Ali Nesin

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye...

Ali Nesin

Aksiyomatik Kümeler Kuramı I

Sayıların İnşası

İçindekiler

Önsöz

Matematikçilerin sürekli hesap yaptıkları, boş zamanlarında koca koca sayıların kareköklerini hesapladıkları ya da küplerini filan aldıkları, bir nevi mazoşist tuhaf varlıklar oldukları zannedilir. Oysa hiç öyle değildir. Rastgele bir matematik kitabında sayfa numaralarından başka neredeyse hiç sayı yoktur, olduğunda da bu sayılar çoğu zaman ya 0 ya da 1'dir. Matematikçiler sayıların kendileriyle değil, olsa olsa sayıları simgeleyen x ve y gibi simgelerle ya da sayı kümeleriyle uğraşırlar.

Öte yandan sayılar elbette matematiğin en temel nesnelerindendir. Tarihsel olarak sayılar, geometriden sonra matematiğin gelişmesinde en çok rol oynayan nesnelerdir.

Bu kitapta doğal sayılar kümesini, tamsayılar kümesini, kesirli sayılar kümesini ve gerçel (reel) sayılar kümesini matematiksel olarak ve matematiğin ta en başından başlayarak inşa edeceğiz. Sadece sayı kümelerini değil, bu kümeler üzerine tanımlanmış toplama ve çarpma gibi işlemleri ve hepimizin "bildiği" $\leq$ sıralamasını da, yani "sayı sistemlerini" matematiksel olarak inşa edeceğiz.

Sayıları teker teker tanımlayamayacağımız belli. Çok sayı var ve hepsini teker teker tanımlayacak kadar zamanımız yok. Sayıları teker teker tanımlamak yerine, hepsini birden aynı anda tanımlayacağız; başka seçeneğimiz de yok. Yani sayıları tanımlamak yerine sayı kümelerini tanımlayacağız. Sayıları da, tanımladığımız bu sayı kümelerinin elemanları olarak tanımlayacağız. Bu basit fikir aslında modern matematiğin en önemli katkılarından biridir: Kümeler elemanlardan daha önemlidir.

Lavoisier'nin ünlü yasasına göre, ki MÖ 400'lerde yaşamış Anaksagoras bu düşünceyi ilk belirtmiştir, yoktan bir şey var edemeyeceğimize göre, bu inşaları yapmak için bazı varsayımlarda bulunmamız lazım. Bu tür varsayımlara matematikte aksiyom adı verilir. Önce kümeler kuramının en doğal, doğruluğu en su götürmez, en masum aksiyomlarını temel alarak 0, 1, 2, 3 gibi birkaç doğal sayı inşa edeceğiz. Ama daha sonra, sonsuz bir kümenin varlığını söyleyen bir aksiyomu kabul ederk tüm doğal sayılar kümesini, yani tüm doğal sayıları tek bir hamleyle inşa edeceğiz. Kesirli sayılar ve gerçel sayılar ardından gelecek. Sadece yıllar boyunca aşina olduğumuz (ya da aşina olduğumuzu sandığımız) sayı sistemlerini inşa etmekle kalmayacağız, bu birinci ciltte aynı zamanda matematiğin temeli olan kümeler kuramının (hepsini değil) en basit aksiyomlarını da göreceğiz. Ve sözünü ettiğimiz inşaları yapmak için ne kadar aksiyoma ihtiyacımız varsa o kadar aksiyom kullanacağız, ne bir fazla ne bir eksik.

Sayı sistemlerinin nasıl inşa edilmediğini bilmeden de matematik yapılabilir, nitekim yapılıyor da. Ama bu kitapta (ve bir sonraki cilt olan [Ne1]'de) işlenen konuların derin olduklarına, matematiğe felsefi hatta metafizik bir boyut kattıklarına, dolayısıyla bu konuları bilmenin ufuk açacağına, çap genişleteceğine, mutluluk getireceğine inanıyorum. Ne de olsa, bizim dışımızda bir biçimde var olan sayıları sadece zihinsel olanaklarımızla bir kez daha yaratıyoruz.

Bu kitap aksiyomatik kümeler kuramının birinci kitabı olarak addedilebilir. Aksiyomatik kümeler kuramında bir adım daha ileri gitmek ve matematik için daha fazla tehlike arzedebilecek aksiyomlarla tanışmak için bu kitabın ikinci cildi olarak [Ne1] okunmalıdır.

Bir önceki paragraftaki "daha fazla tehlike arzedebilecek" sözleri bilinçli yazılmıştır: Bu kitapta açıklanan masum aksiyomların bile matematikte bir çelişkiye yol açmayacağı kanıtlanamamıştır; ikinci cilttekiler çok daha tehlikelilerdir. Bu aksiyomlardan bir çelişkinin çıkacağı kanıtlanamadığı gibi çelişki çıkmayacağının kanıtlanamayacağı da kanıtlanmıştır. Tabii bunun kanıtlanamaması matematikte illa bir çelişki olduğu anlamına gelmez. Çelişki olabilir de olmayabilir de. Eğer çelişki bulursak matematiğin (aksiyomlarının) çelişkili olduğunu anlarız, ama matematiğin (aksiyomlarının) çelişkiye yol açmayacağını hiçbir zaman anlayamayacağız. Bu kitabın yazarının düşüncesine göre ne bu kitapta açıklanan aksiyomlardan ne de [Ne1]'de açıklanan ek aksiyomlardan bir çelişki çıkmaz. Bu tabii sadece felsefi bir inançtır, matematiksel bir kesinlik değildir.

Her ne kadar okurdan fazla bir önbilgi talep etmiyorsak da, kimi zaman okurdan belli bir matematiksel olgunluk bekleyebiliriz. Önbilgi talep etmiyoruz derken abartmayalım, okur bu kitaba el atmadan önce sezgisel kümeler kuramını mutlaka içselleştirilmiş olmalıdır. Türkçe kitap olarak bu konuda [Ne2]'yi önerebiliriz.

Okura şu bilgi de gerekli olabilir: Özellikle ilk bölümlerde her okunan her satır hak ettiği ölçüde hemen anlaşılamayabilir. İlk yüz sayfanın bütünü okunduğunda ilk yirmi sayfada yazılanlar daha bir anlam kazanacaktır. Mesela belki gereksiz yere uzun bulunabilecek ilk kısmın ilk bölümünün ilk altbölümü (Altbölüm 1.1) kitap ilerledikçe daha bir anlam kazanacaktır, tekrar tekrar okunmalı. Yani elinizdeki kitap emeğinizin karşılığını anında vermeyebilir. Okurdan sabır rica ediyorum. Sabrının ve emeğinin mükafatını alacağına dair hiçbir kuşkum yok.

Yalnızca kümeler kuramı ve sayıların inşası yok bu kitapta, ayrıca analiz ve cebir de var. Kitabın sonuna da bazı okurların ilgilenebileceği ekler koydum.

Bu kitabın içeriği, 1996'da kurulduğundan beri İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde birinci sınıf matematik öğrencilerine verdiğim ve daha sonra Matematik Dünyası dergisinde kaleme aldığım Aksiyomatik Kümeler Kuramı ders notlarından oluşmuştur. Tabii yazıların eli yüzü düzgün bir kitap hâline gelmesi için gereken düzenlemeleri yapmak gerekti, ancak pek başarılı olamadığımı itiraf etmeliyim. Dergi yazıları doğal olarak tekrar içerir, o tekrarları asgariye indirmeye çalıştım. Yıllarımı aldı! Okurun hoşgörüsüne sığınarak yapabildiğim kadarını yayımlıyorum.

Teşekkür. Kitabı LaTeX'e aktaran Aslı Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin'a ne kadar teşekkür etsem azdır. Eşim Özlem Beyarslan'a huzurlu bir çalışma ortamı ve sabrı için teşekkür ederim. Küçük çocuklarım Kuzgun ve Turna'ya huzurlu olmasa da neşeli ve mutlu bir ortam sağladıkları için teşekkür ederim. Bundan neredeyse 20 yıl kadar önce bu dersi alan eski öğrencim, yeni iş arkadaşım Sonat Süer birkaç kademede bu kitabın ortaya çıkmasında yardımcı oldu. Ebru Nayır kitabı satır satır okuyarak birçok hatayı ve anlatım bozukluğunu giderdi. Sonat'a ve Ebru'ya da çok teşekkürler.

Dediğim gibi bu iki cilt, İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde birinci sınıf matematik öğrencilerine verdiğim iki dönemlik bir dersin içeriğinden oluşmaktadır. Matematik eğitimine öyle ya da böyle bulaşmış biri böyle bir dersin birinci sınıflar için pek standart olmadığını, hatta hiç uygun olmadığını düşünebilir. Hatta birçok okulda buna izin verileceğini bile sanmıyorum, ne izin verilmesi, teklif edilmesi bile düşünülemez. Artık... Ama bundan yaklaşık yarım yüzyıl önce, Anglosakson eğitim sisteminin dünyaya egemen olmadığı, Bolonya süreci gibi eğitimi tekdüzeleştiren saçmalıkların hüküm sürmediği yıllarda Fransa'da eğitim görme şansına eriştim. Bourbaki ve Sovyetler Birliği'nde basılan kitapları okuyarak kendimi yetiştirdim. Zihinsel gelişimin yavaş yavaş ve öğrenciyi sarsmadan olmayacağına kanaat getirdim. Özellikle matematik eğitiminde soyut düşünceye erken geçilmesi gerektiğini düşünenlerdenim. Bana bu dersleri verme olanağı tanıyan Bilgi Üniversitesi kurucularından Oğuz Özerden'e ve Yiğit Ekmekçi'ye güvenlerinden ve üniversitede sağladıkları özgürlük ortamından dolayı minnettarım.

Ali Nesin
2011-2020

Kısım I

Doğal Sayılar

1. Felsefi Giriş

1.1 Gerçek Nedir Ne Değildir?

Gerçek nedir, gerçek var mıdır, varsa benden bağımsız mıdır ve ona nasıl ulaşırım? Ulaştığım ya da ulaştığımı sandığım gerçeği başkalarıyla nasıl paylaşırım, onları nasıl ikna ederim? "Anlamak" ne demektir? Bir şeyi nasıl anlarız ve anladığımızı nasıl anlarız? Bazı verilerden bir başka sonuç nasıl ve hangi kurallara göre çıkarılır? Bu kurallara ne kadar güvenebiliriz? Kanıt nedir? Kanıtlanan şey illa doğru olmak zorunda mıdır? Hatta "doğru" ne demektir? Bu ve benzeri soruları sürekli sormadan, verilen yanıtları sürekli sorgulamadan tam anlamıyla matematikçi olunamaz.

Her matematikçinin bu soruların yanıtını vermelidir demiyoruz, çünkü bu soruların bazıları kesin yanıtı olmayan çok derin felsefi sorular da olabilir ama yine de matematikçi bu konularda sürekli düşünüp kendi kendine tartışması gerekir.

Matematikçi ne de olsa doğruyu bulduğuna, gerçeğe ulaştığına inanır, doğru mantıkla, doğru akıl yürütmeyle yanlış yapamayacağını ve böylece gerçeğe yaklaştığını düşünür. Gerçek hakkında doğru bir şeyler söylediğini iddia eden matematikçinin elbette gerçek ve doğru hakkında düşünmesi gerekir. Bu da ister istemez yukarıdaki soruları sordurtur.

Ahmet'in ya da Ayşe'nin gerçeği (ya da doğrusu) farklı olabilir, Ahmet ve Ayşe olayları farklı yaşayabilirler. Gerçek, kişiden kişiye değiştiği gibi coğrafyadan coğrafyaya da değişir: Türkiye'nin gerçeğiyle ABD'nin gerçeği bir olamaz. Gerçek, kişiye ve coğrafyaya göre değiştiği gibi zamana göre de değişir: Ortaçağ'ın gerçeğiyle bugünün gerçeği bir değildir.

Bunlar herkesin bildiği, kıraathanede bile duyabileceğimiz beylik sözler. Herhâlde bunlardan söz edeceğimi sanmıyorsunuz bir matematik kitabında! Matematik, coğrafyadan ve zamandan bağımsız olarak gerçeği yakaladığını iddia eder, çünkü matematikçinin uğraş alanı (her ne kadar bu dünyayla ilgili olsa da) coğrafyadan ve zamandan bağımsızdır.

Gerçeğin ve doğrunun kişiye, coğrafyaya ve tarihe göre değişeceğini söylerken, sözünü ettiğimiz gerçeğin ya da doğrunun ne olduğunu biliyor muyuz? Gerçek ya da doğru üzerine herhangi bir söz edebilmek için önce bu kavramların ne olduklarını bilmeliyiz. Tanımı bilinmeyen bir kavram üzerine ne söyleyebiliriz ki?

Neyse ki biz bu kitapta bizim dışımızdaki gerçekten sözetmeyeceğiz. Bu kitapta, tamamen zihinsel ve soyut bir gerçek, matematiksel adıyla bir "teori" yaratacağız, bizim dışımızdaki (ne idüğü belirsiz) gerçeği yansıttığına inandığımız bir teori...

Matematik (yani yaratacağımız teori) bizim dışımızdaki dünyadan çok da uzak olmamalı, ne de olsa matematikle teknolojik harikalar yaratıyoruz, internet çalışıyor, uçaklar uçuyor, cep telefonları çalışıyor... Buradan matematiğin bizim dışımızdaki dünyayı az çok anladığını çıkarabiliriz. (Ama bir dakika, belki biz matematikle gerçeği değil, işimize yarayanı anlıyoruz... Geçelim...)

Bu konular çok zordur, hatta imkânsızdır ama bir o kadar da eğlencelidir. Daha sonra arada bir kıyısından köşesinden bulaşmak üzere şimdilik ara verelim. Akılda tutulması gereken şey matematiğin zihinsel bir uğraş olduğudur, o kadar zihinseldir ki ölçüp biçme gibi pratik uğraşlarla hiçbir ilgisi yoktur. Tabii saf matematikten bahsediyoruz, uygulamalı matematikten değil. Örneğin π sayısını somut bir çemberin, mesela bir bisiklet tekerinin çevresini ölçüp aynı çemberin çapına bölerek elde edemezsiniz, olsa olsa π'ye yakın bir sayı bulursunuz. İsterseniz deneyin, 100 kişi bu yöntemle π sayısını virgülden sonra 4 basamağa kadar hesaplamaya çalışsın, eminim herkes farklı sonuçlar bulacaktır. Bir başka örnek:

$$0{,}12345678910111213141516 17\ldots$$

metre uzunluğunda bir ip elde edemezsiniz, çünkü fiziksel uzunluğu sonsuza kadar bölemezsiniz. π ve yukarıda yazdığım sayı zihinsel nesnelerdir. Mesela

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510 58209\ldots$$

gibi bir sayıdır ve bu hesap tamamen zihinsel olarak yapılmıştır, ölçüp biçerek değil.

Demokrasi en iyi yönetim biçimidir tümcesini ele alalım. Bu tümce ne kadar doğrudur? Böyle bir ifadenin doğru olması için her şeyden önce "demokrasi"nin tanımlanması gerekir. Demokrasi tanımlandıktan sonra "yönetim biçimi" tanımlanmalı. Arkasından "en iyi" tamlaması tanımlanmalı. Ve tüm bu tanımlar yapıldıktan sonra "demokrasi en iyi yönetim biçimidir" tümcesi kanıtlanmalı. (Ama bunun için de "kanıt"ın ne demek olduğu bilinmeli. "Kanıt" kavramı tanımlandıktan sonra "kanıtlanan" önermelerin doğru oldukları gösterilmeli, çünkü "kanıtlanmakla" "doğru olmak" eşdeğer kavramlar olmayabilir! Bu ağır konuyu da geçelim.) İşimiz zor yani!

Tabii, bir başkası, "benim 'demokrasi', 'yönetim biçimi' ve 'en iyi' tanımların farklı" deyip sizin gerçek diye sunduğunuz önermeyi reddedebilir. (Hatta kanıt yönteminizi de reddedebilir.) Ama siz de buna karşı, "Bu kavramlara benim verdiğim tanımlarla (ve benim kanıtlama yöntemimle) önerme doğrudur" diyebilirsiniz. Eğer kanıtınız doğruysa kimse buna karşı çıkamaz. (Kanıtın ne olduğu, bir kanıtta hangi akıl yürütmelerin yapılabileceği de gerçeğin ne olduğu konusuyla yakından ilişkili bir sorudur.)

"Demokrasi"nin tanımı ne olmalıdır tartışması da kendi başına ilginç bir sorudur belki ama şu anda "tanım nasıl olmalıdır, tanımın özellikleri neler olmalıdır?" problematiğine girmek istemiyorum. İstemiyorum ama yine de tanım konusuna ucundan değinmek istiyorum. Ülkemizde eğitim sistemi hakkında sürekli konuşulur. İyidir denir, kötüdür denir, buna da şükür denir, ama bir eğitim sisteminin ne olduğu ya da ne olması gerektiği konusunda kimse pek düşünmez. Kendi başına bir "eğitim sistemi" yoktur. Eğitim sistemini biz insanlar yaratırız ve bir amaca ulaşmak amacıyla yaratırız. Eğitim sisteminin amacı ya da amaçları belirlenmeden eğitim sisteminin iyiliği ya da kötülüğü hakkında bir söz söylenemez. Asıl soru, var olan eğitim sisteminin belirlenen amaçlarına ulaşıp ulaşmadığıdır. Matematiksel tanımlar tam olarak böyle yapılır. Önce amaç belirlenir; ardından o amaca hizmet edecek tanım yapılır, hatta amaca uyan nesne yaratılır. Örneğin sayıların amacı saymaktır, toplama çarpma gibi işlemler yapmaktır. Sayıları bu amaca hizmet edecek biçimde tanımlamalıyız. 2'yi, 4'ü, toplamayı nasıl tanımladığımızın pek önemi yoktur aslında, yeter ki $2 + 2 = 4$ gibi doğru olması gereken eşitlikler kanıtlanabilsin. Hayat tabii matematikten çok daha zor, hayatta doğruya yanlışa karar vermek hiç kolay değil, hatta galiba çoğu zaman mümkün de değil, ama matematik hayatın basitleştirilmiş bir versiyonu (ya da modeli) olduğundan, matematikte doğru ve yanlış tanımlanabilir.

Yukarıda tanımdan ve kanıttan sözettik. Kullanılan sözcüklerin tanımları verildikten ve tümcenin ya da önermenin anlamı iyice anlaşıldıktan sonra tümcenin kanıtlanabileceğini söyledik. Kanıt kavramı üzerine daha çok yoğunlaşmak amacıyla anlamının bilindiğinden kuşku duyulmayan bir tümceyi ele alalım: *Ankara Türkiye'nin başkentidir.* Bu tümcenin doğru olduğundan kuşkumuz yok herhâlde. Ankara'nın, Türkiye'nin ve "başkent"in tanımları belli. Peki nasıl kanıtlarsınız doğru olduğunu bildiğiniz bu tümceyi? "Anayasa'da öyle yazıyor" demeniz yeterli midir? Eğer "başkent"in tanımında böyle yazıyorsa yeterlidir elbet. Ben de size "Gösterin Anayasa'yı" derim. Diyelim Anayasa'yı buldunuz, doğru sayfayı açıp önüme koydunuz. "Nereden belli bunun gerçek Anayasa olduğu" diye sorabilirim size. O zaman birlikte Ankara'ya gideriz, TBMM tutanaklarına bakarız. Milletvekillerinin imzaları orada, hepsi Ankara'yı başkent ilan etmişler. Bu kez "Nereden belli bu imzaların sahte olmadığı?" diye sorarım size... Hatta gittiğimiz yerin Ankara olduğu, girdiğimiz binanın Meclis olduğu nereden belli?

Hiçbir biçimde Ankara'nın Türkiye'nin başkenti olduğunu kanıtlayamazsınız. Tüm Türkiye tek bir ağızdan "Ankara Türkiye'nin başkentidir" diye bağırsa, gene de ikna olmam. Büyük bir olasılıkla öyledir, Ankara gerçekten Türkiye'nin başkentidir ama yüzde yüz ikna edilemem. Belki benim tuhaf bir hastalığım vardır, bu öyle bir hastalıktır ki, Türkiye'nin başkentinin Ankara olmadığını öğrendiğim anda öleceğim... Herkes bunu biliyor ama ben bilmiyorum. İsterseniz paranoya deyin, ama içime öyle bir kuşku düşüverdi birden. Öleceğimi bildiğinizden ve ölmemi istemediğinizden bana numara yapıyorsunuz, bana oyun oynuyorsunuz. Çocukluğumdan beri kandırılmışım... Benim için özel gazeteler basılmış, özel haritalar çizilmiş... Hâlâ daha kandırıyorsunuz... Yutmam!

Elinize bir elma alın. Bu elmayı bırakırsanız ne olur? Elma düşer. Öyle mi? Nereden biliyorsunuz elmanın düşeceğini?

Bırakırsınız elmayı, elma gerçekten düşer.

– İşte, dersiniz bana, elma düştü.

Gerçekten de elma düştü. Gözlerimle gördüm. Haklıymışsınız.

– Peki... Bir daha bıraksanız ne olur acaba?

– Gene düşer elbet!

– Nereden belli?

– Çünkü hep düştü!

– Biliyorum hep düştüğünü, ama bundan sonra ne olacak acaba?

– Gene düşecek...

– Nereden biliyorsunuz hep düşeceğini?

– Bugüne kadar hep düştü, bundan sonra da hep düşecek...

– Bugüne kadar elmanın hep düşmesi bundan sonra da elmanın hep düşeceği anlamına gelmez ki!

– Gelir...

– Neden?

– Çünkü aynı koşullarda tekrarlanan deneyler aynı sonuçları verir...

– Neden?

– Bu bir ilkedir, fizik ilkesi! Bunu da mı bilmiyorsun!

– Biliyorum ya da bilmiyorum... Ama siz nereden biliyorsunuz bu ilkeyi? Bu ilkeye göre ben hiç ölmeyeceğim, çünkü bugüne dek hiç ölmedim!

– Ama koşullar değişiyor. Yarınki sen bugünkü sen olmayacaksın ki... Bugünün koşullarında ölmeyen biri, yarının değişen koşullarında ölebilir.

– Sanki bugün düşen elmanın koşulları yarın da geçerli olacak... Aynı koşullarda tekrarlanan deneylerin hep aynı sonuçlar doğurduğunu varsaysak bile aynı koşullar hiç tekrarlanmadığından bu ilke pek bir işe yaramaz. Dolayısıyla elmanın da hep yere düşeceğini kanıtlayamazsınız...

Yanlış anlaşılmasın. Bırakılan elmanın yere düşeceğini ben de sizin gibi biliyorum ama şeytanın avukatlığını yapıp (düşmeyeceğini değil) düşmeyebileceğini ileri sürebilirim. Burada üstüne basmak istediğim konu, bir önermenin doğruluğundan nasıl emin olabileceğimizdir.

Bir gün bir içki masasında bu konulardan söz ederken, hatta önümüzdeki şişenin var olup olmadığından bile emin olamayacağımızı söylerken, bir arkadaşım,

– Şimdi, dedi, kafana geçiririm bu şişeyi, anlarsın şişenin gerçek olup olmadığını!

Çok komik! Ben dahil hepimiz güldük. Konunun derinliğine yakışan ciddiyete geçtiğimizde şöyle yanıtladım arkadaşımı:

– Kafama bir şey geçirmişsindir ve ben sersemlemişimdir. Bundan benim kuşkum olmayabilir. Ama, bir, kafama gerçekten şişe mi geçirdin? İki, kafama gerçekten bir şişe geçirmiş olsan bile, bunu başkalarına kanıtlayabilir miyiz? Senin bu eylemini filme alıp cümle âleme göstersek bile, filmin sahte olduğunu öne sürüp inanmayanlar olabilir. Saddam'ın yakalandığına bile inanmayanlar var, sahtesinin yakalandığını öne sürüyorlar! Başkasını ikna edemediğin bir önerme doğru ya da gerçek addedilebilir mi? Doğru, başkasını ikna edebildiğin ölçüde doğrudur!

Bu son söylediğim doğrunun bir tanımı olabilir mi? Felsefi anlamda bilmiyorum ama matematiksel anlamda "doğru", istisnasız herkesi ikna edebileceğimiz önermedir.

Sanırım Descartes'ın "Düşünüyorum demek ki varım" akıl yürütmesinden söz etmenin tam yeri. Modern felsefenin kurucusu sayılan Descartes, var olduğundan kuşku duyar. Belki bir rüyadadır, belki hayal görüyordur, belki Tanrı ya da tanrılar onu kandırıyorlardır. Var olduğunu, hiç kuşku duymayacağı biçimde, duyularından bağımsız olarak ispatlamak ister. Bunun için de her şeyden kuşku duymalıdır, herhangi bir gerçeği önbilgi olarak kabul etmemelidir. Yani Descartes hiçten yola çıkarak bir gerçeğe, var olduğunun kanıtına ulaşmak istemektedir. Tabula rasa yapmıştır, yani levhayı tamamen silmiştir Descartes tüm bunları aklından geçirirken, birden, emin olduğu tek şeyin her şeyden kuşku duyduğu olduğunu anlar. Kuşku duyuyordur, yani düşünüyordur. Demek ki bir şey var ki düşünüyor (ya da kuşku duyuyor). Olmasa düşünemez ki, düşünme eylemini ancak bir varlık yapabilir. Buradan da meşhur, "Düşünüyorum demek ki varım", Latincesiyle *cogito ergo sum* önermesi doğar. Dikkat: Birçok kişinin sandığı gibi Descartes burada "düşünmem sayesinde varım, düşünmeseydim var olmayacaktım, önce düşünce sonra varlık" demiyor; sadece "düşünmem sayesinde var olduğumu anlayabiliyorum" diyor.

Descartes'ın akıl yürütmesi gerçekten şaşırtıcı, çünkü hiçbir önbilgi kabul etmeden bir gerçeğe ulaşıyor...

Ama bir dakika... Descartes gerçekten bir gerçeğe mi ulaşıyor? Hiçbir varsayım yapmadan üstelik. Descartes'ın varlığından kim emin? Descartes emin! Ya bizler? Acaba bizler de Descartes varlığından Descartes'ın kendisi kadar emin miyiz? Aynen Descartes'ın sunduğu gerekçelerden dolayı doğrusu ben Descartes'ın varlığından emin olamıyorum. Ya Descartes beni kandırıyorsa, ya gerçekten düşünmüyorsa, nereden biliyorum Descartes'ın düşündüğünü? O söylüyor diye mi? Descartes'a neden güveneyim ki? Bu akıl yürütmeyle Descartes kendi varlığından emin olabilir belki ama bize var olduğunu kanıtlayamaz. Çünkü Descartes'ın akıl yürütmesinde "ben", yani "benlik duygusu" önplandadır. "Ben" kuşku duyuyorum... "Ben" düşünüyorum... Oysa ben Descartes değilim ki! Bu yüzden Descartes'ın (bu çok değerli) argümanı benim için geçerli değil. Kanıtın amacı sadece ikna olmak değildir, ayrıca başkalarını da ikna edebilmektir.

Descartes'ın fikrinden devam edelim. Descartes kendi varlığını kendine kanıtladı belki ama bizi ikna edemedi. Bulduğu bu olguyu bizimle paylaşamadı, afedersiniz, paylaştı ama tam ikna olmadık. Matematikle hemen hemen diğer her uğraş dalının arasındaki en önemli farktır bu. Matematik ortak akıldır. Matematik aklı başında herkesi ikna eder. Siyaset, felsefe, din ve tüm sosyal konularda farklı görüşler vardır ama matematikte olamaz. (Farklı matematik teorileri, matematiğin ne olması gerektiği konusunda farklı görüşler olabilir, demek istediğim kabul edilmiş bir matematik teorisinin içinde farklı görüşlerin olamayacağı.)

Sonuç olarak bizim dışımızda bir dünya olduğu bariz. Mesela Descartes bize insanın kendi varlığını (başkalarına değil ama) kendine kanıtlayabileceğini gösterdi. Demek ki orada biri var ki bize bir şey öğretiyor... Descartes mı kimdir nedir bilemem ama bişeyler bana akıl veriyor.) Hepimiz -ayrı ayrı- böyle bir dünyanın varlığından eminiz. Etrafımız Descartes ya da elma diye adlandırdığımız bazı tuhaf şeylerle dolu. Bizim dışımızda bir dünya (ya da evren) var da, o dünya nedir ve nasıl anlaşılır? Zaten anlamak ne demektir ki? Bizim dışımızda olan bir şeyi nasıl (kısmen de olsa) anlayabiliriz ki?

Şurası kesin, anlamak zihinsel bir uğraştır. Ancak zihnimizle anlayabiliriz.

Bizim dışımızdaki dünyayı tam olarak anlamamız imkânsızdır. Biz ancak bu anlaşılmaz dünyanın daha başa çıkılır bir kopyasını zihnimizde kurarak dünyayı anlamaya çalışabiliriz. Yani gerçek gerçeğe (her ne demekse ve her neyse!) ulaşamayız belki ama zihinsel bir gerçeklik kurarak gerçek gerçeğe ulaşmaya çalışabiliriz ya da ulaştığımızı iddia edebiliriz. Kurduğumuz dünyanın bu kopyası sayesinde uçağa binebildiğimize göre, bu iddiamız tamamen yanlış değil.

Anlaşılabilir ve başkasına aktarılabilir tek bir gerçek vardır, o da matematiksel gerçektir. Bu anlamda başka gerçek yoktur, olamaz. Matematiksel gerçeği de sadece zihnimizde algılarız. Zorunlu olarak...

Bu ve bir sonraki ciltte [Ne1] okuyacaklarınız çağımızın matematikçilerinin gerçek gerçeği zihinlerinde nasıl canlandırdığıyla ilgilidir.

Önümüzdeki birkaç bölümde doğal sayıları, toplamayı ve çarpmayı inşa edeceğiz ve örneğin, $2+2=4$ "gerçeği"ni matematikçilerin nasıl algıladıklarını göreceğiz. Daha sonra başka sayı sistemlerini inşa edeceğiz. Bir sonraki ciltte bildiğimiz sayılar dünyasını biraz aşacağız, bir tür sonsuz sayılarla ilgileneceğiz.

Şaşırtıcı bir dünyanın sizleri beklediğine dair güvence verebilirim.

1.2 Doğal Sayılar Ne Kadar Doğaldır?

Bu kitapta sayıları "anlayacağız." İlk olarak doğal sayılardan başlayacağız. "Sayıları anlamak" deyince, sanki bizim dışımızda bir yerde, çok belirgin ve fiziksel bir biçimde sayılar var da biz onları anlamak istiyoruz gibi bir anlam çıkabilir.

"Anlamak" üzerine düşünelim biraz. Anlamak ne demektir? Neyi, nasıl ve ne dereceye kadar anlayabiliriz? Anlama çeşitleri nelerdir? Bu tür sorularla ilgileneceğiz bu altbölümde. Derin felsefe... Daha derini yok! Ya da ben bilmiyorum.

"Sayıları anlamak"la "zürafaları anlamak" arasında bir ayrım var mı? Var gibi... Zürafalar orada. Karşımdalar. Otluyorlar, geziniyorlar, koşuşuyorlar. Görüyorum onları. Zürafaların sindirim sistemini anlamaya çalışabilirim örneğin. Çünkü o sindirim sistemi orada. Benden bağımsız bir biçimde var.

Oysa sayılar ortalıkta görünmüyorlar. Ben hiç beş görmedim hayatımda, bundan sonra da görmeyeceğim. Şimdiye kadar kimse "çok güzel bir beş geçti kapımın önünden" dememiştir, çünkü beş geçmez, beş yürümez, beş kırılmaz, beş uçmaz, beş susamaz, acıkmaz, yaşlanmaz, ölmez... Beş hiçbir şey yapmaz! Oysa zürafa bir şeyler yapar...

Zürafa orada. Bu çok belli. Oysa beş'in ne kadar orada olduğu pek belli değil.

Zürafayı alır karşıma incelerim, ama ya beş'i?

Her ne kadar "beş zürafa" bir anlam ifade ediyorsa da, tek başına "beş"in ne anlama geldiği o kadar belli değil.

"Beş zürafa" bir anlam ifade ediyor mu dedim? Yanıldım galiba... "Bir zürafa"nın anlamı ve hatta fiziksel varlığı bile tartışılabilir, çünkü o "bir zürafa" durmadan değişmektedir. O durmadan değişen zürafaya sanki hiç değişmezmiş, sanki sabit bir varlıkmış gibi "zürafa" denmesi tam gerçeği yansıtmaz. Her zürafa bir diğerinden farklıdır ve her zürafa her an değişir. "Bir zürafa" değil, durmadan değişen zürafalar vardır! Hatta daha doğmamış zürafalar bile vardır! Dolayısıyla aslında "zürafa" da bir kavramdır. "Zürafa", "zürafa" adını verdiğimiz durmadan değişen varlıkların ortak adıdır. "Zürafa" sanıldığından daha soyut bir şeydir.

Peki zürafa bir kavramsa, "beş zürafa" ne demektir? Aynı kavramdan beş tane olur mu? Galiba "beş zürafa", "zürafa kavramının kapsamına giren varlıkların beşi" anlamına geliyor... O varlıklar da durmadan değiştiklerinden tümüyle kavrayamayacağımız, bütünüyle algılayamayacağımız şeyler. Birini bile kavrayamazken biz beşinden sözediyoruz...

Hayvan zürafa ölür, kavram zürafa ölmez. Hayvan zürafa durmadan değişir, kavram zürafa hiç değişmez. Hayvan zürafayla kavram zürafayı birbirine karıştırmamak lazım. Kavram zürafa beş'e çok daha yakın.

Konu gittikçe karmaşıklaşıyor ve içinden çıkılmaz bir hâl alıyor.

Neyse ne!.. Sonuç olarak zürafa ne de olsa zürafadır. Oradadır. Yadsınamaz bir biçimde, ya da çok zor yadsınır bir biçimde... Oysa sayılar bir zürafa kadar orada değiller.

Sayıları göremiyoruz diye sayılar yok diyebilir miyiz? Belli ki sayılar var. Bakın, sözünü ediyorum şimdi ve anlaşıyoruz. Sayılar, hiçbir yerde olmasalar bile beynimizde varlar. Zihinsel bile olsalar varlar. Zürafalarla aynı düzlemde değil belki ama "beş" de var. Descartes yazsaydı bu satırları, "beş'i düşünüyorum demek ki beş var" derdi. Haklı olarak...

Çoğu insanın bir elinde beş parmak vardır. Bunu herkes bilir. Demek ki hepimizin uzlaştığı bir beş kavramı var. İçinde "beş" geçen bu önermeyi hepimiz anlıyoruz ve doğru buluyoruz. Demek ki "beş"e ortak bir anlam verebiliyoruz. Tüm insanların beş'e ortak bir anlam vermeleri, herhâlde ancak beş'in bizden bağımsız bir biçimde var olmasıyla olabilir.

Kaldı ki, beş kavramı birbiriyle hiç ilişkisi olmamış uygarlıklar tarafından birbirinden bağımsız olarak da bulunmuştur. Demek ki bizim dışımızda bir yerde var bu "beş"... Öyle olmalı... Beş var ki, biraz düşünebilen her uygarlık belli bir seviyeye gelince beş'i kavrıyor ve kavram olarak benimsiyor.

Akıllı uzaylılar varsa, onlar da beş kavramını bir süre sonra yaratırlar/bulurlar. Mutlaka... Öyle sanıyorum. Beş kavramı sadece dünyamıza özgü değil. Tüm evrende, doğada, her yerde olan bir kavram.

Galiba "beş" salt zihinsel değil... O da orada, bizim dışımızda bir yerde. Tam nerede bilmiyorum ama oralarda bir yerlerde bir "beş" olmalı. Beş'in kendisi olmasa ("beş'in kendisi" ne demekse!) bile beş kavramı benim dışımda bir yerde var. Sadece düşünce olarak var -başka türlü var olamaz- ama var... (Benden bağımsız düşünce olabilir mi doğada? Felsefi soruların şahı!) Var ki hepimiz anlaşıyoruz beş konusunda. Bence tabii...

Belki de doğa bana "beş beş beş" diye fısıldıyor ve ben beynimi kullanarak o beş kavramını yaratıyorum/buluyorum.

Sayıları anlamak gibi son derece masum bir uğraş bizi varlık ve yokluk gibi çok derin felsefi sorulara götürdü...

Sorularıma tam yanıt veremedim. Birtakım çıkarımlarda bulunup sayıların orada bir yerde oldukları sonucunu çıkardım ama bu çıkarımlarımdan ben de pek emin değilim, yüzde yüz ikna olmadım, ben ikna olsam da sizi ikna edemiyor olabilirim.

Matematik dünyasından çok çıktık...

Yanıtını bulamadığımız sorularla zaman harcamayıp devam edelim...

Doğada var ya da yok, beş'i anlamak istiyorum. Beş'i anlamak için önce beş'in ne olduğunu bilmeliyim. Yani beş'i tanımlamalıyım.

Bir deneme yapalım: Beş'i bir elin parmak sayısı olarak tanımlayalım. Bir an için bu tanımı kabul edip beş'i anlamaya çalışalım...

Beş'i tanımladıktan sonra beş'i anlamak ne demektir sorusu geliyor akla. Beş'in nesini anlayacağım? Beş'i tek başına değil, beş'in öbür sayılarla olan ilişkisini anlamak istiyorum. Örneğin $5+3$'ü bulmak istiyorum. "Üç parmak"ı da tanımladığımızı varsayarak, $5 + 3$ sayısını beş parmağın yanına öbür elin üç parmağı daha geldiğinde elde edilen parmak sayısı olarak tanımlayabiliriz.

Nitekim beş parmağınızın yanına öbür elinizin üç parmağını getirseniz sekiz parmak elde edersiniz. Deneyin göreceksiniz. Tekrar tekrar deneyin, hep aynı sonucu, "sekiz parmak" sonucunu alacaksınız. Ancak bir sorun var burada. Deneyerek gördüğünüzü kanıtlayamazsınız. Beş elmayla üç elmayı yanyana koyduğunuzda sekiz elma elde edeceğinizi hiçbir zaman kanıtlayamazsınız. Çünkü önermeniz deneye bağlı. O deneyin sonsuza kadar aynı sonucu vereceğini kanıtlayamazsınız. Dikkatinizi çekerim: Beş elmayla üç elmayı yanyana koyarsanız sekiz elma elde etmezsiniz demiyorum, sadece bu önermenizi kanıtlayamazsınız diyorum. Fiziksel deneyler matematiksel anlamda kanıtlanamazlar. "Beş elmanın yanına üç elma daha koyarsam sekiz elma elde ederim" önermesi olsa olsa (yapılmış) her bir deney için kanıtlanır, tüm genelliğiyle, gelecekte yapılacak deneyler için kanıtlanamaz. "Böyle gelmiş böyle gider" geçerli bir kanıt yöntemi değildir. En azından matematikte...

Oysa matematik kanıtlar. $5 + 3 = 8$ eşitliğini kanıtlamalıyız... Kanıtlamadan olmaz.

Ayrıca "beş"i bir eldeki parmak sayısı olarak tanımlasam, çok çok büyük sayıları nasıl tanımlayacağım? Hatta genel olarak "sayı" kavramının kendisini nasıl tanımlayacağım? Bir, iki, üç, dört, beş tanımlandı. Altıyı da tanımladık, yediyi de... Günün birinde durmam gerekecek, sonsuza kadar sayı tanımlayamam... Neyse ki sayıları teker teker tanımlamakla sayı kavramını (ya da sayı kümelerini) tanımlamak arasında da bir ayrım vardır. Bu sayede sayıları tanımlayabileceğiz.

Ne yapacağız?

Önce şunu yapacağız: Günlük dilde kullandığımız ve aslında ne demek olduğunu tam olarak bilmediğimiz beş'le bu kitapta tanımlayacağımız beş'i birbirinden ayıracağız. İkincisi matematiksel beş olacak. Matematiksel beş'in sizin elinizin parmak sayısıyla hiçbir ilgisi olmayacak, ya da çok az ilgisi olacak.

Yepyeni bir beş kavramı tanımlayacağız. Matematiksel olarak...

Nasıl yapacağız bunu?

Nasıl yapacağımız hiç önemli değil! Beş'i nasıl tanımladığımızın hiç mi hiç önemi olmayacak. Beş'i, üç'ü, sekiz'i ve toplamayı öyle tanımlayacağız ki $5 + 3 = 8$ eşitliği doğru olacak. Önemli olan, sayıları ve işlemleri nasıl tanımladığımız değil, tanımladığımız sayı ve işlemlerin istediğimiz özellikleri sağlamaları... İşte bu, matematiği matematik yapan niteliklerin en önemlilerinden biridir. Daha doğrusu modern matematiği modern matematik yapan budur. Matematikte kavramların nasıl tanımlandıkları değil, kavramların hangi özellikleri sağladığı önemlidir.

Matematiğin bu bakış açısı sadece sayılar için değil, her kavram için geçerlidir. Noktaların, doğruların, düzlemlerin nasıl tanımlandıkları önemli değildir, nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar, önemli olan bu kavramların istediğimiz özellikleri sağlamalarıdır.

İlk birkaç bölümde sıfır, bir, iki, üç gibi birkaç doğal sayıyı teker teker tanımladıktan sonra, ileriki bölümlerde genel olarak doğal sayı kümesini tanımlayacağız. Bu daha zor olacak.

İşte böyle... Doğal sayıları ve toplamayı tanımlayacağız. Tanımımız bize $2+2=4$ eşitliğini verecek. Ayrıca

$$x+y=y+x$$

eşitliğini de verecek. Çarpmayı da tanımlayacağız. Göreceğiz ki

$$x\times(y+z)=x\times y+x\times z$$

eşitliği geçerli. Tabii $2\times 2=4$ gibi eşitlikleri de kanıtlayacağız.

Görüldüğü gibi okurun bilmediği şeyler kanıtlanmayacak bu kitapta. (Bir sonraki ciltte okurun daha önce bilmediği konulara dalacağımızı sanıyorum.) Yani kanıtladığımız olgular değil bu kitapta önemli olan. Önemli olan yöntem, konuya yaklaşım, düşünme biçimi, tanımların ve kanıtların nasıl yapıldığı vs.

Bu bölümü okuyan bir arkadaşım, "bir bölüm vs ile bitmez" dedi. Haklı!

2. Temel Sorular

2.1 Doğal Sayılardan Ne İstiyoruz?

Doğal sayıları, yani 0, 1, 2, 3, ... gibi sayıları anlamak istiyoruz. Elbette doğal sayıları anlamak için önce doğal sayıların tanımını vermeliyiz. Tanım yoksa biz matematikçiler de yokuz! Ama tanımı vermeden önce de doğal sayıların nesini anlamak istediğimizi bilmeliyiz. Çünkü tanımı ona göre yapacağız.

Herhâlde, en azından bir doğal sayıdan sonra hangi doğal sayının geleceğini (verilen doğal sayının ***ardılını***), yani bir sonraki doğal sayıyı bilmek istiyoruz, bir başka deyişle, eğer x sayısı verilmişse $x+1$ sayısını bulabilmek ve

$$x \mapsto x+1$$

fonksiyonunun özelliklerini bilmek istiyoruz. Tabii bir de 0 sayısını bilmeliyiz, ki saymaya bir yerden başlayabilelim. Sonra, sanırım doğal sayıları toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz; toplamayı ve çarpmayı anlamadan olmaz. Ta ilkokuldan beri başımızın eti yendi toplam ve çarpım tablolarını ezberlememiz için... Ayrıca örneğin

$$x(y+z) = xy + xz$$

eşitliğini kanıtlayabilmek istiyoruz. Hatta, 5^3 gibi, bir sayının üssünü almayı da becerebilmeliyiz. Ayrıca hangi sayının küçük, hangi sayının büyük olduğunu da anlamalıyız, örneğin $x^2 \geq x$ eşitsizliğini doğal sayılar için kanıtlayabilmeliyiz.

Doğal sayılarla ilgili anlamak istediklerimizi yazalım: $x+1$ işlemi, toplama, çarpma, üs alma işlemleri ve sıralama ilişkisi.

Sıralamadan başlayalım. Doğal sayılardaki $x \leq y$ eşitsizliğini toplama cinsinden yazabiliriz:

> *$x \leq y$ eşitliği ancak ve ancak $x+z=y$ eşitliğini sağlayan bir z doğal sayısı varsa geçerlidir*

ya da daha matematiksel bir dille,

(1) $$x \leq y \Leftrightarrow \exists z\ (x+z=y).$$

Görüldüğü gibi eşitsizliği toplamadan hareketle elde ettik[1]. Dolayısıyla, eğer toplamayı anlarsak eşitsizliği de anlarız. Böylece anlamak istediklerimizin listesinden eşitsizliği silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini, toplamayı, çarpmayı ve üs almayı anlamak istiyoruz.

Eşitsizliği toplamayla elde edebildik. Şimdi üs almaya bakalım.

$$y^0 = 1 \text{ ve } y^{x+1} = y^x \cdot y \tag{2}$$

eşitliklerinden, çarpmayı ve $x+1$ işlemini biliyorsak üs almanın belirlendiğini anlarız. Nitekim bu iki eşitlikten örneğin şu çıkar:

$$\begin{aligned}2^3 &= 2^{2+1} = 2^2 \cdot 2 = 2^{1+1} \cdot 2 = (2^1 \cdot 2) \cdot 2\\ &= (2^{0+1} \cdot 2) \cdot 2 = ((2^0 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2 = ((1 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2.\end{aligned}$$

Demek ki çarpmayı biliyorsak, en sağdaki $((1 \cdot 2) \cdot 2) \cdot 2$ çarpımını yapıp 2^3 işleminin sonucunu bulabiliriz. Böylece anlamak istediklerimizin listesinden üs almayı da silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini, toplamayı ve çarpmayı anlamak istiyoruz.

Sıra geldi çarpmaya... Çarpmayı da toplama cinsinden yazabiliriz:

$$y \cdot 0 = 0 \text{ ve } y \cdot (x+1) = y \cdot x + y \tag{3}$$

eşitlikleri çarpmayı tamamen belirler. Nitekim, bu iki eşitliği kullanarak ve toplama işlemini bildiğimizi varsayarak, örneğin $2 \cdot 3$ işleminin sonucunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned}2 \cdot 3 &= 2 \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot (1+1) + 2\\ &= (2 \cdot 1 + 2) + 2 = (2 \cdot (0+1) + 2) + 2\\ &= ((2 \cdot 0 + 2) + 2) + 2 = ((0+2) + 2) + 2.\end{aligned}$$

Toplamayı biliyorsak, en sağdaki $((0+2)+2)+2$ işlemini yapıp $2 \cdot 3$ işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki çarpmayı da bilmek istediklerimizin listesinden silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini ve toplamayı anlamak istiyoruz.

Şimdi de toplamaya bakalım. Eğer $x+1$ işlemini yapabiliyorsak, toplamayı da yapabiliriz. Nitekim

$$x + 0 = x \text{ ve } x + (y+1) = (x+y) + 1 \tag{4}$$

eşitlikleri (ya da formülleri) toplama yapmamızı sağlar. Örneğin, bu iki eşitliği kullanarak,

$$2 + 3 = 2 + (2+1) = (2+2) + 1 = (2 + (1+1)) + 1 = ((2+1)+1) + 1$$

[1](1) formülünün sağındaki önermedeki z bir doğal sayıdır. Doğal sayılardan sözedilen durumlarda tüm x, y, z gibi simgeler doğal sayı anlamına gelecek. Kümelerden sözettiğimizde ise x, y, z gibi simgeler küme anlamına gelecek. Neyin ne anlama geldiği konunun gelişinden belli olacak diye umuyoruz

eşitliğini kanıtlayabiliriz. Eğer x verildiğinde $x+1$ işlemini yapabiliyorsak, o zaman $((2+1)+1)+1$ işlemini yapıp $2+3$ işleminin sonucunu bulabiliriz. Demek ki toplamayı da bilmek istediklerim listesinden silebiliriz. Artık sadece $x+1$ işlemini anlamak istiyoruz.

Geriye fazla bir şey kalmadı. Toplamayı, çarpmayı, üs almayı, eşitsizliği anlamak için $x+1$ işlemini anlamalıyız. $x+1$ işleminin özellikleri bize toplamanın, çarpmanın, üs almanın, eşitsizliğin tüm özelliklerini verecek. Demek ki doğal sayıları ve $x+1$ işlemini tanımlamamız ilk hedefimiz olmalı. Ama ana soru şu: Toplamanın, çarpmanın, üs almanın ve eşitsizliğin özelliklerini kanıtlayabilmek için $x+1$ işleminin hangi özelliklerini bilmeliyiz? İşte önemli ve canalıcı soru bu. Bu soruyu bir sonraki altbölümde ele alacağız.

Bir nokta okurun dikkatinden kaçmış olabilir: $x \mapsto x+1$ işlemini anlamak için 1 diye bir sayıyı anlamak gerekmiyor. Biz sadece "artı bir" işleminden sözediyoruz, 1 sayısından sözetmiyoruz. Belki de "artı bir" değil, tek kelimeyle yazıp "artıbir" işleminden/fonksiyonundan sözetmeliydik. Bundan sonra $x+1$ yerine $S(x)$, hatta Sx yazalım ve "artı bir" yerine "bir sayının ardılı" ifadesini kullanalım. Böylece kafa karıştıran 1'den kurtulmuş oluruz. Daha sonra, ileride, Sx'i, toplamayı ve 1'i tanımladığımızda Sx'in gerçekten $x+1$'e eşit olduğunu göreceğiz.

Notlar

2.1. Yukarıdaki satırlarda okuru yanlış yönlendirmiş olabiliriz. "Artı bir" fonksiyonunun canalıcı bir konumda olduğu doğru. "Artı bir" fonksiyonunu tanımlamadan toplamayı ve çarpmayı tanımlayamayacağımız da doğru. "Artı bir" fonksiyonunun toplamayı ve çarpmayı belirlediği de doğru. Bütün bunlar doğru, ancak, genel kanının aksine, sadece "artı bir" fonksiyonu (aslında şaşırtıcı bir biçimde) toplamayı ve çarpmayı tanımlamaya yetmez, ayrıca kümeler kuramının işlemlerini ve kavramlarını da kullanmalıyız[2]. Toplama ve çarpma **tanımlandıktan** sonra, "artı bir" fonksiyonunun toplama ve çarpmayı belirlediğini göstereceğiz.

2.2. Yukarıda söylediklerimize biraz daha açıklık getirmeye çalışalım.
Eğer S'yi (yani "artı bir fonksiyonunu) biliyorsak (4) eşitliklerinin toplamayı belirlediği bariz olmalı. Nitekim biraz yukarıda (4) eşitliklerini kullanarak $2+3=5$ eşitliğini kanıtladık. Ama (4) eşitlikleri toplamayı tanımlamaya yetmiyor. Belirlemek ya da betimlemek başka, tanımlamak başka. Zaten (4) eşitlikleri ancak toplama tanımlanmışsa anlamlıdır, toplama tanımlanmamışsa yazılamazlar bile! İleride, (4) eşitliklerini sağlayan bir işlem tanımlayacağız ve bu işleme toplama adını vereceğiz.

2.3. Eğer toplamayı biliyorsak (3) eşitliklerinin çarpmayı belirlediği belli, ama (3) eşitliklerinden çarpma işleminin varlığı kanıtlanamaz. Bir önceki paragrafta toplama ve (4) eşitlikleri için söylediklerimizin hepsini çarpma ve (3) eşitlikleri için de söyleyebiliriz.

2.4. Toplama ve çarpmayı tanımlayabilmek için kümeler kuramına ve aksiyomlarına başvurmak, dolayısıyla $\in$ (elemanı olmak ilişkisi) simgesini kullanmak zorundayız, sadece $x+1$ işlemi yeterli olmaz, ayrıca kümeler kuramını kullanmalıyız. İleride bu konudan

[2]Daha bilgili okura: Peano aksiyomları 0 sayısının ve "artı bir" fonksiyonlarının temel özelliklerinden ibaret değildir, ayrıca toplama ve çarpmanın da temel özelliklerini içerir. İlerideki sayfalarda bu dediğimizi daha anlamlı kılmaya gayret edeceğiz.

daha ayrıntılı söz edeceğiz. Ama bu altbölümde, hiçbir şey yapmadıysak en azından (x bir doğal sayıyken) $x \mapsto x+1$ işleminin önemini ortaya koyduk. Üstüne basarak tekrarlıyorum: Tanım meselesini bir yana bırakırsak, doğal sayıları ve doğal sayıların aritmetiğini anlamak için öncelikle $x \mapsto x+1$, yani "bir sayının ardılı" işlemini anlamalıyız; bu işlemi anlamadan daha fazla ilerleyemeyeceğimiz anlaşılmış olmalı. Dediğimiz gibi S işlemini tanımladıktan sonra kümeler kuramını kullanarak toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayacağız.

2.5. Konuya biraz aşina olanlar için son paragrafta sözünü ettiğimiz tanımlanabilme problemini biraz daha açalım. Presburger'ın bir teoremine göre, doğal sayılarda toplamayla ve (altkümelerle değil) doğal sayılarla (doğal sayılar kümesinin elemanlarıyla yani) ilgili her türlü soru'nun doğru olup olmadığı bir bilgisayar programı yardımıyla anlaşılabilir. Eğer çarpma toplamadan hareketle tanımlanabilseydi, o zaman toplama ve çarpmayla ilgili tüm soruların da bir bilgisayarla yanıtlanabilir olması gerekirdi, ki Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi'nden bunun böyle olmadığını biliyoruz. Demek ki çarpma sadece toplamadan hareketle, dolayısıyla S'den hareketle de tanımlanamaz, kümeler kuramı gibi daha kapsamlı bir teoriye ihtiyaç vardır.

2.6. S fonksiyonundan hareketle eşitsizliğin tanımlanamayacağı biraz model teorisi bilgisiyle oldukça kolay bir kanıtla gösterilebilir. Bunun için, S'nin teorisinin bir modelinin, $x < Sx$ önermesini sağlayan iki farklı tamsıralamasını bulmak yeterli. Bu model, $\mathbb{Z}$'lerin farklı sıralandığı (mesela ikinci $\mathbb{Z}$'nin elemanları birinci $\mathbb{Z}$'nin elemanlarından daha büyük olsun) $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{Z} \sqcup \mathbb{Z}$ kümesi olarak alınabilir.

2.7. Öte yandan eşitsizliğin toplama yardımıyla tanımlanabileceği bariz:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists z\ x+z=y.$$

Buradaki x, y ve z doğal sayılardır.

2.8. Eğer n, 5 ya da 7 ya da 10 milyon gibi aşina olduğumuz bir n doğal sayısıysa toplama işlemi, yani $f_n(x) = x+n$ fonksiyonu, "artıbir" fonksiyonuyla tanımlanabilir elbette, bunun için "artıbir" fonksiyonunu n defa uygulamak yeterlidir, ne de olsa $S^n = f_n$ eşitliği geçerlidir. Ama her x ve **her** y için $f(x,y) = x+y$ değerini veren bir fonksiyon S ve 0 ile tanımlanamadığı gibi, S, 0 ve eşitsizlikle de tanımlanamaz (bkz. Karlis Podnieks'in `http://www.ltn.lv/gt3.html`♯BM31 sayfası). Bir başka deyişle, yaygın bir inancın tersine,

$$x+0=x \text{ ve } x+Sy=S(x+y)$$

formülleri $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısında toplama fonksiyonunu tanımlamaz.

2.9. Benzer sorun $(\mathbb{N}, 0, S, +)$ ve çarpma için de yaşanır: Bu yapı da çarpmayı tanımlamamıza izin vermez. Ama bu tanımlanamama sorunu ilelebet devam etmez. $(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$ yapısında $n!$, n^m, n'inci asal gibi tüm aritmetiksel fonksiyonlar tanımlanabilir. Yani

$$(\mathbb{N}, 0, S, +, \times)$$

aşamasından sonra bir sorun yaşanmaz, daha doğrusu yaşanmayacağı sanılıyor. Bunu da ileride göreceğiz.

2.10. Bu satırların pek bir anlam ifade etmediği okurlar lütfen kitabı okumaya devam etsinler. Yıllar sonra derin anlamlar ifade edecektir.

2.2 Doğal Sayılar Ne Olmalı?

Bir önceki altbölümde, doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı, üs almayı ve eşitsizliği tanımlayabilmek için

$$x \mapsto x+1$$

kuralıyla tanımlanan "artı bir" ya da "ardılı" işlemini anlamanın tam yeterli olmasa da, neredeyse yeterli olduğunu, en azından gerekli olduğunu gördük.

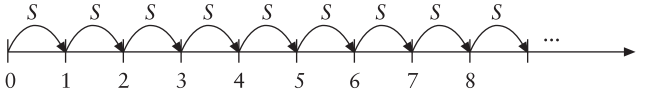
Uzunca bir süre -yalan da olsa- sadece S işleminin toplama ve çarpmayı tanımlamaya yeterli olduğunu varsayalım, ki tüm enerjimizi S fonksiyonuna verelim. Zaten S'yi tanımlamadan bir adım ileri gidemeyeceğimizi biliyoruz.

Burada, şu soruyu sorup yanıtlamaya çalışacağız: "Ardılı" işleminin tam olarak hangi özelliklerini bilmeliyiz ki diğer tüm özelliklerini bu özellikleri varsayarak kanıtlayabilelim? Yani doğal sayılarda tanımlanan $x \mapsto x+1$ işleminin "özü" nedir? Bu soruyu birçok ünlü matematikçi, mantıkçı ve filozof sormuştur. Biz burada Dedekind ve Peano'nun izinden yürüyeceğiz.

Bundan böyle $x+1$ yerine Sx yazalım[3], ki $x+1$ işleminin 1'le ilgili bir işlem olduğu gibi aslında pek de yanlış olmayan ama başlangıçta bizi yanlış yönlendirebilecek bir fikre saplanmayalım. Sx'e x'in ***ardılı*** adını vereceğiz.

Bu bölümde önce doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin ne olduğunu bildiğimizi varsayıp, S fonksiyonunun başat özelliklerini bulacağız. $\mathbb{N}$ kümesinin ve S fonksiyonunun "ne olması gerektiğini" bölümün en sonunda göreceğiz.

S'nin doğal sayılara etkisinin resmini aşağıda çizdik.



İlk Özellik. Her şeyden önce S, doğal sayılar kümesinden gene doğal sayılar kümesine giden bir fonksiyondur[4], daha doğrusu olmalıdır.

Ayrıca, S birebir bir fonksiyondur, yani eğer x ve y doğal sayıları için

$$Sx = Sy$$

eşitliği geçerliyse, o zaman $x = y$ eşitliği de geçerlidir. Bir başka deyişle ardılları eşit olan sayılar eşittir.

Peki S, örten[5] midir, yani her doğal sayı, bir doğal sayının ardılı mıdır? Hayır değildir. 0 sayısı hiçbir doğal sayının ardılı değildir. Ama S fonksiyonu neredeyse örtendir, örten olmasına ramak kalmıştır: 0 dışında her sayının bir öncesi vardır ve 0 dışında her sayı kendisinden hemen önce gelen sayının

---

[3]Bu S, "sonraki" anlamına gelen İngilizce "successor" ve Fransızca "successeur" sözcüklerinin baş harfidir; rastlantı, Türkçe "sonraki" sözcüğününün de başharfidir!

[4]Henüz doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımlamadık. Fonksiyon kavramını da tanımlamadık. Bunları daha sonraki bölümlerde yapacağız. Şimdilik, $\mathbb{N}$ diye bir kümemizin olduğunu varsayıp (moda tabirle) sezgisel takılıyoruz. Yani düşünüyoruz. Bölümün sonunda $\mathbb{N}$ kümesinin ne olması gerektiğini göreceğiz. $\mathbb{N}$ kümesinin ne olması gerektiğini gördükten sonra bu kümenin varlığını kanıtlamalıyız. Bunu da daha sonraki bölümlerde yapacağız. Okur şimdilik lise yıllarındaki bilgiyle idare etsin, ileride her şey matematiksel olarak tanımlanacak.

[5]$f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in Y$ için $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa, f fonksiyonuna ***örten*** denir.

ardılıdır. Yani S fonksiyonu $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden ve 0 değerini hiç almayan birebir bir fonksiyondur, daha doğrusu öyle olmalıdır.

İkinci Özellik. S fonksiyonunun tümevarımla kanıta olanak sağlayan bir başka önemli özelliği daha vardır. Anlatalım: A, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olsun. Eğer 0, A'nın bir elemanıysa ve A'dan seçilmiş her x elemanı için x'in ardılı olan Sx elemanı da A'daysa o zaman $A = \mathbb{N}$ olur. Bir başka deyişle, $\mathbb{N}$'nin, 0'ı içeren ve içerdiği her elemanın ardılını da içeren her A altkümesi $\mathbb{N}$'ye eşittir, yani,

i. $0 \in A$, ve

ii. her $x \in A$ için, $Sx \in A$

ise o zaman $A = \mathbb{N}$ olur. Nitekim, bu iki koşulu sağlayan bir A kümesi alalım. 0'ın A'da olduğunu (i)'den dolayı biliyoruz. (ii)'de x yerine 0 alırsak, $0 \in A$ olduğundan, 0'ın ardılı olan $S0$ sayısının, yani 1'in de A'da olduğunu anlarız. (ii)'de bu kez x yerine 1 alalım; demek ki 1'in ardılı $S1$, yani 2 de A'da. Şimdi, (ii)'de x yerine 2 alalım, böylece 3'ün de A'da olduğunu görürüz. Bunu böyle sürdürürsek, 4, 5, 6, ... sayılarının, ve zamanla (!) her doğal sayının A'da olduğunu anlarız.

Yukarıda verdiğimiz bir kanıt değildir, sadece doğal sayıların ve S fonksiyonunun ne olması gerektiği konusunda yol gösterici niteliğinde bir akıl yürütmedir. Çünkü doğal sayıları matematiksel olarak henüz tanımlamadık ve tanımlamadığımız bir nesne hakkında herhangi bir şey kanıtlayamayız. Şimdilik sadece doğal sayılar kümesinin ve artıbir fonksiyonunun ne menem şeyler olması gerektiğini anlamaya çalışıyoruz.

Bu iki özelliğin S'nin ve $\mathbb{N}$'nin özünü teşkil ettiğine inanılıyor, yani bunlar S'nin ve $\mathbb{N}$ kümesinin "karakteristik özellikleri"dir. Bu iki özellik, doğal sayılar kümesini tanımlamamıza yeterli olacaktır. İleride göreceğiz.

Doğal sayılar yapısı sadece bir küme değildir. Tanımda $\mathbb{N}$ adı verilen bir küme vardır, ama bir de ayrıca sıfır adı verilen ve 0 simgesiyle gösterilen bir eleman ve S ile gösterilen $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon da vardır. Yani aslında "doğal sayılar kümesi" $\mathbb{N}$ değil, "***doğal sayılar yapısı***" $(\mathbb{N}, 0, S)$ tanımlanmalıdır. Bu yapıyı daha sonra toplama ve çarpma işlemleriyle zenginleştireceğiz ve işte o zaman doğal sayılar yapısını tam olarak elde etmiş olacağız. Ama uzunca bir süre $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısıyla yetineceğiz. (Henüz $(\mathbb{N}, 0, S)$ seviyesine gelmedik, $\mathbb{N}$ kümesini bile tanımlamadık.)

Doğal sayılarla ilgili gerçekleri bünyesinde barındıran bir aksiyom sistemi ve bu aksiyomların doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ evreni ya da daha yaygın tabiriyle modeli yaratmak istiyoruz. Bir sonraki bölümde bu amaca yöneleceğiz. (Konu şimdilik karmaşık gibi görünse de birkaç bölüm sonra açıklığa kavuşacağını umuyoruz; okumaya devam edin.)

Şimdilik, doğal sayılar "yapısı" (kümesi değil), hemen aşağıda açıklayacağımız P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsüdür. Buradaki $\mathbb{N}$ bir kümedir. 0, $\mathbb{N}$'nin bir elemanıdır. S ise, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyondur.

P1. *S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve 0 değerini hiç almayan birebir bir fonksiyondur.*

P2. Eğer A, *doğal sayılar kümesi* $\mathbb{N}$*'nin,*

i. $0 \in A$

ve

ii. $x \in A$ *ise* $Sx \in A$

özelliklerini sağlayan bir altkümesiyse o zaman $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Biçimsel dilde P1 şöyle yazılır:

$$\forall x \forall y\ (Sx = Sy \to x = y) \wedge \forall x\ Sx \neq 0.$$

Formülün ilk kısmı S'nin birebir olduğunu, ikinci kısmı ise 0 değerini almadığını söylüyor. Birazdan S'nin 0 dışında tüm değerler aldığını kanıtlayacağız.

P2 ise biçimsel dilde şöyle yazılır:

$$\forall A\ ((A \subseteq \mathbb{N} \wedge 0 \in A \wedge \forall x\ (x \in A \to Sx \in A)) \to A = \mathbb{N}).$$

P1 ve P2'den S'nin neredeyse örten olması gerektiği oldukça kolay biçimde çıkar:

Önsav 2.1. P1 *ve* P2 *özelliklerini sağlayan bir* $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *fonksiyonu,* 0 *dışında tüm değerleri alır, yani* $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *olur.*

Kanıt: P2'de $A = \{0\} \cup S(\mathbb{N})$ alalım. P2'nin her iki önkoşulu da A için bariz biçimde sağlandığından, $A = \mathbb{N}$ olur. P1'de söylenen $0 \notin S(\mathbb{N})$ ile birlikte istediğimizi elde ederiz. □

Her şeyi kümeler kuramında yapacağımızdan, tam ne istediğimizi daha doğru biçimde şöyle ifade edelim: Öyle bir

a. $\mathbb{N}$ kümesi,

b. $\mathbb{N}$'nin 0 adını vereceğimiz bir elemanını ve

c. bir $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu

bulacağız ki, elde edilen $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı P1 ve P2 özelliklerini sağlayacak.

P1 ve P2 özelliklerini sağlayan $(\mathbb{N}, 0, S)$ üçlüsü var mıdır? Evet vardır! Vardır da nerededir?

Kitabın bundan sonraki ilk birkaç bölümünde bunun öyküsünü okuyacaksınız. Yukarıdaki özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısını hep birlikte var edeceğiz. Sabırla. Bununla yetinmeyip doğal sayılarda toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayıp bunların çok bilinen temel özellikleri sağladığını kanıtlayacağız.

Bu arada henüz kümenin ne anlama geldiğini bilmediğimiz gibi, fonksiyonun da ne demek olduğunu bilmediğimize dikkatinizi çekerim. Yani yukarıdaki tartışma bir matematik tartışması değil, daha çok bir metamatematik sohbetidir. Bir başka deyişle kitap henüz başlamadı!

2.3 Plan Program

Bir sonraki bölümde kümeler kuramının en temel, en basit aksiyomlarından yararlanarak birkaç doğal sayı ve bu doğal sayıları toplayıp çarpmayı öğreneceğiz. Asıl konu anlatımı daha sonra başlayacak.

Bölüm 5'te P1 ve P2 özellikleri sağlayan bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı inşa edeceğiz. Ama bunu yapmak için kümeler kuramına ihtiyacımız olacak ve bunu da Bölüm 4'te göstereceğiz.

Bölüm 6'da bu yapıda toplama ve çarpma işlemlerini ve sıralamayı tanımlayacağız ve bunların temel özelliklerini ortaya koyacağız. Toplama ve çarpma için kümeler kuramına ihtiyacımız olacak, ama eşitsizlikle toplamadan hareketle baş edebileceğiz.

Bölüm 8'de, P1 ve P2 özelliklerini sağlayan iki doğal sayı yapısının bir anlamda biricik olduğunu göstereceğiz, yani P1 ve P2 özelliklerini sağlayan iki doğal sayı yapısının, elemanlarının adları dışında, birinin diğerinden farkı olmadığını göstereceğiz, sanki biri "sıfır bir iki üç ve artı" gibi Türkçe, diğeri "zero one two three ve plus" gibi İngilizce. Böylece doğal sayılar yapısının bir anlamda doğal bir yapı olduğu, P1 ve P2'nin doğal sayılara pek fazla hareket alanı tanımadığı anlaşılacak[6].

Yolumuz uzun yani.

Şöyle bir benzetme yaparak sorunu anlamaya çalışabiliriz: Diyelim evlenmek istiyorsunuz ve evinizde masa başında ideal eşinizin özelliklerini bir liste hâlinde yazdınız: Zeki, çalışkan, namuslu, saygılı, şefkatli, hoş görünümlü, hoşgörülü, hoşsohbet, esprili, kültürlü, zevk sahibi ve hâli vakti yerinde olacak ve elbette size tapacak... İsteyenin bir yüzü... Bu liste bir teoridir, bir arzular listesidir. Böyle bir listeyi herkes hazırlar... Bundan kolay ne var! Önemli olan bu teoride (yani arzular listesinde) yazan özellikleri sağlayan birinin varlığını kanıtlamak (hatta mümkünse bulup evlenmek!) İstediğiniz özelliklere sahip kişilere de teorinin modelleri denir! Teorinin modeli olabilir de olmayabilir de;

[6]Konuyla daha aşina olan okur için not: Ama Peano Aritmetiği için aynı şeyi söyleyemeyeceğiz. Peano Aritmetiğinin aksiyomlarını sağlayan ama izomorf olmayan farklı yapılar vardır. Aradaki fark şu: P1 ve P2 sadece elemanlardan değil, altkümelerden bahsediyorlar, oysa Peano Aritmetiği sadece elemanlardan bahseder.

teorisine göre değişir! Teorinin modeli yoksa evde kalırsınız... Çelişkisiz teorilerin (matematiğin ideal dünyasında) modelleri vardır, çelişkili teorilerin modelleri yoktur. (Müstakbel eşinizin hem zengin hem de fakir olmasını isterseniz şansınıza küsün!)

Yukarıdaki P1 ve P2 bir teoridir, yani bir arzular listesidir. $\mathbb{N}$'nin varlığını vermez, sadece olası müstakbel $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapılarından beklentilerimizi listeler.

Dikkat ederseniz, P2, altkümelerle ilgili bir önermedir. (Oysa P1 elemanlarla ilgilidir.) Mantıkçıların (büyük çoğunluğu dememek için) önemli bir kısmı kendilerine göre haklı nedenlerden altkümelerden sözeden teorilerden hoşlanmazlar, altkümeler yerine elemanlarla ilgili önermelerden oluşan teorileri tercih ederler. İleride, Bölüm 8'de P1 ve P2'yi ($\in$ simgesini ve kümeler kuramını tamamıyla) terkedip, sadece elemanlardan sözeden ve 0, S, $+$ ve $\times$ simgelerini kullanan ve aritmetiği **büyük ölçüde** (ama tam olarak değil) yansıttığı düşünülen Peano Aksiyomları'nı listeleyeceğiz.

Kısa Tarihçe. Doğal sayılarla ilgili birçok olgunun "artıbir" işlemi ve "tümevarım"la kanıtlanabildiğini ilk olarak 1860'larda Hermann Grassman farketmiştir. 1888'de Richard Dedekind doğal sayıları aşağı yukarı bu bölümde yaptığımız gibi aksiyomlaştırmıştır. 1889'da bu aksiyomların biraz daha rafine bir versiyonu İtalyan matematikçi Giuseppe Peano tarafından **Yeni Bir Yöntemle Aritmetiğin İlkeleri** adlı kitabında yayımlanmıştır. Ama daha sonra Peano Aksiyomları adı ileride sözünü edeceğimiz (Bölüm 8) bir başka aksiyom sistemine verilmiştir. Bu bölümdeki P1 ve P2 aksiyomlarına ***Dedekind-Peano Aksiyomları*** adı verilebilir.

2.4 İzleyeceğimiz Yöntem Üzerine

Dediğimiz gibi, öncelikli olarak, P1 ve P2 önermelerinin doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı inşa edeceğiz. Bu yapıyı daha sonra $(\mathbb{N}, S, +, \times, 0)$ yapısına genişleteceğiz ama ilk amacımız P1 ve P2 önermelerinin doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı bulmak. Her şeyi kümeler kuramında yapacağız. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ **gerçekten** bir küme olacak, ama S fonksiyonu da, 0 sayısı da birer küme olacak. Matematiksel her şey bir küme olacak. Tüm matematiği kümeler kuramının içinde inşa edeceğiz.

Demek ki önce kümeler kuramını kurmalıyız, yani kümeler kuramının aksiyomlarını belirlemeliyiz. Bunu çok dikkatli yapacağız. Çok da dikkatli yapmak zorundayız, çünkü aksi hâlde karşımıza paradokslar, yani çelişkiler çıkabilir ve matematiğin dayandığı kümeler kuramının çelişki barındırması hiç de hoş olmaz, güvendiğimiz dağlara kar yağmış olur.

1800'lerin sonunda ve 1900'lerin başında matematikte (ve felsefeciler hemen farkına varmasa da herhâlde felsefede de) en önemli sorulardan biri, matematiğin çelişkili olup olmadığı sorusuydu. Frege ve Hilbert bu konuya ilgi duyan iki ünlü matematikçiydi. Matematikte çelişki olmadığı kanıtlanmalıydı. Bunun yapılabilmesi için de matematiğin sezgilerimizden bağımsız bir hâle getirilip biçimselleştirilmesi ve aksiyomlaştırılması gerekiyordu.

Matematik, örneğin Öklid'in aksiyomlarında bulunan "bir doğru sonsuza kadar uzatılırsa" gibi sezgilere seslenen tümcelerden arınabilmeliydi, ki çelişkinin olmadığı kanıtlanabilsin.

Alman mantıkçı ve matematikçi Frege 19'uncu yüzyılın sonlarına doğru en azından aritmetiği sağlam temellere oturtma uğraşına soyundu. Ama 1900'lerin başında Bertrand Russell kümeler kuramında bir paradoks, yani bir çelişki buldu. Daha önce (bir sonraki ciltte göreceğimiz) Burali-Forti paradoksu diye adlandırılan bir paradoks vardı ama nedense bu paradoks matematiği ve matematikçileri pek sarsmamıştı. Bertrand Russell'ın paradoksuyla birlikte, Frege'nin yıllarını verdiği matematiği biçimselleştirme uğraşı (daha doğrusu sayı kavramını mantığa indirgeme uğraşı) büyük bir yenilgiye uğramışa benziyordu.

Birazdan açıklayacağımız Russell paradoksu bayağı bir gürültü kopardı, çünkü matematiğin güvenirliği sarsılmıştı, daha bir gün öncesine kadar doğru-luğundan kuşku duymadığımız, baştacı ettiğimiz matematikte çelişki vardı, matematik artık güvenilmez olmuştu. Bunun üzerine, kümeler kuramının (ve matematiğin) aksiyomatik bir hâle getirilmesi gerektiği apaçık belli oldu ve bu amaçla çelişkilerden ve paradokslardan muaf olduğu düşünülen, özellikle Russell Paradoksu'nu bertaraf eden, yani onu paradoks olmaktan çıkaran birçok kuram geliştirildi. Bu kuramlardan en çok kabul göreni ZFC adı verilen kuramdır. ZFC'yi bu kitapta ve bir sonraki ciltte açıklayacağız.

Matematik tarihinin kuşkusuz en heyecanlı zamanlarıydı. Bu kadar ilginç bir konuyu burada kesmekten üzüntü duyuyorum ama aksi hâlde bu kitaba hiç başlayamayacağım!

Bertrand Russell'ın paradoksunu açıklayayım.

Tüm kümeler kümesini alalım. Bu kümeye X adını verelim. X de bir küme olduğundan $X \in X$ olur elbette.

X'in bazı kümeleri kendi kendisinin elemanı olabilirler. Örneğin X, yukarıda gördüğümüz gibi, kendi kendisinin elemanı olan kümelerden biridir.

X'in bazı kümeleri de kendi kendisinin elemanı olmazlar. Örneğin doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, bir doğal sayı olmadığından, kendi kendisinin bir elemanı değildir.

Şimdi, kendi kendisinin elemanı olmayan kümelerden oluşan kümeyi alalım:

$$Y = \{x : x \notin x\}$$

olsun. Tanımdan dolayı, bir x kümesinin Y'de olması için yeter ve gerek koşul x'in kendi kendisinin elemanı olmamasıdır. Daha matematiksel olarak, her x kümesi için,

$$x \in Y \Leftrightarrow x \notin x$$

önermesi geçerlidir. Bu önerme her x kümesi için geçerli olduğundan, özel olarak Y kümesi için de geçerlidir. Dolayısıyla, yukarıdaki önermede x yerine Y koyarsak doğru bir önerme elde ederiz:

$$Y \in Y \Leftrightarrow Y \notin Y.$$

Bu son önermenin ne dediğine bakalım: Y, Y'nin bir elemanıysa Y, Y'nin bir elemanı olamaz ve Y, Y'nin bir elemanı değilse, Y, Y'nin bir elemanı olur... Bu, bariz bir çelişkidir.

Bu sorunu çözmenin tek bir yolu vardır, o da Y'yi küme olmaktan men etmektir! Nitekim, sorun nasıl çözülürse çözülsün, sonunda Y'yi bir biçimde küme olmaktan men ederek çözülür. Hatta, Bertrand Russell paradoksunun Y'nin küme olmadığını kanıtladığını söyleyebiliriz, çünkü Y'nin bir küme olduğunu varsayarak bir çelişki elde ediyoruz.

Sorun sadece Y'de değildir. Sorun aslında X'tedir. X bir kümeyse, Y'nin bir küme olmasını engellemek insafsızlık olur. Dolayısıyla Y'den önce X'in bir küme olmasını engellemek gerekmektedir.

Bertrand Russell paradoksundaki yöntemi kullanarak, her x kümesi için x'in elemanı olmayan bir eleman (ya da bir küme) bulabiliriz. Bulalım:

Teorem 2.2. *Eğer x bir kümeyse, x'te bulunmayan bir eleman vardır. Daha spesifik olarak*

$$\{z \in x : z \notin z\}$$

kümesi x'in bir elemanı değildir.

Kanıt: x kümesini sabitleyelim.

$$a = \{z \in x : z \notin z\}$$

tanımını yapalım. a, x'in kendi kendisinin elemanları olmayan elemanlarından oluşuyor. Demek ki her z için,

$$z \in a \Leftrightarrow (z \in x \text{ ve } z \notin z). \tag{1}$$

Bu önerme her z için geçerli olduğundan, özel bir durum olarak a için de geçerlidir:

$$a \in a \Leftrightarrow (a \in x \text{ ve } a \notin a). \tag{2}$$

Şimdi, çelişki elde etmek amacıyla, bir an için,

$$a \in x$$

önermesinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman (2) önermesinden doğru olan $a \in x$ önermesini atabiliriz. ("Hava güzelse ve $2 \times 2 = 4$ ise sinemaya gideceğim" önermesi, bu kitapta da kanıtlayacağımız üzere "$2 \times 2 = 4$" önermesi zaten doğru olduğundan, "Hava güzelse sinemaya gideceğim" anlamına gelir!) Demek ki

$$a \in a \Leftrightarrow a \notin a$$

önermesi doğrudur. Yani a, ancak ve ancak kendisinin bir elemanı değilse kendisinin bir elemanıdır! Çelişki. Dolayısıyla $a \in x$ olamaz. □

Bu teorem bize X'in bir küme olamayacağını söylüyor, çünkü her küme X'in bir elemanı. Yukarıdaki teoremin güzelliği, her x kümesinde olmayan bir elemanın varlığını kanıtlaması değil, bunu zaten Russell paradoksundan biliyorduk, teorem aynı zamanda x'in elemanı olmayan tanımı açık açık yazılmış bir küme buluyor; daha açık olarak, eğer

$$\alpha(x) = \{z \in x : z \notin z\}$$

ise, teorem, $\alpha(x) \notin x$ önermesini kanıtlıyor.

Sorun ne yazık ki sadece X'te de değildir. X'i bir küme olmaktan men etsek bile başka paradokslar bulunabilir. X gibi "çok çok fazla" elemanı olan toplulukların tümünü kümelik vasfından arındırmak gerekmektedir.

Yanlış anlaşılmasın, X diye bir topluluğun varlığını inkâr etmiyoruz. X elbette vardır ve var olan bir şeye yok diyemeyiz. X vardır ama elimizden geldiğince X'in bir küme olmasını engellemeliyiz, çünkü aksi hâlde bir çelişki elde ederiz. Yani "küme" kavramı eskiden olduğu gibi bir topluluk olarak tanımlanmamalı, her topluluk bir küme olmamalı, sadece "küme" olmayı hak eden topluluklar küme olmalı.

Bunun nasıl yapıldığını bu ve bir sonraki ciltte göreceğiz. Bir yandan ZFC'yi kurarken (yani aksiyomlarını yaratırken), diğer yandan sayıları ve sayı kümelerini inşa edeceğiz. Bu ciltte kümeler kuramının en basit aksiyomları yer alacak. Bir sonraki ciltte ise kümeler kuramının çok daha tartışmalı (ayrıca heyecanlı ve tehlikeli) aksiyomlarından söz edeceğiz.

Artık matematiğe başlayabiliriz.

3. İlk Aksiyomlar ve İlk Sayılar

3.1 İlk Aksiyomlar ve İlk Sayılar

Her topluluğu küme sanmanın matematikte çelişki yarattığını Altbölüm 2.4'te gördük. Demek ki daha dikkatli olmalıyız, önümüze çıkan her topluluğa küme dememeliyiz. Ne tür toplulukların küme olacağına dikkatlice seçilmiş aksiyomlarla karar vereceğiz. Bu bölümde kümeler kuramının en basit ve en doğal birkaç aksiyomunu sunacağız.

Doğal sayıları matematiksel olarak tanımlamak istiyoruz. Bu ve sonraki birkaç bölümde, doğal sayıları tanımlamak için ne kadar kümeler kuramı gerekiyorsa o kadar kümeler kuramı sunacağız. Sunacağımız aksiyomlar, ilkokuldan beri aşina olduğumuz $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ gibi diğer sayı kümelerini ve bu sayı kümeleri üstündeki toplama, çarpma, çıkarma, bölme gibi basit fonksiyonları tanımlamak için de yeterli olacak.

Bu bölümde sadece ilk birkaç doğal sayıyı (0'dan 7'ye kadar olan doğal sayıları) tanımlayacağız. Doğal sayıların hepsini tanımlamak biraz daha zaman alacak. Tanımladığımız bu birkaç doğal sayıda toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayıp $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ eşitliklerini kanıtlayacağız.

Kümeler nasıl var olacak? Kümelere "var olun!" diyeceğiz ve kümeler var olacak. Kümelere "var olun!" emrini aksiyomlarla vereceğiz. Ama bunu yaparken, Russell paradoksunda olduğu gibi bütün kümeleri içeren bir kümenin ya da bizi çelişkiye sürükleyebilecek bir başka kümenin varlığının da kanıtlanamamasına dikkat etmeye çalışacağız. Bilinen çelişki ve paradokslar, tüm kümeler kümesi gibi "çok büyük" kümelerin varlığından kaynaklandığından, çok fazla eleman içeren toplulukların küme olmamasına özen göstermeye çalışacağız; aksiyomlar (ellerinden geldiğince) buna izin vermeyecek.

Aksiyomlar, bir iki istisna dışında, "bu bir kümeyse, şu da bir kümedir" biçiminde olacak, yani var olan kümelerden bazı belirlenen yöntemlerle yeni kümeler elde edeceğiz. Böylece, çelişkiye yol açan "çok büyük" kümeleri var etmeyeceğimizi umuyoruz.

Kümeler konusu farklı biçimlerde aksiyomlaştırılabilir. Bu aksiyom sistemlerinin en ünlüsü, en fazla kabul göreni ve en çok kullanılanı bu iki ciltte açıklayacağımız ZFC adıyla bilinendir. ZFC, Zermelo'nun Z'si, Fraenkel'in F'si ve Seçim Aksiyomu'nun "seçim"inin frenkçeleri olan *Choice* ya da *Choix* gibi Latince kökenli sözcüklerin C'sidir. Fraenkel'in yanısıra, adı geçmese de, bir sonraki cildin konusu olacak olan aksiyomlarda Skolem'in de katkısı vardır; Skolem'i zikretmeden geçmeyelim.

ZFC dışındaki sistemlerin en bilineni Von Neumann, Gödel ve Bernays'in bulduğu ve kısaca GB olarak bilinen aksiyom sistemidir. Ama biz bu kitaplarda sadece ZFC'yi açıklamakla yetineceğiz. Aslında bu ilk ciltte daha ziyade Zermelo'nun önerdiği aksiyomların bazılarından (daha doğrusu o aksiyomların biraz değiştirilmiş hâllerinden) söz edeceğiz.

Dilimiz, matematiğin standart alfabesini içerecek. Bunlar

$$\exists,\ \forall,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (,\ ),\ =,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

simgeleridir. Bu simgeleri formüllerimizde kullanmaya hakkımız var. Ama v_0, v_1 gibi simgeler yerine, alışık olduğumuz üzere, x, y, z, a, b, n, α, β, $\aleph$, $\mathcal{U}$ gibi başka harfler de kullanma hakkını saklı tutuyoruz. Bir başka not daha: Dileseydik yukarıdaki simgelerden bazılarını atabilirdik. Örneğin $\exists$ ve $\forall$ simgelerinden sadece biri işimizi görür, ya da $\wedge$ ve $\vee$ simgelerinden birini seçip diğerini kalanlar yardımıyla tanımlayabiliriz. $\rightarrow$ ve $\leftrightarrow$ simgeleri de diğerleri yardımıyla tanımlanabilir. Kümelere özgü olmayan bu teknik konuya fazla girmeyeceğiz, zor olduğundan değil, konuya daha çabuk bir giriş yapmak istediğimizden, okuru teknik ayrıntılarla boğmak istemediğimizden. Bu konuda daha fazla bilgi isteyen okur hemen şimdi Altbölüm 9.2'i okuyabilir, ama bence hiç gerek yok.

Bunlara ilaveten kümeler kuramının formüllerinde bir de özel bir simge kullanılır: İçindelik simgesi olan bir tür epsilon işareti, $\in$. Açıklayalım.

ZFC kümeler kuramı, iki terimi olduğu gibi, hiç tanımlamadan kabul eder: Bunlar "küme" ve "elemanı olmak" terimleridir. Küme bir "nesne" adıdır, daha doğrusu bir nesne türüdür, tanımlanmamış bir sıfattır diyebiliriz. "Elemanı olmak" ise iki küme arasındaki doğru ya da yanlış olabilecek bir ilişkidir. Eğer x kümesi y kümesinin elemanıysa bu, $x \in y$ olarak yazılır. Aksi hâlde $x \notin y$ yazılır. Bir başka deyişle, $x \notin y$, $\neg(x \in y)$ önermesinin kısaltılmış şeklidir.

Dikkat: Kümenin ne demek olduğunu ve "elemanı olmanın" anlamını matematiksel olarak açıklamıyoruz; matematiksel açıklamaları yoktur. Dolayısıyla anlaşılacak ya da anlaşılmayacak herhangi bir şey de yoktur! Küme ve elemanı olmak kavramlarını tanımsız kabul edeceğiz. Tabii bu kavramların psikolojik, pedagojik, sezgisel, felsefi, sosyolojik açıklamaları, tanımlamaları, betimlemeleri yapılabilir, bu semantik açıklamaları [Ne2]'de elimizden geldiğince yapmaya çalıştık, ama bu kitapta biraz daha sentetik (yani biçimsel) olmaya çalışacağız. Her kuram tanımsız terimler içermek zorundadır, aksi hâlde teoriyi yazmaya başlayamayız bile! Bu tanımsız terimler, kuramın bir nevi dayanak noktalarıdır.

"Küme" adını vereceğimiz bazı soyut, anlamsız ve tanımlanmamış nesnelerin "elemanları" olacak. Sezgisel kümeler kuramında [Ne2] "küme" ve "elemanı olmak" kavramlarına sezgisel bir anlam yüklemiştik, ama burada sadece matematik hükmedecek, yani bu kavramlar tanımlanmayacak. Tanımlamak istemediğimizden değil, mümkün olmadığından...

Bazı okurlara tuhaf geleceğini sandığım bir şey söyleyeyim şimdi: Elemanlar da küme olacaklar[1]. Her şey küme olacak... Elemanlar da, 0, 1, 2, $\sqrt{2}$ ve π gibi sayılar da, fonksiyonlar da, toplama ve çarpma işlemleri de, $\leq$ sıralaması da... Kümeler kuramının tüm nesneleri kümedir, en azından bu kitapta açıklayacağımız ZFC kümeler kuramında. Tabii bu matematiğin biçimsel dünyasında böyle olacak, yoksa matematik yaparken ve düşünürken eskisi gibi hislerimizi konuşturacağız.

Bazen küme olmayan topluluklardan söz edeceğiz, ama bunu ZFC kümeler kuramında değil, ZFC kümeler kuramı hakkında konuşurken yapacağız, yani matematik yaparken değil, metamatematik yaparken.

Bazı kümeler bazı kümelerin elemanları olacak, "elemanı olmak" her ne demekse... Bazı kümeler de bazı kümelerin elemanı olmayacak.

"Küme" ve "elemanı olmak" kavramlarının hiçbir anlamı olmayacak ama bu kavramları siz gene de sezgisel olarak istediğiniz gibi yorumlayabilirsiniz. Yorum serbest... İsterseniz "elemanı olmak"ı "çocuğu olmak" olarak yorumlayın, yani "$y \in x$" tümcesini "y, x'in çocuğu" olarak yorumlayın, bu size kalmış bir şey... Biz yorum yapmıyoruz.

Bütün bunları yazıyoruz ama elimizde henüz hiç küme yok.

Aksiyomları teker teker sıralamaya başlamadan önce bir konuya daha parmak basmak gerekiyor. Matematiğin

$$\begin{aligned}
&x = x,\\
&x = y \to y = x,\\
&(\alpha \wedge \beta) \to \alpha,\\
&\alpha \vee \neg\alpha,\\
&(\varphi(x) \wedge x = y) \to \varphi(y)
\end{aligned}$$

gibi (aslında herkesin bildiği ama pek az kimsenin biçimsel olarak bir yerde yazılı gördüğü) mantıksal aksiyomları da vardır. Bu bölümde ya da bu kitaplarda bu aksiyomlardan değil, kümeler kuramının aksiyomlarından sözedeceğiz. ($\to$, $\wedge$ gibi simgelerin sezgisel anlamları için Önermeler Mantığı [Ne3] adlı kitabımıza bakabilirsiniz.)

[1] İlk ve orta öğretimde elemanların da küme oldukları öğretilmez. Ama öyledir. Kümeler kuramının (en azından bu kitapta sözedeceğimiz kümeler kuramının) tüm nesneleri kümedir.

Başlıyoruz... Matematiğin daha en başındayız... Elimizde hiç küme yok... Kümeleri yavaş yavaş var edeceğiz.

Şimdi kümeler kuramının ilk aksiyomunu ve onunla birlikte matematiğin ilk kümesini sunuyoruz:

Aksiyom 3.1 (Boşküme Aksiyomu)**.** *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Bu aksiyomu, matematiksel simgelerle

$$\exists x \forall y \; y \notin x$$

olarak yazarız. Yani (kötü bir Türkçeyle) "öyle bir x vardır ki, her y için, y, x'in elemanı değildir". Bu x, daha sonra boşküme adını vereceğimiz kümedir. Bu aksiyomdan önce evrenimizde herhangi bir kümenin olup olmadığını bilmiyorduk, ama artık biliyoruz. Hiçbir eleman içermeyen bir küme varmış. Belki başka kümeler de vardır, ama biz bilmiyoruz.

Yukarıdaki aksiyom, hiç elemanı olmayan bir kümenin varlığını söylüyor. Yani öyle bir x kümesi vardır ki diyor, y hangi küme olursa olsun, $y \notin x$ olur.

Şimdi soru şu: Hiç elemanı olmayan kaç küme vardır? Bir? İki? Üç? Sonsuz sayıda? Ya da böyle bir soru sormaya hakkımız var mı? Hiç elemanı olmayan kümelerden bir ya da birkaç tane olup olmaması bizim elimizde mi?

Hiç elemanı olmayan (iki değil) tek bir küme olduğunu kanıtlamaya çalışalım, bakalım başaracak mıyız? Bence başaramayacağız... Deneyelim ama:

Teorem 3.2. *Hiç elemanı olmayan tek bir küme vardır.*

Kanıt: x_1 ve x_2 hiç elemanı olmayan iki küme olsun. x_1'in x_2'ye eşit olduğunu göstermek istiyoruz... Tekrar edelim: x_1'in x_2'ye eşit olduğunu göstermek istiyoruz... İki kümenin birbirine eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz...

Ama şimdiye kadar iki kümenin ne zaman birbirine eşit olduklarına dair herhangi bir şey söylemedik... Kümenin ne demek olduğunu bilmiyoruz ki iki kümenin eşitliği hakkında bir şey bilebilelim...

Kanıtımıza ara verip biraz konuyu tartışalım.

Eğer iki küme birbirine eşitse o iki kümenin aynı elemanları vardır, yani birinde olan bir eleman diğerinindedir de; yani, her x_1, x_2 ve y kümesi için,

$$x_1 = x_2 \to (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)$$

önermesi ya da her x_1 ve x_2 kümesi için,

$$x_1 = x_2 \to \forall y \; (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)$$

doğrudur. Bu, matematiğin dayanağı ve temeli olan matematiksel mantığın kolay bir sonucudur: $x_1 = x_2$ ise, x_1 ile ilgili her doğru önerme (örneğimizde $y \in x_1$ önermesi) x_1 yerine x_2 alırsak da doğrudur (örneğimizde $y \in x_2$ önermesi).

İki eşit kümenin aynı elemanları olduğunu biliyoruz, bu bariz, ama aynı elemanları olan iki kümenin eşit olduğunu henüz bilmiyoruz. Bir sonraki aksiyom, eşitlik için **gerekli** olan bu koşulun aynı zamanda **yeterli** olduğunu söylüyor:

Aksiyom 3.3 (Küme Eşitliği Aksiyomu)**.** *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Bu aksiyom, matematiğin biçimsel dilinde, her x_1 ve x_2 kümeleri için,

$$(\forall y\ (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)) \rightarrow x_1 = x_2$$

olarak yazılır, yani

$$\forall x_1 \forall x_2\ ((\forall y\ (y \in x_1 \leftrightarrow y \in x_2)) \rightarrow x_1 = x_2)$$

demektedir. (Yukarıdaki önermelerde parantezlerin rastgele serpiştirilmediğine dikkatinizi çekeriz!)

Bu aksiyom, bir kümenin elemanları tarafından belirlendiğini söylüyor. İki kümenin farklı tanımları olabilir ya da biri yeşil biri kırmızı olabilir ya da birini bir ovalle birini kare olarak resmetmiş olabiliriz, ama farketmez, eğer bu iki küme aynı elemanlara sahipse eşitlerdir, bu elemanları farklı sıralamış olsak bile. Örneğin $\{a,\ b\}$ ve $\{b,\ a\}$ olarak gösterilen kümeler birbirine eşittir. $\{a,\ a\}$ ile $\{a\}$ kümeleri de eşittir. Aynı şekilde $\{x \in \mathbb{N} : x^2 = x\}$ kümesi $\{0,\ 1\}$ kümesine eşittir[2].

Şimdi Teorem 3.2'nin kanıtına devam edebiliriz:

Teorem 3.2'nin Kanıtının Devamı: Hiç elemanı olmayan iki küme aldık, x_1 ve x_2. Bu iki kümenin birbirine eşit olduklarını kanıtlamak istiyoruz. Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre her ikisinin de aynı elemanlara sahip olduğunu göstermek gerekiyor, yani birinden alınan rastgele bir elemanın diğerinin de elemanı olduğunu göstermeliyiz. Bu doğru olmasaydı, yani iki kümeden birinde diğerinde olmayan bir eleman olsaydı, o zaman iki kümeden birinde (diğerinde olmayan) bir eleman olacaktı. Oysa kümelerde eleman yok... Dolayısıyla birinde olup da diğerinde olmayan bir eleman da olamaz. Bir çelişki. Demek ki hiç elemanı olmayan tek bir küme var. □

Matematiğin biçimsel dilinde Teorem 3.2 şöyle yazılır:

$$(\exists x \forall y\ (y \notin x)) \wedge (\forall x_1 \forall x_2\ (\forall y\ (y \notin x_1 \wedge y \notin x_2) \longrightarrow x_1 = x_2)).$$

Madem ki hiç elemanı olmayan tek bir küme var, o zaman bu kümeye bir ad verebiliriz. Hiç elemanı olmayan kümeye ***boşküme*** adını verelim. Boşküme $\emptyset$ simgesiyle gösterilir.

[2] $\mathbb{N}$, 0 ve 1 ileride tanımlanacak. Sadece örnek vermek amacıyla onlardan bahsettik.

Bundan böyle $\emptyset$ simgesini formüllerimizde (bir kısaltma olarak) kullanmakta bir sakınca görmeyeceğiz. İçinde $\emptyset$ geçen her formül gerçekten de sayfa 30'da listelenen simgelerle ve $\in$ simgesiyle ifade edilebilir. Örneğin $x = \emptyset$ formülü $\forall y\ y \notin x$ demektir, ya da $\emptyset \in x$ formülü

$$a \in x \wedge \forall z\ z \notin a$$

demektir. İçinde $\emptyset$ simgesi bulunan her önerme, kümeler kuramının orijinal alfabesinde yazılmış bir önermeye (mantıksal olarak) denktir. Örneğin Teorem 3.2'yi artık biçimsel olarak şöyle yazabiliriz:

$$\forall x\ ((\forall y\ y \notin x) \longrightarrow x = \emptyset).$$

Buraya kadar sadece tek bir kümenin varlığını gösterdik, $\emptyset$, onu da bir aksiyomun yardımıyla yaptık. Başka kümeler de vardır belki evrende, ama bundan şimdilik hiçbir biçimde emin olamayız.

Şimdi ilk sayımız olan 0'ı tanımlayalım:

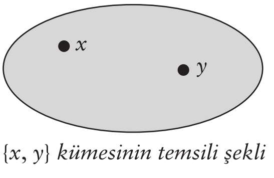
Tanım 3.4. $0 = \emptyset$.

Bu tanımladığımız 0 matematiksel 0'dır, günlük yaşamda kullandığımız 0 değil. Örneğin, "0'ın 0 elemanı vardır" tümcesindeki birinci 0 matematiksel 0'dır, ikincisiyse Türkçe 0'dır. Biraz önce tanımladığımız matematiksel 0'a ***sıfır*** adını vereceğiz. Çocukluğumuzdan beri bildiğimiz sıfıra da sıfır demeye ve bu sıfırı da 0 diye yazmaya devam edeceğiz. Günlük konuşma diliyle matematik dilini ayırdetmek lazım. 0'lardan biri matematiksel, diğeri hayatımızın bir parçası. Bu iki farklı kavramı ayırdetmek için yapay yollara sapmayacağız, okurun bu ayrımı kendi başına yapabileceğini düşünüyoruz.

0'ı tanımladık. Şimdi 1'i tanımlama işine soyunalım.

Eğer 0'ın sıfır elemanı varsa, 1'in de bir elemanı olması tercih edilir! Ve 1'in yegâne elemanı da olsa olsa bu ana kadar var olan yegâne küme olan 0 olmalı, başka ne olabilir ki! 1'i $\{0\}$ olarak tanımlamak istiyoruz ama böyle bir kümenin varlığından emin değiliz. Hemen bu sorunumuzu hâlledelim:

Aksiyom 3.5 (İki Elemanlı Küme Aksiyomu)**.** *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*



$\{x, y\}$ *kümesinin temsili şekli*

Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre sadece ve sadece x ve y kümelerini eleman olarak içeren tek bir tane küme vardır. Eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bu kümeyi

$$\{x,\, y\}$$

olarak yazarız. Eğer $x = y$ ise, $\{x, y\}$ yerine $\{x\}$ yazarız, çünkü Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre iki defa x yazmak enerji israfıdır.

Demek ki

$$t \in \{x,\, y\} \longleftrightarrow (t = x \vee t = y).$$

İki elemanlı küme aksiyomunu da biçimsel dilde şöyle ifade edilir:

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ (t \in z \longleftrightarrow (t = x \vee t = y)).$$

Bundan böyle formüllerimizde $\{x,\, y\}$ simgeler dizisini (kısaltma olarak) kullanma hakkını kendimizde bulacağız. Bu simge dizisinin bulunduğu her formül, eğer istenirse kümeler kuramının orijinal alfabesinde yazılabilir.

Yukarıdaki aksiyomda $x = y = 0$ alırsak, $\{0\}$ kümesinin varlığını göstermiş oluruz ve böylece 1'i de $\{0\}$ kümesi olarak tanımlama hakkını elde ederiz.

Tanım 3.6. $1 = \{0\}$.

Yukarıda tanımlanan 1 kümesine ***bir*** adını vereceğiz.

Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre $1 \neq 0$ olur, çünkü $0 \in 1$ ama $0 \notin 0$, yani birinde diğerinde olmayan bir eleman var.

Eğer $x = 0$, $y = 1$ alırsak, o zaman İki Elemanlı Küme Aksiyomu'ndan $\{0,\, 1\}$ kümesinin varlığı anlaşılır ve ***iki*** adını vereceğimiz 2'yi de bu küme olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 3.7. $2 = \{0, 1\}$.

0, 1 ve 2 kümelerinin birbirinden farklı olduklarının kanıtını okura bırakıyoruz; tabii ki Küme Eşitliği Aksiyomu kullanılmalı.

Aynı aksiyomdan $\{0, 2\}$ ve $\{1, 2\}$ kümelerinin de varlığı anlaşılır. Bundan da $\{\{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ kümesinin varlığı çıkar. Bu aksiyom sayesinde bir ve iki elemanlı sonsuz sayıda küme yaratabiliriz, ama üç elemanlı bir küme yaratamayız.

Daha önce $\{\{0, 2\}, \{1, 2\}\}$ diye bir şey (bir topluluk) vardı, yok değildi, ama adına küme denmeye hak kazanmamıştı. İki Elemanlı Küme Aksiyomu bu şeye küme payesini veriyor.

0'ın sıfır tane, 1'in de bir tane elemanı olduğundan, $0 \neq 1$. Dolayısıyla 2'nin iki elemanı var ve $0 \neq 2$, $1 \neq 2$. Tanımlayacağımız diğer sayıların da birbirinden farklı oldukları aynen böyle, Küme Eşitliği Aksiyomu'nun yardımıyla kolaylıkla kanıtlanabilir.

İki Elemanlı Küme Aksiyomu sayesinde elde edilen tüm kümelerin en fazla iki elemanı olduğundan, yukarıda verdiğimiz üç aksiyom $\{0, 1, 2\}$ kümesinin varlığını kanıtlamaya yeterli değildir. Böyle bir kümenin varlığını kanıtlamak için yeni bir aksiyoma, Bileşim Aksiyomu'na ihtiyacımız var. Bileşim Aksiyomu'nu verdiğimizde ve kabul ettiğimizde, varlığını bildiğimiz $\{0, 2\}$ ve $\{1, 2\}$ kümelerinin bileşimini alıp $\{0, 1, 2\}$ kümesini elde edeceğiz.

