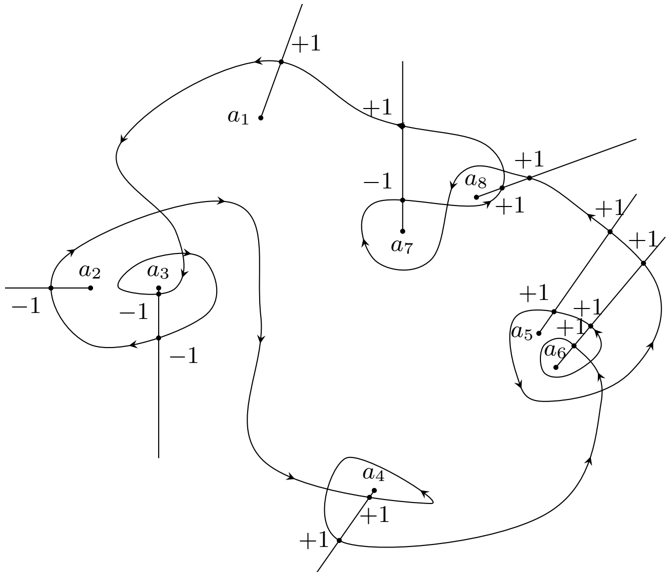
Önerme 2.10.7. *$\gamma, \eta : [a,b] \to \mathbb{C}$ iki kapalı gezi, $w \notin \underline{\gamma}$ ve $w \notin \underline{\eta}$ olsun. Her $t \in [a,b]$ için $|\gamma(t) - \eta(t)| < |\gamma(t) - w|$ ise, $n(\gamma, w) = n(\eta, w)$ olur.*

Kanıt. Önce bu önermenin sevimli bir yorumunu verelim: Bir kişi köpeğini $[a,b]$ zaman aralığında bir parkta geziye çıkarsın ve sonra birlikte çıkış noktalarına dönsünler. Her $t \in [a,b]$ anında köpeğin sahibine uzaklığı, parktaki bir w ağacına olan uzaklığından daima küçük kalıyorsa, dd. sahibine ağaçtan daha yakınsa köpeğin ve sahibinin w ağacı etrafındaki dönme sayıları birbirine eşittir.

$U := \mathbb{C}\setminus\{w\}$ olsun. Verilerden her $t \in [a,b]$ için $w \notin [\gamma(t), \eta(t)]$ olduğundan, $H(t,s) := \gamma(t) + s(\eta(t) - \gamma(t))$ dönüşümü γ gezisini U'da η gezisine evirir. Sonuç olarak, (2.10.4)(viii) ile $n(\gamma, w) = n(\eta, w)$ olur. □

γ aşırı karmaşık olmayan bir kapalı gezi ve $w \notin \underline{\gamma}$ ise, $n(\gamma, w)$ dönme sayısını hesaplamanın anlaşılır bir yolu vardır. w noktası $\mathbb{C}\setminus\underline{\gamma}$ kümesinin bir B bağlantılı bileşeninde olsun. w noktasından ∞ noktasına giden herhangi bir l_w ışınını alalım. Gezimiz bu ışını kesmiyorsa B bileşeni $\mathbb{C}\setminus\underline{\gamma}$ kümesinin sınırsız bileşeni olur ve bunun sonucu olarak $n(\gamma, w) = 0$. Gezimizin yolu l_w ışınını kessin. w noktasından l_w boyunca sonsuza doğru baktığımızda, $\underline{\gamma}$ yolundaki gezimiz sırasında bu doğruya sağdan yaklaşıp sola veya soldan yaklaşıp sağa geçişlerimiz olacaktır[13]. Gezimizin l_w doğrusunu kestiği bir $a = \gamma(t)$ noktasında l_w doğru-

[13]Elbette gezimiz sırasında ışına rastladıktan sonra şu seçenekler de vardır: Bir süre ışın



Şekil 2.25: Dönme sayısının pratik hesaplanması. $n(\gamma, a_1) = 1$, $n(\gamma, a_2) = -1$, $n(\gamma, a_3) = -2$, $n(\gamma, a_4) = n(\gamma, a_5) = n(\gamma, a_8) = 2$, $n(\gamma, a_6) = 3$, $n(\gamma, a_7) = 0$.

sunun sağından soluna geçiyorsak $\text{sign}a := +1$ ve solundan sağına geçiyorsak $\text{sign}a := -1$ olarak tanımlayalım. Elbette farklı t_1, t_2 için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ve $\text{sign}\gamma(t_1) \neq \text{sign}\gamma(t_2)$ olabilir. İzleyen önermede bu sign sayılarının toplamının $n(\gamma, w)$ olduğunu kanıtlayacağız (bkz. Şekil 2.25). Gezimizin aşırı karmaşık olmamasından anladığımız ise bu geçişlerin izlenebilecek kadar sonlu olmasıdır. B bileşeninde dönme sayısı sabit olduğundan, $w \in B$ noktası ve l_w ışınını bu geçişler az olacak şekilde seçmeye çalışırız. l_w ışını yerine w noktasından ∞ noktasına giden herhangi bir basit gezi de alabiliriz. Bu, aşağıdaki önermeden çıkar:

Önerme 2.10.8. *$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{w\}$ gezisi bir $d_{\alpha,w} = w + d_\alpha$ yarıdoğrusunu, gezisel sıralamayla $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$noktalarında kesiyorsa*

$$n(\gamma, w) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{sign}a_i.$$

Kanıt. γ'nın parametrelenmesini bir $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışıyla $\gamma(a) = \gamma(b) = a_0$ ve $k = 1, \ldots, n-1$ için $\gamma(t_k) = a_k$ olarak seçebiliriz[14]. $a_n :=$

üzerinde gezindikten sonra iki taraftan birine yönelebiliriz. Bu durumlar da kusursuz incelenebilir. Ancak biz ana fikri vermek için ışınımızın uygun seçildiğinde böyle bir durumla karşılaşmadığımız durumları inceleyeceğiz.

[14]Kapalı gezimizin başlangıç noktasını değiştirmek dönme sayısını değiştirmez.

a_0 olsun. θ ise **arg**'ın γ boyunca bir sürekli dalı olsun (bkz. Teorem 2.10.1). Biz

$$\theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) = \pi(\text{sign}a_k + \text{sign}a_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.40}$$

olduğunu savunuyoruz. Dört farklı durumla karşılaşabiliriz.

(1) $\text{sign}a_k = \text{sign}a_{k-1} = 1$. Bu durumda t_{k-1} anında a_{k-1} noktasından $d_{\alpha,w}$ doğrusunun sağından soluna geçeriz. Sonra (t_{k-1}, t_k) zaman diliminde $\mathbb{C}\backslash d_{\alpha,w}$'de gezinir ve t_k anında a_k noktasından $d_{\alpha,w}$ doğrusunun yine sağından soluna geçeriz. $\mathbb{C}\backslash d_{\alpha,w}$'de **arg** fonksiyonunun $\arg_{\alpha,w}$ sürekli dalı olduğunu biliyoruz ve orada daima $\alpha < \arg_{\alpha,w}(z) < \alpha + 2\pi$. Şimdi θ ve $\arg_{\alpha,w}$'nın her ikisi de, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değerleri için, **arg**'ın $\gamma|[t_{k-1}+\varepsilon, t_k - \varepsilon]$ boyunca sürekli dalları olduğundan,

$$\begin{aligned}
\theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\theta(t_k - \varepsilon) - \theta(t_{k-1} + \varepsilon)\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \big(\arg_{\alpha,w} \gamma(t_k - \varepsilon) - \arg_{\alpha,w} \gamma(t_{k-1} + \varepsilon)\big) \\
&= \arg_{\alpha,w} a_k^+ - \arg_{\alpha,w} a_{k-1}^- = (\alpha + 2\pi) - \alpha = 2\pi.
\end{aligned}$$

Böylece (2.40) eşitliği sağlanır.

(2) $\text{sign}a_k = \text{sign}a_{k-1} = -1$ durumu benzer biçimde irdelenir ve $\theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) = -2\pi$ olduğu kanıtlanır.

(3) $\text{sign}a_{k-1} = 1$ ve $\text{sign}a_k = -1$ olsun. Bu kez benzer hesaplamayla $\theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) = \arg_{\alpha,w} a_k^- - \arg_{\alpha,w} a_{k-1}^- = \alpha - \alpha = 0$ elde ederiz. Böylece (2.40) eşitliği kanıtlanmıştır. Buradan

$$\begin{aligned}
2\pi n(\gamma, w) = \theta(b) - \theta(a) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\theta(t_k) - \theta(t_{k-1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \pi(\text{sign}a_k + \text{sign}a_{k-1}) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \text{sign}a_k.
\end{aligned}$$

(4) $\text{sign}a_{k-1} = -1$ ve $\text{sign}a_k = 1$. Bu durum (3)'e benzer biçimde kanıtlanır. □

Pratikte geziler önermemizin koşullarını sağlar. Okura bir takım basit kapalı olmayan geziler çizip oluşan bölgelerin dönme sayılarını bulmasını öneririz. Aynı gezi için farlı $d_{\alpha,w}$ seçip sonucun değişmediğini görünüz.

Problemler

Problem 2.10.1. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ise, $\mathbb{C}\backslash K$'nin sonlu sayıda bağlantılı bileşeni olduğunu ve bunlardan tam bir tanesinin sınırsız olduğunu gösteriniz.

Problem 2.10.2. Önerme 2.10.4'ün savlarını kanıtlayınız.

Problem 2.10.3. $B \subset \mathbb{C}$ bir yıldız biçimli bölge, $a \in \mathbb{C}\backslash B$ olsun. B'deki her kapalı gezi için $n(\gamma, a) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.10.4. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ gezisi verilsin ve $w \in \mathbb{C}\backslash\{w\}$ olsun. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışına, her $k = 1, \ldots, n$ için $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere, γ_k gezisi w'den geçen bir L_k doğrusunun belirlediği bir açık H_k yarıdüzlemindeyse **uygun** diyelim. Aşağıdakileri kanıtlayınız:

(i) H, w'den geçen bir L doğrusunun belirlediği bir açık yarıdüzlem ve $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in H$ ise, $\operatorname{Arg} \frac{\zeta_3 - w}{\zeta_1 - w} = \operatorname{Arg} \frac{\zeta_3 - w}{\zeta_2 - w} + \operatorname{Arg} \frac{\zeta_2 - w}{\zeta_1 - w}$ olduğunu gösteriniz.

(ii) (i)'den yararlanarak $[a, b]$'nin her uygun $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ parçalanışı için $z_k = \gamma(t_k)$ ve $\theta_k = \arg_0 \frac{z_k - w}{z_{k-1} - w}$ olmak üzere,

$$\sphericalangle(\gamma, w) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k = \sum_{k=1}^{n} \arg_0 \frac{z_k - w}{z_{k-1} - w}.$$

Problem 2.10.5. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{w\}$ bir pürüzsüz gezi olsun, dd. $\mathcal{C}^1$-sınıfından ve daima $\gamma'(t) \neq 0$ olsun. Bir $v \in \mathbb{S}$ ile $L := \{w + tv \,|\, t \in [0, +\infty)\}$ olsun. γgezisi L doğrusunu sonlu kez çapraz kesiyorsa

$$n(\gamma, w) = \sum_{t \in \gamma^{-1}(L)} \operatorname{sgn}[\det(v, \gamma'(t))]$$

olduğunu gösteriniz.

2.11 Homolojik Cauchy Teoremi

Şimdiye kadar geziler ve rotalar üzerinden integrallerle ilgilendik. $\gamma \in \mathcal{G}^i$, $f \in \mathcal{C}(\underline{\gamma})$ ve $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ ise

$$\int_{\gamma_1 \cdots \gamma_n} f = \int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f$$

olduğunu biliyoruz. Ancak bu formülün sağ ve sol yanları arasında şöyle bir uyumsuzluk vardır: Sol yan ancak $1 \leq i \leq n-1$ için γ_{i+1} gezisi γ_i gezisine eklenebiliyorsa anlamlı iken, sağ yan koşulsuz anlamlıdır. $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ herhangi bir permütasyon olduğunda sol yanda $\gamma_{\sigma(1)} \cdots \gamma_{\sigma(n)}$ genelde tanımlanmamıştır ancak sağ yanda $\int_{\gamma_{\sigma(1)}} f + \cdots \int_{\gamma_{\sigma(n)}} f$ daima anlamlıdır ve tüm bu değerler birbirine eşittirler. Sol yandaki bu kısıtlamalardan kurtulmak için γ'nın $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ parçalanışı yerine biraz ileride açıklayacağımız $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ zincirini alacağız.

Serbest Abel Grupları: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme olmak üzere,

$$\mathcal{S}(X) := \{f \,|\, f : X \to \mathbb{Z},\ f^{-1}(\mathbb{Z}^*) \,\text{sonlu}\}$$

kümesi fonksiyonların toplamına göre bir Abel grubudur. $f \in \mathcal{S}(X)$ olması $f : X \to \mathbb{Z}$ ve f'nin X'te sonlu nokta dışında 0 olmasıyla eş anlamlıdır. Her

$n \in \mathbb{Z}$ için $n \cdot f \in \mathcal{S}(X)$ fonksiyonu, her $x \in X$ için $(n \cdot f)(x) := nf(x)$ olarak tanımlansın[15] . Bu işlem $\mathcal{S}(X)$'i bir $\mathbb{Z}$-modülü yapar. Böylece $\mathcal{S}(X)$ cebirsel terimlerle X kümesinin ürettiği *serbest Abel grubudur* (veya *serbest* $\mathbb{Z}$-modülüdür). Tanım gereği $1 \cdot f = f$. Ayrıca, f'nin tersi $-f$ olmak üzere, her $x \in X$ için

$$(n \cdot (-f)(x) = n((-f)\,(x)) = n(-f(x)) = -nf(x) = ((-n) \cdot f)(x)$$

olduğundan, $n \cdot (-f) = (-n) \cdot f$ olduğu aşikârdır. $n \in \mathbb{N}^*$ için $n \cdot f$ ögesi n tane f'nin toplamıdır, dd. $n \cdot f = \overbrace{f + \cdots + f}^{n}$.

Her $x \in X$ için $\delta_x \in \mathcal{S}(X)$ fonksiyonu $\delta_x(x) = 1$ ve her $x \neq y \in X$ için $\delta_x(y) = 0$ olarak tanımlanmış olsun. $f \in \mathcal{S}(X)$, $x_1, \dots, x_k \in X$ birbirinden farklı ve $f^{-1}(\mathbb{Z}^*) = \{x_1, \dots, x_k\}$ ise, $n_i := f(x_i)$ olmak üzere,

$$f = n_1 \cdot \delta_{x_1} + \cdots + n_k \cdot \delta_{x_k} = \sum_{x \in f^{-1}(\mathbb{Z}^*)} f(x) \cdot \delta_x. \tag{2.41}$$

Bu gösterime f'nin **normal** gösterimi diyelim. Her $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ permütasyonu için $f = n_{\sigma(1)} \cdot \delta_{x_{\sigma(1)}} + \cdots + n_{\sigma(k)} \cdot \delta_{x_{\sigma(k)}}$ olduğu apaçıktır, dd. normal gösterim terimlerin sırası dışında tek olarak belirlidir.

f'nin normal gösterimine katsayıları 0 olan sonlu sayıda $0 \cdot \delta_x$ tipi terimler ekleyerek başka gösterimlerini elde ederiz. Özetle $\mathcal{S}(X)$ uzayının ögeleri $x_i \in X$, $m \in \mathbb{N}$ ve $p_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta_{x_i}$ tipinde ifadelerdir.

Bu açıklamalardan sonra iki uzlaşmayla yalın gösterimlere geçeceğiz: δ_x yerine x yazacak ve $\cdot$ imini yazmayacağız, özetle $n \cdot \delta_x$ yerine yalın olarak nx yazacağız. Bu gösterimlerle (2.41) yerine

$$f = n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k$$

yazacağız; bu ifadelere **biçimsel toplamlar** da denir. $y_1, \dots, y_m \in X$ olmak üzere, $f = \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k n_i x_i + \sum_{j=1}^m 0 y_j$ olduğu apaçıktır, ancak bu artık normal gösterim değildir. $f, g \in \mathcal{S}(X)$ keyfi verildiğinde bu ikisinin normal gösterimlerinde geçen noktalar sonlu tanedir: Bunlar $x_1, \dots, x_m$ ise, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ sayıları $f = \sum_{i=}^m p_i x_i$ ve $g = \sum_{i=1}^m q_i x_i$ olacak biçimde vardır. Bunların artık normal gösterim olması gerekmez. Bu durumda $f + g = \sum_{i=1}^m (p_i + q_i) x_i$ olur. Genel olarak $f = \sum_{x \in X} f(x) x$ yazabiliriz (bu toplam özünde sonludur). Dolayısıyla, her $f, g \in \mathcal{S}(X)$ için $f + g = \sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) x$.

Daha önce de belirttiğimiz gibi değişik kitaplarda yazarlar $\mathcal{G}^i(U)$, $\mathcal{G}^1(U)$,... gibi farklı gezilerden yola çıkarlar, dolayısıyla buna uygun olarak $\mathcal{S}(\mathcal{G}^i(U))$, $\mathcal{S}(\mathcal{G}^1(U))$, ... kümelerini seçer. Biz kendi yaklaşımımıza uygun olarak bu kısımda $\mathcal{S}(\mathcal{G}^i(U))$ ile çalışacağız.

[15] Sağ yanda iki tam sayının çarpımı, sol yanda ise bir n tam sayısı ile bir f fonksiyonunun çarpımı söz konusudur!

Tanım 2.11.1. $U \subset \mathbb{C}$ olmak üzere, $\mathrm{C}_1(\mathrm{U}) := \mathcal{S}(\mathcal{G}^i(U))$'nun ögelerine U'da **1-(integral) zincirleri** denir.

Herhangi bir $\Gamma \in \mathrm{C}_1(U)$ integral zinciri $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathcal{G}^i(U)$ ve $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n$ olarak yazılabilir. Eğer $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathcal{G}^1(U)$ ise, Γ'ya U'da bir $\mathcal{C}^1$**-zinciri** denir.

Tanım 2.11.2. $\Gamma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_n\gamma_n \in \mathrm{C}_1(U)$ olsun.

(i) $\underline{\Gamma} := \bigcup_{i=1, m_i \neq 0}^n \underline{\gamma_i}$ kümesine Γ **zincirinin izi** ve $L(\Gamma) := \bigcup_{i=1}^n |m_i|\, L(\gamma_i)$ sayısına ise Γ **zincirinin uzunluğu** denir. denir.

(ii) $\Gamma \in \mathrm{C}_1(U)$ bir integral zinciri ve $f : \underline{\Gamma} \to \mathbb{C}$ sürekliyse,

$$\int_\Gamma f := m_1 \int_{\gamma_1} f + \cdots + m_n \int_{\gamma_n} f. \tag{2.42}$$

ve $\|f\|_\Gamma := \sup_{z \in \underline{\Gamma}} |f(z)|$.

Geziler ve rotalara ilişkin yaklaşımımızı burada da sürdüreceğiz. Özünde bizi integraller ilgilendirdiğinden, denk gezilere aynı olarak bakıp rotalarla çalışmak gerekirken çoğu yazarlar gezilerle çalışır, gerek gördükleri her yerde herhangi bir geziden ona denk olan herhangi birine geçerler. Benzeri bir durum zincirler için de geçerlidir.

$\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathrm{C}_1(U)$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ve $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(U)$ ise

$$\int_{m_1\Gamma_1 + m_2\Gamma_2} (a_1 f_1 + a_2 f_2) = m_1 a_1 \int_{\Gamma_1} f_1 + m_2 a_2 \int_{\Gamma_2} f_2,$$

olur. Dolayısıyla, $\varphi(\Gamma, f) := \int_\Gamma f$ ile tanımlanan $\varphi : \mathrm{C}_1(U) \times \mathcal{C}(U) \to \mathbb{C}$ dönüşümü birinci faktörde $\mathbb{Z}$-doğrusal, ikinci faktörde ise $\mathbb{C}$-doğrusaldır. Özellikle her $\Gamma \in \mathrm{C}_1(U)$ bize, $\widetilde{\Gamma}(f) := \int_\Gamma f$ ile tanımlanan $\mathbb{C}$-doğrusal bir $\widetilde{\Gamma} : \mathcal{C}(U) \to \mathbb{C}$ dönüşümü verir. Biz $\widetilde{\Gamma}_1 = \widetilde{\Gamma}_2$ koşulunu sağlayan iki zincire aynı gözü ile bakacağız, dd. onları birbirine **denk** olarak tanımlayacağız:

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_2 :\Longleftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}(U) : \int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f.$$

Bu tanıma göre $\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i$ olmak üzere, aşağıdakiler aşikârdır:

1. $i = 1, \ldots, n$ için $\eta_i \sim \gamma_i$ ise, $\sum_{i=1}^n m_i\gamma_i \equiv \sum_{i=1}^n m_i\eta_i$, dd. parametre değişimleri bizi denk zincirlere götürür. Bu isteğimiz aslında $\mathcal{S}(\mathcal{G}^i(U))$ zincirleriyle değil $\mathcal{S}(\mathcal{R}^i(U))$ zincirleriyle çalışmanın daha doğru olacağını gösterir. O durumda bu istek düşer!

2. $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bir permütasyon ve $\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i$ ise, $\Gamma \equiv \sum_{i=1}^n m_{\sigma(i)}\gamma_{\sigma(i)}$ ve $\Gamma \equiv \sum_{i=1, m_i \neq 0}^n m_i\gamma_i$, dd. $\equiv$ bağıntısı $\mathrm{C}_1(U)$'daki eşitliğe sadıktır.

3. γ_i gezileri $\gamma_i = \gamma_{i1} \cdots \gamma_{ik_i}$ gibi parçalara bölündüğünde
$$\Gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{k_i} \gamma_{ij}.$$

4. Γ'nın ifadesinde birbirine eklenebilen geziler varsa, bunların bir kısmını veya tamamını birbirine ekleyerek Γ' zincirini elde etmişsek $\Gamma \equiv \Gamma'$.

5. Her ne kadar, $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ için zincir olarak $-\gamma$ ve γ^- farklı zincir iseler de $-\gamma \equiv \gamma^-$; dolayısıyla $\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i$ ise $-\Gamma \equiv \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i^-$ olur[16]. Bunun bir diğer sonucu şudur: $\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i$ ifadesinde negatif olan her veya bazı m_i katsayıları için $m_i\gamma_i$ terimi yerine $|m_i|\,\gamma_i^-$ yazarak elde edilen Γ' zincirleri için $\Gamma \equiv \Gamma'$. Özellikle
$$p_i := \begin{cases} m_i, & m_i \geqslant 0 \\ |m_i|, & m_i < 0 \end{cases}, \quad \text{ve} \quad \lambda_i := \begin{cases} \gamma_i, & m_i \geqslant 0 \\ \gamma_i^-, & m_i < 0 \end{cases} \tag{2.43}$$
olmak üzere, $\Gamma \equiv \sum_{i=1}^n p_i\lambda_i$. Bu işlemi Γ'nın normal gösterimine uygularsak, her Γ zinciri katsayıları pozitif olan bir zincire denk olur. Bu nedenle, zincirlerimize sonlu sayıda gezilerin, her birinin sonlu sayıda tekrarları olarak bakabiliriz. $\sum_{i=1}^n p_i\lambda_i$ gösterimine $\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i$ zincirinin **pozitif gösterimi** diyelim.

6. Γ'da geçen tüm $\lambda + \lambda^-$ tipindeki terimlerden bazılarını veya tümünü atarak elde ettiğimiz zincirler Γ'ya denktir.

7. $\lambda = \alpha\beta$ olmak üzere, Γ'dan $\alpha + \beta + \lambda^-$ tipindeki terimlerden bazılarını veya tümünü atarak elde edilen zincirler Γ'ya denktirler.

Denk zincirlere aynı gözü ile bakacağız. (2.42) tanımından dolayı, $\int_\gamma$ integralleri için geçerli olan teoremlerin çoğu olduğu gibi $\int_\Gamma$ integrallerine aktarılır. Bir örnek oluşturmak üzere, aşağıdaki teoremi vereceğiz:

Teorem 2.11.3. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $\Gamma \in \mathrm{C}_1(U)$ bir integral zinciri ve $f, f_n \in \mathcal{C}(\underline{\Gamma})$ olsunlar.*

(i) $\left|\int_\Gamma f\right| \leqslant L(\Gamma) \cdot \|f\|_\Gamma$.

(ii) *(f_n) dizisi $\underline{\Gamma}$'da f'ye düzgün yakınsaksa* $\int_\Gamma f = \lim \int_\Gamma f_n$.

(iii) *$\sum f_n$ serisi $\underline{\Gamma}$'da f'ye düzgün yakınsaksa* $\int_\Gamma f = \sum \int_\Gamma f_n$.

[16] $-\gamma = -\delta_\gamma$ ve $\gamma^- = \delta_{\gamma^-}$ olduğundan, $-\gamma$ ve γ^- iki farklı zincirdir. Ancak, her $f \in \mathcal{C}(U)$ için $\widetilde{-\gamma}(f) = -\widetilde{\gamma}(f) = -\int_\gamma f = \int_{\gamma^-} f = \widetilde{\gamma^-}(f)$ olduğundan, $-\gamma \equiv \gamma^-$.

$\gamma \in \mathcal{G}^i$ bir *kapalı* gezi ve $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ olsun. γ ve $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ zincirleri birbirine denk olduklarından, $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ yazmakta bir sakınca görmeyeceğiz. γ bir kapalı integral gezisi ve $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ olmak üzere, $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ zincirine bir **basit çevrim** denir. $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ herhangi bir permütasyon olmak üzere, $\gamma_{\sigma(1)} + \cdots + \gamma_{\sigma(n)}$, özellikle γ'nın kendisi aynı basit çevrimi temsil eder. $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathrm{C}_1(U)$ basit çevrimler olmak üzere,

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{k} m_i \eta_i = m_1 \eta_1 + \cdots + m_k \eta_k \tag{2.44}$$

tipindeki zincirlere ise **U'da bir çevrim** denir. U'daki çevrimlerin kümesini $\mathrm{Z}_1(U)$ ile gösterelim.

λ bir gezi ve $a = b_\lambda$ ve $b = s_\lambda$ olsun. $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere, a noktası $p\lambda$'da p **kez başlangıç noktası** ve b ise $p\lambda$'da p **kez son nokta** olarak geçer diyeceğiz. Ayrıca, $z \in \mathbb{C} \backslash \{a, b\}$ noktaları ise $p\lambda$'da 0 kez başlangıç noktası ve sıfır kez son nokta olarak geçerler. Bize herhangi bir $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i$ zinciri verilsin. Γ'nın bir çevrim olup olmadığına, dd. (2.44)'ün sağındaki gibi yazılıp yazılamayacağına nasıl karar veririz? p_i ve λ_i'ler (2.43)'teki gibi olmak üzere, $\Gamma' = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i$ zinciri Γ'nın pozitif yazılımı olsun. Γ'nın bir çevrim olması Γ''nün bir çevrim olmasına denktir. Γ''nün bir çevrim olması için gerek ve yeter koşul ise herhangi bir $z \in \mathbb{C}$ noktasının Γ''de toplamda kaç kez başlangıç noktası olarak geçiyorsa toplamda bir o kadar da son nokta olarak geçmesidir. Özetle Γ'nın bir çevrim olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{i : z = b_{\lambda_i}} p_i = \sum_{j : z = s_{\lambda_j}} p_j$$

olmasıdır.

Not 2.11.4. B bir bölge ise, her $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(B)$ çevrimi B'de bir γ kapalı gezisine denktir. Genellikten bir şey kaybetmeden Γ çevrimini pozitif yazılımda verilmiş varsayabiliriz. Böylece $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ kapalı geziler ve $p_i > 0$ olmak üzere, $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} p_i \gamma_i$ olsun. Bir $a \in B$ noktasını keyfi seçelim. α_i ise izi B'de, başlangıç noktası a ve bitiş noktasıysa γ_i'nin başlangıç noktası olan bir integral gezisi olsun. Bu durumda $\gamma := \alpha_1 \gamma_1^{p_1} \alpha_1^- \cdots \alpha_n \gamma_n^{p_n} \alpha_n^-$ gezisi B'de bir kapalı gezidir ve $\Gamma \equiv \gamma$.

Tanım 2.11.5. $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(\mathbb{C})$ bir çevrim olsun.

(i) $a \in \mathbb{C} \backslash \underline{\Gamma}$ ise

$$n(\Gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - a}$$

sayısına **Γ çevriminin a etrafındaki dönme sayısı** denir.

(ii)

$$\mathrm{I}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \backslash \underline{\Gamma} \,|\, n(\Gamma, a) \neq 0\},\ \mathrm{D}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \backslash \underline{\Gamma} \,|\, n\,(\Gamma, a) = 0\}$$

kümelerine sırasıyla Γ **çevriminin içi** ve **dışı** denir. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\underline{\Gamma} \cup \mathrm{I}(\Gamma) \subset U$ ise, Γ **çevrimi** U**'da sıfıra homologdur** (veya **sıfır gibidir**) denir ve bu $\Gamma \overset{U}{\approx} 0$ ile gösterilir.

(iii) Γ ve Γ' izleri U'da olan iki çevrim olsun. $\Gamma - \Gamma' \overset{U}{\approx} 0$, dd. her $z \in \mathbb{C} \backslash U$ için $n(\Gamma, z) = n(\Gamma', z)$ ise, Γ çevrimi U'da Γ' çevrimine **homologdur** (veya Γ çevrimi U'da Γ' **gibidir**) denir ve bu $\Gamma \overset{U}{\approx} \Gamma'$ ile gösterilir.

Demek ki, izi U açık kümesinde olan Γ çevrimi için $\Gamma \overset{U}{\approx} 0$ olması düzlemdeki her $a \notin U$ için $n(\Gamma, a) = 0$ olmasıdır. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ kapalı integral gezileri olmak üzere, $\Gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i$ bir çevrim ve $a \notin \underline{\Gamma}$ ise

$$n(\Gamma, a) = \sum_{i=1}^{n} m_i n(\gamma_i, a) \tag{2.45}$$

olduğu apaçıktır.

- *Soru:* İzi U açık kümesinde olan bir Γ çevrimi verilsin. Ne zaman

$$\forall f \in \mathcal{H}(U) \quad \int_\Gamma f = 0?$$

Olumsuz örnek: $\mathrm{I}(\Gamma) \not\subseteq U$, dd. Γ çevrimi U'da sıfıra homolog olmasın. Bu durumda $\exists a \in \mathrm{I}(\Gamma)$, $a \notin U$; ayrıca,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - a} \in \mathcal{H}(U) \text{ ve } \int_\Gamma f = n(\Gamma, a) \neq 0$$

Sorumuzun yanıtının evet olabilmesi için "$\mathrm{I}(\Gamma) \subset U$, dd. $\Gamma \overset{U}{\approx} 0$" gerekli koşuldur. Teorem 2.11.7'de bunun yeterli olduğunu da kanıtlayacağız.

Önerme 2.11.6. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $(z, w) \in U \times U$ için*

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases} \tag{2.46}$$

ise, $g \in \mathcal{C}(U \times U)$.

Kanıt. g fonksiyonunun $U \times U$'nın köşegeni dışında sürekliliği apaçıktır. $a \in U$ keyfi verilsin. Şimdi g'nin (a, a) noktasında sürekli olduğunu görelim:

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. f' fonksiyonu U'da sürekli olduğundan, bir $D_r(a) \subset U$ açık dairesi, her $\xi \in D_r(a)$ için $|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde seçilebilir.

Şimdi $z, w \in D_r(a)$ keyfi seçilsinler. $\gamma := \overrightarrow{wz}$ gezisi $\gamma(t) = w + (z-w)t$, $0 \leq t \leq 1$ ile parametrelenmiştir.

$$f(z) - f(w) = \int_\gamma f' = \int_0^1 f'(\gamma(t))(z-w)dt = (z-w)\int_0^1 f'(\gamma(t))dt$$

olduğunu anımsarsak, buradan

$$z \neq w \text{ için } g(z,w) = \int_0^1 f'(\gamma(t))dt,$$
$$z = w \text{ için } g(z,z) = f'(z) = \int_0^1 f'(z)dt$$

elde ederiz. Buradan ise, her $z, w \in D_r(a)$ için:

$$z \neq w \text{ ise } |g(z,w) - g(a,a)| = \int_0^1 \big|[f'(\gamma(t)) - f'(a)]\big|\, dt \leq \varepsilon,$$
$$z = w \text{ ise } |g(z,z) - g(a,a)| = \int_0^1 \big|f'(z) - f'(a)\big|\, dt \leq \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla, g fonksiyonu (a,a)'da süreklidir. □

Teorem 2.11.7 (Homolojik Cauchy Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\Gamma \overset{U}{\approx} 0$ olsun. Her $f \in \mathcal{H}(U)$ için:*

(i) $\forall z \in U \setminus \underline{\Gamma}\ \ f(z)n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw,$

(ii) $\int_\Gamma f = 0,$

(iii) $\Gamma, \Gamma' \in Z_1(U)$ *ve* $\Gamma \overset{U}{\approx} \Gamma'$ *ise,* $\int_\Gamma f = \int_{\Gamma'} f.$

Sonuç 2.11.8. *$\gamma \in \mathcal{G}(U)$ bir kapalı geziyse, $\gamma \overset{U}{\simeq} 0 \Longrightarrow \gamma \overset{U}{\approx} 0$ sağlanır.*

Kanıt. (i) g fonksiyonu (2.46) ile tanımlanan fonksiyon olsun.

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)dw$$

fonksiyonu Teorem 2.5.1'den dolayı U'da süreklidir. Her $z \in U \setminus \underline{\Gamma}$ ve her $w \in \underline{\Gamma}$ için $z \neq w$ olduğundan,

$$h(z) = f(z)n(\Gamma, z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{2.47}$$

Dolayısıyla, her $z \in U \setminus \underline{\Gamma}$ için $h(z) = 0$ olduğunu gösterirsek işimiz biter.

Biz önce Morera Teoremi yardımıyla $h \in \mathcal{H}(U)$ olduğunu kanıtlamak istiyoruz. U'daki her kapalı Δ üçgeni için Teorem 2.5.5 ile

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} h(z)dz &= \int_{\partial\Delta} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)dw \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)dz \right) dw \end{aligned} \tag{2.48}$$

Sabit tutulan her $w \in U$ için $g(\cdot, w)$ fonksiyonu $U \backslash \{w\}$ kümesinde holomorftur ve w noktasında ise süreklidir. Goursat Teoremi'nden ötürü (2.48)'deki iç integral 0'dır; dolayısıyla $\int_{\partial\Delta} h(z)dz = 0$. Morera Teoremi'nden $h \in \mathcal{H}(U)$ olur.

$U_1 := \mathrm{D}(\Gamma)$ olmak üzere, Teorem 2.5.4'ten dolayı

$$h_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

ile tanımlanan h_1 fonksiyonu U_1'de holomorftur. (2.47)'den dolayı, her $z \in U \cap U_1$ için $h_1(z) = h(z)$ olur. Diğer yandan, $\mathbb{C} = U \cup U_1$ olduğundan $\varphi|U := h$ ve $\varphi|U_1 := h_1$ tanımı kusursuzdur ve $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

$$\lim_{z\to\infty} |h_1(z)| \leq \lim_{z\to\infty} \frac{\|f\|_\Gamma}{2\pi} L(\Gamma) \frac{1}{d(z, \underline{\Gamma})} = 0 \tag{2.49}$$

olduğundan, φ sınırlıdır, dolayısıyla sabittir. (2.49)'dan dolayı ise, bu sabit 0 olmak zorundadır. Öyleyse $h = 0$.

(ii) $a \in U \backslash \underline{\Gamma}$ ve her $z \in U$ için $F(z) = (z-a)f(z)$ olsun. $F \in \mathcal{H}(U)$ ve $F(a) = 0$. Teoremimizin ilk kısmından,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a} dz = F(a)n(\Gamma, a) = 0$$

elde ederiz.

(iii) $\Gamma \overset{U}{\approx} \Gamma' \implies \Gamma - \Gamma' \overset{U}{\approx} 0 \implies \int_{\Gamma-\Gamma'} f = 0 \implies \int_\Gamma f = \int_{\Gamma'} f$.

Sonucun kanıtı: Her $a \notin U$ için $f(z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-a}$ olarak tanımlanan f fonksiyonu U'da holomorftur. Böylelikle, $\gamma \overset{U}{\simeq} 0$ olduğundan, $n(\gamma, a) = \int_\gamma f = 0$, buradan ise $a \in \mathrm{D}(\gamma)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\gamma \overset{U}{\approx} 0$ olur. □

Homolojik Cauchy Teoremi için verdiğimiz kanıt son yıllarda çok tutulan Dixon'un kanıtıdır [19]. Bu kanıt Goursat Teoremi'nden çıkarılan Morera ve Liouville Teoremleri gibi fonksiyonlar kuramına ilişkin teoremleri ve integrasyon teorisinden Fubini Teoremi'ni kullanır. Fubini Teoremi içinse gezilerimiz en azından integral gezileri olmak zorundadır. Artin'e dayanan, fonksiyonlar teorisinden yalnızca Goursat Teoremi'ni ve bunun yanı sıra dönme sayılarına ilişkin basit başlangıç bilgilerini kullanan kanıtı [39]'da bulabilirsiniz. Bunun değişik biçimlerini, örneğin [5] ve [30]'da bulabilirsiniz. Aşağıdaki kanıt [5]'i izler ve yukarıdaki kanıttan hem daha kısa hem de daha az bilgi gerektirir:

Teorem 2.11.9. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $\Gamma \overset{B}{\approx} 0$ bir integral çevrimiyse, her $f \in \mathcal{H}(B)$ için $\int_\Gamma f = 0$ eşitliği sağlanır.*

Kanıt. $\underline{\Gamma}$ kompakt olduğundan, $r > 0$ sayısı yeterince büyük seçilirse $\underline{\Gamma} \subset D_r$ sağlanır. $B' := B \cap D_r$ dersek, açıkça $\Gamma \overset{B'}{\approx} 0$ olur. Biz önce B''de bir I çevriminin

(i) $\forall \zeta \in \underline{I}$ $n(\Gamma, \zeta) = 0$, ve

(ii) $\forall z \in \underline{\Gamma}$ $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

olacak biçimde bulunabileceğini göstereceğiz. Önce böyle bir I çevriminden savımızı nasıl elde edeceğimizi görelim: $\zeta \in \underline{I}$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{\zeta - z} = -n(\Gamma, \zeta) = 0$$

olduğundan,

$$\int_\Gamma f(z)dz \overset{(ii)}{=} \int_\Gamma \left(\frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) dz = \int_I f(\zeta) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{\zeta - z} \right) d\zeta = 0.$$

(1) Her $z \in \underline{I}$ için $n(\Gamma, z) = 0$ olduğunu savunuyoruz. Tanım gereği bir $Q \in \mathcal{Q}$ ile $z \in \partial Q$. Diğer yandan, z noktasını Q'nun kenarlarından birinin iç noktasıysa, bu kenar aynı zamanda ızgaramızda bir başka Q' karesinin de kenarıdır ve $Q' \notin \mathcal{Q}$. Eğer z noktası Q'nun bir köşe noktası ise, köşesi olduğu kenarlardan en az birini içeren ızgaramızda bir Q' karesi $Q' \notin \mathcal{Q}$ olacak biçimde vardır. Şimdi bir $w \in Q' \setminus B'$ noktasını seçebiliriz. $\Gamma \overset{B'}{\approx} 0$ olduğundan, $n(\Gamma, w) = 0$ olur. Diğer yandan, Q''nün çapı $d(Q')$ olmak üzere,

$$d(z, \partial B') \leq d(Q') \leq \sqrt{2}\delta < d(\underline{\Gamma}, \partial B'). \tag{2.50}$$

Bu ise $[z, w]$ aralığının $\underline{\Gamma}$'yı kesmediğini söyler. $n(\Gamma, \zeta)$ fonksiyonu $[z, w]$ bağlantılı kümesinde sabittir dolayısıyla $n(\Gamma, z) = n(\Gamma, w) = 0$ olur.

Şimdi δ'yı $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}} d(\underline{\Gamma}, \partial B')$ olacak biçimde seçip düzlemde δ-ızgarasını oluşturalım. B' sınırlı olduğundan, bu ızgaraya ait sonlu sayıda Q kapalı karesi B''ye düşer; bunların ailesine $\mathcal{Q}$ diyelim. $I := \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \partial Q$ olsun. I çevrimi sonlu sayıda δ-uzunluklu ve eksenlere koşut $\overrightarrow{ab}$ tipinde gezilerden oluşur. I'da hem $\overrightarrow{ab}$ hem de $\overrightarrow{ba}$ geçiyorsa I'nın ifadesinden her ikisini de çıkaralım.

(2) Her $z \in \underline{\Gamma}$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

olduğunu savunuyoruz. $z \in \underline{\Gamma}$ keyfi verilsin. (2.50) eşitsizliklerinden $z \in K := \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q$ olur. Her $Q \in \mathcal{Q}$ için $z \notin \partial Q$ ise, tam bir $Q_0 \in \mathcal{Q}$ ile $z \in \mathring{Q}_0$ olur ve biz dikdörtgenler için Cauchy Teoremi ve integral formülünden

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \sum_{Q_0 \neq Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= 0 + f(z) = f(z)\end{aligned}$$

elde ederiz. Savımız aslında her $z \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathring{Q}$ için kanıtlanmıştır ve süreklilikten dolayı $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \partial Q$ için de, dolayısıyla, her $z \in \underline{\Gamma}$ için de geçerlidir. □

Teorem 2.11.10. *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(U)$ bir çevrim olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *$\forall f \in \mathcal{H}(U)$ için $\int_\Gamma f = 0$.*

(ii) *$\forall f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $z \in U \backslash \underline{\Gamma}$ için*

$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

(iii) *$\Gamma \overset{U}{\approx} 0$.*

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii): $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $z \in U \backslash \underline{\Gamma}$ olsun.

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in U \backslash \{z\} \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

fonksiyonu U'da holomorf olduğundan, varsayımdan

$$0 = \int_\Gamma g = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)2\pi i n(\Gamma, z)$$

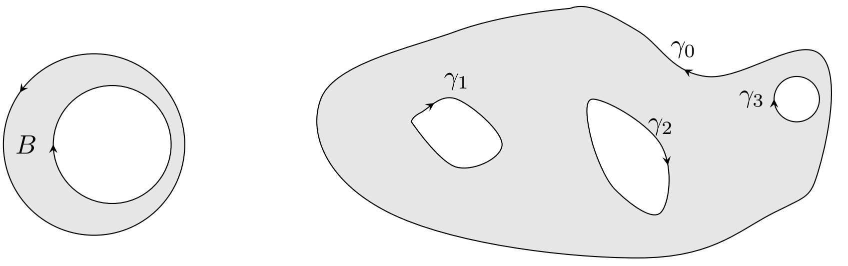
elde edilir.

(ii)$\Longrightarrow$(i): $z \in U$ keyfi verilsin. U'da $h(\zeta) := (\zeta - z)f(\zeta)$ ile tanımlanan h fonksiyonu U'da holomorftur. İntegral formülünü h fonksiyonuna uygular ve $h(z) = 0$ olduğunu gözetirsek, $\int_\Gamma f = 0$ olur.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Teorem 2.11.7, (i)$\Longrightarrow$(iii) ise, Önerme 2.11.6'dan önce verilen özel durumdan karşı konum ilkesi ile çıkar. □

Tanım 2.11.11. $B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge olsun ve ∂B sınırı sonlu sayıda ayrık $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ basit kapalı integral gezilerinin izinden oluşsun. $\Gamma := \sum_{i=0}^n \gamma_i$ olmak üzere, eğer

$$\begin{aligned} B &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, n(\Gamma, z) = 1\} \\ \mathbb{C}\backslash\overline{B} &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, n(\Gamma, z) = 0\}\end{aligned}$$



Şekil 2.26: Sınırlı bölgelerin pozitif sınırları.

ise, Γ'ya B bölgesinin **pozitif yönlenmiş sınırı** veya Γ çevrimi B bölgesini **pozitif yönde** çevreler denir ve Γ yerine $\boldsymbol{\partial} B$ yazılır.

Eğer $B \subset \mathrm{I}(\gamma_0)$ ise, kolayca görüleceği gibi γ_0 gezisi saatin ters yönünde ve $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ gezileri ise saat yönünde yönlenmişseler, B'nin pozitif yönlenmiş sınırı $\Gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ zinciridir. Biz, yalınlık açısından, B'yi pozitif çevreleyen bu Γ zincirini de $\boldsymbol{\partial} B$ ile göstereceğiz[17].

Teorem 2.11.12. *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(U)$ ise U'da sıfıra homolog olsun. $U \backslash \underline{\Gamma}$'da sonlu sayıda $a_1, \ldots, a_n$ noktaları verilsin. a_i merkezli D_i daireleri, kapanışları $U \backslash \underline{\Gamma}$'da ve $i \neq j$ için $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$ olacak biçimde seçilsinler. D_i dairesinin pozitif yönlenmiş basit sınır gezisini κ_i ile gösterelim. $i = 1, \ldots, n$ için $m_i := n(\Gamma, a_i)$, $\Gamma' := \sum_{i=1}^{n} m_i \kappa_i$ ve $U^* := U \backslash \{a_1, \ldots, a_n\}$ olsun.*

Bu koşullarda $\Gamma - \Gamma' \overset{U^*}{\approx} 0$ ve her $f \in \mathcal{H}(U^*)$ için

$$\int_\Gamma f = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\kappa_i} f = \sum_{i=1}^{n} n(\Gamma, a_i) \int_{\kappa_i} f.$$

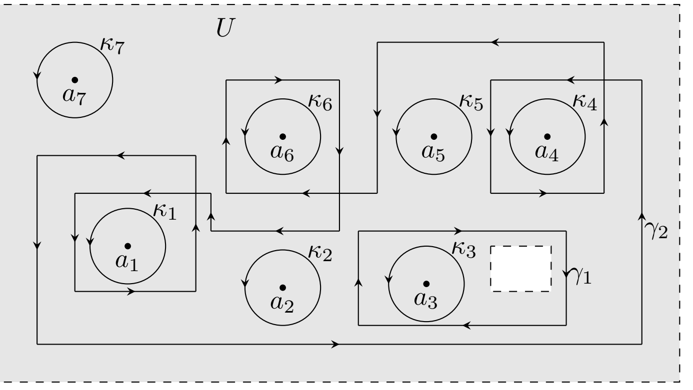
Kanıt. $\Lambda := \Gamma - \Gamma' = \Gamma - \sum_{i=1}^{n} m_i \kappa_i$ olsun. $a \notin U^*$ verilsin. İki durum söz konusudur: $a \notin U$ veya $\exists i : a = a_i$. Eğer $a \notin U$ ise, varsayımdan $n(\Gamma, a) = 0$ ve her i için $a \in \mathrm{D}(\kappa_i)$ ve dolayısıyla $n(\kappa_i, a) = 0$ olduğundan, (2.45) ile $n(\Lambda, a) = n(\Gamma, a) - \sum_{i=1}^{n} m_i n(\kappa_i, a) = 0$ olur. Eğer $a = a_i$ ise, $j \neq i$ için $n(\kappa_j, a_i) = 0$ ve $n(\kappa_i, a_i) = 1$ olduğundan,

$$n(\Lambda, a_i) = n(\Gamma, a_i) - \sum_{j=1}^{n} m_j n(\kappa_j, a_i) = m_i - m_i = 0$$

olur. Böylece, $\Lambda \overset{U^*}{\approx} 0$ ve Homolojik Cauchy Teoremi'nden

$$0 = \int_\Lambda f = \int_\Gamma f - \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\kappa_i} f$$

[17] Bölgenin topolojik sınırını ∂B ile yönlenmiş sınırını $\boldsymbol{\partial} B$ ile gösterdiğimizi bir kez daha belirtelim.



Şekil 2.27: $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \overset{U^*}{\approx} 2\kappa_1 + \kappa_2 + 0\kappa_3 + 2\kappa_4 + \kappa_5 - \kappa_6 + 0\kappa_7$.

elde edilir. □

Teoreme örnek oluşturmak üzere, Şekil 2.27'de bir örnek verilmiştir. Çizim kolaylığı açısından Γ bir ızgara çevrimi olarak alınmıştır; κ_i gezilerini kesmeyecek biçimde ∂U, γ_1 ve γ_2'yi biraz deforme ediniz.

Teorem 2.11.13. *U bir açık küme $\boldsymbol{\partial} B$ ise B bölgesinin sonlu sayıda integral gezisinden oluşan pozitif çevrelenmiş sınırı ve $\overline{B} \subset U$ olsun. Bu durumda*

(i) $\forall f \in \mathcal{H}(U)$ için $\int_{\boldsymbol{\partial} B} f = 0$.

(ii) $\forall f \in \mathcal{H}(U)$, $\forall z \in B$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Kanıt. $\boldsymbol{\partial} B \overset{U}{\approx} 0$ olduğundan, sav, doğrudan Teorem 2.11.7'den çıkar. □

Bu teorem, teoremin koşullarında, $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonunun her bir $z \in B$ noktasındaki değerinin $f|\partial B$ ile tek olarak belirlendiğini ve bu değerlerinin nasıl hesaplanabileceğini de bildirir. Ayrıca, daha önce de Cauchy Teoremi'nde (Teorem 2.7.2) belirttiğimiz gibi bu teorem için $f \in \mathcal{H}(U)$ olması gerekmez, $f \in \mathcal{C}(\overline{B}) \cap \mathcal{H}(B)$ olması yeterlidir.

Problemler

Problem 2.11.1. Γ bir çevrim, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \underline{\Gamma}$ ve $n(\Gamma, a) = n(\Gamma, b)$ ise

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 2.11.2. $f \in \mathcal{H}(D_R^*)$ ise, $0 < \sigma < r < R$ için $\int_0^{2\pi} f(\sigma e^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.11.3. $\gamma \in \mathcal{G}^i(\mathbb{C}\backslash\{-1,0,1\})$ kapalı ise, $\int_\gamma \frac{dz}{z(z^2-1)}$ integralinin alacağı tüm değerleri bulunuz.

Problem 2.11.4. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $\gamma \in \mathcal{G}^i(U)$ kapalı, $h \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonunun U'da sıfır yeri olmasın ve bir $a \in U$ ile U'da $f(z) = (z-a)^m h(z)$ olsun ($m \in \mathbb{N}$). Eğer ayrıca $\gamma \overset{U}{\approx} 0$ ve $a \notin \underline{\gamma}$ ise, $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = m \cdot n(\gamma, a)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.11.5. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}})$ ve $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ ve $1 < r < |z|$ ise

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

olduğunu gösteriniz.

2.12 Basit Bağlantılılık

Basit bağlantılı bölgeler, fonksiyonlar teorisinde işimizin en kolay olduğu bölgelerdir. Holomorf fonksiyonların yerel ilkelleri olduğunu biliyoruz. Eğer B bölgesi basit bağlantılıysa, her $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonunun bir $F \in \mathcal{H}(B)$ ilkeli vardır. Bunun tersi de doğrudur: Bir B bölgesinde her holomorf fonksiyonun bir ilkeli varsa bu bölge basit bağlantılıdır; bunu biraz ileride kanıtlayacağız. Bu nedenle, basit bağlantılı bölgeleri yakından tanıyalım. Ancak şimdilik elimizde üç farklı basit bağlantılılık tanımı var. Önce onların denkliğini kanıtlayalım:

Daha önce bir B bölgesine $\mathbb{C}_\infty\backslash B$ bağlantılı ise basit bağlantılıdır demiştik. Yine B bölgesindeki her sürekli kapalı gezi B'de sıfıra evrilebilirse, dd. $\pi_1(B)$ temel grubu yalnızca etkisiz ögeden oluşuyorsa B bölgesine evrimsel basit bağlantılı demiştik.

Tanım 2.12.1. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesine her $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(B)$ çevrimi B'de sıfıra homologsa **homolojik basit bağlantılıdır** denir.

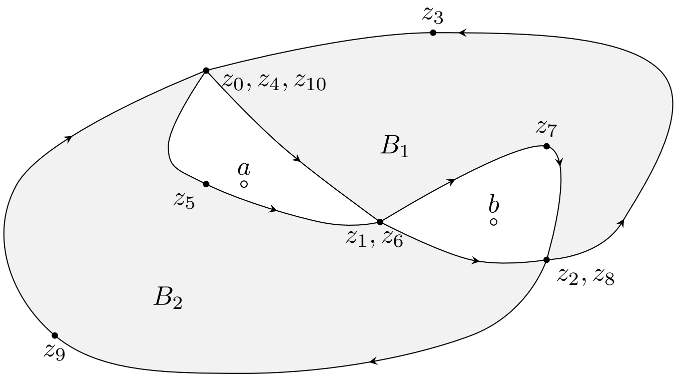
Biz Sonuç 2.11.8'de

$$\gamma \overset{B}{\simeq} 0 \Longrightarrow \gamma \overset{B}{\approx} 0 \tag{2.51}$$

olduğunu gördük. Buradan aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 2.12.2. *B bölgesi evrimsel basit bağlantılıysa, homolojik basit bağlantılıdır.*

Kanıt. B bölgesi evrimsel basit bağlantılı olsun. γ_i gezileri kapalı integral gezileri olmak üzere, $\Gamma = \sum_{i=1}^n m_i\gamma_i \in \mathrm{Z}_1(B)$ çevrimi keyfi verilsin. (2.51)'den dolayı, her $z \in \mathbb{C}\backslash B$ için $n(\Gamma, z) = \sum_{i=1}^n m_i n(\gamma_i, z) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot 0 = 0$, dolayısıyla $\Gamma \overset{B}{\approx} 0$ olur. □



Şekil 2.28: $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$'de sıfıra homolog ancak sıfıra evrilemeyen rota.

Örnek 2.12.3. (2.51)'in tersi doğru değildir, dd. $\gamma \overset{B}{\approx} 0$ ise $\gamma \overset{B}{\simeq} 0$ olması gerekmez!

$a, b \in \mathbb{C}$ iki farklı nokta olmak üzere, $B := \mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ olsun. γ ise Şekil 2.28'deki rotamız olsun. $z_0 \prec z_1 \prec \cdots \prec z_{10}$ ve γ_k ise γ'nın z_{k-1}'den z_k'ye giden kısmı olmak üzere, $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_{10}$. Şimdi γ'nın B'de sıfıra evrilemediği apaçıktır; çünkü a ve b noktalarından geçmeden γ'yı B'de bir noktaya eviremeyiz. $\mathrm{I}(\gamma)$ ise şekildeki taralı bölgedir ve B'dedir, dolayısıyla $\gamma \overset{B}{\approx} 0$.

Not 2.12.4. Şimdi örneğimizdeki bir noktaya odaklanacağız. Örneğimizde γ'nın içi B_1 ve B_2 gibi iki ayrık bölgeden oluşur. $\lambda_1 := \gamma_1\gamma_7\gamma_8\gamma_3\gamma_4$ gezisi B_1 bölgesini pozitif $\lambda_2 := \gamma_5\gamma_6\gamma_2\gamma_9\gamma_{10}$ ise B_2 bölgesini negatif yönde çevreler. Zincir olarak $\gamma \equiv \lambda_1 + \lambda_2$. Bu örneğimizde B'de sıfıra homolog γ zincirini B'de sıfıra evrilebilen λ_1 ve λ_2 zincirlerinin lineer kombinasyonu olarak yazdık. $U \subset \mathbb{C}$ herhangi bir açık küme ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gezileri U'da sıfıra evrilebilen kapalı gezilerse, $m_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i$ çevriminin U'da sıfıra homolog olduğu apaçıktır. Bunun tersi de doğrudur; örneğimizde olduğu gibi, U'da sıfıra homolog zincirler, U'da sıfıra evrilebilen λ_i kapalı gezileri ile $\sum_{i=1}^n m_i\lambda_i$ olarak yazılabilirler; kanıtlamayıp belirtmekle yetineceğiz.

Sonuç 2.12.5. *B'nin homolojik basit bağlantılı olması*

$$\forall \Gamma \in \mathrm{Z}_1(B)\ \ \forall f \in \mathcal{H}(B)\ \ \int_\Gamma f = 0$$

olmasına denktir.

Kanıt. $\Longrightarrow$: Doğrudan Homolojik Cauchy Teoremi'nden çıkar.

$\Longleftarrow$: B homolojik basit bağlantılı değilse $\mathrm{I}(\Gamma) \not\subseteq B$ olan bir $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(B)$ çevrimi vardır. Gerisi (2.11.6) öncesindeki olumsuz örnek gibidir. □

Teorem 2.12.6. *$B \subset \mathbb{C}$ bölgesi için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *B homolojik basit bağlantılıdır.*

(ii) *Her $f \in \mathcal{H}(B)$ ve her $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(B)$ için $\int_\Gamma f = 0$.*

(iii) *Her $f \in \mathcal{H}(B)$'nin bir $F \in \mathcal{H}(B)$ ilkeli vardır.*

(iv) *$f \in \mathcal{H}(B)$ ve f'nin B'de bir sıfır yeri yoksa* $\mathbf{log}\, f$ *'nin B'de bir $g \in \mathcal{H}(B)$ dalı vardır, dd. $e^g = f$. Bunun bir sonucu olarak, her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\sqrt[n]{\mathbf{f}}$'nin B'de holomorf dalı vardır.*

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii) denkliği doğrundan Sonuç 2.12.5'tir. (ii) geçerli $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $a \in B$ olsun. Her $z \in B$ ve her $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_{a,z}(B)$ için $\gamma\eta^- \in \mathrm{Z}_1(B)$ ve $\int_{\gamma\eta^-} f = 0$, dolayısıyla $\int_\gamma f = \int_\eta f$ olur. Böylece $F(z) := \int_{a,\gamma}^z f$ tanımı kusursuzdur ve daha önce defalarca gösterdiğimiz gibi $F' = f$ olur. Sonuçta (ii)$\Longrightarrow$(iii). Şimdi (iii) geçerli olsun ve $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonun B'de bir sıfır yeri olmasın. Bu durumda $f'/f \in \mathcal{H}(B)$ ve bu fonksiyonun bir $g \in \mathcal{H}(B)$ ilkeli vardır. Bir $a \in B$ noktasını sabit seçelim. Gerekirse bir sabit ekleyerek $e^{g(a)} = f(a)$ sağlanır. $h := e^{-g} f \in \mathcal{H}(B)$ ve $g' = f'/f$ olduğunu gözetirsek, B'de $h' = (f' - fg')\, e^{-g} = 0$ elde ederiz. B bir bölge olduğundan, orada h sabittir ve bu sabit ise $h(a) = e^{-g(a)} f(a) = 1$ olduğundan, $f = e^g$ elde ederiz. Böylece (iii)$\Longrightarrow$(iv). Şimdi (iv) geçerli olsun. $z_0 \in \mathbb{C} \backslash B$ keyfi verilsin ve $g(z) := z - z_0$ olarak tanımlansın. g'nin B'de bir sıfır yeri olmadığından, $\mathbf{log}\, g$'nin B'de holomorf bir $f := \log g$ dalı vardır. $f' \in \mathcal{H}(B)$, $f'(z) = 1/(z - z_0)$ ve f''nün B'de bir holomorf ilkeli olduğundan, her $\Gamma \in Z_1(B)$ için

$$n(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f'(z) dz = 0$$

olur. Dolayısıyla, $\Gamma \overset{B}{\approx} \mathbf{0}$. Öyleyse, B homolojik basit bağlantılıdır. □

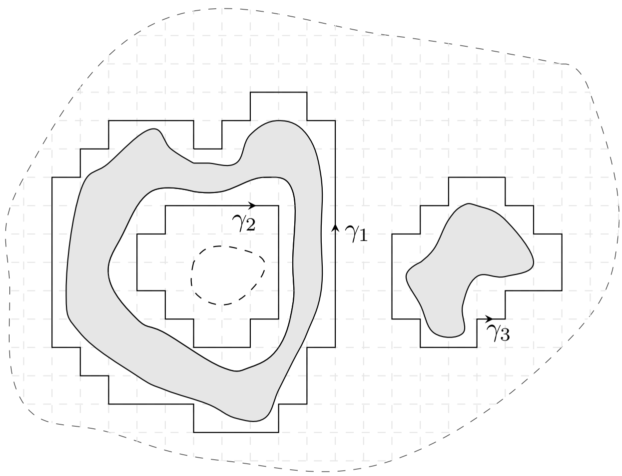
Bir Γ çevrimine $n(\Gamma, z)$ fonksiyonu yalnızca 0 ve 1 değerlerini alıyorsa **uygun** diyeceğiz. Γ uygun ve $\mathrm{I}(\Gamma)$ bir bölge ise, $K := \underline{\Gamma} \cup \mathrm{I}(\Gamma)$ bir kompakt kümedir ve Γ çevrimi K kümesinin pozitif yönlenmiş $\boldsymbol{\partial} K$ sınırından başka bir şey değildir. Örneğin $B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve ∂B topolojik sınırı sonlu sayıda basit kapalı gezinin izi ise, pozitif yönlenmiş $\boldsymbol{\partial} B$ çevrimi uygundur.

Önerme 2.12.7. *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme $K \neq \emptyset$ bir kompakt küme ve $K \subset U$ olsun. Bu durumda $U \backslash K$'de bir Γ uygun ızgara çevrimi $K \subset \mathrm{I}(\Gamma) \subset U$ olacak biçimde vardır. Bu Γ için dolayısıyla $\Gamma \overset{U}{\approx} 0$ olur ve her $z \in K$ için $n(\Gamma, z) = 1$'dir.*

Kanıt. $U = \mathbb{C}$ ise ε herhangi bir pozitif sayı; $U \neq \mathbb{C}$ ise $\delta := d(K, \partial U)$ olmak üzere, ε pozitif sayısını $\varepsilon < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ olacak biçimde seçelim. Düzlemimize karesel ε-ızgarasını döşeyelim. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $x = m\varepsilon$ noktalarından y-eksenine, $y = m\varepsilon$ noktalarından ise x-eksenine koşut doğrular çizelim.

Böylece oluşturduğumuz Q kapalı karelerinin sonlu tanesi K'yı keser; bunlar $Q_1, \ldots, Q_n$ olsunlar. Bu koşullarda $K_0 := \bigcup_{i=1}^n Q_i$ kümesi de kompakttır ve $K \subset K_0 \subset U$. Sonlu sayıda $\boldsymbol{\partial} Q_i$ çevrimlerinin toplamı olarak

$$\Lambda := \bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{\partial} Q_i$$



Şekil 2.29: K'yi çevreleyen uygun çevrim. U açık kümemiz kesikli çizilmiş eğriler arasındaki kümedir. K kompakt kümemiz koyu gösterilmiş iki ayrık kompakt kümenin birleşimidir.

bir çevrimdir. Q_i ve Q_k karelerinin bir a ortak kenarı var ve bu kenar $\boldsymbol{\partial} Q_i$'nin α parçasının iziyse, α^- gezisi $\boldsymbol{\partial} Q_k$'nin bir parçasıdır. Λ'dan $\alpha + \alpha^-$ çevrimini attığımızda elimizde Λ'ya denk olan bir çevrim kalır. Böylece Λ'dan, tüm ortak kenarlar için bu işlemi yaparsak $\Gamma \equiv \Lambda$ olan bir çevrim elde ederiz ve bu çevrim $Q_1, \ldots, Q_n$ karelerinin yalnızca birinde geçen kenarlar içerir. Aslında okur kolayca $\Gamma = \boldsymbol{\partial} K_0$ olduğunu gösterebilir.

Her şeyden önce $\underline{\Gamma} \subset U \backslash K$. Aksini varsayalım ve $z \in K \cap \underline{\Gamma}$ olsun. z noktası en az bir Q_i karesinin bir kenarı üzerindedir. Ancak düzlemimize döşediğimiz karelerden bu kenarı kenar kabul eden bir başka kare daha vardır ve tanım gereği seçtiğimiz karelerden biridir. Bu ortak kenar Λ'da karşımıza çıkar, ancak Γ'da atılmıştır, dolayısıyla $z \in K \cap \underline{\Gamma}$ olamaz!

$z \notin K_0$ ise, her i için $z \notin Q_i$ olacağından, $n(\boldsymbol{\partial} Q_i, z) = 0$ sağlanır ve dolayısıyla $n(\Gamma, z) = n(\Lambda, z) = \sum_{i=1}^{n} n(\boldsymbol{\partial} Q_i, z) = 0$ olur. Böylece $\mathrm{I}(\Gamma) \subset K_0 \subset U$ elde edilir.

Şimdi bir i ile $z \in \mathring{Q}_i$ olsun. $n(\boldsymbol{\partial} Q_i, z) = 1$ ve $k \neq i$ için $n(\boldsymbol{\partial} Q_k, z) = 0$ olacağından $n(\Gamma, z) = n(\Lambda, z) = \sum_{j=1}^{n} n(\boldsymbol{\partial} Q_j, z) = 1$ sağlanır. Eğer $z \in \partial Q_i \backslash \underline{\Gamma}$ ise, dönme sayısının sürekliliğinden yine $n(\Gamma, z) = 1$ olur. $\square$

Teorem 2.12.8. *$B \subset \mathbb{C}$ bölgesi için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *B evrimsel basit bağlantılıdır.*

(ii) *B homolojik basit bağlantılıdır.*

(iii) *B basit bağlantılıdır.*

Kanıt. (i) $\Longrightarrow$(ii) Doğrudan Önerme 2.12.2.

(ii) $\Longrightarrow$(i) Bu yön için genelde KA II'de kanıtlayacağımız Runge Teoremi kullanılır (bkz. [55]). Biz de KA II'de kanıtlayacağımız başka bir teoremi kullanacağız. KA II'de homolojik basit bağlantılı kavramını $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgelerine aktaracağız. Orada kanıtlayacağımız Riemann Dönüşüm Teoremi $B \subset \mathbb{C}_\infty$ homolojik basit bağlantılıysa, B bölgesinin $\mathbb{C}_\infty$, $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{D}$'den birine biholomorf —özellikle topolojik— resmedilebileceğini söyler; böylece bunlar evrimsel basit bağlantılı olduğundan, B de evrimsel basit bağlantılıdır.

(ii) $\Longrightarrow$(iii) Karşı konum ilkesi ile kanıtlayacağız. B basit bağlantılı olmasın, dd. $\mathbb{C}_\infty \backslash B$ kümesi boştan farklı iki kapalı kümenin ayrık birleşimi olsun. Bunlardan biri ∞ ögesini içerir, buna C diyelim, içermeyen K kümesi olsun. K kümesi sınırlı ve kapalı olduğundan, kompakttır. $U := \mathbb{C}_\infty \backslash C \subset \mathbb{C}$ bir açık küme $K \neq \emptyset$ kompakt ve $K \subset U$ olduğundan, 2.12.7 ile izi $B = U \backslash K$'de olan bir uygun Γ ızgara çevrimi $K \subset \mathrm{I}(\Gamma) \subset U$ olacak biçimde vardır. Tanım gereği $\underline{\Gamma} \subset B$ ve $\emptyset \neq K \subset \mathrm{I}(\Gamma)$ olmasından dolayıysa, $B \cap K = \emptyset$ olduğunu da gözetirsek, $\mathrm{I}(\Gamma) \nsubseteq B$ olur; dolayısıyla B'deki Γ çevrimi B'de sıfıra homolog değildir, dd. B homolojik basit bağlantılı değildir.

(iii) $\Longrightarrow$(ii): B basit bağlantılı olsun. B bölgesinde Γ çevrimi keyfi verilsin. $\mathbb{C}_\infty \backslash B$ bağlantılı ve ∞ burada olduğundan, her $z \in \mathbb{C} \backslash B$ için $n(\Gamma, z) = 0$, dd. $\Gamma \overset{B}{\approx} 0$ olur. B homolojik basit bağlantılıdır. □

Bu üç farklı kavramın —daha önce de belirttiğimiz gibi— denk olduklarını kanıtladık. Herhangi bir topolojik uzayda basit bağlantılılıktan "evrimsel basit bağlantılılık" anlaşılacaktır. Daha önce de belirttiğimiz gibi artık yalnızca "basit bağlantılı" diyeceğiz.

Önerme 2.12.9. *Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin basit bağlantılı olması deliksiz olmasıyla eş anlamlıdır.*

Kanıt. (1) B basit bağlantılı olsun. Tanım gereği $K_\infty := \mathbb{C}_\infty \backslash B$ bağlantılıdır. Dolayısıyla, $\mathbb{C} \backslash B$'nin bir tek bağlantılı bileşeni vardır; o da $K_\infty \backslash \{\infty\}$'dır ve o da kompakt değildir. Sonuç olarak, B deliksizdir.

(2) Karşı konum ilkesini uygulayacağız. B'nin basit bağlantılı olmadığını varsayalım. Teorem 2.12.8'den B'de en azından sıfıra homolog olmayan bir Γ çevrimi vardır. $I(\Gamma) \nsubseteq B$ olur. Dolayısıyla, $\mathbb{C} \backslash B$'nin en az bir $K \neq \emptyset$ bileşeni için $K \subset \mathrm{I}(\Gamma)$ olur ve K açıkça B'de bir deliktir. □

(2.12.6), (2.12.8) teoremleri ve (2.12.9) önermesi aşağıdaki teoremi verirler:

Teorem 2.12.10. *Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *B evrimsel basit bağlantılıdır.*

(ii) *$\mathbb{C}_\infty \backslash B$ bağlantılıdır.*

(iii) *B homolojik basit bağlantılıdır.*

(iv) *Her* $f \in \mathcal{H}(B)$ *ve her* $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(B)$ *için* $\int_\Gamma f = 0$.

(v) *Her* $f \in \mathcal{H}(B)$*'nin bir* $F \in \mathcal{H}(B)$ *ilkeli vardır.*

(vi) $f \in \mathcal{H}(B)$ *ve* f*'nin* B*'de bir sıfır yeri yoksa* **log** f*'nin* B*'de bir* $g \in \mathcal{H}(B)$ *dalı vardır, dd.* $e^g = f$*. Bunun bir sonucu olarak, her* $n \in \mathbb{N}^*$ *için* $\sqrt[n]{\mathbf{f}}$*'nin* B*'de holomorf dalı vardır.*

(vii) B *deliksizdir.*

Not 2.12.11. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in \mathbb{C}$ ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olsun. Eğer $\log : f(B) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu **log** fonksiyonunun bir holomorf dalıysa, $f(z)^a := \exp(a \cdot \log(f(z)))$ fonksiyonu B'de holomorftur ve bu $\mathbf{f}^a$ çok değerli fonksiyonunun B'de bir holomorf dalıdır. Eğer $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere $a = \frac{1}{n}$ ise, söz konusu olan $\mathbf{f}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\mathbf{f}}$ çok değerli fonksiyonunun bir holomorf dalıdır. Teorem 2.12.10'dan dolayı, $G \subset \mathbb{C}$ 0'ı içermeyen bir basit bağlantılı bölge ve $f(B) \subset G$ ise, **log**'un G'de, dolayısıyla $f(B)$'de holomorf dalları vardır. Bunun sonucu olarak, her $a \in \mathbb{C}$ için $\mathbf{f}^a$'nın B'de holomorf dalları vardır. Özel olarak $G = \mathbb{C}_{-\pi}$ ve **log**'un holomorf dalı olarak Log seçilmişse, B'deki

$$f(z)^a = \exp(a \cdot \mathrm{Log}(f(z)))$$

holomorf fonksiyonu $\mathbf{f}^a$'nın B'deki anadalıdır.

Not 2.12.12. Basit bağlantılılık kavramına ilk Riemann'da rastlarız. Bunu $B \subset \mathbb{C}$ bölgeleri için dile getirelim: Riemann, B bölgesinde bir *çapraz kesitten* yalnızca uç noktaları ∂B'de, izinin diğer noktaları B'de olan basit gezileri anlar. B bölgesinin basit bağlantılı olmasından ise B'deki her çapraz kesitin B'yi iki parçaya ayırmasını anlar. B'yi parçalara bölmeden B'de çizebileceğimiz maksimal çapraz kesit sayısı N ise, B bölgesi $n = N + 1$-bağlantılıdır der. Bu tanımların diğer tanımlarla denkliğine girmeyeceğiz.

Problemler

Problem 2.12.1. $\mathbb{C}$'de açık bir U kümesinde her kapalı $\gamma \in \mathcal{G}(U)$ için $\gamma \overset{B}{\simeq} 0$ ise, U'nun bir bölge olması gerekmediğini örnekleyiniz.

Problem 2.12.2. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ve $B := \mathbb{C} \backslash K$ ise aşağıdakileri kanıtlayınız:
(1) B'nin tek bir sınırsız bileşeni vardır.
(2) B'nin bağlantılı bileşenleri sonlu sayıdadır.

Problem 2.12.3. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $\mathbb{C}_\infty \backslash B$ bağlantılı olsun. $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ise $\hat{K}$ ile K'nin kendi delikleriyle, dd. $\mathbb{C}\backslash K$'nin sınırlı bağlantılı bileşenleriyle birleşimi gösterilsin. Aşağıdakileri gösteriniz:
(1) $K \subset B$ kompaktsa $\hat{K} \subset B$'dir.
(2) $\hat{K}$'nın bağlantılı ve kompakt olduğunu gösteriniz. Eğer K bağlantılıysa, $\hat{K}$ deliksizdir.

Problem 2.12.4. $U, V \subset \mathbb{C}_\infty$ basit bağlantılı bölgeler olmak üzere, $U \cap V$ de bir bölge olsun. Ayrıca, $\gamma : [0,1] \to U \cup V$ ise bir kapalı gezi olsun. Aşağıdakileri kanıtlayınız:

(i) $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$ sayıları, her $p = 0, 1, \ldots, n-1$ için $\gamma([t_p, t_{p+1}])$ U'da veya V'de olacak ve ayrıca $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1}) \in U \cap V$ olacak biçimde bulunabilirler.

(ii) γ gezisi U'da veya V'de bir η kapalı gezisine evrilebilir.

(iii) $U \cup V$ basit bağlantılıdır.

Problem 2.12.5. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{C}(B)$ ve bir $n \in \mathbb{N}^*$ için $f^n \in \mathcal{H}(B)$ ise, $f \in \mathcal{H}(B)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.12.6. γ gezisi $\kappa_{1,1}$ gezisinin 0 noktasını $1+i$ noktasına bağlayan kısmı olmak üzere, $\int_\gamma \frac{dz}{(1+z)^2}$ integralini hesaplayınız.

Problem 2.12.7. Düzlemde, $\boldsymbol{\partial} B$ sınırı $n+1$ basit kapalı geziden oluşan bir takım sınırlı bölgeler çizip, her biri integral gezisi olan ve birbirini kesmeyen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ çapraz kesitle B'den $B \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n \underline{\eta_i}\right)$ gibi bir basit bağlantılı bölge elde edileceğinden, geometrik olarak ikna olunuz.

Problem 2.12.8. $B := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ olmak üzere, $\mathrm{w} = \mathrm{Arccos}z$ fonksiyonunun B bölgesini w-düzlemindeki $S_{0,\pi}$ dikey şeridine biholomorf resmettiğini gösteriniz.

Problem 2.12.9. $B := \mathbb{C} \setminus ([i, +i\infty) \cup [-i, -i\infty))$ olmak üzere, $\mathrm{w} = \mathrm{Arctan}z$ fonksiyonunun B bölgesini w-düzlemindeki $S_{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}$ bölgesine biholomorf resmettiğini gösteriniz.

3. Holomorf ve Meromorf Fonksiyonlar

3.1 Eklemeler

Bölüm 1'de Weierstrass'ın yolunu izledik. Orada elde ettiğimiz teoremlerin kanıtlarında hiçbir yerde integral kullanmadık. Buna karşın hızlı biçimde temel fonksiyonları kazandık ve ardından analitik fonksiyonlara ilişkin önemli teoremler kanıtladık. Analitik fonksiyonlar için geçerli olan her teorem, artık biliyoruz ki aynı zamanda holomorf fonksiyonlar için de birer teoremdir. Orada, Özdeşlik Teoremleri'ni (Teorem 1.8.4,1.8.5), analitik fonksiyonların, dolayısıyla holomorf fonksiyonların yerel özelliklerine ilişkin Dal Sayısı Teoremleri'ni (Teorem 1.8.13,1.8.14), Açık Dönüşüm Teoremi'ni (Teorem 1.8.16), Maksimum İlkesi'ni (Teorem 1.8.18), Minimum İlkesi'ni (Sonuç 1.8.20), Schwarz Önsavı'nı (Teorem 1.8.24) kanıtlamıştık. Tekrar da olsa bu teoremleri holomorf fonksiyonlar için yineleyecek ve bazı eklemeler yapacağız. Yalnızca eklemelerin kanıtları verilecektir.

Teorem 3.1.1. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $M \subset B$ kümesinin B'de bir yığılma noktası bulunsun. Her $f, g \in \mathcal{H}(B)$ için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) $f = g$,

(ii) $f|M = g|M$,

(iii) $\exists a \in B \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \big(f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)\big)$.

Önerme 3.1.2. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in \mathcal{H}(B)$ sabit değilse her $c \in \mathbb{C}$ için*

$$S_c(f) = f^{-1}(\{c\}) = \{z \in B \mid f(z) = c\}$$

sapları B'de kapalı ve ayrıktır.

Sonuç 3.1.3. *f fonksiyonu B bölgesinde holomorf ve sabit değilse herhangi bir c değerini her kompakt $K \subset B$ altkümesinde en fazla sonlu noktada, B'de ise sayılabilir çoklukta alır.*

Kanıt. $S_c(f)$ ayrık olduğundan K kompaktsa $K \cap S_c(f)$ sonlu olmak zorundadır. Önerme 5.2.33'e göre B kümesini sayılabilir çoklukta kompakt kümelerle tüketebiliriz. Dolayısıyla, $S_c(f)$ kümesi sayılabilir çoklukta sonlu kümenin birleşimi olarak sayılabilirdir. □

$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesi verilsin. U'nun bir bölge olmasını, yani bir *topolojik* özelliğini $\mathcal{H}(U)$'nun bir *cebirsel* özelliği ile belirleyeceğiz.

Teorem 3.1.4. *$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinin bir bölge olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{H}(U)$'nun bir tamlık bölgesi olmasıdır.*

Kanıt. 1. U bir bölge ise $\mathcal{H}(U)$'nun tamlık bölgesi olduğu Sonuç 1.8.6'da kanıtlandı.

2. U bir bölge olmasın. Birden fazla bağlantılı bileşeni vardır. Bu durumda U kümesini boştan farklı iki ayrık B ve V açık kümelerinin birleşimi olarak yazabiliriz. $f|B :\equiv 1$, $f|V :\equiv 0$ ve $g := 1 - f$ olarak tanımlanırsa $f, g \in \mathcal{H}(U)$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ ve $fg = 0$ olur. Dolayısıyla, $\mathcal{H}(U)$bir tamlık bölgesi değildir. □

Özdeşlik Teoremi bize bir **kalıcılık ilkesi** verir: *B bir bölge, $f_1, \ldots, f_n, g \in \mathcal{H}(B)$ ve $M \subset B$ kümesinin B bölgesinde yığılma noktası olsun. Şimdi $P \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ olmak üzere, eğer M kümesinde $P(f_1, \ldots, f_n) = g$ ise, o zaman B bölgesinde de $P(f_1, \ldots, f_n) = g$'dir.* $P(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{H}(B)$ olduğundan bu sav, Özdeşlik Teoremi'nin bir sonucudur.

Bir örnekle açalım: $\mathbb{R}$'de tanımlı e^x fonksiyonu $e^{x+y} = e^x e^y$ özelliğine sahiptir. Biz bu fonksiyonu $\mathbb{C}$'ye holomorf genişletip her $z, w \in \mathbb{C}$ için $e^{z+w} = e^z e^w$ olduğunu seriler için çarpım teoremi üzerinden kanıtladık. Kalıcılık ilkesi ile bu şöyle de kanıtlanabilir: $y \in \mathbb{R}$ sayısını keyfi seçip sabit tutalım. $f(z) := e^z e^y$ ve $g(z) := e^{z+y}$ fonksiyonları $\mathbb{C}$'de holomorfturlar ve $\mathbb{C}$'de bir yığılma noktası olan $M := \mathbb{R}$ kümesinde ise $f(x) = e^x e^y = e^{x+y} = g(x)$ olduğundan, Özdeşlik Teoremi ile her z için $f(z) = g(z)$, dd. $e^z e^y = e^{z+y}$. Baştan y keyfi seçildiğinden her $z \in \mathbb{C}$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için $e^z e^y = e^{z+y}$ kanıtlanmıştır. Şimdi $z \in \mathbb{C}$ keyfi seçilip sabit tutulsun. Bu kez $F(w) := e^z e^w$ ve $G(w) := e^{z+w}$ fonksiyonları $\mathbb{C}$'de holomorfturlar ve az önce kanıtlanandan $\mathbb{R}$'de çakışırlar, dolayısıyla $\mathbb{C}$'de çakışırlar. Özdeşlik Teoremi ile her w için $e^z e^w = e^{z+w}$ elde ederiz. Burada z keyfi olduğundansa her $z, w \in \mathbb{C}$ için $e^z e^w = e^{z+w}$ olur.

Teorem 3.1.1(ii) ve (iii) ifadelerindeki karakter farkının altını çizelim. (iii)'te *bir* noktadaki *tüm* türevler söz konusu iken (ii)'de yalnızca bir M kümesindeki değerler söz konusudur. Diğer yandan, Cauchy integral formülü, Özdeşlik Teoremi'ne yeni bir ışık düşürür.

Teorem 3.1.5. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve ∂B sınırı sonlu sayıda basit kapalı integral eğrisinden oluşsun. $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ sürekli ve f fonksiyonu B'de holomorf ise*

$$\forall z \in B \;\; f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Sonuç 3.1.6. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve ∂B sınırı sonlu sayıda basit kapalı integral eğrisinden oluşsun. $f, g \in \mathcal{C}(\overline{B})$, $f|B, g|B \in \mathcal{H}(U)$ ve $f|\partial B = g|\partial B$ ise, $\overline{B}$'de $f = g$ olur.*

Kanıt. f fonksiyonu B'de holomorf ise, o bölgede her mertebeden sürekli türevlere sahip olduğundan (2.7.2) sonucunun koşullarını sağlar, dolayısıyla $\int_{\boldsymbol{\partial} B} f = 0$. $z \in B$ sabit tutulsun.

$$h(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in \overline{B} \backslash \{z\} \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$$

ile tanımlanan h fonksiyonu $B \backslash \{z\}$'de holomorf ve B'de sürekli olduğundan, (2.6.14) Riemann genişletme teoreminden, B'ye holomorf genişletilebilir. h fonksiyonu da (2.7.2) sonucunun koşullarını sağlar, dolayısıyla

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) n(\gamma, z)$$

ve $n(\boldsymbol{\partial} B, z) = 1$ olduğundan, bu, savımızdır.

Sonucun kanıtı: Teoremden her $z \in B$ için $f|\partial B = g|\partial B$ ise

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = g(z).$$

□

$f : U \to \mathbb{C}$ holomorf ve $a \in B$ olsun. Tanım 1.8.11'de olduğu gibi

$$f(a) = b,\ f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \text{ ve } f^{(k)}(a) \neq 0$$

ise, f'nin a'da k. dereceden bir b-yeri vardır denir. Birinci dereceden yerlere yine basit yerler denir.

Önerme 3.1.7. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $a \in U$ olsun. f fonksiyonunun a noktasında k. dereceden bir b yerinin olması için gerek ve yeter koşul bir $g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonunun her $z \in U$ için $f(z) = b + (z-a)^k g(z)$ ve bir $D_r(a) \subset U$ dairesinde $g(z) \neq 0$ olacak biçimde bulunabilmesidir.*

Kanıt. 1. Bir g fonksiyonu önermedeki gibi varsa f'nin a'da k. dereceden bir b yeri olduğu apaçıktır.

2. $U \backslash \{a\}$'da $g(z) := (f(z) - b)(z-a)^{-k}$ ve $g(a) := \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \neq 0$ olarak tanımlarsak g fonksiyonunun $U \backslash \{a\}$'da holomorf olduğu aşikârdır. a noktasındaki holomorfluğu ise bir $D_r(a) \subset U$ dairesinde f ve g'nin (1.48)'de verilen ifadelerinden aşikârdır. g holomorf ve $g(a) \neq 0$ olduğundan, r yeterince küçük seçilerek her $z \in D_r(a)$ için $g(z) \neq 0$ sağlanır. □

Teorem 3.1.8. *$f \in \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonunun $a \in \Omega$ noktasında k. dereceden bir b yeri bulunsun. a noktasının bir U açık komşuluğu, a noktasında bir basit sıfır yeri olan bir $h \in \mathcal{H}(U)$ holomorf fonksiyonu*

$$\forall z \in U: \ f(z) = b + (h(z))^k$$

olacak biçimde bulunabilir.

Teorem 3.1.9 (Dal sayısı). *$f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonunun a noktasında k. dereceden bir b yeri bulunsun. Bu durumda bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı şunlar doğru olacak biçimde bulunabilir: Her $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ için a noktasının öyle bir açık U_ε komşuluğu bulunabilir ki, $f(U_\varepsilon) = D_\varepsilon(b)$ ve her $w \in D_\varepsilon^*(b)$ değeri $U_\varepsilon$komşuluğunda tam k farklı $z_1, \ldots, z_k$ noktalarında alınır ve her bir z_i bir basit w yeridir.*

Sonuç 3.1.10. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve f birebirse her $z \in U$ için $f'(z) \neq 0$.*

Önerme 3.1.11. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f \in \mathcal{H}(U)$ birebirse $V := f(U)$ kümesi de açıktır ve $f : U \to V$ biholomorftur.*

Teorem 3.1.12 (Maksimum İlkesi). *f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde holomorf ancak sabit değilse $|f|$ fonksiyonunun B bölgesinde bir yerel maksimumu olamaz.*

Sonuç 3.1.13. *f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde holomorf, ancak sabit değilse* $\operatorname{Re} f$ *fonksiyonunun B bölgesinde bir yerel maksimumu olamaz.*

Sonuç 3.1.14 (Minimum İlkesi). *f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde holomorf, sabit değil ve 0 değerini almıyorsa $|f|$ fonksiyonunun B bölgesinde bir yerel minimumu olamaz.*

Önerme 3.1.15. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve sınırlı, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ sürekli ve $f|U \in \mathcal{H}(U)$ ise, $\|f\|_{\overline{U}} = \|f\|_{\partial U}$ olur.*

Sonuç 3.1.16. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ sürekli, $f|B \in \mathcal{H}(B)$ ve f fonksiyonu B'de sabit değilse her $z \in B$ için $|f(z)| < \|f\|_{\partial B}$.*

Kanıt. Önerme 3.1.15'ten dolayı $\|f\|_{\overline{B}} \leq \|f\|_{\partial B}$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, bir $a \in B$ için $|f(a)| = \|f\|_{\partial B}$ olsaydı $|f|$ fonksiyonu maksimumunu a noktasında alır ve Maksimum İlkesi ile sabit olurdu! □

Şimdiye kadar bu kısımda sıraladığımız teoremler, Teorem 3.1.5 ve 3.1.6 dışında, analitik fonksiyonlar için integral kullanmadan kanıtladığımız teoremlerdir; biz onları holomorf fonksiyonlar için dile getirdik.

İkinci bölümde Cauchy integral teoremi ve (2.20) Cauchy integral formülleri ve bu formüllerden çıkarılan (2.23) Cauchy eşitsizlikleri ile güçlü araçlar elde ettik. Biz Kısım 1.8'de Maksimum İlkesini açık dönüşüm üzerinden kanıtladık. Cauchy eşitsizliklerini genelleştirebiliriz.

Her şeyden önce $m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi}d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \tag{3.1}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.1.17 (Gutzmer Formülü)**.** *$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ise, her $0 < r < R$ için*

$$\sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq \|f\|^2_{C_r(z_0)}. \tag{3.2}$$

Sonuç 3.1.18. *Teoremin koşullarında bir $0 < r < R$ ve bir m için $|a_m|r^m = \|f\|_{C_r(z_0)}$ ise, $f(z) = a_m(z - z_0)^m$.*

Kanıt. $\sum a_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisi $D_R(z_0)$'de kompakt normsal yakınsak olduğundan (bkz. Önerme 1.6.1), özellikle her $0 < r < R$ için $C_r(z_0)$'de mutlak düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, $z(\varphi) := z_0 + re^{i\varphi}$ olmak üzere, $f(z(\varphi)) = \sum a_n r^n e^{in\varphi}$ serisi $[0, 2\pi]$'de düzgün yakınsaktır. Böylece, integralle toplamın yerini değiştirebileceğimizden, her $m \in \mathbb{N}$ için (3.1) ile

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z(\varphi))e^{-im\varphi}d\varphi = \sum_n a_n r^n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)}d\varphi = a_m r^m,$$

$$a_m r^m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})e^{-im\varphi}d\varphi. \tag{3.3}$$

Şimdi $\overline{f(z_0 + re^{i\varphi})} = \sum \overline{a_m} r^m e^{-im\varphi}$ serisi $[0, 2\pi]$'de normsal yakınsak ve $f(z_0 + re^{i\varphi})$ fonksiyonu $[0, 2\pi]$'de sürekli, dolayısıyla sınırlı olduğundan,

$$|f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 = \overline{f(z_0 + re^{i\varphi})}f(z_0 + re^{i\varphi}) = \sum \overline{a_m} r^m f(z_0 + re^{i\varphi})e^{-im\varphi}$$

serisi de $[0, 2\pi]$'de normsal yakınsaktır (bkz. Teorem 1.5.2(ii)). Dolayısıyla, aşağıda toplam ve integral yer değiştirebilir ve (3.3) ile

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi &= \sum \overline{a_m} r^m \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})e^{-im\varphi}d\varphi, \\ &= 2\pi \sum |a_m|^2 r^{2m}, \\ \sum |a_m|^2 r^{2m} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq \|f\|^2_{C_r(z_0)}.\end{aligned}$$

Sonuç 3.1.18 doğrudan (3.2)'den çıkar: Bir m için $|a_m|r^m = \|f\|_{C_r(z_0)}$ ise, (3.2) eşitsizliğinden, her $m \neq n \in \mathbb{N}$ için $a_n = 0$ olur. □

$|a_n|r^n \leq \|f\|_{C_r(z_0)}$ Cauchy eşitsizlikleri, (3.2)'nin doğrudan bir sonucudur. Diğer yandan, Sonuç 3.1.18'den maksimum ilkesinin kısa bir kanıtını elde ederiz. B bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $|f|$ ise bir $D_R(a)$'da maksimumunu a noktasında alsın. Sonuç 3.1.18'den f fonksiyonu $D_R(a)$'da $f(z) = a_0$ monomudur, dd. f fonksiyonu $D_R(a)$'da sabittir. Özdeşlik Teoremi'nden, f fonksiyonu B'de sabittir. Dolayısıyla, B bölgesinde holomorf olan f fonksiyonu sabit değilse B'de yerel maksimumunu alamaz!

Teorem 3.1.19. *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $f \in \mathcal{H}(U)$, $\|f\|_U < +\infty$, $z \in U$ ve $r = d(z, \mathbb{C}\backslash U)$ ise*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f^{(n)}(z)\right| \leq n!\frac{\|f\|_U}{r^n}. \tag{3.4}$$

Ayrıca, $K \subset U$ bir kompakt altküme ve $\sigma := d(K, \mathbb{C}\backslash U)$ ise

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\|f^{(n)}\right\|_K \leq n!\frac{\|f\|_U}{\sigma^n}. \tag{3.5}$$

Kanıt. Eğer $U = \mathbb{C}$ ise, Liouville Teoremi'nden f sabit olur ve sav aşikârdır. Şimdi $U \neq \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda r bir pozitif gerçel sayıdır. $0 < \rho < r$ ise $\overline{D}_\rho(z) \subset U$ olduğundan, (2.23) Cauchy eşitsizliklerinden, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq n!\frac{\|f\|_{C_\rho(z)}}{\rho^n} \leq n!\frac{\|f\|_U}{\rho^n}$$

olur ve (3.4) buradan $\rho \nearrow r$ limitiyle elde edilir. Öte yandan her $z \in K$ için $\sigma = d(K, \mathbb{C}\backslash U) \leq d(z, \mathbb{C}\backslash U)$ olduğundan, (3.4)'te r yerine σ yazdığımızda o eşitsizlik her $z \in K$ için sağlanır; bu bize (3.5)'i verir. □

Önerme 3.1.20. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $K \subset U$ bir kompakt alt küme ise, bir $L \subset U$ kompakt kümesi $K \subsetneq \mathring{L}$, $r = d(L, \mathbb{C}\backslash U)$ ve $M_n = \frac{n!}{r^n}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall f \in \mathcal{H}(U) \quad \left\|f^{(n)}\right\|_K \leq M_n \|f\|_L \tag{3.6}$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. Bir $L \subset U$ kompakt kümesi $K \subset \mathring{L}$ olacak biçimde seçilsin. Her $f \in \mathcal{H}(U)$ için $\|f\|_{\mathring{L}} \leq \|f\|_L < +\infty$ olduğundan, (3.5)'ten, $r \leq \rho$ olduğunu gözetirsek,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall f \in \mathcal{H}(U) \quad \left\|f^{(n)}\right\|_K \leq \frac{n!}{r^n}\|f\| = M_n \|f\|_L$$

elde ederiz. □

Teorem 3.1.21 (Alan Teoremi). *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve $f : B \to \mathbb{C}$ holomorf, birebir ve sınırlıysa $f(B)$'nin $V_2(f(B))$ alanı*

$$V_2(f(B)) = \iint_B |f'(z)|^2 dxdy.$$

Kanıt. $z = x + iy$ ve $f = u + iv$ olmak üzere, $f : B \to \mathbb{C}$ dönüşümünü $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ ile tanımlanan $B \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü olarak düşünür ve $\det J_f(x, y) = |f'(z)|^2$ olduğunu gözetirsek, gerçel analizden

$$V_2(f(B)) = \iint_{f(B)} dudv = \iint_B \det J_f(x, y) dxdy = \iint_B |f'(z)|^2 dxdy.$$

□

Problemler

Problem 3.1.1. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ikisi birden 0 olmayan $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ile B'de $c_1 f + c_2 \bar{f} \equiv 0$ ise, f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 3.1.2. $f = u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve her $z = x + iy$ için $u(x, y) \le x$ ise, $f(z)$'nin en fazla birinci dereceden bir polinom olduğunu gösteriniz.

Problem 3.1.3. γ, $\mathbb{C}$'de bir integral gezisi ve $P, Q : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekliyseler,

$$f(w) := \int_\gamma \frac{P}{z - w} dx + \int_\gamma \frac{Q}{z - w} dy, \ (z = x + iy)$$

fonksiyonunun $\mathbb{C} \backslash \underline{\gamma}$'da holomorf olduğunu gösterip $f'(w)$ değerini hesaplayınız.

Problem 3.1.4. $\overline{\mathbb{D}} \subset B \subset \mathbb{C}$, B bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ve $f(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}$ ise, f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 3.1.5. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$, $|f| \in \mathcal{C}(\overline{B})$ olsun. Ayrıca, $0 \notin f(B)$, $m := \inf_{z \in \partial B} |f(z)|$ ve $M := \sup_{z \in \partial B} |f(z)|$ ise, her $z \in B$ için $m < |f(z)| < M$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.1.6. $f \in \mathcal{C}(\bar{D}_r) \cap \mathcal{H}(D_r)$ ve bir $M > 0$ ile $||f||_{C_r} \le M$ ise, her $z \in \bar{D}_r$ için $|f(z)| \le \frac{M|z|}{r}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.1.7. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi $a \in B$ noktasına göre yıldız biçimli ve $f \in \mathcal{C}(B, \mathbb{C})$ olsun. Bir köşesi a olan her $\Delta \subset B$ üçgeni için $\int_{\partial\Delta} f = 0$ ise, her $z \in B$ için $F(z) := \int_{\overrightarrow{az}} f$ ile tanımlanan F'nin B'de bir ilkeli olduğunu gösteriniz.

Problem 3.1.8. $\int_{\kappa_{2,i}} \frac{1}{z(z^2+4)} dz$ integralini hesaplayınız.

Problem 3.1.9. p derecesi ≥ 2 olan bir polinomsa ve bir $R > 0$ ile her $|z| \ge R$ için $p(z) \ne 0$ ise, $\int_{\kappa_R} \frac{1}{p(z)} dz = 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.1.10. Alan Teoremi: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf, birebir ve $\mathbb{D}$'deki seri açılımı $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ise, $f(\mathbb{D})$'nin alanının

$$V_2(f(\mathbb{D})) = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|^2$$

olduğunu, buradan ise $\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|^2 \leq 1$ eşitsizliğini kanıtlayınız. Buradan Cauchy eşitsizliklerini kanıtlayınız ve eğer f bir monom değilse bu eşitsizliklerin kesin olduğunu gösteriniz.

3.2 Tam Fonksiyonlara İlk Bakış

$\mathbb{C}$ yerel kompakt uzayımızı bir ∞ noktası ekleyerek kompaktlaştıracağız (bkz. Altkısım 5.2.3). Böylece elde ettiğimiz kompakt uzayımızı $\mathbb{C}_\infty$ ile göstereceğiz. Burada ∞ noktasını $\pm\infty$ noktalarından farklı seçtiğimizi ayrıca belirtelim. Bir dizinin veya bir fonksiyonun ∞'a yakınsamasından söz ettiğimizde bunlar $\mathbb{C}_\infty$ uzayındaki anlamlarıyla alınacaktır. Ayrıntılı bilgi için Kısım 3.6'nın baş kısmına bakabilirsiniz.

$\mathbb{C}$'de holomorf fonksiyonlara **tam fonksiyonlar** demiştik. Polinomlar elbette tam fonksiyonlardır. Bunlar dışında e^z ve $\cos z$, $\sin z$ gibi trigonometrik fonksiyonlar da tam fonksiyonlardır. Ancak $\tan z$ ve $\cot z$ tam değillerdir. Yine logaritmanın tam olan bir dalı yoktur. Liouville Teoremi'yle (Teorem 2.6.19), sınırlı tam fonksiyonların sabit olduğunu gördük. Gerçel $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonları sınırlı iken, sabit olmayan $\cos z$ ve $\sin z$ fonksiyonları sınırlı değildirler.

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ bir tam fonksiyon olsun. f'yi $\mathbb{C}$'de yakınsak bir $\sum a_n z^n$ kuvvet serisine açabiliriz. Açılımı $\sum a_n z^n$ olan tam fonksiyonları katsayıların davranışlarına göre iki gruba ayırabiliriz: Sıfırdan farklı katsayıları sonlu olanlar, ki bunlar polinomlarımızdır, onlara **tam rasyonel** fonksiyonlar da denir ve diğerleri, ki onlara **tam aşkın** fonksiyonlar diyeceğiz.

Her $r > 0$ için $\|f\|_r := \|f\|_{C_r}$ dersek, (2.23)'ten $|a_n|r^n \leq \|f\|_r$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, Sonuç 3.1.18'de bir n için $|a_n|r^n = \|f\|_r$ ise, her $m \neq n$ için $a_m = 0$ ve $f(z) = a_n z^n$ olduğunu gördük.

Teorem 3.2.1. *f tam fonksiyonu için R, M pozitif sayıları ve bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı*

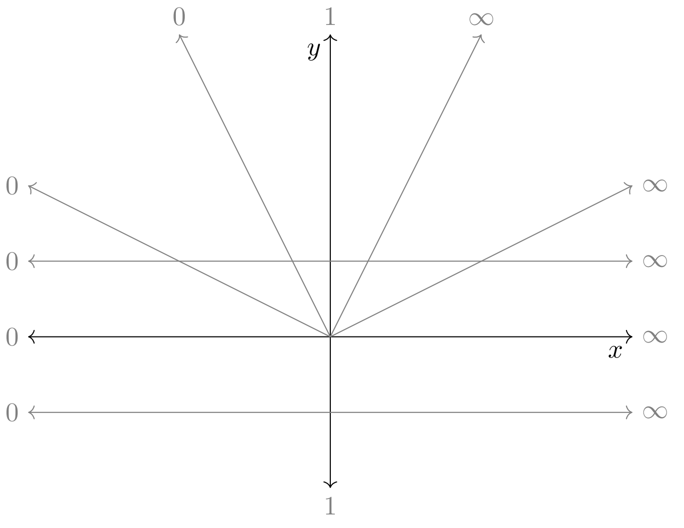
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad (|z| \geq R \Longrightarrow |f(z)| \leq M \cdot |z|^n)$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu en fazla n. dereceden bir polinomdur.

Kanıt. $r \geq R$ ve $k > n$ için varsayımımızdan Cauchy eşitsizlikleriyle

$$|a_k| \leq \frac{\|f\|_r}{r^k} \leq \frac{M \cdot r^n}{r^k} = \frac{M}{r^{k-n}} \to 0 \quad (r \to +\infty)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, her $k > n$ için $a_k = 0$ ve fonksiyonumuz en fazla n. dereceden bir polinomdur. □



Şekil 3.1: $z \to \infty$ için $|e^z|$'nin davranışı.

Teoremin $n = 0$ özel durumu bize Liouville Teoremi'ni verir: f tam fonksiyonu sınırlıysa, sabittir.

e^z, $\cos z$, $\sin z$ fonksiyonlarımız ise tam aşkındırlar. Tam fonksiyonların $z \to \infty$ için aldıkları değerleri inceleyeceğiz ve buradan hangi türden olduklarına ilişkin ölçütler elde edeceğiz. Teorem 3.2.1 buna bir örnektir.

Örneğin $f(z) = e^z$ fonksiyonunun davranışına bakalım: $z = x + iy$ olmak üzere, $|f(z)| = e^x$ olduğundan, şu tablo karşımıza çıkar: x-eksenine koşut doğrular boyunca $z \to \infty$ durumunda $\lim_{x\to+\infty} f(z) = \infty$ ve $\lim_{x\to-\infty} f(z) = 0$. Diğer yandan, y-eksenine koşut doğrular boyunca $|f(z)|$ sabittir ve $f(x_0+iy) = e^{x_0}e^{iy} = ce^{iy}$ olduğundan, $y \to +\infty$ ve $y \to -\infty$ için $f(z)$'nin limiti yoktur. $\mathbb{C}$'de sürekli e^z fonksiyonu $\mathbb{C}_\infty$'a sürekli genişletilemez.

$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinomu n. dereceden olsun, dd. $a_n \neq 0$ olsun. $z \neq 0$ için

$$p(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n}\right) = a_n z^n (1 + k_n(z)).$$

Burada $\lim_{z\to\infty} k_n(z) = 0$ olduğundan, $p(z)$ polinomu asimptotik olarak $a_n z^n$ monomuna eşittir denir ve bu $p(z) \approx a_n z^n$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.2. *$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinomu verilsin ve $a_n \neq 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $r > 0$ sayısı*

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(|z| > r \Longrightarrow \left|\frac{p(z)}{a_n z^n} - 1\right| < \varepsilon\right)$$

olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. Yukarıdaki gösterimlerle $\frac{p(z)}{a_n z^n} - 1 = k_n(z)$ olur. Okur

$$M := \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \cdots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|$$

olmak üzere, $|z| \geq 1$ için $|k_n(z)| \leq \frac{1}{|z|} \cdot M$ olduğunu kolayca görebilir. Şimdi $r > \max\{1, \frac{M}{\varepsilon}\}$ seçmek yeterlidir. □

Basit bir dönüşümle aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 3.2.3. *n. dereceden bir p polinomu verilsin ve $n > 0$ olsun.*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists r > 0\, \forall z\ (|z| > r \Longrightarrow |a_n z^n|\,(1-\varepsilon) < |p(z)| < |a_n z^n|\,(1+\varepsilon))\,.$$

Bu teoremlerden görüyoruz ki, p polinomu sabit değilse $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$. Bu ileride meromorf fonksiyonları incelediğimizde kanıtlayacağımız bir teoremin özel halidir: *Bir a noktasının f meromorf fonksiyonun bir kutup yeri olması için gerek ve yeter koşul* $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ *olmasıdır*(bkz. Sonuç 3.8.3)[1]. ∞ noktasıysa derecesi ≥ 1 olan polinomların bir kutup yeridir.

Teorem 3.2.4. *$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ için bir n doğal sayısı ve C, ρ pozitif sayıları*

$$\forall z\ \ (|z| > \rho \Longrightarrow |f(z)| > C \cdot |z|^n) \tag{3.7}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f, derecesi $\geq n$ olan bir polinomdur.

Kanıt. (3.7)'den dolayı, f fonksiyonunun tüm sıfır yerleri $\overline{D}_\rho$'da olmak zorundadır ve orada da en fazla sonlu sayıda sıfır yeri olabilir. Aksi halde sıfır yerlerinin $\overline{D}_\rho$'da bir yığılma noktası olurdu ve Özdeşlik Teoremi'nden $f \equiv 0$ elde ederdik! Bu ise (3.7) ile çelişir. f'nin $\overline{D}_\rho$'daki sıfır yerleri $z_1, \ldots, z_k$ ve bunların dereceleri sırasıyla $\nu_1, \ldots, \nu_k$ olsun. $m := \sum_{i=1}^k \nu_i$ ve

$$p(z) := (z - z_1)^{\nu_1} \cdot \cdots \cdot (z - z_k)^{\nu_k}$$

olsun. $g := p/f$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun $\mathbb{C}\setminus\{z_1, \ldots, z_k\}$'de holomorf olduğu ve orada sıfır yerleri olmadığı apaçıktır. Diğer yandan, Önerme 3.1.7'den her bir z_i için bu noktanın bir U_i komşuluğu ve orada holomorf ve sıfır yeri olmayan p_i ve f_i fonksiyonları her $z \in U_i$ için $p(z) = (z - z_i)^{\nu_i} p_i(z)$ ve $f(z) = (z - z_i)^{\nu_i} f_i(z)$ olacak biçimde bulunabilir. Dolayısıyla, U_i'de $g(z) = p_i(z)/f_i(z)$ holomorftur ve orada da sıfır yeri yoktur. Sonuçta g sıfır yeri olmayan bir tam fonksiyondur.

[1]"Kutup" ve "meromorf" kavramları için Kısım 3.8 ve 3.9'a bakınız.

Teorem 3.2.3'ü $p(z)$ polinomuna $\varepsilon = 1$ için uygularsak, şimdi $a_n = 1$ olduğundan, bir $r > 0$ sayısını her $|z| > r$ için $|p(z)| < 2|z|^m$ olacak biçimde bulabiliriz. $R := \max(\rho, r)$ alırsak her $|z| > R$ için

$$|g(z)| < \frac{2}{C}|z|^{m-n} \tag{3.8}$$

elde ederiz. $m - n \geq 0$ ise, Teorem 3.2.1'den g derecesi en fazla $m - n$ olan bir polinomdur. Ancak biz diğer yandan g'nin sıfır yerleri olmadığını biliyoruz. Dolayısıyla, g sabittir, dd. $g(z) \equiv a$, $a \neq 0$. Bu durumda $f(z) = \frac{1}{a}p(z)$ polinomudur. Şimdi $m - n < 0$ olduğunu varsayalım. Bu kez her $|z| > R$ için

$$|g(z)| < \frac{2}{C|z|^{n-m}} < \frac{2}{CR^{n-m}}$$

olacağından, g tam fonksiyonumuz $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_R$'de sınırlıdır; ancak g fonksiyonumuz elbette $\overline{D}_R$'de de sınırlıdır. Sonuçta g tam fonksiyonumuz sınırlı olduğundan, sabittir ve bu a sabiti sıfır değildir. Ancak $m < n$ için $0 < |a| < \frac{2}{C}|z|^{m-n}$ şeklini alan (3.8) eşitsizliği her $|z| > R$ için doğru olamaz. Dolayısıyla, $m \geq n$ olmak zorundadır. $\square$

$z \to \infty$ için e^z fonksiyonunun davranışının $p(z)$ polinomlarının davranışlarından farklı olduğunu gördük. Bu yalnızca e^z fonksiyonuna özgü değildir. Aşağıdaki teorem aslında, ileride kanıtlayacağımız, Casorati-Weierstrass Teoremi'nin (Teorem 3.8.5) doğrudan bir sonucudur:

Teorem 3.2.5. *$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ bir tam aşkın fonksiyonsa her $w_0 \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık $z_n \to \infty$ olan bir $(z_n) \subset \mathbb{C}$ dizisi $\lim f(z_n) = w_0$ olacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. Savımızın doğru olmadığını varsayalım, dd.

$$\exists w_0 \in \mathbb{C}\ \ \exists \varepsilon > 0\ \ \exists r > 0\ \ \forall z \in \mathbb{C}\ \ (|z| > r \Longrightarrow |f(z) - w_0| > \varepsilon)\,.$$

Şimdi $g(z) := f(z) - w_0$ dersek, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve

$$\exists \varepsilon > 0\ \ \exists r > 0\ \ \forall z \in \mathbb{C}\ \ (|z| > r \Longrightarrow |g(z)| > \varepsilon)$$

olur. Böylece $\rho = r$, $C = \varepsilon$ ve $n = 0$ olmak üzere, (3.7) eşitsizliği tam aşkın g için sağlanır, dolayısıyla Teorem 3.2.4 ile g bir polinom, dolayısıyla f bir polinom olur. Bir çelişkiye ulaştık! Varsayım yanlış, sav doğrudur. $\square$

$f(z) = e^z$ tam aşkın fonksiyonunun bir sıfır yeri yoktur, buna karşın diğer tüm değerleri alır. e^z fonksiyonu bu özelliğe sahip fonksiyonların temel modelidir.

Teorem 3.2.6. *$f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ sıfır yerleri olmayan bir tam aşkın fonksiyonsa bir $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tam fonksiyonu ile $f = e^h$.*

Kanıt. $g := \frac{f'}{f}$ bir tam fonksiyondur. g tam fonksiyonunun $\mathbb{C}$'de bir G ilkeli vardır; g'nin 0'daki seri açılımında terim terim integral alınız. Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\left(f(z)e^{-G(z)}\right)' = \left(f'(z) - f(z)G'(z)\right)e^{-G(z)} = 0$$

olur. Dolayısıyla, fe^{-G} 0'dan farklı bir sabittir ve bir $A = e^a \in \mathbb{C}$ ile

$$f(z) = Ae^{G(z)} = e^{a+G(z)} \text{ ve } \; h(z) := a + G(z).$$

□

Problemler

Problem 3.2.1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ve $f(x+iy) = u(x) + iv(y)$ olsun; burada $u = \operatorname{Re} f$ ve $v = \operatorname{Im} f$. Bu koşullarda $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ olması için gerek ve yeter koşulun $a, b \in \mathbb{C}$ ile $f(z) = az+b$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.2.2. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve

$$f'' + f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

ise, $f = \sin$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 3.2.3. Sabit olmayan bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tam fonksiyonu $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{H}$ (veya $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^+$, veya $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}$) olacak biçimde var mıdır?

Problem 3.2.4. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve $a \in \mathbb{R}$ ise, aşağıdakileri kanıtlayınız:
(a) $\operatorname{Re} f \leq a$ ise f sabittir.
(b) $\operatorname{Re} f \geq a$ ise f sabittir.
(c) $(\operatorname{Re} f)^2 \leq (\operatorname{Im} f)^2$ ise f sabittir.
(d) $(\operatorname{Re} f)^2 \geq (\operatorname{Im} f)^2$ ise f sabittir.
(e) Ayrıca, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve bir $0 < a \in \mathbb{R}$ ile $\operatorname{Re} f \leq a \operatorname{Re} g$ ise, $f = ag + \beta$ olacak biçimde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sayılarının varlığını gösteriniz.

Problem 3.2.5. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve her $z \in \mathbb{C}$ için $|f(z)| \leq \ln(|z| + 1)$ ise, f'nin sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 3.2.6. Bir $p > 0$ sayısı ve bir $r > 0$ sayısı ile her $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}_r$ için $|f'(z)| \leq p|e^z|$ koşulunu sağlayan tüm tam fonksiyonları belirleyiniz.

Problem 3.2.7. Bir f tam fonksiyonu, $\alpha \in \mathbb{R}$ nasıl verilirse verilsin, $\lim_{z \in d_\alpha, |z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$ olacak biçimde var mıdır?

Problem 3.2.8. Bir tam fonksiyonun gerçel kısmı veya sanal kısmı sınırlıysa sabit olduğunu gösteriniz.

Problem 3.2.9. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f''(n^{-1}) + f(n^{-1}) = 0$ koşulunu sağlayan tüm tam fonksiyonları bulunuz.

Problem 3.2.10. $p \in \mathbb{C}[z]$ sabit olmasın, $0 < r \in \mathbb{R}$ ve $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |p(z)| < r\}$ olsun. U'nun her bağlantılı B bileşeninde p'nin en az bir sıfır yeri olduğunu kanıtlayınız. Bu Cebirin Anateoremi'ni genelleştirir ve bir sonucu ise, U'nun bağlantılı bileşenlerinin sayısının en fazla p'nin derecesi kadar olduğudur.

Problem 3.2.11. f fonksiyonu a noktasının bir komşuluğundan holomorf ve $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(a)$ serisi yakınsaksa $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapının $+\infty$ olduğunu gösteriniz; dd. f özünde bir tam fonksiyondur.

Problem 3.2.12. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ve her $r \in (0, +\infty)$ için $M_f(r) := ||f||_{C_r}$ ise, M_f fonksiyonunun monoton artan ve sürekli olduğunu gösteriniz.

3.3 Holomorf Fonksiyon Dizileri ve Serileri

Holomorf fonksiyon dizilerinin limitleri, gerçel analizde türevlenebilir fonksiyonların limitlerine göre daha iyi özelliklere sahiptirler. Gerçel analizde türevlenebilir fonksiyonların limitlerinin, düzgün yakınsaklık da bile türevlenebilir olmaları gerekmez. Kompleks analizde türevlenebilme, yerel düzgün yakınsaklıkta korunur.

Teorem 3.3.1 (Weierstrass Yakınsaklık Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık kümesindeki holomorf fonksiyonların (f_n) dizisi U'da f fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaksa f fonksiyonu da U'da holomorftur ve her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\left(f_n^{(k)}\right)$ dizisi de U'da $f^{(k)}$'ye kompakt düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. *İlk kanıt*: 1. Her şeyden önce $f \in \mathcal{C}(U)$. Eğer $\Delta \subset U$ herhangi bir üçgense $f_n \overset{\partial\Delta}{\Longrightarrow} f$ olduğundan, Goursat Teoremi ile

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{\partial\Delta} (\lim f_n) = \lim \int_{\partial\Delta} f_n = 0$$

olduğundan, Morera Teoremi ile $f \in \mathcal{H}(U)$.

2. $K \subset U$ kompakt kümesi ve $k \in \mathbb{N}$ keyfi verilsin. $L \subset U$ kompakt kümesini, M_k sabitini (3.6)'daki gibi seçersek, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\right\|_K \leq M_k \|f_n - f\|_L$$

eşitsizliklerinden, $0 \leq \lim \left\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\right\|_K \leq M_k \lim \|f_n - f\|_L = 0$ olduğundan, $f_n^{(k)} \overset{K}{\Longrightarrow} f^{(k)}$.

İkinci kanıt: Bu teoremin Cauchy integral formülüne dayanan bir kanıtı da verilebilir. $\overline{D}_r(a) \subset U$ olsun. Her n ve her $z \in D_r(a)$ için

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f_n(w)}{w-z}dw \text{ ve } f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw$$

olduğunu biliyoruz. $C_r(a) \subset U$ kompakt kümesinde $f_n \overset{C_r(a)}{\Longrightarrow} f$ olduğundan, sabit tutulan z için $f_n(w)(w-z)^{-1}$ dizisi $C_r(a)$'da $f(w)(w-z)^{-1}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} f(z) = \lim f_n(z) &= \lim \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f_n(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \lim \frac{f_n(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (3.9) \end{aligned}$$

olur. (3.9)'un sağ yanı $\mathbb{C}\setminus C_r(a)$'da bir holomorf fonksiyon tanımlar. Böylelikle, f fonksiyonu $D_r(a)$'da holomorftur. $a \in U$ keyfi seçildiğinden, f fonksiyonu U'da holomorftur. Benzer irdelemelerle her $z \in D_r(a)$ için

$$\lim f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \lim \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw = f'(z).$$

Dolayısıyla, (f_n') dizisi f''ye U'da noktasal yakınsaktır. Şimdi $0 < \sigma < \rho$ olsun. Her $z \in \overline{D}_\sigma(a)$ için

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(z) - f_n(z)}{(w-z)^2}dw\right| \le \frac{r}{(r-\sigma)^2}\, \|f - f_n\|_{C_r(a)}$$

ve $\lim \|f - f_n\|_{C_r(a)} = 0$ olduğundan, $\lim \|f' - f_n'\|_{\overline{D}_\sigma(a)} = 0$. Böylece (f_n') dizisi $\overline{D}_\sigma$'da f''ye düzgün yakınsak, böylece U'da f''ye yerel düzgün, dolayısıyla kompakt düzgün yakınsaktır. Gerisi basit bir tümevarım işidir.[2] □

Bu teoremin gerçel analizdeki karşılığının doğru olmadığını biliyoruz. Örneğin $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx\,(n \in \mathbb{N}^*)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$'de 0 sabit fonksiyonuna düzgün yakınsarlar. Buna karşın $(f_n'(x)) = (\cos nx)$ dizisi $\mathbb{R}$'de noktasal yakınsak bile değildir! Weierstrass Teoremi seriler için şu şekli alır:

Teorem 3.3.2 (Seriler için Weierstrass Teoremi)**.** *U açık kümesinde holomorf olan f_n fonksiyonlarının $\sum f_n$ serisi U'da f fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaksa f fonksiyonu da U'da holomorftur ve ayrıca her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\sum_n f_n^{(k)}$ serileri de $f^{(k)}$'ye U'da kompakt0 düzgün yakınsaktır.*

---

[2]Bu kanıt yöntemi Poisson integral gösteriminden yola çıkarak harmonik fonksiyonlar için benzer bir teorem ve kanıtını verir.

Bu teorem kuvvet serilerinden tanıdık olan bir durumu genelleştirir. Biz, $\sum a_n(z-z_0)^n$ serisinin yakınsaklık dairesi $D_r(z_0)$ ise, $f_n(z) := a_n(z-z_0)^n$ olmak üzere, $\sum f_n$'in $D_r(z_0)$'da kompakt düzgün yakınsak, f'nin $D_r(z_0)$'da holomorf ve her $k \in \mathbb{N}^*$içinse $\sum_n f_n^{(k)}$'nın $f^{(k)}$'ye $D_r(z_0)$'da kompakt düzgün yakınsak olduğunu biliyoruz.

Teorem 3.3.3. *$U \subset \mathbb{C}$ sınırlı açık kümesinde $(f_n) \subset \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{H}(U)$ olsun. (f_n) dizisi ∂U'da düzgün yakınsaksa $\overline{U}$'da da bir $f \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{H}(U)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Ayrıca, her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\left(f_n^{(k)}\right)$ dizileri U'da $f^{(k)}$fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. Önerme 3.1.15 ile $\|f_n - f_m\|_{\overline{U}} = \|f_n - f_m\|_{\partial U}$ olduğundan, (f_n) dizisi B'de düzgün yakınsaktır. Savımızın kalanı Teorem 3.3.1'den çıkar. □

Burada $f_n \overset{\overline{U}}{\Longrightarrow} f$, ancak $f_n' \overset{\overline{U}}{\Longrightarrow} f'$ olması gerekmez! Seriler için elimizde bir örneğimiz şimdiden var: $\sum_{n\geq 1} n^{-2}z^n$ serisi $\overline{\mathbb{D}}$'de düzgün yakınsak ancak $\sum_{n\geq 1}\left(n^{-2}z^n\right)' = \sum_{n\geq 1} n^{-1}z^{n-1}$ serisi gerçi $\mathbb{D}$'de kompakt düzgün yakınsaktır, ancak $\overline{\mathbb{D}}$'de yakınsak bile değildir!

Teorem 3.3.4. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ olsun. $\sum f_n$ serisi U'da kompakt normsal yakınsaksa her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\sum_n f_n^{(k)}$ serisi de U'da kompakt normsal yakınsaktır ve toplamı $f^{(k)}$'dır.*

Kanıt. $\sum f_n$ serisi U'da kompakt normsal yakınsaksa U'da kompakt düzgün yakınsaktır. Weierstrass Teoremi'nden (Teorem 3.3.1) biliyoruz ki $f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\sum_n f_n^{(k)}$ serisi U'da $f^{(k)}$'ye kompakt düzgün yakınsaktır. $K \subset U$ kompakt kümesi keyfi verilsin. $L \subset U$ kompakt kümesini $K \subset \mathring{L}$ olacak biçimde seçelim. Varsayımımızdan $\sum \|f_n\|_L < +\infty$. Şimdi her $k \in \mathbb{N}^*$ için M_k sabitlerini (3.6)'daki gibi seçersek $\sum_n ||f_n^{(k)}||_K \leq M_k \sum_n \|f_n\|_L < +\infty$. Dolayısıyla, $\sum f_n^{(k)}$ serisi U'da normsal yakınsaktır. □

Teorem 3.3.5. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$ dizisi B'de $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsasın. Her n için $F_n \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonu f_n'nin bir ilkeli olsun. Eğer $(F_n(a))$ yakınsak olacak biçimde bir $a \in B$ noktası varsa (F_n) dizisi B'de f'nin bir F ilkeline kompakt düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. Gerekirse $F_n - F_n(a)$ ilkellerine geçerek her n için $F_n(a) = 0$ varsayabiliriz. Önsav 2.8.4'ten dolayı, B'deki başlangıç noktası a ve bitiş noktası w olan her γ gezisi için

$$F_n(w) = F_n(w) - F_n(a) = \int_{a,\gamma}^{w} f_n.$$

$f_n \overset{\gamma}{\Longrightarrow} f$ ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olduğundan, $\lim \int_{a,\gamma}^{w} f_n = \int_{a,\gamma}^{w} \lim f_n = \int_{a,\gamma}^{w} f$. Dolayısıyla, $(F_n(w))$ dizisi yakınsaktır.

$$F(w) := \lim F_n(w) = \int_{a,\gamma}^{w} f \tag{3.10}$$

olsun. F fonksiyonu B'de f'nin bir ilkelidir. $z_0 \in B$ keyfi verilsin. Bir $r > 0$ sayısını $K := \overline{D_r}(z_0) \subset B$ olacak biçimde seçelim. Her $z \in K$ için

$$\begin{aligned} F(z) - F_n(z) &= \int_{\overrightarrow{z_0 z}} (f - f_n) + F(z_0) - F_n(z_0) \\ \|F - F_n\|_K &\leq \|f - f_n\|_K \cdot r + |F(z_0) - F_n(z_0)|. \end{aligned}$$

Şimdi $\lim \|f - f_n\|_K = 0$ olması ve (3.10)'dan $\lim |F(z_0) - F_n(z_0)| = 0$ elde ederiz; böylece $\lim \|F - F_n\|_K = 0$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, (F_n) dizisi B'de F'ye yerel düzgün, böylece kompakt düzgün yakınsaktır. □

Tanım 3.3.6. X bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ olsun. Eğer bir pozitif M sabiti ile her $f \in \mathcal{A}$ için $\|f\|_X \leq M$ ise, $\mathcal{A}$ ailesi **X'te (düzgün) sınırlıdır** denir. Her $x \in X$ noktasının bir V komşuluğu ve bir $M_V > 0$ pozitif sayısı her $f \in \mathcal{A}$ için $\|f\|_V \leq M_V$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **$\mathcal{A}$ ailesi X'te yerel (düzgün) sınırlıdır** denir. Her $K \subset X$ kompakt altkümesi için bir $M_K > 0$ sabiti her $f \in \mathcal{A}$ için $\|f\|_K \leq M_K$ olacak biçimde bulunabiliyorsa $\mathcal{A}$ ailesi X'te **kompakt sınırlıdır** denir.

Bazı kaynaklarda kullanılan "düzgün" sıfatını biz kullanmayacağız. Burada söz konusu olan $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ vektör uzayında $\|\cdot\|_X$ pseudonormuna ve $\|\|_V$ pseudoyarınormuna göre sınırlılıktan başka bir şey değildir. Yerel kompakt uzaylarda yerel sınırlılık ve kompakt sınırlılık kavramları örtüşürler.

Bir $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ dizisinin sınırlı olmasından $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin X'te sınırlı olması anlaşılır.

Analizin en temel teoremlerinden biri Bolzano-Weierstrass Teoremi'dir: Bir $(z_n) \subset \mathbb{C}$ dizisi verilsin. Eğer $(z_n) \subset \mathbb{C}$ yakınsaksa sınırlıdır; ancak bunun tersi doğru değildir. (z_n) sınırlıysa, yakınsak olması gerekemez. Yine de Bolzano-Weierstrass Teoremi her sınırlı (z_n) dizisinin bir yakınsak altdizisi olduğunu söyler. Biz özünde $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olmak üzere, hangi koşullarda $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ dizilerinin U'da belli bir anlamda yakınsak altdizilerinin olduğunu araştırmak istiyoruz. Amacımız fonksiyon dizileri için Bolzano-Weierstrass Teoremi benzeri teoremler elde etmek. İlk iş olarak K bir kompakt topolojik uzay olmak üzere, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ normlu vektör uzayından $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_K)$ normlu vektör uzayına geçip şu soruyu soruyoruz: Her sınırlı $(f_n) \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ dizisinin yakınsak bir altdizisi var mıdır? Bu soruya yanıtımız, hayır!

$K := [0, 2\pi]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) := \sin nx$ olsun. Bir an için (f_{n_k}) altdizisinin K'de noktasal yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x \in K$ için

$$\lim_{k\to+\infty}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0, \text{ buradan da}$$
$$\lim_{k\to+\infty}(\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \tag{3.11}$$

olur. (3.11) ve Lebesgue sınırlandırılmış yakınsaklık teoreminden,

$$\lim \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 0 \tag{3.12}$$

elde ederiz. Ancak basit bir hesaplama ile $\int_0^{2\pi}(\sin n_k x - \sin n_{k+1})^2 dx = 2\pi$ olduğu görülür ve bu, (3.12) ile çelişir. Dolayısıyla, (f_n) dizisinin (f_{n_k}) gibi noktasal yakınsak bir altdizisi olamaz!

Biz genellikle kompleks analizde kompakt düzgün yakınsaklıkla ilgilendiğimizden bizim için anlamlı bir soru da şudur: K bir kompakt metrik uzay olmak üzere, noktasal yakınsak her $(f_n) \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ dizisinin K'de düzgün yakınsak bir altdizisi var mıdır? Bu soruya da yanıtımız hayır olacaktır. $K := [0, 1]$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}^*$için

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}$$

olsun. $(f_n) \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, her n için $\|f_n\|_K = 1$ ve her $x \in K$ için $\lim f_n(x) = 0$. Sürekli fonksiyon dizimiz sınırlı, noktasal yakınsak ve limit fonksiyonumuz da $f = 0$ sürekli fonksiyonudur. Ancak $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ olduğundan, (f_n) dizisinin düzgün yakınsak bir altdizisi olamaz! Düzgün yakınsaklığın şimdi tanımlayacağımız eşsüreklilikle bir ilişkisi vardır.

X bir topolojik uzay ve (Y, d) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, $x \in X$ ve $Z \subset X$ verildiğinde şu kavramlara sahibiz: f fonksiyonu x noktasında süreklidir veya Z kümesinde süreklidir veya ayrıca X de bir metrik uzaysa, Z'de düzgün süreklidir. Şimdi bize bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ ailesi verildiğinde bu ailenin x noktasında eşsürekli, Z kümesinde eşsürekli ve ayrıca X de bir metrik uzaysa, Z'de düzgün eşsürekli olmalarını tanımlayacağız.

Tanım 3.3.7. X bir topolojik uzay, Y bir metrik uzay ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ ve $Z \subset X$ olsun.

(a) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık x'in bir $U = U(x, \varepsilon)$ komşuluğu

$$\forall f \in \mathcal{F} \;\; \forall y \in U \;\; d(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa $\mathcal{F}$ **ailesi** x**'te eşsürekli**dir.

(b) $\mathcal{F}$ ailesi her $x \in Z$'de eşsürekliyse $\mathcal{F}$ **ailesi** Z**'de eşsürekli**dir.

(c) X de bir metrik uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$

$$\forall f \in \mathcal{F} \ \forall x, y \in Z \quad (d(x,y) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa $\mathcal{F}$ **ailesi** Z'**de düzgün eşsürekli**dir denir.

Eğer $\mathcal{F} = \{f\}$ ise, dd. ailemiz bir tek f fonksiyonundan oluşuyorsa bu kavramlar f için x'te süreklilik, Z'de süreklilik ve Z'de düzgün süreklilik kavramlarıyla örtüşürler. Buradaki "eş" sözcüğünün anlamı apaçıktır; örneğin x'te eşsüreklilikte "eş", $\varepsilon > 0$ verildiğinde *her* $f \in \mathcal{F}$ için *aynı* U'yu seçebilmedir. "X'te eşsürekli" veya "X'te düzgün eşsürekli" yerine sırayla kısaca "eşsürekli" veya "düzgün eşsürekli" diyeceğiz. Bu kavramları $(f_n) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ dizisi için kullandığımızda $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ailesi için olan anlamları anlaşılacaktır.

X ve Y metrik uzaylar ve $K \subset X$ bir kompakt alt küme ise, her sürekli $f : K \to Y$ fonksiyonunun K'de düzgün sürekli olduğunu biliyoruz (bkz. (5.2.17)). Bu teoremin kanıtı neredeyse aynı kalarak aşağıdaki önermeye aktarılır:

Teorem 3.3.8. *X, Y metrik uzaylar ve X kompakt ise, her eş sürekli $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ ailesi düzgün eşsüreklidir.*

Teorem 3.3.9. *X bir kompakt metrik uzay, Y bir metrik uzay ve $(f_n) \subset \mathcal{C}(X,Y)$ dizisi X'te düzgün yakınsaksa (f_n) dizisi X'te düzgün eşsüreklidir.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (f_n) düzgün yakınsak olduğundan, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ her $n \geq n_0$ için $d_X(f_n, f_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak biçimde seçilebilir.

$0 \leq i \leq n_0 - 1$ için f_i düzgün sürekli olduğundan, $\delta_i > 0$ sayıları

$$\forall x, y \in X \ \ d(x,y) < \delta_i \Longrightarrow d(f_i(x), f_i(y) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.13}$$

olacak biçimde seçilebilir. Şimdi $\delta := \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{n_0-1}\}$ olsun. $d(x,y) < \delta$ için (3.13)'ün sağ yanındaki eşitsizlik her bir $f_0, \ldots, f_{n_0-1}$ fonksiyonu için sağlanır.

Diğer yandan, $d(x,y) < \delta$ ise, her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_n(y)) &\leq d(f_n(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f_n(y)) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Sonuçta her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı

$$\forall x, y \in X \, \forall n \in \mathbb{N} \ \ (d(x,y) < \delta \Longrightarrow d(f_n(x), f_n(y) < \varepsilon)$$

olacak biçimde vardır ve bu, savımızdır. □

Önsav 3.3.10. *A sayılabilir bir küme ve $(f_n) \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{C})$ dizisi verilsin. Her $a \in A$ için $(f_n(a))$ dizisi sınırlıysa, (f_n) dizisinin A'da noktasal yakınsak bir altdizisi vardır.*

Kanıt. 1. A sayılabilir sonsuz olsun. A'nın ögelerini $a_0, a_1, a_2, \ldots$ olarak sıralayalım. $(f_n(a_0)) \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir dizi olduğundan, yakınsak bir $(f_{0n}(a_0))$ altdizisi vardır. $(f_{0n}(a_1))$ sınırlı olduğundan, yakınsak bir $(f_{1n}(a_1))$ altdizisi vardır. Tümevarımla her $\nu \in \mathbb{N}$ için $(f_{\nu n})_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri

$$(f_n) \supseteq (f_{0n}) \supseteq (f_{1n}) \supseteq (f_{2n}) \supseteq \cdots \text{ ve } (f_{\nu n}(a_\nu)) \text{ yakınsak}$$

olacak biçimde oluşturulur. Cantor köşegen yöntemiyle $g_n := f_{nn}$ olarak tanımlanan (g_n) altdizisi A'da noktasal yakınsaktır.

2. A sonlu ve ögelerini $a_1, \ldots, a_n$ olarak sıralamış isek yukarıdaki yöntemle n adımda A'da yakınsak bir altdiziye ulaşırız. Veya A'nın ögelerini tekrarlara izin vererek ilk durumdaki gibi sıralarız ve aynı kanıt şimdi de geçerlidir. □

Teorem 3.3.11. *X ve Y metrik uzaylar ve Y tam olsun. $(f_n) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ dizisi X'te eşsürekli ve X'in bir yoğun A altkümesinde yakınsaksa (f_n) dizisi X'te yerel düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsinler. x noktasının bir U komşuluğunu her n ve her $y \in U$ için $d(f_n(y), f_n(x))| < \frac{\varepsilon}{6}$ olacak biçimde seçersek, her n ve her $y, y' \in U$ için

$$d(f_n(y), f_n(y')) \leq d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y')) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. $(f_n(a))$ yakınsak olacak biçimde bir $a \in U \cap A$ noktası vardır. Bir n_0 doğal sayısı her $m, n \geq n_0$ için $d(f_n(a), f_m(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak biçimde seçilebilir. Bu ve yukarıdaki eşitsizlikten her $m, n \geq n_0$ için

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f_m(a)) + d(f_m(a), f_m(x)) < \varepsilon$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $(f_n(x))$ bir Cauchy dizisidir ve bir $f(x)$'e yakınsar. Özetle (f_n) dizisi X uzayımızda noktasal yakınsaktır.

Şimdi $\varepsilon > 0$ verildiğinde U yukarıdaki gibi seçilsin. $(f_n(x))$ yakınsak olduğundan, bir m_0 doğal sayısı her $m, n \geq m_0$ için $d\left(f_n(x), f_m(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak biçimde seçilsin. Bu durumda her $m, n \geq m_0$ ve her $y \in U$ için

$$d(f_n(y), f_m(y)) \leq d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(y)) < \frac{2\varepsilon}{3},$$

dolayısıyla $d_U(f_n, f_m) < \varepsilon$ elde ederiz. Böylece (f_n) dizimiz U'da düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak, (f_n) dizimiz X'te yerel düzgün yakınsaktır. □

Teorem 3.3.12 (Arzelà-Ascoli Teoremi)**.** *K bir kompakt metrik uzay, $(f_n) \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ eşsürekli ve (f_n)* ***noktasal sınırlı****, dd. her $x \in K$ için $\{f_n(x) \mid x \in K\}$ sınırlı olsun. Bu durumda*

(i) *(f_n) dizisi $(\mathcal{C}(K, \mathbb{C}), \|\cdot\|_K)$ uzayında sınırlıdır ve*

(ii) *(f_n)'nin K'de düzgün yakınsak bir altdizisi vardır.*

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. Teorem 3.3.8'den dolayı, (f_n) düzgün eşsürekli olduğundan, bir $\delta > 0$ sayısı

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x, y \in K \quad (d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon) \tag{3.14}$$

olacak biçimde vardır. K kompakt kümesi sonlu sayıda $B_\delta(p_1), \ldots, B_\delta(p_m)$ açık topu ile örtülür. Varsayımdan $(f_n(p_i))$ dizleri sınırlı olduğundan, $M_i > 0$ sabitleri her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(p_i)| \leq M_i$ olacak biçimde seçilebilir. Şimdi $M := \max\{M_1, \ldots, M_m\}$ alırsak keyfi verilen $x \in K$ bir $B_\delta(p_i)$ topunda olacağından, (3.14) ile

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(p_i)| + |f_n(p_i)| < \varepsilon + M,$$

dolayısıyla $\|f_n\|_K \leq \varepsilon + M < \infty$ olur.

(ii) K kompakt metrik uzay olduğundan, Önerme 5.2.13'e göre sayılabilir yoğun bir A altkümesi vardır. Önsav 3.3.10'dan dolayı (f_n) dizisinin A'da yakınsak bir (g_n) altdizisi vardır. Teorem 3.3.11'den ötürü (g_n) dizisi K'de yerel düzgün yakınsaktır. Ancak K yerel kompakt olduğundan, (g_n) dizisi K'de kompakt düzgün yakınsaktır, özellikle K'de düzgün yakınsaktır. □

Teorem 3.3.13. *$U \subset \mathbb{C}$ açık olmak üzere, $(f_n) \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ dizisi U'da noktasal sınırlı ve eşsürekliyse, U'da kompakt düzgün yakınsak bir altdizisi vardır.*

Kanıt. Önerme 5.2.33'e göre U'yu tüketen bir (K_n) kompakt kümeler dizisi seçelim. Bir kompakt kümede eşsürekli bir aile orada düzgün eşsürekli olduğundan, Teorem 3.3.12 ile önce (f_n) dizisinin K_0'da düzgün yakınsak bir (f_{0n}) altdizisini, ardından (f_{0n})'nin K_1'de düzgün yakınsak bir altdizisini, dolayısıyla her $m \in \mathbb{N}$ için $(f_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ dizilerini $(f_n) \supset (f_{0n}) \supset (f_{1n}) \supset \cdots$ ve her (f_{mn}) dizisi K_m'de düzgün yakınsak olacak biçimde seçebiliriz. $K_0 \subset K_1 \subset \cdots$ olduğundan, $(f_{mn})_{n \geq 0}$ dizisi $0 \leq k \leq m$ için her K_k'de düzgün yakınsaktır. Cantor köşegen yöntemi ile $g_m := f_{mm}$ olarak tanımlanan $(g_m) \subset (f_n)$ altdizisi her K_n kompakt kümesinde düzgün yakınsaktır. U'daki her kompakt küme bir K_n'nin içine düştüğünden, (g_m) dizimiz U'da kompakt düzgün yakınsaktır. □

Önerme 3.3.14. *$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ yerel sınırlıysa, $\mathcal{F}$ ailesi U'da eşsüreklidir.*

Kanıt. $a \in U$ keyfi verilsin. $r > 0$ sayısını $\overline{D}_r(a) \subset U$ olacak biçimde seçelim. U yerel kompakt olduğundan, $\mathcal{F}$ ailesi U'da kompakt sınırlıdır. Dolayısıyla, bir $M_r > 0$ sayısı her $f \in \mathcal{F}$ için $\|f\|_{\overline{D}_r(a)} \leq M_r$ olacak biçimde vardır. Her $z \in \overline{D}_{\frac{r}{2}}(a)$ için $\overline{D}_{\frac{r}{2}}(z) \subset \overline{D}_r(a)$ olduğundan, (2.23) Cauchy eşitsizliklerinden, $n = 1$ ile her $f \in \mathcal{F}$ ve her $z \in \overline{D}_{\frac{r}{2}}(a)$ için

$$|f'(z)| \leq 2\frac{M_r}{r}, \text{ dolayısıyla } \|f'\|_{\overline{D}_{\frac{r}{2}}(a)} \leq 2\frac{M_r}{r}$$

elde ederiz. Buradan her $f \in \mathcal{F}$ ve her $z \in D_{\frac{r}{2}}(a)$ için

$$|f(z) - f(a)| = \left| \int_{\overrightarrow{az}} f' \right| \leq \|f'\|_{[a,z]} \cdot |z - a| \leq 2\frac{M_r}{r} \cdot |z - a|.$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ keyfi verildiğinde $\delta > 0$ sayısını $\frac{r}{2}$'den küçük ve $2\frac{M_r}{r}\delta < \varepsilon$ olacak biçimde seçersek,

$$\forall f \in \mathcal{F} \;\; \forall z \in D_\delta(a) \;\; |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

elde ederiz, dd. $\mathcal{F}$ ailesi a noktasında eşsürekli olur. $a \in U$ keyfi seçildiğinden, $\mathcal{F}$ ailesi U'da eşsüreklidir. □

Teorem 3.3.15 (Montel Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olsun. Yerel sınırlı her $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ dizisinin U'da yerel düzgün yakınsak bir altdizisi vardır.*

Kanıt. Önerme 3.3.14'ten dolayı (f_n) ailesi U'da eşsüreklidir. (f_n) ailesi U'da yerel sınırlı olduğu için U'da noktasal sınırlıdır. Sav, Teorem 3.3.13'ten çıkar. □

Teorem 3.3.15 reel analitik fonksiyonlar için yanlıştır (bkz. [52]).

Teorem 3.3.16 (Montel Yakınsaklık Ölçütü)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ yerel sınırlı ve $f \in \mathcal{H}(U)$ olsun. (f_n) dizisinin U'da kompakt düzgün yakınsak olan her altdizisi f'ye yakınsıyorsa (f_n) dizisi de U'da f'ye kompakt düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. (f_n) dizisinin U'da kompakt düzgün yakınsak olan her altdizisi f'ye yakınsasın, ancak (f_n) dizisinin f'ye U'da kompakt düzgün yakınsak olmadığını varsayalım. Bu durumda en az bir $K \subset U$ kompakt kümesi için $(\|f_n - f\|_K)$ bir 0 dizisi olmayacaktır. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve (f_n) dizisinin bir (g_m) altdizisi her m için $\|g_m - f\|_K \geq \varepsilon$ olacak biçimde bulunmalıdır. (g_n) dizisi de U'da yerel sınırlı bir dizi olduğundan, Teorem 3.3.15'e göre U'da kompakt düzgün yakınsak bir (h_k) altdizisi vardır. Ancak her k için $\|h_k - f\|_K \geq \varepsilon$ olacağından, (h_k) dizisi f'ye yakınsak olamaz. Bu ise teoremin hipotezi ile çelişir! □

Teorem 3.3.17 (Vitali Teoremi). *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$ yerel sınırlı ve $M := \{z \in B \mid \exists \lim f_n(z)\}$ kümesinin B'de bir yığılma noktası olsun. Bu durumda (f_n) dizisi B'de kompakt düzgün yakınsaktır.*

Kanıt. (g_m) ve (h_k) dizleri (f_n)'nin B'de kompakt düzgün yakınsak olan iki altdizisi olsun. Bunların g ve h ile göstereceğimiz limitleri Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'nden B'de holomorfturlar ve her $z \in M$ içinse $\lim g_m(z) = \lim f_n(z) = \lim h_k(z)$ olduğundan, $g|M = h|M$ olur ve Özdeşlik Teoremi'ndense $g = h$ elde ederiz. Montel Yakınsaklık Ölçütü'nden (f_n) dizisi B'de $g(= h)$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaktır. □

Problemler

Problem 3.3.1. $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ ve $f_n \overset{U}{\Longrightarrow} f$ ise, $f_n' \overset{yrl}{\Longrightarrow} f'$ ancak $f_n' \overset{U}{\Longrightarrow} f'$ olması gerekmediğini örnekleyiniz.

Problem 3.3.2. $f_n(z) := z\exp(-\frac{1}{2}n^2z^2)$ olmak üzere, (f_n) dizisinin $\mathbb{R}$'de düzgün yakınsak, buna karşın hiçbir D_r dairesinde kompakt düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Problem 3.3.3. $\sum_{n\geq 1} z^n[(1-z^n)(1-z^{n+1})]^{-1}$ serisinin $\mathbb{D}$'de $z(1-z)^{-2}$ fonksiyonuna, $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$'de ise $(1-z)^{-2}$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Problem 3.3.4. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ve $f(0) = 0$ ve $\mathbb{D}$'de $g_n(z) := f(z^n)$ olarak tanımlansın. $\sum g_n$ serisinin $\mathbb{D}$'de kompakt düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Problem 3.3.5. $f(z) := \sum_{n\geq 0} \exp(n^2 z)$ ile $\mathbb{C}^-$'de bir holomorf fonksiyon tanımlandığını gösteriniz.

Problem 3.3.6. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ ve her $z \in \mathbb{D}$ için $g_n(z) := f(z^n)$ olsun. $\sum_{n\geq 1} g_n$ serisinin $\mathbb{D}$'de kompakt düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz ve bu serinin $\mathbb{D}$'de düzgün yakınsak olması gerekmediğini örnekleyiniz.

Problem 3.3.7. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $(z_n) \subset U$ yakınsak ve $c = \lim z_n \in U$ olsun. $(f_n) \subset \mathcal{H}(U)$ dizisi U'da f fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaksa $f'(c) = \lim f_n'(x_n)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.3.8. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f_n(x) = n^{-3}\sin nx$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbb{R}$'de $\sum f_n$ ve $\sum f_n'$serilerinin düzgün yakınsak, $\sum f_n''$ serisinin koşullu yakınsak ve $\sum f_n'''$ serisinin ise ıraksak olduğunu kanıtlayınız. Dolayısıyla, Weierstrass Yakınsaklık Teoremi gerçel analize aktarılamaz! $\sum n^3 \sin nz$ serisinin $\operatorname{Im} z \neq 0$ için ıraksak olduğunu kanıtlayınız; dolayısıyla yukarıdaki sonuçlar Weierstrass Yakınsaklık Teoremi ile çelişmez.

Problem 3.3.9. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f : B \times [a, +\infty) \to \mathbb{C}$ sürekli ve her $z \in B$ için $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(z,t)dt$ var ve

$$g(z) := \int_0^{+\infty} f(z,t)dt := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(z,t)dt$$

olsun. Her kompakt $K \subset B$ ve her $\varepsilon > 0$ için $A = A(K,\varepsilon)$ ve $B = B(K,\varepsilon)$ sayıları her $a \leq A < b < B$ için

$$\forall z \in K \quad \left| \int_b^B f(z,t) \right| < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa $\int_a^{+\infty} f(z,t)dt$ **integrali** B**'de kompakt düzgün yakınsaktır** diyelim. $\frac{\partial f}{\partial z}$ var ve $B \times [a,+\infty)$'da sürekli, ayrıca $\int_a^{+\infty} f(z,t)dt$ integrali B'de kompakt düzgün yakınsaksa $g \in \mathcal{H}(B)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.3.10. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f : B\times[a,b] \to \mathbb{C}$ ve $\frac{\partial f}{\partial z}$ fonksiyonları $B \times [a,b]$'de sürekli olsunlar. $g(z) = \int_a^b f(z,t)dt$ integrali B'de kompakt düzgün yakınsaksa $g \in \mathcal{H}(B)$ ve $g'(z) := \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.3.11. Her $z \in \mathbb{C}^+$ için $\int_0^{+\infty} e^{-zt}dt = \frac{1}{z}$ olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak $\int_0^{+\infty} e^{-ixt}\cos ytdt = \frac{x}{x^2+y^2}$ ve $\int_0^{+\infty} e^{-ixt}\sin ytdt = \frac{y}{x^2+y^2}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.3.12. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ için

$$f(z) := \sum_{w \in \mathbf{log}\, z} \frac{1}{w^2} = \sum_{w \in \mathbb{C}, e^w = z} \frac{1}{w^2}$$

serisinin $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu, dolayısıyla $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$'de bir holomorf fonksiyon tanımladığını gösteriniz.

Problem 3.3.13. Vitali Teoremi'nden yararlanarak

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^z = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

olduğunu gösteriniz.

3.4 $\mathcal{C}(U,Y)$ ve $\mathcal{H}(U)$'nun Topolojileri

$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olsun. Bir önceki kısımda holomorf fonksiyonların dizileri söz konusu olduğunda "U'da yerel düzgün yakınsaklık" ve ona denk olan "U'da kompakt düzgün yakınsaklık" kavramlarının önemli olduğunu gördük.

Bu kısımda bu uzaylarda bu yakınsaklığı bize verecek bir metrik tanımlayacağız. (Y,d) daima bir metrik uzayı gösterecektir. Bizi ilgilendiren özünde $(\mathbb{C},d)$ ve $(\mathbb{C}_\infty,d_\infty)$ metrik uzaylarıdır. $(\mathbb{C}_\infty,d_\infty)$ için Kısım 3.6'ya bakınız.

Kısım 1.5'te düzgün yakınsaklık pseudo(yarı)metrikleriyle tanışmıştık. Oradan bizi şimdi ilgilendirenleri buraya alalım: X bir topolojik uzay olsun. Her $\emptyset \neq A \subset X$ ve her $f,g \in \mathcal{C}(X,Y)$ için

$$d_A(f,g) = \sup_{z\in A} d(f(z),g(z))$$

tanımını vermiştik. d_A bir metrikten iki noktada ayrılır: İlki $d_A(f,g) = +\infty$ olabilir, ikincisi $d_A(f,g) = 0$'dan ancak $f|A = g|A$ çıkarılabilir. Fakat K

bir kompakt topolojik uzaysa, d_K bize $\mathcal{C}(K,Y)$ uzayında bir metrik verir. $(f_n) \subset \mathcal{C}(K,Y)$ ve $f \in \mathcal{C}(K,Y)$ olmak üzere, $\lim d_K(f_n, f) = 0$ olması $f_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olmasına denktir. Bu durumda $\mathcal{C}(U,Y)$'de kompakt düzgün yakınsaklığı sağlayan bir metrik tanımlayacaksak şunu sağlamak yeterli olacaktır: Bu metriğe göre yakınsaklık U'yu tüketen bir (K_n) kompakt kümeler dizisi için d_{K_n} metriklerine göre $\mathcal{C}(K_n,Y)$ uzaylarında yakınsaklıkları vermelidir.

U'yu tüketen bir (K_n) kompakt kümeler dizisinden, U'nun kompakt altkümelerinin

$$U = \bigcup_{n=1}^{n=+\infty} \mathring{K}_n \text{ ve elbette } U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$$

koşulunu sağlayan genişleyen bir $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$ dizisi anlaşılır. Teorem 5.2.33'te her $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesini kompakt kümelerle tüketebileceğimiz kanıtlanmıştır. U'nun farklı tüketen dizileri vardır, Önerme 5.2.33'te verilenden farklı bir tüketen dizi verelim. $A := U \cap \mathbb{Q}^2$ olmak üzere,

$$\mathcal{A} := \left\{\overline{D}_r(a) \,|\, a \in A,\ r \in \mathbb{Q} \text{ ve } \overline{D}_r(a) \subset U\right\}$$

ailesi sayılabilirdir. $\mathcal{A}$'nın ögelerini $A_1, A_2, A_3, \ldots$ olarak sıralayalım. $K_n := \bigcup_{i \leq n} A_n$ olarak tanımlarsak (K_n) kompakt kümeler dizisi U'yu tüketir.

Şimdi bize U açık kümemizi tüketen herhangi bir (K_n) kompakt kümeler dizisi verilmiş olsun. Bu durumda $d_n := d_{K_n}$'ler $\mathcal{C}(U,Y)$'de yarımetriktirler. Önsav 5.2.10'dan, her n için

$$\rho_n(f,g) := \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)} \tag{3.15}$$

ile $\mathcal{C}(U,Y)$'de bir yarımetrik tanımlandığını ve daima $0 \leq \rho_n(f,g) < 1$ olduğunu görürüz.

Tanım 3.4.1. ρ_n, $n \geq 1$, (3.15)'tekiler olmak üzere, her $f, g \in \mathcal{C}(U,Y)$ için

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(f,g). \tag{3.16}$$

Her $n \in \mathbb{N}^*$ için daima $0 \leq \rho_n(f,g) \leq 1$ ve $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(f,g)$ yakınsak ve $\rho(f,g)$ tanımı kusursuzdur.

Önerme 3.4.2. *$(\mathcal{C}(U,Y), \rho)$ bir metrik uzaydır.*

Kanıt. $f, g, h \in \mathcal{C}(U,Y)$ keyfi verilsinler. $0 \leq \rho(f,g) < +\infty$ aşikâr.

$$\rho(f,g) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^* \;\; \rho_n(f,g) = 0 \text{ ve}$$
$$\rho_n(f,g) = 0 \iff f|K_n = g|K_n, \;\; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

ve $U = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ olduğundan, $\rho(f,g) = 0 \iff f = g$ olur. $\rho(f,g) = \rho(g,f)$ apaçıktır. Her bir $n \in \mathbb{N}^*$ için $\rho_n(f,h) \leq \rho_n(f,g) + \rho_n(g,h)$ olduğundan, $\rho(f,h) \leq \rho(f,g) + \rho(g,h)$. □

Her kompakt $K \subset U$, her $f \in \mathcal{C}(U,Y)$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} V(f,K,\varepsilon) &:= \{g \in \mathcal{C}(U,Y) \mid d_K(f,g) < \varepsilon\} \\ B(f,\varepsilon) &:= \{g \in \mathcal{C}(U,Y) \mid \rho(f,g) < \varepsilon\} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. $B(f,\varepsilon)$ açıkça $(\mathcal{C}(U,Y),\rho)$ metrik uzayımızda f merkezli ε yarıçaplı açık topumuzdur. Şimdilik, eğer $(Y,d) = (\mathbb{C},d)$ ise

$$V(f,K,\varepsilon) = \{g \in \mathcal{C}(U,Y) \mid \|f-g\|_K < \varepsilon\}$$

olduğunu belirtelim; buna geri döneceğiz. $V(f,K,\varepsilon)$ ise d_K yarımetriğine göre $\mathcal{C}(U,Y)$'deki f-merkezli ε-yarıçaplı açık toptur.

Önerme 3.4.3. (i) *$\varepsilon > 0$ verildiğinde $K \subset U$kompakt kümesi ve $\delta > 0$ sayısı*

$$\forall f,g \in \mathcal{C}(U,Y) \ \ (d_K(f,g) < \delta \Longrightarrow \rho(f,g) < \varepsilon),$$

dd. $\forall f \in \mathcal{C}(U,Y)$ için $V(f,K,\delta) \subset B(f,\varepsilon)$ olacak biçimde bulunabilir.

(ii) *$\delta > 0$ sayısı ve $K \subset U$ kompakt kümesi verildiğinde $\varepsilon > 0$ sayısı*

$$\forall f,g \in \mathcal{C}(U,Y) \ (\rho(f,g) < \varepsilon \Longrightarrow d_K(f,g) < \delta),$$

dd. $\forall f \in \mathcal{C}(U,Y)$ için $B(f,\varepsilon) \subset V(f,K,\delta)$ olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. m doğal sayısını $\sum_{n\geq m+1} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçelim. $K := K_m$ olsun ve $\delta > 0$ sayısını her $0 \leq t < \delta$ için $\frac{t}{t+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçersek, $0 \leq i \leq m$ için $K_i \subset K$, dolayısıyla $d_i(f,g) \leq d_m(f,g) = d_K(f,g)$ olduğundan, $\forall f,g \in \mathcal{C}(U,Y)$ için $d_K(f,g) < \delta$ ise, $0 \leq i \leq m$ için $\rho_i(f,g) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Sonuçta

$$\rho(f,g) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i}\rho_i(f,g) + \sum_{i\geq m+1} \frac{1}{2^i}\rho_i(f,g) < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i\geq m+1} \frac{1}{2^i} < \varepsilon.$$

(ii) Şimdi $K \subset U$ kompakt kümesi ve $\delta > 0$ sayısı verilsin. m doğal sayısını $K \subset K_m$ olacak biçimde seçelim. Dolayısıyla, her $f,g \in \mathcal{C}(U,Y)$ için $d_K(f,g) \leq d_m(f,g)$.

$\varepsilon > 0$ sayısını $0 \leq s < 2^m\varepsilon \Longrightarrow \frac{s}{1-s} < \delta$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda $\frac{t}{t+1} < 2^m\varepsilon \Longrightarrow t < \delta$ olur. Şimdi $f,g \in \mathcal{C}(U,Y)$ için $\rho(f,g) < \varepsilon$ ise, $\frac{d_m(f,g)}{d_m(f,g)+1} < 2^m\varepsilon$ olur ve dolayısıyla $d_m(f,g) < \delta$ olur ve işimiz biter. □

Bunun bir doğal sonucu, $(\mathcal{C}(U,Y),\rho)$ metrik uzayımızda her f için

$$\mathcal{V}_f := \{V(f,K,\delta) \mid K \subset U \text{ kompakt}, \delta > 0\}$$

ailesinin f'nin bir komşuluk bazı olmasıdır. Elbette $\mathcal{V}_f$ ailesi U'yu tüketen (K_n) kompakt dizimizden bağımsızdır.

Önerme 3.4.4. (i) *$(\mathcal{C}(U,Y),\rho)$ uzayının topolojisi U'yu tüketen (K_n) kompakt dizimizden bağımsızdır.*

(ii) *$(f_n) \subset \mathcal{C}(U,Y)$ dizimizin ρ'ye göre $f \in \mathcal{C}(U,Y)$ fonksiyonuna yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (f_n) dizimizin her $K \subset U$ kompakt kümesinde f'ye düzgün yakınsak olmasıdır.*

Kanıt. (i) Hangi tüketen kompakt küme dizisinden yola çıkarsak çıkalım her $f \in \mathcal{C}(U,Y)$ ögesi bu diziden bağımsız $\mathcal{V}_f$ komşuluk bazına sahiptir.

(ii)(1) $\lim \rho(f_n, f) = 0$ olsun. Şimdi $K \subset U$ kompakt kümesi ve $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. m doğal sayısını $K \subset K_m$ olacak biçimde seçelim. Önerme 3.4.3 ile bir $\delta > 0$ sayısını her $f \in \mathcal{C}(U,Y)$ için $B(f,\delta) \subset V(f,K,\varepsilon)$ olacak biçimde seçelim (burada ε ve δ'nın rolleri değişti!). Varsayımdan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı her $n \geq n_0$ için $\rho(f_n, f) < \delta$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda her $n \geq n_0$ için $f_n \in V(f,K,\varepsilon)$, dd. $d_K(f_n, f) < \varepsilon$. Böylece $f_n \stackrel{K}{\Longrightarrow} f$.

(ii)(2) Her $K \subset U$ kompakt kümesinde $f_n \stackrel{K}{\Longrightarrow} f$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. m doğal sayısını $\sum_{n \geq m+1} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde seçelim. $1 \leq i \leq m$ için, $f_n \stackrel{K_i}{\Longrightarrow} f$ olduğundan, n_i doğal sayıları her $n \geq n_i$ için $d_i(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2m}$ olacak biçimde seçilebilir. $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_m\}$ olmak üzere, her $n \geq n_0$ için

$$\rho(f_n, f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \rho_i(f_n, f) + \sum_{i \geq m+1} \frac{1}{2^i} \rho_i(f_n, f) < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\lim \rho(f_n, f) = 0$. □

Not 3.4.5. $(Y,d) = (\mathbb{C},d)$ durumunda $\mathcal{C}(U) := \mathcal{C}(U,\mathbb{C})$ bir vektör uzaydır ve tanımladığımız topolojiyle aslında bir topolojik vektör uzayıdır. Bu nedenle, yalnızca $\mathcal{C}(U)$ ile ilgilenen kaynaklarda şu yaklaşım yeğlenir: Önce 0 vektörünün, $K \subset U$ kompakt ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$V(K,\varepsilon) := V(0,K,\varepsilon) = \{f \in \mathcal{C}(U) \mid \|f\|_K < \varepsilon\}$$

komşulukları tanımlanır.

$$\mathcal{V} := \{V(K,\varepsilon) \mid K \subset U \text{ kompakt ve } \varepsilon > 0\}$$

0 vektörünün bir komşuluk bazı olarak alınır ve her $f \in \mathcal{C}(U)$ fonksiyonunun bir komşuluk bazı ötelemeyle $\mathcal{V}_f := f + \mathcal{V}$ olarak tanımlanır. Bu durumda bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(U)$ için

$$\mathcal{A} \textbf{ açıktır} :\Longleftrightarrow \forall f \in \mathcal{A} \ \exists V \in \mathcal{V}_f \ \ V \subset \mathcal{A}$$

olarak tanımlanır. Bu yolu örneğin [15]'te bulabilirsiniz.

Eğer Y metrik uzayı tam değilse $(\mathcal{C}(U,Y),\rho)$ metrik uzayının da tam olmadığı kolayca görülür. Y'de yakınsak olmayan bir (a_n) Cauchy dizisi alalım. Her $z \in U$ için $f_n(z) = a_n$ olarak tanımlanan sabit fonksiyonlarımız $\mathcal{C}(U,Y)$'de yakınsak olmayan bir (f_n) Cauchy dizisi oluşturur. Teorem 1.5.3'te Y bir tam metrik uzaysa $(\mathcal{F}(X,Y), d_X)$ uzayının tam olduğunu, ve (1.5.5)(ii)'de ise, X bir topolojik uzay ve Y tamsa $(\mathcal{C}(X,Y), d_X)$'in tam olduğunu kanıtlamıştık.

Önerme 3.4.6. *(Y,d) bir tam metrik uzaysa, $(\mathcal{C}(U,Y),\rho)$ metrik uzayımız da tamdır.*

Kanıt. $(f_n) \subset \mathcal{C}(U,Y)$ bir Cauchy dizisiyse, her $p \in \mathbb{N}^*$ için $(f_n|K_p)$dizisi $\mathcal{C}(K_p,Y), d_p)$'de bir Cauchy dizisidir. Yukarıda söylenenden, bir $g_p \in \mathcal{C}(K_p,Y)$ fonksiyonu $f_n \overset{K_p}{\Longrightarrow} g_p$ olacak biçimde vardır. Her $p \in \mathbb{N}^*$ için $g|K_p := g_p$ ile U'da bir $g : U \to Y$ fonksiyonu tanımlanır. Elbette g süreklidir ve (3.4.4)(ii) ile $\lim(f_n, g) = 0$. □

Tanım 3.4.7. $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U,Y)$ ailesine, her $(f_n) \subset \mathcal{F}$ dizisinin bir $f \in \mathcal{C}(U,Y)$ fonksiyonuna yakınsayan bir altdizisi varsa $\mathcal{C}(U,Y)$'de **normal**dir denir.

Bu tanım bize dizisel kompaktlık tanımını anımsatır, ancak burada $f \in \mathcal{F}$ olması gerekmez! $\mathcal{F}$'nin normal olmasının, Teorem 5.2.15'ten dolayı $\mathcal{C}(U,Y)$ metrik uzayının bir kompakt $\mathcal{K}$ altkümesine düşmesine, eş anlamlı olarak $\overline{\mathcal{F}}$'nin kompakt olmasına denk olduğunu belirtelim. $Y \subset Y'$ olmak üzere, (Y', d') bir başka metrik uzay, ve $d'|Y$ metriği ise d metriğine denk olsun. Bu durumda $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ ailesi verildiğinde $\mathcal{F}$ ailesinin $\mathcal{C}(X,Y)$'de normal olması ve $\mathcal{C}(X,Y')$ de normal olması ayrı kavramlardır.

$\mathcal{H}(U)$'yu $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$'den kaynaklanan metrikle ele alacağız. $\mathbb{C}$ tam metrik uzay olduğundan, $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$ de tam metrik uzaydır. Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'ni şimdi şöyle de ifade edebiliriz.

Teorem 3.4.8. *$(\mathcal{H}(U),\rho)$ metrik uzayı tamdır ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için*

$$d^n : \mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(U) \ (f \mapsto f^{(n)})$$

dönüşümü süreklidir.

Dolayısıyla, bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ ailesinin normal olması her $(f_n) \subset \mathcal{F}$ dizisinin bir $f \in \mathcal{H}(U)$'ya yakınsayan bir altdizisinin olmasıdır. Montel Teoremi'ni ise şöyle ifade edebiliriz:

Teorem 3.4.9. *$\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ ailesinin $\mathcal{C}(U,\mathbb{C})$'de normal olması için U'da yerel sınırlı olması gerek ve yeterlidir.*

Problemler

Problem 3.4.1. Her $f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}})$ için bir $(p_n) \subset \mathbb{C}[z]$ dizisi $p_n \overset{\overline{\mathbb{D}}}{\Longrightarrow} f$ olacak biçimde var mıdır?

Problem 3.4.2. $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ sürekli ve

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \,|\, \forall f \in \mathcal{F} \ \ \forall z \in \mathbb{D} \ \ |f(z)| \leq |g(z)|\}$$

ise, $\mathcal{F}$ ailesinin normal olduğunu gösteriniz.

Problem 3.4.3. $X \subset \mathbb{C}_\infty$, $(f_n) \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ ve $f : X \to \mathbb{C}$ olsun. (f_n)'nin her altdizisinin, X'te f'ye kompakt düzgün yakınsayan bir altdizisi varsa (f_n) dizisinin kendisi de X'te f'ye kompakt düzgün yakınsaktır.

Problem 3.4.4. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(B)$ ailesinin normal olması için $\mathcal{F}' := \{f' \,|\, f \in \mathcal{F}\}$ ailesinin B'de yerel sınırlı ve en az bir $z_0 \in B$ için $\{f(z_0) \,|\, f \in \mathcal{F}\}$'nin $\mathbb{C}$'de sınırlı olması gerektiğini gösteriniz.

Problem 3.4.5. $(f_n) \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ ve bir $M > 0$ ile her $C \subset \mathbb{D}$ çemberi için

$$\int_C |f(z)||dz| \leq M$$

olsun. (f_n)'nin $\mathbb{D}$'de kompakt düzgün yakınsak altdizisi olduğunu gösteriniz.

3.5 Analitik Genişlemeler

Analitik genişlemelerin, eş anlamlı olmak üzere, holomorf genişlemelerin temel dayanağı Özdeşlik Teoremi'dir. Ana fikir aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 3.5.1. *$\mathbb{C}$'de B_1, B_2 bölgeleri ve bu bölgelerde f_1, f_2 holomorf fonksiyonları verilsinler. Eğer $B_{12} := B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ve $f_1|B_{12} = f_2|B_{12}$ ise, $f|B_i = f_i|B_i$, $i = 1, 2$ koşulunu sağlayan* bir tek *holomorf $f : B_1 \cup B_2 \to \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır.*

Kanıt. Her şeyden önce $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olduğundan, $B := B_1 \cup B_2$ bir bölgedir.

$$f(z) := \begin{cases} f_1(z) & z \in B_1 \\ f_2(z) & z \in B_2 \end{cases}$$

tanımı kusursuzdur. $f \in \mathcal{H}(B)$ olduğu apaçıktır. $g \in \mathcal{F}(B)$ fonksiyonu da $g|B_i = f_i$, $i = 1, 2$ koşulunu sağlıyorsa $f|B_{12} = g|B_{12}$ olacağından, Özdeşlik Teoremi'nden $f = g$ olur. □

Tek olarak belirli olan bu f fonksiyonuna f_1'in $B_1 \cup B_2$'ye **dolaysız genişlemesi** denir. f fonksiyonu elbette f_2'nin de dolaysız genişlemesidir. Teoremin koşullarında $B_1 \cup B_2$ bir bölge iken $B_1 \cap B_2$'nin bir bölge olması gerekmediğini belirtelim.

$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $G = D_r(b) \subset B$ olsun. İki şeyi araştıracağız:

(i) $f|G$ verilmişse herhangi bir $z \in B$ için $f(z)$ nasıl bulunur?

(ii) $f \in \mathcal{H}(B)$'yi biliyorsak f'nin maksimal holomorf genişlemesi, dd. tam büyümüş hali nedir?

İkinci soruyu yanıtlama çabası bizi Riemann yüzeylerine götürecektir.

3.5.1 Gerçel Fonksiyonların Holomorf Genişlemeleri

(1.7.1) alt kısmında gerçel analizden bildiğimiz $\cos x$, $\sin x$ ve $\exp x$ gibi reel analitik fonksiyonları $\mathbb{C}$ düzlemine holomorf olacak biçimde genişlettik. Bu alt kısımda genel olarak bir $I = (a, b)$ aralığında tanımlı $\mathbb{R}$-değerli fonksiyonların, I'yı içeren düzlemdeki bir U açık kümesine holomorf genişlemelerini araştıracağız.

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$ olmak üzere, $I = (a, b)$ olsun. $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve $I \subset U$ olsun. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $F \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonuna $F|I = f$ ise f fonksiyonunun U açık kümesine bir **analitik genişlemesi** (veya **holomorf genişleme**si) denir.

Teorem 3.5.2. *$f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonun U_1, U_2 açık kümelerine F_1, F_2 holomorf genişlemeleri verilsin. Bir B bölgesi için $I \subset B \subset U_1 \cap U_2$ ise, $F_1|B = F_2|B$.*

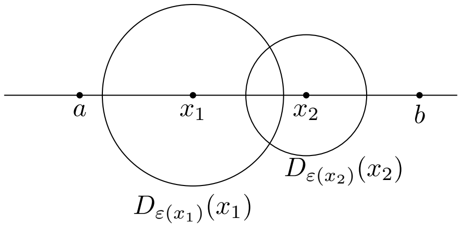
Kanıt. Özdeşlik Teoremi. □

Bu teorem bir teklik teoremidir. Özetle f fonksiyonunun I aralığını içeren bir B bölgesine bir holomorf genişlemesi varsa bu genişlemenin tek olarak belirli olduğunu söyler. Varlığı araştıracağız. Şimdilik şunu belirtelim ki, I, U_1 ve U_2 teoremdeki gibi verilmişlerse $I \subset B \subset U_1 \cap U_2$ koşulunu sağlayan bir B bölgesi daima vardır; örneğin B olarak $U_1 \cap U_2$ açık kümesinin I bağlantılı kümesini içeren bağlantılı bileşenini alabiliriz. Soru şimdi varlık sorusudur: Hangi f fonksiyonları bu şekilde holomorf genişler? Önce varlık için bir yeterli koşul vereceğiz.