[Ne2]'de iki ya da daha çok kümenin bileşimini almayı sezgisel olarak öğrendik. Yalnız kümelerin bileşimini alırken dikkatli olmak gerekir, yanlış bir bileşim bizi çelişkiye götürebilir; bu tehlikeden [Ne2]'de bahsetmemiştik. Nitekim, ortaöğrenimde ve hatta daha yüksek seviyelerde, bileşim alınırken gözden kaçan ince bir nokta vardır: Kümelerin bileşiminin bir küme olduğunu kanıtlayabilmek için bileşimi alınan kümelerin de bir küme oluşturması gerekir, yoksa bileşim küme olmayabilir (ama olabilir de!). Örneğin tüm kümelerin bileşimini alırsak tüm kümeler topluluğunu elde ederiz ki tüm kümeler topluluğunun bir küme olmadığını biliyoruz, demek ki tüm kümelerin bileşimini alırsak bir küme elde etmeyiz. İleride buna benzer başka örneklerin de olduğunu göreceğiz. Örneğin a, b, c kümelerinin bileşiminden bir **küme** olarak söz edebilmek için

$$\{a, b, c\}$$

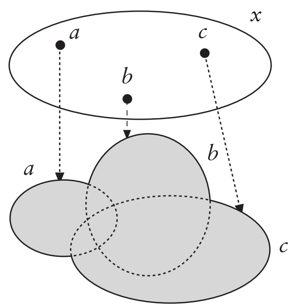
diye bir küme olmalıdır. Eğer $\{a, b, c\}$ diye bir küme yoksa, a, b ya da c'nin elemanlarından oluşan

$$a \cup b \cup c$$

topluluğunun küme olduğunu söyleyemeyiz, bu bileşim bir topluluk olur ama küme olmayabilir. Ama birazdan, başka aksiyomları kabul ettiğimizde, her a, b ve c için $\{a, b, c\}$ diye bir kümenin varlığını kanıtlayabileceğiz ve dolayısıyla $a \cup b \cup c$ diye bir küme olacak. Ancak a, b ve c gibi üç kümenin bileşimini almak yerine, sonsuz sayıda kümenin bileşimini almak istersek, o zaman beklenmedik sorunlarla karşılaşabiliriz.

Bir sonraki aksiyomla, bir kümenin elemanlarının bileşimini alıp yeni bir küme elde etme olanağı sağlayacağız. Aksiyomu yazmadan önce tam ne istediğimizi biraz daha açık bir biçimde açıklayalım.

x, aşağıdaki resimdeki gibi bir küme olsun. x'in birtakım elemanları var, diyelim x'in üç elemanı var: a, b ve c. Eleman sayısı sonsuz da olabilir, biz sadece üç elemanlı bir küme aldık. Her eleman gibi bu a, b, c elemanları da birer küme. Resimde a, b ve c hem bir eleman olarak (bir nokta), hem de bir küme olarak resmedilmiş (gri yumurtalar). İşte bir sonraki aksiyomla, x kümesini oluşturan bu a, b, c elemanlarının bileşimini alarak yeni bir küme elde etmenin yolunu açacağız. Bu bileşim, x'in elemanlarının (a, b ve c'nin yani) elemanlarından oluşacak.



{a, b, c} *kümesinin öğelerinin bileşimi*

Yani aksiyom (kötü bir Türkçeyle) şunu diyecek: x hangi küme olursa olsun, öyle bir y **kümesi** vardır ki, her z kümesi için,

$z \in y$ ancak ve ancak $z \in t$ ve $t \in x$ koşullarını sağlayan bir t varsa

önermesi doğrudur.

Eğer bir kümenin elemanlarını o kümenin çocukları olarak yorumlarsak, bir kümenin elemanlarının bileşiminin elemanları, bileşimi alınan kümenin torunları olur. Resimde, a, x'in bir çocuğu; eğer z de a'nın bir çocuğuysa, yani z, x'in bir torunuysa, o zaman z, x'in elemanlarının bileşiminin bir elemanı olacak. Bu metaforla, x'in elemanlarının bileşimi x'in torunlarından oluşan küme demektir.

Aksiyom 3.8 (Bileşim Aksiyomu)**.** *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Bu aksiyom matematiksel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \longleftrightarrow \exists t\ (z \in t \wedge t \in x)).$$

Bu kümeye x'in (elemanlarının) ***bileşimi*** adı verilir[3]. Küme Eşitliği Aksiyomu'ndan dolayı bu bileşim biriciktir, çünkü ne de olsa bileşimi elemanlarının ne olduğunu söyleyerek tanımladık. x'in bileşimi

$$\cup x \text{ ya da } \bigcup_{t \in x} t$$

olarak yazılır. Eğer x'in sonlu sayıda elemanı varsa, daha alışık olduğumuz yazılımı kullanabiliriz:

$$\cup\{a, b, c\} = a \cup b \cup c,$$
$$\cup\{\{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}\} = \{0,1\} \cup \{0,2\} \cup \{1,2\} = \{0,1,2\},$$

[3]Kesişim için özel bir aksiyoma ihtiyacımız yok. Bir sonraki bölümde kesişimin varlığını (bir başka aksiyomun yardımıyla) kanıtlayacağız. Bkz. Teorem 4.2.

$\cup\{a\} = a$.

Şimdi, yukarıdaki aksiyomları kullanarak $\{0, 1, 2\}$ diye bir kümenin varlığını kanıtlayabiliriz:

i. $0 = \emptyset$ olduğundan, Aksiyom 3.1'e göre 0 bir kümedir.
ii. $1 = \{0\}$ olduğundan, Aksiyom 3.5 ve i'e göre 1 bir kümedir.
iii. $2 = \{0, 1\}$ olduğundan, Aksiyom 3.5, i ve ii'ye göre 2 bir kümedir.
iv. Aksiyom 3.5 ve iii'e göre $\{2\}$ bir kümedir.
v. Aksiyom 3.5, iii ve iv'e göre $\{2, \{2\}\}$ bir kümedir.
vi. Aksiyom 3.8'e göre, $\cup\{2, \{2\}\}$, yani

$$2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

bir kümedir.

Doğal sayıları tanımlamaya devam edelim:

Tanım 3.9. $3 = \{0, 1, 2\}$.

Tanım 3.10. $4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Tanım 3.11. $5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Bunların her birinin birer küme olduğunu kanıtlamak zor değildir ve birazdan kanıtlayacağız.

Bu tanımları sürdürüp 6'yı, 7'yi, 8'i tanımlayabiliriz. Ama tüm doğal sayıları tek tek tanımlamaya yeterince zamanımız olmadığına göre, durup, genel bir tanım vermenin yollarını aramalıyız.

Bu tanımlara bir kez daha dikkatlice bakalım:

$$\begin{aligned}
5 &\overset{3.11}{=} \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} \overset{3.10}{=} 4 \cup \{4\},\\
4 &\overset{3.10}{=} \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} \overset{3.9}{=} 3 \cup \{3\},\\
3 &\overset{3.9}{=} \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} \overset{3.7}{=} 2 \cup \{2\},\\
2 &\overset{3.7}{=} \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} \overset{3.6}{=} 1 \cup \{1\},\\
1 &\overset{3.6}{=} \{0\} = \emptyset \cup \{0\} \overset{3.4}{=} 0 \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Özetle:

$$\begin{aligned}
5 &= 4 \cup \{4\},\\
4 &= 3 \cup \{3\},\\
3 &= 2 \cup \{2\},\\
2 &= 1 \cup \{1\},\\
1 &= 0 \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi "bir sayının ardılı" (her ne demekse!), o sayıyla sadece o sayıdan oluşan kümenin bileşimi. Örneğin 5 sayısı, 4 kümesiyle sadece 4 elemanından oluşan $\{4\}$ kümesinin bileşimi.

Yukardaki yöntemi 5'e uygulayıp 6'yı tanımlayalım:

Tanım 3.12. $6 = 5 \cup \{5\}$.

Bakalım elemanlarıyla yazınca 6 ne oluyor:

$$6 \overset{3.12}{=} 5 \cup \{5\} \overset{3.11}{=} \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

yani:

Önsav 3.13. $6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. □

6 da kendisinden önce gelen sayılar kümesi oldu.

Eğer x bir kümeyse, $S(x)$'i ya da daha sade yazılımıyla Sx'i şöyle tanımlayalım:

Tanım 3.14. $Sx = x \cup \{x\}$.

Her şey küme olmak zorunda olduğundan, x bir kümeyse, Sx de bir küme olmalı. Hemen kanıtlayalım bunu:

Teorem 3.15. *x bir kümeyse Sx de bir kümedir.*

Kanıt: Üç adımda kanıtlayacağız:

a. x bir küme olduğundan İki Elemanlı Küme Aksiyomu'na göre $\{x\}$ bir kümedir.

b. x ve $\{x\}$ birer küme olduğundan, gene İki Elemanlı Küme Aksiyomu'na göre $\{x, \{x\}\}$ bir kümedir.

c. Bileşim Aksiyomu'na ve (b)'ye göre $\cup\{x, \{x\}\}$ topluluğu, yani $x \cup \{x\}$, yani Sx bir kümedir. □

Dikkat ederseniz, x, Sx'in hem elemanı hem de altkümesidir, çünkü ne de olsa Sx kümesi, x kümesine x elemanı ekleyerek elde edilmiştir. Bu ilginç özellik ileride çok işimize yarayacak.

Bundan böyle formüllerimizde S simgesini de bir kısaltma olarak kullanma hakkını kendimizde göreceğiz. İçinde S bulunan her önerme, kümeler kuramının orijinal alfabesinde yazılmış bir önermeye denktir. Örneğin $y \subseteq Sx$ önermesi,

$$\forall z \ (z \in y \longrightarrow (z \in x \vee z = x))$$

önermesine denktir. $Sx \subseteq y$ önermesi de

$$\forall z \ ((z \in x \vee z = x) \longrightarrow z \in y)$$

önermesine denktir.

Eğer n tanımlanmış bir "doğal sayıysa", Sn'ye n'nin ***ardılı*** adını verelim. Yukarıda da görüldüğü üzere, 6, 5'in ardılı.

6'nın ardılı, tanımı gereği $S6$'dır:

$$S6 \overset{3.14}{=} 6 \cup \{6\} \overset{3.12}{=} \{0,1,2,3,4,5\} \cup \{6\} = \{0,1,2,3,4,5,6\}.$$

Bundan böyle $S6$'ya 7 adını verelim.

Tanımlarımızı özetleyelim.

$$S0 = 1,\ S1 = 2,\ S2 = 3,\ S3 = 4,\ S4 = 5,\ S5 = 6,\ S6 = 7.$$

Dikkat edilirse henüz genel bir doğal sayı kavramı tanımlamadık. Bunu daha sonraki bölümlerde yapacağız. Şimdilik şu kavramları tanımladık:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ ve } Sx.$$

Notlar

3.1. Bu altbölümdeki yöntemle, ömrünüz yettiği sürece istediğiniz kadar doğal sayı tanımlayabilirsiniz ama tüm doğal sayıları tanımlayamazsınız.

3.2. Bileşim aksiyomu kullanarak, sabitlenmiş her n doğal sayısı için n elemanlı bir küme inşa edebiliriz. Örneğin 100 elemanlı bir küme inşa edebiliriz. Ama henüz "her n doğal sayısı için, n elemanlı bir küme vardır" önermesini kanıtlayamayız çünkü henüz "doğal sayı" kavramını tanımlamadık.

3.2 Kusurlu Bir Toplama Tanımı Denemesi

Henüz bir n doğal sayısı için, $Sn = n + 1$ eşitliğini kanıtlayamayız. Çünkü ne doğal sayının tanımını yaptık ne de $+$ diye bir işlem tanımladık. Toplamayı tanımlamaya çalışalım. Yaptıklarımız matematiksel olarak pek caiz olmasa da, daha sonra yapacaklarımızın daha kolay anlaşılmasını sağlayacağına inanıyoruz. Zaten pek çok kitapta da bu kusurlu tanım verilir. Önce $n + 0$ işlemini tanımlayalım:

Tanım 3.16. $n + 0 = n$.

Dikkat: Bu tanımdan $0 + n = n$ eşitliği çıkmaz. Şimdilik kanıtlayamayız bu eşitliği. Ama daha sonra, doğal sayıların ve toplamanın gerçek tanımını verdiğimizde kanıtlayacağız.

Bir sayıyı ya da bir şeyi 0'la (sağdan) toplamayı yukarıdaki tanımda öğrendik. Toplamayı tanımlamaya devam edelim. Bir sonraki tanım sayesinde, $n+m$ işleminin sonucunu biliyorsak, $n + Sm$ işleminin sonucunu da bileceğiz, yani m doğal sayısıyla ya da kümesiyle ya da şeyiyle (sağdan) toplamasını biliyorsak, m'nin ardılı olan Sm ile de (sağdan) toplamasını bildiğimizi göreceğiz:

Tanım 3.17. *Eğer $n + m$ tanımlanmışsa,*

$$n + Sm = S(n + m)$$

olarak tanımlanır[4].

Bir sonraki teoremde $Sn = n + 1$ eşitliğini kanıtlayacağız ve o zaman yukarıdaki tanım

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

anlamına gelecek.

Şimdi Sn'nin ta başından beri istediğimiz gibi $n + 1$ demek olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 3.18. $Sn = n + 1$.

Kanıt: $1 = S0$ olarak tanımlandığından, $n + 1 = n + S0 \overset{3.17}{=} S(n + 0) \overset{3.16}{=} Sn$ olur. □

Yukarıdaki teoremi 0'a, 1'e, 2'ye ve tanımladığımız diğer sayılara uygularsak şu sonuçlar çıkar:

$$\begin{array}{rcccc} 0+1 & = & S0 & = & 1 \\ 1+1 & = & S1 & = & 2 \\ 2+1 & = & S2 & = & 3 \\ 3+1 & = & S3 & = & 4 \\ 4+1 & = & S4 & = & 5 \\ 5+1 & = & S5 & = & 6 \\ 6+1 & = & S6 & = & 7 \end{array}$$

Artık $2 + 2 = 4$ eşitliğini kanıtlama zamanı geldi:

Teorem 3.19. $2 + 2 = 4$.

---

[4] Tanım 3.17 çok sorunlu. **1.** Her şeyden önce ne tanımlıyoruz, nasıl bir nesne tanımlıyoruz? "Toplama" dediğimiz şey nedir? Bir fonksiyon mu? Fonksiyonsa, o fonksiyonun tanım kümesi ne? **2.** Bu tanımın geçerli olması için bir şeyin kontrol edilmesi gerekmektedir. Bu tanımın kabul edilebilir bir tanım olması için özellikle gözden uzak tutmaya çalıştığımız bir olgu var ve bu olgu tanımın geçerli olduğunun gösterilmesi için kanıtlanmalıdır. Sorun şu: $Sm = Sm'$ ise $S(n+m) = S(n+m')$ olur mu? Aksi hâlde, $n+m$ tanımlı olsa bile $n+Sm$ iyi tanımlı değildir. Eksikliği Bölüm 4.8'da açıklayıp gidereceğiz. Bölüm 6'da ise aslında giderecek bir sorun olmadığını göstereceğiz! **3.** "Tanımlanmış olma"nın matematiksel bir tanımını yapmamış olmamız bir başka sorun.

Ama + işlemini sadece tanımladığımız 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarına uygularsak yukarıda işaret ettiğimiz sorunların hepsi yok olur.

Sonraki bölümlerde çok daha dikkatli olacağız, şimdilik bu kusurlu tanımla idare edelim. Sözünü ettiğimiz nedenlerden dolayı + simgesini tüm genelliğiyle şimdilik formüllerimizde kullanmayacağız. $n+m$ yazdığımızda, n ve m sayılarının 1'den 7'ye kadar olan sayılar olduğunu varsayacağız.

Kanıt: Basit bir hesap: $2+2 = 2+S1 \stackrel{3.17}{=} S(2+1) \stackrel{3.18}{=} S(S2) = S3 = 4$. İstediğimiz eşitlik kanıtlanmıştır. □

Kanıtladığımız $2+2 = 4$ eşitliğinin elmalarla ya da tavşanlarla hiçbir ilgisi olmadığına dikkatinizi çekerim. Aslında var, yok değil: $2+2=4$ eşitliği, elmalarla olan ilişkimizden esinlenerek bulundu, çevremizde elma ve armut gibi nesneler olmasaydı bu eşitliğin farkına bile varmayabilirdik, ama tanımları ve kanıtları yaşamdan tamamen kopuk bir ortamda yaptık. $2+2=4$ eşitliğini hayattan koparıp tamamen soyut ve zihinsel bir dünyaya taşıdık.

Şimdi çarpmaya geçelim. Önce 0'la çarpmayı öğreneceğiz, ardından, m'yle çarpmayı ve toplamayı bildiğimizi varsayarak, Sm ile çarpmasını öğreneceğiz.

Tanım 3.20. $n \cdot 0 = 0$.

Tanım 3.21. *Eğer $n \cdot m$ ve $n \cdot m + n$ tanımlanmışsa,*

$$n \cdot Sm = n \cdot m + n$$

olarak tanımlanır[5].

Bazen $n \cdot m$ yerine nm ya da $n \times m$ yazacağız.

Teorem 3.18 ve yukarıdaki tanımdan

$$n(m+1) = nm + n$$

eşitliği çıkar.

Şimdi $n \cdot 1 = n$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:

$$n \cdot 1 = n \cdot S0 \stackrel{3.21}{=} n0 + n \stackrel{3.20}{=} 0 + n = \ldots$$

Takıldık. Çünkü $0+n = n$ eşitliğini henüz bilmiyoruz. Bizim bildiğimiz sadece $n+0 = n$ eşitliği, $0+n = n$ eşitliği değil. $0+n = n$ eşitliğini daha sonra kanıtlayacağız, şimdi kanıtlayamayız. Bu eşitliği şimdilik kanıtlayamayız ama 3.18'den

$$0 + 1 = S0 = 1$$

eşitliğini bildiğimizden, $1 \cdot 1 = 1$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

Teorem 3.22. $1 \cdot 1 = 1$.

Kanıt: $1 \cdot 1 = 1 \cdot S0 \stackrel{3.21}{=} 1 \cdot 0 + 1 \stackrel{3.20}{=} 0 + 1 = 1$. □

Şimdi $2 \times 2 = 4$ eşitliğini kanıtlamaya çalışalım:

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot S1 \stackrel{3.21}{=} 2 \cdot 1 + 2.$$

[5] Toplama için çıtlattığımız sorun çarpmanın tanımında da var. Bu sorunları Bölüm 6'da gidereceğiz.

Demek ki sonuca ulaşmak için önce $2 \cdot 1 = 2$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım:

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot S0 \overset{3.21}{=} 2 \cdot 0 + 2 \overset{3.20}{=} 0 + 2.$$

Demek ki daha önce $0 + 2 = 2$ eşitliğini kanıtlamamız gerekiyormuş:

$$0 + 2 = 0 + S1 \overset{3.17}{=} S(0+1) \overset{3.18}{=} S(S0) = S1 = 2.$$

Şimdi artık $2 \times 2 = 4$ eşitliği kanıtlanmıştır. Teoremi ve kanıtını bir defa daha ama bu sefer derli toplu bir hâlde yazalım.

Teorem 3.23. $2 \times 2 = 4$.

Kanıt: Hesaplar şöyle:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 &= 2 \cdot S1 \overset{3.21}{=} 2 \cdot 1 + 2 = 2 \cdot S0 + 2 \overset{3.21}{=} (2 \cdot 0 + 2) + 2 \\ &\overset{3.20}{=} (0+2) + 2 = (0 + S1) + 2 \overset{3.17}{=} S(0+1) + 2 \overset{3.18}{=} S(S0) + 2 \\ &= S1 + 2 = 2 + 2 \overset{3.19}{=} 4. \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Özet. Bu bölümde 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 sayılarını, Sx'i ve (en azından bu sayılarla) + ve × işlemlerini tanımlayıp $2 + 2 = 4$ ve $2 \times 2 = 4$ eşitliklerini kanıtladık. Görüldüğü gibi tanımlarımızın elmalarla armutlarla, alet edevatla, deneyle, dış dünyayla hiçbir ilgisi yok. Her şey zihinsel ve en soyut düzeyde.

Yine de yukarıda yapılanlarda önemli bir eksik var: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarını teker teker tanımladık. Tanımlanacak daha çok sayı var... Ömür biter, sayılar bitmez! Bütün sayıları teker teker tanımlayamayız. Matematik sonlu zaman içinde yapılmalı. Bu sorunun üstesinden geleceğiz. Doğal sayıları teker teker değil, hepsini birden, daha doğrusu doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi bir anda, tek bir hamlede yaratacağız. Her şey zamanla...

Bir uyarı daha: Bu bölümde yapılanlar matematiksel olarak sorunludur. "Toplama" denen işlemin ne olduğunu, iyi tanımlanıp tanımlanmadığını kanıtlamadık. Yapılanlar yanlış değil, ancak matematiksel temelden yoksunlar. İleride bu sorunu gidereceğiz tabii.

Alıştırmalar

3.3. a_1, a_2, a_3 küme olsunlar. $\{a_1, a_2, a_3\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. Genel olarak $a_1, \ldots, a_n$ kümeyse $\{a_1, \ldots, a_n\}$ topluluğunun küme olduğunu kanıtlayın.

3.4. $\cup\emptyset = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın.

3.5. $4 + 3 = 7$ ve $3 + 4 = 7$ eşitliklerini kanıtlayın.

3.6. $3 \times 2 = 6$ ve $2 \times 3 = 6$ eşitliklerini kanıtlayın.

3.7. n^m işlemini ve 8 sayısını bu bölümdeki yöntemlerle tanımlayıp $2^3 = 8$ eşitliğini kanıtlayın.

Giuseppe Peano (1858-1932)

Bugün ilkokulda bile öğretilen $\cup$, $\cap$, $\subseteq$, $\in$, $\emptyset$ gibi simgeleri borçlu olduğumuz Giuseppe Peano bir çiftçi ailesinin çocuğuydu. Giuseppe önce köy okuluna gitti. Sonra her gün $5+5=10$ km'lik yolu göze alarak kasaba okuluna devam etti. Avukat ve papaz olan ağabeyi (daha çok köylerde geçerli olan Katolik geleneğine göre en büyük kardeş papaz olmak zorundadır) kardeşinin yeteneğini görünce onu lise sınavlarına soktu. Sınavı kazanıp liseden sonra Torino Üniversitesi'nde (daha sonra mühendisliğe geçmek üzere) matematik okuyan Peano, üçüncü yılında sınıfının birincisiydi, çünkü sınıfta başka öğrenci yoktu, diğerleri matematiği bırakıp mühendisliğe geçmişlerdi! Peano'nun okul arkadaşlarının adlarını bugün kimse bilmez! Çağının çok ilerisinde bir matematik anlayışına sahipti Giuseppe Peano. Gelişmiş analitik yeteneğiyle diğerlerinin makalelerinde yanlış bulmasıyla ünlüydü. Analizden mantığa birçok önemli buluşları olmuştur. Birçok tarihçi tarafından matematiksel mantığın kurucusu olarak kabul edilir.

Doğal sayıların bugün bilinen (ve bu kitapta açıklayacağımız) matematiksel tanımını ilk bulan Giuseppe Peano, dilbilime de meraklıydı. Bilindiği gibi Esperanto tamamıyla yapay, dilbilgisi oldukça kolay, bol bol Latinceden esinlenmiş insan buluşu bir dildir. Kelime anlamı "umut eden" olan Esperanto, Polonyalı Zamenhof (1859-1917) tarafından henüz bir lise öğrencisiyken 1878'de bulunmuş ve yeni bir dil olarak ilk kez 1887'de yayımlanmıştır. Zamenhof'un amacı insanların bu evrensel dilde konuşarak değil, yazışarak anlaşmalarıydı. 1903'te Peano, Zamenhof gibi, Latinceyi sadeleştirerek "bükümsüz Latince" demek olan *Latino sine flexione* yapay dilini bulmuştur. *Latine sine flexione*, Latince sözcükleri korumuş, ancak ekleri ve çekimleri (yani "flexione/büküm"leri) tamamıyla kaldırmıştır, çünkü bükümler bir dili zorlaştıran elemanlardır. Bir kızılderili dili olan Navajo dili o kadar bükümlü ve zordur ki, ABD, İkinci Dünya Savaşı'nda şifre olarak bu dili kullanmıştır. Navajo dilinde Waşakotyatawitşerahekvhtha mesela, "ona bir kadın vücudunu çirkinleştiren üste giyilen şeyler yaptı" anlamına gelir... Örneğin İngilizce görece az bükümlü dil olduğundan öğrenmesi oldukça kolaydır.

Latine sine Flexione'yi

`http://www.geocities.com/Athens/Olympus/2948/index2.html`

adresinden öğrenebilirsiniz.

4. Daha Fazla Kümeler Kuramı

Sayıların inşasına bir müddet ara verip, doğal sayılar kümesini inşa etmek için bir sonraki bölümde gerekecek olan minimum kümeler kuramını geliştireceğiz. Mesela henüz fonksiyon kavramının matematiksel tanımını bilmiyoruz, oysa toplama ve çarpma gibi işlemler birer fonksiyondurlar. Kartezyen çarpımın da matematiksel tanımını vermedik. Matematiğin bu önemli kavramlarını tanımlamamız lazım. Bu da biraz zaman alacak.

Geçen bölümden şu aksiyomları aklımızda tutalım:

Aksiyom 3.1 (Boşküme Aksiyomu) *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Aksiyom 3.3 (Küme Eşitliği Aksiyomu) *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Aksiyom 3.5 (İki Elemanlı Küme Aksiyomu) *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

Aksiyom 3.8 (Bileşim Aksiyomu) *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Bu aksiyomlara birkaç yeni aksiyom daha ekleyeceğiz. Bu bölümde ekleyeceğimiz aksiyomlara “ilkokul seviyesinde” aksiyomlar diyebiliriz.

4.1 Altkümeler

Eğer x kümesinin her elemanı y kümesinin bir elemanıysa x kümesine y kümesinin ***altkümesi*** adı verilir ve bu durum simgesel olarak

$$x \subseteq y$$

diye gösterilir. Bazen, bu durumda y kümesi x kümesini ***kapsar*** diyeceğiz. Ender de olsa, y'ye x'in ***üstkümesi*** dendiği olur.

Demek ki $x \subseteq y$ önermesinin geçerli olması için,

$$\forall z \, (z \in x \to z \in y)$$

önermesi geçerli olmalıdır. Dolayısıyla küme eşitliği aksiyomuna göre $x = y$ eşitliğinin geçerli olması için $x \subseteq y$ ve $y \subseteq x$ kapsamalarının geçerli olması gerek ve yeter koşuldur. Bu ve

$$(x \subseteq y \wedge y \subseteq z) \rightarrow x \subseteq z$$

ve

$$x = y \longrightarrow (x \subseteq y \wedge y \subseteq x)$$

gibi önermelere okurun aşina olduğunu varsayıyoruz. Kuşku hâlinde [Ne2]'ye başvurulabilir.

Eğer $x \subseteq y$ ama $x \neq y$ ise x'e y'nin ***öz altkümesi*** denir ve bu durum $x \subset y$ olarak gösterilir. Boşkümenin özaltkümesi yoktur.

Ama dikkat, altküme öncelikle bir küme olmalıdır. Bir kümenin küme olmayan alttoplulukları olabilir, doğal sayılar kümesinin bile (ama bu kitapta böyle bir örnek veremeyeceğiz).

Bundan böyle formüllerimizde $\subseteq$ simgesini bir kısaltma olarak kullanacağız: $x \subseteq y$ simgeleri

$$\forall z \ (z \in x \longrightarrow z \in y)$$

önermesi yerine kullanılacak.

Boşküme her kümenin altkümesidir. Bunu kanıtlayalım. x herhangi bir küme olsun. Boşkümenin x'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Yani boşkümenin her elemanının x'in bir elemanı olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Diyelim ki bu doğru değil, yani diyelim ki boşkümede x'te olmayan bir eleman var. Ama hani boşkümede hiç eleman yoktu! Hiç elemanı olmayan boşkümede x'te olmayan bir eleman olabilir mi? Olamaz elbet. Demek ki boşkümenin her elemanı x'in bir elemanıymış, yani boşküme x'in bir altkümesiymiş... Kanıtımız bitmiştir!

Boşküme, her kümenin altkümesi olan yegâne kümedir. Bu da boşkümeyi ayrıcalıklı kılan bir başka özelliktir. (Diğer özellik, boşkümenin sıfır adet elemanı olan yegâne küme olmasıdır.)

Şimdi tuhaf gelebilecek bir teorem kanıtlayalım: Boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Kanıtın püf noktası boşkümenin hiç eleman içermemesidir. Tanımı gereği hiç eleman içermeyen boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Bunu kanıtlayalım. Diyelim ki savımız yanlış, yani boşkümenin her elemanı 1'e eşit değil... O zaman boşkümede 1'e eşit olmayan bir eleman vardır. Ama hani boşkümede hiç eleman yoktu? Hiç elemanı olmayan boşkümede 1'e eşit olmayan bir eleman olabilir mi? Elbette olamaz. Demek ki boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Bu paragrafta yazılanlar, $\emptyset \subseteq \{1\}$ önermesinin kanıtından başka bir şey değildir.

Bu kanıtın bir benzeri, boşkümenin her elemanının 2'ye eşit olduğunu da kanıtlar. Yani boşkümenin her elemanı hem 1'e hem de 2'ye eşittir, hatta hatta π'ye ve $\sqrt{2}$'ye de eşittir... Neyse ki boşkümenin hiç elemanı yok... Olsaydı, $1 = 2 = \pi = \sqrt{2}$ gibi saçmasapan eşitlikler kanıtlamış olacaktık!

Boşkümenin her elemanı istediğimiz tüm özellikleri sağlar. Boşkümenin her elemanı sarıdır, yeşildir, uzundur, aynı zamanda kısadır da (yeter ki özellik kümeler kuramının dilinde ifade edilebilsin). Mesela boş bir sınıfın tüm öğrencileri çalışkandır, ayrıca hepsi haylazdır da... Hiç elemanı olmayan boşkümenin her elemanı tüm özellikleri ve eşitlikleri sağlar. Bunu boşkümenin hiç elemanı olmamasına borçluyuz.

4.2 Tanımlı Altküme Aksiyomu

Aksiyomu yazmakla başlayalım, gereken açıklamaları daha sonra yapacağız.

Aksiyom 4.1 (Tanımlı Altküme Aksiyomu)**.** *x bir küme ve $\varphi(z)$ kümeler kuramının dilinde yazılmış bir özellik*[1] *olsun. O zaman x'in $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanları bir küme oluşturur.*

Bir iki örnekle bu aksiyomu açıklamaya çalışalım. Diyelim doğal sayılar kümesi diye bir kümenin varlığını biliyoruz. Ve diyelim çift sayı olma özelliğini kümeler kuramının dilinde ifade edebildik, yani öyle bir $\varphi(z)$ formülü bulduk ki, her z doğal sayısı için, $\varphi(z)$ formülünün doğru olması için gerek ve yeter koşul z'nin bir çift sayı olmasıdır. O zaman yukarıdaki aksiyoma göre, çift doğal sayılardan oluşan bir küme vardır.

Mesela Teorem 2.2'de, $\{z \in x : z \notin z\}$ kümesinden sözetmiştik. Bu küme bu aksiyomun yardımıyla, $\varphi(z)$ formülü "$z \notin z$" formülü olarak alınarak bulunmuştur.

"Kümeler kuramının dilinde ifade etme"nin ne demek olduğuna pek takılmayın şimdilik. Aşağı yukarı şu anlama gelir:

$$\exists,\ \forall,\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ \longrightarrow,\ \longleftrightarrow,\ (,\ ),\ =,\ \in$$

ve x, y, z gibi değişkenleri kullanarak sonlu uzunlukta "anlamlı" bir simgeler dizisiyle ifade edilebilmek[2].

Bu aksiyomla varlığı söylenen küme, elbette, x kümesinin bir altkümesidir çünkü elemanları x'in ($\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z) elemanlarından oluşuyor.

Ayrıca aksiyomda varlığı söylenen bu küme, küme eşitliği aksiyomuna göre biriciktir, ne de olsa elemanları aksiyom tarafından belirleniyor. Biricik olan bu kümeyi,

$$y = \{z \in x : \varphi(z)\}$$

[1] Yani içinde z değişkeni bulunan bir formül. Bölüm 9'da "formül" kavramının matematiksel tanımını vereceğiz. Şimdilik okurun bu kavramı sezgisel olarak bildiğini varsayıyoruz.

[2] $\Longrightarrow$ ile $\longrightarrow$ simgeleri arasında şöyle bir ayrım yapıyoruz: Birincisi günlük dildeki "demek ki"nin ya da "ise"nin kısaltılmış hâlidir. İkincisi ise formel (yani anlamsız, sadece biçimsel) dilde kullanılan simgedir. Tabii ki ikincisinde de, birincisinde olduğu gibi "demek ki" anlamı kastedilmiştir.

olarak yazarız. $\varphi(z)$, bu y kümesini tanımlayan formüldür[3].

Dikkat edilirse, tanımlı altküme aksiyomu, $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan **tüm** kümelerin bir küme oluşturduğunu söylemiyor. Yani,

$$\{z : \varphi(z)\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu söylemiyor. Aksiyom sadece x'in (altını çiziyoruz: x'in) $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanlarının bir küme oluşturduğunu söylüyor. Yani yeni kümemizin elemanlarını x ile kısıtladık. Bu kısıtlama sayesinde Russell Paradoksu'nu engellemiş olduğumuzu özellikle vurgulamak isterim.

Tanımlı küme aksiyomu, biçimsel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))).$$

Yukarıdaki y kümesinin "x'in, $\varphi(z)$ formülü tarafından tanımlanmış altkümesi" olduğu söylenir.

Bundan böyle tanımlı bir altkümeyi formüllerimizde bir kısaltma olarak kullanacağız. Örneğin

$$y \subseteq \{z \in x : \varphi(z)\}$$

formülü aslında,

$$\forall z\ (z \in y \longrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))$$

anlamına gelir.

Bu aksiyomu kullanarak, boş olmayan bir kümenin elemanlarının kesişiminin bir küme olduğunu gösterebiliriz:

Teorem 4.2 (Kesişim)**.** *x, boş olmayan bir küme olsun. Elemanları, x'in elemanlarının ortak elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Kanıt: Tanımlı altküme aksiyomunu x'in bir x_0 elemanına uygulayacağız. x boşküme olmadığından, x'in bir elemanı vardır. Bu elemanlardan birini seçelim ve seçtiğimiz bu elemana x_0 diyelim. $\varphi(z)$ özelliğimiz de

$$\forall t\, (t \in x \to z \in t)$$

olsun. $\varphi(z)$, z'nin, x'in tüm t elemanlarının elemanı olduğunu söylüyor, dolayısıyla $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan her z elemanı zorunlu olarak x_0 kümesinin

[3]Eğer x sonsuzsa, x'in bir formül tarafından tanımlanamayan altkümeleri mutlaka vardır. Kardinal konusunu bilen ya da bu iki cildi okumuş biri için bunun kanıtı kolaydır: x'in tanımı olan altkümeleri formül sayısı kadardır, formüllerin kardinalitesi de x'in kardinalitesi olan $|x|$ kadardır; öte yandan x'in altküme sayısı $2^{|x|}$ kadardır, $|x|$'ten daha büyük bir kardinalite. Yani x'in altkümelerinin çoğunluğu tanımı olmayan, dolayısıyla betimlenemeyen altkümelerdir. Şaşırtıcı ama gerçek. Kümeler kuramına yeni başlayan biri bu satırları gözardı edebilir.

de bir elemanıdır. Dolayısıyla, tanımlı altküme aksiyomundan dolayı küme olduğunu bildiğimiz

$$\{z \in x_0 : \varphi(z)\}$$

topluluğu, aslında x'in tüm elemanlarının ortak elemanlarından oluşur. $\square$

Bu teoremle varlığı kanıtlanan kümeye x'in elemanlarının ***kesişimi*** adı verilir ve bu küme

$$\cap x \text{ ya da } \bigcap_{t \in x} t$$

olarak gösterilir. Tanım gereği,

$$z \in \cap x \Leftrightarrow \text{ her } t \in x \text{ için } z \in t$$

olur. Ama x'in boşküme olmaması gerektiği hiçbir zaman unutulmamalı, zira yukarıdaki formülde $x = \emptyset$ alırsak ve $\cap\emptyset$'nin bir küme olduğunu varsayarsak, o zaman

$$z \in \cap\emptyset \Leftrightarrow \text{ her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi doğru olur ve sağdaki

$$\text{her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi her z için doğru olduğundan (boşkümenin her elemanı her özelliği sağlar, örneğin z'yi eleman olarak içerir, aksi hâlde boşkümede o özelliği sağlamayan bir t elemanı olurdu, bkz. sayfa 47), $\cap\emptyset$ tüm z kümelerini içerirdi, yani kümeler kümesi olurdu ki böyle bir kümenin olmaması gerektiğini Russell paradoksundan dolayı biliyoruz (bkz. sayfa 26). Nitekim kanıtımızda da x'in boşküme olmadığını, x'ten bir x_0 elemanı seçerek kullandık[4]...

Bundan böyle $\cap$ simgesini de formüllerimizde kısaltma olarak kullanacağız. İsteyen, bu simgeyi kullanmadan da formülleri yazabilir ama hayat o zaman acılı olabilir.

Alıştırmalar

4.1. x ve y birer kümeyse, $x \setminus y$'nin de bir küme olduğunu (bkz. Altbölüm 6.5), yani

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \leftrightarrow (t \in x \wedge t \notin y))$$

önermesini kanıtlayın.

4.2. x ve y birer kümeyse, $x \Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$ tanımını yapalım. $x\Delta y$'nin bir küme olduğunu kanıtlayın.

[4]Bazı durumlarda "evrensel bir küme" olabilir, yani bir problemde ortaya çıkan ya da çıkabilecek tüm kümeleri içeren (çoğu zaman devasa) bir küme. Mesela okul müdürü için, öğrencilerden, öğretmenlerden, idarecilerden, müstahdemden oluşan küme evrensel küme olabilir. Ya da konumuz iskambil kâğıtlarıysa, evrensel kümemiz 52 elemandan oluşabilir. Ya da konumuz şehirlerse, evrensel kümemiz şehirlerden oluşabilir. Bu gibi durumlarda $\cap\emptyset$ kesişimini evrensel küme olarak tanımlayabiliriz. Bu kitapta hiç böyle bir şey yapmayacağız.

Notlar

4.3. Aslında Tanımlı Altküme Aksiyomu tek bir aksiyom değildir, her $\varphi(z)$ formülü için ayrı bir aksiyomdur, yani aslında "Tanımlı Altküme Aksiyomu"ndan değil, "Tanımlı Altküme Aksiyom Şeması"ndan bahsetmemiz gerekirdi. Yani bu altbölümde sonsuz sayıda aksiyom kabul ettik. Bu kitapta açıklayacağımız ZFC kümeler kuramı sonlu sayıda aksiyom tarafından verilemez. Öte yandan, GB adıyla bilinen (ama bu ciltlerde sözünü etmeyeceğimiz) Gödel-Bernays-Von Neumann kümeler kuramının sonlu sayıda aksiyomu vardır.

4.3 Altkümeler Kümesi Aksiyomu

Daha önce kabul edilmiş aksiyomlarla, bir kümenin altkümelerinden oluşan topluluğun bir küme olduğunu kanıtlayamayız, bir aksiyom olarak kabul etmeliyiz:

Aksiyom 4.3 (Altkümeler Kümesi Aksiyomu)**.** *Bir kümenin altkümeleri bir küme oluşturur.*

Eğer x bir kümeyse x'in altkümelerinden oluşan küme $\wp(x)$ olarak yazılır. Örneğin $x = \{0, 1, 2\}$ kümesiyse, $\wp(x)$'in, biri boşküme, diğeri x olmak üzere toplam 2^3, yani 8 tane elemanı vardır.

Demek ki tanım gereği, her x ve z kümeleri için,

$$z \in \wp(x) \Leftrightarrow z \subseteq x.$$

Eğer $\subseteq$ simgesini kullanmak istemiyorsak, bu önerme

$$z \in \wp(x) \longleftrightarrow \forall t\ (t \in z \to t \in x)$$

olarak yazılır. Demek ki Altkümeler Kümesi Aksiyomu biçimsel dilde,

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\ (z \in y \longleftrightarrow \forall t\ (t \in z \to t \in x))$$

olarak yazılır. Burada varlığı söylenen y, $\wp(x)$ kümesidir.

x küme olduğunda $\wp(\wp(x))$ ve $\wp(\wp(\wp(x)))$ de birer kümedir tabii.

Bundan böyle $\wp$ simgesini formüllerimizde bir kısaltma olarak kullanacağız. Bu simgeyle yazılmış her formül, kümeler kuramının orijinal dilinde yazılmış bir formüle dönüştürülebilir; öte yandan formüllerde kısaltma kullanmazsak, formüller anlamı anlaşılamayacak kadar komplike ve uzun bir görünüme bürünürler. Hatta bu kısaltmalarla bile formel formüllerin anlamı kolay kolay anlaşılamayabilir. Bu yüzden matematik kitaplarında formel matematiksel formüller değil, olabildiğince düzyazı kullanılır.

Notlar

4.4. ZFC kümeler kuramının bu ciltte açıklanacak olan aksiyomlarıyla, bir x kümesi için, mesela $x = \emptyset$ için,

$$\{x,\ \wp(x),\ \wp(\wp(x)),\ \wp(\wp(\wp(x))),\ \ldots\}$$

topluluğunun bir küme olduğu gösterilemez. Bunun için bir sonra ciltte açıklayacağımız Yerleştirme Aksiyomu gerekmektedir.

4.5. Şu ana kadar 6 aksiyom kabul ettik. (Ama Aksiyom 4.1, aslında sonsuz sayıda aksiyom içeriyor.) Bu aksiyomları sıralayalım.

Aksiyom 3.1 (Boşküme Aksiyomu) *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Aksiyom 3.3 (Küme Eşitliği Aksiyomu) *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Aksiyom 3.5 (İki Elemanlı Küme Aksiyomu) *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

Aksiyom 3.8 (Bileşim Aksiyomu) *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Aksiyom 4.1 (Tanımlı Altküme Aksiyomu) *x bir küme ve $\varphi(z)$ kümeler kuramının dilinde yazılmış bir özellik olsun. O zaman x'in $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanları bir küme oluşturur.*

Aksiyom 4.3 (Altkümeler Kümesi Aksiyomu) *Bir kümenin altkümeleri bir küme oluşturur.*

Şimdi, bu aksiyomlardan hareketle sonsuz bir kümenin varlığını kanıtlayamayacağımızı ve aynı zamanda bu aksiyom sisteminin tutarlı olduğunu, yani bu aksiyom sisteminden bir çelişki elde edemeyeceğimizi göstereceğiz. Bu aksiyom sisteminin (yani yukarıdaki 6 aksiyomun her birinin) doğru olduğu ve herbirinin sonlu sayıda eleman içerdiği "küme" adını vereceğim topluluklardan oluşan bir evren inşa edeceğim.

Kümelerden (daha doğrusu küme adını verdiğimiz nesnelerden) oluşacak olan ama henüz inşa etmediğimiz evrenimize E diyelim. E bir topluluk olacak elbette, Bertrand Russell Paradoksu'na göre $E \in E$ olamaz.

E'yi yavaş yavaş, giderek büyüyen kümelerin (ya da toplulukların ya da küçük evrenlerin, nasıl isterseniz) bileşimi olarak inşa edeceğiz. Birinci aksiyomla (Aksiyom 3.1 ile) başetmek kolay, adına boşküme diyeceğimiz ve $\emptyset$ simgesiyle göstereceğimiz herhangi bir nesne alalım. Bu nesne Aksiyom 3.1'de sözü edilen boşküme olacak elbette. İlk aksiyomu sağlamak için $\emptyset \in E$ olmalı.

$$E_0 = \{\emptyset\}$$

olsun. Aksiyom 3.3 zaten yeni bir küme yaratmıyor, hatta tam tersine küme sayısını düşürüyor bile diyebiliriz. Kümeleri bu aksiyom doğru olacak biçimde yaratacağız. Aksiyom 3.5, 3.8, 4.1 ve 4.3 eski kümelerden yeni kümeler yaratıyor. Bu aksiyomların yarattığı kümeleri E'ye eklemeliyiz.

$n = 0$ ise E_{4n}'yi yarattık. Şimdi (okurun lise yıllarından bildiğini varsaydığımız) tümevarımla, E_{4n}'yi yarattığımızı varsayıp, evrenin

$$E_{4n+1} \subseteq E_{4n+2} \subseteq E_{4n+3} \subseteq E_{4n+4}$$

parçalarını yaratalım:

$$\begin{aligned}
E_{4n+1} &= E_{4n} \cup \{\{x,\ y\} : x,\ y \in E_{4n}\} \\
E_{4n+2} &= E_{4n+1} \cup \{\cup x : x \in E_{4n+1}\} \\
E_{4n+3} &= E_{4n+2} \cup \{y : \text{bir } x \in E_{4n+2} \text{ için } y,\ x\text{'in tanımlı bir altkümesi}\} \\
E_{4n+4} &= E_{4n+3} \cup \{\wp(x) : x \in E_{4n+3}\}
\end{aligned}$$

olsun[5]. Birazdan burada kullanılan tüm x'lerin sonlu sayıda eleman içerdiklerini kanıtlayacağımızdan, $\wp(x)$'in anlamı çok belli; örneğin x'te 5 eleman varsa, $\wp(x)$'in tahmin ettiğimiz 2^5 tane elemanı vardır. Yine bu nedenden, E_{4n+3}'ün tanımından "tanımlı" kelimesini atıp,

$$E_{4n+3} = E_{4n+2} \cup \{y : \text{bir } x \in E_{4n+2} \text{ için } y,\ x\text{'in bir alttopluluğu}\}$$

olarak değiştirebilirdik.

Dikkat edilirse, eğer $n \leq m$ ise

$$E_n \subseteq E_m$$

olur ve

E_{4n+1}, E_{4n}'deki kümeleri ve E_{4n}'nin iki elemanlı altkümelerini
E_{4n+2}, E_{4n+1}'deki kümeleri ve bu kümelerin elemanlarının bileşimini
E_{4n+3}, E_{4n+2}'deki kümeleri ve bu kümelerin tanımlı altkümelerini
E_{4n+4}, E_{4n+3}'teki kümeleri ve bu kümelerin altkümeler kümelerini

içerir, dolayısıyla

E_{4n+1}, E_{4n}'deki kümeleri ve E_{4n}'nin iki elemanlı altkümelerini
E_{4n+2}, E_{4n}'deki kümeleri ve bu kümelerin elemanlarının bileşimini
E_{4n+3}, E_{4n}'deki kümeleri ve bu kümelerin tanımlı altkümelerini
E_{4n+4}, E_{4n}'deki kümeleri ve bu kümelerin altkümeler kümelerini

içerir, dolayısıyla E_{4n+4}, E_{4n}'deki kümeleri ve

E_{4n}'nin iki elemanlı altkümelerini
E_{4n}'deki kümelerin elemanlarının bileşimini
E_{4n}'deki kümelerin tanımlı altkümelerini
E_{4n}'deki kümelerin altkümeler kümelerini

içerir.

Şimdi E tüm bu E_n'lerin bileşimi olsun:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

E'nin yukarıdaki tüm aksiyomları sağladığını kanıtlayalım. Birinci aksiyomun sağlandığı belli. İkinci aksiyomu ihlal edecek bir şey söylemedik. Geri kalan aksiyomların sağlandığını gösterelim. $x \in E$ olsun. O zaman bir n için $x \in E_n$ olur. Ama $E_n \subseteq E_{4n}$ olduğu için $x \in E_{4n}$ olur. Biraz önceki listeden anlaşılacağı üzere E_{4n+4} (dolayısıyla E de), x'in

iki elemanlı altkümelerini
elemanlarının bileşimini
tanımlı altkümelerini
altkümeler kümesini

içerir. Böylece E'nin şu ana kadar yazdığımız tüm aksiyomları sağladığını gösterdik. Aksiyomları sağlayan somut bir kümeler evreni bulduk. Dolayısıyla bu aksiyomlardan hareketle bir çelişki kanıtlayamayız, aksi hâlde aksiyomları sağlayan bir evren bulamazdık.

Şimdi de E'deki her kümenin sonlu olduğunu kanıtlayalım. Bunun için iki önerme kanıtlayacağız:

---

[5]Aslında E_n'lerle birlikte $\in$ ikili ilişkisini de tümevarımla tanımlamamız lazımdı, ama çok bariz olduğundan yapmıyoruz.

(1) E_n'de sonlu sayıda eleman vardır, diyelim a_n tane ve

(2) E_n'nin her elemanında sonlu sayıda eleman vardır ve bu sayı sınırlıdır, diyelim E_n'nin her elemanının en fazla b_n tane elemanı vardır.

Kanıtlara başlıyoruz:

E_0'da tek bir küme var, $\emptyset$, onun da sıfır tane elemanı var. Demek ki $a_0 = 1$ ve $b_0 = 0$.

Kanıtın devamını "tümevarımla" yapacağız.

Eğer $4n = 0$ ise istediğimizi kanıtladık. Şimdi (1) ve (2)'yi E_{4n} için varsayalım; o zaman E_{4n+1}'in (tanımından dolayı) en fazla $a_{4n} + a_{4n}^2$ tane elemanı vardır ve bu elemanların her birinin en fazla $\max\{b_{4n}, 2\}$ tane elemanı vardır.

Şimdi E_{4n+1} için savımızın doğru olduğunu varsayalım. Pek zorlanmadan görüleceği üzere, E_{4n+2}'nin eleman sayısı en fazla $2a_{4n+1}$ olabilir. Varsayımımıza göre, E_{4n+1}'de a_{4n+1} tane küme var ve her birinin en fazla b_{4n+1} tane elemanı var. Demek ki E_{4n+1}'in elemanlarının bileşimi en fazla $a_{4n+1}b_{4n+1}$ tane eleman içerebilir. Bundan da E_{4n+2}'deki kümelerin en fazla $\max\{b_{4n+1},\ a_{4n+1}b_{4n+1}\}$ tane elemanı olduğu çıkar.

Şimdi E_{4n+2} için savımızın doğru olduğunu varsayalım, yani E_{4n+2}'de a_{4n+2} tane küme var ve her birinin en fazla b_{4n+2} tane elemanı var. E_{4n+3}'ün kümeleri E_{4n+2}'nin kümelerine bu kümelerin (tanımlı ya da tanımsız farketmez bu durumda) altkümeleri eklenerek elde edilmiş. E_{4n+2}'nin her kümesinin en fazla $2^{b_{4n+2}}$ tane altkümesi vardır. Demek ki E_{4n+3}'te E_{4n+2}'den en fazla $a_{4n+2}2^{b_{4n+2}}$ tane daha fazla küme vardır. Demek ki E_{4n+3}'te sonlu sayıda küme var. E_{4n+3}'e eklenen yeni elemanlar, E_{4n+2}'nin elemanlarının altkümeleri olduğundan, bu elemanların da eleman sayısı sınırlı olduğundan, E_{4n+3}'e eklenen yeni kümeler de sonludur.

Şimdi E_{4n+3} için savımızın doğru olduğunu varsayalım. E_{4n+3}'de a_{4n+3} tane küme var ve her birinin en fazla b_{4n+3} tane elemanı var. Bariz biçimde E_{4n+4}'te en fazla $2a_{4n+3}$ tane küme olabilir ve bu kümelerin eleman sayısı en fazla $2^{b_{4n+3}}$ olabilir.

Böylece ilk altı aksiyomumuzun bir "model"ini bulduk, yani aksiyomları sağlayan somut bir evren. Bu evrenin her kümesi sonlu olduğundan, ilk altı aksiyomdan hareketle sonsuz bir kümenin (mesela doğal sayı kümesinin) varlığını kanıtlayamayız (kanıtlayabilseydik E dahil her modelde sonsuz bir küme olurdu.)

Alıştırma 4.6. Eğer $y \in x \in E_n$ ise, bir $m < n$ doğal sayısı için $y \in E_m$ olduğunu kanıtlayın.

4.4 İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Okur daha lisedeyken (x, y) ikilisi kavramını öğrenmiştir. Mesela düzlemdeki her noktayı $(x,\ y)$ gibi bir sayı ikilisiyle (ya da çiftiyle) gösterebiliriz ve düzlemin her noktası bir ve sadece bir tek sayı ikilisine ve her sayı ikilisi de düzlemin bir ve sadece bir tek noktasına tekabül eder. Benzer biçimde, içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayda da ortak bir noktada kesişen ama aynı düzlemde yer almayan üç doğru ve bu doğrular üstünde birim uzunluklar ve yönler seçilirse, uzayın her noktası (x, y, z) sayı üçlüsüyle gösterilebilir. İşte bu altbölümde $(x,\ y)$ ve $(x,\ y,\ z)$ gibi nesnelerin matematiksel tanımını vereceğiz.

(x, y) ikilisinin bizi ilgilendiren tek özelliği vardır, o da şu: Eğer $(x, y) = (z, t)$ ise $x = z$ ve $y = t$ olmak zorundadır. İkilinin ***karakteristik özelliği*** denilen bu özellik dışında (x, y) ikilisinin matematiksel olarak hiçbir özelliği bizi (bir matematikçiyi demek istiyorum) ilgilendirmez. Dolayısıyla (x, y) ikilisini matematiksel olarak tanımlamak için bu özelliği sağlayan matematiksel bir nesne bulmak yeterlidir. (x, y) ikilisi nasıl tanımlanırsa tanımlansın, bu karakteristik özelliği sağlamalıdır.

Bir başka deyişle (x, y) ikilisi varlığını bu karakteristik özelliğe borçludur. (Matematiksel nesneler varlıklarını onları var eden özelliklere borçludur. Matematiksel anlamda nesnenin kendisinin ne olduğu değil, nesnenin karakteristik özelliği önemlidir. Ama tabii tanımda estetik, sadelik, doğallık gibi özellikler istemeye hakkımız var.)

x ve y iki eleman (ya da iki küme) olsun.

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

kümesini ele alalım. (Şimdiye kadar verdiğimiz aksiyomlara göre bunun gerçekten bir küme olduğundan emin olun.) Bu kümelerin şu özelliği vardır:

Önsav 4.4. *Eğer* $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ *ise o zaman* $x = z$ *ve* $y = t$ *olur.*

Kanıt: $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ eşitliğini varsayalım. $x = y$ ve $x \neq y$ durumuna göre kanıtı iki parçaya ayıracağız. Önce $x \neq y$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x\}$ kümesinin bir, $\{x, y\}$ kümesinin ise iki elemanı vardır. Demek ki bu kümeler birbirine eşit olamazlar; dolayısıyla eşitliğin solundaki

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

kümesinin iki elemanı vardır. Dolayısıyla eşitliğin sağındaki

$$\{\{z\}, \{z, t\}\}$$

kümesinde de iki eleman olmak zorundadır, yani $\{z\} \neq \{z, t\}$, yani $z \neq t$ olmalıdır. Her iki kümede de ikişer eleman olduğunu ve bu elemanların birinin bir elemanlı, diğerinin ise iki elemanlı bir küme olduğunu kanıtladık. Eşitliğin sol tarafındaki

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{x\}$ kümesi, eşitliğin sağ tarafındaki

$$\{\{z\}, \{z, t\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{z\}$ kümesine eşit olmalı: $\{x\} = \{z\}$, yani $x = z$. Aynı nedenden $\{x, y\} = \{z, t\}$ olmalı. $x = z$ olduğundan

$$\{y\} = \{x, y\} \setminus \{x\} = \{z, t\} \setminus \{z\} = \{t\}$$

olur ve bundan da $y = t$ çıkar.

Eğer $x = y$ ise, o zaman

$$\{\{x\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$$

olur, dolayısıyla sağ taraftaki $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ kümesinin (aynen sol taraftaki küme gibi) tek elemanı vardır ve bu eleman $\{x\}$ elemanıdır: $\{z\} = \{z, t\} = \{x\}$. Buradan da $x = z = t$ çıkar. □

Bu önsav sayesinde (x, y) ***çiftini*** ya da ***ikilisini*** $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi olarak tanımlayabiliriz. Öyle yapalım; tanım gereği

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

olsun. Bundan böyle formüllerimizde (x, y) gibi simgeleri (kısaltma olarak) kullanacağız.

Şimdi de $X \times Y$ kümesini $x \in X$ ve $y \in Y$ için, (x, y) biçiminde yazılan elemanlar kümesi olarak tanımlayabiliriz:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\},$$

yeter ki bu topluluk bir küme olsun. Şimdi bunu kanıtlamaya girişiyoruz.

Önsav 4.5. i. *Eğer $x \in X$ ve $y \in Y$ ise $(x, y) \in \wp(\wp(X \cup Y))$ olur.*
ii. *Eğer $\alpha = (x, y)$ ise,*

$$x = \cap \cap \alpha \text{ ve } y = (\cup \cup \alpha \setminus \cap \cap \alpha) \cup (\cap \cup \alpha)$$

olur, yani α, x ve y'yi kümeler kuramının bir formülüyle tanımlar.

Kanıt: $x, y \in X \cup Y$ olduğundan, $\{x\}, \{x, y\} \in \wp(X \cup Y)$ olur. Demek ki, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \wp(X \cup Y)$ olur. Demek ki, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(X \cup Y))$ olur. Birinci kısım kanıtlanmıştır.

(ii) için önce $\cap\alpha = \{x\}$ ve $\cup\alpha = \{x, y\}$ eşitliklerinin farkına varalım. Demek ki $\cap \cap \alpha = x$, $\cup \cup \alpha = x \cup y$, $\cap \cup \alpha = x \cap y$. Buradan kolaylıkla istediğimiz eşitliklere ulaşırız. □

x'e (x, y) ikilisinin ***birinci izdüşümü***, y'ye de ***ikinci izdüşümü*** denir.

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x \text{ ve } \mathrm{pr}_2(x, y) = y$$

yazılır. Formüllerimizde $\mathrm{pr}_1(x)$ gibi ifadeleri kullanmakta bir sakınca olamaz, tam tersine formülleri kısalttığından ve anlaşılır kıldığından yararı olur.

Bu önsav ışığında X ve Y kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımını tanımlayabiliriz: $X \times Y$ ***kartezyen çarpımı***

$$\{\alpha \in \wp(\wp(X \cup Y)) : \exists x\, \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge \alpha = (x, y))\}.$$

kümesi olarak tanımlanmıştır. Bunun bir küme olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. Kanıtta elbette Aksiyom 4.3 ve 4.1 kullanılmalı.

Bundan böyle $X \times Y$ gibi ifadeleri formüllerimizde kısaltma olarak kullanacağız.

İleride kartezyen çarpımın tanımını değiştireceğiz. Fonksiyonları tanımlayabilmek için şimdilik bu geçici tanıma ihtiyacımız var.

Notlar

4.7. $X \times Y$ kümesine, ünlü Fransız matematikçisi ve filozofu Descartes'a (dekart diye okunur) atfen, X ve Y kümelerinin ***kartezyen çarpımı*** denir. Ama yukarıda verdiğimiz

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

tanımı Polonyalı matematikçi Kuratowski'nindir. Önsav 4.4'ü doğrulayan başka kümeler de oluşturabilirsek, o zaman kartezyen çarpımın başka tanımlarını da verebiliriz. Örneğin,

$$\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

kümesi de bu özelliği sağlar. Dolayısıyla

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

tanımını da yapabilirdik.

Farklı tanımlar yapmak mümkündür, ama en kabul edileni verdiğimiz Kuratowski'nin tanımıdır. Bu konuda bkz. aşağıdaki 4.9 ve sonraki alıştırmalar.

4.8. (x, y) ikilisinin tanımında Önsav 4.4'ün esas alınması önemli bir felsefi olguya işaret eder: Matematiksel kavramların nasıl tanımlandıkları ya da ne oldukları hiç önemli değildir, önemli olan özellikleridir. Yani matematikte aslolan nesne değil özelliktir. Bu dediğimiz sadece ikili kavramı için değil, nokta, doğru, sayı gibi tüm matematiksel kavramlar için de geçerlidir. Bu da matematiğin üst seviyede zihinsel bir uğraş olduğunu gösterir.

Alıştırmalar

4.9. $\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\} = \{\{\{z\}, \emptyset\}, \{t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın. Demek ki isteseydik $(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$ tanımını yapabilirdik.

4.10. $\{\{\emptyset, x\}, \{\{\emptyset\}, y\}\} = \{\{\emptyset, z\}, \{\{\emptyset\}, t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın.

4.11. İkili tanımını ilk kez Norbert Wiener 1914'te önermiştir. Önerisi şöyleydi:

$$(a, b) := \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}.$$

Bu tanımla Önsav 4.4'ün doğru olduğunu kanıtlayın, yani Wiener'in tanımını kabul ederek

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

önermesini kanutlayın. Bu tanımla, eğer A ve B iki kümeyse, $A \times B$ topluluğunun da bir küme olduğunu kanıtlayın.

4.12. Aşağı yukarı Wiener ile aynı tarihte (1914), Felix Hausdorff şu tanımı önerdi:

$$(a, b) := \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}.$$

Bu tanımla Önsav 4.4'ün doğru olduğunu kanıtlayın. Bu tanımla, eğer A ve B iki kümeyse, $A \times B$ topluluğunun da bir küme olduğunu kanıtlayın.

4.13. 1921'de Kazimierz Kuratowski ikilinin genel olarak kabul edilmiş ve bizim de kabul ettiğimiz tanımını önerdi:

$$(a,\ b) :=\ \{\{a\},\ \{a,\ b\}\}.$$

4.14. Diyelim

$$(a,b) := \{a, \{a,b\}\}$$

tanımını önerdik. Bu tanım önerisi doğru olabilir mi?

4.15. Diyelim

$$(a,b) := \{\{0,a\},\{1,b\}\}$$

tanımını önerdik. Bu tanım önerisi doğru olabilir mi?

Şimdi de üç kümenin kartezyen çarpımını tanımlayalım. Bunun için iki seçeneğimiz var: X, Y, Z kümelerinin kartezyen çarpımı $(X \times Y) \times Z$ ya da $X \times (Y \times Z)$ olarak tanımlanabilir, seçim sizin! Tabii (x,y,z) elemanı da aynı biçimde $((x,y),z)$ ya da $(x,(y,z))$ olarak tanımlanmalı. Her iki tanım da işimizi görür, hangi tanımın kabul edildiği hiç önemli değildir, çünkü her iki durumda da aşağıdaki önerme doğru olur:

Önsav 4.6. *Eğer $(x,y,z) = (x',y',z')$ ise o zaman $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ olur.*

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

İleride $X \times Y$ ve $X \times Y \times Z$ kavramlarının tanımını değiştirip, çok daha doğal ve basit bir tanım vereceğiz.

Notlar

4.16. $X \times Y = Y \times X$ eşitliği için $X = Y$ yeter ve gerek koşuldur.

4.17. $X \times (Y \times Z)$ ile $(X \times Y) \times Z$ kümeleri birbirine eşit değildir, hatta çoğu zaman ayrık kümelerdir.

4.18. Altbölüm 4.7'de $X \times Y$ ve $X \times Y \times Z$ tanımlarımızı değiştireceğiz. Ama bu değişiklik için önce fonksiyon tanımını görmemiz gerekir.

4.5 Fonksiyon

Sunduğumuz kümeler kuramında her nesne, her şey, her varlık bir küme olacak. Örneğin fonksiyonlar da küme olarak tanımlanacaklar. Fonksiyonun sezgisel anlamını [Ne2]'de açıklamıştık. Burada fonksiyonun formel tanımını vereceğiz. Fonksiyonu küme olarak tanımlamanın hilesi şu: [Ne2]'de açıklandığı üzere, sezgisel anlamda fonksiyon, tanım kümesi, değer kümesi ve grafiği tarafından belirlenir. Biz de fonksiyonu böyle bir üçlü olarak tanımlayacağız.

X ve Y birer küme olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımında bir ***grafik***, $X \times Y$'nin şu özelliğini sağlayan bir G altkümesidir:

Her $x \in X$ için, $(x,y) \in G$ içindeliğini
sağlayan bir ve bir tane $y \in Y$ vardır.

X'ten Y'ye giden bir ***fonksiyon***, $X \times Y$ kartezyen çarpımının bir G grafiği için (X, Y, G) biçiminde yazılan bir üçlüdür.

Eğer $f = (X, Y, G)$ bir fonksiyonsa, X'e f'nin ***tanım kümesi***, Y'ye f'nin ***değer kümesi***, G'ye de f'nin ***grafiği*** adı verilir. Eğer $x \in X$ için, $(x, y) \in G$ ise, bu y (verilmiş x için) biricik olduğundan,

$$f(x) = y$$

ya da

$$fx = y$$

yazabiliriz[6]. y'ye f'nin x'te aldığı ***değer*** denir. Çoğu zaman bir $f = (X, Y, G)$ fonksiyonu, G'den hiç sözedilmeden,

$$f : X \longrightarrow Y$$

olarak gösterilir. Eğer $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan y'yi x cinsinden ifade eden bir "kural" bulabilirsek, o zaman G'yi bu kuralla belirleyebiliriz. $f(x) = y$ eşitliğini bazen

$$f : x \mapsto y$$

olarak göstereceğiz. Bu tür popüler yazılım biçimleriyle okurun aşina olduğunu varsayıyoruz.

Eğer (X, Y, G) üçlüsü bir fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise, o zaman (X, Y_1, G) üçlüsü de bir fonksiyondur. Demek ki X ve G, Y'yi belirlemeye yetmiyor. Öte yandan, G grafiği X'i belirler; yani eğer $((X, Y), G)$ ve $((X_1, Y_1), G)$ birer fonksiyonsa, o zaman $X = X_1$ olmak zorundadır. (Neden?)

Birebir ve örten fonksiyonlar, eşleme ve eşleşmeler, özdeşlik fonksiyonları, fonksiyonların bileşkesi gibi kavramlar aynen [Ne2]'deki gibi tanımlanırlar.

Önsav 4.7. *X ve Y birer küme olsun. X'ten Y'ye giden tüm fonksiyonlar bir küme oluşturur.*

Kanıt: Kanıtı okura bırakıyoruz. □

X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesi

$$\mathrm{Fonk}(X, Y),\ {}^{X}Y \text{ ya da } Y^X$$

olarak yazılır. Biz birinciyi ve üçüncüyü tercih edeceğiz.

[6]Bazen $x^f = y$ olarak da yazılır.

Notlar ve Örnekler

4.19. X ve Y birer küme olsun.

$$G_1 = \{(\alpha, x) \in (X \times Y) \times X : \mathrm{pr}_1(\alpha) = x\}$$

olsun. O zaman $(X \times Y, X, G_1)$ örten bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, tahmin edileceği üzere,

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$$

olarak yazılır ve ***birinci izdüşüm fonksiyonu*** olarak bilinir. Benzer şekilde ***ikinci izdüşüm fonksiyonu***

$$\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$$

fonksiyonu da tanımlanabilir.

4.20. Eğer (X, Y, G) ve (X_1, Y_1, G) birer fonksiyonsa, o zaman $X = \mathrm{pr}_1(G) = X_1$ olmak zorundadır.

4.21. Eğer (X, Y, G) bir fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise (X, Y_1, G) de bir fonksiyondur.

4.22. X bir küme olsun.

$$G = \{(x, y) \in X \times X : y = x\}$$

bir grafiktir ve bize I_X olarak göstereceğimiz X'ten X'e giden özdeşlik fonksiyonunu verir.

4.23. X ve Y birer küme ve $b \in Y$ olsun. O zaman

$$s_b : x \mapsto b$$

kuralı bize X'ten Y'ye giden bir fonksiyon belirler (sabit b fonksiyonu). Bu fonksiyonun grafiği

$$G = \{(x, y) \in X \times Y : y = b\} = X \times \{b\}$$

kümesidir.

Alıştırmalar

4.24. X bir küme olsun. $\mathrm{Fonk}(X, 2)$ ile $\wp(X)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

4.25. X bir küme olsun. X'ten $\wp(X)$'e giden örten bir fonksiyon olmadığını gösterin.

4.26. X ve Y birer kümeyse $\mathrm{Fonk}(X \cup Y, Z)$ ile $\mathrm{Fonk}(X, Z) \times \mathrm{Fonk}(Y, Z)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

4.27. X ve Y birer kümeyse $\mathrm{Fonk}(X \cup Y, Z)$ ile

$$\{(f, g) \in \mathrm{Fonk}(X, Z) \times \mathrm{Fonk}(Y, Z) : \forall t\ (t \in X \cap Y) \Rightarrow f(t) = g(t))\}$$

kümesi arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

4.28. $\mathrm{Fonk}(X \times Y, Z)$ ile $\mathrm{Fonk}(Y, \mathrm{Fonk}(X, Z))$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

4.29. $\mathrm{Fonk}(Z, X) \times \mathrm{Fonk}(Z, Y)$ ile $\mathrm{Fonk}(Z, X \times Y)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

4.6 Küme Ailesi

Sezgisel Tanım. Doğal sayıların karelerinden oluşan $(0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$ sayı dizisi aslında özel bir "aile" örneğidir. Bu diziyi (ya da aileyi) $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ olarak gösteririz. Bir aile bir dizinin genelleştirilmiş hâlidir; bir dizide "göstergeç kümesi" olarak $\mathbb{N}$ alınır, bir ailede göstergeç kümesi herhangi bir küme olabilir.

I bir küme olsun. I'nın her i elemanı için bir X_i kümesi verilmiş olsun. Bu durumda

$$(X_i)_{i\in I}$$

türünden bir "nesne"ye ***küme ailesi*** adı verilir.

Bunun pek bir tanıma benzemediğinin farkındayım, matematiksel tanım da böyle değil zaten. Matematiksel tanımı birazdan vereceğim.

I kümesine ***göstergeç kümesi*** ya da ***endeks kümesi*** adı verilir.

$(X_i)_{i\in I}$ nesnesinin nasıl bir şey olduğunu anlamak için en doğrusu örnek vermektir sanırım.

Notlar ve Örnekler

4.30. Doğal sayıları bildiğimizi varsayalım bir an.

$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & \{0\} \\ X_1 & = & \{1,2\} \\ X_2 & = & \{2,3,4\} \\ X_3 & = & \{3,4,5,6\} \\ X_4 & = & \{4,5,6,7,8\} \end{array}$$

ve genel olarak her n doğal sayısı için

$$X_n = \{n, \ldots, 2n\}$$

tanımlarını yapalım. Bu durumda, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir küme ailesidir. Bunun bir aile olduğunu kanıtlamak için, birazdan göreceğimiz üzere, ($\mathbb{N}$'nin bir küme olduğunu varsayarak) $\{(n, X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ topluluğunun bir küme ($\mathbb{N} \times \wp(\mathbb{N})$ kümesinin bir altkümesi) olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Okura bırakıyoruz.

4.31. Gerçel (reel) sayıları bildiğimizi varsayalım bir an. Her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$X_r = (r, \infty)$$

olsun (açık aralık). Bu durumda $(X_r)_{r\in\mathbb{R}}$ bir küme (ya da açık aralık) ailesidir. Bunun bir aile olduğunu kanıtlamak için, birazdan göreceğimiz üzere, ($\mathbb{R}$'nin bir küme olduğunu varsayarak) $\{(r, X_r) : r \in \mathbb{R}\}$ topluluğunun bir küme (yani $\mathbb{R} \times \wp(\mathbb{R})$ kümesinin bir altkümesi) olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Okura bırakıyoruz.

Bir küme ailesi, sezgisel anlamda, **formel**, yani **biçimsel** bir nesnedir, yani $(X_i)_{i\in I}$ ile $(Y_j)_{j\in J}$ küme ailelerinin eşit olması için $I = J$ ve her $i \in I$ için $X_i = Y_i$ olmalı.

Tabii "küme ailesi" yerine, "fonksiyon ailesi", "doğru ailesi" gibi tabirler de kullanabiliriz. Mesela

$$\ell_{m,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$$

ise, $(\ell_{m,b})_{m>0,\, b\in\mathbb{Z}}$ iki boyutlu düzlemin bir doğru ailesidir.

Bu arada X_i'lerin bazılarının, hatta hepsinin bile, birbirine eşit olabileceklerini belirtelim.

Eğer I kümesi önemli değilse ya da konunun gelişinden ne olduğu anlaşılıyorsa, $(X_i)_{i\in I}$ yerine $(X_i)_i$ yazılabilir.

Birazdan gerçek matematiksel tanımı vereceğiz ama bir "küme ailesi"nin anlamı özünde burada verdiğimiz anlamdır, tek bir farkla ki $\{(i, X_i) : i \in I\}$ topluluğu bir küme olmalıdır.

Matematiksel Tanım. I bir küme olsun. $\mathcal{X}$ bir küme olsun. Bir

$$X : I \longrightarrow \mathcal{X}$$

fonksiyonuna ***küme ailesi*** denir! (Ünlem gerekiyordu!) Yani bir küme ailesi sadece bir fonksiyon. Eğer $i \in I$ için $X(i)$ yerine X_i yazarsak, bir küme ailesi (yukarıdaki gibi) $(X_i)_{i\in I}$ olarak yazılır. Elbette, $(X_i)_{i\in I}$ ile $(Y_j)_{j\in J}$ küme ailelerinin eşit olması için $I = J$ ve her $i \in I$ için $X_i = Y_i$ olmalıdır, çünkü fonksiyonların bu özelliği var. Ayrıca fonksiyonun imgesi bir küme olduğundan, $\mathcal{X}$'in

$$\{X_i : i \in I\}$$

topluluğu bir kümedir; dolayısıyla $\cup_{i\in I} X_i$ topluluğu da bir kümedir.

$\mathcal{X}$ kümesinin buradaki yegâne işlevi, her $i \in I$ için X_i elemanını içermesidir. Bu özelliği içermesi koşuluyla, $\mathcal{X}$ yerine herhangi bir başka kümeyi alabilirdik; en ekonomik olanı $\{X_i : i \in I\}$ kümesi elbette.

Madem küme ailesi sadece bir fonksiyon, neden fonksiyon demiyoruz da küme ailesi diyoruz? Çünkü kendimizi psikolojik olarak hazırlamak istiyoruz, görmek istediğimiz nesne aslında bir fonksiyon değil, bir "aile".

"Küme ailesi" denen şey özünde ilk verdiğimiz tanımdır, ama bu tanımı matematiğin soğuk kalıplarına sokabilmek için "fonksiyon" kavramından geçmek zorunda kaldık.

4.7 En Genel Kartezyen Çarpım Tanımı

Sezgisel Tanım. $(X_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi olsun. Bu ailenin kartezyen çarpımı

$$\Pi_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i\}$$

kümesidir (ki bunun bir küme olduğu bile belli değil!)

Eğer X_i'lerden en az biri boşkümeyse, $\Pi_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımı da boşküme olur.

Matematiksel Tanım. $(X_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi olsun. $\mathcal{Y} = \cup_{i\in I} X_i$ tanımını yapalım. Bu ailenin kartezyen çarpımı,

$$\prod_{i\in I} X_i := \{f \in \text{Fonk}(I, \mathcal{Y}) : \text{ her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $f(i)$ yerine x_i yazarsak ve f fonksiyonunu $(x_i)_{i\in I}$ olarak gösterirsek, o zaman (neredeyse) sezgisel tanıma ulaşmış oluruz.

Eğer bir $i \in I$ için $X_i = \emptyset$ ise, $\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$ olur. Ama hiçbir $i \in I$ için X_i boşküme değilse de $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımının boşküme olmadığını şimdilik kanıtlayamayız, çünkü tanımda belirtilen

$$\text{Her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i$$

özelliğine sahip bir fonksiyonun varlığını kanıtlayamayabiliriz. Tabii X_i kümelerinin ortak bir c elemanı varsa sorun olmaz, sabit c fonksiyonu kartezyen çarpımın bir elemanı olur. Ya da I sonluysa da bir sorun olmaz. Ama genel olarak kartezyen çarpımın en az bir elemanının olduğunu şimdiye kadar gördüğümüz aksiyomlarla kanıtlayamayız. İkinci ciltte Seçim Aksiyomu ile bu sorunun üstesinden geleceğiz ve o zaman (ve ancak o zaman) eğer her $i \in I$ için $X_i \neq \emptyset$ ise, $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımının boşküme olmadığını kanıtlayabileceğiz.

Eğer $I = n$ ise, $\prod_{i \in n} X_i$ yerine genellikle

$$X_0 \times \ldots \times X_{n-1}$$

yazarız. Ama bu yazılım biçimi Altbölüm 4.4'teki yazılımla çakışıyor... Eski tanımı unutalım. Bundan böyle X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımını, yani $X \times Y$ kümesini $2 = \{0, 1\}$ kümesinden $X \cup Y$ kümesine giden, ama 0'daki değeri X'te, 1'deki değeri Y'de olan fonksiyonlar kümesi olarak görelim. Altbölüm 4.4'teki "iki kümenin kartezyen çarpımı" tanımını fonksiyon kavramını kullanmak için kullandık; işi bitti ve çöpe attık.

Eğer X_i kümeleri birbirine eşitse, mesela hepsi X'e eşitse, $\prod_I X$ ya da X^I yazarız.

Alıştırmalar

4.32. X, hiçbiri boşküme olmayan ikişer ikişer ayrık kümeler kümesi olsun. Fonk$(\cup X, Z)$ ile $\prod_{Y \in X} \text{Fonk}(Y, Z)$ arasında birebir ve örten bir fonksiyon olduğunu gösterin.

4.33. Yukarıdaki olguyu ikişer ikişer ayrık olmayan kümelerden oluşan bir kümeye nasıl genişletebilirsiniz?

4.8 Temellendirme Aksiyomu

Bölüm 3'te toplamayı şu iki formülle (sözümona!) tanımlamıştık: $x + 0 = x$, ve eğer $x + y$ biliniyorsa, $x + Sy = S(x + y)$. Anımsatırız: Sx, $x \cup \{x\}$ anlamına geliyordu.

Yukarıdaki ikinci tanımda ilk anda dikkat çekmeyebilecek çok önemli bir sorun var. O da şu: x ile Sy'nin toplamının sonucunun $S(x + y)$ olacağını söylüyoruz. Buna hakkımız var mı? Olmayabilir... Şöyle bir durum ortaya çıkabilir: $Sy = Sz$ eşitliği geçerli olabilir ve $x + y$ ve $x + z$ de biliniyordur, ama

$$S(x + y) \neq S(x + z)$$

olur. O zaman,

$$S(x+y) = x + Sy = x + Sz = S(x+z)$$

eşitliklerinden bir çelişki elde ederiz. Bir başka deyişle, Sy ile ilgili olan

$$x + Sy = S(x+y)$$

eşitliğinin sadece Sy'ye göre değişmesi gerekir, y değiştiğinde Sy değişmiyorsa, $x + Sy$'nin önerilen tanımının da, yani $S(x+y)$'nin de değişmemesi gerekir.

Bir başka yolla anlatmaya çalışalım: Diyelim ki $x + \beta$ toplamını hesaplamak istiyorsunuz... Düşünüyorsunuz... Kısa bir zaman içinde β'nın Sy'ye eşit olduğunu anlıyorsunuz. Hemen ardından da, tanımdan,

$$x + \beta = x + Sy = S(x+y)$$

eşitliklerini çıkarıyorsunuz. Şimdi $x + y$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Yani

$$x + \beta = S(x+y)$$

sonucunu buldunuz. Her şey yolunda. Şimdilik... Ertesi gün bu buluşunuzu bir arkadaşınıza göstermek istiyorsunuz. Ne var ki kanıtınızı unutmuşsunuz. Kanıtınızı unutmuşsunuz ama kafanız yerinde. Gene düşünüyorsunuz. Kısa bir zaman içinde β'nın Sz'ye eşit olduğunu anlıyorsunuz. Bir önceki gün β'nın Sy olduğunu bulmuştunuz ama bunu unutmuşsunuz, bugün β'yı Sz olarak buldunuz... Tabii bunun böyle olması için $Sy = Sz$ olmalı. Demek öyle, neden olmasın!.. Aynen bir önceki gün olduğu gibi hesaplıyorsunuz:

$$x + \beta = x + Sz = S(x+z).$$

Şimdi $x + z$ sayısını hesaplamanız gerekiyor. Diyelim hesapladınız... Ve işte bulduğunuz sonuç:

$$x + \beta = S(x+z)$$

Bir önceki gün $x+\beta$ sayısını $S(x+y)$ olarak hesaplamıştınız, bugünse $S(x+z)$ olarak... Toplamın dünden bugüne değişmemesi gerekir elbet, yani

$$S(x+y) = S(x+z)$$

eşitliği doğru olmalı. Eğer bu eşitlik doğru değilse, toplamanın verilen tanımı yanlıştır, böyle bir tanım kabul edilemez.

İşte bu yüzden toplamanın tanımının geçerli ve kabul edilebilir bir tanım olması için en azından aşağıdaki teoremin kanıtlanması gerekmektedir[7].

---

[7]Ki bu bile yetmez.

Teorem 4.8. *$Sy = Sz$ ise $S(x+y) = S(x+z)$.*

Eğer y bir doğal sayıysa[8], Sy, $y+1$ anlamına geleceğinden, aslında

$$Sy = Sz$$

eşitliğinden $y = z$ eşitliğinin çıkmasını istiyoruz. Yani aslında aşağıdaki teoremi kanıtlamak istiyoruz:

Teorem 4.9. *$Sy = Sz$ ise $y = z$.*

Teorem 4.8 elbette Teorem 4.9'un bir sonucudur. Bundan böyle amacımız Teorem 4.9'u kanıtlamak olacak.

Teorem 4.9'u kanıtlayabilir miyiz? Bunu kanıtlayamasak da kanıtlamaya ne kadar yaklaşabiliriz? Yani $Sy = Sz$ ise, y ile z arasında nasıl bir ilişki vardır? Önce bu soruyu yanıtlayalım:

Teorem 4.10. *Eğer $Sy = Sz$ ise ya $y = z$ ya da $y \in z \in y$ olur.*

Kanıt: $Sy = Sz$ olsun. Demek ki

$$y \cup \{y\} = z \cup \{z\}.$$

Şimdi, $y \in \{y\}$ olduğundan, y, bu eşitliğin solundaki $y \cup \{y\}$ kümesinin bir elemanı. Demek ki y sağdaki $z \cup \{z\}$ kümesinin de bir elemanı. Dolayısıyla ya $y \in z$ ya da $y \in \{z\}$. İkinci şıkta $y = z$ olmak zorunda. Sonuç olarak ya $y \in z$ ya da $y = z$.

Aynı nedenden[9] ya $z \in y$ ya da $z = y$.

Demek ki $y \neq z$ ise $y \in z$ ve $z \in y$ olmalı. Teorem kanıtlanmıştır. □

Şimdi $y \in z \in y$ seçeneğini (bir kümenin kendisinin bir elemanının elemanı olma seçeneğini) ortadan kaldırırsak Teorem 4.10'dan Teorem 4.9 çıkar, dolayısıyla Teorem 4.8 de kanıtlanmış olur ve toplamanın tanımında farkettiğimiz sorun giderilmiş olur. Ne yazık ki bu olasılığı ortadan kaldırmak kolay değildir. Bu ana kadar gördüğümüz aksiyomlarla $y \in z \in y$ durumunu engelleyemeyiz.

[8] Ki daha doğal sayı kavramını tanımlamadık. Sadece geçen bölümde 0, 1, 2 gibi birkaç doğal sayıyı tanımladık.

[9] Yukardaki kanıtta y ile z'nin yerlerini değiştirin.

Bir küme, bir elemanının elemanı olabilir mi? (Bir insan kendi kendisinin torunu olabilir mi?) Daha doğrusu olmalı mı?

Hatta bir küme kendi kendisinin elemanı olabilir mi?

Bir başka soru: $x \in y \in z \in x$ ilişkilerini sağlayan x, y, z kümeleri var mıdır? Daha doğrusu bu tür kümelerin var olması doğru mudur? Böyle bir durumun olamayacağını gösteremiyorsak, böyle bir durumun olmaması için bir aksiyom kabul etmeli miyiz?

Aksiyom kabul etmek, son tahlilde felsefi bir eylemdir, ya da inanca ilişkindir. Doğanın yasalarının ne olduğunu, evrenin hangi kurallarla yönetildiğini düşündüğümüzle ilgili bir soru.

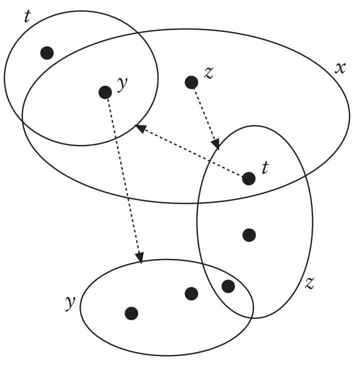
$$x \in x$$
$$x \in y \in x$$
$$x \in y \in z \in x$$
$$x \in y \in z \in t \in x$$

türünden ilişkileri sağlayan kümelerin olmaması gerektiğini düşünebiliriz, çünkü bir kümenin tanımlanması için o kümenin elemanlarının bilinmesi gerektiğini düşünürüz. Yukarıdaki örneklerin herbirinde x'in elemanlarından birinin bilinmesi için x kümesinin bilinmesi gerekiyor. Genelde $x \in x$ gibi "saçma" bir durumun olmaması gerektiği düşünülür.

Kümeler kuramının diğer aksiyomlarıyla yukardaki durumların olamayacağı gösterilemez. Bunun için şu aksiyoma ihtiyaç vardır:

Aksiyom 4.11. Temellendirme Aksiyomu[10]**.** *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'in $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.*

Bir örnek ve bir "karşıörnekle" temellendirme aksiyomunu açıklamaya çalışalım.



Yukarıdaki şekildeki x kümesinde üç eleman var: y, z ve t. Bu üç elemanın herbiri birer küme. Şekilde bu üç eleman hem bir eleman olarak (noktayla),

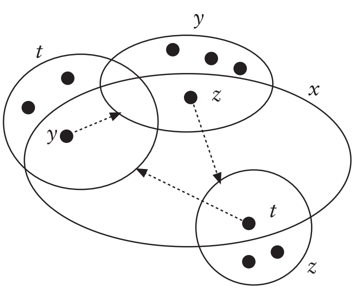
[10] İngilizcesi "Axiom of Regularity" ya da "Axiom of Foundation".

hem de bir küme olarak (ovalle) gösterilmiş. x'in bu üç elemanıyla x'i teker teker kesiştirelim:

$$t \in x \cap z \neq \emptyset,$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset,$$
$$x \cap y = \emptyset.$$

Demek ki x'in üç elemanından sadece y'nin x'le kesişimi boşküme. Temellendirme Aksiyomu, boş olmayan her x kümsesinde böyle bir y elemanının mutlaka olması gerektiğini söylüyor. (Eğer x'ten y elemanını atıp $\{z, t\}$ kümesine bakarsak, bu sefer de t elemanının $\{z, t\}$ kümesi için Temellendirme Aksiyomu'nun gereklerini yerine getirdiği görülür. Son olarak t'yi de atarsak, z elemanı $\{z\}$ kümesinin Temellendirme Aksiyomu'nun gereklerini yerine getiren elemanıdır.)

Öte yandan aşağıdaki şekildeki gibi bir durum temellendirme aksiyomuna göre olmamalı.



Burada da x'in üç elemanı var: y, z ve t. Ancak,

$$t \in x \cap z \neq \emptyset,$$
$$y \in x \cap t \neq \emptyset,$$
$$z \in x \cap y \neq \emptyset.$$

Bu durum Temellendirme Aksiyomu'yla çelişir. Temellendirme Aksiyomu'nun kabul edildiği bir sistemde böyle bir x kümesi olamaz.

Temellendirme Aksiyomu'ndan sözünü ettiğimiz sonuçları çıkarabiliriz.

Sonuç 4.12. *Eğer a bir kümeyse, $a \notin a$.*

Kanıt: a bir küme olsun. Diyelim ki a kendi kendisinin bir elemanı, yani $a \in a$. Şimdi x kümesini sadece a'dan oluşan küme olarak tanımlayalım, yani

$$x = \{a\}$$

olsun. Temellendirme aksiyomuna göre x kümesinde öyle bir y elemanı vardır ki,

$$x \cap y = \emptyset$$

eşitliği sağlanmalıdır. Ama x kümesinin tek bir elemanı var, o da a. Demek ki $y = a$ olmalı. Dolayısıyla

$$x \cap a = \emptyset$$

olmalı. Ama a hem x'in hem de a'nın bir elemanı, yani $a \in x \cap a$. Bu bir çelişkidir. Demek ki "$a \in a$" önermesi yanlış, yani $a \notin a$. İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 4.13. *Eğer a ve b birer kümeyse, ya $a \notin b$ ya da $b \notin a$.*

Kanıt: Bir çelişki elde etmek amacıyla, yanıtlamak istediğimiz sonucun yanlış olduğunu varsayalım. Demek ki

$$a \in b \in a$$

ilişkilerini sağlayan a ve b kümeleri vardır.

$$x = \{a, b\}$$

olsun. Temellendirme Aksiyomu'na göre x'te

$$x \cap y = \emptyset$$

eşitliğini sağlayan bir y elemanı olmalı. Ama x'in sadece iki elemanı var: a ve b. Demek ki y, ya a ya da b olmak zorunda.

Diyelim $y = a$. O zaman $b \in x \cap a = x \cap y = \emptyset$, çelişki.

Eğer $y = b$ ise, o zaman, $a \in x \cap b = x \cap y = \emptyset$, çelişki. □

Sonuç 4.14. *Eğer a, b ve c birer kümeyse, ya $a \notin b$ ya $b \notin c$ ya da $c \notin a$.*

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. Yukarıdaki kanıtlara çok benzer. □

Şimdi Sonuç 4.13'ten Teorem 4.10, Teorem 4.10'dan Teorem 4.9, Teorem 4.9'dan Teorem 4.8 çıkar. Madem ki Teorem 4.8 doğru, şimdi artık hiç çekinmeden, eğer

$$x + y$$

tanımlanmışsa,

$$x + Sy = S(x + y)$$

eşitliğini $x + Sy$'nin tanımı olarak verebiliriz.

Notlar

4.34. X bir küme olsun ve şu özelliği olsun: $x \in X$ ise $Sx \in X$. (Şimdilik böyle bir kümenin olup olmadığını bilmiyoruz. Ama yakında yeni bir aksiyomla bu özelliği sağlayan en az bir kümenin var olduğunu göreceğiz. Şimdilik böyle bir kümenin olduğunu varsayalım.) O zaman

$$S : x \mapsto Sx$$

kuralı, X'ten X'e giden bir fonksiyon tanımlar. Bir başka deyişle her $x \in X$ için, X kümesinde Sx'in tanımına uyan tek bir küme vardır. Daha formel olmak gerekiyorsa,

$$G = \{(x, y) \in X \times X : y = Sx\}$$

bir grafiktir ve (X, X, G) bir fonksiyondur. Ama bu fonksiyon Temellendirme Aksiyomu doğru değilse birebir olmayabilir.

4.35. **Bütün Bunlar Gereksiz!** Bir tanım ve bir aksiyom için bunca gürültü patırtıdan sonra, aslında doğal sayılarda (hatta bildiğimiz diğer sayı kümelerinde de) toplamayı tanımlamak için temellendirme aksiyomuna gereksinim olmadığını söyleyeceğim...

Temellendirme aksiyomu (ya da benzeri bir aksiyom) olmadan Teorem 4.10'un kanıtlanamayacağı doğru. Öte yandan biz Teorem 4.10'u tüm kümeler için değil, doğal sayılar için kanıtlamak istiyoruz. Teorem 4.10 doğal sayılar için temellendirme aksiyomuna gerek kalmadan kanıtlanabilir. Ama böyle bir teorem kanıtlamak için önce doğal sayının ne demek olduğunu bilmemiz lazım. Oysa biz daha böyle bir tanım yapmadık. Bir sonraki bölümde doğal sayıları tanımlayacağız. Doğal sayıları tanımlamak içinse kümeler kuramına bir aksiyom daha katmamız gerekecek. Bunu da bir sonraki bölümde yapacağız. Doğal sayılar kümesini tanımladıktan sonra, Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmadan, Teorem 4.10'u her küme için olmasa da doğal sayılar için kanıtlayabileceğiz.

5. Doğal Sayılar Yapısı

Bölüm 3'te 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 sayılarını tanımladık. Ama, her sayıyı teker teker tanımlamaya zamanımız yok, çünkü sonsuz sayıda sayı var. Bu yaklaşımla sayıların sonunu getiremeyiz. Demek ki başka bir yaklaşım gerekiyor.

Bütün sayıları tek bir hamlede tanımlayabiliriz miyiz? Evet. Bu bölümde doğal sayıları teker teker değil, bir bütün olarak tanımlayacağız, yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tek bir hamlede tanımlayacağız[1].

Önce doğal sayılar kümesinin karakteristik özelliği üzerine düşünelim, çünkü doğal sayılar kümesi karakteristik özelliği sayesinde var olacak.

Her şeyden önce 0 bir doğal sayı olmalı. En küçük doğal sayı 0'dır[2]. Sonra... Eğer x bir doğal sayıysa $x+1$ de bir doğal sayı olmalı. Ama $x+1$ yerine Sx yazıyorduk. Bu arada Sx'in tanımını anımsatalım:

$$Sx = x \cup \{x\}.$$

Ama bu iki özellik yetmez. Bu iki özelliği sağlayan bir çok küme olabilir. Mesela çok daha ileride tanımladığımız reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ bu özelliği sağlar. Negatif olmayan reel sayılar kümesi de bu özelliği sağlar. Kesirli sayılar kümesi de... Paydasında 3 (ya da başka bir doğal sayı) olan kesirli sayılar kümesi de. Doğal sayılar kümesini biricik yapan, onun varolmasını sağlayan bir başka özellik daha olmalı. Biz yine de ilk iki özelliği yazalım:

(i) 0 bir doğal sayı olmalı, yani $0 \in \mathbb{N}$ olmalı.

(ii) $x \in \mathbb{N}$ ise $Sx \in \mathbb{N}$ olmalı.

Bu iki özelliği sağlayan kümelere tümevarımsal küme diyeceğiz. Doğal sayılar kümesi bu iki özelliği sağlayan en küçük kümedir. Ayrıntılar birazdan...

5.1 Tümevarımsal Kümeler

Şimdilik sonsuz elemanı olan bir kümenin varlığını bilmiyoruz. Öyle bir küme olabilir de olmayabilir de, ama bu aşamada ne böyle bir kümenin olduğunu ne

[1] Bakış açımızı doğal sayılardan doğal sayılar kümesine çevirdiğimize dikkat edin, çok doğal sayı var ama bir tek doğal sayı kümesi var.

[2] Bir zamanlar en küçük doğal sayının 1 olduğu kabul edilirdi ama o zamandan bu zamana çok zaman geçti...

de olmadığını kanıtlayabiliriz[3]. Sonsuz kümelerin varlığından emin olmak için bir aksiyoma daha ihtiyacımız olacak. Önce bir tanım:

Tanım 5.1. *"$0 \in z$" ve her y için, "$y \in z \to Sy \in z$" koşullarını sağlayan z kümelerine **tümevarımsal** denir.*

Yani bir kümenin tümevarımsal olması için 0 (yani boşküme) o kümenin bir elemanı olmalı ve, kümenin her y elemanı için, Sy de kümenin bir elemanı olmalı.

Demek ki, eğer z tümevarımsal bir kümeyse, 0 ve ardılları, yani

$$0,\ S0,\ SS0,\ SSS0,\ \ldots$$

elemanları, yani

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

"doğal sayıları" da z'nin elemanları olmalı. Yani (henüz tanımlamadığımız) her doğal sayı her tümevarımsal kümenin elemanı olmalı.

Bu yazdıklarımızdan şöyle bir fikir oluşabilir: $SSS\ldots S0$ gibi (n tane S'den ve bir 0'dan oluşan) elemanlardan oluşan bir küme yaratsak, var etsek, yani

$$\{0, S0, SS0, SSS0, \ldots\}$$

topluluğu bir küme olsa, o zaman bu kümeye doğal sayılar kümesi adını veririz ve işimiz biter. Ama işte kazın ayağı öyle değil. Matematikte "anlarsın ya" anlamına gelen üç nokta imi kullanarak küme tanımlanamaz. (Tanımlanırsa da kümenin üç noktasız da tanımlanacağı bilinir.) Eskiden, bundan 100 küsur sene önce bu tür tanımlar kabul edilirdi, ama artık yasak! Matematikte "işte hep böyle sonsuza kadar devam ederiz" gibi sonsuz bir zamana referans veren, dolayısıyla muğlak olan tanımlar, argümanlar kabul edilemez.

Tümevarımsal bir kümenin sonsuz olması gerektiğini şimdiye kadar sezmiş olmanız lazım.

Yaratacağımız doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ de tümevarımsal olmalı. Ayrıca biraz düşününce (örneğin $\mathbb{N}$'de tümevarımla kanıtın geçerli olmasını istediğimiz göz önüne alınınca) $\mathbb{N}$'nin en küçük tümevarımsal küme olması gerektiği anlaşılıyor. Zaten biraz yukarda her doğal sayının her tümevarımsal kümenin elemanı olması gerektiğini görmedik mi? Demek ki en küçük tümevarımsal kümenin varlığını kanıtlayıp $\mathbb{N}$'yi bu küme olarak tanımlamalıyız.

Ancak bu aşamaya kadar yazdığımız aksiyomlardan sonsuz bir kümenin varlığı kanıtlanamayacağından tümevarımsal bir kümenin varlığı da kanıtlanamaz. Bunun için yepyeni bir aksiyoma ihtiyacımız var.

[3] Öte yandan, bu aşamada, yani yukarıdaki aksiyomlarla sonsuz elemanı olan bir kümenin varlığını kanıtlayamayacağımızı kanıtlayabiliriz. Bunu Not 4.5'te kanıtladık.

Aksiyom 5.2. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. *Tümevarımsal bir küme vardır.*

Biçimsel dilde bu aksiyom şöyle yazılır:

$$\exists x\ (0 \in x \wedge \forall y\ (y \in x \longrightarrow Sy \in x)).$$

Şimdi tümevarımsal kümelerin kesişiminin tümevarımsal olduğunu kanıtlayalım, yeter ki kesişimini alacağımız kümeler topluluğu bir küme olsun.

Önsav 5.3. *x, elemanları tümevarımsal küme olan ve boş olmayan bir küme olsun. O zaman $\cap x$ tümevarımsal bir kümedir.*

Kanıt: Öncelikle, x bir küme olduğundan ve $x \neq \emptyset$ olduğundan, $\cap x$ topluluğunun bir küme olduğunu belirtelim.

x'in her elemanı tümevarımsal olduğundan, 0, x'in her elemanının bir elemanıdır. Yani $0 \in \cap x$ olur. Demek ki $\cap x$ kümesi tümevarımsal küme tanımının ilk koşulunu sağlıyor.

Şimdi $\cap x$ kümesinin ikinci koşulu sağladığını gösterelim. $y \in \bigcap x$ olsun. Demek ki y, x'in her elemanının bir elemanı. x'in her elemanı tümevarımsal olduğundan, Sy de x'in her elemanının bir elemanıdır, yani $Sy \in \cap x$ olur. □

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin tanımını vermeye neredeyse hazırız, ama önce $\mathbb{N}$'nin ne olması gerektiği üzerine biraz daha düşünelim.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, her şeyden önce tümevarımsal bir küme olmalı. Çünkü 0 bir doğal sayı. Ayrıca, eğer y bir doğal sayıysa, $y+1$ anlamına gelecek olan Sy de bir doğal sayı olmalı.

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ tümevarımsal bir küme olmalı ama hangi biri olmalı, çünkü çok tümevarımsal küme var, hatta ibadullah var[4]. Örneğin varlığını henüz kanıtlamadığımız (ama bu kitapta kanıtlayacağımız) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[0, \infty)$, $\frac{1}{2}\mathbb{N}$ kümeleri de tümevarımsal, ama doğal sayılardan çok fazla eleman içeriyorlar. $\mathbb{N}$ elbette en küçük tümevarımsal küme olmalı, daha doğrusu $\mathbb{N}$ tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olmalı, çünkü $\mathbb{N}$, **sadece ve sadece** 0'dan ve 0'a S işlemini tekrar tekrar (ama sonlu kez, "sonlu" her ne demekse!) uygulayarak elde ettiğimiz elemanlardan oluşmalı. Yani

$$\mathbb{N} = \{0,\ S0,\ SS0,\ SSS0,\ \ldots\}$$

olmalı. (Bu yazılım her ne demekse!)

Bir önceki önsavdan ve kanıtından da anlaşılacağı üzere, en küçük tümevarımsal küme (yani $\mathbb{N}$ kümesi), eğer varsa, ki olduğunu kanıtlayacağız birazdan, tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi olmalı. Ancak tüm tümevarımsal

[4]O kadar çok tümevarımsal küme vardır ki tüm tümevarımsal kümelerden oluşan bir küme yoktur. Örneğin, ikinci ciltte tanımlayacağımız her sonsuz ordinal tümevarımsal bir kümedir ama Burali-Forti Paradoksu'na göre ordinaller bir küme oluşturmazlar, hatta ordinallerin tümü bir kümenin içinde eleman olarak bulunamaz.

kümeler topluluğu bir küme olmayabilir (değildir hatta), o zaman da tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi bir küme olmayabilir. Ama olacak! Bir sonraki teoremde bunu kanıtlayacağız.

Ne kadar açıklayıcı olduğunu pek kestiremediğim bu satırlardan sonra tüm tümevarımsal kümelerin kesişiminin bir küme olduğunu gösterelim (ve hemen ardından $\mathbb{N}$'nin tanımını verelim).

Teorem 5.4. *En küçük bir tümevarımsal küme vardır, yani tüm tümevarımsal kümelerin altkümesi olan tümevarımsal bir küme vardır.*

Kanıt: Tümevarımsal Küme Aksiyomu'ndan dolayı en az bir tümevarımsal küme olduğunu biliyoruz. Adına a diyeceğimiz tümevarımsal bir küme alalım. a'nın tümevarımsal tüm altkümelerini kesiştireceğiz ve elde ettiğimiz nesne bir küme olacak ve üstelik en küçük tümevarımsal küme olacak.