Teorem 3.5.3. *Her $x \in I$ noktasının $\mathbb{C}$'de bir U_x komşuluğu ve orada holomorf bir $F_x \in \mathcal{H}(U_x)$ fonksiyonu $F_x|U_x \cap I = f|U_x \cap I$ olacak biçimde varsa f fonksiyonunun I'yı içeren bir U açık kümesine bir holomorf genişlemesi vardır. Özetle f yerel holomorf genişlerse holomorf genişler.*

Kanıt. Her $x \in I$ için $\varepsilon_x > 0$ sayısını $D_{\varepsilon_x}(x)$ daireleri U_x'de olacak biçimde seçebiliriz. Elbette $F_x|D_{\varepsilon_x}(x) \cap I = f|D_{\varepsilon_x}(x) \cap I$. Eğer $x_1, x_2 \in I$ ve

$$B_{12} := D_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \cap D_{\varepsilon_{x_2}}(x_2) \neq \emptyset$$



Şekil 3.2: Yerel genişleme.

ise, F_{x_1} ve F_{x_2} holomorf fonksiyonları B_{12} bölgesine düşen $I_{12} := B_{12} \cap I$ açık aralığında çakıştıkları için $F_{x_1}|B_{12} = F_{x_2}|B_{12}$ olur ve $z \in U := \bigcup_{x \in I} D_{\varepsilon_x}(x)$ için

$$F(z) := F_x(z), \ z \in D_{\varepsilon_x}(x)$$

tanımı kusursuzdur ve f'nin U'ya holomorf genişlemesidir. □

$F : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun holomorf genişlemesiyse, her $x \in I$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için $F^{(n)}(x)$ kompleks türevi vardır. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f^{(n)}(x)$ reel türevleri vardır ve $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$. Böylece f'nin holomorf genişleyebilmesi için her mertebeden türevlenebilir olması gerekir. Ancak bu gerekli koşul yeterli değildir! Holomorf fonksiyonların Taylor serileri daima fonksiyonumuza yakınsarken gerçel analizde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından fonksiyonlar için bu doğru değildir. Örneğin

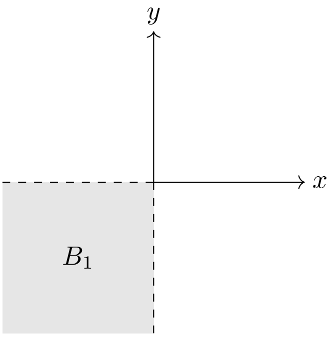
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}$'de her mertebeden türevlenebilir, ancak $x = 0$ noktasında bir kuvvet serisine açılamaz. I açık aralığı 0 noktasını içeriyorsa I'yı içeren bir B bölgesine holomorf genişleyemez; çünkü $f \neq 0$ iken Özdeşlik Teoremi'nden, B'deki bir F holomorf genişlemesinin $F = 0$ olması gerekir.

Teorem 3.5.4. *$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun holomorf genişleyebilmesi için gerek ve yeter koşul* ***reel analitik*** *olmasıdır, dd. her $x_0 \in I$ noktası için $r = r(x_0)$ olmak üzere, bir $I_r(x_0) \subset I$ aralığında bir $\sum c_n(x - x_0)^n$, $(c_n \in \mathbb{R})$ kuvvet serisine açılabilmesidir.*

Kanıt. (1) f fonksiyonu I'yı içeren U açık kümesine holomorf genişlesin. Her $x_0 \in I$ için F fonksiyonu bir $D_r(x_0) \subset U$ dairesinde bir

$$F(z) = \sum \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n$$



Şekil 3.3: Logaritma genişlemeleri.

kuvvet serisine açılabilir. Gerektiğinde r küçültülerek $I \cap D_r(x_0) = I_r(x_0)$ sağlanır ve her $x \in I_r(x_0)$ için

$$f(x) = F(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

açılımına ulaşırız. f fonksiyonu I'da reel analitiktir.

(2) f fonksiyonu reel analitikse her x_0 için bir $I_r(x_0)$'da

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

gibi bir seriye açılabilir. O zaman f fonksiyonu $D_r(x_0)$ dairesine

$$F(z) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(z - x_0)^n$$

F olarak holomorf genişler. Böylece f fonksiyonumuz yerel holomorf genişleyebildiği için (3.5.3) ile I'yı içeren bir U açık kümesine holomorf genişler. $\square$

$e^x, \cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının 0 noktasındaki seriye açılımlarının yakınsaklık yarıçapları $+\infty$ olduğundan, (1.7.1) ile verilen ve $\mathbb{C}$'de geçerli olan $e^z, \cos z$ ve $\sin z$ holomorf genişlemeleri yalnızca olanaklardan biri değil yegâne holomorf genişlemelerdir.

$\ln x$ fonksiyonu $I = (0, +\infty)$ aralığında reel analitiktir. Teorem 1.7.9'da, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $0 \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$ ise, $\ln x$ fonksiyonunun $\mathbb{C}_\alpha$ bölgesine

$$\log_\alpha z = \ln |z| + i\varphi, \ z = |z|\, e^{i\varphi}, \ \alpha < \varphi < \alpha + 2\pi$$

holomorf olarak genişlediğini gördük. Burada ileride de karşılaşacağımız bir durumun altını çizmekte yarar var.

Örneğin sırasıyla α olarak $-\pi$ ve $-\frac{\pi}{2}$ seçersek, $\ln x$ fonksiyonumuzun $\mathbb{C}_{-\pi}$ ve $\mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$ bölgelerine $\log_{-\pi} z$ ve $\log_{-\frac{\pi}{2}} z$ holomorf genişlemeleri vardır. Bu iki bölgenin arakesiti iki ayrık bölgenin birleşimidir:

$$B_1 := \left\{z = re^{i\varphi} \mid r \neq 0,\ -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}\right\} \text{ ve}$$
$$B_2 := \left\{z = re^{i\varphi} \mid r \neq 0,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right\}$$

bölgelerinin. B_2 Şekil 3.3'teki beyaz bölgedir. Bu bölgelerden B_2 bölgesi I aralığını içerir ve bu nedenle, olması gerektiği gibi, her $z \in B_2$ için $\log_{-\pi} z = \log_{-\frac{\pi}{2}} z$. Buna karşın örneğin $z = e^{-\frac{3\pi}{4}} \in B_1$ için

$$\log_{-\pi} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -i\frac{3\pi}{4} \neq i\frac{5\pi}{4} = \log_{-\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

ve $\log_{-\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} - \log_{-\pi} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\pi i$. Bu özellik elbette her $z \in B_1$ için geçerlidir, dd. B_1'de $\log_{-\frac{\pi}{2}} z - \log_{-\pi} z = 2\pi i$. Dolayısıyla, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_{-\pi} \cup \mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$'de

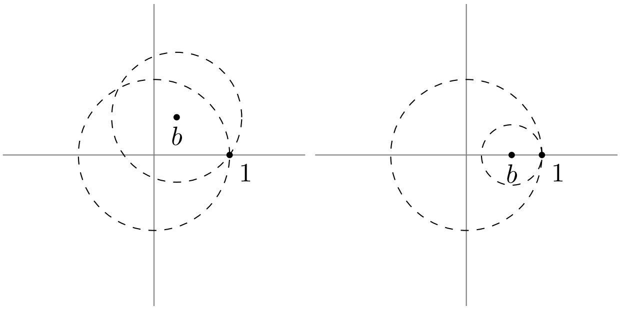
$$\mathbf{f}(z) := \begin{cases} \log_{-\pi} z, & z \in \mathbb{C}_{-\pi} \\ \log_{-\frac{\pi}{2}} z, & z \in \mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mathbf{f}$ her ne kadar $\mathbb{C}^* \setminus B_1$'de tek değerliyse de, her $z \in B_1$'de iki değerlidir; her $z \in B_1$ için $\mathbf{f}(z) = \left\{\log_{-\pi} z, \log_{-\frac{\pi}{2}} z\right\}$. $\log_{-\frac{\pi}{2}} z = \log_{-\pi} z + 2\pi i$ olduğunu anımsatalım ve genelde titiz davranılmayıp $\mathbf{f}$ yerine f yazıp kısaca "f fonksiyonu $f|\mathbb{C}_{-\pi} := \log_{-\pi}$ ve $f|\mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}} := \log_{-\frac{\pi}{2}}$ olsun" denir ve ardından f'nin aslında B_1'de çok değerli olduğu belirtilir.

3.5.2 Kuvvet Serilerinin Analitik Genişlemeleri

$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f \in \mathcal{H}(B)$ ise, f fonksiyonumuzun B bölgesinde bir yığılma noktası olan bir $A \subset B$ kümesindeki değerlerinin fonksiyonumuzu B bölgesinde tek olarak belirlediğini biliyoruz. Baştan yalnızca $f|A$ verildiğinde f'nin $B \setminus A$'daki değerleri nasıl bulunur? Bu soruya A kümesinin boştan farklı bir açık küme olması durumunda bir yanıt arayacağız ve B'yi içeren daha geniş *bölgelere* analitik genişletilip genişletilemeyeceğini de araştıracağız. $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $B \cap U = \emptyset$ ise, f fonksiyonu $B \cup U$'ya sonsuz değişik biçimde holomorf genişletilebilir ve böyle bir durumu tartışmanın hiçbir anlamı yoktur. Anlamlı olan f'yi B bölgesini içeren B^* bölgelerine genişletme problemidir.

$f \in \mathcal{H}(B)$ ve $a \in B$ ise, bu fonksiyon a noktasında bir $\sum a_n(z-a)^n$ kuvvet serisine açılabilir. Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını r_a ile gösterirsek, $r_a \geq d(a, \partial B)$ olduğunu biliyoruz ve $r_a > d(a, \partial B)$ olabilir. $b \in D_{r_a}(a)$ seçildiğinde f fonksiyonu b noktasında yakınsaklık yarıçapı r_b olan bir $\sum b_n(z-b)^n$



Şekil 3.4: $f(z)=\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$, $r=1$.

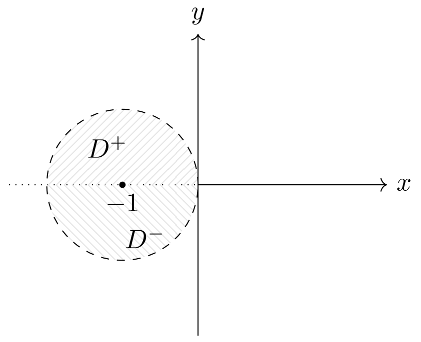
kuvvet serisine açılabilir. $\sum b_n(z-b)^n$ kuvvet serisine $\sum a_n(z-a)^n$ kuvvet serisinin bir **dönüştürülmüşü** diyelim. Biz $b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)$ olduğunu biliyoruz. Diğer yandan, $r_b \geq r_a - |b-a|$ ve $r_b > r_a - |b-a|$ olabilir (bkz. Şekil 3.4, sol şekil).

Bir B bölgesi ve orada holomorf bir f fonksiyonundan değil de doğrudan yakınsaklık yarıçapı r, $0 < r < +\infty$ olan bir $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ kuvvet serisinden yola çıkalım. Örneğin $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ kuvvet serisini alalım. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı 1, dolayısıyla yakınsaklık dairesi $\mathbb{D}$ birim dairesi ve tanımladığı fonksiyon ise $\mathbb{C}\backslash\{1\}$'de holomorf olan $f(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonudur. Bu basit örnek öğreticidir. Bir $b \in \mathbb{D}$ noktası için f'nin b noktasındaki kuvvet serisi $\mathbb{C}\backslash\{1\}$'e düşen en büyük $D_r(b)$'de yakınsak olduğundan, bazı b noktaları için bu yarıçap $> 1-|b|$ iken bazıları için bu yarıçap $= 1-|b|$ olmak zorundadır (bkz. Şekil 3.4, sağ şekil). $c \in \partial\mathbb{D}\backslash\{1\}$ ise, bir $D_{r_c}(c)$ dairesi ve orada holomorf bir g_c fonksiyonu $f|\mathbb{D}\cap D_{r_c}(c) = g_c|\mathbb{D}\cap D_{r_c}(c)$ olacak biçimde bulunabilir; örneğimizde $D_{r_c}(c) \subset \mathbb{C}\backslash\{1\}$ seçildiğinde $g_c(z) = \frac{1}{1-z}$ alabiliriz. Ancak $c=1$ için böyle bir g_c fonksiyonu bulamayız. Aksi durumda bir $D_{r_1}(1)$'de holomorf bir g_1 ile $g_1(1) \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $g_1(1) = \lim_{z\to 1} g_1(z) = \lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{1-z} = \infty$ olurdu! Son gözlem bizi aşağıdaki tanıma götürür:

Tanım 3.5.5. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $a \in \partial B$ olsun. a noktasının bir U açık komşuluğu, $U \cap B$'nin *her* G bağlantılı bileşenine karşılık bir $g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonu $g|G = f|G$ olacak biçimde bulunabiliyorsa a noktası f'nin bir **düzgün noktası**dır denir. Sınırın f'nin düzgün olmayan noktalarına ise f'nin **tekil noktaları** denir.

Özel olarak $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in G$, $B := G\backslash\{a\}$ ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olsun. a'nın f'nin bir düzgün noktası olması Kısım 3.8'de verilen tanıma göre a noktasının f fonksiyonunun bir kaldırılabilir tekil noktası olması demektir. Özetle düzgün noktalardaki ve kaldırılabilir noktalardaki tekillik yapaydır.

Bu tanıma yoğunlaşmakta yarar var. Her şeyden önce a noktasının U komşuluğunu bir bölge olarak seçsek bile $U \cap B$'nin bir bölge olması gerekmez



Şekil 3.5: Düzgün sınır noktası.

(bkz. Şekil 3.5). Örneğin $B = \mathbb{C}_{-\pi}$, $f(z) = \operatorname{Log} z$, $a = -1$ ve $U = D_1(-1)$ seçelim. Elbette $-1 \in \partial B = \partial \mathbb{C}_{-\pi}$. Bu durumda $U \cap B$'nin iki bağlantılı bileşeni vardır. Bunlar biri üst yarıdüzlemde olan D^+, diğeri alt yarıdüzlemde olan D^- yarıdaireleridir. $g := \log_{\frac{\pi}{2}}$ ve $h := \log_{-\frac{\pi}{2}}$ alırsak, bunların her ikisi de $\mathbb{C}^-$ sol yarıdüzleminde holomorf olduklarından, özellikle $g|U, h|U \in \mathcal{H}(U)$ olur. Ayrıca, $g|D^+ = \operatorname{Log}|D^+$ ve $h|D^- = \operatorname{Log}|D^-$ olduğundan, -1 noktası Log fonksiyonunun bir düzgün noktasıdır. Buna karşın $g|U \cap B \neq \operatorname{Log}|U \cap B$ ve $h|U \cap B \neq \operatorname{Log}|U \cap B$ sağlanır! Dolayısıyla, bu g, h fonksiyonları bize Log fonksiyonunun $B \cup U$'ya, dd. $\mathbb{C}_{-\pi} \cup D_1(-1)$'e dolaysız analitik genişlemelerini vermezler! $\partial \mathbb{C}_{-\pi} = (-\infty, 0]$ ve okur her $a \in (-\infty, 0)$ noktasının Log fonksiyonunun bir düzgün noktası olduğunu benzer biçimde görür. Buna karşın $\lim_{z\to 0} |\operatorname{Log} z| = +\infty$ olduğundan, $z = 0$ bu fonksiyon için bir tekil noktadır.

B bölgesi eğer bir açık daire ise, bu tanım yalın bir hal alır. O zaman a noktasının f için düzgün olması bir $D_r(a)$ dairesi ve bir $g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ fonksiyonunun $g|B \cap D_r(a) = f|B \cap D_r(a)$ olacak biçimde bulunması demektir; burada işimizi kolaylaştıran $B \cap D_r(a)$'nın bir bölge olmasıdır.

Önerme 3.5.6. *$f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ ise, f'nin $\partial D_R(z_0) = C_R(z_0)$'da en az bir tekil noktası vardır.*

Kanıt. Tersini varsayalım. Her $a \in C_R(z_0)$ noktası f'nin bir düzgün noktası olsun. O zaman her $a \in C_R(z_0)$ için bir $D_{r_a}(a)$ dairesi ve orada holomorf bir f_a fonksiyonu $f|D_R(z_0) \cap D_{r_a}(a) = f_a|D_R(z_0) \cap D_{r_a}(a)$ olacak biçimde vardır. Bu dairelerin sonlu tanesi, diyelim ki $D_{r_{a_1}}(a_1), \ldots, D_{r_{a_n}}(a_n)$ daireleri $C_R(z_0)$ sınırını örter. Bu sonlu dairelerin ve $D_R(z_0)$ dairesinin birleşimine U diyelim. U bir açık küme, daha doğrusu bir bölgedir.

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & z \in D_R(z_0) \\ f_{a_i}(z) & z \in D_{r_{a_i}}(a_i),\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

ile verilen tanımın kusursuz olduğunu (3.5.1) ile görmeyi okura bırakıyoruz. Elbette $F \in \mathcal{H}(U)$. Şimdi $C_R(z_0)$ kompakt kümesi U açık kümesine düştüğünden, $\rho := d(C_R(z_0), \partial U)$ bir pozitif sayıdır. $D_{R+\rho}(z_0) \subset U$ olduğundan, F fonksiyonu bu dairede bir kuvvet serisine açılabilir ve bu seri $\sum a_n(z-z_0)^n$ serisinden başkası değildir. Bu serinin yakınsaklık yarıçapının R olduğundan yola çıktık, az önce ise bu yarıçapın $\geq R+\rho > R$ olduğunu gördük. Çelişki ve varsayım yanlış! □

Önerme 3.5.7. *$f(z) = \sum a_n z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $0 < R < +\infty$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0$ ise, R noktası f'nin bir tekil noktasıdır.*

Kanıt. Tersini varsayalım. R noktası f'nin bir düzgün noktası olsun. Bu durumda f'nin $R/2$ noktasındaki

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)\left(z - \frac{R}{2}\right)^n$$

seri açılımının R' yakınsaklık yarıçapı için $R' > \frac{R}{2}$ olur. $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ serisi de $D_R(0)$'da mutlak yakınsak olduğu için

$$\left|f'\left(\frac{R}{2}e^{i\alpha}\right)\right| \leq \sum_{n\geq 1}\left|na_n\left(\frac{R}{2}\right)^{n-1}e^{in\alpha}\right| = \sum_{n\geq 1} na_n\left(\frac{R}{2}\right)^{n-1} = f'\left(\frac{R}{2}\right)$$

olur ve tümevarımla kolayca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|f^{(n)}\left(\frac{R}{2}e^{i\alpha}\right)\right| \leq f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)$$

olduğu kolayca görülür. Bu nedenle, f'nin $\frac{R}{2}e^{i\alpha}$'daki

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{R}{2}e^{i\alpha}\right)\left(z - \frac{R}{2}e^{i\alpha}\right)^n$$

Taylor açılımının yakınsaklık yarıçapı da en az R''dür. Dolayısıyla, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $Re^{i\alpha} \in C_R(0)$ noktası, yani $C_R(0)$'ın her noktası f'nin bir düzgün noktasıdır. Bu, Önerme 3.5.6 ile çelişir. □

$C_R(z_0)$ sınırının her noktasının f'nin bir düzgün noktası olamayacağını gördük. Sıradaki soru şu: Sınırın her noktası f'nin bir tekil noktası olabilir mi? Yanıtımız evet; bir örnek verelim:

Örnek 3.5.8. $f(z) = \sum_{n\geq 1} z^{n!}$ olsun. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $R = 1$'dir. Dolayısıyla, Önerme 3.5.7'den, $z = 1$ noktası f'nin bir tekil noktasıdır. Birim çember üzerindeki $e^{2\pi\mathbb{Q}i}$

kümesinin her noktasının f fonksiyonunun bir tekil noktası olduğunu göstereceğiz. $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ ve $r := p/q$ olsun. $w := z^q$ ve $n \geq q$ için $n_q := \frac{n!}{q} \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} z^{n!} = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n\geq q} z^{n!} = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n\geq q} w^{n_q}$$

olur. En sağdaki iki toplamın ilki bir polinom ve sorunsuzdur; ikincisinin ise, Önerme 3.5.7'den dolayı, $w = 1$ noktası bir tekil noktasıdır. Özellikle $\left(e^{2\pi ri}\right)^q = e^{2\pi pi} = 1$ olduğundan, $e^{2\pi ri}$ noktası f'nin bir tekil noktasıdır. $e^{2\pi \mathbb{Q} i}$ kümesi $C_1(0)$ sınırının bir yoğun altkümesi olduğundan, okur $C_1(0)$ sınırının her noktasının f'nin bir tekil noktası olduğunu kolayca görür. Şimdi bu gerçeği (3.5.7) önermesine başvurmadan doğrudan görelim:

$0 \leq \alpha < 2\pi$ ve $0 \leq \rho < 1$ olsun. $r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $\alpha = r2\pi$ ise $\lim_{\rho\to 1} |f(\rho e^{i\alpha})| = +\infty$ olduğunu kanıtlarsak işimiz biter(*); önce bunu görelim: $a \in C_1(0)$ noktası f'nin bir düzgün noktasıysa, f fonksiyonu bir $D_\sigma(a)$ dairesine bir g ile holomorf genişletilebilir. $D_\sigma(a)$ dairesi $C_1(0)$ çemberinin bir γ yay parçasını içerir. Diğer yandan, $e^{i2\pi\mathbb{Q}}$ kümesi $C_1(0)$ çemberinde yoğundur ve bu kümenin γ'ya düşen noktaları vardır. $b = e^{i\alpha}$ böyle bir nokta ise, $+\infty = \lim_{\rho\to 1} |f(\rho e^{i\alpha})| = |g(a)| < +\infty$ olur ki, bu bir çelişkidir.

Şimdi (*) borcumuzu ödeyelim:

$$z_\rho := \rho e^{i2\pi\frac{p}{q}}, \quad 0 \leq \rho < 1; \quad p, q \in \mathbb{Z} \text{ ve } q > 0$$

olsun. $n \geq q$ için $n! \cdot \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ olduğundan,

$$f(z_\rho) = \sum_{n\geq 1} \rho^{n!} e^{n!\frac{p}{q}\cdot 2\pi i} = \sum_{n=1}^{q-1} \rho^{n!} e^{n!\frac{p}{q}\cdot 2\pi i} + \sum_{n\geq q} \rho^{n!}.$$

Son iki toplamdan ilki mutlak değerce daima q'dan küçükken her $q < m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n\geq q} \rho^{n!} > \sum_{q\leq n\leq m} \rho^{n!} > (m-n)\rho^{m!}$$

olduğundan, ikinci toplam $\rho \to 1$ için $+\infty$'a gider. Böylece $\lim_{\rho\to 1} |f(z_\rho)| = +\infty$.

Örneğimizde $\partial\mathbb{D}$ sınırı $f(z) = \sum_{n\geq 1} z^{n!}$ fonksiyonunun **doğal sınırı**dır denir. Hiçbir $a \in \partial\mathbb{D}$ için bir $D_r(a)$ dairesi ve orada holomorf bir g fonksiyonu $\mathbb{D} \cap D_r(a)$'da $f = g$ olacak biçimde bulunamaz! İleride KA II'de her $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesine karşılık ∂U'yu doğal sınır kabul eden bir $f \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonun varlığını kanıtlayacağız[3].

Not 3.5.9. İki ilginç teoremden söz edelim: $P(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ gibi bir kuvvet serisinin r yakınsaklık yarıçapı için $0 < r < +\infty$ olsun. Bu durumda sonsuz tane n için $a_n \neq 0$ olur; aksi halde önümüzde bir polinom vardır ve o zamanda $r = +\infty$ olur. Her $\sigma : \mathbb{N} \to \{1, -1\}$ için $P_\sigma(z) := \sum_{n\geq 0} \sigma(n) a_n (z-a)^n$ olsun. $|\sigma(n)a_n| = |a_n|$ olduğundan, her bir P_σ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı da r'dir. Elimizde sayılamaz çoklukta, tam olarak $\mathfrak{c} = 2^\omega$ kadar P_σ kuvvet serimiz vardır. Fatou, *uygun seçilen σ'lar için $C_r(a)$'nın P_σ'nın doğal sınırı* olduğunu kanıtlamıştır. Pólya ise *rastgele seçilen σ için $C_r(a)$'nın P_σ'nın doğal sınırı olma olasılığının 1 olduğunu* kanıtlamıştır (bkz. [18]).

Son olarak iki noktayı vurgulayalım:

[3] $n \geq 2$ için $\mathbb{C}^n$'de bambaşka bir durumla karşılaşırız: Orada B, B^* bölgeleri $B \subsetneq B^*$ve her $f \in \mathcal{H}B)$ bir $f^* \in \mathcal{H}(B^*)$'a holomorf genişleyecek biçimde vardır.

(1) Tekil noktaların ayrık olmaları gerekmez (bkz. Örnek 3.5.8)! Bir tekil nokta başka tekil noktaların bir yığılma noktası olabilir. Ayrık tekil noktalar özel tekil noktalardır; onları ileride ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

(2) $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı r ve $0 < r < +\infty$ olsun. f'nin $C_r(a)$'da en az bir b tekil noktası vardır. Ancak $z \in D_r(a)$ olmak üzere, $\lim_{z\to b} |f(z)| = +\infty$ olması gerekmez! Örneğin $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Ayrıca, bu seri, $\left\|\frac{z^n}{n^2}\right\|_{\overline{\mathbb{D}}} \leq \frac{1}{n^2}$ olduğundan, $\overline{\mathbb{D}}$'de düzgün yakınsaktır, dolayısıyla f fonksiyonu bu kapalı dairede süreklidir. Bu nedenle, $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $\lim_{z\to b} |f(z)|$ daima var ve sonludur! Ancak biz f fonksiyonunun $\partial\mathbb{D}$'de en az bir tekil noktası olduğunu biliyoruz. Önerme 3.5.7'den dolayı, $z = 1$ noktası f'nin bir tekil noktasıdır.

Yakınsaklık dairesi $D_r(a)$ olan bir kuvvet kuvvet serisinin tanımladığı bir f fonksiyonu $\overline{D}_r(a)$'da sürekli iken $\partial\overline{D}_r(a)$'nın her noktasında bir tekil noktası olabilir (bkz. Problem 3.5.6).

3.5.3 Geziler Boyunca Analitik Genişleme

$i = 1, 2$ için $B_i \subset \mathbb{C}$ bölgeleri ve $f_i \in \mathcal{H}(B_i)$ verilsin. $B_1 \cap B_2 \neq 0$ ve $f_1|B_1 \cap B_2 = f_2|B_1 \cap B_2$ ise, f_2 fonksiyonu f_1'in **dolaysız analitik genişlemesi**dir denir; bu durumu

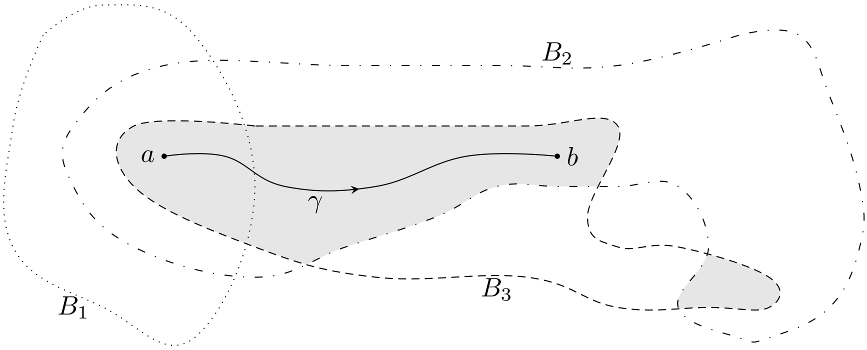
$$(f_1, B_1) \overset{d}{\sim} (f_2, B_2)$$

ile gösterelim.

Şimdi bize bir B_1 bölgesi, orada holomorf bir f_1 holomorf fonksiyonu verilsin ve $a \in B_1$ olsun. γ ise başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan bir gezi olsun. $\underline{\gamma} \subset B_1$ olması gerekmez! $B_2 \subset \mathbb{C}$ bir başka bölge ve $\underline{\gamma} \subset B_2$ olsun. Bir $f_2 \in \mathcal{H}(B_2)$ fonksiyonu verilsin ve $f_1|B_1 \cap B_2 = f_2|B_1 \cap B_2$ olsun. $f|B_i := f_i|B_i$ olarak tanımlanan $f \in \mathcal{H}(B_1 \cup B_2)$ fonksiyonuna f_1 fonksiyonunun γ **boyunca bir analitik genişlemesi** denir. $B_3 \subset \mathbb{C}$ bir başka bölge, $\underline{\gamma} \subset B_3$, $f_3 \in \mathcal{H}(B_3)$ ve $f_1|B_1 \cap B_3 = f_3|B_1 \cap B_3$ olsun. Bu durumda $h|B_i := f_i|B_i$, $i = 1, 3$ ile tanımlanan h fonksiyonu da f_1 fonksiyonunun γ boyunca bir analitik genişlemesidir. $B_{23} := B_2 \cap B_3$ açık kümesi $\underline{\gamma}$'yı içerir. Diğer yandan, $B_{123} := B_1 \cap B_{23} \neq \emptyset$ açık kümesinde $f|B_{123} = h|B_{123}$ olduğundan, Özdeşlik Teoremi'nden B_{23} açık kümesinin a noktasını, dolayısıyla $\underline{\gamma}$ izini içeren bağlantılı bileşeninde $f = h$ olur (Şekil 3.6'da gösterildiği gibi koyu renkli B_{23}'ün bir bölge olması gerekmez!). Bu bize aşağıdaki önermeyi verir:

Önerme 3.5.10. *g ve h fonksiyonları f'nin γ boyunca iki analitik genişlemesi ve γ'nın bitiş noktası b ise, bir $D_r(b)$ dairesinde $g = h$ olur.*

Örnek 3.5.11. B bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $a \in B$ olsun. γ ve λ ise başlangıç noktaları a ve bitiş noktaları b ($b \notin B$ olabilir!) olan iki gezi olsunlar. f'nin γ boyunca analitik genişlemeleri b'nin



Şekil 3.6: γ boyunca analitik genişleme.

bir komşuluğunda birbirine eşitken, aynı şeyi farklı geziler boyunca analitik genişlemeleri için söyleyemeyiz.

Örneğin $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \pi$ ve $\lambda(t) = e^{-it}$, $0 \le t \le \pi$ olmak üzere, $B := \mathbb{C}^+$ ve $z \in B$ için $f(z) := \operatorname{Log} z$ olsun. f'nin γ boyunca bir g analitik genişlemesi için, $0 < r < 1$ olmak üzere, $D_r(-1)$'de

$$g(z) = \ln|z| + i\varphi,\ \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha,\ \varphi \in \mathbf{arg}\, z$$

iken λ boyunca bir h analitik genişlemesi için $D_r(-1)$'de

$$h(z) = \ln|z| + i\psi,\ -\pi - \alpha < \psi < -\pi + \alpha,\ \psi \in \mathbf{arg}\, z$$

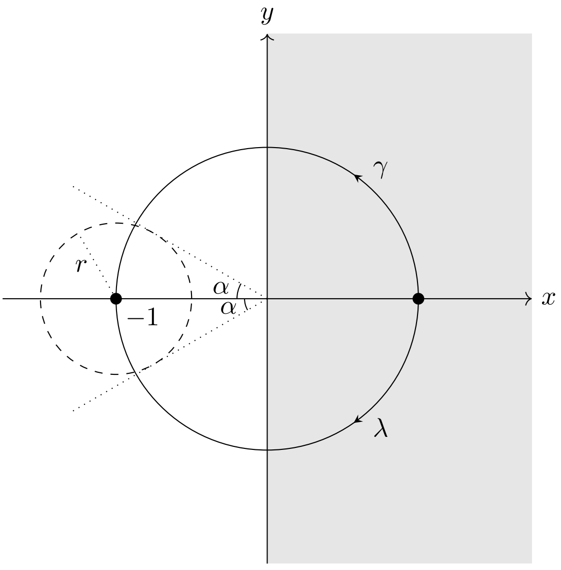
olur. Özellikle $g(-1) = i\pi \neq -i\pi = h(-1)$ olur. κ_1 pozitif yönlenmiş birim çember olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\gamma_n := \kappa_1^n \gamma$ ve $\lambda_n := \kappa_1^{-n}\lambda$ olmak üzere, f fonksiyonunun γ_n ve λ_n gezileri boyunca analitik g_n ve h_n genişlemeleri vardır ve bunlar için $D_1(-1)$'de açıkça

$$g_n(z) = g(z) + i2\pi n \text{ ve } h_n(z) = h(z) - i2\pi n$$

geçerlidir. Okur kolayca $\operatorname{Log} z$ fonksiyonunun, izi $\mathbb{C}^*$'de olan her gezi boyunca analitik genişletilebileceğini görür.

B bir bölge, $a \in B$ ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olsun. γ_0 ve γ_1 gezilerinin başlangıç noktaları a ve bitiş noktaları b olsun. $\{\gamma_s\}_{0 \le s \le 1}$ gezi ailesi γ_0 gezisini B'de γ_1 gezisine evirsin. Eğer f fonksiyonu her γ_s boyunca analitik genişlerse, birbirine yeterince yakın genişlemeler b'nin bir komşuluğunda örtüşeceğinden, sonuçta γ_0 ve γ_1 boyunca olan genişlemelerin b'nin bir komşuluğunda örtüşeceği —düzgün süreklilik ve kompaktlık argümanlarıyla— ortaya çıkar. Yukarıdaki örnekte γ ve λ boyunca analitik genişlemelerin $D_1(-1)$'de neden örtüşmediklerine odaklandığımızda ilk göze çarpan başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan bu iki gezinin $\mathbb{C}^*$'da ($z = 0$'da $\log z$ tanımlı değildir!) birbirlerine evrilebilir olmadıklarıdır. Aşağıda kanıtlayacağımız teorem sorunun kaynağının bu olduğunu ve yukarıdaki irdelemelerin doğruluğunu savunur.

Teorem 3.5.12 (Monodromi Teoremi)**.** *B bir bölge, $a \in B$ ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olsun. γ_0 ve γ_1 gezilerinin başlangıç noktaları a ve bitiş noktaları b olsun ($b \in B$ olması*



Şekil 3.7: $\operatorname{Log} z$'nin farklı geziler boyunca analitik genişlemeleri.

gerekmez). $H : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ evirmesi ise uç noktaları koruyarak γ_0 gezisini γ_1 gezisine evirsin. f fonksiyonu her bir γ_s boyunca analitik genişlerse γ_0 ve γ_1 boyunca genişlemeleri b'nin bir komşuluğunda örtüşür.

Kanıt. $I = [0,1]$ olmak üzere, her $(t,s) \in I^2$ için $\gamma_s(t) = H(t,s)$ olsun. Varsayımdan dolayı, her $s \in I$ için bir B_s bölgesi, bu bölgede holomorf bir f_s fonksiyonu

$$f|B \cap B_s = f_s|B \cap B_s \text{ ve } \underline{\gamma_s} \subset B_s$$

olacak biçimde vardır. $\underline{\gamma_s}$ izi B_s bölgesinin bir kompakt altkümesi olduğundan, bu kümenin ∂B_s'ye uzaklığı olan $r_s := d(\underline{\gamma_s}, \partial B_s) > 0$ pozitiftir. $H : I^2 \to \mathbb{C}$ düzgün sürekli olduğundan, r_s pozitif sayısına karşılık bir $\delta_s > 0$ sayısı

$$\forall t, s, s' \in I \quad \big(|s - s'| < \delta_s \Longrightarrow |H(t,s) - H(t,s')| < r_s\big)$$

olacak biçimde bulunabilir. Dolayısıyla,

$$\forall s' \;\; (|s - s'| < \delta_s \Longrightarrow \underline{\gamma_{s'}} \subset B_s). \tag{3.17}$$

$\mathcal{A} = \{I_{\delta_s}(s)\}$ açık aralıklar ailesi I kompakt kümesinin bir açık örtüsüdür. Böylece, bunlardan sonlu tanesi I'yı örter; bunların merkezlerini küçükten büyüğe, varsa fazlalıkları atarak, $s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_m$ olarak sıralayalım. Kısaca $I_\mu := I_{\delta_{s_\mu}}(s_\mu)$ dersek, böylece $\mu = 1, \ldots, m$ için $I_{\mu-1} \cap I_\mu \neq \emptyset$ sağlanır. Her bir $\mu \in \{1, \ldots, m\}$ için bir $s'_\mu \in I_{\mu-1} \cap I_\mu$ ögesini seçelim. Bu durumda (3.17)'den dolayı

$$\text{her } \mu = 1, \ldots, m \text{ için } \underline{\gamma_{s'_\mu}} \subset B_{s_{\mu-1}} \cap B_{s_\mu} \tag{3.18}$$

olur. Ayrıca, $0 \in I_0$ ve $1 \in I_m$ olduğu için $\gamma_0 \subset B_0$ ve $\gamma_1 \subset B_m$. Dolayısıyla, f_{s_0} fonksiyonu da f'nin γ_0 boyunca bir analitik genişlemesidir ve Önerme 3.5.10'dan dolayı, b noktasının bir $U_0(b)$ komşuluğunda f_0 ve f_{s_0} fonksiyonları çakışır. (3.18)'den ötürü f_{s_0} fonksiyonuna f'nin $\gamma_{s_1'}$ boyunca analitik genişlemesi olarak bakabiliriz. Böylece, b noktasının bir $U_1'(b) \subset U_0(b)$ komşuluğunda f_{s_0}, $f_{s_1'}$ fonksiyonları çakışır. Yine Önerme 3.5.10'dan bir $U_1(b) \subset U_1'(b)$ komşuluğunda $f_{s_1'}$, f_{s_1} fonksiyonları çakışır. Böyle devam ederek sonlu adımda, tüm $U_1(b), \ldots, U_m(b)$ ve $U_1'(b), \ldots, U_m'(b)$ komşuluklarının içine düşen bir $U(b)$ komşuluğu $f_{s_m}|U(b) = f_1|U(b)$ ve dolayısıyla $f_0|U(b) = f_1|U(b)$ olacak biçimde bulunur. □

Önerme 3.5.13. *$G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $a \in G$, $f \in \mathcal{H}(G)$ ve B ise G'yi içeren basit bağlantılı bir bölge olsun. Eğer f fonksiyonu başlangıç noktası a olan B'deki her gezi boyunca analitik genişleyebiliyorsa, o zaman f fonksiyonu B bölgesine analitik genişler.*

Kanıt. $z \in B$ keyfi verildiğinde, B bir bölge olduğundan, B'de a noktasını z noktasına bağlayan bir γ_z gezisi vardır. $f_{\gamma,z}$ holomorf fonksiyonu f'nin γ_z boyunca bir analitik genişlemesi olsun. Bu durumda

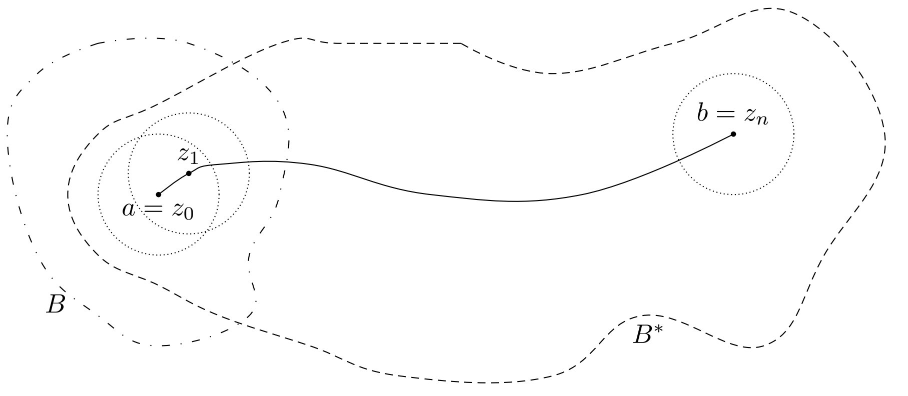
$$F(z) := f_{\gamma,z}(z)$$

tanımı kusursuzdur. Gerçekten de η_z gezisi de B'de a noktasını z noktasına bağlıyorsa varsayımdan dolayı, γ_z gezisi B'de η_z gezisine evrilebilir. Yine varsayımdan dolayı, f fonksiyonu B'deki her gezi boyunca analitik genişleyebildiği için Monodromi Teoremi'nden, z noktasının bir komşuluğunda $f_{\gamma,z}$ ve $f_{\eta,z}$ fonksiyonları çakışır; dolayısıyla $f_{\gamma,z}(z) = f_{\eta,z}(z)$.

z noktasının bir $U(z)$ komşuluğunda $f_{\lambda,z}$ holomorf ve $F|U(z) = f_{\lambda,z}|U(z)$ olduğundan, F holomorftur. □

Şimdi B, B^* bölgeleri, $a \in B \cap B^*$ noktası ve $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonu verilsin. γ ise başlangıç noktası a, bitiş noktası $b \in B^*$ ve izi B^*'da olan bir gezi olsun. f fonksiyonu γ boyunca analitik genişlesin. $f^* \in \mathcal{H}(B^*)$ fonksiyonu için $f|B \cap B^* = f^*|B \cap B^*$ olsun. Bize a noktasının istenildiği gibi küçük bir $U(a)$ komşuluğunda f verilmişse, diyelim ki yukarıdaki bilgiler dışında f^* hakkındaki tüm verileri kaybetmişsek, yine de b noktasının yeterince küçük bir $U(b)$ komşuluğunda f^*'ın değerlerini hesaplayabilir miyiz ve nasıl?

B^* bölgesinde γ boyunca bir $D_0(z_0), \ldots, D_n(z_n)$ daireler zinciri seçelim (bkz. (2.4.8)). Burada $a = z_0$, $b = z_n$ ve daima $z_{k-1}, z_k \in D_{k-1}(z_{k-1}) \cap D_k(z_k)$ (Şekil 3.8). Şimdi f fonksiyonu $U(a)$'da verilmiştir ve onu $a = z_0$ noktasında bir $P_0(z) := \sum a_n^{(0)}(z - z_0)^n$ gibi bir kuvvet serisine açabiliriz. a noktasının bir komşuluğunda $f = f^*$ olduğundan, bu kuvvet serisi aynı zamanda f^*'ın da z_0 noktasında seriye açılımıdır ve B^* bölgesine düşen z_0 merkezli en büyük



Şekil 3.8: B, B^*ve γ boyunca daireler zinciri.

dairede yakınsaktır. Özellikle bu seri $D_0(z_0)$ dairesinde mutlak yakınsaktır. Dolayısıyla, $z_1 \in D_0(z_0)$ için terimleri gruplayarak

$$P_0(z) = \sum a_n^{(0)} \left((z - z_1) + (z_1 - z_0)\right)^n = \sum a_n^{(1)} (z - z_1)^n =: P_1(z)$$

elde ederiz. Kuvvet serileri için Özdeşlik Teoremi'nden, $P_1(z)$ serisi f^* fonksiyonunun $D_1(z_1)$'deki seriye açılımıdır. Bu şekilde devam ederek $D_n(z_n)$'de f^*'ın $P_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{(n)} (z - z_n)^k$ gibi bir seri açılımına ulaşırız. Böyle bir durumda P_1 kuvvet serisi P_0 kuvvet serisinin z_1**'deki dönüştürülmüşüdür** diyelim. Böylece P_1 kuvvet serisi P_0 kuvvet serisinin z_1'deki dönüştürülmüşü, P_2 kuvvet serisi P_1'in z_2'deki dönüştürülmüşü,..., ve sonunda P_n ise P_{n-1}'in z_n'deki dönüştürülmüşüdür. P_0'ın, dolayısıyla f'nin γ boyunca analitik genişlemesine P_0 kuvvet serisinden yola çıkarak sonlu sayıda dönüştürmelerle ulaşabiliriz.

Bir durumu ayrıca belirtmekte yarar var: $f^* \in \mathcal{H}(B^*)$ fonksiyonu $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonunun γ boyunca bir analitik genişlemesiyse, γ boyunca bir $D_0(z_0), \ldots, D_n(z_n)$ daireler zinciri ve bu dairelerde yakınsak $P_0, \ldots, P_n$ kuvvet serileri şöyle seçilebilirler: $D_0 \subset B \cap B^*$, her $0 \leq k \leq n$ için $D_k \subset B^*$, $z_{k-1}, z_k \in D_{k-1}(z_{k-1}) \cap D_k(z_k)$ ve P_k serisi P_{k-1} serisinden $z - z_{k-1}$ yerine $(z - z_k) + (z_k - z_{k-1})$ yazarak elde edilmiştir.

D bir açık daire ve $f \in \mathcal{H}(D)$ ise, (f, D) ikilisine bir **fonksiyon elemanı** denir. Merkezleri sırasıyla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ olan bir $D_0, D_1, \ldots, D_n$ daireler zinciri verilsin. Her $1 \leq k \leq n$ için $f_k \in \mathcal{H}(D_k)$ olmak üzere, daima f_k fonksiyonu f_{k-1}'in dolaysız analitik genişlemesiyse, dd. $(f_{k-1}, D_{k-1}) \overset{d}{\sim} (f_k, D_k)$ ise, (f_n, D_n) fonksiyon elemanı (f_0, D_0) fonksiyon elemanının $D_0, D_1, \ldots, D_n$ **daireler zinciri boyunca** bir **analitik genişlemesi**dir denir; bunu

$$(f_0, D_0) \sim (f_n, D_n)$$

ile göstereceğiz. Bu durumda elbette (f_0, D_0) fonksiyon elemanı da (f_n, D_n) fonksiyon elemanının $D_n, D_{n-1}, \ldots, D_0$ daireler zinciri boyunca bir analitik genişlemesidir.

Her şeyden önce (f_n, D_n) ve (g_n, D_n) fonksiyon elemanları, (f_0, D_0)'ın *aynı* $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca analitik genişlemeleriyse, Özdeşlik Teoremi'nden dolayı $f_n = g_n$ olduğu apaçıktır.

(f_n, D_n) fonksiyon elemanı (f_0, D_0) fonksiyon elemanının $D_0, D_1, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca bir analitik genişlemesi ve $\gamma := \overrightarrow{a_0 a_1 \cdots a_n}$ olsun. Sonuç 5.2.26'dan dolayı $B_2 := \bigcup_{i=1}^n D_i$ bir bölgedir. $\underline{\gamma} \subset B_2$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $g_2|D_i := f_i$ ile B_2'de holomorf bir g_2 fonksiyonu tanımlanır. $B_1 := D_0$ ve $g_1 := f_0$ alırsak $g|B_i := g_i$ ile tanımlanan $g : B_1 \cup B_2 \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $g_1 = f_0$ fonksiyonunun γ boyunca bir analitik genişlemesidir.

Tersine B_1, B_2 bölgeleri, $g_i \in \mathcal{H}(B_i)$ holomorf fonksiyonları verilsin, $g_1|B_1 \cap B_2 = g_2|B_1 \cap B_2$, $a \in B_1 \cap B_2$, $b \in B_2$ ve γ ise başlangıç noktası a, bitiş noktası b ve izi B_2'de olan bir gezi olsun. γ boyunca bir $D_0, \ldots, D_n$ zincirini $D_0 \subset B_1 \cap B_2$ ve her $i = 1, \ldots, n$ için $D_i \subset B_2$ olacak biçimde bulabileceğimizi biliyoruz. $f_i|D_i := g_2|D_i$ olarak alırsak bu kez (f_n, D_n) fonksiyon elemanı (f_0, D_0)'nın $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca bir analitik genişlemesidir.

Not 3.5.14. Bazı yazarlar $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri kavramında $a_{k-1}, a_k \in D_{k-1} \cap D_k$ olmasını istemez, bunun yerine daha zayıf gibi görünen $D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset$ ile yetinirler. Kimi yazarlar bu son durumda D_k dairelerinin yerine dışbükey bölgeler alırlar. Kimi yazarlar ise, her $1 \leq i \leq n$ için $B_{k-1} \cap B_k \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan $B_0, \ldots, B_n$ bölgeler zincirleri ile çalışırlar. En genel görünen son durumu ele alalım: Fonksiyon elemanlarımız bu kez B bir bölge ve $f \in \mathcal{H}(B)$ olmak üzere, (f, B) ikilileri olacaktır. $0 \leq i \leq n$ olmak üzere, $f_i \in \mathcal{H}(B_i)$, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, $B_{k-1} \cap B_k \neq \emptyset$ ve $f_{k-1}|B_{k-1} \cap B_k = f_k|B_{k-1} \cap B_k$ ise, (f_n, B_n) fonksiyon elemanı $B_0, \ldots, B_n$ bölgeler zinciri boyunca (f_0, B_0) fonksiyon elemanının analitik genişlemesi diyelim. Daireler zinciri boyunca analitik genişlemeler elbette bölgeler boyunca analitik genişlemedir. Bölgeler boyunca bir analitik genişleme verildiğinde bir $a \in B_0$ ve bir $b \in B_n$ noktasını istediğimiz gibi seçip $B := \bigcup_{i=0}^n B_i$ bölgesinde başlangıç noktası a ve bitiş noktası b olan bir γ gezisi seçelim. Bu durumda γ boyunca bir $D_0, \ldots, D_m$ daireler zinciri o şekilde bulunabilir ki, $(f_n|D_m, D_m)$ fonksiyon elemanı $(f_0|D_0, D_0)$ fonksiyon elemanının $D_0, \ldots, D_m$ daireler zinciri boyunca bir analitik genişlemesidir. Bu nedenle, uygun gördüğümüz yerde bölgeler zinciri boyunca analitik genişlemeler kullanacağız.

Önerme 3.5.15. *$D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri ve $f_0 \in \mathcal{H}(D_0)$ verilsin. (f_0, D_0) fonksiyon elemanının $D_0, \ldots, D_n$ boyunca analitik genişleyebilmesi için gerek ve yeter koşul (f_0', D_0)'ın $D_0, \ldots, D_n$ boyunca analitik genişleyebilmesidir.*

Kanıt. $(f_0, D_0), \ldots, (f_n, D_n)$ dizisi ile (f_0, D_0) fonksiyon elemanı (f_n, D_n) elemanına analitik genişletiliyorsa $(f_0', D_0), \ldots, (f_n',, D_n)$ dizisi ile (f_0', D_0) fonksiyon elemanı (f_n', D_n) elemanına analitik genişletilir.

Şimdi $(f_0', D_0) = (g_0, D_0), \ldots, (g_n, D_n)$ ile f_0''ın (g_n, D_n) analitik genişlemesi verilsin. g_k fonksiyonlarının D_k dairelerinde f_k ilkelleri vardır. $D_0 \cap D_1$'de $f_0' = g_0 = g_1 = f_1'$ olduğundan, $D_0 \cap D_1$ bölgesinde $f_1 - f_0$ sabit olur. f_1'e uygun bir sabit ekleyerek $D_0 \cap D_1$ bölgesinde $f_1 = f_0$ olması sağlanır. Dolayısıyla, (f_1, D_1) elemanı (f_0, D_0)'ın dolaysız analitik genişlemesidir. Böyle devam ederek sonlu adımda $f_k \in \mathcal{H}(D_k)$ fonksiyonları her $1 \leq i \leq n$ için $D_{k-1} \cap D_k$'de $f_{k-1} = f_k$ olacak biçimde oluşturulur. □

Bu önerme bir $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde holomorf f fonksiyonlarının, izi U'da olan γ gezileri boyunca $\int_\gamma f$ integralini, özünde daha önceki tanımla aynı olmak üzere, tanımlama ve hesaplama olanağı verir. U'da γ boyunca $D_0, \ldots, D_n$ daireler zincirini seçelim. Bu durumda $f_k := f|D_k$ seçersek, (f_n, D_n) elemanı (f_0, D_0) elemanının $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca analitik genişlemesidir. f'nin D_0'da ilkelleri vardır; F_0 bunlardan biri olsun. Önerme 3.5.15'ten dolayı, (F_0, D_0)'ın $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca bir (F_n, D_n) analitik genişlemesi vardır. D_0 ve D_n dairelerinin a_0 ve a_n merkezleri için $a_0 = b_\gamma$ ve $a_n = s_\gamma$ olduğundan, F_0 ilkelinin ve $D_0, \ldots, D_n$ dairelerinin seçiminden bağımsız olarak —bunu okurun kolayca göreceğine inanıyoruz—

$$\int_\gamma f = F_n(s_\gamma) - F_0(b_\gamma) \tag{3.19}$$

olur. Biz holomorf fonksiyonların sürekli geziler için integralini daha önce tanımladığımız için (bkz. (2.31)) (3.19) bir sonuçtur. Eğer bu tanımı daha önce yapmamış olsaydık bu eşitlik $\int_\gamma f$'nın tanımı olarak seçilebilir.

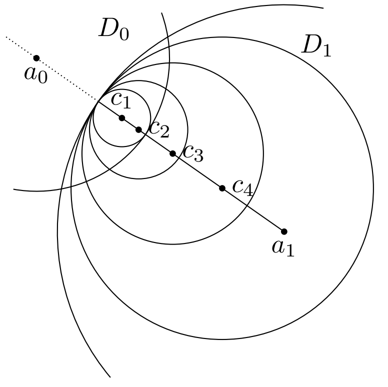
Teorem 3.5.16 (Kalıcılık İlkesi)**.** *Bir $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri ile, sırasıyla (f_0, D_0), ...,(f_n, D_n) ve $(g_0, D_0), \ldots, (g_n, D_n)$ analitik genişlemeleri verilmiş olsunlar. Eğer bir $P(x_1, x_2) \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ polinomu ile $P(f_0, g_0) = 0$ sağlanıyorsa, $P(f_n, g_n) = 0$ olur.*

Kanıt. Bu durumda $(P(f_0, g_0), D_0), \ldots, (P(f_n, g_n), D_n)$ bir analitik genişleme ve $P(f_0, g_0) = 0$ olduğundan, Özdeşlik Teoremi'ne göre $P(f_n, g_n) = 0$ olur. □

3.5.4 Weierstrass Yaklaşımı, Ergin Analitik Fonksiyonlar

Weierstrass yaklaşımını, yalnızca tarihi gelişime duyulan ilgi dolayısıyla değil, aynı zamanda olayın kavranılması açısından ve Riemann yüzeyleri gibi bazı kavramlara nasıl ulaştığımızı sergilemek bağlamında inceleyeceğiz.

Weierstrass özel, (f, D) fonksiyon elamanlarıyla çalışır. Burada $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ açılım noktası a ve yakınsaklık yarıçapı $r(f) > 0$ olan bir kuvvet serisi ve D ise a merkezli ve $r(f)$ yarıçaplı açık dairedir. Özetle f bir kuvvet serisi, D ise onun yakınsaklık dairesidir. Bu altkısımda bir fonksiyon elemanından bu tipte olanlar anlaşılacaktır. $\mathcal{FE}$ ile bu tip *fonksiyon elemanlarının kümesi*ni gösterelim.



Şekil 3.9

$(f_0, D_0), (f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n) \in \mathcal{FE}$ ve her $1 \leq k \leq n$ için $D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset$ ve bu arakesitte $f_{k-1} = f_k$ ise, daha önce olduğu gibi (f_n, D_n) fonksiyon elemanı $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca (f_0, D_0)'nin analitik genişlemesidir denir. Bu tanıma göre elbette (f_0, D_0) fonksiyon elemanı $D_n, \ldots, D_0$ daireler zinciri boyunca (f_n, D_n)'nin analitik genişlemesidir. Şimdi yalnızca dönüştürmelerle çalışabileceğimizi görelim.

Önsav 3.5.17. *(f_n, D_n) fonksiyon elemanı $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca (f_0, D_0)'nin analitik genişlemesiyse, (f_n, D_n) fonksiyon elemanı (f_0, D_0)'dan sonlu sayıda dönüştürmelerle elde edilir.*

Kanıt. Bunun için şunu görmek yeterlidir: (f_1, D_1) elamanı (f_0, D_0) fonksiyon elamanından sonlu sayıda dönüştürmeyle elde edilir. D_0 ve D_1 dairelerinin merkezleri ve yarıçapları sırasıyla a_0, a_1 ve r_0, r_1 olsunlar.

$D_0 \cap D_1$ açık kümesine düşen en büyük açık daire $D_{\rho_1}(c_1)$ olsun. c_1 merkezi $[a_0, a_1]$ doğru parçası üzerindedir. f_0 serisini c_1 noktasında dönüştürürsek $g_1(z) = \sum \frac{1}{n!} f_0^{(n)}(c_1)(z - c_1)^n$ serisini elde ederiz. $f_0^{(n)}(c_1) = f_1^{(n)}(c_1)$ olduğundan, bu seri aynı zamanda f_1'in c_1'deki dönüşümüdür. Bu serinin yakınsaklık yarıçapına R_1 dersek, $R_1 \geq \rho_1$ olur. Şekil 3.9'da en kötü senaryo, $\rho_1 = R_1$ ve benzeri durumlar görselleştirilmiştir. Eğer $a_1 \in D_{R_1}(c_1)$ ise, g_1'in a_1'deki dönüşümü f_1'den başkası değildir.

En kötü senaryo üzerinden devam edelim: c_2 noktası $[c_1, a_1]$ doğru parçası üzerinde ve c_1'den uzaklığı $[\rho_1/2, \rho_1)$ aralığında olsun. ρ_2, c_2 merkezli ve D_1'e düşen en büyük dairenin yarıçapı olsun. Elbette $\frac{3\rho_1}{2} \leq \rho_2 < 2\rho_1$. Şimdi g_1'in c_2'deki dönüştürülmesine g_2 dersek, g_2 aynı zamanda f_1'in c_2'deki dönüştürülmesidir ve en azından $D_{\rho_2}(c_2)$'de yakınsaktır. Eğer $a_1 \in D_{\rho_2}(c_2)$ işimiz biter; çünkü g_2'nin a_1'deki dönüşümü f_1'dir. Eğer $a_1 \notin D_{\rho_2}(c_2)$ ise, c_3 noktası $[c_2, a_1]$ doğru parçası üzerinde ve c_2'den uzaklığı $[\rho_2/2, \rho_2)$ olacak biçimde seçilsin ve ρ_3 ise c_3 merkezli ve D_1'e düşen en büyük dairenin yarıçapı olsun. Yukarıdaki irdelemeler tekrarlanır ve daima $\rho_{k+1} - \rho_k \geq \frac{\rho_1}{2}$ olduğundan, sonlu adımda bir m ile $a_1 \in D_{\rho_m}(c_m)$ sağlanır; böylece (f_1, D_1) fonksiyon elemanı sonlu sayıda dönüştürmelerle (f_0, D_0)'dan kazanılmış olur.

Benzer biçimde (f_2, D_2) sonlu dönüştürmelerle (f_1, D_1)'den,... ve (f_n, D_n) sonlu dönüştürmelerle (f_{n-1}, D_{n-1})'den elde edilir. Sonunda (f_n, D_n) sonlu dönüştürmelerle (f_0, D_0)'dan elde edilmiş olur. □

Tanım 3.5.18. $(f, D), (\tilde{f}, \tilde{D}) \in \mathcal{FE}$ olmak üzere, $(\tilde{f}, \tilde{D})$ fonksiyon elemanı (f, D) fonksiyon elemanının bir daireler zinciri boyunca analitik genişlemesiyse, $(\tilde{f}, \tilde{D})$ fonksiyon elemanı (f, D) fonksiyon elemanına **denk**tir diyecek ve bunu $(\tilde{f}, \tilde{D}) \sim (f, D)$ ile göstereceğiz.

Açıkça $\sim$ bağıntısı $\mathcal{FE}$'de bir denklik bağıntısıdır. (f, D)'nin denklik sınıfını $\mathbf{f}$ ile gösterelim. Böylece $\mathbf{f}$ tam da (f, D)'nin analitik genişlemesini, bir anlamda analitik büyümesini tamamlamış halidir; dolayısıyla biz $\mathbf{f}$'ye bir **ergin analitik fonksiyon** diyeceğiz[4]. $\mathbf{f}$ ergin analitik fonksiyonumuzu bilmek için *herhangi bir* $(f, D) \in \mathbf{f}$ fonksiyon elemanını bilmek, (f, D) fonksiyon elamanı bilmek içinse, D dairemizin merkezi a olmak üzere, $\left(f^{(n)}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$'yi bilmek yeterlidir. $\left(f^{(n)}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$'yi biliyorsak f'nin D'deki $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}}{n!}(z-a)^n$ açılımını biliyoruz demektir.

$\mathbf{f}$ bir ergin analitik fonksiyon ve $(f, D) \in \mathbf{f}$ ise

$$\forall z \in D \text{ için } \mathbf{f}(z) := f(z)$$

olarak tanımlanır[5]. Ancak, $\mathbf{f}$ bilindik anlamda bir fonksiyon değildir. (f_1, D_1), $(f_2, D_2) \in \mathbf{f}$ için $D_1 \cap D_2$'de $f_1 = f_2$ olması gerekmez. Dolayısıyla, genelde $\mathbf{f}$ bir çok değerli fonksiyondur. Ancak $\mathbf{f}$ ergin analitik fonksiyonunun herhangi bir çok değerli fonksiyondan önemli bir farkı vardır. Herhangi bir çok değerli fonksiyonun bir z noktasındaki değerleri için herhangi bir kısıtlama yoktur; bunlar istenildiği gibi seçilebilirler. Ancak ergin analitik fonksiyonlarda öyle değildir. Örneğin $(f_1, D_1), (f_2, D_2) \in \mathbf{f}$ ve dairelerimizin merkezleri aynı a olsun. (f_2, D_2) elamanı (f_1, D_1) elamanından bir

$$(f_1, D_1), (g_0, D_0'), \ldots, (g_n, D_n'), (f_2, D_2) \tag{3.20}$$

gibi bir daireler zinciri ile elde edilmiştir. $D_0', \ldots, D_n'$ dairelerinin merkezleri sırasıyla $a_0', \ldots, a_n'$ ve $\Pi := \overrightarrow{aa_0' \cdots a_n' a}$ olsun. Π'nin tanım aralığını $[0,1]$ alabiliriz ve $0 < t_0 < \cdots < t_n < 1$ olmak üzere, $\Pi(t_k) = a_k'$ olsun. Şimdi $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $[0, t_0]$'da $f_1 \circ \Pi$, $1 \leq k \leq n$ için $[t_{k-1}, t_k]$'de $g_{k-1} \circ \Pi$ ve $[t_n, 1]$'de ise

---

[4] $\mathcal{FE}/\sim$'nin ögelerine **tam analitik fonksiyonlar** veya kuvvet serilerinin bir **monogen sistemi** ve benzeri bazı isimler verilir.

[5] Tam titiz olmak gerekirse bu tanım $\mathbf{f}(z) := \{g(z) \mid z \in D_* \text{ ve } (g, D_*) \in \mathcal{FE}\}$ olmalıydı! Ancak doğru anlaşılacağını umarak yaygın gösterime uyduk.

$g_n \circ \Pi$ olarak tanımlanırsa h bir sürekli fonksiyondur ve $h(0) = f_1(a) = \mathbf{f}(a)$ ve $h(1) = f_2(a) = \mathbf{f}(a)$. Dolayısıyla, $\mathbf{f}$*'nin* a*'daki* $f_1(a)$ *değerinden* a*'daki* $f_2(a)$ *değerine sürekli bir biçimde geçebiliriz.*

Teorem 3.5.19 (Poincaré-Volterra)**.** *Bir ergin* $\mathbf{f}$ *analitik fonksiyonu için eğer* $(f, D) \in \mathbf{f}$ *ve* $z \in D$ *ise,* $\mathbf{f}$ *ergin fonksiyonu* z *noktasında en fazla sayılabilir çoklukta değer alır.*

Kanıt. Genellikten bir şey kaybetmeden z noktasını D'nin merkezi olarak alabiliriz. (3.20) analitik genişlemelerinde $(f_1, D_1) = (f, D)$ alırsak $\mathbf{f}$'nin z noktasındaki değerleri karşımıza $f_2(z)$ değerleri olarak çıkar. Diğer yandan, $a'_0, \ldots, a'_n$ merkezleri $\mathbb{Q}^2$'de seçilebilir. $\mathbb{Q}^2$ sayılabilir olduğundan, bu tür sonlu diziler sayılabilir çokluktadır. Öte yandan, farklı (f_2, D_2) fonksiyon elamanlarına farklı $a'_0, \ldots, a'_n$ dizileri karşılık geleceğinden, farklı $f_2(z)$ değerleri, dolayısıyla $\mathbf{f}(z)$ değerleri sayılabilir çokluktadır. □

Örnek 3.5.20. Örnek 3.5.8'de incelediğimiz $f(z) = \sum_{n \geq 1} z^{n!}$ fonksiyonunu ele alalım. $\partial\mathbb{D}$'nin f fonksiyonunun doğal sınırı olduğunu biliyoruz. f'yi $\overline{\mathbb{D}}$'nin dışına analitik genişletmek mümkün değildir, dolayısıyla $\bigcup_{(h,D)\in\mathbf{f}} D = \mathbb{D}$. Diğer yandan, $\mathbb{D}$ basit bağlantılı olduğundan, $\mathbb{D}$'de kalan bir $D_0, \ldots, D_n$ daireler zinciri boyunca $(f|D_0) = (f_0, D_0)$ elemanının (f_n, D_n) analitik genişlemesi için Monodromi Teoremi'nden (Teorem 3.5.12) dolayı $f_n = f|D_n$ olmak zorundadır. Bu nedenle, $a \in \mathbb{D}$ ve D, D^* daireleri $\mathbb{D}$'ye düşen a merkezli iki açık daire ve $(g, D), (g^*, D^*) \in \mathbf{f}$ ise, $D \cap D^*$'da $g = g^* = f$ olduğundan, $\mathbf{f}(a) := g(a) = f(a)$ tanımı kusursuzdur. Özetle f fonksiyonumuz analitik genişleyeceği kadar genişlemiş ve $\mathbf{f}$ ergin halindedir. Bu durumda $\mathbf{f} = f$ klasik anlamda bir $\mathbf{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonudur.

B bir bölge ve ∂B sınırı bir $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonunun doğal sınırıysa, dd. f'yi B'nin dışına hiçbir biçimde analitik genişletemiyorsak aynı durum söz konusudur; f zaten ergindir ve $\mathbf{f} = f$.

Örnek 3.5.21. Şimdi $(f, D_1(1)) = (\mathrm{Log}, D_1(1))$ olsun. $f'(z) = \frac{d\,\mathrm{Log}}{dz} = \frac{1}{z}$ ve $\frac{1}{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}^*$'da holomorf olduğundan, f' fonksiyonumuz izi $\mathbb{C}^*$'da olan her gezi boyunca analitik genişletilebilir. Dolayısıyla, Önerme 3.5.15 gereği, f fonksiyonumuz izi $\mathbb{C}^*$'da olan her gezi boyunca analitik genişler. Şimdi $a \in \mathbb{C}^*$ ve γ, η ise izi $\mathbb{C}^*$'da olup başlangıç noktaları 1 ve bitiş noktaları a olan iki gezi olsun. Her $z \in D_{|a|}(a)$ için

$$f_\gamma(z) := \int_{\gamma + \overrightarrow{az}} \frac{1}{z} dz \text{ ve } f_\eta(z) := \int_{\eta + \overrightarrow{az}} \frac{1}{z} dz$$

fonksiyonları **log** fonksiyonunun basit bağlantılı $D_{|a|}(a)$ dairesindeki analitik dallarıdır. Dikkat edilirse $(f_\gamma, D_{|a|}(a))$, $(f_\eta, D_{|a|}(a)) \in \mathbf{f}$. Bunlardan $(f_\gamma, D_{|a|}(a))$ elamanı $(f, D_1(1))$'in γ boyunca, $(f_\eta, D_{|a|}(a))$ ise $(f, D_1(1))$'in η boyunca boyunca analitik genişlemeleridir. $\lambda := \eta\gamma^-$ bir kapalı gezi olduğundan, her $z \in D_{|a|}(a)$ için

$$f_\eta(z) - f_\gamma(z) = \int_\lambda \frac{dz}{z} = 2\pi i n(\lambda, 0) = 2\pi i m, \; m \in \mathbb{Z}.$$

Her $m \in \mathbb{Z}$ sayısı uygun bir λ'nın dönme sayısı olarak karşımıza çıkacağından, $f_m := f_\gamma + 2\pi i m$ olmak üzere,

$$\mathbf{f} = \{(f_\gamma + 2\pi i m, D_{|a|}(a)) | m \in \mathbb{Z}\} = \{(f_m, D_{|a|}(a)) | m \in \mathbb{Z}\}$$

Özetle f_γ fonksiyonu **log** fonksiyonunun $D_{|a|}(a)$'daki bir holomorf dalı olduğundan, her $z \in \mathbb{C}^*$ için $\mathbf{f}(z) = \mathbf{log}(z)$ bir çok değerli fonksiyondur.

f'den bilindik anlamda tek değerli bir log fonksiyonu elde etmek istiyorsak önce log'nin X tanım bölgesi oluşturmamız gerekir. En azından log'nin sürekliliğinden söz etmek istediğimizden X'in bir topolojik uzay olmasını isteyeceğiz. log fonksiyonumuzun oluşturacağımız X tanım bölgesi için şimdiden söyleyebileceğimiz bir şeyler var mıdır? Herhangi bir $(f_m, D_{|a|}(a))$ fonksiyon elamanını $(f, D_1(1))$'den yola çıkarak bir $D_1, \dots, D_n$ daireler zinciri ile elde edebileceğimizden X, bağlantılı olmalıdır. Riemann öncesi, kompleks fonksiyonların tanım bölgeleri olarak ancak $\mathbb{C}$ veya onun altkümeleri düşünülüyordu. Diğer yandan, log tek değerli olacaksa $(f_m, D_{|a|}(a)$ fonksiyon elemanlarındaki $D_{|a|}(a)$ dairelerini birbirinden ayırmamız gerekir. Örneğin her $m \in \mathbb{Z}$ için $D_{|a|,m}(a) := D_{|a|}(a) \times \{m\}$ alabiliriz. Buna KA II'de uygun araçlar geliştirildikten sonra yeniden dönecek, şimdilik bir başka yol izleyecek ve burada da genel yaklaşımın dışına çıkacağız.

$\mathbf{f} = \mathbf{log}$ olduğundan, biz bir yerde **log** fonksiyonunu tek değerli bir log fonksiyona dönüştürmek istiyoruz. Olaya tersten yaklaşacağız ve birebir olmayan $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ fonksiyonundan birebir bir $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to X$ fonksiyonu tanımlayacağız ve $\log = \mathrm{Exp}^{-1} : X \to \mathbb{C}$ olacak. Şimdi

$$S_0 := \{x + iy |\, x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\} \text{ ve her } m \in \mathbb{Z} \text{ için } S_m := S_0 + i2\pi m$$

olsun. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $\exp(S_m) = \mathbb{C}_{-\pi}$. Diğer yandan, $m \neq n$ ise $S_m \cap S_n = \emptyset$ olduğundan, $\exp(S_m) \cap \exp(S_n) = \emptyset$ olsun istiyoruz (bkz. Şekil 3.10). Bunu basit bir uzlaşmayla şöyle sağlayabiliriz:

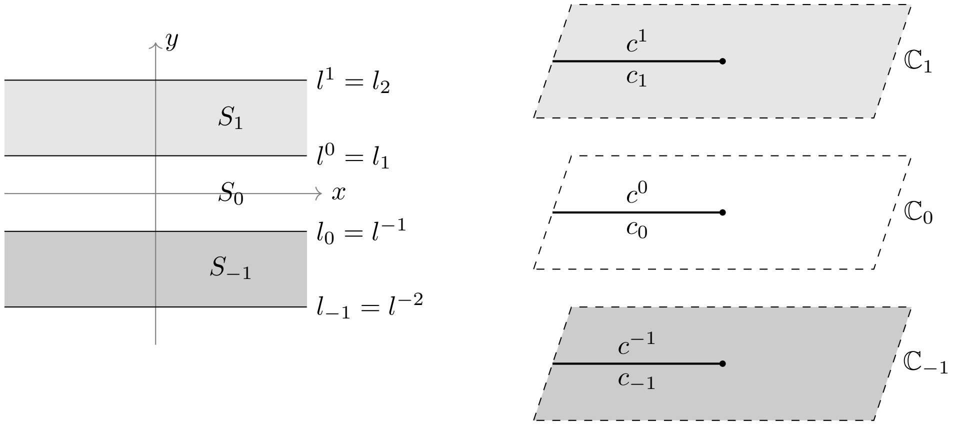
$$\mathbb{C}_m := \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C}^* \,|\, 0 < r < +\infty,\ -\pi + 2\pi m < \varphi < \pi + 2\pi m\} \tag{3.21}$$

$$r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} :\Longleftrightarrow r_1 = r_2 \text{ ve } \varphi_1 = \varphi_2. \tag{3.22}$$

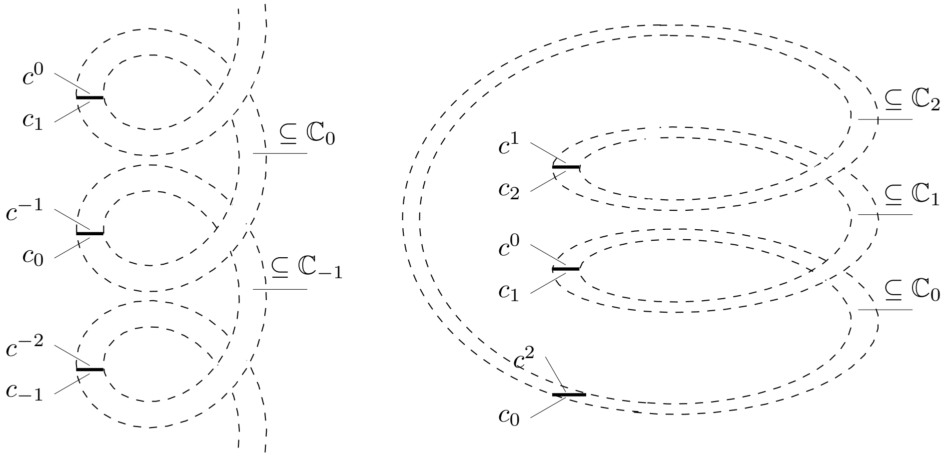
Buradaki yenilik (3.22) uzlaşmasıdır. $X^* := \bigsqcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_m$ olsun. Her bir $\mathbb{C}_m$ parçası $\mathbb{C}_{-\pi}$'nin topolojisiyle alınır. $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\text{her } z = x + iy \in S_m \text{ için } \mathrm{Exp}(z) := \exp z = e^x e^{iy} \in \mathbb{C}_m \text{ ve}$$
$$\text{her } z \in \mathbb{C}_m \text{ için } \log(z) := f_m(z) = \mathrm{Log}\, z + i2\pi m \in S_m$$

olarak tanımlayalım. Böylece $\mathrm{Exp}|S_m : S_m \to \mathbb{C}_m$ tam eşlemedir ve $\log|\mathbb{C}_m = (\mathrm{Exp}|S_m)^{-1}$. Böylece tek değerli log ergin fonksiyonumuz X^*'da tanımlanmış olur.



Şekil 3.10



Şekil 3.11: **log** ve $\sqrt[3]{z}$'nin Riemann yüzeyleri.

$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $l_m(t) := t - i\pi + i2\pi m$ ve $l^m(t) := t + i\pi + i2\pi m$ olarak tanımlanan l_m ve l^m doğrularına sırasıyla S_m şeridinin alt ve üst yakaları diyelim. Benzer biçimde her $\mathbb{C}_m$'nin c_m alt ve c^m üst yakaları tanımlanır.

$$c_m := \left\{ re^{-i\pi + i2\pi m} \mid r \in (0, +\infty) \right\}$$
$$c^m := \left\{ re^{i\pi + i2\pi m} \mid r \in (0, +\infty) \right\}.$$

(3.22)'den dolayı, bir yandan $c_m \cap c^m = \emptyset$, diğer yandan $c^m = c_{m+1}$ ve $c_m = c^{m-1}$. Dolayısıyla, ayrık $\mathbb{C}_m$ düzlemlerimiz yakalar üzerinden birleştirilmiş veya yapıştırılmış olur. Şimdi

$$X := X^* \sqcup \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} c^m = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} (\mathbb{C}_m \sqcup c^m)$$

olsun. $\mathrm{Exp}(l^m(t)) := e^t e^{i(\pi + 2\pi m)} \in c^m$ olarak tanımlarsak her $m \in \mathbb{Z}$ için $\mathrm{Exp}|l^m : l^m \to c^m$ bir tameşleme olur. $\mathbb{C} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} (S_m \sqcup l^m)$ ve böylece $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to X$ bir tameşlemedir. Elbette $\log := \mathrm{Exp}^{-1}$. $D_r(a) \subset \mathbb{C}^*$ keyfi verilsin. Eğer $D_r(a) \subset \mathbb{C}_{-\pi}$ ise, bu dairenin $\mathbb{C}_m$'deki karşılığını $D_{r,m}(a)$ ile gösterelim. Eğer $a \in (-\infty, 0)$ ise, $D_r(a)$ açık dairesini üç ayrık parçaya ayıralım: Üst yarıdüzlemdeki $D_r^+(a)$ açık yarım daire, $(a-r, a+r)$ çapı ve alt yarıdüzlemdeki $D_r^-(a)$ açık yarım daire. $D_r^+(a)$'nın $\mathbb{C}_m$'deki karşılığını $D_{r,m}^+(a)$, $D_r^-(a)$'nin $\mathbb{C}_m$'deki karşılığını $D_{r,m}^-(a)$, $(a-r, a+r)$ çapının c^m'deki karşılığını $(a-r, a+r)^m$ ve c_m'deki karşılığını $(a-r, a+r)_m$ ile gösterelim ve

$$D_{r,m}(a) := D_{r,m}^+(a) \cup (a-r, a+r)_{m+1} \cup D_{r,m+1}^-(a), \ a \in c^m$$

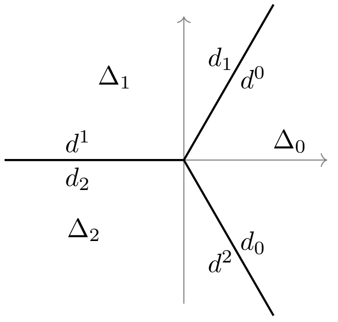
olsun. Her bir $D_{r,m}(a)$ dairesine $D_r(a)$'nın topolojisi aktarılır ve

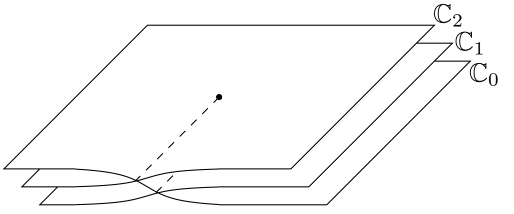
$$\{D_{r,m}(a) \subset \mathbb{C}^* | r > 0, a \in \mathbb{C}^*, m \in \mathbb{Z}\}$$

X'in topolojisinin bazı olarak alınır.

$$p : X \to \mathbb{C}^*, \ z \in \mathbb{C}_m \sqcup c^m \ \ p(z) := z$$

olarak tanımlanan p izdüşümü süreklidir ve her $D_r(a) \subset \mathbb{C}^*$ için $p^{-1}(D_r(a)) = \bigsqcup D_{r,m}(a)$ ve her $m \in \mathbb{Z}$ için $p|D_{r,m}(a) : D_{r,m}(a) \to D_r(a)$ bir topolojik dönüşümdür. KA II'de göreceğimiz





Şekil 3.12

anlamda X bir 2-boyutlu katmanlı ve $p : X \to \mathbb{C}^*$ bir yerel düzgün örtmedir. X'e **log** fonksiyonunun Riemann yüzeyi denir.

Burada da $\mathbb{C}_{-\pi}$ yerine herhangi bir $\mathbb{C}_\alpha$'da da çalışabileceğimiz apaçıktır ve bu yapıştırma işlemi tümüyle yapaydır. Sonuçta ortaya çıkan yüzeyi basamakları $\mathbb{C}_\alpha$'lardan oluşturulmuş aşağıya doğru da yukarı doğruda sonsuz basamaklı bir döner merdiven gibi düşünebiliriz. Tüm X'i görselleştirmek yerine Şekil 3.11'de solda, $0 < r < R$ olmak üzere, daha iyi izlenebilir olan $p^{-1}(H(0; r, R))$ görselleştirilmiştir.

Örnek 3.5.22. $f : \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}_z$ dönüşümü $z = f(w) = w^n$ ve n doğal sayısı ≥ 2 olsun. $f'(w) = nw^{n-1}$ ve $w \neq 0$ için $f'(w) \neq 0$ olduğundan, w'nin bir komşuluğunda f'nin yerel holomorf tersi vardır; ancak$f'(0) = 0$ olduğundan, f'nin, 0'ın hiçbir komşuluğunda holomorf tersi olamaz! Biz $f : \mathbb{C}_w \to \mathbb{C}_z$ dönüşümünü inceleyeceğiz. $z \neq 0$ için $z = w^n$ denkleminin n farklı kökü vardır (bkz. (1.41)). Tanım 1.7.15 gereği $\sqrt[n]{\mathbf{z}} = \exp(\frac{1}{n} \mathbf{log}\, z)$'dir. Dolayısıyla, $\mathbf{log}\, z$'nin holomorf dalı olduğu her yerde $\sqrt[n]{\mathbf{z}}$'nin de bir holomorf dalı vardır. $\mathbb{C}_{-\pi}$'de $\mathbf{log}\, z$'nin tüm holomorf dalları $\operatorname{Log} z + i2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ olduğundan, $\sqrt[n]{\mathbf{z}}$'nin $\mathbb{C}_{-\pi}$'deki dalları $\exp \frac{1}{n}(\operatorname{Log} z + i2\pi m), m \in \mathbb{Z}$ holomorf fonksiyonlarıdır. Bunlardan birbirinden farklı olanlar

$$g_m(z) = e^{\frac{1}{n}(\operatorname{Log} z + i2\pi m)} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} z} e^{i\frac{2\pi m}{n}}, \; m = 0, 1, \dots n-1$$

fonksiyonlarıdır. Şimdi $\sqrt[n]{z} := g_0(z)$ analitik fonksiyona ilişkin $\mathbf{g_0} = \sqrt[n]{\mathbf{z}}$ ergin fonksiyonunu tanım kümesi X olan klasik anlamda tek değişkenli bir fonksiyona dönüştüreceğiz. Bir önceki örnekte ayrıntılı davrandığımız için burada öyle yapmayacağız.

Daireler zinciri boyunca analitik genişlemeler bölgeler boyunca analitik genişlemelere denk olduğu için burada bölgeler boyunca analitik genişlemeleri kullanacağız. $\varphi_k := -\frac{\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} k$ olmak üzere,

$$\Delta_k := \{w \in \mathbb{C}^* \mid \varphi_k < \arg w < \varphi_{k+1}\}, \; 0 \leq k \leq n-1$$
$$d_k := \left\{ r e^{i\varphi_k} \mid 0 < r \in \mathbb{R} \right\} \text{ ve } d^k := \left\{ r e^{i\varphi_{k+1}} \mid 0 < r \in \mathbb{R} \right\}$$

olarak tanımlansınlar. $n = 3$ durumu Şekil 3.12'de görselleştirilmiştir. d_k ve d^k kümelerine sırasıyla Δ_k'nin alt ve üst yakaları diyelim. Her k için $f|\Delta_k : \Delta_k \to \mathbb{C}_{-\pi}$ biholomorftur. Bir önceki örnekte olduğu gibi $f(\Delta_k)$ görüntülerini $\mathbb{C}_0, \dots, \mathbb{C}_{n-1}$ olarak birbirinden ayıralım. $\mathbb{C}_k$ düzlemleri (3.21) ile tanımlanmıştır ve (3.22) uzlaşması geçerlidir.

$$d^0 = d_1, d^1 = d_2, \dots, d^{n-1} = d_0$$

olduğundan, $\mathbb{C}_0$'ın üst yakası $\mathbb{C}_1$'in alt yakası,... ve $\mathbb{C}_{n-2}$'nin üst yakası $\mathbb{C}_{n-1}$'in alt yakası ve sonunda $\mathbb{C}_{n-1}$'in üst yakası $\mathbb{C}_0$'ın alt yakası ile özdeşleşecektir. Böylece elde ettiğimiz X uzayımız $\sqrt[n]{\mathbf{z}}$'nin Riemann yüzeyidir.