$b = \wp(a)$ olsun. Altkümeler Kümesi Aksiyomu'ndan (Aksiyom 4.3) b'nin bir küme olduğunu biliyoruz. $\varphi(z)$ özelliği,

$$0 \in z \wedge \forall u \ (u \in z \to Su \in z)$$

olsun. Belli ki $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan her z kümesi tümevarımsaldır ve her tümevarımsal küme bu özelliği sağlar. Şimdi, Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan (Aksiyom 4.1)

$$\{z \in b : \varphi(z)\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu biliyoruz. Bu kümeye c adını verelim. Demek ki,

$$c = \{z \in b : \varphi(z)\} = \{z \subseteq a : z \text{ tümevarımsal}\}.$$

$a \in c$ olduğundan $c \neq \emptyset$ olur. Şimdi,

$$\mathbb{N} = \cap c$$

tanımını yapalım. Önsav 4.2 sayesinde $\mathbb{N}$ bir kümedir. $\mathbb{N}$ kümesi, a'nın tüm tümevarımsal altkümelerinin kesişimi olarak tanımlandı, Önsav 5.3'e göre $\mathbb{N}$ tümevarımsal bir kümedir.

Şimdi $\mathbb{N}$'nin en küçük tümevarımsal küme olduğunu yani tüm tümevarımsal kümelerin bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. t, herhangi bir tümevarımsal küme olsun. $\mathbb{N}$'nin t'nin bir altkümesi olduğunu kanıtlayacağız. Hem t hem de a tümevarımsal olduklarından, Önsav 5.3'e göre $a \cap t$ kümesi a'nın tümevarımsal bir altkümesidir. Demek ki $a \cap t$, c'nin bir elemanıdır, dolayısıyla $\mathbb{N}$'yi elde etmek için kesişimini aldığımız kümelerden biridir. Bundan da $\mathbb{N} \subseteq a \cap t$ çıkar. Öte yandan $a \cap t \subseteq t$. Demek ki $\mathbb{N} \subseteq t$. □

5.2 $(\mathbb{N}, S, 0)$ Yapısı ve Tümevarımla Kanıt

Yukarıda varlığı kanıtlanan kümeye ***doğal sayılar kümesi*** adını vereceğiz ve bu kümeyi $\mathbb{N}$ simgesiyle göstereceğiz. $\mathbb{N}$'nin elemanlarına ***doğal sayı*** denir. Şimdi artık "doğal sayı"nın matematiksel anlamını biliyoruz.

Dikkat ederseniz doğal sayıları teker teker değil, hepsini birden aynı anda tanımladık, yani doğal sayılar kümesini tanımladık. Daha önceki bölümlerdeki yöntemle bu yöntem arasında radikal bir fark var.

$\mathbb{N}$ tümevarımsal bir küme olduğundan, $0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Sn \in \mathbb{N}$. S'nin $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Daha biçimsel şekliyle,

$$G = \{(x,\ Sx) : x \in \mathbb{N}\}$$

ise, $(\mathbb{N},\ \mathbb{N},\ G)$ üçlüsünün Altbölüm 4.5'te verilen tanımıyla bir fonksiyon olduğunu göstermek istiyoruz. Bu üçlünün bir fonksiyon olduğunu kanıtlamak için, G topluluğunun bir küme olduğunu ve G'nin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kartezyen çarpımının bir grafiği olduğunu kanıtlamak yeterli. Birincisi doğruysa ikincisi bariz olduğundan, G'nin bir küme olduğunu kanıtlamak yeterli. Bu topluluk aynen şu topluluğa eşittir:

$$\{\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists x\ (x \in \mathbb{N} \wedge \alpha = (x, Sx))\}.$$

Eğer "$\exists x\ (x \in \mathbb{N} \wedge \alpha = (x, Sx))$" dizisinin bir formül olduğuna ikna olmuşsanız (aksi hâlde Bölüm 9'u okuyun!), bu topluluğun $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'nin bir altkümesi olduğu Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan çıkar.

$(\mathbb{N},\ 0,\ S)$ üçlüsünü tanımladık. 0, $\mathbb{N}$'nin bir elemanı ve S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon. Şimdi bu sistemin (ya da matematiksel yapının) bazı temel özelliklerini kanıtlayacağız.

Doğal sayılar kümesinin en önemli özelliği "tümevarımla kanıt"a imkân tanımasıdır, zaten tümevarımla kanıt mümkün olsun diye özellikle tanımlanmıştır.

Teorem 5.5. *Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi,*

i. *$0 \in A$, ve*

ii. *Her $x \in \mathbb{N}$ için $x \in A$ ise $Sx \in A$*

özelliklerini sağlıyorsa $A = \mathbb{N}$ olur.

Kanıt: Kanıt çok bariz, çünkü (i) ve (ii) koşulları A'nın tümevarımsal bir küme olduğunu söylüyor, ama $\mathbb{N}$ en küçük tümevarımsal küme olduğundan bundan $A = \mathbb{N}$ çıkar. □

Teorem 5.6 (Tümevarımla Kanıt İlkesi I)**.** *$\varphi(x)$, herhangi bir formül olsun*[5]*. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\ (\varphi(n) \to \varphi(Sn))) \to \forall n\ \varphi(n)$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Kanıt: $A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$ olsun, yani A, φ'yi sağlayan doğal sayılardan oluşsun. Varsayıma göre $0 \in A$. Gene varsayıma göre, eğer $n \in A$ ise, $Sn \in A$. Teorem 5.5'ten istediğimiz çıkar. □

Teorem 5.6'yı kullanabilmek için, 0'ın φ özelliğini sağladığını göstermeye ***başlangıç adımı*** adı verilir. Eğer $x \in \mathbb{N}$ doğal sayısı φ'yi sağlıyorsa, Sx'in de φ'yi sağladığını göstermeye de ***tümevarım adımı*** denir. Eğer bu iki kanıt yapılırsa, o zaman her n doğal sayısının φ formülünü sağladığı gösterilmiş olur. Okurun tümevarımla kanıt yapmada belli bir olgunluk seviyesine ulaştığını varsayıyoruz.

Önsav 5.7. *S fonksiyonu, 0 dışında tüm değerleri alır, yani $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ olur.*

Kanıt: S fonksiyonu elbette 0 değerini alamaz, çünkü $0 = \emptyset$ ve $n \in Sn$. Şimdi, 0 dışında her doğal sayının bir doğal sayının S'si olduğunu gösterelim. Teorem 5.6'daki $\varphi(n)$ formülünü

$$n = 0 \vee \exists m\ n = Sm$$

olarak alalım. 0 sayısı elbette $\varphi(n)$ formülünü sağlıyor. Şimdi $\varphi(n)$'nin sağlandığını varsayıp $\varphi(Sn)$'nin sağlandığını gösterelim. $\varphi(Sn)$ ne diyor?

$$Sn = 0 \vee \exists m\ Sn = Sm$$

diyor. Birinci kısım, yani $Sn = 0$ kısmı tabii ki doğru olamaz, $\varphi(Sn)$'nin doğru olması için formülün ikinci kısmı doğru olmalı. $Sn = Sm$ eşitliğini sağlayan bir m var mı? Tabii ki var, m'yi n'ye eşit almak yeterli. □

---

[5]Yani $\varphi(x)$, matematiğin $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, $\neg$ gibi mantıksal simgeleriyle, parantezlerle, x, y, z gibi değişkenlerle, $=$ ve $\in$ simgeleriyle yazılmış sonlu uzunlukta ve "anlamlı bir cümle". Tabii formüllerimizde S, $\subseteq$, $\wp$, $\cup$, $\mathbb{N}$ gibi kısaltmalar da kullanabiliriz. Ayrıca formüllerimizde sabit kümeler de kullanabiliriz (bunlara parametre denir). Mesela a bir kümeyse,

$$\forall y\ \exists z\ (y \neq \emptyset \longrightarrow (Sa = x \cap z \wedge x \in SSy))$$

bir formüldür. Bu formülde x serbest bir değişkendir (y ve z bağlı değişkenlerdir), dolayısıyla formülün doğruluğu ya da yanlışlığı ancak x spesifik bir küme olarak alındığında anlaşılabilir. $\varphi(x)$ gösterimi formülde tek serbest değişkenin x olduğunu söyler, diğer değişkenler (eğer varsa) $\exists$ ve $\forall$ gibi simgelerle bağlanmış.

Tümevarımla Kanıt İlkesi (Teorem 5.6 ve daha genel olarak Teorem 5.5) çok önemlidir. Bu ilkeyi kullanmadan doğal sayılarla ilgili herhangi bir şey söylemek neredeyse imkânsızdır, hemen her aşamada kullanacağız.

Şimdi $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısıyla ilgili önemli bir teorem kanıtlayalım.

Teorem 5.8. *S fonksiyonu birebirdir. Yani n ve m doğal sayıları için $Sn = Sm$ ise $n = m$ olur.*

Bu teorem aslında aynen Teorem 4.9, ama Teorem 4.9'i kanıtlamak için Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmıştık. Bu sefer Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmadan ama kendimizi sadece doğal sayılara kısıtlayarak aynı sonucu kanıtlayacağız.

Bu teoremi kanıtlamak için biraz uğraşacağız. Teorem 4.10'u anımsatmakta yarar var: Eğer $Sn = Sm$ ise, ya $n = m$ ya da $n \in m \in n$ olur. Dolayısıyla teoremimizi kanıtlamamız için ikinci şıkkı, yani $n \in m \in n$ şıkkını elememiz gerekiyor. Temellendirme Aksiyomu bunu zaten yasaklıyor, bkz. Sonuç 4.13, ama biz Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmak istemiyoruz, mecbur kalsaydık kullanmaktan kaçınmazdık, ama ihtiyacımız yok. (İleride, Temellendirme Aksiyomu'nun doğal sayılar kümesi için zaten doğru olduğunu anlayacağız.)

Önce bir önsav kanıtlayalım.

Önsav 5.9. *Eğer $m \in n \in \mathbb{N}$ ise, $m \subseteq n$ olur.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise, n boşkümedir ve boşkümenin her elemanı her özelliği sağlar, mesela boşkümenin her elemanı boşkümenin bir altkümesidir.

Şimdi önermeyi n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. $m \in Sn$ olsun. Ama $Sn = n \cup \{n\}$ olduğundan ya $m \in n$ ya da $m = n$ olmalı. Birinci durumda tümevarım varsayımından dolayı $m \subseteq n$ olur, ama $Sn = n \cup \{n\}$ olduğundan $n \subseteq Sn$ olur; buradan da $m \subseteq Sn$ çıkar. İkinci durumda $m = n \subseteq Sn$ olur. □

Teorem 5.8'in Kanıtı: Eğer $Sn = Sm$ ise, Teorem 4.10'dan dolayı ya $n = m$ ya da $n \in m \in n$ olduğunu biliyoruz. Bir önceki önsava göre $n \in m \in n$ ise $n \subseteq m \subseteq n$ ve $n = m$ olur. □

Notlar

5.1. Teorem 5.5 ile Teorem 5.6'nın bu hâli arasında bir fark yok aslında, biri diğerine denk. Nitekim Teorem 5.6'da $\varphi(x)$ formülünü $x \in A$ formülü olarak alırsak hemen Teorem 5.5'i elde ederiz. Teorem 5.6 varlığını iki nedene borçlu: Birincisi uygulamada daha fazla kullanılır. İkincisi ise Altbölüm 6.7'de, Teorem 5.6'yı $\in$ simgesini içermeyen ama $+$, $\times$ ve S simgelerini içeren daha kısıtlı bir dilde yazılmış $\varphi(x)$ formüllerine uygulayacağız ve böylece (eğer istersek) kümeler kuramını terkedip aritmetiğe geçebileceğiz.

5.2. Önsav 5.9 doğal sayıların "özü"yle ilgili değildir. Eğer doğal sayıları başka türlü tanımlasaydık bu önsav doğru olmayabilirdi. Ama Teorem 5.8 ya da Teorem 5.6 doğal sayıların özüyle ilgilidir, bu teoremlerin doğru olmadığı bir yapıya doğal sayılar yapısı adını vermek absürt olurdu, gerçeklikle ilgili tüm sezgilerimizle çelişirdi.

5.3. Böylece Teorem 5.6, Önsav 5.7 ve Teorem 5.8'in doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısı bulmuş olduk. İleride $\mathbb{N}$'de toplama, çarpma ve sıralamayı tanımlayacağız ve başat özelliklerini kanıtlayacağız. Bölüm 8'da, adına Peano Aksiyomları denen, Teorem 5.6'yı kısmen, Önsav 5.7'yi ve Teorem 5.8'i de içeren bir "aksiyom" sistemini tanıtacağız.

5.4. Doğal sayılar kümesini, Teorem 5.6, Önsav 5.7 ve Teorem 5.8 doğru olacak biçimde tanımlamak Dedekind'in fikridir ama daha çok Peano'nun olarak bilinir. Fikri Dedekind'de bulduğunu Peano'nun kendisi ifade etmiştir.

Kümeler Kuramının Kullandığımız Aksiyomları

Daha önceki bölümlerde kümeler kuramının birkaç aksiyomunu verdik. O aksiyomları (metinde yer aldığı sırayla değil, bir başka sırayla) yazalım:

A1. Boşküme Aksiyomu. Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.

A2. Eşitlik Aksiyomu. Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.

A3. Tanımlı Altküme Aksiyomu. Eğer $\varphi(y)$ bir özellikse ve x bir kümeyse, x'in sadece ve sadece $\varphi(y)$ özelliğini sağlayan y elemanlarını eleman olarak içeren ve bunlardan başka bir eleman içermeyen bir küme vardır.

A4. Bileşim Aksiyomu. Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır.

A5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.

A6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. Eğer x bir kümeyse, eleman olarak sadece ve sadece x'in altkümelerini içeren bir küme vardır.

A7. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. Tümevarımsal bir küme vardır.

A8. Temellendirme Aksiyomu. Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'te $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.

Notlar

5.5. A3 tek bir aksiyom değildir. O aksiyom her $\varphi(y)$ özelliği için bize ayrı bir aksiyom verir. Yani üçüncü aksiyom, aksiyomdan ziyade bir "aksiyom şeması"dır. A8'i isterseniz yok sayabilirsiniz, hiç kullanmayacağız. Standart matematikte de pek kullanılmaz. Daha çok kümeler teorisinde kullanılır.

5.6. İlk dört aksiyomla $\emptyset$'den başka bir kümenin olduğu kanıtlanamaz çünkü sadece $\{0\}$ evreni (yani sadece boşkümenin olduğu evren) ilk dört aksiyomu sağlar.

5.7. A7 olmadan sonsuz elemanlı bir kümenin olduğu kanıtlanamaz. Bunu Not 4.5'te görmüştük.

5.8. Kümeler kuramının başka aksiyomları da vardır. O aksiyomları ve ne işe yaradıklarını [Ne1]'de göreceğiz. Bu ders notlarının sonuna kadar A1-A7 aksiyomları bize yetecek.

5.9. A3 ve A7'den A1 çıkar.

5.10. Bir sonraki ciltte [Ne1] sunacağımız Yerleştirme Aksiyomu'ndan yararlanarak A5 kanıtlanabilir.

5.11. Bu iki ciltte Temellendirme Aksiyomu'nu hiç kullanmayacağız.

Ernst Zermelo (1871-1953)

Alman matematikçi. Aksiyomatik kümeler kuramının en önemli kurucularından biridir. Babası üniversitede öğretim üyesi olduğundan, akademik kariyere yönelmesi ailesi tarafından teşvik edilmiştir. Üniversitede matematik, fizik ve felsefe okumuştur.

Akademik yaşamına analizle başlamış, uygulamalı matematiğe ve fiziğe yönelmiş, daha sonra o zamanlar matematiğin hiç kuşkusuz en önemli merkezi olan Göttingen'e geçince, Hilbert'in etkisiyle kümeler kuramına ilgi duymuş ve 1904'te her kümenin iyisıralanacağını kanıtlamıştır, yani herhangi bir X kümesinde öyle bir $<$ ikili ilişkisi vardır ki,

i. X'in herhangi iki farklı x ve y elemanı karşılaştırılabilir, yani ya $x < y$ ya $x = y$ ya da $y < x$ olur, ama x kendisiyle karşılaştırılamaz, yani $x < x$ doğru değildir.

ii. Eğer x, y, $z \in X$ ise ve $x < y$ ve $y < z$ ise, o zaman $x < z$ olur.

iii. X'in boş olmayan herhangi bir altkümesinin $<$ ilişkisi için bir en küçük elemanı vardır.

Zermelo, Skolem ve Fraenkel'in aksiyom sisteminde (ZFC'de) sonsuz sayıda aksiyom vardır. Montague 1961'de bu sistemin sonlu sayıda aksiyoma indirgenemeyeceğini kanıtlamıştır. Gödel, Bernays ve von Neumann'ın bulduğu aksiyom sistemi (GB) sonludur ve her iki sistemde de kümelerle ilgili aynı sonuçların kanıtlanacağı biliniyor. Ancak GB siteminde küme olmayan sınıflardan da söz edildiğinden, sonlu olmasına karşın, bir anlamda GB sistemi ZFC'den daha karmaşıktır ve daha kapsamlıdır diyebiliriz. Bir başka deyişle, ZFC sisteminin dili $\forall$, $\vee$, $=$ gibi standard matematik simgeleri dışında sadece $\in$ simgesini kullanırken, GB sistemi $\in$ simgesi dışında, küme olmayan topluluklardan sözedebilmek için ikinci bir simge daha kullanmaktadır.

Aslında Hilbert daha çok Cantor'un şu sorusuyla ilgileniyordu: Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yle de, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yle de arasında eşleşme olmayan sonsuz bir gerçel sayı kümesi var mıdır? Hilbert bu soruyu o kadar önemli buluyordu ki, 1900'de Paris'te yaptığı ünlü konuşmada, bu soruyu sorular listesinin en başına almıştı. Bu soruya yaklaşabilmek için de, daha kolay bir soru olarak addettiği, Zermelo'ya yukarıdaki soruyu sormuştu. Hilbert haklıydı, Cantor'un sorusu çok daha zordur. Kurt Gödel 1940'ta Cantor'un sorusunun olumsuz yanıtı olduğunu varsaymanın (eğer matematik çelişkisizse) matematiği ayrıca çelişkiye götürmeyeceğini kanıtladı. 1963'te Paul Cohen, Cantor'un sorusunun olumlu yanıtı olduğunu varsaymanın da matematiği çelişkiye götürmeyeceğini kanıtladı. Dolayısıyla Cantor'un sorusu ne olumlu ne de olumsuz olarak kanıtlanabilir; kümeler kuramının kimi evreninde (modelinde) doğru, kimindeyse yanlıştır.

Zermelo'nun kanıtının bugün Seçim Aksiyomu [bkz. SKK] diye adlandırılan bir aksiyoma dayanması matematik dünyasında hiç hoş karşılanmadı. 1908'de yoğun eleştirilere yanıt olarak aynı teoremin bir başka kanıtını yayımladığı makalesinde Zermelo, hem kanıtını daha kabul edilir bir biçimde sunuyor hem de başkalarının da farkına varmadan Seçim Aksiyomu'nu kullandığını gösteriyordu.

Zermelo, Russell paradoksuna benzer paradokslar keşfetmesiyle, kümeler kuramını aksiyomatik olarak inşa etmek istedi. Uzun uğraşlarına karşın bulduğu sistemin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamadı (bunu kanıtlamanın imkânsız olduğunu bugün Gödel sayesinde biliyoruz), gene de bulgularını 1908'de yayımladı. Zermelo'nun aksiyomları, bugün kabul edilen kümeler kuramı aksiyomlarının çoğunluğunu teşkil eder. Skolem ve Fraenkel 1922'de bu aksiyomlara ek yaparak bugün matematikçilerin çoğunluğu tarafından kabul edilen kümeler kuramını kurmuşlardır.

Zermelo 1935'te Hitler rejimine tepki olarak akademik yaşamdan çekilmiştir. Savaştan sonra tekrar profesörlüğe getirilmesini istemiş ve kendisine 1946'da onursal profesör unvanı verilmiştir.

6. Doğal Sayılarda Toplama, Çarpma ve Sıralama

Geçen bölümde, Teorem 5.6, Önsav 5.7 ve Teorem 5.8'in doğru olduğu bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ matematiksel yapının varlığını kanıtlamıştık. Anımsayalım:

"Doğal sayı sistemi" ya da yapısı yukarıdaki özellikleri sağlayan, ama bunun dışında başka özellikleri de sağlayan matematiksel bir yapıdır. Bu bölümde $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısında toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayıp, bunların hepimizin orta öğretim yıllarından bildiği eşitlikleri ve ilişkileri sağladığını göstereceğiz.

6.1 Toplama

Toplamayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,

$$n + 0 = n$$

ve $n + (m + 1) = (n + m) + 1$, yani

$$n + Sm = S(n + m)$$

eşitliklerini kullanacağız.

Tanım Denemesi. n ve p iki doğal sayı olsun. Bu iki sayının toplamını tanımlayacağız. Tanımlayacağımız toplamı $n + p$ olarak yazacağız. Eğer $p = 0$ ise $n + p$ doğal sayısı n olarak tanımlanır. Eğer $p \neq 0$ ise, Önsav 5.7 ve Teorem 5.8'den dolayı bir ve bir tek $m \in \mathbb{N}$ için, $p = Sm$ eşitliği doğrudur; bu durumda $n + p$ toplamı $S(n + m)$ doğal sayısı olarak tanımlanır. Bir başka deyişle toplamanın tanımı şöyle olmalıdır:

$$\begin{aligned} n + 0 &= n, \\ n + Sm &= S(n + m). \end{aligned}$$

Bu tanım iki soruna gebe.

Çözümü Kolay Bir Sorun. Altbölüm 4.8'de ortaya koyduğumuz sorun burada da belirir ama bu sorunu çözmek o kadar zor değildir, sorunu çözmek için Temellendirme Aksiyomu'na gerek yoktur. Nitekim, Teorem 5.8'den dolayı $Sm = Sm_1$ ise $m = m_1$ olur ve dolayısıyla

$$n + Sm = S(n + m) = S(n + m_1) = n + Sm_1$$

olur.

Daha Ciddi Bir Sorun. Tanımda genellikle gözden kaçan çok daha ciddi bir sorun vardır. Anlatalım: Yukarıdaki tanımdan, her n ve p sayısı için

$$n + p$$

diye bir sayısının gerçekten tanımlandığı çıkmaz. Eğer $p = 0$ ise, $n + p$ toplamının n olması gerektiğini biliyoruz, burada bir sorun yok. Ama eğer $p \neq 0$ ise önce p'yi bir m doğal sayısı için Sm olarak yazmak gerekir:

$$n + p = n + Sm = S(n + m)$$

eşitliklerinden sonra $n + m$ sayısını hesaplamak lazım. Eğer $m = 0$ ise sorun yok: $n+m = n+0 = n$. Ancak $m \neq 0$ ise, $n+m$ sayısını hesaplayabilmek için, $m = Sm'$ eşitliğini sağlayan bir m' bulmalı. Öyle bir m' sayısının olduğunu biliyoruz. Bulalım öyle bir m' sayısı. Şimdi,

$$n + m = n + Sm' = S(n + m')$$

eşitliklerinden $n + m'$ sayısını hesaplamak gerektiği anlaşılır. Eğer $m' = 0$ ise gene bir sorun yok, ama eğer $m' \neq 0$ ise, $n + m'$ sayısını hesaplamak için $m' = Sm''$ eşitliğini sağlayan bir m'' sayısı bulmalı. Şimdi,

$$n + m' = n + Sm'' = S(n + m'')$$

çıkar. $n + m''$ toplamını hesaplamalıyız. Eğer $m'' = 0$ ise gene bir sorun yok, ama eğer $m'' \neq 0$ ise, $n + m''$ sayısını hesaplamak için $m'' = Sm'''$ eşitliğini sağlayan bir m''' sayısı bulmalı... Bu böylece devam eder. Ta ki 0'a rastlayana dek... Eğer rastlarsak tabii...

Sonlu bir zaman sonra 0'a rastlasak $n + m$ toplamını tanımlayabileceğiz ama sonlu bir zaman sonra 0'a rastlayacağımızdan emin olamayız. Yukarıdaki süreç sonsuza dek de sürebilir... Sürmemesi gerektiğini hayat tecrübelerimizden biliyoruz ama kanıtlanması gerekir... Zaten matematikte "sonlu bir zaman sonra" diye bir ifade yazılamaz, yazılamadığı için de kanıtlamaz.

$n + m$ diye bir sayının varlığı m üzerine tümevarımla kanıtlanabileceği düşünülebilir. Ama ancak matematiksel dille yazılabilen formüllerin bir kanıtı olabilir, matematiksel olmayan bir önermenin kanıtı olamaz ve dilimizde $+$

diye bir simge olmadığından "$n+m$ diye bir sayı vardır" cümlesi matematiksel değildir. Hatta tam tersine öyle bir simgeyi yaratabileceğimizi kanıtlamaya çalışıyoruz. Benzer şekilde "$n+m$ ifadesi tanımlıdır" diye bir ifade de yoktur matematikte. Ayrıca yukarıda tanımlanmaya çalışılan + "şeyi"nin ne olduğu belirsizdir. Bir fonksiyonsa, fonksiyon olarak tanımlanmalı. Zaten öyle de yapacağız. Bu bölümde $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden ve yukarıdaki iki özelliği sağlayan bir $+:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayacağız.

Bu ve bu tür ince sorunların farkında olmadan da matematik yapılır, yapılmaz değil, yapılıyor da, ama matematiğin bu ince noktalarından haberdar olmak insana bir başka keyif verir, bir başka boyut katar.

Yukarıdaki başarısız yöntem, aslında doğal sayıları teker teker toplamaya çalışıyor, önce 0 ile toplama, sonra 1 ile toplama, ardından 2 ile toplama... Birazdan, **tüm** doğal sayıları toplamayı tek bir hareketle, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir t fonksiyonu olarak tanımlayacağız. Böylece her n ve m doğal sayıları için $n+m$ doğal sayısını t fonksiyonunun (n,m) ikilisinde aldığı değer olarak tanımlanacak. Yani $n+m$ toplamı $t(n,m)$ olarak tanımlanacak.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon, aslında $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times\mathbb{N}$, yani $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir T grafiği için $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ \mathbb{N},\ T)$ üçlüsüdür. Şimdi bu T grafiğini bulalım.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin aşağıdaki T1 ve T2 özelliklerini sağlayan bir X altkümesine ***toplamsal*** diyelim.

T1. Her $n\in\mathbb{N}$ için $(n,\ 0,\ n)\in X$,
T2. Eğer $(n,m,p)\in X$ ise, o zaman $(n,Sm,Sp)\in X$.

Eğer toplama fonksiyonunu $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon olarak tanımlasaydık, fonksiyonun grafiği elbette toplamsal bir küme olacaktı.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin kendisi toplamsaldır elbette. Demek ki en azından bir küme toplamsal. En küçüğünü bulacağız. En küçük toplamsal küme bir fonksiyonun grafiği olacak ve bu fonksiyona toplama adını vereceğiz.

Alıştırmalar

6.1. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{(2,0,1)\}$ kümesinin toplamsal olduğunu kanıtlayın.
6.2. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{(2,1,4)\}$ kümesinin toplamsal olmadığını kanıtlayın.
6.3. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{(2,0,3),(2,1,4)\}$ kümesinin toplamsal olduğunu kanıtlayın.
6.4. $(1,1,3)$'i içermeyen en büyük toplamsal kümenin varlığını kanıtlayın ve bu kümeyi bulun.
6.5. Her toplamsal kümenin $(2,3,5)$'i içermek zorunda olduğunu kanıtlayın.

T1, $n+0=n$ demek istiyor ama başka bir m için $(n,0,m)\in X$ ise bu isteği tam olarak yerine gelemiyor. Yani eğer $n\in\mathbb{N}$ verilmişse, $(n,0,n)\in X$ olmalı ama başka bir $m\in\mathbb{N}$ için $(n,0,m)\in X$ olmamalı, ki $n+0$ toplamı hem n hem de m olmasın.

Aynı şekilde T2, $n+m=p$ ise, $n+Sm=Sp$ eşitliğini istiyorum diyor, ama Sp'den değişik q için $(n,Sm,q)\in X$ oluyorsa bu isteğini pek gerçekleştiremiyor. Kısaca söylemek gerekirse, bizim istediğimiz X toplamsal kümesinde her n, $m \in \mathbb{N}$ için $(n, m, p) \in X$ özelliğini sağlayan tek bir p olmalı.

Eğer ilkokuldan beri sezgisel olarak bildiğimiz toplama işlemini $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman bu fonksiyonun grafiği, yani

$$\{(n, m, n+m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi toplamsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi bu grafik en küçük toplamsal küme olmalı (yani her toplamsal kümenin bir altkümesi olmalı.)

Toplamsal kümelerin kesişimi toplamsal olduğundan (bunun kanıtı kolay), tüm toplamsal kümelerin kesişimi de toplamsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük toplamsal kümedir. En küçük toplamsal kümeye T diyelim.

Teorem 6.1. *Tüm toplamsal kümelerin kesişimi gene toplamsal bir kümedir. Bu en küçük toplamsal kümeye T diyelim. T, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir grafiğidir, yani her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in T$ ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır. Ayrıca, eğer bu biricik p'ye $n+m$ adını verirsek, her n ve m için,*

$$n + 0 = n$$
$$n + Sm = S(n+m)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Kanıt: T, tüm toplamsal kümelerin kesişimi olsun. $n \in \mathbb{N}$ olsun.

a. En Küçük Toplamsal Küme: Tanıma göre, $(n, 0, n)$ tüm toplamsal kümelerde olduğundan, tüm toplamsal kümelerin kesişimdedir de, yani T'dedir. Dolayısıyla T, T1'i sağlıyor. Şimdi $(n, m, p) \in T$ olsun. Demek ki (n, m, p) tüm toplamsal kümelerde. Demek ki (n, Sm, Sp) de tüm toplamsal kümelerde. Dolayısıyla $(n, Sm, Sp) \in T$. Demek ki T kümesi T2'yi de sağlıyor.

Şimdi T'nin bir fonksiyonun grafiği olduğunu gösterelim. Yani her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in T$ önermesini sağlayan bir ve bir tane $p \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim. Önce p'nin varlığını, sonra da birinciliğini gösterelim.

b. Varlığın Kanıtı: Daha genel olan şu önermeyi kanıtlayacağız: *Eğer X bir toplamsal kümeyse (mesela T ise), o zaman her n, $m \in \mathbb{N}$ için, öyle bir $p \in \mathbb{N}$ vardır ki $(n, m, p) \in X$ olur.*

X rastgele bir toplamsal küme olsun. Varlığı m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız[1]. Kanıtlayacağımız $\varphi(m)$ önermesi şu:

$$\forall n\, \exists p\ (n, m, p) \in X.$$

[1] Teorem 5.5'i kullanacağız, daha zayıf bir teorem olan Teorem 5.6 yetmez, çünkü birazdan tanımlayıp tümevarımla kanıtlayacağımız $\varphi(m)$ önermesi kümeler kuramının bir önermesidir.

Başlangıç Adımı. $m = 0$ olsun. n herhangi bir doğal sayı ise, $(n, 0, n) \in X$ içindeliğini biliyoruz. Demek ki $p = n$ alabiliriz. Bundan da $\varphi(0)$'ın doğruluğu çıkar.

Tümevarım Adımı. Şimdi $m \in \mathbb{N}$ olsun ve $\varphi(m)$ önermesini doğru varsayıp $\varphi(Sm)$ önermesini kanıtlayalım. $n \in \mathbb{N}$ sabitlensin. $\varphi(m)$ önermesini varsaydığımızdan, öyle bir p vardır ki,

$$(n, m, p) \in X.$$

olur. Ama X toplamsal olduğundan, o zaman

$$(n, Sm, Sp) \in X$$

önermesi de sağlanır. $\varphi(Sm)$ önermesi kanıtlanmıştır.

Demek ki her n ve her m için $(n, m, p) \in X$ içindeliğini sağlayan bir p vardır.

c. Biricikliğin Kanıtı: Şimdi, verilmiş n ve m doğal sayılari için,

$$(n, m, p) \in T$$

içindeliğini sağlayan p doğal sayısının biricikliğini kanıtlayalım. Biricikliği de m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Kanıtlayacağımız $\psi(m)$ önermesi şu:

$$\forall n \forall p \forall p' \; (((n, m, p) \in T \wedge (n, m, p') \in T) \to p = p').$$

Başlangıç Adımı. Önce $\psi(0)$ önermesini kanıtlayalım. $n_0 \in \mathbb{N}$ rastgele bir doğal sayı olsun. T toplamsal olduğundan, $(n_0, 0, n_0)$ üçlüsünün T'de olduğunu biliyoruz. Bir de ayrıca, bir çelişki elde etmek amacıyla, $p \neq n_0$ için $(n_0, 0, p)$ üçlüsünün de T'de olduğunu varsayalım.

$$T' = T \setminus \{(n_0, 0, p)\}$$

olsun. $T' \subset T$ olduğundan, T' toplamsal bir küme olmamalı; ama öyle olduğunu kanıtlayacağız!

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in T$. Ama $p \neq n_0$ olduğundan, $(n, 0, n) \neq (n_0, 0, p)$, yani

$$(n, 0, n) \in T \setminus \{(n_0, 0, p)\} = T'$$

olmalı. Demek ki T' kümesi T1 özelliğini sağlıyor.

Şimdi (n, m, p) üçlüsünün T' kümesinde olduğunu varsayalım. $T' \subset T$ olduğundan, $(n, m, p) \in T$ olur. T toplamsal olduğundan, $(n, Sm, Sp) \in T$ olur. Ama $Sm \neq 0$ olduğundan (Önsav 5.7),

$$(n, Sm, Sp) \neq (n_0, 0, p).$$

Demek ki,

$$(n, Sm, Sp) \in T \setminus \{(n_0, 0, p)\} = T'.$$

T2 özelliğinin de T' için doğru olduğunu kanıtladık. Yani T' toplamsal bir küme. Bir çelişki. $\psi(0)$ önermesi kanıtlanmış oldu.

Tümevarım Adımı: $m_0 \in \mathbb{N}$ olsun ve $\psi(m_0)$ önermesini varsayıp $\psi(Sm_0)$ önermesini kanıtlayalım. n_0 rastgele bir doğal sayı olsun. Kanıtın birinci kısmından dolayı, bir p_0 doğal sayısı için

$$(n_0, m_0, p_0) \in T$$

içindeliği doğrudur. T toplamsal olduğundan,

$$(n_0, Sm_0, Sp_0) \in T$$

içindeliği de doğrudur. Bir çelişki elde etmek amacıyla bir

$$p_1 \neq Sp_0$$

için,

$$(n_0, Sm_0, p_1) \in T$$

içindeliğini varsayalım.

$$T' = T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\}$$

olsun. $T' \subset T$ olduğundan, T' toplamsal bir küme olmamalı; ama öyle olduğunu kanıtlayacağız!

Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, n) \in T$. Ama $Sm_0 \neq 0$ olduğundan, $(n, 0, n) \neq (n_0, Sm_0, p_1)$, yani $(n, 0, n) \in T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\} = T'$ olmalı. Demek ki T' kümesi T1 özelliğini sağlıyor.

Şimdi (n, m, p) üçlüsünün T' kümesinde olduğunu varsayalım. $T' \subset T$ olduğundan, $(n, m, p) \in T$ olur. T toplamsal olduğundan,

$$(n, Sm, Sp) \in T$$

olur.

Bir an için $(n, Sm, Sp) = (n_0, Sm_0, p_1)$ eşitliğini varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} n &= n_0, \\ Sm &= Sm_0, \\ Sp &= p_1 \end{aligned}$$

olur. İkinci eşitlik, Teorem 5.8'den dolayı $m = m_0$ eşitliğini verir. Demek ki

$$(n_0, m_0, p) = (n, m, p) \in T.$$

Ama aynı zamanda,

$$(n_0, m_0, p_0) \in T.$$

$\psi(m_0)$ önermesi doğru olduğundan, bundan,

$$p = p_0$$

ve dolayısıyla

$$p_1 = Sp = Sp_0$$

çıkar. Çelişki. Demek ki

$$(n, Sm, Sp) \neq (n_0, Sm_0, p_1).$$

Yani

$$(n, Sm, Sp) \in T \setminus \{(n_0, Sm_0, p_1)\} = T'$$

olur.

T' kümesinin toplamsal olduğunu kanıtladık. Bu da elde etmek istediğimiz nihai çelişkidir.

d. Son olarak, teoremin en sonundaki iki eşitliğin doğru olduğunu kanıtlayalım.

$(n, 0, n) \in T$ olduğundan, teoremin önermesindeki tanıma göre, $n + 0 = n$ olmalı.

Gene tanıma göre, $(n, m, n+m) \in T$ önermesinin doğruluğunu biliyoruz. T toplamsal olduğundan, bundan $(n, Sm, n + Sm) \in T$ çıkar. Yani $n + Sm = S(n+m)$. □

Kanıt belki uzun ve meşakkatli ama her şey yerli yerine oturdu. Bundan böyle doğal sayılardan ve doğal sayıların toplamından matematiksel anlamda sözedebiliriz. Toplamanın karakteristik özellikleri şunlar: Her n ve m doğal sayısı için,

(1) $$n + 0 = n$$

ve

(2) $$n + Sm = S(n+m).$$

Bundan sonra toplamanın sadece bu iki özelliğini kullanacağız, tanımını unutabilirsiniz!

6.2 Toplamanın Özellikleri

0'ın toplamanın sağdan etkisiz eleman olduğunu biliyoruz: $n + 0 = n$. Şimdi 0'ın soldan da etkisiz eleman olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 6.2. [Etkisiz Eleman]. *Her* $m \in \mathbb{N}$ *için,* $0 + m = m$.

Kanıt: Önsavdaki eşitliği m üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım: Önsavı $m = 0$ için, yani $0 + 0 = 0$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama bunun doğru olduğunu tanımdan biliyoruz. (Yukardaki (1)'de $n = 0$ alın.)

Tümevarım Adımı: Önsavın m için doğru olduğunu varsayıp, yani

$$0 + m = m$$

eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), teoremin Sm için doğru olduğunu, yani $0 + Sm = Sm$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Tek bir satırla kanıtlayabiliriz bunu:

$$0 + Sm = S(0 + m) = Sm.$$

Birinci eşitlik (2)'den, ikinci eşitlik tümevarım varsayımından ileri geliyor. □

Bu sonuç $0 + m = m + 0$ eşitliğini veriyor. Birazdan, değişme özelliği adı verilen $n + m = m + n$ eşitliğini kanıtlayacağız.

1'in $S0$ olarak tanımlandığını anımsatırız. Teorem 6.1'deki eşitliklerden dolayı, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$Sn = S(n + 0) = n + S0 = n + 1,$$

yani Sn, beklendiği üzere, $n + 1$ sayısına eşit:

$$Sn = n + 1.$$

Toplamayla ilgili başka sonuçlar gündemimizde.

İlk bakışta gereksiz görülebilecek aşağıdaki önsavın yegâne işlevi bir sonraki teoremin kanıtında kullanılmak olacak! Masa başında önce Teorem 6.4'ü kanıtlamaya çalıştık. Tıkandığımız yerde Önsav 6.3'e ihtiyacımız olduğunu gördük. Tabii kitabı yazarken, akademik dürtülerden dolayı düşünme sürecini ters çevirdik. Eğer okur önce Teorem 6.4'ü kanıtlamaya çalışırsa, Önsav 6.3'ün gerekliliğini görecektir.

Önsav 6.3. *Her* n, $m \in \mathbb{N}$ *için,* $m + Sn = Sm + n$.

Kanıt: n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 0$ ise,

$$m + Sn = m + S0 = S(m + 0) = Sm = Sm + 0 = Sm + n$$

ve bu durumda kanıt tamam.

Şimdi, her m için, $m + Sn = Sm + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), her m için,

$$m + SSn = Sm + Sn$$

eşitliğini kanıtlayalım:

$$m + SSn = S(m + Sn) = S(Sm + n) = Sm + Sn.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Teorem 6.4. [Değişme Özelliği]. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n + m = m + n$.*

Kanıt: m üzerinden tümevarım yapacağız.

Birinci Adım: Eğer $m = 0$ ise, (1)'den ve Önsav 6.2'den, $n + 0 = n = 0 + n$ çıkar.

Tümevarım Adımı: Önsavın m için doğru olduğunu, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $n + m = m + n$ eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), önsavı Sm için kanıtlayacağız, yani her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n + Sm = Sm + n$$

eşitliğini kanıtlayacağız:

$$n + Sm = S(n + m) = S(m + n) = m + Sn = Sm + n.$$

Bu eşitlik silsilesinde, soldan sağa sırasıyla, (2)'yi, tümevarım varsayımını, tekrar (2)'yi ve Önsav 6.3'ü kullandık. □

Notlar

6.6. $n + m = m + n$ eşitliğini elbette tümevarımla kanıtlayacağız ama n üzerine mi yoksa m üzerine mi tümevarım yapacağız? $m + n = n + m$ eşitliği n'ye ve m'ye göre simetrik olduğundan, tümevarımı n ya da m üzerine yapmak eşdeğer olmalı, yani birini seçerek karşılaşılan zorluklara diğerini seçerek de karşılaşmalıyız. Yukarıdaki kanıtta m üzerine tümevarım yapmayı seçtik. Ama felsefi olarak bu yöntemin başarıya ulaşmaması lazım, n'den nasıl vazgeçebiliriz ki? Nitekim m üzerine tümevarım yetmedi ve kanıtın sonunda Önsav 6.3'ü kullandık. Bu arada Önsav 6.3'ü n üzerine tümevarımla kanıtladığımıza dikkatinizi çekerim, o önsavı m üzerine tümevarımla kanıtlayamazdık. Yani n kendini hatırlattı, ben de varım dedi, illa ki kendini göstermesi gerekiyordu.

Teorem 6.5. [Birleşme Özelliği]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

$$(n + m) + p = n + (m + p).$$

Kanıt: p üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

Birinci Adım: Eğer $p = 0$ ise,

$$(n+m)+p = (n+m)+0 = n+m = n+(m+0) = n+(m+p)$$

ve bu durumda kanıt tamam.

Tümevarım Adımı: Kanıtı doğrudan veriyoruz:

$$\begin{aligned}(n+m)+Sp &= S((n+m)+p) = S(n+(m+p)) \\ &= n+S(m+p) = n+(m+Sp).\end{aligned}$$

Teorem kanıtlanmıştır. □

Teorem 6.5'e göre, toplama yaparken parantez koymak gereksizdir.

$$(n+m)+p \text{ ve } n+(m+p)$$

yerine $n+m+p$ yazabiliriz. Aynı şey dört ya da daha fazla doğal sayı toplarken de geçerlidir. (Bu son dediğimiz tümevarımla kanıtlanır ve kanıt sanıldığı kadar kolay değildir. Bkz Bourbaki.)

Önsav 6.6. [Sadeleşme, birinci adım]. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, eğer $n+m = n$ ise $m = 0$'dır.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 0$ ise Önsav 6.2 istediğimizi verir. Şimdi önermenin n için (her m için) doğru olduğunu varsayalım. Diyelim $Sn + m = Sn$. O zaman, toplamanın değişme özelliğine göre,

$$Sn = Sn + m = m + Sn = S(m+n) = S(n+m)$$

olur. Teorem 5.8'den dolayı

$$n = n + m$$

olur ve tümevarımla $m = 0$ sonucuna varırırz. □

Teorem 6.7. [Sadeleşme]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, eğer $n+m = n+p$ ise $m = p$ olur.*

Kanıt: p üzerine tümevarımla. Eğer $p = 0$ ise, istediğimiz Önsav 6.6'dan çıkar. Şimdi teoremin p için doğru olduğunu varsayalım. Diyelim

$$n + m = n + Sp.$$

Eğer $m = 0$ ise, Önsav 6.6'dan dolayı $Sp = 0$ olur, ki bu mümkün değildir. Demek ki $m \neq 0$. Dolayısıyla bir $m' \in \mathbb{N}$ için $Sm' = m$ olur. Bundan,

$$S(n+m') = n + Sm' = n + m = n + Sp = S(n+p)$$

çıkar. Bundan ve Teorem 5.8'den $n+m' = n+p$ eşitliği bulunur. Tümevarımla, $m' = p$ elde ederiz. Yani $m = Sm' = Sp$. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

6.7. n ve m doğal sayıları için $n + m = 0$ ise $n = m = 0$ eşitliklerini kanıtlayın.

6.8. Her doğal sayısının bir n doğal sayısı için ya $n + n$ biçiminde ya da $n + n + 1$ biçiminde yazılabileceğini ama iki biçimde birden (farklı n'ler olabilir) yazılamayacağını kanıtlayın.

6.9. Her n ve m doğal sayıları için $n + p = m$ ya da $m + p = n$ eşitliğini sağlayan bir p doğal sayısının varlığını kanıtlayın. Her iki eşitlik birden (belki ayrı p'ler için) ne zaman sağlanır?

6.3 Çarpma

Çarpmayı tanımlamak için, doğru olmasını istediğimiz,

$$n \times 0 = 0$$

ve

$$n \times (m + 1) = (n \times m) + n$$

eşitliklerini kullanacağız. (Yukarıda yaptıklarımızdan toplamayı biliyoruz ve çarpmanın tanımında toplamayı kullanabiliriz.)

Tanım Denemesi. n ve m iki doğal sayı olsun. Eğer $m = 0$ ise $n \times m$ doğal sayısı 0 olarak tanımlanır. Eğer $m \neq 0$ ise, o zaman, bir ve bir tek $m' \in \mathbb{N}$ için, $m = Sm'$ eşitliği doğrudur ve bu durumda $n \times m$ sayısı $n \times m' + n$ olarak tanımlanır[2]. Bir başka deyişle çarpmanın tanımı şöyle olmalıdır:

$$\begin{aligned} &n \times 0 = 0 \\ &n \times Sm = n \times m + n. \end{aligned}$$

Toplamada da olduğu gibi, çarpmanın tanımını böyle yaparsak küçük ama matematiksel düşünce açısından önemli bir noktayı atlamış oluruz. Bu tanımla $n \times m$ çarpımını her zaman var olduğunu kanıtlayamayız.

Bu sorun'un altından şöyle kalkılır: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir X altkümesine ***çarpımsal*** diyelim.

Ç1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(n, 0, 0) \in X$,
Ç2. Eğer $(n, m, p) \in X$ ise, o zaman $(n, Sm, p + n) \in X$.

Örneğin $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi çarpımsaldır.

---

[2] $n \times m' + n$, alışageldiği üzere $(n \times m') + n$ anlamına gelmektedir.

Eğer çarpmayı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlayabilseydik, o zaman çarpmanın grafiği yani

$$\{(n, m, n \times m) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi çarpımsal bir küme olacaktı; ayrıca biraz düşününce anlaşılacağı gibi çarpmanın grafiği en küçük çarpımsal küme olacaktı (yani her çarpımsal kümenin bir altkümesi olacaktı). Dolayısıyla çarpmayı tanımlayacağımıza çarpma fonksiyonunun grafiğini (en küçük çarpımsal küme olarak) tanımlayacağız.

Çarpımsal kümelerin kesişimi gene çarpımsal olduğundan (bunun kanıtı kolay), tüm çarpımsal kümelerin kesişimi de çarpımsaldır, ve elbette bu kesişim en küçük çarpımsal kümedir. En küçük çarpımsal kümeye P diyelim.

Teorem 6.8. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $(n, m, p) \in P$ ilişkisini sağlayan bir ve bir tane p vardır. Ayrıca, eğer bu p'ye $n \times m$ adını verirsek, her n ve m için,*

$$n \times 0 = n \text{ ve } n \times Sm = n \times m + n$$

olur.

Kanıt: Kanıtı okura alıştırma olarak bırakıyoruz, aynen Teorem 6.1 gibi kanıtlanır. İleride daha genel bir sonuç olan Teorem 7.1'i kanıtlayacağız. □

Bilindiği üzere çoğu zaman $n \times m$ yerine $n \cdot m$, hatta daha ziyade çok daha basit olarak nm yazılır.

6.4 Çarpmanın Özellikleri

Şimdi çarpmayla ilgili savlarımızı kanıtlayabiliriz. Bunun için toplamayı ve toplamanın özelliklerini kullanacağız elbet. Toplamanın özelliklerini Altbölüm 6.2'de kanıtladık. Bunları kullanırken artık referans vermeyeceğiz.

Önsav 6.9. [Yutan Eleman]. *Her $m \in \mathbb{N}$ için, $0 \times m = 0$.*

Kanıt: m üzerine tümevarımla. Başlangıç adımı bariz.

$$0 \times Sm = 0 \times m + 0 = 0 + 0 = 0.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Önsav 6.10. [Etkisiz Eleman]. *Her $m \in \mathbb{N}$ için, $1 \times m = m = m \times 1$.*

Kanıt: m üzerine tümevarımla. Başlangıç adımı kolay. Tümevarım adımı:

$$1 \times Sm = 1 \times m + 1 = m + 1 = Sm.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 6.11. [Değişme Özelliği]. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $nm = mn$.*

Kanıt: m üzerine tümevarımla kanıtlamaya çalışalım. Başlangıç adımı gene kolay. Tümevarım adımı:

$$n \cdot Sm = nm + n = mn + n = \cdots$$

Başaramadık. En sağdaki ifadenin $Sm \cdot n$'ye eşit olduğunu kanıtlamak istedik ama sonunu getiremedik. Demek ki

$$mn + n = Sm \cdot n$$

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor.

Önsav 6.12. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $mn + n = Sm \cdot n$.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. (Bir defa daha m üzerine tümevarımla kanıtlama çabası başarısızlıkla sonuçlanmaya mahkûmdur.) $n = 0$ için bir zorlukla karşılaşmıyoruz. Şimdi önsavı n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. m herhangi bir doğal sayı olsun.

$$\begin{aligned} m \cdot Sn + Sn &= S(m \cdot Sn + n) = S(mn + m + n) \\ &= S(mn + n + m) = S(Sm \cdot n + m) \\ &= Sm \cdot n + Sm = Sm \cdot Sn. \end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Bu önsavla birlikte Teorem 6.11 de kanıtlanmıştır.

Teorem 6.13. [Dağılma Özelliği]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

$$n(m + p) = nm + np$$

olur.

Kanıt: Eğer $p = 0$ ise, her iki tarafta da nm elde ederiz. Şimdi teoremi p için varsayıp Sp için kanıtlayalım:

$$n(m + Sp) = n \cdot S(m + p) = n(m + p) + n = nm + np + n = nm + n \cdot Sp.$$

Kanıt bitmiştir. □

Teorem 6.14. [Birleşme Özelliği]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, $(nm)p = m(np)$ olur.*

Kanıt: p üzerine tümevarımla. Eğer $p = 0$ ise, her iki ifade de 0'a eşittir. Geri kalan kısım da kolay:

$$(nm)Sp = (nm)p + nm = n(mp) + nm = n(mp + m) = n(m \cdot Sp).$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 6.15. [Sıfırçarpansızlık]. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için $nm = 0$ ise ya n ya da $m = 0$ olur.*

Kanıt: Eğer $m \neq 0$ ise, bir p doğal sayısı için $m = Sp$ olur. Demek ki,

$$0 = nm = n \cdot Sp = np + n.$$

Alıştırma 6.7'ye göre $n = 0$. □

Alıştırmalar

6.10. $nm = 1$ ise $n = m = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

6.11. $nm = 2$ ise ya $n = 2$ ve $m = 1$ olduğunu ya da tam tersi $n = 1$ ve $m = 2$ olduğunu kanıtlayın.

6.12. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve $f(0) = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(Sn) = 2f(n)$ eşitliklerini sağlayan bir fonksiyonun varlığını kanıtlayın.

6.5 Sıralama

Bu altbölümde, ilkokuldan beri bildiğimiz $\leq$ ve $<$ sıralamalarını tanımlayacağız.

Tanım 6.16. *n ve m iki doğal sayı olsun. Eğer $n + p = m$ eşitliğini sağlayan bir p doğal sayısı varsa, o zaman $n \leq m$ yazılır ve bu durumda n, m'den **küçükeşit** denir.*

$0 + n = n$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq n$ olur; yani 0, $\mathbb{N}$'nin en küçük elemanıdır.

Eğer $n \leq m$ ise, ama $n \neq m$ ise, bu durumda $n < m$ yazılır ve n, m'den ***mutlak küçük*** denir. Elbette

$$n < m \Leftrightarrow \exists p\ (p \neq 0 \wedge n + p = m)$$

ve her n doğal sayısı için $n < n + 1 = Sn$.

Teorem 6.17. [Sıralama]. *$\leq$ ilişkisi bir sıralamadır, yani her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

i. *$n \leq n$.*
ii. *$n \leq m$ ve $m \leq n$ ise $n = m$.*
iii. *$n \leq m$ ve $m \leq p$ ise $n \leq p$.*

Kanıt: i'nin doğruluğu çok belli. ii'yi kanıtlayalım. Varsayımlar altında,

$$n + p = m \text{ ve } m + q = n$$

eşitliklerini sağlayan p ve q doğal sayıları vardır. Buradan,

$$n + (p + q) = (n + p) + q = m + q = n$$

çıkar. Önsav 6.6'ya göre $p + q = 0$. Alıştırma 6.7'ye göre $p = q = 0$. iii'ün kanıtı daha da kolay: Varsayımlara göre a ve b doğal sayıları için,

$$n + a = m \text{ ve } m + b = p$$

olur. Demek ki,

$$n + (a + b) = (n + a) + b = m + b = p,$$

yani $n \leq p$. □

Teorem 6.18. [Sıralama]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*

i. $n \not< n$.

ii. $n < m$ *ve* $m < p$ *ise* $n < p$.

Kanıt: Bir önceki teoremden ve mutlak eşitsizliğin tanımından çıkar. □

Teorem 6.19. [Tamsıralama]. $\leq$ *ilişkisi bir tamsıralamadır, yani her* n, $m \in \mathbb{N}$ *için, ya* $n \leq m$ *ya da* $m \leq n$ *olur.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla. Eğer $n = 0$ ise sorun yok. Şimdi teoremi n için varsayıp Sn için kanıtlayalım. m bir doğal sayı olsun. Eğer $m \leq n$ ise o zaman $m \leq n < Sn$ olur ve sorun kalmaz. Eğer $n < m$ ise, öyle bir $p \neq 0$ vardır ki,

$$n + p = m$$

olur. $p \neq 0$ olduğundan, bir p' için $Sp' = p$ olur. Demek ki,

$$m = n + p = n + Sp' = n + p' + 1 = (n + 1) + p' = Sn + p'.$$

Demek ki $Sn \leq m$. □

Önsav 6.20. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için,*

i. $m < Sn \Leftrightarrow m \leq n$.

ii. $m < n \Leftrightarrow Sm \leq n$.

iii. [Ayrık Sıralama]. $m < n < Sm$ *eşitsizliklerini sağlayan bir* n *doğal sayısı yoktur.*

Kanıt: i. ($\Rightarrow$) $m < Sn$ olduğundan, $m + p = Sn$ eşitliğini sağlayan bir $p \neq 0$ vardır. $p \neq 0$ olduğundan bir $r \in \mathbb{N}$ için $p = Sr$ olur ve

$$S(m + r) = m + Sr = m + p = Sn$$

ve $m + r = n$ olur. Demek ki $m \leq n$.

($\Leftarrow$) $m \leq n$ ise $n < Sn$ olduğundan, $m < Sn$ olur.

ii. $m < n$ olsun. Demek ki bir $p \neq 0$ doğal sayısı için $m + p = n$. Ama $p \neq 0$ olduğundan bir $r \in \mathbb{N}$ için $p = Sr$ olur. Demek ki

$$n = m + p = m + Sr = m + (r + 1) = (m + 1) + r = Sm + r.$$

Böylece $Sm \leq n$ eşitsizliği kanıtlanmış olur. Diğer yön bariz.

iii. $m < n < Sm$ ise, i ve ii'den $Sm \leq n \leq m$ çıkar, çelişki. □

Son olarak toplama ve çarpmanın sıralamayla olan ilişkilerini irdelemek gerekiyor. Bunların kanıtlarını alıştırma olarak okura bırakıyoruz.

Teorem 6.21. [Toplamayla Uyum]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, $n < m$ ancak ve ancak $n + p < m + p$ ise ve $n \leq m$ ancak ve ancak $n + p \leq m + p$ ise* □

Teorem 6.22. [Çarpmayla (bir yere kadar) Uyum]. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için, eğer $0 < p$ ise, $n < m$ ancak ve ancak $n \times p < m \times p$. Ayrıca eğer $0 < p$ ise, $n \leq m$ ancak ve ancak $n \times p \leq m \times p$.* □

Bu altbölümün son teoremi olarak, bu ders notlarında hiçbir işimize yaramayacak, ama bir sonraki ciltte önemli olacak bir sonuç kanıtlayacağız.

Önsav 6.23. *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n < m$ ancak ve ancak $n \in m$ ise.*

Kanıt: Eğer $n < m$ ise, Önsav 6.20.ii'den $Sn \leq m$ çıkar. Önsav 5.9'dan da

$$n \in n \cup \{n\} = Sn \subseteq m$$

bulunur.

Diğer yönü m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $m = 0 = \emptyset$ ise sorun yaratacak bir n bulamayız. Şimdi önermeyi m için varsayıp Sm için kanıtlayalım. $n \in Sm = m \cup \{m\}$ olsun. Eğer $n = m$ ise $n < Sm$ olur ve kanıt biter. Aksi hâlde $n \in m$ olur ve tümevarımla $n < m$ bulunur; bundan da $n < Sm$ çıkar. □

Önsav 6.23 sayesinde, doğal sayılarda mutlak eşitsizliği

$$n < m \Leftrightarrow n \in m$$

olarak da tanımlayabilirdik, ama bunu özellikle yapmak istemedik çünkü kümeler kuramından olabildiğince kaçınmak istiyoruz.

6.6 İyisıralama

Geçen altbölümde doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi $\leq$ ilişkisiyle tamsıraladık (Teorem 6.17 ve 6.19): Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,

i. $n \leq n$.
ii. $n \leq m$ ve $m \leq n$ ise $n = m$.
iii. $n \leq m$ ve $m \leq p$ ise $n \leq p$.
iv. Ya $n \leq m$ ya da $m \leq n$ olur.

Ayrıca sıralamanın toplama ve çarpmayla uyum içinde olduğunu biliyoruz (Teorem 6.21 ve 6.22).

v. $n \leq m$ ancak ve ancak $n + p \leq m + p$ ise.
vi. $n \leq m$ ve $0 \neq p$ ancak ve ancak $n \times p \leq m \times p$ ise.

Bu tamsıralamanın önemli bir özelliği daha vardır: Her doğal sayı kümesinin en küçük elemanı vardır, mesela en küçük asal sayı 2'dir, 2020'den büyük en küçük doğal sayı 2021'dir, yeter ki küme boş olmasın. İşte o teorem:

Teorem 6.24. [İyisıralama Teoremi]. *$\mathbb{N}$'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır, yani $\leq$ ilişkisi $\mathbb{N}$'yi iyisıralar.*

Kanıt: $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}$ olsun.

$$M = \{m \in \mathbb{N} : \text{ her } x \in X \text{ için } m \leq x)\}$$

olsun. (Yani M, X'in altsınırları kümesi olsun.) Elbette $0 \in M$. Ayrıca $x \in X$ ise, $Sx \notin M$ çünkü ne de olsa Sx, x'ten küçükeşit değil. Demek ki $M \neq \mathbb{N}$. Dolayısıyla bir $m \in M$ için $Sm \notin M$ olur çünkü aksi hâlde $M = \mathbb{N}$ olurdu. $m \in M$ olduğundan, m, X'in her elemanından küçükeşit. Eğer m, X'te olmasaydı, m, X'in her elemanından mutlak küçük olurdu, yani Sm, X'in her elemanından küçükeşit olurdu (Önsav 6.20.ii). Demek ki $m \in M$, çelişki. Demek ki $m \in X$. □

İkinci Kanıt: Kümeye X diyelim ve X'in en küçük elemanının olmadığını varsayalım. X'in boşküme olduğunu göstereceğiz.

$$A = \{a \in \mathbb{N} : \forall x\ (x < a \Rightarrow x \notin X)\}$$

olsun. Elbette $0 \in \mathbb{N}$. Şimdi A'dan herhangi bir a elemanı alalım. Amacımız Sa elemanının da A'da olduğunu göstermek; böylece $A = \mathbb{N}$ eşitliğini göstermiş olacağız. $x < Sa$ olsun. Önsav 6.20.iii'e göre ya $x < a$ ya da $x = a$. Eğer $x < a$ ise, $a \in A$ olduğundan, $x \notin X$ olur. Eğer $x = a$ ise de $x = a \notin X$ olur, çünkü aksi hâlde a, X'in en küçük elemanı olurdu. Demek ki $A = \mathbb{N}$. Son olarak X'in boşküme olduğunu gösterelim. Eğer $x \in X$ ise, $a = Sx$ olsun. Bu durumda $x < a$ ve $x \in X$ olur. Demek ki $a \notin A$. Çelişki. Böylece $X = \emptyset$ eşitliği kanıtlanmış oldu. □

Sonuç 6.25. *Eğer bir $\varphi(x)$ formülü bir doğal sayısı için yanlışsa, o zaman φ'nin yanlış olduğu en küçük bir doğal sayı vardır.*

Kanıt: Bu sonuç bir önceki teoremin doğrudan bir sonucu. Bunu görmek için, bir önceki teoremde $X = \{n \in \mathbb{N} : \neg\varphi(n)\}$ almak yeterli. □

Notlar ve Örnekler

6.13.

Teorem 6.26. *Her k doğal sayısı ve a doğal sayısı için,*

$$(1 + a + a^2 + \cdots + a^k)(1 - a) = 1 - a^{k+1}$$

olur.

Birinci Kanıt: $S = 1 + a + a^2 + \cdots + a^k$ olsun. Bu sayıyı a ile çarpalım:

$$aS = a(1 + a + a^2 + \cdots + a^k) = a + a^2 + \cdots + a^{k+1}.$$

Şimdi S'yi ve aS'nin bu ifadelerini altalta yazıp

$$\begin{aligned} S &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^k \\ aS &= a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{k+1}, \end{aligned}$$

birbirinden çıkaralım. a, a^2,..., a^k ifadeleri sadeleşir ve geriye sadece 1 ve a^{k+1} kalır:

$$S - aS = 1 - a^{k+1},$$

yani

$$(1 - a)S = 1 - a^{k+1}$$

bulunur. □

İkinci Kanıt: k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $k = 0$ ise

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k = 1$$

olur ve eşitlik bariz. Şimdi eşitliği k için varsayıp $k + 1$ için kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} (1 + a + a^2 + \cdots + a^{k+1})(1 - a) &= [(1 + a + a^2 + \cdots + a^k) + a^{k+1}](1 - a) \\ &= (1 + a + a^2 + \cdots + a^k)(1 - a) + a^{k+1}(1 - a) \\ &= (1 - a^{k+1}) + a^{k+1}(1 - a) \\ &= (1 - a^{k+1}) + (a^{k+1} - a^{k+2}) \\ &= 1 - a^{k+2}. \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Önerme ve kanıtı aslında (henüz tanımlamadığımız) gerçel sayılar ve hatta her halkada geçerli.

6.7 Tümevarımla Kanıt İlkeleri

Bu altbölümün konusu Teorem 5.6'nın uygulama alanını genişletmek ve bunun dışında yeni bir "tümevarımla kanıt ilkesi" kanıtlamak. Artık içinde + ve $\times$ simgeleri olan formülleri de tümevarımla kanıtlayabileceğiz. Ama önce bir "formül"le ne demek istediğimize açıklık getirelim.

$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$, ya da kısaca $\varphi(0, \overline{y}$, matematiğin mantıksal simgeleri olan $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\longrightarrow$, $=$, parantezler ve x, y, z, x_1, y_3 gibi değişkenler dışında sadece 0, S, + ve $\times$ simgeleri kullanılarak yazılmış (anlamlı) bir formül olsun[3]. Ayrıca $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ olsun. $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ formülünde her $i = 1, \ldots, k$ için, y_i yerine a_i koyalım ve elde edilen ifadeyi $\varphi(x, a_1, \ldots, a_k)$ olarak gösterelim. $\varphi(x, a_1, \ldots, a_k)$ formülünde artık $a_1, \ldots, a_k$ "parametreleri" de var. Bundan böyle formüllerimizde parametrelere izin vereceğiz ve bazen parametreleri belirtmeden $\varphi(x, a_1, \ldots, a_k)$ formülünü kısaca $\varphi(x)$ olarak yazacağız. Bu tür formüllere "aritmetiğin formülleri" diyeceğiz.

Teorem 6.27 (Tümevarımla Kanıt İlkesi I)**.** *$\varphi(x)$ bir formül olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur. Bir başka deyişle,*

$$\forall \overline{y}\ [(\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall n\ (\varphi(n, \overline{y}) \to \varphi(Sn, \overline{y}))) \to \forall n\ \varphi(n, \overline{y})]$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

Kanıt: Teorem 5.6'nın özel bir durumu. □

Şimdi ikinci bir "tümevarımla kanıt ilkesi" açıklayacağız.

Sonuç 6.25 (ya da isterseniz Teorem 6.24 ama biz Sonuç 6.25'i tercih ederiz) bize yeni bir kanıt yönteminin kapısını açıyor. Diyelim doğal sayılar hakkında $\forall n\ \varphi(n)$ önermesini kanıtlamak istiyoruz. φ'nin her doğal sayı için doğru olmadığını varsayalım. O zaman Sonuç 6.25'e göre φ'nin doğru olmadığı en küçük bir doğal sayı vardır. Diyelim n, φ'nin doğru olmadığı en küçük doğal sayı. O zaman φ, n'den küçük sayılar için doğrudur ama n için yanlıştır. Bundan bir çelişki elde edilmeye çalışılır. Açıklayalım.

Kanıtlamak istenen önerme, daha önce olduğu gibi sadece n'den küçük tüm doğal sayılar için doğru olduğu varsayılıp, önerme n için kanıtlanır. Eğer bu yapılabilirse, o zaman önerme her n doğal sayısı için doğrudur.

Bu kanıt yöntemi tümevarımla kanıtın bir çeşitlemesidir. Biçimsel olarak bu çeşitlemeyi şöyle ifade ederiz (parantez enflasyonundan dolayı $\varphi(n)$ yerine φn yazdık):

$$[\forall n\, ((\forall i\ (i < n \to \varphi i) \to \varphi n))] \to \forall n\ \varphi n.$$

[3]Dikkat edilirse kümeler kuramına özgü olan $\in$ simgesi listede yok. Amaç kümeler kuramını terkedip aritmetiği geçmek.

Bu formülün ne dediğinin anlaşılması belki biraz zor olabileceğinden şöyle açıklayalım: Her n doğal sayısı için,

$$\forall i\ (i < n \to \varphi(i)) \to \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için

$$\varphi(n)$$

önermesi doğrudur.

Daha popüler (ama pek matematiksel olmayan) bir dille bu çeşitlemeyi şöyle ifade ederiz: Eğer her n doğal sayısı için,

$$(\varphi(0) \wedge \ldots \wedge \varphi(n-1)) \to \varphi(n)$$

önermesi doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için

$$\varphi(n)$$

önermesi doğrudur.

Tümevarımın bu ikinci versiyonunda başlangıç adımına ihtiyaç yoktur, çünkü $n = 0$ ise, 0'den küçük doğal sayı olmadığından, φ önermesi 0'dan küçük her doğal sayı için doğrudur. Dolayısıyla önerme 0 için de doğrudur.

Bu söylediklerimizi not edelim:

Teorem 6.28. [Tümevarımla Kanıt II] $\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$, *matematiğin mantıksal simgeleri dışında sadece* 0, S, $+$ *ve* $\times$ *simgeleri kullanılarak yazılmış bir formül olsun. Ayrıca* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ *olsun. Simge sayısından tasarruf etmek için* $y_1, \ldots, y_k$ *yerine* $\overline{y}$ *ve* $a_1, \ldots, a_k$ *yerine* $\overline{a}$ *yazalım.*

Eğer her n doğal sayısı ve n'den küçük her i doğal sayısı için $\varphi(i, \overline{a})$ *doğrulandığında* $\varphi(n, \overline{a})$ *da doğrulanıyorsa, o zaman her n doğal sayısı için* $\varphi(n, \overline{a})$ *doğrudur. Bir başka deyişle, eğer her* $n \in \mathbb{N}$ *için,*

$$(\forall i\, (i < n \to \varphi(i, \overline{a}))) \to \varphi(n, \overline{a})$$

önermesi doğruysa, o zaman her

$$\forall n\ \varphi(n, \overline{a})$$

formülü doğrudur. Daha anlaşılmaz bir biçimde söylemek gerekirse,

$$\forall \overline{y}\ [\forall n\ [\forall i\, (i < n \to \varphi(i, \overline{y})) \to \varphi(n, \overline{y})] \to \forall n\ \varphi(n, \overline{y})]$$

formülü doğrudur.

Buna bazen "güçlü tümevarım yöntemi" denir.

Tümevarımla kanıtın bu versiyonunu kullanarak doğal sayılarda kalanlı bölme işleminin (örneğin $23 = 7 \times 3 + 2$) yapılabileceğini kanıtlayalım.

Teorem 6.29. [Doğal Sayılarda Kalanlı Bölme] *n ve m iki doğal sayı olsun, ama $m \neq 0$ olsun. O zaman öyle bir ve bir tane q ve r doğal sayı çifti vardır ki, $n = mq + r$ ve $r < m$ olur.*

Kanıt: Önce q ve r doğal sayılarının varlığını kanıtlayalım. Bunu n üzerine tümevarımla (ama tümevarımla kanıt yönteminin ikinci versiyonuyla) kanıtlayacağız. Eğer $n < m$ ise $q = 0$ ve $r = n$ alabiliriz. Şimdi $n \geq m$ olsun ve teoremin n'den küçük sayılar için doğru olduğunu varsayalım. p doğal sayısı $m + p = n$ eşitliğini sağlasın. $p < n$ olduğundan, teorem p için doğru. Demek ki bir q_0 ve $r_0 < m$ doğal sayı çifti için $p = mq_0 + r_0$ eşitliği doğru.

$$n = m + p = m + mq_0 + r_0 = m(q_0 + 1) + r_0.$$

olur. $q = q_0 + 1$ ve $r = r_0$ olsun.

$$n = m(q_0 + 1) + r_0 = mq + r$$

ve

$$r = r_0 < m$$

olur. q ve r'nin varlığını böylece n için de kanıtlamış olduk.

Şimdi q ve r'nin biricikliğini kanıtlayalım. Diyelim

$$mq + r = mq_0 + r_0 \text{ ve } r, r_0 < m.$$

$q = q_0$ ve $r = r_0$ eşitliklerini kanıtlayacağız. $q = q_0$ eşitliğini kanıtlamak yeterli (Teorem 6.7). Diyelim $q < q_0$. O zaman bir $q_1 \geq 1$ için $q + q_1 = q_0$ olur. Demek ki,

$$mq + r = mq_0 + r_0 = m(q + q_1) + r_0 = mq + mq_1 + r_0$$

ve dolayısıyla

$$r = mq_1 + r_0$$

olur. Ama $1 \leq q_1$ eşitsizliğinden,

$$m \leq mq_1 \leq mq_1 + r_0 = r < m$$

çıkar, ki bariz bir çelişkidir. Demek ki $q = q_0$. Buradan da $r = r_0$ çıkar. □

7. Tümevarımla Tanım

7.1 Tümevarımla Tanım

Toplamayla çarpma fonksiyonlarının varlığının kanıtlandığı Teorem 6.1 ve 6.8'i genelleştireceğiz.

Hepimiz biliyoruz ki, $x+y$ sayısı x'e y defa 1 ekleyerek, yani x'e y defa S fonksiyonu uygulanarak elde edilmiştir.

Aynı şekilde xy sayısı, x'in kendisiyle y defa toplanmasıyla elde edilir.

İşte bu bölümde "aynı işlemi bir sayıya defalarca uygulama"nın ne demek olduğunu göreceğiz. Örneğin, x'i kendisiyle y defa çarparak x^y elde ederiz.

X ve Y iki doğal sayı kümesi olsun. Teorem, eğer

$$\psi : X \to Y \text{ ve } \varphi : X \times Y \to Y$$

iki fonksiyonsa, her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= \psi(x)\\
f(x,1) &= \varphi(x,\psi(x))\\
f(x,2) &= \varphi(x,\varphi(x,\psi(x)))\\
f(x,3) &= \varphi(x,\varphi(x,\varphi(x,\psi(x))))
\end{aligned}$$

gibi eşitlikleri sağlayan bir $f : X \times \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu olduğunu söyleyecek ve bu teorem sayesinde fonksiyonlarımızı tümevarımla tanımlayabileceğiz.

Teorem 7.1. [Tümevarımla Tanım Teoremi] *X ve Y birer küme olsun.*

$$\psi : X \to Y \text{ ve } \varphi : X \times Y \to Y$$

iki fonksiyon olsun. O zaman her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= \psi(x),\\
f(x,Sn) &= \varphi(x,f(x,n))
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan bir ve bir tek

$$f : X \times \mathbb{N} \to Y$$

fonksiyonu vardır.

Kanıta başlamadan önce teoremin toplamayı ve çarpmayı nasıl tanımladığını ve bir başka uygulamasını daha görelim.

Toplama. Teoremde $X = Y = \mathbb{N}$, $\psi = \mathrm{I}_X$ (özdeşlik fonksiyonu) ve $\varphi = S \circ \mathrm{pr}_2$, yani $\varphi(x,n) = Sn$ olarak alalım. O zaman elde edilen fonksiyon,

$$f(x,0) = x,$$
$$f(x,Sn) = \varphi(x, f(x,n)) = S(f(x,n))$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen toplamanın sağlaması gerektiği eşitliklerdir. Şimdi teorem sayesinde $x + y = f(x,y)$ tanımını yapabiliriz.

Çarpma. Teoremde $X = Y = \mathbb{N}$, $\psi = s_0$ (sabit 0 fonksiyonu) ve φ'yi yukarıda varlığı (bir kez daha) kanıtlanan toplama fonksiyonu olarak alalım, yani $\varphi(x,n) = n + x$ olarak alalım. (Özellikle $x + n$ yerine $n + x$ yazdık.) O zaman elde edilen fonksiyon,

$$f(x,0) = 0,$$
$$f(x,Sn) = \varphi(x, f(x,n)) = f(x,n) + x$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen çarpmanın sağlaması gerektiği eşitliklerdir. Şimdi teorem sayesinde $xy = f(x,y)$ tanımını yapabiliriz.

Kuvvet Alma. n ve m iki doğal sayıysa, n^m sayısı okullarda m tane n'nin çarpımı olarak tanımlanır genellikle:

$$n^m = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m \text{ tane}}.$$

Bu tanıma $n^0 = 1$ de eklenmelidir, çünkü sıfır tane n'yi çarpmak anlamsızdır[1]. Ama tabii n^m ifadesinin bu tanımı falsoludur çünkü "m tane" ifadesini simgeleyen matematiksel bir simge yok elimizde. Zaten bu bölümün amacı da "bir işlemi bir sayıya m defa uygulama"nın matematiksel olarak mümkün olduğunu göstermek. Daha doğru bir tanım şöyledir:

$$n^0 = 1 \text{ ve her } m \in \mathbb{N} \text{ için } n^{m+1} = n \times n^m.$$

Ama bunun da niye gerçek bir tanım olduğu kuşkulu çünkü bu tanımdan hareketle her x ve y doğal sayısı için x^y sayısının tanımlandığını anlamak mümkün değil (bu tür sorunlardan geçmişte uzun uzadıya bahsetmiştik). n^m sayısını yukarıdaki teoremi kullanarak tanımlayabiliriz. $X = Y = \mathbb{N}$ olsun. $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sabit 1 fonksiyonu olsun, yani her $x \in \mathbb{N}$ için $\psi(x) = 1$ olsun. φ :

[1] Bu kitapta $0^0 = 1$ olarak tanımlanacak. Ama bazı durumlarda 0^0 ifadesini tanımsız bırakmak gerekir.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu da çarpma olsun, yani her x, $y \in \mathbb{N}$ için $\varphi(x, y) = xy$ olsun. Teoremi bu fonksiyonlara uygularsak, elde edilen fonksiyon,

$$f(x, 0) = 1,$$
$$f(x, Sn) = \varphi(x, f(x, n)) = xf(x, n)$$

eşitliklerini sağlar; bunlar da aynen kuvvet almanın sağlaması gerektiği eşitliklerdir. Şimdi $x^n = f(x, n)$ tanımını yapabiliriz.

Tümevarımla Tanım Teoremi'nin Kanıtı: Her $x \in X$, $y \in Y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $(X \times \mathbb{N}) \times Y$ kartezyen çarpımının,

$$(x, 0, \psi(x)) \in G \tag{1}$$

ve

$$(x, n, y) \in G \rightarrow (x, Sn, \varphi(x, y)) \in G \tag{2}$$

koşullarını sağlayan bir G altkümesine bu kanıtlık "güzel küme" diyelim. En az bir güzel küme vardır: $(X \times \mathbb{N}) \times Y$. Güzel kümelerin kesişiminin gene güzel bir küme olduğunu kanıtlamak zor değildir. Tüm güzel kümelerin kesişimine G diyelim. G en küçük güzel kümedir, yani tüm güzel kümelerin altkümesidir. Şimdi G'nin bir grafik olduğunu, dolayısıyla $X \times \mathbb{N}$'den Y'ye giden bir fonksiyon tanımladığını kanıtlayacağız. G'nin tanımladığı bu fonksiyona f dersek, f elbette teoremde istenen eşitsizlikleri sağlar. Ayrıca, f'nin biricikliği de bariz olur: g teoremde söylendiği gibi bir fonksiyonsa, g'nin grafiği, diyelim G', güzel bir küme olur, dolayısıyla G'yi içerir ama iki grafik ancak eşitlerse biri diğerini içerebilir.

Her $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$ için

$$(x, n, y) \in G$$

koşulunu sağlayan bir $y \in Y$ olduğunun kanıtı n üzerine tümevarımla kolay. Verilmiş $(x_0, n_0) \in X \times \mathbb{N}$ için, yukarıdaki $(x_0, n_0, y_0) \in G$ koşulunu sağlayan $y_0 \in Y$ elemanının biricikliğini kanıtlayalım. Bunu da n_0 üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Başlangıç Adımı. $n_0 = 0$ varsayımını yapalım.

$$(x_0, 0, \psi(x_0)) \in G$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca bir $y_0 \neq \psi(x_0)$ için,

$$(x_0, 0, y_0) \in G$$

eşitliğini varsayalım. $G' = G \setminus \{(x_0, 0, y_0)\}$ olsun. G' kümesinin de güzel bir küme olduğunu kanıtlayarak bir çelişki elde edeceğiz.

Önce, yukarıda (1) olarak işaretlediğimiz birinci koşulla başa çıkalım. $x \in X$ olsun.

$$(x, 0, \psi(x)) \in G$$

içindeliğini biliyoruz. Ama $(x, 0, \psi(x))$ üçlüsü $(x_0, 0, y_0)$ üçlüsüne eşit olamaz yoksa $x = x_0$ ve $\psi(x) = y_0$ olur ve varsayımımızla çelişen $\psi(x_0) = \psi(x) = y_0$ eşitliğini elde ederiz. Demek ki $(x_0, 0, \psi(x_0)) \in G'$. İkinci koşulla başa çıkalım: $(x, n, y) \in G'$ olsun. Demek ki $(x, n, y) \in G$. Dolayısıyla $(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G$. Ama $(x, Sn, \varphi(x, y))$ üçlüsü $(x_0, 0, y_0)$ üçlüsüne eşit olamaz yoksa $Sn = 0$ olurdu. Demek ki $(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G'$.

Tümevarım Adımı. $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı,

"her $x \in X$ için $(x, n_0, y) \in G$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane $y \in Y$ vardır"

özelliğini sağlasın. Aynı özelliği Sn_0 için gösterelim. $x_0 \in X$ rastgele bir doğal sayı olsun. Tümevarım varsayımına göre, bir ve bir tek $y_0 \in Y$ için

$$(x_0, n_0, y_0) \in G$$

olur. Demek ki,

$$(x_0, Sn_0, \varphi(x_0, y_0)) \in G.$$

Diyelim $\varphi(x_0, y_0)$ sayısına eşit olmayan bir $y_1 \in Y$ için

$$(x_0, Sn_0, y_1) \in G$$

oluyor. Şimdi G' kümesini şöyle tanımlayalım:

$$G' = G \setminus \{(x_0, Sn_0, y_1)\}.$$

G' kümesinin güzel olduğunu kanıtlayarak G'nin en küçük güzel küme olmasıyla çelişeceğiz. Önce birinci koşulun sağlandığını gösterelim. Her $x \in X$,

$$(x, 0, \psi(x)) \in G$$

olduğundan, ve $(x, 0, \psi(x)) \neq (x_0, Sn_0, y_1)$ olduğundan (çünkü $Sn_0 \neq 0$), $(x, 0, \psi(x)) \in G'$ olur.

Gelelim ikinci koşula. $x \in X$, $y \in Y$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(x, n, y) \in G'$$

koşulunun sağlandığını varsayalım. $G' \subseteq G$ olduğundan

$$(x, n, y) \in G$$

ve dolayısıyla

$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G$$

olur. Eğer
$$(x, Sn, \varphi(x, y)) = (x_0, Sn_0, y_1)$$
olsaydı,
$$\begin{aligned} &x = x_0,\\ &Sn = Sn_0,\\ &\varphi(x, y) = y_1 \end{aligned}$$
olurdu. Demek ki
$$n = n_0.$$
Bunlardan,
$$(x_0, n_0, y) = (x, n, y) \in G$$
çıkar. Ama aynı zamanda
$$(x_0, n_0, y_0) \in G.$$
Demek ki, tümevarım varsayımına göre,
$$y = y_0.$$
Buradan
$$\varphi(x_0, y_0) = \varphi(x, y) = y_1$$
buluruz. Çelişki. Demek ki
$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \neq (x_0, Sn_0, y_1)$$
Yani
$$(x, Sn, \varphi(x, y)) \in G \setminus \{(x_0, Sn_0, y_1)\} = G'.$$
Böylece G' kümesinin güzel olduğunu kanıtladık. Bu da elde etmek istediğimiz nihai çelişkidir. □

Bu teoremin önemli bir sonucu vardır: Eğer $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $f^n(x_0)$ değerini alan bir $h : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu vardır:

Sonuç 7.2. *X bir küme, $f : X \to X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ bir eleman olsun. O zaman,*
$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots\}$$
topluluğu, daha doğrusu
$$\{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$$
topluluğu bir kümedir. Daha doğru bir ifadeyle, öyle bir ve bir tane $h : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu vardır ki, $h(0) = x_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $h(Sn) = f(h(n))$ olur.

Kanıt: Bu sonucun standart kanıtı, X'in x_0'ı içeren ve f altında kapalı tüm altkümelerinin kesişimini almaktır (X, bu tür altkümelerden biridir), yani aslında Teorem 7.1'in kanıtını bu duruma uyarlamaktır. Biz doğrudan Teorem 7.1'den yararlanacağız.

$\psi : X \to X$ fonksiyonu, her $x \in X$ için

$$\psi(x) = x_0$$

olarak tanımlansın, yani sabit x_0 fonksiyonu olsun.

$\varphi : X \times X \to X$ fonksiyonu da

$$\varphi(x, y) = f(y)$$

olarak tanımlansın. Teorem 7.1'e göre,

$$g(x, 0) = \psi(x) = x_0,$$
$$g(x, Sn) = \varphi(x, g(x, n)) = f(g(x, n))$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$g : X \times \mathbb{N} \to X$$

fonksiyonu vardır. Kanıt için gerekmez ama, n üzerine tümevarımla, $g(x, n)$ değerinin x'ten bağımsız olduğu kanıtlanabilir.

$$u : \mathbb{N} \to X \times \mathbb{N}$$

fonksiyonu

$$u(n) = (x_0, n)$$

kuralıyla tanımlansın.

$$h = g \circ u : \mathbb{N} \to X$$

olsun. O zaman,

$$h(0) = (g \circ u)(0) = g(u(0)) = g(x_0, 0) = x_0,$$

ve

$$\begin{aligned} h(Sn) &= (g \circ u)(Sn) = g(u(Sn)) = g(x_0, Sn) \\ &= f(g(x_0, n)) = f(g(u(n))) = f((g \circ u)(n)) = f(h(n)) \end{aligned}$$

olur. $h(\mathbb{N})$, varlığı kanıtlanmak istenen kümedir. $\square$

Alıştırmalar

7.1. $x \in \mathbb{N}$ olsun.
$$\{1, x, x^2, x^4, x^8, \dots\}$$
daha doğru bir ifadeyle
$$\{x^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$$
topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın.

7.2. $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın.

7.3. $x \in \mathbb{N}$ olsun. $x_0 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x^{x_n}$ "tanım"larını yapalım. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın.

7.4. X bir doğal sayı kümesi, $a \in X$, ve $\psi : X \to X$ bir fonksiyon olsun.
$$f(0) = a$$
ve her $n \in \mathbb{N}$ için
$$f(Sn) = \psi(f(n))$$
eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayın.

7.5. X bir küme ve $\alpha : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Yukarıdaki alıştırmadan yararlanarak,
$$f(n) = \alpha^n = \alpha \circ \cdots \circ \alpha \;\; (n \text{ defa})$$
eşitliğini sağlayan bir
$$f : \mathbb{N} \to \mathrm{Fonk}(X, X)$$
fonksiyonun varlığını kanıtlayın. ($\alpha^0 = \mathrm{I}_X$ olarak tanımlanmıştır.) Bundan
$$\{\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$$
ve her $x \in X$ için,
$$\{\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$
topluluklarının küme olduklarını çıkarsayın.

7.6. $f(n) = n!$ kuralının $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon tanımladığını kanıtlayın.

7.2 Bir Uygulama: Doğal Sayıların Biricikliği

Önceki bölümlerde aşağıdaki P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ üçlüsünün varlığını kanıtladık.

P1. $0 \in \mathbb{N}$ *ve* $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *birebir bir fonksiyondur ve her* $x \in \mathbb{N}$ *için* $Sx \neq 0$ *olur.*

P2. *Eğer* $A \subseteq \mathbb{N}$ *altkümesi* 0*'ı içeriyorsa ve içerdiği her* n *için* Sn*'yi de içeriyorsa o zaman* $A = \mathbb{N}$ *olur.*

Şimdi soru şu: Bu özellikleri sağlayan kaç tane $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı (ya da üçlüsü) vardır?

Bir sürü bulunabilir tabii. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ sayısı yerine $(n, 0)$ yazabiliriz, daha matematiksel bir dilde anlatalım:

$\mathbb{N}$ yerine $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \times \{0\}$ alınabilir,
0 yerine $0' = (0, 0)$ alınabilir ve
$S' : \mathbb{N}' \longrightarrow \mathbb{N}'$ fonksiyonu $S'(n, 0) = (Sn, 0)$ kuralıyla tanımlanabilir.

O zaman $(\mathbb{N}', S', 0')$ üçlüsü de P1 ve P2 özelliklerini sağlar. Ama $(\mathbb{N}, S, 0)$ ile $(\mathbb{N}', S', 0')$ birbirlerine o kadar benzerler ki, bunları "gerçekten" iki ayrı yapı olarak kabul etmek istemeyiz. Sanki biri Türkçe, diğeri İngilizce, birinde sıfır dediğimiz elemana diğerinde "zero" diyoruz, birinde ardılı diyoruz, diğerinde "successor". Yani bir sözlükle birinden diğerine geçiş yapabiliriz. Bu bölümde P1 ve P2 özelliklerini sağlayan bir $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısının "özünde" biricik olduğunu kanıtlayacağız, yani bu iki özelliği sağlayan tüm yapılar birbirlerine çok benzerler, birini anlarsak diğer hepsini anlamış oluruz.

$\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}'$ birer küme, $0 \in \mathbb{N}$, $0' \in \mathbb{N}'$ ve $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ve $S' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$ birer fonksiyon olsun. Eğer

$$f(0) = 0'$$

ve her $x \in \mathbb{N}$ için

$$f(Sx) = S'(f(x))$$

eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ eşlemesi varsa, $(\mathbb{N}, 0, S)$ ve $(\mathbb{N}', 0', S')$ üçlülerine ***eşyapısal*** ya da ***izomorf*** denir. f eşlemesine de ***eşyapısallık*** ya da ***izomorfi*** adı verilir.

İzomorfi, tabiri caizse, ki caizdir, iki yapı arasında bir sözlüktür. Diyelim biz $(\mathbb{N}', 0', S')$ yapısına aşinayız. Bir de elimizde f var. Tabii f'nin ters fonksiyonu olan f^{-1} de var. (Yani, yukarıdaki metaforla, hem Türkçe-İngilizce, hem de İngilizce-Türkçe sözlük var.) Ve diyelim karşı taraf bize, $a \in \mathbb{N}$ için $S(a)$'nın kaç olduğunu sordu. Sözlük yardımıyla bunu anladığımız dile, yani $S'(f(a))$'ya çeviririz. f'yi ve S' fonksiyonlarını bildiğimiz için bu çeviri işinde bir zorluk yaşamayız. Ardından cevap olarak $f^{-1}(S'(f(a)))$'yı veririz. Bu gerçekten de doğru cevaptır, çünkü

$$S(a) = f^{-1}(S'(f(a)))$$

olur.

Teoremin kanıtının anafikri oldukça basit: $\mathbb{N}$'nin 0 elemanını $0'$ elemanına götürmek zorundayız ve eğer $n \in \mathbb{N}$ elemanı $n' \in \mathbb{N}'$ elemanına gitmişse, Sn elemanı $S'(n')$ elemanına gitmek zorunda. **Marifet, bunu gerçekleştiren bir fonksiyon bulmakta yatıyor.**

Teorem 7.3 (Dedekind)**.** *$(\mathbb{N}, 0, S)$ ve $(\mathbb{N}', 0', S')$ üçlüleri* P1 *ve* P2 *özelliklerini sağlasın*[2]*. O zaman $(\mathbb{N}, 0, S)$ ve $(\mathbb{N}', 0', S')$ üçlüleri eşyapısaldırlar ve birinden diğerine giden tek bir eşyapı eşlemesi vardır.*

Kanıt: Teorem 7.1'de $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}'$, $\psi = s_{0'}$ (sabit $0'$ fonksiyonu) ve $\varphi(x, y) = S'y$ alalım. φ'nin değerinin birinci koordinattan bağımsız olduğuna dikkatinizi çekerim. f, anılan teoremde bulunan fonksiyon olsun:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$$

[2]İkincisi muadil özellikleri sağlayacak elbette: P1 ve P2'de $\mathbb{N}$, 0 ve S simgelerine $'$ işaretini ekleyin.

ve

$$\begin{aligned} f(x,0) &= \psi(x) = 0', \\ f(x,Sn) &= \varphi(x, f(x,n)) = S'(f(x,n)) \end{aligned}$$

olur. f'nin değerinin birinci koordinattan bağımsız olduğu n üzerine tümevarımla gösterilebilir. Dolayısıyla f'yi ikinci koordinatın fonksiyonu olarak görebiliriz. Böylece bulunan

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$$

fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} f(0) &= 0', \\ f(Sn) &= S'(f(n)) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar. Böylece istenen eşitlik kanıtlanmış oldu.

Şimdi f'nin birebir ve örten olduğunu kanıtlayalım.

0'dan başka $0'$ değerini alan $\mathbb{N}$'nin bir başka elemanı daha olmadığını anlamak oldukça kolay: Eğer $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, bir $m \in \mathbb{N}$ için $n = Sm$ olur ve o zaman da

$$f(n) = f(Sm) = S'(f(m)) \neq 0'$$

olur.

Eğer $m \in \mathbb{N}'$ (tümevarım varsayımından dolayı) tek bir $n \in \mathbb{N}$ tarafından vuruluyorsa, o zaman $S'm$'nin de Sn tarafından vurulduğunu kanıtlamak zor değil:

$$f(Sn) = S'(f(n)) = S'm.$$

Demek ki f örten bir fonksiyon. Eğer ayrıca

$$f(p) = S'm$$

ise, bir önceki paragrafa göre, $p = 0$ olamaz ve bir $q \in \mathbb{N}$ için $p = Sq$ olur. Dolayısıyla

$$S'(m) = f(p) = f(Sq) = S'(f(q))$$

olur ve P1'den dolayı $m = f(q)$, yani $f(n) = f(q)$ bulunur. Tümevarım varsayımından $n = q$ çıkar. Demek ki f birebir bir fonksiyon.

Şimdi f'den başka bir eşyapı eşlemesi olmadığını kanıtlayalım. Diyelim g de böyle bir eşyapı eşlemesi. O zaman $g^{-1} \circ f$ bileşkesi $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir eşyapı eşleşmesi olur. Demek ki $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir eşyapı eşleşmesinin $\mathrm{I}_{\mathbb{N}}$ olduğunu kanıtlamalıyız. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bir eşyapı eşleşmesi olsun. $h(n) = n$ eşitliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

$h(0)$'ın 0 olması gerektiğini yukarda gördük. ($\mathbb{N}'$ yerine $\mathbb{N}$ alın.) Ayrıca $h(n) = n$ ise $h(Sn) = S(h(n)) = S(n)$ olur. n üzerine tümevarım istediğimiz kolayca verir. $\square$

Notlar

7.7. (Arife not) Dikkat ederseniz P1 elemanlardan bahsediyor ama P2 altkümelerden bahsediyor. Yukarıdaki teorem, P1 ve

P'2. (Teorem 5.6.) *$\varphi(x)$, x doğal sayısıyla ilgili bir önerme olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\phi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n)$ doğrudur.*

önermelerini sağlayan $(\mathbb{N}, S, 0)$ yapısı için yanlıştır. Nitekim (model teorinin en temel teoremlerinden biri olan) Lowenheim-Skolem Teoremi (altkümelerden değil) elemanlardan bahseden her tutarlı teorinin her kardinalitede bir modeli olduğunu söyler.

7.8. (Arife not) Burada kanıtlanan teorem, kümeler kuramının her modelinde[3] doğrudur (tabii), yani kümeler kuramının hangi modelini alırsak alalım, o modeldeki doğal sayılar yapısı özünde biriciktir. Farklı modellerin doğal sayılar yapısı birbirinden farklı olabilir ama.

[3] Kümeler kuramının bir modeli, kümeler kuramının aksiyomlarının doğru olduğu bir yapıdır.

8. Peano Aritmetiği

8.1 Peano Aritmetiği

Geçen bölümlerde $(\mathbb{N}, S, 0, +, \times)$ "matematiksel yapısını" tanımladık. Burada,

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \text{ bir kümedir,} \\ 0 \in \mathbb{N} \text{ bir elemandır,} \\ S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ bir fonksiyondur,} \\ + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ bir fonksiyondur} \\ \times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ bir fonksiyondur.} \end{array}$$

Bu yapı hakkında birçok sonuç kanıtladık. Kanıtladığımız şu sonuçlara özellikle dikkat çekmek istiyoruz:

PA1. (Önsav 5.7) *S fonksiyonu 0 değerini almaz.*

PA2. (Teorem 5.8) *S fonksiyonu birebirdir.*

PA3. (Teorem 6.28) *$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ formülü, S, 0, $+$, $\times$ ve mantıksal simgeler[1] kullanılarak yazılmış bir cümle olsun. Ayrıca $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ olsun. Simge sayısından tasarruf etmek için $y_1, \ldots, y_k$ yerine $\overline{y}$ ve $a_1, \ldots, a_k$ yerine $\overline{a}$ yazalım. Eğer $\varphi(0, \overline{a})$ doğruysa ve her n doğal sayısı için, $\varphi(n, \overline{a})$ doğru olduğunda $\varphi(Sn, \overline{a})$ de doğruysa, o zaman her n doğal sayısı için $\varphi(n, \overline{a})$ doğrudur[2]. Bir başka deyişle,*

$$\forall \overline{y}\ [(\varphi(0, \overline{y}) \wedge \forall n\ (\varphi(n, \overline{y}) \rightarrow \varphi(Sn, \overline{y}))) \rightarrow \forall n\ \varphi(n, \overline{y})]$$

önermesi $\mathbb{N}$'de doğrudur.

PA4. (Teorem 6.1) *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n + 0 = n$ ve $n + Sm = S(n + m)$ olur.*

PA5. (Teorem 6.8) *Her n, $m \in \mathbb{N}$ için, $n \times 0 = 0$ ve $n \times Sm = (n \times m) + n$ olur.*

[1] Matematiğin mantıksal simgeleri $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $=$, parantezler ve değişkenlerdir.

[2] Buradaki $\overline{a}$ sayılarına formülün parametreleri adı verilir.

Bir teori, aksiyom adı verilen önermelerden oluşur. Yukarıdaki PA1, PA2, PA3, PA4 ve PA5 de bir teori oluşturur. Adına ***Peano Aritmetiği***, kısava PA denir. Ama dikkat, PA3, tek bir aksiyom değildir, her φ formülü için ayrı bir aksiyomdur. Burada amaç, kümeler kuramından kurtulup, aritmetiği aritmetiğin kendi dilinde (toplamayla ve çarpmayla) ifade etmektir. Böylece aritmetikle uğraşan biri kümeler kuramıyla uğraşmak zorunda kalmaz... Amaç, aritmetikçiyi kümeler kuramından arındırıp sadece aritmetiği ilgilendiren önermelerle haşır neşir olmasını sağlamaktır.

Notlar

8.1. Peano aksiyomlarının doğal sayıların, yani aritmetiğin özünü oluşturduğu düşünülür ama bu doğru değildir. Nitekim Gödel'in 1931'de kanıtladığı Eksiklik Teoremi'nden beri, kümeler kuramının aritmetikten (Peano Aritmetiğinden mesela) daha güçlü olduğu biliniyordu, örneğin kümeler kuramı sayesinde aritmetiğin tutarlı olduğu (yani aritmetiğin aksiyomlarından bir çelişki çıkmayacağı) kanıtlanabilir[3], ama aritmetik kendi kendisinin tutarlı olduğunu kanıtlayamaz. Bir sonraki notta bu konuya devam edeceğiz.

8.2. Jeff Paris ve Leo Harrington, 1977 yılında kümeler kuramında kanıtlanabilen ama Peano aritmetiğinde kanıtlanamayan ve bir önceki notta sözü edilen önermeden çok daha aritmetiksel (ve doğal) bir görünümü olan bir önerme bulmuşlardır. **Güçlendirilmiş Sonlu Ramsey Teoremi** adı verilen öner me şöyle: *Her n, k, $m > 0$ doğal sayıları için, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, eğer $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ ise, S'nin n elemanlı altkümelerini 1'den k'ya kadar numaralandırılmış boyalarla nasıl boyarsak boyayalım, o zaman S'nin en az m elemanlı öyle bir Y altkümesi vardır ki, Y'nin n elemanlı altkümelerinin hepsi aynı renge boyanmıştır, ayrıca Y'nin eleman sayısı Y'nin en küçük elemanından daha küçük değildir.* Paris ve Harrington, bu önermenin doğruluğunun aritmetiğin tutarlı olduğunu kanıtlayacağını göstererek (bir önceki notta sözü edilen Gödel'in teoreminden dolayı) Peano aritmetiğinin bu önermeyi kanıtlayamayacağını göstermişlerdir.

8.3. Toplamanın S'den hareketle ve çarpmanın S'den ve toplamadan hareketle (kümeler kuramı, yani $\in$ simgesi kullanmadan) tanımlanamayacağı biliniyor. Öte yandan üs almak ve faktoriyel gibi aritmetiğin ilgi alanına giren fonksiyonlar toplama ve çarpmadan hareketle tanımlanabilir. Aritmetiğin ilgi alanına giren tüm fonksiyonların toplama ve çarpmadan hareketle tanımlanabileceği inancı yaygındır.

Geçmişte Bölüm 6.6'ya kadar kanıtladığımız birçok sonuç PA aksiyom sisteminde de kanıtlanabilir. İşte bu sonuçların bir listesi:

Teorem 8.1. *Her n, m, $p \in \mathbb{N}$ için,*
 i. *Eğer $n \neq 0$ ise, $Sx = n$ eşitliğini sağlayan bir x vardır.*
 ii. [Değişme Özelliği]. $n + m = m + n$.
 iii. [Birleşme Özelliği]. $(n + m) + p = n + (m + p)$.
 iv. [Sadeleşme]. *Eğer $n + m = n + p$ ise $m = p$ olur.*
 v. [Etkisiz Eleman]. $1 \times m = m = m \times 1$.
 vi. [Değişme Özelliği]. $n \times m = m \times n$.
 vii. [Birleşme Özelliği]. $(n \times m) \times p = m \times (n \times p)$.

[3]Aslında önceki sayfalarda yaptığımız tam da buydu: Aritmetiğin bir modelini kümeler kuramından hareketle inşa ettik.

viii. [Dağılma Özelliği]. *$n \times (m+p) = n \times m + n \times p$.*

ix. [Sıfırçarpansızlık]. *$nm = 0$ ise ya n ya da $m = 0$ olur.*

x. [Sıralama]. *"$x \le y \Leftrightarrow \exists z\ x + z^2 = x$" formülüyle tanımlanmış $\le$ ikili ilişkisi bir tamsıralamadır, yani*

x.i. *$n \le n$.*

x.ii. *$n \le m$ ve $m \le n$ ise $n = m$.*

x.iii. *$n \le m$ ve $m \le p$ ise $n \le p$.*

x.iv. *Ya $n \le m$ ya da $m \le n$ olur .*

xi. *$n < m$ ancak ve ancak $n + p < m + p$ ise.*

xii. *Eğer $n < m$ ve $0 < p$ ise, o zaman $n \times p < m \times p$.*

xiii *n ile Sn arasında bir doğal sayı yoktur.*

xiv. *$\varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ formülü, S, 0, $+$, $\times$ ve mantıksal simgeler kullanılarak yazılmış bir cümle olsun. Ayrıca $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ olsun. Simge sayısından tasarruf etmek için $y_1, \ldots, y_k$ yerine $\overline{y}$ ve $a_1, \ldots, a_k$ yerine $\overline{a}$ yazalım. $\varphi(x, \overline{a})$ cümlesi bir doğal sayı için yanlışsa (ya da doğruysa), o zaman $\varphi(x, \overline{a})$ formülünün yanlış (ya da doğru) olduğu en küçük bir doğal sayı vardır.*

xv. *$\varphi(x, \overline{y})$ ve $\overline{a}$ yukarıdaki gibi olsun. Eğer her x için*

$$\forall y\ (y < x \longrightarrow \varphi(y, \overline{a})) \longrightarrow \varphi(x, \overline{a})$$

formülü doğruysa, o zaman

$$\forall x\ \varphi(x, \overline{a})$$

formülü doğrudur.

Kanıt: Sadece xiv numarayı kanıtlayıp, diğerlerini okura alıştırma olarak bırakacağız. $\varphi(x, \overline{a})$ yerine kısaca $\varphi(x)$ yazalım. Diyelim $\varphi(x)$ formülünün yanlış olduğu en küçük doğal sayı yok. Bu durumda $\varphi(x)$ formülünün her x için doğru olduğunu kanıtlayacağız.