Her $z \in \mathbb{C}_{-\pi}$ için $z = f(w) = w^n$ denkleminin birinci dereceden tam n farklı kökü vardır; bu köklerden tam bir tanesi Δ_k'ye düşer, buna w_k diyelim. $g_k(z) = w_k$ olacaktır. g_k dönüşümü $\mathbb{C}_k$'yi biholomorf Δ_k'ye resmeder. Yine $p : X \to \mathbb{C}^*$ dönüşümü her $k = 0, \ldots, n-1$ ve her $z \in \mathbb{C}_k$ için $p(z) = z$ olarak tanımlanırsa $p : X \to \mathbb{C}^*$ bir yerel düzgün örtme dönüşümüdür, dd. her $a \in \mathbb{C}^*$ noktasının bir U açık komşuluğu ve $\mathbb{C}_k$'de açık V_k komşulukları $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} V_k$ ve $p|V_k : V_k \to U$ topolojik olacak biçimde bulunabilir. $1 \leq k \leq n-1$ için g_k'nin g_0'da bölgeler zinciri boyunca analitik genişlemeyle elde edilebileceğini görmeyi okura bırakıyoruz.

p örtmesine sahip olmak güzel bir şey, ancak karşılığında X yüzeyini $\mathbb{R}^3$'te aslına uygun görselleştirmek olanaksızdır. Nitekim Şekil 3.12'deki standart gösterimde $\mathbb{C}_0, \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ düzlemlerimiz birbirini kesiyormuş gibi görünür; aslında böyle bir kesmenin söz konusu olmadığını biliyoruz. Ancak yüzeyimizi biraz deforme etmemize izin verilirse X yüzeyimizin bir $H(0; r, R)$ $(0 < r,\ R < +\infty)$ halkası üzerindeki kısmını bir kesişme olmadan Şekil 3.11'deki sağ şekilde olduğu gibi görselleştirebiliriz. Orada $\mathbb{C}_2$'deki ikinci dörtlükteki kısmı biraz gerdik ve biraz da dışarıya doğru deforme ettik.

3.5.5 Schwarz Yansıma İlkesi

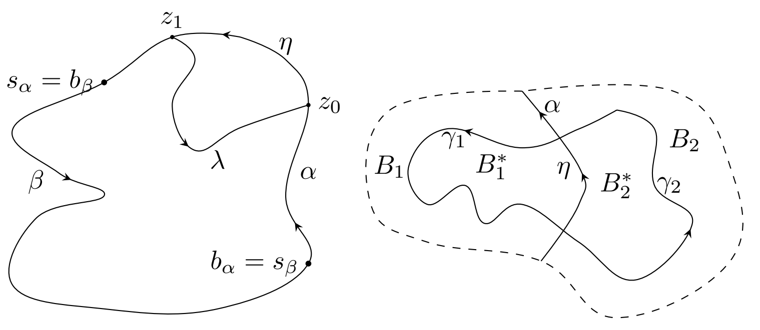
$\lambda : (a, b) \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümlerine **açık gezi**ler diyelim. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ bir integral gezisiyse, $\gamma|(a, b)$'ye bir açık integral gezisi diyelim ve bunu yalın olarak γ° ile gösterelim.

Bir B bölgesinin yönlenmiş $\boldsymbol{\partial} B$ sınırı $\boldsymbol{\partial} B = \alpha\beta$ olarak parçalanmış ve α bir basit integral gezisi olsun. Aşağıdaki koşul sağlandığında α° açık gezisine B bölgesinin bir **uygun sınır yayı** denir: η gezisi α° gezisinin, başlangıç noktası z_0 ve bitiş noktası z_1 olan herhangi bir parçasıysa, başlangıç noktası z_1 ve bitiş noktası z_0 olan ve bu noktalar dışında izi B'de olan bir λ integral gezisi, $\eta\lambda$ kapalı gezisi B'de basit bağlantılı bir bölgeyi çevreleyecek biçimde bulunabilir (bkz. Şekil 3.13'teki sol şekil). B_1 ve B_2 ayrık bölgeleri için $\partial B_1 \cap \partial B_2$ arakesiti bir α integral gezisinin iziyse, B_1 ve B_2 bölgeleri α° açık gezisi boyunca birbirine **yapışırlar** diyelim.

Teorem 3.5.23 (Painlevé Teoremi)**.** *B_1 ve B_2 iki ayrık bölge olsun ve bunlar her ikisi için de uygun sınır yayı olan basit α° açık integral gezisi boyunca birbirine yapışsınlar. $i = 1, 2$ için f_i fonksiyonu B_i'de holomorf, $B_i \cup \underline{\alpha^\circ}$'de sürekli ve $f_1|\underline{\alpha^\circ} = f_2|\underline{\alpha^\circ}$ ise, $B^* := B_1 \cup B_2 \cup \underline{\alpha^\circ}$ bölgesinde holomorf bir F fonksiyonu $F|B_i = f_i|B_i$ olacak biçimde vardır.*

Özetle f_1 fonksiyonu f_2'nin ve tersine f_2 fonksiyonu f_1'in bir holomorf genişlemesidir.

Kanıt. α° açık gezisinin η alt gezisini alalım ve bunu γ_i integral gezisi ile B_i bölgesinde bir B_i^* basit bağlantılı bölgesini çevreleyen bir kapalı geziye



Şekil 3.13: Uygun sınır parçası ve kanıta ilişkin şekiller.

tamamlayalım (bkz. Şekil 3.13'teki sağ şekil). $\lambda_1 := \eta\gamma_1$ ve $\lambda_2 := \eta^-\gamma_2$ olsun.

$$F_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_1} \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi, \;\; z \in \mathbb{C}\backslash\underline{\lambda_1} \text{ ve}$$
$$F_2(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_2} \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} d\xi, \;\; z \in \mathbb{C}\backslash\underline{\lambda_2}$$

olarak tanımlayalım. Teorem 2.5.4'ten dolayı, F_i fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\underline{\lambda_i}$'de holomorftur. Teorem 3.1.5'ten ötürü, her $z \in B_i^*$ için $F_i(z) = f_i(z)$. Ayrıca, Sonuç 2.7.2'den dolayı $F_1|B_2^* \equiv 0$ ve $F_2|B_1^* \equiv 0$. Şimdi özellikle F_1 ve F_2 fonksiyonları $B_1^* \cup B_2^*$'de holomorf olduklarından, orada $F := F_1 + F_2$ de holomorftur. Diğer yandan $\underline{\alpha^\circ}$'da $f_1(z) = f_2(z)$ olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta} \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\eta^-} \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

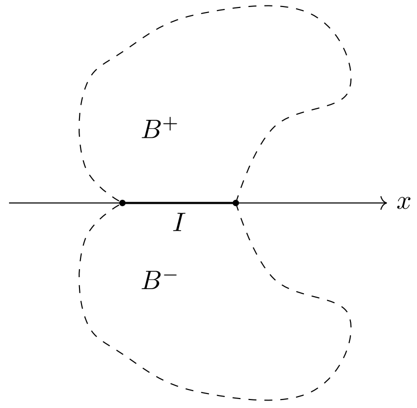
olur. Dolayısıyla, $\lambda_1 = \eta\gamma_1$ ve $\lambda_2 = \eta^-\gamma_2$ sağlandığından,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f_1(z) & z \in B_1^* \\ f_2(z) & z \in B_2^* \end{cases} \tag{3.23}$$

Ancak bu integrallerin ilki $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma_1}$'de, ikincisiyse $\mathbb{C}\backslash\underline{\gamma_2}$'de holomorf fonksiyonlar tanımladığından, (3.23)'teki ilk eşitlik $\mathbb{C}\backslash\left(\underline{\gamma_1} \cup \underline{\gamma_2}\right)$'de holomorf bir fonksiyon tanımlar. F ve f_i ayrıca $B_i \cup \underline{\eta^\circ}$'da sürekli olduklarından, $\underline{\alpha^\circ}$'da da $F = f_1 = f_2$ olur. η gezisi α° açık gezisinin keyfi seçilebilen bir parçası olduğundan,

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z), & z \in B_1 \\ f_2(z), & z \in B_2 \\ f_1 z) = f_2(z), & z \in \alpha^\circ \end{cases}$$

ile $B_1 \cup B_2 \cup \underline{\alpha^\circ}$'da bir holomorf fonksiyon tanımlanır. □



Şekil 3.14

Bu teoremin bir sonucu şudur: *Teoremin koşullarında* $0 \neq f_1 \in \mathcal{H}(B_1)$ *ise, her* $a \in \underline{\alpha^\circ}$ *için* $\lim_{z \in B, z \to a} f_1(z) = 0$ *olamaz!* Gerçekten de tersi olsaydı f_1 fonksiyonu B_2 bölgesine $f_2 \equiv 0$ olarak holomorf genişletilebilirdi ve ardından Özdeşlik Teoremi'nden $f_1 = 0$ olurdu!

Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesine her $z \in B$ için $\overline{z} \in B$ ise **x-eksenine göre simetriktir** diyelim. Bu durumda $B \cap \mathbb{R}$ boş olamaz ve sayılabilir çoklukta açık aralıklardan oluşur.

Teorem 3.5.24. *$B \subset \mathbb{C}$ bölgesi x-eksenine göre simetrik, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve her $x \in B \cap \mathbb{R}$ için $f(x) \in \mathbb{R}$ ise, her $z \in B$ için $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ olur.*

Kanıt. Her $z \in B$ için $g(z) := \overline{f(\overline{z})} = (\overline{\mathrm{Id}} \circ f \circ \overline{\mathrm{Id}})(z)$ olsun. Savımız $g = f$ önermesine denktir. g fonksiyonu bir holomorf fonksiyon ve çift sayıda —iki tane— antiholomorf fonksiyonun birleşimi olarak holomorftur. Her $x \in B \cap \mathbb{R}$ için $f(x) \in \mathbb{R}$ olduğundan, $g(x) = \overline{f(\overline{x})} = \overline{f(x)} = f(x)$ olur. B bir bölge, $f, g \in \mathcal{H}(B)$, $f|B \cap \mathbb{R} = g|B \cap \mathbb{R}$ ve $B \cap \mathbb{R}$'nin B'de yığılma noktaları olduğundan, Özdeşlik Teoremi'nden $f = g$ olur. □

Teorem 3.5.25 (Schwarz'ın Küçük Yansıma Teoremi)**.** *$B^+ \subset \mathbb{H}$ bir bölge, $I \subset \mathbb{R}$ boştan farklı bir açık aralık ve $I \subset \partial B^+$ olsun. Her $x \in I$ için x-merkezli bir D_x dairesi $D_x \cap \mathbb{H} \subset B^+$ olacak biçimde bulunsun*[6]*. $B^- := \{\overline{z} \mid z \in B^+\}$ olmak üzere, I'da reel değerler alan her $f^+ \in \mathcal{H}(B^+) \cap \mathcal{C}(B^+ \cup I)$ fonksiyonu $B := B^+ \sqcup I \sqcup B^-$ bölgesine holomorf olarak genişletilebilir.*

Kanıt. f fonksiyonu $B^+ \cup I$'da f^+ ve B^-'de ise $\overline{\mathrm{Id}} \circ f \circ \overline{\mathrm{Id}}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $f \in \mathcal{H}(B^+ \cup B^-) \cap \mathcal{C}(B)$ olur. Teorem 3.5.23'ten dolayı, her $x \in I$ için $f|D_x \in \mathcal{H}(D_x)$ ve bu, savı kanıtlar. □

[6] Bazı kaynaklarda bu koşul veya ona denk olan " $\partial B \backslash I$'nın I'da bir yığılma noktası yoktur" koşulu konmamıştır ve kanıtlar yanlıştır.

$U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\mathbb{K}$ cismi $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$'den biri olmak üzere, bir $u \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{K})$ fonksiyonuna $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ olmak üzere, $\Delta u = 0$ ise U'da **harmoniktir** denir. Biz harmonik fonksiyonları KA II'de işleyecek ve aşağıdaki iki teoremi kanıtlayacağız:

Teorem 3.5.26. *$B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı ve $u : B \to \mathbb{C}$ harmonikse, bir harmonik $v : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f := u + iv$ fonksiyonu B'de holomorf olacak biçimde vardır; ayrıca v fonksiyonu bir sabit dışında tek olarak belirlidir.*

Teorem 3.5.27 (Harmonik Fonksiyonlar İçin Yansıma İlkesi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bölgesi x-eksenine göre simetrik ve $B^+ = B \cap \mathbb{H}$, $B^- = B \cap \mathbb{H}^-$ olsun. $u : B^+ \to \mathbb{R}$ harmonik ve her $x \in B \cap \mathbb{R}$ için $\lim_{z \in B^+, z \to x} u(z) = 0$ olsun. Bu durumda u'yu her $x \in B \cap \mathbb{R}$ için $u(x) = 0$ ve her $\overline{z} \in B^-$ için $u(\overline{z}) := -u(z)$ olarak tanımlayarak B'ye genişletelim. u fonksiyonu B'de harmoniktir.*

Teorem 3.5.28 (Güçlü Küçük Yansıma Teoremi)**.** *B^+, B^-, I ve B, yukarıda Teorem 3.5.25'te tanımlandığı gibi olsunlar. $f^+ \in \mathcal{H}(B^+)$ ve*

$$v(z) := \begin{cases} \operatorname{Im} f^+(z) & z \in B^+ \\ 0 & z \in I \end{cases}$$

fonksiyonu $B^+ \cup I$'da sürekliyse, f^+ fonksiyonu B'de holomorf bir f fonksiyonuna her $z \in B$ için $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ olacak biçimde genişletilebilir.

Burada $\operatorname{Re} f^+$'nin $B^+ \cup I$'ya sürekli genişletilebilmesi istenmemiştir!

Kanıt. Her şeyden önce her $\overline{z} \in B^-$ için $f^-(\overline{z}) = \overline{f^+(z)}$ ile tanımlanan f^- fonksiyonu B^-'de holomorftur. $f|B^\pm := f^\pm$ olarak tanımlansın. Elbette $f \in \mathcal{H}(B^+ \cup B^-)$ ve her $z \in B^+ \cup B^-$ için $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ sağlanır. İşimiz bu sağlanacak biçimde f'yi I'ya holomorf genişletmektir.

Analitik fonksiyonların gerçel ve sanal kısımları harmonik fonksiyonlardır. Teorem 3.5.27'den dolayı, v fonksiyonu B'ye harmonik olarak ve her $\overline{z} \in B^-$ için $v(\overline{z}) = -v(z)$ olacak biçimde genişletilebilir. Her $t \in I$ için $D_t \subset B$ ise t-merkezli bir açık daire olsun. Teorem 3.5.26'dan dolayı, bir $u_t : D \to \mathbb{R}$ harmonik fonksiyonu $h_t = u_t + iv \in \mathcal{H}(D_t)$ olacak biçimde bulunabilir. $D_t^+ = D_t \cap \mathbb{H}$ bölgesinde f^+ ve h_t fonksiyonlarının her ikisi de holomorftur ve orada $f^+ - h_t$ yalnızca gerçel değerler alır; dolayısıyla orada sabittir ve bu sabiti 0 olarak seçebiliriz (bu sabit c_t ise, u_t yerine $u_t - c_t$ alınız). Böylece her $h_t \in \mathcal{H}(D_t)$ fonksiyonu D_t^+'de $f^+ = h_t$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda $s, t \in I$ için $D_s \cap D_t \neq \emptyset$ iken $D_s^+ \cap D_t^+$'de $h_s = f^+ = h_t$ olduğundan, $D_s \cap D_t$'te de $h_s = h_t$ olur. Ayrıca, her $z \in D_t$ için $g_t(z) := \overline{h_t(\overline{z})}$ ile tanımlanan g_t fonksiyonu da D_t'de holomorftur. Öte yandan, her $x \in D_t \cap I$ için $g_t(x) = u_t(x) - iv(x) = u_t(x) = h_t(x)$ olduğundan, Özdeşlik Teoremi'nden, her $z \in D_t$ için $h_t(z) = g_t(z) = \overline{h_t(\overline{z})}$ olur. Dolayısıyla, her $x \in D_t \cap I$ için $f(x) :=$

$h_t(x)$ tanımı kusursuzdur ve bu biçimde B'de tanımlanan f fonksiyonu aranan fonksiyondur. □

Teorem 3.5.29. *B ve G bölgeleri x-eksenine göre simetrik, $I = B \cap \mathbb{R}$, $J = G \cap \mathbb{R}$ olsunlar. Ayrıca, $f : B \to G$ holomorf, $f|B^+ : B^+ \to G^+$ ve $f|B^- : B^- \to G^-$ fonksiyonları biholomorf ve $f(I) \subset \mathbb{R}$ ise, $f : B \to G$ biholomorftur.*

Kanıt. $x_0 \in I$ olsun. Gerekirse ötelemelere geçerek $x_0 = 0$ ve $f(0) = 0$ alabiliriz. Bu durumda f'nin x_0'daki seri açılımı

$$f(z) = cz^m + c_{m+1}z^{m+1} + \cdots, \; c \neq 0, \text{ ve } m \geq 1$$

olur. $f(I) \subset \mathbb{R}$ olduğundan, $c \in \mathbb{R}$ ve yeterince küçük $r > 0$ ve $\theta > 0$ için $f(re^{i\theta})$ değerine bakarak $f(B^+) \subset G^+$ olduğundan ise $c > 0$ olur. Eğer $m > 1$ olsaydı, $0 < \theta < \pi$ koşulunu sağlayan uygun bir θ ile $\pi < m\theta < 2\pi$ ve yeterince küçük $r > 0$ ile $f(re^{i\theta}) \in \mathbb{H}^-$ olurdu ve bu, varsayımımızla çelişir. Dolayısıyla, $m = 1$ ve $f'(0) \neq 0$ olur. Böylece f fonksiyonu $x_0 = 0$'da yerel biholomorftur.

Geriye f'nin I'da birebir olduğunu göstermek kalıyor. $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, ancak $f(x_1) = f(x_2)$ olduğunu varsayalım. x_i-merkezli ayrık $D_i \subset B$ dairelerini $f|D_i$ birebir olacak biçimde seçelim. Bu durumda $f(D_1^+) \cap f(D_2^+) \neq \emptyset$ ve bu arakesitten seçeceğimiz bir w için $z_i \in D_i^+$ noktaları $f(z_1) = w = f(z_2)$ olacak biçimde vardır. Bu durumda $z_1 \neq z_2$ olduğundan, bu, $f|B^+$'nın birebirliği ile çelişir. □

Teorem 3.5.30. *B ve G bölgeleri x-eksenine göre simetrik, $I = B \cap \mathbb{R}$, $J = G \cap \mathbb{R}$ olsunlar. $f : B^+ \cup I \to G^+ \cup J$ topolojik ve $f|B^+ : B^+ \to G^+$ biholomorf ise, f dönüşümü tek olarak belirli bir biholomorf $g : B \to G$ dönüşümüne genişletilebilir.*

Kanıt. Her şeyden önce $f(I) \subset J$ olduğundan, $g|B \cup I := f$ ve her $z \in B^-$ için $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ tanımı kusursuzdur. Diğer yandan, $g|B^- : B^- \to G^-$ biholomorftur. Teorem 2.6.17'den ise $g \in \mathcal{H}(B)$, dolayısıyla g biholomorftur. Teklik ise Özdeşlik Teoremi'nden aşikârdır. □

Bilindiği gibi $\overline{z}$ kompleks sayısı z'nin x-eksenine göre yansımasıdır. B'nin x-eksenine göre simetrik olması $\overline{\mathrm{Id}}(B) = B$ olması demektir. Biz yansımalarla ileride de ilgileneceğiz ve yansımaları genel olarak Θ ile göstereceğiz. Özellikle bir C eğrisine göre yansımayı Θ_C ile göstereceğiz.

x-eksenine göre simetrik $B \neq \emptyset$ bölgesi verilsin ve $I = B \cap \mathbb{R}$ bir açık aralık olsun. Bu durumda $B := B^+ \sqcup I \sqcup B^-$. $\Theta_I : B \to B$ dönüşümünü $\Theta_I(z) := \overline{z}$ olarak tanımlarsak bu dönüşüm şu özelliklere sahiptir: Θ_I tameşlemedir, Θ_I ve Θ_I^{-1} antiholomorfturlar; bu durumda Θ_I **biantiholomorf**tur veya **antikonform**dur diyelim. Ayrıca, $\Theta_I \circ \Theta_I = \mathrm{Id}_B$, $\Theta_I(B^+) = B^-$, $\Theta_I(B^-) = B^+$ ve her $x \in I$ için $\Theta_I(x) = x$. Şimdi elimizde birbirine bir α° açık integral eğrisi boyunca yapışık, ancak ayrık olan G^+, G^- bölgeleriyle bir $G = G^+ \sqcup \underline{\alpha}^\circ \sqcup G^-$ bölgesi ve bir biholomorf $\Phi : B \to G$ dönüşümü $\Phi(B^\pm) = G^\pm$ ve $\Phi(I) = \underline{\alpha}^\circ$ olacak biçimde verilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 3.5.31. *$G = G^+ \sqcup \underline{\alpha}^\circ \sqcup G^-$ ve $\Phi : B \to G$ yukarıdaki gibi olsunlar.*

(i) *$g \in \mathcal{C}(G) \cap \mathcal{H}(G^+ \cup G^-)$ ise $g \in \mathcal{H}(G)$.*

(ii) *$g \in \mathcal{C}(G^+ \cup \underline{\alpha}^\circ) \cap \mathcal{H}(G^+)$ ve her $z \in \underline{\alpha}^\circ$ için $g(z) \in \mathbb{R}$ ise, g fonksiyonu G bölgesine holomorf genişletilebilir.*

Kanıt. (i) $f := g \circ \Phi$ olmak üzere, Teorem 2.6.17'den $f \in \mathcal{H}(B)$. Buradan $g = f \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{H}(G)$.

(ii) $f := g \circ \Phi$ olmak üzere, Teorem 3.5.28'den $f \in \mathcal{H}(B)$. Buradan $g = f \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{H}(G)$. □

Şimdi işimiz teoremin koşullarını sağlayan G ve Φ'lerin nasıl bulunacağını araştırmaktır. $I = [\alpha, \beta]$ kapalı aralığının $\mathbb{R}$'de açık bir J komşuluğunda bir $\gamma : J \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Her $t_0 \in [\alpha, \beta]$ için bir $I_\varepsilon(t_0) \subset J$ açık aralığı ve orada yakınsak bir $\sum_{n \geq 0} a_n (t - t_0)^n$ kuvvet serisi, $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\gamma(t) = \sum_{n \geq 0} a_n (t - t_0)^n, \ t \in I_\varepsilon(t_0)$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ gezisi **reel-analitiktir** diyelim. Özetle γ'nın gerçel ve sanal kısımları I'nın bir komşuluğunda reel-analitiktir. Bu durumda

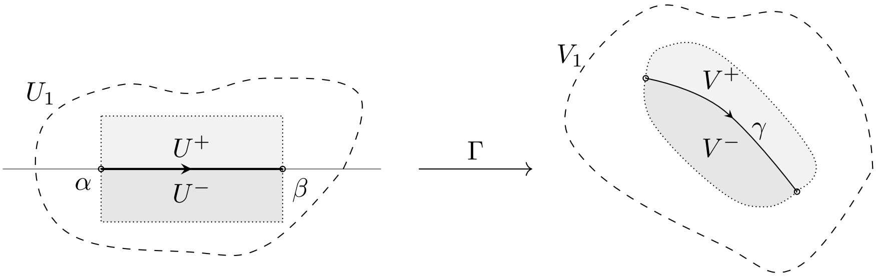
$$\Gamma(\zeta) := \sum_{n \geq 0} a_n (\zeta - t_0)^n$$

serisi ζ-düzleminde $D_\varepsilon(t_0)$ dairesinde yakınsaktır ve $I_\varepsilon(t_0)$'da $\gamma = \Gamma$. Reel-analitik geziler söz konusu olduğunda elbette parametre dönüşümlerimizin de reel-analitik olmasını isteyeceğiz.

$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ reel-analitik gezisine, her $t \in [\alpha, \beta]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise **pürüzsüz analitik gezi**, eğer ayrıca birebirse bir **basit pürüzsüz analitik gezi** diyeceğiz. γ bir basit pürüzsüz analitik geziyse, $C := \gamma([\alpha, \beta])$ eğrisine bir **basit pürüzsüz analitik eğri** , $C^\circ := C \backslash \{\gamma(\alpha), \gamma(\beta)\}$'ya ise bir **açık basit pürüzsüz analitik eğri** diyeceğiz.

Önsav 3.5.32. *$I = [\alpha, \beta]$ olmak üzere, her $\gamma : I \to \mathbb{C}$ basit pürüzsüz analitik gezisi için $\mathbb{C}$'de açık U_1, V_1 kümeleri ve bir biholomorf $\Gamma : U_1 \to V_1$ dönüşümü $I \subset U_1$, $\underline{\gamma} = \gamma([\alpha, \beta]) =: C \subset V_1$ ve $\Gamma | I = \gamma$ olacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. Her şeyden önce γ'nın I'nın bir açık W komşuluğuna analitik genişletilebileceğini biliyoruz. γ birebir ve her $t \in I$ için $\gamma'(t) \neq 0$ olduğundan, gerekirse W açık kümesi bir U_1 açık kümesine daraltılarak Γ ile göstereceğimiz bu genişlemesinin U_1'de birebir ve her $z \in U_1$ için $\Gamma'(z) \neq 0$ olması sağlanır. Dolayısıyla, $V_1 := \Gamma(U_1)$ açık ve $\Gamma : U_1 \to V_1$ biholomorftur. Elbette $\Gamma(I) = C$. □



Şekil 3.15

Önsav 3.5.32'nin söylemi, basit pürüzsüz analitik gezilerin tanımı olarak da alınabilir. Bir $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ gezisi için $[\alpha, \beta]$ aralığını içeren bir U_1 açık kümesi ve bir birebir ve holomorf $\Gamma : U_1 \to \mathbb{C}$ dönüşümü $\gamma = \Gamma|[\alpha, \beta]$ olacak biçimde bulunabiliyorsa γ bir basit pürüzsüz analitik gezidir.

$p > 0$ pozitif sayısını yeterince küçük seçersek,

$$U := \{\zeta \mid \alpha < \operatorname{Re} \zeta < \beta, \quad -p < \operatorname{Im} \zeta < p\}$$

açık dikdörtgeni Önsav 3.5.32'deki U_1 açık kümesinde göreceli kompakt olur. Γ önsavdaki dönüşüm olmak üzere, $V := \Gamma(U)$ olsun. Bu durumda $\Gamma(U \cap (\alpha, \beta)) = \gamma((\alpha, \beta)) = C^\circ$ açık basit pürüzsüz analitik eğridir. Şimdi $U^+ := \{\zeta \in U \mid \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ ve $U^- := \{\zeta \in U \mid \operatorname{Re} \zeta < 0\}$ olsun. $V^\pm := \Gamma(U^\pm)$ dersek, elbette

$$U = U^+ \sqcup (\alpha, \beta) \sqcup U^- \text{ ve } V = V^+ \sqcup C \sqcup V^-.$$

KA II'de biholomorf Γ dönüşümlerinin yönleri koruduğunu, dolayısıyla γ gezisinin sağ yakasını $\Gamma \circ \gamma$'nın sağ yakasına ve γ'nın sol yakasınıysa $\Gamma \circ \gamma$'nın sol yakasına resmettiğini göreceğiz. Durum Şekil 3.15'te gösterildiği gibidir.

Reel eksene göre $\overline{\mathrm{Id}}$ yansıması yardımıyla V'de bir $\Theta_\gamma := V \to V$ **yansıması**

$$\Theta_\gamma(w) := (\Gamma \circ \overline{\mathrm{Id}} \circ \Gamma^{-1})(w) = \Gamma\left(\overline{\Gamma^{-1}(w)}\right) \tag{3.24}$$

olarak tanımlanır. $w = \Gamma(z)$ ve $w^* = \Theta_\gamma(w)$ ise w^* noktası **γ'ya göre** w noktasının **yansıması**dır (veya **simetriği**dir) denir. (3.24) eşitliğini şöyle de okuyabiliriz: $\Theta_\gamma(\Gamma(z)) = \Gamma(\overline{z})$, dd. Γ dönüşümü I'ya, yani x-eksenine göre simetrik z ve $\overline{z}$ noktalarını γ'ya göre simetrik w ve w^* noktalarına resmeder. Θ_γ yansıması iki holomorf ve bir antiholomorf dönüşümün birleşimi olarak antiholomorftur. Diğer yandan, $\overline{\mathrm{Id}} \circ \overline{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$ olduğundan, $\Theta_\gamma \circ \Theta_\gamma = \mathrm{Id}_V$'dir, dd. Θ_γ bir **yer değiştirme**dir, dd. Θ_γ dönüşümü z'yi w'ye resmederse w'yi de z'ye resmeder[7].

[7]İngilizce kaynaklardaki "involution" yerine kullanılmıştır. Olayı "yer değiştirme" veya "değiş tokuş" daha iyi anlatır.

$\Theta_\gamma^2 = \mathrm{Id}_V$ olduğunu şöyle de görebiliriz: $\Theta_\gamma^2 : V \to V$ iki antiholomorf dönüşümün birleşimi olarak holomorftur, tameşlemedir ve C'de özdeşlik dönüşümü olduğundan, V bölgesinde de özdeşlik dönüşümüdür. Şimdi $\gamma_* : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ bir başka analitik gezi olsun ve ayrıca yine $\gamma_*([\alpha_1, \beta_1]) = C$ olsun. Bu kez γ_* bir biholomorf $\Gamma_* : U_* \to V_*$ dönüşümüne genişletilir ve bir $\Theta_{\gamma_*} : V_* \to V_*$ yansımasına ulaşırız. Bu durumda W ile $V \cap V_*$'ın C'yi içeren bağlantılı bileşenini gösterirsek, W'de iki antiholomorf dönüşümün birleşimi olarak $\Theta_{\gamma_*} \circ \Theta_\gamma : W \to W$ biholomorftur ve her $z \in W$ için $(\Theta_{\gamma_*} \circ \Theta_\gamma)(z) = z$ olduğundan, Özdeşlik Teoremi'nden $\Theta_{\gamma_*} \circ \Theta_\gamma = \mathrm{Id}_W$ olur. Dolayısıyla, $\Theta_{\gamma_*} = \Theta_\gamma^{-1} = \Theta_\gamma$ olur. Buradan iki sonuç elde ederiz: Birincisi Θ_γ tanımının rotasal olduğu, dd. reel analitik parametre dönüşümlerinin Θ_γ'yı değiştirmediğidir, ikincisi izi C olan iki analitik gezinin C'nin uygun bir komşuluğunda aynı yansımayı tanımladığıdır. Bundan dolayı, Θ_γ yerine istersek Θ_C veya Θ_{C° yazacağız ve bunlardan **basit pürüzsüz analitik eğrilere göre yansıma** olarak söz edeceğiz.

Örnek 3.5.33. KA II'de Möbius dönüşümlerini incelerken özellikle l doğruları ve C çemberlerine göre yansımalarla ilgileneceğiz.

(a) $a, b \in \mathbb{C}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\gamma(t) := a + bt$ olarak tanımlanan $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bir basit pürüzsüz reel analitik gezidir. $l := \underline{\gamma}$ bir doğrudur. γ dönüşümü $\Gamma(\zeta) := a + b\zeta$ ile bir biholomorf $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümüne genişletilir. $z = \Gamma(\zeta)$ ve $z^* = \Gamma(\overline{\zeta})$ olsun; bu durumda $\Theta_l(z) \equiv \Theta_\gamma(z) = z^*$. Eğer $\zeta \in \mathbb{R}$ ise, açıkça $z \in l$ ve $z^* = z$ olur, dd. l üzerindeki bir noktanın l'ye göre yansıması kendisidir. Şimdi $\zeta \notin \mathbb{R}$ ise, $z \notin l$ olur ve $\langle z^* - a, b\rangle = \mathrm{Re}\,\overline{\zeta} b\overline{b} = \mathrm{Re}\,\zeta b\overline{b} = \langle z - a, b\rangle$ olduğundan, az^* ışını ile l doğrusu arasındaki açı, az ışınının l doğrusu ile yaptığı açıya eşittir. Diğer yandan, $\langle z^* - z, b\rangle = \mathrm{Re}((\overline{\zeta} - \zeta)b\overline{b}) = 0$ olduğundan, z ve z^*'dan geçen doğru l doğrusuna diktir. Dolayısıyla, z'nin l doğrusuna göre yansıması olan z^* noktası z'den l'ye çizilen dikme üzerindedir, ters yakadadır ve z ve z^*'ın l'ye uzaklıkları birbirine eşittir. Böylece, analitik olarak tanımladığımız, z noktasının l doğrusuna göre yansıması tam da geometrik tanımla örtüşür.

(b) a-merkezli r yarıçaplı çember üzerinde $\gamma(t) = a + re^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ basit pürüzsüz reel analitik eğrisini alalım. $\Gamma(\zeta) = a + re^{i\zeta}$ olacaktır. $C^\circ = \gamma((\alpha, \beta))$ basit pürüzsüz analitik eğrisinin yukarıdaki gibi bir simetrik V komşuluğunu seçelim. ζ için $z = \Gamma(\zeta) \in V$ ise $z^* = \Gamma(\overline{\zeta}) \in V$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $\zeta = x + iy$ olmak üzere, $z - a = re^{i\zeta} = re^{-y}e^{ix}$ ve $z^* - a = re^{i\overline{\zeta}} = re^{y}e^{ix}$ olduğundan, z^* yansıması az ışını üzerindedir ve ayrıca,

$$(z^* - a)\overline{(z - a)} = r^2, \tag{3.25}$$

dolayısıyla $|z - a| \cdot |z^* - a| = r^2$ olur. Bu ise geometriden bildiğimiz yansıma tanımı ile örtüşür. (3.25) denkleminden,

$$z^* = \Theta_\gamma(z) = \frac{a\overline{z} + r^2 - |a|^2}{\overline{z} - \overline{a}} = \overline{\left(\frac{\overline{a}z + r^2 - |a|^2}{z - a}\right)} =: \overline{T(z)}$$

elde ederiz. T dönüşümü, KA II'de ayrıntılı bir biçimde inceleyeceğimiz türden bir Möbius dönüşümüdür. Özel olarak $a = 0$ ve $r = 1$ ise, $\mathbb{S}^1 = C_1$'e göre yansıma $\Theta_{C_1}(z) = 1/\overline{z}$ şeklini alır.

Şimdi bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. Eğer bir $z \in \partial B$ için z-merkezli bir D_z dairesi, $D_z \backslash \partial B$, birisi B'de, ona D_z^+ diyelim, diğeri $\mathbb{C} \backslash B$'de, ona da D_z^- diyelim, olan boştan farklı iki bölgeden oluşacak biçimde bulunabiliyorsa ∂B

sınırı z**'de serbest**tir denir. Eğer bir γ gezisi için $\underline{\gamma} \subset \partial B$ ve her $z \in \underline{\gamma}$ (veya $z \in \underline{\gamma}^\circ$) için ∂B sınırı z'de serbestse $\underline{\gamma}$ (veya $\underline{\gamma}^\circ$) B'nin bir **serbest sınır parçası**dır denir. Eğer ∂B her $z \in \partial B$'de serbestse ∂B **serbest**tir denir. Şimdi, yalınlık açısından, $C^\circ := \underline{\gamma}^\circ$ yazalım. C° eğrisi B'nin serbest sınır parçasıysa, $V^+ := \bigcup_{z \in C^\circ} D_z^+$ ve $V^- := \bigcup_{z \in C^\circ} D_z^-$ olmak üzere, $V = V^+ \sqcup C^\circ \sqcup V^-$, $V^+ \subset B$ ve $V^- \subset \mathbb{C} \backslash B$ olur. Bu durumda B, γ'nın **bir yanına düşer** denir.

Eğer, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ bir basit pürüzsüz analitik gezi ve aynı zamanda $C = \gamma([\alpha, \beta])$ ise bir B bölgesinin bir serbest sınır parçası olsun. Bu durumda x-eksenine göre simetrik bir U bölgesi ile C'ye göre simetrik bir V bölgesi ve bir biholomorf $\Gamma : U \to V$ dönüşümü $\Gamma(U^\pm) = V^\pm$, $V^+ \subset B$ ve $\Gamma((\alpha, \beta)) = C^\circ$ olacak biçimde vardır. Bu veri ve gösterimler izleyen önerme ve kanıtında saklı tutulsunlar.

Önerme 3.5.34. *C basit pürüzsüz analitik eğrisi B bölgesinin bir serbest sınır parçası olsun. Ayrıca, $f \in \mathcal{C}(B \cup C^\circ)$, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve her $w \in C^\circ$ için $f(w) \in \mathbb{R}$ ise, f fonksiyonu her $w^* \in V^-$ için $\hat{f}(w^*) := \overline{f(\Theta_\gamma(w^*))}$ olarak tanımlanarak $B \cup C^\circ \cup V^-$'ye holomorf genişletilebilir.*

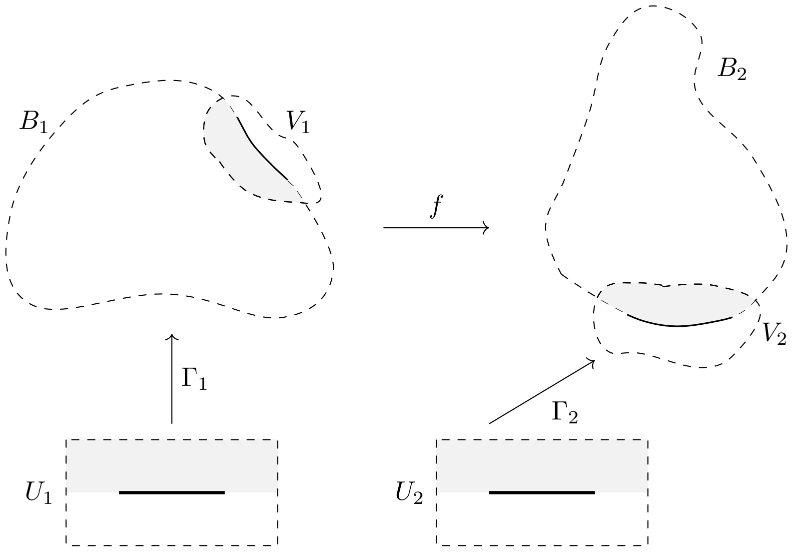
Kanıt. U ve V açık kümeleri, $\Gamma : U \to V$ biholomorf dönüşümü yukarıdaki gibi olsunlar. $U^+ \sqcup (\alpha, \beta)$'da $g := f \circ \Gamma$ olarak tanımlanan $g : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu Schwarz'ın küçük yansıma ilkelerinden herhangi biri ile U'ya holomorf genişletilebilir. Bu genişlemeyi $\hat{g}$ ile gösterirsek, $\overline{z} \in U^-$ için $\hat{g}(\overline{z}) = \overline{g(z)}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\hat{f} := \hat{g} \circ \Gamma^{-1}$ fonksiyonu f'yi $B \cup C^\circ \cup V^-$'ye holomorf genişletir. Şimdi $w^* \in V^-$ keyfi verilsin. Tek olarak belirli bir $z \in U^+$ ile $w = \Gamma(z)$ ve $w^* = \Gamma(\overline{z})$ olur; ayrıca tanım gereği $w^* = \Theta_\gamma(w)$ ve $w = \Theta_\gamma(w^*)$. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \hat{f}(w^*) &= \hat{f}(\Gamma(\overline{z})) = \hat{g}(\Gamma^{-1}(\Gamma(\overline{z}))) = \hat{g}(\overline{z}) \\ &= \overline{g(z)} = \overline{f(\Gamma(z))} = \overline{f(w)} = \overline{f(\Theta_\gamma(w^*))}. \end{aligned}$$

□

Not 3.5.35. Önerme 3.5.34'te "$f \in \mathcal{C}(B \cup C^\circ)$" ve "her $z \in C^\circ$ için $f(z) \in \mathbb{R}$" yerine "her $z \in C^\circ$ için $\exists \lim_{\zeta \in B, \zeta \to z} f(z) \in \mathbb{R}$" de yazılabilir. Bazı kaynaklarda bu önerme ve Teorem 3.5.36 bu şekliyle karşımıza çıkar. Ayrıca, bu önermede $C = \partial B$ olabilir.

Teorem 3.5.36 (Schwarz'ın Büyük Yansıma Teoremi)**.** *$B_1, B_2 \subset \mathbb{C}$ bölgeler, $C_i \subset \partial B_i$ basit pürüzsüz analitik eğrisi ise B_i'nin bir serbest sınır parçası olsun. $f \in \mathcal{C}(B_1 \sqcup C_1^\circ) \cap \mathcal{H}(B_1)$, $f(B_1) \subset B_2$ ve $f(C_1^\circ) \subset C_2^\circ$ olsun. Bu durumda C_i°'lere göre simetrik, açık V_i komşulukları ve bir $\hat{f} : B_1 \cup V_1 \to B_2 \cup V_2$ holomorf dönüşümü $\hat{f}|B_1 = f$ ve C_1'e göre birbirinin yansıması olan her $z_1, z_2 \in V_1$ için $w_1 = \hat{f}(z_1)$, $w_2 = \hat{f}(z_2)$ noktaları C_2'ye göre birinin yansıması olacak biçimde; özetle her $z_1 \in V_1$ için $\hat{f}(\Theta_{C_1}(z_1)) = \Theta_{C_2}(\hat{f}(z_1))$ olacak biçimde vardır.*



Şekil 3.16

Kanıt. $i = 1, 2$ için C_i kümeleri, $\gamma_i : [\alpha_i, \beta_i] \to \mathbb{C}$ basit pürüzsüz analitik gezilerinin izleri olsun. U_i açık dikdörtgenleri, V_i açık kümeleri ve $\Gamma_i : U_i \to V_i$ biholomorf dönüşümleri yukarıda olduğu gibi seçilsinler. Bu seçimde $V_i^+ \subset B_i$. Şimdi $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ olmak üzere, $U_1^+ \sqcup I_1$'de g dönüşümü $g := \Gamma_2^{-1} \circ f \circ \Gamma_1$ olarak seçilsin. Varsayımlardan $g \in \mathcal{C}(U_1^+ \sqcup I_1)$, $g \in \mathcal{H}(U_1^+)$ ve $g(I_1) \subset I_2$, dolayısıyla g fonksiyonu I_1'de $\mathbb{R}$-değerli olduğundan, Teorem 3.5.25'ten dolayı g fonksiyonu her $z \in U_1^+$ için $\hat{g}(\overline{z}) := \overline{g(z)}$ olarak bir $\hat{g} \in \mathcal{H}(U_1)$'e holomorf genişletilir. $\hat{f} := \Gamma_2 \circ \hat{g} \circ \Gamma_1^{-1}$ aranan fonksiyondur. $\square$

Problemler

Problem 3.5.1. $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ olsun. $f > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için $f^{(n)} > 0$ ise, f'nin reel analitik olduğunu gösteriniz.

Problem 3.5.2. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ olsun. f'nin reel analitik olması için gerek ve yeter koşul her $a \in I$ için $K > 0$ ve $\delta > 0$ sayılarının her $x \in I \cap I_\delta(a)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq K \cdot \frac{n!}{\delta^n}$$

olacak bulunabilmesidir, kanıtlayınız. Not: Bir yön analiz derslerinde kanıtlanır, diğer yön için kompleks analiz zorunludur.

Problem 3.5.3. D bir daire, $f \in \mathcal{H}(D)$ ve her $a \in D$ için $r(a)$ ise f'nin a noktasındaki seri açılımının yakınsaklık yarıçapı olsun. Her $z_1, z_2 \in D$ için $|r(z_1) - r(z_2)| \leq |z_1 - z_2|$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.5.4. $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $r \in \mathbb{R}$ ve bir n_0'dan itibaren her $a_n \geq 0$ ise r noktasının f'nin bir tekil noktası olduğunu gösteriniz.

Problem 3.5.5. $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ ve $f \in \mathcal{H}(H(0; r_1, r_2))$ olsun. Bir (p_n) polinom dizisi $H(0; r_1 r_2)$ halkasında f fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaksa f fonksiyonunun D_{r_2} dairesine holomorf genişletilebileceğini gösteriniz.

Problem 3.5.6. $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n!}}{n^2}$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{D}}$'de süreklidir; yine de her $a \in \partial\mathbb{D}$ noktası f'nin bir tekil noktasıdır.

Problem 3.5.7. Weierstrass serisi. $(a_n) \subset (0, +\infty)$ ve $\overline{\lim} a_n = 1$ ise,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2^n}$$

serisinin doğal sınırının $\partial\mathbb{D}$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 3.5.8. Bir $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonu, $\lim |z_n| = 1$ koşulunu sağlayan her $(z_n) \subset \mathbb{D}$ dizisi için $\lim |f(z_n)| = +\infty$ olacak biçimde var mıdır?

Problem 3.5.9. $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ yakınsak ve $\{b_n\}_{n\geq 1}$ kümesi $\partial\mathbb{D}$'de yoğun ise, $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{z - b_n}$ serisinin $\mathbb{D}$'de bir holomorf fonksiyon tanımladığını ve $\partial\mathbb{D}$'nin bu fonksiyonun bir doğal sınırı olduğunu gösteriniz.

Problem 3.5.10. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ sınırlı olsun ve sanal eksene sürekli genişletilebilsin. Bir $M > 0$ ile her $y \in \mathbb{R}$ için $|f(iy)| \leq M$ ise, her $z \in \mathbb{C}$ için $|f(z)| \leq M$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.5.11. $i = 1, 2$ için $B_i \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f_i \in \mathcal{H}(B_i)$ olsun. I dejenere olmamış bir açık aralık, $I \subset B_1 \cap B_2$ ve $f_1|I = f_2|I$ ise, $B_1 \cap B_2$'de $f_1 = f_2$ diyebilir miyiz?

Problem 3.5.12. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi x-eksenine göre simetrik ve $f \in \mathcal{H}(B)$ ise, aşağıdaki önermelerin denk olduğunu gösteriniz:
(1) Her $z \in B$ için $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.
(2) $B \cap \mathbb{R}$'nin bir I bağlantılı bileşeni için $f(I) \subset \mathbb{R}$.

Problem 3.5.13. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi x-eksenine göre simetrik ve $f \in \mathcal{H}(B)$ ise, tek olarak belirli ve $B \cap \mathbb{R}$'de reel değerler alan $g, h \in \mathcal{H}(B)$ ile $f = g + ih$ olduğunu gösteriniz.

3.6 $\mathbb{C}_\infty$'da Analiz ve Riemann Küresi

$\mathbb{C}$ bir cisim olduğundan, akla ilk gelebilecek sorulardan biri $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$'un $\mathbb{C}$'deki işlemleri koruyarak bir cisim yapılıp yapılamayacağıdır. Yanıt hayırdır. Yine de bazı işlemleri yararlı olacak biçimde tanımlayacağız. $\mathbb{C}_\infty^* := \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ olsun.

Uzlaşma:

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \mathbb{C} \quad z + \infty := \infty =: \infty + z \\
&\forall z \in \mathbb{C}^*_\infty \quad z \cdot \infty := \infty =: \infty \cdot z \\
&\forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{z}{\infty} := 0 \\
&\forall z \in \mathbb{C}^*_\infty \quad \frac{z}{0} = \infty.
\end{aligned}$$

Burada $\infty \pm \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ kavramlarını tanımlamadığımızı önemle belirtelim.

X herhangi bir yerel kompakt Hausdorff topolojik uzaysa, bu uzaya kendisinde olmayan, ∞ ile gösterdiğimiz bir ögeyi katarak bir kompakt $X_\infty := X \sqcup \{\infty\}$ topolojik uzayına ulaşılır (bkz. (5.2.21)). $K \subset X$ kompakt altküme olmak üzere, $(X \backslash K) \sqcup \{\infty\}$ tipinde kümeler ∞ noktasının bir komşuluk bazını oluşturur.

Biz şimdi $(\mathbb{C}, d)$ yerel kompakt metrik uzayından yola çıkacağız. Bu uzayın $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ tek nokta kompaktlaştırması kompleks analizde önemlidir. $\mathbb{C}_\infty$ daima $\mathcal{T}_\infty$ topolojisiyle alınacaktır. $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ uzayında tanımlanan topolojide $U \subset \mathbb{C}_\infty$kümesinin bir açık küme olması şu anlama gelir:

(i) $\infty \notin U$ ve U kümesi $\mathbb{C}$'de açıktır, veya

(ii) $\infty \in U$ ve $\mathbb{C}_\infty \backslash U$ kümesi $\mathbb{C}$'de kompakttır.

Her $r > 0$ gerçel sayısı için

$$D_r(\infty) := \mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}_{\frac{1}{r}}(0) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > \frac{1}{r} \right\} \cup \{\infty\}$$

kümesi $\mathcal{T}_\infty$'nın tanımı gereği bir açık kümedir ve buna ∞-merkezli r-yarıçaplı açık daire diyelim. İlk bakışta üstteki $D_r(\infty)$ tanımı yadırganabilir; ancak bu tanım $r < R$ ise $D_r(\infty) \subsetneq D_R(\infty)$ bağıntısını korur ve alışkanlıklarımıza ters düşmez. Uzlaşmamız gereği $\frac{1}{0} = \infty$ ve $\frac{1}{\infty} = 0$ olduğundan,

$$\chi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty, \ \chi(z) := \frac{1}{z} \tag{3.26}$$

dönüşümü topolojiktir. $\chi \circ \chi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_\infty}$, dd. $\chi^{-1} = \chi$ olduğunu vurgulayalım. Ayrıca, χ dönüşümü $D_r(\infty)$'u topolojik olarak $D_r(0)$'a resmeder.

Not 3.6.1. $\mathbb{C}_\infty$ tek nokta kompaktlaştırmasını $\mathbb{C}$ cismi üzerinden $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ **projektif doğru**su olarak da düşünebiliriz. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}^2$'nin 1 boyutlu alt vektör uzaylarından oluşur. $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ve (z_0, z_1) ise p'nin bir tabanıysa, bu, genellikle $p = (z_0 : z_1)$ olarak gösterilir ve z_0, z_1'e p'nin **homojen koordinatları** denir. $\varphi(p) := \frac{z_1}{z_0}$ ile tanımlanan $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü bir tameşlemedir. Bu nedenle, kimi yazar $\mathbb{C}_\infty$ yerine $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ veya yalın olarak $\mathbb{P}^1$ yazar.

$\mathbb{C}_\infty$'da bağlantılı kümeler, bölgeler, kompakt altkümeler ve benzeri topolojik kavramlar herhangi bir topolojik uzayda nasıl tanımlanıyorlarsa öyle tanımlanırlar. Burada dikkat edeceğimiz şey bir $A \subset \mathbb{C}$ için bağlantılılıktan, açıklık veya kapalılıktan veya kapanış veya sınırından söz ettiğimizde *hangi* topolojik uzaya göre, $\mathbb{C}$'ye mi yoksa $\mathbb{C}_\infty$'a göre mi, bunu belirtmeye özen gösterilmelidir. Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı altküme ise, her iki topolojik uzaya göre bu kavramlar örtüşürler. A kümesinin $\mathbb{C}_\infty$'daki sınırını $\partial_\infty A$ ile $\mathbb{C}_\infty$'daki kapanışını ise $\overline{A}_\infty$ ile gösterelim. A sınırlıysa, $\partial A = \partial_\infty A$ ve $\overline{A} = \overline{A}_\infty$. Diğer yandan, A sınırlı değilse $\partial_\infty A = \partial A \cup \{\infty\}$ ve $\overline{A}_\infty = \overline{A} \cup \{\infty\}$ olduğu kolayca görülür. $\mathbb{C}$'de bize birbirine koşut iki l_1, l_2 doğrusu verilsin ve bunlar arasındaki açık şeridi S ile gösterelim. S sınırlı değildir. $\partial S = l_1 \cup l_2$ ve ∂S *bağlantılı değilken* $\partial_\infty S = \partial S \cup \{\infty\}$ *bağlantılıdır* ve bu nedenle, S basit bağlantılıdır. $\mathbb{C}_\infty$ bir kompakt Hausdorff uzayı olduğundan, her kapalı altkümesi kompakttır.

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $\infty \in U$, $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ ve $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ ise, okur

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \alpha$$

olduğunu kolayca görür. Örneğin $\lim_{z\to\infty} z \sin z^{-1} = \lim_{z\to 0} z^{-1} \sin z = 1$.

Biraz ileride s. 292'de $\mathbb{C}_\infty$'da $\mathcal{T}_\infty$ topolojisini veren ve kiriş metriği diyeceğimiz bir d_∞ metriği tanımlayacağız. $\overline{D}_r$ kompakt kümelerinin $\mathbb{C}_\infty$'daki tümleyenleri $\mathcal{T}_\infty$'a göre ∞'un bir komşuluk bazı oluşturur. Bu durumda bir $(a_n) \subset \mathbb{C}_\infty$ dizisi için $\lim a_n = \infty$ olması her $r > 0$ sayısına karşılık bir n_r doğal sayısının her $n \geq n_r$ için $|a_n| > r$ olacak biçimde bulunabilmesi demektir. Açıklayacağımız metrikle $\lim d_\infty(a_n, \infty) = 0$ olması gerektiğinden, en azından d_∞ için bir ipucu yakalamış oluyoruz: z kompleks sayısı orijinden uzaklaştıkça d_∞ metriğine göre z noktası ∞ noktasına yakınlaşmalı, dd. $d_\infty(z, \infty)$ küçülmelidir.

$\mathbb{R}^3$ uzayımızda, merkezi orijinde ve yarıçapı 1 olan

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

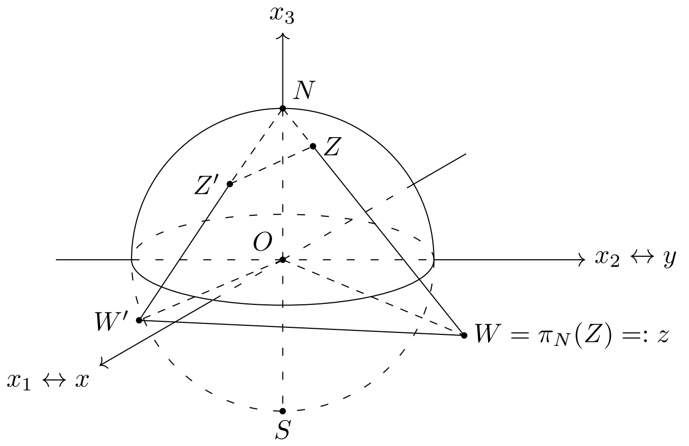
küre yüzeyimizi ele alalım. $\mathbb{S}^2$ küre yüzeyimizin noktalarını büyük harflerle gösterelim. Örneğin $N := (0, 0, 1)$ kuzey kutbumuzdur. $U_N := \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ olsun.

$D^2 := \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ olsun. Bu kümeyi $\mathbb{R}^3$'teki göreli topolojisiyle alırsak, $\pi_2(x_1, x_2, 0) := (x_1, x_2)$ ile tanımlanan $\pi_2 : D^2 \to \mathbb{C}$ dönüşümü topolojiktir. Bu nedenle, D^2'ye $\mathbb{C}$ gözü ile bakabiliriz ve $D^2 \equiv \mathbb{C}$ özdeşlemesini yapabiliriz; dolayısıyla

$$x_1 + ix_2 \equiv (x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2, 0)$$

özdeşlemelerini kullanmakta bir sakınca görmeyeceğiz.

$Z = (x_1, x_2, x_3)$ küre yüzeyimizin N kuzey kutbundan farklı herhangi bir noktasıysa, $\mathbb{R}^3$'te N ve Z noktasından geçen doğru $\mathbb{C}$ düzlemimizi tam bir $W = (x, y, 0) = x + iy$ noktasında keser ve tersine bu düzlemdeki herhangi bir W noktasını kuzey kutbu ile birleştiren doğru küre yüzeyimizi N'den farklı bir



Şekil 3.17: Riemann küresi.

tek Z noktasında keser. Böylece $\pi_N(Z) := W$ ile bir $\pi_N : U_N \to \mathbb{C}$ tameşlemesi tanımlanır. Okur

$$\pi_N(Z) = \pi_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right) = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}. \tag{3.27}$$

ve $\pi_N^{-1} : \mathbb{C} \to U_N$ için

$$\pi_N^{-1}(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \tag{3.28}$$

olduğunu kolayca görür. π_N dönüşümünü

$$\pi_N(N) = \pi(0,0,1) := \infty$$

olarak bir $\pi_N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümüne genişletelim. Bu genişletilmiş dönüşüm, göreceli topolojisiyle alınmış $\mathbb{S}^2$ uzayından $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ topolojik uzayına bir topolojik dönüşümdür; π_N'nin N noktasında ve π_N^{-1}'in ise ∞ noktasında sürekliliklerini görmeyi okura bırakıyoruz.

Bu yaklaşımda kuzey kutbunun güney kutbuna karşın bir önceliği yoktur. $S := (0,0,-1)$ küremizin güney kutbu olmak üzere, $U_S := \mathbb{S}^2 \backslash \{S\}$ olsun. Bu kez S noktası ve küre yüzeyimizin $Z = (x_1, x_2, x_3)$ noktasından geçen ışından yola çıkarsak U_S'den $\mathbb{C}$'ye

$$\pi_S(x_1, x_2, x_3) := \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right) = \frac{x_1 + ix_2}{1+x_3}$$

olarak tanımlanan $\pi_S : U_S \to \mathbb{C}$ topolojik dönüşümünü elde ederiz; burada (3.28)'den farklı olarak paydada $1 - x_3$ yerine $1 + x_3$ olduğuna dikkat ediniz.

$\varphi_S := \overline{\pi_S}$ dersek,

$$\varphi_S : U_S \to \mathbb{C},\ \ z' = \varphi_S(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}$$

bir topolojik dönüşümdür ve her $(x_1, x_2, x_3) \in U_N \cap U_S$ için (3.28) ile

$$\pi_N(x_1, x_2, x_3) \cdot \varphi_S(x_1, x_2, x_3) = 1 \tag{3.29}$$

eşitliği geçerlidir. $U_{NS} := U_N \cap U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ ve $\pi_N(U_{NS}) = \pi_S(U_{NS}) = \varphi_S(U_{NS}) = \mathbb{C}^*$ olduğu apaçıktır. Diğer yandan, her $z \in \mathbb{C}^*$ için (3.29) ile $z \cdot (\varphi_S \circ \pi_N^{-1})(z) = 1$, dd.

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : z \cdot (\varphi_S \circ \pi_N^{-1})(z) = 1, \text{ dd. } \varphi_S \circ \pi_N^{-1} = \chi.$$

π_N ve π_S dönüşümlerine **küresel izdüşümler** (veya **steografik izdüşümler**) denir. Benzer davranış sergileyen bu izdüşümlerden π_N izdüşümüne odaklanacağız.

$l \subset \mathbb{C}$ bir doğru olmak üzere, $l_\infty := l \cup \{\infty\}$ kümesine **$\mathbb{C}_\infty$'da bir doğru** diyelim. $\mathbb{C}_\infty$'da bir **Möbius çemberi**nden $\mathbb{C}$'de bir çember veya $\mathbb{C}_\infty$'da bir l_∞ doğrusunu anlayacağız[8]. $E \subset \mathbb{R}^3$ bir düzlem, $E \cap \mathbb{S}^2 \neq \emptyset$ ve bu arakesit tek noktadan oluşmasın. Bu tip arakesitlere $\mathbb{S}^2$ **Riemann küresinin çemberleri** diyeceğiz. x_1x_2-düzlemine paralel olan $P_t := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = t\}$, $(-1 < t < 1)$ düzlemlerinin $\mathbb{S}^2$ ile arakesitleri E_t enlemleridir ve π_N küresel izdüşümü bu enlemleri $\mathbb{C}$'de merkezi orijinde olan çemberlere resmeder. $\mathbb{R}^3$'te x_3-eksenini içeren düzlemlerin $\mathbb{S}^2$ küresi ile arakesitleri N, S kutuplarından geçen meridyenlerimizdir ve π_N küresel izdüşümü bu meridyenleri $\mathbb{C}_\infty$'da orijinden geçen doğrulara resmeder. Bu davranış geneldir: π_N küresel izdüşümü $\mathbb{S}^2$ küresindeki çemberleri $\mathbb{C}_\infty$'nun Möbius çemberlerine, π_N^{-1} ise $\mathbb{C}_\infty$'daki Möbius çemberlerini $\mathbb{S}^2$ küresinin çemberlerine resmeder. Bunu kanıtlayacağız.

Önce düzlemde bir

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{3.30}$$

karesel biçiminin çözümlerinin ne olduğunu araştıralım: Bu denklem

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c =: d$$

denklemine denktir. Dolayısıyla, (3.30) denkleminin çözüm yerleri $d < 0$ için boş küme, $d = 0$ için $\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ noktası, $d > 0$ içinse merkezi $\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ noktası ve yarıçapı $\sqrt{d}$ olan bir çemberdir.

[8] Möbius çemberleri ve Möbius dönüşümleri KA II'de ayrıntılı biçimde işlenecektir.

Teorem 3.6.2. *$\pi_N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}_\infty$ küresel izdüşümü $\mathbb{S}^2$ küresinin çemberlerini $\mathbb{C}_\infty$'un Möbius çemberlerine ve tersine π_N^{-1} ise $\mathbb{C}_\infty$'un Möbius çemberlerini $\mathbb{S}^2$ küresinin çemberlerine resmeder. π_N kuzey kutbundan geçen çemberleri $\mathbb{C}_\infty$'un doğrularına resmederken tersine π_N^{-1} ise bu doğruları $\mathbb{S}^2$'nin N kuzey kutbundan geçen çemberlerine resmeder.*

Kanıt. (1) Küre yüzeyindeki C çemberimiz, $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ ile tanımlanan P düzlemi ile $\mathbb{S}^2$ küre yüzeyimizin arakesiti olsun. $(x_1, x_2, x_3) \in P \cap \mathbb{S}^2$ olması, $\pi_N(x_1, x_2, x_3) = (x, y) = z$ olmak üzere, (3.28) denklemi ile

$$a\frac{2x}{|z|^2+1} + b\frac{2y}{|z|^2+1} + c\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = d$$

olması ve buradan da

$$(c-d)(x^2+y^2) + 2ax + 2by - (c+d) = 0 \tag{3.31}$$

olması demektir. $c-d = 0$ için (3.31) denklemi $\mathbb{C}$'de bir l doğrusu tanımlar. Diğer yandan, $c = d$ durumunda $N \in C$ ve $\pi_N(N) = \infty$ olduğundan, $\pi_N(C) = l_\infty$ Möbius çemberidir. $c \neq d$ içinse (3.31) denklemi (3.30) tipindedir ve ya çözümü yoktur ya da düzlemde bir nokta veya bir C' çemberi tanımlar. C çemberi birden fazla nokta içerdiği ve π_N birebir olduğu için ilk iki seçenek olamaz ve $\pi_N(C) = C'$ düzlemde bir çemberdir.

(2) Tersine düzlemde $x^2+y^2+a'x+b'y+d' = 0$ ile tanımlanan bir C' çemberi verilsin. Bu çember $\mathbb{S}^2$'deki hangi C çemberinin π_N altında resmi olabilir diye düşündüğümüzde ipuçlarını (3.31) denkleminde buluyoruz. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sayılarını $2a = a'$, $2b = b'$, $c-d = 1$ ve $-(c+d) = d'$ olarak seçersek, yukarıdaki irdelemelerden gördüğümüz gibi C' çemberi π_N altında $\mathbb{S}^2$ ile $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ ile tanımlanan düzlemin arakesiti olan C küresel çemberinin resmidir.

Düzlemde l doğrusu $a'x+b'y = d'$ denklemi ile verildiğinde ise $2a = a'$, $2b = b'$, $c = d = \frac{d'}{2}$ olmak üzere, $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ile tanımlanan düzlemin $\mathbb{S}^2$ ile arakesiti olan C çemberi N'den geçer ve $\pi_N(C) = l_\infty$. □

Her $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dönüşümüne bir $f := \pi_N \circ F \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü doğal olarak karşılık getirilir. Biz ileride KA II'de işimize yarayacak bir durumu ele alacağız.

Önerme 3.6.3. *$R_{1\pi} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dönüşümü $\mathbb{S}^2$ küre yüzeyini x_1-ekseni etrafında π kadar döndüren dönüşüm ise, dd. $R_{1\pi}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3)$ ise, $\pi_N \circ R_{1\pi} \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü χ dönüşümüdür, dd. $(\pi_N \circ R_{1\pi} \circ \pi_N^{-1})(z) = 1/z = \chi(z)$*

Kanıt. $Z = (x_1, x_2, x_3)$ için $z = \pi_N(Z)$ olsun. $R_{1\pi}(Z) = (x_1, -x_2, -x_3)$ olduğundan, $f := \pi_N \circ R_{1\pi} \circ \pi_N^{-1}$ dersek, (3.27) eşitliğinden, $w = f(z)$ olmak üzere,

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \text{ ve } w = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $1 = zw = zf(z)$ ve buradan da $f(z) = 1/z$. □

Sonuç 3.6.4. *$\chi : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty, z \mapsto \frac{1}{z}$ dönüşümü Möbius çemberlerini Möbius çemberlerine resmeder.*

Kanıt. Önermedeki gösterimlerle $\chi = \pi_N \circ R_{1\pi} \circ \pi_N^{-1}$. Teorem 3.6.2'den dolayı, π_N^{-1} dönüşümü Möbius çemberlerini $\mathbb{S}^2$'nin çemberlerine resmeder, $R_{1\pi}$ bir rotasyon olduğundan, çemberleri yine çemberlere resmeder; yine Teorem 3.6.2'den ise π_N, bu çemberleri Möbius çemberlerine resmeder. □

$\mathbb{S}^2$ uzayı $\mathbb{R}^3$'teki göreli topoloji ve $\mathbb{C}_\infty$ ise $\mathcal{T}_\infty$ ile ele alındığında π_N *bir topolojik dönüşümdür ve biz* $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ *ve* $\mathbb{R}^3$*'teki göreli topolojisiyle* $\mathbb{S}^2$ *topolojik uzaylarına aynı gözü ile bakabiliriz.* $\mathbb{S}^2$'nin bu topolojisi, d ile $\mathbb{R}^3$'ün Öklid metriği gösterilmek üzere, $d|\mathbb{S}^2$ metriğinden kaynaklanır. $\mathbb{C}_\infty$ üzerindeki d_∞ metriğimiz, π_N ile $\mathbb{C}_\infty$'a taşınan $d|\mathbb{S}^2$ metriği olacak. Özetle $z, z' \in \mathbb{C}_\infty$ ve $\pi_N^{-1}(z) = Z = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\pi_N^{-1}(z') = Z' = (x_1', x_2', x_3')$ ise

$$d_\infty(z, z') := d(Z, Z') = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - x_i')^2}$$

olarak tanımlanır. $d_\infty(z, z')$ tam da küre yüzeyimizin Z ve Z' noktalarını birbirine bağlayan kirişin uzunluğudur; bu nedenle, d_∞ metriğine **kirişsel metrik** denir[9]. (3.28)'den, $z, z' \in \mathbb{C}$ ise

$$d_\infty(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}$$

ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$d_\infty(\infty, z) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}$$

olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz.

Bu metrik beklentimizi karşılar: Kompleks düzlemde z noktası orijinden uzaklaştıkça ∞ noktamıza yakınlaşır.

$a \in \mathbb{C}_\infty$ ve $r > 0$ için

$$D_\infty(a, r) := \{z \in \mathbb{C}_\infty \,|\, d_\infty(a, z) < r\}$$

ile $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$ metrik uzayındaki a-merkezli r-yarıçaplı açık daireyi gösterelim. Bu dairenin d_∞ sınırıysa $C_\infty(a, r) := \{z \in \mathbb{C}_\infty \,|\, d_\infty(a, z) = r\}$ kümesidir.

[9]Kirişsel metrik $\mathbb{S}^2$'nin küresel metriğinden farklıdır. Z ve Z' noktalarından geçen bir tek büyük çember vardır. Bu çember üzerindeki Z noktasını Z' noktasına bağlayan yay parçalarından küçük olanının uzunluğuna bu noktaların birbirine olan **küresel uzaklığı** denir.

Daima $d_\infty(z,w) \leq 2$ olduğundan, $r < 2$ durumlarına odaklanacağız. $\mathbb{C}_\infty$'un $D_\infty(a,r)$ ve $C_\infty(a,r)$ altkümeleri nasıl bir şeydirler?

$A := \pi_N^{-1}(a)$ olmak ve d ise $\mathbb{R}^3$'ün Öklid metriğini göstermek üzere, bu durumda $C'_\infty(a,r) := \pi_N^{-1}(C_\infty(a,r)) = \big\{Z \in \mathbb{R}^3 \,|\, d(Z,A) = r\big\}$ kümesi $\mathbb{S}^2$ küre yüzeyinin bir çemberidir. Dolayısıyla, Teorem 3.6.2'den dolayı, $C_\infty(a,r)$'ye $\mathbb{C}$'de bilindik anlamda bir $C_\rho(b)$ çemberi ya da $\mathbb{C}_\infty$'da bir l_∞ doğrusudur. Eğer $a = \infty$ veya $a = 0$ ise $b = 0$, diğer durumlarda $b \neq a$. Her durumda $C_\rho(b)$ çemberi veya l_∞ genişletilmiş doğrusu $\mathbb{C}_\infty$ kümesini iki ayrık bölgeye ayırır: Ya bilindik anlamda bir çemberin içine ve dışına, ya da bir l doğrusunu belirlediği iki yarıdüzleme ayırır. Bu durumda $D_\infty(a,r)$ dairesi $a \in \mathbb{C}$ ise bilindik anlamda a'yı içeren bir $D_\rho(b)$ dairesi, $a = \infty$ ise $\mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}_\rho(0)$ ya da a'yı içeren bir yarıdüzlem tipindedir. Aşağıdaki önerme apaçıktır:

Önerme 3.6.5. *(i) $a \in \mathbb{C}$ ise, her $D_\varepsilon(a)$ dairesi bir $D_\infty(a,\eta)$ açık dairesini ve tersine her $D_\infty(a,\varepsilon)$ açık topu bir $D_\eta(a)$ dairesini içerir.*

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\mathbb{C}$'de bir kompakt K_ε kümesi $\mathbb{C}_\infty \backslash K_\varepsilon \subset D_\infty(\infty,\varepsilon)$ olacak biçimde bulunabilir.

(iii) Her kompakt $K \subset \mathbb{C}$ kümesine karşılık bir $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$ pozitif gerçel sayısı $D_\infty(\infty,\varepsilon) \subset \mathbb{C}_\infty \backslash K$ olacak biçimde bulunabilir.

Bu önerme $\mathbb{C}_\infty$'da bilineni başka sözlerle dile getirir: $\mathbb{C}_\infty$'un daha önce tanımlanan $\mathcal{T}_\infty$ topolojisi orada d_∞ metriğinin tanımladığı topolojidir. $(\mathbb{C}, d)$ ve $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$'un her ikisi de tam metrik uzaylardır, her iki metrik de $\mathbb{C}$'de aynı topolojiyi tanımlarlar. Buna karşın $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi d_∞ metriğine göre bir Cauchy dizisidir ve $\lim d_\infty(n,\infty) = \infty$ iken aynı dizi d metriğine göre bir Cauchy dizisi değildir! d_∞ metriğine göre yakınsaklıklardan **kirişsel yakınsak**lıklar olarak söz edeceğiz. Örneğin $A \subset \mathbb{C}_\infty$, $(f_n) \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{C}_\infty)$ ve $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{C}_\infty)$ olmak üzere, $\lim_n \sup_{z\in A} d_\infty(f_n(z), f(z)) = 0$ ise, (f_n) dizisi A'da f'ye **kirişsel düzgün yakınsaktır** diyeceğiz.

X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere, $f : X \to \mathbb{C}_\infty$ ve $g : \mathbb{C}_\infty \to X$ fonksiyonları verilsin. Bir $a \in X$ için $f(a) = \infty$ olsa da "f'nin a noktasında sürekli" olup olmadığı sıradan biçimde araştırılabilir. Yine g fonksiyonunun ∞ noktasında sürekli olup olmadığı da sıradan bir şeydir; burada $X = \mathbb{C}_\infty$ ve $f(\infty) = \infty$ olabilir. Ancak $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $f : U \to \mathbb{C}$ ve $\infty \in U$ ise, f'nin ∞ noktasında kompleks türevlenebilir veya holomorf olmasının ne demek olduğunu tanımlamamız gerekir. $V := \chi(U)$ kümesi 0 noktasını içeren bir açık kümedir.

Not 3.6.6. Şimdi vereceğimiz iki tanımının temel mantığı $\mathbb{C}_\infty$'u $(\mathbb{C}, \mathrm{Id}_\mathbb{C})$ ve $(\mathbb{C}^*_\infty, \chi)$ haritalarının oluşturduğu $\mathfrak{A}$ atlası ile bir kompleks katmanlı olarak ele almaktır (bkz. KA II). Herhangi bir $U \subset \mathbb{C}$ alt kümesiyse bir tek (U, Id_U) haritasının belirlediği kompleks yapı ile alınacaktır.

Tanım 3.6.7. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $f : U \to \mathbb{C}$ ve $\infty \in U$ olsun. $V := \chi(U)$ olmak üzere,

$$\mathring{f} := f \circ \chi^{-1} : V \to \mathbb{C},\ \ \mathring{f}(z) := f(\chi^{-1}(z)) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

fonksiyonu 0 noktasında (kompleks) türevlenebilirse f fonksiyonu ∞ **noktasında (kompleks) türevlenebilir**, $\mathring{f}$ fonksiyonu 0 noktasında holomorfsa f fonksiyonu ∞ **noktasında holomorftur** denir.

$\mathring{f}$ fonksiyonu 0'da türevlenebilir veya holomorf ise orada sürekli olacağından ve aynı zamanda χ fonksiyonu da ∞'da sürekli olduğundan, $f(z) = \mathring{f}(\frac{1}{z}) = \mathring{f}(\chi(z))$ olduğunu gözetirsek, f fonksiyonu da ∞'da sürekli olur. Özetle: *f fonksiyonu ∞'da türevlenebilir veya holomorf ise, ∞'da süreklidir.*

f fonksiyonunun ∞'da türevlenebilir olmasını $\mathring{f}$ fonksiyonunu kullanmadan da dillendirebiliriz. Kolayca görülebileceği gibi *$f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun ∞ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{z\to\infty} \varepsilon(z) = 0$ koşulunu sağlayan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve bir $a \in \mathbb{C}$ ile*

$$f(z) = f(\infty) + \frac{a}{z} + \frac{\varepsilon(z)}{z},\ \ z \in U \setminus \{0, \infty\}$$

olmasıdır.

Bir önceki tanımda bir $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun, $\infty \in U$ ise ∞ noktasında holomorf olmasını tanımladık. Şimdiyse, bir $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümünün ∞ değerini aldığı bir noktada holomorf olmasının ne demek olduğunu tanımlayacağız.

Tanım 3.6.8. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık ve $a \in U$ olsun; elbette $a = \infty$ olabilir. $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ sürekli ve $f(a) = \infty$ olsun.

(i) $a \in \mathbb{C}$ ise $g = \chi \circ f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, açık yazılımla $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu a'da holomorfsa f ***dönüşümü*** **a'da holomorftur** denir (Burada elbette $g(a) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\infty} = 0$ alınacaktır).

(ii) $a = \infty$ ise, $V := \chi(U)$ olmak üzere, $h := \chi \circ f \circ \chi^{-1} : V \to \mathbb{C}$ fonksiyonu 0'da holomorfsa f ***dönüşümü*** **∞'da holomorftur** denir. $h(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ olduğunu belirtelim.

Uzlaşma: "Fonksiyon" ve "dönüşüm" matematikte eş anlamlı kavramlardır. Burada okurun dikkatini çekmek bağlamında bazen şöyle bir yol izleyeceğiz: $U \subset \mathbb{C}_\infty$ ve $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ olsun. Bu durumda eğer $\infty \in f(U)$ ise ve buna okurun dikkatini çekmek istiyorsak f'den genelde "dönüşüm", eğer $\infty \notin f(U)$ ise genelde "fonksiyon" olarak söz edeceğiz.

Örnek 3.6.9. Şimdi birkaç basit örnek verelim:

1. $f : \mathbb{C}^*_\infty \to \mathbb{C}$ fonksiyonu

$$f(z) = \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}$$

olsun.

$$\mathring{f}(z) = f(\frac{1}{z}) = a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

fonksiyonu 0'da holomorf olduğundan, f fonksiyonu ∞'da holomorftur.

2. $f(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k$, $a_n \neq 0$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de tanımlı ve holomorftur. $\hat{f}(\infty) := \infty$ ve $\hat{f}|\mathbb{C} := f$ alarak f fonksiyonunu bir $\hat{f} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümüne genişletelim. $\lim_{z\to\infty} \hat{f}(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ olduğundan, $\hat{f}$ dönüşümü ∞ noktasında da süreklidir. Dolayısıyla, $\hat{f} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü süreklidir. $\hat{f}$ dönüşümü ∞'da holomorf mudur? Evet. Çünkü $h := \chi \circ f \circ \chi^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ fonksiyonu,

$$h(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z^k}} = \frac{z^n}{a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_1 z^{n-1}}$$

ve $\lim_{z\to 0} h(z) = 0$ olduğundan ($a_n \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz!), 0'da bir kaldırılabilir tekil noktasına sahiptir, dd. 0 noktasına holomorf genişletilir.

3. Möbius Dönüşümleri: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olsun. $-\frac{d}{c} \neq z \in \mathbb{C}$ için

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d},\ T(\infty) := \frac{a}{c} \text{ ve } T(-\frac{d}{c}) := \infty$$

olarak tanımlanan $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümlerine Möbius dönüşümleri denir. $c = 0$ ise koşulumuzdan $ad \neq 0$, dolayısıyla $a \neq 0$ olacağından, uzlaşmamız gereği $T(\infty) = \frac{a}{0} = \infty$ ve $T(-\frac{d}{c}) = T(\frac{-d}{0}) = T(\infty) = \infty$ olur, dd. T'nin tanımı kusursuzdur. $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ süreklidir ve yalnızca $-\frac{d}{c}$'de birinci dereceden bir kutup yeri olan bir meromorf fonksiyondur[10]. T'nin bir holomorf dönüşüm olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Bu dönüşümleri KA II'de ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

4. f herhangi bir tam aşkın fonksiyonsa — dd. $\mathbb{C}$'de holomorf, ancak bir polinom değilse—, örneğin $e^z, \cos z, \sin z$ gibi, $z \to \infty$ için $f(z)$'nin bir limiti olmadığından (bkz. Teorem 3.8.5), $\mathbb{C}$'de holomorf olan bu fonksiyonları ∞ noktasına holomorf genişletemeyiz.

Şimdi bir sonraki kısımda sıkça karşılaşacağımız bir duruma dönelim: Bize

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

serisi verilsin. $w = z^{-1}$ alırsak $g(w) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n$ kuvvet serisini elde ederiz. Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $r = (\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|})^{-1}$'dir. $|w| = |z^{-1}| < r \iff |z| > r^{-1}$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n}$ serisi $D^*_r(\infty)$'un her noktasında mutlak yakınsaktır. Biz bu serinin Teorem 1.6.5'ten dolayı $D^*_r(\infty)$'da kompakt normsal yakınsak olduğunu biliyoruz. Her bir $f_n(z) = a_{-n} z^{-n}$ fonksiyonu $D^*_r(\infty)$'de holomorf olduğundan, Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'nden dolayı, $f(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^{-n}$ fonksiyonu $D^*_r(\infty)$'da holomorftur. Diğer yandan, $D^*_r(0)$'da $f(\frac{1}{z}) = g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$ ve bu seri aslında $D_r(0)$'da yakınsaktır ve $f(\infty) := g(0) = 0$ olarak tanımlarsak f fonksiyonumuz ∞'da da holomorf olur; dolayısıyla f fonksiyonu $D_r(\infty)$'da holomorftur.

[10]"kutup yeri" ve "meromorf" kavramlarını izleyen kısımlarda göreceğiz.

Bize $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ gibi bir seri verilmiş ve $r = \left(\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}\right)^{-1}$ ise, benzeri irdelemelerle bu serinin $\mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}_r(a)$'da holomorf olduğunu görürüz.

Problemler

Problem 3.6.1. $P, Q \in \mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$ noktalarının orijine göre simetrik olmaları için gerek ve yeter koşulun $\pi_N(P) \cdot \overline{\pi_N(Q)} = -1$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 3.6.2. $d_\infty(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.6.3. Her $z, w \in \mathbb{C}$ için

$$d_\infty(z, w) = d_\infty(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}), \text{ özel olarak } d_\infty(z, 0) = d_\infty(\frac{1}{z}, \infty)$$

olduğunu kanıtlayınız. İpucu: z ve $\frac{1}{z}$'ye küre yüzeyinde simetrik noktalar karşılık gelir.

Problem 3.6.4. $(z_n), (w_n) \subset \mathbb{C}$ dizileri için aşağıdakileri kanıtlayınız:
(1) $(z_n) \subset \mathbb{C}^*$ ise $\lim z_n = \infty \Longleftrightarrow \lim \frac{1}{z_n} = 0$,
(2) $\lim z_n = \infty$ ve $\lim w_n = a \neq \infty$ ise $\lim(z_n + w_n) = \infty$ ve $\lim \frac{w_n}{z_n} = 0$,
(3) $\lim z_n = \infty$ ve $\lim w_n = a \in \mathbb{C}^*$ ise $\lim z_n w_n = \infty = \lim \frac{z_n}{w_n}$.

Problem 3.6.5. $(z_n) \subset \mathbb{C}$ dizisi $\mathbb{C}$'de yakınsak ve $\lim z_n =: \xi \in \mathbb{C}$ ise, $n \geq 1$ için $w_n = n^{-1}(z_1 + \cdots + z_n)$ olmak üzere, $\lim w_n = \xi$ olduğunu gösteriniz. Bu sav, $\mathbb{C}_\infty$'da $\xi = \infty$ olduğunda da doğru mudur?

Problem 3.6.6. (a) $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise, "$\lim |z_n - z| = 0 \Longleftrightarrow \lim d_\infty(z_n z) = 0$" olduğunu gösteriniz.
(b) $\lim |z_n| = +\infty$ ise, (z_n) dizisi $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Problem 3.6.7. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık ve $a \in U$ olsun. $f : (U, d) \to (\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$ dönüşümü verilsin ve $b := f(a)$ olsun. f'nin a'da sürekli olması için gerek ve yeter koşulun,

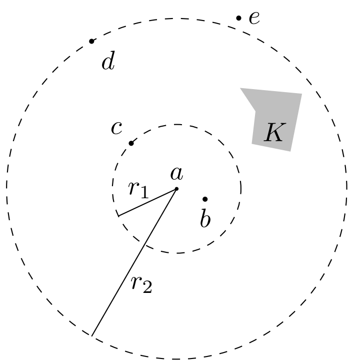
1. $a = \infty$ ve $b \in \mathbb{C}$ ise, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $R_\varepsilon > 0$ sayısının her $|z| > R_\varepsilon$ için $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ olacak biçimde,
2. $a \neq \infty$ ve $b = \infty$ için her $R > 0$ sayısına karşılık bir $\delta_R > 0$ sayısının $|z - a| < \delta_R \Longrightarrow |f(z)| > R$ olacak biçimde,
3. $a = b = \infty$ ise, her $M > 0$ sayısına karşılık bir $R_M > 0$ sayısının her $|z| > R_M$ için $|f(z)| > M$ olacak biçimde

bulunabilmesi olduğunu gösteriniz.

Problem 3.6.8. $f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun ∞ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{z \to \infty} \varepsilon(z) = 0$ koşulunu sağlayan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve bir $a \in \mathbb{C}$ ile

$$f(z) = f(\infty) + \frac{a}{z} + \frac{\varepsilon(z)}{z}, \quad z \in U \backslash \{0, \infty\}$$

olmasıdır; kanıtlayınız.



Şekil 3.18: Önerme 3.7.2'ye ilişkin figür. Laurent serimiz b ve e noktalarında ıraksak, K'de normsal yakınsak, c ve d noktalarında ise yakınsak da ıraksak da olabilir.

Problem 3.6.9. Bir önceki problemdeki a için $f'(\infty) := a$ yazarsak

$$f'(\infty) = \lim_{z \to \infty} z\,(f(z) - f(\infty))$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 3.6.10. $f \in \mathcal{H}(D_r^*(\infty))$ ise, f'nin bir holomorf $f : D_r(\infty) \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümüne genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbb{C}_\infty$'da $\lim_{z\to\infty} f(z)$ limitinin olmasıdır; gösteriniz.

3.7 Laurent Serileri

Tanım 3.7.1. $a \in \mathbb{C}$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

gibi bir ifadeye a açılım merkezli bir **Laurent serisi** denir. $z \in \mathbb{C}$ için

$$f_1(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} \quad \text{ve} \quad f_2(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

serileri ayrı ayrı yakınsaksa $f(z)$ **Laurent serisi yakınsaktır** denir ve $f(z) := f_1(z) + f_2(z)$ olarak tanımlanır.

Burada $f_2(z)$ bir kuvvet serisidir. $f_1(z)$ serisiyse, $w := (z-a)^{-1}$ olmak üzere,

$$g_1(w) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} w^n \tag{3.32}$$

kuvvet serisine dönüştürülür. Özetle bir Laurent serisini incelemek iki kuvvet serisini incelemek demektir.