$\psi(x)$ formülünü şöyle tanımlayalım:

$$\forall y\ (y < x \longrightarrow \varphi(y)).$$

Bu formülü x üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $\psi(0)$ elbette doğru, ne de olsa 0'dan küçük doğal sayı yok. Şimdi $\psi(x)$'in doğru olduğunu varsayıp $\psi(Sx)$ formülünün doğru olduğunu kanıtlayalım. Eğer Sx'ten küçük bir y doğal sayısı için $\varphi(y)$ yanlış olsaydı, bu y doğal sayısı tümevarım varsayımından dolayı x'ten küçük olamazdı, demek ki (xiii)'e göre x'e eşit olmak zorunda olurdu, ama o zaman da x, φ formülünün yanlış olduğu en küçük doğal sayı olurdu, çelişki. Demek ki $\psi(x)$ formülü her x doğal sayısı için doğru.

Şimdi teoremimizin kanıtını bitirelim: Diyelim φ formülü bir n doğal sayısı için yanlış. $x = n + 1$ olsun. O zaman $\psi(x)$ yanlış olur. Çelişki. $\square$

8.2 Üs Alma ve Diğer Fonksiyonlar

Yukarıdaki teoremlere bakacak olursak, PA'nın toplamanın ve çarpanın özünü barındırdığına aşağı yukarı emin olabiliriz. Peki ya üs alma ya da faktoriyel fonksiyonları? Bu fonksiyonlar PA2'de tanımlanabilirler mi?

Örneğin toplama ve çarpmayı kullanarak, iki sayının ebob ve ekok'unu tanımlamak zor değil, hatta 1'den n'ye kadar olan sayıların ekok'unu bile tanımlamak mümkün. Okur bunu bu aşamada bir çırpıda yapabilir. Ama mesela $n!$ ya da n^m fonksiyonunu tanımlamak mümkün mü?

Bölüm 7'de $n!$ ve n^m fonksiyonlarının **kümeler kuramında** tanımlandığını gördük, ama acaba toplama ve çarpmayla (yani Peano Aritmetiği'nde) tanımlanabilir mi?

Toplamanın 0 ve S simgelerini ve PA1 ve PA2 aksiyomlarını kullanarak tanımlanamadığını söyledik ve bu sorunu gidermek için dilimize, 0 ve S dışında $+$ diye bir fonksiyon simgesi ekledik ve buna ilaveten bir de PA3 aksiyomunu kabul ettik.

Çarpmanın da 0, S ve $+$ simgelerini ve PA1, PA2 ve PA3 aksiyomlarını kullanarak tanımlanamadığını söyledik ve bu sorunu gidermek için dilimize $\times$ diye bir fonksiyon simgesi daha ekledik ve PA4 aksiyomunu kabul ettik.

Toplama ve çarpmadan sonra akla ilk gelen bir sonraki aşamaya geçelim: $(n, m) \to n^m$ formülüyle "tanımlanan" (hepimizin bildiği üs alma) fonksiyonunun varlığı, 0, S, $+$ ve $\times$ simgelerini ve PA1, PA2, PA3 ve PA4 aksiyomlarını kullanarak tanımlayabilir miyiz? Önceki iki paragrafa bakarak üs alma fonksiyonun PA'da tanımlanamadığını düşünmek doğaldır. Ama öyle değil, üs alma fonksiyonu bu simgeler ve aksiyomlarla tanımlanabiliyor. Hatta faktoriyel ve n-inci asal fonksiyonları da tanımlanabilir. Tüm "doğal" fonksiyonların PA'da tanımlanabileceği düşünülüyor.

Genel yöntemden bir başka yerde sözedebiliriz. Meraklı okur [Po] kitabına bakabilir mesela. PA ile pek ilgilenmeyeceğimizden, sadece üs almanın nasıl tanımlandığını görelim:

$r(u,\, v)$ sayısı, u sayısı $v+1$'e bölündüğünde kalan olsun. PA'da kolaylıkla

$$r(u,\, v) = x$$

anlamına gelebilecek bir formül yazabiliriz (okura alıştırma). Şimdi aşağıda tanımlanan (ve tek bir satıra sığdıramadığımız) $\varphi(n,\, m,\, x)$ formülüne bakalım:

$$\begin{aligned} \exists u \exists v \quad & [r(u,\, v) = 1 \wedge \\ & r(u,\, (m+1)v) = x \wedge \\ & \forall i\ (1 \le i \le m \longrightarrow r(u,\, (i+1)v) = r(u,\, iv)n)]. \end{aligned}$$

Bu formülün ancak ve ancak $x = n^m$ ise doğru olduğunu kanıtlayalım:

Önce koşulları sağlayan u ve v'nin varlığını varsayalım. Her $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$ için,

$$a_i = r(u,\ (i+1)v)$$

tanımını yapalım. Bu tanımdan, $a_0 = 1$ ve $a_{i+1} = a_i n$ eşitlikleri çıkar. Demek ki, tümevarımla her i için, $a_i = n^i$ ve $p = a_m = n^m$ olur.

Şimdi formülde $p = n^m$ alalım ve u ve v'nin varlığını kanıtlayalım. Ama bu kanıt için biraz soyut cebir bilmek lazım, özellikle Çin Kalan Teoremi'ni. Soyut cebir bilmeyenler bu kanıtı atlayabilirler.

Biraz hazırlık yapmamız gerekecek.

Önce, her $m > 0$ için, m'den küçükeşit her pozitif doğal sayının böldüğü bir w_m sayısının varlığını kanıtlayalım[4]. Bunu m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $m = 1$ için, $w_1 = 1$ ya da w_1'i herhangi bir doğal sayı almak yeterli. Diyelim m için koşulu sağlayan w_m sayısı bulduk. $w_{m+1} = w_m(m+1)$ olsun. $m+1$'den küçük her pozitif doğal sayı w_{m+1}'i böler[5].

Yukarıdaki gibi bir w_m sayısı seçelim ve $v_m = w_m + 1$ tanımını yapalım. v_m'nin bölenleri m'den mutlak büyük olmak zorundadır.

Şimdi istediğimizin kanıtına geçebiliriz. Öyle u ve v bulmak istiyoruz ki,

$$\begin{array}{ll}
u \equiv 1 & \bmod (v+1) \\
u \equiv n & \bmod (2v+1) \\
u \equiv n^2 & \bmod (3v+1) \\
 & \ldots \\
u \equiv n^m & \bmod ((m+1)v+1)
\end{array}$$

olsun. $v = v_m$ seçelim. Eğer $1 \le i < j \le m+1$ ise $iv+1$ ve $jv+1$'in aralarında asal olduğunu iddia ediyoruz. p, her ikisini de bölen bir asal sayı olsun. O zaman p aralarındaki farkı da, yani $(j-i)v$ sayısını da böler. Ama v ile p aralarında asallar. Demek ki p asalı $j-i$ sayısını böler. Ama $1 \le j-i \le m$ olduğundan, bu, v'nin seçimiyle çelişir. Şimdi Çin Kalan Teoremi'ni uygulayarak istediğimiz u'yu bulabiliriz.

Alıştırmalar

8.4. Sadece ve sadece $x = n!$ iken doğru olan bir $\varphi(n, x)$ formülü bulun.

Notlar

8.5. Kitabın devamında Peano Aritmetiği'ne atıf yapmayacağız. Hiç çekinmeden kümeler kuramının tüm gücünü kullanacağız.
Bundan sonraki notlar matematiksel mantıkta ve model teoride donanımlı olanlar için yazılmıştır.

[4] $w_m = m!$ işi görür tabii ama henüz $m!$ sayısının tanımını yapmadık.

[5] Dikkat, burada $m \mapsto w_m$ diye bir fonksiyon tanımlamıyoruz, sadece her m sayısı için istediğimiz özelliği sağlayan bir w_m sayısının varlığını kanıtlıyoruz.

8.6. Toplamanın 0 ve S'den hareketle tanımlanacağını varsayalım. O zaman sıralama da $\leq$ de 0 ve S'den hareketle tanımlanabilirdi. Şimdi $(\mathbb{N}, 0, S)$ yapısının teorisinin "nonstandart" bir modelini alalım. Bu modeli (elbette $x < Sx$ önermesi doğru olacak biçimde) iki farklı biçimde sıralayacağız. $\mathbb{N}$'ye benzemek zorunda olan standart kısmı bildiğimiz gibi sıralayalım, $x < Sx$ önermesi doğru olmak zorunda olduğundan başka bir seçeneğimiz de yok zaten. Nonstandart kısımlar $\mathbb{Z}$'nin kopyalarına benzerler. $\mathbb{Z}$'nin en az 2 kopyasının olduğunu varsayalım ve her kopyayı kendi içinde bildiğimiz gibi sıralayalım. Diyelim $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Z}_1$ ve $\mathbb{Z}_2$ adını verdiğimiz sadece iki kopyası var. Şimdi modeli $\mathbb{N} < \mathbb{Z}_1 < \mathbb{Z}_2$ ya da $\mathbb{N} < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_1$ olmak üzere iki farklı biçimde sıralayabiliriz. Ama $\mathbb{Z}_1$ ile $\mathbb{Z}_2$'nin yerlerini değiştiren tahmin edilen fonksiyon S'ye saygı duyar ama sıralamaya saygı duymaz. Demek ki sıralama S'den ve 0'dan hareketle tanımlanamaz.

8.7. Presburger'ın bir teoremine göre toplamayla ilgili doğru olan her önerme kanıtlanabilir, üstelik bir bilgisayar programı yardımıyla kanıtlanabilir, öte yandan Gödel'in ikinci eksiklik teoremine göre toplama ve çarpmayla ilgili doğal sayılarda doğru ama bu aksiyomlarla (hatta daha fazlasıyla da) kanıtlanamayan bir önerme vardır. Demek ki çarpma işlemi, 0, S ve $+$ yardımıyla tanımlanamaz.

8.8. Bölüm 5 ve 6'da ZF kümeler kuramından hareketle PA'nın bir modelini (yani PA aksiyomlarının geçerli olduğu bir $\mathbb{N}, S, +, \times, 0)$ yapısı bulduğumuza göre, ZF kümeler kuramının PA'da çelişki olmadığını kanıtlamış olduk. Yani mantığın diliyle

$$ZF \vdash \mathrm{Con}(PA).$$

Gödel'e göre, PA, kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamaz ama. Demek ki ZF PA'dan daha güçlüdür. Biz bu kitaplarda ZF'yi esas alacağız. (Zaten ikinci cildin konuları PA'ya hiçbir biçimde sığdırılamaz.)

9. Biraz Mantık

Altbölüm 4.2'de, Tanımlı Altküme Aksiyomu'nu açıklarken, tam olarak ne olduğunu söylemeden "kümeler kuramının dilinde yazılmış formül"lerden sözettik. Önceki bölümlerde "0 ve S kullanılarak yazılmış bir değişkenli formül"-lerden ya da "0, S, $+$ ve $\times$ kullanılarak yazılmış bir değişkenli formül"lerden sözettik. Bu bölümde formülün ne demek olduğunu kısaca açıklamaya çalışacağız. Konumuz mantık olmadığı için açıklamayı biraz üstünkörü yapacağımızı itiraf etmeliyim, okurun sezgi kazanması bizim için yeterli olacak. Konu hakkında daha ayrıntılı bilgi sahibi olmak isteyen [CK], [Po], [Mar] gibi mükemmel kaynaklara, hatta herhangi bir model teori ya da matematiksel mantık kitabına başvurabilir. Bu iki cildin içeriğinin anlaşılması için bol parantezli ve bol dipnotlu bu bölümün pek zaruri olmadığını da ekleyelim.

9.1 Alfabe

Her dilde olduğu gibi matematikçede de bir tümce yazmak için önce bir alfabeye ihtiyaç vardır. Matematikçenin temel alfabesi şu simgelerden oluşur:

$$\exists,\ \wedge,\ \neg,\ (,\ ),\ =,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

Kullanılan diğer $\forall$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ gibi mantıksal simgeler yukarıdakilerin yardımıyla tanımlanabilirler, dolayısıyla onları alfabeye eklemenin gereği yoktur[1], ama tabii bu kısaltmaları kullanmazsak formüller işin içinden çıkılamayacak kertede anlaşılmaz olabilirler.

v_0, v_1, v_2, ... simgelerine (harflerine) ***değişken*** adı verilir.

Her ne kadar v_0, v_1, v_2, ... değişken simgeleri yüzünden alfabemiz sonsuz gibi görünse de, bu aldatıcıdır. Değişkenleri sadece v ve $|$ simgeleriyle elde edebiliriz:

$$\begin{array}{lll} v_0 & \text{yerine} & v, \\ v_1 & \text{yerine} & v|, \\ v_2 & \text{yerine} & v||, \\ & \ldots & \end{array}$$

[1] Aslında "Polonya notasyonu" denilen bir yazım biçimi kullanırsak parantezlerden de vazgeçebiliriz.

yazarsak, sonsuz adet değişken simgesini ikiye indirebiliriz (ama bunu yapmayacağız tabii, hatta daha anlaşılır olmak için, v_i yerine x, y, z, P, ℓ, α, κ, ζ gibi ifade gücü daha yüksek simgeler kullanacağız).

Bu temel alfabe dışında her matematiksel teorinin kendine özgü simgeleri vardır.

Kümeler kuramının kendine özgü tek bir simgesi vardır: $\in$.

Peano Aritmetiği'nin kendine özgü dört simgesi vardır: 0, S, + ve $\times$.

Bir nokta-doğru geometrisinin kendine özgü üç simgesi vardır: "ben bir noktayım" anlamına $\mathcal{P}$ (yani $\mathcal{P}(x)$, "x bir noktadır" anlamına gelecek) "ben bir doğruyum" anlamına $\mathcal{L}$ ve "P noktası ℓ doğrusunun üstünde" anlamına I (yani $I(x, y)$, "x ve y'nin biri nokta diğeri doğrudur ve nokta olanı doğru olanının üstündedir" anlamına gelecek).

Biraz soyut matematik görmüşler için başka örnekler verebiliriz: Halkalar kuramının alfabesi 0, 1, + ve $\times$ simgelerinden oluşur. Sıralı halkalar kuramının alfabesi 0, 1, +, $\times$ ve $\leq$ simgelerinden oluşur. Ama biz sadece kümeler kuramı ve Peano Aritmetiği'yle ilgileneceğiz.

Sonuç olarak, sadece $\exists$, $\wedge$, $\neg$, (,), $=$, v, $|$ ve $\in$ simgeleriyle kümeler kuramının tüm matematiksel formüllerini yazabiliriz. Peano aritmetiği için $\exists$, $\wedge$, $\neg$, (,), $=$, v, $|$, S, +, $\times$, 0 simgeleri gerekir.

Yukarıdaki simgeler dışında, biraz ileride açıklayacağımız üzere, formüllerimizde "parametreler" de kullanacağız. Örneğin reel sayıları çalışırken formüllerimizde, meşhur π sayısını temsilen c_π diye bir simge kullanmak isteyebiliriz, buna hakkımız olmalı.

9.2 Kümeler Kuramının Formülleri

Formülün tanımı basitten karmaşığa doğru verilir. Önce, adına "atomik" denen en basit formülleri tanımlayacağız (ilk iki tanım), sonra atomik formüllerin yardımıyla elde edilen daha karmaşık formülleri.

1. Her i ve j için, $v_i = v_j$ bir formüldür.
2. Her i ve j için, $v_i \in v_j$ bir formüldür.
3. Eğer φ matematiksel bir formülse, $\neg(\varphi)$ de bir formüldür.
4. Eğer φ ve ψ formüllerse, $(\varphi) \wedge (\psi)$ de bir formüldür.
5. Eğer φ bir formülse, her i doğal sayısı için, $\exists v_i\ (\varphi)$ de bir formüldür.
6. Bir simgeler dizisi ancak yukarıdaki kurallar uygulanarak sonlu sayıda adımda yazılmışsa bir formüldür[2].

[2]Yani her formül sonlu sayıda simgeden oluşur.

Yukarıdaki simgelerle yazılan formüller çok karmaşık olabileceklerinden bazı kısaltmalar yapılır. Birkaç örnek verelim:

1. Gereksiz olduğu düşünülen parantezler yazılmaz. Bundan böyle biz de yazmayacağız.
2. $\varphi \vee \psi$ formülü $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formülünün kısaltılmışıdır.
3. $\varphi \to \psi$ formülü $\neg\varphi \vee \psi$ formülünün kısaltılmışıdır.
4. $\varphi \leftrightarrow \psi$ formülü $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır.
5. $\forall x\ \varphi$ formülü $\neg(\exists x\ \neg\varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır.
6. $\neg(x = y)$ formülü yerine $x \neq y$ yazılır.
7. $\neg(x \in y)$ formülü yerine $x \notin y$ yazılır.
8. $\exists! v\ \varphi(v)$ formülü "φ'yi doğrulayan bir ve bir tek v var" anlamına yazılır, yani
$$\exists v\ (\varphi(v) \wedge \forall w\ (\varphi(w) \to v = w))$$
olarak.
9. $\emptyset$, $\subseteq$, $\subset$, $\not\subseteq$, $\wp(x)$, $\cup x$, $\cap x$, $\{x, y\}$, $\mathbb{N}$ gibi simgeler ve daha niceleri de kısaltma olarak kullanılabilirler.

Bir (serbest) değişkenli formül, $\exists$ (ya da $\forall$) simgesinin kapsamına girmemiş tek bir değişken barındıran matematiksel bir tümcedir. Formüle "özellik" de diyebiliriz. Örneğin, "en az bir elemanı var" yani "boşküme değil" özelliği (ya da formülü) şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ y \in x.$$

(Bu özellik $x \neq \emptyset$ olarak kısaltılır.) Bu formüldeki y bir değişkendir ancak sessiz bir değişkendir, $\exists$ niceleyicisi tarafından sesi kesilmiştir ($\exists$ ve $\forall$ simgelerine mantıkta varlıksal ve evrensel niceleyici adı verilir).

Örneğin "x'in sadece bir elemanı var" özelliği şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ (z \in x \to z = y)).$$

(Bu özellik $\exists y\ x = \{y\}$ olarak da kısaltılabilir.)

"Boşküme x'in elemanıdır" özelliği şöyle ifade edilir:

$$\exists y\ (y \in x \wedge \forall z\ z \notin y).$$

(Bu da $\emptyset \in x$ olarak kısaltılır.)

Yukardaki üç özellik de x değişkeninin özelliğidir. Bu özelliklerin x'le ilgili olduğunu iyice belirtmek için φ yerine $\varphi(x)$ yazmak kolaylık sağlar.

Sayfa 76'te verdiğimiz aksiyomlarda serbest değişken yoktur ve bu formüller (kısaltmalar kullanılarak ve işlevi olmayan gereksiz parantezleri atarak) şöyle yazılır:

A1. Boşküme Aks.: $\exists x\, \forall y\; y \notin x$.
A2. Eşitlik Aks.: $\forall x\, \forall y\; (\forall z\; (z \in x \leftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y)$.
A3$_\varphi(z)$. Tanımlı Altküme Aks.: $\forall x\; \exists y\; \forall z\; (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$.
A4. Bileşim Aks.: $\forall x\; \exists y\; \forall z\; (z \in y \leftrightarrow \exists t\; (t \in y \leftrightarrow (t \in x \wedge z \in t)))$.
A5. İki Elemanlı Küme Aks.: $\forall x\; \forall y\; \exists z\; \forall t\; (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$.
A6. Altkümeler Kümesi Aks.: $\forall x\; \exists y\; \forall z\; (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.
A7. Tümevarımsal Küme Aks.: $\exists x\; (0 \in x \wedge \forall y\; (y \in x \longrightarrow Sy \in x))$.
A8. Temellendirme Aks.: $\forall x\; (x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y\; (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$.

Bu liste bir ***teori*** örneğidir. Bir teori, içinde serbest değişkenler barındırmayan formüllerden (serbest değişkeni olmayan formüllere ***cümle*** denir) oluşur. Bu formüllere (teorinin) ***aksiyom***(ları) adı verilir. Bir teorinin modeli, o teoriyi oluşturan aksiyomların "doğru olduğu" bir evrendir[3]. Örneğin Not 4.5'te ZFC kümeler kuramının ilk altı aksiyomun bir modelini yarattık[4]. Bir teorinin birkaç farklı modeli olabilir, hatta bir önerme bazı modellerde doğru, bazı modellerde yanlış olabilir; bu tür önermeler teoride (yani teorinin aksiyomlarından hareketle) kanıtlanamazlar, çünkü kanıtlanabilselerdi her modelde doğru olurlardı. Bir teorinin her modelinde doğru olan bir önermenin teorinin aksiyomlarıyla kanıtlanabileceği matematiksel mantığın önemli ve derin teoremlerinden biridir.

"Doğru olmak" ile "kanıtlanabilir olmanın" farklı kavramlar olduğu yirminci yüzyılda (ya da bir önceki yüzyılın sonlarında) anlaşılmıştır. Bu tabii mantıkta (ve muhtemelen felsefede de) önemli bir gelişmedir. Bir teorem bir teoride (teorinin aksiyomları varsayılarak) kanıtlanır ve kanıtlanan her teorem teorinin her modelinde doğrudur[5]. "Doğruluk" kavramı ise modellerde (ya da

[3] "Doğru olma"nın tanımı için biraz bekleyin.

[4] Tüm 8 aksiyomun bir modelinin olduğu bilinmiyor ve bilinemeyeceği de Gödel tarafınfan kanıtlanmıştır. Gödel'in bu teoremi, yukarıdaki 8 aksiyomdan (aslında A3 yüzünden sonsuz sayıda aksiyom var) bir çelişki ya da bir paradoks elde edemeyeceğimizin kanıtlanamayacağı anlamına gelir. Matematikçiler, kümeler kuramının bir modelinin olduğunu, yani matematiğin çelişkisiz olduğunu varsayarlar, aksi hâlde matematik yapmak anlamsız olurdu! Öte yandan genel kanı, eğer bir paradoks varsa, aksiyomları biraz rötuşlayarak o paradoksun giderileceği yönünde. Bu satırların yazarı ZFC'de çelişki olmadığına inanıyor; ama bu sadece bir inanç tabii.

[5] Kanıtın ve "doğru olma"nın matematiksel tanımları verildiğinde, bu söylediğimizin doğruluğu çok barizdir, her teorem her modelde doğru olmalıdır, yani evde yapılan hesap her çarşıya uymalıdır. Bunun tersi, yani "bir hesap her çarşıda doğru sonuçlar veriyorsa, o zaman bu hesabın her çarşıda doğru sonuçlar vereceğinin bir kanıtı vardır" önermesi doğrudur ama doğruluğunun hiç de kolay olmayan bir kanıta ihtiyacı vardır.

yapılarda) anlamlıdır. Mesela $\exists x\ x^2 + 1 = 0$ ya da $\exists x\ x^2 = 1 + 1$ formülü bazı yapılarda doğru bazı yapılarda yanlıştır. Yine de (ve neyse ki!) "doğru olmak" ile "kanıtlanabilir olmak" arasında çok sıkı bir bağ vardır, ama bu bağ hiç bariz değildir, (bir önceki dipnotta açıkladığımız gibi) bir kanıta ihtiyacı vardır: Gödel'in bir teoremine göre, "teorinin her modelinde doğru olmak" ile "kanıtlanabilirlik" eşdeğer kavramlardır, biri doğruysa diğeri de doğrudur.

Yukarıda "bir cümlenin bir modelde (ya da bir yapıda) doğru olmasından" bahsettik. Bu kavrama da açıklık getirelim:

Yukarıda tanımlanan formüller şimdilik birtakım harflerden oluşan anlamsız (ama belli kurallara uyan) birer dizidir. Bu formüllere bir anlam vermek ve ne zaman doğru olduklarını anlamak istiyoruz. Tabii formülde serbest değişkenler varsa[6], formülün doğruluğu ya da yanlışlığı serbest değişken yerine konan elemanlara göre değişir[7], dolayısıyla bir formülün doğruluğu ya da yanlışlığı ancak bir "yapı"da (mesela kümeler kuramının bir modelinde) anlamlıdır. "Doğruluğun" tanımı aşağıda:

1. $v_i = v_j$ formülü sadece v_i ve v_j yerine spesifik birer küme konduğunda doğru olabilir. a ve b birer küme olsun. $v_i = v_j$ formülü (a, b) ikilisinde ancak ve ancak $a = b$ ise doğrudur. Yani "$v_i = v_j$" formülü "v_i, v_j'ye eşittir" olarak yorumlanır.

2. $v_i \in v_j$ formülü sadece v_i ve v_j yerine spesifik birer küme konduğunda doğru olabilir. a ve b birer küme olsun. $v_i \in v_j$ formülü (a, b) ikilisinde ancak ve ancak $a \in b$ ise doğrudur. Yani "$v_i \in v_j$" formülü "v_i, v_j'nin bir elemanıdır" olarak yorumlanır.

3. $\neg\varphi$ formülü "φ doğru değil" olarak yorumlanır, yani ancak φ yanlışsa $\neg\varphi$ doğrudur[8].

4. $\varphi \wedge \psi$ formülü "hem φ hem ψ doğru" olarak yorumlanır.

5. $\exists v_i\ \varphi$ formülü "φ'yi doğrulayan en az bir eleman var" olarak yorumlanır.

Bunlardan kısaltılmış formüllerin de doğruluğunu anlayabiliriz. Birkaç örnek verelim:

1. $\varphi \vee \psi$ formülü $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "φ ya da ψ'den en az biri doğru" (ikisi birden de doğru olabilir) olarak yorumlanmalıdır.

[6]Yani $\forall$ ve $\exists$ kapsamına alınmamış değişkenler. Örneğin "$\forall x\ x \notin y$" formülünde sadece y serbest değişkendir.

[7]Mesela $x^2 = x$ formülü reel sayılarda sadece $x = 0$ ya da $x = 1$ ise doğrudur.

[8]Bu anlaşma sayesinde serbest değişkeni olmayan her cümle teorinin bir modelinde ya doğrudur ya da yanlıştır, ama tabii aynı cümle bazı modellerde doğru, bazı modellerde yanlış olabilir.

2. $\varphi \to \psi$ formülü $\neg\varphi \vee \psi$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "eğer φ doğruysa ψ de doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

3. $\varphi \leftrightarrow \psi$ formülü $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "eğer φ'nin doğru olması için gerek ve yeter koşul ψ'nin doğru olmasıdır" olarak yorumlanmalıdır.

4. $\forall x\ \varphi$ formülü $\neg(\exists x\ \neg\varphi)$ formülünün kısaltılmışıdır ve elbette "her x için φ doğrudur" olarak yorumlanmalıdır.

5. $\neg(x = y)$ formülü yerine $x \neq y$ yazılır ve bu formül a ve b kümelerinde ancak a, b'ye eşit değilse doğrudur.

6. $\neg(x \in y)$ formülü yerine $x \notin y$ yazılır ve bu formül a ve b kümelerinde ancak a, b'nin bir elemanı değilse doğrudur.

7. $\exists! v\ \varphi(v)$ formülü "$\varphi(v)$'yi doğrulayan bir ve bir tek a var" ise doğrudur.

Bazen formüllerimizde "parametreler" kullanmak isteyebiliriz. Açıklayalım. E kümeler kuramının bir modeli olsun. Sayfa 118'te atomik formülün tanımını vermiştik (1 ve 2 numaralı tanımlar). Eğer a ve b, E'nin iki elemanıysa, yani iki kümeyse, atomik formüllere

$$a = b,\ v_i = a,\ a \in v_i,\ v_i \in a,\ a \in b$$

formüllerini de ekleyelim. Böylece dilimiz ve formüllerimiz zenginleşmiş olur.

9.3 Peano Aritmetiği'nin Formülleri

Tanım neredeyse aynı ama önce Peano Aritmetiği'nin terimlerini tanımlamamız gerekiyor[9].

1. Her v_i bir terimdir.

2. 0 bir terimdir.

3. Eğer N, Peano Aritmetiğinin bir modeliyse, N'nin her a elemanı için a'yı simgeleyen bir simge (mesela c_a diye bir simge[10]) alfabeye eklenir ve bu simgelerin her biri bir terim olarak kabul edilir. Bu simgelere parametre denir.

[9]Kümeler kuramının terimleri sadece v_i değişkenleridir ve formüllerimizde parametreleri kullanmak istersek kümeler kuramının bir modelininin elemanlarını simgeleyen simgelerdir. Çok basit olduğundan önceki altbölümde kümeler kuramının terimlerini tanımlama gereğini duymadık.

[10]Bir önceki kalemde de "0 bir terimdir" yerine aslında "c_0 bir terimdir" dememiz gerekirdi. Burada vurgulamak istediğimiz nokta, bir anlamı olan (yani semantik olan) elemanla elemanı simgeleyen (anlamsız yani sentaktik olan) simge arasında bir fark yaratmak

4. Eğer t ve s birer terimse $S(t)$, $(t) + (s)$ ve $(t)(s)$ de birer terimdir[11].

Örneğin, eğer a ve b Peano Aritmetiğinin bir modelinin elemanlarıysa,

$$(c_b v_1 v_1 v_3 + v_2 + SSS(0))(v_5 + v_4) + c_a c_a c_a$$

bir terimdir. Görüldüğü üzere terimler polinomlara benzeyen ifadelerdir.

Şimdi Peano Aritmetiği'nin formüllerini tanımlayabiliriz:

1. Eğer t ve s birer terimse, $t = s$ bir formüldür. (Bunlara atomik formül denir.)
2. Eğer φ bir formülse, $\neg(\varphi)$ de matematiksel bir formüldür.
3. Eğer φ ve ψ formüllerse, $(\varphi) \wedge (\psi)$ de bir formüldür.
4. Eğer φ bir formülse, her i doğal sayısı için, $\exists v_i\ (\varphi)$ de bir formüldür.

Bir önceki altbölümde tanımlanan kısaltmalar ve onların benzerleri burada da yapılabilir.

Altbölüm 8.1'de sıralanan PA1, PA2, PA3, PA4, PA5 önermeleri bu dilde yazılmış bir teoridir, ve adına Peano Aritmetiği adı verilir. Kümeler kuramının çelişkisiz olduğunu kabul ederek, önceki bölümlerde Peano Aritmetiğinin bir modelini yaratmıştık: $\mathbb{N}$. Nasıl yapmıştık? $\mathbb{N}$'yi tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi olarak tanımlamıştık. Ama kümeler kuramının her modelinde farklı tümevarımsal kümeler olabileceğinden, $\mathbb{N}$, içinde çalışılan kümeler kuramının modeline göre değişebilir. Yaptığımız inşa, kümeler kuramın her modelinde bir tek $\mathbb{N}$ veriyor, ama farklı modellerde farklı $\mathbb{N}$'lere yol açabilir[12].

Öte yandan kümeler kuramının bir modelinde Peano Aritmetiğinin farklı modelleri olabilir. Evet, inşa ettiğimiz $\mathbb{N}$ yapısı kümeler kuramının bir modelinde biricik, ama aynı modelde PA aksiyomlarını sağlayan farklı modeller olabilir, nitekim olduğu biliniyor da. Diğer modellere "nonstandart" ya da sıradışı modeller denir.

Bu bölümü sonuna kadar okumuşsanız sizi kutlamak gerekir! Arada bir okuyun, zamanla anlam kazanabilir.

[11] Gerçek hayatta gereksiz parantezler atılmalı...

[12] Bu da "sonlu olmanın" mutlak bir kavram olmadığı, "sonluluk" kavramının kümeler kuramının modelinden modeline değişebileceği anlamına gelir, yani bir modelde sonlu olan bir küme, bir başka modelde sonsuz olabilir! Bir başka deyişle sonluluk kavramının ilahi (tartışmasız demek istiyoruz) bir tanımı yoktur. Tuhaf ama böyle.

Kısım II

Tamsayılar ve Kesirli Sayılar

10. Tamsayılar Yapısı

10.1 Sayıları Yaratmaya Giriş

Geçen kısımda boşkümeden ve birkaç aksiyomdan yola çıkarak 0, 1, 2, 3, 4 gibi sayıları içeren doğal sayılar kümesini matematiksel olarak yarattık. Sadece doğal sayıları değil, doğal sayılarda toplama ve çarpma işlemlerini ve bildiğimiz "küçükeşittir" sıralamasını da yarattık. Sonra da, doğal sayılarla ilgili

$$\begin{aligned} 2+2 &= 2\times 2 = 4,\\ x+y &= y+x,\\ xy &= yx,\\ x(y+z) &= xy+xz \end{aligned}$$

gibi "bilinen" eşitlikleri ve

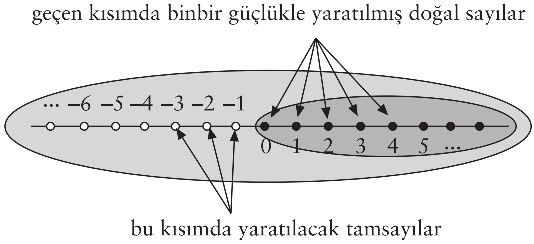
$$\begin{aligned} &2 \leq 4,\\ &x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \end{aligned}$$

gibi en temel önermeleri kanıtladık.

Doğal sayıları yaratmak için boşkümenin varlığı da dahil olmak üzere, çok değil, yedi "doğal", yani aklı başında herhangi birinin doğruluğundan en küçük bir kuşku duymayacağı aksiyomdan yararlanmıştık. Kimsenin o aksiyomları görüp de "bu kadar da olmaz" deyip saçını başını yolacağını sanmıyorum; kanıtlamadan kabul ettiğimiz bu aksiyomların her biri diğerinden doğaldı, her biri "bu da doğru değilse ne doğrudur" dedirtecek türden önermelerdi. O aksiyomların arasında belki en heyecan verici olanı tümevarımsal bir kümenin varlığını söyleyen aksiyomdu, diğerleri kreş seviyesinde banal aksiyomlardı.

Doğal sayılarda toplama ve çarpma işlemleri vardır ama çıkarma işlemi yoktur. 5'ten 3'ü çıkarmak neyse de, doğal sayılarda 3'ten 5'i çıkaramayız, çünkü -2 bir doğal sayı değildir.

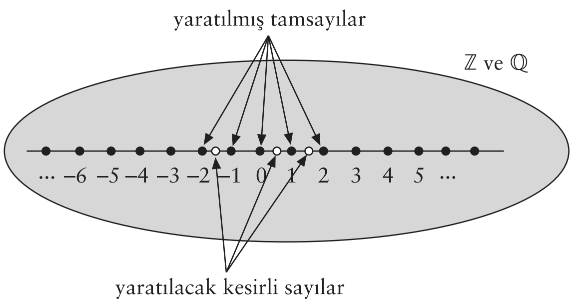
Bir sonraki altbölümde, doğal sayılardan hareketle, -3, -2, -1, 0, 1, 2 gibi tamsayıları, yani $\mathbb{Z}$ kümesini matematiksel olarak yaratacağız. Daha sonraki altbölümlerde bu sayılarda toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı, bir de ayrıca doğal sayılarda olmayan çıkarmayı tanımlayıp bunların ilkokuldan beri bildiğimiz özelliklerini kanıtlayacağız.



ℕ ve ℤ kümeleri

Ama yaratacağımız tamsayılar da kusursuz olmayacak. Tamsayılarda çıkarma işlemi yapılabilir ama bölme yapılamaz. 6'yı 3'e bölmek neyse de, tamsayılarda 3'ü 6'ya bölemeyiz, çünkü $1/2$ bir tamsayı değildir.

Tamsayıları tanımlayıp özelliklerini çıkardıktan sonra, bu sefer tamsayılardan hareketle kesirli sayıları (yani $-1/3$, $-2/7$, $-3/9$, $1/2$, 1, 2 gibi sayıları, yani $\mathbb{Q}$ kümesini) yaratacağız ya da - bizim açımızdan aynı anlama gelir - tanımlayacağız. Sadece kesirli sayıları tanımlamakla yetinmeyeceğiz, kesirli sayılarda, toplamayı, çarpmayı, çıkarmayı ve sıralamayı, bir de ayrıca tamsayılarda olmayan bölmeyi tanımlayıp bunların ilkokuldan beri bildiğimiz özelliklerini kanıtlayacağız.



Bütün bunları doğal sayıları temel alarak yapacağız. Yani doğal sayıları bildiğimizi varsayacağız, ki biliyoruz, boşu boşuna mı ilkokulda beş yıl dirsek çürüttük ya da önceki bölümleri yazdık? Ama kitabın bu kısmını anlamak için kitabın daha önceki bölümlerini hatmetmek ya da anlamış olmak gerekmez. Doğal sayılarla ilgili ilkokul bilgimiz yeterli olacak.

Tamsayılarla ilgili özellikleri kanıtlarken doğal sayıların özelliklerine ihtiyaç duyacağız. Eğer şansımız yaver giderse bu özelliklerin her biri geçmiş sayfalarda kanıtlanmış olmalı. Şansımız yaver gitmezse, o zaman geçmiş bölümlere geri dönüp doğal sayıların gereksinilen özelliği kanıtlanmalı. Ama, daha önce de dediğimiz gibi okur doğal sayıların varlığını ve özelliklerini çantada keklik olarak görebilir.

Matematiksel nesneleri tanımlarken bir şeye daha dikkat etmeliyiz. Kabul ettiğimiz matematiksel evrende her nesne bir küme olmalı. Örneğin bu kitabın bir yerinde 0 sayısını $\emptyset$ (boşküme) olarak tanımlamıştık. Sonra,

$$\begin{aligned}1 &= \{0\},\\ 2 &= \{0, 1\},\\ 3 &= \{0, 1, 2\}\end{aligned}$$

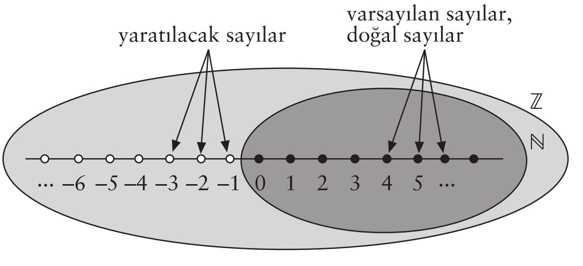
tanımlarını vermiştik ve bunların her biri bir kümedir bilindiği gibi. Aslında doğal sayıları teker teker değil, tümünü birden bir küme olarak tanımlamıştık, yani $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini tanımlamıştık. Ama dikkat, doğal sayılar kümesini

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

eşitliğiyle değil, çok daha rafine bir yöntemle tanımlamıştık; yukarıdaki eşitlik üç noktanın varlığından dolayı matematiksel bir tanım olamaz. İlgilenenler geçmiş bölümleri okusunlar.

10.2 Tamsayılar Kümesine Doğru

Doğal sayılardan yola çıkıyoruz. Sadece doğal sayılardan değil, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerine tanımlanmış olan toplama ve çarpma işlemlerinden ve $\leq$ eşitsizliğinden yola çıkıyoruz. Ama bu altbölümde sadece toplamaya gerek duyacağız.



Amacımız, $\mathbb{N}$ kümesini çıkarma işlemi yapılacak biçimde büyütmek, çünkü $\mathbb{N}$'de her sayıdan her sayıyı çıkaramayız, örneğin 3'ten 5'i çıkaramayız, -2 diye bir sayı yok $\mathbb{N}$'de, daha doğrusu $5 + x = 3$ denkleminin $\mathbb{N}$'de çözümü yok.

Her a, $b \in \mathbb{N}$ için, $a + x = b$ denklemlerinin çözülebileceği $\mathbb{N}$'den daha büyük bir küme yaratacağız. Bu yeni kümede de $\mathbb{N}$'deki gibi toplama ve çarpma işlemleri ve $\leq$ diye adlandıralacağımız bir sıralama olacak. Ama bu iki işlemi ve sıralamayı daha sonra tanımlayacağız; hele bir tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'yi tanımlayalım.

Bu dediğimizi olabilecek en ekonomik biçimde yapmak istiyoruz, yani $\mathbb{N}$ kümesinden daha büyük bir küme bulacağız ama $\mathbb{N}$'ye sadece çıkarma yapmak için gerekli elemanları ekleyeceğiz, $\mathbb{N}$'ye gereksiz yere daha fazla eleman eklemek istemiyoruz. Daha açık olarak ifade edelim: $\mathbb{Z}$'yi bulmak isterken örneğin $\mathbb{Q}$'yü, $\mathbb{R}$'yi ya da (polinomlar kümesi) $\mathbb{Z}[X]$'i bulmak istemiyoruz.

Her a, $b \in \mathbb{N}$ için, $b+x=a$ denkleminin çözülebileceği bir küme yaratmak istiyoruz dedik. Ayrıca bu denklemin tek bir çözümünün olmasını istiyoruz. Çözümü bulduktan sonra bu çözüme $a-b$ diyeceğiz. Örneğin, -2 sayısı

$$5+x=3$$

denkleminin çözümü olacak. Şimdilik böyle bir sayımız yok ama pek yakında olacak.

Daha sonra tanımlanacak olan bu $a-b$ elemanını şimdilik (a,b) ikilisi olarak gösterelim. Daha henüz $a-b$ diye bir elemanımız yok ama (a,b) diye bir ikilimiz var! Birinci deneme olarak, $a-b$'yi, yani $b+x=a$ denkleminin çözümünü (a,b) ikilisi olarak gösterelim. Yani

$$a-b=(a,b)$$

tanımını yapalım. Örneğin,

$$-2=(3,5).$$

Yalnız burada bir noktaya dikkat etmek gerekir. -2 sadece

$$5+x=3$$

denkleminin değil, ayrıca

$$6+x=4 \text{ ve } 7+x=5$$

denklemlerinin de çözümüdür, yani tüm bu çözümler birbirine eşit olmalıdır, yani, yukardaki tanımı kabul edecek olursak,

$$(3,5)=(4,6)=(5,7)$$

eşitlikleri doğru olmalıdır. Ama bu eşitlikler bariz biçimde yanlışlar. Demek ki yukardaki tanım doğru bir tanım olamaz.

Ne yapmalı?

Şimdi bu elemanları eşit kılmanın bir yöntemini göstereceğiz. Bunu yapmanın çok çok kolay bir yöntemi var: "eşit" yerine "denk" diyeceğiz[1]... $(3,5)$, $(4,6)$ ve $(5,7)$ ikilileri eşit olmayacaklar, olamazlar da zaten, çünkü eşit değiller, ama "denk" olacaklar! Bu elemanların denk olduklarını da eşitlik simgesi olan $=$ simgesine bir çizgi daha ekleyerek göstereceğiz:

$$(3,5)\equiv(4,6)\equiv(5,7).$$

[1]Matematikte bu genel bir yöntemdir, eşit olmasını istediğimiz ama eşit olmayan elemanlara "denk" deriz ve elemanlar yerine elemanların denklik sınıflarını ele alırız.

Genel tanımı verelim şimdi. a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$a - b = c - d$$

ise, (a, b) ikilisinin (c, d) ikilisine ***denk*** olduğunu söyleyeceğiz ve bunu,

$$(a, b) \equiv (c, d)$$

olarak yazacağız. Demek ki tanım gereği,

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d.$$

Ama bir dakika... Bizim doğal sayılarda çıkarma gibi bir işlemimiz yok ki

$$a - b = c - d$$

koşulunu koşabilelim. Çıkarmadan sözedemeyiz bile, çünkü henüz öyle bir işlem yok. Biz de zaten bu olmayan çıkarma işlemini tanımlamak istemiyor muyduk? Çıkarmayı tanımlarken çıkarmadan sözetmek doğru değil. Yapmamız gereken,

$$a - b = c - d$$

koşulunu çıkarma kullanmadan ifade etmek. Bu da oldukça basit: Bu koşul yerine, ilkokuldan beri ona eşdeğer olduğunu bildiğimiz

$$a + d = c + b$$

koşulunu koşalım...

Denklik ilişkisi tanımımız şöyle: a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ ise ve

$$a + d = c + b$$

ise (a, b) ikilisinin (c, d) ikilisine denk olduğunu söyleyeceğiz ve bunu,

$$(a, b) \equiv (c, d)$$

olarak göstereceğiz. Demek ki tanım gereği,

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b.$$

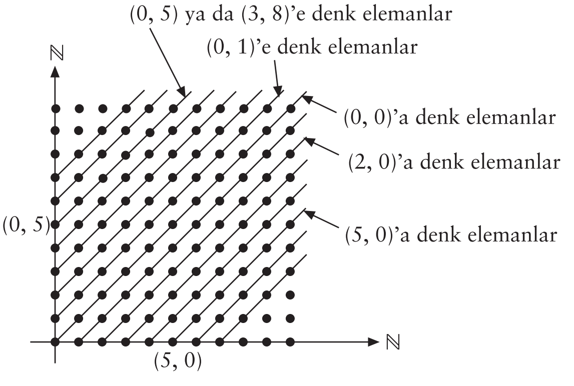
Dileyen aşağıdaki denkliklerin doğru olduklarını tanıma başvurarak teker teker kontrol edebilir.

$$\begin{aligned}
(0, 0) &\equiv (1, 1) \equiv (2, 2) \equiv (3, 3) \equiv \ldots\\
(1, 0) &\equiv (2, 1) \equiv (3, 2) \equiv (4, 3) \equiv \ldots\\
(2, 0) &\equiv (3, 1) \equiv (4, 2) \equiv (5, 3) \equiv \ldots\\
(3, 0) &\equiv (4, 1) \equiv (5, 2) \equiv (6, 3) \equiv \ldots\\
(0, 1) &\equiv (1, 2) \equiv (2, 3) \equiv (3, 4) \equiv \ldots\\
(0, 2) &\equiv (1, 3) \equiv (2, 4) \equiv (3, 5) \equiv \ldots\\
(0, 3) &\equiv (1, 4) \equiv (2, 5) \equiv (3, 6) \equiv \ldots
\end{aligned}$$

Örneğin, $(3,8)$'e denk elemanlar, $(0,5)$, $(1,6)$, $(2,7)$, $(3,8)$, $(4,9), \ldots$ elemanlarıdır, yani şu kümenin elemanlarıdır:

$$\{(0,5),\ (1,6),\ (2,7)\} \cup \{(3+n, 8+n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Genel resim şöyle:



İlk sonucumuzu kanıtlayalım.

Önsav 10.1. $\equiv$ *ilişkisi* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *kümesi üzerine bir denklik ilişkisidir, yani her* (a,b), (c,d), $(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *için,*
i. $(a,b) \equiv (a,b)$,
ii. $(a,b) \equiv (c,d)$ *ise* $(c,d) \equiv (a,b)$,
iii. $(a,b) \equiv (c,d)$ *ve* $(c,d) \equiv (e,f)$ *ise* $(a,b) \equiv (e,f)$
önermelerini sağlar.

Kanıt: i. Tanıma göre $a+b = a+b$ eşitliği kanıtlanmalı...
ii. $(a,b) \equiv (c,d)$ varsayımı, tanıma göre,

$$a + d = c + b$$

diyor. $(c,d) \equiv (a,b)$ denkliğini yani

$$c + b = a + d$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Bu durumda da kanıtlayacak bir şey yok.
iii. $(a,b) \equiv (c,d)$ ve $(c,d) \equiv (e,f)$ varsayımları, sırasıyla,

$$a + d = c + b \text{ ve } c + f = e + d$$

diyor. Bu iki eşitliği varsayarak, $(a,b) \equiv (e,f)$ denkliğini, yani

$$a + f = e + b$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Varsaydığımız eşitlikleri kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(a+f)+(d+c) &= (a+d)+(c+f)\\ &= (c+b)+(e+d)\\ &= (e+b)+(d+c).\end{aligned}$$

Yukarıdaki birinci ve sonuncu eşitlik, doğal sayılarla ilgili bölümde kanıtlanan sonuçlar. Demek ki,

$$(a+f)+(d+c) = (e+b)+(d+c).$$

Doğal sayılarda sadeleştirebileceğimizi bildiğimizden, yukardaki eşitlikte sağ taraflarda bulunan $d+c$ terimlerini sadeleştirerek, istenen

$$a+f = e+b$$

eşitliğini buluruz. □

Eğer $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ise, önsav, tam tamına, her α, β, $\gamma \in X$ için,

i. $\alpha \equiv \alpha$,
ii. $\alpha \equiv \beta$ ise $\beta \equiv \alpha$,
iii. $\alpha \equiv \beta$ ve $\beta \equiv \gamma$ ise $\alpha \equiv \gamma$

diyor. Herhangi bir X kümesi üzerine bu önermeleri sağlayan bir $\equiv$ ikili ilişkisine ***denklik ilişkisi*** adı verildiğini biliyoruz [Ne2]. Demek ki Önsav 10.1, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\equiv$ ikili ilişkisinin bir denklik ilişkisi olduğunu söylüyor.

Denklik ilişkisi kavramı matematiğin en önemli kavramlarından biridir. [SKK] adlı kitabımızda bu konuya hakettiği önem ve değer verilmiştir. Bu konuda eksiği olan okur bu aşamada o kitapta ilgili bölüme bakmalıdır.

Her denklik ilişkisinde denklik sınıfları vardır. Bir (a, b) ikilisinin denklik sınıfını $[(a, b)]$ yerine daha basit olarak $[a, b]$ olarak gösterelim. Tanım gereği (bkz. [SKK]) $[a, b]$ kümesi, (a, b) elemanına denk olan elemanlardan oluşan kümedir:

$$\begin{aligned}[a,b] &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (a,b) \equiv (x,y)\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+y = x+b\}.\end{aligned}$$

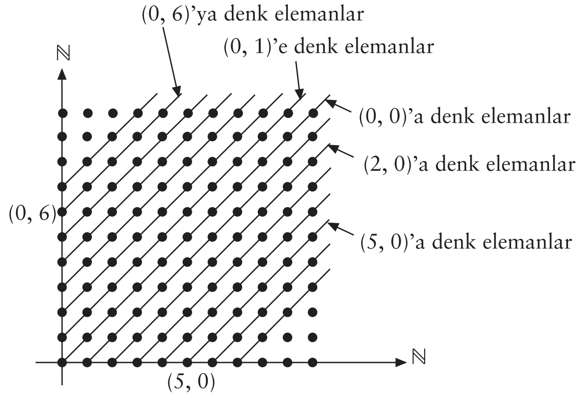
Ve a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ için,

$$[a,b] = [c,d] \Leftrightarrow (a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a+d = c+b$$

olur. Örneğin,

$$\begin{aligned}[1,6] &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : y = x+5\} = [0,5],\\ [2,6] &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : y = x+4\} = [0,4],\\ [6,6] &= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : y = x\} = [0,0].\end{aligned}$$

Bu üç sınıf ileride sırasıyla -5, -4 ve 0 anlamına gelecekler. Kaçınılmaz olarak $[1,6]$ da -5 anlamına gelecek. Bu denklik ilişkisinin her denklik sınıfı aşağıdaki resimdeki gibi çapraz doğruların üstündeki noktalardan oluşur.



Şimdi artık $\mathbb{Z}$'yi en azından küme olarak tanımlayabiliriz. $\mathbb{Z}$'nin toplama, çıkarma, çarpma gibi işlemleri ve sıralaması birazdan tanımlanacak.

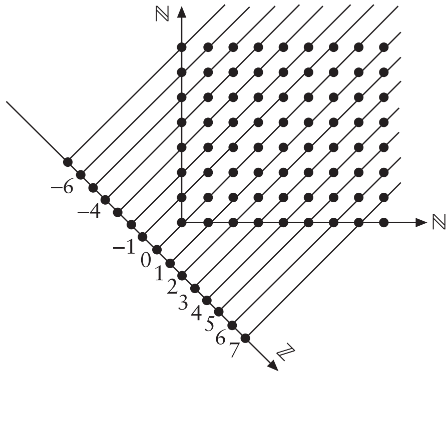
10.3 Küme Olarak $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ kümesini $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ kümesi olarak tanımlıyoruz. Yani,

$$\mathbb{Z} = \{[a, b] : (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

$\mathbb{Z}$'nin elemanlarına ***tamsayı*** adı verilir.

$\mathbb{Z}$'nin her elemanı, yani her tamsayı demek ki $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesi. Bu, beklenmedik bir şey, çünkü $\mathbb{N}$ beklenildiği gibi $\mathbb{Z}$'nin bir altkümesi olmadı. Ama ileride her şey yoluna girecek ve $\mathbb{N}$'yi $\mathbb{Z}$'nin bir altkümesi olarak göreceğiz, biraz sabır. Sezdiğimiz ya da ilkokulda öğrendiğimiz $\mathbb{Z}$'yi nasıl bulacağımızı merak eden sabırsız okura aşağıdaki şekli sunalım:



Bu $\mathbb{Z}$ kümesinin üstünde toplamayı, çarpmayı, çıkarmayı ve eşitsizliği tanımlayacağız. Her şeyi tanımladıktan ve en temel özelliklerini çıkardıktan sonra $\mathbb{Z}$'nin elemanlarının yazım biçimini değiştirip yıllardan beri aşina olduğumuz $\mathbb{N}$'yi içeren $\mathbb{Z}$'yi bulacağız.

Alıştırmalar

10.1. a, $x \in \mathbb{N}$ ise $[a+x, a] = [x, 0]$ ve $[a, a+x] = [0, x]$ eşitlizliklerini kanıtlayın.

10.2. Eğer $a \geq b$ iki doğal sayıysa, bir x doğal sayısı için $[a, b] = [x, 0]$ eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlayın.

10.3. Her tamsayısının bir x doğal sayısı için ya $[x, 0]$ ya da $[0, x]$ biçiminde yazılabileceğini kanıtlayın.

10.4. x ve y doğal sayılarsa ve $[x, 0] = [0, y]$ ise $x = y = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

10.4 Toplama

10.4.1 Toplamanın Tanımı

$\mathbb{Z}$'den α ve β elemanları alalım. $\mathbb{Z}$'nin tanımına göre, a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ için,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

eşitlikleri geçerlidir. α ile β'nın, yani $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin toplamını tanımlamak istiyoruz. Gelecekte, $[a, b]$'nin $a - b$ ve $[c, d]$'nin $c - d$ anlamına geleceğini defalarca söylemiştik. Demek ki $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin toplamı $\mathbb{Z}$'nin,

$$(a - b) + (c - d),$$

sayısı ya da ona eşit olan

$$(a + c) - (b + d)$$

sayısı anlamına gelecek eleman olmalı, yani $\mathbb{Z}$'nin,

$$[a + c, b + d]$$

elemanı olmalı. Dolayısıyla, planlarımıza göre,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

ise,

$$\alpha + \beta = [a + c, b + d]$$

elemanı olarak tanımlanmalı.

Mükemmel bir plan. Ancak bu planda şöyle bir sorun olabilir. Diyelim Ayşe'yle Bülent'e yukardaki plana göre α ve β tamsayılarını toplama görevi verildi. Ayşe, evinde

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayılarını buldu ve toplamı

$$[a+c, b+d]$$

olarak sundu. Tanımı en az Ayşe kadar iyi bilen Bülent de aynı şeyi yaptı ama Bülent, Ayşe'nin bulduğu a, b, c ve d doğal sayılarından başka doğal sayılar buldu. Diyelim Bülent,

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c' ve d' doğal sayılarını buldu ve toplamı

$$[a' + c', b' + d']$$

olarak sundu. Elbette Ayşe'nin sunduğu $\alpha + \beta$ toplamıyla Bülent'in sunduğu $\alpha + \beta$ toplamı eşit olmalı, yoksa tanımımızda bir sorun var demektir, yani planımızın başarıya ulaşması için

$$[a+c, b+d] = [a' + c', b' + d']$$

eşitliği geçerli olmalı.

Planımızın gerçekten mükemmel olduğunu ve başarıya ulaşacağını kanıtlayalım.

Bu arada, biraz felsefi düşünürsek, planımızın başarıya ulaşmasının kaçınılmaz olduğunu anlarız, çünkü tanımları çok doğal yaptık, tamsayılar kümesini de, tamsayıları toplamayı da tam tanımlanması gerektiği gibi tanımladık.

Önsav 10.2. *a, b, c, d ve a', b', c', d' doğal sayılar olsun. Eğer*

$$[a, b] = [a', b'] \textit{ ve } [c, d] = [c', d']$$

ise, o zaman,

$$[a+c, b+d] = [a' + c', b' + d']$$

olur.

Kanıt: Varsayımlara göre,

$$a + b' = a' + b \text{ ve } c + d' = c' + d$$

eşitlikleri doğru. $[a+c, b+d] = [a' + c', b' + d']$ eşitliğini, yani

$$(a+c) + (b' + d') = (a' + c') + (b+d)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Eğer varsayılan iki eşitliği altalta yazıp toplarsak

$$(a + b') + (c + d') = (a' + b) + (c' + d),$$

yani

$$(a+c)+(b'+d')=(a'+c')+(b+d),$$

elde ederiz. Önsav kanıtlanmıştır. □

Artık toplamayı hiç çekinmeden yukarıda önerildiği gibi tanımlayabiliriz:

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d].$$

Alıştırmalar

10.5. $[3,5]+[4,2]=[0,0]$ eşitliğini gösterin.

10.6. $[7,5]+x=[0,0]$ denklemini çözün.

10.7. $[7,5]+x=[1,3]$ denklemini çözün.

10.8. $[7,5]+(x+x)=[1,3]$ denklemini çözebilir misiniz?

10.9. $a,\ b\in\mathbb{N}$ olsun. $[a,b]+[a,b]=[2a,2b]$ eşitliğini kanıtlayın.

10.10. $\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}$ olsun. $\alpha+\beta=\alpha$ ise $\beta=[0,0]$ eşitliğini kanıtlayın.

10.11. $a,\ b\in\mathbb{N}$ olsun. $[a,b]+[b,a]=[0,0]$ eşitliğini kanıtlayın.

10.12. Her $x,y\in\mathbb{N}$ için $[x,y]+[y,0]=[x,0]$ eşitliğini kanıtlayın.

10.13. $\mathbb{Z}$'de $\alpha+\alpha=[1,0]$ denkleminin çözülemeyeceğini kanıtlayın. ($\alpha+\alpha=2\alpha$ eşitliğinin şimdilik bir anlamı olmadığını belirtirim. İlerde bir anlamı olacak ama. Önce $[2,0]\alpha$'nın, sonra da 2α'nın tanımını yapacağız.) Hangi a ve b doğal sayıları için $\mathbb{Z}$'de $\alpha+\alpha=[a,b]$ denklemi çözülebilir?

10.4.2 Toplamanın Özellikleri

Toplamanın temel özelliklerini irdeleyelim.

Önsav 10.3. i. [Birleşme Özelliği] *Her α, β, $\gamma\in\mathbb{Z}$ için,*

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

olur.

ii. [Etkisiz Elemanın Varlığı] *$[0,0]$ toplamanın **etkisiz elemanı**dır, yani her $\alpha\in\mathbb{Z}$ için, $\alpha+[0,0]=[0,0]+\alpha=\alpha$ olur.*

iii. [Ters Elemanın Varlığı] *Her $\alpha\in\mathbb{Z}$ için, $\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha=[0,0]$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha'\in\mathbb{Z}$ vardır; nitekim $\alpha=[a,b]$ ise $\alpha'=[b,a]$ alınabilir.*

Kanıt: i. Önce

$$\alpha=[a,b],\ \beta=[c,d],\ \gamma=[e,f]$$

olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım ve kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solunu ve sağını bu doğal sayılar cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma&=([a,b]+[c,d])+[e,f]\\&=[a+c,b+d]+[e,f]\\&=[(a+c)+e,\ (b+d)+f]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha+(\beta+\gamma) &= [a,b]+([c,d]+[e,f])\\ &= [a,b]+[c+e,d+f]\\ &= [a+(c+e),b+(d+f)].\end{aligned}$$

Demek ki

$$[(a+c)+e,(b+d)+f] = [a+(c+e),b+(d+f)]$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama eşitlik sadece sınıflar düzeyinde değil, elemanlar düzeyinde de geçerli:

$$\begin{aligned}(a+c)+e &= a+(c+e),\\ (b+d)+f &= b+(d+f);\end{aligned}$$

çünkü a, b, c, d, e, f doğal sayılar ve doğal sayılarda birleşme özelliğini biliyoruz.)

ii. $\alpha = [a,b]$ olacak biçimde a ve b doğal sayılarını seçelim ve hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\alpha+[0,0] = [a,b]+[0,0] &= [a+0,b+0] = [a,b] = \alpha.\\ [0,0]+\alpha = [0,0]+[a,b] &= [0+a,0+b] = [a,b] = \alpha.\end{aligned}$$

iii. a ve b doğal sayıları için, $\alpha = [a,b]$ olsun.

$$\alpha+\alpha' = \alpha'+\alpha = [0,0]$$

eşitliğini sağlayan bir $\alpha' \in \mathbb{Z}$ bulacağız. α, $a-b$ anlamına geleceğinden, α' elemanının $b-a$ anlamına gelecek olan $[b,a]$ olması gerektiğini seziyoruz. Nitekim, $\alpha' = [b,a]$ olsun ve hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha' = [a,b]+[b,a] &= [a+b,b+a] = [a+b,a+b],\\ \alpha'+\alpha = [b,a]+[a,b] &= [b+a,a+b] = [a+b,a+b],\end{aligned}$$

Demek ki, her $c \in \mathbb{N}$ için, $[c,c] = [0,0]$ eşitliğini kanıtlamalıyız ama bu

$$c+0 = 0+c = c$$

eşitliğinden hemen çıkar. □

Önsavdaki üç özelliği sağlayan $(\mathbb{Z},+,[0,0])$ türünden bir yapıya ***grup*** denir. Demek ki Önsav 10.3, $(\mathbb{Z},+,[0,0])$ yapısının bir grup olduğunu söylüyor.

Önsav 10.4. *Bir grupta (dolayısıyla $\mathbb{Z}$'de de)*

i. [Sadeleşme] *$\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ ise, $\beta = \gamma$ olur.*

ii. [Etkisiz Elemanın Biricikliği] *Eğer bir α ve β için $\alpha + \beta = \alpha$ ise $\beta = [0, 0]$ olur.*

iii. [Ters Elemanın Biricikliği] *Verilmiş bir α için, α', Önsav 10.3.iii'teki eşitliği sağlıyorsa ve $\alpha + \beta = [0, 0]$ ise, $\beta = \alpha'$ olur.*

Kanıt: i. α', α tamsayısı için Önsav 10.3.iii'ü sağlasın, yani $\alpha' + \alpha = [0, 0]$ olsun. O zaman aynı önsava göre,

$$\begin{aligned}\beta &= [0, 0] + \beta = (\alpha' + \alpha) + \beta = \alpha' + (\alpha + \beta)\\ &= \alpha' + (\alpha + \gamma) = (\alpha' + \alpha) + \gamma = [0, 0] + \gamma = \gamma\end{aligned}$$

olur.

ii. Bir öncekinden çıkar: $\alpha + \beta = \alpha = \alpha + [0, 0]$.

iii. (i)'den çıkar: $\alpha + \beta = [0, 0] = \alpha + \alpha'$. □

Önsav 10.3.ii ve 10.4.ii'den dolayı, $[0, 0]$ elemanına toplamanın ***etkisiz elemanı*** adını verme hakkına sahibiz. Önsav 10.3.iii ve 10.4.iii'ten dolayı, $\alpha \in \mathbb{Z}$ elemanının tersini $-\alpha$ olarak yazıp bu elemana α'nın ***toplamsal tersi*** adını verebiliriz. Önsav 10.3.iii'ten dolayı $[a, b]$ elemanının tersi $[b, a]$ elemanıdır, yani

$$-[a, b] = [b, a]$$

olur. Buradan,

$$-[a, a] = [a, a]$$

ve

$$-(-\alpha) = \alpha$$

eşitlikleri çıkar, ama son eşitlik Önsav 10.3.iii'ten de çıkar: α, α' elemanının tersiyse, α' elemanı da α'nın tersidir!

Grubumuzun işleminin (toplamanın yani) değişmeli olduğunu da kanıtlayalım.

Önsav 10.5. *Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ olur.*

Kanıt: $\alpha = [a, b]$, $\beta = [c, d]$ olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayıları bulalım ve hesaplayalım:

$$\alpha + \beta = [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] = [c + a, d + b] = [c, d] + [a, b] = \beta + \alpha.$$

Kanıt bitmiştir. □

Önsav 10.5'teki eşitliği sağlayan bir gruba ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** ya da ***abel grubu*** denir.

$\mathbb{Z}$'de çıkarma işlemini tanımlayalım: Her a, b, c, d doğal sayıları için,

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + [d, c] = [a + d, b + c]$$

olsun. Ya da grupların diliyle, her α, β tamsayıları için,

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

olsun. Buradaki $-\beta$, β tamsayısının toplamsal tersidir. Böylece $\mathbb{Z}$'de çıkarma işlemini tanımlamış olduk.

Benzer şekilde,

$$-\alpha + \beta = (-\alpha) + \beta$$

ve

$$-\alpha - \beta = (-\alpha) + (-\beta)$$

elemanları da tanımlanır.

Alıştırmalar

10.14. Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $-(\alpha + \beta) = -\beta - \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

10.15. Her a, $b \in \mathbb{N}$ için $[a, 0] + [b, 0] = [a + b, 0]$ eşitliğini kanıtlayın.

10.16. Hangi $a \in \mathbb{N}$ için, $\alpha + \alpha = [a, 0]$ denklem $\mathbb{Z}$'de çözülebilir?

10.17. Hangi $[a, b]$ için $\alpha + \alpha = [a, b]$ denklemi $\mathbb{Z}$'de çözülebilir?

10.18. Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $-(\alpha+\beta) = (-\beta)+(-\alpha) = -\alpha-\beta = -\beta-\alpha$ eşitliklerini kanıtlayın.

10.19. Eğer (α, α') ve (β, β') tamsayı ikilileri Önsav 10.3.iii'ü sağlıyorsa, (α', α) ve $(\alpha+\beta, \alpha'+\beta')$ ikililerinin de Önsav 10.3.iii'ü sağladığını kanıtlayın.

10.5 Çarpma

10.5.1 Çarpmanın Tanımı

Tamsayılarda toplama dışında bir de çarpma işlemi var tabii. Bu bölümde çarpmayı tanımlayacağız. Toplama için yaptığımız akıl yürütmeyi çarpma için de yapalım.

$\mathbb{Z}$'den iki α ve β elemanı alalım. $\mathbb{Z}$'nin tanımına göre, a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

eşitlikleri geçerlidir. α ile β'yı, yani $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin çarpımını tanımlamak istiyoruz. Gelecekte, $[a, b]$'nin $a - b$ ve $[c, d]$'nin $c - d$ anlamına geleceğini söylemiştik. Demek ki $[a, b]$ ile $[c, d]$'nin çarpımı $\mathbb{Z}$'nin,

$$(a - b)(c - d)$$

ya da

$$(ac + bd) - (ad + bc)$$

anlamına gelecek elemanı olmalı, yani $\mathbb{Z}$'nin,

$$[ac + bd, ad + bc]$$

elemanı olmalı. Demek ki, planlarımıza göre,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

ise,

$$\alpha\beta = [ac + bd, ad + bc]$$

elemanı olarak tanımlanmalı.

Mükemmel bir plan daha... Ancak bu planda şöyle bir sorun olabilir. Diyelim Ayşe'yle Bülent'e yukardaki plana göre α ve β tamsayılarını çarpma görevini verdim. Ayşe, evinde

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

olacak biçimde a, b, c ve d doğal sayılarını buldu ve çarpımı

$$[ac + bd, ad + bc]$$

olarak sundu. Tanımı en az Ayşe kadar iyi bilen Bülent de aynı şeyi yaptı ama Bülent, Ayşe'nin bulduğu a, b, c ve d doğal sayılarından başka doğal sayılar buldu. Diyelim Bülent,

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c' ve d' doğal sayılarını buldu ve çarpımı

$$[a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olarak sundu. Elbette Ayşe'nin sunduğu $\alpha\beta$ çarpımıyla Bülent'in sunduğu $\alpha\beta$ çarpımı birbirine eşit olmalı, yoksa tanımımızda bir sorun var demektir, yani,

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olmalı.

Dolayısıyla sunduğumuz toplama tanımının geçerli olması için aşağıdaki sonuç doğru olmalı.

Önsav 10.6. *a, b, c, d ve a', b', c', d' doğal sayılar olsun. Eğer*

$$[a, b] = [a', b'] \text{ ve } [c, d] = [c', d']$$

ise, o zaman,

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c']$$

olur.

Kanıt: Varsayımlara göre,

$$a+b'=a'+b \text{ ve } c+d'=c'+d \tag{1}$$

eşitlikleri doğru.

$$[ac+bd, ad+bc]=[a'c'+b'd', a'd'+b'c']$$

eşitliğini, yani

$$ac+bd+a'd'+b'c'=a'c'+b'd'+ad+bc \tag{2}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Unutmayalım ki yukarıdaki eşitlik $\mathbb{N}$'de geçerli ve $\mathbb{N}$'de çıkarma ve bölme işlemleri yok. Dolayısıyla bu eşitliği çıkarma ve bölmeye başvurmadan kanıtlamalıyız.

Çıkarma işlemini kullanmadan bu eşitliği kanıtlamak hiç de kolay değil. Okurun vereceğimiz kanıtı okumadan kanıtlamaya çalışmasını öneririm. Plansız programsız yola koyulursa başarma olasılığı çok düşük olacaktır.

Şu kanıt planını yapalım: (1)'deki eşitlikleri kullanarak, (2) eşitliğinde bulunan a'ları ve c'leri yok edelim. Bunun için her iki tarafa da ne kadar terim eklemek gerekirse ekleyelim. Her iki taraftan da a'yı ve c'yi yok edersek, eşitlik doğruysa karşımıza özdeş bir eşitlik çıkmalı.

a ve c'nin bulunduğu terimleri sıralayalım:

$$ac, ad, bc$$

Önce, a'ya ve c'ye göre "ikinci dereceden" bir terim olan en soldaki ac'yi yok etmeye çalışalım.

$$ac+(ad'+b'c+b'd')=(a+b')(c+d')=(a'+b)(c'+d)$$

eşitliğini göz önüne alarak, kanıtlamak istediğimiz eşitliğin her iki tarafına da

$$ad'+b'c+b'd'$$

terimini ekleyelim. Böylece eşitliğin solundaki ac kaybolacak; ancak eşitliğin sağ tarafında içinde a ve c barındıran ad' ve $b'c$ terimleri belirecek. Ama bunlar a ve c'ye göre birinci dereceden terimler olduklarından, bunlardan kurtulmak, ac'den kurtulmaktan daha da kolay olacak. Bu eklemeyi yaptığımızda, içinde a ve c barındıran

$$ad, bc, ad', b'c$$

terimleri kalacak. Örneğin birincisinden kurtulmak için her iki tarafa da $b'd$ eklemek yeterli, çünkü böylece ad'nin olduğu tarafta,

$$ad+b'd=(a+b')d=(a'+b)d$$

eşitliğini kullanabileceğiz. İçinde a ve c barındıran yukarda sıralanan terimlerin her biri için, sırasıyla,

$$b'd, bd', b'd', b'd'$$

(iki kez $b'd'$) ekleyelim. Daha önceki $ad'+b'c+b'd'$ terimini de hesaba katalım. Böylece, her iki tarafa da,

$$ad' + b'c + b'd' + b'd + bd' + b'd' + b'd'$$

terimini, yani

$$ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd'$$

terimini eklememiz gerektiğini görürüz. Bu terimi ekleyelim, a'yı ve c'yi yok eden hesapları yapalım ve bakalım iki tarafta da aynı şeyi elde ediyor muyuz.

Önce sol tarafı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&(ac + bd + a'd' + b'c') + (ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd')\\
&\quad = (ac + ad' + b'c + b'd') + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c'\\
&\quad = (a + b')(c + d') + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c'\\
&\quad = (a' + b)(c' + d) + 2b'd' + b'd + bd' + bd + a'd' + b'c'.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi hiç a ve c kalmadı. Benzer işlemi sağ taraf için de yapalım.

$$\begin{aligned}
&(a'c' + b'd' + ad + bc) + (ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd')\\
&\quad = a'c' + b'd' + (ad + b'd) + (bc + bd') + (ad' + b'd') + (b'c + b'd') + b'd'\\
&\quad = a'c' + b'd' + (a + b')d + b(c + d') + (a + b')d' + b'(c + d') + b'd'\\
&\quad = a'c' + b'd' + (a' + b)d + b(c' + d) + (a' + b)d' + b'(c' + d) + b'd'
\end{aligned}$$

Sağ tarafta da hiç a ve c kalmadı. Şimdi bu a'sız ve c'siz terimler birbirine eşit, hatta özdeş olmalı. Nitekim kolayca görüleceği üzere öyleler. Doğal sayılarda sadeleştirmeyi bildiğimizden, eklediğimiz

$$ad' + b'c + 3b'd' + b'd + bd'$$

terimlerini sadeleştirip istediğimiz

$$ac + bd + a'd' + b'c' = a'c' + b'd' + ad + bc$$

eşitliğine kavuşuruz. Nihayet! □

Önsav sayesinde,

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc]$$

işlemini (çarpımını) vicdanımız rahat tanımlayabiliriz. Artık $\mathbb{Z}$'de sadece toplama değil, bir de çarpma işlemimiz var. Çarpma işlemi $\alpha\beta$ olarak gösterildiği gibi, kimileyin $\alpha \times \beta$ ya da $\alpha \cdot \beta$ olarak da gösterilir.

Alıştırmalar

10.20. $[3,5][5,3] = [0,4]$ eşitliğini gösterin.
10.21. $[3,4][2,3]$ hangi tamsayıya eşittir?
10.22. $[3,4][1,3] = \alpha + \alpha$ denkleminin tamsayılarda çözümü var mıdır?
10.23. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha[1,0] = \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.
10.24. Her $[a,b] \in \mathbb{Z}$ için, $[a,b][0,1] = [b,a]$ eşitliğini kanıtlayın.
10.25. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \alpha[0,1] = [0,0]$ eşitliğini kanıtlayın.
10.26. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha[0,0] = [0,0]$ eşitliğini kanıtlayın.
10.27. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha + \alpha = [2,0]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.
10.28. $[a,b][c,d] = \alpha + \alpha$ denkleminin tamsayılarda çözümü olması için $[a,b] = \alpha + \alpha$ ya da $[c,d] = \alpha + \alpha$ denkleminin çözümü olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın. (Yani iki tamsayının çarpımının çift olması için iki tamsayıdan birinin çift olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.)

10.5.2 Çarpmanın Özellikleri

Önsav 10.7. i. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ için, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ olur.*
ii. $[1,0]$ *çarpmanın **etkisiz elemanı**dır, yani her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için,*

$$\alpha\,[1,0] = [1,0]\,\alpha = \alpha$$

olur.
iii. *Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\beta = \beta\alpha$ olur.*

Kanıt: Birincisi biraz uzun olabilecekse de kanıtlar son derece basit. Aynen Önsav 10.3'ün kanıtındaki gibi her şey, $\mathbb{Z}$ kümesinin ve $\mathbb{Z}$'de çarpmanın tanımlarından ve doğal sayıların daha önceki bölümlerde kanıtlanan özelliklerinden çıkar. (Eğer doğal sayıların kanıtlamayı unuttuğumuz bir özelliği varsa, okur toplamanın tanımına başvurarak bu özelliği kolaylıkla kanıtlayabileceğini umuyoruz.) □

10.5.3 Toplama ve Çarpmayla İlgili Özellik

Toplamayla çarpmayı harmanlayan tek bir özellik vardır: Şimdi kanıtlayacağımız ***dağılma özelliği***. (Bir de toplamayla çarpmayı ilgilendiren $[0,0] \neq [1,0]$ özelliği vardır ama bu diğerinin yanında pek sönük kalıyor.)

Önsav 10.8. $[1,0] \neq [0,0]$ *ve her α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ için,*

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ ve } (\beta+\gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

olur.

Kanıt: Çarpma değişmeli olduğundan iki eşitlikten biri kanıtlamak yeterli; birincisine odaklanalım.

$$\alpha = [a, b],\ \beta = [c, d] \text{ ve } \gamma = [e, f]$$

olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını seçelim ve kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solunu ve sağını bu doğal sayılar cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma) &= [a, b]([c, d] + [e, f]) = [a, b][c + e, d + f]\\ &= [a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \alpha\gamma &= [a, b][c, d] + [a, b][e, f]\\ &= [ac + bd, ad + bc] + [ae + bf, af + be]\\ &= [ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be].\end{aligned}$$

Demek ki

$$[a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e)] = [ac+bd+ae+bf, ad+bc+af+be]$$

eşitliği kanıtlanmalı, ki eğer doğal sayıların özelliklerini bildiğimizi varsayarsak bu çok bariz bir şey. □

Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ için, geçmişte aşina olduğumuz,

$$\begin{aligned}&(-\alpha)(\beta-\gamma) = \alpha\gamma - \alpha\beta,\\ &(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta,\\ &(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)\end{aligned}$$

gibi eşitliklerin kanıtını okura bırakıyoruz.

Alıştırmalar

10.29. Eğer α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için $\alpha\beta = [0, 0]$ ise, o zaman $\alpha = [0, 0]$ ve $\beta = [0, 0]$ eşitliklerinden en az birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.

10.30. Her α, $\beta \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\beta = [1, 0]$ ise

$$\alpha = \beta = [1, 0] \text{ ya da } \alpha = \beta = [0, 1]$$

eşitliklerinden birinin doğruluğunu kanıtlayın.

10.31. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\beta = [2, 0]$ denklemini çözün.

10.32. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [1, 0]$ denklemini çözün.

10.33. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [0, 1]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

10.34. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [2, 0]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

10.35. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha = [4, 0]$ denkleminin çözüm kümesini bulun.

10.36. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha + \alpha + [1, 0] = [0, 0]$ denkleminin çözümünün olmadığını kanıtlayın.

10.37. $\mathbb{Z}$'de $\alpha\alpha + \alpha + [0, 6] = [0, 0]$ denkleminin tüm çözümlerini bulun.

Önsav 10.3.i, ii, iii, 10.4, 10.7 ve 10.8'de kanıtladıklarımızı özetleyelim:

Teorem 10.9 (Özet). $(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ *yapısı şu özellikleri sağlar: Her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ *için,*

T1. $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.
T2. $\alpha+[0,0] = [0,0]+\alpha = \alpha$.
T3. $\alpha+\alpha' = \alpha'+\alpha = [0,0]$ *eşitliğini sağlayan bir* $\alpha' \in \mathbb{Z}$ *vardır.*
T4. $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.
Ç1. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
Ç2. $\alpha[1,0] = [1,0]\alpha = \alpha$.
Ç4. $\alpha\beta = \beta\alpha$.
TÇ1. $[1,0] \neq [0,0]$.
TÇ2. $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$. □

Teoremdeki özellikleri sağlayan bir yapıya ***değişmeli halka*** denir. Demek ki $(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ değişmeli bir halkadır.

Bu bölümün sonunda $[0,0]$ yerine 0, $[1,0]$ yerine 1 yazacağız ve o zaman T2 ve Ç2 daha doğal gözükecek.

$(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ halkasının her halkada bulunmayan bir özelliği vardır: $[0,0]$'a eşit olmayan iki elemanın çarpımı $[0,0]$ olamaz. (Bkz. Alıştırma 10.29) Bu tür halkalara ***bölge*** (İngilizcesi *domain*) adı verilir.

Notlar

10.38. Önce özelliklerin adlarından sözedelim:

T : Toplamayla ilgili,

Ç : Çarpmayla ilgili

demektir. TÇ, toplama ve çarpmayla ilgili özellik anlamına gelir.

10.39. T1 ve Ç1 özellikleri toplamanın ve çarpmanın ***birleşmeli*** bir işlem olduğunu söylüyor. Açık açık yazılmamış ama teoremden toplamanın ve çarpmanın birer işlem olduğu anlaşılıyor, yani α, $\beta \in \mathbb{Z}$ ise, $\mathbb{Z}$'de $\alpha+\beta$ ve $\alpha\beta$ olarak yazılan elemanlar vardır.

10.40. T2, $[0,0]$ elemanının toplamanın, $[1,0]$ elemanının da çarpmanın ***etkisiz elemanı*** olduğunu söylüyor. Açık açık yazılmamış ama teorem aslında $[0,0]$ ve $[1,0]$ elemanlarının $\mathbb{Z}$'de olduğunu da ima ediyor.

10.41. T4 ve Ç4, toplamayla çarpmanın değişmeli işlemler olduğunu söylüyor.

10.42. T3'teki α', α'ya göre değişir ama verilmiş bir α için bu özelliği sağlayan bir tane α' vardır. α' elemanı $-\alpha$ olarak yazılır.

10.43. Ç3 unutulmamıştır! Tam Ç3 olmasa da Ç3'ün çok benzeri bir özellik ileride tanımlayacağımız kesirli sayılar için doğru olacaktır.

10.44. T1, T2 ve T3 önermelerini sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, [0,0])$ yapısına ***grup*** denir. Bu yapı bir de T4'ü sağlarsa yapıya ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** denir. Teoremi sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$ yapısına ***değişmeli*** ya da ***komütatif halka*** denir. Alıştırma 29'deki özelliğini sağlayan değişmeli halkalara ***bölge*** denir. Demek ki

$$(\mathbb{Z}, +, \times, [0,0], [1,0])$$

yapısı bir bölgedir. Bir bölgede $ab = ac$ ve $a \neq 0$ ise $b = c$ olur (neden?)

10.6 Sıralama

10.6.1 Sıralamanın Tanımı

Tamsayılarda toplama ve çarpma dışında bir de bir tamsıralama vardır. Sıra $\mathbb{Z}$'de sıralamayı tanımlamaya geldi.

$[a, b] \le [c, d]$ eşitsizliğinin, bildiğimiz tamsayılarda

$$a - b \le c - d$$

anlamına geleceğini defalarca söyledik. Ama eşitsizliğin tanımını

$$[a, b] \le [c, d] \Leftrightarrow a - b \le c - d$$

olarak veremeyiz çünkü $a - b \le c - d$ eşitsizliği doğal sayılarla ilgili bir önerme ve doğal sayılarda çıkarma işlemimiz yok. Buna benzer bir sorunla daha önce karşılaşmıştık. $a - b \le c - d$ eşitsizliğinin $a + d \le c + b$ eşitsizliğine denk olduğunu biliyoruz. Bu son eşitsizlikte sadece doğal sayılar ve toplama var. Şimdi $\mathbb{Z}$'de eşitsizliğin tanımını önerebiliriz:

$$[a, b] \le [c, d] \Leftrightarrow a + d \le c + b.$$

Ama daha önce iki kez yaptığımız gibi, bu tanımın geçerli bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Nitekim gene şöyle bir sorun olabilir: Ayşe'yle Bülent'e α ve β tamsayılarını verip bunlardan hangisinin diğerinden daha büyük olduğunu sorabiliriz. Bu sorunun yanıtını bulmak için Ayşe,

$$\alpha = [a, b] \text{ ve } \beta = [c, d]$$

olacak biçimde a, b, c, d doğal sayılarını bulur ve

$$a + d \text{ ile } c + b$$

doğal sayılarını karşılaştırır. Bülent de aynı yönteme başvurur (zaten başka yöntem de yok.) Ama Bülent, Ayşe'nin seçtiği a, b, c, d doğal sayılarını seçmek zorunda değil, Bülent

$$\alpha = [a', b'] \text{ ve } \beta = [c', d']$$

olacak biçimde a', b', c', d' doğal sayılarını seçip ve

$$a' + d' \text{ ile } c' + b'$$

doğal sayılarını karşılaştırabilir. Tanımın geçerli olması için Ayşe'yle Bülent'in karşılaştırmaları uyumlu olmak zorundadır, yani Ayşe, örneğin,

$$a + d \le c + b$$

sonucunu bulmuşsa, Bülent de

$$a' + d' \leq c' + b'$$

sonucunu bulmalıdır. Şimdi bunu kanıtlayalım.

Önsav 10.10. *Her a, b, c, d, a', b', c', $d' \in \mathbb{N}$ için, eğer $[a, b] = [a', b']$ ve $[c, d] = [c', d']$ ise,*

$$a + d \leq c + b \Leftrightarrow a' + d' \leq c' + b'.$$

Kanıt: Durum simetrik olduğundan sadece $\Rightarrow$ istikametini kanıtlamak yeterli. Demek ki,

$$\begin{aligned} a + b' &= a' + b \\ c + d' &= c' + d \\ a + d &\leq c + b \end{aligned}$$

önermelerini kabul edip $a' + d' \leq c' + b'$ önermesini kanıtlamalıyız. Kanıtlanacak önermenin sağına ve soluna $b + c$ eklersek dilediğimizi elde edeceğiz:

$$\begin{aligned} (a' + d') + (b + c) &= (a' + b) + (c + d') = (a + b') + (c' + d) \\ &= (a + d) + (b' + c') \leq (c + b) + (b' + c') \\ &= (b' + c') + (b + c). \end{aligned}$$

Şimdi $b + c$'leri sadeleştirip (doğal sayılarla bunu yapabileceğimizi biliyoruz) istenen $a' + d' \leq c' + b'$ eşitliğini elde ederiz. $\square$

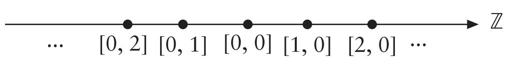
Ancak bu önsavdan sonra gönül rahatlığıyla

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow a + d \leq c + b$$

tanımını verebiliriz.

Alıştırmalar

10.45. $[0, 3] < [0, 2] < [0, 1] < [0, 0] < [1, 0] < [2, 0] < [3, 0]$ eşitsizliklerini kanıtlayın. (Burada, $\alpha < \beta$ ifadesi, $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha \neq \beta$ anlamına gelmektedir.)



10.46. Her n doğal sayısı için,

$$[n, 0] < \alpha < [n + 1, 0]$$

eşitsizliklerini sağlayan bir α tamsayısının olmadığını kanıtlayın.

10.47. Her n doğal sayısı için, $[0, n + 1] < \alpha < [0, n]$ eşitsizliklerini sağlayan bir α tamsayısının olmadığını kanıtlayın.

10.6.2 Sıralamanın Özellikleri

Hemen yukarda tanımladığımızın gerçekten bir sıralama olduğunu, hatta bir tamsıralama olduğunu gösterelim.

Önsav 10.11. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$ için,*
i. $\alpha \le \alpha$.
ii. $\alpha \le \beta$ *ve* $\beta \le \alpha$ *ise* $\alpha = \beta$.
iii. $\alpha \le \beta$ *ve* $\beta \le \gamma$ *ise* $\alpha \le \gamma$.
iv. Ya $\alpha \le \beta$ ya $\beta \le \alpha$.

Kanıt: Tahmin edildiği üzere her şey tanımlardan ve doğal sayıların bilinen özelliklerinden çıkacak.

$$\alpha = [a, b],\ \beta = [c, d],\ \gamma = [e, f]$$

olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayılarını bulalım.
i. Bu, $a + b = a + b$ eşitliğinden çıkıyor!
ii. Varsayımlara göre

$$a + d \le c + b \text{ ve } c + b \le a + d.$$

Demek ki $a + d = c + b$. Yani $[a, b] = [c, d]$.
iii. Varsayımlara göre

$$a + d \le c + b \text{ ve } c + f \le e + d.$$

Bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak,

$$(a + d) + (c + f) \le (c + b) + (e + d),$$

yani

$$(a + f) + (d + c) \le (b + e) + (d + c)$$

elde ederiz. Şimdi soldaki $d + c$'leri sadeleştirebilmemiz gerekiyor. Bunu da Teorem 6.21'de yaptık, daha doğrusu okura alıştırma olarak bıraktık.
iv. $a + d \le c + b$ ve $c + b \le a + d$ eşitsizliklerinden birinin doğru olduğunu kanıtlamamız gerekiyor ki doğal sayılarla ilgili olan bu önermeyi biliyoruz. □

Tamsayıların tamsıralanması sayesinde tamsayıları soldan sağa doğru sıralanmış biçimde temsil edebiliriz. Sağdaki tamsayıların soldakilerden daha büyük oldukları varsayılır. Tamsayılardaki sıralama "ayrık" bir sıralamadır. Her tamsayıdan hemen sonra gelen bir tamsayı ve hemen önce gelen bir tamsayı vardır. Nitekim eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [1, 0]$, α'dan daha büyüktür ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı yoktur ve $\alpha + [0, 1]$, α'dan daha küçüktür ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı yoktur. (Bunu Önsav 6.20.iii ile karşılaştırın.) Bu $\alpha + [1,0]$ ve $\alpha + [0,1]$ sayıları ilerde sırasıyla $\alpha + 1$ ve $\alpha - 1$ anlamına gelecekler. Aşağıdaki alıştırmalarda okurdan bunu kanıtlamasını istiyoruz.

Alıştırmalar

10.48. Eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [1,0]$ tamsayısının α'dan daha büyük olduğunu ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı olmadığını kanıtlayın.

10.49. Eğer $\alpha \in \mathbb{Z}$ ise, $\alpha + [0,1]$ tamsayısının α'dan daha küçük olduğunu ve bu iki tamsayı arasında bir başka tamsayı olmadığını kanıtlayın.

10.50. $\mathbb{Z}$'de en büyük ve en küçük elemanların olmadığını kanıtlayın.

10.51. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\alpha \geq [0,0]$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10.52. Her $\alpha \in \mathbb{Z}$ için, $\alpha\alpha \geq \alpha$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10.6.3 Sıralamayla İşlemlerin İlişkisi

Şimdi herhangi bir sayıyla toplamanın ve $[0,0]$'dan büyük (yani ***pozitif***) bir sayıyla çarpmanın sıralamaya saygı duyduğunu (yani işlem uygulanan elemanların sıralamasını bozmayacağını) kanıtlayalım.

Önsav 10.12. *$\alpha \leq \beta$ ve γ üç tamsayı olsun.*
i. $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.
ii. *Eğer $\gamma \geq [0,0]$ ise, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.*

Kanıt: $\alpha = [a,b]$, $\beta = [c,d]$, $\gamma = [e,f]$ olacak biçimde a, b, c, d, e, f doğal sayıları bulalım. Varsayıma göre $a + d \leq c + b$.

i. $\alpha + \gamma$ ve $\beta + \gamma$ tamsayılarını a, b, c, d, e, f doğal sayıları cinsinden yazalım.

$$\alpha + \gamma = [a,b] + [e,f] = [a+e, b+f],$$
$$\beta + \gamma = [c,d] + [e,f] = [c+e, d+f].$$

İstediğimiz $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ eşitsizliğinin doğru olması için,

$$(a+e) + (d+f) \leq (c+e) + (b+f),$$

yani

$$(a+d) + (e+f) \leq (c+b) + (e+f),$$

eşitsizliğinin doğru olması gerekiyor. Varsayıma göre $a + d \leq c + b$ eşitsizliği doğru olduğundan, bu son eşitsizlik de doğrudur [Teorem 6.21].

ii. Varsayımdaki $\gamma \geq [0,0]$ eşitsizliği $e \geq f$ demektir. $a+d \leq c+b$ eşitsizliği dışında bir de bunu aklımızda tutalım, her ikisini de kullanacağız.

$\alpha+\gamma$ ve $\beta+\gamma$ tamsayılarını a, b, c, d, e, f doğal sayıları cinsinden yazalım.

$$\alpha\gamma = [a,b][e,f] = [ae + bf, af + be],$$
$$\beta\gamma = [c,d][e,f] = [ce + df, cf + de].$$

İstediğimiz $\alpha\gamma \le \beta\gamma$ eşitsizliğinin doğru olması için,

$$(ae + bf) + (cf + de) \le (ce + df) + (af + be),$$

yani

$$(a + d)e + (b + c)f \le (b + c)e + (a + d)f,$$

eşitsizliğinin doğru olması gerekiyor. $e \ge f$ olduğundan, bir g doğal sayısı için,

$$e = f + g$$

eşitliği doğrudur. Bunu kullanarak kanıtlamak istediğimiz eşitlikteki e'yi yok edelim:

$$(a + d)(f + g) + (b + c)f \le (b + c)(f + g) + (a + d)f,$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Eşitliğin sağında ve solundaki

$$(a + b + c + d)f$$

terimleri var. Demek ki,

$$(a + d)g \le (b + c)g$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Ama $a+d \le c+b$ eşitsizliğini biliyoruz... İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 10.13 (Özet)**.** $(\mathbb{Z}, +, \times, \le, [0, 0], [1, 0])$ *yapısı Teorem 10.9'daki özelliklerden başka şu özellikleri de sağlar: Her* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ *için,*

S1. $\alpha \le \alpha$.
S2. $\alpha \le \beta$ *ve* $\beta \le \alpha$ *ise* $\alpha = \beta$.
S3. $\alpha \le \beta$ *ve* $\beta \le \gamma$ *ise* $\alpha \le \gamma$.
S4. *Ya* $\alpha \le \beta$ *ya* $\beta \le \alpha$.
TS. *Eğer* $\alpha \le \beta$ *ise* $\alpha + \gamma \le \beta + \gamma$.
ÇS. *Eğer* $\alpha \le \beta$ *ve* $\gamma \ge [0, 0]$ *ise,* $\alpha\gamma \le \beta\gamma$.

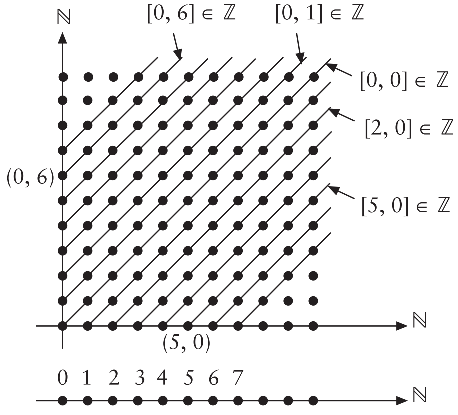
Notlar

10.53. Önce özelliklerin adları:
T: Toplamayla ilgili,
Ç: Çarpmayla ilgili,
S: Sıralamayla ilgili
demektir. Örneğin TS, toplama ve sıralamayla ilgili özellik anlamına gelir.

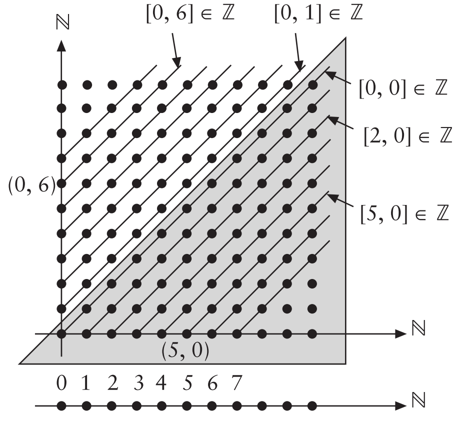
10.54. T1, T2, T3, T4, S1, S2, S3, TS'yi sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \le, [0, 0])$ yapısına ***sıralı abelyen grup*** adı verilir. Teorem 10.9 ve 10.13'ü sağlayan bir $(\mathbb{Z}, +, \times, \le, [0, 0], [1, 0])$ yapısına da ***sıralı halka*** denir. Sıralı halkalar bölge olmak zorundadırlar. (Neden?) Her sıralı halkada $-1 < 0 < 1$ olmak zorundadır. (Neden?)

10.7 ℕ'yi ℤ'ye Gömmek

İlkokuldan beri bize her doğal sayının bir tamsayı olduğu öğretilmiştir: Her doğal sayı bir tamsayıdır; doğal sayılar, tam tamına 0'dan büyükeşit tamsayılardır... demiştir öğretmen. Ama burada yaptığımız inşada hiç de öyle değil, hiçbir doğal sayı bir tamsayı değil, çünkü her tamsayı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesi (bkz. aşağıdaki şekil) ve hiçbiri ℕ'nin bir elemanı değil. Yani $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ilişkisi doğru olmadığı gibi, tam tersine, $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ ilişkisi doğru. Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere...



Bu sorunu ileride çözeceğiz ve ℕ kümesi gerçekten ℤ'nin altkümesi olacak; ama tabii bunun için ℤ'yi ya da ℕ'yi (ikisinden birini) değiştirmemiz gerekecek. Şimdilik sorunu çözme yolunda bir adım atalım ve ℤ'nin içinde ℕ'ye çok benzeyen bir altküme bulalım. Sadece küme olarak değil, toplama ve çarpma işlemleri ve sıralamalarıyla birlikte, ℤ'nin bulduğumuz bu altkümesiyla ℕ birbirine çok benzeyecekler.



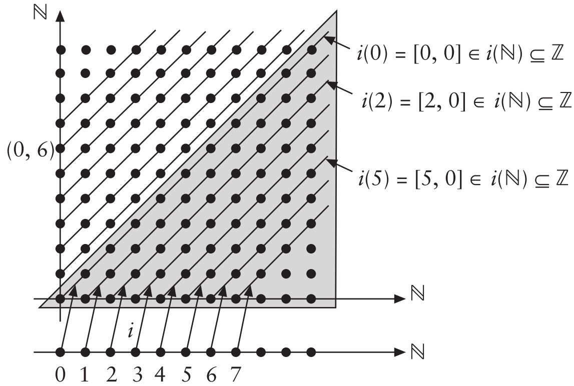
$x \in \mathbb{N}$ için, ℤ'nin $[x, 0]$ elemanının ilerde $x - 0$, yani x anlamına geleceğini söylemiştik. Demek ki aslında ℤ'nin hangi altkümesinin ℕ'ye benzeyeceğini de söylemişiz: $\mathbb{Z}$'nin yukarıda üçgensel gri alanda gösterilen $\{[x, 0] : x \in \mathbb{N}\}$ altkümesi $\mathbb{N}$'ye çok benzeyecek.

$\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden ve

$$i(x) = [x, 0]$$

kuralıyla tanımlanan i fonksiyonu ele alalım. Bu i fonksiyonunun bir "gömme" olduğunu, yani toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyon olduğunu kanıtlayacağız birazdan.

Önce sezgi kazanmak amacıyla fonksiyonu resmedelim.



Önsav 10.14. *i, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden, toplamaya, çarpmaya ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyondur; yani her x, $y \in \mathbb{N}$ için,*

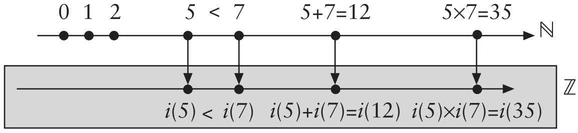
$$i(x + y) = i(x) + i(y),$$
$$i(xy) = i(x)i(y),$$
$$x < y \Leftrightarrow i(x) < i(y)$$

olur. Ayrıca

$$i(\mathbb{N}) = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$$

olur.

Önsavın ilk cümlesinin resmi aşağıda:



Önsav 5.13'ün resmi

Kanıt: Önce i'nin birebir olduğunu kanıtlayalım. x, $y \in \mathbb{N}$ için, $i(x) = i(y)$ olsun. Demek ki $[x, 0] = [y, 0]$, yani $x + 0 = y + 0$, yani $x = y$. Böylece i'nin birebir olduğu kanıtlanmış oldu. Eşitliklerin kanıtı da oldukça biçimsel:

$$i(x + y) = [x + y, 0] \text{ ve } i(x) + i(y) = [x, 0] + [y, 0] = [x + y, 0].$$

Demek ki $i(x+y) = i(x) + i(y)$. Diğer önermeler de benzer şekilde kanıtlanır. □

Önsav, $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$ yapısıyla $(i(\mathbb{N}), +, \times, \leq)$ yapısının birbirine çok benzediğini, aralarındaki tek farkın elemanlarının adları olduğunu söylüyor. $\mathbb{N}$'de x dediğimize $i(\mathbb{N})$'de $i(x)$ diyoruz. Bu, Ali'ye Veli, Ayşe'ye Fatma demek gibi bir şey... Ya da beş yerine *five*, artı yerine *plus* demek gibi bir şey. Teşbihte hata olmazmış. Bu benzerlik yüzünden i'ye ***gömme*** adı verilir. Gerçekten de i fonksiyonu $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$ yapısını bir anlamda $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ yapısının içine gömüyor.

$\mathbb{Z}$'nin $i(\mathbb{N})$ altkümesi toplama ve çarpma işlemleri altında kapalıdır elbet ama $\mathbb{Z}$'nin bu özelliğe sahip başka altkümeleri de vardır. Örneğin,

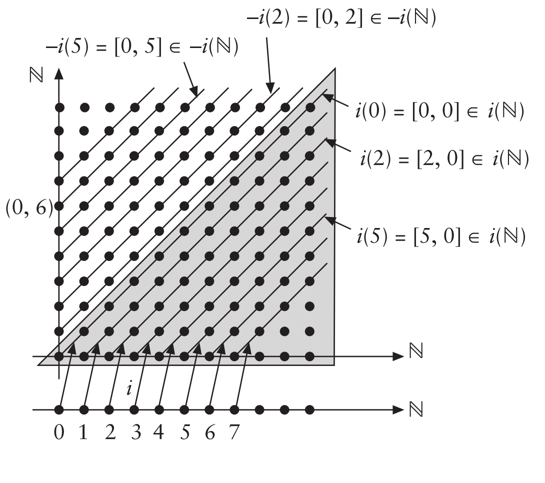
$$\{[2x, 0] : x \in \mathbb{N}\} \text{ ve } \{[x, 0] : x \in \mathbb{N} \text{ ve } x > 5\}$$

kümeleri $\mathbb{Z}$'nin toplama ve çarpma altında kapalı altkümelerdir. Ama $i(\mathbb{N})$ altkümesi gene de $\mathbb{Z}$'nin belli bir özelliğe sahip biricik altkümesidir. Örneğin, $i(\mathbb{N})$, $\mathbb{Z}$'nin, $[0, 0]$ ve $[1, 0]$ elemanlarını içeren ve toplama altında kapalı en küçük altkümesidir. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

i fonksiyonunun doğallığına ikna etmek amacıyla okura şu sonucu sunalım:

Önsav 10.15. *Eğer i, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden ve toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir fonksiyonsa, o zaman ya her $x \in \mathbb{N}$ için $i(x) = [0, 0]$ olur ya da her $x \in \mathbb{N}$ için $i(x) = [x, 0]$ olur.* □

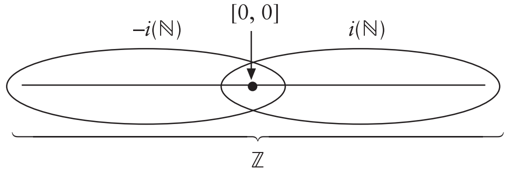
Konumuzun candamarını teşkil etmediğinden bu önsavı kanıtlamayıp okura bırakıyoruz. Daha canalıcı sonuçlarımız var. Bir sonraki önsav, ilerde, $\mathbb{Z}$'nin, doğal sayılarla doğal sayıların eksilerinden oluştuğunu söyleyecek. Önsavın kanıtına geçmeden önce aşağıdaki resmi incelemenizi özellikle öneririz.