Diğer yakınsaklık kavramları da Laurent serilerine benzer biçimde aktarılırlar. Örneğin bir z noktasında $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ serileri mutlak yakınsak, bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesinde düzgün veya normsal yakınsaksalar, $f(z)$ Laurent serimiz z noktasında mutlak yakınsak, A'da düzgün veya normsal yakınsaktır denir. $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ olmak üzere,

$$H(a; r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z-a| < r_2\}$$

kümesine a-merkezli, r_1, r_2-yarıçaplı **halka** denir. $r > 0$ bir gerçel sayı olmak üzere, $H(a; 0, r) = D_r^*(a)$, $H(a; 0, +\infty) = \mathbb{C}\backslash\{a\}$ ve $H(0; \frac{1}{r}, +\infty) = D_r^*(\infty)$ olur.

Önerme 3.7.2. *$r_1 := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ ve $r_2 := \left(\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ olsun. $r_1 < r_2$ ise $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ Laurent serisi $H(a; r_1, r_2)$ halkasında mutlak ve kompakt, hatta kompakt normsal yakınsaktır. f fonksiyonumuz $H(a; r_1, r_2)$ halkasında holomorftur ve her $z \in H(a; r_1, r_2)$ için*

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz} a_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n (z-a)^{n-1}. \tag{3.33}$$

Herhangi bir $z \in \partial H(a; r_1, r_2) = C_{r_1}(a) \cup C_{r_2}(a)$ sınır noktasında Laurent serimiz yakınsak da ıraksak da olabilir.

Kanıt. $f_2(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ kuvvet serisi $D_{r_2}(a)$ dairesinde mutlak ve kompakt, hatta kompakt normsal yakınsaktır. Ayrıca, $f_2'(z) = \sum_{n \geq 0} n a_n (z-a)^{n-1}$ olduğunu biliyoruz. $f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$ serisinin $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_{r_1}(a)$'da kompakt normsal, dolayısıyla mutlak ve kompakt düzgün yakınsak olduğunu Teorem 1.6.5'ten biliyoruz. Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'nden dolayı, $f_1(z)$ serisi $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_{r_1}(a)$'da bir holomorf fonksiyon tanımlar ve

$$f_1'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n a_{-n} (z-a)^{-n-1}.$$

Dolayısıyla, $f(z)$ Laurent serimiz $H(a; r_1, r_2)$ halkasında kompakt normsal, böylece mutlak kompakt düzgün yakınsaktır ve orada holomorf olan iki fonksiyonun toplamı olarak holomorftur. Ayrıca, (3.33) sağlanır. $z \in C_{r_i}(a)$ noktasında $f_i(z)$ serisi yakınsak veya ıraksak olabilir; bu bize son savı verir. □

Not 3.7.3. $f_1(z)$'nin $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_{r_1}(a)$'da türevlenebilir olduğunu ve türevini şöyle de görebiliriz: (3.32)'deki g_1 fonksiyonumuz $D_{r_1}(0)$'da türevlenebilir ve $\frac{d}{dw} g_1(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{-n} w^{n-1}$. Diğer yandan, $\varphi : \mathbb{C}\backslash\overline{D}_{r_1}(a) \to D_{r_1}(0)$ fonksiyonu $\varphi(z) := \frac{1}{z-a}$ olsun. φ fonksiyonu holomorftur ve $f_1(z) = g_1(\varphi(z))$ fonksiyonu da holomorf olur ve $\varphi'(z) = -\frac{1}{(z-a)^2}$ olduğunu gözetirsek,

$$\begin{aligned} f_1'(z) = g_1'(\varphi(z))\varphi'(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} na_{-n}\frac{1}{(z-a)^{n-1}} \cdot \frac{-1}{(z-a)^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -na_{-n}(z-a)^{-n-1}. \end{aligned}$$

Ayrıca, bir önceki kısımdan f_1'in $\mathbb{C}_\infty\backslash\overline{D}_{r_1}(a)$'da holomorf ve $f_1(\infty) = 0$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi bir anlamda (3.7.2) önermesinin tersini kanıtlayacağız.

Teorem 3.7.4. *f fonksiyonu $H(a; r_1, r_2)$ halkasında holomorfsa orada yakınsak olan bir*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \tag{3.34}$$

Laurent serisine açılabilir ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $r_1 < r < r_2$ olmak üzere,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \tag{3.35}$$

sağlanır; f'nin $H(a; r_1, r_2)$'deki Laurent serisine açılımı tek olarak belirlidir.

Kanıt. ρ_1, ρ_2 gerçel sayıları $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ olacak biçimde seçilsinler. $\overline{H}(a; \rho_1, \rho_2) := \{z | \rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2\} \subset H(a; r_1, r_2)$ ve $\boldsymbol{\partial} H(a; \rho_1, \rho_2) = \kappa_{\rho_2,a} + \kappa^-_{\rho_1,a}$ olduğundan, (2.11.7)(i) Cauchy integral formülünden, her $z \in H(a; \rho_1, \rho_2)$ için

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_2,a}+\kappa^-_{\rho_1,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_2,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_1,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw. \end{aligned}$$

Teorem 2.5.4'te $\varphi := f$ alırsak $D_{\rho_2}(a)$'da kompakt normsal yakınsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_2,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_2,a}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n \tag{3.36}$$

serisini elde ederiz. $K \subset \mathbb{C}\backslash\overline{D}_{\rho_1}(a)$ kompakt ise $d(K, C_{\rho_1}(a)) > 0$. Öte yandan $0 < \varepsilon < d(K, C_{\rho_1}(a))$ olsun. Bu durumda her $(w, z) \in \underline{\kappa_{\rho_1,a}} \times K$ için $\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < \frac{\rho_1}{\rho_1+\varepsilon} =: p < 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

serisi $\underline{\kappa_{\rho_1,a}} \times K$'de normsal yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{-1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = -\sum_{n\geq 1}\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

serisi $\kappa_{\rho_1,a} \times K$'de normsal, sonuç olarak düzgün yakınsaktır. (1.5.2)(ii) ile

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{f(w)(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} \overset{\kappa_{\rho_1,a}\times K}{\Longrightarrow} \frac{f(w)}{w-z}.$$

Dolayısıyla, terim terim integral alabilir ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_1,z}}\frac{f(w)}{w-z}dw = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_1,a}} f(w)(w-a)^{n-1}\right)(z-a)^n \quad (3.37)$$

elde ederiz. (3.36) ve (3.37) bize $H(a;\rho_1,\rho_2)$'de kompakt normsal yakınsak

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \quad (3.38)$$

Laurent serisini verir. Böylece (3.37)'de n yerine $-n$ yazarsak

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_2,a}}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw, \quad n = 0,1,2,\ldots \quad (3.39)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_1,a}}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw, \quad n = -1,-2,-3,\ldots. \quad (3.40)$$

olur. $\rho_1 \searrow r_1$ ve $\rho_2 \nearrow r_2$ limitlerine geçerek (3.38) eşitliğinin tüm $H(a;r_1,r_2)$ halkasında geçerli olduğunu görürüz. Herhangi bir kompakt $K \subset H(a;r_1,r_2)$ kümesi, uygun birer $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ için $H(a;\rho_1,\rho_2)$ halkasına düşeceğinden, bu eşitliğin sağındaki seri $H(a;r_1,r_2)$ halkasında da kompakt normsal yakınsaktır. (3.39) ve (3.40) eşitliklerinde integrali alınan fonksiyon $H(a;r_1,r_2)$ halkasında holomorf ve $r_1 < r < r_2$ olmak üzere, $\kappa_{r,a}$ gezisi $H(a;r_1,r_2)$ halkasında $\kappa_{\rho_1,a}$ ve $\kappa_{\rho_2,a}$ gezilerine evrilebilir olduğundan, (3.39) ve (3.40) eşitliklerinde $\kappa_{\rho_1,a}$ ve $\kappa_{\rho_2,a}$ yerine $\kappa_{r,a}$ alabiliriz. Böylece

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.41)$$

elde ederiz.

Şimdi tekliği görelim: $H(a;r_1,r_2)$'de $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n$ olsun. Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(z-a)^{k-n-1}$$

serisi $H(a;r_1,r_2)$'de kompakt düzgün yakınsak olduğundan, (3.41) ile

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} b_k(z-a)^{k-n-1} = b_n$$

olur ve bu tekliği verir. □

Sonuç 3.7.5 (Halkalarda Cauchy İntegral Formülü)**.** *Eğer $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $\overline{H}(a;\rho_1,\rho_2)$ kapalı halkası U'da ise, her $f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $z \in H(a;\rho_1,\rho_2)$ için*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_2,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\rho_1,a}} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Kanıt. $\boldsymbol{\partial} H(a;\rho_1,\rho_2) = \kappa_{\rho_2,a}+\kappa_{\rho_1,a}^-$ olduğundan, sav, doğrudan Sonuç 2.7.4'ten çıkar. □

Sonuç 3.7.6 (Cauchy Eşitsizlikleri)**.** *$H(a;r,R)$ halkasında holomorf f fonksiyonunun bu halkadaki Laurent serisi $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ ve $r < \rho < R$ ise, her $n \in \mathbb{Z}$ için*

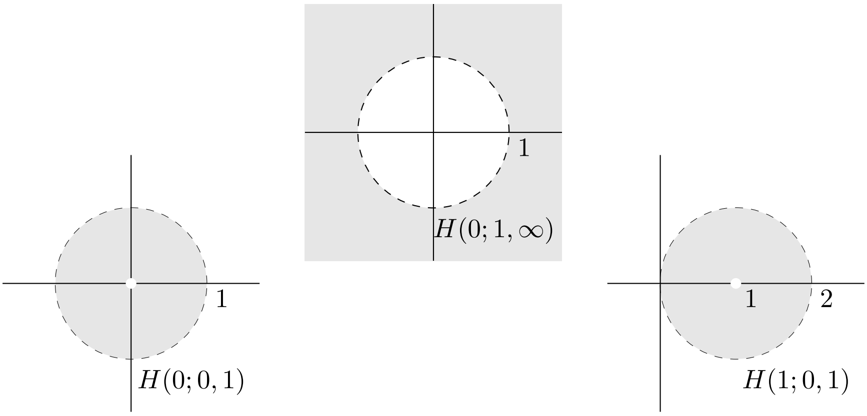
$$|a_n| \le \frac{\|f\|_{C_\rho(a)}}{\rho^n}$$

Kanıt. Doğrudan (3.35) eşitliğinden çıkar. □

Sonuç 3.7.7. *$H(a;r,R)$ halkasındaki her holomorf f fonksiyonu $D_R(a)$'da holomorf bir f_2 ve $\mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}_r(a)$'da holomorf bir f_1 fonksiyonu ile $f = f_1 + f_2$ olarak yazılabilir. Ayrıca, $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$ olmasını isteyebiliriz ve bu durumda f_1 ve f_2 tek olarak belirlidirler; buna f'nin* ***Laurent parçalanışı*** *diyelim.*

Kanıt. $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ serisi, (3.34)'teki Laurent açılımı olsun. Şimdi $f_2(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ ve $f_1(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ olarak tanımlayalım. f_1, f_2 teoremin koşullarını sağlarlar ve ayrıca $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$. Şimdi g_1, g_2 fonksiyonları da teoremin koşullarını sağlasınlar ve $\lim_{z\to\infty} g_1(z) = 0$ olsun. Bu durumda $H(a;r_1,r_2)$ halkasında $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ olur. Dolayısıyla, $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $D_R(a)$'da $f_2 - g_2$ ve $\mathbb{C}\backslash\overline{D}_r(a)$'da $g_1 - f_1$ olarak tanımlanırsa $\mathbb{C}$'de holomorf bir fonksiyondur ve $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ olduğundan, Liouville Teoremi'yle $h \equiv 0$ olur. Böylece $f_1 = g_1$ ve $f_2 = g_2$ elde ederiz. □

$f = f_1 + f_2$ Laurent parçalanışındaki f_1 fonksiyonuna f'nin **esas kısmı**, f_2'ye ise f'nin **yan kısmı** denir. f fonksiyonunun $H(a;r_1,r_2)$ halkasındaki Laurent serisi tek olarak belirlidir. Ancak U açık ve $f \in \mathcal{H}(U)$ ise, f'nin U içindeki farklı halkalardaki Laurent açılımları birbirinden farklı olabilir, dd. teklik halkaya bağlıdır.



Şekil 3.19: Örnekteki üç halka.

Örnek 3.7.8. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ fonksiyonu $U := \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ açık kümesinde holomorftur. U'ya düşen değişik halkalarda f'nin Laurent açılımlarını verelim. Halkamızın merkezi a ise, serimizin terimlerinin $a_n(z-a)^n$ tipinde olduğunu unutmayalım. $H(0;0,1) = D_1^*(0)$ halkasında

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z} = (-\frac{1}{z})\sum_{n\geq 0} z^n = -\sum_{n\geq 0} z^{n-1}.$$

$H(1;0,1) = D_1^*(1)$ halkasında

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n\geq 0}(1-z)^n = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^{n-1}.$$

$H(0;1,+\infty)$ halkasında

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+2}}.$$

$H(1;1,+\infty)$ halkasında

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}.$$

Önerme 3.7.9. *$H(a;r,R)$ halkasında holomorf olan f fonksiyonunun bu halkada bir ilkelinin olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun bu halkadaki $\sum a_n(z-a)^n$ Laurent serisinde $a_{-1} = 0$ olmasıdır.*

Kanıt. 1. f'nin $H(a;r,R)$ halkasında bir F ilkeli olsun. Teorem 3.7.4'ten dolayı, F'nin bu halkada bir $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n$ Laurent açılımı vardır. Yine bu teoremle

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = f(z) = F'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nb_n(z-a)^{n-1}.$$

Katsayıların tekliğinden, her $n \in \mathbb{Z}$ için $a_{n-1} = nb_n$, özellikle $a_{-1} = 0$ olur.

2. Şimdi $a_{-1} = 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n \neq -1$ ise, $a_n(z-a)^n$ fonksiyonunun $\mathbb{C}\backslash\{a\}$'da bir $(n+1)^{-1}(z-a)^{n+1}$ilkeli vardır. Dolayısıyla, izi $H(a;r,R)$ halkasında olan her kapalı γ integral gezisi için $n \neq -1$ ise, $\int_\gamma a_n(z-a)^n dz = 0$ olur. Buradan, $\sum a_n(z-a)^n$ serimizin $\underline{\gamma}$'da düzgün yakınsaklığını da işe katarsak, halkamızdaki her kapalı γ integral gezisi için

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=-\infty, n\neq -1}^{+\infty} \int_\gamma a_n(z-a)^n dz = 0,$$

dolaysıyla f fonksiyonu $H(a;r,R)$'de bir F ilkeli vardır. □

Problemler

Problem 3.7.1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sonlu nokta dışında holomorf olsun ve bir $H(0;r,R)$ halkasındaki $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ Laurent açılımı için her $n \in \mathbb{N}$ ile $a_{-n} \neq 0$ olsun. Bu durumda f'nin en az bir esaslı tekil noktası olduğunu söyleyebilir miyiz?

Problem 3.7.2. $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ fonksiyonunun $H(-2;2,3)$ halkasındaki Laurent açılımını bulunuz.

Problem 3.7.3. $f(z) = \frac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}$ fonksiyonunun $H(0;0,1)$, $H(0;1,2)$, $H(0;2,+\infty)$ ve $H(-1;0,1)$ halkalarındaki Laurent serilerini bulunuz.

Problem 3.7.4. $0 < |a| < |b|$ olmak üzere, $f(z) = [(z-a)(z-b)]^{-1}$ fonksiyonunun $H(0;|a|,|b|)$ ve $H(0;|b|,+\infty)$ halkalarındaki Laurent açılımlarını bulunuz.

Problem 3.7.5. $\mathrm{Log}[z^2/(z^2-1)]$ fonksiyonunun $H(0;1,+\infty)$ halkasındaki Laurent serisini bulunuz.

Problem 3.7.6. $f(z) = \frac{1}{z} \sinh \frac{1}{z}$ fonksiyonunun bir D_r^* halkasında Laurent açılımını bulup, 0'daki tekilliğinin türünü belirleyiniz.

Problem 3.7.7. $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\{\pm i\}$'de holomorftur. $c \in \mathbb{H}$ olsun. Geometrik olarak $|c-i| < |c+i|$ olduğunu görünüz ve f'nin $H(c;|c-i|,|c+i|)$ halkasındaki Laurent açılımını bulunuz.

Problem 3.7.8. $f(z) = (\exp(z^2)-1)^{-1}$ fonksiyonunun $H(0;0,\sqrt{2\pi})$ halkasındaki Laurent açılımının $a_6 z^6$'ya kadar olan kısmını belirleyiniz.

Problem 3.7.9. $Z \subset D_r^*(a)$ kümesinin $D_r(a)$'daki yegâne yığılma noktası a olsun. $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a)\backslash Z)$ ve her $z \in Z$ noktası f'nin bir kutup yeriyse, $f(D_r^*(a)\backslash Z)$'nin $\mathbb{C}$'de yoğun olduğunu kanıtlayınız.

Problem 3.7.10. $0 < r < R$ ve $f = f_1 + f_2$ ise $f \in \mathcal{H}(H(0;r,R))$ fonksiyonunun Laurent parçalanışı olsun. f çift(tek) fonksiyonsa f_1 ve f_2 de çift(tek) fonksiyondur, gösteriniz.

Problem 3.7.11. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ ise, bir c sabiti ve bir $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{C}$ için $F'(z) = f(z) - \frac{c}{z}$ olacak biçimde bulunabilir; kanıtlayınız.

Problem 3.7.12. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}^*)$ ve her $z \in \mathbb{D}^*$ için $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$ ise, $f \equiv 0$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.7.13. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ fonksiyonunun 0'da birinci dereceden bir kutup yeri var ve $f(\mathbb{S}) \subset \mathbb{R}$ ise, bir $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ve bir $\beta \in \mathbb{C}$ ile her $z \in \mathbb{C}^*$ için $f(z) = \alpha z + \overline{\alpha}\frac{1}{z} + \beta$ olduğunu gösteriniz.

3.8 Ayrık Tekil Noktalar

Bu kısımda gösterimlerde şöyle bir yol izleyeceğiz: $U \subset \mathbb{C}$ açık ve $a \in U$ verildiğinde $U^* := U \backslash \{a\}$ yazacağız ve elbette U^* da açıktır. Bir $f \in \mathcal{H}(U^*)$ fonksiyonunu a noktasına holomorf olarak genişletebiliyorsak, bu fonksiyonu $\hat{f}$ ile göstereceğiz. Bir $g : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $g|U^* \in \mathcal{H}(U^*)$ olacak biçimde verildiğinde, eğer $g|U^*$ fonksiyonu a noktasına holomorf genişlerse $\widehat{g|U^*}(a) \neq g(a)$ olabilir. Örneğin her $z \in \mathbb{C}^*$ için $g(z) := \sin z$ ve $g(0) := 1$ olarak tanımlansın. $g|\mathbb{C}^*$ fonksiyonu 0 noktasına $\widehat{g|\mathbb{C}^*}(0) = 0$ ile holomorf genişler. Böylece, inceleyeceğimiz $f \in \mathcal{H}(U^*)$ fonksiyonlarının bir $F : U \to \mathbb{C}$'nin kısıtlaması olması, dd. $f = F|U^*$ olması bizi ilgilendirmeyecek; tüm savlarımızda belirleyici olan f olacaktır!

U, a, U^* ve f yukarıdaki gibi olsunlar. $U = \mathbb{C}$ ise $R = +\infty$, diğer durumda $R := d(a, \partial U)$ olsun. $H(a; 0, R)$ halkası U içine düşen a merkezli en büyük halkadır. f fonksiyonunun $H(a; 0, R)$ halkasındaki Laurent serisi,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n = f_1(z) + f_2(z)$$

olsun. Birbirini dışlayan aşağıdaki üç durum söz konusudur:

1. Her $n \in \mathbb{N}^*$ için $a_{-n} = 0$. Bu durumda
$$f(z) = f_2(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n \tag{3.42}$$
olur ve a noktasına f'nin bir **kaldırılabilir tekil nokta**sı denir. Bu durumda $\hat{f}(a) := a_0$ olarak tanımlanır.

2. Negatif bir $m \in \mathbb{Z}$ sayısı $a_m \neq 0$ ve $n < m$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{Z}$ için $a_n = 0$ olacak biçimde vardır. Bu durumda
$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$$
f'nin a noktasında m. **dereceden** bir **kutup yeri** vardır denir.

3. Sonsuz çoklukta negatif $n \in \mathbb{Z}$ için $a_n \neq 0$. Bu durumda f'nin a noktasında bir **esaslı tekil noktası** vardır denir.

Bu üç durumun birbirini dışladığı açıktır. Diğer yandan, $H(a;0,R)$ halkası ve Laurent açılımı tek olarak belirli olduğundan, bu tanımlar kusursuzdur.

$w = (z-a)^{-1}$ ve $b_n := a_{-n}$ yazarsak f_1 asal kısmı $f_1(w) = \sum_{n\geq 1} b_n w^n$ şeklini alır. f'nin a noktasında bir kutup noktası olması tamda $f_1(w)$'nin bir polinom olmasına, f'nin a noktasında bir esaslı tekil noktası olması ise $f_1(w)$'nin bir tam aşkın fonksiyon olmasına karşılık gelir. Kısım 3.2'de $\lim_{w\to\infty} f_1(w)$ ayrıntılı biçimde incelendi; $w \to \infty$ ise $z \to a$'ya denk olduğundan, o bilgiler bize $\lim_{z\to a} f_1(z)$ hakkında bilgiler verir. İzleyen önermelerde bu iyi bir kılavuzdur.

Teorem 3.8.1. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$, $U^* := U \backslash \{a\}$ ve $f \in \mathcal{H}(U^*)$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *f'nin a'da bir kaldırılabilir tekil noktası vardır.*

(ii) *f fonksiyonu a'ya holomorf genişletilebilir.*

(iii) *f fonksiyonu a'ya sürekli genişletilebilir.*

(iv) *f fonksiyonu bir $D_r^*(a) \subset U^*$'da sınırlıdır.*

(v) $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$.

Kanıt. (ii)$\Longleftrightarrow$(iii)$\Longleftrightarrow$(iv)$\Longleftrightarrow$(v) Riemann Genişletme Teoremi'nin doğrudan sonucudur. (i)$\Longleftrightarrow$(ii) olduğunu gösterirsek işimiz biter.

(i)$\Longrightarrow$(ii): (3.42) eşitliğinden U'daki en büyük $H(a;0,R)$ halkasında $f(z) = f_2(z)$. Ancak f_2 fonksiyonu $D_R(a)$'da holomorftur, dolayısıyla $\hat{f}(a) := f_2(a)$ olarak tanımlarsak $D_R(a)$'da $\hat{f} = f_2$ holomorf olur, böylece f fonksiyonu a'ya holomorf genişletilebilir.

(ii)$\Longrightarrow$(i): f fonksiyonu a noktasına holomorf genişlesin; bu genişlemeyi $\hat{f}$ ile gösterelim. $\hat{f} \in \mathcal{H}(D_R(a))$ olduğundan, bir $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ kuvvet serisine açılabilir. $f|H(a;0,R) = \hat{f}|H(a;0,R)$ olduğundan, bu seri aynı zamanda f'nin $H(a;0,R)$ halkasındaki Laurent açılımıdır. Dolayısıyla, a noktası f'nin bir kaldırılabilir tekil noktasıdır. $\square$

Teorem 3.8.2. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$, $U^* := U\backslash\{a\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ ve $f \in \mathcal{H}(U^*)$ ise, aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *f fonksiyonunun a'da m. dereceden bir kutup yeri vardır.*

(ii) *$\exists g \in \mathcal{H}(U)$, $g(a) \neq 0$ öyle ki,*

$$\forall z \in U^* \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}.$$

(iii) *Bir $D_r(a) \subset U$ dairesi, a noktasında m. dereceden sıfır yeri olan bir $h \in \mathcal{H}(D_r(a))$ fonksiyonu her $z \in D_r^*(a)$ için $h(z) \neq 0$ ve $f(z) = 1/h(z)$ olacak biçimde vardır.*

(iv) *Bir* $D_\sigma(a) \subset U$ *dairesi ve* $M_1, M_2 > 0$ *gerçel sayıları her* $z \in D_\sigma^*(a)$ *için* $M_1|z-a|^{-m} \leq |f(z)| \leq M_2|z-a|^{-m}$ *olacak biçimde vardır.*

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii): U^*'da $g(z) := (z-a)^m f(z)$ olarak tanımlansın. Tanım gereği $g \in \mathcal{H}(U^*)$ olur. U'ya düşen a merkezli en büyük halkamız $H(a;0,R)$ ise, tanım gereği f'nin $H(a;0,R)$'deki Laurent açılımı aşağıdaki gibidir: $\forall z \in H(a;0,R)$

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + f_2(z),\ a_{-m} \neq 0,\ f_2 \in \mathcal{H}(D_R(a)).$$

Buradan $H(a;0,R)$'de $p(z) = \sum_{i=1}^m a_{-i}\,(z-a)^{m-i}$ olmak üzere,

$$(z-a)^m f(z) = p(z) + (z-a)^m f_2(z) =: g(z) \tag{3.43}$$

sağlanır. $p(z)$ bir polinom olduğundan, her yerde, özellikle a noktasında holomorftur ve $p(a) = a_{-m} \neq 0$. Diğer yandan, $(z-a)^m f_2(z)$ de a noktasında holomorftur. Dolayısıyla, (3.43) eşitliğinin sağ yanı a noktasında holomorftur ve orada a_{-m} değerini alır. $g(a) := a_{-m}$ olarak tanımlarsak $g \in \mathcal{H}(U)$ ve $g(a) \neq 0$ olur.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): $g \in \mathcal{H}(U)$ ve $g(a) \neq 0$ olduğundan, bir $D_r(a) \subset U$ dairesi daima $g(z) \neq 0$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda $\varphi := 1/g$ fonksiyonu $D_r(a)$ dairesinde holomorftur ve orada sıfır yeri yoktur. Dolayısıyla, $h(z) := (z-a)^m \varphi(z)$ fonksiyonu $D_r(a)$ dairesinde holomorftur ve orada yalnızca a noktasında bir sıfır yeri vardır ve bu sıfır yeri m. derecedendir. Elbette $D_r(a)$'da $f = 1/h$.

(iii)$\Longrightarrow$(iv): φ yukarıdaki gibi olmak üzere, $0 < \sigma < r$ yeterince küçük seçilirse $M_1 := \inf_{z \in \overline{D}_\sigma(a)} |\frac{1}{\varphi(z)}| > 0$ ve $0 < M_2 := \sup_{z \in \overline{D}_\sigma(a)} |\frac{1}{\varphi(z)}| < +\infty$ olur. Buradan $|f(z)| = |z-a|^{-m}|\varphi(z)|^{-1}$ ile sav çıkar.

(iv)$\Longrightarrow$(i): $D_\sigma^*(a)$'da $0 < M_1 \leq |z-a|^m|f(z)| \leq M_2 < +\infty$ olsun. Teorem 3.8.1(iv)'ten dolayı, $\psi(z) := (z-a)^m f(z)$ fonksiyonu a noktasına holomorf genişletilebilir ve $|\psi(a)| \geq M_1 > 0$. Dolayısıyla, ψ fonksiyonu $D_R(a)$ dairesinde $\sum_{n \geq 0} a_n(z-a)^n$, $a_0 \neq 0$ gibi bir kuvvet serisine açılır; bu aynı zamanda ψ'nin $H(a;0,R)$ halkasındaki Laurent açılımıdır. Buradan f'nin $H(a;0,R)$'deki Laurent açılımı

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + \sum_{k \geq m} a_k (z-a)^{k-m},\ a_0 \neq 0$$

olur. Tanım gereği a noktası f fonksiyonunun m. dereceden bir kutup yeridir. □

Sonuç 3.8.3. (i) *a noktasının $f \in \mathcal{H}(U^*)$ fonksiyonunun bir kutup yeri olması için gerek ve yeter koşul* $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ *olmasıdır, dd. f fonksiyonunu U'ya $\hat{f}(a) := \infty$ ile genişletirsek, $\hat{f} : U \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonunun a noktasında sürekli olmasıdır.*

(ii) *$f \in \mathcal{H}(U^*)$ fonksiyonunun a noktasında bir kutup yeri varsa f'yi a noktasına $\hat{f}(a) = \infty$ ile genişleterek elde ettiğimiz $\hat{f}$ dönüşümü a noktasında holomorftur.*

Kanıt. (i) f'nin a noktasında bir kutup yeri varsa (3.8.2)(iii)'teki gösterimlerle $\lim_{z\to a} f(z) = 1/\lim_{z\to a} h(z) = 1/0 = \infty$ olur.

Tersine, $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ ise, σ yeterince küçük seçildiğinde $D^*_\sigma(a)$'da f sıfır değerini almaz, $g := 1/f$ orada holomorftur ve $\lim_{z\to a} g(z) = 0$ olur. Dolayısıyla, g fonksiyonunu $\hat{g}(a) := 0$ olarak tanımlayarak $D_\sigma(a)$'ya holomorf genişletebiliriz ve a noktası bu dairede $\hat{g}$'nin yegâne sıfır yeridir. a noktası $\hat{g}$'nin m. dereceden sıfır yeriyse, $D_\sigma(a)$'da holomorf ve sıfır yeri olmayan bir $\varphi(z)$ fonksiyonu ile $\hat{g}(z) = (z-a)^m\varphi(z)$ olacağından, $D^*_\sigma(a)$'da

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m\varphi(z)} = \frac{(\varphi(z))^{-1}}{(z-a)^m}$$

olur. (3.8.2)(ii)'den f'nin a'da m. dereceden bir kutup yeri vardır.

(ii) a noktası f fonksiyonunun m. dereceden bir kutup yeri olsun. Teorem 3.8.2(ii)'den dolayı bir $D_r(a) \subset U$ dairesi, bu dairede holomorf ve sıfır yeri olmayan bir g fonksiyonu her $z \in D^*_r(a)$ için $f(z) = (z-a)^{-m}g(z)$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda her $z \in D^*_r(a)$ için $(f(z))^{-1} = (z-a)^m(g(z))^{-1} =: h(z)$ olur. h fonksiyonu $D_r(a)$'da holomorf ve $h(a) = 0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\hat{f}(a)}$ olduğundan, $D_r(a)$'da $\frac{1}{\hat{f}} = g$ holomorf, dolayısıyla tanıma göre $\hat{f}$ dönüşümü a noktasında holomorf olur. □

Örnek 3.8.4. $\mathbb{C}^*$'da tanımlı $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ fonksiyonunun 0'da bir kaldırılabilir tekilliği, $g(z) = \frac{1}{z^3} + \cos z$'nin 0 noktasında üçüncü dereceden bir kutup yeri ve $h(z) = e^{z^{-1}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!z^n}$ fonksiyonunun 0 noktasında bir esaslı tekilliği vardır. $z \to 0$ için $h(z)$'nin davranışı $h(\frac{1}{z}) = e^z$'nin $z \to \infty$ için davranışıdır. Ancak e^z bir tam aşkın fonksiyondur ve biz Teorem 3.2.5'te şunu kanıtladık: $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ bir tam aşkın fonksiyonsa her $w \in \mathbb{C}$ sayısına karşılık $z_n \to \infty$ olan bir diziyi $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = w$ olacak biçimde bulabiliriz. Aslında $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ olduğunu biliyoruz ve exp fonksiyonu $2\pi i$ peryodludur. Dolayısıyla, her $r > 0$ gerçel sayısı için $\exp(D^*_{\frac{1}{r}}(\infty)) = \mathbb{C}^*$, dd. $h(D^*_r(0)) = \mathbb{C}^*$. Özel olarak $0 \neq a = \rho e^{i\theta}$ verilmişse $\exp \frac{1}{z} = a$ denkleminin tüm çözümleri

$$z_k = \frac{1}{\ln\rho + i(\theta + 2k\pi i)} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

sayılarıdır ve her $D^*_\sigma(0)$'da bunlardan sonsuz tane vardır.

Şimdi bu davranışın her esaslı tekillik için geçerli olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 3.8.5 (Casorati-Weierstrass)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$, $U^* := U\setminus\{a\}$ ve $f \in \mathcal{H}(U^*)$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*

(i) *f fonksiyonunun a noktasında bir esaslı tekilliği vardır.*

(ii) *$V \subset U$ kümesi a'nın herhangi bir komşuluğu ve $V^* := V\setminus\{a\}$ ise, $f(V^*)$ resmi $\mathbb{C}$'de yoğundur.*

(iii) $\lim_{n\to+\infty} z_n = a$ *olan bir* $(z_n) \subset U^*$ *dizisi,* $(f(z_n))$ *dizisi yakınsak olmayacak biçimde bulunabilir.*

Kanıt. (ii)$\Longrightarrow$(iii) aşikârdır. (iii) sağlanmışsa f fonksiyonu a noktasına sürekli olarak genişletilemez; dolayısıyla a noktası f'nin ne kaldırılabilir tekilliği ne de bir kutup noktasıdır. Böylece (iii)$\Longrightarrow$(i).

Şimdi (i)$\Longrightarrow$(ii) olduğunu görelim: Bu, $\neg(ii) \Longrightarrow \neg(i)$ önermesine denktir. (ii) olmasın. a noktasının bir V komşuluğu için $f(V^*)$ kümesi $\mathbb{C}$'de yoğun olmasın. Bu durumda bir $r > 0$ pozitif sayısı ve bir b kompleks sayısı $D_r(b) \cap f(V^*) = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilir. O zaman her $z \in V^*$ için $|f(z) - b| \geq r$ olacağından, $g := (f(z) - b)^{-1}$ fonksiyonu V^*'da holomorf ve sınırlıdır; dolayısıyla V'ye $\hat{g}$ olarak holomorf genişletilebilir. Şimdi V^*'da $f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$ olduğundan, a noktası, $\hat{g}(a) \neq 0$ ise f'nin bir kaldırılabilir tekilliği, $\hat{g}(a) = 0$ ise f'nin bir kutup yeridir. □

Bu teoremi KA II'de Picard Teroemi'yle genelleştireceğiz. Birebir holomorf fonksiyonların ayrık tekil noktaları için biraz fazlasını söyleyebiliriz.

Teorem 3.8.6. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $A \subset B$ ise B'de kapalı ve ayrık olsun. $f : B\backslash A \to \mathbb{C}$ holomorf ve birebirse aşağıdakiler geçerlidir:*

(i) *f'nin A'da esaslı tekil noktaları yoktur.*

(ii) *f'nin bir $a \in A$ noktasında bir kutup yeri varsa bu birinci derecedendir.*

(iii) *A'nın her bir noktasında f'nin bir kaldırılabilir tekil noktası varsa f'nin $\hat{f} : B \to \mathbb{C}$ holomorf genişlemesi de birebirdir.*

Kanıt. (i) $a \in B$ keyfi verilsin. Bir $D_r(a) \subset B$ dairesi $A \cap D_r(a) = \{a\}$ ve $B' := B\backslash \left(A \cup \overline{D_r(a)}\right) \neq \emptyset$ olacak seçilebilir. Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı, $f(B') \neq \emptyset$ açık ve f birebir olduğundan, $f(D_r^*(a)) \cap f(B') = \emptyset$ olur. Casorati-Weierstrass Teoremi'nden dolayı, f'nin a noktasında bir esaslı tekilliği olamaz.

(ii) $m \in \mathbb{N}^*$ ve $a \in A$ olmak üzere, f'nin a'da m. dereceden bir kutup yeri olsun. Teorem 3.8.2(iii)'e göre bir $D_r(a)$'da holomorf ve a'da m. dereceden sıfır yeri olan bir h fonksiyonu bu dairede $f = \frac{1}{h}$ olacak biçimde vardır. $f|D_r^*(a)$ birebir olduğundan, $h : D_r^*(a) \to \mathbb{C}^*$ da birebirdir. Dolayısıyla, $h : D_r(a) \to \mathbb{C}$ birebirdir. Bunun sonucu olarak $h'(a) \neq 0$ ve h'nin a'da birinci dereceden bir sıfır yeri vardır. Sonuç olarak, $m = 1$.

(iii) Her $a \in A$ noktası f'nin bir kaldırılabilir tekil noktası olsun ve $\hat{f}$ ise f'nin B'ye holomorf genişlemesi olsun. $\hat{f}$'nin birebir olmadığını varsayalım. Bu durumda $z_1, z_2 \in B$ noktaları $z_1 \neq z_2$ ve $w = \hat{f}(z_1) = \hat{f}(z_2)$ olacak biçimde vardır. B'de $D_r(z_1)$, $D_\sigma(z_2)$ ayrık dairelerini $D_r^*(z_1) \subset B\backslash A$ ve $D_\sigma^*(z_2) \subset B\backslash A$ olacak biçimde seçelim. Açık Dönüşüm Teoremi'nden, $\hat{f}\,(D_r(z_1)) \cap \hat{f}\,(D_\sigma(z_2))$ kümesi w'nin bir açık komşuluğudur. Bu komşuluktan seçilen bir $w' \neq w$ için

$z_1' \in D_r^*(z_1)$ ve $z_2' \in D_\sigma^*(z_2)$ noktaları $f(z_1') = f(z_2') = w'$ olacak biçimde vardır. $z_1' \neq z_2'$ ve $z_1', z_2' \in B \setminus A$ olduğundan, bu, f'nin birebirliği ile çelişir. Dolayısıyla, varsayımımız yanlış, savımız doğrudur. □

Biz tekil noktaları Laurent serileri üzerinden tanımladık ve onlara denk önermeler elde ettik. Dolayısıyla, Laurent serilerine başvurmadan bu tanımları şöyle de verebilirdik: $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U, U^* := U \setminus \{a\}$ ve $f \in \mathcal{H}(U^*)$ olmak üzere, a noktası f fonksiyonunun

(i) $\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = 0$ ise bir **kaldırılabilir tekil noktası**,

(ii) $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ ise bir **kutup noktası**,

(iii) ne bir kaldırılabilir tekil noktası ne de bir kutup noktasıysa, bir **esaslı tekil noktası**dır.

Not 3.8.7. Elimizdeki bilgilerle tekil noktaları $\lim_{z \to a} |(z-a)f(z)|$ ile de karakterize edebiliriz: $U \subset \mathbb{C}$ *açık,* $a \in U$, $U^* := U \setminus \{a\}$ *ve* $f \in \mathcal{H}(U^*)$ *olsun.* a *noktası* f *fonksiyonunun:*

1. *kaldırılabilir tekil noktasıdır* $\iff \exists \lim_{z \to a} |(z-a)f(z)| = 0$,
2. *bir kutup yeridir* $\iff \exists \lim_{z \to a} |(z-a)f(z)| \neq 0$,
3. *esaslı tekil noktasıdır* $\iff \lim_{z \to a} |(z-a)f(z)|$ *limiti yoktur.*

Bunlardan (2)'nin $\Longleftarrow$ yönü için $\lim_{z \to a} |(z-a)f(z)| \neq 0$ ise $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ olduğunu belirtmekle yetineceğiz.

Tanım 3.8.8. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $\infty \in U$, $U^* := U \setminus \{\infty\}$ ve $f \in \mathcal{H}(U^*)$ ve $V^* = \chi(U^*)$ olsun (χ için (3.26)'ya bkz.). 0 noktası

$$\mathring{f} = f \circ \chi^{-1} : V^* \to \mathbb{C}, \ \ \mathring{f}(z) = f(z^{-1})$$

fonksiyonunun bir kaldırılabilir tekil noktası veya m. dereceden bir kutup noktası veya bir esaslı tekil noktasıysa, ∞ **noktası** f'nin bir **kaldırılabilir tekil noktası** veya m. **dereceden** bir **kutup noktası** veya bir **esaslı tekil noktasıdır** denir.

Örneğin $n \in \mathbb{N}^*$ için $f(z) = z^n$ olsun. $\mathring{f}(z) = z^{-n}$ fonksiyonunun 0'da n. dereceden bir kutup yeri olduğundan, f fonksiyonunun ∞'da n. dereceden bir kutup yeri vardır. Eğer $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ tam aşkınsa, dd. serimiz $\mathbb{C}$'de yakınsak ve sonsuz tane n için $a_n \neq 0$ ise, f'nin ∞'da bir esaslı tekil noktası vardır.

Not 3.8.9. Holomorf fonksiyonlar için tanımlanan yerel kavramlar benzer biçimde ∞ noktasında da tanımlanır. Örneğin $U \subset \mathbb{C}_\infty$, $\infty \in U$ ve $f \in \mathcal{H}(U)$, $f(\infty) = w$ olsun. 0 noktası $\mathring{f}$'nin n. dereceden bir w yeriyse, ∞ **noktası** f**'nin** n**. dereceden** w **yeridir** denir. Bu kez $n \in \mathbb{N}^*$ için $f(z) = z^{-n}$ alırsak $\mathring{f}(z) = z^n$ fonksiyonunun 0'da n. dereceden bir sıfır yeri olur; dolayısıyla f fonksiyonunun ∞'da n. dereceden bir sıfır yeri vardır.

Holomorf fonksiyonlara ilişkin yerel teoremler de ∞ noktasına aktarılırlar. Örneğin Riemann Genişleme Teoremi'ni verelim: $U \subset \mathbb{C}_\infty$ *açık*, $\infty \in U$, $U^* :=$

$U\backslash\{\infty\}$, *$f \in \mathcal{H}(U^*)$ ve f bir $D_r^*(\infty)$ da sınırlıysa, f fonksiyonu ∞ noktasına holomorf genişler.* Gerçekten de bu durumunda $\mathring{f} \in \mathcal{H}(V^*)$ fonksiyonu $D_r^*(0)$'da sınırlı olduğundan, sıfıra holomorf genişler. $\hat{\mathring{f}}(0) = a$ ise $\hat{f}(\infty) := a$ alırsak, $\hat{f} \in \mathcal{H}(U)$ ve $\hat{f}|U^* = f$. Benzer biçimde Casorati-Weierstrass Teoremi ∞ esaslı tekil noktaları için geçerlidir: *$f : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun ∞'da esaslı tekilliği varsa her $D_r^*(\infty) \subset U$ için $f(D_r^*(\infty))$ kümesi $\mathbb{C}$'de yoğundur.* Benzer biçimde *herhangi bir $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü için $f(\infty) = \infty$ ve ∞ noktası bir kutup noktasıysa, f dönüşümü ∞'da holomorftur.*

Problemler

Problem 3.8.1. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}))$ fonksiyonunun her bir $-n \in -\mathbb{N}$'de birinci dereceden bir kutup yeri var ve her $z \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ için $f(z+1) = zf(z)$ eşitliği sağlanmışsa $\operatorname{Res}(f, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.2. 0 noktasının $\exp\frac{1}{z}$ fonksiyonun bir ayrık ve esaslı tekil noktası olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.3. Problem 3.8.2 genelleştirilebilir: f'nin a noktasında bir kaldırılamaz tekilliği varsa e^f'nin a'da bir esaslı tekilliği olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.4. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ fonksiyonunun 0'da birinci dereceden bir kutup yeri var ve $f(\mathbb{S}) \subset \mathbb{R}$ ise, bir $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ve bir $\beta \in \mathbb{C}$ ile her $z \in \mathbb{C}^*$ için $f(z) = \alpha z + \overline{\alpha}\frac{1}{z} + \beta$ olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.5. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$'nin ∞'da kaldırılabilir bir tekilliği varsa f sabittir; gösteriniz.

Problem 3.8.6. Eğer a noktası f fonksiyonunun bir esaslı tekil noktasıysa ve p sabit olmayan bir polinomsa, a noktasının $p \circ f$ fonksiyonunun da bir esaslı tekil noktası olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.7. f sabit olmayan bir tam fonksiyonsa e^f'nin ∞'da bir esaslı tekilliği olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.8. $A \subset D_r^*(a)$ kümesi yegâne yığılma noktası a olan sayılabilir sonsuz bir küme ve $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a)\backslash A)$ olsun. Ayrıca, A'nın her noktası f'nin bir kutup noktasıysa, $f(D_r^*(a)\backslash A)$'nın $\mathbb{C}$'de yoğun olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.9. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge $a \in B$ ve $f : B\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ holomorf olsun. Bir $n \in \mathbb{N}^*$ ve bir $\varepsilon > 0$ ile her $z \in D_\varepsilon^*(a)$ için

$$\operatorname{Re} f(z) \leq -n \ln |z - a|$$

ise, a'nın f'nin bir kaldırılabilir tekilliği olduğunu gösteriniz.

Problem 3.8.10. Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{C}_\infty$'daki ayrık tekil noktalarını bulup karakterlerini belirleyiniz:

1.	$e^{1/z}\dfrac{1}{z-2}$	2.	$\dfrac{\operatorname{Log} z}{z-1}$	3.	$\dfrac{\sqrt[3]{z}}{z^2+1}$
4.	$\dfrac{1}{z\sin z}$	5.	$\dfrac{\cot \pi z}{z+1}$	6.	$\exp\tan\dfrac{1}{z}$
7.	$\dfrac{ze^z}{z^2-1}$	8.	$\dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2/4}$	9.	$\operatorname{Log}\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$
8.	$\dfrac{e^z}{1+z^2}$	11.	$\exp\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$	12.	$\sin(\cos z^{-1})^{-1}$

Problem 3.8.11. $(f_n) \subset \mathcal{H}(D_r^*(a))$ ve bu dizi $D_r^*(a)$'da f'ye kompakt düzgün yakınsak olsun. Her f_n fonksiyonunun a noktasında ya bir kaldırılabilir tekilliği, ya da $\leq m$ dereceden bir kutup yeri olsun. Bu koşullarda f fonksiyonunun da a noktasında ya bir kaldırılabilir tekilliği, ya da $\leq m$ dereceli bir kutup yeri olduğunu gösteriniz.

3.9 Meromorf Fonksiyonlar

3.9.1 Meromorf Fonksiyonların Tanımı ve Temel Özellikleri

Önerme 3.9.1. *X yerel kompakt Hausdorff topolojik uzay, $P \subset U \subset X$ ve U açıksa aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *Her $x \in U$ noktasının bir V_x komşuluğu $V_x \cap P$ sonlu olabilecek biçimde vardır. Bu durumda P kümesi U**'da yerel sonludur** denir.*

(ii) *U'nun her kompakt K altkümesi için $K \cap P$ sonludur.*

(iii) *P kümesi U'da kapalı ve ayrıktır.*

(iv) *P'nin U'da bir yığılma noktası yoktur.*

Kanıt. (i)$\Longrightarrow$(ii) U'nun kompakt K altkümesi verilsin. Her $x \in U$ için bu noktanın V_x komşuluğu $V_x \cap P$ sonlu olacak biçimde seçilsin. K kümesini sonlu sayıda $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ kümeleriyle örtebiliriz. Dolayısıyla, $K \cap P$ kümesi sonlu $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \cap P$ kümesinin altkümesi olarak sonludur.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) $x \in P$ keyfi verilsin. U yerel kompakt olduğundan, x noktasının U'da bir kompakt U_x komşuluğunu seçebiliriz. Varsayımımızdan $U_x \cap P$ sonlu ve uzayımız Hausdorff uzayı olduğundan, x noktasının U'da bir W_x komşuluğu $W_x \cap P = \{x\}$ olacak biçimde seçilebilir. Sonuç olarak, P kümesi U'da ayrıktır.

Şimdi P'nin U'daki kapanışı $\overline{P}$ ve $x \in \overline{P}$ olsun. $x \notin P$ olduğunu varsayalım. Yukarıda olduğu gibi x noktasının U'da kompakt U_x komşuluğu seçilsin. $U_x \cap P$ sonludur; buradaki noktalar $p_1, \ldots, p_m$ ise, uzayımız Hausdorff olduğundan, x noktasının bir W_x komşuluğu $p_1, \ldots, p_m \notin W_x$, dd. $W_x \cap P = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilir; bu ise $x \in \overline{P}$ ile çelişir!

(iii)$\Longrightarrow$(iv) ve (iv)$\Longrightarrow$(i)'i okura bırakıyoruz. □

$\mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}_\infty$ önermemizin koşullarını sağlar. Yerel sonluluk bir mutlak kavram değil, bir göreceli kavramdır ve U'ya bağlıdır. Örneğin $P := \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\right\}$ kümesi $\{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ açık kümesinde yerel sonludur, buna karşın aynı küme

$\mathbb{C}$'de kapalı değil, dolayısıyla yerel sonlu değildir. Yine $\mathbb{N}$ kümesi $\mathbb{C}_\infty$'da ayrık, ancak kapalı değildir; böylece $\mathbb{N}$ kümesi $\mathbb{C}_\infty$'da yerel sonlu değildir. Gerçekten de ∞'un her komşuluğunda sonsuz sayıda doğal sayı vardır.

Bu yeni kavramla holomorf fonksiyonlar için Özdeşlik Teoremi'ni şöyle de ifade edebiliriz:

Teorem 3.9.2. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in \mathcal{H}(B)$ ve f sabit değilse her $w \in \mathbb{C}$ için $f^{-1}(w)$ kümesi B'de yerel sonludur.*

Önerme 3.9.3. *P kümesi $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık kümesinde yerel sonlu olsun. P sayılabilirdir. Ayrıca, U bir bölge ise $U \backslash P$ de bir bölgedir.*

Kanıt. Her $K \subset U$ kompakt kümesi için $P \cap K$ sonludur. U kümesini sayılabilir çoklukta kompakt kümelerle tüketebildiğimizden, P sayılabilir olmak zorundadır.

Şimdi U bağlantılı olsun ve $a, b \in U \backslash P$ noktaları keyfi verilsin. Her şeyden önce P kümesi U'da kapalı olduğundan, $U \backslash P$ açıktır. $\mathbb{C}_\infty$ yerel yol bağlantılı olduğundan U yol bağlantılıdır. Şimdi γ gezisi U'da a noktasını b noktasına bağlasın. $\underline{\gamma}$ kompakt olduğundan, $\underline{\gamma}$ izi üzerinde P'nin en fazla sonlu sayıda ögesi vardır. Bunlar $p_1, \ldots, p_n$ olsun. p_i merkezli D_i dairelerini ikişer ikişer ayrık, $D_i \subset U$ ve $D_i \cap P = \{p_i\}$ olacak biçimde seçebiliriz. Her bir D_i'de γ gezisinin p_i civarındaki bir kısmını p_i'den geçmeyen bir geziyle değiştirerek a'yı $U \backslash P$'de bir γ' gezisi ile b noktasına bağlarız. Böylece $U \backslash P$ açık ve yol bağlantılı olduğundan, bağlantılıdır. □

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $P \subset U$ kümesi U'da kapalı ve ayrık olsun. Bir $a \in P$ noktası $f \in \mathcal{H}(U \backslash P)$ fonksiyonunun bir kaldırılabilir tekil noktasıysa, f fonksiyonunu a'ya holomorf olarak; eğer bir kutup noktasıysa a noktasına sürekli olarak genişletilebileceğini biliyoruz. *Dolayısıyla, P kümesi U'da yerel sonlu olmak üzere, her $f \in \mathcal{H}(U \backslash P)$ fonksiyonu, eğer P'de esaslı tekilliği yoksa bir sürekli $\hat{f} : U \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonuna genişletilebilir.* U'da yalnızca kaldırılabilir tekillikleri ve kutup yerleri olan iki f, g fonksiyonuna, kaldırılabilir tekilliklere holomorf genişlettiğimizde, eşit fonksiyonlar elde ediyorsak **eşittir** diyeceğiz. Bu anlamda ayrık tekillikleri kaldırılabilir veya kutup noktası olan fonksiyonlar iyi huyludur ve onlar hakkından bir şeyler söylenebilir. Onlara bir ad takacağız, onlar U'da meromorf fonksiyonlarımız olacaklardır.

Uzlaşma: Biz kaldırılabilir tekil noktalara, incelediğimiz f fonksiyonlarının holomorf genişletildiğini ve bu genişletilmiş fonksiyonumuzun da yine f ile gösterildiğini varsayacağız. Bu kısımda inceleyeceğimiz f fonksiyonlarının kaldırılabilir tekilliği olmayacak, çünkü varsalar kaldırmış olacağız!

Tanım 3.9.4. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ olmak üzere, herhangi bir sürekli $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümüne $P_f := f^{-1}(\infty)$ kümesi ayrık ve f dönüşümü $U \backslash P_f$'de holomorf ise, f

fonksiyonu U**'da meromorftur** denir. $\mathcal{M}(U)$ ile U'daki meromorf fonksiyonların kümesini göstereceğiz.

f sürekli olduğundan, P_f kümesi U'da kapalıdır, özetle P_f kümesi *U'da yerel sonludur.* f 'nin $a \in P_f$ noktasında sürekli olması $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ olması, dolayısıyla a noktasının f fonksiyonunun bir kutup noktası olması demektir. *P_f kümesi tamı tamına f fonksiyonumuzun U'daki kutup noktalarının kümesidir.* f'yi sürekli seçtiğimizden artık kaldırılabilir tekillikleri olamaz, dolayısıyla f meromorf fonksiyonumuz uzlaşmamıza uyan bir fonksiyondur. Kutup noktaları ve esaslı tekil noktalarına gerçek tekil noktalar dersek, *meromorf fonksiyonlar yalnızca gerçek tekillikleri olan ve onların da kutup noktaları olduğu fonksiyonlardır.* $P_f = \emptyset$ dışlanmadığı için $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{M}(U)$ ve *U'daki holomorf fonksiyonlar, kutup yerleri olmayan U'daki meromorf fonksiyonlardır.* Bu tanıma göre U'daki $f \equiv \infty$ fonksiyonu U'da bir meromorf fonksiyon değildir; ancak Tanım 3.6.8'e göre bir holomorf dönüşümdür! Başka bir anlatımla $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonunun meromorf olması f'nin U'nun hiçbir bağlantılı bileşeninde özdeş olarak ∞ olmayan bir holomorf $f : U \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü olması demektir.

Teorem 3.9.5. *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge olmak üzere, $f : B \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümünün B'de meromorf olması $f \not\equiv \infty$ ve f dönüşümünün holomorf olmasına denktir.*

Kanıt. (1) $f \in \mathcal{M}(B)$ olsun. Tanım gereği $f : B \to \mathbb{C}_\infty$ süreklidir ve $P_f = f^{-1}(\infty)$ olmak üzere, f fonksiyonu $B \backslash P_f$'de holomorftur. $a \in P_f$ olsun. Önce $a \in \mathbb{C}$ durumunu inceleyelim: a noktası f'nin bir kutup yeri olduğundan, bir $D_r(a)$, bir $m \in \mathbb{N}^*$ ve bu dairede holomorf ve sıfır yeri olmayan bir g fonksiyonu ile her $z \in D_r(a)$ için $f(z) = g(z)/(z-a)^m$ olur. a noktası f'nin bir ∞-yeri olduğundan, f'nin a'da holomorf olması tanım gereği $1/f$'nin a noktasında holomorf olması demektir. Bu ise $D_r(a)$'daki $1/f(z) = (z-a)^m/g(z)$ eşitliğinden aşikârdır. Şimdi $a = \infty$ ise, f yerine $\mathring{f}(z) = f(1/z)$ fonksiyonuna geçerek aynı sonuca ulaşılır. Sonuçta $f : B \to \mathbb{C}_\infty$ dönüşümü holomorftur.

(2) Şimdi $f : B \to \mathbb{C}_\infty$ holomorf ve $f \not\equiv \infty$ olsun. Tanım gereği f süreklidir ve $P_f := f^{-1}(\infty)$ olmak üzere, $f \in \mathcal{H}(B \backslash P_f)$ olur. f sürekli olduğundan, P_f kümesi B'de kapalıdır. Şimdi P_f'nin B'de ayrık olduğunu görelim: P_f'nin B'deki yığılma noktalarının kümesini A ile gösterelim. Topolojiden A'nın B'nin bir kapalı altkümesi olduğunu biliyoruz. $A \neq \emptyset$ ve $a \in A$ olduğunu varsayalım. Önce $a \in \mathbb{C}$ olsun. Bir $(a_n) \subset D_r^*(a) \cap P_f$ dizisini $\lim a_n = a$ olacak biçimde seçelim. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğundan, $f(a) = \lim_{a_n\to a} f(a_n) = \infty$ olur. Bu durumda a_n'ler ve a noktası $1/f$'nin sıfır yerleri olduğundan, Özdeşlik Teoremi'nden dolayı $D_r(a)$'da $\frac{1}{f} \equiv 0$, dolayısıyla $D_r(a)$'da $f \equiv \infty$ olur. Böylece $D_r(a) \subset A$ olur. Şimdi $a = \infty$ olsun. Bu durumda $\mathring{f}(z) = f(\frac{1}{z})$ için az önceki irdelemeler geçerlidir ve yine bir $r > 0$ ile $D_r(a) \subset A$ sonucuna ulaşırız; böylece A bir açık kümedir. B bölge olduğundan, A kümesi B'nin hem açık hem kapalı alt kümesi olarak $A = B$ ve dolayısıyla B'de $f \equiv \infty$ olur ki

bu, varsayımımızla çelişir. Son olarak $a \in P_f$ ise, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu bir $D_r(a)$'da holomorf olduğundan, f'nin a'da bir kutup yeri vardır. □

Not 3.9.6. Genelde bize bir $V \subset \mathbb{C}$ kümesinde bir $f : V \to \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonu verilmiştir. Bir $a \in \mathbb{C}\backslash V$ noktasının ∂V sınırının bir ayrık noktası olması yeterince küçük bir $r_a > 0$ ile $D^*_{r_a}(a) \subset V$ olması demektir. Uzlaşmamız gereği a noktası f'nin bir kaldırılabilir noktası değildir (tüm kaldırılabilir tekilliklere f fonksiyonunu holomorf genişletilmiş düşüneceğiz). V kümesinin ayrık sınır noktalarının kümesi P olsun. Elbette $U := V \cup P = V \cup \bigcup_{a\in P} D_{r_a}(a)$ bir açık kümedir ve tanım gereği $V = U\backslash P$. Eğer P kümesi U'da kapalıysa ve her $p \in P$ noktası f'nin bir kutup noktası ise, her $p \in P$ için $\hat{f}(p) := \infty$ ve $\hat{f}|V := f$ tanımlayarak bir meromorf $\hat{f} : U \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonu elde ederiz; çünkü her $p \in P$ için $\lim_{z\to p} \hat{f}(z) = \hat{f}(p)$, dolayısıyla $\hat{f}$'nin her $p \in P$ noktasında da sürekli olduğunu biliyoruz. Böylelikle, $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık ve $P \subset U$ ise U'da yığılma noktası olmayan bir alt küme olmak üzere, kutup yerleri P olan $f \in \mathcal{H}(U\backslash P)$ fonksiyonları U'da meromorftur ve U'daki tüm meromorf fonksiyonlar böyle elde edilir.

$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $f \in \mathcal{M}(U)$ ve $a \in P_f$ ise f'nin n. dereceden bir kutup yeri olsun. Bu durumda $D^*_r(a) \subset U$ ise, f orada a'nın durumuna göre

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{k=-n}^{-1} a_k(z-a)^k + f_2(z) & f_2 \in \mathcal{H}(D_r(a)),\ a_{-n} \neq 0,\ a \in \mathbb{C} \\ \sum_{k=1}^{n} a_k z^k + g_\infty(z) & g_\infty \in \mathcal{H}(D_r(\infty)),\ a_n \neq 0,\ a = \infty \end{cases}$$

Laurent açılımlarına sahiptir. Dolayısıyla, her $z \in D^*_r(a)$ için

$$(z-a)^n f(z) = h(z),\ a \in \mathbb{C},\ h \in \mathcal{H}(D_r(a)),\ h(a) \neq 0 \tag{3.44}$$

$$z^{-n} f(z) = g(z),\ a = \infty,\ g \in \mathcal{H}(D_r(\infty)),\ g(\infty) \neq 0. \tag{3.45}$$

$(z-a)^n$ fonksiyonu $D_r(a)$'da holomorftur ve orada yalnızca a noktasında n. dereceden bir sıfır yerine sahiptir. z^{-n} fonksiyonu ise $D_r(\infty)$'da holomorftur ve orada yalnızca ∞'da n. dereceden bir sıfır yerine sahiptir.

Örnek 3.9.7. Meromorf fonksiyonlara bir kaç örnek verelim:

1. $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$ olsun. p polinomu $\mathbb{C}$'de holomorftur. Teorem 3.2.3'ten $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$ olur. $p(\infty) := \infty$ olarak tanımlarsak $p : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ fonksiyonu sürekli, dolayısıyla $p \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ olur. Diğer yandan, $\lim_{z\to\infty}(\chi \circ p)(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{p(z)} = 0$ olduğundan, $\chi \circ p$ fonksiyonu bir $D^*_r(\infty)$'da holomorf ve sınırlı olduğundan, ∞'da holomorf olur. Böylece, p polinomu ∞'da da holomorftur.

2. $p, q \in \mathbb{C}[z]$ ortak bölenleri olmayan iki polinom ve $r(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ olsun. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ noktaları q polinomunun birbirinden farklı sıfır yerleri olsunlar ve her i için a_i'deki sıfırın derecesi m_i olsun. Bu durumda bir $h_i \in \mathcal{H}(D_{r_i}(a_i))$, $h_i(a_i) \neq 0$ ile her $z \in D^*_{r_i}(a_i)$ için $(z-a_i)^{m_i} r(z) = h_i(z)$ olur. Dolayısıyla, $r(z)$ rasyonel fonksiyonumuzun a_i'de m_i. dereceden bir kutup yeri vardır. $r(z)$ fonksiyonumuzun a_i'deki Laurent açılımının esas kısmını $g_i(z)$ ile gösterirsek, $s := r - \sum_{i=1}^n g_i$ bir rasyonel fonksiyondur ve $\mathbb{C}$'de kutup yeri yoktur. Böylece s bir polinomdur. Böylece,

$$r(z) = \sum_{i=1}^{n} g_i(z) + s(z)$$

ifadesi $r(z)$ rasyonel fonksiyonlarımızın kesirlere ayrımından başka bir şey değildir.

3. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ ise, P_f kümesi $\mathbb{C}_\infty$ kompakt uzayının yerel sonlu alt kümesi olarak sonlu olmak zorundadır.(1.7.5)(iii)'ten biliyoruz ki $\cos z = 0 \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ve $\sin z = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$. Her iki fonksiyonun da sıfır yerlerinde türevleri sıfırdan farklı olduğu için bunlar birinci dereceden sıfır yerleridir. Dolayısıyla, $f(z) = 1/\cos z$ ve $g(z) = 1/\sin z$ fonksiyonlarının her ikisi de $\mathbb{C}$'de meromorftur. $P_f = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ ve $P_g = \pi\mathbb{Z}$ ve tüm kutup noktaları birinci derecedendir. P_f ve P_g kümeleri sonsuz olduğundan, f ve g fonksiyonları $\mathbb{C}_\infty$'a meromorf olarak genişletilemezler. P_f ve P_g kümeleri $\mathbb{C}_\infty$'da ayrık değillerdir!

Önerme 3.9.8. *$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık ve $f \in \mathcal{M}(U)$ ise, her $a \in U$ noktasının bir V komşuluğunda f fonksiyonu V'de holomorf iki fonksiyonun bölümüdür, dd. $g, h \in \mathcal{H}(V)$ fonksiyonları $f|V = g/h$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. $a \in U \backslash P_f$ ise $f = f/1$. Eğer $a \in P_f$ ise sav, (3.44) ve (3.45)'ten çıkar. □

Meromorf Fonksiyonlarda İşlemler: $B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge olsun. $f, g \in \mathcal{M}(B)$ verilsinler. P_f ve P_g bu fonksiyonların kutup yerleri olsunlar. P_f ve P_g kümelerinin her biri B'de yerel sonlu olduklarından, $P_f \cup P_g$ kümesi de B'de yerel sonludur. Dolayısıyla, $f \pm g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonları $B \backslash (P_f \cup P_g)$ bölgesinde holomorfturlar. $P_f \cup P_g$ kümesinde ise bu fonksiyonların kaldırılabilir tekillikleri veya kutup noktaları olduğu kolayca görülür. Uzlaşmamız gereği $f \pm g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonları $B \backslash (P_f \cup P_g)$ bölgesindeki kaldırılabilir tekil noktalarına holomorf olarak genişletilmiş olarak ele alınacaktırlar. Dolayısıyla, $P_{f \pm g}, P_{fg} \subset P_f \cup P_g$. Burada $\subset$ yerinde duruma göre $\subsetneq$ olabilir. Örneğin a noktası f fonksiyonunun n. dereceden bir kutup yeri ve g ise a noktasında n. dereceden sıfır yeri olan bir meromorf fonksiyonsa a noktası fg'nin bir kaldırılabilir tekil noktasıdır. Sonuç olarak, $a \notin P_{fg}$ ancak $a \in P_f \cup P_g$. Veya $f(z) = \sin z - z^{-1}$ ve $g(z) := z^{-1}$ fonksiyonları $\mathbb{C}$'de meromorftur, 0 noktası her ikisinin de birinci dereceden kutup yeridir. Ancak $f + g$ fonksiyonun 0'da bir kaldırılabilir tekilliği vardır. $(\widehat{f+g})(0) := 0$ ve $\widehat{f+g}|\mathbb{C}^* := (f+g)|\mathbb{C}^*$ ile tanımlanan $\widehat{f+g}$ fonksiyonu $\mathbb{C}$'de holomorftur.

Teorem 3.9.9. *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge ise, $\mathcal{M}(B)$ yukarıda tanımlanan işlemlere göre bir cisimdir.*

Kanıt. Kanıtlanması gereken tek şey $0 \neq f \in \mathcal{M}(B)$ ise, dd. $f \in \mathcal{M}(B)$ ve $f \not\equiv 0$ ise, $1/f \in \mathcal{M}(B)$ olduğudur. B bölge olduğundan, f'nin B'deki sıfır yerlerinin Z_f kümesi B'de yerel sonlu ve $g := 1/f$ olmak üzere, $P_g \subset Z_f$ olduğundan, $1/f \in \mathcal{M}(B)$. □

Sonuç 3.9.10. *$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $f \in \mathcal{M}(U)$ ve f fonksiyonu U'da hiçbir yerde yerel olarak özdeş olarak 0 değilse, dd. yerel olarak $f \not\equiv 0$ ise, $1/f \in \mathcal{M}(U)$.*

Kanıt. Teorem 3.9.9'u U açık kümesinin B bağlantılı bileşenlerine uygularsak bu, savı verir. □

$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ise, Sonuç 1.8.6'da $\mathcal{A}(B)$'nin, yani $\mathcal{H}(B)$'nin bir tamlık bölgesi olduğunu kanıtladık. $\mathcal{H}(B) \subset \mathcal{M}(B)$ ve $\mathcal{M}(B)$ bir cisim olduğundan, $\mathcal{H}(B)$ tamlık bölgesinin $\{f/g | f, g \in \mathcal{H}(B),\ g \neq 0\}$ bölüm cismi, $\mathcal{M}(B)$ cisminin bir alt cismidir. Biz KA II'de $\mathcal{M}(B) = \{f/g | f, g \in \mathcal{H}(B),\ g \neq 0\}$ olduğunu kanıtlayacağız. Ancak şimdilik $h \in \mathcal{M}(B)$ ve P_h sonlu ise, $h = f/g$ olacak biçimde $f, g \in \mathcal{H}(B)$ bulabileceğimizi görebiliriz. h fonksiyonunun kutup noktaları $a_1, \ldots, a_k$ ve dereceleri $m_1, \ldots, m_k$ olsun.

$$f(z) := (z - a_1)^{m_1} \cdot \cdots \cdot (z - a_k)^{m_k} h(z) =: g(z)h(z)$$

fonksiyonu $B \backslash \{a_1, \ldots, a_k\}$'de holomorftur ve a_i noktalarında kaldırılabilir tekillikleri vardır ve oralara holomorf genişletilir ve g polinomu tüm düzlemde holomorf olduğundan, sonunda B'de $f, g \in \mathcal{H}(B)$ ve $h = f/g$ olur.

Holomorf fonksiyonlar için geçerli olan teoremlerin çoğu meromorf fonksiyonlara aktarılırlar. Bunlardan bazılarını verelim:

Önerme 3.9.11. *Her holomorf $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sabittir.*

Kanıt. f fonksiyonu $\mathbb{C}_\infty$'da sürekli, $\mathbb{C}_\infty$ kompakt olduğundan, $f(\mathbb{C}_\infty)$ kümesi $\mathbb{C}$'nin bir kompakt altkümesidir, dolayısıyla sınırlıdır. Özellikle $f|\mathbb{C}$ bir sınırlı holomorf fonksiyondur, böylece Liouville Teoremi'nden dolayı sabittir. f sürekli olduğundan, $\mathbb{C}_\infty$'da da sabittir. □

Kompleks katsayılı rasyonel fonksiyonların cismi $\mathbb{C}(z)$ ile gösterilir.

Önerme 3.9.12. *$\mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}(z)$, dd. $\mathbb{C}_\infty$'deki meromorf fonksiyonlar tamı tamına rasyonel fonksiyonlardır.*

Kanıt. $\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ olduğu apaçıktır. Tersini görelim: $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ verilsin. $P_f = f^{-1}(\infty)$ kümesi $\mathbb{C}_\infty$ kompakt uzayında ayrık olduğu için sonludur ve $\infty \in P_f$ olabilir. $P_f = \{z_1, \ldots, z_n\}$ olsun. f fonksiyonunun z_k'deki Laurent açılımının esas kısmını h_k ile gösterelim. Her bir h_k fonksiyonu $\mathbb{C}_\infty \backslash \{z_k\}$'de holomorftur. Dolayısıyla, $g := f - \sum_{k=1}^n h_k$ fonksiyonu $\mathbb{C}_\infty \backslash P_f$'de holomorftur. Ayrıca, g'nin her bir z_k'de bir kaldırılabilir tekilliği olduğundan, $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}$ holomorftur, böylece Önerme 3.9.11 ile g sabittir. Bir $c \in \mathbb{C}$ ile $g(z) \equiv c$. Bu durumda $f = \sum_{k=1}^n h_k + c$. Eğer $z_k \in \mathbb{C}$ ise, h_k fonksiyonu $(z - z_k)^{-1}$'in bir polinomu, dolayısıyla rasyonel; eğer $z_k = \infty$ ise h_k fonksiyonu z'nin bir polinomu olduğundan, her bir h_k bir rasyonel fonksiyondur; dolayısıyla f rasyoneldir. □

Not 3.9.13. Özellikle $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ meromorf fonksiyonu, $p, q \in \mathbb{C}[z]$ olmak üzere, $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ rasyonel fonksiyonu ise kanıttaki $f = \sum_{k=1}^n h_k + c$ ifadesine rasyonel fonksiyonların integrallerini almak istediğimizde baş vururuz. Bu ifade f rasyonel fonksiyonunun kesirlere parçalanmasından başka bir şey değildir. p ve q polinomlarını aralarında asal varsayalım. Bu durumda f fonksiyonunun $\mathbb{C}$'deki kutup noktaları tamı tamına q polinomunun sıfır yerleridir.

∞ noktasıysa, ancak ve ancak p'nin derecesi q'nun derecesinden büyükse f'nin bir kutup yeridir. Eğer z_k kutup noktası $\mathbb{C}$'de ise

$$h_k(z) = \sum_{i=1}^{m_k} \frac{a_{ki}}{(z-a_k)^i}$$

tipinde bir ifadedir. Eğer $z_k = \infty$ ve p ve q'nun dereceleri sırasıyla m ve n olmak üzere, $m > n$ ise $h_k(z) = \sum_{i=0}^{m-n} a_{ki} z^i$ tipinde bir polinomdur.

Teorem 3.9.14. *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge, $f \in \mathcal{M}(B)$ ve $f \neq$sabit ise, her $w \in \mathbb{C}_\infty$ için $f^{-1}(w)$ kümesi B'de ayrıktır.*

Sonuç 3.9.15 (Özdeşlik Teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge, $A \subset B$ ve A kümesinin B'de bir yığılma noktası olsun. $f, g \in \mathcal{M}(B)$ ve $f|A = g|A$ ise, $f = g$ eşitliği sağlanır.*

Teoremin kanıtı. $w = \infty$ ise, $f^{-1}(\infty) = P_f$ tanım gereği B'de ayrıktır.

Şimdi $w \in \mathbb{C}$ olsun. Önerme 3.9.3'ten $B \setminus P_f$ bir bölgedir. Dolayısıyla, $G := B \setminus (P_f \cup \{\infty\}) \subset \mathbb{C}$ de bir bölgedir. $f|G : G \to \mathbb{C}$ holomorf olduğundan, $f^{-1}(w)$'nin G'de bir yığılma noktası olamaz! Aksi durumda $f|G$ sabit olurdu, ardından f'nin sürekliliğinden B'de f sabit olurdu ve bu, varsayımımızla çelişir. Ancak $f^{-1}(w)$'nin $P_f \cup \{\infty\}$'de bir yığılma noktası olabilir. Böyle bir yığılma noktası varsa, f'nin sürekliliğinden, bu ancak ∞ olabilir.

İrdelenmesi gereken durum $\infty \in B$ ve ∞'nun $f^{-1}(w)$'nin bir yığılma noktası olmasıdır. Bu durumda bir $\sigma > 0$ sayısını ve terimleri birbirinden farklı olan bir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f^{-1}(w) \cap D^*_\sigma(\infty)$ dizisini $\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty$ olacak biçimde seçebiliriz. f fonksiyonu B'de sürekli olduğundan, $f(\infty) = \lim f(z_n) = w$ olur. Dolayısıyla, f fonksiyonu bir $D_r(\infty) \subset B$ dairesinde sınırlıdır. Bu durumda f fonksiyonu $D^*_r(\infty)$'da holomorftur —orada kutup yeri olamaz!—, böylece $\mathring{f}(z) = f(z^{-1})$ fonksiyonumuz $D^*_r(0)$'da holomorf ve sınırlıdır, dolayısıyla 0 noktasına $\hat{\mathring{f}}(0) = w$ ile holomorf genişletilir. Bu durumda 0 noktası $D_r(0)$'da holomorf olan $\hat{\mathring{f}}$ fonksiyonun w-yerleri olan z_n^{-1} terimlerinin bir yığılma noktasıdır. Holomorf fonksiyonlar için Özdeşlik Teoremi'nden $D_r(0)$ dairesinde $\hat{\mathring{f}} \equiv w$, dolayısıyla $D_r(\infty)$ dairesinde $f \equiv w$ olur. Bu durumda yukarıda kanıtlananın aksine $f^{-1}(w)$'nin G'de de yığılma noktaları olması gerekir; bu olamaz! Sonuçta her $w \in \mathbb{C}$ için de $f^{-1}(w)$'nin B'de bir yığılma noktası yoktur, böylelikle bu $f^{-1}(w)$ kümesi B'de (3.9.1)(iv)'ten dolayı ayrıktır.

Sonucu kanıtlamak için teoremi $f - g \in \mathcal{M}(B)$ fonksiyonuna uygulayınız. □

Teorem 3.9.16 (Açık Dönüşüm Teoremi II)**.** *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge ise, sabit olmayan her $f : B \to \mathbb{C}_\infty$ meromorf fonksiyonu bir açık dönüşümdür. Özellikle her $G \subset B$ bölgesi için $f(G)$ de bir bölgedir.*

Kanıt. $U \subset B$ açık olsun. $z_0 \in U$ keyfi verilsin ve $w_0 = f(z_0)$ olsun. Biz bir $\sigma > 0$'nin $D_\sigma(w_0) \subset f(U)$ olacak biçimde bulunabileceğini göstereceğiz.

Önce $w_0 \neq \infty$ durumunu inceleyelim: Bir $r > 0$ sayısını $D_r(z_0) \subset U$ ve f fonksiyonunu $D_r(z_0)$'da holomorf olacak biçimde seçelim. Eğer $z_0 \neq \infty$ ise, $f|D_r(z_0)$ sabit olmayan bir holomorf fonksiyondur, dolayısıyla Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı bir açık dönüşümdür. Öyleyse, $f(D_r(z_0))$ bir açık kümedir. Dolayısıyla, bir $\sigma > 0$ sayısı $D_\sigma(w_0) \subset f(U)$ olacak biçimde bulunabilir. $z_0 = \infty$ ise, bu kez $\mathring{f}(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ fonksiyonu $D_r(0)$'da sabit olmayan bir holomorf fonksiyondur ve dolayısıyla yine Açık Dönüşüm Teoremi'nden dolayı, $f(D_r(z_0)) = \mathring{f}(D_r(0))$ bir açık kümedir ve bir önceki argüman geçerlidir.

Şimdi $w_0 = \infty$ olsun. Bu durumda $g := \frac{1}{f}$ fonksiyonu sabit değildir ve B'de meromorftur ve $g(z_0) = 0$. Az önce kanıtlanandan, bir $\sigma > 0$ sayısı $D_\sigma(0) \subset g(U)$, dolayısıyla $D_\sigma(\infty) \subset f(U)$ olacak biçimde bulabiliriz. Bu, $f(U)$ kümesinin açıklığının kanıtını tamamlar.

$G \subset B$ bir bölge ise, f sürekli olduğundan, $f(G)$ bağlantılıdır, diğer yandan açık olduğunu da biliyoruz. Öyleyse, $f(G)$ bir bölgedir. □

Teorem 3.9.17 (Maksimum İlkesi)**.** *Bir B bölgesindeki f meromorf fonksiyonu sabit değilse $|f|$ fonksiyonu $B \backslash P_f$'te maksimumunu alamaz.*

Kanıt. $B \backslash P_f$ bir bölge ve f orada holomorf olduğundan, sav (1.8.18)'den çıkar. □

3.9.2 Meromorf Fonksiyonların Topolojisi

Kısım 1.5'te düzgün yakınsaklık topolojilerini incelemiştik. Şimdi $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık olmak ve $\mathbb{C}_\infty$ ise d_∞ kiriş metriği ile alınmak üzere, $\mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ uzayını kompakt kümeler üzerindeki düzgün yakınsaklık topolojisiyle ele alacağız. U'nun bir K kompakt altkümesi verildiğinde her $f, g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ için

$$d_{\infty K}(f, g) := \sup_{z \in K} d_\infty(f(z), g(z)).$$

Eğer $U = \mathbb{C}_\infty$ ise U'nun kendisi kompakt olduğundan, $d_{\infty U}$ bize $\mathcal{C}(\mathbb{C}_\infty, \mathbb{C}_\infty)$ uzayında düzgün yakınsaklık topolojisini veren bir metriktir. İlginç olan $U \subsetneq \mathbb{C}_\infty$ durumuna dönelim: U'yu kompakt kümelerle tüketebiliriz. Örneğin her $n \in \mathbb{N}^*$ için $K_n := \left\{z \in U \,|\, d_\infty(z, \partial U) \geq \frac{1}{n}\right\}$ kümeleri kompakt $\mathbb{C}_\infty$ uzayımızın kapalı altkümeleri olarak kompakttırlar ve açıkça $U = \bigcup_{n \geq 1} K_n$. Şimdi U'yu tüketen herhangi bir (K_n) kompakt kümeler dizisi alalım. Bu kez $f, g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ olmak üzere,

$$\rho_\infty(f, g) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_{\infty K_n}(f, g)}{1 + d_{\infty K_n}(f, g)}$$

alacağız. $(\mathbb{C}, d)$ ve $(\mathbb{C}_\infty, d_\infty)$ metrik uzayları tamdırlar. ρ (3.16) ile tanımlanan metrik olmak üzere, Önerme 3.4.6'da $(\mathcal{C}(U, \mathbb{C}), \rho)$ metrik uzayının tam olduğunu kanıtlamıştık. Aynı şekilde $(\mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty), \rho_\infty)$ metrik uzayının tamlığı kanıtlanır. ρ_∞ metriğine $\mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ uzayının **kirişsel metriği** diyeceğiz.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $z, w \in \mathbb{C}$ için $d_\infty(z, w) \leq 2d(z, w)$ olduğundan, herhangi bir $(f_n) \subset \mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$, $f \in \mathcal{C}(U)$ ve herhangi bir $K \subset U$ kompakt kümesi için $\lim d_K(f_n, f) = 0$ ise $\lim d_{\infty K}(f_n, f) = 0$. Dolayısıyla, $\lim \rho(f_n, f) = 0$ ise $\lim \rho_\infty(f_n, f) = 0$ olur. Bunun tersi doğru değildir; yine de aşağıdaki önerme geçerlidir.

Önerme 3.9.18. *$M \subset \mathbb{C}_\infty$, $(f_n) \subset \mathcal{C}(M, \mathbb{C}_\infty)$, $f \in \mathcal{C}(M, \mathbb{C})$ ve (f_n) dizisi M'de f fonksiyonuna kirişsel düzgün yakınsak, dd.* $\lim d_{\infty M}(f_n, f) = 0$ *olsun. Eğer ayrıca f fonksiyonu M'de sınırlıysa, bir n_0 doğal sayısı ile $(f_n)_{n \geq n_0} \subset \mathcal{C}(M, \mathbb{C})$ olur ve $f_n \overset{M}{\Longrightarrow} f$, dd.* $\lim d_M(f_n, f) = 0$.

Kanıt. f fonksiyonu M'de sınırlı olduğundan, bir $c > 0$ sabiti her $z \in M$ için $|f(z)| \leq c$ olacak biçimde seçilebilir. $\varphi(t) = t/\sqrt{1+t^2}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$'da kesin artan olduğundan, $\forall z \in M$ için

$$d_\infty(0, f(z)) = \frac{2\,|f(z)|}{\sqrt{1 + |f(z)|^2}} \leq \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} < 2$$

olur. $\varepsilon > 0$ sayısını $0 < \varepsilon + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} < 1$ olacak biçimde seçelim. $a := \varepsilon + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ olsun. $\lim_n d_{\infty M}(f_n, f) = 0$ olduğundan, bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı her $n \geq n_0$ için $d_{\infty M}(f_n, f) < 2\varepsilon$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda her $z \in M$ ve her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}\frac{2f_n(z)}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} &= d_\infty(0, f_n(z)) \leq d_\infty(0, f(z)) + d_\infty(f(z) f_n(z)) \\ &< \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + 2\varepsilon = 2a.\end{aligned}$$

Buradan ve $0 < a < 1$ eşitsizliğinden, $0 < p := \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ ile her $n \geq n_0$ ve her $z \in M$ için $|f_n(z)| \leq p$ elde edilir, dd. $(f_n)_{n \geq n_0} \subset \mathcal{C}(M, \mathbb{C})$. Diğer yandan, her $n \geq n_0$ ve her $z \in M$ için

$$\begin{aligned}|f(z) - f_n(z)| &= \frac{1}{2} d_\infty\left(f(z), f_n(z)\right) \sqrt{1+|f(z)|^2}\sqrt{1+|f_n(z)|^2} \\ &\leq \frac{1}{2} d_\infty(f(z), f_n(z)) \sqrt{1+c^2}\sqrt{1+p^2} =: P d_\infty(f(z), f_n(z))\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\|f - f_n\|_M \leq P d_{\infty M}(f, f_n)$ ve $\lim \|f - f_n\|_M = 0$. $\square$

Meromorf fonksiyonlar dizilerini incelerken ρ_∞ kiriş metriği daha kullanışlıdır. Şimdi bize bir $(g_n) \subset \mathcal{M}(U)$ meromorf fonksiyonlar dizisi verilsin. (g_n) dizisi U'da bir $g \in \mathcal{F}(U, \mathbb{C}_\infty)$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaksa $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ ve $\lim \rho_\infty(g_n, g) = 0$ olduğunu biliyoruz.

Teorem 3.9.19. *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge, $(f_n) \subset \mathcal{M}(B)$, $f : B \to \mathbb{C}_\infty$ olsun. $\lim \rho_\infty(f_n, f) = 0$ ise, dd. (f_n) dizisi B'de f fonksiyonuna kirişsel kompakt düzgün yakınsaksa ya $f \equiv \infty$ ya da $f \in \mathcal{M}(B)$. Eğer ayrıca $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$ ise, ya $f \equiv \infty$ ya da $f \in \mathcal{H}(B)$.*

Sonuç 3.9.20. *ρ_∞ metriği ile $\mathcal{H}(B) \cup \{\infty\}$ ve $\mathcal{M}(B) \cup \{\infty\}$ uzayları tamdırlar.*[11]

Kanıt. Her şeyden önce $f \in \mathcal{C}(B, \mathbb{C}_\infty)$. Şimdi $a \in B$ keyfi verilsin.

(1) $f(a) \in \mathbb{C}$ olsun. f sürekli olduğundan, bir $\overline{D}_r(a) \subset B$'de sınırlıdır. Önerme 3.9.18'den dolayı, bir n_0'dan itibaren f_n fonksiyonları $\overline{D}_r(a)$'da $\mathbb{C}$-değerli, dolayısıyla $D_r(a)$'da holomorfturlar. Yine Önerme 3.9.18'den dolayı, $(f_n)_{n \geq n_0}$ dizisi $\overline{D}_r(a)$'da alışıldık anlamda f'ye düzgün yakınsak olduklarından, f fonksiyonu $D_r(a)$'da holomorftur.

(2) $f(a) = \infty$ olsun. Bu durumda bir n_0 sayısı her $n \geq n_0$ için $f_n(a) \neq 0$ olacak biçimde bulunabilir. Dolayısıyla, $n \geq n_0$ için $f_n \not\equiv 0$ ve bu nedenle, $n \geq n_0$ için $g_n := 1/f_n$ olmak üzere, $(g_n)_{n \geq n_0} \subset \mathcal{M}(B)$ olur. $g := 1/f$ dersek, her $z \in B$ için $d_\infty(g_n(z), g_m(z)) = d_\infty(f_n(z), f_m(z))$ olduğundan (bkz. Problem 3.6.3), (g_n) dizisi B'de g fonksiyonuna kirişsel kompakt düzgün yakınsaktır. Böylece, $g \in \mathcal{C}(B, \mathbb{C}_\infty)$ ve $g(a) = 0$ olur. Sonuç olarak (1) durumundayız ve bir $\overline{D}_r(a) \subset B$'de $g_n \overset{\overline{D}_r(a)}{\Longrightarrow} g$ ve $g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ olur. Eğer $D_r(a)$'da $g \equiv 0$ ise, orada $f \equiv \infty$. Eğer $D_r(a)$'da $g \not\equiv 0$ ise orada g'nin sıfır yerleri ayrık, dolayısıyla $f = \frac{1}{g}$ fonksiyonu $D_r(a)$'da meromorf olacaktır.

f sürekli olduğundan, $A := f^{-1}(\infty)$ kümesi B'de kapalıdır. $z \in B \backslash \mathring{A}$ ise, irdelemelerimizden z noktasının bir U_z komşuluğunda f fonksiyonu meromorftur ve $U_z \cap \mathring{A} = \emptyset$; böylece $B \backslash \mathring{A}$ kümesi B'de açıktır. Dolayısıyla, $B = \mathring{A} \sqcup \left(B \backslash \mathring{A}\right)$ ve B bir bölge olduğundan, ya $\mathring{A} = \emptyset$, ya da $B \backslash \mathring{A} = \emptyset$. Böylece, ya $f \in \mathcal{M}(B)$ ya da $f \equiv \infty$.

(3) Şimdi $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$, $f \in \mathcal{C}(B, \mathbb{C}_\infty)$ ve $\lim \rho_\infty(f_n, f) = 0$ olsun. Şimdiden ya $f \equiv \infty$ ya da $f \in \mathcal{M}(B)$ olduğunu biliyoruz. $f \not\equiv \infty$, dolayısıyla f meromorf olsun. f'nin B'de kutup yeri olmadığını kanıtlayacağız. Bir $a \in B \cap \mathbb{C}$ için $f(a) = \infty$ olduğunu varsayalım. $r > 0$ sayısını yeterince küçük seçersek a noktasının f'nin bir $D_r(a)$'daki yegâne kutup noktası olmasını sağlarız; ayrıca $\overline{D}_r(a) \subset B$ olsun. g, g_n fonksiyonları (2)'deki gibi seçilsinler. Ayrıca, bir n_0'dan itibaren f_n'lerin $\overline{D}_r(a)$'da sıfır yerleri olmamasını sağlayabiliriz; dolayısıyla $n \geq$

[11] Bu sonuçtaki ∞ ile B'deki $f \equiv \infty$ sabit fonksiyonu kastedilmektedir.

n_0 için g_n'ler $\overline{D}_r(a)$'da sıfır yerleri olmayan holomorf fonksiyonlar ve $g_n \overset{\overline{D}_r(a)}{\Longrightarrow} g$ olduğundan, Sonuç 4.2.23'ten $g(a) = 0$ olamaz. Çelişkiye ulaştık; $f(a) = \infty$ olamaz! $a = \infty$ olduğunda aynı irdelemeler $f(\frac{1}{z})$ ve $g_n\left(\frac{1}{z}\right)$ fonksiyonlarıyla yapılır. Sonuçta f kutup yeri olmayan bir meromorf fonksiyon, dd. bir holomorf fonksiyondur. □

Not 3.9.21. $U := \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $z \in U$ için $f_n(z) = z^n$ ve $g(z) = \infty$ alalım. $K \subset U$ kompakt kümesi keyfi verilsin. m_K, M_K pozitif sayıları her $z \in K$ için $1 < m_K \leq |z| \leq M_K < +\infty$ olacak biçimde bulunabilirler. Her $z \in K$ için

$$0 \leq d_\infty(f_n(z), g(z)) = d_\infty(z^n, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z^n|^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+m_K^{2n}}}$$

olduğundan, $0 \leq \lim_n d_{\infty K}(f_n, g) = \lim_n \sup_{z\in K} d_\infty(z^n, \infty) \leq 0$ sağlanır. Dolayısıyla, (f_n) dizisi her kompakt $K \subset U$ kümesinde g fonksiyonuna $d_{\infty K}$'ye göre düzgün yakınsak olduğundan, $(\mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty), \rho_\infty)$ uzayında $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ fonksiyonuna ρ_∞'a göre yakınsar. Şimdi $(f_n) \subset \mathcal{H}(U) \subset \mathcal{M}(U) \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty)$ sağlandığından, şunu görmüş olduk: $\mathcal{H}(U)$ ve $\mathcal{M}(U)$ uzayları $(\mathcal{C}(U, \mathbb{C}_\infty), \rho_\infty)$ metrik uzayının kapalı alt kümeleri değildirler. Bundan dolayı, $(\mathcal{H}(U), \rho_\infty)$ ve $(\mathcal{M}(U), \rho_\infty)$ metrik uzayları tam değildirler.

3.9.3 Meromorf Fonksiyon Serileri

$U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve $(f_n) \subset \mathcal{M}(U)$ olmak üzere, $\sum f_n$ serileri için uygun yakınsaklık kavramlarıyla bu serilerin f toplamları için de $f \in \mathcal{M}(U)$ olmasını istiyoruz.

Kutup Koşulu: $(f_n) \subset \mathcal{M}(U)$ verilsin. Her kompakt $K \subset U$ altkümesine karşılık bir n_K doğal sayısı her $n \geq n_K$ için $P_{f_n} \cap K = \emptyset$ olacak biçimde bulunabiliyorsa (f_n) dizisi **U'da kutup koşulunu** sağlar diyeceğiz. Bu gösterimleri saklı tutalım.

Tanım 3.9.22. $U \subset \mathbb{C}$ bir açık altküme ve $(f_n) \subset \mathcal{M}(U)$ dizisi U'da kutup koşulunu sağlasın. U açık kümesinin her kompakt K altkümesinde $\sum_{n\geq n_K} f_n$ serisi düzgün (benzer biçimde mutlak düzgün veya normsal) yakınsaksa $\sum_{n\geq 0} f_n$ serisi U'da **kompakt düzgün yakınsaktır** (benzer biçimde U'da **kompakt mutlak** veya U'da **kompakt normsal yakınsaktır**) denir.

Her K kümesinde ancak $f_0, f_1, \ldots, f_{n_K-1}$ fonksiyonlarının kutup yerleri bulunabilir ve bunlar sonlu sayıdadırlar. Dolayısıyla, $\sum_{n\geq 0} f_n$ serisi U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsaksa $P := \bigcup_{n\geq 0} P_{f_n}$ kümesi U'da yerel sonludur ve $V := U\backslash P$ bir açık kümedir. Ayrıca, tanımdan $(f_n|V) \subset \mathcal{H}(V)$ ve $\sum_{n\geq 0} f_n|V$ serisi V'de holomorf bir f_V fonksiyonuna kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsaktır. Aşağıdaki teorem apaçıktır:

Teorem 3.9.23. *$(f_n) \subset \mathcal{M}(U)$ ve $\sum_{n\geq 0} f_n$ serisi U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsaksa tek olarak belirli bir $f \in \mathcal{M}(U)$ ile aşağıdaki önerme geçerlidir:*

$W \Subset U$ açık ve bir $m \in \mathbb{N}$ ile her $n \geq m$ için $P_{f_n} \cap W = \emptyset$ ise, $\sum_{n \geq m} f_n$ serisi bir $g_m \in \mathcal{H}(W)$ fonksiyonuna W'de kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsaktır ve

$$f|W = f_0|W + f_1|W + \cdots + f_{m-1}|W + g_m. \tag{3.46}$$

$\sum_{n \geq 0} f_n := f$ olarak tanımlanır. Teoremde varlığı ve tekliği öne sürülen f meromorf fonksiyonumuz için elbette $f|V = f_V$ geçerlidir; dolayısıyla $P_f \subset P$ olur. Meromorf serileri incelemedeki temel yaklaşım şudur: Her $W \Subset U$ açık kümesinde serimiz, (3.46)'da olduğu gibi, sonlu sayıda W'de meromorf fonksiyonun toplamı artı W'de bir $\sum_{n \geq m} f_n|W$ holomorf fonksiyonların bir serisinin toplamıdır. Bu nedenle, holomorf fonksiyon serilerine ilişkin çoğu teorem meromorf serilere aktarılır.

Teorem 3.9.24. *$(f_n) \subset \mathcal{M}(U)$ dizisi U'da kutup koşulunu sağlasın. $\sum f_n$ serisi U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsak ve $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ ise, her $k \in \mathbb{N}^*$ için $\sum f_n^{(k)}$ serisi de U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsaktır ve toplamı $f^{(k)}$'dir.*

Kanıt. Sav, doğrudan Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.4'ten çıkar. □

Aşağıdaki iki sav aşikârdır:

Önerme 3.9.25. *$(f_n), (g_n) \subset \mathcal{M}(U)$ dizileri U'da kutup koşulunu sağlasın. $\sum f_n$ ve $\sum g_n$ serileri U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsaksalar her $a, b \in \mathbb{C}$ için $\sum (af_n + bg_n)$ serileri de U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsaktırlar.*

Teorem 3.9.26. *$(f_n) \subset \mathcal{M}(U)$ dizisi U'da kutup koşulunu sağlasın. $\sum f_n$ serisi U'da $f \in \mathcal{M}(U)$ fonksiyonuna kompakt normsal yakınsaksa her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permütasyonu için $\sum f_{\sigma(n)}$ serisi de U'da f fonksiyonuna kompakt normsal yakınsaktır.*

$(f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{M}(U)$ olmak üzere, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n$ serisinin U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsak olmasından elbette $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}$ ve $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ serilerin her ikisinin de U'da kompakt düzgün (veya kompakt normsal) yakınsak olması anlaşılacaktır.

Örnek 3.9.27. 1. $k \geq 2$ olmak üzere,

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right), \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right), \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^k}, \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z-n)^k}$$

serileri $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktırlar. Gerçekten de $r > 0$ ise

$$\forall z \in \overline{D}_r(0)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \geq 1\ \left(n > r \Longrightarrow (n-r)^k \leq |z \pm n|^k \right).$$

Dolayısıyla, $K_r := \overline{D}_r(0)$, $k \geq 1$ ve her $n > r$ için

$$\left\| \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right\|_{K_r} \leq \frac{r}{n\,(n-r)} \text{ ve } \left\| \frac{1}{|z \pm n|^k} \right\|_{K_r} \leq \frac{1}{(n-r)^k}.$$

Diğer yandan, $k \geq 2$ için $\sum_{n>r} n^{-k}$ ve $\sum_{n>r}(n(n-1))^{-1}$ pozitif terimli serileri yakınsak olduğundan, söz konusu serilerimiz K_r kompakt kümesinde normsal yakınsaktırlar. $\mathbb{C}$'nin her kompakt K altkümesi böyle bir K_r'ye düştüğünden, serilerimiz $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktır.

2. $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsak olan $\sum \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right)$ ve $\sum \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$ serilerinin toplamı olarak $\sum \frac{2z}{z^2-n^2}$, dolayısıyla $\sum \frac{z}{z^2-n^2}$ serisi de $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsaktır.

3.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

serisinin $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu savunuyoruz. Yukarıdaki birinci örneğimizden, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ ve $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ serilerinin her ikisinin de $\mathbb{C}$'de kompakt normsal yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu savı verir. Bu serinin toplamına f dersek, bu meromorf fonksiyonumuzun kutup yerlerinin kümesi $\mathbb{Z}$'dir ve her $n \in \mathbb{Z}$ noktasında fonksiyonumuzun ikinci dereceden bir kutup yeri vardır. Örnek 4.4.5(2)'de

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2}$$

olduğunu göreceğiz.

Problemler

Problem 3.9.1. B bir bölge, $f, g \in \mathcal{M}(B)$, $f \neq 0$, $g \neq 0$ ve $f'/f = g'/g$ ise, bir $c \in \mathbb{C}^*$ ile $f = cg$ olduğunu kanıtlayınız (İpucu: $f/g \in \mathcal{M}(B)$ ve $(f/g)' \equiv 0$).

Problem 3.9.2. $B, G \subset \mathbb{C}_\infty$ bölgeler, $B \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, f bir holomorf dönüşüm ve g bir holomorf fonksiyonsa $g \circ f$'nin bir holomorf fonksiyon olduğunu kanıtlayınız.

Problem 3.9.3. $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ ve bir c sabiti ile, f veya g'nin kutup yeri olmayan her z noktasında $|f(z)| \leq c|g(z)|$ ise, bir α ile $f = \alpha g$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 3.9.4. $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nz)}{n!(z^2+n^2)}$ serisinin $\mathbb{C}$'de bir meromorf fonksiyon tanımladığını gösteriniz ve kutup noktalarını dereceleriyle birlikte belirleyiniz.

Problem 3.9.5. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ fonksiyonunun $\mathbb{C}_\infty$'da yalnızca -1'de birinci dereceden, 2'de ise ikinci dereceden kutup yerleri bulunsun. Ayrıca, $\mathrm{Res}(f, -1) = 1$, $\mathrm{Res}(f, 2) = 2$ ve $f(0) = \frac{7}{4}$ olsun. f'nin $H(0; 1, 2)$ halkasındaki Laurent açılımını bulunuz.

Problem 3.9.6. $f \in \mathcal{M}(D_r)$ ve f'nin D_r'de sonlu sayıda kutup yeri olsun. Yeterince küçük $0 < \varepsilon < r$ için $f = f_1 + f_2$, fonksiyonumuzun $H(0; r-\varepsilon, r)$ halkasındaki Laurent açılımı ise, f_1 esas kısmı, f'nin kutup noktalarındaki esas kısımlarının toplamıdır, kanıtlayınız.

Problem 3.9.7. $f(z) = \tan z$ fonksiyonunun $H(0; 3, 4)$ halkasındaki Laurent açılımı $f = f_1 + f_2$ olsun. f_1'in açık ifadesini veriniz.

Problem 3.9.8. $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}_\infty$, $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ ve $f|\mathbb{D} \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ olsun. Bu durumda sonlu sayıda $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{D}$ noktaları ve $|c| = 1$ olan bir c sabiti ile

$$f(z) = c \prod_{i=1}^{n} \frac{z - a_i}{1 - \overline{a}_i z} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{1 - \overline{b}_j z}{z - b_j}, \ \ z \in \overline{\mathbb{D}}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 3.9.9. Teorem 3.9.24 ve 3.9.26 ile Önerme 3.9.25'in kanıtlarını veriniz.

Problem 3.9.10. $(f_n), (g_n) \subset \mathcal{M}(U)$ dizileri kutup koşulunu sağlasınlar. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bir tameşleme ve her $i \in \mathbb{N}$ için $\sigma(i) = (n_i, m_i)$ ve $h_i := f_{n_i} g_{m_i}$ olsun. $(h_i) \subset \mathcal{M}(U)$ zorunlu olarak kutup koşulunu sağlar mı?

4. Kalanlar ve Argüman İlkesi

4.1 Kalanlar

Tanım 4.1.1. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a\})$ ve $D_r(a) \subset U$ ise

$$\operatorname{Res}(f,a) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{\partial} D_\sigma(a)} f = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\sigma,a}} f & a \in \mathbb{C},\ 0 < \sigma < r \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa^-_{\sigma,0}} f & a = \infty,\ \frac{1}{r} < \sigma < +\infty \end{cases}$$

sayısına f fonksiyonunun a **noktasındaki kalanı** denir.

Her şeyden önce bu tanım σ'nın seçiminden bağımsızdır. Ayrıca, $a \in \mathbb{C}$ ve *f'nin $D_r^*(a)$'daki Laurent açılımının esas kısmı f_1 ise* $\operatorname{Res}(f,a) = \operatorname{Res}(f_1,a)$ olduğu apaçıktır. Diğer yandan, $\kappa^-_{\sigma,0}$ gezisinin $D_\sigma(0)$ sağında kalırken $\mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}_\sigma(0)$ solunda kalır; dd. $\kappa^-_{r,0}$ gezisi $\mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}_\sigma(0)$'ı pozitif yönde çevreler.

$U \subset \mathbb{C}$ açık $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a\})$ ise f fonksiyonu her $D_r^*(a) \subset U$'da tek olarak belirli bir $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ Laurent serisine açılır. $g(z) := f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a}$ dersek, Önerme 3.7.9'dan dolayı, g'nin $D_r^*(a)$'da bir ilkeli vardır. Dolayısıyla, $D_r^*(a)$'daki her Γ çevrimi için $\int_\Gamma g = 0$ olur. Şimdi $a \in \mathbb{C}$ ve $a = \infty$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim:

$a \in \mathbb{C}$ olsun.

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\sigma,a}} f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\sigma,a}} g + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\sigma,a}} \frac{a_{-1}}{z-a}dz = a_{-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a_{-1}}{z-a}dz = \Gamma(n,a)a_{-1}$$

olur ve biz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f = a_{-1}n(\Gamma,a) = \operatorname{Res}(f,a)n(\Gamma,a) \tag{4.1}$$

elde ederiz.

Şimdi $a = \infty$ olsun. f'nin bir $D_r^*(\infty) = H(0; \frac{1}{r}, +\infty)$'daki Laurent serisi $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ ise

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{\sigma^-,0}} f = -a_{-1}$$

elde ederiz. $D_r^*(\infty)$'daki $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ açılımını ∞ noktasına göre okursak roller değişir; şimdi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ bu açılımın esas kısmıdır. Sonsuz çoklukta $n \in \mathbb{N}^*$ için $a_n \neq 0$ ise f'nin ∞'da bir esaslı tekil noktası, bir $n \in \mathbb{N}^*$ için $a_n \neq 0$ ve her $k > n$ için $a_k = 0$ ise f'nin ∞'da bir kutup noktası ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için $a_n = 0$ ise f'nin ∞'da bir kaldırılabilir tekil noktası vardır.

Not 4.1.2. Burada iki noktaya dikkat etmemiz gerekir.

(1) $a \in \mathbb{C}$ ve f fonksiyonu a noktasında holomorf veya orada kaldırılabilir bir tekilliği varsa $\operatorname{Res}(f, a) = 0$ olduğu apaçıktır. Ancak $m \geq 2$ ise $f(z) = (z-a)^{-m}$ fonksiyonunun a noktasında m. dereceden bir kutup yeri vardır, yine de $\operatorname{Res}(f, a) = 0$. Diğer yandan, f fonksiyonu ∞ noktasında holomorf olsa da $\operatorname{Res}(f, \infty) \neq 0$ olabilir. Örneğin $f(z) = z^{-1}$ fonksiyonu ∞'da holomorftur ancak $\operatorname{Res}(f, \infty) = -1 \neq 0$.

(2) $\operatorname{Res}(f, \infty)$'u diğer kavramlara koşut, $\operatorname{Res}(\mathring{f}, 0)$ olarak tanımlamadığımıza dikkat ediniz. $D_r^*(\infty)$'da f fonksiyonunun Laurent açılımı $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ ise $\mathring{f}(z) = f(\frac{1}{z})$'nin $D_r^*(0)$'daki Laurent açılımı

$$\mathring{f}(z) = f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-n}$$

olur. Burada ise a_{-1} karşımıza z'nin katsayısı olarak çıkar. Bu durumda a_{-1} tam da $z^{-2}\mathring{f}(z)$ fonksiyonunun 0 noktasındaki kalanı olacağından,

$$-a_1 = \operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}(z^{-2}\mathring{f}(z), 0) = \operatorname{Res}(-z^{-2} f(z^{-1}), 0)$$

elde ederiz. $z = \chi(w) = w^{-1}$ alırsak

$$f(z)dz = f\left(\frac{1}{w}\right) d\left(\frac{1}{w}\right) = f\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}dw\right) = -w^{-2}\mathring{f}(w)dw$$

olur. (2.4.7) değişken değiştirme teoremi ile

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,0}^-} f(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r^{-1},0}} f(\chi(w))d\chi(w) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r^{-1},0}} \left(-w^{-2}\mathring{f}(w)\right) dw \end{aligned}$$

eşitliği $\operatorname{Res}(f, \infty)$ tanımının mantığını bir kez daha açıklar ve bir kez daha *f'nin ∞'daki kalanının $-z^{-2}\mathring{f}(z)$'nin 0'daki kalanı* olduğunu görürüz.

Eğer f ve g fonksiyonları, $a \in U$ olmak üzere, $U \backslash \{a\}$'da holomorf ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ise

$$\operatorname{Res}_a(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{Res}_a f + \beta \operatorname{Res}_a g$$

olduğu aşikârdır.

Tanım 4.1.3. $U \subset \mathbb{C}$, $a \in U$ ve $f \in \mathcal{M}(U)$ olsun. $D_r^*(a) \subset U$, $f \in \mathcal{H}(D_r^*(a))$ ve f fonksiyonu orada $\not\equiv 0$ ise tek olarak belirli bir $m \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için f'nin $D_r^*(a)$'daki Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} a_k(z-a)^k, \; a_m \neq 0$$

şeklindedir. Bu durumda $\operatorname{ord}_a f := m$ sayısına f fonksiyonunun a **noktasındaki derecesi** denir.

Doğrudan tanımdan aşağıdaki gerçekleri görmeyi okura bırakıyoruz:

(i) f fonksiyonu a'da holomorftur$\Longleftrightarrow \operatorname{ord}_a f \geq 0$. Ayrıca, $\operatorname{ord}_a f = 0 \Longleftrightarrow f$ fonksiyonu a'da holomorftur ve $f(a) \neq 0$.

(ii) $m = \operatorname{ord}_a f > 0 \Longleftrightarrow f$'nin a'da m. dereceden bir sıfır yeri vardır.

(iii) $m = \operatorname{ord}_a f < 0 \Longleftrightarrow f$'nin a'da $-m$. dereceden bir kutup yeri vardır.

(iv) $\operatorname{ord}_a(fg) = \operatorname{ord}_a f + \operatorname{ord}_a g$.

(v) $\operatorname{ord}_a(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}_a f, \operatorname{ord}_a g\}$ ve eşitlik ancak $\operatorname{ord}_a f \neq \operatorname{ord}_a g$ ise vardır.

Önerme 4.1.4. *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$ ve $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{a\})$ olsun.*

(i) *f'nin a'da birinci dereceden kutup yeri varsa*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

(ii) *$g, h \in \mathcal{H}(U)$, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ ve $h'(a) \neq 0$ ise $f := g/h$ için*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, a\right) = \frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{4.2}$$

(iii) *f'nin a'da m. dereceden bir kutup yeri var ve $g(z) = (z-a)^m f(z)$ ise*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a). \tag{4.3}$$

Kanıt. (i) f'nin a noktasında birinci dereceden bir kutup yeri varsa, bir $r > 0$ için $D_r^*(a)$'da $f(z) = a_{-1}(z-a)^{-1} + f_2(z)$ ve $f_2 \in \mathcal{H}(D_r(a))$ olur. Bu durumda açıkça $\lim_{z \to a}(z-a) f(z) = a_{-1} = \operatorname{Res}(f, a)$.

(ii) Savımızın koşullarında f'nin a'da birinci dereceden kutup yeri var; öyleyse (i)'den,

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a}(z-a) f(z) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

(iii) g fonksiyonu bir $D_r(a)$'da holomorftur; oradaki seriye açılımı $g(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ ise f'nin $D_r^*(a)$'daki Laurent açılımı bir $f_2 \in \mathcal{H}(D_r(a))$ ile

$$f(z) = (z-a)^{-m} g(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^{-m}} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \cdot \frac{1}{z-a} + f_2(z)$$

olduğundan, $\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$ elde ederiz. $\square$

Örnek 4.1.5. (1) İster Önerme 4.1.4(i)'den, ister (4.3)'ten, eğer f fonksiyonunun a noktasında birinci dereceden bir kutup noktası varsa ve a noktasının bir $D_r^*(a)$ komşuluğunda holomorf bir g fonksiyonu ile $g(z) = (z-a)f(z)$ ise $\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = g(a)$ elde ederiz. Örneğin U bir açık küme, $a_1,\dots,a_n \in U$ birbirinden farklı noktalar, $h \in \mathcal{H}(U)$, $h(a_i) \neq 0$, $1 \le i \le n$ ve $U \backslash \{a_1,\dots,a_n\}$'de

$$f(z) := \frac{h(z)}{\prod_{i=1}^n (z-a_i)} \quad \text{ise} \quad \operatorname{Res}(f,a_k) = \frac{h(a_k)}{\prod_{i\neq k, i=1}^n (a_k - a_i)}.$$

(2) $f(z) = \frac{e^{cz}}{(z-a)(z-b)}$ olsun. $a \neq b$ ise a, b noktalarında birinci dereceden kutup yerlerimiz var, dolayısıyla

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{e^{ca}}{a-b} \quad \text{ve} \quad \operatorname{Res}(f,b) = \frac{e^{cb}}{b-a}.$$

$a = b$ ise $f(z) = e^{cz}(z-a)^{-2}$ fonksiyonunun a'da ikinci dereceden bir kutup yeri var ve $g(z) = (z-a)^2 f(z) = e^{cz}$ olduğundan, (4.1.4)(iii) ile $\operatorname{Res}(f,a) = g'(a) = ce^{ca}$ olur.

(3) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ve $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ fonksiyonlarının $n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) noktalarında birinci dereceden kutup noktaları vardır ve (4.2) ile $\operatorname{Res}(f,n\pi) = \frac{1}{\cos n\pi} = (-1)^n$ ve $\operatorname{Res}(\cot, n\pi) = \frac{\cos n\pi}{\cos n\pi} = 1$.

Problemler

Problem 4.1.1. $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$ fonksiyonunun kesirlere ayırarak 0, 1 ve -1 noktalarındaki kalanlarını bulunuz.

Problem 4.1.2. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z^2}$ fonksiyonu için $\operatorname{Res}(f,0) = \sin 1$ olduğunu Cauchy Çarpım Teoremi ile gösteriniz.

Problem 4.1.3. Kalanlara ilişkin bilgilerden yararlanarak $R(z) = \frac{2z^3-1}{z^4-z^3}$ rasyonel fonksiyonunu kesirlere ayırınız.

Problem 4.1.4. $b \neq 0$ için $\operatorname{Res}(\frac{\sin az}{z^3 \sin bz}, 0) = \frac{a}{6b}(b^2 - a^2)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4.1.5. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayınız:

1. $\operatorname{Res}\left(\frac{\exp z}{z(z-1)}, 0\right) = -1$, $\operatorname{Res}\left(\frac{\exp z}{z(z-1)}, 1\right) = e$,
2. $\operatorname{Res}\left(\frac{\exp \pi z}{1+z^2}, i\right) = \frac{i}{2}$, $\operatorname{Res}\left(\frac{\exp \pi z}{1+z^2}, -i\right) = -\frac{i}{2}$
3. $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z(z^2-1)}, 1\right) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Res}\left(\frac{z^4-1}{z(z^2-1)}, 0\right) = 1$,
4. $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{isz}}{(1+z)(1+z^2)}, i\right) = -\frac{e^s(1-i)}{4}$,
5. $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^4)\cosh z}, \frac{i\pi(2k+1)}{2}\right) = \frac{(-1)^{k+1} i}{1+(2k+1)^4(\frac{\pi}{2})^4}$,
6. $\operatorname{Res}(\cot z, 0) = 1$, $\operatorname{Res}(e^{1/(1-z)}, 1) = -1$,

7. $\operatorname{Res}((1-z^2)\exp z^{-1}, 0) = \frac{5}{6}$.

Problem 4.1.6. $\operatorname{Res}(\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}, \infty)$ ve $\operatorname{Res}(z^3 \cos\frac{1}{z-2}, \infty)$ sayılarını hesaplayınız.

Problem 4.1.7. g fonksiyonu a noktasının bir komşuluğunda holomorf ve $g'(a) \neq 0$ olsun. f fonksiyonunun $g(a)$ noktasında bir basit kutbu var ve $\operatorname{Res}(f, g(a)) = A$ ise $\operatorname{Res}(f \circ g, a) = A/g'(a)$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4.1.8. $\int_{\kappa_1} \cot z dz = 2\pi i$ ve $n \in \mathbb{N}^*$ için $\int_{\kappa_1} \exp\left(\frac{1}{z^n}\right) dz$ integralinin ise $n = 1$ için $2\pi i$, $n \geq 2$ içinse 0 olduğunu gösteriniz.

Problem 4.1.9. $\int_{\kappa_1} \frac{1}{z \sin z} dz = 0$, $\int_{\kappa_3} \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} dz = 0$ ve $a = \frac{1}{2\pi}$ ve $r = 1/30$ olmak üzere, $\int_{\kappa_{r,a}} \left(\sin z^{-1}\right)^{-1} dz = \frac{1}{2\pi i}$ olduğunu gösteriniz.

4.2 Kalan Teoremi ve Bazı Sonuçları

Teorem 4.2.1 (Kalan Teoremi)**.** *$U \subset \mathbb{C}$ açık, $A \subset U$ ise U'da ayrık bir alt küme, $f \in \mathcal{H}(U \backslash A)$ fonksiyonunun $a \in A$ noktalarında kutup yerleri veya esaslı tekil noktaları bulunsun. $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(U)$ ise U'da sıfıra homolog ve $\underline{\Gamma} \cap A = \emptyset$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f = \sum_{a \in A} n(\Gamma, a) \operatorname{Res}(f, a). \tag{4.4}$$

Kanıt. $\overline{\mathrm{I}(\Gamma)}$ kümesi kompakt ve U'dadır. Bu nedenle, $\overline{\mathrm{I}(\Gamma)} \cap A$ sonludur. Bu kümenin ögeleri $a_1, \ldots, a_n$ ise (4.4) toplamı sonlu $\sum_{i=1}^n n(\Gamma, a_i) \operatorname{Res}(f, a_i)$ toplamıdır; dolayısıyla burada bir yakınsaklık araştırmasına gerek yoktur. Şimdi κ_i gezilerini Teorem 2.11.12'deki gibi seçersek, o teorem ve (4.1) ile

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f = \sum_{i=1}^n n(\Gamma, a_i) \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_i} f = \sum_{i=1}^n n(\Gamma, a_i) \operatorname{Res}(f, a_i) \tag{4.5}$$

elde ederiz. □

Hemen belirtelim ki, Cauchy integral formülü Kalan Teoremi'nin bir özel halidir. $U \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(U)$ çevrimi U'da sıfıra homolog olsun. Bu durumda $z \in U \backslash \underline{\Gamma}$ için $U \backslash \{z\}$'de $g(w) := f(z)(w-z)^{-1}$ olarak tanımlanan g fonksiyonu U'da meromorftur ve yalnızca z noktasında birinci dereceden bir kutup yeri vardır ve $\operatorname{Res}(g, z) = f(z)$ olduğundan, (4.5) ile

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g = n(\Gamma, z) \operatorname{Res}(g, z) = n(\Gamma, z) f(z).$$

Teorem 4.2.2. *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge, $\infty \notin \partial_\infty B$ ve $\boldsymbol{\partial} B$ sonlu sayıda integral gezisinden oluşsun. $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset B$ sonlu bir altküme ve $\infty \in B$ ise $a_1 = \infty$ olsun. $f \in \mathcal{H}(B \backslash A) \cap \mathcal{C}(\overline{B} \backslash A)$ ise*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} f = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i).$$

Kanıt. a_i merkezli D_i daireleri, kapanışları B'de ve $i \neq j$ için $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$ olacak biçimde seçilsinler. D_i dairesinin pozitif yönlenmiş —yani a_i noktasını soluna alan — basit sınır gezisini κ_i ile gösterelim. $G := B \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D_i}$ bölgesi için $G \subset \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\partial} G = \boldsymbol{\partial} B + \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^-$ ve $f \in \mathcal{C}(\overline{G}) \cap \mathcal{H}(G)$ olduğundan, Teorem 3.1.5 ile

$$0 = \int_{\boldsymbol{\partial} G} f = \int_{\boldsymbol{\partial} B} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\kappa_i^-} f = \int_{\boldsymbol{\partial} B} f - \sum_{i=1}^{n} \int_{\kappa_i} f$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_i} f = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i)$$

ve sav, buradan çıkar. □

Sonuç 4.2.3. *$U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $A \subset U$ kümesi U'da ayrık $f \in \mathcal{H}(U \backslash A)$, γ ise izi $U \backslash A$'da olup ∞'dan geçmeyen pozitif yönlenmiş bir basit kapalı gezi ve $A \cap \mathrm{I}(\gamma) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i).$$

Kanıt. Teorem 4.2.2'de $B := \mathrm{I}(\gamma)$ alınız. □

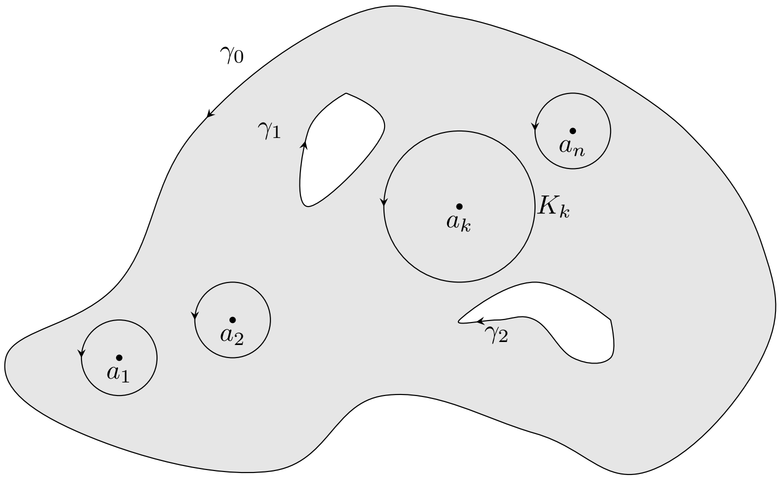
Sonuç 4.2.4. *f fonksiyonu $\mathbb{C}$'de $a_1, \ldots, a_n$ noktaları dışında holomorfsa*

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i) = -\operatorname{Res}(f, \infty).$$

Kanıt. $R > 0$ sayısı $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset D_R(0)$ olacak biçimde seçilirse Sonuç 4.2.3 ile

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{R,0}} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{R,0}^-} f = -\operatorname{Res}(f, \infty).$$

Veya şöyle de kanıtlayabiliriz: $\mathbb{C}$'de a_i noktalarını içermeyen bir $\overline{D}_\sigma(c)$ kapalı dairesi seçersek, $\kappa_{\sigma,c}$ gezisi $D_\sigma(c)$ dairesinin pozitif yönlenmiş sınırı ve orada f'nin tekillikleri olmadığından, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_{\sigma,c}} f = 0$ olur. Diğer yandan, $\kappa_{\sigma,c}^-$ gezisiyse



Şekil 4.1: Teorem 4.2.2'ye ilişkin şekil. $\boldsymbol{\partial} B = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$.

$\mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}_\sigma(c)$ bölgesinin pozitif sınırı olduğundan, ve tüm a_i noktalarımız bu bölgede olduklarından,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa^-_{\sigma,c}} f = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i) + \operatorname{Res}(f, \infty).$$

□

Kalan Teoremi çok değişik bilgilere ulaşmamızı sağlar. Her şeyden önce eğer $\operatorname{Res}(f, a)$'yı kolayca hesaplayabiliyorsak, $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f$ integralini kolayca hesaplama şansını elde ederiz. Örneğin γ izi $\mathbb{C}^*$'da olan bir kapalı gezi olsun. $z \neq 0$ için

$$f(z) := e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \cdots$$

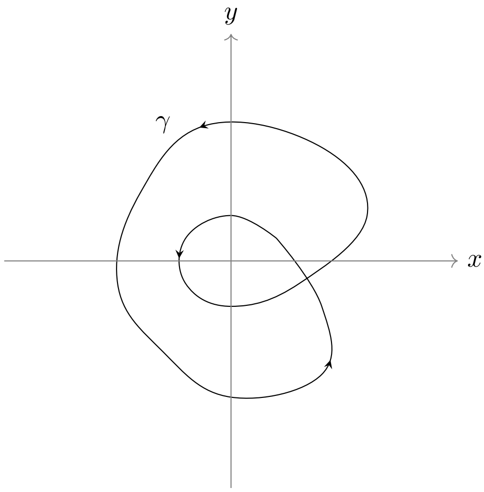
serisi f fonksiyonunun $\mathbb{C}^*$ halkasındaki Laurent serisidir. Böylece, $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$ ve

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz = n(\gamma, 0) \cdot 1 = n(\gamma, 0)$$

olur. $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f$ integralini hesaplamak için bilmemiz gereken yalnızca $n(\gamma, 0)$ dönme sayısı ve $\operatorname{Res}(f, 0)$ kalanıdır; γ'nın herhangi bir parametreleştirilmesinin açık ifadesini bilmek gerekmez! Örneğin Şekil 4.2'de γ hakkında bildiğimiz yalnızca şekilde görünendir, dd. $n(\gamma, 0) = 2$ olduğudur, dolayısıyla $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f = 2$.

Kalan Teoremi'nin integral hesaplamadaki kullanımını ayrı bir kısımda inceleyeceğiz. Burada ondan çıkarılan başka teoremlere odaklanacağız.

$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $A \subset B$ ise B'de yerel sonlu bir alt küme, $f \in \mathcal{H}(B \backslash A)$ ve $a \in A$ için $\omega_a := 2\pi i \operatorname{Res}(f, a)$ olsun. Her $a \in A$ noktasında f'nin bir kutup yeri



Şekil 4.2: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\frac{1}{z}}dz = 2.$

veya bir esaslı tekil noktası bulunsun. B'de bir z_0 noktasını seçelim. Ayrıca, her $z \in B\backslash A$ için $B\backslash A$'da başlangıç noktası z_0 ve bitiş noktası z olan integral gezilerimizin kümesi $\mathcal{G}^i_{z_0,z}(B\backslash A)$ olmak üzere, bir çok değerli $\mathbf{F}$ fonksiyonunu

$$\mathbf{F}(z) := \int_{\gamma_z} f \quad , \gamma_z \in \mathcal{G}^i_{z_0,z}(B\backslash A) \tag{4.6}$$

olarak tanımlansın. $\mathbf{F}$ genelde bir çok değerli fonksiyondur.

$\gamma_z \in \mathcal{G}^i_{z_0,z}(B\backslash A)$ keyfi seçilsin ve $r > 0$ sayısını $D_r(z) \subset B\backslash A$ olacak biçimde seçelim. $D_r(z)$ basit bağlantılı ve $f \in \mathcal{H}(D_r(z))$ olduğundan, her $w \in D_r(z)$ ve her $\gamma_{z,w} \in \mathcal{G}^i_{z,w}(D_r(z))$ için $F(z) = \int_{\gamma_z} f$ olmak üzere,

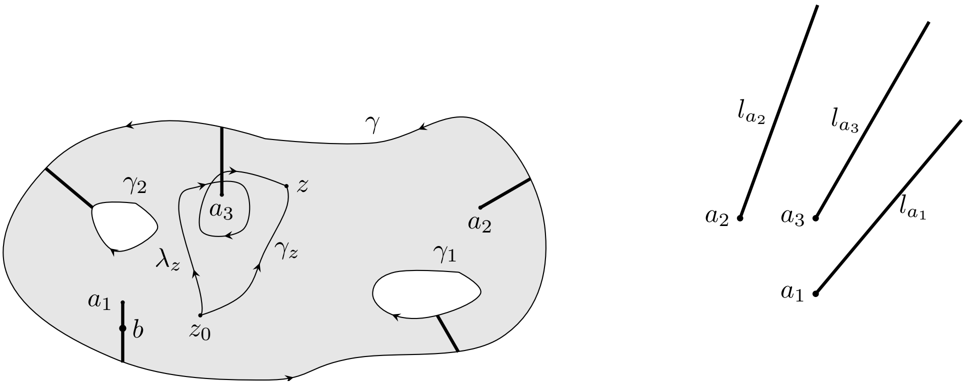
$$F(w) = F(z) + \int_{\gamma_{z,w}} f = F(z) + \int_{\overrightarrow{z,w}} f$$

fonksiyonu $D_r(z)$ dairesinde holomorftur. Ayrıca, bu dairede $F' = f$ olduğu apaçıktır. Dolayısıyla, $\mathbf{F}$'nin $B\backslash A$'deki integral gezileri boyunca analitik dalları vardır.

$B\backslash A$'da başlangıç noktası z_0 ve bitiş noktası z olan sayılamaz çoklukta integral gezimiz vardır. λ_z böyle bir geziyse, $\Gamma := \lambda_z\gamma_z^-$ integral gezisi $B\backslash A$'da bir kapalı gezidir. (4.4)'ten $G(z) := \int_{\lambda_z} f$ ve $\omega_a = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,a)$ ile

$$G(z) - F(z) = \int_{\lambda_z} f - \int_{\gamma_z} = \int_\Gamma f = \sum_{a\in A\cap \mathrm{I}(\Gamma)} n(\Gamma,a)\omega_a \text{ ve}$$

$$G(z) = F(z) + \sum_{a\in A\cap \mathrm{I}(\Gamma)} m_a\omega_a, \quad m_a := n(\Gamma,a) \in \mathbb{Z} \tag{4.7}$$



Şekil 4.3

olur. A sonsuz olabilir, ancak bilindiği gibi (4.7)'deki toplam sonludur; dolayısıyla ortada bir yakınsaklık sorunu yoktur. Her ne kadar söz konusu λ_z gezileri sayılamaz çoklukta olsalar da $G(z)$ değerleri sayılabilir çokluktadır ve (4.7)'deki gibi yalın bir gösterime sahiptirler. ω_a sayılarına $\int_{\lambda_z} f$ integrallerinin **polar döngüleri** denir.

Şimdi B ve f Teorem 4.2.2'deki gibi olsun. Her bir $a \in A$ tekil noktasını ve ∂B'nin iç kısımda kalan her bir parçası üzerideki bir noktayı ∂B'nin en dıştaki parçası üzerindeki bir noktasıyla, birbirlerini kesmeyecek biçimde bir doğru parçasıyla birleştirelim (bkz. Şekil 4.3'teki sol şekil). B'den bu doğru parçalarını çıkarırsak, geriye bir B^* basit bağlantılı bölgesi kalır. Şimdi $f \in \mathcal{H}(B^*)$ ve B^* basit bağlantılı olduğundan, f'nin B^*'da bir holomorf F^* ilkeli vardır. F^* fonksiyonu çıkardığımız her bir doğru parçasından öteye, iki taraftan da, holomorf genişler. Ancak $\omega_a \neq 0$ ise bu genişlemeler artık F^* ile örtüşmez! Örneğin $\omega_{a_1} \neq 0$ ise b noktasına sağdan yaklaştığımızda da soldan yaklaştığımızda da F^*'ın limitleri vardır; ancak bunlar birbirine eşit değildir.

Eğer B sınırlı değilse, örneğin $B = \mathbb{C}$ ise bu kez Şekil 4.3'te sağ şekilde olduğu gibi B'den birbirini kesmeyen sonlu sayıda $l_1, \ldots, l_n$ ışını çıkarılır. Bu irdelemeler bizi aşağıdaki teoreme götürür:

Teorem 4.2.5. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset B$ bir sonlu altküme ve $f \in \mathcal{H}(B \backslash A)$ olsun. f'nin her $a_i \in A$ noktasında ya bir kutup yeri ya da bir esaslı tekil noktası bulunsun ve $A_i = \mathrm{Res}(f, a_i)$ olsun.*

(i) *Her i için $A_i = 0$ ise (4.6) ile tanımlanan $\mathbf{F}$ fonksiyonu aslında tek değerli ve $B \backslash A$'da holomorf bir F fonksiyonudur.*

(ii) *Bir $G \in \mathcal{H}(B \backslash A)$ ile*

$$\mathbf{F}(z) = G(z) + \sum_{i=1}^{n} A_i \,\mathbf{log}(z - a_i).$$

Kanıt. (i) $1 \leq i \leq n$ için $A_i = 0$ ise $\omega_i = 2\pi i A_i = 0$ olur. $\mathbf{F}$'nin bir $z \in B \backslash A$ noktasında aldığı tüm $G(z)$ değerleri (4.7) ile verilmiştir; dolayısıyla $G(z) = F(z)$ ve $\mathbf{F}$ fonksiyonu her $z \in B \backslash A$ noktasında tek değerlidir. $F \in \mathcal{H}(B \backslash A)$ olduğunu yukarıda görmüştük.

(ii) Genel durumda her $z \in B \backslash A$ için

$$g(z) := f(z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - a_i}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathrm{Res}(g, a_i) = 0$ olduğundan, (i)'den dolayı, $G(z) := \int_{\gamma_z} g$ ile $B \backslash A$'da tek değerli bir holomorf fonksiyon tanımlanır. Dolayısıyla,

$$\mathbf{F}(z) = \int_{\gamma_z} g + \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta - a_i} = G(z) + \sum_{i=1}^{n} A_i \,\mathbf{log}(z - a_i).$$

□

Önerme 4.2.6. *$U \subset \mathbb{C}_\infty$, $f \in \mathcal{M}(U)$ ve $a \in U$ noktasında f fonksiyonunun bir sıfır yeri, ya da bir kutup yeri bulunsun ve $\mathrm{ord}_a f = m$ olsun. g fonksiyonu a noktasında holomorfsa*

$$\mathrm{Res}\left(g\frac{f'}{f}, a\right) = g(a)\,\mathrm{ord}_a f(a) \ \textit{ve}\ \mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \mathrm{ord}_a f.$$

Kanıt. (1) $a \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer f'nin a noktasında n. dereceden bir sıfır yeri varsa f'nin a'da $-n$. dereceden bir kutup yeri vardır diyelim. Bu uzlaşmayla f'nin a'da n. dereceden bir kutup yeri olsun. O zaman her durumda $m = \mathrm{ord}_a f = -n$ eşitliği geçerlidir. Bir $D_r(a) \subset U$ dairesini $g \in \mathcal{H}(D_r(a))$ olacak biçimde seçelim. Gerekirse r'yi küçülterek, bir $\varphi \in \mathcal{H}(D_r(a))$ fonksiyonu her $z \in D_r(a)$ için $\varphi(z) \neq 0$ ve $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m(z-a)^{m-1}\varphi(z) + (z-a)^m \varphi'(z)}{(z-a)^m \varphi(z)} \\ &= \frac{m}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{-n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \text{ dolayısıyla} \\ g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{g(z)m}{z-a} + \frac{g(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{-ng(z)}{z-a} + \frac{g(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

olur. (4.8)'de, $g\varphi'/\varphi \in \mathcal{H}(D_r(a))$ olduğundan,

$$\mathrm{Res}\left(g\frac{f'}{f}, a\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{g(z)m}{z-a}, a\right)$$

olur. $\psi(z) := \frac{g(z)m}{z-a}$ terimine odaklanmak yeterlidir. g'nin $D_r(a)$'daki seri açılımı $g(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots$ olsun. $g(a) = a_0 \neq 0$ ise bir $\theta \in \mathcal{H}(D_r(a))$ ile $\psi(z) = \frac{g(a)m}{z-a} + \theta(z)$ olduğundan, $\text{Res}(\psi, a) = g(a)m$ olur. Eğer $g(a) = 0$ ise $D_r^*(a)$'da holomorf olan ψ fonksiyonu a noktasına holomorf olarak genişletilebileceğinden, $\text{Res}(\psi, a) = 0 = g(a)m$ olur ve bu, savı verir.

(2) $a = \infty$ olsun ve f'nin ∞'da n. dereceden bir kutup yeri olsun. Bir $D_r(\infty) \subset U$ dairesini $g \in \mathcal{H}(D_r(\infty))$ olacak biçimde seçelim. Gerekirse r'yi küçülterek, bir $h \in \mathcal{H}(D_r(\infty))$ fonksiyonu her $z \in D_r(\infty)$ için $h(z) \neq 0, \infty$ ve $f(z) = z^n h(z)$ olacak biçimde bulunabilir. (1)'deki işlemlere benzer işlemlerle

$$F(z) := g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g(z)n}{z} + \frac{g(z)h'(z)}{h(z)} =: \frac{ng(z)}{z} + G(z)$$

olur. g ve G fonksiyonları ∞'da holomorf olduklarından 0'da holomorf $\mathring{g}$ ve $\mathring{G}$ ile $\mathring{F}(z) = nz\mathring{g}(z) + \mathring{G}(z)$ dolayısıyla,

$$z^{-2}\mathring{F}(z) = \frac{n}{z}\mathring{g}(z) + \frac{1}{z^2}\mathring{G}(z)$$

elde ederiz. Bir yandan $\text{Res}(\frac{1}{z^2}\mathring{G}, 0) = 0$, diğer yandan eğer $g(\infty) = \mathring{g}(0) = 0$ ise $\text{Res}(\frac{n}{z}\mathring{g}(z), 0) = 0$ olacağından, $\text{Res}(-z^{-2}\mathring{F}(z), 0) = 0 = -g(\infty)n$ olur. Eğer $\mathring{g}(0) \neq 0$ ise $\text{Res}(-z^{-2}\mathring{F}(z), 0) = -g(\infty)n$ olduğu kolaya görülür. Böylece

$$\text{Res}(g\frac{f'}{f}, \infty) = \text{Res}(-z^{-2}\mathring{F}(z), 0) = -n\mathring{g}(0) = mg(\infty).$$

□

Tanım 4.2.7. $U \subset \mathbb{C}_\infty$ açık, $a \in \mathbb{C}$ ve $f \in \mathcal{M}(U)$ olsun. f meromorf fonksiyonu a değerini sonlu sayıdaki, birbirinden farklı $a_1, \ldots, a_n$ noktalarında alsın ve birbirinden farklı sonlu sayıdaki $b_1, \ldots, b_m$ noktalarıysa f'nin U'daki kutup yerleri olsunlar. a değerini her bir a_i'de p_i. dereceden alsın ve her bir b_j ise q_j. dereceden bir kutup yeri olsun. $Z_a(f, U) := \sum_{i=1}^n p_i$ doğal sayısına **f'nin U'daki a yerleri sayısı**, $Z_\infty(f, U) := \sum_{j=1}^m q_j$ doğal sayısına ise **f'nin U'daki kutup yerleri sayısı** denir.

$$\text{ord}_U f := Z_0(f, U) - Z_\infty(f, U)$$

olsun. a_i noktaları sıfır yerleri ve b_i noktaları kutup yerleri olmak üzere,

$$\text{ord}_U f = \sum_{i=1}^n \text{ord}_{a_i} f + \sum_{j=1}^m \text{ord}_{b_i} f$$

olduğu apaçıktır.

Teorem 4.2.8 (Argüman İlkesi). *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge, $\Gamma \in \mathrm{Z}_1(B)$ ise B'de sıfıra homolog olsun ve ∞'dan geçmesin. $0 \neq f \in \mathcal{M}(B)$ fonksiyonunun $\underline{\Gamma}$'da ne sıfır yeri ne de kutup yerleri olmasın. f fonksiyonunun $\mathrm{I}(\Gamma)$'daki sıfır yerleri $a_1, \ldots, a_n$ ve kutup yerleri $b_1, \ldots, b_m$ ise her $g \in \mathcal{H}(B)$ için*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{n} g(a_i)\cdot n(\Gamma, a_i)\cdot \mathrm{ord}_{a_i} f + \sum_{j=1}^{m} g(b_j)\cdot n(\Gamma, b_j)\cdot \mathrm{ord}_{b_j} f.$$

Kanıt. Varsayımlarımızdan dolayı, $h := g \cdot \frac{f'}{f} \in \mathcal{M}(B)$ ve h'nin kutup yerleri f fonksiyonunun kutup yerleri ve sıfır yerleri arasında olmak zorundadır. Bu nedenle, Kalan Teoremi (Teorem 4.2.1) ve Önerme 4.2.6'dan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g\frac{f'}{f} &= \sum_{i=1}^{n} n(\Gamma, a_i)\cdot \mathrm{Res}(g\frac{f'}{f}, a_i) + \sum_{j=1}^{m} n(\Gamma, b_j)\cdot \mathrm{Res}(g\frac{f'}{f}, b_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} n(\Gamma, a_i)\cdot g(a_i)\cdot \mathrm{ord}_{a_i} f + \sum_{j=1}^{m} n(\Gamma, b_j)\cdot g(b_j)\cdot \mathrm{ord}_{b_j} f.\end{aligned}$$

□

Teoremimizin özel durumlarını vurgulamakta yarar var. Veriler teoremdeki gibi olmak üzere, f'nin a_i'de p_i. dereceden bir sıfır, b_j'de ise q_j. dereceden bir kutup yeri varsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot g(a_i)\cdot n(\Gamma, a_i) - \sum_{j=1}^{m} q_j\cdot g(b_j)\cdot n(\Gamma, b_j). \tag{4.9}$$

Özel olarak $g \equiv 1$ ve her a_i, b_j için $n(\Gamma, a_i) = n(\Gamma, b_j) = 1$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} q_j = Z_0(f, \mathrm{I}(\Gamma)) - Z_\infty(f, \mathrm{I}(\Gamma)). \tag{4.10}$$

Teoremimizde "sıfır yerini" "a yeri" ile değiştirirsek, $(f-a)' = f'$ olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g\frac{f'}{f-a} = \sum_{i=1}^{n} p_i\cdot g(a_i)\cdot n(\Gamma, a_i) - \sum_{j=1}^{m} q_j\cdot g(b_j)\cdot n(\Gamma, b_j) \tag{4.11}$$

ve özel durumda ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f-a} = Z_a(f, \mathrm{I}(\Gamma)) - Z_\infty(f, \mathrm{I}(\Gamma))$$

elde ederiz.

Not 4.2.9. $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ rasyonel fonksiyonu verilsin. p ve q polinomları aralarında asal olsunlar. p'nin derecesi n ve q'nun derecesi m olsun. R sabit olmasın. Bu koşullarda R rasyonel fonksiyonunun $\mathbb{C}$'deki kutuplarının çokluğu $Z_\infty(R, \mathbb{C}) = m$'dir. R'nin ∞'da $n \leq m$ için kutup yeri yoktur, $n > m$ içinse derecesi $(n-m)$ olan bir kutup yeri vardır. Sonuçta R fonksiyonunun $\mathbb{C}_\infty$'da $\max(n, m)$ kadar kutup yeri vardır, daha doğrusu $Z_\infty(R, \mathbb{C}_\infty) = \max(n, m)$. Şimdi $\mathbb{C}$'de yeterince küçük bir D dairesini R fonksiyonunun $\overline{D}$'de a yeri ve kutup noktası olmayacak biçimde seçersek, elbette

$$0 = \int_{\boldsymbol{\partial}^- D} \frac{R'}{R-a} = Z_a(R, \mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D}) - Z_\infty(R, \mathbb{C}_\infty \backslash \overline{D})$$

olur. Dolayısıyla, *R rasyonel fonksiyonu her $a \in \mathbb{C}_\infty$ değerini aynı çoklukta alır.* Özelikle $n \geq 1$ olmak üzere, p fonksiyonu $\deg p = n$ olan bir polinomsa $Z_\infty(\mathbb{C}_\infty, p) = n$ olduğundan, $Z_0(p, \mathbb{C}) = n$ olur ve bir kez daha Cebirin Anateoremi'ni elde ederiz.

Teorem 4.2.10. *$B \subset \mathbb{C}_\infty$ bir bölge, $\infty \notin \partial B$ ve ∂B sonlu sayıda basit kapalı integral gezisinden oluşsun. f fonksiyonunun B'de sonlu sayıda sıfır yeri ve sonlu sayıda kutup noktası bulunsun ve bunların kümesi sırasıyla Z ve P olsun; ayrıca, f'nin ∂B'de sıfır yeri de kutup yeri de bulunmasın. $A := Z \sqcup P$ olmak üzere, $f \in \mathcal{H}(B \backslash A) \cap \mathcal{C}(\overline{B} \backslash A)$ ve $g \in \mathcal{H}(B)$ise*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} g \frac{f'}{f} = \sum_{a \in Z} g(a) \operatorname{ord}_a f + \sum_{b \in P} g(b) \operatorname{ord}_b f \ \textit{özellikle}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_B f = Z_0(f, B) - Z_\infty(f, B) \tag{4.12}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f'}{f-c} = Z_c(f, B) - Z_\infty(f, B), \ \textit{eğer}\, c \in \mathbb{C}, \forall z \in \partial B : f(z) \neq c. \tag{4.13}$$

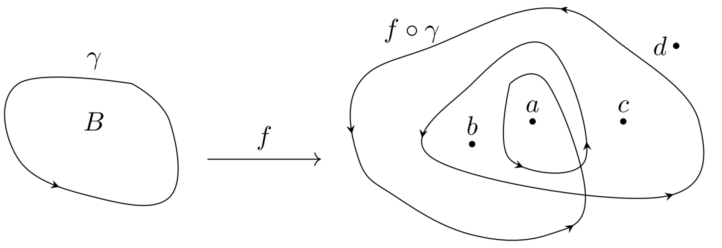
Sonuç 4.2.11. *B teoremin koşullarını sağlasın. $P = \emptyset$, $f \in \mathcal{H}(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$ ve her $z \in \partial B$ için $f(z) \neq a$ ise*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f'}{f-a} = Z_a(f, B). \tag{4.14}$$

Kanıt. Teorem 4.2.8 gibi kanıtlanır. f fonksiyonunun a yerleri $h := f - a$ fonksiyonunun sıfır yerleri ve $\frac{f'}{f-a} = \frac{h'}{h}$ olduğundan, (4.13) doğrudan (4.12)'den çıkar. Varsaydığımız koşullarda, f'nin B'de a yerlerinin sonlu sayıda olmak zorunda olduğunu belirtmekle yetinelim. □

Not 4.2.12. Sonuç 4.2.11, Cebirin Anateoremi için bir kısa kanıt vermemizi sağlar. $p(z) = z^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i z^i$, $n \geq 1$ polinomu verilsin. $\lim_{z \to \infty} |p(z)| = +\infty$ olduğundan, $r > 0$ yeterince büyük seçilirse her $|z| \geq r$ için $|p(z)| \geq 1$ sağlanır. p'nin $\mathbb{C}$'de kutup yeri olmadığından, (4.14) ile $Z_0(p, D_r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r} \frac{p'}{p}$ olur. Diğer yandan, $|z| \geq r$ için

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{nz^{n-1} + \cdots}{z^n + \cdots} = \frac{n}{z} + g(z).$$



Şekil 4.4: $Z_a(f,B) = 3$, $Z_b(f,B) = 2$, $Z_c(f,B) = 1$'dir. f fonksiyonu B'de, katlılıklarıyla sayılmak üzere, a değerini 3 kez, b değerini iki kez, c değerini 1 kez alırken d değerini almaz.

Burada $g(z)$ fonksiyonu, $k \geq 2$ olmak üzere $\frac{1}{z^k}$ tipinde terimler içerdiğinden, $Z_0(p, D_r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_r} \frac{p'}{p} = n$ olur. Böylece, p'nin D_r'de katlılıklarıyla sayılmak üzere, $n \geq 1$ tane sıfır yeri vardır.

Artık Argüman İlkesi'nin adına bir anlam verebilecek noktaya geldik. Sonuç 4.2.11'in koşullarında olalım ve $\boldsymbol{\partial} B$ basit kapalı bir γ integral gezisi olsun. Ayrıca, $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$ olsun[1]. Bu durumda $f \circ \gamma$ gezisi w-düzleminde bir kapalı integral gezisidir. $f \circ \gamma$'nın a etrafındaki $n(f \circ \gamma, a)$ dönme sayısı

$$n(f \circ \gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dw}{w-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)-a} dz = Z_a(f,B)$$

olur. Demek ki, $f \circ \gamma$ gezisi a noktasının etrafında f'nin B'deki a yerlerinin katlılıklarının toplamı kadar, dolayısıyla toplamda $Z_a(f,B)$ kadar turlar (bkz. Şekil 4.4). Başka açıdan bakalım. f fonksiyonunun açık ifadesini bilmiyor, ancak yalnızca $f \circ \gamma$ gezisini biliyorsak, f fonksiyonunun B'de herhangi bir a değerini alıp almayacağını, alıyorsa katlılıklarıyla alınmak üzere, kaç kez alındığını kolayca söyleyebiliriz. Sonuç 4.2.11 bize f fonksiyonunun a değerini $n(f \circ \gamma, a)$ kez aldığını söyler. Yine inanılmaz bir sonuç!

$p \in \mathbb{C}[z]$ ve $\deg p \geq 1$ olsun. $r > 0$ sayısı yeterince büyük seçilirse 0 noktası $p \circ \kappa_r$ gezisinin içine düşer. Dolayısıyla, $Z_0(p, D_r) = n(p \circ \kappa_r, 0) \neq 0$ olur ve p'nin D_r'de bir sıfır yeri vardır. Bir kez daha buradan Cebirin Anateoremi'ne ulaşırız.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ açık, $\gamma : [a,b] \to U$ bir gezi $f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $z \in \underline{\gamma}$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\underline{\gamma}$'nın açık bir V komşuluğu her $z \in \overline{V}$ için $f(z) \neq 0$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda V'de γ boyunca olan bir $D_0, \ldots, D_n$ daireler zincirini seçebiliriz. $f'/f \in \mathcal{H}(V)$ olduğundan, elbette bu daireler zinciri boyunca analitik genişletilir. D_0 dairesinde seçeceğimiz ve F_0 ile

[1] $K \subset \mathbb{C}_\infty$ bir kompakt küme ise $f \in \mathcal{H}(K)$'den anladığımız K'nin bir açık U komşuluğu ve bir $F \in \mathcal{H}(U)$ ile $f = F|K$ olduğudur.

göstereceğimiz $\mathbf{log}\, f$'nin bir holomorf $\log f$ dalı, $F_0' = (\log f)' = \frac{f'}{f}$ olduğundan, $\frac{f'}{f}$'nin D_0'da bir ilkelidir. Önerme 3.5.15 ile F_0 bu daireler zinciri boyunca $F_1, \ldots, F_n$ olarak analitik genişletilir ve elbette her bir F_i yine $\mathbf{log}\, f$'nin bir holomorf dalıdır. (3.19) ile

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f'}{f} &= F_n(\gamma(b)) - F_0(\gamma(a)) \\ &= \ln|f(\gamma(b))| + i \arg_n f(\gamma(b)) - \ln|f(\gamma(a))| - i \arg_0 f(\gamma(a)) \\ &= \ln \frac{|f(\gamma(b))|}{|f(\gamma(a))|} + i[\arg_n f(\gamma(b)) - \arg_0 f(\gamma(a))].\end{aligned}$$

Burada her bir $\arg_i$ fonksiyonu D_i dairesinde $\mathbf{arg}\, z$'nin uygun seçilmiş bir sürekli dalıdır.

$$\Delta_\gamma \arg f := \arg_n f(\gamma(b)) - \arg_0 f(\gamma(a))$$

olsun. $\Delta_\gamma \arg f$ değeri $\arg f$**'nin** γ **boyunca değişimi**dir denir. Eğer γ kapalıysa,

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = i\Delta_\gamma \arg f \in i2\pi\mathbb{Z}$$

olur. Eğer $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ ise elbette $\Delta_\Gamma \arg f := \sum_{i=1}^m \Delta_{\gamma_i} \arg f$ olarak tanımlanır.

Şimdi Argüman İlkesi teoreminin koşulları sağlansın ve orada $g(z) \equiv 1$ alınsın. O zaman (4.9) denkleminden

$$\Delta_\Gamma \arg f = \frac{1}{i} \int_\Gamma \frac{f'}{f} = 2\pi \left(\sum_{i=1}^n p_i \cdot n(\Gamma, a_i) - \sum_{j=1}^m q_j \cdot n(\Gamma, b_j) \right)$$

elde ederiz ve bu bize $\Delta_\Gamma \arg f$'yi hesaplamanın bir yolunu verir.

Sonuç 4.2.13. *$B \subset \mathbb{C}$ sınırlı bölgesinin $\boldsymbol{\partial} B$ sınırı sonlu sayıda basit kapalı integral gezilerinden oluşsun. f fonksiyonu $\overline{B}$'nin bir açık U komşuluğunda meromorf olsun ve f'nin ∂B sınırında sıfır yeri de, kutup yeri de olmasın. Bu durumda*

$$n(f \circ \boldsymbol{\partial} B, 0) = Z_0(f, B) - Z_\infty(f, B) = \frac{\Delta_{\boldsymbol{\partial} B} \arg f}{2\pi}$$

Kanıt. Sav, doğrudan (4.12)'den çıkar:

$$n(f \circ \boldsymbol{\partial} B, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \boldsymbol{\partial} B} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{\Delta_{\boldsymbol{\partial} B} \arg f}{2\pi}.$$

□

Yine Sonuç 4.2.11'den şunu elde ederiz: *$f \in \mathcal{H}(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$ ve her $z \in \partial B$ için $f(z) \neq a$ ise dd. $a \notin \underline{f \circ \boldsymbol{\partial} B}$ ise*

$$n(f \circ \boldsymbol{\partial} B, a) = Z_a(f, B). \tag{4.15}$$

Sonuç 4.2.14. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve $\boldsymbol{\partial} B$ ise sonlu sayıda basit kapalı integral gezilerden oluşsun. $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$ ve $\Gamma := f \circ \boldsymbol{\partial} B$ olmak üzere, $f(\overline{B}) = \underline{\Gamma} \cup \mathrm{I}(\Gamma) = f(\partial B) \cup \mathrm{I}(\Gamma)$.*

Kanıt. (4.15)'ten, her $w \in \mathbb{C} \backslash \underline{\Gamma}$ için $n(\Gamma, w) \geq 0$; öyleyse,

$$w \in f(B) \Longleftrightarrow Z_w(f, B) \geq 1 \Longleftrightarrow n(\Gamma, w) \geq 1 \Longleftrightarrow w \in \mathrm{I}(\Gamma).$$

□

Sonuç 4.2.15. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve $\boldsymbol{\partial} B$ ise sonlu sayıda basit kapalı integral gezilerden oluşsun. $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$, V basit bağlantılı ve $f(\partial B) \subset V$ ise $f(\overline{B}) \subset V$.*

Kanıt. $\mathbb{C}_\infty \backslash V$ bağlantılı olduğundan, her $z \notin V$ ve $\Gamma := f \circ \boldsymbol{\partial} B$ için $n(\Gamma, z) = 0$, dolayısıyla $\mathrm{I}(\Gamma) \subset V$ olur ve sav, Sonuç 4.2.14'ten çıkar. □

Sonuç 4.2.16. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge, $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$, $\boldsymbol{\partial} B$ bir basit kapalı integral gezisi ve $f|\partial B$ birebirse $f : B \to \mathrm{I}(f \circ \boldsymbol{\partial} B)$ biholomorftur.*

Kanıt. Her $w \in \mathrm{I}(f \circ \boldsymbol{\partial} B)$ için $Z_w(f, B) = n(f \circ \boldsymbol{\partial} B, w) = 1$. Dolayısıyla, (4.2.14) ile $f : B \to \mathrm{I}(f \circ \boldsymbol{\partial} B)$ bir tameşleme ve holomorftur, böylece (3.1.11) ile biholomorftur. □

Teorem 4.2.17 (Rouché Teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve $\boldsymbol{\partial} B$ ise sonlu sayıda basit kapalı integral gezilerden oluşsun. $f, g \in \mathcal{H}(\overline{B})$ olsun.*

$$\forall z \in \partial B \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \tag{4.16}$$

ise $Z_0(f, B) = Z_0(g, B)$, dd. katlılıklarıyla sayılmak üzere, f ve g fonksiyonlarının B'deki sıfır yerleri sayıları birbirine eşittir.

Sonuç 4.2.18. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve $\boldsymbol{\partial} B$ ise sonlu sayıda basit kapalı integral gezilerden oluşsun. $f, g \in \mathcal{H}(\overline{B})$ olsun.*

$$\forall z \in \partial B \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| \tag{4.17}$$

ise $Z_0(f, B) = Z_0(g, B)$, dd. katlılıklarıyla sayılmak üzere, f ve g fonksiyonlarının B'deki sıfır yerleri sayıları birbirine eşittir.

Sonuç 4.2.19. *$B \subset \mathbb{C}$ bir sınırlı bölge ve $\boldsymbol{\partial} B$ ise sonlu sayıda basit kapalı integral gezilerden oluşsun. $f, g \in \mathcal{H}(\overline{B})$ olsun.*

$$\forall z \in \partial B \quad |g(z)| < |f(z)| \tag{4.18}$$

ise $Z_0(f,B) = Z_0(f+g,B)$, dd. katlılıklarıyla sayılmak üzere, f ve $f+g$ fonksiyonlarının B'deki sıfır yerleri sayıları birbirine eşittir.

Kanıt. (4.16) koşulundan dolayı, f ve g fonksiyonlarının ∂B'de sıfır yerleri yoktur. Sonuç olarak, $f|B \not\equiv 0$ ve $g|B \not\equiv 0$. Bu nedenle, f ve g fonksiyonlarının $\overline{B}$'de, dolayısıyla B'de, sonlu sayıda sıfır yerleri vardır. O zaman $h := f/g$ fonksiyonu $\overline{B}$'nin bir açık U komşuluğunda meromorftur ve h fonksiyonunun ∂B'de sıfır yeri de kutup yeri de yoktur. Diğer yandan (4.16)'dan,

$$\forall z \in \partial B \quad |1 - h(z)| < 1 + |h(z)|\,.$$

Bu durumda her $z \in \partial B$ için $h(z) \notin (-\infty, 0]$ olur. Dolayısıyla, $(-\infty, 0]$ aralığı $h \circ \boldsymbol{\partial} B$ gezisinin dışına düşer ve $n(h \circ \boldsymbol{\partial} B, 0) = 0$ olur. $\frac{h'}{h} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$ olduğundan, (4.10) ile f ve g'nin B'de holomorf olduğunu gözetirsek ve $\Gamma := h \circ \boldsymbol{\partial} B$ alırsak,

$$\begin{aligned} Z_0(f,B) - Z_0(g,B) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g'}{g} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h'}{h} = n(h \circ \boldsymbol{\partial} B, 0) = 0 \end{aligned}$$

olur ve bu, savı verir.

(4.17) sağlanmışsa (4.16) de sağlanır; (4.2.18) buradan çıkar. Eğer (4.18) sağlanmışsa $h := f + g$ olmak üzere, $|h - f| = |g| < |f| \leq |f| + |h|$ olduğundan, Rouché Teoremi'yle $Z_0(f,B) = Z_0(h,B) = Z_0(f+g,B)$. Bu, kanıtı bitirir. □

Klasik anlamda Rouché Teoremi, Sonuç 4.2.18 veya Sonuç 4.2.19'dur.

Not 4.2.20. (1) Bazen bize verilen bir $p(z)$ polinomunun köklerini bulmak zordur ve bizi köklerin kendileri değil, belli bir bölgede kaç tane oldukları ilgilendirir. Böyle bir durumda Rouché Teoremi işimize yarayabilir. Örneğin $p(z) = z^5 + 8z - 1$ polinomunun $D_2(0)$ dairesinde kaç kökü vardır? $g(z) := z^5$ alırsak, $z \in \partial D_2(0)$ için

$$|p(z) - g(z)| = |8z - 1| \leq 8|z| + 1 = 17 < 32 = |g(z)|$$

olduğundan, Sonuç 4.2.18 ile $Z_0(p, D_2(0)) = Z_0(g, D_2(0)) = 5$. Dolayısıyla, katlılıklarıyla sayılmak üzere, p polinomunun $D_2(0)$dairesindeki köklerinin sayısı 5'tir. Buna karşın $D_1(0)$'daki kök sayısını araştıralım ve bu kez $h(z) = 8z - 1$ olmak üzere, $|z| = 1$ için

$$|p(z) - h(z)| = |z^5| = 1 < 7 = 8|z| - 1 \leq |8z - 1| = |h(z)|$$

olduğundan, h'nin $D_1(0)$ dairesinde bir kökü olduğu için p polinomunun da $D_1(0)$ dairesinde bir kökü vardır. Özetle p polinomunun tüm kökleri $D_2(0)$ dairesinde, bunlardan yalnız bir tanesi $D_1(0)$ dairesindedir.

(2) $p(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$ ve $n \geq 1$ olsun. $g(z) = z^n$ alalım.

$$\frac{p(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} = 1 + h(z)$$

ve $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$ olduğundan, $r > 0$ yeterince büyük seçilirse her $|z| = r$ için $\left|\frac{p(z)}{g(z)} - 1\right| < 1$, dd. $|p(z) - g(z)| < |g(z)|$ sağlanır. Dolayısıyla, $Z_0(p, D_r(0)) = Z_0(g, D_r(0)) = n \geq 1$. Böylece katlılıklarıyla sayılmak üzere, p polinomunun $D_r(0)$ dairesinde n kökü vardır. Sonuçta Cebirin Anateoremi'ni bir kez daha kanıtlamış olduk.

(3) *$f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{D}})$ ve $f(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ise, tam bir $c \in \mathbb{D}$ için $f(c) = c$ olur, dd. f fonksiyonunun $\mathbb{D}$'de tam bir tane sabit noktası vardır.* $g(z) := f(z) - z$ ve $h(z) = -z$ olsun. $|z| = 1$ için $|g(z) - h(z)| = |f(z)| < 1 = |h(z)|$ olduğundan, g ve h fonksiyonlarının $\mathbb{D}$'de sıfır yerlerinin sayısı aynıdır, yani 1'dir. g'nin bu tek sıfır yerine c dersek, $0 = g(c) = f(c) - c$ olur ve bu, savımızı kanıtlar.

(4) $B \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge, $\gamma := \boldsymbol{\partial} B$ ise basit kapalı bir integral gezisi olsun. $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$ ve $\lambda := f \circ \gamma$ gezisi de basit kapalı bir integral gezisi olsun. Bu durumda $f : B \to \mathrm{I}(\lambda)$ *biholomorftur.* Gerçekten de her $w \in \mathrm{I}(\lambda)$ için $n(\lambda, w) = 1$ olduğundan, $f(z) = w$ koşulunu sağlayan tam bir $z \in B$ vardır. Dolayısıyla, $f : B \to \mathrm{I}(\lambda)$ holomorf ve birebir olduğundan, biholomorftur.

Teorem 4.2.21 (Ters Fonksiyon Teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bölgesi basit kapalı $\boldsymbol{\partial} B$ integral gezisi ile çevrelenmiş olsun. $f \in \mathcal{H}(\overline{B})$, $f|\overline{B}$ birebir ve $G := f(B)$ olsun. $f^{-1} : G \to B$ vardır ve*

$$\forall w \in G : \quad f^{-1}(w) = \int_{\boldsymbol{\partial} B} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta.$$

Kanıt. Sonuç 4.2.16'dan $f : B \to G$ dönüşümünün biholomorf olduğunu biliyoruz. $z \in B$ için $w = f(z)$ dersek, z noktası f fonksiyonunun birinci dereceden w yeridir; dolayısıyla z noktası $f(z) - w$ fonksiyonunun birinci dereceden sıfır yeridir. (4.11) denkleminde $g(\zeta) = \zeta$ alırsak,

$$f^{-1}(w) = z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\boldsymbol{\partial} B} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

elde ederiz. □

Teorem 4.2.22 (Hurwitz Teoremi)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $\mathcal{H}(B)$ uzayında $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi f'ye yakınsak ve $f \not\equiv 0$ olsun. Bir $a \in B$ noktası f fonksiyonunun m. dereceden bir sıfır yeri olsun. Bir $R > 0$ sayısı ile $\overline{D}_R(a) \subset B$ ve f'nin bu kapalı dairedeki yegâne sıfır noktası a olsun. Bu durumda her $0 < r \leq R$ sayısına karşılık bir n_r'den başlamak üzere, her f_n fonksiyonunun $D_r(a)$'da, katlılıklarıyla sayılmak üzere, m sıfır yeri vardır. Dolayısıyla, S_n kümesi f_n fonksiyonunun B'deki sıfır yerlerinin kümesi olmak üzere, a noktası $\bigcup_{n\geq 0} S_n$ kümesinin bir yığılma noktasıdır.*

Kanıt. $a \in B$ noktası f'nin m. dereceden bir sıfır yeri olsun. $f \in \mathcal{H}(B)$ ve $f \neq 0$ olduğundan, f'nin sıfır yerleri ayrıktır. Dolayısıyla, bir $R > 0$ sayısı

$\overline{D}_R(a) \subset B$ ve her $a \neq z \in \overline{D}_R(a)$ için $f(z) \neq 0$ olacak biçimde seçilebilir. Şimdi $0 < r \leq R$ ve $\delta_r := \|f\|_{C_r(a)} > 0$ olsun. $f_n \overset{C_r(a)}{\Longrightarrow} f$ olduğundan, bir $n_0(r)$ doğal sayısı her $n \geq n_0(r)$ için $\|f_n\|_{C_r(a)} \geq \delta_r/2$ olacak biçimde seçilebilir. Bu ve Weierstrass Yakınsaklık Teoremi'nden dolayı, (f_n) ve (f'_n) dizileri $C_r(a)$'da düzgün yakınsak olduklarından, $(f'_n/f_n)_{n\geq n_0(r)}$ dizisi $C_r(a)$'da f'/f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Bu durumda $n \geq n_0(r)$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to+\infty} Z_0(f_n, D_r(a)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f'_n}{f_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_{r,a}} \frac{f'}{f} = Z_0(f, B) = m.$$

$(Z_0(f_n, D_R(a)))_{n\geq n_0(r)}$ doğal sayıların yakınsak bir dizisi olduğundan, bir n_r indisinden başlamak üzere, terimleri sabit olmak zorundadır, dd. bir $n_r \in \mathbb{N}$ ile her $n \geq n_r$ için $Z_0(f_n, D_r(a)) = m$ olur.

İkinci kanıt: Bu teoremi Rouché Teoremi ile kanıtlayacağız. r ve δ_r yukarıdaki gibi olsunlar. Bir $n_r \in \mathbb{N}$, her $n \geq n_r$ ve her $z \in C_r(a)$ için

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\delta}{2} < |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|$$

olacak biçimde bulunabilir. Rouché Teoremi'nden her $n \geq n_r$ için f ve f_n fonksiyonlarının sıfır yerleri katlılıklarıyla sayılmak üzere, aynıdır yani m'dir.

Savın kalanı her iki durumda da aşikârdır. □

Sonuç 4.2.23. *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$ ve bu dizi B'de $f \in \mathcal{H}(B)$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsak olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonunun B'de sıfır yeri yoksa ya f'nin de sıfır yeri yoktur ya da $f \equiv 0$.*

Bu sonuç doğrudan Hurwitz Teoremi'nden çıkar. f_n fonksiyonlarının sıfır yerleri yokken $f \equiv 0$ olabileceğini örnekleyelim: $B := \mathbb{C}^*$ ve her $n \in \mathbb{N}^*$ ve her $z \in B$ için $f_n(z) := z/n$ olsun; $Z_0(f_n, B) = \emptyset$ ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$ dizisi B'de $f \equiv 0$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaktır.

Teorem 4.2.24 (Birebirliğin Korunumu)**.** *$B \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$ ise B'de birebir holomorf fonksiyonlar dizisi ve $\mathcal{H}(B)$ uzayında* $\lim f_n = f$ *olsun. Bu koşullarda f fonksiyonu ya sabittir ya da birebirdir.*

Kanıt. $a \in B$'yi keyfi seçelim. Her $z \in B^* := B\setminus\{a\}$ için $f(z) \neq f(a)$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. f_n birebir olduğundan, $g_n := f_n - f_n(a)$ da birebirdir ve B^* bölgesinde sıfır yeri yoktur. (g_n) dizisi B^* bölgesinde $f - f(a)$ fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsaktır. Sonuç 4.2.23'ten dolayı, $f - f(a)$ ya $\equiv 0$ ya da sıfır yeri yoktur. Öyleyse, ya $f \equiv f(a)$ ya da her n her $z \in B^*$için $f(z) \neq f(a)$. İkinci seçenekte, $a \in B$ keyfi seçildiğinden, f birebir olur. □

Problemler

Problem 4.2.1. $\gamma \in \mathcal{G}^i(\mathbb{C}\setminus\{1, i\})$ kapalı olmak üzere,

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-i)} dz$$

integralinin alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

Problem 4.2.2. Kalan Teoremi'nden yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

1. $\int_{\kappa_{1+i,2}} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz$, $\int_{\kappa_2} \exp \frac{1}{1-z} dz$,
2. $\int_{\kappa_n} \tan \pi z dz$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\kappa_2} \frac{1}{z} \sin \frac{1}{(z-1)^2} dz$,
3. $\int_{\kappa_1} \exp z^{-1} \cdot \cos z^{-2} dz$, $\int_{\kappa_1} z^{-6} \sin z dz$,
4. $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^4}$, γ pozitif yönlenmiş basit kapalı $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$ elipsi,
5. $\int_{\kappa_1} \frac{dz}{1+z^4}$, $\int_{\kappa_r} z^n \operatorname{Log} \frac{z-a}{z-b} dz$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ a, b \in D_r)$.

Problem 4.2.3. Bir $p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ polinomu verilsin. Her $z \in \partial\mathbb{D}$ için $|p(z)| < 1$ olabilir mi?

Problem 4.2.4. $\gamma(t) = (2 + \cos \frac{t}{2})e^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$ olmak üzere,

$$\int_\gamma \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} dz$$

integralini hesaplayınız.

Problem 4.2.5. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gezisi $\gamma(t) = \sin 2t + 2i \sin t$ ile veriliyorsa, $\int_\gamma \frac{z}{z^2+1} dz$ integralini hesaplayınız.

Problem 4.2.6. $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[z]$ ve bir $R > 0$ reel sayısı ile $1 \leq i \leq n$ için $|a_i| < R^i/n$ ise, p'nin tüm köklerinin D_R dairesinde olduğunu gösteriniz.

Problem 4.2.7. $a \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Re} a > 1$ ise, $e^{-z} + z - a = 0$ denkleminin $\mathbb{C}^+$ sağ yarıdüzleminde tam bir tane çözümü olduğunu gösteriniz.

Problem 4.2.8. $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun ve $(f_n) \subset \mathcal{H}(B)$ dizisi B'de f fonksiyonuna kompakt düzgün yakınsak olsun. Eğer hiçbir f_n fonksiyonu w değerini almıyorsa ya $f \equiv w$ ya da f de w değerini almadığını gösteriniz.

Problem 4.2.9. Her $0 < \varepsilon < \pi$ sayısına karşılık bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ doğal sayısı her $n \geq n_\varepsilon$ için $p_n(z) = \sum_{k\geq 0}^{n} (-1)^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ polinomunun $(\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon)$ aralığında en az bir sıfır yeri olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz. p_n bilindik bir fonksiyonun Taylor polinomudur.

Problem 4.2.10. Açık Dönüşüm Teoremi'ni (4.14)'ten yararlanarak kanıtlayınız.

Problem 4.2.11. $H(0;4,+\infty)$ halkasında tanımlı

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

fonksiyonunun bu halkada bir ilkeli var mıdır? Aynı halkada

$$g(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

fonksiyonunun bir ilkeli var mıdır?

Problem 4.2.12. $K \subset \mathbb{C}$ için aşağıdaki önermelerin denk olduğunu gösteriniz:

(a) $(f_n) \subset \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{H}(\mathring{K})$ ve $f_n \overset{K}{\Longrightarrow} f$ olsun. Eğer her $z \in \partial K$ için $f(z) \neq 0$ ise, bir n_0'dan başlamak üzere, f_n ve f'nin $\mathring{K}$'daki sıfır sayıları birbirine eşittir.

(b) $f, g \in \mathcal{C}(K) \cap \mathcal{H}(\mathring{K})$ ve her $z \in \partial K$ için $|g(z)| < |f(z)|$ ise, f ve $f+g$'nin $\mathring{K}$'deki sıfır sayıları birbirine eşittir.

4.3 Kalanların İntegral Hesaplamada Kullanımı

Bu kısımda bazı gerçel integrallerin Kalan Teoremi yardımıyla hesaplanmalarını inceleyeceğiz. Bu biçimde hesaplamada integralini alacağımız fonksiyonların ilkellerini bilmemiz gerekmeyecektir. Onların yerini sonlu sayıda tekil noktaları olan holomorf fonksiyonlar alacak ve integralimiz, bu fonksiyonların bu tekil noktalardaki kalanları yardımıyla hesaplanacaktır. Ancak bu yaklaşımda elimizde genel bir yöntem yoktur; bu nedenle bazı tipleri vermekle yetineceğiz.

Bu ve bir sonraki kısımda $\int_{-\infty}^{a} f$, $\int_{a}^{+\infty} f$ ve $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ daima Altkısım 5.3.2'de tanımlanan has olmayan integralleri göstereceklerdir.