Önsav 10.16. *Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}),\\
&i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = [0,0],\\
&i(\mathbb{N}) = \{[a,b] \in \mathbb{Z} : a \geq b\},\\
&-i(\mathbb{N}) = \{[a,b] \in \mathbb{Z} : a \leq b\}.
\end{aligned}$$

İşte önsavın resmi:



Önsav 5.15'in resmi

Kanıt: Son iki eşitliği kanıtlayalım önce. Dördüncü eşitlik birinciden çıktığından ($-i(\mathbb{N})$ kümesi, tanımı gereği, $i(\mathbb{N})$'deki elemanların toplamsal terslerinden oluşur), üçüncü eşitliği kanıtlamak yeterli. Üçüncü eşitliğin $\subseteq$ kısmı çok bariz. Diğer yönünü kanıtlayalım. $a \geq b$, iki doğal sayı olsun. Doğal sayılarda eşitsizliğin tanımından dolayı, bir x doğal sayısı için

$$b + x = a = a + 0$$

eşitlikleri doğrudur. Demek ki

$$[a,b] = [x,0] = i(x) \in i(\mathbb{N}).$$

Birinci eşitlik son iki eşitlikten çıkar.

$i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = [0,0]$ eşitliğini kanıtlayalım.

$$\alpha \in i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N})$$

olsun. Demek ki $a \geq b$ ve $c \geq d$ doğal sayıları için

$$\alpha = [a,b] = [d,c].$$

Dolayısıyla $a + c = d + b$. Bu eşitlikten ve $a \geq b$ ve $c \geq d$ eşitsizliklerinden $a = b$ eşitliği çıkar. Demek ki

$$\alpha = [a,b] = [a,a] = [0,0]$$

olur. □

Demek ki $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{N}$'ye çok benzeyen $i(\mathbb{N})$ kümesinin elemanlarından ve bu kümenin elemanlarının eksilerinden oluştuğunu kanıtladık. Şimdilik

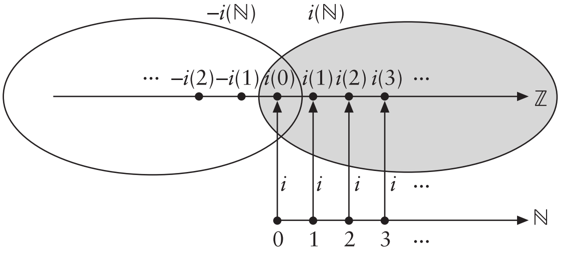
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$$

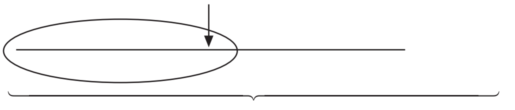
eşitliklerimiz yok ama bunun yerine bu eşitliklere çok benzeyen

$$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \text{ ve } i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = \{[0,0]\}$$

eşitliklerimiz var.

Bir sonraki altbölümde, gözümüzü karartıp $i(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{N}$'yi "özdeşleştireceğiz". Şimdilik genel resim şöyle:



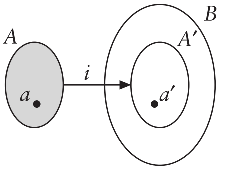


10.8 Kesip Yapıştırma ya da Özdeşleştirme

Bu ve bundan sonraki altbölümlerde $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin ayrık kümeler olma sorununu çözeceğiz. $\mathbb{N}$'yi aslında $\mathbb{Z}$'nin içinde altküme olarak bulmak istiyoruz ama şimdiye kadar yaptıklarımzdan, tam tersine, $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin ayrık kümeler oldukları çıkıyor. Bu üzücü duruma son vereceğiz.

Bunu "kesip yapıştırma" yöntemiyle yapacağız. Matematikte çok sık kullanılan ve adına "özdeşleştirme" denilen "kesip yapıştırma" yöntemini açıklayalım şimdi. Daha sonra esas konumuza geri döneceğiz.

A ve B iki küme olsun. B'de A'ya "çok benzeyen" bir A' altkümesi olsun. "Çok benzemek"ten tam kastımızı açıklamayacağız, ama bu en azından A ile A' arasında bir eşleme var anlamına gelir.

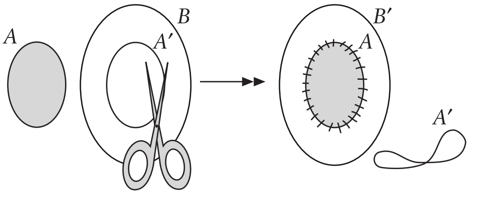


Duruma göre, A ve A' kümeleri arasında bir eşlemenin varlığından daha yakın bir ilişki de isteyebiliriz, ama aralarında en az bir eşlemenin olması şart. A kümesini, B kümesinin A' altkümesi olarak görmek istiyoruz. Matematikte bu

"A ile A' kümelerini özdeşleştirelim" biçiminde ifade edilir. Bu bölümde bunun tam ne anlama geldiğini ve nasıl yapılacağını açıklayacağız. Özdeşleştirme aşağı yukarı şöyle yapılır: A' kümesi B kümesinden çıkarılır ve yerine kendisine çok benzeyen A kümesi yapıştırılır ya da aşağıdaki şekildeki gibi dikilir. Böylece B kümesinden A' kaybolur ve yerine A gelir. Bunu matematiksel olarak yapmak oldukça kolay: B kümesi yerine,

$$B' = (B \setminus A') \cup A$$

kümesi almak yeterli.



Okurun aşina olduğunu düşündüğümüz bir örnek verelim. Bir polinom

$$r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$$

biçiminde bir ifadedir. Diyelim r_i katsayılarını reellerden, yani $\mathbb{R}$ kümesinden aldık. Burada n, herhangi bir doğal sayı olabilir. Eğer $r_n \neq 0$ ise n'ye polinomun derecesi adı verilir. Derecesi 0 olan polinomlar

$$r_0$$

biçiminde yazılırlar. Bunları reel sayı olarak görmek âdettendir, ama tabii aslında reel sayı değildirler, polinomdurlar, derecesi 0 olan polinomdurlar. Derecesi 0 olan polinomları reel sayı olarak görmenin hiçbir sakıncası yoktur ve hatta hayatı kolaylaştırdığı için faydası bile vardır. Dolayısıyla reel sayılar derecesi 0 olan polinomlar özdeşleştirilirler.

Aslında özdeşleştirme çok basit bir konudur, anlaşılacak bir yanı yoktur (ve bu yüzden anlaşılmayabilir!) ama işte bazen böyle en basit konular zihinde soru işaretleri uyandırabilirler. Küçük sinek mide bulandırır misali.

A ile B'nin A' kümesi i vasıtasıyla özdeşleştirildikten sonra A' kümesinin $i(a)$ elemanı yerine a yazılır.

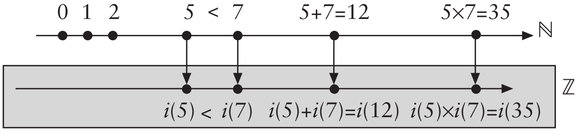
Bir önceki bölümdeki $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu da aynen böyle bir fonksiyon: Birebir, toplamaya ve çarpmaya ve sıralamaya saygı duyuyor. Birazdan yukardaki yöntemle $\mathbb{N}$ ile $i(\mathbb{N})$'yi özdeşleştireceğiz.

10.9 Nihayet Yılların $\mathbb{Z}$'si

i gömmesini kullanarak $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Z}$'nin $i(\mathbb{N})$ altkümesini özdeşleştireceğiz ve insanlığın yüzyıllardır bildiği, hissettiği, kullandığı $\mathbb{Z}$'ye kavuşacağız.

Bundan böyle her $x \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{Z}$'nin $i(x) = [x, 0]$ elemanını x olarak yazacağız. Böylece $\mathbb{N}$'yi $\mathbb{Z}$'nin içinde bulacağız. Yapay bir biçimde olsa da...

Böyle yapmakla $\mathbb{N}$'deki toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı değiştirmemiş olacağız, örneğin $5 + 7$ toplamı eski $\mathbb{N}$ yapısında 12 yapıyorsa, $\mathbb{Z}$'de de 12 yapacak, çünkü i toplamaya saygı duyuyor. Eski şeklimizi bellek tazelemek için yeniden gösterelim:



Demek ki artık $[0, 0] = i(0)$ elemanı yerine 0, $[1, 0] = i(1)$ elemanı yerine 1, $[2, 0] = i(2)$ elemanı yerine 2, $[0, 1] = -i(1)$ elemanı yerine -1, $[0, 2] = -i(2)$ elemanı yerine -2 yazacağız.

Önsav 10.16'da kanıtladığımız

$$\mathbb{Z} = i(\mathbb{N}) \cup -i(\mathbb{N}) \text{ ve } i(\mathbb{N}) \cap -i(\mathbb{N}) = \{[0, 0]\}$$

eşitlikleri şimdi artık

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N} \cap -\mathbb{N} = \{0\}$$

eşitlikleri halini almış oldu.

Teorem 10.13'te

$$(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, [0, 0], [1, 0])$$

yapısının sıralı bir halka olduğunu kanıtlamıştık. Artık, doğal sayıları da içeren

$$(\mathbb{Z}, +, \times, \leq, 0, 1)$$

sıralı halkasından sözedeceğiz.

$\mathbb{Z}$ **Halka Yapısının Karakteristik Özelliği.** Ne dediği anlaşıldığında aşağıdaki teoremin kanıtı çok kolaydır. Kanıtlamadan ve anlamını anlatmadan geçiyoruz ama buraya kadar okuyan okurun anladığını ümit ediyoruz.

Teorem 10.17. *Pozitif elemanları doğal sayılar yapısına eşyapısal olan her sıralı halka $\mathbb{Z}$'ye eşyapısaldır.* □

11. Kesirli Sayılar Kümesi $\mathbb{Q}$

Giriş. Bir önceki uzun bölümde tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$'yi matematiksel olarak tanımlayıp var etmiştik.

Tamsayılarda, doğal sayılarda da yapılan toplama ve çarpma işlemleri yapıldığı gibi, bunlara ek olarak bir de çıkarma işlemi yapılabilir. Bunu biliyoruz. Zaten tamsayıları sadece çıkarma yapabilelim diye özellikle yaratmıştık/icat etmiştik/keşfetmiştik/tanımlamıştık.

Tamsayılarda toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapılabilir ama bölme yapılamaz, örneğin tamsayılarda 2, 3'e bölünmez, bölme yapabilmek için kesirli sayılara geçmek zorundayız.

Bu bölümde kesirli sayıları matematiksel anlamda var edeceğiz. Bunu tamsayıları kabullenerek yapacağız. Yani tamsayıları ve tamsayılarda tanımlanmış olan toplama, çıkarma ve çarpmanın temel özelliklerini bildiğimizi varsayıp, ki biliyoruz, kesirli sayılar kümesini tanımlayacağız. Ardından kesirli sayılar kümesi üzerine, adına toplama, çıkarma, çarpma ve bölme diyeceğimiz dört işlem tanımlayacağız. Bunlara ek olarak bir de kesirli sayılar üzerinde bir sıralama tanımlayacağız.

Yöntemimiz ve kanıtlarımız bir önceki bölümdeki yöntem ve kanıtlara çok benzediğinden, bu bölümde o kadar ayrıntıya girmeyeceğiz, kanıtların bir çoğunu okura alıştırma olarak bırakacağız.

Kullanacağımız yöntem sadece tamsayılara değil, başka halkalara da uygulanabileceğinden, kitabın sonundaki Ek 38'da çok daha genel bir yöntem göstereceğiz. O bölümde sadece tamsayılarla değil, birçok bakımdan tamsayıları andıran genel bazı matematiksel yapılarla uğraşacağız.

11.1 Kesirli Sayılar Kümesi

Bir an için kesirli sayıları bildiğimizi varsayalım. Zaten sezgisel olarak kesirli sayıları biliyoruz. Bunlar, $2/3$ gibi, $-9/6$ gibi ya da $5/1$ gibi sayılardır. İlkokuldan beri bildiğimiz üzere, her kesirli sayı, a ve b tamsayıları için a/b biçiminde yazılır.

a ve b tamsayıları var elimizde ama a/b diye bir sayı yok henüz. a ve b

tamsayılarından yola çıkarak, matematiksel yöntemlerle a/b diye matematiksel bir nesne yaratacağız. Tamsayılarda "a bölü b" diye bir kavram olmadığından, tanımı "a/b, a bölü b olsun" şeklinde veremeyiz. Biraz daha özen göstermeliyiz.

Bir an için, a/b'yi (a, b) ikilisi olarak tanımlayalım. Ama o zaman, $2/3 = 4/6$ eşitliğinden dolayı,

$$(2, 3) = (4, 6)$$

eşitliği doğru olmalı, ki bu son eşitliğin doğru olmadığını biliyoruz.

Madem ki $(2, 3)$ ikilisi $(4, 6)$ ikilisine eşit olmalı ama maalesef değil, o zaman biz de "eşit olmalı" yerine "denk olsunlar" deriz...

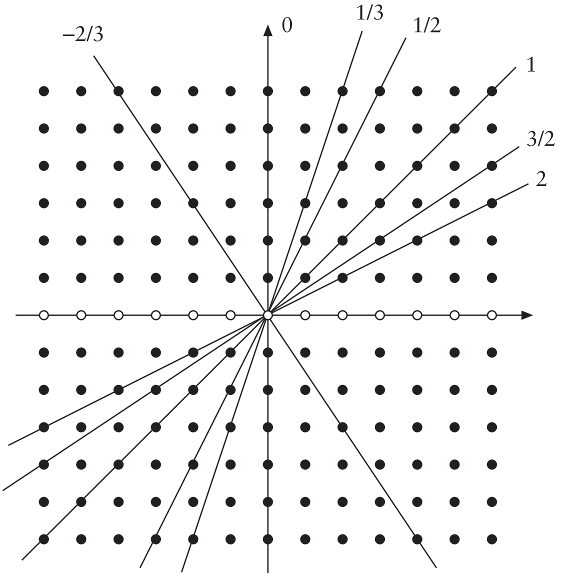
$$(2, 3), (4, 6), (6, 9), (-2, -3)$$

gibi tamsayı ikililerine birazdan "denk" diyeceğiz.

Aşağıdaki şekilde her doğrunun üstündeki noktalar birbirlerine "denk"tir. Örneğin, birazdan tanımı verdiğimizde,

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), (-1, -2), (-2, -4)$$

ikililerinden her biri diğerlerine denk olacaklar. İleride aşağıda gördüğünüz doğruların (üstündeki noktalardan oluşan kümelerin) her biri bir kesirli bir sayı olacak, daha doğrusu "olarak tanımlanacak".



Yalnız bir şeye dikkat etmek gerekiyor: a/b kesirli sayısında, $b \neq 0$ olduğundan, b'nin 0'a eşit olmadığı (a, b) ikilileriyle çalışmalıyız.

Matematiksel tanıma giden sürece girelim. İkinci koordinatı 0 olmayan tamsayı ikilileri arasında şöyle bir ikili ilişki tanımlamak istiyoruz:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a/b = c/d.$$

Ama sağ taraftaki eşitlik, "a bölü b" gibi kesirli sayıların varlığını varsayıyor. Henüz varolmayan bir şeyden sözedemeyiz. Buna da bir çözüm bulmalıyız. "$a/b = c/d$" eşitliğini kesirli sayılardan sözetmeden ifade etmeliyiz, ama bu çok kolay, ilkokuldan beri bildiğimiz üzere,

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc.$$

Demek ki ikinci koordinatı 0 olmayan tamsayı ikilileri arasında, $\equiv$ simgesiyle göstereceğimiz ikili ilişkiyi

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

olarak tanımlayabiliriz.

Tanım. *$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ olsun. X üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini, X'in her (a, b), $(c, d) \in X$ ikilisi için,*

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

olarak tanımlayalım.

Örneğin, verilmiş bir $b \neq 0$ için,

$$(0, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow c = 0,$$
$$(b, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow c = d.$$

(Ve tabii bir de d'nin 0 olmaması gerekir.) Ayrıca her $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için,

$$(a, b) \equiv (ax, bx) \text{ ve } (0, 1) \equiv (0, x).$$

Önsav 11.1. *$\equiv$ ikili ilişkisi $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ kümesi üzerine bir denklik ilişkisidir. Yani, her (a, b), (c, d), $(e, f) \in X$ için,*
i. $(a, b) \equiv (a, b)$
ii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ise* $(c, d) \equiv (a, b)$
iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ *ve* $(c, d) \equiv (e, f)$ *ise* $(a, b) \equiv (e, f)$
olur.

Kanıt: Bu ifadeleri kanıtlamak için, $\equiv$ ilişkisinin tanımına ve tamsayıların kanıtladığımız (ya da bildiğimiz ya da kolaylıkla kanıtlayabileceğimiz) özelliklerine başvurmak gerekiyor.
i. Tanıma bakılırsa, $(a, b) \equiv (a, b)$ ifadesi tam tamına, $ab = ba$ anlamına geliyor. Tamsayılar arasındaki bu eşitliği de Teorem 10.9'dan biliyoruz. (Bundan sonra tamsayılarla ilgili önermeler için referans vermeyeceğiz. Bunlar ya önceki sayfalarda kanıtlanmışlardır ya da kolaylıkla kanıtlanabilirler.)
ii. Çok kolay.
iii. $(a, b) \equiv (c, d)$ ve $(c, d) \equiv (e, f)$ denklikleri

$$ad = bc$$

ve

$$cf = de$$

anlamına gelir. Bu eşitlikleri kullanarak, $(a,b) \equiv (e,f)$ denkliğini, yani

$$af = be$$

eşitliğini kanıtlamamız gerekiyor. Bildiğimiz iki eşitliği altalta yazıp çarpalım:

$$adcf = bcde$$

elde ederiz. Çiftlerin ikinci koordinatları 0 olmadığından, $d \neq 0$. Dolayısıyla her iki taraftan da d'leri sadeleştirip $acf = bce$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi c'leri sadeleştirmek kaldı. Eğer $c \neq 0$ ise sorun yok, bu sadeleştirmeyi yapabiliriz ve istediğimiz $af = be$ eşitliğini elde ederiz. Bundan böyle $c = 0$ eşitliğini varsayalım. Bu durumda, $ad = bc$ ve $cf = de$ eşitliklerinden $ad = 0 = de$ elde ederiz. $d \neq 0$ olduğundan, bu eşitliklerden, $a = 0 = e$ elde ederiz. Demek ki hem $af = 0$ hem de $be = 0$, yani $af = be$. İstediğimizi kanıtladık. $\square$

Bu önsavdan sonra denklik sınıflarından ve $X/\equiv$ bölüm kümesinden sözedebiliriz. Bunların ne olduklarını anımsatalım. $(a,b) \in X$ için, (a,b)'nin denklik sınıfını $[(a,b)]$ olarak değil, daha basit bir yazılımla $[a,b]$ olarak göstereceğiz:

$$[a,b] = \{(x,y) \in X : ay = bx\}.$$

Bu arada, sık sık kullanılacak olan,

$$[a,b] = [c,d] \Leftrightarrow ad = bc$$

eşitliği de unutulmamalıdır. Dikkat ederseniz, her $x \in X$ için, $[x]$, X'in bir altkümesidir. Bölüm kümesini de anımsatalım:

$$X/\equiv\, = \{[x] : x \in X\}.$$

Şimdi kesirli sayılar kümesinin tanımını verebiliriz.

Tanım. $\mathbb{Q} = X/\equiv$.

Bundan böyle, her $a \in \mathbb{Z}$ ve her $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, $[a,b]$ denklik sınıfına ***kesirli sayı*** diyeceğiz. $\mathbb{Q}$ da elbette ***kesirli sayılar kümesi*** olacak.

İleride, $[a,b]$ sınıfını, alışık olduğumuz üzere, a/b olarak yazacağız.

Kesirli sayılar kümesini tanımladıktan sonra, sıra, kesirli sayılarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini tanımlamaya geldi. Bunlara ek olarak bir de sıralamayı tanımlamalıyız.

Kanıtların birçoğunu okura bırakacağız. Okur $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ ile ilgili her şeyi bildiğini varsayabilir.

Toplamayla çıkarmadan başlayalım.

11.2 Toplama ve Çıkarma

$[a,b]$ ve $[c,d]$ kesirli sayılarını ele alalım. Bu iki kesirli sayıyı toplayacağız. $[a,b]$'nin a/b, $[c,d]$'nin c/d anlamına geldiğini biliyoruz. İlkokulda öğrendiğimiz kesirli sayı toplamasına göre,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

olmalı. Demek ki, $[a,b]$ ve $[c,d]$ kesirli sayılarının toplamını $[ad+bc,bd]$ olarak tanımlamalıyız:

$$[a,b]+[c,d]=[ad+bc,bd].$$

Tabii daha önce bu tanımın geçerli bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Her şeyden önce, eğer (a,b) ve $(c,d)\in X$ ise,

$$(ad+bc,bd)\in X$$

olmalı; yani eğer b ve d, 0'a eşit değillerse, bd de 0'a eşit olmamalı; ama bunu Alıştırma 10.29'dan biliyoruz.

Tanımın geçerli olması için, bunun dışında bir de şu kanıtlanmalı: Eğer

$$[a,b]=[a',b'] \text{ ve } [c,d]=[c',d']$$

ise, yani $ab'=ba'$ ve $cd'=dc'$ ise,

$$[a,b]+[c,d]=[a',b']+[c',d']$$

eşitliği geçerli olmalı, yani,

$$[ad+bc,bd]=[a'd'+b'c',b'd']$$

olmalı, yani,

$$(ad+bc,bd)\equiv(a'd'+b'c',b'd')$$

olmalı, yani,

$$(ad+bc)b'd'=bd(a'd'+b'c')$$

olmalı, ki birbirine eşit kesirli sayıların toplamı birbirine eşit olsun... Demek ki kanıtlamamız gereken önsav şu:

Önsav 11.2. *Her a, c, a', $c'\in\mathbb{Z}$ ve b, d, b', $d'\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ için,*

$$ab'=ba' \text{ ve } cd'=dc'$$

ise,

$$(ad+bc)b'd'=bd(a'd'+b'c')$$

olur.

Kanıt: Son derece basit olan bu önsavın kanıtını okura bırakıyoruz. □

Bu önsav sayesinde toplamayı,

$$[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$$

olarak tanımlayabiliriz. Şimdi toplamanın en temel özelliklerini kanıtlamalıyız. Örneğin, ileride 0 olarak yazacağımız $[0, 1]$ kesirli sayısı toplamanın etkisiz elemanı olmalı, yani, her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için,

$$\alpha + [0, 1] = [0, 1] + \alpha = \alpha$$

olmalı. İleride a/b anlamına gelecek olan $[a, b]$ elemanının ***toplamsal tersi***, ileride $-a/b$ anlamına gelecek olan $[-a, b]$ elemanı olmalı, yani

$$[a, b] + [-a, b] = [0, 1]$$

olmalı. Her şey yolunda gidecek.

Önsav 11.3. i. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ için, $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.*
ii. $[0, 1]$ *toplamanın **etkisiz elemanı**dır, yani her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için,*

$$\alpha + [0, 1] = [0, 1] + \alpha = \alpha.$$

iii. *Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 1]$ eşitliğini sağlayan bir $\alpha' \in \mathbb{Q}$ vardır. Eğer $\alpha = [a, b]$ ise $\alpha' = [-a, b]$ olmak zorundadır.*
iv. *Her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.*

Kolay kanıtı okura bırakıyoruz. Demek ki, $(\mathbb{Q}, +, [0, 1])$ yapısı abelyen bir grup, aynen $(\mathbb{Z}, +, 0)$ yapısı gibi.

$\alpha \in \mathbb{Q}$ verildiğinde, Önsav 11.3.iii'teki α' elemanı biriciktir, nitekim,

$$\alpha + \alpha' = \alpha'' + \alpha = [0, 1]$$

ise, Önsav 11.3.i ve ii'den dolayı,

$$\alpha' = [0, 1] + \alpha' = (\alpha'' + \alpha) + \alpha' = \alpha'' + (\alpha + \alpha') = \alpha'' + [0, 1] = \alpha''$$

olur.

Önsav 11.3.iii'te varlığı söylenen ve biraz önce biricik olduğunu kanıtladığımız eleman α' olarak değil de $-\alpha$ olarak yazılır ve adına α'nın ***toplamsal tersi*** denir. Önsav 11.3.iii'e bakınca, α', α'nın toplamsal tersiyse, α'nın da α' elemanının toplamsal tersi olduğu görülür, çünkü

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = [0, 1]$$

eşitliği α ve α' elemanlarına göre simetrik. Demek ki α'nın toplamsal tersinin toplamsal tersi α'dır, bir başka deyişle,

$$-(-\alpha) = \alpha$$

olur. Bunu şöyle de görebiliriz: Önsav 11.3.iii'e göre $\alpha = [a, b]$ ise

$$-\alpha = [-a, b]$$

olur ve gene aynı nedenden,

$$-(-\alpha) = [-(-a), b] = [a, b] = \alpha$$

olur. $-[0, 1] = [0, 1]$ eşitliği de kolay.

Kesirli sayılarda çıkarmayı tanımlayabiliriz: Her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ için,

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

tanımını yapalım. $-\alpha \pm \beta$ eleman(lar)ını da $(-\alpha) + (\pm\beta)$ olarak tanımlayabiliriz. Bu tanımdan sonra,

$$-(-\alpha + \beta) = \alpha - \beta$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak işten bile değildir.

11.3 Çarpma ve Bölme

Toplamadan sonra çarpmayı tanımlamalıyız. Bunun da nasıl yapılması gerektiği belli olmalı:

$[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarını ele alalım. Bu iki kesirli sayıyı çarpacağız. $[a, b]$'nin a/b, $[c, d]$'nin c/d anlamına geldiğini biliyoruz. İlkokulda öğrendiğimiz kesirli sayı çarpmasına göre,

$$a/b \times c/d = ac/bd$$

olmalı. Demek ki, $[a, b]$ ve $[c, d]$ kesirli sayılarının çarpımını $[ac, bd]$ olarak tanımlamalıyız:

$$[a, b][c, d] = [ac, bd].$$

$bd \neq 0$ olmadığından, ikinci koordinatta sorun yaşamıyoruz.

Gene her zamanki gibi bu tanımın gerçek bir tanım olduğu kanıtlanmalı. Yani şu önerme kanıtlanmalı:

$(a, b) \equiv (a', b')$ ve $(c, d) \equiv (c', d')$ ise o zaman $(ac, bd) \equiv (a'c', b'd')$ olur.

Bunun kanıtı çok basittir ve okura bırakılmıştır. Böylece kesirli sayıları çarpabiliriz. Tanımın hemen ardından çarpmanın tahmin edilen özellikleri kanıtlanmalı.

Önsav 11.4. i. *Her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ *için,* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.
ii. $[1,1]$ *çarpmanın* ***etkisiz elemanıdır****, yani her* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *için,*

$$\alpha[1,1] = [1,1]\alpha = \alpha.$$

iii. $[1,1] \neq [0,1]$.
iv. *Her* α, $\beta \in \mathbb{Q}$ *için,* $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Bu özelliklerin aynılarının $\mathbb{Z}$ ve çarpma için de geçerli olduklarını gördük. Ama çarpmanın kesirli sayılara özgü özel bir özelliği var: $[0,1]$ dışında her kesirli sayının çarpımsal tersi vardır:

Önsav 11.5. *Her* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{[0,1]\}$ *için,* $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha = [1,1]$ *eşitliğini sağlayan bir* $\alpha' \in \mathbb{Q}$ *vardır. Eğer* $\alpha = [a,b]$ *ise* $\alpha' = [b,a]$ *olmak zorundadır.*

Önsav 11.4 ve 11.5'i kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Önsav 11.5'in ikinci kısmı ilerde, a/b'nin çarpımsal tersinin b/a anlamına geldiğini söyleyecek. Laf açılmışken,

$$[a,b] = [a,1][1,b]$$

eşitliğinin ileride önem kazanacağını, $[a,b]$ kesirli sayısını a/b olarak yazmamızı sağlayacağını söyleyelim.

$\alpha \in \mathbb{Q}$ verildiğinde, Önsav 11.5'teki α' elemanı biriciktir, nitekim,

$$\alpha\alpha' = \alpha''\alpha = [1,1]$$

ise, Önsav 11.4.i ve ii'den dolayı,

$$\alpha' = [1,1]\alpha' = (\alpha''\alpha)\alpha' = \alpha''(\alpha\alpha') = \alpha''[1,1] = \alpha''$$

olur. Bu eleman α' olarak değil de α^{-1} olarak yazılır ve adına α'nın ***çarpımsal tersi*** denir. Önsav 11.3.ii'ye bakınca, α', α'nın çarpımsal tersiyse, α'nın da α' elemanının çarpımsal tersi olduğu görülür, çünkü

$$\alpha\alpha' = \alpha'\alpha = [1,1]$$

eşitliği α ve α' elemanlarına göre simetriktir. Demek ki α'nın çarpımsal tersinin çarpımsal tersi α'dır, bir başka deyişle,

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$$

olur. Bu eşitliği Önsav 11.5'in ikinci yarısına bakınca da görürüz:

$$([a,b]^{-1})^{-1} = [b,a]^{-1} = [a,b].$$

Bu aşamada kolaylıkla bölmeyi tanımlayabiliriz. Eğer α, $\beta \in \mathbb{Q}$ ise ve

$$\beta \neq [0,1]$$

ise, "α bölü β"yı $\alpha\beta^{-1}$ olarak tanımlayalım.

Bir de çarpmanın toplamaya göre dağıldığını kanıtlamak gerekiyor.

Önsav 11.6. *Her* α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ *için*, $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Bunun da kanıtını okura bırakıyoruz. Her zaman olduğu gibi $\mathbb{Q}$'da toplama ve çarpmanın tanımlarına ve bu işlemlerin $\mathbb{Z}$'de bilinen özelliklerine inmek gerekir.

Önsav 11.3, 11.4, 11.5, 11.6'daki özellikleri sağlayan bir yapıya ***cisim*** denir. Demek ki $(\mathbb{Q}, +, \times, [0,1], [1,1])$ yapısı bir cisimdir.

Alıştırmalar

11.1. α, $\beta \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha\beta = [0,1]$ ise, ya $\alpha = [0,1]$ ya da $\beta = [0,1]$ eşitliklerinden birinin doğru olması gerektiğini kanıtlayın.

11.2. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha + \alpha = [2,1]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

11.3. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $-\alpha = [-1,1]\alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

11.4 Sıralama

Sıra sıralamaya geldi... Bilindiği gibi,

$$a/b \leq c/d \Leftrightarrow ad \leq bc$$

önermesi doğru **değildir**, bunun doğru olması için b ve d'nin pozitif olmaları gerekir. Eğer doğru olsaydı kesirli sayılarda eşitsizliği

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow ad \leq bc$$

olarak tanımlardık. Bu sorunu çözmek kolay:

$$[a,b] = [-a,-b]$$

eşitliği doğru olduğundan, bir $[a,b]$ kesirli sayının b "koordinatını" (ya da paydasını!) her zaman pozitif seçebiliriz. Şöyle bir yöntem izleyelim: $b \in \mathbb{Z}$ için, ε_b, b'nin işareti olsun, yani,

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 1 & \text{eğer } b > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } b = 0 \text{ ise} \\ -1 & \text{eğer } b < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Her u, $v \in \mathbb{Z}$ için, $\varepsilon_{uv} = \varepsilon_u\varepsilon_v$ eşitliğine dikkatinizi çekeriz. Ayrıca her $[a,b] \in \mathbb{Z}$ için,

$$[a,b] = [\varepsilon_b a, \varepsilon_b b]$$

ve $\varepsilon_b b > 0$ olur. Şimdi artık eşitsizliğin tanımını verebiliriz:

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow \varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc.$$

Daha tanım tamamlanmadı ama. Tanımın geçerli olması için kanıtlanması gereken bir şey daha var. Önerilen tanımın geçerli bir tanım olması için, sağ taraftaki koşulun a, b, c ve d'ye göre değil, $[a, b]$ ve $[c, d]$'ye göre değişmesi gerekir. Yani şu önsav kanıtlanmalı.

Önsav 11.7. *Her a, c, a', $c' \in \mathbb{Z}$ ve b, d, b', $d' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, eğer*

$$[a, b] = [a', b'] \text{ ve } [c, d] = [c', d']$$

ise, o zaman,

$$\varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc \Leftrightarrow \varepsilon_{d'} a'd' \leq \varepsilon_{b'} b'c'$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc$ eşitsizliğini varsayıp $\varepsilon_{d'} a'd' \leq \varepsilon_{b'} b'c'$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. $\varepsilon_d d$ yerine d yazarsak ve benzer değişimi $\varepsilon_b b$, $\varepsilon_{d'} d'$ ve $\varepsilon_{b'} b'$ için yaparsak, $\varepsilon_b = \varepsilon_{d'} = \varepsilon_{d'} = \varepsilon_{b'} = 1$ eşitliklerini ve b, d, b' ve d' tamsayılarının pozitif olduklarını varsayabiliriz. Böylece varsayımlarımız

$$ab' = ba',\ cd' = c'd,\ ad \leq bc$$

şeklini alır. Son eşitsizliğin iki tarafını da $b'd'$ ile çarparsak,

$$adb'd' \leq bcb'd'$$

elde ederiz. Soldaki ab' ve sağdaki cd' yerine ba' ve $c'd$ koyarsak,

$$a'dbd' \leq bc'b'd$$

elde ederiz. Şimdi bu eşitsizlikte b ve d'yi sadeleştirirsek istediğimizi elde ederiz. □

Yukarıdaki önsav, $\mathbb{Q}$ kümesi üzerine, $\leq$ ikili ilişkisinin

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow \varepsilon_d ad \leq \varepsilon_b bc.$$

koşuluyla tanımlanabileceğini gösterir. Şimdi bu ikili ilişkinin ***yoğun*** bir tamsıralama olduğunu kanıtlamak gerekiyor.

Önsav 11.8. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ için,*
i. *$\alpha \leq \alpha$.*
ii. *$\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ ise $\alpha = \beta$.*
iii. *$\alpha \leq \beta$ ve $\beta \leq \gamma$ ise $\alpha = \gamma$.*
iv. *Ya $\alpha \leq \beta$ ya da $\beta \leq \alpha$.*
v. *Eğer $\alpha < \beta$ ise $\alpha \leq \delta \leq \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir $\delta \in \mathbb{Q}$ vardır. Eğer $\alpha = [a, b]$ ve $\beta = [c, d]$ ise, $\delta = [ad + bc, 2bd]$ alınabilir.*

Bu önsavın kanıtı da çok kolaydır ve okura alıştırma olarak bırakılmıştır. v'teki "$\alpha < \beta$", $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha \neq \beta$ anlamına gelmektedir elbette. Ayrıca gene v'teki $\delta = [ad + bc, 2bd]$, daha sonra $(\alpha + \beta)/2$ anlamına gelecektir. v özelliğini sağlayan bir tamsıralamaya ***yoğun tamsıralama*** adı verilir.

Toplamanın ve $[0, 1]$'den büyük her sayıyla çarpmanın sıralamayı koruduğunu kolaylıkla kanıtlayabiliriz.

Önsav 11.9. *Her α, β, $\gamma \in \mathbb{Q}$ için,*
i. $\alpha \leq \beta$ *ise* $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.
ii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $[0, 1] \leq \gamma$ *ise* $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Önsav 11.8.i, ii, iii, iv ve 11.9.i ve ii'yi sağlayan bir cisme ***sıralı cisim*** adı verilir.

Alıştırmalar

11.4. $(\mathbb{Q}, \leq)$ sıralamasının ilk ve son elemanı olmadığını kanıtlayın.
11.5. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için, $\alpha^2 \geq [0, 1]$ eşitsizliğini kanıtlayın.
11.6. Her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ kesirli sayıları için, eğer $\alpha \leq [0, 1]$ ve $\beta \leq [0, 1]$ ise

$$\alpha\beta \geq [0, 1]$$

olduğunu kanıtlayın.
11.7. Her $\alpha \in \mathbb{Q}$ için,

$$[0, 1] \leq \alpha \leq [1, 1] \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \alpha$$

önermesini kanıtlayın.

11.5 $\mathbb{Z}$'yi $\mathbb{Q}$'ya Gömme

İlkokuldan beri bildiğimiz gibi her tamsayı bir kesirli sayıdır, yani $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ilişkisi geçerlidir. Oysa bu bölümde verdiğimiz tanımda $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ arasında böyle bir ilişki yok. Hatta tam tersine bu iki küme kesişmiyor bile. Her kesirli sayıyı

$$X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

kümesinin bir altkümesi olarak tanımladık ve bunların hiçbiri $\mathbb{Z}$'nin bir elemanı değil. Eski alışkanlıklarımıza dönebilmemiz için, $\mathbb{Z}$'yi $\mathbb{Q}$'nün bir altkümesi olmasını sağlamalıyız. Bunun için $\mathbb{Q}$'nün tanımını hafifçe değiştireceğiz.

Her a tamsayısı $a/1$'e eşit olduğundan, her a tamsayısını $[a, 1]$ olarak görmenin bir yolunu bulmalıyız. Bunu daha önce de kullandığımız kesip yapıştırma ya da özdeşleştirme yöntemiyle (bkz Altbölüm 5.15) yapacağız.

Önsav 11.10. *Her $a \in \mathbb{Z}$ için, $\mathbb{Q}$'nün $i(a)$ elemanı,*

$$i(a) = [a, 1] \in \mathbb{Q}$$

olarak tanımlanmış olsun. O zaman i, $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Q}$'ye giden birebir bir fonksiyondur ve toplamaya, çarpmaya ve eşitsizliğe saygı duyar, yani her a, $b \in \mathbb{Z}$ için,
i. $i(a+b) = i(a) + i(b)$
ii. $i(ab) = i(a)i(b)$
iii. $a \leq b$ *ise* $i(a) \leq i(b)$ *olur.*
Ayrıca, her $[a,b] \in \mathbb{Q}$ için, $[a,b] = i(a)i(b)^{-1}$ eşitliği geçerlidir.

Önsava göre, $(\mathbb{Z}, +, \times, \leq)$ matematiksel yapısıyla, $(i(\mathbb{Z}), +, \times, \leq)$ matematiksel yapısı arasında, elemanların adları dışında hiçbir fark yok. Birinde olan biten, i fonksiyonu sayesinde diğerine taşınabilir.

Bundan böyle, $\mathbb{Q}$'nün $i(\mathbb{Z})$ altkümesinin $i(a)$ elemanı yerine sadece a yazacağız. Bir başka deyişle, $i(\mathbb{Z})$ ile $\mathbb{Z}$'yi özdeşleştireceğiz. Böylece, yukarda kanıtlanan

$$[a,b] = i(a)i(b)^{-1}$$

eşitliği

$$[a,b] = ab^{-1}$$

şeklini alır. Böylece, ta ilkokuldan beri bildiğimiz,

$$\mathbb{Q} = \{ab^{-1} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

eşitliği geçerli olur. Bundan böyle her kesirli sayıyı $a \in \mathbb{Z}$ ve

$$b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

için, ab^{-1} olarak ya da a/b olarak yazabiliriz, aynen ilkokul öğretmenimizin öğrettiği gibi...

Teorem 11.11. *$\mathbb{Q}$, bir Arşimet cismidir, yani $\mathbb{Q}$'nün her β ve her pozitif α sayısı için, $n\alpha > \beta$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır.*

Kanıt: Eğer $\beta \leq 0$ ise, $n = 1$ almak yeter. Bundan böyle $\beta > 0$ olsun. a yerine α/β alarak, β'nın 1'e eşit olduğunu varsayabiliriz. (Yani kanıtanacak eşitsizliğin her iki tarafını da β'ya bölelim.) m, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için, $\alpha = m/n$ yazalım. O zaman,

$$n\alpha = n \times m/n = m \geq 1.$$

Dolayısıyla $(n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq 1 + \alpha > 1.$ □

Kitabın sonundaki ekte Arşimet özelliğini sağlamayan sıralı cisimler de göreceğiz.

Bundan böyle kesirli sayılarla ilgili basit tüm özellikleri bildiğimizi varsayacağız. Örneğin, ***mutlak değer*** fonksiyonunu ve özelliklerini bildiğimizi varsayacağız: $|x| = \max\{x, -x\}$. Mutlak değerin önemli özellikleri şunlardır: Her x, $y \in \mathbb{Q}$ için

$$\begin{aligned} &|x| \geq 0,\\ &|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\\ &|x| = |-x|,\\ &|xy| = |x||y| \end{aligned}$$

ve ***üçgen eşitsizliği*** olarak bilinen

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

11.6 Onluk Tabanda Kesirli Sayılar (1)

11.6.1 Giriş

Sayıları onluk tabanda, yani 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 rakamlarıyla (toplam on adet rakamla) yazarız. Bunu ta en küçük yaşlarımızdan beri yaptığımız için, sayıların onluk tabanda yazılmış olarak yaratıldığına inanıp bir sayıyı onluk tabanda yazmanın gerçek matematiksel anlamı hakkında pek düşünmeyiz. Ama aslında üstünde önemle durulması gereken ufuk açıcı bir konudur. Bu bölümde bu konuyu irdeleyeceğiz.

Bu bölümde değil ama bu kitapta,

$$0{,}99999\ldots$$

ifadesine anlam vereceğiz. Birçok kişi bu ifadeyi, anlamını bilmeden yazar ve kullanır. Anlamını öğrendiğimizde, çok şaşırtan ve merak edilen ve sorgulanan

$$0{,}99999\ldots = 1$$

eşitliğini matematiksel olarak kanıtlayabileceğiz. Sadece $0{,}99999\ldots$ ifadesini değil, ileride

$$0{,}172172172172\ldots$$

ifadesini de anlamlandıracağız. Bu da bir kesirli sayı olacak. Kitabın son kısmında da,

$$0{,}12345678910111213141516171819\ldots$$

gibi ifadeleri anlamlandıracağız. Tahmin edileceği üzere bir gerçel sayı olacak bu son ifade. Ama gerçel sayıları henüz tanımlamadığımızdan, bırakın bu ifadenin bir gerçel sayı olduğunu kanıtlamayı, "bu bir gerçel sayıdır" diyemeyiz bile, desek de anlamsız olur.

Bu altbölümde yaptığımız, 10 yerine 1'den büyük herhangi bir doğal sayı için de yapılabilir. Bilgisayarlarda 2 tabanı kullanılır, biliyorsunuz. 2 tabanında rakamlar sadece 0 ve 1'dir. Genel olarak b tabanında rakamlar 0'dan $b-1$'e kadar olan doğal sayılardır.

11.6.2 Doğal Sayılar

İlkokul aritmetiğinden başlayalım. Örneğin (onluk tabanda yazılmış) 7436 sayısı aslında,

$$7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

sayısıdır.

$$7436 = 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

eşitliği aslında "7436" ifadesinin tanımıdır.

Birazdan kanıtlanacağı üzere, her A doğal sayısı, belli bir n doğal sayısı ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ "rakam"ları için,

$$A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

biçiminde yazılabilir. Eğer bir de ayrıca $A > 0$ varsayımını yaparsak, a_n'yi pozitif olacak biçimde seçebiliriz ve bu durumda,

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$$

rakamları biricik olur. Her a_n rakamı biricik olduğundan, A'nın ***onluk tabanda gösterimi***

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$$

olarak sorunsuz bir biçimde tanımlanabilir. Bu sonucu kanıtlayalım:

Teorem 11.12. *Her A doğal sayısı, belli bir n doğal sayısı ve*

$$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

rakamları için,

$$A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

olarak yazılabilir. Eğer bir de ayrıca $A > 0$ varsayımını yaparsak, a_n'yi pozitif alabiliriz ve bu durumda $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ rakamları biriciktir.

Kanıt: Önce a_i rakamlarının varlığını A doğal sayısı üzerine tümevarımla kanıtlayalım; biricikliği daha sonra kanıtlayacağız. Eğer $A < 10$ ise $n = 0$ ve $a_0 = A$ alabiliriz. Bundan böyle $A \geq 10$ eşitsizliğini ve teoremin A'dan küçük pozitif doğal sayılar için doğru olduğunu varsayalım.

A'yı 10'a bölelim: Belli bir B ve $0 \leq r < 10$ "kalanı" için,

$$A = 10B + r$$

olur [Teorem 6.29]. Ama $B < A$ olduğundan, tümevarım varsayımına göre, belli bir m doğal sayısı ve

$$b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m \neq 0$$

rakamları için,

$$B = b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} A &= 10B + r = 10(b_m 10^m + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0) + r \\ &= b_m 10^{m+1} + \cdots + b_1 10^2 + b_0 10^1 + r. \end{aligned}$$

Demek ki $n = m + 1$ ve

$$a_{m+1} = b_m,\ a_m = b_{m-1},\ \ldots,\ a_1 = b_0,\ a_0 = r$$

tanımlarını yaparsak $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \neq 0$ rakamlarının varlığı kanıtlanmış olur.

Şimdi de bu rakamların biricikliğini kanıtlayalım. $A > 0$ olsun ve diyelim

$$\begin{aligned} A &= a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 \\ &= b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b0_1 0^0. \end{aligned}$$

Burada a_i ve b_j sayıları 0'dan 9'a kadar rakamlardır. $a_n \neq 0$ ve $b_m \neq 0$ eşitsizliklerini varsayalım. $n = m$ ve her i için $a_i = b_i$ eşitliklerini kanıtlayacağız.

Önce $n = m$ eşitliğini kanıtlayalım. Diyelim $n > m$. O zaman,

$$\begin{aligned} A &= b_m 10^m + b_{m-1}10^{m-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0 \\ &\leq 9\,(10^m + 10^{m-1} + \cdots + 10^1 + 10^0) \\ &= 9\,(10^{m+1} - 1)/9 = 10^{m+1} - 1 < 10^{m+1} \leq 10^n \leq A, \end{aligned}$$

ve bu da bir çelişkidir. Demek ki $n = m$. (Yukarıdaki hesaplarda bir yere Teorem 6.25'i kullandık.)

Şimdi $a_n = b_n$ eşitliğini n üzerine tümevarımla kanıtlayalım. $a_n > b_n$ varsayımını yapalım. O zaman,

$$A - b_n 10^n = (a_n - b_n)10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

olur. Ama ayrıca

$$A - b_n 10^n = b_{n-1}10^{n-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

eşitliği doğru. Demek ki her iki eşitliğin de sağ tarafındaki sayılar birbirine eşit. Ama $a_n - b_n > 0$ ve $n > n - 1$ olduğundan, böyle bir durumun mümkün olmadığını bir önceki paragrafta gördük.

Demek ki $a_n = b_n$. Şimdi $a_n 10^n$ ve $b_n 10^n$ sayılarını sadeleştirerek,

$$a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0$$

ile

$$b_{n-1}10^{n-1} + \cdots + b_1 10^1 + b_0 10^0$$

sayılarının eşitliğini buluruz. Buradan tümevarımla her $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için $a_i = b_i$ çıkar. $\square$

11.6.3 Özel Kesirli Sayılar

Teorem 11.12 doğal sayılar içindi. Bilindiği gibi birçok kesirli sayı da benzer bir gösterimle, ama bir virgül ilave edilerek ifade edilebilir. Örneğin,

$$\begin{array}{ll}
1/2 = 0{,}5 & 7/2 = 3{,}5 \\
1/4 = 0{,}25 & 7/4 = 1{,}75 \\
1/5 = 0{,}2 & 7/5 = 1{,}4 \\
1/8 = 0{,}125 & 7/8 = 0{,}875 \\
1/10 = 0{,}1 & 7/10 = 0{,}7 \\
1/16 = 0{,}0625 & 7/16 = 0{,}4375 \\
1/20 = 0{,}05 & 7/20 = 0{,}35
\end{array}$$

Bu sayıları 10'un sonlu sayıda kuvvetlerinin toplamı olarak ifade edebiliriz. İşte birkaçı:

$$\begin{aligned}
1/2 &= 5 \times 10^{-1} \\
1/4 &= 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} \\
73/2 &= 3 \times 10^1 + 6 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} \\
7/8 &= 8 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Dikkat ederseniz yukarıdaki sayıların paydalarında sadece 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20 gibi 2 ve 5'in kuvvetlerinin çarpımları var. Eğer paydada örneğin sadeleşmeyen bir 3 ya da 7 varsa o zaman kesirli sayının açılımı sonlu olamaz. Sözgelimi,

$$\begin{aligned}
1/3 &= 0{,}333333333333333333\ldots, \\
1/7 &= 0{,}142857142857142857\ldots
\end{aligned}$$

ve bu sayılar, yukarıdakilerinin aksine, 10'un sonlu sayıda kuvvetleri cinsinden yazılamaz. Zaten eşitliklerin sağındaki virgülden sonra sonsuz rakamlı ifadeler (şimdilik) anlamsız ifadelerdir, çünkü bu ifadeler aslında sonsuz sayıda sayının toplamını simgelemektedir ve sonsuz sayıda sayıyı toplamanın ne demek olduğunu (henüz) bilmiyoruz. Bunlar gibi,

$$3{,}141591415914159\ldots$$

ya da

$$0{,}1234567891011121314\dots$$

ifadelerinin tanımlarını henüz vermedik.

Şimdilik

$$\frac{a}{2^n5^m}$$

biçiminde yazılan sayıların sonlu bir ondalık açılımı olduğunu kanıtlayalım. Diğerlerini daha ileriki bölümlerde ele alacağız.

Teorem 11.13. *u ve v iki pozitif doğal sayı olsun. v'nin 2 ve 5'ten başka asal böleni olmasın. O zaman,*

$$\frac{u}{v} = a_n10^n + \cdots + a_m10^m$$

eşitliğinin geçerli olduğu $n \geq m$ tamsayıları ve $a_n, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ rakamları vardır. Ayrıca eğer $a_n \neq 0$ ve $a_m \neq 0$ varsayımlarını yaparsak o zaman $a_n, \dots, a_m$ katsayıları biriciktir.

Bunun tersi de doğrudur: Eğer $n \geq m$ tamsayılarsa ve $a_n, \dots, a_m$ rakamları verilmişse, $a_n10^n + \cdots + a_m10^m$ sayısı, bir u doğal sayısı ve 2 ve 5'ten başka asal böleni olmayan bir v doğal sayısı için u/v biçiminde yazılır.

Kanıt: Teoremdeki n ve m sayılarının negatif olabileceklerine dikkatinizi çekerim. (Hatta, eğer $u < v$ ise, n, ve elbette m de, negatif olmak zorundadır ve eğer u/v bir doğal sayı değilse, m negatif olmak zorundadır.)

İkinci paragrafın kanıtı son derece basit:

$$a_n10^n + \cdots + a_m10^m$$

ifadesinin paydaları eşitleyip u/v biçiminde yazalım. Eğer $m \geq 0$ ise $v = 1$ alabiliriz. Ama eğer $m < n$ ise paydada ancak 10'un bir kuvveti olabilir. Demek ki paydanın 2 ve 5'ten gayri asal böleni olamaz.

Şimdi teoremin birinci kısmını kanıtlayalım. u ve v'yi uygun bir doğal sayıyla çarparak v'nin 10^k biçiminde yazılmış bir doğal sayı olduğunu varsayabiliriz. Şimdi u'yu bir önceki teoremi kullanarak 10'luk tabanda yazarsak, a/b'yi teoremde istenen şekilde ifade edebiliriz.

Katsayıların biricikliğini göstermek kaldı.

$$a_n10^n + \cdots + a_m10^m = b_{n'}10^{n'} + \cdots + b_{m'}10^{m'}$$

eşitliğini varsayalım. 10'un yeterince büyük bir kuvvetiyle çarparsak m ve m' sayılarının (yani beliren tüm kuvvetlerin) doğal sayı olduklarını varsayabiliriz. Şimdi sonuç bir önceki teoremden çıkar. □

11.6.4 Genel Durum

İlkokulda ve lisede 18'i nasıl 7'ye böldüğümüzü anımsayalım. Bölmeye şöyle başlarız:

$$\begin{array}{r|l} 18 & \underline{\;7\;\;} \\ & \end{array}$$

İlk iş olarak 18'de en fazla kaç tane 7 olduğuna bakarız. 2 tane vardır. Sonra 2'yle 7'yi çarpıp 18'den çıkarırız. Kalan 4'tür:

$$\begin{array}{r|l} 18 & \underline{7\;} \\ \underline{-14} & 2 \\ 4 & \end{array}$$

Bu aynen Teorem 6.29'da yapılan bölmedir. Bölme işlemine devam edelim.

Bu aşamada 4'ün sağına bir 0 ve 2'nin sağına bir virgül konulur ve aynı işlem devam ettirilir:

$$\begin{array}{r|l} 18 & \underline{7\;\;\;} \\ \underline{-14} & 2{,}5 \\ 40 & \\ \underline{-35} & \\ 5 & \end{array}$$

Yukarıda aslında 180'i 7'ye bölüp çıkan sonucu 10'a böldük. İşlem, (virgül koyma dışında) dilendiği kadar tekrarlanabilir.

$$\begin{array}{r|l} 18 & \underline{7\;\;\;\;\;} \\ \underline{-14} & 2{,}571 \\ 40 & \\ \underline{-35} & \\ 50 & \\ \underline{-49} & \\ 10 & \\ \underline{-7} & \\ 3 & \end{array}$$

Yaptığımız şu: Teorem 6.29'da kanıtladığımız kalanlı bölmeyi sırasıyla 18'e, 180'e, 1800'e, 18.000'e uygulayıp çıkan sonucu 1'e, 10'a, 100'e, 1000'e bölüyoruz.

En sondaki kalan hep 7'den küçük olduğu için $(0, 1, 2, 3, 4, 5$ ya da $6)$ en fazla 7 adımda kalan, daha önce bulunan kalanlardan biri olacak ve o zaman bir döngüye girilecektir. Ama 0 belirir belirmez daha sonra kalanlar hep 0 olacağından, kalan sayılar en fazla 6 adımda tekrarlanmak zorundadır.

Bu işlemler matematiksel olarak şu işlemlere tekabül ederler:

$$\begin{aligned}18 &= 2 \times 7 + 4\\ 18 &= 2,5 \times 7 + 5/10\\ 18 &= 2,57 \times 7 + 1/100\\ 18 &= 2,571 \times 7 + 3/1000\end{aligned}$$

Devam edersek,

$$18 = 2{,}571428 \times 7 + 4/1.000.000$$

buluruz. Bu aşamada, virgülden sonraki 571428 sayıları tekrarlanır. Örneğin, 13'üncü adımda

$$18 = 2{,}571428571428 \times 7 + 4/10^{12}$$

bulunur. Bu eşitlik,

$$18/7 \approx 2{,}571428571428$$

aşağıyukarılığı olarak da yazılabilir. Tekrarlanan 571428 dizisini ne kadar çok yazarsak, aşağıyukarılık o kadar eşitliğe yaklaşır. Okullarda bu, "sonsuzda eşitlik olur" düşüncesiyle,

$$18/7 = 2{,}571428571428571\ldots$$

olarak yazılır. Gerçekten de "sonsuzda eşitlik olur". Bunu ileride kanıtlayacağız.

Bu yöntemle, her $a/b > 0$ kesirli sayısı virgülden bir zaman sonra en fazla $b - 1$ basamakta tekrarlanan sayılar olarak yazılabilir. Örneğin,

$$71{,}932525252525\ldots$$

kesirli bir sayıdır. İleride bu sayının a/b biçiminde nasıl yazılacağını göreceğiz. Yanıt,

$$71{,}932525252525\ldots = 712132/9900$$

olur. Öte yandan virgülden bir zaman sonra tekrarlanmayan sayılar kesirli sayı olamazlar. Bunu da ileride kanıtlayacağız.

12. Halkalar ve Cisimler

Geçmişte halkalardan biraz sözettik, ileride çok daha fazla söz edeceğiz. Bu yüzden bu ara bölümde halka kavramına daha yakından eğileceğiz. Önceki sayfalarda inşa ettiğimiz $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ yapıları birer halkadır. Bu ciltte ileride inşa edeceğimiz $\mathbb{R}$ de bir halka olacak.

Bu bölümde bazı örneklerde okurun $\mathbb{R}$'yi bildiğini varsayabiliriz. Ama tabii ki $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi sadece örnek vermek amacıyla ve matematiğe halel getirmeyecek biçimde kullanılacak. Okur, birazdan tanımlayacağımız "halka" kavramını okurken, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gibi sayı kümelerini, lise yıllarından aşina olduğunu sandığımız $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ gibi polinom kümelerini ve $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modüler sayı kümelerini aklında tutmalıdır. Bu kümelerin herbiri, bildiğimiz $+$, $\times$, 0, 1 aksesuvarlarıyla birlikte birer halka örneğidir. Bu yapıları bilmek bu bölümü anlamak için teorik olarak zorunlu değildir ama pratikte öyle olmuyor tabii...

Bir halka her şeyden önce bir kümedir, ama bir halka sadece bir kümeden ibaret değildir elbet, yoksa küme kavramından gayri bir kavram elde etmezdik. Bir halkada, ayrıca, 0 (***sıfır***) ve 1 (***bir*** ya da ***birim eleman***) adı verilen iki özel eleman vardır. Dikkat: Halkanın bu 0 ve 1 elemanları bizim bildiğimiz 0 ve 1 tamsayıları olmayabilirler. Hatta halkanın hiçbir elemanı sayı olmayabilir. Eğer halkamıza R adını verirsek, bu elemanlara belki de 0 ve 1 yerine 0_R ve 1_R adını vermek daha doğru olurdu, ki bazen öyle yapacağız, çünkü bunlar sayıların değil, R'nin "sıfır"ı ve "bir"idir.

Bir halkada ayrıca ***toplama*** ve ***çarpma*** adı verilen, ama çocukluğumuzdan beri alışık olduğumuz toplama ve çarpmayla hiçbir ilgisi olmayabilecek iki de işlem vardır. Bu işlemler de $+$ ve $\times$ olarak gösterilirler. Toplama ve çarpma $R \times R$ kümesinden R kümesine giden birer fonksiyondur. Eğer $(x, y) \in R \times R$ ise, toplama ve çarpma işlemlerinin (fonksiyonlarının) bu elemanlardaki sonucu sırasıyla $x+y$ ve $x \times y$ olarak yazılırlar. Hemen hemen her zaman $x \times y$ yerine xy yazacağız. Ama 1×1 yerine 11 yazmamaya özen göstereceğiz! Bu karışıklığı engellemek amacıyla bazen xy yerine $x \cdot y$ yazacağız.

Çoğu kez bu hataya düşüldüğünden yinelemekte yarar var: Adına toplama ve çarpma dediğimiz bu işlemler (fonksiyonlar) bizim aşina olduğumuz toplama ve çarpmayla ilgisi olmayabilir. Sözgelimi bir halkada x^y ya da x/y ya da $x \leq y$ gibi ifadeler anlamlı olmayabilir. Bu yüzden bu toplama ve çarpma işlemlerine

$+$ ve $\times$ olarak yazmak yerine belki de $+_R$ ve $\times_R$ olarak yazmayı yeğlemeliydik belki ama öyle yapmayacağız, yazılımı hantallaştırmak istemiyoruz, okurun dikkatli olduğunu varsayacağız.

Demek ki bir halka, bir R kümesinden, bu kümenin 0 ve 1 adı verilen iki elemanından ve $R \times R$ kartezyen çarpımından R kümesine giden ve adına toplama $(+)$ ve çarpma $(\times)$ denilen iki fonksiyondan (işlemden) oluşan bir $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisidir. Tanım bu kadarla kalmıyor tabii. Bu $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin halka adına hak kazanması için birtakım özelliklere sahip olması gerekmektedir. Bir halkanın sahip olması gereken bu özellikleri üç grupta toplayacağız:

Toplama ve 0'la ilgili özellikler: T1, T2, T3, T4.

Çarpma ve 1'le ilgili özellikler: Ç1, Ç2, Ç4.

Hem toplama hem de çarpmayla ilgili iki özellik: D ve E.

Bir şey daha ekleyelim: Bu bölümde ***değişmeli*** halkaları tanıtacağız ama genellikle halkalar değişmeli olmak zorunda değildir.

Tanım biraz zaman alacak.

12.1 Toplamanın Özellikleri

$(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin bir halka olması için $(R, +, 0)$ üçlüsünün şu özellikleri sağlaması gerekir (ama yetmez elbet!)

T1 [Birleşme Özelliği]. *Her x, y, $z \in R$ için, $x + (y + z) = (x + y) + z$.*
T2 [Etkisiz Eleman]. *Her $x \in R$ için, $0 + x = x + 0 = x$.*
T3 [Ters Elemanın Varlığı]. *Her $x \in R$ için, $x + y = y + x = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $y \in R$ vardır.*
T4 [Değişme Özelliği]. *Her x ve $y \in R$ için, $x + y = y + x$.*

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $(R, +, 0)$ yapısına ***grup*** denir. Eğer ayrıca T4 sağlanıyorsa, yapıya ***değişmeli*** ya da ***abelyen grup*** ya da ***Abel grubu*** denir.

T1, bir halkanın elemanları toplanırken paranteze gerek olmadığını söylüyor. Üç eleman için geçerli olan bu özellik dört eleman için de geçerlidir. Örneğin x, y, z, t elemanları bu sırayla toplanırken işlemlerin hangi sırayla yapıldıkları önemli değildir. Sözgelimi,

$$\begin{aligned}(x + y) + (z + t) &= (x + (y + z)) + t = ((x + y) + z) + t \\ &= (x + y) + (z + t) = x + ((y + z) + t) \\ &= x + (y + (z + t)).\end{aligned}$$

Bu eşitliklerin herbiri T1 özelliği birkaç kez kullanılarak kanıtlanabilir. Dolayısıyla x, y, z, t elemanların toplamını parantezsiz olarak $x + y + z + t$ biçiminde yazabiliriz, parantezlerin işlevi kalmamıştır. Biz de bundan böyle çok özel bir neden olmadıkça elemanları toplarken parantez kullanmayacağız, doğrudan $x+y+z+t$ yazacağız.

T4 özelliğini kullanarak, toplarken x, y, z ve t'nin yerlerinin de önemli olmadığını anlarız. Örneğin, $x+y+z+t = z+x+t+y$.

Önsav 12.1. [Sadeleştirme]. *Eğer bir grubun x, a ve b elemanları*

$$x+a = x+b$$

eşitliğini sağlıyorsa $a = b$ olur.

Kanıt: y elemanı, x için T3 özelliğini sağlayan bir eleman olsun. Demek ki $y+x = 0$. Şimdi hesaplayalım:

$$a = 0+a = (y+x)+a = y+(x+a) = y+(x+b) = (y+x)+b = 0+b = b.$$

istediğimiz kanıtlanmıştır. □

0 elemanı T2 özelliğini sağlayan yegâne elemandır, nitekim eğer grubun her x elemanı için $x+0' = x$ oluyorsa, bu eşitlikte x yerine 0 koyarak,

$$0 = 0+0' = 0'$$

elde ederiz. Biricik olduğunu kanıtladığımız bu 0 elemanına ***sıfır*** ya da toplamanın ***etkisiz elemanı*** denir.

Önsav 12.1'den, bir grupta, her x için T3 özelliğini sağlayan tek bir y elemanının olduğu anlaşılır, nitekim eğer

$$x+y = 0 = x+z$$

ise, Önsav 12.1'e göre $y = z$ olur. Madem ki, $x+y = 0$ eşitliğini sağlayan tek bir y var, (x'e bağımlı olan, yani x değiştikçe değişen) bu y elemanına bir ad verebiliriz. Bundan böyle $x+y = 0$ özelliğini sağlayan y elemanını $-x$ olarak gösterelim. $-x$ elemanına x'nin ***toplamsal tersi*** denir, "eksi x" okunur.

0'ın toplamsal tersi 0'dır elbette, ne de olsa T2'den dolayı $0+0 = 0$ eşitliği geçerli. Demek ki $-0 = 0$.

Bundan böyle

$$\begin{array}{lll} x+(-y) & \text{yerine} & x-y, \\ (-x)+y & \text{yerine} & -x+y \\ (-x)+(-y) & \text{yerine} & -x-y \end{array}$$

yazacağız.

Bir halkada bir de ayrıca 1 diye bir eleman olduğundan, -1 diye de bir eleman vardır. Ama bazen -1 elemanı 1'e eşit olabilir, mesela $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ halkasında (ya da grubunda). Ama $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ halkasında $-1 = 3$ olur.

Önsav 12.2. **i.** $-(x+y) = -y-x = -x-y$.
ii. $-(x-y) = y-x = -x+y$.
iii. $-(-x) = x$.

Kanıt: T3 önermesi x ve y'ye göre simetrik olduğundan, x, y'nin tersiyse, y de x'in tersidir. Bundan (iii) çıkar. Bunu şöyle de gösterebiliriz: $-x$, x'in tersi olduğundan ve $-(-x)$, $-x$'in tersi olduğundan (parantezleri kaldırmak yeterli), hem x hem de $-(-x)$ elemanları x'in tersidir. Demek ki $x = -(-x)$ olur.

(ii) için
$$(x-y)+(y+(-x)) = 0$$
eşitliğini kanıtlamalıyız ki, bu da toplamanın birleşme özelliğinden hemen çıkıyor. İkinci eşitlik sadece değişme özelliği tabii.

(i) için $(x+y)+((-y)+(-x)) = 0$ eşitliğini kanıtlamak yeterli. Bu da gayet basit. □

Bu aşamada, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in R$ için, nx ifadesini n tane x'in toplamı olarak tanımlamaya çalışabiliriz:
$$0x = 0 \text{ ve } (n+1)x = nx + x.$$
Ayrıca
$$(-n)x = n(-x)$$
eşitliğiyle bu tanımı negatif tamsayılara genişletebiliriz. Bu tanımları kabul ederek
$$n(x \pm y) = nx \pm nm$$
$$n(mx) = (nm)x$$
gibi eşitlikler kanıtlanabilir (kanıtları okura bırakıyoruz). Ama tüm bunları biraz daha ileride yapmayı tercih ettik.

12.2 Çarpmanın Özellikleri ve Halka Kavramı

Halkalarda toplama dışında bir de çarpma işlemi vardır. Bir $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin bir halka olması için $(R, \times, 1)$ üçlüsünün sağlaması gereken özellikleri hemen aşağıda Ç1, Ç2, Ç4 olarak sıralayacağız..

Alışageldiği üzere, çarpma işlemini yazarken $\times$ simgesini kullanmayacağız, $a \times b$ yerine ab, bazen de $a \cdot b$ yazacağız.

Ç1 [Birleşme Özelliği]. *Her x, y, $z \in R$ için, $x(yz) = (xy)z$.*
Ç2 [Etkisiz ya da Birim Eleman]. *Her $x \in R$ için, $1x = x1 = x$.*
Ç4 [Değişme Özelliği]. *Her x ve $y \in R$ için, $xy = yx$.*

Ç1 özelliğine göre, bir halkanın birçok elemanı çarpıldığında parantezler gereksizdir. Bundan böyle biz de gerekmedikçe parantez kullanmayacağız. Ç4 özelliğine göre de halkanın elemanlarının hangi sırayla çarpıldığı önemsizdir. Mesela $(xy)((zt)u)$ yerine $xyztu$ ya da $utxzy$ yazabiliriz.

Ç2 özelliğini sağlayan tek bir 1 elemanı vardır: Nitekim eğer $1'$ bu özelliği sağlayan bir başka eleman olsaydı, $1 = 1 \times 1' = 1'$ olurdu. 1'e halkanın ***birim elemanı*** ya da ***bir***'i denir.

Genellikle halkalarda Ç4 özelliği aranmaz ve Ç4 özelliğini sağlayan halkalara ***değişmeli halka*** denir. Biz bu kitapta "halka" ifadesini hep değişmeli halka anlamında kullanacağız. (Bazen Ç2'den de vazgeçilir; hatta Ç1'den de vazgeçildiği ve yerine Ç1'i andıran bir başka eşitlik kabul edildiği bile olur, örneğin "Lie" ya da "Jordan" halkalarında.)

Toplamayla Çarpmayı Harmanlayan Özellik. Yukarıda sadece toplamayla ya da sadece çarpmayla ilgili özellikleri gördük. Şimdi, toplamayla çarpma arasındaki ilişkiyi ortaya koyan özellikleri açıklayalım:

D [Dağılma Özelliği]. *Her* x, y, $z \in R$ *için*, $x(y+z) = xy + xz$.
E. $1 \neq 0$.

Halkanın Tanımı. Artık (değişmeli) halka kavramını tanımlayabiliriz. Bir R kümesinde, yukardaki T1, T2, T3, T4, Ç1, Ç2, Ç4, D ve E özelliklerini sağlayan iki işlem (ki bu işlemler genellikle $+$ ve $\times$ olarak yazılırlar) ve iki eleman (ki bu elemanlar genellikle 0 ve 1 olarak yazılırlar) tanımlanmışsa, o zaman R kümesine ***halka*** adı verilir. Daha matematiksel bir deyişle: R bir küme olsun. Ayrıca R'de adına 0 ve 1 diyeceğimiz iki eleman olsun. Ve ayrıca $+$ ve $\times$, $R \times R$'den R'ye giden iki fonksiyon olsun. Eğer $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisi yukarıda zikrettiğimiz T1, T2, T3, T4, Ç1, Ç2, Ç4 ve D özelliklerini sağlıyorsa, o zaman $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisine kısaca ***halka*** denir. Okura rahatlık sağlaması açından bir $(R, +, \times, 0, 1)$ beşlisinin halka olması için sağlaması gereken özellikleri aşağıda sıralıyoruz:

T1 [Birleşme Özelliği]. *Her* x, y, $z \in R$ *için,* $x + (y + z) = (x + y) + z$.
T2 [Etkisiz Eleman]. *Her* $x \in R$ *için,* $0 + x = x + 0 = x$.
T3 [Ters Elemanın Varlığı]. *Her* $x \in R$ *için,* $x + y = y + x = 0$ *eşitliklerini sağlayan bir* $y \in R$ *vardır.*
T4 [Değişme Özelliği]. *Her* x *ve* $y \in R$ *için,* $x + y = y + x$.
Ç1 [Birleşme Özelliği]. *Her* x, y, $z \in R$ *için,* $x(yz) = (xy)z$.
Ç2 [Etkisiz ya da Birim Eleman]. *Her* $x \in R$ *için,* $1x = x1 = x$.
Ç4 [Değişme Özelliği]. *Her* x *ve* $y \in R$ *için,* $xy = yx$.
D [Dağılma Özelliği]. *Her* x, y, $z \in R$ *için*, $x(y+z) = xy + xz$.
E. $1 \neq 0$.

Notlar ve Örnekler

12.1. Elemanlarının toplamsal tersi olmadığından (aşina olduğumuz toplama ve çarpmayla) $\mathbb{N}$ bir halka değildir.

12.2. Çarpma işleminin birim elemanı olmadığından (aşina olduğumuz toplama ve çarpmayla) $2\mathbb{Z}$ bir halka değildir.

12.3. **Rahatsız Edici Bir Örnek.** $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0,\ 2,\ 4\}$ kümesi modüler (modülo 6) sayılardaki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır. Bu halkanın birim elemanı 4'tür. $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ de bir halkadır. Bu çok daha genel bir olgudur: Eğer n ve m aralarında asal iki pozitif doğal sayı ise, $n\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ kümesi, modülo nm toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır. Eğer k sayısı, m sayısı $nk-1$ sayısını bölecek biçimde seçilmişse (Bézout Önsavı'na göre öyle bir k vardır), o zaman nk elemanı bu halkanın (çarpma için) etkisiz elemanıdır.

12.4. Bir halkanın elemanlarının her zaman sayı olmadığını gösteren bir örnek verelim. A, boş olmayan herhangi bir küme olsun. $R = \wp(A)$, A'nın altkümeleri kümesi olsun. Eğer x, $y \in R$ ise, yani x ve y, R'nin birer altkümesiyse,

$$\begin{aligned}
&x + y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)\\
&x \times y = x \cap y\\
&0 = \emptyset\\
&1 = X
\end{aligned}$$

olsun. $(R, +, \times, 0, 1)$ bir halkadır (ayrıntıları okura bırakıyoruz.) Bu halkada, her x için, $x^2 = x$ ve $x + x = 0$ eşitlikleri geçerlidir. Görüldüğü gibi, bu halkanın elemanları sayı değil, A'nın altkümeleri.

12.5. Fonksiyonlardan oluşan bir halka örneği verelim. X herhangi bir küme olsun. R de herhangi bir halka olsun, mesela $R = \mathbb{Z}$ olabilir. O zaman X'ten R'ye giden fonksiyonlar kümesi (fonksiyonların "değer değer" toplanması ve çarpılması işlemleri altında) bir halka olur. Mesela $\mathrm{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bir halkadır; bu halkanın türevi olan (ya da sürekli olan) fonksiyonları da bir halka oluşturur. $\mathrm{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kümesinin 0'da 0 değerini alan fonksiyonlar da bir halka oluşturur. Öte yandan, $\mathrm{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kümesinin sürekli olan ve 0'da 0 değerini alan fonksiyonları bir halka oluşturmazlar. Neden?

12.6. Bir halkada $xy = 0$ ise illa x ya da y elemanlarından biri 0 olmak zorunda değil, mesela $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkasında $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{0}$ olur. Aynı şekilde, $x \neq 0$ ve $xy = xz$ ise illa $y = z$ olmak zorunda değil, mesela yine $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ halkasında $\overline{2} \times \overline{0} = \overline{2} \times \overline{3}$ olur ama $\overline{0} = \overline{3}$ eşitliği doğru değildir.

Dağılma özelliğinin sonuçlarını irdeleyelim.

Önsav 12.3. *R bir halka olsun. x, $y \in R$ olsun.*
i. $x0 = 0$.
ii. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$ *ve* $(-x)(-y) = xy$.
iii. $(-1)y = -y$.
iv. $(-1)^2 = 1$.

Kanıt: i. $x\,0 + 0 = x\,0 = x(0 + 0) = x\,0 + x\,0$ eşitliğinden ve Önsav 12.1'den $x0 = 0$ çıkar.
ii. $xy + (-(xy)) = 0 = 0y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$. Dolayısıyla, Önsav 12.1'den $(-x)y = -(xy)$ çıkar. İkinci eşitlik birincisinden ve değişme özelliğinden çıkar. Son eşitlik bunlardan çıkar.

iii. Yukarıda x yerine 1 koyarsak sonuç çıkar.
iv. Yukarıda y yerine -1 koyarsak sonuç, Önsav 12.2.iii'ten çıkar. $\square$

(E) koşulu aslında halkanın tek bir elemandan ibaret olmadığını söylüyor. Nitekim halkanın tek bir elemanı varsa elbette $0 = 1$ olmalı. Ve $0 = 1$ ise, Önsav 12.3.i'e göre, her $r \in R$ için $r = r1 = r0 = 0$ olur.

Bazı İncelikler. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Her n doğal sayısı için, x'i kendisiyle n kez toplayabiliriz. Bu toplamı nx olarak gösterelim. Daha matematiksel olarak, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in R$ için, R'nin nx elemanını n üzerine tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$0x = 0 \text{ ve } (n+1)x = nx + x.$$

Bu paragrafta halkanın birim elemanını 1 yerine 1_R simgesiyle gösterelim, yoksa 1'ler karışabilir. n herhangi bir doğal sayı olsun. Bir üstteki paragrafta x yerine 1_R alacak olursak, R'nin $n1_R$ elemanını buluruz: $n1_R$, halkanın 1_R elemanı kendisiyle n kez toplanarak bulunmuştur. Bu elemana n_R diyelim: $n_R = n1_R$. Ama dikkat bir halkada $n_R = 0_R$ eşitliği geçerli olabilir, mesela $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halksasında.

Halkanın n_R elemanına, n doğal sayısının "halkadaki imgesi" adını verebiliriz, ama bir karışıklığın olmayacağını varsayarak buna gerek görmeyeceğiz.

Şimdi soru şu: Her $x \in R$ için acaba R halkasının $n_R x$ elemanı nx'e eşit mi? Dağılma özelliği sayesinde bu soruya olumlu yanıt verebiliyoruz:

$$nx = x + \cdots + x = 1_R x + \cdots + 1_R x = (1_R + \cdots + 1_R)x = n_R x.$$

(Bu eşitliği aslında n üzerinden tümevarımla kanıtlamak daha doğru olurdu.)

Demek ki nx ile $n_R x$ arasında bir ayrım gözetmeye gerek yok. Bundan sonra n_R yerine (sanki bir doğal sayıymış gibi) n yazacağız.

Bir halkada nx diye bir elemanın varlığını yukarda gördük: x'in kendisiyle n kez toplanmasıyla elde edilen eleman. Demek ki $-(nx)$ diye de bir eleman var: nx'in toplama için tersi. Ayrıca $n(-x)$ diye de bir eleman var: $-x$'in kendisiyle n kez toplanmasıyla elde edilen eleman. Acaba bu iki eleman birbirine eşit mi? Evet:

$$nx + n(-x) = n(x + (-x)) = n0 = 0,$$

dolayısıyla $n(-x) = -(nx)$.

Bundan böyle $(-n)x$ elemanını $n(-x)$ ya da $-(nx)$ olarak tanımlayacağız ve bu elemanı $-nx$ olarak yazacağız.

Demek ki her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $x \in R$ için bir $nx \in R$ elemanı tanımladık. Şu özellikleri kanıtlamak oldukça kolaydır: Her n, $m \in \mathbb{Z}$ ve her x, $y \in R$ için,

$$\begin{aligned}
&n(x \pm y) = nx \pm ny,\\
&(n \pm m)x = nx \pm mx,\\
&n(mx) = (nm)x = m(nx),\\
&(nx)(my) = (nm)(xy).
\end{aligned}$$

Birkaç Eşitlik. Bir halkanın bir x elemanının (doğal sayı) kuvvetlerini alabiliriz:

$$\begin{aligned} x^0 &= 1, \\ x^1 &= x, \\ x^2 &= x \times x, \\ x^3 &= x \times x \times x. \end{aligned}$$

Genel olarak ve daha matematiksel olarak, kuvvet alma, n üzerine tümevarımla

$$x^0 = 1 \text{ ve } x^{n+1} = x^n \times x$$

olarak tanımlanır.

Eğer x ve y bir halkanın birer elemanıysa ve $n > 0$ bir tamsayıysa,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliği herhâlde en çok bilinen ve kanıtı oldukça kolay eşitliklerdendir. Eğer n bir tek sayıysa, y yerine $-y$ alıp,

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliğini buluruz.

Bir halkanın her x ve y elemanı için ve her $n > 0$ doğal sayısı için,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak zor değildir[1].

Tersinir Elemanlar. Bir halkada, verilmiş bir a elemanı için, $ab = 1$ eşitliğini sağlayan bir b elemanı varsa a'ya ***tersinir eleman*** denir. Verilmiş bir a için, bu eşitliği sağlayan en fazla bir b elemanı olabilir (hiç olmayabilir de). Nitekim $ab = ac = 1$ ise, o zaman $c = c1 = c(ab) = b(ac) = b1 = b$. Dolayısıyla tersinir bir a elemanı için $ab = 1$ eşitliğini sağlayan b elemanını a^{-1} olarak gösterebiliriz. a^{-1} elemanına a'nın ***çarpımsal tersi*** ya da kısaca ***tersi*** denir. Elbette eğer a tersinirse ve b, a'nın tersiyse, b de tersinirdir ve b'nin tersi a'dır, yani $(a^{-1})^{-1} = a$ olur (bkz. Önsav 12.5.ii). $1 \times 1 = 1$ olduğundan, 1 tersinirdir ve tersi gene 1'dir: $1^{-1} = 1$.

Tersinir elemanlar kümesi R^* olarak gösterilir:

$$R^* = \{x \in R : \text{ bir } y \in R \text{ için } xy = 1\}.$$

[1] Yalnız burada küçük bir uyarı yapmak zorundayız: $\binom{n}{i}$ elemanını önce doğal sayılarda (alışık olduğumuz gibi) hesaplamalı, ardından çıkan doğal sayının halkadaki imgesini almalıyız, çünkü halkada $1/i!$ ya da $1/(n-i)!$ gibi elemanlar olmayabilir.

Örneğin $\mathbb{Z}$ halkasının tersinir elemanları 1 ve -1'dir ve başka da yoktur. Öte yandan, $\mathbb{Z}$ halkasında tersinir olmayan 2 sayısı, $\mathbb{Q}$ halkasında tersinirdir. $\mathbb{R}[X]$ polinom halkasının tersinir elemanları, 0 olmayan sabit polinomlardır (okura alıştırma.) 0 elemanı hiçbir halkada tersinir değildir. Öte yandan 1 ve -1 her halkada tersinirdir; -1 kendi kendisinin tersidir (Önsav 12.3.iv).

Önsav 12.4. i. *$x \in R^*$ ise ve $xy = 0$ ise o zaman $y = 0$ olur.*
ii. *$x \in R^*$ ise ve $xy = xz$ ise o zaman $y = z$ olur.*

Kanıt: (i), Önsav 12.3.i'ten çıkar: $y = 1y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$. (ii) de şu kolay hesaptan çıkar: $y = 1y = (xx^{-1})y = x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz) = (xx^{-1})z = 1z = z$. □

Notlar ve Örnekler

12.7. $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.
12.8. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
12.9. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
12.10. $\mathbb{R}[X]^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =$ sıfır olmayan sabit polinomlar kümesi.
12.11. $\mathbb{Z}[X]^* = \{1, -1\}$.
12.12. Eğer $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ise, $R[X]$ polinom halkasında $(\bar{1}-\bar{2}X)(\bar{1}+\bar{2}X) = \bar{1}$ olduğundan, $1-2X \in R[X]^*$ olur. Genel olarak, eğer $I = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N}\ r^n = 0\}$ ise, $R[X]^* = R^* + XI[X]$ olur (ama bunu kanıtlamak yukarıdakilerden daha zordur). XXXXXXXXXXX

Alıştırmalar

12.13. $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ olsun. $R[X]^*$ kümesini bulun.
12.14. Eğer R bir ***bölgeyse***, yani 0'a eşit olmayan iki elemanın çarpımı hiçbir zaman 0 olmuyorsa, $R[X]^* = R^*$ eşitliğini kanıtlayın.
12.15. $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ olsun. $R[X]^*$ kümesini bulun.
12.16. p herhangi bir asal sayı olsun. $\mathbb{Q}_{\langle p \rangle}$, paydası p'ye bölünmeyen kesirli sayılar kümesi olsun. Yani,
$$\mathbb{Q}_{\langle p \rangle} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p,\ b\text{'yi bölmez}\}$$
olsun. Kolayca görüleceği üzere, $\mathbb{Q}_{\langle p \rangle}$ bir halkadır. $\mathbb{Q}^*_{\langle p \rangle}$ kümesini bulun.
12.17. R herhangi bir halka olsun. $x, y \in R$ için $\sim$ ikili ilişkisini şöyle tanımlayalım: $x \sim y \Leftrightarrow x \in R^*y$. Bu ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin.

Önsav 12.5. *R bir halka olsun.*
i. *$x, y \in R^*$ ise $xy \in R^*$ ve $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ olur.*
ii. *$x \in R^*$ ise $x^{-1} \in R^*$ ve $(x^{-1})^{-1} = x$ olur.*

Kanıt: i. Hemen hesaplayalım:

$$(xy)(y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = x1x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

Demek ki xy tersinirdir ve $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ olur. İkinci eşitlik sadece değişme özelliği tabii.

ii. $x^{-1}x = 1$ olduğundan, x^{-1} elemanı da tersinirdir ve $(x^{-1})^{-1} = x$ olur. $\square$

X'İN negatif KUVVETLERİNİ tanımla xxxxxxxxxx

Bölme. R bir halka ve a, $b \in R$ olsun. Eğer $ax = b$ eşitliğini sağlayan bir $x \in R$ varsa, o zaman a, b'yi ***böler*** denir ve bu $a|b$ olarak yazılır. Tanımdan da anlaşılacağı üzere her halkada 0, 0'ı böler!

Eğer halkada $ax = b$ eşitliğini sağlayan tek bir x elemanı varsa, o zaman bu eleman

$$x = b/a$$

yazılır. Eğer bu denklemi sağlayan birden fazla x varsa, b/a diye bir elemandan sözetmeyiz. Demek ki tanıma göre bir halkada $0/0$ diye bir elemandan sözedemeyiz çünkü $1 \times 0 = 0 \times 0 = 0$ eşitlikleri geçerlidir.

Kolayca görüleceği üzere $1/a$ diye bir elemanın olması demek tam tamına $a \in R^*$ demektir. Ama halkada b/a diye bir elemanın olması a'nın tersinir olmasını gerektirmez, nitekim $\mathbb{Z}$ halkasında $15/3$ diye bir eleman vardır ama $1/3$ diye bir eleman yoktur.

Aşağıdaki önsavın kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

Önsav 12.6. *R bir halka olsun.*
i. *Her eleman 0'ı böler.*
ii. *R^* kümesinin her elemanı R'nin her elemanını böler. Demek ki 1 her elemanı böler ve tabii her $r \in R$ için, $r/1 = r$ olur.*
iii. *Eğer $u \in R^*$ ise, her x için $xu|x$ olur. Dolayısıyla her $x \in R$ için, $x|x$ olur.*
iv. *Her x, y, $z \in R$ için, $x|y$ ve $y|z$ ise $x|z$ olur.*
v. *x, $y \in R$ için, "$x \sim y$" cümlesi $x \in yR^*$ anlamına gelsin. $\sim$ ilişkisi bir denklik ilişkisidir. Bu durumda x ve y elemanlarına bağlantılı elemanlar denir. Bağlantılı elemanların bölünebilirlik açısından birbirlerinden farkı yoktur:*
Eğer $x \sim y$ ve $x|z$ ise $y|z$ olur.
Eğer $x \sim y$ ve $z|x$ ise $z|y$ olur. $\square$

Notlar ve Örnekler

12.18. Bir halkada "x, y'yi böler" ilişkisi neredeyse bir yarısıralamadır:

$$x|x$$
$$x|y \text{ ve } y|z \text{ ise } x|z$$

olur. Ancak $x|y$ ve $y|x$ ise $x = y$ olmak zorunda değildir.

12.19. Önsav 12.6.v'te tanımlanan denklik ilişkisini ve $R/\sim$ denklik sınıflarını ele alalım. Bir $x \in R$ elemanının sınıfını $[x]$ olarak gösterelim. $R/\sim$ kümesi üzerine

$$[x]|[y] \Leftrightarrow x|y$$

ikili ilişkisi iyi tanımlıdır. Eğer R bir bölgeyse, bu ilişki $R/\sim$ kümesini yarısıralar: Ne oluyor burada xxxxxxxxxxx

$$\begin{array}{l}[x]|[x] \\ [x]|[y] \text{ ve } [y]|[x] \text{ ise } [x]=[y] \\ [x]|[y] \text{ ve } [y]|[z] \text{ ise } [x]|[z]\end{array}$$

12.20. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ halkasında,

$$2\times 3 = 6 = 2\times 9$$

olduğundan, bu halkada $6/2$ diye bir elemandan sözetmeyiz, hatta $2/2$ diye bir elemandan da sözetmeyiz. Öte yandan, $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$'de $6/2$ diye bir elemandan sözedebiliriz, çünkü $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ halkasında sadece $x=3$ elemanı $2x=6$ eşitliğini sağlar.

12.21. R sonlu bir halka olsun. Diyelim $a, b \in R$ için b/a diye bir eleman olduğunu, yani $ax=b$ denkleminin halkada tek bir çözümü olduğunu kabul edelim; bu çözüme de x diyelim. Bu durumda $a \in R^*$ olur. Bunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\varphi(r) = ar$$

kuralıyla tanımlanmış $\varphi : R \longrightarrow R$ fonksiyonuna bakalım. Eğer bu fonksiyon birebirse, örten olmak zorundadır, dolayısıyla bu durumda bir $r \in R$ için $ar = \varphi(r) = 1$, yani $a \in R^*$ olur. Şimdi bu fonksiyonun birebir olduğunu kanıtlayalım. Diyelim $r, s \in R$ için $ar = as$, yani $a(r-s) = 0$. Ama o zaman hem x ve $x+(r-s)$ elemanları $ax=b$ denkleminin çözümleri olur. Varsayımımıza göre $r-s=0$, yani $r=s$ olmalı.

Sonsuz halkalarda, örneğin $\mathbb{Z}$'de bu yanlıştır.

12.3 Tamlık Bölgeleri ve Cisimler

Bir halkada $xy = 0$ eşitliği ancak x ya da $y = 0$ iken geçerli olabiliyorsa, o halkaya ***tamlık bölgesi*** ya da kısaca ***bölge*** adı verilir. Örneğin $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesi değildir, çünkü

$$\overline{2}\times\overline{3} = \overline{6} = \overline{0}$$

olur ve ne $\overline{2}$ ne de $\overline{3}$ elemanı $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$'de $\overline{0}$'dır. Bu örnekten de kolayca anlaşılacağı üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının bir tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul n doğal sayısının asal olmasıdır.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer tamlık bölgesidir. Eğer R bir tamlık bölgesiyse, $R[X]$ ve $R[X,Y]$ gibi polinom halkaları da tamlık bölgeleridir.

Tamlık bölgelerinde sadeleştirme yapılabilir, yani bir tamlık bölgesinde

$$a \neq 0 \text{ ve } ab = ac$$

ise $b = c$ olur, çünkü $ab = ac$ ise (D)'den dolayı $a(b-c) = 0$ olur ve bir tamlık bölgesinde olduğumuzdan $b - c = 0$, yani $b = c$ buluruz.

0 dışında her elemanı tersinir olan halkalara ***cisim*** denir. Yani bir R halkasının cisim olması için $R^* = R \setminus \{0\}$ eşitliği gerekir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ birer cisimdir, ama $\mathbb{Z}$ ve polinom halkalarının hiçbiri bir cisim değildir. Önsav 12.3.v'e göre her cisim bir tamlık bölgesidir.

Alıştırmalar

12.22. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının bir cisim olması için n'nin bir asal olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

12.23. $d \in \mathbb{N}$ bir tamkare olmasın, örneğin $d = 2$ olabilir.

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

olsun. Bu alıştırmada ileride inşa edeceğimiz gerçel sayıları okurun bildiğini varsayıyoruz. Bildiğimiz toplama ve çarpma altında $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ bir halkadır. Bunun kanıtlanması oldukça kolaydır. $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ halkasının ayrıca bir cisim olduğunu kanıtlayın.

12.24. Sonlu bir tamlık bölgesinin bir cisim olduğunu kanıtlayın.

12.25. Bir tamlık bölgesinde eğer $x|y$ ve $y|x$ ise $x \sim y$ olduğunu kanıtlayın. (Bkz. Önsav 12.6.v)

12.4 Kartezyen Çarpım ve Althalka

Kartezyen Çarpım. R ve S birer halka olsun. $R \times S$ kartezyen çarpımını ele alalım:

$$R \times S = \{(r, s) : r \in R, s \in S\}.$$

Bu küme üstünde şu işlemleri tanımlayalım:

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s')$$
$$(r, s)(r', s') = (rr', ss').$$

Bu işlemlere **terim terim toplama** ve **çarpma** adı verilir. Bu iki işlem altında $R \times S$ bir halkadır. Bu $R \times S$ halkasının sıfır ve birim elemanları sırasıyla $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ elemanlarıdır.

İki halkanın kartezyen çarpımı yerine istediğimiz kadar halkanın kartezyen çarpımını alabiliriz. I bir küme olsun. I'yı bir göstergeç kümesi olarak görelim. Her $i \in I$ için R_i bir halka olsun. Her R_i halkasının kendine özgü toplama ve çarpma işlemleri ve sıfır ve bir elemanları var. Bunların hepsini kolaylık olsun (sanki aynı şeylermiş gibi) aynı simgelerle gösterelim.

$$\prod_I R_i = \left\{ r : I \to \bigcup_I R_i : \text{ her } i \in I \text{ için } r(i) \in R_i \right\}.$$

$\prod_I R_i$ kümesi, fonksiyonların noktasal toplaması ve çarpması altında bir halka olur (bkz. [SKK]). Toplamanın etkisiz elemanı sabit 0 fonksiyonu, çarpmanın etkisiz elemanı sabit 1 fonksiyonudur. Burada bütün R_i'ler birbirine eşit olabilir ya da olmayabilir.

Althalka. R ve S birer halka olsunlar. R'nin S'nin altkümesi olduğunu varsayalım. Ayrıca her r_1, $r_2 \in R$ için, $r_1 + r_2$ ve $r_1 r_2$ işlemlerinin sonucunun R'de ve S'de aynı sonuçları verdiğini varsayalım. Yani R'nin elemanları R'de de toplansa, S'de de toplansa aynı sonucu bulduğumuzu varsayalım. Daha matematiksel deyişle $+_R$ ve $\times_R$, R'deki toplama ve çarpma işlemlerini, $+_S$ ve $\times_S$, S'deki toplama ve çarpma işlemlerini simgeliyorsa, her r_1, $r_2 \in R$ için

$$r_1 +_R r_2 = r_1 +_S r_2 \text{ ve } r_1 \times_R r_2 = r_1 \times_S r_2$$

olsun. Ayrıca $1_R = 1_S$ olsun. O zaman R'ye S'nin ***althalkası*** adı verilir. Bu durumda $R \leq S$ yazarız.

Örneğin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$'in bir althalkasıdır: $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Ama $\mathbb{Z} \times \{0\}$ halkası $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasının bir althalkası değildir. İşlemlerle ilgili koşullar sağlanmasına karşın, iki halkanın birim elemanları aynı değildir. Kolayca kanıtlanacağı üzere, eğer $R \leq S$ ise, $0_R = 0_S$ olur. Elbette $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$ ve her R halkası için $R \leq R[X] \leq R[X, Y]$. Ama $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin bir althalkası değildir. Eğer $n \neq m$ ise $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$'nin hiçbir zaman bir althalkası olamaz!

$R \leq S$ ve r, $r' \in R$ olsun. r elemanı r' elemanını R'de bölmeyebilir, ama S'de bölebilir. Örneğin 2, 5'i $\mathbb{Z}$'de bölmez ama $\mathbb{Q}$'de böler. Ya da R'de tersinir olmayan bir eleman S'de tersinir olabilir. Örneğin 2, $\mathbb{Z}$'de tersinir değildir ama $\mathbb{Q}$'de tersinirdir. Bir başka deyişle tersinir olmak, bölmek gibi kavramlar ve tanımlayacağımız daha birçok kavram mutlak kavramlar değildir, içinde bulunduğumuz halkaya göre değişirler. Bu yüzden hangi halkada düşündüğümüzü belirtmek için, karışıklık olmasın diye, "R'de böler", "R'de tersinirdir" denir.

Sıfırbölenler. Bir halkada, bir $y \neq 0$ için $xy = 0$ eşitliği sağlanabiliyorsa, o zaman halkanın x elemanına ***sıfırbölen*** adı verilir. 0 her zaman sıfırbölendir. Tersinir bir eleman asla sıfırbölen olamaz. Sıfır dışında sıfırböleni olmayan halkalara ***tamlık bölgesi*** adı vermiştik.

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenleri 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 elemanlarıdır. Genel olarak, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenleri n'yle ortak böleni olan elemanlardır (diğerleri de tersinir elemanlardır.)

Sıfırbölenlerin toplamı sıfırbölen olmak zorunda değildir. Örneğin 2 ve 3 elemanları $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$'de sıfır bölendir, ama toplamı olan $2 + 3$, yani 5 bu halkada bir sıfırbölen değildir.

Sıfırbölen olmayan bir eleman sadeleştirmeye izin verir: Eğer a sıfırbölen değilse (yani $ax = 0$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa) ve eğer $ab = ac$ ise, o zaman $b = c$ olur. Nitekim,

$$a(b - c) = ab - ac = 0$$

eşitliğinden, $b - c = 0$ ve $b = c$ elde edilir.

Alıştırmalar

12.26. $(R \times S)^* = R^* \times S^*$ eşitliğini kanıtlayın. İki halkanın kartezyen çarpımının hiçbir zaman bir tamlık bölgesi olamayacağını kanıtlayın.

$$\left(\prod_I R_i\right)^* = \prod_I R_i^*$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer I sonsuzsa,

$$\bigoplus_I R_i = \left\{ r \in \prod_I R_i : \text{ sadece sonlu sayıda } i \in I \text{ için } r(i) \neq 0 \right\}$$

kümesi hiçbir zaman $\prod_I R_i$ halkasının bir althalkası olamaz, neden?

12.27. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halkasında ne zaman bir (a, b) elemanı bir (c, d) elemanını böler?

12.28. R ve S birer halka olsun. $(R \times S)[X]$ polinom halkasının elemanları

$$\sum_i (r_i, s_i) X^i$$

biçiminde yazılırlar. (Toplam sonlu olmak zorunda tabii ki, yoksa yazdığımız bir polinom olmaz.) $R[X] \times S[X]$ halkasının elemanları da

$$\left(\sum_i r_i X^i, \sum_i s_i X^i \right)$$

biçiminde yazılır.

$$\varphi : (R \times S)\,[X] \to R[X] \times S[X]$$

fonksiyonu,

$$\varphi \left(\sum_i (r_i, s_i)\, X^i \right) = \left(\sum_i r_i X^i, \sum_i s_i X^i \right)$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon olsun. φ'nin birebir ve örten olduğunu, birim elemanı birim elemana götürdüğünü ve toplama ve çarpmaya saygı duyduğunu, yani her p, $q \in (R \times S)[X]$ için,

$$\varphi(p + q) = \varphi(p) + \varphi(q)$$
$$\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$$

eşitliklerini kanıtlayın.

12.29. R bir halka olsun. $e \in R$, $e^2 = e$ eşitliğini sağlasın.

$$Re = \{re : r \in R\}$$

kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Eğer R değişmeliyse ya da eğer e, R'nin merkezindeyse (yani her $r \in R$ için $re = er$ ise) Re'nin bir halka olduğunu kanıtlayın (e, bu halkanın birim elemanıdır.)

$$f = 1 - e$$

olsun. $f^2 = f$ eşitliğini kanıtlayın. $R = Re + Rf$ ve $Re \cap Rf = \{0\}$ eşitliklerini kanıtlayın. Şimdi

$$\varphi : R \to Re \times Rf$$

fonksiyonu $\varphi(r) = (re, rf)$ olarak tanımlansın. φ'nin birebir ve örten olduğunu, birim elemanı birim elemana götürdüğünü ve toplama ve çarpmaya saygı duyduğunu kanıtlayın. Bilenler için bir not: Eğer R değişmeliyse, R iki halkanın kartezyen çarpımına "izomorftur": $R \simeq Re \times Rf$.

12.30. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ ve $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[X]$ polinom halkalarının sıfırbölenlerini bulun.

12.31. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırbölenlerinin n'yle ortak böleni olan elemanların sınıfları olduğunu kanıtlayın.

12.32. Bir R halkasında, belli bir n doğal sayısı için, $x^n = 0$ eşitliğini sağlayan elemanlara ***sıfırkuvvetli*** denir. Sıfırkuvvetli elemanlar sıfırbölendir elbet. Sıfırkuvvetli elemanların toplamlarının da sıfırkuvvetli olduğunu kanıtlayın. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının sıfırkuvvetli elemanlarını bulun.

12.33. R ve S birer halka olsun. $R \times S$ halkasının sıfırbölen ve sıfırkuvvetlilerini bulun.

12.34. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[X]$ polinom halkasının sıfırkuvvetlilerini bulun.

12.5 Sıralı Halkalar ve Cisimler

Geçen bölümlerde $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkalarında toplama ve çarpmayla uyumlu bir sıralama tanımlamıştık. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkalarına bu yüzden ***sıralı halka*** denir.

Bir halkanın ***sıralanabilir*** olması demek, o halka üzerinde TO ve CO'yu sağlayan (bkz. aşağıdaki şema) bir tamsıralamanın olması demektir. Bir sonraki sayfadaki şekildeki listedeki özelliklerin Ç4 dışında hepsini sağlayan bir

$$(R, +, \times, \leq, 0, 1)$$

yapısına ***sıralı halka*** adı verilir. Eğer ayrıca Ç4 de sağlanıyorsa, yapıya ***sıralı cisim*** denir. İleride $\mathbb{R}$'yi sıralı bir cisim olarak inşa edeceğiz. İlginç bir sıralı halka örneği için Ek 3'ü boş zamanınızda okuyabilirsiniz.

Hangi halkaların sıralanabilir olduğu ve bir halkanın üstünde kaç değişik tamsıralamanın olduğu önemli bir sorudur. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$'nün üstünde tek bir tamsıralama olduğunu oldukça çabuk kanıtlayacağız.

T1. Her a, b, $c \in K$ için, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
T2. K'da 0 diye yazılan öyle bir eleman vardır ki, her $a \in K$ için, $a + 0 = 0 + a = a$ eşitliği sağlanır. (Bu özellik ancak tek bir eleman tarafından sağlanabilir.)
T3. Her $a \in K$ için, $a + b = b + a = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $b \in K$ vardır. (a verilmişse, bu özelliği sağlayan bir tek b vardır ve bu b, $-a$ olarak yazılır.)

T4. Her a, $b \in K$ için, $a + b = b + a$.

Ç1. Her a, b, $c \in K$ için, $(ab)c = a(bc)$.
Ç2. K'da 1 diye yazılan öyle bir eleman vardır ki, her $a \in K$ için, $a \times 1 = 1 \times a = a$ eşitliği sağlanır. (Bu özelliği sağlayan 1'den başka bir eleman olamaz.)

TÇ1. $0 \neq 1$.
TÇ2. Her a, b, $c \in K$ için, $a(b + c) = ab + ac$ ve $(b + c)a = ba + ca$.

Ç4. Her a, $b \in K$ için, $ab = ba$.

Ç3. Her $a \in K \setminus \{0\}$ için, $ab = ba = 1$ eşitli¼ni sağlayan bir $b \in K \setminus \{0\}$ vardır. (a verilmişse, bu özelliği sağlayan bir tek b vardır ve bu b, a^{-1} olarak yazılır.)

O1. Her $a \in K$ için, $a \leq a$.
O2. Her a, $b \in K$ için, $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$.
O3. Her a, b, $c \in K$ için, $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$.

O4. Her a, $b \in K$ için, ya $a \leq b$ ya da $b \leq a$.

TO. Her a, b, $c \in K$ için, eğer $a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$.
ÇO. Her a, $b \in K$ için, eğer $0 < a$ ve $0 < b$ ise $0 < ab$.