4.3.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ Tipinde İntegraller

Burada $R(x,y)$, $\partial\mathbb{D}$'de tekil noktaları olmayan bir rasyonel fonksiyondur, yani $P(x,y)$, $Q(x,y)$ polinomları ile $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ ve $x^2+y^2=1$ için $Q(x,y) \neq 0$. Bu tipte, birim çember üzerindeki $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ noktalarının şu özellikleri devreye girer: $z = e^{it} = \cos t + i \sin t = x + iy$ için

$$\overline{z} = \frac{z\overline{z}}{z} = \frac{1}{z}\ , \ dz = izdt, \text{ ve } \ dt = \frac{dz}{iz}$$
$$\cos t = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ \sin t = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}).$$

Böyle bir $R(x,y)$ rasyonel fonksiyonuna bir

$$\tilde{R}(z) := z^{-1}R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right)$$

fonksiyonu karşılık getireceğiz. $\tilde{R}$ fonksiyonu $\mathbb{C}_\infty$'da meromorftur ve $\partial\mathbb{D}$ sınırında ise tekil noktaları yoktur.

Teorem 4.3.1. *$R(x, y)$ bir rasyonel fonksiyon olsun ve $\partial\mathbb{D}$ sınırında tekil noktaları olmasın. Bu durumda*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = 2\pi \sum_{a\in\mathbb{D}} \operatorname{Res}(\tilde{R}, a). \tag{4.19}$$

Kanıt. $\partial\mathbb{D}$ gezisi $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ile parametrelenmiştir. Kalan Teoremi'yle

$$2\pi \sum_{a\in\mathbb{D}} \operatorname{Res}(\tilde{R}, a) = \frac{1}{i}\int_\gamma \tilde{R} = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{R(\cos t, \sin t)}{z} izdt = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt.$$

□

Örnek 4.3.2. (1) $a > 1$ olmak üzere,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos t} dt$$

integralini hesaplayınız. $R(x, y) = 1/(a + x)$ teoremin koşullarını sağlar. $R(\cos t, \sin t) = 1/(a + \cos t)$. Bu durumda

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z + z^{-1})} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}.$$

Paydadaki polinomunun kökleri $-a \pm \sqrt{a^2 - 1}$'dir ve bunlardan ancak $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ kökü $\mathbb{D}$'dedir. Dolayısıyla, bu birinci dereceden bir kutup yeri olduğundan, (4.19) ile

$$I = 2\pi \operatorname{Res}(\tilde{R}, z_1) = 2\pi \frac{2}{(z_1 - z_2)} = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

(2) $m \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere,

$$I = \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2m} dt = \frac{2\pi \cdot (2m)!}{2^{2m} \cdot (m!)^2}$$

olduğunu gösteriniz. Burada $R(x, y) = x^{2m}$ ve

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1})\right)^{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{n=0}^{2m} \binom{2m}{n} z^{2n-2m-1}$$

olduğundan, $\tilde{R}$'nin $\mathbb{D}$'de yalnızca $z = 0$'da bir kutup yeri vardır ve

$$I = 2\pi \operatorname{Res}(\tilde{R}, 0) = \frac{2\pi}{2^{2m}} \binom{2m}{m} = \frac{2\pi \cdot (2m)!}{2^{2m} \cdot (m!)^2}.$$

Okurun kolayca göreceği gibi $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere, $\int_0^{2\pi} R(\cos nt, \sin nt)dt$ tipinde bir integral söz konusu ise, benzer biçimde

$$\cos nt = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \quad \text{ve} \quad \sin nt = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

dönüşümleri ile çalışırız.

4.3.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ Tipinde İntegraller

Gerçel analizden biliyoruz ki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ mutlak yakınsak} \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f \text{ yakınsak} \Longrightarrow \exists \text{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty} f.$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f$ için genel stratejimiz şu olacaktır: $f(x)$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{H}}$'de, ya da $\overline{\mathbb{H}^-}$'de, sonlu nokta dışında holomorf olan bir $f(z)$ fonksiyonuna genişletilecektir ve genelde f'nin $\mathbb{R}$'de tekil noktaları olmamasını isteyeceğiz. $\overrightarrow{(-r)r}$ gezisi ya üst yarıdüzlemdeki bir γ_r gezisi ile, ya da alt yarıdüzlemdeki bir λ_r gezisi ile, basit kapalı $\overrightarrow{(-r)r} + \gamma_r$, ya da $\overrightarrow{(-r)r} + \lambda_r$, gezilerine tamamlanır. r yeterince büyük seçilirse üst yarıdüzlemdeki, ya da alt yarıdüzlemdeki, tüm tekillikler bu basit kaplı gezilerin içine düşer ve biz

$$\int_{-r}^{r} f + \int_{\gamma_r} f = \sum_{z\in\mathbb{H}} \text{Res}(f,z) \;\text{ ya da }\; \int_{-r}^{r} f + \int_{\lambda_r} f = -\sum_{z\in\mathbb{H}^-} \text{Res}(f,z)$$

elde ederiz. İkinci toplamdaki $-$ işareti $\overrightarrow{(-r)r} + \lambda_r$ gezisinin içini negatif yönde çevrelemesinden kaynaklanır. Tekil noktalarımız sonlu olduğundan, her iki toplam da aslında sonludur. $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f = 0$ olduğu durumlarda

$$\text{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{z\in\mathbb{H}} \text{Res}(f,z) \;\text{ ya da }\; \text{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty} f = -\sum_{z\in\mathbb{H}^-} \text{Res}(f,z)$$

olur. Eğer ayrıca $\int_{-\infty}^{+\infty} f$'nin yakınsak olduğunu biliyorsak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{z\in\mathbb{H}} \text{Res}(f,z) \;\left(\text{ya da }\; \int_{-\infty}^{+\infty} f = -\sum_{z\in\mathbb{H}^-} \text{Res}(f,z)\right).$$

Şimdi bazı özel γ_r gezileri için hangi koşullarda $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f = 0$ olduğunu araştıracağız; benzeri λ_r için araştırılacaktır.

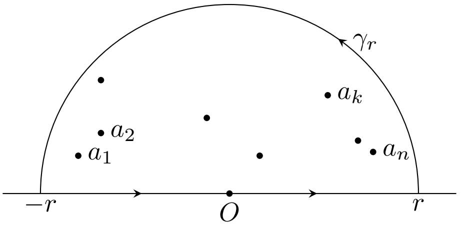
$0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$, $r_0 > 0$, $A_{r_0}(\varphi_1,\varphi_2) := \{re^{i\varphi} | r \ge r_0, \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$ ve $B_{r_0}(\varphi_1,\varphi_2) := \{re^{i\varphi} | 0 < r \le r_0, \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$ olsun. $\gamma_r : [\varphi_1,\varphi_2] \to \mathbb{C}$ gezisiyse $\gamma_r(t) = re^{it}$ olsun.

Önerme 4.3.3. *$f \in \mathcal{C}(A_{r_0}(\varphi_1,\varphi_2))$ ve $g \in \mathcal{C}(B_{r_0}(\varphi_1,\varphi_2))$ olsun.*

(i) $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ *ise* $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f = 0$.

(ii) $\lim_{z\to 0} zg(z) = 0$ *ise* $\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} g = 0$.

Kanıt. (i) $r \ge r_0$ olsun. f fonksiyonu $\underline{\gamma_r}$ kompakt kümesinde sürekli olduğundan, orada bir z_r noktasında $|f|$ maksimumunu alır, dd. $\|f\|_{\gamma_r} = |f(z_r)|$ ve



Şekil 4.5: Teorem 4.3.4'e ilişkin şekil.

$|z_r| = r$. Varsayımımızdan dolayı,

$$0 = \lim_{r\to+\infty} |z_r||f(z_r)| = \lim_{r\to+\infty} r\,\|f\|_{\gamma_r} \text{ ve}$$
$$\left|\int_{\gamma_r} f\right| \leq L(\gamma_r)\,\|f\|_{\gamma_r} \leq (\varphi_2 - \varphi_1) r\,\|f\|_{\gamma_r}$$

olduğundan, $\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f = 0$ olur. (ii) benzer biçimde kanıtlanır. □

Teorem 4.3.4. *f fonksiyonu $\overline{\mathbb{H}}$'de (ya da $\overline{\mathbb{H}^-}$'de), reel doğru üzerinde olmayan sonlu sayıda tekil noktalar dışında holomorf olsun.* $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ *ise*

$$\text{CPV}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}} \text{Res}(f,a) \; (\textit{ya da} = -2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}^-} \text{Res}(f,a)).$$

Eğer ayrıca $\int_{-\infty}^{+\infty} f$'nin yakınsak olduğunu biliyorsak, yukarıda CPV $\int$ *yerine* $\int$ *yazabiliriz.*

Kanıt. Üst yarıdüzlemdeki sonlu nokta dışında f fonksiyonumuz $\overline{\mathbb{H}}$'de holomorf olsun. $r > 0$ sayısını yeterince büyük seçersek, γ_r Şekil 4.5'teki yarıçember olmak üzere, $\mathbb{H}$ üst yarıdüzlemindeki tüm tekil noktalarımız $\overrightarrow{(-r)r} + \gamma_r$ kapalı gezimizin içine düşer. Bu durumda

$$\int_{-r}^{r} f + \int_{\gamma_r} f = 2\pi i \sum_{a\in \mathrm{I}(\gamma_r)} \text{Res}(f,a) = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}} \text{Res}(f,a)$$

olur. Burada $r \to +\infty$ için limitlere geçersek, Önerme 4.3.3 ile

$$\text{CPV}\int_{-\infty}^{+\infty} f = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}} \text{Res}(f,a)$$

elde ederiz. $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{H}^-})$ durumunda $\overrightarrow{(-r)r} + \lambda_r$ gezisinin her bir iç noktası etrafındaki dönme sayısı -1 olduğundan, bu geziden yola çıkarsak elbette PV $\int_{-\infty}^{+\infty} f = -2\pi i \sum_{a\in\mathbb{H}^-} \text{Res}(f,a)$ elde ederiz. □

Not 4.3.5. f fonksiyonu üst yarıdüzlemde teoremin koşullarını sağlasın ve ayrıca $r_0 > 0$, $M > 0$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(|z| \geq r_0 \Longrightarrow \frac{M}{|z|^{1+\alpha}}\right) \tag{4.20}$$

olsun. Teorem 5.3.22'den dolayı, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ yakınsaktır ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f, a) \tag{4.21}$$

olur. Eğer $f = P/Q$ bir rasyonel fonksiyon ve $\deg Q \geq \deg P + 2$ ise, açıkça (4.20) sağlanır ve (4.21) geçerlidir.

Örnek 4.3.6. (1)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} \quad \text{ve} \quad J = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

integrallerini hesaplayalım: Burada $P(x) = 1$, $Q(x) = x^6 + 1$ ve $R(z) = \frac{1}{z^6+1}$'dir. Not 4.3.5'in koşulları sağlanır. (1.41)'den $z^6 + 1 = 0$, dd. $z^6 = -1$ denkleminin üst yarıdüzlemdeki kökleri $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ve $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$'dır. Önerme 4.1.4(ii) ile z_k'de

$$\operatorname{Res}(\frac{1}{Q}, z_k) = \frac{1}{Q'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{z_k}{6z_k^6} = -\frac{z_k}{6},$$

$$I = -\frac{2\pi i}{6}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{3}(2\sin\frac{\pi}{6} + 1) = \frac{2\pi}{3}$$

elde ederiz. $1/(1+x^6)$ bir çift fonksiyon olduğundan, $J = \frac{1}{2}I = \frac{\pi}{3}$.

(2) $n > p$ için

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{x^{2n}+1} dx = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{2p+1}{2n}\pi\right)}$$

olduğunu görelim. Sonuç 4.3.5'in koşulları sağlanır. $z^{2n} + 1 = 0 \Longleftrightarrow z^{2n} = -1$ denkleminin üst yarıdüzlemdeki çözümleri

$$z_k = e^{i\varphi_k}, \;\; \varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$R(z) = \frac{z^{2p}}{z^{2n}+1}$ dersek, yine (4.1.4)(ii) ile

$$\operatorname{Res}(R, z_k) = \frac{z_k^{2p}}{2nz_k^{2n-1}} = \frac{z_k^{2p+1}}{2nz_k^{2n}} = -\frac{z_k^{2p+1}}{2n}$$

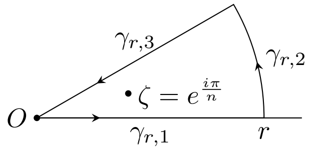
ve biraz hesaplamayla

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2n}z_k^{2p+1}\right) = \frac{-i\pi}{n}\frac{z_0^{2p+1}\left[z_0^{2n(2p+1)} - 1\right]}{z_0^{4p+2} - 1}$$

$$= \frac{2i\pi}{n\left[z_0^{2p+1} - z_0^{-2p-1}\right]} = \frac{2i\pi}{n2i\sin\left(\frac{2p+1}{2n}\pi\right)} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{2p+1}{2n}\pi\right)}$$

elde ederiz. $p = 0$, $n = 3$ özel durumunda yeniden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}$$



Şekil 4.6: Not 4.3.7'ye ilişkin şekil.

buluruz ki bu, bir önceki örnekteki sonuçtur.

Not 4.3.7. Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir çift fonksiyonsa ve $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ yakınsaksa elbette $\int_0^{+\infty} f = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f$. Bu kısmın başında belirttiğimiz gibi kalanlar yardımıyla gerçel integrallerin hesaplanmasının genel bir yöntemi yoktur. Şimdi yarıçemberler yerine fonksiyonumuza uygun başka geziler seçerek

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{x^n+1}dx = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{m\pi}{n}\right)^{-1},\ n, m \in \mathbb{N} \text{ ve } 0 < m < n$$

olduğunu görelim. $f(z) := \frac{z^{m-1}}{z^n+1}$ alırsak, f fonksiyonu birim çember üzerindeki sonlu sayıda birinci dereceden kutup noktası dışında $\mathbb{C}$'de holomorftur. $z^n = -1$ denkleminin $\zeta = e^{i\frac{\pi}{n}}$ köküne odaklanalım ve $\gamma_{r,1}, \gamma_{r,2}, \gamma_{r,3}$ gezilerini Şekil 4.6'daki gibi seçelim; bu geziler üzerinde f'nin kutup noktaları olmasın ve $\gamma_{r,1}\gamma_{r,2}\gamma_{r,3}$ gezisinin içinde yalnızca ζ kutup yeri bulunsun. Önerme 4.1.4(ii) ile $\operatorname{Res}(f,\zeta) = -\frac{1}{n}\zeta^m$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$\int_{\gamma_{r,1}} f + \int_{\gamma_{r,2}} f + \int_{\gamma_{r,3}} f = -\frac{2\pi i}{n}\zeta^m. \tag{4.22}$$

$\lim_{z\to+\infty} zf(z) = 0$ olduğundan, (4.3.3)(1) ile $\lim_{z\to+\infty}\int_{\gamma_{r,2}} f = 0$. Ayrıca, integralimiz yakınsak olduğundan, $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_{r,1}} f$ ve $\gamma_{r,3}^{-}(t) = \zeta^2 t$, $0 \le t \le r$ ve $\zeta^{2n} = 1$ olduğundan,

$$\int_{\gamma_{r,3}} f = -\int_0^r \frac{t^{m-1}\zeta^{2m-2}}{t^n\zeta^{2n}+1}\zeta^2 dt = -\zeta^{2m}\int_0^r \frac{t^{m-1}}{t^n+1}dt = -\zeta^{2m}\int_0^r f.$$

Şimdi (4.22)'de $r \to +\infty$ limitine geçersek,

$$(\zeta^{2m}-1)\int_0^{+\infty} f = \frac{2\pi i}{n}\zeta^m$$

olur. $\zeta = e^{i\frac{\pi}{n}}$ olduğundan,

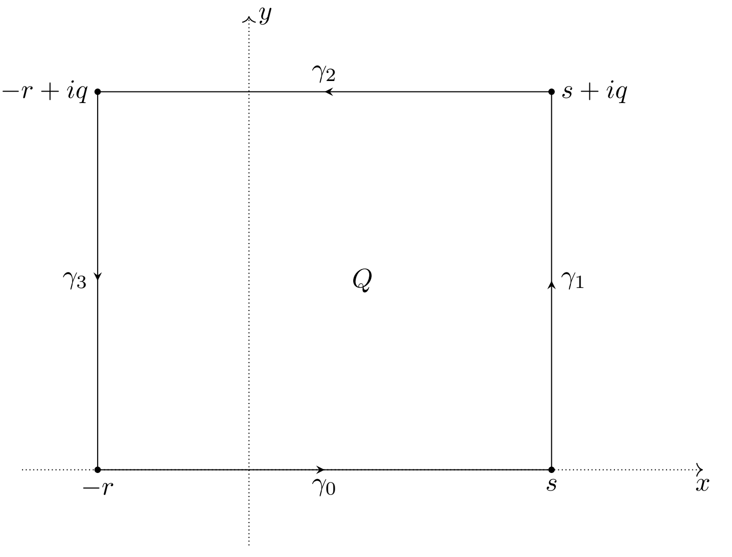
$$\zeta^m(\zeta^{2m}-1)^{-1} = \left(2i\sin\frac{m}{n}\pi\right)^{-1}$$

olur ve sav buradan çıkar.

4.3.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$, $a \in \mathbb{R}$ Tipinde İntegraller

Bu tip integraller, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in \mathbb{R}$ ise $f(x)e^{iax} = f(x)\cos ax + if(x)\sin ax$ olduğundan,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx$$



Şekil 4.7: Teorem 4.3.8'e ilişkin şekil.

tipi integralleri de kapsar.

$a \in \mathbb{R}$ ve $z = x + iy$ için $|e^{iaz}| = e^{-ay}$ olduğundan, $ay \geq 0$ için $e^{-ay} \leq 1$ olur, dd. "$a > 0$ ve $y \geq 0$" veya "$a < 0$ ve $y \leq 0$" ise, $e^{-ay} \leq 1$ olur. Bu basit bilgi aşağıdaki teoremde rol oynayacaktır:

Teorem 4.3.8. *f fonksiyonu $\overline{\mathbb{H}}$'de reel doğru üzerinde olmayan sonlu sayıda tekil nokta dışında holomorf olsun ve* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *için* $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ *olsun. Bu koşullarda $a > 0$ ise*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}, w).$$

Benzer biçimde f fonksiyonu $\overline{\mathbb{H}^-}$'de reel doğru üzerinde olmayan sonlu sayıda tekil nokta dışında holomorf ve $\operatorname{Im} z \leq 0$ *için* $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ *olsun. Bu koşullarda $a < 0$ ise*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{w \in \mathbb{H}^-} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}, w).$$

Not 4.3.9. $f = P/Q$ bir rasyonel fonksiyon ve $\deg Q \geq \deg P + 1$ ise, teoremin koşulları sağlanır.

Kanıt. Önce $a > 0$ olsun. $r, s > 0$ pozitif sayılarını yeterince büyük seçersek, f fonksiyonunun $\mathbb{H}$ üst yarıdüzlemdeki tüm tekil noktaları $q := r + s$ olmak üzere, köşeleri $-r, s, s+iq, -r+iq$ olan Q karesinin içine düşer. Şekil 4.7'de gösterildiği gibi $\boldsymbol{\partial}Q = \gamma_0 \cdots \gamma_3$ olsun.

$$\sum_{i=0}^{3} \int_{\gamma_i} f(z)e^{iaz}dz = 2\pi i \sum_{w\in Q} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}, w) = 2\pi i \sum_{w\in \mathbb{H}} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}, w).$$

$I_i := \int_{\gamma_i} f(z)e^{iaz}dz$ olmak üzere, $i = 1,2,3$ için $\lim_{r,s\to+\infty} I_i = 0$ olduğunu kanıtlarsak, $\lim_{r,s\to+\infty} I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx$ olduğundan işimiz biter. γ_2^- için parametre aralığını $[-r,s]$ seçersek, $\gamma_2^-(t) = t+iq$ ve $z = x+iy$ içinse $|e^{iaz}| = e^{-ay}$ olduğundan,

$$e^{aq} > q \text{ ise } |I_2| = \left\|f(z)e^{iaz}\right\|_{\gamma_2} L(\gamma_2) \leq \|f\|_{\gamma_2} qe^{-aq} \leq \|f\|_{\gamma_2}.$$

Öte yandan $\gamma_1(t) = s+it$, $0 \leq t \leq q$ için $|e^{ia\gamma_1(t)}| = e^{-at}$ ve $|\gamma_1'(t)| = |i| = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \int_0^q |f(\gamma_1(t))|\, e^{-at}dt \leq \|f\|_{\gamma_1} \int_0^q e^{-at}dt \\ &\leq \|f\|_{\gamma_1} a^{-1}(1-e^{aq}) \leq \|f\|_{\gamma_1} a^{-1}.\end{aligned}$$

Benzer biçimde $|I_3| \leq \|f\|_{\gamma_3} a^{-1}$ kanıtlanır. Sonuçta yeterince büyük q için $e^{aq} > q$ olduğundan ve $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$'ın bir sonucu olarak $i = 1,2,3$ için $\lim_{r,s\to+\infty} \|f\|_{\gamma_i} = 0$ olduğundan, $\lim_{r,s\to+\infty} I_i = 0$ olur ve $a > 0$ için işimiz biter.

$a < 0$ içinse benzer biçimde karelerimizi $\overline{\mathbb{H}^-}$'de seçeriz ve bu durumda $q < 0$ olacağından, yine $aq > 0$ olduğunu unutmayacağız. □

Örnek 4.3.10. $m, a > 0$ olmak üzere,

$$I_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos mx}{x^2+a^2}dx \text{ ve } I_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx$$

integrallerini hesaplayınız. $f(z) := \frac{z}{z^2+a^2}$ ve $g(z) = f(z)e^{imz}$ dersek, f fonksiyonu $\pm ia$ dışında $\mathbb{C}$'de holomorftur ve Teorem 4.3.8'in koşulları sağlanır.

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}e^{imx}dx \text{ dersek } I = I_1 + iI_2.$$

g'nin $\mathbb{H}$'deki yegâne tekil noktası ia ve $\operatorname{Res}(g, ia) = 2^{-1}e^{-ma}$ olduğundan, $I = 2\pi i 2^{-1}e^{-ma} = i\pi e^{-ma}$, dolayısıyla $I_1 = 0$ (bu ise $\mathbb{R}$'de bir tek fonksiyonun integrali olarak aşikârdır) ve $I_2 = \pi e^{-ma}$ olur.

Önerme 4.3.11. *$f \in \mathcal{H}(D_r^*(z_0))$ fonksiyonunun z_0 noktasında bir basit kutup noktası var ve her $0 < \varepsilon < r$ için $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $0 \leq \varphi_1 \leq t \leq \varphi_2 \leq 2\pi$ ise*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f = i(\varphi_2 - \varphi_1)\operatorname{Res}(f, z_0).$$

Kanıt. $a = \text{Res}(f, z_0)$ olmak üzere, f'nin $D_r^*(z_0)$'daki Laurent açılımı

$$f(z) = \frac{a}{z - z_0} + g(z), \quad g \in \mathcal{H}(D_r(z_0))$$

olsun. $|g|$'nin $\overline{D}_{r/2}(z_0)$'daki maksimumuna M dersek, $0 \leq M < +\infty$ olduğundan, $0 < \varepsilon \leq r/2$ için $\left|\int_{\gamma_\varepsilon} g\right| \leq L(\gamma_\varepsilon)M = \varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1)M$ ile $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g = 0$. Diğer yandan,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{a}{z - z_0} dz = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a}{\varepsilon e^{i\varphi}} i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi = ia(\varphi_2 - \varphi_1)$$

olduğundan, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f = ia(\varphi_2 - \varphi_1) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} g = ia(\varphi_2 - \varphi_1)$.

(i) $c \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R}\backslash\{c\} \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f$ ve $\int_{c+\varepsilon}^{+\infty} f$ integralleri yakınsak ve ayrıca

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^{+\infty} f \right)$$

limiti varsa buna $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ integralinin **esas değeri** denir ve bu limit

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} f$$

ile gösterilir.

(ii) $c \in (a, b)$ olmak üzere, $f : [a, b] \backslash \{c\} \to \mathbb{C}$ sürekliyse, limit varsa

$$\text{PV} \int_a^b f := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f + \int_{c+\varepsilon}^b f \right)$$

esas değer olarak adlandırılır.

(iii) $c_1, \ldots, c_n, a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ ve $a_i < c_i < a_{i+1}$ olsun. $f : \mathbb{R}\backslash\{c_1, \ldots, c_n\} \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. $\int_{-\infty}^{a_1} f$ ve $\int_{a_{n+1}}^{+\infty} f$ integralleri yakınsak ve $i = 1, \ldots, n$ için $\text{PV} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f$ esas değerleri varsa

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^{a_1} f + \sum_{i=1}^{n} \text{PV} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f + \int_{a_{n+1}}^{+\infty} f$$

yine **esas değer** olarak adlandırılır.

□

Not 4.3.12. (1) $x \in \mathbb{R}^*$ için $f(x) = x^{-1}$ olsun. Her $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ için $\int_{-\infty}^{-\varepsilon_1} f$ ve $\int_{\varepsilon_2}^{+\infty} f$ integralleri yakınsaktır, ancak $\lim_{\varepsilon_1 \searrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon_1} f$ ve $\lim_{\varepsilon_2 \searrow 0} \int_{\varepsilon_2}^{+\infty} f$ limitlerinin her ikisi de yoktur. Yine de $\text{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} f$ var ve $= 0$.

(2) Bu tanımın (iii) şıkkı $a_1, \ldots, a_{n+1}$ noktalarının seçiminden bağımsızdır, kolayca görülür.

(3) $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a, c, b \in \mathbb{R}$ ve $a < c < b$, $[a, b] \subset U$ olsun. $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{c\})$ ve f fonksiyonunun c noktasında bir basit kutup yeri olsun. $D_r^*(c)$'de f'nin Laurent açılımı $f(z) = \frac{\alpha}{z-c} + g(z), g \in \mathcal{H}(D_r(c))$ ise, PV $\int_a^b f$'nin var ve

$$\mathrm{PV} \int_a^b f = \alpha \ln \frac{b-c}{c-a} + \int_a^b g(x)dx$$

olduğu kolayca görülür. Gerçekten de r sayısını $D_r(c) \subset U$ olacak biçimde seçelim. $g \in \mathcal{H}(U)$ olacağından, $\exists \int_a^b g$. Dolayısıyla, $0 < \varepsilon < \min(c-a, b-c)$ olmak üzere,

$$\exists \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} g + \int_{c+\varepsilon}^b g \right) = \int_a^b g.$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{\alpha}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{\alpha}{x-c} \right) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\alpha \ln |x-c| \,|_a^{c-\varepsilon} + \alpha \ln |x-c| \,|_{c+\varepsilon}^b \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha \left(\ln \varepsilon - \ln(c-a) + \ln(b-c) - \ln \varepsilon \right) \\
&= \alpha \frac{\ln(b-c)}{\ln(c-a)}.
\end{aligned}$$

Bu iki limitin varlığı PV $\int_a^b f$ esas değerinin var ve bu iki limitin toplamına eşit olması demektir.

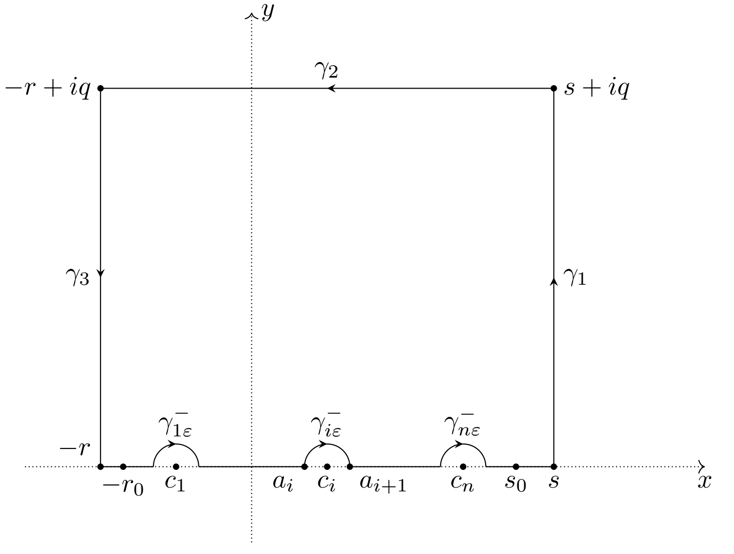
Teorem 4.3.13. *f fonksiyonu $\overline{\mathbb{H}}$'de sonlu sayıda tekil nokta dışında holomorf olsun ve* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *için* $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ *olsun. f'nin gerçel eksen üzerindeki tekillikleri birinci dereceden $c_1, \ldots, c_n$ kutup yerleri olsun. Bu koşullarda $a > 0$ ise*

$$\mathrm{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{c \in \mathbb{H}} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}, c) + \pi i \sum_{i=1}^n \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}, c_i).$$

Teoremin $\overline{\mathbb{H}^-}$ için ifadesini okura bırakıyoruz.

Kanıt. $r_0, s_0 > 0$ sayılarını, $q_0 = r_0 + s_0$ olmak üzere, yeterince büyük seçersek, bir yandan üst yarıdüzlemdeki tekil noktalar köşeleri $-r_0, s_0, s_0 + iq_0, -r_0 + iq_0$ olan açık $\mathring{Q}_0$ karesine düşerken, diğer yandan x-ekseni üzerindeki basit kutup noktalarımız ise $(-r_0, s_0)$ açık aralığına düşer. Şimdi $a_1, \ldots, a_{n+1}$ sayılarını $-r_0 = a_1, s_0 = a_{n+1}$ ve $a_i < c_i < a_{i+1}$ olacak biçimde seçelim. $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük seçilirse $f \in \mathcal{H}(D_\varepsilon^*(c_i))$ sağlanır. $\gamma_{i\varepsilon}$ ile c_i merkezli ε yarıçaplı pozitif yönlenmiş yarıçember gezisini gösterelim. Şimdi r, s pozitif sayılar, $-r < a_1$, $s > a_{n+1}$ ve $q = r + s$ olmak üzere, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ Şekil 4.8'deki geziler ve $g(z) = f(z)e^{iaz}$ olmak üzere, Kalan Teoremi'yle

$$\int_{-r}^{a_1} g + \int_{a_1}^{c_1 - \varepsilon} g + \int_{\gamma_{1\varepsilon}^-} g + \cdots + \int_{\gamma_{n\varepsilon}^-} g + \int_{c_n + \varepsilon}^{a_{n+1}} g + \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} g = \sum_{c \in \mathbb{H}} \mathrm{Res}(g, c)$$



Şekil 4.8: Teorem 4.3.13'e ilişkin şekil.

olur. Teorem 4.3.8'in kanıtında olduğu gibi $r, s \to +\infty$ için $\int_{\gamma_i} g \to 0$ ve integrallerin yakınsaklığından

$$\int_{-\infty}^{a_1} g + \int_{a_1}^{c_1-\varepsilon} g + \int_{\gamma_{1\varepsilon}^-} g + \int_{c_1+\varepsilon}^{a_2} g + \cdots + \int_{\gamma_{n\varepsilon}^-} g + \int_{c_n+\varepsilon}^{+\infty} g = \sum_{c\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}(g, c)$$

$$\int_{-\infty}^{a_1} g + \int_{a_1}^{c_1-\varepsilon} g + \int_{c_1+\varepsilon}^{a_2} g + \cdots + \int_{c_n+\varepsilon}^{+\infty} g + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{k\varepsilon}^-} g = \sum_{c\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}(g, c)$$

Burada $\varepsilon \searrow 0$ limitine geçersek, Önerme 4.3.11 ile

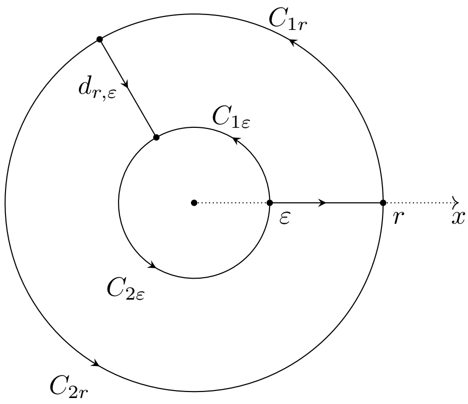
$$\mathrm{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} g - \sum_{i=1}^{n} \pi i \operatorname{Res}(g, c_i) = \sum_{c\in\mathbb{H}} \operatorname{Res}(g, c)$$

elde ederiz; bu ise savımızdır. □

Örnek 4.3.14. $I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$? $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu teoremimizin koşulunu sağlar. x-ekseni üzerinde yalnızca $z = 0$ noktasında bir basit kutup yeri vardır. $\sin x/x$ fonksiyonu 0 dışında süreklidir; 0'da sorunlu gibi gözükse de oraya da sürekli genişletilebildiğini biliyoruz. $I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx$. Teoremdeki yöntemimizle γ_ε ile 0 merkezli ε yarıçaplı pozitif yönlenmiş yarıçember gezisini gösterirsek, $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ olmak üzere, $\operatorname{Res}(g, 0) = 1$ olduğundan,

$$\mathrm{PV} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i,$$

böylelikle I yakınsak olduğundan, $I = \operatorname{Im} \pi i = \pi$ elde edilir. Ayrıca, $\sin x/x$ fonksiyonunun bir çift fonksiyon olduğunu gözetirsek, $\int_0^{+\infty} (\sin x/x) dx = \pi/2$ olur.



Şekil 4.9: Teorem 4.3.15'e ilişkin şekil.

4.3.4 $\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$ Tipinde İntegraller

Burada koşulumuz

$$R \in \mathbb{C}(z)\,\text{rasyonel}, 0 < \alpha < 1, \lim_{z\to\infty} R(z) = 0$$

ve ayrıca $R(x)$ rasyonel fonksiyonunun pozitif x-ekseninde, dd. $[0, +\infty)$'da kutup yeri olmayacak. p, q polinomlar olmak üzere, $R = p/q$ ise $\deg q \geq \deg p + 1$. Bu koşullarda integralimiz 0 alt sınırında ve $+\infty$ üst sınırında da yakınsaktır.

Teorem 4.3.15. *Yukarıdaki koşullarda $f_0(z) := R(z)/e^{\alpha \log_0 z}$ olmak üzere,*

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f_0, a)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $\varepsilon_0 > 0$ sayısını yeterince küçük ve $r_0 > 0$ sayısını yeterince büyük seçersek, f_0 fonksiyonunun tüm tekil noktaları her $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ve her $r_0 \leq r < +\infty$ için $B := \mathbb{C} \backslash [0, +\infty)$ olmak üzere, $B_{\varepsilon,r} := H(0; \varepsilon, r) \cap B$ bölgesine düşer. β sayısını $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ve $[\varepsilon_0 e^{i\beta}, r_0 e^{i\beta}]$ doğru parçasında f_0'ın tekil noktaları olmayacak biçimde seçelim. Şimdi $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ve $r_0 \leq r < +\infty$ keyfi verilsinler. $t \in [0, \beta]$ için $C_{1r}(t) := re^{it}$ ve $C_{1\varepsilon}(t) := \varepsilon e^{it}$ ve her $t \in [\beta, 2\pi]$ için $C_{2r}(t) := re^{it}$ ve $C_{2\varepsilon}(t) := \varepsilon e^{it}$ olsun (bkz. Şekil 4.9). Bu durumda $C_{1r} C_{2r} = \kappa_r$ ve $C_{1\varepsilon} C_{2\varepsilon} = \kappa_\varepsilon$ olur. Şimdi $\mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$'de logaritmanın $\log_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \ln|z| + i \arg_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \ln|z| + i\varphi$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ holomorf dalını seçersek,

$$f_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{R(z)}{e^{\alpha \log_{-\frac{\pi}{2}}(z)}}, \quad z \in \mathbb{C}_{-\frac{\pi}{2}}$$

fonksiyonumuz sonlu nokta dışında holomorftur. $d_{r,\varepsilon} := \overrightarrow{re^{i\beta}, \varepsilon e^{i\beta}}$ gezisi olmak üzere, $\gamma_1 := \overrightarrow{\varepsilon r} C_{1r} d_{r,\varepsilon} C_{1\varepsilon}^-$ basit kapalı gezisinin içini $B_{\varepsilon,r}^1$ ile gösterelim.

Kalan Teoremi'nden dolayı

$$\int_{\gamma_1} f_{-\frac{\pi}{2}} = \int_{\gamma_1} \frac{R(z)}{e^{\alpha \log_{-\frac{\pi}{2}}(z)}} dz = 2\pi i \sum_{a \in B_{\varepsilon,r}^1} \operatorname{Res}(f_{-\frac{\pi}{2}}, a). \tag{4.23}$$

Benzer biçimde $f_{\frac{\pi}{2}}(z) = R(z)/e^{\alpha \log_{\frac{\pi}{2}}(z)}$ ve $\gamma_2 := C_{2r} \overrightarrow{r\varepsilon} C_{2\varepsilon}^- d_{r,\varepsilon}^-$ basit kapalı gezisinin içi $B_{\varepsilon,r}^2$ olmak üzere,

$$\int_{\gamma_2} f_{\frac{\pi}{2}} = \int_{\gamma_2} \frac{R(z)}{e^{\alpha \log_{\frac{\pi}{2}}(z)}} dz = 2\pi i \sum_{a \in B_{\varepsilon,r}^2} \operatorname{Res}(f_{\frac{\pi}{2}}, a) \tag{4.24}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi $\underline{d_{r,\varepsilon}}$'da $f_{-\frac{\pi}{2}} = f_{\frac{\pi}{2}}$ olduğundan, $\int_{d_{r,e}} f_{-\frac{\pi}{2}} + \int_{d_{r,\varepsilon}^-} f_{\frac{\pi}{2}} = 0$ olur. $f_0(z) := R(z)/e^{\alpha \log_0 z}$ olmak üzere, $a \in B_{\varepsilon,r}^1$ ise $\operatorname{Res}(f_{-\frac{\pi}{2}}, a) = \operatorname{Res}(f_0, a)$, ve $a \in B_{\varepsilon,r}^2$ ise $\operatorname{Res}(f_{\frac{\pi}{2}}, a) = \operatorname{Res}(f_0, a)$ olduğu apaçıktır. Tüm tekil noktalarımız ya $B_{\varepsilon,r}^1$ ya da $B_{\varepsilon,r}^2$'de olduğundan, (4.23) ve (4.24) taraf tarafa toplanırsa, $x > 0$ için $f_{\frac{\pi}{2}}(x) = R(x)/e^{\alpha(\ln|x| + i2\pi)} = R(x)/x^\alpha e^{i2\pi\alpha}$ olduğunu gözetirsek,

$$\int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx + \int_{C_{1r} + C_{1\varepsilon}^-} f_{-\frac{\pi}{2}} + \int_{C_{2r} + C_{2\varepsilon}^-} f_{\frac{\pi}{2}} - e^{-i2\pi\alpha} \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = \sum_{a \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}(f_0, a)$$

elde ederiz. Bu eşitliğin sağ yanı sabittir. Sol yanında ise, bir yandan (4.3.3) ile $r \to +\infty$ için $\int_{C_{1r}} f_{-\frac{\pi}{2}} \to 0$ ve $\int_{C_{2r}} f_{\frac{\pi}{2}} \to 0$, ayrıca $\varepsilon \to 0$ içinse $\int_{C_{1\varepsilon}^-} f_{-\frac{\pi}{2}} \to 0$ ve $\int_{C_{2\varepsilon}^-} f_{\frac{\pi}{2}} \to 0$. Diğer yandan integralimiz yakınsak olduğundan, yukarıdaki eşitlikten $r \to +\infty, \varepsilon \to 0$ limitlerine geçersek savımızı elde ederiz. □

Örnek 4.3.16. $0 < \alpha < 1$ için

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

olduğunu gösteriniz. Teoremin koşulları sağlanır. $f_0(z) = 1/e^{\alpha \log_0 z}(1+z)$ fonksiyonunun yalnızca $z = -1$ noktasında bir basit kutup yeri vardır. $\log_0(-1) = i\pi$ olduğundan,

$$\operatorname{Res}(f_0, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) f_0(z) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{e^{\alpha \log_0 z}} = \frac{1}{e^{\alpha \log_0(-1)}} = \frac{1}{e^{\alpha i \pi}}.$$

Böylece teoremden

$$I = \frac{2\pi i}{e^{i\alpha\pi}(1 - e^{-2\pi i\alpha})} = \frac{\pi}{\frac{1}{2i}(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha})} = \frac{\pi}{\operatorname{Im} e^{i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

elde edilir.

4.3.5 $\int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx$ Tipinde İntegraller

Burada koşulumuz $R(x)$'in $[0,+\infty)$ pozitif x-ekseninde kutup noktası olmayan bir rasyonel fonksiyon ve $\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$ olmasıdır. Bu durumda $\int_0^{+\infty} R(x)\log x dx$ integralimiz yakınsaktır. Yine bir önceki tipteki bölge ve gezileri kullanacağız. Ancak bu kez

$$f_{-\frac{\pi}{2}}(z) := R(z)(\log_{-\frac{\pi}{2}} z)^2, f_0(z) := R(z)(\log_0 z)^2 \text{ ve } f_{\frac{\pi}{2}}(z) := R(z)(\log_{\frac{\pi}{2}} z)^2$$

alırsak, aynı irdelemelerle

$$\int_0^{+\infty} R(x)(\ln x)^2 dx - \int_0^{+\infty} R(x)(\ln x + 2\pi i)^2 dx = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f_0, a),$$

$$-2\int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx - 2\pi i \int_0^{+\infty} R(x)dx = \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f_0, a) \qquad (4.25)$$

elde ederiz. (4.25) denklemi $I = \int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx$ integrali ile $J = \int_0^{+\infty} R(x)dx$ integrali arasında bir ilişki verir.

Teorem 4.3.17. *$R(x)$ rasyonel fonksiyonunun $[0,+\infty)$'da kutup yeri yoksa ve $\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$ ise, eğer J integralini hesaplayabiliyorsak, (4.25) denklemi ile I integralini hesaplarız. Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $R(x) \in \mathbb{R}$ ise, yine bu denklemden*

$$I = \int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(R(z)(\log_0 z)^2, a)\right) \qquad (4.26)$$

$$J = \int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(R(z)(\log_0 z)^2, a)\right)$$

olur.

Örnek 4.3.18. $a > 0$ için üstteki teoremi kullanarak

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a}\ln a$$

olduğunu (4.26) ile görelim. $R(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ teoremin koşullarını sağlar ve her $x \in \mathbb{R}$ için $R(x) \in \mathbb{R}$. Diğer yandan, $f_0(z) = R(z)(\log_0 z)^2$ fonksiyonunun sanal eksen üzerinde $\pm ia$ noktalarında birinci dereceden kutup yerleri vardır. Önerme 4.1.4 ile

$$\operatorname{Res}(f_0, ia) = \frac{(\log_0 ia)^2}{2ia} = \frac{(\ln a + i\frac{\pi}{2})^2}{2ia} = \frac{(\ln a)^2 + i\pi\ln a - \frac{\pi^2}{4}}{2ia},$$

$$\operatorname{Res}(f_0, -ia) = \frac{(\log_0(-ia))^2}{-2ia} = \frac{(\ln a + i\frac{3\pi}{2})^2}{-2ia} = \frac{-(\ln a)^2 - i3\pi\ln a + \frac{9\pi^2}{4}}{2ia},$$

$$\sum_{w\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f_0, w) = \frac{-i2\pi\ln a + 2\pi^2}{2ia} = \frac{-\pi\ln a - i\pi^2}{a} \text{ ve böylece}$$

$$I = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{-\pi\ln a - i\pi^2}{a}\right) = \frac{\pi}{2a}\ln a.$$

Problemler

Problem 4.3.1. $0 \neq a \notin \partial\mathbb{D}$ ise, $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t+a^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-a^2}, & a \in \mathbb{D} \\ \frac{2\pi}{a^2-1}, & a \notin \overline{\mathbb{D}} \end{cases}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4.3.2. $\int_{\kappa_2} \exp(\exp \frac{1}{z})dz = 2\pi e i$ ve $\int_{\kappa_1} \frac{1}{(\sin z)^3} dz = \pi i$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4.3.3. $f_n(x) = \frac{1}{x^{2n}+1}$ ise, $I_n := \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)}$ olduğunu gösteriniz. (f_n) fonksiyonlar dizisi $\mathbb{R}$'de bir f fonksiyonuna yakınsaktır. (f_n) dizisinin f'ye düzgün yakınsak olmadığını, yine de $\lim \int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim f_n$ olduğunu gösteriniz.

Problem 4.3.4. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayınız:

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin x} = 2\pi\sqrt{a^2-b^2}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a^2 > b^2 > 0$.

(ii) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}dx = \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2-b^2})$, $0 < b < a$.

(iii) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1+a\cos x)^2} = \frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}$, $|a| < 1$.

Problem 4.3.5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx$ integralini hesaplayınız.

Problem 4.3.6. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayınız:

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx = \frac{5\pi}{12}$.

(ii) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{1}{16}\pi a^{-3}$, $a > 0$.

Problem 4.3.7. $m > 0$ bir pozitif gerçel sayı olmak üzere,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 4.3.8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+x^2+1}dx$ integralini hesaplayınız.

Problem 4.3.9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)\cosh x}dx$ integralini hesaplayınız.

Problem 4.3.10. $s > 0$ için PV $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos sx}{(1+x)(1+x^2)}dx$ integralini hesaplayınız.

Problem 4.3.11. $0 < \alpha < 1$ için $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)(1+x^2)}dx$ integralini hesaplayınız.

4.4 Kalanların Seri Toplamında Kullanımı

f fonksiyonu $\mathbb{C}$'de sonlu T kümesi dışında holomorf ise, belli koşullarda

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n),\ \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \text{ ve } \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n f(n)$$

tipindeki yakınsak serilerin Kalan Teoremi yardımıyla toplamlarını bulmayı göreceğiz. Stratejimiz şu olacaktır: φ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$'de holomorf, tamsayılarda ise kalanı 1 olan birinci dereceden kutup yerlerine sahip bir fonksiyon olsun. Böyle fonksiyonlar vardır, örneğin $\varphi(z) = \pi\cot\pi z$ fonksiyonu bu özelliğe sahiptir. Bu durumda, eğer f fonksiyonu n noktasında holomorfsa elbette $\operatorname{Res}(f\varphi, n) = f(n)$ olur. Şimdilik f fonksiyonunun her $n \in \mathbb{Z}$ noktasında holomorf olduğunu varsayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$'deki γ_n basit kapalı gezisi orijini pozitif yönde çevrelesin ve ayrıca f fonksiyonunun tekil noktalarından da geçmesin. Gezilerimizi, $d_n := d(\underline{\gamma_n}, 0)$ gezimizin orijine uzaklığı olmak üzere, $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$ ve $\{0, \pm1, \ldots, \pm n\} = \mathbb{Z}\cap \mathrm{I}(\gamma_n)$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda bir n_0 doğal sayısı yeterince büyük seçilirse her $n \geq n_0$ için $T \subset \mathrm{I}(\gamma_n)$ olur. Böylece Kalan Teoremi'nden her $n \geq n_0$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} f\varphi = \sum_{k=-n}^{n} f(k) + \sum_{a\in T}\operatorname{Res}(f\varphi, a) \tag{4.27}$$

Eğer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} f\varphi = 0$ olduğunu biliyorsak, buradan

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} f(k) = -\sum_{a\in T}\operatorname{Res}(f\varphi, a)$$

eşitliğini elde ederiz. $T\cap\mathbb{Z} \neq \emptyset$, dd. f'nin bazı tam sayılarda tekil noktası olmasına izin verirsek, (4.27) denklemi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} f\varphi = \sum_{k=-n,\, k\notin T}^{n} f(k) + \sum_{a\in T}\operatorname{Res}(f\varphi, a)$$

şeklini alır. φ yerine her bir $n \in \mathbb{Z}$ noktasında birinci dereceden bir kutup yeri ve $w_n := \operatorname{Res}(g, n)$ olan bir $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})$ fonksiyonu alırsak, bu kez

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} fg = \sum_{k=-n,\, k\notin T}^{n} f(k)w_k + \sum_{a\in T}\operatorname{Res}(fg, a)$$

olur ve aşağıdaki önerme aşikârdır:

Tıpkı integraller için Cauchy esas değerinde olduğu gibi, eğer limiti varsa

$$\mathrm{CPV}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} a_k$$

olarak tanımlayalım. Bu limite **serimizin Cauchy esas değeri** diyelim. Cauchy esas değerinin olması serimizin yakınsak olması anlamına gelmez. Ancak bu seri yakınsaksa, dd. $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k}$ serileri ayrı ayrı yakınsaksa

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k := \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} a_k.$$

Önerme 4.4.1. *$T \subset \mathbb{C}$ bir sonlu küme, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash T)$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})$ ve g fonksiyonunun her $n \in \mathbb{Z}$ noktasında bir basit kutup yeri olsun ve oradaki kalanı w_n olsun. $\mathbb{C}\backslash(T \cup \mathbb{Z})$'de orijini pozitif yönde çevreleyen γ_n basit kapalı gezileri için $\{0, \pm1, \ldots, \pm n\} = \mathbb{Z} \cap \mathrm{I}(\gamma_n)$ ve $\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n} fg = 0$ ise*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n,\, k\notin T}^{n} f(k)w_k = -\sum_{a\in T}\mathrm{Res}(fg, a).$$

Dolayısıyla, $\sum_{k=-\infty,\, k\notin T}^{+\infty} f(k)w_k$ yakınsaksa

$$\sum_{k=-\infty,\, k\notin T}^{+\infty} f(k)w_k = -\sum_{a\in T}\mathrm{Res}(fg, a). \tag{4.28}$$

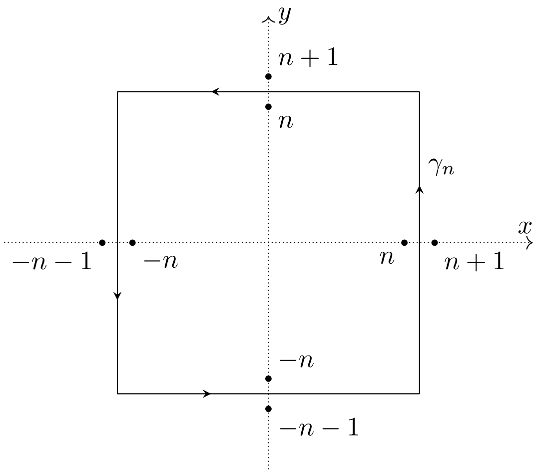
(4.28)'in geçerli olduğu koşullarda ayrıca her $w_k = 1$ ise

$$\sum_{k=-\infty,\, k\notin T}^{+\infty} f(k) = -\sum_{a\in T}\mathrm{Res}(fg, a),$$

eğer her k için $w_k = (-1)^k$ ise

$$\sum_{k=-\infty,\, k\notin T}^{+\infty} (-1)^k f(k) = -\sum_{a\in T}\mathrm{Res}(fg, a).$$

$\varphi(z) = \pi\cot\pi z$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$'de holomorftur ve her $n \in \mathbb{Z}$ noktasında ise kalanı 1 olmak üzere, bir basit kutup noktası vardır. Diğer yandan, $\psi(z) := \pi\csc\pi z$ fonksiyonu da $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$'de holomorftur ve her $n \in \mathbb{Z}$ noktasında ise kalanı $(-1)^n$ olmak üzere, bir basit kutup noktası vardır.



Şekil 4.10: Önerme 4.4.2'ye ilişkin kare yollar.

Önerme 4.4.2. *γ_n gezisi Şekil 4.10'daki gezi olmak üzere, $A, B > 0$ sayıları her $n \geq 1$ doğal sayısı için*

$$\|\cot \pi z\|_{\gamma_n} \leq A \ \ ve \ \ \|\csc \pi z\|_{\gamma_n} \leq B$$

olacak biçimde vardır.

Kanıt. $\coth x$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında azalan olduğundan, γ_n'in yatay kenarları üzerindeki $z = x \pm i(n + \frac{1}{2})$ noktaları için

$$\begin{aligned}
&|\cot \pi z| \\
&= \left| \frac{e^{i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))} + e^{-i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))}}{e^{i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))} - e^{-i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))}} \right| \leq \frac{\left|e^{i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))}\right| + \left|e^{-i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))}\right|}{\left|\left|e^{i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))}\right| - \left|e^{-i\pi(x \pm i(n+\frac{1}{2}))}\right|\right|} \\
&\leq \frac{e^{\pi(n+\frac{1}{2})} + e^{-\pi(n+\frac{1}{2})}}{e^{\pi(n+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(n+\frac{1}{2})}} = \coth \pi(n + \frac{1}{2}) \leq \coth \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\cot(z + \frac{1}{2}\pi) = -\tan z$ ve $\cot(z + n\pi) = \cot z$ olduğunu gözetirsek, γ_n'nin dikey bileşenlerindeki $z = \pm(n + \frac{1}{2}) + iy$ noktaları için

$$|\cot \pi z| = |-\tan \pi i y| = |\tanh \pi y| \leq 1 \leq \coth \frac{3\pi}{2}$$

elde ederiz. $A := \coth \frac{3\pi}{2}$ işimizi görür.

$\csc(z + \frac{1}{2}\pi) = \sec z$ ve $\csc(z + n\pi) = (-1)^n \csc z$ olduğunu gözetirsek, γ_n'nin dikey bileşenlerindeki $z = \pm(n + \frac{1}{2}) + iy$ noktaları için

$$\left| \csc \pi \left[\pm(n + \frac{1}{2}) + iy \right] \right| = |\sec iy| = |\mathrm{sech}\, y| \leq 1.$$

csch fonksiyonu $(0,+\infty)$ aralığında azalan olduğundan $\underline{\gamma_n}$'nin yatay kenarları üzerindeki $z = x \pm i(n+\frac{1}{2})$ noktaları için benzer biçimde

$$|\csc \pi z| \leq \frac{1}{e^{\pi(n+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(n+\frac{1}{2})}} = \operatorname{csch} \pi(n+\frac{1}{2}) \leq \operatorname{csch} \frac{3\pi}{2} < 1$$

olduğundan, $B = 1$ alabiliriz. □

Teorem 4.4.3. *$T \subset \mathbb{C}$ sonlu, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash T)$ ve $R, M > 0$ sayıları her $|z| \geq R$ için $|zf(z)| \leq M$ olacak biçimde varsa*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n,\, k\notin T}^{n} f(k) = -\sum_{a\in T} \operatorname{Res}(\pi f(z) \cot \pi z, a)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n,\, k\notin T}^{n} (-1)^k f(k) = -\sum_{a\in T} \operatorname{Res}(\pi f(z) \csc \pi z, a).$$

Eğer $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ ise, böyle R ve M'nin varlığı aşikârdır.

Kanıt. γ_n gezileri Şekil 4.10'daki geziler olsunlar. γ_n'nin uzunluğu $\mathrm{L}(\gamma_n) = 8(n+\frac{1}{2})$'dir. $g(z) := zf(z)$ olsun. g fonksiyonu $D^*_{R^{-1}}(\infty)$'da sınırlı olduğundan, f fonksiyonunun da g fonksiyonun da $D^*_{R^{-1}}(\infty)$'da tekil noktaları olamaz. $\mathring{g}(z) = g(\frac{1}{z})$ fonksiyonu $D^*_R(0)$ de holomorf ve sınırlı olur; dolayısıyla 0 noktasında kaldırılabilir bir tekil noktası vardır. $\mathring{g}$ fonksiyonunun $D_R(0)$'daki seri açılımı $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ise, g'nin $D^*_{R^{-1}}(\infty)$'daki seri açılımı $\sum_{n\geq 0} a_n z^{-n}$, dolayısıyla orada f'nin açılımı

$$f(z) = \frac{1}{z} g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \cdots, \quad |z| > R. \tag{4.29}$$

Diğer yandan, $\mathring{g}_1(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{n-1}$ olarak tanımlarsak, $\mathring{g}(z) = a_0 + z\mathring{g}_1(z)$ olacağından $\mathring{g}_1(z)$ fonksiyonu $D_R(0)$'da holomorftur, dolayısıyla $R_1 > 0$ sayısını $R_1 > R$ olacak biçimde seçersek, bir pozitif M_1 sayısı ile her $|z| \leq R_1^{-1}$ için $|\mathring{g}_1(z)| \leq M_1$ sağlanır. Böylece, her $|z| \geq R_1$ için $|g_1(z)| = |\mathring{g}_1(1/z)| \leq M_1$ olur. Böylece (4.29) ile

$$\forall z \left(|z| \geq R_1 \Longrightarrow \left| f(z) - \frac{a_0}{z} \right| = \left| \frac{g_1(z)}{z^2} \right| \leq \frac{M_1}{|z^2|} \right). \tag{4.30}$$

Diğer yandan, $h(z) = (\pi \cot \pi z)/z$ fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$'de holomorf, $\mathbb{Z}^*$'da birinci dereceden, 0'da ise ikinci dereceden kutup yerlerine sahiptir. Okur kolayca

$\mathrm{Res}(h,0)=0$ ve $n\in\mathbb{Z}^*$ için $\mathrm{Res}(h,n)=\frac{1}{n}$ olduğunu görür. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n} h &= \int_{\gamma_n}\frac{\pi\cot\pi z}{z}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(h,0)+\sum_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}\mathrm{Res}(h,n)\right)\\ &= 2\pi i\left(0+\sum_{k=-n,\,k\neq 0}^{n}\frac{1}{k}\right)=0.\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_n} f(z)\pi\cot\pi z dz &= \int_{\gamma_n} f(z)\pi\cot\pi z dz - a_0\int_{\gamma_n}\frac{\pi\cot\pi z}{z}dz\\ &= \int_{\gamma_n}\left(f(z)-\frac{a_0}{z}\right)\pi\cot\pi z dz \qquad (4.31)\end{aligned}$$

olur. $n\geq R_1$ seçildiğinde, γ_n gezisinin orijine uzaklığının $n+\frac{1}{2}$ olduğunu da gözetirsek, Önerme 4.4.2 ve (4.30), (4.31) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_n} f(z)\pi\cot\pi z dz\right| &= \left|\int_{\gamma_n}\left(f(z)-\frac{a_0}{z}\right)\pi\cot\pi z dz\right|\\ &\leq \frac{8(n+\frac{1}{2})M_1\pi A}{(n+\frac{1}{2})^2}\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n} f(z)\pi\cot\pi z dz = 0$. Sonuç Önerme 4.4.1 ile gelir. Savın diğer yarısı benzer biçimde kanıtlanır. □

Sonuç 4.4.4. *$T\subset\mathbb{C}$ sonlu, $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus T)$ ve $R,M>0$ sayıları her $z\in\mathbb{C}\setminus D_R(0)$ için $\left|z^2f(z)\right|<M$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, özellikle $f(z)=p(z)/q(z)$ bir rasyonel fonksiyon ve* $\deg q\geq\deg p+2$ *ise*

$$\sum_{k=-\infty,\,k\notin T}^{+\infty} f(k) = -\sum_{a\in T}\mathrm{Res}(\pi\cot\pi z f(z),a)$$

$$\sum_{k=-\infty,\,k\notin T}^{+\infty}(-1)^k f(k) = -\sum_{a\in T}\mathrm{Res}(\pi\csc\pi z f(z),a).$$

Kanıt. Bu koşulda serilerimiz mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsak olduğundan, sav Teorem 4.4.3'ten çıkar. □

Örnek 4.4.5. (1) $f(z)=\frac{1}{z^2}$ fonksiyonu Sonuç 4.4.4'ün koşullarını sağlar. Bu f için $T=\{0\}$ ve f fonksiyonunun 0 noktasında ikinci dereceden bir kutup yeri olduğundan, $g(z)=$

$\frac{1}{z^2}\pi\cot\pi z$ fonksiyonunun ve $h(z)=\frac{1}{z^2}\pi\csc\pi z$ fonksiyonlarının 0 noktasında üçüncü dereceden kutup yerleri vardır. Okur kolayca $\operatorname{Res}(g,0)=-\frac{\pi^2}{3}$ ve $\operatorname{Res}(h,0)=\frac{\pi^2}{6}$ olduğunu görür ve

$$\sum_{k=-\infty,\,k\notin T}^{+\infty} f(k)=\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{3}\ \text{ ve}$$
$$\sum_{k=-\infty,\,k\notin T}^{+\infty}(-1)^k f(k)=\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}=-\frac{\pi^2}{6}$$

olur. $f(-k)=f(k)$ olduğunu gözetirsek, buradan

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\ \text{ ve}$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}\ \text{ ve }\ \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

elde edilir. Açık yazılımla

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\ \text{ ve }\ 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

(2) $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ olmak üzere, $f(z)=\frac{1}{(z-w)^2}$ olsun. Sonuç 4.4.4'ün koşulları sağlanır. f'nin yegâne tekil noktası w ve orada

$$\operatorname{Res}(\pi f(z)\cot\pi z,w)=-\frac{\pi^2}{(\sin\pi w)^2}$$

olduğundan, Sonuç 4.4.4 ile

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-w)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin\pi w)^2}$$

olur. Bu eşitlik **Sinüs Teoremi** olarak bilinir. Burada sol yandaki serimizin yakınsak olduğunu belirtelim. Bu eşitlikte $w=1/2$ alırsak,

$$\frac{\pi^2}{4}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

elde edilir.

Örnek 4.4.6. Kotanjant Teoremi: *Her $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ için*

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty,\,n\neq 0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\tag{4.32}$$

olduğunu savunuyoruz.

$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ sabit tutulsun. n_0 doğal sayısı her $n\geq n_0$ için $|z-n|>n/2$ olacak biçimde seçilirse bu n sayıları için

$$\left|\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right|=\left|\frac{z}{n(z-n)}\right|\leq\frac{2|z|}{n^2}$$

olur, dolayısıyla $\sum_{n=1}^{+\infty}[(z-n)^{-1}+n^{-1}]$ serimiz mutlak yakınsaktır. Benzeri irdelemelerle $\sum_{n=1}^{+\infty}[(z-(-n))^{-1}+(-n)^{-1}] = \sum_{n=1}^{+\infty}[(z+n)^{-1}-n^{-1}]$ serisinin de mutlak yakınsak olduğu görülür. Böylece, (4.32) denklemindeki ilk serimiz mutlak yakınsaktır ve istediğimiz gibi paketlenebilir.

Şimdi her $w \in \mathbb{C}\backslash\{z\}$ için $f(w) := \frac{1}{w-z}$ olarak tanımlansın. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{z\})$. Diğer yandan, $R, M > 0$ sayıları her $|w| \geq R$ için $|wf(w)| \leq M$ olacak biçimde bulunabilir, dd. Teorem 4.4.3'ün koşulları sağlanır. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k-z} = -\operatorname{Res}\left(\frac{\pi\cot\pi w}{w-z}, z\right) = -\pi\cot\pi z.$$

Buradan ise, serimiz mutlak yakınsak olduğundan,

$$-\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{k-z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{z+k}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2z}{z^2-k^2}$$

eşitliği ile savımızı elde ederiz. (4.32)'de terim terime türev alırsak, yeniden Sinüs Teoremi'ni ele ederiz.

Problemler

Problem 4.4.1. Sinüs Teoremi'nden yararlanarak $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(z-n)^{-3}$ serisinin $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$'deki toplamını bulunuz.

Problem 4.4.2. $a \notin i\mathbb{Z}$ ise

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth\pi a - \frac{1}{a^2}\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 4.4.3. $a, b \notin \mathbb{Z}$ ise

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-a)(n-b)} = -\pi^2\frac{\cot\pi a - \cot\pi b}{\pi a - \pi b}$$

olduğunu gösteriniz.

Problem 4.4.4. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2k}} = -\frac{1}{2}\frac{(-1)^k(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(2k)!}$ (B_m Bernoulli sayıları).

Problem 4.4.5. Sonuç 4.4.4'ün koşullarını sağlayan beş farklı $f(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$ fonksiyonunu kendiniz belirleyip, onlar için $\sum_{k=-\infty,\, k\notin T}^{+\infty} f(k)$ ve $\sum_{k=-\infty,\, k\notin T}^{+\infty}(-1)^k f(k)$ serilerinin toplamını bulunuz.

5. Önbilgiler

5.1 Kümeler

X ve Y herhangi iki küme olmak üzere, X kümesinin her ögesi Y'nin de bir ögesiyse, X kümesi Y kümesinin bir **altkümesidir** denir ve bu $X \subset Y$ veya $Y \supset X$ ile gösterilir. Her küme kendisinin bir altkümesidir, dolayısıyla $\subset$ gösterimi eşitliği dışlamaz. $\mathcal{P}(X) := \{A | A \subset X\}$ kümesine X kümesinin **güç kümesi** denir. $\mathcal{P}^*(X) := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. $A \subset X$ için $A^c := X \setminus A$ kümesine A kümesinin X kümesindeki **tümleyeni** denir. X kümesinin bir $\mathfrak{P}$ **parçalanışından** aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathfrak{P} \subset \mathcal{P}^*(X)$ ailesi anlaşılır:

$$X = \bigcup \mathfrak{P}, \text{ve } \forall P, Q \in \mathfrak{P} \ \ (P \neq Q \Longrightarrow P \cap Q = \emptyset)\,.$$

Ayrık birleşimleri vurgulamak için $\sqcup$ imini kullanacağız; örneğin $\mathfrak{P}$ bir parçalanışsa ve bunu vurgulamak istediğimizde $\bigcup \mathfrak{P}$ yerine $\bigsqcup \mathfrak{P}$ yazacağız. X, Y kümeler olmak üzere, X'ten Y'ye bir f fonksiyonunu $f : X \to Y$ veya $X \xrightarrow{f} Y$ ile göstereceğiz. Ayrıca,

$$\mathcal{F}(X, Y) := \{f \mid f : X \to Y\}\,.$$

olarak tanımlansın. Bir fonksiyonun **birebir**, **örten** olması bilinen kavramlardır. Birebir ve örten dönüşümlere kısaca **tameşleme** diyeceğiz. f fonksiyonunun $Z \subset X$ altkümesine kısıtlanışını $f|Z$ veya f_Z ile göstereceğiz.

$\forall x \in X \ : \mathsf{Id}_X(x) := x$ olarak tanımlanan Id_X dönüşümüne X kümesinin **özdeşlik dönüşümü** denir. X belliyse, Id_X yerine Id yazacağız. X, Y kümeler, $a \in X$, $b \in Y$ olmak üzere, $f : (X, a) \to (Y, b)$ gösterimi şu anlama gelecektir: $f : X \to Y$ ve $f(a) = b$.

$\mathbb{N}$ ile eşgüçlü olan kümelere **sayılabilir sonsuz** kümeler denir. Sonlu veya sayılabilir sonsuz kümelere kısaca **sayılabilir** kümeler denir. Çokluklara ilişkin olarak en çok baş vuracağımız teorem şudur: *Sayılabilir çoklukta sayılabilir kümelerin birleşimi de sayılabilir.* Bunun basit bir sonucu olarak $A_1, \ldots, A_n$ sayılabilir kümelerse $A_1 \times \cdots \times A_n$ kümesi de sayılabilir. Özellikle her $k \geq 1$ doğal sayısı için $\mathbb{N}^k$ ve $\mathbb{Q}^k$ kümeleri sayılabilir kümelerdir.

5.2 Topoloji

5.2.1 Topolojik Uzaylar

Okurun topolojik uzaylar ve bu uzayların temel kavramlarını bildiğini varsayıyoruz. X topolojik uzayımızın topolojisini vurgulamak gerektiğinde $(X, \mathcal{T})$ gösterimini kullanacağız. Her $Y \subset X$ için Y'nin X'teki **kapanışı** $\overline{Y}$ ile ve **içi** ise $\mathring{Y}$ ile gösterilecektir. $\mathring{Y}$'nin ögelerine Y kümesinin **iç noktaları** denir. $\overline{Y} = X$ ise, Y altkümesi X uzayında **yoğundur** denir. Sayılabilir yoğun altkümeleri olan topolojik uzaylara **ayrılabilir** uzaylar denir.

$(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. $x \in X$ ve $U \subset X$ olmak üzere, bir $A \in \mathcal{T}$ açık kümesi $x \in A \subset U$ olacak biçimde bulunabiliyorsa U kümesi x noktasının topolojik uzayımızda bir **komşuluğudur** (**yöresidir**) denir. Benzer biçimde $Y \subset X$ **altkümesinin** bir V **komşuluğundan** bir $A \in \mathcal{T}$ ile $Y \subset A \subset V$ koşulunu sağlayan V kümelerini anlayacağız. $\mathcal{U}(x) := \{U | U, x\text{'in bir komşuluğudur}\}$ ailesine x noktasının **komşuluk sistemi** denir. $x \neq y$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$ için $U \in \mathcal{U}(x)$ ve $V \in \mathcal{U}(y)$ komşulukları $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde bulunabiliyorlarsa topolojik uzayımız bir **Hausdorff uzayıdır** denir. Analizde Hausdorff uzaylarımız, limitin tekliğini garantilediğinden, önemlidir.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $Y \subset X$ ise, $\mathcal{T}_Y := \{Y \cap A | A \in \mathcal{T}\}$ ailesi Y kümesinde bir topolojidir. Ayrıca belirtilmedikçe her Y alt kümesi $\mathcal{T}_Y$ **göreli** (veya **iz**) **topoloji**siyle alınacaktır.

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}$ kümesine A kümesinin **sınırı** ve ∂A kümesinin ögelerine ise A kümesinin **sınır noktaları** denir. Tanım gereği ∂A kümesi kapalıdır ve $\partial A = \partial A^c$ olur. $b \in X$ noktasına her $U \in \mathcal{U}(b)$ için $A \cap (U \backslash \{b\}) \neq \emptyset$ ise A kümesinin bir **yığılma** (veya bir **limit**) **noktasıdır** denir; burada $b \in A$ olması gerekmez. $a \in A$ ve a noktası A kümesinin bir yığılma noktası değilse a noktası A kümesinin bir **ayrık** noktasıdır denir.

Önerme 5.2.1. *$(X, \mathcal{T})$ Hausdorff uzayı, $A \subset X$ ve $b \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *b ögesi A'nın bir yığılma noktasıdır.*

(ii) *b'nin her komşuluğunda A kümesinin sonsuz ögesi vardır.*

$f : X \to Y$ bir tameşleme ve hem f hem de f^{-1} sürekli iseler f bir **topolojik dönüşümdür** veya bir **homeomorfizmdir** denir. X'ten X'e topolojik dönüşümlerin kümesini $\mathrm{Top}X$ ile gösterelim.

Bir $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ ailesine, her $U \in \mathcal{T}$ için bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ailesini $U = \bigcup \mathcal{A}$ olacak biçimde bulabiliyorsak $\mathcal{T}$ **topolojisinin bir bazıdır** denir. Bir $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ derlemine her $U \in \mathcal{U}(x)$ için $B \subset U$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}(x)$ bulunabiliyorsa x noktasının bir **komşuluk bazıdır** denir.

Dizi ve **dizinin limiti** bilinen kavramlardır. X uzayı bir Hausdorff uzayıysa, bir dizinin birden fazla limiti olamaz, dd. Hausdorff uzaylarında dizilerin limitleri tek olarak belirlidir! X uzayımız Hausdorff ve a ögesi (x_n) dizisinin limitiyse, bu durum

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n, \ a = \lim x_n \text{ veya } x_n \to a$$

gösterimlerinden biri ile dile getirilir. X, Y topolojik uzaylar, $A \subset X$, x_0 noktası A'nın bir limit noktası ve $y_0 \in Y$ olsun. $x_0 \notin A$ olabilir! $f : X \to Y$ olsun.

$$\lim_{x\in A, x\to x_0} f(x) = y_0 :\Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{U}(f(y_0)) \ \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ f((U\backslash\{x_0\}) \cap A) \subset V$$

olarak tanımlanan kavram "x **noktası** A**'da kalmak üzere** x_0 noktasına yaklaşırken f **fonksiyonunun limiti** y_0'dır" diye dillendirilir. Bu tanımda f fonksiyonunun x_0 noktasında tanımlı olması gerekmez; tanımlı bile olsa bu tanımda $f(x_0)$ değeri rol almaz! Eğer $A = X$ ise yalın biçimde $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ yazılır. Y bir Hausdorff uzayı ise, y_0 varsa tek olarak belirlidir.

Uzlaşma: $\mathbb{R}$'deki aralıkları gösterirken $\langle$ imi, (ve [imlerinden herhangi birini, benzer şekilde $\rangle$ imi ise) ve] imlerinden herhangi birini göstersin.

$X = \mathbb{R}$ ve $A = \langle a, b\rangle$ **genel aralık** [1] özel durumunda

$$f\,(a+) := \lim_{x\in A, x\to a} f(x) \ \ \textbf{sağdan limit} \text{ ve}$$
$$f\,(b-) := \lim_{x\in A, x\to b} f(x) \ \ \textbf{soldan limit}$$

kavramlarına ulaşırız.

Teorem 5.2.2. *X ve Y topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ ve $a \in X$ olsun.*

(i) *f, a'da süreklidir $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*

(ii) *f fonksiyonu a'da sürekliyse, X'teki her $x_n \to a$ dizisi için $f(x_n) \to f(a)$.*

(iii) *a noktasının sayılabilir bir komşuluk bazı varsa (ii)'nin tersi de doğrudur, dd. X'teki $x_n \to a$ koşulunu sağlayan her dizi için $f(x_n) \to f(a)$ ise, f fonksiyonu a noktasında süreklidir.*

Sonuç 5.2.3. ***Dizi Ölçütü:*** *X, Y topolojik uzayları olsun ve $a \in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluk bazı bulunsun. Bu durumda $f : X \to Y$ fonksiyonun a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $x_n \to a$ koşulunu sağlayan her dizi için $f(x_n) \to f(a)$ olmasıdır.*

[1] Bu gösterim uç noktaları a ve b olan tüm aralıkları belirtir; a ve b noktaları birbirinden bağımsız olarak A kümesinde olabilirler veya olmayabilirler.

Sürekli fonksiyonların sürekli genişlemeleri bağlamında aşağıdaki önsav geçerlidir:

Önsav 5.2.4. *X, Y topolojik uzaylar, $A, B \subset X$ kapalı altkümeler ve $f : X \to Y$ olsun. $f|A$ ve $f|B$ sürekli ise, $f|A \cup B$ de süreklidir.*

Çarpım Topolojisi: $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ topolojik uzayları verilsinler. $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ olsun ve her $1 \leq i \leq n$ için $\pi_i : X \to X_i$ dönüşümü, $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i$ ile tanımlanan i.nci izdüşüm fonksiyonu olsun. X üzerinde her bir π_i izdüşümünü sürekli kılan topolojilerin en kabasına X'in **çarpım topolojisi** denir. $\prod_{i=1}^n X_i$'yi daima çarpım topolojisiyle alacağız.

Önerme 5.2.5. *Y herhangi bir topolojik uzay olmak üzere,*

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : Y \to \prod_{i=1}^n X_i$$

dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul her bir $f_i : Y \to X_i$ dönüşümünün sürekli olmasıdır.

Bölüm Topolojisi: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve R ise X'te bir denklik bağıntısı olsun. Bir $x \in X$ ögesinin R'ye göre denklik sınıfını $[x]$ ile gösterelim ve $X/R = \{[x]|x \in X\}$ olsun. $q : X \to X/R$ $(x \mapsto [x])$ kanonik dönüşüm olsun. X/R'de q'yu sürekli kılacak topolojiler vardır, örneğin basit topoloji. Bu durumda q için X/R üzerindeki topolojiler arasında ayrıcalıklı olan q'yu sürekli kılanların en incesidir; bu topolojiye X/R'nin **bölüm topolojisi** denir. Bu topolojiyi $\mathcal{T}^*$ ile gösterelim. Yalın olarak $[x]$ yerine x^* ve X/R yerine X^* yazarsak, okur kolayca $\mathcal{T}^* = \{U^* | U^* \subset X^*, \, q^{-1}(U^*) \in \mathcal{T}\}$ olduğunu gösterebilir.

Önerme 5.2.6. *X topolojik uzayında R bir denklik bağıntısı olsun. X/R bölüm topolojisiyle alınsın. Y herhangi bir topolojik uzay olmak üzere, bir $g : X/R \to Y$ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $g \circ q$ dönüşümünün sürekli olmasıdır.*

$f : X \to Y$ bir örten dönüşüm ve X bir topolojik uzay olsun. Her $x_1, x_2 \in X$ için ancak ve ancak $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 R x_2$ olarak tanımlansın. Elbette R bir denklik bağıntısıdır. $q : X \to X/R$ bölüm dönüşümü olmak üzere, $g([x]) := f(x)$ ile tanımlanan $g : X/R \to Y$ dönüşümü bir tameşlemedir. Dolayısıyla, X'in topolojisi $\mathcal{T}$ ise, $g(\mathcal{T}^*)$ ailesi Y'de bir topolojidir; buna **f'nin Y'de tanımladığı topoloji** denir.

5.2.2 Metrik Uzaylar

X herhangi bir küme olmak üzere, bir $d : X\times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna $x, y, z \in X$ için (1) $d(x,y) = d(y,x)$, (2) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ve (3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ise, X kümesinde bir **metriktir (uzaklıktır)** denir. d, X üzerinde bir metrikse (X,d) ikilisine bir **metrik uzay** denir. Eğer d dönüşümü, (2) yerine ondan daha zayıf olan, her $x \in X$ için $d(x,x) = 0$ koşulunu sağlıyorsa X'te bir **yarımetriktir** denir[2]. (X,d) bir metrik uzay ve $Y \subset X$ ise, $d_Y := d|Y \times Y$ fonksiyonu Y'de bir metriktir. Ayrıca belirtilmedikçe böyle durumlarda (Y, d_Y) metrik uzayına geçiş yapacağız ve d_Y yerine yalın olarak yine d yazacağız.

X kümesindeki her d metriği bu kümede bir $\mathcal{T}_d$ topolojisi tanımlar. Her $a \in X$ ve her $0 < r \in \mathbb{R}$ için

$$B_r(a) := \{x \in X | d\,(x,a) < r\} \text{ ve } \overline{B}_r(a) := \{x \in X | d\,(x,a) \leq r\}$$

olarak tanımlanan kümelere sırasıyla a merkezli r yarıçaplı **açık** ve **kapalı toplar** diyeceğiz. $B^*_r(a) := B_r(a)\backslash\{a\}$ ve $\overline{B}^*_r(a) := \overline{B}_r(a)\backslash\{a\}$ kümelerine **merkezsiz toplar** diyelim. $U \subset X$ olmak üzere,

$$U \in \mathcal{T}_d :\iff \forall a \in U \exists r = r(a) > 0 \; B_r(a) \subset U$$

ile tanımlanan $\mathcal{T}_d$ ailesi X kümesinde bir topolojidir. (X,d) metrik uzayı, ayrıca belirtilmediği sürece daima $\mathcal{T}_d$ topolojisiyle ele alınacaktır. $(X, \mathcal{T}_d)$ uzayında $B_r(a)$ açık ve $\overline{B}_r(a)$ kapalıdır.

X'te bir d yarımetriği verildiğinde $B_r(x)$ açık topları ve $\mathcal{T}_d$ topolojisi benzer biçimde tanımlanır. Eğer $x, y \in X, x \neq y$ ve $d(x,y) = 0$ ise, x ve y noktalarını açık kümelerle ayıramayız, dolayısıyla bu uzaylarda limitin tekliğinden söz edemeyiz! Bu kusurlarına karşın yine de Kısım 1.5'te yarımetriklerle çalışacağız. Metrik uzayların Hausdorff uzayları olmaları bizim için çok önemlidir; bu uzaylarda limitlerin tekliğinden bahsedebiliriz ve dizi ölçütü geçerlidir.

Önerme 5.2.7. (X,d) *bir metrik uzay,* $A \subset X$ *ve* $b \in X$ *olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) b *ögesi* A*'nın bir yığılma noktasıdır.*

(ii) $\lim a_n = b$ *olacak biçimde, terimleri ikişer ikişer birbirinden ve* b*'den farklı bir* $(a_n) \subset A$ *dizisi vardır.*

(iii) b*'nin her komşuluğunda* A *kümesinin sonsuz ögesi vardır.*

(X,d), $(X'd')$ metrik uzaylar ve $f : X \to X'$ ise, f fonksiyonunun $a \in X$ *noktasında sürekli* olması

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon(a) > 0 \; \forall x \in X \; \big(d(x,a) < \delta_\varepsilon(a) \Longrightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon\big) \qquad (5.1)$$

[2] Yarımetriklerde $x \neq y$ için $d(x,y) = 0$ olabilir!

ifadesine denktir. Burada $\delta_\varepsilon(a)$ sayısı hem ε hem de a'ya bağlıdır. ε verildiğinde bir δ_ε pozitif sayısının (5.1) *her* $a \in X$ için geçerli olacak biçimde seçilebilmesi çok *özel* bir durumdur ve bunu ayrı bir adla belirteceğiz.

Tanım 5.2.8. $(X, d), (X', d')$ metrik uzaylar ise, aşağıdaki koşul sağlandığında $f : X \to X'$ fonksiyonu (d, d' metriklerine göre) **düzgün süreklidir** denir:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x, y \in X \; \big(d(x, y) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon\big)$$

Bu tanım elbette seçilen metriklere bağımlıdır; ancak söz konusu metrikler biliniyor varsayıp kısaca düzgün sürekli fonksiyonlardan söz edeceğiz; burada δ'nın yalnızca ε'a bağlı olduğunu vurgulayalım. Tanımdaki verilerle her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \omega_f(\delta) &:= \sup\{d'(f(s), f(t)) \mid s, t \in X \text{ ve } d(s, t) \le \delta\} \\ \omega_f &:= \sup\{d'(f(s), f(t)) \mid s, t \in X\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. $0 \le \omega_f(\delta) \le \omega_f \le +\infty$ ve $\omega_f(\delta)$'ya f f**onksiyonunun** X'**teki** δ**-salınımı**, ω_f'ye ise kısaca f'nin X'**teki salınımı** denir. Bilindiği gibi f fonksiyonunun X'te düzgün sürekli olması $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$ olmasına denktir.

(X, d) bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Her $x \in X$ için $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$ ile tanımlanan büyüklüğe x **noktasının** A **kümesine uzaklığı** denir; ancak burada, yadırgansa da tutarlı olan $\inf \emptyset = +\infty$ uzlaşmamız geçerlidir. $A \neq \emptyset$ ise, her $x, y \in X$ için

$$|d\,(x, A) - d\,(y, A)| \le d(x, y)$$

Dolayısıyla, $f_A(x) := d(x, A)$ ile tanımlanan $f_A : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $A \neq \emptyset$ için düzgün süreklidir.

$d(B, A) := \inf_{b \in B} d(b, A) = \inf_{a \in A, b \in B} d(b, a)$ büyüklüğüne B **kümesinin** A **kümesine uzaklığı** denir. $\delta(A) := \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$ olsun. $\delta(A)$'ya A kümesinin **çapı** denir. Burada tanım gereği $\delta(\emptyset) = -\infty$ alacağız. $\delta(A) < +\infty$ ise A kümesi **sınırlıdır** denir. A kümesinin sınırlı olması bir $B_r(a)$ topunun içinde olmasıyla eş anlamlıdır.

Not. $U \subset \mathbb{R}^2$ açık, $a \in U$ ve $r := d(a, \partial U)$ olsun. $U = \mathbb{R}^2$ ise $r = +\infty$ ve $U \neq \mathbb{R}^2$ ise $0 < r < +\infty$ olur. $D_r(a)$ açık dairesi a merkezli açık dairelerden U'nun içine düşenlerin en büyüğüdür. $r < +\infty$ durumunda $C_r(a)$ çemberi ∂U sınırının en az bir noktasını içerir. Bu, kitabımızda sıkça karşılaşacağımız bir durumdur.

Tanım 5.2.9. (X, d) metrik uzayı ve $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için bir n_ε doğal sayısı her $m, n \ge n_\varepsilon$ doğal sayıları için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa (x_n) dizisi (X, d) metrik uzayında bir **Cauchy dizisi**dir denir. X metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaksa X uzayı **tam**dır denir.

X kümesinde d ve d' gibi iki metrik tanımlanmış olsun. $c, c' > 0$ sayıları her $x, y \in X$ için
$$cd(x,y) \leq d'(x,y) \leq c'd(x,y)$$
olabilecek biçimde bulunabiliyorsa d ve d' metrikleri birbirine **denktir** denir. Aşağıdaki önsavı kanıtlamayı okura bırakıyoruz:

Önsav 5.2.10. *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere, her x, y için*
$$\mu(x,y) := \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$$
ile tanımlanan μ de X'te bir metriktir. d ve μ metrikleri denktirler, dolayısıyla X'te aynı topolojiyi tanımlarlar. Ayrıca, X'teki bir (x_n) dizisinin d için bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul μ'ye göre bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Teorem 5.2.11 (Cantor). *(X,d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul $\lim \delta(K_n) = 0$ koşulunu sağlayan boştan farklı kapalı kümelerin her daralan $K_0 \supset K_1 \supset \cdots$ dizisi için $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ arakesitinin bir tek noktadan oluşmasıdır.*

Bazen X ve Y metrik uzaylarında çalışırken her iki uzayın metriğini aynı d imi ile göstereceğiz. Örneğin $f : X \to Y$ ve $a, b \in X$ için "$d(a,b) < \delta \Longrightarrow d(f(a), f(b)) < \varepsilon$" gibi bir ifade ile karşılaşabiliriz ve burada elbette $d(a,b)$'de X'in metriği, $d(f(a), f(b))$'de ise Y'nin metriği söz konusudur.

$\mathbb{R}^n$ uzayımızdaki $\|\cdot\|$ Öklid normu bize bu uzayda $d(x,y) := \|x-y\|$ ile tanımlanan bir metrik verir; bu metriğe $\mathbb{R}^n$ uzayının **Öklid metriği** denir. Ayrıca belirtilmedikçe $\mathbb{R}^n$ daima Öklid metriği ile alınacaktır. Öklid metriğinin tanımladığı topolojiye $\mathbb{R}^n$**'in doğal topolojisi** denir. $r > 0$ için
$$S_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\}$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R}^n | x = a + t\,(b-a)\,,\ 0 \leq t \leq 1\}$$
olarak tanımlanır.

Bir küme üzerindeki farklı metrikler aynı topolojiyi tanımlayabilirler. Örneğin $\mathbb{R}^n$ üzerideki $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$ veya $\|x\|_m := \max_{1\leq k\leq n} \|x_k\|$ normları aracılığı ile $\mathbb{R}^n$'de tanımlanan $d_1(x,y) := \|x-y\|_1$ ve $d_m(x,y) := \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k|$ metrikleri, $\mathbb{R}^n$ üzerinde yine Öklid topolojisini tanımlarlar.

$\mathbb{R}^n$'nin doğal topolojisinin $\overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n}$'deki çarpım topolojisi olduğu kolayca görülür; burada her $\mathbb{R}$ çarpanı doğal topolojiyle alınacaktır. Dolayısıyla, $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,
$$\lim_{m\to+\infty} x^{(m)} = a \Longleftrightarrow \lim_{m\to+\infty} x_k^{(m)} = a_k,\ k = 1, \ldots, n.$$

Şimdi $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $f : X \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ olsun. Önerme 5.2.5'ten dolayı f'nin sürekli olması, her bir f_k fonksiyonun sürekli olmasına denktir.

$n = 2$ *durumu*: Bu durumda $B_r(a)$, $B_r^*(a)$, $\overline{B}_r(a)$ ve $S_r(a)$yerine sırasıyla $D_r(a)$, $D_r^*(a)$, $\overline{D}_r(a)$ ve $C_r(a)$ yazacak ve bunları sırasıyla a merkezli r yarıçaplı **açık daire, merkezsiz açık daire, kapalı daire** ve **çember** olarak adlandıracağız.

$n = 1$ *durumu*: Bu durumda $\|x\| = |x|$ olur ve$B_r(a)$, $B_r^*(a)$, $\overline{B}_r(a)$ yerine $I_r(a)$, $I_r^*(a)$ ve $\overline{I}_r(a)$ yazacak ve bunları sırasıyla a merkezli r yarıçaplı **açık, merkezsiz açık** ve **kapalı aralıklar** olarak adlandıracağız.

5.2.3 Kompaktlık

Bilindiği gibi X topolojik uzayının K altkümesine, her açık örtüsünün bir sonlu altörtüsü varsa **kompakt** denir.

Önsav 5.2.12. *Kompakt uzayların sonsuz altkümelerinin en az bir yığılma noktası vardır.*

Önerme 5.2.13. *Kompakt metrik uzayların sayılabilir yoğun altkümeleri vardır.*

Kanıt. (X, d) bir kompakt metrik uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}^*$ sayısı için $\mathcal{U}_n := \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{x \in X}$ şeklinde tanımlanan örtü, uzayımızın bir açık örtüsüdür. X kompakt olduğundan, her $\mathcal{U}_n$'in bir $\mathcal{S}_n$ sonlu alt örtüsü vardır. $\mathcal{S}_n$'deki topların merkezlerinin kümesine A_n dersek, $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ kümesi sayılabilirdir ve açıkça X'te yoğundur. □

$Y \subset X$ kümesinin kompakt olmasından, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ uzayının kompakt olması anlaşılacaktır. Bu ise şuna denktir: $Y \subset \bigcup \mathcal{A}$ olan her $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_X$ örtüsünün $Y \subset \bigcup \mathcal{B}$ koşulunu sağlayan bir sonlu $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ alt örtüsü vardır. *Hausdorff uzayların kompakt altkümeleri kapalıdır; ayrıca kompakt uzayların kapalı altkümeleri de kompakttır.*

Bir (X, d) metrik uzayında her dizinin yakınsak olan bir altdizisi varsa metrik uzayımız **dizisel kompakttır** diyelim.

Önsav 5.2.14 (Lebesgue Örtü Önsavı)**.** *(X, d) metrik uzayımız dizisel kompaktsa X'in her açık $\mathcal{U}$ örtüsüne karşılık bir $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{U}) > 0$ sayısı her $x \in X$ için en az bir $U = U(x) \in \mathcal{U}$ açık kümesi $B_\varepsilon(x) \subset U$ olacak biçimde vardır.*

Teorem 5.2.15. *(X, d) metrik uzayında aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *X kompakttır.*

(ii) *X'te her sonsuz kümenin bir yığılma noktası vardır.*

(iii) *X dizisel kompakttır.*

(iv) *X tamdır ve her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık X'i örten sonlu sayıda ε-yarıçaplı açık toplar vardır, dd.*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_1, \ldots, x_n \in X \left(X = \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x_k) \right)$$

*Kısaca X tam ve **tümel sınırlıdır**.*

Teorem 5.2.16 (Heine-Borel)**.** *$K \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul K kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Teorem 5.2.17. *X ve X' sırasıyla metrikleri d, d' olan iki metrik uzay olsun. Eğer X kompaktsa her sürekli $f : X \to X'$ fonksiyonu düzgün süreklidir.*

Teorem 5.2.18. *X ve X^* topolojik uzaylar, $f : X \to X^*$ sürekli ve $Y \subset X$ olsun. Y kompaktsa $f(Y)$ de kompakttır.*

Teorem 5.2.19. *$X \neq \emptyset$ kompakt topolojik uzaysa, her sürekli $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu maksimum ve minimumunu alır.*

Önsav 5.2.20. *X bir metrik uzay, $C, K \subset X$, $C \cap K = \emptyset$, C kapalı, K kompakt ise $d(K, C) > 0$.*

Tek Nokta Kompaktlaştırması: Bir topolojik uzaya her noktasının bir kompakt komşuluğu varsa **yerel kompakttır** denir. $(X, \mathcal{T})$ kompakt olmayan herhangi bir yerel kompakt Hausdorff topolojik uzay ve ∞ ise X'te olmayan herhangi bir öge olsun. $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ ve her $K \subset X$ kompakt altkümesi için $K_\infty^c := (X \backslash K) \cup \{\infty\}$ olmak üzere,

$$\mathcal{T}_\infty := \mathcal{T} \cup \{K_\infty^c \,|\, K \subset X \,\text{kompakt}\}$$

olarak tanımlansın. $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$'un bir kompakt Hausdorff uzayı ve $\mathcal{T}_\infty \cap X = \mathcal{T}$ olduğunu görmeyi okura bırakıyoruz. Bir $A \subset X_\infty$ için bu kümenin $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ uzayındaki sınırını $\partial_\infty A$ ile göstereceğiz. Eğer $A \subset X$ ise bu tür altkümeler için ∂A ve $\partial_\infty A$ sınırları söz konusudur ve bunların örtüşmesi gerekmez! Örneğin bizi ilgilendiren, doğal topolojisiyle alınmış $\mathbb{R}^2$ için $\partial \mathbb{R}^2 = \emptyset$ buna karşın $\partial_\infty \mathbb{R}^2 = \{\infty\}$.

Önerme 5.2.21. *$(X, \mathcal{T})$ yerel kompakt ise, $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ kompakttır.*

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $Z \subset Y \subset X$ olsun. Z kümesi $(Y, \mathcal{T}_Y)$'de açık (veya kapalı) ise, $(X, \mathcal{T})$'de de açık (veya kapalı) olması gerekmez. Buna karşın doğrudan tanımdan görülen aşağıdaki önerme geçerlidir; bir anlamda kompaktlık bir mutlak kavramdır:

Önerme 5.2.22. *$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $Z \subset Y \subset X$ olsun. Z'nin $(Y, \mathcal{T}_Y)$ uzayında kompakt olması, $(X, \mathcal{T})$'de kompakt olmasına denktir.*

$U \subseteq X$ bir açık küme ve $M \subset U$ olsun. Bir kompakt K kümesi $M \subseteq K \subset U$ olacak biçimde bulunabiliyorsa M kümesine U'da **göreceli kompakt** diyecek ve bunu $M \Subset U$ ile göstereceğiz.

5.2.4 Bağlantılılık

Bir $\emptyset \neq A \subsetneq X$ altkümesi hem açık hem de kapalı olacak biçimde bulunamıyorsa X topolojik uzayımız **bağlantılıdır** denir. $(Y, \mathcal{T}_Y)$ uzayı bağlantılı ise $Y \subset X$ altkümesi X uzayının bir bağlantılı altkümesidir denir.

X bir bağlantılı uzay ve $\varphi(x)$ ise bu uzayın noktalarına ilişkin bir önerme olsun. X evreninde $\forall x \varphi(x)$ önermesini kanıtlamak istediğimizde izlenen yol genelde şudur: $Y := \{x \in X | \varphi(x)\}$ olarak tanımlanır ve (i) En az bir $x_0 \in X$ için $\varphi(x_0)$ olduğu, dd. $Y \neq \emptyset$ olduğu kanıtlanır, (ii) Y'nin hem açık hem de kapalı olduğu kanıtlanır. Bu durumda $Y = X$ olur.

Teorem 5.2.23. *X ve X^* topolojik uzaylar, $f : X \to X^*$ sürekli ve $Y \subset X$ olsun. Y bağlantılı ise, $f(Y)$ de bağlantılıdır.*

Bir topolojik uzayın açık ve bağlantılı olan kümelerine kısaca **bölge** denir. Kompleks analizde bölgeler çok önemlidir.

Önsav 5.2.24. *$Y \subset X$ bağlantılı bir altküme ve $Y \subset Z \subset \overline{Y}$ ise Z'de bağlantılıdır.*

X uzayının $\subset$ bağıntısına göre maksimal olan bağlantılı altkümelerine X'in **bağlantılı bileşenleri** denir. $C \subset X$ kümesinin bir bağlantılı bileşen olması için şu iki koşulun sağlanması gerek ve yeterlidir: (i) C bağlantılıdır, (ii) $C \subset D \subset X$ ve D bağlantılı ise, $D = C$ olur. Önsav 5.2.24'ten dolayı, bağlantılı bileşenler kapalıdırlar.

Önerme 5.2.25. *$M \neq \emptyset$ olmak üzere, her $m \in M$ için $B_m \neq \emptyset$ ve B_m, X uzayının bir bağlantılı altkümesi olsun. $\bigcap_{m \in M} B_m \neq \emptyset$ ise $\bigcup_{m \in M} B_m$ de bağlantılıdır.*

Sonuç 5.2.26. *X topolojik uzayının her $n \in \mathbb{N}$ için bağlantılı bir A_n altkümesi hep $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ olacak biçimde verilmişse $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ de bağlantılıdır.*

X topolojik uzayının bir a noktası verilsin. $\{a\}$ bağlantılıdır. Bu uzayın a noktasını içeren tüm bağlantılı alt kümelerinin birleşimini $C(a)$ ile gösterelim. Önerme 5.2.25'ten dolayı $C(a)$ bağlantılıdır ve X uzayının bir bağlantılı bileşenidir. $C(a)$'ya **a noktasının X'teki bağlantılı bileşeni** denir. $a, b \in X$ için ya $C(a) = C(b)$ ya da $C(a) \cap C(b) = \emptyset$. Dolayısıyla, $\{C(a)\}_{a \in X}$ derlemi X uzayının kapalı ve bağlantılı bileşenlerle bir parçalanışıdır.

Tanım 5.2.27. $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ ve X bir topolojik uzay olmak üzere, herhangi bir $\gamma : [a, b] \to X$ sürekli fonksiyonuna **X'te bir (sürekli) gezi,** $\underline{\gamma} := \gamma([a, b])$ kümesine γ gezisinin **izi** veya **yolu** denir[3]. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla γ gezisinin **başlangıç** ve **son** (veya **bitiş**) noktaları denir; $\gamma(a), \gamma(b)$ noktalarına

[3]Yol yerine **patika** adlandırması da kullanılır.

kısaca γ'nın **uç noktaları** diyeceğiz. X uzayının x, y gibi herhangi iki noktası verildiğinde X uzayında uç noktaları x, y olan bir sürekli gezi varsa X uzayı **yol bağlantılıdır** denir. X uzayındaki gezilerin kümesini $\mathcal{G}(X)$ ile göstereceğiz. Her x noktasının her U komşuluğuna karşılık x'in yol bağlantılı bir $V \subset U$ komşuluğu varsa X **yerel yol bağlantılıdır** denir.

Teorem 5.2.28. *$-\infty < a \leq b < +\infty$ olmak üzere, $\mathbb{R}$ uzayının bağlantılı altkümeleri $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty)$ ve $\langle a, b\rangle$ aralıklarıdır.*

Bu teorem ve Teorem 5.2.23'ten: γ sürekli gezilerinin $\underline{\gamma}$ yolları daima bağlantılıdır.

Teorem 5.2.29. (i) *Yol bağlantılı topolojik uzaylar bağlantılıdır.*

(ii) *$B \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinin bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul yol bağlantılı olmasıdır.*

Not 5.2.30. Okur bu teoremin ikinci kısmında yolların poligonlara kısıtlanabileceğini gösterebilir, dd. B açık kümesinin bağlantılı olması için B kümesinin herhangi iki noktasının B'de bir poligon ile bağlanması gerek ve yeterlidir. Hatta poligonlarımızın kenarlarının koordinat eksenlerine paralel olmasını da isteyebiliriz.

Yol bağlantılı uzaylar bağlantılıdır, ancak bunun tersi doğru değildir.

$$X := \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0, +\infty)\right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

kümesi klasik karşı örnektir. Yukarıdaki birleşimin ilk parçasına A dersek, A kümesi bağlantılı $(0, +\infty)$ aralığının sürekli resmi olarak bağlantılıdır. X ise bağlantılı A'nın kapanışı olduğundan, bağlantılıdır. Ancak X'te uç noktaları $(\pi, 0), (0, 1) \in X$ olan bir gezi yoktur. X aynı zamanda, bağlantılı ancak yerel yol bağlantılı olmayan topolojik uzaylara bir örnektir. Buna karşın bağlantılı ve yerel yol bağlantılı uzaylar yol bağlantılıdırlar.

X bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ olsun. Her $a \in X$ noktasının bir U_a komşuluğu $f|U_a$ sabit olacak biçimde bulunabiliyorsa f dönüşümü **yerel sabittir** denir.

Önerme 5.2.31. *X, Y topolojik uzaylar, X bağlantılıysa, her yerel sabit $f : X \to Y$ fonksiyonu sabittir.*

Sonuç 5.2.32. *X bağlantılı ve Y ayrık topolojik uzaysa, her sürekli $f : X \to Y$ dönüşümü sabittir. Özellikle X bağlantılı ise her sürekli $f : X \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu sabittir.*[4]

[4] $\mathbb{Z}$ burada $\mathbb{R}$'deki göreceli topolojisiyle alınmıştır ve ayrıktır.

Herhangi bir $A \subset X$ kümesinin bağlantılı bileşenlerinin A'da açık olması gerekmez. X uzayımızın topolojisinin, örneğin $\mathbb{R}^k$'de olduğu gibi, bağlantılı kümelerden oluşan bir bazı varsa o zaman U açık kümelerinin bağlantılı bileşenleri de açıktır. Bundan kompleks analizde sıkça yararlanırız: Bir $U \subset \mathbb{R}^k$ açık kümesinde bir $f : U \to \mathbb{R}^k$ fonksiyonu incelemek f fonksiyonunu U açık kümesinin bağlantılı bileşenlerinde incelemeye denktir ve bu bileşenler de birer bölge olduklarından, kompleks analizde genellikle fonksiyonlar bölgelerde incelenir. $\mathbb{R}^k$ uzayımızın ayrıca sayılabilir bazları olduğu için bir $U \subset \mathbb{R}^k$ açık kümesinin bağlantılı bileşenleri sayılabilir çoklukta bölgelerden oluşur.

$U \subset \mathbb{R}^k$ açık kümesi verilsin. $\mathbb{R}^k$'nin kompakt alt kümelerinin bir $(K_n)_{n\geq 1}$ dizisine, aşağıdaki koşullar sağlandığında U için bir **tüketen dizi** denir:

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \ (K_n \subsetneq U \wedge K_n \subsetneq \mathring{K}_{n+1})$,
2. $U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$,
3. $K \subsetneq U$ olan her kompakt küme için $K \subset K_n$ olacak biçimde bir n vardır.

Önerme 5.2.33. *Her açık $U \subset \mathbb{R}^k$ altkümesini tüketen bir (K_n) dizisi izleyen koşul sağlanacak biçimde vardır: Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^k \backslash K_n$ kümesinin her sınırlı bağlantılı bileşeni $\mathbb{R}^k \backslash U$ kümesinin en az bir sınırlı bağlantılı bileşenini içerir.*

Kanıt. $U = \mathbb{R}^k$ ise, $K_n := \overline{B}_n = \left\{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leqslant n\right\}$ kapalı topları işimizi görür.

Şimdi $U \subsetneq \mathbb{R}^k$ olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$K_n := \overline{B}_n \cap \left\{x \in \mathbb{R}^k | d(x, \mathbb{R}^k \backslash U) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

olarak tanımlansın. (K_n) dizisinin U kümesini tükettiği aşikârdır. Önermedeki koşulun sağlandığını görelim: C kümesi $\mathbb{R}^k \backslash K_n$'in bir sınırlı bağlantılı bileşeni olsun. $U^c = \mathbb{R}^k \backslash U$ olmak üzere,

$$\mathbb{R}^k \backslash K_n = \left(\mathbb{R}^k \backslash \overline{B}_n\right) \cup \left(\bigcup_{y \in U^c} B_{\frac{1}{n}}(y)\right).$$

Sağ yandaki birleşimdeki her bir küme bağlantılıdır. Bu nedenle, C bileşeni bunlardan birini keserse onu içerir; sınırlı olduğu içinse $\mathbb{R}^k \backslash \overline{B}_n$ kümesini kesemez. Dolayısıyla, bir $Y \subset U^c$ ile

$$C = \bigcup_{y \in Y} B_{\frac{1}{n}}(y)$$

olur. Özellikle $C \cap U^c \neq \emptyset$. Böylece U^c'nin bir B bağlantılı bileşeni C'yi keser. $U^c \subset \mathbb{R}^k \backslash K_n$ ve C ise $\mathbb{R}^k \backslash K_n$'nin bir bağlantılı bileşeni olduğundan, $B \subset C$ olur. □

$\mathbb{R}^k$ uzayının kapalı bir K altkümesinin bağlantılı bileşenleri K'de kapalı oldukları için $\mathbb{R}^k$'de de kapalıdırlar. Her U açık kümemizin bağlantılı bileşenleri sayılabilir çoklukta bölgelerdir. $A \subset \mathbb{R}^2$ kümesine her $z, w \in A$ için $[z, w] \subset A$ ise **dışbükeydir** veya **konvekstir** denir. Bir $B \subset \mathbb{R}^2$ bölgesine bir $a \in B$ noktası her $z \in B$ için $[a, z] \subset B$ olacak biçimde bulunabiliyorsa *a noktasına göre* veya *a merkezli* **yıldız biçimlidir** denir. Her dışbükey bölge her noktasına göre yıldız biçimlidir; ancak bir noktasına göre yıldız biçimli olan bir bölgenin dışbükey olması geremez.

5.3 Gerçel Analiz

5.3.1 Diziler, Seriler, Türev

Tam olarak sıralanmış $\mathbb{R}$ gerçel sayılar cisminde $A \subset \mathbb{R}$ altkümesinin en büyük (en küçük) ögelerini, varlarsa, sırasıyla $\max A$ ve $\min A$ ile göstereceğiz. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $(a, b), [a, b], (a, b]$ ve $[a, b)$ aralıklarının ve $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ ve $(-\infty, a]$ aralıklarının tanımları biliniyor varsayılacaktır. Eğer varlarsa A kümesinin supremum ve infimumunu sırasıyla $\sup A$ ve $\inf A$ ile gösterilir. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir gerçel diziyse, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n$ yerine çoğu zaman yalın olarak (x_n) ve $\lim x_n$ de yazacağız. Benzer biçimde $\Sigma_{n=0}^{+\infty} x_n$ yerine bazen yalın biçimde Σx_n yazacağız.

Teorem 5.3.1. *Bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerçel dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bir **Cauchy dizisi** olmasıdır, dd. her $\varepsilon > 0$ için bir n_ε doğal sayısının her $p, q \geq n_\varepsilon$ için $|x_p - x_q| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir.*

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ **uzayı**: Her $r \in \mathbb{R}$ için $-\infty < r < +\infty$ ve $-\infty < +\infty$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_r(-\infty) &\equiv \left[-\infty, r\right) := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, -\infty \leqslant x < r\right\}, \\ I_r(+\infty) &\equiv (r, +\infty] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, r < x \leqslant +\infty\right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bir $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ kümesine her $a \in A \cap \mathbb{R}$ için bir $I_\varepsilon(a)$'yı ve $\pm\infty \in A$ ise bir $I_r(\pm\infty)$'yı içeriyorsa **$\overline{\mathbb{R}}$'de açıktır** diyelim. Böylece $\overline{\mathbb{R}}$'de bir topoloji tanımlanır. Bu topolojiyle $\overline{\mathbb{R}}$ bir kompakt uzaydır ve bu topolojinin $\mathbb{R}$'deki izi $\mathbb{R}$'nin doğal topolojisidir.

$\mathbb{R}$ bir yerel kompakt Hausdorff uzayı olduğundan, $\mathbb{R}$'nin aynı zamanda tek nokta kompaktlaştırılması olarak elimizde $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ da vardır. Biz $-\infty$, $+\infty$ ve ∞ imlerini birbirinden özenle ayıracağız. Örneğin $0 \neq x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için $\overline{\mathbb{R}}$'de $\lim f(0+) = +\infty$ ve $\lim f(0-) = -\infty$ olduğundan, $x \to 0$ için f fonksiyonunun 0'da limiti yoktur. Buna karşın $\mathbb{R}_\infty$'da $\lim f(0+) = \infty$ ve $\lim f(0-) = \infty$ olduğundan, $x \to 0$ için f fonksiyonunun 0'da limiti var ve $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

$(x_n) \subset \mathbb{R}$ dizisi artan ve üstten sınırlı değilse $\overline{\mathbb{R}}$ uzayında $\lim x_n := +\infty$ ve (x_n) dizisi azalan ve alttan sınırlı değilse $\overline{\mathbb{R}}$ uzayında $\lim x_n := -\infty$ olur; bu nedenle, $\mathbb{R}$'de çalışıldığında da bunlar bir uzlaşma olarak sürdürülür. Azalan veya artan dizilere kısaca **tekdüze (monoton)** diyelim.

Teorem 5.3.2. *Tekdüze diziler $\overline{\mathbb{R}}$'de yakınsaktır. (x_n) gerçel dizisi artan ve üstten sınırlı değilse $+\infty$'a, üstten sınırlı ise $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ gerçel sayısına yakınsar. Bunun ikilisi olarak (x_n) gerçel dizisi azalan ve alttan sınırlı değilse $-\infty$'a, alttan sınırlı ise $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ gerçel sayısına yakınsar.*

$0 < p \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $I_p(a) := (a-p, a+p)$ olarak tanımladığımızı anımsatalım. (x_n) gerçel dizisi verilsin. Bu dizi üstten sınırlı ise $\beta_n := \sup\{x_k \,|\, n \leq k\}$ olmak üzere, (β_n) dizisi azalan dizidir ve $\limsup x_n := \lim \beta_n$ olarak tanımlanır. (x_n) dizisi üstten sınırlı değilse $\limsup x_n := +\infty$ olarak tanımlanır. $\limsup x_n$ yerine $\overline{\lim} x_n$ de yazılır. Bu kavramın ikilisi olan $\liminf x_n$ (veya $\underline{\lim} x_n$) kavramının tanımını okura bırakıyoruz. Sınırlı diziler söz konusu olduğunda $\overline{\lim} x_n$ ve $\underline{\lim} x_n$ gerçel sayılardır. $\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\overline{\lim} x_n = \beta$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $I_\varepsilon(\beta)$ aralığında dizinin sonsuz terimi bulunurken $[b+\varepsilon, +\infty)$ aralığında en fazla sonlu teriminin bulunmasıdır, dd. (x_n) dizisinin β'ya yakınsayan bir altdizisi vardır ve (x_n) dizisinin yakınsak altdizilerinin limitleri $\leq \beta$'dır. Sınırlı bir (x_n) dizisinin yakınsak ve limitinin α olması için gerek ve yeter koşul $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \alpha$ olmasıdır. $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ dizileri $\mathbb{R}$'de a ve b sayılarına yakınsaksalar $(x_n \pm y_n)$ ve $(x_n y_n)$ dizileri $\mathbb{R}$'de $a \pm b$ ve ab'ye yakınsaktırlar. Ayrıca, $b \neq 0$ ise, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ile her $n \geq n_0$ için $b_n \neq 0$'dır ve $(a_n/b_n)_{n \geq n_0}$ dizisi a/b'ye yakınsar.

Bilindiği gibi bir $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ gerçel serisinin **yakınsak** ve **toplamının** t olmasından, $s_n = x_0 + \cdots + x_n$ olmak üzere, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak ve $\lim s_n = t$ olması anlaşılır, bu durumda $\sum x_n = t$ yazılır. Eğer $\sum x_n$ serisi yakınsaksa $\lim x_n = 0$'dır. Dizilerin limit özelliklerinden$\sum x_n$ ve $\sum y_n$ gerçel serileri yakınsak ve toplamları sırasıyla a ve b ise $\sum (x_n \pm y_n)$ serileri de yakınsaktır ve toplamaları $a \pm b$'dir; ayrıca her $r \in \mathbb{R}$ için $\sum r x_n$ serisi de yakınsaktır ve toplamı ra'dır. $0 \neq r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sum x_n$ ve $\sum r x_n$ serilerinin yakınsaklık karakterleri aynıdır: ya ikisi de yakınsaktır, ya da ikisi de ıraksaktır. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq 0$ ise, $\sum x_n$ serisinin $\mathbb{R}$'de yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, Teorem 5.3.2'den dolayı, (s_n) kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır ve yakınsaklık durumunda $\sum x_n = \sup s_n$. Ancak böyle bir seri $\overline{\mathbb{R}}$'de her zaman yakınsaktır ve orada (s_n) üstten sınırlı olsun veya olmasın daima $\sum x_n = \sup s_n$ geçerlidir.

Bir serinin *sonlu* sayıda teriminin *değerini* değiştirdiğimizde yeni serinin s'_n kısmi toplamları için bir n_0'dan itibaren bir c sabiti ile $s'_n = s_n + c$ olur. Dolayısıyla, (s_n) ve (s'_n) dizilerinin yakınsaklık karakterleri aynıdır. Bu nedenle, bir serinin sonlu sayıda terimini değiştirmek yakınsaklık karakterini değiştirmez!

Bir serinin *sonlu* sayıda teriminin *yerini* değiştirmek bir n_0'dan sonra hiçbir s_n kısmi toplamını değiştirmeyeceğinden serinin yakınsaklık karakterini değiştirmez ve yakınsaksa toplamlar aynı kalır. Yakınsak bir serinin sonsuz teriminin yerini değiştirdiğimizde aynısını bekleyemeyiz. Eğer $\sum |x_n|$ serisi yakınsaksa $\sum x_n$ serisi **mutlak yakınsaktır** denir. Her $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tameşlemesi için $\sum x_{\sigma(n)}$ serisi daima (aynı sayıya) yakınsaksa $\sum x_n$ serisi **(güçlü) değişmeli yakınsaktır** veya **(güçlü) koşulsuz yakınsaktır** denir.

Teorem 5.3.3. (i) *Mutlak yakınsak seriler yakınsaktır.*

(ii) $\sum x_n$ *serisinin mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter koşul değişmeli yakınsak olmasıdır.*

Gerçel değerli seriler için verdiğimiz bu teorem terimler kompleks sayılar olduğunda da geçerlidir ve kanıt aynı biçimde verilebileceği gibi Teorem 5.3.3'ten de kolayca çıkarılır. Yine de Kısım 1.4'te bu teoremin daha genel olarak sonlu boyutlu Banach uzaylarında bir kanıtını vereceğiz. Eğer $\sum x_n$ serisi mutlak yakınsaksa $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_n$ ve $q_n = \sum_{k=0}^{n} |x_n|$ olmak üzere, $|s_n| \leq q_n$ ve $f(x) = |x|$ sürekli olduğundan, limitlere geçerek

$$\left|\sum x_n\right| \leq \sum |x_n|$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.3.4 (Büyük ölçütü). *Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n, q_n \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq p_n \leq q_n$ olsun. $\sum q_n$ yakınsaksa $\sum p_n$ de yakınsaktır, $\sum p_n$ ıraksaksa $\sum q_n$ de ıraksaktır.*

Not 5.3.5. Bu ölçütün kullanımında sıkça başvurulan iki seri verelim:

1. $0 \leq p$ olmak üzere, $\sum p^n$ serisi $0 \leq p < 1$ için yakınsak, $p \geq 1$ için ıraksaktır.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ serisi $\alpha > 1$ için yakınsak, $\alpha \leq 1$ içinse ıraksaktır.

Teorem 5.3.6. *(p_n) pozitif sayıların bir dizisiyse,*

$$\underline{\lim} \frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{p_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{p_n} \leq \overline{\lim} \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Özellikle $\lim \frac{p_{n+1}}{p_n} = l$ ise, $\lim \sqrt[n]{p_n} = l$ (bkz. [54]).

Örneğin $\lim \frac{n+1}{n} = 1$ olduğundan, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ olur.

Önerme 5.3.7. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n, q_n \geq 0$, (p_n) yakınsak ve $\lim p_n = p$ olsun. $p > 0$ veya (q_n) üstten sınırlı ise, $\overline{\lim}(p_n q_n) = p\overline{\lim} q_n$ eşitliği sağlanır.*

Sonuç 5.3.8. $0 \leq q_n$ *ise,* $\overline{\lim} \sqrt[n]{n q_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{q_n}$.

Teorem 5.3.9 (Kök Ölçütü)**.** $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|x_n|}$ *olmak üzere,* $\sum x_n$ *serisi*

(i) $\alpha < 1$ *ise mutlak yakınsaktır.*

(ii) $\alpha > 1$ *ise ıraksaktır.*

(iii) $\alpha = 1$ *için yakınsak da olabilir, ıraksak da olabilir.*

Teorem 5.3.10 (Oran Ölçütü)**.** *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $0 \neq x_n \in \mathbb{R}$ *olmak üzere,* $\sum x_n$ *serisi*

(i) $\overline{\lim} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$ *ise mutlak yakınsak,*

(ii) *Bir* n_0 *ile her* $n \geq n_0$ *için* $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \geq 1$ *ise ıraksaktır.*

Bizi $U \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere, $f : U \to \mathbb{R}^n$ tipinde fonksiyonlar ilgilendirecektir. Her ne kadar $1 \leq m, n \leq 2$ durumuna odaklanacak olsak da tanımlar ve teoremler bu kısıtlamadan bağımsızdır. $\mathbb{R}^2$ uzayının toplam işlemini koruyarak ögeleri arasında uygun bir çarpma işlemi tanımlayarak $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini elde edeceğiz. Dolayısıyla, inceleyeceğimiz fonksiyonlar gerçel değişkenli kompleks değerli fonksiyonları kapsadığı gibi, kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonları da kapsayacaktır. $\mathbb{R}^k$ uzayının Öklid normunu $\|\cdot\|$ ile gösterip bu uzayda $d(x, y) = \|x - y\|$ Öklid metriğini kullanacağız.

X herhangi bir küme, $f : X \to \mathbb{R}^m$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \to \mathbb{R}^m$ verilsin. Herhangi bir $g : X \to \mathbb{R}^m$ için

$$\|g\|_X := \sup_{x \in X} \|g(x)\|$$

olarak tanımlansın.

Tanım 5.3.11. 1. Her $x \in X$ için $(f_n(x))$ dizisi yakınsak ve $\lim f_n(x) = f(x)$ ise (f_n) fonksiyon dizisi X **kümesinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır** denir ve bunu $f_n \overset{X}{\to} f$ ile göstereceğiz.

2. Eğer $\lim \|f_n - f\|_X = 0$ ise, ve ancak bu durumda (f_n) fonksiyon dizisi X **kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır** denir ve bunu $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} f$ ile göstereceğiz.

3. $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$ olmak üzere, $\sum f_n$ serisinin X kümesinde f fonksiyonuna noktasal yakınsak olmasından $s_n \overset{X}{\to} f$ ve X kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasından ise $s_n \overset{X}{\Longrightarrow} f$ anlaşılır.

Aşağıda vereceğimiz teoremleri biliniyor varsayacağız.

Önerme 5.3.12. $U \subset \mathbb{R}^m$, *her* $f_n : U \to \mathbb{R}^n$ *sürekli ve* $f_n \overset{U}{\Longrightarrow} f$ *ise,* f *fonksiyonu da* U *kümesinde süreklidir. Bunun bir sonucu ise,* $\sum f_n$ *serisi* U *kümesinde* F *fonksiyonuna düzgün yakınsaksa* F *fonksiyonu da* U *kümesinde süreklidir.*

Teorem 5.3.13 (Weierstrass M-testi). *Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 0$ pozitif sayılar ve $\|f_n\|_X \leq p_n$ olsun. $\sum p_n$ yakınsaksa $\sum f_n$ serisi X kümesinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.*

$U \subset \mathbb{R}^m$ bir *açık* küme, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{R}^n$ olsun.

Tanım 5.3.14. a noktasında sürekli ve $\varepsilon(a) = 0$ olan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$-doğrusal bir $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü her $x \in U$ için

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\|\,\varepsilon(x) \tag{5.2}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonu a **noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir** denir. Varsa tek olarak belirli olan L dönüşümü

$$f'(a) \text{ veya } d_a f \text{ veya } df(a)$$

ile gösterilir.

Bu tanımla (5.2) eşitliği

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \|x-a\|\,\varepsilon(x)$$

şeklini alır. "a noktasında türevlenebilir" yerine, genellikle eski kaynaklarda, a noktasında **total türevlenebilir** de denmektedir. (5.2)'deki tanım

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

ile denktir.

$a \in U \subset \mathbb{R}^m$ ve $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. $e \in \mathbb{R}^m$ ve $\|e\| = 1$ için eğer limit varsa

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) := D_e f(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te) - f(a)}{t} \tag{5.3}$$

olarak tanımlanır ve buna **f'nin a noktasında e yönündeki türevi** denir.

f fonksiyonu a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilirse, $e_1, \ldots, e_m$ vektörleri $\mathbb{R}^m$ uzayının standart taban vektörleri[5] ve $x = a + te_k \in U$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{x_k}(a) := \frac{\partial f}{\partial e_k} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_k) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{L(te_k)}{t} + \frac{\|te_k\|}{t}\varepsilon(a+te_k)\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\left(L(e_k) + \frac{|t|}{t}\varepsilon(a+te_k)\right) = L(e_k)\end{aligned}$$

[5] $e_k := \left(0, \ldots, 0, \overset{\downarrow k.}{1}, 0 \ldots, 0\right)$, $k = 1, \ldots, m$.

kısmi türevleri vardır[6]. Bunun tersinin doğru olmadığını biliyoruz: Bir f fonksiyonunun a noktasında tüm $\partial f/\partial x_1(a), \ldots, \partial f/\partial x_m(a)$ kısmi türevleri varken f fonksiyonu a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olmayabilir. Diğer yandan, $\partial f/\partial x_1(a), \ldots, \partial f/\partial x_m(a)$ *kısmi türevleri a noktasının bir komşuluğunda var ve a noktasında sürekliyse, f fonksiyonu a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir*; bu da analiz derslerinde gördüğümüz bir gerçektir.

$$\nabla f(a) := \mathrm{grad} f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \right)$$

vektörüne f'nin a noktasındaki **gradyanı** denir. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathbb{R}^m$'deki öklidik iç çarpımı gösterme üzere, her $v = (v_1, \ldots, v_m)$ birim vektörü için

$$D_v f(a) = df(a)(v) = \langle \mathrm{grad} f(a), v \rangle$$

eşitliği geçerlidir. $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bir doğrusal dönüşümse her $a \in \mathbb{R}^m$ noktasında türevlenebilir ve $L'(a) = L$'dir.

Önerme 5.3.15 (Zincir Kuralı). *$a \in U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^m$, U ve V kümeleri açık olmak üzere, $f : U \to V$ fonksiyonu a noktasında ve $g : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $f(a)$ noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilirlerse $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.*

Bizi ilgilendiren ilgilendiren iki duruma odaklanalım:

(1) $U \subset \mathbb{R}^2$ açık, $(x_0, y_0) \in U$ ve $f : U \to \mathbb{R}$ olsun. Kitabımızın amacına uygun olarak bir $(x, y) \in U$ ögesini kısaca $z$ile göstereceğiz. $z = (x, y)$ ve $z_0 = (x_0, y_0)$ olmak üzere, f fonksiyonunun z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olması $\mathbb{R}$-doğrusal bir $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dönüşümü ve z_0 noktasında sürekli olup 0 değerini alan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ile her $z \in U$ için

$$f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + \|z - z_0\|\, \varepsilon(z) \tag{5.4}$$

olmasıdır.

$$\begin{aligned} a &:= L(e_1) =: \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) =: f_x(z_0) \text{ ve} \\ b &:= L(e_2) =: \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) =: f_y(z_0) \end{aligned}$$

olmak üzere, bu ifade analiz derslerindeki açık yazılımla her $(x, y) \in U$ için, $z - z_0 = (x - x_0)\, e_1 + (y - y_0)\, e_2$ ve $L(z - z_0) = (x - x_0)\, L(e_1) + (y - y_0)\, L(e_2)$ olduğundan,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + \|z - z_0\|\, \varepsilon(x, y) \tag{5.5}$$

[6] Bu limiti bulmada analizin şu basit ancak kullanışlı önermesi işimizi kolaylaştırır: f ve g fonksiyonları $I_r^*(c)$ merkezsiz aralıkta tanımlanmış iki reel değerli fonksiyon olmak üzere, g sınırlı ve $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ ise, $\lim_{x \to c} f(x) g(x) = 0$.

şeklini alır. Burada $\|z - z_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ olmaktadır.

(2) $U \subset \mathbb{R}^2$ açık, $z_0 \in U$ ve $f : U \to \mathbb{R}^2$ olsun. Her $z \in U$ için $f(z) = (u(z), v(z))$ olarak yazarsak, u ve v fonksiyonları az önce incelediğimiz tiptendirler: $u, v : U \to \mathbb{R}$. Bu durumda f fonksiyonunun z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olması $\mathbb{R}$-doğrusal bir $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ve z_0 noktasında sürekli ve 0 değerini alan bir $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^2$ ile her $z \in U$ için

$$f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + \|z - z_0\|\,\varepsilon(z)$$

olmasıdır. Bileşenler türünden $L(z) = (L_1(z), L_2(z))$ ve $\varepsilon(z) = (\varepsilon_1(z),\, \varepsilon_2(z))$ yazarsak, L'nin $\mathbb{R}$-doğrusal olması L_1 ve L_2'nin $\mathbb{R}$-doğrusal olmasıyla ve ε fonksiyonunun z_0'da sürekli olmasının ε_1 ve ε_2 fonksiyonlarının z_0 noktasında sürekli olmasıyla eş anlamlı olduğunu gözetirsek, *f fonksiyonunun z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olmasının u ve v fonksiyonlarının z_0 noktasında $\mathbb{R}$-türevlenebilir olmasıyla eş anlamlı olduğunu* görürüz.

$\mathbb{R}$-doğrusal $f'(z_0) = L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünün, iki tarafta da taban olarak e_1, e_2 standart tabanını seçersek, matrissel ifadesi bilindiği, veya tanımdan doğrudan görüleceği gibi

$$J_f(z_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

matrisidir. Buna f'nin z_0 noktasındaki **Jacobi matrisi** denir.

$U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ ve $k \geq 1$ bir doğal sayı olsun. f fonksiyonunun U'da k. dereceden olan tüm kısmi türevleri var ve sürekliyseler, f fonksiyonu U'da $\mathcal{C}^k$ **sınıfı**ndandır denir ve bu tip fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ veya yalın olarak $\mathcal{C}^k(U)$ ile gösterilir. Eğer f her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahipse f fonksiyonu U'da $\mathcal{C}^\infty$ **sınıfı**ndandır denir ve bu tip fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ veya yalın olarak $\mathcal{C}^\infty(U)$ ile gösterilir. $f : U \to \mathbb{C}$ ise, $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{C})$ olması $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ olması demektir ve benzeri $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ için geçerlidir.

Analiz derslerinde aşağıdaki teorem kanıtlanır:

Teorem 5.3.16. *$A \subset \mathbb{R}^2$ açık, $a \in A$, $f \in \mathcal{C}^1(A)$ ve $\det J_f(a) \neq 0$ ise a noktasının bir açık U komşuluğu ile $f(a) = b$ noktasının bir V açık komşuluğu aşağıdaki koşullar sağlanacak biçimde bulunabilir:*

(i) *$f|U : U \to V$ bir tam eşlemedir (yani birebir ve üzerinedir).*

(ii) *$g := (f|U)^{-1}$ ve I_2 ise 2×2'lik birim matris olmak üzere, g sürekli türevlenebilir ve*

$$J_g(b) \circ J_f(a) = I_2, \text{ dd. } J_{f^{-1}}(f(a)) \circ J_f(a) = I_2$$

Analizin temel teoremlerinden biri Aradeğer Teoremi'dir:

Teorem 5.3.17 (**Aradeğer Teoremi**). *$a < b$ olmak üzere, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilirse, bir $c \in (a, b)$ ile*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Ayrıca, (a, b) aralığında $f' = 0$ ise, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sabittir.

Önerme 5.3.18. *$B \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge, $u : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$-türevlenebilir ve B kümesinde $u_x = u_y = 0$ ise u fonksiyonu sabittir.*

Bu alt kısımda, henüz gerçel analizde olduğumuzdan, fonksiyonlarımız $\mathbb{R}$-değerli alınacaktır. Özel olarak

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \ ((x, y) \mapsto x) \ \text{ ve } \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ ((x, y) \mapsto y)$$

izdüşüm fonksiyonlarına bakalım: Bunlar doğrusal dönüşümler olduklarından her $z_0 = (x_0, y_0)$ noktasında türevlenebilirler ve

$$d\pi_1(z_0) = \pi_1 \text{ ve } d\pi_2(z_0) = \pi_2$$

olu. Bu gösterimlerle, (5.4)'teki $L = df(z_0) = f'(z_0)$ türev dönüşümü, (5.5) de gözetilerek

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)d\pi_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)d\pi_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\pi_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\pi_2$$

şeklini alır. Ancak türev dönüşümleri söz konusu olduğunda $d\pi_1$ ve $d\pi_2$ dönüşümleri yerine dx ve dy yazmak bir gelenektir ve biz böylece

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy$$

gösterimine ulaşırız. $df(z_0) \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dönüşümünün $h = (h_1, h_2)$'deki değeri

$$\begin{aligned} df(z_0)(h) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\pi_1(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\pi_2(h) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)h_2 \end{aligned}$$

olur. $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $U \subset \mathbb{R}^2$ kümesinde $\mathbb{R}$-türevlenebilirse elimizde bir

$$df : U \to L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \forall z \in U : df(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)dy$$

dönüşümümüz var. df dönüşümü U kümesinde birinci dereceden türevsel biçimlere bir örnektir. U kümesinde **birinci dereceden türevsel biçim**den veya (**türevsel**) **1-biçimi**nden bir $\omega : U \to L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dönüşümü anlaşılır. Her $z = (x, y) \in U$ için $\omega(z)$'yi dx, dy tabanı türünden

$$\omega(z) = P(z)dx + Q(z)dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

olarak yazabiliriz; burada $P, Q \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. Eğer $P, Q \in \mathcal{C}^r(U)$ ise, ω türevsel biçimi U'da $\mathcal{C}^r-$sınıfındandır denir. Birinci dereceden türevsel biçim yerine yalın olarak **1-biçim** de denir. $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ için $f\omega := fPdx + fQdy$ olarak tanımlanır ve $k = 1, 2$ için $\omega_k = P_k dx + Q_k dy$, U kümesinde 1-biçimse, beklenildiği gibi:

$$\omega_1(z) = \omega_2(z) :\Longleftrightarrow \forall z \in U \ (P_1(z) = P_2(z) \text{ ve } Q_1(z) = Q_2(z))$$

olarak tanımlanır.

$l_1, l_2 \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve $\alpha_1 = (a_1, b_1)$, $\alpha_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$l_1 \wedge l_2(\alpha_1, \alpha_2) := \det \begin{pmatrix} l_1(\alpha_1) & l_1(\alpha_2) \\ l_2(\alpha_1) & l_2(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

ile tanımlanan $l_1 \wedge l_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dönüşümü 2-doğrusal (dd. her bileşende doğrusal) ve alternedir (dd. $l_1 \wedge l_2(\alpha_2, \alpha_1) = -l_1 \wedge l_2(\alpha_1, \alpha_2)$). Özel olarak $l_1 = dx$ ve $l_2 = dy$ alırsak, aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{gathered} dx \wedge dy(\alpha_1, \alpha_2) = \det \begin{pmatrix} dx(\alpha_1) & dx(\alpha_2) \\ dy(\alpha_1) & dy(\alpha_2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \\ dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Doğrusal cebirden bildiğimiz gibi 2-doğrusal ve alterne $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dönüşümleri 1-boyutlu bir $\mathbb{R}$-vektör uzayı oluştururlar ve $dx \wedge dy$ bu uzayın bir tabanıdır. $\omega = Pdx + Qdy$ 1-biçimi U'da $\mathcal{C}^1-$sınıfındansa

$$d\omega = d(Pdx + Qdy) := dP \wedge dx + dQ \wedge dy$$

olarak tanımlanır ve (5.6) ile

$$d\omega = d(Pdx + Qdy) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

olur.

5.3.2 İntegral

Riemann integrali kavramlarını biliniyor varsayıyoruz. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b$ olmak üzere, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı $\mathbb{R}$ değerli fonksiyonlar için Riemann integral kavramına ilişkin bir kaç basit gerçeği hatırlatacağız. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n =$

b olmak üzere, $P = \{t_0, \ldots, , t_n\}$ sonlu kümesine $[a, b]$ kapalı aralığının bir **parçalanışı** ve

$$\|P\| := \max_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}|$$

sayısına ise P parçalanışının **normu** denir. $t_{k-1} \le \xi_k \le t_k$ olmak üzere, parçalarından ξ_k ögeleri seçilmiş P parçalanışını kısaca $P(\xi)$ ile gösterelim ve buna bir **seçili parçalanış** diyelim. $\xi_k = t_k$ özel durumunda $P(\xi)$ yerine yalın olarak P yazalım. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$R(f, P(\xi)) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(t_k - t_{k-1})$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,(t_k - t_{k-1})$ olacaktır. $[a, b]$ aralığının tüm seçili parçalanışlarının kümesini $\mathfrak{P}^s$ ile gösterelim.

Tanım 5.3.19. $I \in \mathbb{R}$ ve $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki koşul sağlandığında f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında **Riemann integrallenebilir** denir:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P(\xi) \in \mathfrak{P}^s\ \ (\|P\| < \delta \implies |R(f, P(\xi)) - I| < \varepsilon)\,.$$

Bu durumda I sayısına f fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki **Riemann integrali** denir ve

$$\int_a^b f \text{ veya } \int_a^b f(t)dt$$

ile gösterilir. $\int_b^a f := -\int_a^b f$ olarak tanımlanır.

İntegralin Temel Özellikleri

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ olsunlar. Bundan sonra "Riemann integrallenebilir" yerine kısaca "integrallenebilir" diyeceğiz.

1. f integrallenebilirse, $\lim \|P_n\| = 0$ koşulunu sağlayan her seçili $\big(P_n(\xi^{(n)})\big)$ parçalanış dizisi için $\int_a^b f = \lim R(f, P_n(\xi^{(n)}))$.

2. $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ olsun. f fonksiyonunun $[a, b]$'de integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir $[a_{k-1}, a_k]$ aralığında integrallenebilir olmasıdır ve bu durumda

$$\int_a^b f = \int_{a_0}^{a_1} f + \int_{a_1}^{a_2} f + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f.$$

3. f sürekliyse integrallenebilir.

4. Kitabımızda inceleyeceğimiz tüm fonksiyonlarımız sürekli olacaklardır. Bu nedenle, özellikle belirtilmese de bundan sonra integralini aldığımız tüm fonksiyonları sürekli varsayacağız. $[a, b]$ aralığında sürekli olan gerçel değerli fonksiyonlarımızın kümesini $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ile gösterilir. Bilindik işlemlerle $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ bir $\mathbb{R}$-vektör uzayıdır. $\int_a^b : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ bir doğrusal dönüşümdür; dd. her $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ve her $r \in \mathbb{R}$ için
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b rf = r\int_a^b f.$$

5. $\int_a^b$ monotondur, dd. $f \geq g$ ise $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. Buradan $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

6. **Anateorem I:** $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ise $F(x) := \int_a^x f,\ x \in [a,b]$ ile tanımlanan F fonksiyonu $[a, b]$ aralığında türevlenebilir ve $F' = f$.

7. **Anateorem II:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilirse $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

8. $M \subset \mathbb{R},\ [a,b] \stackrel{\varphi}{\to} M \stackrel{f}{\to} \mathbb{R},\ f$ sürekli ve φ sürekli türevlenebilirse
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$
veya açık yazılımla
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt.$$

9. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $f_n \stackrel{[a,b]}{\Longrightarrow} f$ ise f süreklidir ve $\int_a^b f = \int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$.

10. Her $n \in \mathbb{N}$ için$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\sum f_n$ serisi $[a, b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsaksa f süreklidir ve
$$\int_a^b f = \int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$$

Şimdi $f = (f_1, \ldots, f_m) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ olsun.

Tanım 5.3.20. $f = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ **integrallenebilir** $:\Longleftrightarrow 1 \leq k \leq n$ için her bir $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ise. Böyle bir durumda
$$\int_a^b f := \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\right)$$
olarak tanımlanır.

Tek değişkenli $\mathbb{R}$-değerli integrallenebilir fonksiyonlar için geçerli olan teoremlerin çoğu buraya, tek değişkenli $\mathbb{R}^n$-değerli fonksiyonlara aktarılır. Biz ileride kullanacağımız bir iki gerçeği vermekle yetineceğiz:

Teorem 5.3.21. *$f = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ verilsin.*

(i) *f' türevi $[a, b]$ aralığında var ve integrallenebilirse $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.*

(ii) *f integrallenebilirse $\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$.*

Şimdi bir $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ verilsin ve her $a \leq x < +\infty$ için f fonksiyonu $[a, x]$ aralığında integrallenebilir olsun. $F(x) := \int_a^x f$ olarak tanımlarsak, eğer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ varsa,

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

olarak tanımlanır ve $\int_a^{+\infty} f$'ye f'nin $(a, +\infty)$'da **has olmayan integrali** denir.

$\int_a^{+\infty} f$'nin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul Cauchy Ölçütü'nün sağlanmasıdır; dd. her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $x_\varepsilon \geq a$ sayısının her $x_\varepsilon \leq x < x'$ için $|F(x') - F(x)| < \varepsilon$, dd. $\left|\int_x^{x'} f\right| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabilmesidir. Öte yandan

$$\left|\int_x^{x'} f\right| \leq \int_x^{x'} |f|$$

olduğundan, $\int_a^{+\infty} |f|$ yakınsaksa $\int_a^{+\infty} f$ de yakınsaktır. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 5.3.22. *$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $K, K' > 0$, $\alpha > 1$ ve $b \geq a$ olsun.*

(i) *$\forall x \geq b$ için $|f(x)|x^\alpha < K$ ise, $\int_a^{+\infty} f$ yakınsaktır.*

(ii) *$\forall x \geq b$ için $|f(x)|x > K'$ ise, $\int_a^{+\infty} f$ ıraksaktır.*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $\int_a^{+\infty} f$ ve $\int_{-\infty}^a f$ integrallerinin her ikisi de yakınsaksa $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ yakınsaktır denir ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^a f + \int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty, a\to-\infty} \int_a^b f$$

olarak tanımlanır. Burada a ve b birbirinden *bağımsız* olarak sonsuza giderler. $\int_{-\infty}^{+\infty} f$'ye f'nin $(-\infty, +\infty)$'da **has olmayan integrali** denir. Bu tanım a noktasının seçiminden bağımsızdır. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $[-r, +r]$, $r > 0$ aralığında integrallenebilirse, limitin olması durumunda

$$\mathrm{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty} f := \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^r f$$

değerine f'nin **Cauchy esas değeri** denir. CPV$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$, buna karşın $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ ıraksaktır! Ancak $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ yakınsaksa f'nin Cauchy esas değeri de vardır ve CPV $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Kısaca türevsel biçimlerin integrallerine ilişkin bilgiler verelim: P ve Q fonksiyonları U açık kümesinde sürekli olmak üzere, $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ birinci dereceden türevsel biçimi verilmiş ve $\gamma : [a,b] \to U$ ise bir integral gezisi (bkz. Tanım 2.2.7), dd. sonlu uzunluklu sürekli gezi olsun. Bu durumda $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ olmak üzere,

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (Pdx + Qdy) = \int_a^b \left(P\left(\varphi(t), \psi(t)\right) d\varphi + Q\left(\varphi(t), \psi(t)\right) d\psi\right)$$

olarak tanımlanır[7]. Eğer $\gamma \in \mathcal{G}^1(U)$ ise, dd. $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ olmak üzere, φ, ψ sürekli türevlenebilirlerse

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \big(P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\big)\, dt$$

olur. Eğer bir parçalı $\mathcal{C}^1$ gezisiyse, dd. $\gamma : [a,b] \to U$ sürekli olmak üzere, $[a,b]$ aralığının bir $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ parçalanışı her bir $\gamma_k := \gamma| [t_{k-1}, t_k]$ gezisi $\mathcal{C}^1$ sınıfından olacak biçimde bulunabiliyorsa

$$\int_\gamma \omega := \int_{\gamma_1} \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

olur. $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilirse

$$\int\int_U f dx \wedge dy := \int\int_U f dxdy$$

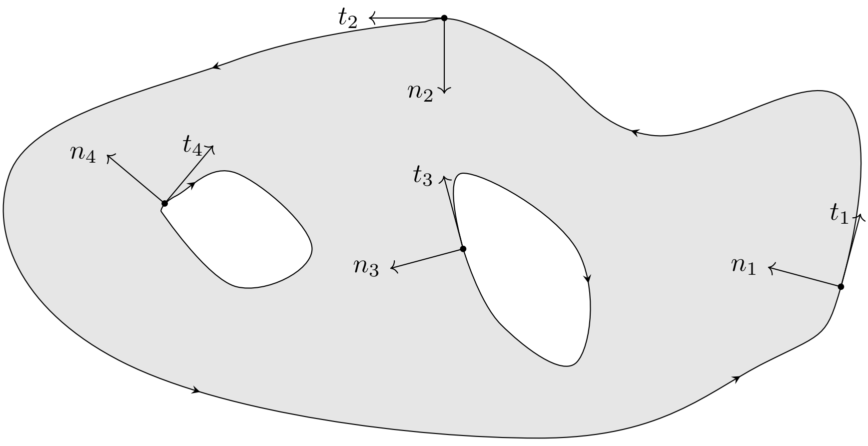
olarak tanımlanır. $U \subset \mathbb{R}^2$ açık kümesinin ∂U sınırı sonlu uzunluklu sonlu sayıda basit geziden oluşsun. ∂U sınırının pozitif yönlenmesinden anlaşılan, sınırı oluşturan geziler yönünde yürürken, U kümesinin daima *solda* kalmasıdır. Ancak Eğer ∂U'yu oluşturan geziler $\mathcal{C}^1$ sınıfından iseler ve bunlar her bir noktalarında sıfır olmayan teğet vektörlere sahipseler, ∂U'nun pozitif yönlenmiş olması bu teğetler yönündeki yeterince küçük vektörlerin *saatin ters yönünde* $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürüldüklerinde U'ya düşmeleri demektir. Ancak *sağ, sol, saatin yönü* veya *ters yönü matematik kavramlar değildirler!*

[8]. Bu kavramlara başvurmadan U **kümesinin** $\gamma = \partial U$ **gezisinin solunda kalmasını** matematiksel olarak şöyle tanımlayabiliriz: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ sınır gezimiz ve daima $\gamma'(t) \neq 0$ ve $n(t) = (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ olmak üzere, yeterince küçük

---

[7]Bu integraller için Kısım 2.3'e bakılabilir.

[8]Biz kitabımızda z vektörünü saatin ters yönünde $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürmenin iz'ye geçmek olduğunu gördük. Dolayısıyla, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ olmak üzere, $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$ vektörünü saatin ters yönünde $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürdüğümüzde $n(t) = i\gamma_1'(t) - \gamma_2'(t) = (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ vektörünü elde ederiz.



Şekil 5.1

pozitif ε sayıları için daima $\gamma(t)+\varepsilon n(t) \in U$ ve $\gamma(t)+\varepsilon(-n(t)) \notin U$ sağlanıyorsa U kümesi γ'nın **solunda kalır** denir. Elbette $\gamma'(t)$ gezimizin $\gamma(t)$ noktasındaki teğet vektörüdür ve $n(t)$ ise $\gamma'(t)$ teğet vektörümüze dik olan bir vektördür. Ancak $-n(t)$ vektörü de teğet vektörüne diktir; sol yan tanımında bu iki vektörden $n(t)$'yi kullanıyoruz. Sınır gezileri U kümesi bunların solunda kalacak biçimde seçilmişlerse U kümesinin sınırı **pozitif yönlenmiştir** denir. U kümesinin pozitif yönlenmiş sınırını $\boldsymbol{\partial} U$ ile göstereceğiz[9] (bkz. Şekil 5.1).Gerçel analizde aşağıdaki teorem kanıtlanır:

Teorem 5.3.23 (**Green**). *$U \subsetneq \mathbb{R}^2$ sınırlı bölge, ∂U sonlu sayıda basit integral gezilerinden oluşsun. P, Q fonksiyonları $\overline{U}$'da sürekli, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ve $\frac{\partial P}{\partial y}$ fonksiyonları U'da sürekli ve sınırlı olsunlar. $\omega = Pdx + Qdy$ ve ∂U pozitif yönlenmişse [64]*

$$\int_{\boldsymbol{\partial} U} Pdx + Qdy = \int_{\boldsymbol{\partial} U} \omega = \int\int_U d\omega = \int\int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

5.4 Cebir ve Doğrusal Cebir

5.4.1 Gruplar

G bir grup ve $A \subset G$ ise, G'nin A'yı içeren tüm altgruplarının arakesiti $\langle A \rangle$ ile gösterilir. $\langle A \rangle$, G'nin bir altgrubudur ve buna **A'nın ürettiği altgrup** denir. Eğer $\langle A \rangle = G$ ise, A'ya G'nin bir **üreten sistemi** denir. $\langle A \rangle$'nın ögeleri tamı tamına $A \cup A^{-1}$ kümesindeki ögelerin sonlu çarpımlarından oluşur. $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ bir grupsa, $g, h \in G$ için $g * h = h \cdot g$ olmak üzere, $\mathcal{G}^{op} = (G, *)$ de bir gruptur.

[9] Sınırın pozitif yönünün dönme sayıları üzerinden matematiksel bir tanımı Tanım 2.11.11'de verilmiştir.

Biz $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^{op}$ yerine yalın olarak G ve G^{op} yazacağız. Ayrıca, G'deki $\cdot$ işlemini hiç yazmayacağız, özetle $h \cdot g$ yerine hg yazacağız.

M herhangi bir küme olmak üzere, Prm$M$ ile M'nin permütasyon grubunu gösterelim. Prm$M$ grubundaki işlem $(f, g) \mapsto f \circ g$ ile tanımlanmıştır ve bu tanım: "önce f sonra g" kuralına ters düşer. Ancak bir kez yerleşmiştir. "Önce f sonra g" kuralına uyan PrmM^{op} grubunun $(f, g) \mapsto g \circ f$ işlemidir.

G herhangi bir grup ve $H \subset G$ bir altgrup olsun. Her $g \in G$ için $gHg^{-1} = H$ ise, H'ye G'de **normal**dir denir. H altgrubunun G'de normal olması her $g \in G$ için $gH = Hg$ olması, dd. H'nin sol yansınıflarının sağ yansınıflarına eşit olması demektir.

$$N_G(H) := \{g \,|\, g \in G \text{ ve } gHg^{-1} = H\}$$

olsun. $N_G(H)$, G'nin bir altgrubudur ve H grubu $N_G(H)$'de normaldir. Ayrıca, $N_G(H)$ grubu, H'nın normal olduğu G'nin altgrupları arasında $\subset$ bağıntısına göre en büyük olanıdır. $N_G(H)$'ye H'nin **normalleştiren**i denir. Yine cebirden biliyoruz ki, $G/H := \{gH \,|\, g \in G\}$ yan sınıflar kümesinin $g_1H * g_2H := (g_1g_2)H$ olarak tanımlanan işleme göre bir grup olması için gerek ve yeter koşul H'nin G'de normal olmasıdır. Böylece $N_G(H)/H$ bir gruptur. $H, H' \subset G$ altgruplarına bir $g \in G$ ile $Hg = gH'$ sağlanıyorsa, dd. $H = gH'g^{-1}$ ise **eşleniktir** denir.

5.4.2 Açılar ve Yönlenmiş Tabanlar

Bilindiği gibi $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, $e_k \in \mathbb{R}^n$ ile k.cı koordinatı 1 ve tüm diğer koordinatları 0 olan vektörü gösterirsek, $e_1, \ldots, e_n$ vektörleri $\mathbb{R}^n$'nin bir tabanını oluşturur; bu baza $\mathbb{R}^n$'nin **standart tabanı** denir. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ve $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ifadesine x ve y vektörlerinin **öklidik iç çarpımı** denir. $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olmak üzere,

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||,$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla, her $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ için

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||} \leq 1$$

olur. Bu durumda gerçel analiz *tek* olarak belirli bir $\varphi \in [0, \pi]$ ile

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

olduğunu söyler. Bu açıya x ve y **vektörleri arasındaki açı** diyecek ve bunu $\sphericalangle(x, y)$ ile göstereceğiz. Kısım 1.8'de $\cos\varphi$'yi geometrik olarak değil, analitik olarak tanımladığımızdan, şimdi de vektörler arasındaki açıyı analitik olarak tanımlamış oluyoruz. Tanım gereği daima $\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(x, y)$. V bir $\mathbb{R}$-vektör uzayı ve $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ olsun. $(a_1, \ldots, a_n)$ ve $(b_1, \ldots, b_n)$ bu uzayın sıralanmış iki tabanıysa, $A(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$ koşulunu sağlayan bir tek $A : V \to V$ doğrusal dönüşümü vardır. Elbette A bir eşyapı dönüşümüdür, dolayısıyla $\det A \neq 0$. Bu sıralanmış tabanlara $\det A > 0$ ise **eşyönlenmiştir**, $\det A < 0$ ise **zıtyönlenmiştir** denir. $A^{-1}(b_j) = a_j$, $1 \leq j \leq n$ için $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ olduğundan, $\det A > 0 \iff \det A^{-1} > 0$. Eşyönlenmişlik, V'nin tüm sıralı tabanları arasında bir denklik bağıntısı tanımlar ve elimizde yalnızca iki denklik sınıfı vardır. Biz $V = \mathbb{R}^n$ olduğunda $(e_1, \ldots, e_n)$ sıralı tabanını içeren sınıfa ve bu sınıfa ait tüm sıralı tabanlara **pozitif yönlenmiştir** diyeceğiz. Dolayısıyla, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eşyapı dönüşümü için $L(e_i) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} e_\nu$ ise, her iki tarafta da seçilen $e_1, \ldots, e_n$ standart tabanına göre L'nin matrisi (a_{ij}), böylece $\det L = \det(a_{ij})$ olur.

Tanım 5.4.1. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ doğrusal ve birebir olsun.

(i) Her $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\frac{\langle L(x), L(y)\rangle}{\|L(x)\|\,\|L(y)\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

ise, L bir **açı koruyan** veya **izogonal** dönüşümdür denir.

(ii) $\det L > 0$ ise L'ye **yön koruyan**, $\det L < 0$ ise **yön değiştiren** denir.

Açıktır ki L'nin açı koruyan olması, her $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sphericalangle(L(x), L(y)) = \sphericalangle(x, y)$$

olması demektir.

Özellikle $U \subset \mathbb{R}^n$ açık, $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $a \in U$ noktasında türevlenebilir ve $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir eşyapı dönüşümü ise, bunun standart tabana göre matrisi

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(a)\right) \text{ ve } \det df(a) = \det J_f(a) = \det\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}(a)\right)$$

olur. $\det df(a) > 0$ ise, f dönüşümü **yönleri korur** denir.

Doğrusal cebir derslerinden, örneğin [6]'da bulabileceğiniz bazı bilgileri ödünç alalım: $e_1, \ldots, e_n$ vektörleri $\mathbb{R}^n$'nin standart tabanıysa, bilindiği gibi $||e_i|| = 1$ ve $i \neq j$ ise $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, Kronecker sembolü ile kısaca $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Bilindiği gibi $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere, $\delta_{ii} = 0$ ve $i \neq j$ içinse $\delta_{ij} = 1$ olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^n$'nin $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ koşulunu sağlayan tabanlarına **ortonormal** denir. Herhangi bir $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümüne, $Le_1, \dots, Le_n$ vektörleri $\mathbb{R}^n$'nin bir ortonormal tabanıysa **ortogonal** denir. Aşağıdaki teoremler geçerlidir:

Teorem 5.4.2. *$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümü için aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *L dönüşümü ortogonaldir.*

(ii) *L iç çarpımı korur, dd. her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle Lx, Ly\rangle = \langle x, y\rangle$.*

(iii) *L dönüşümü uzunlukları korur, dd. her $x \in \mathbb{R}^n$ için $||Lx|| = ||x||$.*

(iv) *$v_1, \dots, v_n$ vektörleri $\mathbb{R}^n$'nin bir ortonormal tabanıysa, $Lv_1, \dots, Lv_n$ de bir ortonormal tabandır.*

Sonuç 5.4.3. *$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonal dönüşümleri **açıları korur**, dd. her $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\sphericalangle(Lx, Ly) = \sphericalangle(x, y)$.*

Teorem 5.4.4. *$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ doğrusal dönüşümünün standart tabana göre matrisi A ise, aşağıdaki önermeler denktirler:*

(i) *L ortogonaldir.*

(ii) *A'nın sütun vektörleri $\mathbb{R}^n$'nin bir ortonormal tabanıdır.*[10]

(iii) *$A^T A = I_n$.*

(iv) *$AA^T = I_n$.*

(v) *A'nın satır vektörleri $\mathbb{R}^n$'nin bir ortogonal tabanıdır.*

Bilindiği gibi bir $O \in \mathrm{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ matrisine tersi var ve $O^{-1} = O^T$ ise **ortogonal** denir; burada O^Tile O matrisinin transpozesi gösterilmektedir.

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) := \{O \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \,|\, O \,\text{ortogonal}\},$$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$'nin bir altgrubudur ve **ortogonal grup** olarak adlandırılır. $O \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ise $\det O = \pm 1$ olduğu apaçıktır.

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) := \{O \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \,|\, \det O = 1\}$$

kümesi $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$'nin bir altgrubudur ve buna **reel özel ortogonal grup** denir.

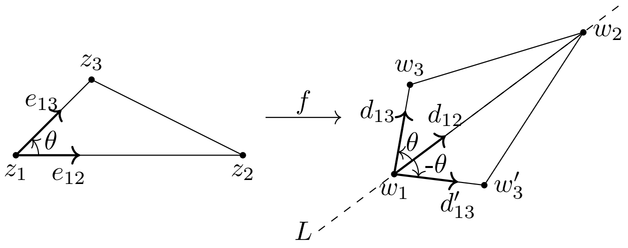
Bizi en çok ilgilendiren $n = 2$ durumunda Teorem 5.4.4'ten, bir

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{R})$$

matrisinin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \text{ ve } a_1b_1 + a_2b_2 = a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

[10]Biz bunu yazarken [6] Teorem 11.2.6'daki $(\mathbb{R}^n)^t$ uzayını doğal biçimde $\mathbb{R}^n$ ile özdeş kıldık.



Şekil 5.2

olmasıdır. Bu denklemlerden tek olarak belirli bir $\theta \in [0, 2\pi)$ ile A'nın

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

matrislerinden biri olduğunu elde ederiz. Bu matrislerin ilkine $D(\theta)$ diyelim (bkz. Kısım 1.1). $D(\theta)$ matrisi saatin ters yönünde θ açılık bir dönmeyi, diğeriyse $y = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right) x$ doğrusuna göre bir yansımayı temsil eder.

Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$d\left(f(x), f(y)\right) = d(x, y), \text{ dd. } ||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$$

ise **eşuzaklıdır** veya bir **izometridir** denir. Yine doğrusal cebirde aşağıdaki teorem kanıtlanır:

Teorem 5.4.5. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün eşuzaklı olması için gerek ve yeter koşul bir* ***hareket***[11] *olmasıdır, dd. bir $a \in \mathbb{R}^n$ ve bir $M \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ ile her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = a + Mx$ olmasıdır.*

Bizi ilgilendiren $n = 2$ için bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eşuzaklısının geometrik şekillere etkisine bakalım: Her şeyden önce f eşuzaklısı düzlemde aynı doğru üzerinde olmayan üç z_1, z_2, z_3 noktalarındaki değerleriyle tek olarak belirlidir. Gerçekten de f eşuzaklımız bir ortogonal M matrisi ve bir a ile $f(z) = a + Mz$ şeklindedir. $w_i := f(z_i)$, $i = 1, 2, 3$ olsun. $z_2 - z_1, z_3 - z_1$ vektörleri $\mathbb{R}^2$'nin bir tabanı ve $M(z_\nu - z_1) = w_\nu - w_1$, $\nu = 2, 3$ olduğundan, M dönüşümü w_1, w_2, w_3 değerleriyle gerçekten de tek olarak belirlenmiştir; dolayısıyla bu değerlerle f tek olarak belirlenmiştir. Ancak w_1 ve w_2'den geçen doğruyu L ile gösterirsek, herhangi bir eşuzaklı zorunlu olarak z_3'ü ya w_3'e ya da w_3''e gönderir (bkz. Şekil 5.2). Burada w_3' ise w_3'ün L doğrusuna göre yansımasından başka bir şey değildir.

$$e_{1\nu} := (z_\nu - z_1)/|z_\nu - z_1|, \; d_{1\nu} := (w_\nu - w_1)/|w_\nu - w_1|, \nu = 2, 3$$

[11] İngilizce literatürde "motion".

ve $d'_{13} := (w'_3 - w_1)/|w'_3 - w_1|$ olsun. $\theta := \sphericalangle(z_3 - z_1, z_2 - z_1)$ olmak üzere,

$$\sphericalangle(w_3 - w_1, w_2 - w_1) = \theta = \sphericalangle(w'_3 - w_1, w_2 - w_1)$$

iken $e_{13} = e^{i\theta}e_{12}$, $d_{13} = e^{i\theta}d_{12}$; ancak $d'_{13} = e^{-i\theta}d_{12}$ sağlanır! Söz konusu

$$z_1, z_2, z_3 \mapsto w_1, w_2, w_3 \text{ ve } z_1, z_2, z_3 \mapsto w_1, w_2, w'_3$$

eşuzaklılarının her ikisi de açıları korur, ancak aralarında önemli bir fark vardır: İlki açıların yönünü de korur, dd. e_{13}'ü elde etmek için e_{12}'yi saatin ters yönünde θ kadar döndürdüğümüzden, d_{13}'ü elde etmek için de d_{12}'yi saatin ters yönünde θ kadar döndürürüz; buna karşın ikinci durumda d'_{13}'ü elde etmek için de d_{12}'yi saatin ters yönünde $2\pi - \theta$ kadar (buna saatin yönünde $-\theta \equiv 2\pi - \theta \,(\mathrm{mod} 2\pi)$ kadar da denir) döndürürüz. Şimdi elimizde kartondan üstüste konmuş iki Öklid düzlemimiz olduğunu varsayalım. Birincide köşeleri z_1, z_2, z_3 olan $\Delta := \Delta(z_1, z_2, z_3)$ üçgenimiz, ikincide ise $\Delta_1 := \Delta(w_1, w_2, w_3)$ ve $\Delta_2 := \Delta(w_1, w_2, w'_3)$ üçgenlerimiz çizili olsun. Birinci düzlemi ikinci üzerinde kaydırıp döndürerek Δ üçgenini tam olarak Δ_1 üçgeni üzerine getirebiliriz. Ancak birinci düzlemi ikinci üzerinde kaydırıp döndürerek Δ üçgenini tam olarak asla Δ_2 üçgeni üzerine getiremeyiz! Bunun için Δ'yı Δ_1 üzerine getirdiğimiz birinci düzlemimizi $\mathbb{R}^3$ uzayımızda L doğrusu etrafında π kadar döndürürüz. Öteleme ve döndürmelerle Δ üçgenini Δ_2 üzerine getirmek istersek, bunu ancak $\mathbb{R}^2$'yi terk edip $\mathbb{R}^3$'te dönme kullanarak yapabiliyoruz!

Sembol Listesi

Sembol	s.		Sembol	s.		Sembol	s.
$\overline{D}_r(a)$	14		S_α	79		$\int_a^b f d\gamma$	132
$C_r(a)$	14		d_α	79		$\int_\gamma f$	136
D_r	14		$\log_\alpha$	80		$\int_\gamma f ds$	137
$\overline{D}_r$	14		Log	80		$\Vert f\Vert_\gamma$	139
C_r	14		$\measuredangle(w,z)$	83		$n(\kappa_{r,a},z)$	161
$\mathrm{I}(\gamma)$	174		$\Gamma \overset{U}{\approx} \Gamma'$	212		Id_X	367
$\mathrm{D}_\infty(\gamma)$	174		$\boldsymbol{\partial} B$	217		$\overline{Y}$	368
$\mathrm{D}(\gamma)$	174		$\rho_n(f,g)$	250		$\mathring{Y}$	368
$H(a;r_1,r_2)$	176		$\rho(f,g)$	250		∂A	368
$\int_{\boldsymbol{\gamma}} f$	181		$\mathcal{FE}$	269		$\mathcal{U}(x)$	368
$f \simeq g$	185		γ°	276		$\langle a,b\rangle$	369
$f \overset{Z}{\simeq} g$	186		Θ_I	280		$\omega_f(\delta)$	372
$\mathcal{G}_{z,w}(X)$	186		Θ_γ	282		ω_f	372
$\mathcal{R}_{z,w}(X)$	186		$D_r(\infty)$	287		$\delta(A)$	372
$\mathcal{G}_z(X)$	186		χ	287		$B_r(a)$	374
$\mathcal{R}_z(X)$	186		$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$	287		$\overline{B}_r(a)$	374
$\mathcal{G}_{kap}(X)$	186		$\mathbb{S}^2$	288		$S_r(a)$	374
$\mathcal{R}_{kap}(X)$	186		l_∞	290		$B_r^*(a)$	374
$\simeq \mathrm{rel} A$	186		$d_\infty(z,z')$	292		$[a,b]$	374
$\simeq_{uk}$	187		$D_\infty(a,r)$	292		$\partial_\infty A$	375
$\simeq_k$	187		$C_\infty(a,r)$	292		$\Subset$	375
$\gamma \simeq_k 0$	188		$\mathring{f}$	294		$\nabla f(a)$	384
$[\boldsymbol{\gamma}]$	192		P_f	312		$\mathrm{grad} f(a)$	384
$\boldsymbol{\pi}_1(X,a)$	192		$\mathcal{M}(U)$	313		$\langle A\rangle$	392
$\mathcal{T}_a(X)$	193		$\mathbb{C}(z)$	316		$\sphericalangle(x,y)$	394
$\pi_1(X)$	195		$d_{\infty K}$	318		δ_{ij}	394
$f_\#$	196		$\rho_\infty(f,g)$	319		$\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$	395
$\measuredangle(\gamma,w)$	201		$\mathrm{Res}(f,a)$	325		$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$	395
$n(\gamma,w)$	201		$\mathrm{ord}_a f$	327		$\frac{\partial f}{\partial e}$	400
$\mathcal{S}(X)$	207		$\mathrm{ord}_U f$	335		$D_e f(a)$	400
$\mathrm{C}_1(\mathrm{U})$	209		$\Delta_\gamma \arg f$	339		$\int_a^{+\infty} f$	400
$\underline{\Gamma}$	209		$\Delta_\Gamma \arg f$	339		$\mathrm{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty}$	400
$\int_\Gamma f$	209		$\mathrm{PV} \int_a^b$	353			
$\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$	209		$\mathcal{P}(X)$	367			
$\mathrm{Z}_1(U)$	211		$\mathcal{P}^*(X)$	367			
$\Gamma \overset{U}{\approx} 0$	212		A^c	367			

Kaynakça

[1] **Ahlfors L.V.**, *Complex Analysis*, 3. baskı. McGraw-Hill, 1979.

[2] **Alpay D.A.C.**, *A Complex Analysis Proplem Book*. Birkhäuser, 2010.

[3] **Antimirov M.Y.** el al., *Complex Variables.* AP, 1997.

[4] **Ash R.B.**, **Nowinger W.P.**, *Complex Analysis.*

[5] **Beardon A.F.**, *Complex Analysis.* John Wiley, 1979.

[6] **Beardon A.F.**, *Algebra and Geometry.* Cambridge Univ. Press, 2005.

[7] **Behnke H.**, **Sommer F.**, *Theorie der analytischen Funktionen einer Veränderlichen*, 3.baskı. Springer (1965).

[8] **Berenstein C.A.**, **Gay R.**, *Complex Variables.* Springer, 1991.

[9] **Bieberbach L.**, *Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I.* Vieweg, 1921.

[10] **Bochner S.**, *Green-Goursat Theorem.* Math. Zeitschr., Band 63 (1955).

[11] **Bruna J.**, **Cufi J.**, *Complex Analysis.* European Math. Soc. 2013.

[12] **Burcel R.B.**, *An Introduction to Classical Complex Analysis I,* Academic Press, 1979.

[13] **Carathéodory C.**, *Theory of Fuctions of a Complex Variable I*, Chelsea Publishing, 1954.

[14] **Carathéodory C.**, *Theory of Fuctions of a Complex Variable I*I, Chelsea Publishing, 1954.

[15] **Cartan H.**, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes*, 6. baskı, Hermann 1985.

[16] **Conway J.B.**, *Functions of One Complex Variable I,* 2. baskı. Springer, 1978.

[17] **Diederich K.**, **Remmert R.**, *Funktionentheorie I*, Springer, 1972.

[18] **Dingas A.**, *Vorlesunen über Funktionentheorie*, Springer, 1961.

[19] **Dixon J.D.**, *A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem.* Proc. Am. Math. Soc. **29** (1971).

[20] **Dvoretzky A.**, **Rogers C.A.**, *Absolute and Unconditional Convergence in Normed Linear Spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci. 36 (1950).

[21] **Feyel D.**, *Exercises sur les Fonctiones Analytiques.* Armand Colin.

[22] **Fischer W.**, **Lieb I.**, *A Course in Complex Analysis.* Vieweg-Teubner, 2010.

[23] **Fischer W.**, **Lieb I.**, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenthorie.* Vieweg, 1988.

[24] **Fischer W.**, **Lieb I.**, *Funktionentheorie*, 9. baskı. Vieweg-Teubner, 2005.

[25] **Freitag E.**, **Busam, R.**, *Complex Analysis.* Springer, 2005.

[26] **Gamelin T. W.**, *Complex Analysis.* Springer 2001.

[27] **Gilman J.P.**, **Kra I.**, **Rodrigez R.E.**, *Complex Analysis.* Springer 2007.

[28] **Goursat E.**, *A Course in Mathematical Analysis Vol.1*, Ginn and Company, 1904.

[29] **Grai J.D.**, **Morris S.A.**, *When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic?* Am. Math. Monthly 85 (1978).

[30] **Grauert H.**, *Funktionentheorie I.* Vorlesungsausarbeitung, 1964/65, Göttingen.

[31] **Heins M.**, *Complex Function Theory.* Academic Press 1968.

[32] **Herz A.**, *Repetitorium Funktionentheorie*, Vieweg, 2003.

[33] **Hurwitz A.**, **Courant R.**, **Röhrl H.**, *Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen,* 4. baskı. Springer 1964.

[34] **Jones G.A.**, **Singerman D.**, *Complex Analysis*, Camb.Un. Press, 1987.

[35] **Klein F.**, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* Math. Annallen, Bd. 43.

[36] **Knopp K.**, *Problem Book in the Theory of Functions I*, Dover, 1948.

[37] **Knopp K.**, *Problem Book in the Theory of Functions II*, Dover, 1952.

[38] **Krzy J.G.**, *Problems in Complex Variable Theory*, Elsevier, 1971.

[39] **Lang S.**, *Comlpex Analysis*, 4. baskı. Springer 1999.

[40] **Markushevich A.I.**, *Theory of Functions of a Complex Variable.* Chelsea Publihing, 1985.

[41] **Marshall D.E.,** *Complex Analysis*, Camb. Univ. Press, 2019.

[42] **Meier K.**, *Zum Satz von Loomann–Menchoff.* Comm. Math. Helv. 25 (1951).

[43] **Menchoff D.**, *Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann.* Fund. Math. 25, 59–97 (1935).

[44] **Muir J.R.**, *Complex Analysis.* Wiley, 2015.

[45] **Narashimhan R.**, *Complex Analysis in One Variable.* Birkhäuser (1985).

[46] **Noguchi J.**, *Introduction to Complex Analysis.* Am. Math. Soc. 1998.

[47] **Osgood W.F.**, *Lehrbuch der Funktionentheorie I*, Teubner, 1912.

[48] **Palka B.P**., *An Introduction to Complex Function Theory.* Springer, 1990.

[Pap] **Pap E.**, *Complex Analysis Through Examples and Exercises*, Kluwer, 1999.

[49] **Ponnusamy S., Silverman H.**, *Complex Variables with Applications,* Birkhäuser, 2006.

[50] **Priestley H.A**, *Introduction to Complex Analysis.*Oxford Press, 2003.

[51] **Remmert R.**, *Funktionentheorie 1,* 4. baskı. Springer 1995 (İnglizce çevirisi Springer'de var).

[52] **Remmert R.**, **Schumacher G.**, *Funktionentheorie 2,* 3. baskı. Springer 2007.

[53] **Rodriguez R.E.**, **Kra I.**, **Gilman J.P.**, *Complex Analysis*, 2. baskı, Springer, 2013.

[54] **Rudin W.**, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[55] **Rudin W.**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[56] **Saks S.**, **Zygmund A.**, *Analytic Functions*, 3. baskı. Elsevier 1971.

[57] **Shakarchi R.**, *Problems and Solutions for Complex Analysis*. Springer, 1999.

[58] **Shastri A.R.**, *Basic Complex Analysis of one Variable*. 2010.

[59] **Simon B.**, *Basic Complex Analysis, Part 2A*. AMS, 2015.

[60] **Steinitz E.**, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*. Journal f. reine und angewandte Math. 144, 1, (1914).

[61] **Tauvel P.**, *Analyse Complexe pour la Licence 3*. Dunod, 2006.

[62] **Tauvel P.**, *Exercises d'Analyse Complexe*, Masson, 1994.

[63] **Taylor M.,** *Introduction to Complex Analysis, ders notu.*

[64] **Valiron G.**, *Théorie des Fonctions*, Masson, 1955.

[65] **Volkovyskii L.I.** et al., *A Collection of Problems in Complex Analysis.* Dover, 1965.

[66] **Wilde I. F.**, *Lecture Notes on Complex Analysis*. Imperial College Press 2006.

Dizin