$(K, +, 0)$ bir gruptur
$(K, +, 0)$ değişmeli bir gruptur
$(K, +, \times, 0, 1)$ bir halkadır
$(K, +, \times, 0, 1)$ değişmeli bir halkadır
$(K, +, \times, 0, 1)$ bir cisimdir
$(K, \leq)$ bir yarısıralamadır
$(K, \leq)$ bir tamsıralamadır
$(K, +, \times, \leq, 0, 1)$ sıralı bir cisimdir

Notlar ve Örnekler

12.35. Teoriye takılmadan önce birkaç sıralı halka örneği verelim. Her şeyden önce sıralı bir R halkasının her althalkası, R'nin sıralamasıyla birlikte sıralı bir halkadır. (Örneğin, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$'nün bir althalkasıdır. $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$'nin bir althalkasıdır.) Büyük halkanın sıralaması, bedavadan küçük halkanın bir sıralamasını verir. Eğer R sıralı bir halkaysa, $R[X]$ polinom kümesini çok değişik biçimde kolaylıkla sıralanabilir; bunun için R'nin hangi elemanlarının X'ten küçük (ya da büyük) olduğuna karar vermek yeterlidir; hatta dilenirse X, R'nn bütün elemanlarından daha büyük olabilir (sonsuz büyük), ya da R'nin her pozitif sayısından küçük olabilir (sonsuz küçük). Bu fikri Bölüm 40'de sömüreceğiz.

Sıralı bir R halkasında bir $\varepsilon > 0$ elemanı alalım. ε elemanını küçük bir eleman olarak düşünün. ε, 2ε, 3ε, 4ε, ... elemanları bir zaman sonra bütün elemanları aşar mı? Yani her $A \in R$ için, $n\varepsilon > A$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı var mıdır? $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ halkalarında bu sorunun yanıtı olumludur. Ama her halkada bu böyle değildir. Sorunun yanıtının olumlu olduğu halkalara ***Arşimet halkası*** denir.

Önsav 12.7. $(R, +, \times, \leq, 0, 1)$ *sıralı bir halka olsun. Her* a, b, $c \in R$ *için,*
i. $a \leq b$ *ise* $-b \leq -a$ *ve* $0 \leq a$ *ise* $-a \leq 0$.

ii. *$a < b$ ise $a + c < b + c$.*
iii. *$a \leq b$ ve $0 \leq c$ ise $ac \leq bc$.*
iv. $-1 < 0$.
v. $0 < 1$.
vi. $a^2 \geq 0$.
vii. *Karelerin toplamı negatif olamaz.*
viii. *-1, karelerin toplamı olarak yazılamaz.*
ix. *$ab = 0$ ise ya $a = 0$ ya da $b = 0$ olur. Yani R bir **bölgedir**.*
x. *Karelerin toplamının 0 etmesi için, karesi alınıp toplanan her elemanın 0 olması gerekir. Yani $r_1^2 + \cdots + r_n^2 = 0$ ise, her i için $r_i = 0$ olmalı.*
xi. *a'nın çarpımsal tersi a^{-1} varsa ve $a > 0$ ise, $a^{-1} > 0$'dır.*
xii. *Sonlu sayıda 1'in toplamı pozitiftir ve toplam 0 edemez, dolayısıyla sıralı bir halka sonsuz olmak zorundadır.*

Kanıt: i. $a \leq b$ eşitsizliğinin her iki tarafına $-a$ eklersek, TO'dan,

$$0 \leq b - a$$

elde ederiz. Şimdi bu eşitsizliğin her iki tarafına $-b$ ekleyelim. İkincisi birincisinden çıkar.
ii. $a + c \geq b + c$ olsaydı c'leri sadeleştirerek $a \geq b$ elde ederdik.
iii. $a \leq b$ eşitsizliğinin her iki tarafına $-a$ eklersek, TO'dan, $0 \leq b - a$ elde ederiz. Şimdi ÇO'dan, $0 \leq c(b - a) = cb - ca$ elde ederiz. Bu elde ettiğimiz $0 \leq cb - ca$ eşitsizliğinin her iki tarafına ca eklersek $ca \leq cb$ elde ederiz, yani $ac \leq bc$.
iv. $0 < -1$ olsaydı, her iki tarafa da 1 ekleyerek, $1 < 0$ elde ederdik. Öte yandan, $0 < -1$ eşitsizliği ÇO'dan dolayı $0 \leq (-1)(-1) = 1$ eşitsizliğini verir, çelişki.
v. Yukarda kanıtlanan $-1 < 0$ eşitsizliğinin her iki tarafına da 1 ekleyelim.
vi. Eğer $a \leq 0$ ise, $0 \leq -a$. Buradan ve ÇO'dan,

$$0 \leq (-a)(-a) = a^2$$

çıkar. Eğer $a \geq 0$ ise, doğrudan ÇO'dan $a^2 \geq 0$ elde ederiz.
vii ve **viii** vi, iv'ten ve TO'dan çıkar.
ix. a ve b'nin 0 olmadıklarını varsayalım. i'e göre, ya a ya da $-a$ pozitiftir. Ve aynı şey b için de geçerlidir. Dolayısıyla $(\pm a)(\pm b)$, yani $\pm ab$ sayılarından biri pozitif olmak zorundadır. Demek ki $ab \neq 0$.
x. n, $r_i \neq 0$ olmak üzere, $r_1^2 + \cdots + r_n^2 = 0$ eşitliğinin sağlandığı en küçük pozitif doğal sayı olsun. Her i için $r_i \neq 0$ olmalı. Basit bir hesap yapalım:

$$r_1^2 + \cdots + r_{n-1}^2 = -r_n^2.$$

i, vi ve vii'den dolayı, $r_n^2 = 0$ olmalı. ix'dan dolayı $r_n = 0$. Bu bir çelişkidir.

xi. $a^{-1} < 0$ ise o zaman $-a^{-1} > 0$ ve iii'ten dolayı,

$$-1 = (-a^{-1})a > 0$$

ve bu da iv'le çelişir.
xii. Halkada n tane 1'in toplamına (sanki tamsayıymış gibi) n diyelim. ii ve v sayesinde, tümevarımla, $0 < n < n+1$ eşitsizliği kanıtlanabilir. Geri kalan her şey bundan çıkar. □

Sonuç 12.8. *$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ halkaları üzerine tek bir sıralama vardır.*

Kanıt: $\mathbb{Z}$ üzerine tek bir sıralama olduğu yukarıdaki önsavdan kolaylıkla çıkar. $\mathbb{Q}$ cismi üzerine bir $\preccurlyeq$ sıralaması alalım. $\mathbb{Z}$ üzerine tek bir sıralama olduğundan, her a, $b \in \mathbb{Z}$ için,

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \leq b.$$

Şimdi α, $\beta \in \mathbb{Q}$ olsun. a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ ve b, $d > 0$ için, $\alpha = a/b$ ve $\beta = c/d$ olarak yazalım. b, $d \succ 0$ olduğu için,

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Leftrightarrow a/b \preccurlyeq c/d \Leftrightarrow ad \preccurlyeq bc \Leftrightarrow ad \leq bc \Leftrightarrow a/b \leq c/d \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Sonuç 12.9. *Sıralı bir halka $\mathbb{Z}$'nin bir kopyasını içerir. Sıralı bir cisim ise $\mathbb{Q}$'nün bir kopyasını içerir.*

Kanıt: $i(0) = 0$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, $i(n)$, R'nin 1 elemanının kendisiyle n kez toplamı olsun. Yani $i(n) = n_R$ olsun. Önsav 12.7.xii'nin kanıtına göre, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$i(n) < i(n+1)$$

olur.

Eğer $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ise,

$$i(n) = -i(-n)$$

olsun. i, $\mathbb{Z}$'den R'ye giden ve toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir birebir fonksiyondur. (Neden?) Sonuç 12.8'ye göre, i, sıralamaya da saygı duyar. $i(\mathbb{Z})$, R'de $\mathbb{Z}$'nin bir kopyasıdır.

İkinci önerme birincisinden çıkar. □

Bu sonucu sağlayan halkalara ***karakteristiği*** 0 ***olan*** halkalar denir. Demek ki sıralı bir halkanın karakteristiği 0'dır.

Sıralı halkaların en başat özelliklerini kanıtladık. Şimdi hangi halkaların sıralanabileceği sorusuna eğilelim.

Önsav 12.7.x'a göre, karelerin toplamı -1 olabilen halkalar sıralanamaz. Ve Önsav 12.7.ix'a göre sıralanabilen halkalar bölgedirler. Peki, karelerin toplamı

-1 olmayan bölgeler sıralanabilir mi? Bunu birazdan kanıtlayacağız. (Bu tür halkalara ***biçimsel gerçel*** ya da ***sıralanabilir halkalar*** denir.)

Pozitif Koni. R, sıralı bir halka olsun. P de R'nin pozitif elemanlarının kümesi olsun:

$$P = \{r \in R : r > 0\}.$$

P'ye ***pozitif koni*** adı verilir. Pozitif koni sıralamayı tamamıyla belirler, çünkü, elbette,

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in P$$

önermesi doğrudur. P'nin çok bariz biçimde şu özellikleri vardır:

- $0 \notin P$,
- P toplama ve çarpma altında altında kapalıdır,
- P, 0 dışında tüm elemanların karelerini içerir.

Üstelik P, R'nin toplama altında kapalı olan ve 0'ı içermeyen en büyük altkümelerinden biridir, çünkü eğer P'den daha büyük bir Q altkümesi bu iki özelliği sağlasaydı, o zaman Q'de P'de olmayan bir a elemanı olurdu. $a \neq 0$ ve hatta $a < 0$ olmalıdır. O zaman $-a \in P \subseteq Q$ ve $0 = -a + a \in Q$ olur, çelişki.

Şimdi, eğer R bir bölgeyse, yukardaki üç özelliği sağlayan en büyük bir P altkümesinin olmasının R'nin sıralanacağı anlamına geldiğini göstereceğiz.

Teorem 12.10. *R, -1'in karelerin toplamı olarak yazılamadığı bir bölge olsun. P, R'nin toplama ve çarpma altında kapalı, 0'ı (eleman olatak) içermeyen ama R'nin 0 dışındaki tüm karelerini içeren bir altkümesi olsun. Ayrıca P, R'nin bu koşulları sağlayan en büyük altkümesi olsun. O zaman,*

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in P \text{ ya da } a = b$$

olarak tanımlanan $\leq$ ikili ilişkisi R'yi sıralar.

Kanıt: O1'in doğru olduğu çok belli. O2'yi kanıtlayalım. $a \leq b$ ve $b \leq a$ olsun ama $a \neq b$ olsun. O zaman, $\leq$ ilişkisinin tanımına göre, $b-a$ ve $a-b$ elemanları P'dedir. Demek ki toplamları olan 0 da P'dedir. Çelişki. O3'ün doğruluğu P'nin toplama altında kapalı olmasından çıkar: $a = b$ ya da $b = c$ ise, sorun yok. Aksi taktirde, $b - a$ ve $c - b$ elemanları P'dedir. Bu iki elemanı toplarsak $c-a$ elemanının P'de olduğu, yani $a < c$ olduğu çıkar. TO'nun kanıtı çok kolay. ÇO'ya gelelim: Eğer $ab = 0$ ise sorun yok. Aksi taktirde a ve b elemanları P'de olduğundan, ab de P'dedir. Şimdi son olarak O4'ü kanıtlayalım. Aslında, O4,

$$R = P \cup \{0\} \cup (-P)$$

diyor. Bunu kanıtlamalıyız. Yani her $a \in R$ elemanı,

$$a \in P,\ a = 0,\ -a \in P$$

koşullarından birini sağlamalıdır. Bir a elemanının bu koşullardan hiçbirini sağlamadığını varsayalım.

$$P' = P \cup \{0\}$$

ve

$$Q = (P' + P'a) \setminus \{0\} = \{p_0 + p_1 a : p_0,\, p_1 \in P \cup \{0\}\} \setminus \{0\}$$

kümesini ele alalım. P' toplama altında kapalı olduğundan Q de toplama altında kapalıdır. Ayrıca, p_1'i 0'a eşit alarak, P'nin Q'nün altkümesi olduğu anlaşılır. Dahası, $p_0 = 0$ ve $p_1 = 1 = 1^2$ olarak alırsak, P'de olmayan a'nın Q de olduğunu görürüz. Demek ki Q, P'den daha büyük bir küme.

Q'nün çarpma altında da kapalı olduğunu iddia edip kanıtlıyorum. P' kümesinin çarpma altında kapalı olduğuna dikkatinizi çekerim. Q'den herhangi iki eleman alalım: $p_0 + p_1 a$ ve $p_2 + p_3 a$. Buradaki tüm p_i'ler P' kümesindeler. Şimdi,

$$(p_0 + p_1 a)(p_2 + p_3 a) = (p_0 p_2 + p_1 p_3 a^2) + (p_0 p_3 + p_1 p_2)a$$

çarpımına göz atalım. Bir bölgede olduğumuzdan çarpım 0 olamaz. Ayrıca, varsayıma göre, $a^2 \in P \subseteq P'$ olduğundan,

$$p_0 p_2 + p_1 p_3 a^2,\ p_0 p_3 + p_1 p_2 \in P'$$

olmalı. Demek ki $(p_0 + p_1 a)(p_2 + p_3 a) \in Q$.

Ama hani P, R'nin teoremde verilen koşulları sağlayan en büyük altkümesiydi? Bir çelişki. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Aşağıdaki sonuç, [Ne1] kitabında göreceğimiz Zorn Önsavı (ya da Seçim Aksiyomu) kullanılarak kanıtlanabilir. Bilgi olarak sunuyoruz. Kanıtın nasıl olabileceği bir önceki teoremden anlaşılması lazım.

Olgu. *Bir bölgenin sıralanabilir olması için -1'in karelerin toplamı olmaması gerek ve yeter koşuldur.* □

Aşağıdaki alıştırmalarda sıralı bir halkada çalışıyoruz.

Alıştırmalar

12.36. Her a, b, c için, $a < b$ ve $0 > c$ ise $ac > bc$ olacağını kanıtlayın.

12.37. Eğer $a \geq 0$ ise, $|a| = a$ olsun ve eğer $a \leq 0$ ise, $|a| = -a$ olsun. $|a|$ elemanına a'nın ***mutlak değeri*** adı verilir. Her a ve b için

$$|a| \cdot |b| = |ab|,$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

ve

$$|a - b| \geq ||a| - |b||$$

önermelerini kanıtlayın.

12.38. $d(a,\, b) = |a - b|$ olsun. Her $x,\, y,\, z$ için aşağıdaki önermeleri kanıtlayın:

$$d(x,\, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
$$d(x,\, y) = d(y,\, x),$$
$$d(x,\, y) \leq d(x,\, z) + d(z,\, x).$$

12.39. $a, r \in R$ olsun.

$$B(a,r) = \{x \in R : d(a,x) < r\}$$

olsun. Bu tür kümelere açık top diyelim. Açık topların bileşimlerine de açık küme diyelim. R'nin ayrıca şu özelliği olsun: Her $0 < r \in R$ için $0 < x < r$ eşitsizliklerini sağlayan bir $x \in R$ vardır. İki açık kümenin kesişiminin de bir açık küme olduğunu kanıtlayın. Açık kümelerin bileşimi (bariz biçimde) bir açık küme olduğundan, bu açık kümeler R üserine bir topoloji tanımlarlar.

12.40. [Topoloji bilenlere] Sıralı bir R halkasında, yukarıdaki metrikle, $R \times R$'den R'ye giden

$$(a,b) \mapsto a - b \text{ ve } (a,b) \mapsto ab$$

fonksiyonlarının sürekli olduğunu kanıtlayın. Demek ki R, topolojik bir halkadır. Topolojik bir halkada topolojinin verdiği yakınsaklık kavramı vardır. Kesirli sayılarda ve (gelecekte inşa edeceğimiz) $\mathbb{R}$'de tanımlanan (ve tanımlayacağımız) yakınsaklık kavramı, aynen topolojik uzaylarda tanımlanan yakınsaklıktır. Bir cismin Arşimet cismi olması için yeter ve gerek koşul, $(1/n)_n$ dizisinin limitinin olmasıdır (o zaman bu limit zorunlu olarak 0 olur.) Bütün bunları kanıtlayın.

Kısım III

Ara Nağme

13. Sayıları Yaratmaya Devam Ediyoruz

Kitabın ilk kısmında 0, 1, 2, 3 gibi doğal sayıları ve bu doğal sayıların kümesi olan $\mathbb{N}$'yi yarattık. Sadece $\mathbb{N}$'yi yaratmakla kalmadık, ayrıca $\mathbb{N}$'de toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımladık. Bütün bunları yapmak için kümeler kuramından yararlandık; daha doğrusu en en en temel kümeler kuramını bu sayıları yaratmak için özellikle kurduk.

Doğal sayıların önemli bir kusuru bir sayıdan bir başka sayının her zaman çıkarılamamasıdır. Örneğin, doğal sayılarda 3'ten 5'i çıkaramazsınız. Doğal sayıların bu zaafını gidermek için, geçen kısımda, $\mathbb{N}$'den hareket ederek ve cebir maharetiyle $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesini yaratmıştık. Ayrıca $\mathbb{Z}$'de toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerini ve sıralamayı tanımlamışık.

Tamsayıların da bir kusuru var. Tamsayılarda bölme yapılamaz, örneğin 3'ü 5'e bölemeyiz. Tamsayıların bu zaafını gidermek için, gene geçen kısımda, $3/5$, $-2/7$ gibi kesirli sayıları ve bu sayıların kümesi olan $\mathbb{Q}$ kümesini yarattık. Sadece $\mathbb{Q}$ kümesini yaratmakla kalmadık, bu küme üzerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini ve sıralamayı da tanımladık. (0'a bölmeyi tanımlayamadık elbet!) Kesirli sayıları yaratmak için tamsayılardan yola çıktık ve cebirsel yöntemler kullandık.

Ancak kesirli sayıların da önemli bir kusuru var. Örneğin,

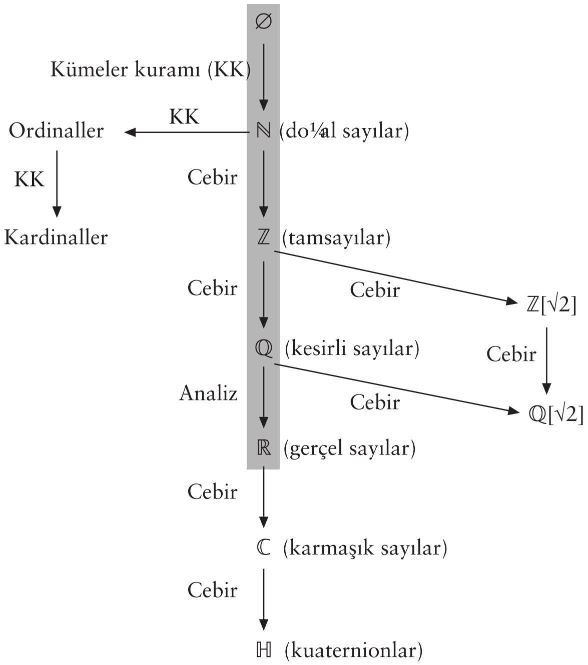
$$x^2 = 2$$

denkleminin kesirli sayılarda çözümü yoktur. Bunun kanıtı [SKK]'da bulunabilir.

Bir sonraki altbölümde, $\sqrt{2}$'yi yaratacağız. $\sqrt{2}$'yi yaratmakla kalmayacağız, $\sqrt{2}$'yi içeren bir sistemde toplama, çarpma ve hatta bölme yapacağız.

Aşağıda şemada sayı yaratmanın kronolojisini bulacaksınız.

Sayıların Yaratılış Süreci



Kardinaller dışında aşağı doğru indikçe sayı kümeleri büyür.
[AKK]'da göreceğimiz her kardinal bir ordinaldir.
Kuaternionlardan daha büyük oktonionlar vardır.

13.1 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'yi Yaratmak

$\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmamasının doğurduğu tekil sorunu gidermek o kadar zor değildir ve bu kısa altbölümde $\sqrt{2}$'yi içeren $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sıralı halkasını matematiksel olarak yaratarak bu sorunu gidereceğiz. Ama sorun sadece $\sqrt{2}$'nin varlığı değil ki, kesirli olmayan o kadar çok gerçel sayı var ki... Bu sorunu ileri bir tarihe atıp şimdilik sadece $\sqrt{2}$'yi var edelim.

Elimizde sadece $\mathbb{Q}$ kümesi var. Sadece $\mathbb{Q}$'yü ve en temel kümeler kuramını kullanarak $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasını var edeceğiz... Yaratmadan önce bu halkanın sonunda nasıl bir şey olacağını, sanki $\sqrt{2}$'nin ne olduğunu biliyormuşçasına, önceden söyleyelim,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a,\, b \in \mathbb{Q}\}$$

olacak. Henüz yaratmadığımız $\mathbb{R}$ kümesinin bir altkümesi olan bu küme, toplama, çarpma, çıkarma altında kapalıdır. Hatta eğer $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ise $1/\alpha$ sayısı da $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesindedir. (Şimdilik okura alıştırma.)

Başlıyoruz.

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesine eşit olsun... Amacımız, sezgisel olarak bildiğimiz ama henüz matematiksel olarak var olmayan $a + b\sqrt{2}$ sayısını (a, b) ikilisi olarak görmek. Örneğin $\sqrt{2}$ sayısı $(0, 1)$ elemanına eşit olacak. Her a kesirli sayısını da $(a, 0)$ olarak göreceğiz. Şimdi $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac + 2bd, ad + bc).$$

Bu tanımları, sezgisel olarak bildiğimiz,

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$$

eşitliklerinden esinlenerek yaptık.

Örneğin,

$$(0, 1)^2 = (2, 0).$$

("Kare almak" demek bir sayıyı kendisiyle çarpmak demektir elbet.) Bir de şu eşitliğe bakalım:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

Eğer $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesinin $(x, 0)$ türünden yazılan elemanlarını $i(x)$ olarak kısaltırsak, $(0, 1)$ elemanını da $\sqrt{2}$ olarak yazarsak ($\sqrt{2}$'yi yarattık!), yukardaki

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

eşitliği,

$$(a, b) = i(a) + i(b)\sqrt{2}$$

hâlini alır. Daha bitmedi... Bir de $i(x)$ elemanını x olarak kısaltırsak, bu en son eşitlik,

$$(a, b) = a + b\sqrt{2}$$

hâlini alır ve böylece, tüm $a, b \in \mathbb{Q}$ için, $a + b\sqrt{2}$ sayılarını yaratmış oluruz...

Hangi hakla $i(x)$ yerine x yazıyoruz diye sorabilir okur haklı olarak. Aslında bu bir suçtur, ama bu suçun hafifletici nedenleri vardır: Kolayca görüleceği üzere, her $a, b \in \mathbb{Q}$ için

$$i(a) + i(b) = i(a + b),$$
$$i(a)i(b) = i(ab)$$

s eşitlikleri geçerli ve ayrıca

$$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

fonksiyonu birebir. Bütün bunlar, a ve b kesirli sayılarını toplayıp çarpmayla, yeni yarattığımız $i(a)$ ve $i(b)$ elemanlarını toplayıp çarpmak arasında pek bir ayrım olmadığını gösterir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ ile $i(\mathbb{Q})$ kümelerini "özdeşleştirebiliriz". (Bkz. Bölüm 10.8.)

Toplama ve çarpma verildiğinden, artık $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinde çıkarma ve bölmeyi de tanımlayabiliriz. Bu tanımları okura bırakıyoruz. Ama sıralamayı tanımlayalım:

$$a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2}$$

önermesi, elbette,

$$0 \leq (c - a) + (d - b)\sqrt{2}$$

önermesi doğruysa doğru olmalı. Demek ki

$$0 \leq x + y\sqrt{2}$$

önermesini tanımlamak yeterli. Bunu da şöyle tanımlayalım:

$$0 \leq x + y\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0 \text{ ise ya da} \\ x \geq 0,\ y \leq 0 \text{ ve } 2y^2 \leq x^2 \text{ ya da} \\ x \leq 0, y \geq 0 \text{ ve } x^2 \leq 2y^2 \text{ ise} \end{cases}$$

Artık $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesini, bu küme üstündeki 4 işlemi ve sıralamayı biliyoruz. Bu tanımlarla, ortaokul bilgilerinizle doğru olacağını tahmin ettiğiniz her türlü ifadeyi kanıtlayabilirsiniz.

Dileyen okur $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesinin bu tanımlarla sıralı bir cisim olduğunu kanıtlayabilir.

Tuhaf ama gerçek: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ kümesini yukarda tanımlanan toplama ve çarpmayla sıralı bir cisim yapan bir başka sıralama daha vardır. Bu yeni sıralamada $\sqrt{2} < 0$ olur! Açıklayalım.

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'den $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'ye giden şu fonksiyona bakalım:

$$\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

fonksiyonu her a, $b \in \mathbb{Q}$ için,

$$\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

formülüyle tanımlansın. φ fonksiyonu bir eşleşmedir ve $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ halkasının toplamasını ve çarpmasını ve çarpmanın birim elemanını etkilemez, yani, her

$$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

için,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + \beta) &= \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \\ \varphi(\alpha\beta) &= \varphi(\alpha)\varphi(\beta), \\ \varphi(1) &= 1 \end{aligned}$$

olur. Şimdi φ'yi kullanarak $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ üzerine (gerçel sayılardan bulaşan) "doğal" sıralamayı değiştirebiliriz: Her $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ için,

$$\alpha \prec \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\alpha)$$

olarak tanımlayalım. $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times, \prec)$ yapısı da sıralı bir cisim olur ve $\sqrt{2}$ bu sıralamada negatif olur.

13.2 Ya Diğer Eksik Sayılar?

$\sqrt{2}$'nin kesirli sayı olmama sorununu ve benzer sorunları çözmek için, kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'den çok çok daha büyük bir küme olan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi yaratacağız.

Sorun sadece 2'nin karekökünü yaratmak olsaydı, $\mathbb{R}$'den çok daha küçük olan

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a,\ b \in \mathbb{Q}\}$$

cismi işimizi görürdü ve $\mathbb{R}$'yi yaratmak yerine, yaratması çok daha kolay olan ve cebirsel yöntemlerle yaratılabilen $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ cismini yaratmamız yeterli olurdu.

Sadece $\sqrt{2}$'yi değil, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $5^{1/3}$ gibi sayıları, hem de dördünü birden cebirsel yöntemlerle yaratmak da oldukça kolaydır.

Hatta π sayısını ve, n herhangi bir tamsayı olmak üzere, π^n sayılarının hepsini de cebirsel yöntemlerle kolaylıkla yaratabiliriz.

n bir kesirli sayı olmak üzere π^n sayılarının hepsini birden yaratmak biraz daha fazla uğraş gerektirir ve bu yöntem çok daha az bilinir ama bu da mümkündür.

(Toplama ve çarpma işlemlerini tanımlamak görece kolaydır ama bu sayı cisimlerini sıralamak çok daha zordur.)

Demek istediğimiz şu: Kesirli sayıların en büyük kusuru $\sqrt{2}$ gibi bir sayının olmaması değildir. Kesirli sayıların çok daha büyük bir kusuru vardır. Eğer $\sqrt{2}$'nin olmaması, komşunun bahçesinden elma çalmaksa, $\mathbb{Q}$'nün diğer büyük suçu banka soymaktır! Gerçel sayıları yaratarak bu kusuru gidermeye çalışacağız.

Bu büyük kusur öylesine büyük bir kusurdur ki, telafi etmek için cebir yetmez, analiz de gerekir.

14. $\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi

$\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmadığını biliyoruz. $\sqrt{2}$, kesirli bir sayı değildir ama kesirli sayılarla $\sqrt{2}$'ye dilediğimiz kadar yaklaşabiliriz. Örneğin $\sqrt{2}$'yle

$$1{,}414213562373$$

kesirli sayısı arasındaki fark 0,000000000001 sayısından küçüktür. Dilersek, $\sqrt{2}$'ye uzaklığı en fazla

$$0{,}0000000000000000000001$$

olan kesirli bir sayı bulabiliriz. Bulacağız da.

Bu bölümde, gittikçe $\sqrt{2}$'ye daha fazla yaklaşan ve "sonsuzda $\sqrt{2}$ olmaya meyilli" olan bir kesirli sayı dizisini ele alacağız. Hemen bu diziyi tanımlayalım.

$(x_n)_n$ dizisinin terimlerini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$(*) \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

Eğer uygun bir x_0 verilmişse, bu tanım sayesinde tüm x_n'leri hesaplayabiliriz. Örneğin eğer $x_0 = 1$ ise,

$$x_3 = \frac{17}{12} = 1{,}41666\ldots$$

buluruz ki, bu, Mezopotamyalıların, daha iyisini bilmediklerinden, $\sqrt{2}$ yerine kullandıkları değerdir. Pek de fena bir değer değildir aslında:

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = 2,00694444\ldots$$

Eğer $x_0 = 0$ alırsak,

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0\\
x_1 &= 2/1 = 2\\
x_2 &= 4/3 = 1{,}3333333\ldots\\
x_3 &= 10/7 = 1{,}4285714285714\ldots\\
x_4 &= 24/17 = 1{,}4117647058823\ldots\\
x_5 &= 58/41 = 1{,}4146341463414\ldots\\
x_6 &= 140/99 = 1{,}4141414141414\ldots
\end{aligned}$$

buluruz. Bu dizinin giderek $\sqrt{2}$'ye daha çok yaklaştığını, hiçbir zaman tam olarak $\sqrt{2}$'ye eşit olmasa da dizinin terimleriyle $\sqrt{2}$'ye istediğimiz kadar yaklaşabileceğimizi göstereceğiz. Örneğin, belli bir aşamadan sonra tüm x_n'ler $\sqrt{2}$'ye en fazla milyarda 1 uzaklıktadırlar; bunun için n'yi 18 ya da daha büyük seçmenin yeterli olduğunu göreceğiz. Seçtiğimiz $\varepsilon > 0$ sayısı ne kadar küçük olursa olsun, bir zaman sonra - yani belli göstergeçten sonra- tüm x_n'ler $\sqrt{2}$'ye en fazla bu ε mesafesi kadar uzaklıkta olurlar. Matematikte bu olgu "$(x_n)_n$ dizisi $\sqrt{2}$'ye ***yakınsar***" olarak ifade edilir. Ders notlarının son kısmında yakınsama kavramına özel yer ayıracağız. Bu bölümü ısınma hareketleri olarak telakki edebilirsiniz.

Eğer diziyi hesaplamaya $x_0 = -1$ ile başlamaya kalkışırsak, bir sonraki terimi hesaplamak için $x_0 + 1$'e yani 0'a bölmek zorunda olduğumuzdan, diziyi devam ettiremeyiz. Aynı şekilde, eğer $x_0 = -3/2$ ise $x_1 = -1$ olur ve bu sefer de x_2'yi hesaplayamayız. Ama eğer $x_0 \geq 0$ ise, tümevarımla kolayca görüleceği üzere, her $x_n \geq 0$ olur ve dizinin her terimini hesaplayabiliriz. Bu dizinin, seçilmiş her $x_0 \geq 0$ (kesirli) sayısı için $\sqrt{2}$'ye yaklaştığını göstereceğiz. Daha doğrusu, henüz $\sqrt{2}$ diye bir sayıyı icat etmediğimizden, x_n'lerin karelerinin giderek 2'ye yakınsadığını göstereceğiz. Yakınsamanın ne demek olduğunu henüz bilmediğimizden, tam matematiksel olamayacağız ama gene de okur gerçeği hissedecek diye umuyoruz.

$|2 - x_n^2|$ sayılarına bakalım. Önce,

$$|2 - x_{n+1}^2| = \left|2 - \left(\frac{x_n + 2}{x_n + 1}\right)^2\right| = \left|2 - \frac{x_n^2 - 4x_n + 4}{x_n^2 + 2x_n + 1}\right| = \frac{|2 - x_n^2|}{(x_n + 1)^2}$$

eşitliğinin farkına varalım. Eğer $1 \leq x_n$ eşitsizliğini kanıtlayabilirsek, o zaman $(x_n + 1)^2 \geq 4$ olur ve yukardaki eşitsizlikten,

$$|2 - x_{n+1}^2| \leq \frac{|2 - x_n^2|}{4}$$

eşitsizliği çıkar ve böylece 2'yle x_n^2 arasındaki farkın her adımda, bir önceki farkın 4'te 1'inden daha küçük olacağı anlaşılmış olur. Tabii bu da aradaki farkın n büyüdükçe 0'a yaklaşacağı anlamına gelir.

Şimdi x_n'nin 1'den büyük olduğunu kanıtlayalım diyeceğim ama bu dediğim, eğer $x_0 < 1$ seçilirse, en azından $n = 0$ için doğru olmaz. Öte yandan, eğer $x_0 > -1$ ise, o zaman $x_0 + 1 > 0$ olur ve (*) tanımından kolayca kanıtlanacağı üzere, $n \geq 1$ için tüm x_n'ler 1'den büyük olurlar. (Çünkü paydaki $x_n + 2$ sayısı her zaman paydadaki $x_n + 1$'den daha büyüktür.) Böylece

$$|2 - x_{n+1}^2| \leq \frac{|2 - x_n^2|}{4}$$

eşitsizliği kanıtlanmış olur. Demek ki,

$$|2 - x_n^2| \leq \frac{|2 - x_{n-1}^2|}{4} \leq \frac{|2 - x_{n-2}^2|}{4^2} \leq \ldots \leq \frac{|2 - x_0^2|}{4^n}$$

yani

$$|2 - x_n^2| \leq \frac{|2 - x_0^2|}{4^n}$$

eşitsizliğini buluruz. Örneğin, $x_0 = 1$ alırsak,

$$|2 - x_n^2| \leq 1/4^n$$

buluruz, ki fena bir aşağıyukarılık değil. Buradan, eğer bir an için $\sqrt{2}$ sayısının varlığını bildiğimizi varsayarsak,

$$|\sqrt{2} - x_n| < |\sqrt{2} - x_n||\sqrt{2} + x_n| = |2 - x_n^2| \leq 1/4^n,$$

yani

$$|\sqrt{2} - x_n| < 1/4^n$$

buluruz. Eğer $n = 2m$ alacak olursak,

$$|\sqrt{2} - x_{2m}| < 1/4^{2m} = 1/16^m < 1/10^m$$

buluruz. Örneğin, eğer $\sqrt{2}$'ye kesirli bir sayıyla milyarda 1 kadar yaklaşmak istiyorsak, $x_0 = 1$ ve $m = 9$ seçip x_{18}'i hesaplayabiliriz:

$$x_{18} = \frac{9369319}{6625109} = 1,414213562\ldots$$

Aslında $\sqrt{2}$'ye 18'inci terimden çok daha çabuk milyarda 1 kadar yaklaşırız, yukardaki eşitsizliklerde oldukça hoyrat davrandık, daha ince bir yaklaşım daha güzel sonuçlar verir.

Burada önemli olan nokta şu: Eğer x_0'ı kesirli bir sayı seçersek, hesaplanabilen her x_n elbette kesirli bir sayı olur. x_n kesirli sayısının payını ve paydasını hesaplamanın kolay bir yolu var:

$$p_{n+1} = p_n + 2q_n$$
$$q_{n+1} = p_n + q_n$$

olarak tanımlarsak,

$$x_n = p_n/q_n$$

olarak tanımlanan dizi (*) eşitliğini sağlar. (Alıştırma.) Yukarda bulduğumuz

$$x_{18} = \frac{9369319}{6625109}$$

için $p_0 = q_0 = 1$ aldık ve p_n ve q_n'leri $n = 18$'e kadar teker teker hesapladık.

Limit Kavramını Bilenlere Not: Yukardaki tanımla verilen $(x_n)_n$ dizisi eğer bir sayıya yakınsıyorsa, bu sayı $\pm\sqrt{2}$ olmak zorundadır. Nitekim, eğer limite x dersek ve (*) tanımında, x_{n+1} ve x_n yerine x koyarsak,

$$x = \frac{x+2}{x+1}$$

elde ederiz ve buradan da önce,

$$x(x+1) = x+2$$

ve sadeleştirdikten sonra da,

$$x^2 = 2$$

çıkar. Demek ki x ya $\sqrt{2}$ ya da $-\sqrt{2}$ olabilir.

Aslında, $x_0 = -\sqrt{2}$ dışında, dizinin hesaplanabildiği tüm x_0 değerleri için limit ancak $\sqrt{2}$ olabilir. Bunun pek o kadar kolay olduğunu sanmadığımız kanıtını okura bırakıyoruz. Bir başka ilginç alıştırma da dizinin hesaplanamayacağı tüm x_0 değerlerini bulmak. Sonuç çok hoş çıkıyor.

Alıştırmalar

14.1. Aynı şeyi $\sqrt{2}$ yerine $\sqrt{3}$ için yapmaya çalışın, örneğin $|x - \sqrt{3}| < 10^{-9}$ eşitsizliğini sağlayan bir x kesirli sayısı bulun.

Notlar

14.2. **Karekök İşareti.** $\sqrt{\ }$ işaretinin tarihi 1525'e uzanır. Bu simgeye benzer bir simge, köklü sayılar için Alman Matematikçi Christoff Rudolff (1499-1545) tarafından **Coss** adlı kitabında kullanılmıştır.

Coss, Almanca dilinde yayımlanmış ilk cebir kitabıdır.

Coss, *cosa*'dan gelir. Cosa da, "bilinmeyen" anlamına kullanılan "şey"in Latincesidir. Cebircilere uzunca bir zaman bu yüzden "kosistler" denirdi. Cebire de "kosik sanat" denmiştir.

14.3. **$\sqrt{2}$'nin Öyküsü.** Yunanlı filozof Aristo'ya (MÖ 384-322) göre, $\sqrt{2}$'nin kesirli olmadığını ilk kez MÖ 430 yıllarında Pisagor anlamıştır. Pisagor olmasa da, bu buluşun bir felsefe ekolü olan Pisagorcular tarafından bulunduğu kesin. Bu buluş Pisagorcuların felsefesinin ve inancının temelini yıkıyordu. Pisagorculara göre var olan her şeyin temeli doğal sayılardı ve her şey (örneğin her uzunluk) doğal sayılar ya da doğal sayıların doğal sayılara bölünmesiyle (yani kesirli sayılarla) ifade edilebilirdi. Ama iki kenarı 1 uzunluğunda olan bir diküçgenin hipotenüsünün uzunluğu $\sqrt{2}$'ydi ve $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildi. Bu yüzden Pisagorcular uzunca bir süre $\sqrt{2}$'nin kesirli olmadığını bir sır olarak saklamışlardır.

14.4. Öklid'in (MÖ 325-265) ünlü **Elemanlar** adlı eserinin 10'uncu cildinde tamkare olmayan her kesirli sayının karekökünün kesirli bir sayı olmadığını kanıtlamıştır.

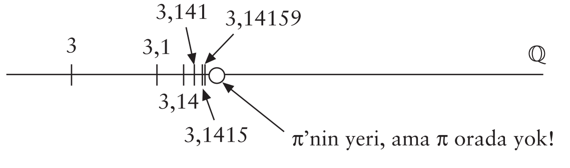
15. Kesirli Sayılar Kümesinin Kusurları

Bir önceki bölümde, kesirli bir sayı olmayan $\sqrt{2}$'ye çok çok yaklaşan bir kesirli sayılar dizisi bulmuştuk. Bu kesirli sayı dizisi, $\sqrt{2}$'ye erişmek için elinden geleni yapıyordu. Hatta "sonsuzda" $\sqrt{2}$ olmak için yanıp tutuşuyordu ama $\sqrt{2}$ orada olmadığı için (çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değil) sonsuzda bile $\sqrt{2}$ olamıyordu...

Sadece $\sqrt{2}$'ye değil, herhangi bir gerçel sayıya yakınsamaya çalışan bir, hatta birden çok kesirli sayı dizisi bulabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ x_1 &= 3,1 \\ x_2 &= 3,14 \\ x_3 &= 3,141 \\ x_4 &= 3,1415 \\ x_5 &= 3,14159 \\ &\dots \end{aligned}$$

dizisi belli ki π sayısına yakınsamak üzere yola çıkmıştır ama hiçbir zaman π sayısına eşit olamayacaktır, "sonsuzda" bile, çünkü π kesirli bir sayı değildir[1] ve orada yoktur! Bu dizi sürekli olarak artıyor ve giderek daha fazla π'ye yaklaşıyor ve sonsuzda olmak istediği yere gelince, bir de bakıyor ki o sayı orada yok! Çünkü dünyası $\mathbb{Q}$'den ibaret! Hicran!



Kesirli sayıların yukardaki gibi bir resmini yaparsak, π'nin olması gerektiği yerde bir delik görürüz. $\sqrt{2}$'nin yerinde de yeller esiyordur. Kesirli sayılarda

[1] π'nin kesirli sayı olmadığını kanıtlamak $\sqrt{2}$'nin kesirli sayı olmadığını kanıtlamaktan daha zordur.

daha birçok delik vardır. Hatta kesirli sayılarda kesirli sayıdan çok daha fazla delik vardır!

İşte kesirli sayılar kümesinin en büyük kusuru bu delikler ve bu deliklerin çokluğudur. Notların geri kalan bölümünde kesirli sayıların deliklerini doldurarak gerçel sayıları elde edeceğiz.

Daha kolay anlaşılan bir örnek verelim:

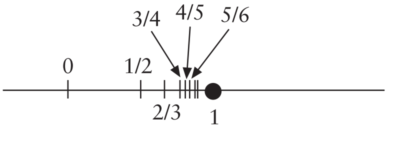
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

dizisi 0'a giderek daha çok yaklaşır ve ilerde tanımlayacağımız anlamda $\mathbb{Q}$'da 0'a yakınsar. Ama $\mathbb{Q}$ yerine 0'ı atıp $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kümesinde ya da $(0, 1]$ aralığında çalışırsak, bu dizi 0'a yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapar ama, 0 orada olmadığından, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ya da $(0, 1]$ kümesinde 0'a yakınsayamaz...

Kesirli sayıların bir başka kusurunu da bulalım. Şu kesirli sayı kümesini ele alalım:

$$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\}.$$

Bu kümede, $n \in \mathbb{N}$ için, $n/(n+1)$ biçiminde yazılan kesirli sayılar bulunuyor. A'nın her sayısı 1'den küçük elbet; 2'den de küçükler. Bu yüzden 1 ve 2'nin A'nın ***üstsınırı*** oldukları söylenir. A'nın katrilyonlarca, hatta daha da fazla üstsınırı vardır: 1'den büyükeşit her sayı A'nın bir üstsınırıdır. Ama 1'in bu üstsınırlar arasında bir ayrıcalığı vardır: 1, A'nın üstsınırlarının en küçüğüdür.



Bir A sayı kümesinin üstsınırlarının en küçüğüne ***en küçük üstsınır*** denir ve bu sayı $\sup(A)$ ya da ekü̈s(A) olarak yazılır. Yukardaki örnekte, $\sup(A) = 1$. Bunun matematiksel kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

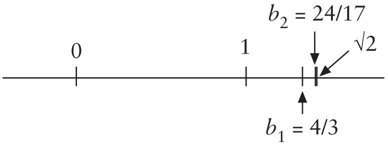
Şimdi, $b_0 = 0$ olmak üzere,

$$b_{n+1} = \frac{3b_n + 4}{2b_n + 3}$$

ilişkisiyle tanımlanmış $(b_n)_n$ kesirli sayı dizisini ele alalım. Dizinin ilk dört terimini yazalım:

$$\begin{aligned} b_0 &= 0 \\ b_1 &= 4/3 \\ b_2 &= 24/17 \\ b_3 &= 140/99 \end{aligned}$$

Dikkat ettiyseniz (etmediyseniz de kolayca kanıtlayabilirsiniz) b_n, geçen bölümde tanımlanan x_{2n}'ye eşit. Dolayısıyla $(b_n)_n$ dizisi de $(x_n)_n$ dizisi gibi (henüz olmayan!) $\sqrt{2}$'ye yakınsamaya çalışır.



Ayrıca $(b_n)_n$ dizisi sürekli artan bir dizidir. (Alıştırma. Önce tümevarımla $b_n^2 < 2$ eşitsizliğini kanıtlayın, ardından, $b_n < b_{n+1}$ eşitsizliğini.) Şimdi,

$$B = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}$$

olsun. B'deki her eleman $\sqrt{2}$'den küçüktür, dolayısıyla $\sqrt{2}$, B'nin bir üstsınırıdır. $\sqrt{2}$'nin B'nin en küçük üstsınırı olduğu da kolaylıkla kanıtlanır:

$$\sup(B) = \sqrt{2}.$$

Kanıtın tek zorluğu $\sqrt{2}$'nin henüz var olmayışıdır! Bu zorluktan kaçınmak istiyorsanız, geçen bölümde yaptığımız gibi, $(b_n)_n$ dizisinin karesinin 2'ye yakınsadığını kanıtlayabilirsiniz.

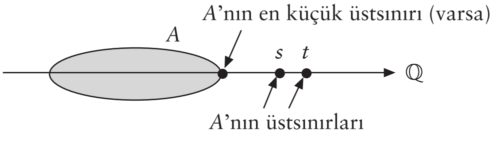
Ama $\sqrt{2}$ yoksa, B'nin en küçük üstsınırının $\sqrt{2}$ olduğunu söyleyebilir miyiz?

En küçük üstsınır tanımımızda bir sorun var. "Üstsınır" ve "en küçük üstsınır" kavramları mutlak kavramlar değildir, göreceli kavramlardır. $\mathbb{Q}$'de üstsınırla (henüz tanımlamadığımız) $\mathbb{R}$'de üstsınır aynı şey demek değildir. $\sup(B)$ yazmak yerine kavramın göreceliğini gösteren $\sup_{\mathbb{Q}}(B)$ ve $\sup_{\mathbb{R}}(B)$ yazmak gerekirdi.

B'nin $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınırı $\sqrt{2}$'dir. Ama B'nin $\mathbb{Q}$'de en küçük üstsınırı yoktur. Yani $\sup_{\mathbb{R}}(B) = \sqrt{2}$'dir ama $\sup_{\mathbb{Q}}(B)$ yoktur! Çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir.

Üstsınır ve en küçük üstsınır tanımlarımızı gözden geçirelim:

$A \subseteq \mathbb{Q}$ ve $s \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer her $a \in A$ için, $a \le s$ eşitsizliği doğruysa, s'ye A'nın ($\mathbb{Q}$'de) ***üstsınırı*** denir. Eğer s, A'nın bir üstsınırıysa, s'den büyük her t kesirli sayısı da A'nın bir üstsınırıdır elbette.



Örneğin, 1 ve 1'den büyük her sayı hem $(0, 1)$ hem de $[0, 1]$ aralığının üstsınırıdır. Öte yandan $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{Q}$'de üstsınırı yoktur. Her kesirli sayı boşkümenin bir üstsınırıdır. (Neden?) Üstsınırların en küçüğüne, eğer varsa, olmayabilir çünkü, ($\mathbb{Q}$'de) ***en küçük üstsınır*** adı verilir.

Yani $s \in \mathbb{Q}$ sayısının A'nın en küçük üstsınırı olması için, önce A'nın bir üstsınırı olması, sonra A'nın her üstsınırından küçükeşit olması gerekir. Eğer bir kümenin en küçük üstsınırı varsa, bu en küçük üstsınır ancak bir tane olabilir: Eğer s ve t birer en küçük üstsınırsa, s en küçük üstsınır, t de bir üstsınır olduğundan, $s \leq t$ olmak zorundadır; aynı nedenden $t \leq s$ olmak zorunda; demek ki $s = t$.

Bir $A \subseteq \mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'deki en küçük üstsınırı $\sup_{\mathbb{Q}}(A)$ olarak gösterilir. Ama dikkat! $\sup_{\mathbb{Q}}(A)$ olmayabilir; olduğunda da A'nın bir elemanı olabilir de olmayabilir de. Örneğin

$$\sup_{\mathbb{Q}}(0,1) = 1 \notin (0,1)$$

ama

$$\sup_{\mathbb{Q}}(0,1] = 1 \in (0,1].$$

Yukardaki paragraflarda $\mathbb{Q}$'leri silip yerine $\mathbb{R}$ yazarsanız, $\mathbb{R}$'de üstsınır ve $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınır kavramlarını elde edersiniz. (Tabii $\mathbb{R}$'nin ne demek olduğunu sezgisel olarak bildiğinizi varsayıyoruz burada, matematiksel olarak $\mathbb{R}$ henüz tanımlanmadı.)

Bir altkümenin en küçük üstsınırı olması için, her şeyden önce üstsınırı olmalıdır. Üstsınırı olmayan bir kümenin en küçük üstsınırı da olamaz.

Şimdi canalıcı soruyu soralım: Üstsınır olması en küçük üstsınır olması için yeterli midir? Yanıt olumsuz: Boşkümenin üstsınırları vardır ama en küçük üstsınırı yoktur!

Peki aynı soru boş olmayan kümeler için doğru mu? Belli ki $\mathbb{Q}$'de bu doğru değil. Yukardaki B kümesinin üstsınırı var, örneğin 2, B'nin bir üstsınırıdır, ama B'nin $\mathbb{Q}$'de en küçük üstsınırı yok.

Yani $\mathbb{Q}$'de üstten sınırlı ama en küçük üstsınırı olmayan altkümeler vardır. Bu, $\mathbb{Q}$'nün büyük kusurlarından biridir ve tahmin edileceği gibi bir önceki büyük kusura eşdeğerdir. Bu iki kusurdan biri düzeltilirse, diğeri de kendiliğinden düzelir.

Öte yandan boş olmayan bir altkümenin $\mathbb{R}$'de üstsınırının olması, en küçük üstsınırının da olması anlamına gelir. Yani $\mathbb{R}$'de üstten sınırlı olan ve boşküme olmayan her altkümenin en küçük üstsınırı vardır. Tabii $\mathbb{R}$'yi henüz tanımlamadığımızdan bunu şu an kanıtlayamayız. $\mathbb{R}$'yi tanımladığımızda ilk işimiz bu önemli olguyu kanıtlamak olacak.

Son olarak bir elemanın $\sup_{\mathbb{Q}}(A)$ olması için gerek ve yeter koşulları görelim.

Önsav 15.1. *$A \subseteq \mathbb{Q}$ ve $s \in \mathbb{Q}$ olsun. s'nin A'nın en küçük üstsınırı olması için,*

1. *Her* $a \in A$ *için,* $a \leq s$*,*
2. *Her* $\varepsilon > 0$ *kesirli sayısı için,* $s - \varepsilon < a$ *eşitsizliğini sağlayan bir* $a \in A$ *vardır koşulları gerek ve yeter koşullardır.*

Kanıt: Birinci koşul s'nin A'nın bir üstsınırı olduğunu söylüyor. İkinci koşul da s'den küçük hiçbir sayının A'nın bir üstsınırı olmadığını söylüyor. Demek ki iki koşul birden s'nin A'nın en küçük üstsınırı olduğunu söylüyor. □

16. Gerçel Sayıları Belirleyen Özellikler

Geçen bölümde kesirli sayıların iki önemli kusurunu ortaya koymuştuk. Bu yazılarda bu iki kusuru düzelterek gerçel sayıları yaratacağız.

Kesirli sayıların birinci kusuru $\sqrt{2}$, π gibi sayıların olmamasıydı. Bu sayıların yerleri boş, oralarda delikler var... Gene de bu olmayan sayılara kesirli sayılarla istediğimiz kadar yaklaşabiliriz, o olmayan sayıya ulaşmak için can atan kesirli sayı dizileri bulabiliriz. Bunu gördük.

Kesirli sayıların ikinci kusuru ise üstten sınırlı ve boş olmayan her kesirli sayı kümesinin bir en küçük üstsınırının olmamasıydı. Bazı kesirli sayı kümelerinin en küçük üstsınırları vardır, ama hepsinin yoktur. Geçen bölümde bunlara örnekler gördük.

Bu iki kusurdan birini giderirsek, diğeri de kendiliğinden giderilmiş olacak.

Birinci kusuru gidermek için bir yere yakınsamaya can atan diziler kullanılır. Bu tür dizilere ***temel diziler*** adı verilir. Matematiksel tanımları daha sonraki bölümlerde göreceğiz.

İkinci kusuru gidermek için de ***Dedekind kesitleri*** denilen kesirli sayı kümeleri kullanılır.

İki yöntem de birbirine matematiksel anlamda eşdeğerdir. Bir yöntemle kurulan gerçel sayılar kümesiyle diğer yöntemle kurulan gerçel sayılar kümesi arasında matematiksel olarak hiçbir ayrım yoktur. Bunu da daha sonraki bölümlerden birinde kanıtlayacağız.

Dedekind kesitleri yöntemi temel dizileri kullanan yöntemden çok daha sadedir. Ama temel diziler yöntemi de çok öğreticidir. Biz temel dizileri kullanan yöntemi seçeceğiz. Dedekind kesitlerinden bir başka bölümde sözedeceğiz.

$(\mathbb{Q}, +, \times, \leq, 0, 1)$ yapısı sıralı bir cisimdir, yani aşağıdaki özellikleri sağlar. $(\mathbb{R}, +, x\times, \leq, 0, 1)$ yapısı da sıralı bir cisim olacak, ancak $\mathbb{Q}$'nün yukarda sözettiğimiz kusurları olmayacak. Bu kusurları olmayan sıralı bir cisim, "öz itibarıyla biriciktir". Bu da kanıtlanacak.

Sıralı Cizimler

T1. Her $a, b, c \in K$ için, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
T2. K'da 0 diye yazılan öyle bir eleman vardır ki, her $a \in K$ için, $a + 0 = 0 + a = a$ eşitliği sağlanır. (Bu özellik ancak tek bir eleman tarafından sağlanabilir.)
T3. Her $a \in K$ için, $a + b = b + a = 0$ eşitliklerini sağlayan bir $b \in K$ vardır. (a verilmişse, bu özelliği sağlayan bir tek b vardır ve bu b, $-a$ olarak yazılır.)

$(K, +, 0)$ bir gruptur

T4. Her $a, b \in K$ için, $a + b = b + a$.

$(K, +, 0)$ değişmeli bir gruptur

Ç1. Her $a, b, c \in K$ için, $(ab)c = a(bc)$.
Ç2. K'da 1 diye yazılan öyle bir eleman vardır ki, her $a \in K$ için, $a \times 1 = 1 \times a = a$ eşitliği sağlanır. (Bu özelliği sağlayan 1'den başka bir eleman olamaz.)

TÇ1. $0 \neq 1$.
TÇ2. Her $a, b, c \in K$ için,
$a(b + c) = ab + ac$ ve $(b + c)a = ba + ca$.

$(K, +, \times, 0, 1)$ bir halkadır

Ç3. Her $a, b \in K$ için, $ab = ba$.

$(K, +, \times, 0, 1)$ değişmeli bir halkadır

Ç4. Her $a \in K \setminus \{0\}$ için, $ab = ba = 1$ eşitliğini sağlayan bir $b \in K \setminus \{0\}$ vardır. (a verilmişse, bu özelliği sağlayan bir tek b vardır ve bu b, a^{-1} olarak yazılır.)

$(K, +, \times, 0, 1)$ bir cisimdir

$(K \setminus \{0\}, \times, 1)$ değişmeli bir gruptur

S1. Her $a \in K$ için, $a \leq a$.
S2. Her $a, b \in K$ için, $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$.
S3. Her $a, b, c \in K$ için, $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$.

$(K, \leq)$ bir yarısıralamadır

S4. Her $a, b \in K$ için, ya $a \leq b$ ya da $b \leq a$.

$(K, \leq)$ bir tamsıralamadır

TS. Her $a, b, c \in K$ için, eğer $a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$.
ÇS. Her $a, b \in K$ için, eğer $0 < a$ ve $0 < b$ ise $0 < ab$.

$(K, +, \times, \leq, 0, 1)$ sıralı bir cisimdir

Kısım IV

Kesirli Sayı Dizileri

17. Kesirli Sayı Dizileri

17.1 Diziler

Eğer X bir kümeyse, bir X-dizisi, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den X'e giden bir fonksiyondur ya da - aynı şey - $\prod_{\mathbb{N}} X$ kartezyen çarpımının bir elemanıdır. Ama biz bu kadar biçimsel düşünmeyip, diziyi her matematikçi nasıl algılıyorsa, öyle algılayacağız:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

türünden bir listeye matematikte ***dizi*** denir. x_0, x_1, x_2 elemanlarına ***dizinin terimleri*** adı verilir. Terimler belli bir kümeden seçilirler. Belli bir aşamada biten dizilere ***sonlu dizi*** denir ama bizim dizilerimiz hiçbir zaman sonlu olmayacaklar, yani bizim dizilerimizde her n doğal sayısı için bir x_n terimi verilmiş olacak. Ama dikkat, gene de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonlu olabilir. Bir dizinin terimleri kesirli sayıysa, diziye ***kesirli sayılar dizisi*** denir. Bu bölümde sadece kesirli sayılar dizilerinden sözedeceğimizden, "kesirli sayılar" ibaresini kaldırıp sadece "dizi" demekle yetineceğiz.

Diziler,

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

biçiminde gösterildiği gibi daha tıkız bir yazılımla,

$$(x_n)_n$$

olarak da gösterilirler. Örneğin,

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$$

dizisi,

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

dizisini ifade eder. Aynı diziyi,

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$$

olarak da gösterebilirdik. Hatta anlaşılması daha kolay olsun diye,

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1,2,3,\dots} \text{ ya da } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\neq 0}$$

olarak da gösterebiliriz. Kimileyin kendimizi yazının heyecanına kaptırıp yukardaki diziyi

$$\left(\frac{1}{n}\right)_n$$

olarak gösterirsek okur bizi bağışlasın lütfen.

Değişik dizi yazılımları matematikte sık sık kullanılır. Örneğin,

$$\left(\frac{1}{p}\right)_{p \text{ asal}}$$

yazılımı,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots$$

dizisi anlamına gelir.

Kolaylık olsun diye bir $(x_n)_n$ dizisini hemen hemen her zaman x olarak kısaltacağız:

$$x = (x_n)_n.$$

Bunun gibi $y = (y_n)_n$ ve $z = (z_n)_n$ yazacağız. Bir x dizisinden sözettiğimizde de, x'in terimlerini x_n olarak yazmaya özen göstermeye çalışacağız.

Tüm terimleri eşit olan bir diziye ***sabit dizi*** adı verilir. Böyle bir dizi, bir $a \in \mathbb{Q}$ sabiti için $(a)_n$ olarak yazılabilir. Bu diziye ***sabit*** a ***dizisi*** denir. Sabit a dizisini $s(a)$ olarak göstereceğiz. Demek ki $s(a)$ dizisinin her terimi a'ya eşit, yani her n doğal sayısı için,

$$s(a)_n = a$$

eşitliği geçerlidir. Sabit 0 ve sabit 1 dizileri özellikle ve genel olarak sabit diziler özel önem arzedecek ilerde.

x_n, $(x_n)_n$ dizisinin n'***inci terimi***dir. Demek ki, 1, $(1/n)_n$ dizisinin sıfırıncı terimidir. $(1/p)_{p \text{ asal}}$ dizisinin üçüncü terimi $1/7$'dir; ne $1/3$'tür ne de $1/5$!

n, x_n teriminin ***göstergeci, belirteci*** ya da ***endisidir***.

Kesirli sayılar dizilerinden oluşan kümesine $\mathcal{D}$ adını verelim. Demek ki

$$\mathcal{D} = \text{Fonk}(N, \mathbb{Q}) = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}.$$

17.2 Dizilerle İşlemler

İki diziyi terim terim toplayabiliriz: $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ ise, $x + y$ dizisini,

$$x + y = (x_n + y_n)_n$$

olarak tanımlayabiliriz. Örneğin,

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} + \left(\frac{1}{p}\right)_{p\text{ asal}}$$

dizisini toplamak için, bu iki dizinin terimlerini,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

ve

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots$$

olarak yazıp sırayla toplarız ve

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{8}{15}, \frac{11}{28}, \frac{16}{55}, \ldots$$

dizisini elde ederiz.

Sadece toplama değil, dizilerle çıkarma ve çarpma da yapabiliriz. Tüm işlemler terim terim yapılabilir. Terim terim bölme yapabilmek için, bölen dizinin tüm terimleri 0'dan farklı olmalı. Ayrıca sabit 0 dizisi $s(0)$, dizileri toplamanın, sabit 1 dizisi $s(1)$ de dizileri çarpmanın etkisiz elemanıdır.

Kısacası dizi toplama ve çarpması, aynen $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden fonksiyonların noktasal toplama ve çarpmasıdır. Bkz. [SKK].

$\mathcal{D}$ kümesi toplama ve çarpma işlemleri altında ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizileriyle birlikte değişmeli bir halkadır. Yani

$$(\mathcal{D}, +, \times, s(0), s(1))$$

yapısı değişmeli bir halkadır. Bunun kanıtı son derece kolaydır ve okura bırakılmıştır. Örnek olarak çarpmanın toplamaya göre dağıldığını, yani her x, y, $z \in \mathcal{D}$ için,

$$x(y + z) = xy + xz$$

eşitliğini kanıtlayalım. $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n$ ve $z = (z_n)_n$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} x(y+z) &\overset{1}{=} (x_n)_n((y_n)_n + (z_n)_n) \overset{2}{=} (x_n)_n(y_n + z_n)_n \\ &\overset{3}{=} (x_n(y_n + z_n))_n \overset{4}{=} (x_n y_n + x_n z_n)_n \overset{5}{=} (x_n y_n)_n + (x_n z_n)_n \\ &\overset{6}{=} (x_n)_n(y_n)_n + (x_n)_n(z_n)_n \overset{7}{=} xy + xz. \end{aligned}$$

Burada birinci ve yedinci eşitliklerde x, y ve z dizilerinin tanımını yazdık. İkinci ve altıncı eşitliklerde dizilerde toplamanın tanımını kullandık. Üçüncü ve beşinci eşitliklerde dizileri çarpmanın tanımını kullandık. Dördüncü eşitlikte ise kesirli sayılarda çarpmanın toplamaya göre dağılımını kanıtladık.

İstenen her eşitlik, $\mathbb{Q}$'deki benzer eşitliğe indirgenerek yukardaki örnekte olduğu gibi kolaylıkla kanıtlanabilir.

Her halkanın olduğu gibi D halkasının da tersinir elemanlarını tanımlayabiliriz: Bir $y \in D$ dizisi için $xy = s(1)$ eşitliğinin sağlandığı D'nin x dizilerine D'nin ***tersinir elemanları*** denir. D'nin tersinir elemanları kümesi D^* olarak yazılır. Belli ki eğer bir $x = (x_n)_n$ dizisi tersinirse, x_n terimlerinin her biri 0'dan değişik olmalıdır ve bu dizinin ***tersi*** $(1/x_n)_n$ dizisidir. Bu durumda tahmin edileceği üzere, $x = (x_n)_n$ dizisinin tersi x^-1 olarak yazılır: $x^{-1} = (1/x_n)_n$. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} D^* &= \{x \in D : \text{ bir } y \in \mathcal{D} \text{ dizisi için } xy = s(1)\} \\ &= \{x \in D : \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dizilerle ilgili bir şeye dikkat etmek gerekir: x ve y dizileri sabit 0 dizisi olmasalar da çarpımları sabit 0 dizisi olabilir. Örneğin,

$$0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

dizisiyle

$$1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

dizisinin çarpımı sabit 0 dizisi $s(0)$'dır.

17.3 Sınırlı Diziler

Bazı diziler üstten sınırlıdır. Örneğin,

$$0, -1, -2, -3, -4, \ldots$$

dizisi üstten sınırlıdır, terimleri belli bir sayıyı, örneğin 0'ı ya da 1'i aşamaz. Ama bu dizi alttan sınırlı değildir. Bazı diziler hem üstten hem de alttan sınırlıdır. Hem alttan hem de üstten sınırlı dizilere kısaca ***sınırlı diziler*** diyeceğiz. Sabit dizilerin hepsi sınırlı dizilerdir elbet. Dolayısıyla $s(0)$ ve $s(1)$ dizileri de sınırlı dizilerdir. $(1/n)_{n \neq 0}$ dizisi de sınırlıdır. Eğer $x_0 \in [1, 2]$ ise, Bölüm 14'te tanımlanan $(x_n)_n$ dizisinin terimleri de bu aralıktadır (çok kolay alıştırma), dolayısıyla dizi sınırlıdır. Bir $x = (x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için $(|x_n|)_n$ dizisinin üstten sınırlı olması yeter ve gerek koşuldur. (Kesirli sayılarda mutlak değerle okurun haşır neşir olduğunu varsayıyoruz Bkz Bölüm 11 ve 12'nın sonu.)

Sınırlı diziler kümesini B olarak göstereceğiz.B kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve bunun kanıtı oldukça kolaydır.

Önsav 17.1. *B, D'nin bir althalkasıdır, yani toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizileri B'dedir.*

Kanıt: $x = (x_n)_n$ ve $y = (x_n)_n$ iki sınırlı dizi olsun. a ve b kesirli sayıları sırasıyla $\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin birer üstsınırı olsun, yani her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|x_n| \leq a \text{ ve } |y_n| \leq b$$

olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ için,

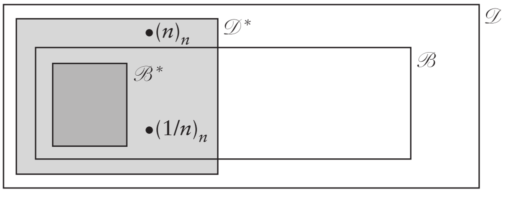
$$\begin{aligned} |x_n + y_n| &\leq |x_n| + |y_n| \leq a + b, \\ |x_n - y_n| &\leq |x_n| + |y_n| \leq a + b, \\ |x_n y_n| &= |x_n||y_n| \leq ab \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Demek ki $x + y$, $x - y$ ve xy dizileri sınırlıdır. □

Bir $y \in B$ dizisi için $xy = s(1)$ eşitliğinin sağlandığı $x \in B$ dizilerine B'nin ***tersinir elemanları*** denir ve bu elemanlardan oluşan küme B^* olarak yazılır. Dikkat: B'nin bir elemanının tersinir olması için bu elemanın D'de tersinir olması yetmez, ayrıca elemanın tersinin B'de de olması gerekir. Yani B'nin bir $x = (x_n)_n$ elemanının tersinir olması için, elbette her $x_n \neq 0$ olmalıdır, ama bu yeterli değildir, ayrıca bir de $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlı olmalıdır. Örneğin $(1/n)_n$ dizisi hem B'de hem de D^*'dadır ama B^*'da değildir, çünkü bu dizinin (D^*'da) tersi olan $(n)_n$ dizisi sınırlı değildir. Yani

$$B^* \subseteq \mathcal{B} \cap D^*$$

dir ama eşitlik doğru değildir.



$(1/x_n)_n$ dizisinin sınırlı olması için $(x_n)_n$ dizisinin 0'a belli bir uzaklıkta durması, çok yaklaşamaması gerekmektedir. Örneğin,

$$5,\ 1/2,\ 5,\ 1/3,\ 5,\ 1/4,\ 5,\ 1/5,\ 5,\ 1/6,\ 5, \ldots$$

dizisinin 0'a çok yaklaştığı anlar olmaktadır. Bu sınırlı dizi D'de tersinirdir ama B'de tersinir değildir, çünkü D'deki tersi olan

$$1/5,\ 2, 1/5,\ 3,\ 1/5,\ 4,\ 1/5,\ 5,\ 1/5,\ 6, 1/5, \ldots$$

dizisi sınırlı değildir.

B halkasının tersinir elemanlarını belirlemek güzel bir alıştırmadır. Yapalım:

Önsav 17.2. *Bir $x = (x_n)_n \in B$ dizisinin (B'de) tersinir olması için, "öyle bir pozitif δ kesirli sayısı vardır ki, her n için $|x_n| \geq \delta$," koşulu yeter ve gerektir.*

Kanıt: Dizi B^*'daysa, $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlıdır. Demek ki bir $B > 0$ sayısı için $|1/x_n| \leq B$ koşulu sağlanır ve $|x_n| \geq 1/B$ olur. Diğer yandan: $|x_n| \geq \delta > 0$ ise, $x_n \neq 0$ olur ve $1/x_n$ diye bir kesirli sayı vardır. Koşuldan dolayı

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} \leq 1/\delta.$$

Demek ki $(1/x_n)_n$ dizisi sınırlı. □

Bu önsavdaki koşulu sağlayan dizilere 0'***dan uzak duran*** diziler diyelim. Yani $\mathcal{B}$'nin tersinir elemanları, $\mathcal{B}$'nin 0'dan uzak duran elemanlarıdır.

17.4 Zamanla Sabitleşen Diziler

Sabit diziler toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdırlar elbet: İki sabit dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da sabit dizidir, matematiksel söylemle sabit diziler kümesi D halkasının bir "althalkası"dır, hatta sabit diziler halkası $\mathbb{Q}$'ya çok çok benzeyen bir halkadır, hem küme olarak hem de işlemleriyle. Örneğin sabit a dizisiyle sabit b dizisinin toplamı sabit $a + b$ dizisidir, yani

$$s(a) + s(b) = s(a + b)$$

dir. Benzer eşitlikler çıkarma ve çarpma için de geçerlidir. Buna matematikte, $\mathbb{Q}$ halkasıyla sabit diziler halkası ***eşyapısal halkalar***dır denir. Eğer sabit diziler halkasını S olarak gösterirsek,

$$s : \mathbb{Q} \to S$$

fonksiyonu iki halka arasında bir "eşyapı eşlemesi"dir, yani toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir eşlemedir. (Bu fonksiyon bir a sayısını sabit a dizisi olan $s(a)$'ya gönderir ve iki halka arasındaki tek eşyapı eşlemesidir (neden?))

Bir de ***zamanla sabitleşen diziler*** vardır. Bu diziler ilk trilyon terimde sabit olmayabilirler ama bir zaman sonra sabitleşip tüm terimleri birbirine eşit olurlar. Yani bir $(x_n)_n$ dizisinin ***zamanla sabitleşen dizi*** olması için, öyle bir N olmalı ki, her n, $m > N$ için, $x_n = x_m$ olmalıdır.

Her sabit dizi zamanla sabitleşen dizidir elbette. Zamanla sabitleşen diziler de toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır. Bunu okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırmalar

17.1. $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ iki dizi olsun. Eğer belli N ve M doğal sayıları ve her k için,

$$x_{N+k} = y_{M+k}$$

oluyorsa, o zaman x ve y'nin ***ortak kuyrukları*** olduklarını söyleyelim. Örneğin,

$$3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

dizisiyle

$$7, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

dizilerinin ortak kuyrukları vardır (örneğin 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, ... kuyruğu).
D üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini şöyle tanımlayalım:

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \text{ ve } y' \text{nin ortak kuyrukları var.}$$

Bunun bir denklik ilişkisi olduğu bariz olmalı. $[x]$, x dizisinin denklik sınıfını simgelesin. $D/\equiv$ kümesi üzerine tanımlanan

$$[x] \pm [y] = [x \pm y]$$
$$[x][y] = [xy]$$

$+$, $-$ ve $\times$ işlemlerinin iyi tanımlandığını kanıtlayın, yani, örneğin,

$$[x] = [x']$$

ve $[y] = [y']$ ise, $[x \pm y] = [x' \pm y']$ eşitliğini kanıtlayın.

17.2. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin sonlu olduğu $(x_n)_n$ dizilerinin kümesinin B'nin bir althalkası olduğunu kanıtlayın.

17.3. Zamanla devirleşen dizilerin sınırlı diziler halkası B'nin bir althalkası olduğunu kanıtlayın. (Eğer belli bir N ve k ve her n için $a_{N+k+n} = a_{N+n}$ eşitliği sağlanıyorsa $(a_n)_n$ dizisine ***zamanla devirleşen dizi*** adı verilir.

18. Yakınsak Diziler

18.1 Yakınsaklık

Geçmişte $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını fısıldadık ama kanıtlamadık. Kanıtlayamazdık da, çünkü yakınsamak kavramını henüz tanımlamadık. Bu bölümde matematikte çok önemli olan yakınsamak kavramını son derece dikkatli tanımlayacağız, en azından kesirli sayılardaki yakınsaklık kavramını.

Bir dizinin bir sayıya yakınsaması demek, dizinin terimlerinin belli bir göstergeçten, yani bir zaman sonra, yani belli bir terimden sonra o sayıya çok çok ama çok çok yakın olması demektir. Dizinin terimleri hiçbir zaman o sayıya eşit olmayabilir, ama o sayıya dizinin terimleriyle **dilediğimiz kadar** yaklaşabilmeliyiz ve bu yakınlık belli bir göstergeçten sonra **hep**, yani belli bir sayıdan büyük **her** göstergeç için geçerli olmalı...

Notlar ve Örnekler

18.1. $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsaması gerektiğini çok büyük bir n sayısı alarak tahmin edebiliriz. Örneğin, $n = 999$ alırsak,

$$\frac{n}{n+1} = 0,999$$

buluruz; $n = 99.999$ alırsak,

$$\frac{n}{n+1} = 0,99999$$

buluruz; n büyüdükçe dizinin terimleri daha çok 1'e yaklaşırlar. Aslında bu dizinin terimleri 2'ye de yaklaşıyorlar, ama 1'e yaklaşmaktan da öte, 1'e yaslanıyorlar, sokuluyorlar, nerdeyse 1'in içine girecekler.

Matematiksel tanımı daha sonraya bırakarak, sanki tanımı biliyormuş gibi $(n/(n+1))_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını gösterelim.

Herhangi bir pozitif kesirli sayı alalım. ε (epsilon) diyelim bu sayıya. ε'u çok küçük bir sayı olarak düşünün. Zaten matematikte ε, genellikle, çok çok küçük ama gene de pozitif bir sayı anlamına gelir; aynen x'in bilinmeyen, n'nin tamsayı, p'nin asal sayı anlamına kullanıldığı gibi.

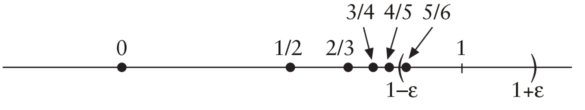
Evet... Çok çok küçük bir ε pozitif kesirli sayısı verilmiş. Öyle bir N doğal sayısı bulacağız ki, eğer $n > N$ ise, o zaman dizinin $n/(n+1)$ teriminin 1'e olan uzaklığı en fazla bu ε kadar olacak, yani her $n > N$ doğal sayısı için,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

ya da

$$\frac{n}{n+1} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

olacak. (İki koşul birbirine denktir elbette.)



Demek ki rasgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı verilmiş ve biz yukardaki koşulu sağlayan bir N doğal sayısı arıyoruz.

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

koşulunun doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışacağız.

Örneğin $\varepsilon = 0,01$ ise ve n'yi 3 alırsak yukardaki eşitsizlik sağlanmaz. n'yi 4, 5, 6 alırsak da sağlanmaz. $n = 99$'da tam eşitlik bulunur. Ama $n > 99$ ise eşitsizlik sağlanır.

Eğer $|n/(n+1) - 1| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sol tarafında paydaları eşitleyip sadeleştirirsek, koşul,

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon.$$

hâline ya da

$$1 < \varepsilon(n+1).$$

hâline gelir. Şimdi N'yi,

$$1 < \varepsilon N.$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir N doğal sayısı olarak seçelim. $\mathbb{Q}$, Arşimet özelliğini sağladığından (Teorem 11.11) bu özelliği sağlayan bir N vardır. N'yi bulduk. Son bir kez kontrol edelim: Eğer $n > N$ ise, o zaman

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Demek ki bu N gerçekten istediğimizi veriyor. Şimdi bir dizinin bir sayıya yakınsamasının ne demek olduğunu matematiksel olarak tanımlayalım.

Tanım 18.1. *$(x_n)_n$ bir kesirli sayı dizisi olsun. $a \in \mathbb{Q}$ olsun. Eğer her pozitif ε kesirli sayısı için,*

$$(*) \qquad n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya yakınsar ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin limitidir denir.

Aslında x_n ve a, kesirli sayılar olduklarından sadece "yakınsar" yerine "kesirli sayılarda yakınsar" dememiz gerekirdi, ama bu sayımızda hep bu kavramı kullanacağımızdan bu nitelemeye ihtiyacımız olmayacak.

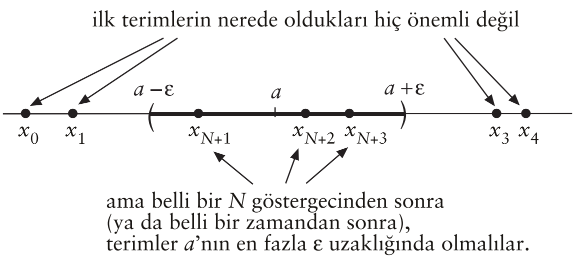
Tanıma göre, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için öyle bir N bulmalıyız ki, her $n > N$ doğal sayısı için

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğru olsun. Bir başka deyişle, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu olmalı (ki bir zaman sonra **hep** $|x_n - a| < \varepsilon$ olsun).

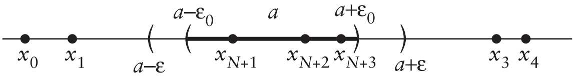


$|x_n - a| < \varepsilon$ eşitsizliğiyle $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ koşulunun aynı anlama geldiğini okura anımsatırım. Kesirli bir sayıya yakınsayan dizilere ***yakınsak*** denir. Yakınsak olmayan dizilere de ***ıraksak*** denir.

Örneklere geçmeden önce bu önemli tanım üzerine biraz kafa yoralım. Bu tanımı özümsemek çok önemlidir. Okur, tanımın, sezgileriyle algıladığı "yakınsama"nın anlamını matematiksel olarak verdiğine ikna olmalıdır, dolayısıyla aşağıda yazılanları laf ebeliği olarak nitelemeyip dikkatle okumalıdır.

18.2 Tanımın Tartışması

Eğer belli bir $\varepsilon_0 > 0$ için $(*)$ önermesini doğrulayan bir N sayısı bulmuşsak, bu ε_0'dan büyük ε'lar için de $(*)$ önermesi aynı N ile doğrudur. Örneğin, $\varepsilon_0 = 0,001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, ε_0'dan daha büyük olan $\varepsilon = 0,003$ için de $N = 10.000$ yeter. Dolayısıyla marifet $(*)$ önermesini küçük ε'lar için doğrulamaktır.



Eğer ε_0 için N yetiyorsa, ε_0'dan büyük bir ε için de N yeter.

Yani buradaki ε çok küçük (ama gene de pozitif) bir kesirli sayı olarak algılanmalıdır.

Tanımdaki N sayısı, ε'a göre değişir: ε küçüldükçe N'yi daha büyük almak zorunda kalabiliriz. ε ne kadar küçükse, x_n terimlerinin $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ aralığına düşmesi zorlaşır ve gecikebilir. Örneğin, $\varepsilon_0 = 0,001$ için $N = 10.000$ yetiyorsa, $\varepsilon_1 = 0,00001$ için artık $N = 10.000$ yetmeyebilir, N'yi daha büyük, örneğin 100.000 almak gerekebilir.

N'nin ε'a bağımlı olduğunu görsel olarak göstermek için, kimileyin N yerine N_ε yazılır.

Eğer bir ε için, (*) önermesini sağlayan bir N_ε doğal sayısı bulunmuşsa, bu N_ε sayısından büyük N'ler de (*) önermesini sağlarlar.

Bir dizinin yakınsak olması dizinin ilk terimlerinden bağımsız bir özelliktir, örneğin ilk 1 milyar terimin kaç olduğu dizinin yakınsaklığını zerre kadar ilgilendirmez. Dizinin yakınsaklığı, dizinin sadece kuyruğuyla ilgili bir özelliktir.

Dikkat: Bir dizinin a'ya yakınsaması için, amaç, verilmiş her $\varepsilon > 0$ için (*) önermesini sağlayan en küçük N doğal sayısını bulmak değildir. Böyle bir en küçük N doğal sayısı vardır elbette ama çoğunlukla bulması ya da ifade etmesi çok zordur. Amaç sadece (*) önermesini sağlayan bir N'nin olduğunu bulmaktır. Bu önemli. Bir dizinin bir sayıya yakınsadığını kanıtlamak işte bu yüzden zordur. ε verildiğinde, (*) önermesini doğrulayan tek bir N doğal sayısı olsaydı (rüyada mesela!), eminim kanıtlar çok daha kolay olurdu. Ama maalesef N'yi seçmekte bayağı bir özgürlüğümüz var. İşte bu özgürlüktür çoğu zaman matematiği zorlaştıran, yaratıcılık gerektiren ve heyecanlı kılan.

Bir şey daha: Tanımda $n > N$ yerine $n \geq N$ ve $|x_n - a| < \varepsilon$ yerine $|x_n - a| \leq \varepsilon$ veya $|x_n - a| < \varepsilon/2$ de yazabilirdik, kavram değişmezdi. Bu, belki küçük bir ayrıntıdır, ama okurun neden böyle olduğunu anlamasında çok yarar vardır. Gerekirse saatlerini versin bu ince noktaya, değer çünkü.

Birçok yakınsama örneği vereceğiz birazdan. Ama şimdi bir yakınsama kanıtının nasıl yapılacağını görelim.

Diyelim $(x_n)_n$ kesirli sayı dizisinin a kesirli sayısına yakınsadığını göstermek istiyorsunuz. Demek ki her $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı için bir şey kanıtlamanız gerekiyor. O zaman hemen rastgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçin. Yani kanıtınız,

$$\varepsilon > 0 \textit{ herhangi bir kesirli sayı olsun}$$

cümlesiyle başlamalıdır. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacaksınız. N'yi kafadan atarak hemen bulmaya çalışmayın, genellikle başaramazsınız.

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmak için $|x_n - a|$ ifadesiyle oynamalısınız. Örneklerle her şey daha açık olacak.

18.3 Limitin Biricikliği

Eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

yazılır. İnce bir ayrıntı: Buradaki ∞ simgesinin tek başına anlamı yoktur. Burada anlamı olan ve bir anlam verilen,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ifadesinin tümü birdendir ve bu, "n sonsuza giderken x_n'nin limiti vardır ve bu limit a'dır" ya da "n sonsuza giderken x_n dizisi a'ya gider" diye okunur.

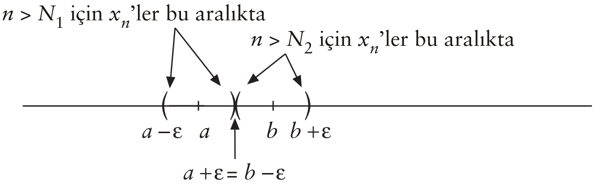
Bir de "$\lim_{n\to\infty} x_n$" ifadesine bir anlam verdik, bu "$(x_n)_n$ dizisinin limiti" anlamına gelir. Ancak $\lim_{n\to\infty} x_n$ ifadesini gönül rahatlığıyla kullanabilmemiz için bir dizinin en fazla **bir** sayıya yakınsadığını kanıtlamamız gerekmektedir. Eğer dizinin limiti hem a, hem b oluyorsa, ikisinden birini seçmemiz gerekir. Böyle bir seçime gerek olmadığını kanıtlayalım hemen:

Önsav 18.2. *Bir dizi en fazla bir sayıya yakınsayabilir.*

Kanıt: Hem a hem de b kesirli sayılarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, eğer $a \neq b$ ise, $(x_n)_n$ dizisinin hem a'ya hem de b'ye aynı zamanda çok çok yakın olamayacağını kullanacağız elbette.

Aşağıdaki resimden izleyelim. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım.

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$$



Ve can alıcı soru: $n > \max\{N_1, N_2\}$ için x_n nerede?

olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayısı olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a-x_n)+(x_n-b)| \le |a-x_n| + |x_n-b| \\ &= |a-x_n| + |b-x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|, \end{aligned}$$

yani $|a - b| < |a - b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir sayı kendinden küçük olamaz! □

Yukarıdaki önsavın izniyle, eğer bir $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyorsa, o zaman a'ya $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti*** adı verilir ve yukarda dediğimiz gibi bu,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olarak gösterilir.

Önsav 18.3. *Sabit a dizisi a'ya yakınsar. Daha genel olarak, zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği sayıya yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ dizisi zamanla sabitleşen bir dizi olsun. Yani belli bir göstergeçten sonra, diyelim M göstergecinden sonra hep a olsun: Eğer $n > M$ ise $x_n = a$. Bu dizinin a'ya yakınsadığını göstereceğiz. Rastgele bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçelim. Şimdi, her $n > N$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı bulmaya çalışacağız. Ama N'yi M almak yeterli. Nitekim, eğer $n > M$ olursa,

$$|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

olur. □

Arşimet Özelliği,

$$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

eşitliğinin kanıtının özünü oluşturur. Nitekim, eğer $\varepsilon > 0$ rasgele bir kesirli sayıysa, N doğal sayısı $1 \le N\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilsin. Şimdi, her $n > N$ göstergeci için,

$$1/n < 1/N \le \varepsilon$$

olur.

Aynı kanıt nerdeyse $\lim_{n\to\infty} 1/n^2 = 0$ eşitliğini de kanıtlar: Bir $\varepsilon > 0$ için, aynen yukardaki N'yi seçelim:

$$1/n^2 \leq 1/n < 1/N \leq \varepsilon$$

olur. Benzer şekilde $\lim_{n\to\infty} 1/2n = 0$ eşitliği de kanıtlanır.

Notlar ve Örnekler

18.2. Biraz daha zor bir limit alıştırması olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini gösterelim. Eşitliğin doğruluğunu kanıtlamadan önce, eşitliğin neden olması gerektiğini anlayalım. Pay, $n-3$'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, sondaki -3'ün esamesi bile okunmaz. Bir trilyonerin servetinden 3 lira eksilse ne çıkar ki!.. Bu yüzden $n-3$ yerine n yazabiliriz. Paydaya bakalım şimdi. Payda, n^2+n-5'e eşit. Ama n çok büyük olduğunda, n^2, n'den o kadar büyüktür ki, $n-5$ onun yanında çok küçük kalır. Dolayısıyla, n çok büyük olduğunda n^2+n-5 yerine n^2 alabiliriz. Böylece paya n, paydaya n^2 yazarsak,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

elde ederiz. Bir Excel tablosu yaparak bu iki sayının birbirine ne kadar yakın olduklarını görebilirsiniz.

18.3. Yukarda yaptığımız tam bir matematiksel kanıt değil. Şimdilik en azından. Ama daha sonra bu akıl yürütmeyi matematiksel bir kanıt hâline dönüştüreceğiz. Limitin 0 olduğunu şöyle de tahmin edebilirdik.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5}$$

ifadesinin her terimini n^2'ye bölelim.

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1 + 1/n - 5/n^2}$$

elde ederiz. n çok büyük olduğunda, sağ taraftaki $3/n^2$, $1/n$ ve $5/n^2$ terimleri o kadar küçük sayılardır ki (bunu biraz önce kanıtlamıştık), bu sayılar yerine 0 yazarsak fazla hata yapmamış oluruz! Böylece,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} = \frac{1/n - 3/n^2}{1 + 1/n - 5/n^2} \approx \frac{0-0}{1+0-0} = 0$$

elde ederiz.

Bu da şimdilik pek matematiksel değil. (İlerde olacak ama.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2+n-5} = 0$$

eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayalım: Her zamanki gibi pozitif bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçerek başlıyoruz. Öyle bir N bulacağız ki, her $n > N$ için,

$$\left| \frac{n-3}{n^2+n-5} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

olacak. Yani yukardaki eşitsizliğin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Soldaki ifadeyle oynayacağız. Soldaki ifadeyi büyüteceğiz ama bunu yaparken, n'yi büyülterek yeni ifadeyi dilediğimiz kadar küçültebileceğimize emin olacağız. Hesaplara başlıyoruz. Önce n'yi 3'ten büyük alırsak hem pay hem de payda pozitif olur ve mutlak değer işaretinden kurtuluruz:

$$\left|\frac{n-3}{n^2+n-5} - 0\right| = \frac{n-3}{n^2+n-5}$$

Eğer paydaki $n-3$ yerine n yazarsak daha büyük bir ifade buluruz elbet:

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5}$$

Şimdi sağdaki ifadenin ε'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Sağdaki ifadeyi büyütmeye devam ediyoruz, ama çok az büyüteceğiz.
Eğer n'yi 5'ten büyük alırsak, paydadaki $n-5$ pozitif olur ve o $n-5$'i silersek payda küçüleceğinden ifade büyür:

$$\frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2}.$$

En sağdaki ifade $1/n$'ye eşit. Demek ki n'yi, $1/n$ sayısı ε'dan küçük olacak biçimde seçmek yeterli. Bunun da Arşimet Özelliği sayesinde mümkün olduğunu biliyoruz (Teorem 11.11). Şimdi dört satırlık kanıtımızı yazabiliriz:
$\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $N > 5$ sayısı $1 < N\varepsilon$ eşitsizliğini sağlasın. Şimdi, her $n > N$ için,

$$\frac{n-3}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2+n-5} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Kanıtımız tamamlanmıştır.

□

Alıştırmalar

18.4. $x_n = (-1)^n$ formülüyle tanımlanan $(x_n)_n$ dizisinin limitinin olamayacağını kanıtlayın.

18.5. Eğer bir dizi yakınsaksa, bu diziyle aynı kuyruğa (bkz. Bölüm 17.4 Alıştırmalar) sahip dizilerin de yakınsak olduğunu ve limitlerinin hep aynı olduğunu kanıtlayın.

18.6. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

18.7. $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-3}{n^2+n-5})^n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

18.8. $b_0 = 1$ ve

$$b_{n+1} = \frac{3b_n+4}{2b_n+3}$$

formülüyle tanımlanmış $(b_n)_n$ dizisinin karesinin 2'ye yakınsadığını kanıtlayın. (Bkz. "$\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" yazısı.)

18.9. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n-3}{3n^2+2n-52} = \frac{4}{3}$ eşitliğini tanıma başvurarak kanıtlayın.

19. Yakınsak Dizilerle Dört İşlem ve Sıralama

Yakınsak diziler kümesini $\mathcal{Y}$ ile gösterelim. Bu bölümde $\mathcal{Y}$ kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve kimi zaman da bölme işlemlerini yapabileceğimizi göstereceğiz. Önce toplamadan başlayalım. Dizilerimiz hep kesirli sayı dizileri olacak.

19.1 Yakınsak Diziler ve Toplama

İlk teoremimiz, limit alma işleminin dizileri toplama işlemine dağıldığını söyleyecek: $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$.

Teorem 19.1. *$\mathcal{Y}$ kümesi toplama altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin toplamı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_n + y_n)_n$ dizisi $a + b$ sayısına yakınsar, yani,*

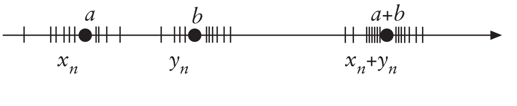
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

olur.

Kanıt: Önce kanıtın felsefesinden sözedelim, bu önemli. Yani tam matematiksel kanıt yapmadan kanıtın anafikrini anlatmaya çalışalım.

Kanıtın uzunluğuna aldanmasın okur, kanıt kısacıktır. Ama uzun uzun anlatıyoruz...

Varsayıma göre $(x_n)_n$ dizisini a'ya dilediğimiz kadar yaklaştırabiliyoruz. Gene varsayıma göre, $(y_n)_n$ dizisini b'ye dilediğimiz kadar yaklaştırabiliyoruz. Dolayısıyla $(x_n + y_n)_n$ dizisini $a + b$'ye dilediğimiz kadar yaklaştırabilmemiz gerekir...



Bir daha deneyelim: Varsayıma göre, yeterince büyük n'ler için, x_n terimi a'ya çok yakın olabiliyor. Gene varsayıma göre, yeterince büyük n'ler için, y_n terimi b'ye çok yakın olabiliyor. Dolayısıyla, yeterince büyük n'ler için, $x_n + y_n$ terimi $a + b$'ye çok yakın olabilmeli...

Yukarda söylenenlerin okuru aydınlattığını umarak matematiksel kanıta geçelim. Kanıtımız her zamanki gibi başlayacak: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun...

$(x_n + y_n)_n$ dizisinin $a + b$ sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

olsun. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek, $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukardaki eşitsizliğe bir biçimde

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Tekrar:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için n'nin ne kadar büyük seçilmesi gerektiğini bulacağız. Her zaman olduğu gibi sol taraftaki ifadeyle oynayacağız. O ifadeden birazcık daha büyük bir ifade bulacağız. Bulduğumuz bu büyük ifadeyi 1) Varsayımlarımızı kullanacağımız biçimde, 2) n'yi yeterince büyük seçerek dilediğimiz kadar küçülteceğimizden emin olacağımız biçimde seçeceğiz. Başlayalım:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b|.$$

Şimdi, $|(x_n + y_n) - (a + b)|$ ifadesi yerine,

$$|x_n - a| + |y_n - b|$$

ifadesini ε'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Eğer,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

ifadelerinin her biri $\varepsilon/2$'den küçük olursa, toplamları ε'dan küçük olur. Zaten bunu yapmasını biliyoruz, çünkü $(x_n)_n$ dizisinin limiti a, $(x_n)_n$ dizisinin limiti b...

$(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir N_2 doğal sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Biz her iki eşitsizliğin birden doğru olmasını istediğimizden, n'yi hem N_1'den hem de N_2'den büyük almalıyız. Dolayısıyla, eğer $N = \max\{N_1, N_2\}$ ise, $n > N$ olduğunda, n, hem N_1'den hem de N_2'den büyük olur ve yukardaki iki eşitsizliğin ikisi birden doğru olur. Şimdi Teorem 19.1'in birkaç satırlık kanıtı yazabiliriz:

Teorem 19.1'in Kanıtı: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Aynı kanıt yöntemini toplama yerine çıkarma işlemine de uygulayabiliriz.

19.2 Yakınsak Diziler ve Çıkarma

Teorem 19.2. *$\mathcal{Y}$ kümesi çıkarma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin farkı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_n - y_n)_n$ dizisi $a - b$ sayısına yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisinin limiti a olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

olur. Benzer nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|(x_n - y_n) - (a - b)| &= |(x_n - a) + (b - y_n)| \leq |x_n - a| + |b - y_n| \\ &= |x_n - a| + |y_n - b| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Aynı önerme, ama bu sefer değişik bir kanıtlama yöntemiyle çarpma için de geçerli.

19.3 Yakınsak Diziler ve Çarpma

Teorem 19.3. *$\mathcal{Y}$ kümesi çarpma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin çarpımı da yakınsaktır. Dahası, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsıyorsa, $(x_ny_n)_n$ dizisi ab sayısına yakınsar, yani,*

$$\lim_{n\to\infty} x_ny_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

olur.

Kanıt: $(x_ny_n)_n$ dizisinin ab sayısına yakınsadığını göstermek istediğimize göre, herhangi bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayı seçildiğinde, öyle bir N sayısı bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_ny_n - ab| < \varepsilon$$

olsun. Bir başka deyişle, $|x_ny_n - ab| < \varepsilon$ eşitsizliğinin geçerli olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulmaya çalışmalıyız. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$|x_n - a| \text{ ve } |y_n - b|$$

sayılarını istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla, kanıtlamak istediğimiz yukardaki eşitsizliğe bir biçimde $|x_n - a|$ ve $|y_n - b|$ sayılarını sokuşturmalıyız, bu sayılar devreye girmeli ki varsayımları kullanabilelim.

Her zamanki gibi sol taraftaki $|x_ny_n - ab|$ ifadesiyle oynamalıyız. Bu ifadeyi hafifçe büyüterek, işin içine

$$|x_n - a|$$

ve $|y_n - b|$ ifadelerini sokmalıyız. Bunu yapmak için matematikte sık sık kullanılan ufak bir hile vardır. İşte o hile:

$$\begin{aligned}|x_ny_n - ab| &= |x_ny_n - x_nb + x_nb - ab| \\ &\leq |x_ny_n - x_nb| + |x_nb - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|.\end{aligned}$$

Şimdi en sağdaki $|x_n||y_n - b| + |x_n - a||b|$ toplamını ε'dan küçük yapmalıyız. Ama bu mümkün müdür? Her iki

$$|x_n||y_n - b| \text{ ve } |x_n - a||b|$$

terimini de $\varepsilon/2$'den küçük yapabilirsek, o zaman bunların toplamları da ε sayısından küçük olur ve kanıtımızı başarıyla tamamlamış oluruz.

Önce görece kolay olan $|x_n - a||b|$ terimini (n'yi yeterince büyük yaparak) $\varepsilon/2$'den küçük yapalım. Bunun için, $|x_n - a|$ terimini $\varepsilon/2|b|$'den küçük yapmak yeterli. Ama dikkat, eğer $|b| = 0$ ise, $|b|$'ye bölemeyiz... Hiç önemli değil! Bu sorunun çözümü gayet basit:

$$|x_n - a||b| < |x_n - a|(1 + |b|)$$

olduğundan, $|x_n - a|$ terimini

$$\frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}$$

den küçük yapmak yeterli! Bunu yapabilir miyiz? Evet! Bu sayı 0'dan büyük kesirli bir sayı olduğundan, öyle bir N_1 sayısı vardır ki, her $n > N_1$ için,

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}$$

eşitsizliği doğrudur.

Şimdi $|x_n||y_n - b|$ terimini de $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalışmalıyız.

$$|y_n - b|$$

terimini istediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu yetmez... Çünkü bu terimin yanına yapışmış bir de $|x_n|$ terimi var. Eğer $|x_n|$ çok artarsa, o zaman bu terimi, küçüldüğünü bildiğimiz $|y_n - b|$ terimiyle çarptığımızda, çarpımın çok küçüleceğinden emin olamayız. Örneğin, $|y_n - b|$ terimi $1/n$ gibi küçülebilir ama $|x_n|$ terimi n gibi artabilir. O zaman da çarpımları olan

$$|x_n||y_n - b|$$

terimi n büyükken 1 civarında dolanır durur ve hiçbir zaman $\varepsilon/2$ kadar küçülemez. (ε'un küçük bir sayı olduğunu unutmayın.)

Neyse ki böyle bir sorunla karşılaşmayız, çünkü birazdan kanıtlayacağımız üzere, $(x_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır (Teorem 19.4) ve dizinin her $|x_n|$ terimi belli bir $B > 0$ kesirli sayısından küçüktür. Demek ki (eğer Teorem 19.4'ü doğru kabul edersek),

$$|x_n||y_n - b| < B|y_n - b|$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi en sağdaki $B|y_n - b|$ ifadesini $\varepsilon/2$'dan küçük yapmak yeterlidir. $B|y_n - b|$ ifadesini $\varepsilon/2$'den küçük yapmak için ise de, $|y_n - b|$ ifadesini

$$\frac{\varepsilon}{2B}$$

den küçük yapmak yeterlidir. Bunu başarabiliriz dostum! Ne de olsa bu sayı pozitif bir kesirli sayıdır ve $|y_n - b|$ sayısı yeterince büyük n'ler için bu sayının altına iner: Öyle bir N_2 sayısı vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2B}$$

eşitsizliği doğrudur. Demek ki,

$$|x_n|.|y_n - b| < B|y_n - b| < B\frac{\varepsilon}{2B} = \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise, hem $n > N_1$ hem de $n > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n y_n - x_n b| + |x_n b - ab| \\ &= |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| < B|y_n - b| + |x_n - a||b| \\ &< B|y_n - b| + |x_n - a|(1 + |b|) < B\frac{\varepsilon}{2B} + \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}(1 + |b|) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

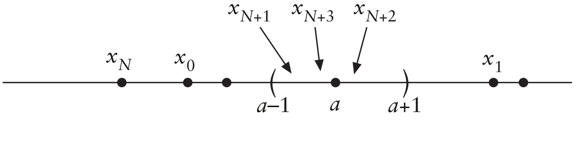
Aşağıda tamamlayacağımız ufak bir eksiklik dışında kanıtımız bitmiştir. □

Teorem 19.4. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Yani*

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}.$$

Kanıt: Kanıtın anafikri çok basit: Eğer bir dizi a'ya yakınsıyorsa, bu dizinin terimleri a'dan pek uzakta olamazlar... Şimdi teoremi matematiksel olarak kanıtlayalım.

Bir a sayısına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. Yakınsamanın tanımında ε'u 1'e eşit alalım. 1, 0'dan büyük bir kesirli sayı olduğundan buna hakkımız var. O zaman dizinin terimleri belli bir N göstergecinden sonra $(a-1, a+1)$ aralığına düşer, yani her $n > N$ için, $x_n \in (a-1, a+1)$ olur. Geriye sonlu sayıda x_0, x_1, ..., x_N terimi kalır. Bunlar da sınırlı bir aralığa sığarlar elbette.



Daha biçimsel olalım ve

$$A = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_N, a\} - 1,$$
$$B = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_N, a\} + 1$$

tanımlarını yapalım. O zaman her x_n terimi (A, B) aralığına düşer. Demek ki dizi sınırlıdır. □

Böylece Teorem 19.3'ün de kanıtı tamamlandı.

İlk üç teorem, $s(1) \in \mathcal{Y}$ olgusuyla birlikte ($s(1)$, sabit 1 dizisidir ve $\mathcal{Y}$'nin çarpma işleminin etkisiz elemanıdır), yakınsak diziler kümesi $\mathcal{Y}$'nin bir halka olduğunu söylüyor, hatta bu üç teorem $\mathcal{Y}$'nin, tüm diziler halkası $\mathcal{D}$'nin bir althalkası olduğunu söylüyor. Teorem 19.4 de, ayrıca, $\mathcal{Y}$'nin sınırlı diziler halkası $\mathcal{B}$'nin bir althalkası olduğunu söylüyor. Althalkalık $\leq$ işaretiyle gösterilir. Demek ki,

$$\mathcal{Y} \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{D}$$

ilişkilerini (eşitsizliklerini değil!) kanıtladık.

19.4 Yakınsak Diziler ve Mutlak Değer

Önsav 19.5. *Eğer $x = (x_n)_n$ yakınsak bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right|$$

olur.

Kanıt: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ olsun. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$ eşitliğini kanıtlayacağız. Her zaman olduğu gibi bir $\varepsilon > 0$ kesirli sayısı seçelim. Her $n > N$ için,

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu bir N doğal sayısı (göstergeci) bulacağız. Bunun için aşağıdaki gri kutuda kanıtlanan ünlü eşitsizliği kullanacağız:

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

Demek ki $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ eşitsizliğini elde etmek için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde etmek yeterli. Nitekim,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

olduğundan, öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Demek ki, $n > N$ için,

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon.$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

19.1. Şu önermeyi kanıtlayın: $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $a \in \mathbb{Q}$ ise $(ax_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} ax_n = a \lim_{n\to\infty} x_n$$

olur.

19.2. Eğer $(|x_n|)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(x_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

19.3. $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve $k \in \mathbb{N}$ ise $(x_n^k)_n$ dizisinin de yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k$$

eşitliğini kanıtlayın.

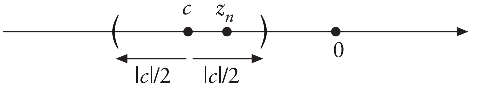
19.5 Yakınsak Diziler ve Sıralama

Yakınsak dizilerle bölme arasındaki ilişkiyi irdelemeden önce yakınsak dizilerle sıralama arasındaki ilişkiyi irdeleyelim.

Önsav 19.6. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olur.*

Kanıt: Eğer $z_n = x_n - y_n$ tanımını yaparsak, Teorem 19.2'ye göre, "*$(z_n)_n$ dizisi c'ye yakınsasın. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep $z_n \geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $c \geq 0$ olur*"

önermesini kanıtlamanın yeterli olduğunu görürüz. Tam tersine, c'nin negatif olduğunu varsayalım. Demek ki $c = -|c|$.



Varsayıma göre öyle bir N_0 vardır ki $n > N_0$ için,

$$z_n \geq 0$$

olur. Ayrıca, $(z_n)_n$ dizisi c'ye yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki $n > N_1$ için,

$$|z_n - c| \leq \frac{|c|}{2}$$

olur. Bunu görmek için, yakınsamanın tanımında $\varepsilon = |c|/2 > 0$ almak yeterli. Demek ki,

$$\frac{-|c|}{2} \leq z_n - c \leq \frac{|c|}{2}.$$

Dolayısıyla $z_n \leq c + |c|/2$. Şimdi n, hem N_0'dan hem de N_1'den büyük bir göstergeç olsun. O zaman,

$$z_n \leq c + \frac{|c|}{2} = -|c| + \frac{|c|}{2} = \frac{-|c|}{2} < 0,$$

çelişki. □

Alıştırmalar

19.4. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer sonsuz sayıda n göstergeci için $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$ olduğunu kanıtlayın.

19.6 Sıfıra Yakınsayan Diziler

Bölmeye geçmeden önce bir de 0'a yakınsayan dizilere bakalım. Bu dizilerin kümesine $\mathcal{Y}_0$ diyelim. $\mathcal{Y}_0$ kümesi de toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalıdır ama çarpmanın etkisiz elemanı olan $s(1)$ dizisini içermediğinden (bizim bu terime verdiğimiz anlamda) halka değildir. Bu dezavantajına karşın $\mathcal{Y}_0$ kümesinin bir üstünlüğü vardır:

Önsav 19.7. *0'a yakınsayan bir diziyle sınırlı bir dizinin çarpımı 0'a yakınsar. Yani $\mathcal{B}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$. (Aslında eşitlik geçerli tabii.)*

Kanıt: $(x_n)_n$, 0'a yakınsayan, $(y_n)_n$ de sınırlı bir dizi olsun. $(x_ny_n)_n$ dizisinin de 0'a yakınsadığını kanıtlayacağız. Kanıtımıza, artık alışık olduğumuz sözlerle başlayalım: $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir N bulmalıyız ki, her $n > N$ için,

$$|x_ny_n| < \varepsilon$$

olsun, yani

$$|x_n||y_n| < \varepsilon$$

olsun. $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsadığından, yeterince büyük n göstergeçleri için $|x_n|$ sayısının çok küçüleceğini biliyoruz. Ama araya bir de $|y_n|$ girmiş. Eğer $|y_n|$ çok büyürse, $|x_n||y_n|$ sayısını küçültmekte zorlanabiliriz. Neyse ki $|y_n|$'ler çok büyüyemezler, çünkü varsayıma göre $(y_n)_n$ dizisi sınırlı. Bu olguyu kullanmalıyız kanıtımızda.

B, $|y_n|$'lerin bir üstsınırı olsun: Her n için,

$$|y_n| < B.$$

B'nin 0 olamayacağına dikkatinizi çekerim. Şimdi, her n için,

$$|x_n||y_n| \leq B|x_n|.$$

Dolayısıyla, $B|x_n|$'yi ε'dan küçük yapmak yeterli, o zaman $|x_n||y_n|$ otomatik olarak ε'dan küçük olur; bunun için de $|x_n|$'yi ε/B sayısından küçük yapmak yeterli ve bunu da başarabiliriz: $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsayan bir dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, eğer $n > N$ ise, $|x_n| < \varepsilon/B$ dir. Dolayısıyla, her $n > N$ için,

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < B|x_n| < \frac{B\varepsilon}{B} = \varepsilon.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. $\square$

Bir R halkasının, çıkarma altında kapalı, boş olmayan ve $RI \subseteq I$ ve $IR \subseteq I$ içindeliklerini sağlayan I altkümelerine R'nin ***ideali*** adı verilir ve bu durum $I \lhd R$ olarak gösterilir. Demek ki $\mathcal{Y}_0 \lhd \mathcal{B}$.

19.7 Bölme

Şimdi $\mathcal{Y}$'nin tersinir elemanlarını bulalım. Yani öyle yakınsak dizileri bulalım ki, gene yakınsak bir diziyle çarpınca, sonuç sabit 1 dizisi $s(1)$ olabilsin. Demek ki belli bir $(y_n)_n$ yakınsak dizisi için,

$$(x_n)_n(y_n)_n = s(1)$$

eşitliğini sağlayan $(x_n)_n$ yakınsak dizilerini arıyoruz. Böyle bir $(y_n)_n$ dizisi varsa $x_n y_n = 1$ olmalı, yani her n için $x_n \neq 0$ ve $y_n = 1/x_n$ olmalı. Sonuç: Her terimi 0'dan değişik olan hangi $(x_n)_n$ yakınsak dizileri için, $(1/x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu bulmalıyız.

Teorem 19.8. *Eğer $(x_n)_n$ yakınsak dizisinin her terimi 0'dan değişikse ve dizi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

dir. Ayrıca eğer $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsıyorsa $(1/x_n)_n$ dizisi ıraksaktır. Daha simgesel bir ifadeyle

$$\mathcal{Y}^* = \{x \in \mathcal{Y} : \textit{ her } n \textit{ için } x_n \neq 0 \textit{ ve } x \notin \mathcal{Y}_0\} = (\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0) \cap \mathcal{D}^*$$

olur.

Kanıt: Eğer $x = (x_n)_n \in \mathcal{Y}^*$ ise, her n için $x_n \neq 0$ olması gerektiği bariz. $y = (y_n)_n \in \mathcal{Y}^*$, x'in tersi olsun. Eğer a ve b sırasıyla x ve y dizilerinin limitiyse, o zaman Teorem 19.3'e göre,

$$1 = \lim s(1) = \lim x_n y_n = \lim x_n \lim y_n = ab,$$

dolayısıyla $b \neq 0$.

Şimdi $x \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0$, "her n için $x_n \neq 0$" koşulunu sağlasın. x'in tersinir olduğunu, yani $(1/x_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Eğer $a \neq 0$ sayısı $(x_n)_n$ dizisinin limitiyse, $1/a$ sayısının $(1/x_n)_n$ dizisinin limiti olduğunu göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir N bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$$

olsun. $|1/x_n - 1/a|$ ifadesiyle oynayarak, bu ifadenin ε'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Oynamaya başlayalım:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|}.$$

Sağdaki ifadenin payını dilediğim kadar küçük yapabilirim, çünkü $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsıyor, burada bir sorun yok. Paydadaki a sabit bir sayı, bu da sorun yaratmaz. Ama x_n sorun yaratabilir, çünkü eğer x_n çok küçülürse, o zaman ifade çok büyüyebilir ve ifadenin ε'dan küçük olduğunu kanıtlayamayız. Teoremin doğru olması için $|x_n|$'ler belli bir pozitif sayıdan küçük olmamalı. Bu doğrudur ve $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmamasından kaynaklanır ama gene de bir kanıta ihtiyacı vardır. Bir sonraki önsavda bunu kanıtlayacağız.

Bir sonraki önsava göre, öyle bir $\delta > 0$ var ki, her n için, $|x_n| > \delta$ olur. Şimdi yukardaki hesabı bir adım daha devam ettirebiliriz:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta}$$

Şimdi en sağdaki ifadenin ε'dan küçük olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulalım. Bu ifadenin ε'dan küçük olması için, $|a - x_n|$, $\varepsilon|a|\delta$'dan küçük olmalı ve $\varepsilon|a|\delta > 0$ olduğundan bunu yapabiliriz: N, her $n > N$ için,

$$|a - x_n| < \varepsilon|a|\delta$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayı olsun. Şimdi N'den büyük her n için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - x_n|}{|a||x_n|} < \frac{|a - x_n|}{|a|\delta} < \frac{\varepsilon|a|\delta}{|a|\delta} = \varepsilon.$$

Bir sonraki önsavı da kanıtlarsak kanıtımız tamamen tamamlanmış olacak. □

Önsav 19.9. **i.** *Eğer* $(x_n)_n$ *yakınsak dizisi* 0*'a yakınsamıyorsa, öyle bir* N *doğal sayısı ve* $\delta > 0$ *vardır ki, her* $n > N$ *için,* $|x_n| > \delta$ *olur.*
ii. *Eğer* $(x_n)_n$ *yakınsak dizisi* 0*'a yakınsamıyorsa ve her terimi* 0*'dan değişikse, öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki, her* n *için,* $|x_n| > \delta$ *olur.*

Kanıt: Önsav 19.5'e göre, $(x_n)_n$ yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alıp $x_n \geq 0$ eşitsizliğini varsayabiliriz. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. Önsav 19.6'ya ve varsayıma göre $a > 0$ olmalı. Eğer $\varepsilon = a/2$ alırsak, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < a/2$$

eşitsizliğini, yani

$$-a/2 < x_n - a < a/2$$

eşitsizliklerini sağlayan bir N'nin olduğunu görürüz. Demek ki, $n > N$ için,

$$a - a/2 < x_n$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi $\delta = a/2$ alırsak, birinci kısmı kanıtlamış oluruz. İkinci kısma geçelim. Yukardaki δ yerine,

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{|x_1|}{2}, \ldots, \frac{|x_N|}{2}, \frac{a}{2}\right\}$$

alalım. Varsayımdan dolayı $\delta > 0$ ve a'nın, N'nin ve δ'nın tanımlarından dolayı, her n için, $|x_n| > \delta$. □

19.8 Sıralama

Teorem 19.10. **[*Sandviç Teoremi*].** *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \leq y_n \leq z_n$ eşitsizliklerinin belli bir M göstergecinden sonra doğruysa ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı elemana yakınsıyorsa, $(y_n)_n$ dizisi de bu elemana yakınsar.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri a'ya yakınsasınlar. $(y_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız, yani $\varepsilon > 0$, herhangi bir pozitif sayıysa,

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her $n > N$ için doğru olduğu bir N sayısı bulacağız. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için $|y_n - a|$ ifadesiyle oynayacağız. Hesaplarda rahat etmek için $n > M$ alalım. Bu kısıtlama yetmeyecek ama bu sayede, hiç olmazsa,

$$\begin{aligned}|y_n - a| &= |a - x_n + x_n - y_n| \leq |a - x_n| + |x_n - y_n| \\ &= |a - x_n| + (y_n - x_n) \leq |a - x_n| + (z_n - x_n) \\ &\leq |a - x_n| + |z_n - a| + |a - x_n| = 2|a - x_n| + |z_n - a|\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Demek ki en sondaki ifadeyi ε'dan küçük yapmak yeterli. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için

$$|x_n - a| = |a - x_n| < \varepsilon/3$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için

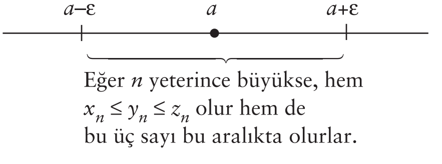
$$|a - z_n| < \varepsilon/3$$

olur. Şimdi $N = \max\{M, N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n > N$ ise,

$$|y_n - a| = 2|a - x_n| + |z_n - a| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

elde ederiz.

İkinci Kanıt: Bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. a, $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizilerinin limiti olsun. O zaman büyük n'ler için, hem $a - \varepsilon < x_n$



hem de $z_n < a + \varepsilon$ olur. Demek ki belki biraz daha büyük n'ler için

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

olur. Bu büyük n'ler için $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$, yani $|y_n - a| < \varepsilon$ olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Teorem 19.11. $|a - b| \geq ||a| - |b||$ ***Eşitsizliği***

a, $b \in \mathbb{Q}$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden,

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

elde ederiz. Demek ki,

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

Aynı nedenden, a ile b'nin rollerini değiştirirsek,

$$|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|$$

buluruz. Demek ki

$$|a - b|,$$

hem $|a|-|b|$ *sayısından, hem de bunun eksisi olan* $|b|-|a|$ *sayısından büyükeşit, yani* $|a| - |b|$ *sayısının mutlak değerinden büyükeşit:* $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

20. Yakınsaklık/Iraksaklık Örnekleri

Bu bölümde birçok yakınsak ve ıraksak dizi örneği vereceğiz. En kolay ıraksak dizilerden başlayalım.

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

dizisi elbette ıraksaktır, yani hiçbir kesirli sayıya yakınsamaz, çünkü dizi sınırlı değildir (Teorem 19.4). Ama bunu tanımı kullanarak kanıtlayalım, faydasını göreceğiz.

Önce yakınsaklığın tanımını anımsayalım: $(x_n)_n$ dizisinin bir a (kesirli) sayısına yakınsaması için, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonlu olması gerekir. Demek ki dizinin ıraksak olması için yukardaki özelliğin **her** $a \in \mathbb{Q}$ için yanlış olması gerekir, yani her $a \in \mathbb{Q}$ için, öyle bir $\varepsilon > 0$ olmalı ki,

$$\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesi sonsuz olsun.

Iraksaklığın tanımını böylece daha matematikselleştirdikten sonra, 0, 1, 2, 3, ... doğal sayı dizisinin ıraksak olduğunu matematiksel olarak kanıtlayalım. Burada, $x_n = n$ olarak almalıyız elbette. Herhangi bir a ve $\varepsilon > 0$ alalım. Aslında ε rastgele olmak zorunda değil ama bu örnekte rastgele bir ε işimizi görür. Dileyen okur $\varepsilon = 1$ alabilir. Bir N doğal sayısı için $N \geq a + \varepsilon$ eşitsizliği doğrudur (Arşimet Özelliği, Teorem 11.11). Demek ki, her $n \geq N$ için,

$$x_n = n \geq N \geq a + \varepsilon,$$

yani

$$x_n - a \geq \varepsilon > 0.$$

Dolayısıyla,

$$N, N+1, N+2, N+3, \ldots$$

sayılarının hepsi $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir ve bu küme sonsuzdur. Doğal sayı dizisinin ıraksak olduğu kanıtlanmıştır.

Şimdi de

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

dizisinin ıraksak olduğunu kanıtlayalım. Bu dizi, $x_n = (-1)^n$ formülüyle tanımlanabilir. Herhangi bir a alalım. Eğer $a = 1$ ise $\varepsilon = 1$ alalım, o zaman bütün çift sayıların $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesinde olduğu görülür. Eğer $a = -1$ ise gene $\varepsilon = 1$ alalım, bu kez bütün tek sayılar $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir. Eğer $a \neq \pm 1$ ise, o zaman ε, $|a+1|/2$ ve $|a-1|/2$ sayılarının en küçüğü olsun. Bu sefer her doğal sayı $\{n : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$ kümesindedir.

Alıştırmalar

20.1. $A \subseteq \mathbb{Q}$ sonlu bir küme olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in A$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

20.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \mathbb{Q}$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için dizinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın.

Şimdi verilmiş bir x_0 için,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

formülüyle tanımlanan dizinin kesirli sayılarda yakınsak olamayacağını kanıtlayalım. Diyelim dizi a kesirli sayısına yakınsıyor. Dizinin karesinin 2'ye yakınsadığını "$\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" yazısında görmüştük. Demek ki,

$$a^2 = (\lim x_n)^2 = \lim x_n^2 = 2.$$

Ama karesi 2 olan bir kesirli sayı yoktur. Çelişki. Demek ki bu dizi kesirli sayılarda yakınsamaz.

Dikkat ederseniz, bu örnekte dizinin yakınsak olmadığını daha önceki örneklerdeki gibi göstermedik, Teorem 19.3 gibi güçlü bir sonuç kullandık. Çünkü bu dizi yakınsak dizilere çok benzer ve dizinin ıraksaklığının daha önceki gibi doğrudan bir kanıtı yoktur.

Yakınsak dizi örneklerine geçelim.

Geçmişte $(1/n)_n$ dizisinin limitinin 0 olduğunu kanıtlamıştık. (Ama dikkat! $(1/n)_n$ dizisinin $\mathbb{Q}$'de limiti 0'dır. $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ kümesinde bu dizinin limiti yoktur!) Çok daha genel bir sonuç geçerlidir:

Teorem 20.1. *$p(X)$, $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ iki polinom olsun. $q(X) \neq 0$ olsun. Eğer $\deg p \leq \deg q$ ise $(p(n)/q(n))_n$ dizisi yakınsaktır. Eğer $degp < degq$ ise*

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = 0$$

olur. Eğer $\deg p = \deg q$ *ise ve* a *ve* b *sırasıyla* p *ve* q *polinomlarının başkatsayısıysa,*

$$\lim_{n\to\infty} p(n)/q(n) = a/b$$

olur. Eğer $\deg p > \deg q$ *ise dizi ıraksaktır.*

Kanıt: $\deg p = d$, $\deg q = e$ olsun. p ve q polinomlarını,

$$p(X) = p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_dX^d,$$
$$q(X) = q_0 + q_1X + q_2X^2 + \cdots + q_eX^e$$

olarak yazalım. Burada $p_d = a \neq 0$ ve $q_e = b \neq 0$'dır.

$d \leq e$ varsayımı altında $p(n)/q(n)$ ifadesinin payını ve paydasını n^e'ye bölelim:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{p_0 + p_1n + \cdots + p_dn^d}{q_0 + q_1n + \cdots + q_en^e}$$
$$= \frac{p_0/n^e + p_1/n^{e-1} + \cdots + p_d/n^{e-d}}{q_0/n^e + q_1/n^{e-1} + \cdots + q_{e-1}/n + q_e}$$

Eğer $e > d$ ise payın tüm p_i/n^{e-i} terimlerinin limiti 0'dır; paydanın limiti ise q_e'dir; dolayısıyla limit $0/q_e = 0$'dır.

Eğer $e = d$ ise payın limiti $p_d = a$'dır; paydanın limiti ise gene $q_e = b$'dir; dolayısıyla limit a/b'dir.

Eğer $e < d$ ise, o zaman yukarda görüldüğü gibi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{p(n)} = 0$$

olmalı. $((q(n)/p(n))_n$ dizisini $p(n)$'nin artık 0 olamayacağı n'den başlatalım, açık açık söylemedik ama $(p(n)/q(n))_n$ dizisi de $q(n)$'nin 0 olamayacağı n'den başlıyor.) Eğer $(p(n)/q(n))_n$ dizisinin limiti olsaydı, 0'la bu dizinin çarpımı 1 olmak zorunda olurdu! Demek ki $(p(n)/q(n))_n$ dizisinin limiti olamaz. □

$(r^n)_n$ biçiminde yazılan bir diziye ***geometrik dizi*** denir. Geometrik dizilerin yakınsaklığına karar vermek oldukça kolay:

Teorem 20.2. *r bir kesirli sayıysa $(r^n)_n$ dizisi ancak $r \in (-1, 1)$ iken yakınsak olabilir. Eğer $r = 1$ ise limit 1'dir. Eğer $r \in (-1, 1)$ ise limit 0'dır.*

Kanıt: Eğer limit varsa, limitin 0 ya da 1 olması gerektiği şöyle anlaşılır: Öncelikle $(r^n)_n$ ve $(r^{n+1})_n$ dizilerinin kuyrukları aynı olduğundan, ikisinin de limiti aynıdır, dolayısıyla limite a dersek,

$$a = \lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = r \lim_{n\to\infty} r^n = ra.$$

olur. Demek ki $a = ra$ ve eğer $a \neq 0$ ise $r = 1 = r$. Ama bu akıl yürütme limitin olduğunu göstermez.

Teoremin kanıtında şu önsava gereksinim duyacağız:

Önsav 20.3. *Eğer $s > -1$ ise, her n doğal sayısı için,*

$$(1+s)^n \geq 1 + ns.$$

Önsavın Kanıtı: Eğer $n = 0$ ise eşitsizlikten de öte bir eşitlik sözkonusu. Şimdi eşitsizliği n için varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. Aşağıdaki kanıtta

$$1 + s > 0$$

eşitsizliğini kullandığımıza dikkat etmelisiniz:

$$\begin{aligned}(1+s)^{n+1} &= (1+s)^n(1+s) \geq (1+ns)(1+s)\\ &= 1 + (n+1)s + ns^2 \geq 1 + (n+1)s.\end{aligned}$$

Olgu kanıtlanmıştır.

Eğer $s \geq 0$ ise aynı olguyu binom açılımını kullanarak, çok daha basit olarak

$$(1+s)^n = 1 + ns + \binom{n}{2}s^2 + \cdots + s^n \geq +ns$$

tek satırda da kanıtlayabilirdik.

Teoremin kanıtına devam edelim. $r \in (-1, 1)$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Eğer $r = 0$ ise, kanıtlayacak fazla bir şey kalmıyor, bundan böyle r'nin 0 olmadığını varsayalım. $\varepsilon > 0$ olsun. $s = -1 + 1/|r|$ olsun. Tabii ki $s > -1$. (Hatta $s > 0$.) Buradan

$$|r| = \frac{1}{1+s}$$

çıkar. N doğal sayısı,

$$1/s < N\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın (Arşimet Özelliği). Şimdi, her $n > N$ için,

$$\begin{aligned}|r^n| = |r|^n &= \left(\frac{1}{1+s}\right)^n = \frac{1}{(1+s)^n}\\ &\leq \frac{1}{1+ns} < \frac{1}{ns} < \frac{1}{Ns} < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ eşitliği kanıtlanmıştır.

Şimdi r'nin 1'den büyük olduğunu varsayalım. $s = 1 - r > 0$ olsun. O zaman Önsav 20.3 ve Arşimet Özelliği'ne göre

$$(r^n)_n = ((1+s)^n)_n$$

dizisi sınırlı değildir, dolayısıyla yakınsak olamaz (Teorem 19.4).

Eğer $r < -1$ ise, $n = 2m$ çift olduğunda, $r^n = r^{2m} = (r^2)^m$ sayıları bir önceki paragrafa göre üstten sınırlı değildirler. Dolayısıyla $(r^n)_n$ dizisi sınırlı değildir ve yakınsak olamaz. □

Eğer (henüz inşa etmediğimiz) $\mathbb{R}$ elimizde olsaydı, Teorem 20.2'yi çok daha basit biçimde kanıtlayabilirdik.

Şimdi de geometrik dizinin elemanları toplayarak elde ettiğimiz,

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1,\\
s_1 &= 1 + r,\\
s_2 &= 1 + r + r^2,\\
s_2 &= 1 + r + r^2 + r^3,\\
&\dots\\
s_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n,
\end{aligned}$$

dizisine bakalım. Bu dizinin limiti analizde çok çok temeldir.

Teorem 20.4. *r bir kesirli sayı olsun. Yukarda tanımlanan $(s_n)_n$ dizisi ancak ve ancak $r \in (-1, 1)$ iken yakınsak olabilir ve bu durumda limit*

$$\frac{1}{1-r}$$

olur.

Kanıt: Eğer $r \neq 1$ ise,

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

eşitliğini geçmişte kanıtlamıştık. Dolayısıyla eğer $r \in (-1, 1)$ ise sonuç bir önceki teoremden çıkar. Eğer $r = 1$ ise, $s_n = n$ olduğundan, dizi sınırlı değildir ve ıraksar. Yukardaki formül, eğer r, $(-1, 1]$ aralığında değilse dizinin sınırlı olamayacağını, dolayısıyla yakınsak da olamayacağını gösteriyor. □

Notlar ve Örnekler

20.3. Son olarak, her $r \in \mathbb{Q}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$$

eşitliğini kanıtlayalım. Alıştırma 2'ye göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı sayı olsun. L, r'den büyük herhangi bir doğal sayı olsun. Her k doğal sayısı için,

$$x_{L+K} \leq x_L \left(\frac{r}{L+1}\right)^k$$

eşitsizliğini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım. $k = 0$ ise eşitlik sözkonusu. Şimdi eşitsizliği k için varsayıp $k+1$ için kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} x_{L+k+1} &= \frac{r^{L+k+1}}{(L+k+1)!} = \frac{r^{L+k}}{(L+k)!}\frac{r}{L+k+1} \\ &= x_{L+k}\frac{r}{L+k+1} \leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k \frac{r}{L+k+1} \\ &\leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k\left(\frac{r}{L+1}\right) = x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Eşitsizliği kanıtladık. Ama $0 < r/(L+1) < 1$ ve Teorem 20.2'ye göre yukardaki eşitsizliğin en sağındaki terimin k sonsuza giderken limiti 0'dır. Demek ki öyle bir K vardır ki, her $k > K$ için,

$$\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < \frac{\varepsilon}{x_L}$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi $N = K + L$ olsun. Her $n > N$ için, $k = n - L > K$ tanımıyla,

$$x_n = x_{L+k} \leq x_L\left(\frac{r}{L+1}\right)^k < x_L\frac{\varepsilon}{x_L} = \varepsilon$$

elde ederiz. İstediğimizi kanıtladık... □

Pek kolay olmadı değil mi? Evet, limit bulmak her zaman kolay değildir, hatta bazen çok çok zor olabilir. Özellikle eğer elimizde $\mathbb{R}$ gibi güçlü bir cisim yoksa.

Okur, haklı olarak yukardaki kanıtı nasıl düşündüğümüzü sorabilir. Yılların deneyimi elbette...

Kanıtı nasıl yaptığımızı anlatmaya çalışalım.

x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki var:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Bunu bir adım daha götürürsek,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}x_{n+1} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n$$

elde ederiz. Ama buradan da,

$$x_{n+2} = \frac{r}{n+2}\frac{r}{n+1}x_n < \left(\frac{r}{n+1}\right)^2 x_n$$

elde ederiz. Bu aşamada,

$$x_{n+k} \leq \left(\frac{r}{n+1}\right)^k x_n$$

eşitsizliğini tahmin edip kanıtlamak zor değil. Eğer n'yi yeterince büyük seçersek,

$$\frac{r}{n+1}$$

sayısı 1'den küçük olur ve Teorem 20.2'ye göre eşitsizliğin sağ tarafı k büyüdükçe küçülür. Bizim istediğimiz de buydu zaten. Gerisi, okurun ustalaşması gerektiği teknik ayrıntı.

21. Yakınsaklık Alıştırmaları

Alıştırmalar

21.1. Şu limitleri bulun:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + r^2 + \cdots + r^{2n}),$$
$$\lim_{n\to\infty} r^{2n}/n!$$

21.2. $\lim_{n\to\infty} nr^n$ limiti hangi r'ler için vardır ve kaçtır? İpucu: Teorem 20.2'de kullanılan yöntemi deneyin, yalnız oradaki olgu yerine, her $s > 0$ için,

$$(1+s)^n \geq 1 + ns + n(n-1)s^2/2$$

eşitsizliğini kullanın.

21.3. Sabit bir k doğal sayısı için aynı soruyu $(n^k r^n)_n$ dizisi için yanıtlayın.

21.4. $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n) = 1$ ve

$$\lim_{n\to\infty}(1/2 - 1/4 + \cdots + (-1)^{n+1}/2^n = 1/3$$

eşitliklerini kanıtlayın.

21.5. $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$ dizisinin sınırsız olduğunu, dolayısıyla ıraksak olduğunu kanıtlayın.

21.6. Her n için, $1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2 \leq 2$ eşitsizliğini kanıtlayın.
İpucu: 2 yerine $2 - 1/n$ alın!

21.7. Her n için, $(1 + 1/n)^n < 3$ eşitsizliğini kanıtlayın.

$$((1 + 1/n)^n)_n$$

dizisinin artan bir dizi olduğunu kanıtlayın.

21.8. Her n için $x_n \neq 0$ ve sabit bir $r \in (0, 1)$ için, $|x_{n+1}/x_n| \leq r$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

21.9. $(a_n)_n$ herhangi bir dizi olsun.

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

olsun. Eğer $(s_n)_n$ dizisi yakınsaksa, $(a_n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.

21.10. Bir $n > 0$ tamsayısı için,

$$v(n) = \max\{m : 2^m \leq n\}$$

olarak tanımlansın. $\lim_{n\to\infty} v(n)/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

21.11. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ bir polinom olsun. $(p(x_n))_n$ dizisinin $p(a)$'ya yakınsadığını gösterin.

21.12. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsasın. $p(X)$, $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ iki polinom olsun.

$$q(a) \neq 0$$

olsun. $(p(x_n)/q(x_n))_n$ dizisinin $p(a)/q(a)$'ya yakınsadığını gösterin.

Not: $q(x_n) = 0$ olduğunda bölmede sorun olacaktır ama bu baş edemeyeceğimiz bir sorun değildir: $q(a) \neq 0$ olduğundan, $q(x_n)$'nin 0 olduğu n göstergeçlerinin sayısı sonlu olmalıdır. Dizi, $q(x_n)$'nin 0 olduğu göstergeçlerden sonra başlasın.

21.13. Eğer $(x_n)_n$ dizisi yakınsaksa ve her n için $x_n \neq 0$ ise, $(x_n/x_{n+1})_n$ dizisinin 1'e yakınsadığını kanıtlayın!

21.14. Yukardaki alıştırmaya karşıörnek bulun! Kanıtta nerde hata yaptığınızı bulun. Kanıtlanması gereken doğru sonucu yazın. $(x_n/x_{2n})_n$ dizisi hakkında ne diyebilirsiniz? (Bkz. Teorem 23.2.)

21.15. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki ayrı limite yakınsayan iki dizi olsun.

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

kümesinin sonlu olduğunu kanıtlayın.

21.16. $x_{n,m} = n/(n+m)$ olsun.

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} x_{n,m}\right) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} x_{n,m}\right)$$

limitlerini hesaplayın.

21.17. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki dizi olsun.

$$z_n = \begin{cases} x_{n/2} & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ y_{(n-1)/2} & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için, $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizilerinin yakınsak olması ve aynı sayıya yakınsamalarının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

21.18. $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$ ise, $(a_n)_n$ dizisinin limiti mutlaka olmalı mıdır?

21.19. Eğer $a_n \geq 0$, $a \geq 0$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$ ise, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ eşitliğini kanıtlayın.

21.20. $(a_{2n})_n$, $(a_{2n+1})_n$ ve $(a_{7n+1})_n$ dizileri yakınsak ise $(a_n)_n$ dizisi de yakınsak mıdır?

21.21. $q \in \mathbb{Q}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} a_n/n = q$ eşitliğini sağlayan a_n doğal sayıları var mıdır?

22. Kesirli Temel Diziler

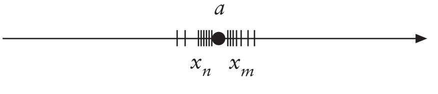
Kesirli sayı dizileriyle çalışmaya devam ediyoruz. Geçmişte (henüz var olmayan) $\sqrt{2}$'ye yakınsamak isteyen bir kesirli sayı dizisi örneği verdik. Eğer $\sqrt{2}$ orada olsaydı, bu dizi **kesirli sayılar kümesinde** $\sqrt{2}$'ye yakınsayacaktı, ama $\sqrt{2}$ kesirli sayı olmadığından bu dizinin **kesirli sayılar kümesinde** $\sqrt{2}$'ye yakınsadığını söyleyemeyiz.

İlerde, gerçel sayıları yarattığımız zaman, $\sqrt{2}$'yi de yaratmış olacağız ve o zaman bu dizi **gerçel sayılar kümesinde** gerçekten $\sqrt{2}$'ye yakınsayacak. Ama şimdilik bunu söylemek için çok erken.

Dizinin $\sqrt{2}$'ye yakınsamamasının suçu dizide değil. Dizi, $\sqrt{2}$'ye yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapıyor ama $\sqrt{2}$ olmadığından hüsrana uğruyor ve $\sqrt{2}$'ye yakınsamıyor.

Bir sayıya yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapan kesirli sayılar dizisine ***temel dizi*** denir. Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz.

Yakınsak bir $(x_n)_n$ dizisi alalım. Diyelim bu dizi a (kesirli) sayısına yakınsıyor. Demek ki x_n terimlerini istediğimiz kadar a'ya yaklaştırabiliriz. Dolayısıyla giderek daha fazla a'ya yaklaşan bu terimler giderek birbirlerine yaklaşırlar, safları sıklaştırırlar, birbirlerine daha daha sokulurlar...



Bu fikri daha matematiksel olarak ifade edelim. $\varepsilon > 0$, herhangi bir (kesirli) sayı olsun. O zaman, belli bir N göstergecinden sonra, x_n terimlerinin a'ya uzaklığı en fazla $\varepsilon/2$ olur. Dolayısıyla bu göstergeçten sonra terimlerin birbirlerine uzaklığı en fazla ε olur. Nitekim, eğer n, $m > N$ ise,

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m|\\ &= |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

Bu özelliği sağlayan bir diziye ***temel dizi*** denir. Tam tanımı matematiksel olarak ifade edelim: $(x_n)_n$ bir kesirli sayılar dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N göstergeci varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***temel dizi*** denir. Yani $(x_n)_n$ dizisinin temel dizi olması için, her $\varepsilon > 0$ için, dizinin terimleri arasındaki mesafenin bir zaman sonra (yani belli bir göstergeçten sonra) **hep** ε'dan küçük olması gerekir.

Biraz yukarda şu teoremi kanıtladık:

Teorem 22.1. *Yakınsak diziler temel dizilerdir.*

Ama her temel dizi yakınsak değildir. Örneğin, "$\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" xxxxxxxxxxx yazısında tümevarımla tanımladığımız

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$$

dizisi ($x_0 > -1$ ise örneğin) birazdan kanıtlayacağımız üzere temeldir ama bildiğimiz gibi hiçbir (kesirli) sayıya yakınsamaz.

Bu dizinin temel dizi olduğunu kanıtlayalım. Eğer $-1 \leq x_0$ ise, tanımdan, her n için $1 \leq x_n$ çıkar. Şimdi bunu ve "$\sqrt{2}$'ye Yakınsamak İsteyen Bir Dizi" yazısında kanıtladığımız

$$|x_n^2 - 2| \leq 1/4^n$$

eşitsizliğini kullanacağız. Eğer $n \geq m$ ise,

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq 2|x_n - x_m| = (1+1)|x_n - x_m| \\
&\leq (x_n + x_m)|x_n - x_m| = |x_n^2 - x_m^2| \\
&= |(x_n^2 - 2) + (2 - x_m^2)| \leq |x_n^2 - 2| + |x_m^2 - 2| \\
&\leq 1/4^n + 1/4^m = 2/4^m = 1/2^{2m-1}.
\end{aligned}$$

Eğer $1/2^{2m-1}$ sayısını dilediğimiz kadar küçültebilirsek, yukardaki hesap,

$$|x_n - x_m|$$

sayısını da çok küçültebileceğimizi gösteriyor. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. m'yi $1/2^{2m-1} < \varepsilon$ olacak biçimde seçebilirsek, o zaman dizinin temel dizi olduğu kanıtlanmış olacak. Bunu da yapabiliriz, çünkü Teorem 20.2'de gördüğümüz üzere, $1/2^k = (1/2)^k$ sayılarının limiti k sonsuza giderken 0'dır, yani k'yi yeterince büyük seçersek $1/2^k$ sayıları ε'dan daha küçük yapabiliriz. N doğal sayısı, $1/2^N < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak kadar büyük seçilsin. O zaman, $n \geq m > N$ için,

$$|x_n - x_m| \leq 1/2^{2m-1} \leq 1/2^m < 1/2^N < \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece $(x_n)_n$ dizisinin temel bir dizi olduğu kanıtlanmış olur.

Bu bölümde işte bu temel dizileri irdeleyeceğiz.

Not: Gerçel sayıları var etmiş olsaydık ve temel dizinin tanımındaki ε'u gerçel sayı alabilseydik, temel diziye ***Cauchy dizisi*** adını verecektik. Temel dizilerle Cauchy dizileri arasında çok ince ama önemli bir ayrım vardır.

Karekök Almak. $x_0 = 1$, $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$ olarak tanımlansın. $(x_n)_n$, temel bir dizidir. (Alıştırma.) Aslında bu dizinin karesi 2'ye yakınsar, yani $(x_n)_n$ dizisi henüz icat etmediğimiz $\sqrt{2}$'ye yakınsamak için can atar. İşte kesirli bir sayı olmayan

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730\ldots$$

sayısının bu dizi sayesinde elde edilen yaklaşık kesirli değerleri:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= 3/2 = 1{,}5\\
x_2 &= 17/12 = 1{,}41666\ldots\\
x_3 &= 577/408 = 1{,}41421568627451\ldots\\
x_4 &= 1{,}41421356237469\ldots\\
x_5 &= 1{,}41421356237309\ldots
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi dizi $\sqrt{2}$'ye oldukça çabuk yakınsıyor.

$\sqrt{S}$'ye her seferinde en az iki ondalık basamak yaklaşan bir dizi bulmak için, x_0'ı herhangi pozitif bir sayı alın. (x_0'ı $\sqrt{S}$'ye yakın olduğunu tahmin ettiğiniz bir sayı almanın bir sakıncası yoktur!) ve

$$x_{n+1} = \frac{x_n + S/x_n}{2}$$

olarak tanımlayın.

Temel diziler kümesine $\mathcal{C}$ adını verelim. (Cauchy'nin $\mathcal{C}$'si.) Teorem 22.1'e göre,

$$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{C}.$$

Şimdi her temel dizinin sınırlı olduğunu kanıtlayalım. Nitekim temel dizilerin terimleri bir zaman sonra birbirlerine çok yakın olduklarından, temel dizilerin sınırlı olması akla yatkındır.

Teorem 22.2. *Her temel dizi sınırlıdır, yani* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

Kanıt: $(x_n)_n$ bir temel dizi olsun. Tanımdaki ε'u, örneğin, 1 seçelim. Demek ki, öyle bir N göstergeci var ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Demek ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - x_{N+1}| < 1;$$

bir başka deyişle,

$$x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1.$$

Şimdi

$$b = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} + 1\}$$

ve

$$a = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_N, x_{N+1} - 1\}$$

olsun. O zaman, her n için,

$$a \leq x_n \leq b$$

olur. □

Bu bölümün bundan sonrasında, temel diziler kümesi $\mathcal{C}$'nin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu, yani bir halka olduğunu kanıtlayacağız ve bu halkanın birkaç temel özelliğini ortaya koyacağız.

Teorem 22.3. *$\mathcal{C}$ çıkarma altında kapalıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki temel dizi olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her n, $m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2$$

dir. Benzer nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$|y_n - y_m| < \varepsilon/2$$

dir. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer n, $m > N$ ise, hem n, $m > N_1$ hem de n, $m > N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|(x_n - y_n) - (x_m - y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_m - y_n)| \\
&\leq |x_n - x_m| + |y_m - y_n| \\
&= |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \\
&\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Kanıt tamamlanmıştır. □

Sonuç 22.4. *$\mathcal{C}$ toplama altında kapalıdır.*

Kanıt: Bir önceki teorem gibi kanıtlayabiliriz. Ama çok daha genel bir sonuç vardır: Bir halkanın çıkarma altında kapalı olan her altkümesi toplama altında da kapalıdır:

$$x + y = x - ((x - x) - y).$$

Kanıt bitmiştir. □

Teorem 22.5. *$\mathcal{C}$ çarpma altında kapalıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki temel dizi olsun. $(x_ny_n)_n$ dizisinin temel dizi olduğunu kanıtlayacağız. $\varepsilon > 0$, herhangi bir kesirli sayı olsun. Öyle bir N göstergeci bulmalıyız ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_ny_n - x_my_m| < \varepsilon$$

olsun. Her zamanki gibi $|x_ny_n - x_my_m|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadenin ε'dan küçük olması için n ve m sayılarının ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız. Elbette büyük n ve m'ler için,

$$|x_n - x_m| \text{ ve } |y_n - y_m|$$

ifadelerinin küçük olduklarını kullanacağız. Bu yüzden,

$$|x_ny_n - x_my_m|$$

ifadesinde bir biçimde $|x_n - x_m|$ ve $|y_n - y_m|$ ifadelerini bulmalıyız. İşte o hesap:

$$\begin{aligned}|x_ny_n - x_my_m| &= |(x_ny_n - x_ny_m) + (x_ny_m - x_my_m)|\\ &\le |x_ny_n - x_ny_m| + |x_ny_m - x_my_m|\\ &= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|.\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $|x_ny_n - x_my_m|$ ifadesini ε'dan küçük yapmak yerine,

$$|x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m|$$

ifadesini ε'dan küçük yapmaya çalışabiliriz. Bunun için,

$$|x_n||y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m||y_m|$$

ifadelerinin her birini $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalışacağız. n ve m göstergeçlerini yeterince büyük seçerek $|y_n - y_m|$ ve $|x_n - x_m|$ terimlerini dilediğimiz kadar küçültebileceğimizi biliyoruz. Ama bu ifadelere, tehlikeli olabilecek $|x_n|$ ve $|y_m|$ ifadeleri yapışmış. Eğer bu ifadeler çok büyürse, $\varepsilon/2$'den küçük yapmaya çalıştığımız

$$|x_n||y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m||y_m|$$

ifadeleri küçülemeyebilir. Ama neyse ki Teorem 22.2'de temel dizilerin sınırlı olduklarını kanıtlamıştık. Demek ki, öyle A ve B sayıları vardır ki, her n için,

$$|x_n| < A \text{ ve } |y_n| < B$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece,

$$|x_n||y_n - y_m| < A|y_n - y_m|$$

ve

$$|x_n - x_m||y_m| < B|x_n - x_m|$$

eşitsizliklerini buluruz. Şimdi

$$A|y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m|B$$

ifadelerini $\varepsilon/2$'den küçük yapmalıyız, yani

$$|y_n - y_m| \text{ ve } |x_n - x_m|$$

ifadelerini sırasıyla $\varepsilon/2A$ ve $\varepsilon/2B$ sayılarından küçük yapmalıyız, ki bu da o kadar zor değil. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ temel dizi olduklarından, öyle N_1 ve N_2 göstergeçleri vardır ki, her n, $m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$$

ve her n, $m > N_2$ için,

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

olur. Böylece $N = \max\{N_1, N_2\}$ alırsak kanıt biter ama yaptıklarımızı toparlamakta yarar var:

Kısa Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, Teorem 22.2'ye göre sınırlıdır, yani öyle bir A sayısı vardır ki, her n için,

$$|x_n| < A$$

eşitsizliği geçerlidir. Aynı nedenden, öyle bir B sayısı vardır ki, her n için,

$$|y_n| < B$$

eşitsizliği geçerlidir. $(x_n)_n$ temel dizi olduğundan, öyle bir N_1 göstergeci vardır ki, her n, $m > N_1$ için,

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2B}$$

olur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, her

$$n, m > N_2$$

için,

$$|y_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Şimdi, her n, $m > N$ için,

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - x_m y_m| &= |(x_n y_n - x_n y_m) + (x_n y_m - x_m y_m)| \\
&\le |x_n y_n - x_n y_m| + |x_n y_m - x_m y_m| \\
&= |x_n||y_n - y_m| + |x_n - x_m||y_m| \\
&< A|y_n - y_m| + B|x_n - x_m| \\
&< A\left(\frac{\varepsilon}{2A}\right) + B\left(\frac{\varepsilon}{2B}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Sonuç 22.6. *$\mathcal{C}$ bir halkadır.* □

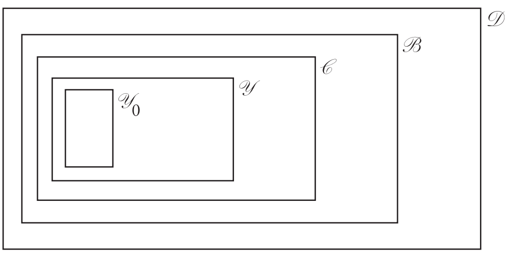
Sonuç 22.7. *$\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{C}$'nin bir idealidir. Yani*
- **i.** $\emptyset \neq \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{C}$,
- **ii.** $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$,
- **iii.** $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$.

Kanıt: (1) bariz. (2), Teorem 19.2'den çıkar. (3), Teorem 19.4'ten çıkar:

$$\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}.$$

Demek ki, Önsav 19.7'ye göre, $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{B}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$. □

Durumu bir şemayla özetleyelim:



$\mathscr{Y}_0 \lhd \mathscr{Y} \le \mathscr{C} \le \mathscr{B} \le \mathscr{D}$
$\mathscr{D}$: Tüm diziler halkası
$\mathscr{B}$: Sınırlı diziler halkası
$\mathscr{C}$: Temel diziler halkası
$\mathscr{Y}$: Yakınsak diziler halkası
$\mathscr{Y}_0$: 0'a yakınsayan diziler ($\mathscr{B}$'nin ideali)

Temel Dizilerde Bölme. $\mathcal{C}$ halkasının bölme altında "olabildiğince" kapalı olduğunu kanıtlayalım son olarak. Önce üç hazırlık sonucuna ihtiyacımız olacak.

Önsav 22.8. *Eğer $(x_n)_n \in \mathcal{C}(R)$ ise $(|x_n|)_n \in \mathcal{C}(R)$.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$ herhangi eleman olsun.

$$\big||x_n| - |x_m|\big| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için doğru olduğu bir N arıyoruz. Varsayıma göre,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her n, $m > N$ için doğru olduğu bir N doğal sayısı var. Böyle bir N doğal sayısı alalım. Şimdi $\big||x| - |y|\big| < |x - y|$ eşitsizliğinden, her n, $m > N$ için

$$\big||x_n| - |x_m|\big| < |x_n - x_m| < \varepsilon$$

çıkar ve önsav kanıtlanır. □

Şimdi sonuçlarına katlanmak zorunda kalacağımız tuhaf bir önerme sunalım:

Önsav 22.9. *$(x_n)_n$ bir temel dizi ve $a \in R$ olsun. Eğer*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < a\} \text{ ve } \{n \in \mathbb{N} : x_n > a\}$$

kümeleri sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsar.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq a - \varepsilon\}$ kümesi sonsuzsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisinin terimlerinin arası hiçbir zaman sürekli ε'dan küçük olamaz ve bu da dizinin temelliğiyle çelişir. Demek ki, belli bir N_1 göstergeci için, eğer $n > N_1$ ise, $x_n > a - \varepsilon$. Benzer nedenden, belli bir N_2 göstergeci için, eğer $n > N_2$ ise, $x_n < a + \varepsilon$. Demek ki $n > \max\{N_1, N_2\}$ için, $|x_n - a| < \varepsilon$. □

Sonuç 22.10. i. *Eğer $(x_n)_n$ bir temel diziyse ve 0'a yakınsamıyorsa, öyle bir N doğal sayısı ve $\delta > 0$ vardır ki, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ olur.*
ii. *Eğer $(x_n)_n$ temel dizisi 0'a yakınsamıyorsa ve her terimi 0'dan değişikse, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki, her n için, $|x_n| > \delta_1$ olur.*

Kanıt: Önsav 22.8'e göre, $(x_n)_n$ dizisi yerine $(|x_n|)_n$ dizisini alarak, her n belirteci için $x_n \geq 0$ varsayımını yapabiliriz.

Dizi 0'a yakınsamadığından, öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n > \varepsilon\}$$

kümesi sonsuzdur. Eğer sonucumuz yanlış olsaydı,

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n < \varepsilon\}$$

kümesi de sonsuz olurdu; ama bir önceki önsava göre, o zaman dizinin limiti ε olmak zorundadır ve bu durumda $\delta = \varepsilon/2$ elemanı ilk önermeyi doğrular. (Neden?) İkinci kısım için

$$\delta_1 = \min\{|x_0|/2, \ldots, |x_{N-1}|/2, \delta\} > 0$$

alalım. □

Alıştırmalar

22.1. Artan ve üstten sınırlı bir dizinin temel olduğunu kanıtlayın.

22.2. Kanıtlayın: Eğer $(x_n)_n$ bir temel diziyse ve 0'a yakınsamıyorsa, öyle bir N doğal sayısı ve $\delta > 0$ vardır ki, her $n > N$ için, $|x_n| > \delta$ olur.

22.3. $\mathcal{C}$ halkasının tersinir elemanlarını bulun.

22.4. Kanıtlayın: Eğer $(x_n)_n \in \mathcal{C}$ ise $(|x_n|)_n \in \mathcal{C}$.

Şimdi $\mathcal{C}$'de ne zaman bölme yapılabileceğini, yani $(x_n)_n \in \mathcal{C}$ ise, $(1/x_n)_n$ dizisinin ne zaman $\mathcal{C}$'de olduğunu bulabiliriz. Her şeyden önce hiçbir x_n teriminin 0 olmaması gerekiyor, ki bu terimlerin tersini alabilelim. Ama bu yetmez, ayrıca bir de $(x_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olmaması gerekir.

Teorem 22.11. *$(x_n)_n \in \mathcal{C}$ ise ve her x_n terimi 0'dan farklı ise ve $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de $\mathcal{C}$'dedir. Bir başka deyişle, $\mathcal{C}$'nin tersinir elemanları kümesi,*

$$\mathcal{C}^* = \{(x_n)_n \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Y}_0 : \textit{her } n \textit{ için } x_n \neq 0\}$$

olur.

Kanıt: $\varepsilon > 0$ verilmiş bir eleman olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her

$$n, m > N$$

için,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| < \varepsilon$$

olacak. $|1/x_n - 1/x_m|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|}$$

Sağdaki ifadeyi çok küçük (yani ε'dan küçük) yapmak istiyoruz. Payda bulunan $|x_n - x_m|$ ifadesini dilediğimiz kadar küçük yapabileceğimizi biliyoruz. Bu iyiye işaret. Ancak eğer paydada bulunan $|x_n||x_m|$ ifadesi de çok küçülürse, o zaman

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} < \frac{|x_n - x_m|}{\delta^2}$$

ifadesini çok küçük yapamayız. Demek ki $|x_n|$ elemanlarının çok küçülemeyeceğini göstermeliyiz. Ama bu tam tamına Sonuç 28.2... Bu sonuca göre öyle bir $\delta > 0$ elemanı vardır ki, her n için $|x_n| > \delta$'dır. O zaman,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_n||x_m|} < \frac{|x_n - x_m|}{\delta^2} < \varepsilon$$

elde ederiz. En sağdaki terimi ε'dan küçük yapmak istiyoruz. Bundan daha kolay bir şey yok: Eğer n, m'yi yeterince büyük alırsak, diyelim N'den büyük, o zaman, $|x_n - x_m| < \varepsilon\delta^2$ olur ve böylece $n, m > N$ için, buluruz. □

Alıştırmalar

22.5. Eğer $(x_n)_n$ dizisi temel bir diziyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin de temel bir dizi olduğunu kanıtlayın.

23. Altdiziler

Herhangi bir kesirli sayı dizisi ele alalım:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

ve bu dizinin içinden göstergeci çift olan terimleri seçelim:

$$x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots$$

Bu ikinci dizi, birincisinin altdizisidir. Bir başka altdizi, göstergeci asal olan terimlerden seçilebilir:

$$x_2, x_3, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

Ya da dizinin ilk birkaç terimini silip ilk dizinin bir başka altdizisini elde edebiliriz:

$$x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$$

Öte yandan,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

dizisi yukardaki ilk dizinin bir altdizisi olmayabilir, çünkü göstergeçler artan bir biçimde seçilmemiş, ilk iki terimde terslik var.

$$x_3, x_3, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

de bir altdizi olmayabilir.

Tanımı hissettirdikten sonra matematikselleşelim. Bir $(x_n)_n$ dizisi ve sürekli artan, yani her k için $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi verilmiş olsun. O zaman, $(x_{n_k})_k$ dizisine $(x_n)_n$ dizisinin ***altdizisi*** adı verilir. Tanımı şöyle de verebiliriz: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mutlak artan bir fonksiyon olsun. $(x_{f(n)})_n$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisidir.

Eğer $y_k = x_{n_k}$ tanımını yaparsak, $(x_{n_k})_k = (y_k)_k$ olur ve böylece alışık olduğumuz $(y_k)_k$ yazılımına kavuşuruz.

Bir başka deyişle, bir altdizi, bir

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$$

dizisinden bazı terimlerin atılmasıyla elde edilen bir dizidir. Örneğin, yukardaki diziden bazı terimleri silerek

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$$

altdizisini, yani $x_1, x_2, x_4, x_6, \ldots$ altdizisini elde ederiz.

Eğer şansımız yaver gider de, $x_3 = x_0$ ya da $x_3 = x_1$ olursa, o zaman,

$$x_3, x_2, x_5, x_7, x_{11}, \ldots$$

dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi olur, yoksa olmaz.

Altdizilerde sık sık kanıtı çok basit olan (k üzerine tümevarım) şu olgu kullanılır: Sürekli artan bir $(n_k)_k$ doğal sayı dizisi için, $k \leq n_k$. İlk teoremimizde bunu kullanacağız.

Teorem 23.1. *Temel bir dizinin her altdizisi temeldir.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir temel dizi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. Öyle bir N var ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Şimdi eğer k, $\ell > N$ ise $N < k \leq n_k$ ve $N < \ell \leq n_\ell$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - x_{n_\ell}| < \varepsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Teorem 23.2. *Yakınsak bir dizinin altdizisi de yakınsaktır ve iki dizi aynı limite yakınsarlar.*

Kanıt: $(x_n)_n$, bir a sayısına yakınsayan bir dizi olsun, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin bir altdizisi olsun. $\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. Öyle bir N var ki, her $n > N$ için,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Şimdi eğer $k > N$ ise $N < k \leq n_k$ olduğundan,

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

olur. Bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Teorem 23.3. *Temel bir dizinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar. Dolayısıyla* 0*'a yakınsamayan bir dizinin ancak sonlu sayıda terimi* 0 *olabilir.*

Kanıt: Bunun kanıtı biraz daha zor.

$(x_n)_n$, bir temel dizi, $(x_{n_k})_k$ dizisi de bu dizinin yakınsak bir altdizisi olsun, diyelim a'ya yakınsasın. $(x_n)_n$ dizisinin de a'ya yakınsadığını kanıtlayacağız.

$\varepsilon > 0$ herhangi bir (kesirli) sayı olsun. $|x_n - a|$ sayısının bir zaman sonra, yani belli bir göstergeçten sonra ε'dan küçük olduğunu kanıtlayacağız. Her zaman yaptığımız gibi,

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

eşitsizliğinin doğru olması için n'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Bunun için, bir defa daha soldaki $|x_n - a|$ ifadesiyle oynayıp, bu ifadeyi bildiğimiz küçük ifadeler cinsinden üstten sınırlayacağız. k herhangi bir doğal sayı olsun. Üçgen eşitsizliğinden,

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$$

elde ederiz. En alttaki

$$|x_n - x_{n_k}| \text{ ve } |x_{n_k} - a|$$

ifadelerinin her birini küçültmeye çalışmalıyız. Birinci ifade $(x_n)_n$ bir temel dizi olduğundan, ikinci ifade ise $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından küçülür. Ayrıntılar önemli, ayrıntıları yazalım. Her iki ifadeyi de $\varepsilon/2$'den küçük yapacağız.

Birinci ifadeden başlayalım. $(x_n)_n$ bir temel dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ olur. Demek ki eğer $k > N$ ise, $n_k \geq k > N$ olur ve

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon/2$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci ifadeye gelelim. $(x_{n_k})_k$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $k > N_1$ için,

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$$

olur. Şimdi k, hem N'den hem de N_1'den büyük herhangi bir sabit göstergeç olsun. Her $n > N$ için,

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde ederiz. □

Alıştırmalar

23.1. Her altdizisinin dizinin kendisine eşit olduğu diziler hangi dizilerdir?

23.2. Sadece iki altdizisi olan tüm dizileri bulun.

23.3. Tüm kesirli sayıları içeren bir dizi var mıdır?

23.4. Her diziyi altdizi olarak barındıran bir dizi var mıdır?

23.5. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b sayılarına yakınsasın. Bu iki diziyi şu yöntemle karalım: A ve B, $\mathbb{N}$'nin $\mathbb{N} = A \cup B$ eşitliğini sağlayan iki ayrık ve sonsuz altkümesi olsun.

$$f : A \to \mathbb{N} \text{ ve } g : B \to \mathbb{N}$$

iki artan eşleme olsun. (f ve g biriciktirler.)

$$z_n = \begin{cases} x_{f(n)} & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \\ y_{g(n)} & \text{eğer } n \in B \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Böylece $(z_n)_n$ dizisini elde ederiz. Örneğin,

$$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, \ldots$$

bu yöntemle elde edilmiş bir dizidir ve burada

$$A = 2\mathbb{N}, B = 2\mathbb{N} + 1$$

alınmıştır. $(z_n)_n$ dizisinin yakınsak olması için $a = b$ eşitliğinin gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

Monoton Diziler ve Altdiziler. X sıralı bir küme olsun. $(x_n)_n$ bir dizi olsun. Eğer her $n \leq m$ için $x_n \leq x_m$ oluyorsa, diziye ***artan*** adı verilir. Eğer her $n < m$ için $x_n < x_m$ oluyorsa, diziye ***mutlak artan*** adı verilir. Azalan ve mutlak azalan diziler benzer biçimde tanımlanır. Sabit diziler hem artan hem de azalan dizilerdir ve sadece sabit diziler hem artan hem de azalandır.

Artan ya da azalan dizilere ***monoton dizi*** denir.

Teorem 23.4. *Tamsıralı bir kümenin her dizisinin monoton bir altdizisi vardır.*

Kanıt: $(a_n)_n$, terimleri herhangi olan bir tamsıralı kümede herhangi bir dizi olsun. Eğer bir n göstergeci için, $a_n \leq a_m$ eşitsizliği n'den büyük her m göstergeci için sağlanıyorsa, n'ye, bu kanıtlık, "iyi göstergeç" diyelim. Eğer sonsuz tane iyi göstergeç varsa azalmayan bir altdizi seçmek kolaydır: $(a_k)_{k\text{iyi}}$ artan bir altdizidir. Eğer sonlu tane iyi göstergeç varsa ve N bu göstergeçlerin sonuncusuysa, her $n > N$ için, $a_n > a_m$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $m > n$ vardır. Bu durumda da azalan (dolayısıyla artmayan) bir altdizi kolaylıkla bulunur. □

24. Onluk Tabanda Kesirli Sayılar (2)

Bu bölümde 0,99999... ifadesinin matematiksel olarak ne demek olduğunu göreceğiz. İfadenin anlamını öğrendiğimizde, genellikle şaşkınlıkla karşılanan ve kuşku duyulan

$$0{,}99999\ldots = 1$$

eşitliğini matematiksel olarak kanıtlayabileceğiz.

0,99999... yerine daha tuhaf bir ifade ele alalım. Diyelim,

$$0{,}864269623810856\ldots$$

ifadesini ele aldık. Rakamların virgülden sonra nasıl devam ettiklerini bilmiyoruz. Ama bir biçimde devam ediyorlar. Bunun yerine, rakamların nasıl devam ettiği bilinen

$$0{,}1234567891011121314\ldots$$

ifadesini de ele alabilirdik. Bu ifadeler ne demek olabilir? İşte bu konuyu irdeleyeceğiz bu bölümde.

Eğer birinci ifadeyi belli bir basamaktan sonra kesersek, elde edilen sonlu ifadenin ne demek olduğunu biliyoruz:

$$\begin{aligned}
0{,}8 &= 8 \times 10^{-1}\\
0{,}86 &= 8 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2}\\
0{,}864 &= 8 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}\\
0{,}8642 &= 8 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3} + 2 \times 10^{-4}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ama sonsuza dek uzanan 0,864269623810856... ifadesinin ne anlama geldiğini henüz bilmiyoruz.

Elimizde bir $(a_n)_{n>0}$ rakam dizisi olsun. Yani her $n > 0$ için, bir

$$a_n \in \{0, 1, \cdots, 9\}$$

rakamı olsun.

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 10^{-1}, \\
x_2 &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2}, \\
x_3 &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3}, \\
&\dots \\
x_n &= a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \dots + a_n 10^{-n}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

tanımlarını yapalım. Daha ekonomik bir yazılımla:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$

Böylece bir $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisi elde ederiz. Bu dizinin bir temel dizi olduğunu kanıtlayalım hemen.

Teorem 24.1. *Her $(a_n)_{n>0}$ rakam dizisi için, yukarda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisi temel bir dizidir.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$, herhangi bir sayı olsun. Öyle bir N bulacağız ki, her n, $m > N$ için, $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak. Her zamanki gibi $|x_n - x_m|$ ifadesinin ε'dan küçük olması için n ve m'nin ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulacağız.

$|x_n - x_m| = |x_m - x_n|$ olduğundan, $n \geq m$ eşitsizliğini varsayabiliriz.

Bundan böyle bu eşitsizliği varsayacağız. $|x_n - x_m|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= |\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i} - \sum_{i=1}^{m} a_i 10^{-i}| = |\sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i}| \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} a_i 10^{-i} \leq \sum_{i=m+1}^{n} 9.10^{-i} = 9. \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i} \\
&= 9.10^{-m-1} \sum_{i=m+1}^{n} 10^{-i+m+1} = 9.10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} 10^{-j} \\
&= 9.10^{-m-1} \sum_{j=0}^{n-m-1} (1/10)^j = 9.10^{-m-1} \frac{1-(1/10)^{n-m}}{1-(1/10)} \\
&= 9.10^{-m-1} \frac{1-(1/10)^{n-m}}{9/10} = 10^{-m}(1-(1/10)^{n-m}) \leq 10^{-m}.
\end{aligned}$$

Dördüncü satırdan beşinci satıra geçerken

$$j = i - m - 1$$

değişikliğini yaptık. Altıncı satırdan yedinci satıra geçerken, Bölüm **??**'de gri alanda kanıtlanan eşitliği $a = 1/10$ için kullandık. (Hesaptaki eşitsizliklerin her biri son derece ekonomiktir: Üçüncü satırdaki eşitsizlik zorunlu bir eşitsizliktir, çünkü a_i'lerin her biri bal gibi de 9 olabilirler. İkinci ve sonuncu eşitsizlik de zorunlu, çünkü m sabit kalıp n çok büyüdüğünde (sonsuza gittiğinde),

$$1 - (1/10)^{n-m}$$

sayısı 1'e kadar dayanır.)

Şimdi 10^{-m}'yi ε'dan küçük yapmamız gerektiğini anlıyoruz.

$$-1 < 10^{-1} < 1$$

olduğundan, Teorem 20.2'ye göre, öyle bir N vardır ki, her $m > N$ için,

$$10^{-m} < \varepsilon$$

olur. Aşağıdaki gri karede aynı şeyi Teorem 20.2'yi kullanmadan kanıtlıyoruz. □

xxx gri kare

Not: Yukarıdaki teoremde ve kanıtında 10'un hiçbir önemi yok, sabit herhangi bir $b > 1$ (kesirli ya da doğal) sayısı da alınabilirdi. Ayrıca a_i'ler de sınırlı herhangi bir sayı kümesinden seçilebilirdi. b'yi 10 almak gelenekten de öte bir alışkanlık hâline gelmiştir, muhtemelen iki elimizde on parmağımızın olmasından kaynaklanır ve artık kültürümüzün nerdeyse ayrılmaz bir parçasıdır. Bir de b'yi 2 almak özellikle çağımızda önem kazandı.

Şimdi, eğer $(a_n)_{n>0}$ dizisi ***zamanla devirleşiyorsa***, yani her

$$n > N$$

için,

$$a_{n+k} = a_n$$

eşitliğini sağlayan N ve $k > 0$ doğal sayıları varsa, o zaman yukarda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisinin bir limiti olduğunu kanıtlayalım.

Burada limitin kesirli bir sayı olduğunu söylemek istiyoruz. Gerçel sayıları tanımladığımızda, bu $(x_n)_{n>0}$ dizilerinin sadece zamanla devirleşen $(a_n)_{n>0}$ dizileri için değil, her $(a_n)_{n>0}$ dizisi için bir gerçel sayıya yakınsadığını kanıtlayacağız. Ancak şimdilik böyle bir önermeyi telaffuz bile edemeyiz. "Gerçel sayı" sözleri şimdilik bize yasak.

Notlar ve Örnekler

24.1.

$$3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 1,\ 4,\ \ldots$$

dizisi zamanla devirleşen bir dizidir. Bunu görmek için $N = 4$, $k = 3$ almak yeterli. ($k = 6$ da alabilirdik. $k = 3$ en küçük devirdir.)

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3.10^{-1} = 0{,}3,\\
x_2 &= 3.10^{-1} + 5.10^{-2} = 0{,}35,\\
x_3 &= 3.10^{-1} + 5.10^{-2} + 7.10^{-3} = 0{,}357,\\
x_4 &= 3.10^{-1} + 5.10^{-2} + 7.10^{-3} + 8.10^{-4} = 0{,}3578,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

örneği üzerinde $(x_n)_{n>0}$ dizisinin bir kesirli sayıya yakınsadığını gösterelim.
Diziyi ilkokuldan beri alışık olduğumuz biçimde ve göze daha hoş görünsünler diye bazı terimleri atlayarak yazarsak ne yapılması gerektiğini daha kolay görürüz:

$$\begin{aligned}
x_4 &= 0,3578,\\
x_7 &= 0,3578214,\\
x_{10} &= 0,3578214214,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

$(x_n)_{n>0}$ dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak yerine, Teorem 23.3'e göre, bu dizinin $(x_{4+3n})_n$ altdizisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak yeterli.
Biraz hesap yapalım:

$$\begin{aligned}
x_{4+3n} &= 0{,}3578 + \frac{214}{10^7} + \frac{214}{10^{10}} + \cdots + \frac{214}{10^{4+3n}}\\
&= 0{,}3578 + \frac{214}{10^7}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{3(n-1)}}\right)\\
&= 0{,}3578 + \frac{214}{10^7}\frac{1 - \frac{1}{10^{3n}}}{1 - \frac{1}{10^3}}\\
&= 0{,}3578 + \frac{214}{10^4}\frac{1 - \frac{1}{10^{3n}}}{999}.
\end{aligned}$$

Demek ki, n sonsuza giderken $(x_{4+3n})_n$ ya da $(x_n)_{n>0}$ dizisinin limiti,

$$0{,}3578 + \frac{214}{10^4}\frac{1}{999}$$

kesirli sayısıdır.

Aşağıdaki teorem aynen yukardaki örnekteki gibi kolaylıkla kanıtlanabilir. Biçimsel kanıtı meraklı okura bırakıyoruz.

Teorem 24.2. *Eğer $(a_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi bir zaman sonra devirleşiyorsa, o zaman yukarda tanımlanan $(x_n)_{n>0}$ kesirli sayı dizisinin $\mathbb{Q}$'de bir limiti vardır.*

Bundan böyle, yukarıdaki teoremde varlığı söylenen bu limiti

$$0{,}a_1a_2a_3a_4\cdots$$

olarak yazacağız:

$$0{,}a_1a_2a_3\cdots = \lim_{n\to\infty}(a_1 10^{-1} + \cdots + a_n 10^{-n}).$$

Eğer bir de ayrıca a_0 herhangi bir doğal sayıysa, yukardaki teorem,

$$(a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \cdots + a_n 10^{-n})_n$$

dizisinin yani

$$(a_0{,}a_1a_2\cdots a_n)_n$$

dizisinin bir limiti olduğunu söylüyor. Bu limiti bundan böyle

$$a_0{,}a_1a_2a_3a_4\cdots$$

olarak yazacağız. Ama dikkat, burada rakam olanlar sadece a_1, a_2, a_3, $a_4, \ldots$ katsayıları, a_0 bir rakam olmayabilir, a_0 bir doğal sayı. Öte yandan a_0'ın da rakamlarla ifade edilebileceğini gördük (Teorem 11.12). a_0'ı, $t_k\cdots t_1t_0$ olarak rakamlarla ifade edersek, her pozitif kesirli sayının, sonlu tane

$$t_0,\ t_1,\ \ldots,\ t_k$$

rakamı ve bir zaman sonra devirli olan

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

rakamları için,

$$t_k\ldots t_1t_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$$

biçiminde, yani, terimleri

$$x_n = t_k 10^k + \cdots + t_0 10^0 + a_1 10^{-1} + \cdots + a_n 10^{-n}$$

olan dizinin limiti olarak yazılabilir.

Şimdi artık $0{,}9999\ldots$ ifadesinin ne demek olduğunu biliyoruz: Bu ifade, yukardaki tanıma göre,

$$x_n = 9\cdot 10^{-1} + \cdots + 9\cdot 10^{-n}$$

dizisinin limitidir. Hemen bulalım bu limiti: eşitliğinin başının ve sonunun limitlerini alırsak,

$$0{,}99999\ldots = 1$$

buluruz. Nihayet! Bu yaşa değin merak ettiğimiz eşitliği kanıtladık...

Tabii aynı şekilde, örneğin,

$$253{,}782149999\ldots = 253{,}78215$$

eşitliği de geçerlidir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Teorem 24.3. *Her pozitif kesirli sayı, t_0, t_1, ..., t_k rakamları ve zamanla devirleşen bir $(a_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi için,*

$$t_k \ldots t_0{,}a_1a_2a_3a_4 \cdots$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $k > 0$ ise $t_k \neq 0$ alınabilir.

Peki, yukardaki $t_k \ldots t_0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$ yazılımı ne kadar biriciktir? Yani,

$$t_k, \ \ldots, \ t_0$$

ve s_ℓ, ..., s_0 rakamları ve zamanla devirleşen $(a_n)_{n>0}$ ve $(b_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi için,

$$t_k \ldots t_0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots = s_\ell \ldots s_0{,}b_1b_2b_3b_4 \cdots$$

ise, $k = \ell$ ve her i için $t_i = s_i$ ve $a_i = b_i$ olmalı mıdır?

Yukarda kanıtladığımız $0{,}99999 \ldots = 1$, daha doğrusu

$$0{,}99999 \ldots = 1{,}00000 \ldots$$

eşitliğinden $a_i = b_i$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını biliyoruz.

$$9{,}99999 \ldots = 10{,}00000 \ldots$$

eşitliğinden de $k = \ell$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını biliyoruz. Ayrıca bir de sayının soluna istediğimiz kadar 0 koyabileceğimizi biliyoruz. Ama bu istisnalar dışında yukardaki yazılım biriciktir. Yani a ve s doğal sayıları için, $a/10^s$ biçiminde yazılamayan her kesirli sayı, $t_k \neq 0$ olmak üzere, tek bir biçimde

$$t_k \ldots t_0{,}a_1a_2a_3a_4 \ldots$$

olarak yazılabilir. $a/10^s$ biçiminde yazılan sayılar için ise iki değişik yazım biçim vardır: Biri hep 9'la diğeri hep 0'la biter... Konuyu daha fazla uzatmak istemediğimizden kanıtı es geçiyoruz.

Teorem 24.3'ün tersi de doğrudur. Bunun da kanıtını okura bırakıyoruz.

Teorem 24.4. *Eğer $(a_n)_{n>0}$ rakamlar dizisi bir zaman sonra devirleşmiyorsa, o zaman yukarda tanımlanan $(x_n)_n$ kesirli sayı dizisinin $\mathbb{Q}$'de limiti olamaz.*

Teorem 24.5. *Her k doğal sayısı için $10^k > k$ olur.*

Kanıt: k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $k = 0$ için,

$$k = 0 < 1 = 10^0 = 10^k.$$

Bir de $k = 1$ için kanıtlayalım: $k = 1 < 10 = 10^1 = 10^k$. Şimdi $k \geq 1$ olsun ve eşitsizliğin k için geçerli olduğunu varsayalım. O zaman,

$$10^{k+1} = 10 \times 10^k > 10k \geq k + 1.$$

(Son eşitsizlik, kanıtın başında teoremi neden $k = 0$ ve $k = 1$ için kanıtladığımızı göstermektedir.

Sonuç 24.6. *$\varepsilon > 0$ hangi (kesirli) sayı olursa olsun öyle bir N doğal sayısı vardır ki, her $n > N$ için, $10^{-n} < \varepsilon$.*

Kanıt: N, $1/\varepsilon$'dan büyük bir doğal sayı olsun (Arşimet Özelliği, Teorem 11.11). O zaman, $10^N > N > 1/\varepsilon$, yani $10^{-N} < \varepsilon$. Her $n > N$ için,

$$10^{-n} < 10^{-N} < \varepsilon$$

olur.

Kısım V

Gerçel Sayılar

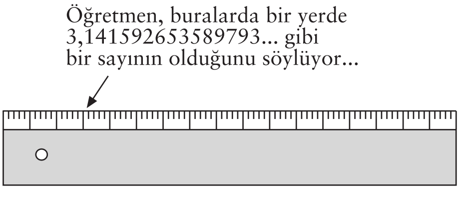
25. Gerçel Sayılar Kümesi

Nihayet gerçel sayıları tanımlayacağız. Bir sonraki bölümde gerçel sayılar üzerine dört işlemi ve sıralamayı tanımlayıp bunların özelliklerini irdeleyeceğiz.

Gerçel sayıların ne olduklarını sezgisel olarak hissediyoruz. Ayrıca ta ilkokuldan beri,

$$3,141592653589793\ldots$$

gibi sonsuza dek uzanan bir ifadenin bir gerçel sayı olduğu öğretilmiştir bize. Biz de bunu sorgulamadan kabul etmişizdir. Hatta belki de öğretmen, bu sayının, "birim uzunluğu verilmiş bir sayı doğrusunun üstünde bir uzunluğa eş düştüğünü" söylemiş bile olabilir... Bu uzunluğun hangi noktalar arasındaki mesafe olduğunu göstermeden, daha doğrusu gösteremeden...



Öğretmenin dediğine göre, 0'dan

$$3{,}141592653589793\ldots\text{cm}$$

ötede fiziksel bir nokta varmış... Öğretmen dediğine göre öyle bir nokta olmalı... Kitaplar da öyle diyor galiba... Bunca öğretmen, bunca kitap yalan mı söyleyecek?

Yalan değil ama yanlış... Cetvel üzerinde gerçekten öyle bir fiziksel noktanın olup olmadığını hiçbir zaman bilemeyiz. Parçalanamayacak parçacıklar olduğuna göre muhtemelen de öyle bir nokta yoktur. Ayrıca fiziksel nokta diye bir şeyin de ne olduğu bilinmemektedir...

Gerçel sayının (ne olduğunu değil, bu sorunun anlamı bile olamaz!) ne olması gerektiğini işte bu bölümde öğreneceğiz.

Önce, daha sonra terkedeceğimiz bir "gerçel sayı tanımlama" yöntemini açıklayalım.

Geçen bölümde

$$3,14159215921592\ldots$$

gibi bir zaman sonra devirleşen bir ifadeye anlam vermiştik. Bu ifadeyi tam tamına, terimleri

$$x_n = 3 + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$$

olarak tanımlanan dizinin limiti olarak tanımlamıştık. Burada $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 2$, $a_7 = 1$, ... olur. Bölüm 24'da,

$$3{,}141592653589793\ldots$$

gibi sonsuza dek uzanan ve hiçbir zaman devirleşmeyen bir ifadeyi tanımlamamışsak da, terimleri

$$x_n = 3 + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}$$

olarak tanımlanan dizinin temel dizi olduğu kanıtlanmıştık. Burada $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 2$, $a_7 = 6$, ... olur. (Yukarıdakinden değişik...)

Gerçel sayıları yukardaki temel diziler olarak tanımlayabiliriz. Bir a doğal sayısı ve bir zaman sonra sürekli 9 olmayan bir $(a_n)_n$ rakam dizisi için,

$$\left(a + \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}\right)_n$$

temel dizisini pozitif bir gerçel sayı olarak tanımlayabiliriz. (Bir zaman sonra sürekli 9 olan sayıları da kabul edersek, o zaman bu sayının başka türlü yazılan bir sayıya eşit olduğunu söylemek zorunda kalırız ve tanım zorlaşır.) Ardından, bu gerçel sayının da

$$a, a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$$

olarak yazıldığını da söyleyebiliriz. Eğer zamanla devirleşen $(a_n)_n$ rakam dizilerinden elde edilen gerçel sayıları (yani temel dizileri), dizinin limiti olan kesirli sayıyla özdeşleştirirsek, her kesirli sayıyı bir gerçel sayı olarak görebiliriz. Sonra negatif gerçel sayılar bir biçimde tanımlanabilir. (İkinci kısımda $\mathbb{N}$'den hareketle $\mathbb{Z}$'yi tanımladığımız gibi.) Ardından gerçel sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme tanımlamak gerekir... Kolay iş olmasa da bunlar yapılabilir.

Tüm bunlar matematiksel olarak son derece geçerlidir. Ancak biz böyle yapmayacağız. Çünkü bu yöntem 10 tabanını ön plana çıkarır ve 10'a haketmediği bir yer verir. Ayrıca bu yöntemle toplama çarpma gibi işlemleri tanımlamak oldukça meşakkatlidir. Biraz daha kuramsal ve soyut olacağız ama işlemler çok daha rahat ve şık tanımlanacak.

Her gerçel sayının kesirli bir temel dizinin limiti olduğunu artık hissetmiş olmalıyız. (Yoksa hissizsiniz demektir!) Buradan hareketle bir gerçel sayıyı kesirli bir temel dizi olarak tanımlamaya kalkışabiliriz. Ama aynı gerçel sayıya yakınsayan birçok temel dizi olabilir. Örneğin,

$$3, 3{,}1, 3{,}14, 3{,}141, 3{,}1415, 3{,}14159, 3{,}141592, \ldots$$

artan temel dizisiyle,

$$4, 3{,}2, 3{,}15, 3{,}142, 3{,}1416, 3{,}14160, 3{,}141593, \ldots$$

temel azalan dizisi aynı gerçel sayıya (henüz olmayan π'ye sanki!) yakınsarlar. Demek ki her temel diziyi bir gerçel sayı olarak tanımlarsak, aynı gerçel sayıdan binlerce olur!

Bu iki temel diziyi aynı gerçel sayı olarak tanımlamak lazım. Bunu yapmanın yöntemini biliyoruz, geçmişte gördük. Eşit gerçel sayıları simgelemesi gereken, yani gelecekte (gerçel sayılar tanımlandıklarında) aynı gerçel sayıya yakınsayacak olan iki temel dizi eşit değil de ***denk*** olsun...

Anımsarsanız temel diziler kümesini $\mathcal{C}$ harfiyle simgelemiştik. $\mathcal{C}$ kümesi üzerinde şöyle bir ikili ilişki tanımlamaya kalkışalım: $(x_n)_n$, $(y_n)_n \in \mathcal{C}$için,

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Güzel bir deneme... Ancak başarısız, çünkü

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

diye bir sayı (limit) henüz olmayabilir. (Gerçel sayıları daha tanımlamadığımızı anımsayın. Tüm derdimiz de bu sayıları var etmek zaten.) Örneğin yukarda örnek olarak verdiğimiz dizinin limiti yoktur çünkü π kesirli bir sayı değildir.

İlerde, gerçel sayılar tanımlandığında, aynı anlama gelecek bir başka tanım bulmalıyız.

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \ ?$$

Soru işareti yerine şu anki matematiksel bilgimizle ifade edebileceğimiz bir koşul bulmalıyız ve bu koşul, ilerde anlamı olacak olan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğiyle aynı anlamda olmalı. Ama bu çok basit... Yukardaki

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliği yerine,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

yazalım... Bu ifade, ilerde, $\lim_{n\to\infty} x_n$ ya da $\lim_{n\to\infty} y_n$ olduğunda dilediğimiz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğiyle aynı anlamda olacak. Zaten öyle hissetmiyor muyuz?

Artık resmi tanımı verebiliriz: $(x_n)_n$, $(y_n)_n \in \mathcal{C}$ temel dizileri için, $\equiv$ ikili ilişkisini

$$(x_n)_n \equiv (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

olarak tanımlayalım. Bir başka deyişle, $\equiv$ ikili ilişkisi, x, $y \in \mathcal{C}$ temel dizileri için,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{Y}_0$$

olarak tanımlansın. Bu arada, $\mathcal{Y}_0$'ın Bölüm 19.6'da 0'a yakınsayan kesirli sayı dizileri kümesi olarak tanımlandığını da anımsayalım.

Şimdi bu ikili ilişkinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 25.1. *Yukarda tanımlanan $\equiv$ ikili ilişkisi bir denklik ilişkisidir. Yani her x, $y \in \mathcal{C}$ temel dizisi için,*
i. *$x \equiv x$,*
ii. *$x \equiv y$ ise $y \equiv x$,*
iii. *$x \equiv y$ ve $y \equiv z$ ise $x \equiv z$.*

Kanıt: Kanıtımızda $\mathcal{Y}_0$'ın $\mathcal{C}$ halkasının bir ideali olduğunu, yani Sonuç 22.7'de kanıtlanan,
a. $s(0) \in \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{C}$,
b. $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$,
c. $\mathcal{C}\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_0$
olgularını kullanacağız. ($s(0)$, sabit 0 dizisidir.) Bu da ideal kavramının önemini gösterir... diyeceğiz ama bu kanıtta (c)'nin hiç önemi olmayacak. (c) ilerde önem kazanacak. (i), doğrudan (a) özelliğinden çıkar.

(ii)'yi kanıtlayalım. Varsayıma göre $x - y \in \mathcal{Y}_0$. demek ki, (a) ve (b)'ye göre,

$$y - x = s(0) - (x - y) \in \mathcal{Y}_0,$$

yani $y \equiv x$.

Gelelim (iii)'ün kanıtına... Varsayıma göre,

$$x - y \in \mathcal{Y}_0 \text{ ve } y - z \in \mathcal{Y}_0.$$

(b)'den dolayı, $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{Y}_0$, yani $x \equiv z$. □

Her $a \in \mathcal{C}$ temel dizisi için,

$$[a] = \{x \in C : a \equiv x\}$$

olsun. $\mathcal{C}$'nin bu altkümesine a'nın sınıfı denir.

$\mathcal{C}/\mathcal{Y}_0$ ya da eski yazılımla $\mathcal{C}/\equiv$, sınıfların kümesi olsun:

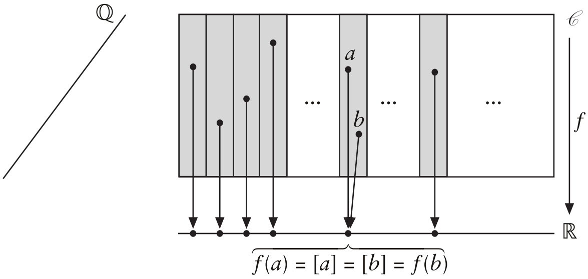
$$\mathcal{C}/\mathcal{Y}_0 = \mathcal{C}/\equiv = \{[a] : a \in \mathcal{C}\}$$

olsun. Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi işte bu küme olarak tanımlayacağız:

$$\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{Y}_0 = \mathcal{C}/\equiv = \{[a] : a \in \mathcal{C}\}.$$

Bir sonraki bölümde gerçel sayılarda dört işlemi ve sıralamayı tanımlayacağız. Bir de ayrıyeten kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{R}$'nin içine gömeceğiz.

$\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ şimdilik ayrık kümeler. Resim aşağıda.



C, *kesirli temel dizilerden oluşan küme.*
$\mathbb{R}$ *ise* **C** *'nin denklik sınıflarından oluşan küme.*

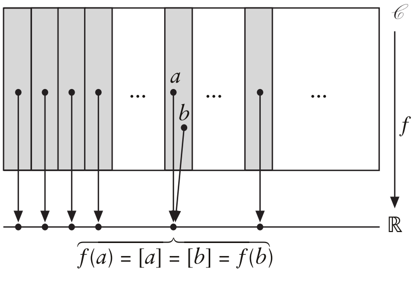
$\mathcal{C}$'nin içindeki gri kutular denklik sınıflarını temsil ediyor. Bu denklik sınıflarının her biri $\mathbb{R}$'nin bir elemanı, yani bir gerçel sayı. Bir sonraki bölümde sözünü edeceğimiz f fonksiyonu da $\mathcal{C}$'nin her elemanını o elemanının sınıfına götüren fonksiyon.

26. Gerçel Sayılarda Dört İşlem

Bir $a \in \mathcal{C}$ temel dizisini (tüm diziler $\mathbb{Q}$-dizileridir) $[a]$ gerçel sayısına götüren $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım:

$$f(a) = [a].$$

Bu fonksiyon elbette örtendir. İşte resmi:



f fonksiyonunu kullanarak, eskiden $\mathcal{C}$ üzerine tanımladığımız toplama, çarpma, çıkarma ve bölme işlemlerinin benzerlerini $\mathbb{R}$ üzerine tanımlayacağız. Yapacağımız iş özetle şu: Diyelim $\mathbb{R}$ üzerine toplamayı tanımlamak istiyoruz. $\mathbb{R}$'den toplamak istediğimiz iki eleman alalım, bu elemanlara r ve s diyelim. Elemanların $\mathcal{C}$'de birer f-önimgesini bulalım ve sırayla onlara a ve b diyelim. Demek ki

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s.$$

Şimdi a ve b temel dizilerini $\mathcal{C}$'de toplayıp $a + b$ temel dizisini elde edebiliriz. Ve son olarak bu toplamın f imgesini alıp

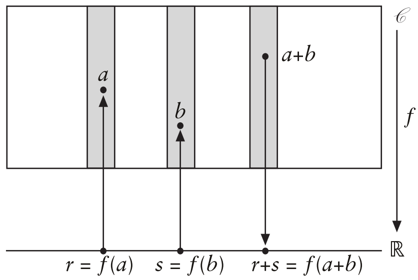
$$f(a + b) \in \mathbb{R}$$

elemanını bulabiliriz. $r + s$ toplamını,

$$r + s = f(a + b)$$

olarak tanımlamayı öneriyoruz, çünkü ne de olsa $a + b$ dizisi de $\mathcal{C}$'de.

ℝ'den **C** 'ye çık, topla ve tekrar ℝ'ye in:

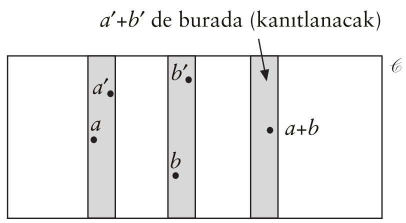


ℝ'de toplamanın tanımı:
1) $r, s \in$ ℝ verilmiş olsun.
2) $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitliğini sağlayan $a, b \in$ **C** dizilerini bul.
3) $r + s$'yi $f(a + b)$ olarak tanımla.

Ancak, r ve s gerçel sayıları verildiğinde,

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s$$

eşitliklerini sağlayan birden çok a ve b vardır; tanımın geçerli olması için bu eşitliği sağlayan tüm a ve b'lerin aynı $f(a+b)$ sonucunu verdiğini kanıtlamalıyız. Bunu kanıtlayacağız.



Çarpmayı da benzer yöntemle tanımlayacağız. Her halkada olduğu gibi çıkarma toplama tarafından, bölme de çarpma tarafından belirlenecek. ℝ'de sıralamayı tanımlamak, çok değil, birazcık daha zordur. Ardından, tanımlanan bu işlemlerin ve sıralamanın tahmin edilen özellikleri sağladığını ve sonuçta sıralı bir cisim (Bölüm 11.4 ve 12.5) bulduğumuzu ve bu sıralı cisimde ℚ'nün kusurlarının (Bölüm 15) olmadığını kanıtlayacağız.

Toplama. Yukarda gördüğümüz gibi, ℝ'de toplamanın önerdiğimiz tanımının geçerli olması için şu önsav kanıtlanmalı:

Önsav 26.1. *$a, b, a', b' \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ ise*

$$[a + b] = [a' + b']$$

eşitliği doğrudur.

Kanıt: Varsayıma göre $a - a' \in \mathcal{Y}_0$ ve $b - b' \in \mathcal{Y}_0$. Dolayısıyla,

$$(a+b) - (a'+b') = (a-a') + (b-b') \in \mathcal{Y}_0$$

dir, yani $[a+b] = [a'+b']$ eşitliği doğrudur. □

Şimdi artık, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayıları için,

$$[a] + [b] = [a+b]$$

tanımını huzur içinde yapabiliriz, çünkü bu tanım, $\mathcal{C}$'de seçilen a ve b'ye göre değil, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayılarına göre değişmektedir. Eğer bu önsav doğru olmasaydı,

$$[a] = [a'] \text{ ve } [b] = [b']$$

eşitlikleri doğru olmasına karşın,

$$[a] + [b] = [a'] + [b']$$

eşitliği doğru olmayabilirdi ve o zaman da toplama işleminin tanımı geçerli olmazdı. Toplamayı tanımladıktan sonra toplamanın özelliklerine gelelim.

Önsav 26.2. $(\mathbb{R}, +, [s(0)])$ *değişmeli bir gruptur, yani,*
T1. *Her* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r+s)+t = r+(s+t)$.
T2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + [s(0)] = [s(0)] + r = r$.
T3. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + s = s + r = [s(0)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R}$ *vardır.*
T4. *Her* $r, s \in \mathbb{R}$ *için* $r + s = s + r$.

Kanıt: $\mathbb{R}$'deki bu eşitlikleri kanıtlamak için f fonksiyonunu kullanıp $\mathcal{C}$'ye çıkacağız. Bu eşitliklerin $\mathcal{C}$'de de geçerli olduğunu kullanıp tekrar f ile $\mathbb{R}$'ye ineceğiz.
T1. $a, b, c \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$, $s = [b]$, $t = [c]$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}(r+s)+t &= ([a]+[b])+[c] = [a+b]+[c]\\ &= [(a+b)+c] = [a+(b+c)]\\ &= [a]+[b+c] = [a]+([b]+[c]) = r+(s+t).\end{aligned}$$

T2. $a \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun. O zaman,

$$r + [s(0)] = [a] + [s(0)] = [a + s(0)] = [a] = r.$$

$[s(0)] + r = r$ eşitliği benzer biçimde kanıtlanır.
T3. $a \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun. Eğer $a = (a_n)_n$ ise,

$$b = -a = (-a_n)_n \in \mathcal{C} \text{ ve } s = [b]$$

olsun. İstenen $r+s = s+r = [s(0)]$ eşitliğinin sağlandığını sınamak zor değildir.
T4. $a, b \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$, $s = [b]$ olsun. O zaman,

$$r + s = [a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a] = s + r$$

olur. □

Önsav 2'nin Ardından:
a. $T1$'e göre gerçel sayıları toplarken parantez kullanmaya gerek yoktur, örneğin, $(r + s) + t$ yerine $r + s + t$ ve $(r + s) + (t + u)$ yerine $r + s + t + u$ yazabiliriz.
b. $\mathbb{R}$'de $T2$ özelliğini sağlayan bir ve tek bir eleman vardır (***toplamanın etkisiz elemanı*** denir bu elemana) ve bu eleman, $T2$'nin söylediği gibi $[s(0)]$ olur. Gelecekte $[s(0)]$ yerine 0 yazacağız ama şimdi değil. Öte yandan daha şimdiden $[s(0)]$ yerine $0_\mathbb{R}$ yazmak fena bir fikir değildir, öyle de yapacağız.
c. Eğer $r \in \mathbb{R}$ verilmişse, $T3$'teki $r + s = s + r = [s(0)] = 0_\mathbb{R}$ eşitliğini sağlayan bir ve tek bir $s \in \mathbb{R}$ vardır. Bu elemanı $-r$ olarak göstereceğiz. Kanıtta da görüldüğü üzere, $a \in \mathcal{C}$ için, $-[a] = [-a]$.
d. $\mathbb{R}$'de çıkarmayı iki değişik biçimde tanımlayabiliriz:

$$r - s = r + (-s)$$

olarak ya da $r = [a]$, $s = [b]$ için

$$r - s = [a - b]$$

olarak. İkisi de aynı kapıya çıkar ancak ikinci tanımın geçerli olması için Önsav 26.2'ye benzer bir sonucun kanıtlanması gerekmektedir. Benzer şekilde

$$-r - s \text{ ve } -r + s$$

işlemlerini de tanımlayabiliriz.

$$-(r - s) = -r + s = s - r$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak kolaydır.

Ama dikkat, toplarken paranteze gerek yoksa da çıkarırken parantezleri korumak gerekir. Aksi davranışın bırakın üniversiteye girişi, bale okuluna girişi bile engellediği bilinmektedir.
e. Her grupta olduğu gibi $\mathbb{R}$'de de sadeleştirme yapılabilir. Örneğin,

$$r + s = r + t$$

ise $s = t$ olur. Aynı şekilde $r + s = r$ ise $s = [s(0)] = 0_\mathbb{R}$ olur.
f. $[a] + [b] = [a + b]$ formülü, yani

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

formülü,

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun $(\mathcal{C}, +, s(0))$ grubundan $(\mathbb{R}, +, [s(0)])$ grubuna giden bir ***eşyapı fonksiyonu*** (homomorfizma) olduğunu söylüyor. Eşyapı fonksiyonunun anlamını bilmeyenlere: Toplamaya (ya da bir başka işleme) uyumlu olan, yani $f(a+b) = f(a) + f(b)$ eşitliğini sağlayan bir gruptan bir başka gruba giden f fonksiyonlarına verilen addır.

Çarpma. Çarpmayı da aynı yöntemle tanımlayacağız. $\mathbb{R}$'den r ve s elemanlarını alalım. r ve s'nin $\mathcal{C}$'de f-önimgelerini bulalım. Bu önimgelere a ve b diyelim. Demek ki

$$f(a) = r \text{ ve } f(b) = s.$$

Şimdi a ve b temel dizilerini $\mathcal{C}$'de çarpıp $ab \in \mathcal{C}$ dizisini elde edebiliriz. Son olarak bu çarpımın f imgesini alıp $f(ab) \in \mathbb{R}$ bulabilir ve rs çarpımını,

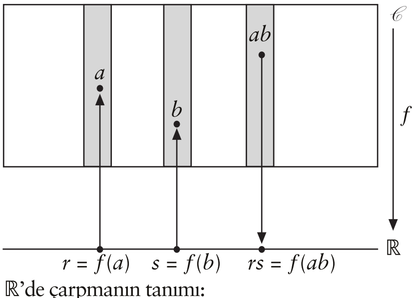
$$rs = f(ab)$$

olarak tanımlamayı uygun bulabiliriz. Yani $a,\ b \in \mathcal{C}$ için,

$$[a][b] = [ab]$$

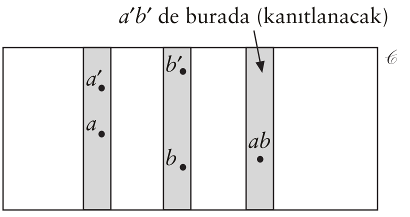
tanımını yapmak istiyoruz.

ℝ'den 𝒞'ye çık, çarp ve tekrar ℝ'ye in



ℝ'de çarpmanın tanımı:
1) $r, s \in \mathbb{R}$ verilmiş olsun.
2) $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitli¼ni sağlayan $a, b \in \mathcal{C}$ dizilerini bul.
3) rs'yi $f(ab)$ olarak tanımla.

Ancak r ve s verildiğinde, $f(a) = r$ ve $f(b) = s$ eşitliğini sağlayan birden çok a ve b vardır; tanımın geçerli olması için bu eşitliği sağlayan tüm a ve b'lerin aynı $f(ab)$ sonucunu verdiğini kanıtlamalıyız.



Önsav 26.3. *a, b, a', $b' \in \mathcal{C}$ olsun. Eğer $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ ise $[ab] = [a'b']$ eşitliği doğrudur.*

Kanıt: Varsayıma göre $a - a' \in \mathcal{Y}_0$ ve $b - b' \in \mathcal{Y}_0$. Dolayısıyla,

$$(ab - a'b') = (a - a')b + a'(b - b') \in \mathcal{Y}_0$$

dir (Önsav 19.7), yani $[ab] = [a'b']$ eşitliği doğrudur. □

Şimdi artık, $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayıları için,

$$[a][b] = [ab]$$

tanımını huzur içinde yapabiliriz, çünkü bu tanım, $\mathcal{C}$'de seçilen a ve b'ye göre değil, $\mathbb{R}$'de seçilen $[a]$ ve $[b]$ gerçel sayılarına göre değişmektedir. Eğer bu önsav doğru olmasaydı,

$$[a] = [a'] \text{ ve } [b] = [b']$$

eşitlikleri doğru olmasına karşın,

$$[a][b] = [a'][b']$$

eşitliği doğru olmayabilirdi ve o zaman da çarpma işleminin tanımı geçerli olmazdı.

Kimi zaman $[a][b]$ yerine $[a] \times [b]$ ya da $[a] \cdot [b]$ yazacağız.

Önsav 26.4. *Şu özellikler doğrudur:*
Ç1. *Her r, s, $t \in \mathbb{R}$ için, $(rs)t = r(st)$.*
Ç2. *Her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.*
Ç3. *Her $0_\mathbb{R} \neq r \in \mathbb{R}$ için, $rs = sr = [s(1)]$ eşitliğini sağlayan bir $0_\mathbb{R} \neq s \in \mathbb{R}$ vardır.*
Ç4. *Her r, $s \in \mathbb{R}$ için $rs = sr$.*

Kanıt: Aynen bir önceki kanıt gibi. $\mathbb{R}$'deki bu eşitlikleri kanıtlamak için f fonksiyonunu kullanıp $\mathcal{C}$'ye çıkacağız. Bu eşitliklerin $\mathcal{C}$'de de geçerli olduğunu kullanıp tekrar f ile $\mathbb{R}$'ye ineceğiz.
Ç1, **Ç2**, **Ç4**. Önsav 26.2'nin $T1$, $T2$ ve $T4$'ün kanıtıyla aynı olduğundan kanıtı okura bırakıyoruz.

Ç3. $a = (a_n)_n \in \mathcal{C}$ için, $r = [a]$ olsun.$\mathcal{Y}_0 = [s(0)] = 0_\mathbb{R} \neq r = [a]$ olduğundan, a, $\mathcal{Y}_0$'da değildir, yani 0'a yakınsayamaz. Teorem 23.3'e göre her $n > N$ için $a_n \neq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bir N göstergeci vardır.

$$b_n = \begin{cases} a_n^{-1} & \text{eğer } n > N \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n \leq N \text{ ise} \end{cases}$$

ve $b = (b_n)_n$ olsun. Teorem 22.11'e göre b bir temel dizidir. O zaman ab dizisi bir zaman sonra sabit 1 dizisi olur ve dolayısıyla limiti 1'dir. Demek ki $ab - s(1)$ dizisi 0'a yakınsar, yani $\mathcal{Y}_0$'dadır. Demek ki, $[a][b] = [ab] = [s(1)]$ olur. □

Sonuç 26.5. $(\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}, \times, [s(1)])$ *değişmeli bir gruptur, yani,*

Ç1. *Her* $r,\ s,\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için,* $(rs)t = r(st)$.
Ç2. *Her* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için,* $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.
Ç3. *Her* $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için,* $rs = sr = [s(1)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *vardır.*
Ç4. *Her* $r,\ s \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ *için* $rs = sr$.

Önsav 4 ve Sonuç 5'in Getirdikleri:
a. Ç1'e göre gerçel sayıları çarparken parantez kullanmaya gerek yoktur, örneğin, $(rs)t$ yerine rst ve $(rs)(tu)$ yerine $rstu$ yazabiliriz.
b. $\mathbb{R}$'de Ç2 özelliğini sağlayan bir ve tek bir eleman vardır (çarpmanın etkisiz elemanı denir bu elemana) ve bu eleman da Ç2'nin söylediği gibi $[s(1)]$'dir. Gelecekte $[s(1)]$ yerine 1 yazacağız ama şimdilik değil. Öte yandan daha şimdiden $[s(1)]$ yerine $1_\mathbb{R}$ yazmak fena bir fikir değildir.
c) Eğer $r \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ verilmişse, Ç3'teki $rs = sr = 1_\mathbb{R}$ eşitliğini sağlayan bir ve tek bir $s \in \mathbb{R}$ vardır. Bu elemanı s^{-1} olarak göstereceğiz. Kanıtta da görüldüğü üzere, $a \in \mathcal{C}$ için, tam olarak $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ olmasa da bu eşitlik gerçek'ten çok çok uzak değil.
d) $\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$'de bölmeyi

$$r/s = rs^{-1}$$

olarak tanımlayabiliriz.

$$r^{-1}s^{-1} = (rs)^{-1},$$
$$(r^{-1})^{-1} = r$$

gibi eşitlikleri kanıtlamak kolaydır.
e) Her grupta olduğu gibi $\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ grubunda da sadeleştirme yapılabilir. Örneğin, $rs = rt$ ise ve $r \neq 0_\mathbb{R}$ ise $s = t$ olur. Bu, s ya da t, $0_\mathbb{R}$'ye eşitse de geçerlidir. Aynı şekilde $rs = r$ ise ve $r \neq 0_\mathbb{R}$ ise $s = 1_\mathbb{R}$ olur.
Toplama ve Çarpma. Yukarda, önce sadece toplamayı ilgilendiren, ardından sadece çarpmayı ilgilendiren özellikleri bulduk. Şimdi bu bölümde, hem toplamayı hem de çarpmayı harmanlayan özelliği bulacağız.

Önsav 26.6. *Gerçel sayılarda çarpma toplamaya göre dağılır, yani her* $r, s, t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r+s)t = rt + st$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Her zamanki gibi $\mathcal{C}$'ye çıkıp $\mathcal{C}$'de benzer eşitliği kullanarak kanıtlanır. Ayrıntılar okura bırakılmıştır. □

Bunun bir sonucu olarak, her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}^r} = 0_{\mathbb{R}}$$

eşitliği doğrudur. Nitekim,

$$r0_{\mathbb{R}} = r(0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}) = r0_{\mathbb{R}} + r0_{\mathbb{R}}$$

ve buradan da sadeleştirerek, $r0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$ bulunur.

Teorem 26.7. $(\mathbb{R}, +, \times, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$ *yapısı bir cisimdir, yani şu özellikler sağlanır:*
T1. *Her* $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r+s)+t = r+(s+t)$.
T2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + [s(0)] = [s(0)] + r = r$.
T3. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r + s = s + r = [s(0)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $s \in \mathbb{R}$ *vardır.*
T4. *Her* $r,\ s \in \mathbb{R}$ *için* $r + s = s + r$.
Ç1. *Her* $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ *için,* $(rs)t = r(st)$.
Ç2. *Her* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $r \cdot [s(1)] = [s(1)] \cdot r = r$.
Ç3. *Her* $0_{\mathbb{R}} \neq r \in \mathbb{R}$ *için,* $rs = sr = [s(1)]$ *eşitliğini sağlayan bir* $0_{\mathbb{R}} \neq s \in \mathbb{R}$ *vardır.*
Ç4. *Her* $r,\ s \in \mathbb{R}$ *için* $rs = sr$.
D. *Her* $r,\ s,\ t \in \mathbb{R}$ *için,* $(r+s)t = rt + st$.

Kanıt: Çoktan kanıtlandı bile... □

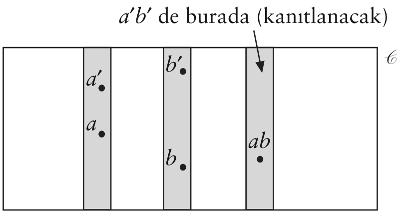
Son olarak, $f(a) = [a]$ kuralıyla tanımlanan

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

örten fonksiyonuna bir defa daha bakalım. Bu fonksiyon şu özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} &f\,(a+b) = f(a+b),\\ &f\,(ab) = f(ab),\\ &f\,(s(0)) = 0_{\mathbb{R}},\\ &f\,(s(1)) = 1_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Yukardaki eşitlikler, f fonksiyonunun $\mathcal{C}$ halkasından $\mathbb{R}$ halkasına (aslında cismine) giden bir eşyapı fonksiyonu olduğunu söylüyor. Resim aşağıda.



Tabii bu arada $\mathcal{C}$'nin bir cisim olmadığını ama $\mathbb{R}$'nin bir cisim olduğunu unutmayalım. (Arife Not: Halkalar kuramınının basit bir sonucuna göre, $\mathbb{R}$'nin cisim olması $\mathcal{Y}_0$'ın $\mathcal{C}$'nin maksimal ideali olduğu anlamına gelir.)

Bir sonraki bölümde $\mathbb{R}$ üzerine bir sıralama tanımlayacağız. Sıralamayı tanımladıktan sonra, $(\mathbb{R}, +, \times, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, <)$ yapısının sıralı bir cisim olduğunu göreceğiz.

Alıştırmalar

26.1. Eğer $n = 0$ ya da 1 ise $n_{\mathbb{R}}$'nin ne olduğunu biliyoruz. Eğer $n \geq 1$ bir doğal sayıysa, $n_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$ sayısını tümevarımla şöyle tanımlayalım (bkz. Bölüm 12.2):

$$(n+1)_{\mathbb{R}} = n_{\mathbb{R}} + 1_{\mathbb{R}}.$$

$(-n)_{\mathbb{R}}$ sayısını da $(-n)_{\mathbb{R}} = -(n_{\mathbb{R}})$ olarak tanımlayalım. Böylece her $n \in \mathbb{Z}$ için $n_{\mathbb{R}}$ sayısını tanımlamış olduk.

$$(n+m)_{\mathbb{R}} = n_{\mathbb{R}} + m_{\mathbb{R}},$$
$$(nm)_{\mathbb{R}} = n_{\mathbb{R}} m_{\mathbb{R}}$$

eşitlikleri kanıtlayın.

Üs Almak. Dikkat ederseniz gerçel sayılarda üs almayı tanımlamadık. Bir n tamsayısı ve bir x gerçel sayısı için x^n sayısını tanımlamak hiç zor değildir. Bir $x > 0$ gerçel sayısı ve bir q kesirli sayısı için x^q sayısı da biraz zahmetle de olsa oldukça rahat biçimde tanımlanabilir. Ama bir $x > 0$ ve y gerçel sayıları için x^y gerçel sayısını tanımlamak hiç kolay değildir. Bu tanım değişik biçimlerde yapılabilir (Cauchy dizileriyle, serilerle, ln fonksiyonunun tersi olarak). Bu konuya da geleceğiz. Ama analiz dersinde.

27. Gerçel Sayılarda Sıralama

Matematiği bir iki sayfa erteleyerek, gerçel sayılarda sıralamayı nasıl tanımlayabileceğimizi tartışacağız önce. Doğal ve basit gibi görünen tanım denemelerinin zorluklarından sözettikten sonra $\mathbb{R}$'de sıralamanın matematiksel tanımını verip özelliklerini irdeleyeceğiz.

27.1 Cebirsel Tanım Tartışması

Gerçel sayılar kümesinde sıralamayı cebirsel olarak tanımlamak mümkündür ve cebirsel tanım olabilecek en basit düzeydedir: $r \leq s$ ilişkisini "$s - r$ gerçel sayısı $\mathbb{R}$'de bir karedir" (yani bir gerçel sayının kendisiyle çarpımıdır) olarak tanımlayalım.

Tanım basit ama sadece tanımı vermek yetmiyor, tanımın istenen özellikleri sağladığını da göstermek gerekiyor. Örneğin, bu tanımı kabul ederek,

$$r \leq s \text{ ve } s \leq t \text{ ise } r \leq t$$

önermesini kanıtlamak isterseniz, düşünmeye başladıktan çok kısa bir süre sonra,

$$\text{Her } a \text{ ve } b \text{ için, } a^2 + b^2 \text{ bir karedir}$$

önermesini kanıtlamak zorunda olduğunuzu görürsünüz. Oysa bu son ifade her cisimde doğru olmadığından, bunu kanıtlamak için gerçel sayıların tanımına inmemiz gerekiyor. Bu sorunu yoketmenin bir yolu, gerçel sayılarda $\leq$ eşitsizliğini, belki biraz daha karmaşık bir biçimde,

$$r \leq s \Leftrightarrow s - r \text{ karelerin toplamıdır}$$

olarak tanımlamaktır. Nitekim bu yeni tanımla,

$$r \leq s \text{ ve } s \leq t \text{ ise } r \leq t$$

önermesini kanıtlamak çok kolaydır, gerçel sayıların tanımına gitmeden kanıtlanabilir, çünkü bu her halkada ve cisimde doğrudur (karelerin toplamının toplamı da bir kare toplamıdır). Bunu kanıtlamak kolay ama bu sefer de

$$r \leq s \text{ ve } s \leq r \text{ ise } r = s$$

önermesini kanıtlarken sorun çıkar. Bu önermeyi kanıtlamak için, kolayca görülebileceği gibi

$$\textit{karelerin toplamı } 0\text{'}\textit{sa}, \textit{ toplanan her kare } 0\text{'}\textit{dır}$$

önermesini kanıtlamak gerekiyor. Bu da pek o kadar kolay bir şey değildir ve gene gerçel sayıların tanımına inmek gerekir. (Sonlu cisimlerde ve $\mathbb{C}$'de bu önerme yanlıştır örneğin.)

Önerdiğimiz bu yöntemi izleyebilirdik. Biz analize daha yakın bir tanımı tercih edeceğiz.

Sıralamayı tanımlamak için pozitif sayıları tanımlamanın yeterli olduğunu görelim. Nitekim, eğer $r \geq 0$ eşitsizliğini tanımlamışsak, o zaman, $r \leq s$ eşitsizliğini $s - r \geq 0$ olarak tanımlayabiliriz. Demek ki hangi gerçel sayıların 0'dan büyükeşit olarak tanımlanması gerektiğini anlamalıyız.

Ama tabii biz yukardaki gibi 0 yazamayız, 0 henüz bir gerçel sayı değil, sadece bir kesirli sayı. 0 yerine şimdilik $0_{\mathbb{R}}$, yani $[s(0)]$ yazmamız gerekir. İlerde, küçük bir hileye başvurarak

$$0 = 0_{\mathbb{R}} = [s(0)]$$

varsayımını yapabileceğiz.

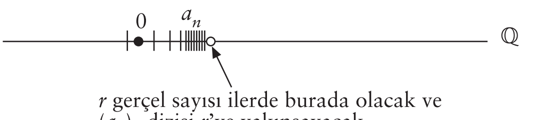
Bütün bunların aslında bu kadar zor olmaması gerekiyor, çünkü ileride kanıtlayacağımız üzere, $\mathbb{R}$ üzerine tek bir sıralama vardır.

27.2 Analitik Tanım Tartışması

r, herhangi bir gerçel sayı olsun. Diyelim $(a_n)_n \in \mathcal{C}$ için

$$r = [(a_n)_n].$$

Sezgimizi artırmak için söyleyelim: r'yi ilerde $(a_n)_n$ dizisinin limiti olarak görmeyi başaracağız. (an)n kesirli sayı dizisi aslında r'ye yakınsamak amacıyla yola çıkıyor ama r orada olmadığı için yakınsayamıyor.

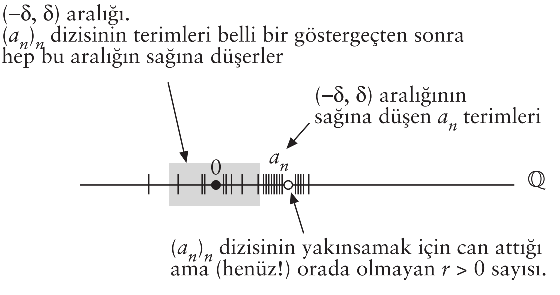


r'nin $0_{\mathbb{R}}$'den büyük eşit olmasının ne demek olması gerektiğini anlamaya çalışıyoruz. a_n'ler kesirli sayı olduklarından ve kesirli sayılarda sıralamayı bildiğimizden, a_n'nin 0dan büyük eşit olmasının ne demek olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle $r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin bir tanımını vermeliyiz.

"$r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin geçerli olması için her n için $a_n \geq 0$ olmalı" demek, ilk deneme için fena olmasa da başarısızdır, çünkü örneğin ilk birkaç a_i terimi -1'e ve diğerleri de 1'e eşitse, o zaman $r = 1_{\mathbb{R}} > 0_{\mathbb{R}}$ olur, ve r'nin pozitif olması gerekir. Yani önerilen koşul yeterlidir ama illa gerekli değildir.

"$r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin geçerli olması için belli bir göstergeçten sonra hep $a_n \geq 0$ olmalıdır" demek biraz daha doğru olur ama bu da başarıya ulaşmaz, çünkü $a_n = -1/n$ alırsak, o zaman her n için $a_n < 0$ olur ama $r = 0_{\mathbb{R}} \geq 0_{\mathbb{R}}$ olur, yani bu koşul da yukardaki gibi $r \geq 0_{\mathbb{R}}$ koşulu için yeterlidir ama gerekli değildir.

$r \geq 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin tanımını vermek yerine $r > 0_{\mathbb{R}}$ eşitsizliğinin tanımını vermek görece daha kolaydır, çünkü pozitif bir sayıya yakınsayan bir dizinin terimleri (0'a yakınsayan bir dizinin terimlerinin aksine) **bir zaman sonra** 0'dan uzak durmak zorundadır, belli bir pozitif kesirli sayının altına inemez, yani 0'a istenildiği kadar yak



laşamaz. Tabii bizim $(a_n)_n$ dizimiz aslında r'ye yakınsamıyor (şimdilik en azından) ama hiç olmazsa yakınsarmış gibi yapıyor ve yakın gelecekte gerçekten yakınsayacak.

$(a_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamayan bir temel dizi olsun. Sonuç 22.10.i'e göre bu dizi zamanla 0'dan uzak durur, yani öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci vardır ki, her $n > N$ için

$$\delta < |a_n|$$

olur. Ayrıca r de pozitif olduğundan a_n bir zaman sonra pozitif olmalı ve

$$\delta < |a_n|$$

eşitsizliğinden öte,

$$\delta < a_n$$

eşitsizliği geçerli olmalı. İşte bizi tanıma götüren bu fikir olacak.

27.3 Matematiksel Tanım

Tanım. a bir gerçel sayı olsun. Bir $(a_n)_n$ temel dizisi için

$$a = [(a_n)_n]$$

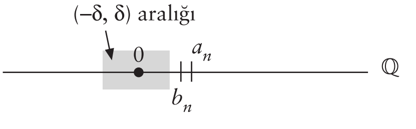
yazalım. Eğer her $n > N$ için,

$$\delta < a_n$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve bir N göstergeci varsa, o zaman, a'nın ***pozitif*** olduğunu söyleyeceğiz. Yani a'nın ***pozitif*** olmasi için bir $\delta > 0$ kesirli sayısı için, sonlu tanesi hariç a_n'lerin hepsi δ'dan büyük olmalıdır.

Her zaman olduğu gibi bu tanımın geçerli olması için kontrol etmemiz gereken önemli bir nokta var; o da şu: Ola ki bir başka $(b_n)_n$ temel dizisi için $a = [(b_n)_n]$ olur ve yukardaki tanımı $(a_n)_n$'ye uyguladığımızda a pozitif çıkar da, aynı tanımı $(b_n)_n$'ye uyguladığımızda a pozitif çıkmaz. (Acele etmeyin, henüz negatiflik kavramını tanımlamadık!) Bu durumun olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Kanıtlayalım hemen.

Önsav 27.1. *$(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ aynı gerçel sayıyı temsil eden iki temel dizi olsun, yani $[(a_n)_n] = [(b_n)_n]$ olsun. Eğer her $n > N_a$ için $\delta_a < a_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_a > 0$ kesirli sayısı ve bir N_a göstergeci varsa, o zaman, her $n > N_b$ için $\delta_b < a_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_b > 0$ kesirli sayısı ve bir N_b göstergeci vardır.*



Kanıt: Kanıtın fikri açık olmalı: Eğer $(a_n)_n$ dizisi 0'dan uzaksa ve $(b_n)_n$ dizisi $(a_n)_n$ dizisine çok "yakınsa", o zaman $(b_n)_n$ dizisi de 0'dan uzaktır. Bu fikri kullanmak için önce şu eşitsizliğin farkına varalım:

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n \geq -|b_n - a_n| + a_n = a_n - |b_n - a_n|.$$

Eğer n göstergeci, $a_n > \delta_a$ ve $|b_n - a_n| < \delta_a/2$ olacak şekilde seçilirse, bu eşitsizliğe göre,

$$b_n \geq a_n - |b_n - a_n| > \delta_a - \delta_a/2 = \delta_a/2$$

olur ve önsav kanıtlanır. Daha biçimsel olalım:

δ_a ve N_a önsavda söylendiği gibi olsun. Varsayıma göre,

$$(b_n - a_n)_n$$

dizisi 0'a yakınsıyor. Demek ki belli bir M göstergeci için, eğer $n > M$ ise

$$|b_n - a_n| < \delta_a/2$$

olur. Şimdi $N_b = \max\{N_a, M\}$ olsun. O zaman her $n > N_b$ için,

$$\begin{aligned} b_n &= (b_n - a_n) + a_n > -|b_n - a_n| + a_n \\ &= a_n - |b_n - a_n| > \delta_a - \delta_a/2 = \delta_a/2 \end{aligned}$$

olur. Demek ki $\delta_b = \delta_a/2$ olarak alabiliriz. □

Şimdi artık gönül rahatlığıyla yukardaki "pozitiflik" tanımını kabul edebiliriz ve buradan hareketle gerçel sayılarda sıralamayı tanımlayabiliriz. Eğer a ve b iki gerçel sayıysa ve $a - b$ pozitifse, a'nın b'den ***daha büyük*** olduğunu söyleyeceğiz ve bunu $a > b$ olarak kısaltacağız. Demek ki,

$$a > b \Leftrightarrow a - b \text{ pozitifse }.$$

Bu tanımda $b = 0_{\mathbb{R}}$ olarak alırsak, beklenildiği gibi,

$$a > 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow a \text{ pozitifse}$$

önermesini elde ederiz. Eğer tanımda $a = 0_{\mathbb{R}}$ alırsak,

$$0_{\mathbb{R}} > b \Leftrightarrow -b \text{ pozitifse}$$

önermesini elde ederiz.

Demek ki tanıma göre, $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ temel dizileri için, $[(a_n)_n] > [(b_n)_n]$ ancak ve ancak

her $n > N$ *için* $\delta < a_n - b_n$ *eşitsizliğinin sağlandığı bir*

$\delta > 0$ *kesirli sayısı ve bir* N *göstergeci varsa.*

Gelenek olduğu üzere, $a < b$ yerine kimileyin $b > a$ yazacağız ve b'nin a'dan *daha büyük* olduğunu söyleyeceğiz.

Gerçel sayılarda tanımladığımız $>$ ilişkisini, kesirli sayılarda tanımlanan $>$ sıralamasıyla karıştırmamak gerekir. Şimdilik ikisi ayrı şeyler, aralarındaki tek ilişki yukarda verdiğimiz tanımda verilmiş. $[(a_n)_n] > [(b_n)_n]$ yazdığımızda, biraz önce tanımladığımız gerçel sayılardaki $>$ ilişkisinden sözediyoruz. Oysa $\delta < a_n - b_n$ ya da $n > N$ yazdığımızda δ, a_n, b_n, n ve N sayıları kesirli sayılardır ve buradaki $<$ simgesi kesirli sayılar kümesinde geçmişte tanımladığımız ve burada her şeyini bildiğimizi varsaydığımız olağan sıralamadır. Gerçel sayılarda tanımlanan $>$ ilişkisinin bir sıralama olup olmadığını henüz bilmiyoruz ama sanki birazdan bileceğiz gibi bir his var içimde:

27.4 $<$ İlişkisi Bir Tamsıralamadır

Yukarda tanımladığımız ilişkinin bir tamsıralama olduğunu kanıtlayalım, yani
S1. Hiçbir r için, $r < r$ ilişkisi doğru olamaz;
S2. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ve $s < t$ ise $r < t$'dir;
S3. Her r ve s için, ya $r < s$ ya $r = s$ ya da $s < r$ önermelerini doğru olduğunu gösterelim.

Teorem 27.2. *Yukarda tanımlanan $<$ ilişkisi $\mathbb{R}$'yi tamsıralar.*

S1'in Kanıtı: $r < r$ önermesi ancak ve ancak $0_{\mathbb{R}} > 0_{\mathbb{R}}$ ise doğru olabileceğinden, $0_{\mathbb{R}}$'nin pozitif olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. Her n için $a_n = 0$ alırsak, $0_{\mathbb{R}} = [(a_n)_n]$ olduğundan, pozitifliğin tanımında $a_n = 0$ alabiliriz. Sorumuz şu: Her $n > N$ için, $\delta < a_n = 0$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve bir N göstergeci var mı? Yok tabii! Demek ki $0_{\mathbb{R}}$ pozitif olamaz.

S2'nin Kanıtı: $r < s$ ve $s < t$ olsun. Demek ki $s - r$ ve $t - s$ gerçel sayıları pozitif. Eğer iki pozitif sayının toplamının da pozitif olduğunu kanıtlarsak, o zaman bu iki sayının toplamı olan

$$(s - r) + (t - s) = t - r$$

sayısının da pozitif olduğunu, yani $t > r$ ilişkisini kanıtlamış oluruz.

Şimdi iki pozitif sayının toplamının pozitif olduğunu kanıtlayalım. $a > 0$ ve $b > 0$ olsun. $a = [(a_n)_n]$, $b = [(b_n)_n]$, $\delta_a > 0 N_a$, $\delta_b > 0$ ve N_b de önsavda söylendiği gibi olsun. Ayrıca $N = \max\{N_a, N_b\}$ ve $\delta = \delta_a + \delta_b > 0$ olsun. O zaman $n > N$ için,

$$a_n + b_n > \delta_a + \delta_b = \delta$$

olur. Gerçel sayılarda toplamanın tanımına göre,

$$a + b = [(a_n)_n] + [(b_n)_n] = [(a_n + b_n)_n]$$

olduğundan, $a + b$'nin pozitif olduğu böylece kanıtlanmış oldu.

S3'ün Kanıtı: Bu biraz daha zor. $s - r$ yerine a yazarsak, her a gerçel sayısı için,

$$a > 0_{\mathbb{R}}, a = 0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}} > a$$

önermelerinden birinin doğru olduğunu kanıtlamamız gerektiğini anlarız. ($O1$ ve $O2$'ye göre bu üç önermeden sadece ve sadece biri doğru olabilir.)

Bu üç önermeden ikisinin yanlış olduğunu varsayıp üçüncüsünü kanıtlamak gerekir. Birinciyle üçüncünün yanlış olduğunu varsayıp $a = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini kanıtlayalım. (En simetrik olanını seçtik.)

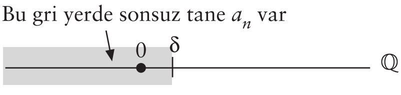
$a = [(a_n)_n]$ yazalım. $a = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğini yani

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

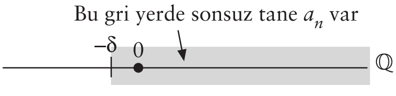
Varsayıma göre $a > 0_{\mathbb{R}}$ önermesi yanlış olduğundan, $>$ ilişkisinin tanımına göre,

Hangi $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci seçilirse seçilsin, $a_n \leq \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n > N$ vardır. Bir başka deyişle $\delta > 0$ kesirli sayısı ne olursa olsun, $a_n \leq \delta$ eşitsizliğinin sağlayan sonsuz tane n vardır.



$0_{\mathbb{R}} > a$ önermesi, $>$ ilişkisinin tanımına göre, $-a > 0_{\mathbb{R}}$ anlamına geldiğinden ve $-a = [(-a_n)_n]$ olduğundan,

Hangi $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N göstergeci seçilirse seçilsin, $-a_n \leq \delta$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $n > N$ vardır. Bir başka deyişle $\delta > 0$ kesirli sayısı ne olursa olsun, $a_n \geq -\delta$ eşitsizliğinin sağlayan sonsuz tane n vardır.



Bu bilgilerin dışında bir de $(a_n)_n$ dizisinin bir temel dizi olduğunu biliyoruz. Bütün bunlardan $(a_n)_n$ dizisinin limitinin 0 olduğunu kanıtlamalıyız.

Yukardaki bilgilere dayanarak, öyle bir mutlak artan

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

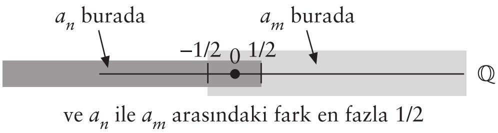
doğal sayısı dizisi bulacağız ki, her k için,

$$-1/k < a_{n_k} < 1/k$$

olacak. Bu da Sandviç Teoremi'ne göre (Teorem 19.10), $(a_{n_k})_k$ altdizisinin 0'a yakınsadığı anlamına gelir. Ama o zaman da Teorem 23.3'e göre $(a_n)_n$ dizisi de 0'a yakınsar ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olur.

Mutlak artan $(n_k)_k$ doğal sayı dizisini bulalım.

Önce n_1'i bulalım. Yukarıdaki şekilden takip edebilirsiniz.



ve a_n ile a_m arasındaki fark en fazla 1/2

$(a_n)_n$ bir temel dizi olduğundan öyle bir N vardır ki, n, $m > N$ için,

$$|a_n - a_m| < 1/2$$

olur. Varsayımlara göre öyle n, $m > N$ var ki,

$$a_n \leq 1/2 \text{ ve } a_m \geq -1/2$$

olur. Şimdi

$$-1 < -\frac{1}{2} \leq a_m = a_m - a_n + a_n \leq |a_m - a_n| + a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

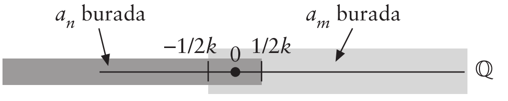
olur, yani $-1 < a_m < 1$. Demek ki $n_1 = m$ seçersek istediğimiz olur. Şimdi, her $i = 1, 2, \cdots, k-1$ için,

$$-1/i < a_{n_i} < 1/i$$

olacak biçimde $n_1 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$ göstergeçlerini bulduğumuzu varsayalım.

$$-1/k < a_{n_k} < 1/k$$

eşitsizliğini sağlayan ve n_{k-1}'den büyük bir n_k göstergeci bulacağız. Aşağıdaki şekilden takip edebilirsiniz. $(a_n)_n$ bir temel



ve a_n ile a_m arasındaki fark en fazla $1/2k$

dizi olduğundan öyle bir N vardır ki, n, $m > N$ için,

$$|a_n - a_m| < 1/2k$$

olur. Varsayımlara göre öyle n, $m > \max\{N, n_{k-1}\}$ vardır ki,

$$a_n \leq 1/2k \text{ ve } a_m \geq -1/2k$$

olur. Şimdi

$$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{2k} \leq a_m = a_m - a_n + a_n \leq |a_m - a_n| + a_n < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}$$

olur, yani $-1/k < a_m < 1/k$. Demek ki $n_k = m$ seçersek istediğimiz olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Her zaman olduğu gibi, α, β gerçel sayıları için, "$\alpha \leq \beta$", "ya $\alpha < \beta$ ya da $\alpha = \beta$" anlamına gelecek. Elbette, Teorem 27.2'ye göre, $\alpha \leq \beta$ ifadesi ancak ve ancak $\beta < \alpha$ ifadesi yanlışsa doğrudur.

Sıralamayla işimiz bitmedi. Toplama ve çarpmanın sıralamayı koruduğunu da kanıtlamamız gerekiyor.

Teorem 27.3. *a, b ve c üç gerçel sayı olsun.*
i. *Eğer $a < b$ ise $a + c < b + c$'dir.*
ii. *Eğer $a < b$ ve $c > 0$ ise $ac < bc$'dir.*

Kanıt: **i.** Çok kolay.
ii. Bu da oldukça kolay. $b - a$ yerine d yazarsak,

$$d > 0 \text{ ve } c > 0 \text{ ise } cd > 0$$

önermesini kanıtlamamız gerektiğini anlarız. Kanıtlayalım.

$$d = [(d_n)_n] \text{ ve } c = [(c_n)_n]$$

olsun. Varsayıma göre, her $n > N_d$ için $\delta_d < d_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_d > 0$ kesirli sayısı ve bir N_d göstergeci vardır. Ve her $n > N_c$ için $\delta_c < c_n$ eşitsizliğinin sağlandığı bir $\delta_c > 0$ kesirli sayısı ve bir N_c göstergeci vardır.

Şimdi, $\delta = \delta_c\delta_d$ ve $N = \max\{N_c, N_d\}$ alalım. Her $n > N$ için,

$$c_n d_n > \delta_c\delta_d = \delta$$

olur. □

Sonuç 27.4. $\mathbb{R}$*, sıralı bir cisimdir.* □

Alıştırmalar

27.1. Her n, $m \in \mathbb{R}$ için "$n_\mathbb{R} \le m_\mathbb{R} \Leftrightarrow n \le m$" önermesini kanıtlayın. ($n_\mathbb{R}$'nin tanımı için bkz Bölüm 26'ün sonundaki alıştırma ya da Bölüm 12.2.)

27.2. Her sıralı halkada olduğu gibi $\mathbb{R}$'de de mutlak değer fonksiyonunu tanımlayabiliriz:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

27.3. Her x, $y \in \mathbb{R}$ için, şu özellikleri kanıtlayın:
i. $|x| \ge 0$.
ii. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
iii. $|-x| = |x|$.
iv. $|xy| = |x||y|$.
v. **[Üçgen Eşitsizliği]** $|x + y| \le |x| + |y|$.
vi. $||x| - |y|| \le |x - y|$.
vii. $|x| = x \Leftrightarrow x \ge 0$.

27.5 Gerçel Sayılarda Tek bir Sıralama Vardır

Okur, matematiksel olmasa da, dayatmayla da olsa, gerçel sayılarda her pozitif sayının bir karekökü olduğunu biliyordur, yani her pozitif gerçel sayı bir karedir. Dolayısıyla gerçel sayılarda sıralamayı toplama ve çarpmanın yardımıyla tanımlayabiliriz:

$$x \le y \Leftrightarrow y = z^2 + x \text{ eşitliğini sağlayan bir } z \text{ varsa}$$

ya da,

$$x < y \Leftrightarrow y = z^2 + x \text{ ve } z \neq 2z\text{ilişkilerini sağlayan bir } z \text{ varsa}$$

Kesirli sayılarda ise her sayı bir kare değildir, örneğin 2'nin karekökü kesirli bir sayı değildir ama her kesirli sayı dört kesirli sayının karelerinin toplamıdır. (Üç kare yetmez. Neden dört karenin yettiğinin kanıtını sayılar kuramıyla ilgili bir başka kitapta görürüz.) Dolayısıyla kesirli sayılarda da sıralama toplama ve çarpmanın yardımıyla tanımlanabilir:

$$x \leq y \Leftrightarrow y = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + x \text{ eşitliğini sağlayan bir } z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ varsa}$$

Bu, daha genel bir olgunun tezahürüdür. Bir cismin olası sıralamaları büyük ölçüde cismin kareleri ve karelerin sonlu toplamları tarafından belirlenir. Anlatalım.
Sonuç 27.4 sıralı bir cisimden sözediliyor, her şeyden önce bir cisimdir. Sıralı bir cisimde ayrıca bir de bir tamsıralama, yani,
O1. Hiçbir r için, $r < r$ ilişkisi doğru olamaz;
O2. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ve $s < t$ ise $r < t$'dir;
O3. Her r ve s için ya $r < s$ ya $r = s$ ya da $s < r$
özelliklerini sağlayan ikili bir $<$ ilişkisi olmalıdır ve bu tamsıralama toplama ve çarpmayla uyum içinde olmalıdır, yani,
TO. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ise $r + t < s + t$'dir;
ÇO. Her r, s ve t için, eğer $r < s$ ise ve $t > 0$ ise, $rt < st$'dir özelliklerini sağlamalıdır.

Bir cisim üzerine değişik sıralamalar olabilir. Örneğin,

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

kümesi, gerçel sayılardan oluşan bir cisimdir. (Neden bir cisimdir? Toplama, çarpma, çıkarma kolay da, cisimde bölme yapılabileceğini kontrol etmek gerek) ve bildiğimiz sıralama dışında bir de,

$$a + b\sqrt{2} \prec c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a - b\sqrt{2} < c - d\sqrt{2}$$

formülüyle tanımlanan $\prec$ sıralaması vardır. (Alıştırma. Bir cismin her eşyapı dönüşümü cisim üzerindeki bir sıralamayı bir başka sıralamaya dönüştürür. Bir cismin olası sıralama sayısı ilginç bir problemdir.)

Sıralı bir K cisminde $x > 0$ eşitsizliğini sağlayan elemanlara ***pozitif elemanlar*** denir. Pozitif elemanlar kümesine P dersek, K'nin P altkümesi şu özellikleri sağlar:
a. P toplama ve çarpma altında kapalıdır,
b. $0, -1 \notin P$,

c. $K = P \cup \{0\} \cup -P$.

(Kolayca görüleceği üzere, c koşulu, P'yi, K'nin, ilk iki koşulu sağlayan en büyük altkümesi yapıyor.)

Bu özellikleri sağlayan her $P \subseteq K$ altkümesi K cisminde bir sıralama belirler ve P, bu sıralamanın negatif olmayan elemanları kümesi olur. Nitekim, P verilmişse, sıralamayı

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in P$$

olarak tanımlamak yeterlidir.

Bir başka deyişle, K üzerine bir sıralama vermekle K'nin yukardaki özelliklerini sağlayan bir P altkümesini vermek arasında bir ayrım yoktur.

Sıralı bir cisimde her kare negatif olmayan bir elemandır. Nitekim eğer $x > 0$ ise ÇO'ya göre $x^2 > 0$; eğer $x < 0$ ise, TO'ya göre, $-x > 0$ ve

$$x^2 = (-1)^2 x^2 = ((-1)x)^2 = (-x)^2 > 0.$$

Dolayısıyla sıralı bir cisimde karelerin toplamı da TO'ya göre negatif olamaz, yani karelerin toplamı P'dedir. Karelerin sonlu toplamlarından oluşan kümeye A dersek, her sıralama için, $A \subseteq P$ olur. Eğer bir cisimde A, yukardaki a, b ve c özelliklerini sağlıyorsa, yani P'yi A'ya eşit alabiliyorsak, o zaman bu cisimde tek bir sıralama vardır ve o sıralama da şöyle verilir:

$$a < b \Leftrightarrow b - a \text{ sonlu sayıda karenin toplamıysa.}$$

Demek ki $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ cisimleri üzerinde tek bir sıralama vardır. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'de iki değişik sıralama olduğundan, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'nin her $\alpha > 0$ sayısı gene $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$'den sonlu tane elemanın karesinin toplamı değildir. Eğer T bağımsız bir değişkense, T'nin sırasını kesirli olmayan herhangi bir gerçel sayıyla ya da $+\alpha$ ya da $-\alpha$'da belirleyerek, $\mathbb{Q}(T)$ cismini sayılamaz sonsuzlukta farklı biçimlerde sıralayabiliriz.

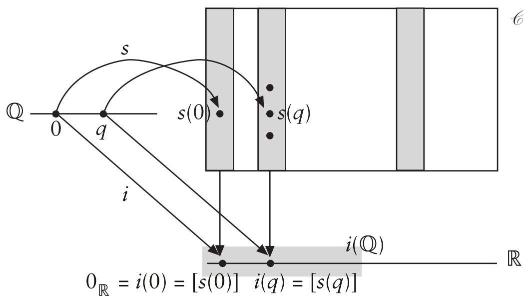
28. $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{R}$'ye Gömmek

Her kesirli sayı bir gerçel sayı olmalı, öyle öğrendik. Ama şimdilik hiçbir kesirli sayı bir gerçel sayı değil. Nitekim, bir gerçel sayı, temel bir kesirli sayı dizisinin sınıfı ve dolayısıyla hiçbir zaman bir kesirli sayı olamaz.

Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu şu kuralla tanımlayalım: $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$i(q) = [s(q)].$$

($s(q)$'nün sabit q dizisi olduğunu anımsayın.)

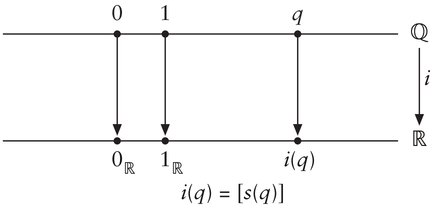


$i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{R}$'de bir "kopyası" olduğunu kanıtlayacağız. Yani $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen bir althalkası olacak ve i, dört işleme ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyon olacak. Ayrıca $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olacak. Bütün bunları yavaş yavaş kanıtlamaya başlayalım.

Önsav 28.1. *$i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dört işleme ve sıralamaya saygı duyan birebir bir fonksiyondur: q, $q' \in \mathbb{Q}$ için,*

$$\begin{aligned}
&i(q + q') = i(q) + i(q'),\\
&i(q - q') = i(q) - i(q'),\\
&i(qq') = i(q)i(q'),\\
&i(q/q') = i(q)/i(q')(\textit{eğer } q' \neq 0 \textit{ ise}),\\
&q < q' \Leftrightarrow i(q) < i(q'),\\
&i(0) = 0_{\mathbb{R}},\\
&i(1) = 1_{\mathbb{R}}.
\end{aligned}$$

Yani (matematiksel deyişle) i sıralı bir halka gömmesidir.



Kanıt: Birebirlik: q, $q' \in \mathbb{Q}$ için, $i(q) = i(q')$ olsun. Demek ki,

$$[s(q)] = [s(q')],$$

yani

$$s(q - q') = s(q) - s(q') \in \mathcal{Y}_0$$

ve

$$0 = \lim_{n\to\infty} s(q - q') = q - q'$$

ve $q = q'$.

Toplamaya Saygı:

$$i(q + q') = [s(q + q')] = [s(q) + s(q')] = [s(q)] + [s(q')] = i(q) + i(q').$$

Çarpmaya Saygı: $i(qq') = [s(qq')] = [s(q)s(q')] = [s(q)][s(q')] = i(q)i(q')$.

Etkisiz Elemanlara Saygı: $i(0) = [s(0)] = 0_\mathbb{R}$ ve $i(1) = [s(1)] = 1_\mathbb{R}$.

Yukardakilerden i'nin çıkarmaya ve bölmeye de saygı duyduğu çıkar. Bunların kanıtını okura bırakıyoruz.

Sıralamaya Saygı: $q < q'$ olsun ve $i(q) < i(q')$ eşitsizliğini kanıtlayalım. i çıkarmaya saygı duyduğundan, $q' - q$ yerine t yazarak,

$$t > 0 \text{ ise } i(t) > 0_\mathbb{R},$$

yani,

$$t > 0 \text{ ise } [s(t)] > 0_\mathbb{R}$$

önermesini kanıtlamamız gerektiğini görürüz. $t > 0$ bir kesirli sayı olsun. Bölüm 27'teki $<$ sıralaması tanımında $\delta = t/2$ ve $N = 0$ (ya da başka bir şey) alırsak, $[s(t)]$'nin pozitif olduğunu görürüz.

Şimdi $i(q) < i(q')$, yani $[s(q)] < [s(q')]$ olsun ve $q < q'$ eşitsizliğini kanıtlayalım. $<$ sıralamasının tanımına göre, bir $\delta > 0$ kesirli sayısı için $q + \delta < q'$. Demek ki $q < q'$. □

Alıştırmalar

28.1. Her $n \in \mathbb{Z}$ için, $i(n) = n_{\mathbb{R}}$ eşitliğini kanıtlayın. $n_{\mathbb{R}}$'nin tanımı için bkz. Bölüm 26'nin sonundaki alıştırma ya da Bölüm 12.2.

Sonuç 28.2. *$q \in \mathbb{Q}$ için, $i(-q) = -i(q)$ ve $i(|q|) = |i(q)|$.*

Kanıt: Önsav 28.1'den, $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$i(-q) = i(0-q) = i(0) - i(q) = 0_{\mathbb{R}} - i(q) = -i(q),$$

yani $i(-q) = -i(q)$ çıkar. i'nin mutlak değere saygı duyduğu da çıkar:

$$i(|q|) = i(\max\{q, -q\}) = \max\{i(q), i(-q)\} = \max\{i(q), -i(q)\} = |i(q)|.$$

(Bkz. Alıştırma 2. İkinci eşitlik i'nin sıralamaya saygı duymasının bir sonucudur.) □

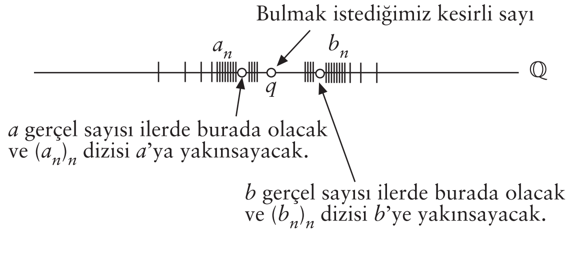
Sonuç 28.3. *$i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'nin bir althalkasıdır ve i, $\mathbb{Q}$ ve $i(\mathbb{Q})$ halkaları arasında bir (sıralı halka) eşyapı eşlemesidir.*

Eşyapı eşlemesinin ne demek olduğunu bilmeyen okura: Aynen Önsav 28.1'de söylenenleri sağlayan bir eşleme demektir.

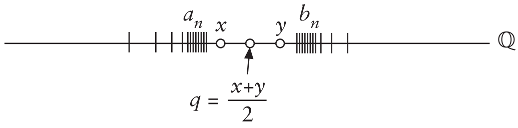
Bölümün bundan sonrasında $i(\mathbb{Q})$ althalkasının $\mathbb{R}$'de ***yoğun*** olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 28.4. *$i(\mathbb{Q})$ althalkası $\mathbb{R}$'de yoğundur, yani herhangi iki gerçel sayı arasında $i(\mathbb{Q})$ althalkasından bir eleman vardır.*

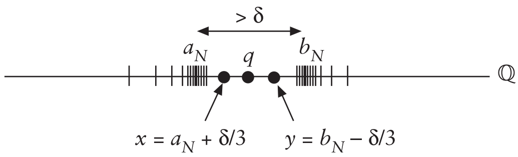
Kanıt: $a < b$ iki gerçel sayı olsun. $a < i(q) < b$ eşitsizliklerini sağlayan kesirli bir q sayısı bulmak istiyoruz. $a = [(a_n)_n]$ ve $b = [(b_n)_n]$ olacak biçimde iki kesirli temel sayı dizisi seçelim. Kanıtın nasıl olması gerektiği konusunda bir fikir sahibi olabilmek için, hayal gücümüzü kullanarak a'yı b'yi sırasıyla $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizilerini limiti olarak görelim.



Şu planı öneriyoruz. 1) Öyle bir x kesirli sayısı bulalım ki, bir zaman sonra a_n'ler x'ten küçük olsunlar. 2) Öyle bir y kesirli sayısı bulalım ki, bir zaman sonra b_n'ler y'den büyük olsunlar. 3) $x < y$ olsun. 4) $q = (x+y)/2$ alalım (x'le y'nin orta noktası) ve $a < i(q) < b$ eşitsizliklerini kanıtlayalım.



Aşağıdaki resim kanıtın fikrini resimlemeye çalışıyor, o resimden kanıtı takip etmeye çalışın.

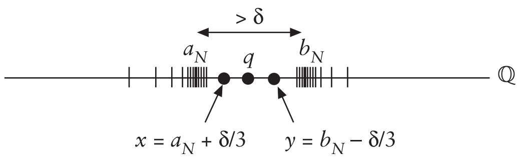


$a < b$ olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı ve N_1 göstergeci vardır ki, $n > N_1$ için $a_n + \delta < b_n$ olur.

$(a_n)_n$ temel bir dizi olduğundan, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, $n, m > N_2$ için $|a_n - a_m| < \delta/3$ olur.

$(b_n)_n$ temel bir dizi olduğundan, öyle bir N_3 göstergeci vardır ki, $n, m > N_3$ için $|b_n - b_m| < \delta/3$ olur.

Şimdi $N = \max\{N_1, N_2, N_3\} + 1$ ve $x = a_N + \delta/3, y = b_N - \delta/3$ olsun. Elbette x ve y birer kesirli sayıdırlar.



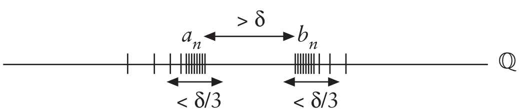
$n > N$ için, $a_n < x$ eşitsizliğini kanıtlayalım:

$$a_n = a_N + a_n - a_N \leq a_N + |a_n - a_N| < a_N + \delta/3 = x.$$

Ve $n > N$ için, $y < b_n$ eşitsizliğini kanıtlayalım.

$$b_n = b_N + b_n - b_N \geq b_N - |b_n - b_N| > b_N - \delta/3 = y.$$

Şimdi de $x < y$ eşitsizliğini kanıtlayalım. Daha iyisini



bile yapabiliriz: $x + \delta/3 < y$ eşitsizliğini bile kanıtlayabiliriz:

$$\begin{aligned} y - x &= (b_N - \delta/3) - (a_N + \delta/3) \\ &= b_N - a_N - 2\delta/3 > \delta - 2\delta/3 = \delta/3 > 0. \end{aligned}$$

Şimdi $q = (x+y)/2$ olsun, yani x'le y'nin orta noktası.

$$a < i(q) < b$$

eşitsizliklerini kanıtlamamız gerekiyor. Sadece $a < i(q)$ eşitsizliğini kanıtlayacağız, diğeri çok benzer.

Öyle bir $\delta_1 > 0$ ve M bulmalıyız ki, her $n > M$ için $a_n + \delta_1 < q$ olmalı.

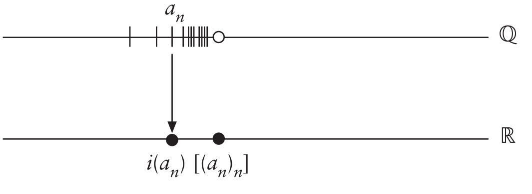
Önce $q - x = (y-x)/2 > (\delta/3)/2 = \delta/6$ eşitliğinin farkına varalım. Şimdi $\delta_1 = \delta/6$ ve $N = M$ alırsak istediğimizi buluruz: Her $n > N$ için,

$$a_n + \delta_1 < x + \delta_1 = x + \delta/6 < q.$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Son olarak, daha sonra ihtiyaç duyacağımız bir sonuç kanıtlayalım.

Önsav 28.5. *Eğer $(a_n)_n$ azalmayan bir temel diziyse o zaman her n için $i(a_n) \le [(a_n)_n]$.*



Bu sonuç aşağıdaki daha genel önsavın bir sonucudur. (Neden? Not: Önsav 28.5'in ifadesindeki $i(a_n)$ terimindeki n ile $[(a_n)_n]$ terimindeki n'lerin işlevleri ayrı. Birincisindeki n sabit bir göstergeç, ikincisindeki ise bir değişken. Birincisini m yaparsanız rahat edersiniz.)

Önsav 28.6. *Eğer $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ temel dizilerse ve belli bir göstergeçten sonra $a_n \le b_n$ ise o zaman $[(a_n)_n] \le [(b_n)_n]$ olur.*

Kanıt: Eğer $c_n = a_n - b_n$ alınırsa, aşağıdaki önsavın kanıtlanmasının yeterli olduğu görülür. □

Önsav 28.7. *Eğer $(c_n)_n$ bir temel diziyse ve belli bir göstergeçten sonra $c_n \le 0$ ise o zaman $[(c_n)_n] \le 0_{\mathbb{R}}$ olur.*

Kanıt: $[(c_n)_n] > 0_{\mathbb{R}}$ varsayımını yapalım. O zaman öyle bir $\delta > 0$ kesirli sayısı vardır ki, belli bir göstergeçten sonra $\delta < c_n$ olur ki bu da $c_n \le 0$ varsayımıyla çelişir. □

29. $\mathbb{R}$'nin Tamlığı ve $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Bu bölümde, $\mathbb{R}$'de bir sayıya yakınsamaya meyilli her $\mathbb{R}$-dizinin gerçekten bir gerçel sayıya yakınsadığını göstereceğiz.

$\mathbb{Q}$ cisminde bunun doğru olmadığını görmüştük, örneğin $\sqrt{2}$'ye yakınsamak isteyen, ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığı için yakınsayamayan kesirli bir sayı dizisinin varlığını göstermiştik: Terimleri pozitif kesirli sayılar olan öyle bir $(a_n)_n$ temel dizisi bulmuştuk ki, karelerin limiti 2'ydi, yani $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 2$ idi ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığından dizinin kendisi hiçbir kesirli sayıya yakınsamıyordu.

"$\mathbb{R}$'de yakınsamaya meyilli dizi" demek, temel $\mathbb{R}$-dizisi demektir. Alışılmış tanım şöyle: $(x_n)_n$ bir $\mathbb{R}$-dizisi olsun. Eğer $\mathbb{R}$'nin her pozitif ϵ sayısı için, N'den büyük her n, $m > N$ sayısının

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliğini sağladığı bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***temel*** $\mathbb{R}$-dizisi denir. ($\mathbb{R}$'de mutlak değerin tanımı ve özellikleri için bkz. Bölüm 27.5, Alıştırma 2.) Yani bir $(x_n)_n$ gerçel sayı dizisinin temel $\mathbb{R}$-dizisi olması için, her pozitif ϵ gerçel sayısı için, öyle bir N göstergeci olmalı ki, her n, $m > N$ için,

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanmalı. Eğer bu tanımda $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{Q}$ alınırsa, temel $\mathbb{Q}$-dizisinin tanımı elde edilir.

Temel $\mathbb{R}$-dizilerine de matematikte geleneksel olarak ***Cauchy dizileri*** denir ve biz de bu terminolojiyi kullanacağız, ama temel $\mathbb{Q}$-dizilerine temel $\mathbb{Q}$-dizileri demeye devam edeceğiz.

$\mathbb{R}$'de bir dizinin limitinin ne demek olduğunu da tanımlayalım: $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her pozitif $\epsilon \in \mathbb{R}$ için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya ***yakınsar*** ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin ***limitidir*** denir. Böyle bir diziye ***yakınsak dizi*** denir, aksi hâlde diziye ***ıraksak*** denir.

Alıştırmalar

29.1. $(x_n)_n$, x'e yakınsayan bir gerçel sayı dizisiyse, $(|x_n|)_n$ dizisinin $|x|$'e yakınsadığını gösterin.

29.2. Bir gerçel sayı dizisinin en fazla bir gerçel sayıya yakınsayabileceğini kanıtlayın. (Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ hakkı doğar.)

29.3. Kesirli sayı dizileriyle ilgili teoremleri gerçel sayı dizilerine uyarlayıp kanıtlayın.

29.4. "$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x| \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$" önermesini kanıtlayın.

Şu önemli ve sık sık kullanılacak kanıtlarda: $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan (Teorem 28.4), tanımlardaki ϵ'u $i(\mathbb{Q})$ althalkasından seçebiliriz. Nitekim eğer $(x_n)_n$ gerçel sayı dizisi, her $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ gerçel sayısı için,

öyle bir N vardır ki her n, $m > N$ için,

$|x_n - x_m| < \epsilon$ olur

özelliğini sağlıyorsa, o zaman elbette $(x_n)_n$ dizisi, her $q > 0$ kesirli sayısı için,

öyle bir N vardır ki her n, $m > N$ için,

$|x_n - x_m| < i(q)$ olur

özelliğini de sağlar. Tersine, eğer $(x_n)_n$ dizisi yukardaki ikinci özelliği sağlıyorsa ve

$$\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$$

herhangi bir gerçel sayıysa, $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, $0 < i(q) < \epsilon$ eşitsizliklerini sağlayan pozitif bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır ve ikinci özelliğe göre her n, $m > N$ için, $|\alpha_n - \alpha_m| < i(q) < \epsilon$ eşitsizliklerinin sağlandığı bir N vardır.

Aynı şey yakınsaklık kavramı için de geçerlidir.

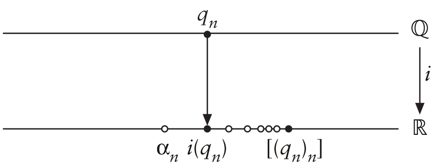
İşte bu bölümde kanıtlayacağımız ana teorem:

Teorem 29.1. *$\mathbb{R}$'de her Cauchy dizisinin bir limiti vardır. Matematiksel jargonla söylemek gerekirse, $\mathbb{R}$* ***tamdır****.*

Bu teorem sayesinde, bir gerçel sayı dizisinin yakınsak olduğunu anlamak için illa dizinin limitini bulmaya gerek kalmayacak.

Kanıtımızın planı şöyle: Bir $(\alpha_n)_n$ Cauchy dizisi verilmiş olsun.

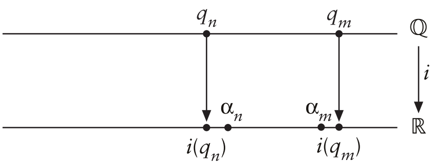
Birinci Adım: Teorem 28.4'e göre $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğundur. Demek ki her α_n gerçel sayısının "çok çok yakınında" $i(\mathbb{Q})$'den bir eleman bulabiliriz.



Bu elemana $i(q_n)$ diyelim. $q_n \in \mathbb{Q}$ elbette. $i(q_n)$, α_n gerçel sayısına $i(1/n)$ kadar yakın olsun, yani,

$$|\alpha_n - i(q_n)| < i(1/n)$$

olsun. $(\alpha_n)_n$ dizisiyle uğraşacağımıza, çok daha makul bir gerçel sayı dizisi olan $(i(q_n))_n$ dizisiyle uğraşacağız.

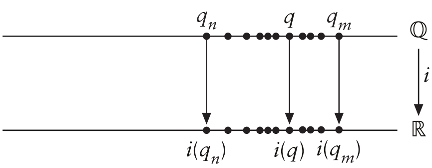


$(\alpha_n)_n$ dizisi yerine ona çok yakın olan $(q_n)_n$ dizisiyle ilgileneceğiz

İkinci Adım: $i(q_n)$ sayısı α_n'ye de çok yakın olduğundan, $(i(q_n))_n$ dizisinin de aynen $(\alpha_n)_n$ dizisi gibi bir Cauchy dizisi olduğunu kolaylıkla kanıtlayacağız.
Üçüncü Adım: Bir önceki adımdan $(q_n)_n$ dizisinin temel bir $\mathbb{Q}$-dizisi olduğu çıkacak. Demek ki $[(q_n)_n]$ bir gerçel sayıdır.
Dördüncü Adım: Ardından $(i(q_n))_n$ dizisinin $[(q_n)_n]$ gerçel sayısına yakınsadığını kanıtlayacağız.
Beşinci Adım: Dördüncü adımdan $(\alpha_n)_n$ dizisinin $[(q_n)_n]$ gerçel sayısına yakınsadığı çıkacak ve teorem kanıtlanacak.

Kanıtta bir yerde $(i(1/n))_n$ gerçel sayı dizisinin $0_\mathbb{R}$ sayısına yakınsadığını kanıtlamamız gerekecek. Bunu hemen yapalım, hatta daha genel bir şey kanıtlayalım.

Önsav 29.2. *$(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi q kesirli sayısına yakınsıyorsa, $(i(q_n))_n$ gerçel sayı dizisi $i(q)$ gerçel sayısına yakınsar.*



Kanıt: $\epsilon > 0_\mathbb{R}$ herhangi bir gerçel sayı olsun. Teorem 28.4'e göre,

$$0_\mathbb{R} < i(e) < \epsilon$$

eşitsizliklerini sağlayan bir e kesirli sayısı vardır. Önsav 28.1'e göre $e > 0$'dır. $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi q kesirli sayısına yakınsadığından, öyle bir N göstergeci vardır ki, her $n > N$ için, $|q_n - q| < e$ olur. Her iki tarafın da i-imgesini alırsak, Önsav **??**'den, $|i(q_n) - i(q)| < i(e) < \epsilon$ bulunur. □

xxx Önsav 16.2'ye referans verilmiş. Yok. xxx

Sonuç 29.3. $\lim_{n\to\infty} i(1/n) = 0_\mathbb{R}$.

Kanıt: Kanıttan ziyade açıklamalara ihtiyacımız var. Önsava göre,

$$\lim_{n\to\infty} i(1/n) = i\left(\lim_{n\to\infty} 1/n\right) = i(0) = 0_{\mathbb{R}}.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 1'in Kanıtı: İlk adımdan başlayalım: $n > 0$ bir doğal sayı olsun. Demek ki $1/n > 0$ ve $i(1/n) > 0_{\mathbb{R}}$'dir. $i(\mathbb{Q})$, $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan (Teorem 28.4), $\alpha_n - i(1/n)$ ile $\alpha_n + i(1/n)$ arasında $i(\mathbb{Q})$'den bir eleman vardır. Bu elemana, $q_n \in \mathbb{Q}$ için, $i(q_n)$ diyelim. Demek ki,

$$\alpha_n - i(1/n) < i(q_n) < \alpha_n + i(1/n),$$

yani $-i(1/n) < i(q_n) - \alpha_n < i(1/n)$, dolayısıyla $|i(q_n) - \alpha_n| < i(1/n)$.

Birinci adım tamamlandı. (Eksikliğini hissediyorsanız $q_0 = 0$ alabilirsiniz.) Sıra ikinci adımda.

İkinci Adım: $(i(q_n))_n$ *bir Cauchy dizisidir.*

$\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ olsun. Öyle bir N göstergeci bulacağız ki, her n, $m > N$ için, $|i(q_n) - i(q_m)| < \epsilon$ olacak. Bunun için, $(\alpha_n)_n$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu ve $i(q_n)$'yi de istediğimiz kadar α_n'ye yaklaştıracağımızı kullanacağız.

$$|i(q_n) - i(q_m)|$$

ifadesiyle oynayıp

$$|i(q_n) - i(q_m)| < \epsilon$$

eşitliğinin geçerli olması için n ve m'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. $|i(q_n) - i(q_m)|$ ifadesiyle oynayalım:

$$\begin{aligned} |i(q_n) - i(q_m)| &< |i(q_n) - \alpha_n + \alpha_n - \alpha_m + \alpha_m - i(q_m)| \\ &\leq |i(q_n) - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha_m| + |\alpha_m - i(q_m)| \\ &\leq i(1/n) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/m). \end{aligned}$$

(İkinci satırdaki eşitsizlik için bkz. Bölüm 27.5, Alıştırma 2.) Demek ki, $i(1/n)$, $|\alpha_n - \alpha_m|$, $i(1/m)$ ifadelerinin her birini $\epsilon/3$'ten küçük yaparsak istediğimiz olur. N_1, her n, $m > N_1$ için,

$$|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{\epsilon}{3}$$

eşitsizliğinin sağlandığı göstergeç olsun. $(\alpha_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan böyle bir göstergeç vardır. Sonuç 29.3'e göre, $(i(1/n))_n$ gerçel sayı dizisinin $0_{\mathbb{R}}$ sayısına yakınsadığından, öyle bir N_2 göstergeci vardır ki, her $n > N_2$ için,

$$i(1/n) < \frac{\epsilon}{3}$$

olur. Şimdi N, hem N_1'den hem de N_2'den büyükeşit herhangi bir doğal sayı olsun, mesela $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. O zaman, her n, $m > N$ için,

$$\begin{aligned} |i(q_n) - i(q_m)| &< i(1/n) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/m) \\ &< i(1/N) + |\alpha_n - \alpha_m| + i(1/N) \\ &< \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

Üçüncü Adım: $(q_n)_n$ *temel bir dizidir.*

$\epsilon > 0$ herhangi bir kesirli sayı olsun. O zaman $i(\epsilon) > 0_{\mathbb{R}}$'dir. İkinci adıma göre $(i(q_n))_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $|i(q_n) - i(q_m)| < i(\epsilon)$ olur. Buradan ve Önsav 28.1'den $|q_n - q_m| < \epsilon$ çıkar.

Üçüncü adımdan, $[(q_n)_n]$ diye bir gerçel sayının varlığı çıkar.

Dördüncü Adım: $(i(q_n))_n$ dizisi $[(q_n)_n]$ *gerçel sayısına yakınsar.*

Herhangi bir $e > 0$ kesirli sayısı seçelim. Öyle bir M bulmak istiyoruz ki, her $m > M$ için

$$|[(q_n)_n] - i(q_m)| < i(e)$$

olsun. ($\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$ gerçel sayısı yerine $e > 0$ kesirli sayısı seçebileceğimizi bölümün başında göstermiştik.) Öte yandan,

$$|[(q_n)_n] - i(q_m)| = |[(q_n)_n] - [s(q_m)]| = |[(q_n - q_m)_n]| = [(|q_n - q_m|)_n]$$

eşitlikleri geçerlidir ve

$$\text{“}[(|q_n - q_m|)_n] < i(e)\text{”}$$

ifadesi,

“öyle bir N göstergeci ve $d > 0$ kesirli sayısı vardır ki, $n > N$ için,

$$\text{“}|q_n - q_m| + d < e\text{”}$$

anlamına gelir. Demek ki verilmiş herhangi bir $e > 0$ kesirli sayısı için, öyle M ve N göstergeçleri ve $d > 0$ kesirli sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n > N$ ve her $m > M$ için

$$|q_n - q_m| + d < e$$

olsun. N'yi M'ye eşit bulmanın bir sakıncası olamaz elbet. İşimiz bayağı kolaylaştı: $(q_n)_n$ dizisi temel bir dizi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için,

$$|q_n - q_m| < e/2$$

olur. Şimdi $d = e/2$ seçelim. Her n, $m > N$ için

$$|q_n - q_m| + d < e/2 + e/2 = e$$

olur.

Beşinci Adım: $(\alpha_n)_n$ *dizisi* $[(q_n)_n]$ *gerçel sayısına yakınsar.*

Birinci adıma göre, her n için, $|i(q_n) - \alpha_n| < i(1/n)$. Ayrıca Önsav 29.2'ye (ya da Sonuç 29.3'e göre)

$$\lim_{n\to\infty} i(1/n) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Bu iki olgudan ve Sandviç Teoremi'nden (Teorem 19.10),

$$\lim_{n\to\infty} |i(q_n) - \alpha_n| = 0_{\mathbb{R}}$$

çıkar.

Şimdi $[(q_n)_n]$ gerçel sayısını α ile gösterelim ve bildiklerimizi yazalım:

a. $\lim_{n\to\infty} i(q_n) = \alpha$. (Dördüncü adım.)

b. $\lim_{n\to\infty} |i(q_n) - \alpha_n| = 0_{\mathbb{R}}$.

Sonucumuz bu iki olgudan çıkacak: $\epsilon > 0_{\mathbb{R}}$, herhangi bir pozitif sayı olsun.

$$|\alpha_n - \alpha|$$

sayısını belli bir göstergeçten sonra ϵ'dan küçük yapmaya çalışacağız.

$$|\alpha_n - \alpha| = |\alpha_n - i(q_n) + i(q_n) - \alpha| \leq |\alpha_n - i(q_n)| + |i(q_n) - \alpha|$$

eşitsizliğinden, $|\alpha_n - i(q_n)|$ ve $|i(q_n) - \alpha|$ sayılarını $\epsilon/2$'den küçük yapmak gerektiği anlaşılır. Varsayımlardan dolayı her ikisi de mümkün. Ana teorem kanıtlanmıştır. □

29.1 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Kesirli sayılar kümesi gerçel sayılar kümesinin bir altkümesidir... diye öğretilmiştir bize. Oysa burada inşa edildiği şekilde, hiçbir kesirli sayı bir gerçel sayı olamaz, çünkü, burada tanımlandığı biçimiyle, her gerçel sayı bir kesirli sayı kümesidir.

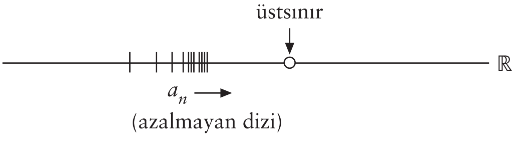
Kesirli sayıları gerçel sayı olarak görmenin birçok yolu vardır. Bu yolların en kestirmesi, kesirli sayılar kümesinin eski tanımını unutup yeni tanım olarak $i(\mathbb{Q})$'yü kabullenmektir. Bir başka yöntem, $\mathbb{R}$'nin tanımını değiştirmektir: Eğer eski $\mathbb{R}$'den $i(\mathbb{Q})$'yü çıkarıp yerine $\mathbb{Q}$'yü koyarsak, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olur:

$$\text{yeni } \mathbb{R} = (\text{eski } \mathbb{R} \setminus i(\mathbb{Q})) \cup \mathbb{Q}$$

Bölüm 10.8'te bu yöntemi ayrıntılarıyla açıklamıştık. Bundan böyle $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{Q}$'nin altkümesi olduğunu varsayacağız.

30. Sınırlı ve Artan Diziler

Bu bölümde kanıtlayacağımız teoremi, "artan ve üstten sınırlı bir gerçel sayı dizisinin üstsınıra çarpmasına ramak kalır" biçiminde özetleyebiliriz. (Üstsınır kavramını Bölüm 32'da göreceğiz.)



İşte teorem:

Teorem 30.1. *Sınırlı ve artan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin* $\mathbb{R}$*'de limiti vardır.*

Kanıt: Kanıtın ana fikri belli: Eğer dizi artansa ama her sayıyı aşamıyorsa, o zaman dizinin terimleri belli bir sayıyı aşmamak için giderek daha fazla birbirine sokulmalı, yani dizi bir Cauchy dizisi olmalı. Bu fikri uygulamaya sokalım.

Teoremin doğru olmadığını varsayıp bir çelişki elde edelim. $(a_n)_n$, sınırlı ve artan ama Cauchy olmayan bir dizi olsun.

$(a_n)_n$ Cauchy dizisi olmadığından, öyle bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı vardır ki, her N için,

$$|a_n - a_m| \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan n, $m > N$ vardır. Dizi arttığından, bunu şöyle de yazabiliriz: Öyle bir $\epsilon > 0$ gerçel sayısı vardır ki, her N için,

$$a_n - a_m \geq \epsilon$$

sağlayan $n > m > N$ vardır. Böyle bir ϵ'u sabitleyip dizinin ayyuka çıkmak zorunda olduğunu gösterelim. Yukardaki özelliğe (*) adını verelim.

(*) özelliğinde $N = 0$ alalım. O zaman,

$$a_{n_1} - a_{n_0} \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan $n_1 > n_0 > 0$ vardır.

(*) özelliğinde $N = n_1$ alırsak, $a_{n_3} - a_{n_2} \geq \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan

$$n_3 > n_2 > n_1$$

göstergeçleri buluruz. $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ olduğundan, $a_{n_3} - a_{n_1} \geq a_{n_3} - a_{n_2} \geq \epsilon$ olur. Özetle: $n_3 > n_1$ için,

$$a_{n_3} - a_{n_1} \geq \epsilon.$$

Ardından, (*) özelliğinde $N = n_3$ alarak, $a_{n_5} - a_{n_4} \geq \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan $n_5 > n_4 > n_3$ buluruz. $a_{n_4} \geq a_{n_3}$ olduğundan, $a_{n_5} - a_{n_3} \geq a_{n_5} - a_{n_4} \geq \epsilon$ olur: Özetle: $n_5 > n_3 > n_1$ için,

$$a_{n_5} - a_{n_3} \geq \epsilon.$$

Bunu böylece sürdürebiliriz: Eğer, her $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için,

$$a_{n_{2i+1}} - a_{n_{2i-1}} \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan

$$n_0 < n_1 < n_3 < n_5 < \ldots < n_{2k+1}$$

göstergeçleri bulunmuşsa, bir sonraki aşamada, (*) özelliğinde $N = n_{2k+1}$ alıp,

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+2}} \geq \epsilon$$

eşitsizliğini sağlayan

$$n_{2k+1} < n_{2k+2} < n_{2k+3}$$

göstergeçleri bulunur. $a_{n_{2k+2}} \geq a_{n_{2k+1}}$ olduğundan,

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+1}} \geq a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+2}} \geq \epsilon$$

olur.

Şimdi $a_{n_{2k+1}}$'in k ile birlikte çok büyüdüğünü, her sayıyı aştığını gösterelim. Önce bulduklarımızı altalta yazalım:

$$\begin{aligned} a_{n_3} - a_{n_1} &\geq \epsilon \\ a_{n_5} - a_{n_3} &\geq \epsilon \\ a_{n_7} - a_{n_5} &\geq \epsilon \\ &\ldots \\ a_{n_{2k+3}} - a_{n_{2k+1}} &\geq \epsilon. \end{aligned}$$

Ve bunları toplayalım. Sadeleştirmelerden sonra şu kalır:

$$a_{n_{2k+3}} - a_{n_1} \geq (k+1)\epsilon,$$

yani

$$a_{n_{2k+3}} \geq (k+1)\epsilon + a_{n_1}$$

buluruz. Görüldüğü gibi, eğer k'yi yeterince büyük alırsak, $a_{n_{2k-1}}$ terimi her sayıyı aşar ve bu da dizinin sınırlı olmasıyla çelişir. □

Sonuç 30.2. *Sınırlı ve azalan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin* $\mathbb{R}$*'de limiti vardır.*

Kanıt: Eğer $(a_n)_n$, sınırlı ve azalan bir diziyse, $(-a_n)_n$, sınırlı ve artan bir dizidir, dolayısıyla Cauchy'dir. Dolayısıyla $(a_n)_n$ dizisi de Cauchy'dir. □

Alıştırmalar

30.1. Eğer $r \in (0,1)$ ise $(r^n)_n$ dizisinin azalan ve alttan sınırlı olduğunu kanıtlayın. Dizinin limitinin 0 olduğunu kanıtlayın. (**İpucu:** Limite ℓ diyelim. $(r^{2n})_n$ dizisi hem ℓ'ye hem ℓ^2'ye yakınsar. Teorem 20.2'de bunu $\mathbb{Q}$ için kanıtlamıştık, ama bu kanıt değişik.)

30.2. $(a_n)_n$ artan ve a'ya yakınsayan bir diziyse, her n için, $a_n \leq a$ eşitliğini kanıtlayın.

30.3. Teorem 30.1'in Arşimet olmayan sıralı cisimler için yanlış olduğunu gösterin.

31. İki Yakınsak Gerçel Dizi Örneği

Burada geçen bölümde kanıtladığımız teoremin birkaç uygulamasını göreceğiz. Teoremi anımsayalım: *Sınırlı ve azalmayan her gerçel sayı dizisi Cauchy dizisidir, dolayısıyla böyle bir dizinin* $\mathbb{R}$*'de limiti vardır.*

Notlar ve Örnekler

31.1. Her $r \in \mathbb{R}$ için, $\lim_{n\to\infty} r^n/n! = 0$.

Kanıt: Bunu Örnek 20'te $\mathbb{Q}$ için kanıtlamıştık. Burada aynı şeyi çok daha kolay biçimde $\mathbb{R}$ için yapacağız. Alıştırma 4'e göre, r yerine $|r|$ alarak $r \geq 0$ varsayımını yapabiliriz. $x_n = r^n/n! \geq 0$ olsun. x_{n+1} ile x_n arasında çok basit bir ilişki vardır:

$$x_{n+1} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{r}{n+1}\frac{r^n}{n!} = \frac{r}{n+1}x_n.$$

Eğer n'yi yeterince büyük, diyelim N'den büyükeşit seçersek, $r/(n+1)$ sayısı 1'den küçük olur ve $x_{n+1} < x_n$ eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik her $n > N$ için doğru olduğundan, bundan, $(x_n)_n$ dizisinin bir zaman sonra azalan bir dizi olduğu anlaşılır. Önsav 29.2'ye göre xxx Referans Sonuç 17.2'ye. Sonuç 17.2 yok. Önsav 17.2 var.xxx dizinin N'inci terimden sonraki kuyruğu belli bir x sayısına yakınsar; dolayısıyla dizinin kendisi de x'e yakınsar. Bu x'i bulmalıyız. Yukarda kanıtladığımız

$$x_{n+1} = \frac{r}{n+1}x_n$$

eşitliğinin her iki tarafınının da n sonsuza giderken limitini alırsak, $x = 0.x = 0$ buluruz.

Notlar ve Örnekler

31.2. $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ vardır ve 2 ile 3 arasında bir sayıdır.

Birinci Adım. *Her* $n > 0$ *doğal sayısı ve her* $x > -1$ *için,*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Kanıt n üzerine tümevarımladır ve çok kolaydır.

İkinci Adım. *Her* $n > 0$ *doğal sayısı için,*

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le 3.$$

Birinci adımda $x = 1/n$ alırsak,

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eşitsizliği hemen çıkar. $(1 + 1/n)^n \le 3$ eşitsizliği aşağıdaki dikkatli hesaptan çıkar.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \frac{1}{n^i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \\
&< 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot i} \le 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} \\
&= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^i}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.
\end{aligned}$$

Üçüncü Adım. *Her* $n > 0$ *doğal sayısı için,*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Sağdaki ifadeyle biraz oynayalım.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı, $a = 1 + 1/n$ yazarsak, kanıtlamak istrediğimiz eşitsizlik,

$$a^n \le \left(a - \frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine, yani

$$\frac{1}{a} \leq \left(1 - \frac{1}{an(n+1)}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine, yani

$$\frac{n}{n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğine dönüşür. Ama dikkat edilirse bu aynen $x = 1/(n+1)^2$ için, birinci adımdaki eşitsizliktir bu:

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \leq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Artık kanıtımız tamamlanmıştır.

Analiz kitabımızda [GA] xxx cite bu dizinin e adı verilen matematiğin ve evrenin çok önemli bir sabitine yakınsadığını göstereceğiz.

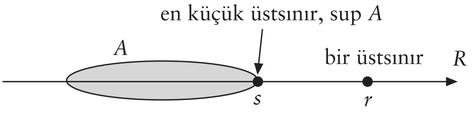
32. En Küçük Üstsınır

$\mathbb{R}$'nin tamlığını, yani $\mathbb{R}$'nin her temel dizisinin yakınsak olduğunu gösterdik. Bu, $\mathbb{Q}$'de olmayan bir özellikti. Bu bölümde $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$'de olmayan "bir başka" önemli özelliğini göstereceğiz. "Bir başka"yı tırnak içinde yazmamızın nedeni, göstereceğimiz bu yeni özelliğin aslında $\mathbb{R}$'nin tamlığına eşdeğer olması yani aslında gerçekten bir başka özellik olmaması...

Önce teoremi yazalım, teoremde geçen terimleri hemen akabinde tanımlayacağız.

Teorem 32.1. *$\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı olan her altkümesinin bir en küçük üstsınırı vardır.*

Önce teoremdeki terimleri açıklayalım. R tamsıralı bir küme olsun, örneğin $R = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{Q}$ olabilir (bildiğimiz sıralamayla). $A \subseteq R$ ve $r \in R$ olsun. Eğer her $a \in A$ için, $a \leq r$ ise, r'ye A'nın ***üstsınırı*** adı verilir. Eğer $s \in R$, A'nın üstsınırlarının en küçüğüyse, yani s, A'nın bir üstsınırıysa ve A'nın her r üstsınırı için $s \leq r$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman s'ye A'nın (R'de) ***en küçük üstsınırı*** adı verilir. Herhangi bir



A ve R için, A'nın üstsınırı olmayabilir. Ayrıca bir üstsınır olduğunda da üstsınırların en küçüğü olmayabilir. Örneğin, $A = \mathbb{Z}$ ve $R = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise, A'nın R'de üstsınırı yoktur. Eğer $R = \mathbb{Q}$ ve

$$B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

ise B'nin ($\mathbb{Q}$'de) üstsınırı vardır ama ($\mathbb{Q}$'de) en küçük üstsınırı yoktur (bkz. Alıştırma 3). Öte yandan lise yıllarından beri bilindiği üzere B'nin $\mathbb{R}$'de en küçük üstsınırı vardır (ve bu en küçük üstsınır $\sqrt{2}$ diye yazılan gerçel sayıdır.) Bu bölümde bunu matematiksel olarak kanıtlayacağız.

Bir A altkümesinin en küçük üstsınırı, varsa, biriciktir elbette (neden elbette?) ve bu eleman $\sup A$ ya da eküs(A) diye yazılır. Eğer en küçük üstsınırın R'de alındığı illa belirtilmek isteniyorsa, o zaman $\sup_R A$ yazılımı yeğlenir.

Alıştırmalar

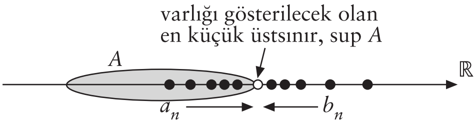
32.1. S tamsıralı bir küme ve $A \subseteq R \subseteq S$ olsun. $\sup_S A$ ve $\sup_R A$ varsa $\sup_S A \le \sup_R A$ eşitsizliğini kanıtlayın.

32.2. Öyle tamsıralı bir S ve $A \subseteq R \subseteq S$ altkümeleri bulun ki,
a. $\sup_R A$ olsun ve A'nın bir elemanı olsun.
b. $\sup_R A$ olsun ama A'nın bir elemanı olmasın.
c. $\sup_R A$ olmasın ama $\sup_S A$ olsun.
d. $\sup_S A$ olmasın ama $\sup_R A$ olsun.

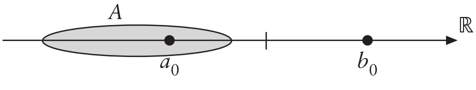
32.3. $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'de bir en küçük üstsınırı olmadığını kanıtlayın.

32.4. Bir kümenin en fazla bir tane en küçük üstsınırı olabileceğini kanıtlayın.

Teorem 32.1'in Kanıtı: A, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve üstten sınırlı bir altkümesi olsun. Amacımız, bir azalmayarak diğeri artmayarak üstsınıra yakınsayan $(a_n)_n$ ve $(b_n)_n$ dizileri bulmak. Bu dizilerin ortak limiti A'nın üstsınırı olacak.



A boşküme olmadığından, A'dan bir a_0 elemanı alabiliriz. b_0 da A'nın bir üstsınırı olsun. Elbette $a_0 \le b_0$.



Şimdi a_0'la b_0'ın orta noktası olan $(a_0+b_0)/2$'ye bakalım. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırı değilse

$$a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$$
$$b_1 = b_0$$

olsun. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırıysa,

$$a_1 = a_0$$
$$b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$$

olsun. Bir sonraki aşamayı aynı biçimde a_0 ve b_0 yerine a_1 ve b_1'le devam ettirelim. Genel olarak,

- $b_{i+1} - a_{i+1} = (b_i - a_i)/2$,
- A'da a_i'den büyükeşit bir eleman vardır,
- b_i, A'nın bir üstsınırıdır

özelliklerini sağlayan bir

$$a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n \le b_n \le \ldots \le b_1 \le b_0$$

dizisi bulduğumuzu varsayalım. Yukarıdaki yöntemle diziyi bir adım daha götürebiliriz: a_n ile b_n'nin orta noktası olan

$$\frac{a_n + b_n}{2}$$

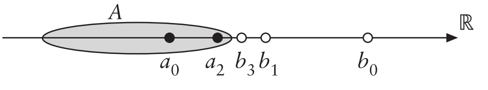
sayısına bakalım. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırı değilse o zaman

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$
$$b_{n+1} = b_n$$

olsun. Eğer bu sayı A'nın bir üstsınırıysa,

$$a_{n+1} = a_n$$
$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

olsun. İstenen tüm özellikler sağlanır.



Her a_{i+1}, ya a_i'ye eşit ya da a_i ve b_i'nin orta noktası.
Her b_{i+1}, ya b_i'ye eşit ya da a_i ve b_i'nin orta noktası.

$(a_n)_n$ artan ve üstten (b_n'ler tarafından) sınırlı bir dizi olduğundan bir limiti vardır (Teorem **??**) Bu limite a adını verelim. Benzer nedenden $(b_n)_n$ dizisinin de bir limiti vardır; bu limite de b diyelim. Elbette, her n için,

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

eşitlikleri doğrudur (Alıştırma 2). Ama

$$b_{i+1} - a_{i+1} = \frac{b_i - a_i}{2}$$

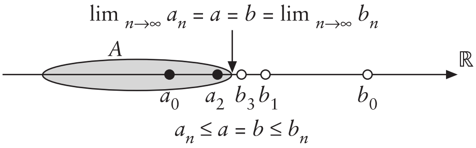
eşitliğinden dolayı, her n için,

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

eşitliği de doğrudur. Demek ki,

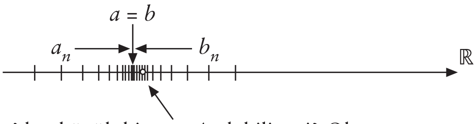
$$0 \leq b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n < \frac{b_0 - a_0}{n}$$

ve tarafların limitini alırsak, sağ taraf 0'a gittiğinden, Sandviç Teoremi'nden dolayı (Teorem 19.10) $b = a$ buluruz.



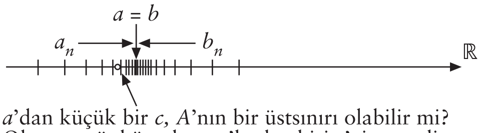
Şimdi a'nın A'nın en küçük üstsınırı olduğunu kanıtlayalım.

Her şeyden önce a, A'nın bir üstsınırı olduğunu kanıtlamalıyız. Aşağıdaki şekilden takip edin. Eğer $x \in A$, a'dan büyük olsaydı, o zaman, $(b_n)_n$ dizisi azalarak (daha doğrusu artmayarak) $b = a$'ya yakınsadığından, belli bir n için, $a \le b_n < x$ olurdu ki, b_n bir üstsınır olduğundan bu imkânsızdır.



a'dan büyük bir $x \in A$ olabilir mi? Olamaz, çünkü yoksa b_n'lerden biri x'in altına inerdi.

Peki a, A'nın en küçük üstsınırı mıdır? Eğer c, a'dan küçük A'nın bir başka üstsınırı olsaydı, $(a_n)_n$ dizisi artarak (daha doğrusu azalmayarak)



a'dan küçük bir c, A'nın bir üstsınırı olabilir mi? Olamaz, çünkü yoksa a_n'lerden biri c'yi geçerdi.

a'ya yakınsadığından, belli bir n için,

$$c < a_n \le a$$

olurdu ki, bu da c'nin A'nın üstsınırı olmasıyla çatışırdı. (Çünkü A'da a_n'den büyükeşit bir eleman vardır ve bu eleman c'den de büyük olurdu...) □

Altsınır ve en büyük altsınır kavramlarını tanımlamayı ve aşağıdaki sonucu teoremden çıkarmayı okura bırakıyoruz.

Sonuç 32.2. *ℝ'nin alttan sınırlı olan ama boş olmayan her altkümesinin bir en büyük altsınırı vardır.* □

33. Gerçel Sayıların Üsleri

Herhangi bir R halkasında, elemanların doğal sayı güçlerini alabiliriz. $r \in R$ ve pozitif bir n tamsayısı için r^n diye bir eleman tahmin edildiği gibi (n üzerine tümevarımla) şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} r^1 &= r, \\ r^{n+1} &= rr^n = r^n r. \end{aligned}$$

Yani r^n, r'nin kendisiyle n defa çarpılmasıyla elde edilen eleman anlamına gelir. Eğer $r \neq 0$ ise $r^0 = 1$ olarak tanımlanır da 0^0 bazen 1 olarak tanımlanır bazen de tanımsız olarak kabul edilir, yazarına, yazısına ve kitabına göre değişir. Biz bu yazılık $0^0 = 1$ tanımını kabul edelim. Ne yararını ne de zararını göreceğiz: Her n doğal sayısı için,

$$\begin{aligned} r^{\,0} &= 1, \\ r^{\,n+1} &= rr^n = r^n r. \end{aligned}$$

Eğer R bir cisimse, ya da cisim olmasa da r, R'de tersinirse, o zaman $n \geq 0$ için, $r^{-n} = (r^n)^{-1} = (r^{-1})^n$ olarak tanımlanır. Bu tanımla, her n, $m \in \mathbb{Z}$ için,

$$\begin{aligned} r^{n+m} &= r^n r^m \\ (r^n)^m &= r^{nm} \end{aligned}$$

eşitlikleri doğrudur. Bunların kanıtları çok kolay ve standarttır, dolayısıyla okura bırakılmıştır. Okurun ayrıca değişmeli her halkada geçerli olan binom açılımını bildiğini de varsayacağız. Ayrıca sıralı halkalarda,

$$0 \leq r \leq s \text{ ve } n > 0 \text{ için } 0 \leq r^n \leq s^n \text{ olur}$$

gibi standart önermeleri de varsayıyoruz.

Bu bölümdeki amacımız, bir $q \in \mathbb{Q}$ için r^q diye bir eleman tanımlamak. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $r^{1/n}$ diye bir sayı tanımlayabilirsek, o zaman,

$$r^{m/n} = (r^{1/n})^m$$

tanımını yapabiliriz. (Sahi yapabilir miyiz! Aşağıdaki gri kutucuğa bakın). $r^{m/n}$'den şimdilik vazgeçip $r^{1/n}$ diye bir eleman tanımlamaya çalışalım. Tanımı şöyle yapmayı deneyelim:

$$r^{1/n} = s \Leftrightarrow s^n = r.$$

Bu doğal tanım denemesine göre, eğer R'de $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir s varsa, $r^{1/n}$ diye bir elemanı s olarak tanımlayabiliriz. Ama acele etmeyelim, eğer R'de $s^n = r$ eşitliğini sağlayan birden çok s varsa o zaman $r^{1/n}$ diye tanımlayacağımız elemanı R'nin $s^n = r$ eşitliğini sağlayan s elemanlarının arasından seçmeliyiz. Rasgele bir seçim yapmak matematikte çoğunlukla bir sorun teşkil ettiğinden, mümkünse bu seçimi en doğal biçimde yapmak isteriz. Eğer R sıralıysa ve işimizi görecek birden çok s varsa, bu s'ler arasından en büyüğünü seçmek doğal bir seçim olarak kabul edilebilir. Örneğin, gerçel sayılarda $s^2 = 2$ eşitliğini sağlayan iki sayı vardır ve 2'nin karekökü olarak bunlardan en büyüğünü (pozitif olanını) seçeriz.

Eğer $r < 0$ ise $s^2 = r$ eşitliğini sağlayan bir s'nin olamayacağını biliyoruz (sıralı halkalarda kareler negatif olamazlar, bkz Önsav 12.7.vi., dolayısıyla eğer n çiftse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir s de olamaz. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin negatif olmayan sayılarına odaklanalım.

Teorem 33.1. *$r \geq 0$ bir gerçel sayıysa ve $n > 0$ bir doğal sayıysa, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir $s \geq 0$ gerçel sayısı vardır.*

Kanıt: Teorem $\mathbb{Q}$'de doğru olmadığından, kanıtta $\mathbb{R}$'ye özgü olan özellikleri kullanmalıyız.

Elbette $r > 0$ ve $n > 1$ varsayımlarını yapabiliriz.

Ayrıca $r \neq 1$ varsayımını da yapabiliriz.

Bir de ayrıca $r > 1$ varsayımını yapabiliriz, çünkü eğer teorem, 1'den büyük sayılar için kanıtlanmışsa, 1'den küçük sayılar için de kanıtlanmış olur. Nitekim, eğer $0 < r < 1$ ise, o zaman $1 < 1/r$'dir, dolayısıyla eğer $s^n = 1/r$ eşitliğini sağlayan bir s bulunmuşsa, $(1/s)^n = r$ eşitliği de sağlanır. Bundan böyle $r > 1$ olsun.

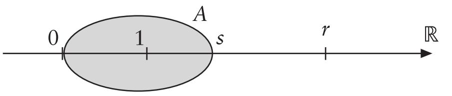
Şimdi asıl kanıta girişelim.

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{\geq 0} : x^n \leq r\}$$

olsun. ($\mathbb{R}^{\geq 0}$, $\mathbb{R}$'nin negatif olmayan elemanlarının kümesidir.) $0, 1 \in A$ olduğundan, A boşküme olamaz. Ayrıca

$$(1 + r)^n \geq 1 + rn > 1 + r > r$$

olduğundan, A üstten sınırlıdır. Demek ki A'nın $\mathbb{R}$'de bir en küçük üstsınırı vardır. (Dolayısıyla kanıt $\mathbb{Q}$'de geçersizdir.) Bu üstsınıra s diyelim. $s^n = r$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bunun için, ne $s^n < r$ ne de $s^n > r$ eşitsizliğininin doğru olduğunu kanıtlayacağız.

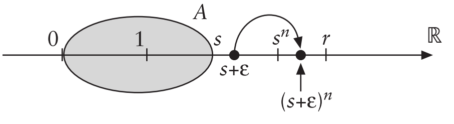


Birinci Adım: $s^n < r$ *eşitsizliği doğru olamaz.*
Kanıt: $s^n < r$ eşitsizliğini varsayalım. Öyle bir $\varepsilon > 0$ bulacağız ki,

$$(s+\varepsilon)^n \le r$$

olacak, yani $s < s+\varepsilon \in A$ olacak, ama s, A'nın en küçük üstsınırı olduğundan bu imkânsız...

$(s+\varepsilon)^n \le r$ eşitsizliğinin doğru olması için ε'un ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Elimizdeki tek ipucu $0 < s^n < r$ eşitsizliği. Eğer böyle bir



$\varepsilon > 0$ varsa, ε'u 1'den de küçükeşit seçebileceğimiz bariz. Bundan böyle, varlığını kanıtlamak istediğimiz ε'un 1'den küçükeşit olduğunu varsayalım. (Kafanız karışmışsa da okumaya devam edin. Özetle, $(s+\varepsilon)^n \le r$ eşitsizliğini sağlayan 1'den küçükeşit bir ε bulacağız.) $(s+\varepsilon)^n$ ifadesiyle oynamaya başlayalım:

$$(s+\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i = s^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \le^? r$$

Doğruluğunu bilmediğimiz $\le$ işaretinin üstüne bir soru işareti koyduk. Demek ki,

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \le^? r - s^n.$$

eşitsizliğini sağlayan bir ε arıyoruz. Yukardaki ifadenin sol tarafıyla (çok büyütmeden) oynayalım. Öncelikle $\varepsilon \le 1$ olacağından, $\varepsilon^i \le \varepsilon$'dur. Soldaki ifadede ε^i yerine ε koyarsak, daha büyük bir ifade buluruz ama ε sayesinde bu daha büyük ifadeyi de istediğimiz kadar küçültebiliriz.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon^i \le \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\varepsilon = \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}\right) \le^? r - s^n.$$

Demek ki, soru işaretli eşitsizliği sağlayan bir ε bulmak yeterli. Ama bu çok kolay,

$$\varepsilon = \frac{r - s^n}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i}}$$

almak yeterli. Haaa... Unuttuk... ε'u 1'den küçükeşit yapmak gerekiyordu. O zaman, ε'u,

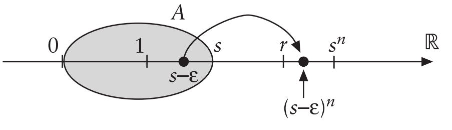
$$\frac{r - s^n}{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} s^{n-i}}$$

sayısıyla 1'in maksimumu seçelim. Birinci adım tamamlanmıştır.

İkinci Adım: *$s^n > r$ eşitsizliği doğru olamaz.*
Kanıt: $s^n > r$ eşitsizliğini varsayalım. Öyle bir $\varepsilon > 0$ bulacağız ki,

$$(s - \varepsilon)^n \geq r$$

olacak, ama $s - \varepsilon$, s'den küçük olduğundan, $s - \varepsilon$, A'nın bir üstsınırı olamaz, dolayısıyla $s - \varepsilon < a$ koşulunu sağlayan bir $a \in A$ olmalı ve o zaman da $r \leq (s - \varepsilon)^n < a^n \leq r$ olur ve bir çelişki elde edilir.



$(s - \varepsilon)^n \geq r$ eşitsizliğinin doğru olması için ε'un ne kadar küçük olması gerektiğini bulalım. Elimizdeki tek ipucu $0 < r < s^n$ eşitsizliği. $(s - \varepsilon)^n$ ifadesiyle oynamaya başlayalım:

$$(s - \varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} s^{n-i} \varepsilon^i = s^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} s^{n-i} \varepsilon^i \geq^? r.$$

ε'u soru işaretli yer doğru olacak biçimde seçmeye çalışacağız. Soru işaretli yeri düzenleyelim.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i+1} s^{n-i} \varepsilon^i \leq^? s^n - r$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varepsilon > 0$ bulmaya çalışıyoruz. Bütün -1'leri atarsak, soldaki ifadeden daha büyük bir ifade buluruz. Ayrıca ε'u 1'den küçükeşit seçmeyi kabul edersek, ε^i'lerin yerine daha büyük olan ε koyabiliriz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i+1} s^{n-i} \varepsilon^i &\leq \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} \varepsilon^i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} \varepsilon = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} s^{n-i} \right) \leq^? s^n - r.\end{aligned}$$

Soru işaretli eşitsizliğin doğru olduğu bir $0 < \varepsilon \leq 1$ seçebilirmiyiz. Evet: ε,

$$\frac{s^n - r}{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} s^{n-i}}$$

sayısıyla 1'in maksimumu olsun. İkinci adım da tamamlanmış ve böylece teorem tamamen kanıtlanmıştır. □

Teorem 33.2. *r bir gerçel sayı ve $n > 0$ bir doğal sayı olsun. n tekse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek s gerçel sayısı vardır. $r > 0$ ve n çiftse, biri negatif diğeri pozitif olmak üzere $s^n = r$ eşitliğini sağlayan iki tane s gerçel sayısı vardır. $r < 0$ ve n çiftse, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan gerçel sayı yoktur.*

Kanıt: Önce, $r > 0$ ise, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tane pozitif s gerçel sayısı olduğunu kanıtlayalım. Bunun için,

$$\text{“}0 < s < t \text{ ise } s^n < t^n\text{”}$$

önermesini kanıtlamak yeterli. Bu da her sıralı halkada geçerlidir ve kanıtı çok basittir.

Eğer n çiftse ve s, $s^n = r$ eşitliğini sağlıyorsa, $-s$ de aynı eşitliği sağlar. Demek ki $s^n = r$ eşitliğini sağlayan sayılar negatif ve pozitif olmak üzere eşit sayıda dağılmışlardır. Yukarda kanıtlanandan bu eşitliği sağlayan en az iki s olduğu çıkar. Üçüncüsünün olamayacağı da yukardakinden çıkar.

Eğer n tekse, o zaman “$s < t$ ise $s^n < t^n$” önermesi her sıralı halkada geçerlidir ve kanıtı çok basittir. Bundan da bu durumda $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek s gerçel sayısı olduğu çıkar.

Sonuç 33.3. *$r \geq 0$ bir gerçel sayıysa $n > 0$ bir doğal sayıysa, $s^n = r$ eşitliğini sağlayan bir tek pozitif s gerçel sayısı vardır.*

Biricik olan bu s sayısını $r^{1/n}$ olarak yazalım. Bu tanımda $r \geq 0$ ve $n > 0$ dır. Bir de şu tanımı yapalım: Eğer $r > 0$ ise,

$$r^{1/(-n)} = (r^{1/n})^{-1}.$$

Ve şimdi m, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ve $r > 0$ için,

$$r^{m/n} = (r^m)^{1/n}$$

tanımını yapalım. Bu tanımın geçerli bir tanım olması için sınanması gereken önerme şudur:

$m, n, u, v \in \mathbb{Z}$, $n, q \neq 0$ ise ve $m/n = u/v$ ise, o zaman,

$$(r^m)^{1/n} = (r^u)^{1/v}$$

eşitliği geçerlidir.

Bunun kanıtını meraklı okura bırakıyoruz. Böylece her $q \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı ve her $r \in \mathbb{R}^{>0}$ için, r^q gerçel sayısı tanımlanmış olur. Bu arada r^0 sayısının 1 olarak tanımlandığına dikkatinizi çekerim. Eğer $q > 0$ ise, $0^q = 0$ tanımı da yapılabilir. $0^0 = 1$ tanımının ne bir önemi ne de bir sakıncası vardır.

Teorem 33.4. *Eğer $q \neq 0$ ise, $r \mapsto r^q$ olarak tanımlanan*

$$\mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$$

fonksiyonu bir eşlemedir. Eğer $q > 0$ ise bu fonksiyon sıralamayı korur, yoksa ters çevirir. Ayrıca, her p, $q \in \mathbb{Q}$ ve her r, $s > 0$ için,

$$\begin{aligned} r^p r^q &= r^{p+q}, \\ (r^p)^q &= r^{pq}, \\ r^p s^p &= (rs)^p \end{aligned}$$

eşitlikleri doğrudur.

Yukardaki kanıtlarda sadece ve sadece $\mathbb{R}$'nin tamlığını ve Arşimet olduğunu kullandık. Dolayısıyla çok daha genel bir teorem doğrudur.

Teorem 33.5. *Yukardaki teoremlerin her biri $\mathbb{R}$ yerine Arşimet özelliği olan sıralı bir tam cisimde de doğrudur. Demek ki böyle bir R cisminde*

$$\{x \in R : x \geq 0\} = \{x^2 : x \in R\}$$

eşitliği doğrudur.

Bu arada r, $s \in \mathbb{R}^{>0}$ için, r^s diye bir sayı tanımlamadığımızı özellikle belirtiriz. Örneğin, şimdilik $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ diye bir sayı yoktur. Hatta $2^{\sqrt{2}}$ diye bir sayı da yoktur henüz, en azından bu aşamaya kadar tanımlanmamıştır.

Örneğin $\mathbb{R}$'de vuku bulan

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^{1/6})^2 = (yok)^2$$

sorunundan dolayı $r^{m/n} = (r^{1/n})^m$ tanımı sorunludur.

$$-1 = (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = ((-1)^2)^{1/6} = 1^{1/6} = 1$$

sorunundan dolayı $r^{m/n} = (r^m)^{1/n}$ tanımıda en hafif deyimiyle rahatsız edicidir. $x^{1/3}$ sayısı $x \mapsto x^3$ eşlemesinin tersi olarak tanımlanabilir.

34. Yakınsak Gerçel Dizi Örnekleri ve Alıştırmalar

Bu bölümde birkaç yakınsak dizi örneği daha göreceğiz. Verdiğimiz örneklerin her biri hem kendi başına hem de kullanılan yöntem açısından önemlidir.

Notlar ve Örnekler

34.1. $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$.
Kanıt: Elbette $2^{1/n} \geq 1$. Ayrıca $(2^{1/n})_n$ azalan bir dizidir. Demek ki limiti vardır ve limiti en az 1 olabilir. Bu limite ℓ diyelim. O zaman,

$$\ell = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2/2n} = (\lim_{n\to\infty} 2^{1/2n})^2 = \ell^2.$$

Bundan da, $\ell = 0$ olamayacağından, $\ell = 1$ çıkar.

34.2. $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.
Kanıt: Elbette $n^{1/n} \geq 1$.
$n \geq 3$ için bu dizinin azalan olduğunu göstereceğiz.

$$(n+1)^{1/(n+1)} \leq n^{1/n} \Leftrightarrow (n+1)^n \leq n^{n+1} \Leftrightarrow (1+1/n)^n \leq n$$

mantıksal denkliklerinden ve Örnek 31'nin ikinci adımından dolayı, $n \geq 3$ için dizinin azalan olduğunu görürüz. Demek ki dizi Cauchy dizisidir ve dolayısıyla $\mathbb{R}$'de bir limiti vardır. Bu limite ℓ diyelim. O zaman, bildiğimiz teoremleri ve Örnek 1'i kullanarak,

$$\begin{aligned} 1 \leq \ell &= \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (2n)^{1/2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/2n} n^{1/2n} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} 2^{1/n}\right)^{1/2} \left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^{1/2} = 1 \cdot \sqrt{\ell} = \sqrt{\ell} \end{aligned}$$

buluruz. Buradan da $\ell = 1$ çıkar.

34.3. Eğer $|x| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$. Aksi hâlde dizi ıraksaktır.
Kanıt: $|x| < 1$ olsun. x yerine $|x|$ alarak, x'in negatif olmadığını varsayabiliriz. Eğer $x = 0$ ise sorun yok. Bundan böyle $0 < x < 1$ olsun.
$\lim_{n\to\infty} n/(n+1) = 1$ olduğundan, öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$x < n/(n+1)$$

olur. Şimdi $n > N$ için,

$$(n+1)x^{n+1} = (n+1)xx^n < nx^n.$$

Demek ki dizi zamanla azalıyor. Dolayısıyla bir limiti vardır. Bu limite ℓ diyelim. Eğer $\ell \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{n\to\infty} nx^n = \lim_{n\to\infty}(n+1)x^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(nx^{n+1} + x^{n+1})\\ &= \lim_{n\to\infty} nx^{n+1} + \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} nx^n x = x \cdot \lim_{n\to\infty} nx^n = x\cdot\ell.\end{aligned}$$

Demek ki $\ell = 0$.

Eğer $|x| \geq 1$ ise, dizi sınırlı olmadığından yakınsak da olamaz.

34.4. $x_0 = 1$ olsun. $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ olsun. Dizinin limitini bulun.

Yanıt: Dizinin ilginçliğini görmek için ilk birkaç terimi yazalım:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2}}, \ldots$$

Eğer limit varsa, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ eşitliğinin her iki tarafın da limitini alarak, $x = \sqrt{2x}$ buluruz. Bunun karesini alalım: $x^2 = 2x$ çıkar. Bundan da $x = 0$ ya da 2 bulunur. Dizinin artan olduğunu kanıtlayalım. $x_n < x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız, yani (dizi bariz biçimde pozitif olduğundan) $x_n^2 < 2x_n$ eşitsizliğini, yani $x_n \leq 2$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Bunu tümevarımla kanıtlayalım.

$$x_0 = 1 < 2$$

eşitsizliği belli. Şimdi $x_n < 2$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman,

$$x_{n+1} = \sqrt{(2x_n)} < \sqrt{(2\cdot 2)} = \sqrt{4} = 2.$$

İstediğimiz kanıtlandı. Demek ki dizi artıyor ve üstten 2 tarafından sınırlı. Demek ki dizinin bir limiti var: 0 ya da 2. Dizi pozitif olduğundan ve arttığından, dizi 2'ye yakınsar.

Alıştırmalar

34.5. Yukardaki örneği 2 yerine herhangi bir $a \geq 0$ için yapın. Örneğin,

$$1, \sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}}, \ldots$$

dizisinin akibeti nedir?

34.6. $x_0 = 1$ olsun. $x_{n+1} = (2x_n)^{1/3}$ olsun. Dizinin limiti var mıdır, varsa limiti bulun.

34.1 Yakınsak Gerçel Dizi Alıştırmaları

Alıştırmalar

34.7. a, $b > 0$ iki gerçel sayıysa, $\lim_{n\to\infty}(a^n + b^n)^{1/n} = \max\{a, b\}$ eşitliğini kanıtlayın.

34.8. Limiti 0 olan ama $(a_n/a_{n+1})_n$ dizisinin yakınsak olmadığı bir $(a_n)_n$ dizisi bulun.

34.9. $-1 < r \leq 1$ ise $\lim_{n\to\infty} r^n/n = 0$ eşitliğini kanıtlayın. Eğer r bu aralıkta değilse dizi hakkında ne diyebilirsiniz?

34.10. $p(X)$, $q(X) \in \mathbb{R}[X]$ iki polinom olsun. $q(X) \neq 0$ olsun. Eğer $\deg p < \deg q$ ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0$$

eşitliğini, eğer $\deg p = \deg q$ ise ve a ve b sırasıyla p ve q polinomlarının başkatsayısıysa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{a}{b}$$

eşitliğini kanıtlayın. Eğer $\deg p > \deg q$ ise dizinin ıraksak olduğunu kanıtlayın.

34.11. Aşağıdaki limitleri bulun ve limitin gerçekten limit olduğunu limitin tanımından hareketle kanıtlayın.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n+2},\ \lim n \to \infty \frac{2n-1}{-n+2},\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{-n^2+2},\ \lim_{n\to\infty} \frac{-n^2-2n-1}{3n^2+2}$$

34.12. Aşağıdaki limitleri hesaplayın:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-n} - n \Big).$$

34.13. Aşağıdaki eşitlikleri gösterin:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n^2+n-5}\right)^n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n^2+n-5}\right)^{\frac{n-1}{3n+2}} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^3-n-5}\right)^{\frac{n^2-1}{3n+2}} = 0.$$

(Son iki eşitlik için gerçel sayılarda kök almayı bilmelisiniz.)

34.14. $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ iki gerçel sayı dizisi olsun. $y \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ve her n için $|y_n - y| \le |x_n|$ olsun. $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ eşitliğini kanıtlayın.

34.15. $(x_n)_n$ yakınsak bir gerçel sayı dizisi olsun.

$$y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

olsun. $(y_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

eşitliğini kanıtlayın.

34.16. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olsun. $n > 2$ için,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$$

olsun.

34.17. Her n için $1 \le x_n \le 2$ eşitsizliklerini kanıtlayın.

34.18. $x_n - x_{n+1} = (-1)^n/2^{n-1}$ eşitliğini kanıtlayın.

34.19. Eğer $m > n$ ise, $|x_n - x_m| < 1/2^{n-1}$ eşitsizliğini kanıtlayın.

34.20. $(x_n)_n$ dizisinin Cauchy olduğunu kanıtlayın.

34.21. $x_{n+2} - x_1 = 1 - 1/2 + 1/4 - \cdots + (-1)^n/2^n$ eşitliğini kanıtlayın ve buradan $\lim_{n\to\infty} x_n$'yi bulun.

34.22. $x_n = 1/1^2 + \cdots + 1/n^2$ olsun.

34.23. Her $n \ge 1$ için, $x_n \le 1 - 1/n$ eşitsizliğini kanıtlayın. Buradan $(x_n)_n$ dizisinin yakınsaklığını çıkarın.

34.24. Yeterince büyük n doğal sayısı için, $n^2 \le 2^n$ eşitsizliğini kanıtlayın. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le 1 + 1/4 + 1/9 + 1/8 = 107/72$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

34.25. x bir gerçel sayı, $x_0 = x$ ve $x_{n+1} = 1/(4 - x_n)$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi varsa ve yakınsaksa, limitin $2 \pm \sqrt{3}$ olması gerektiğini kanıtlayın. Eğer $x \in [2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$ ise limitin $2 + \sqrt{3}$ olması gerektiğini kanıtlayın. Başka x değerleri için dizinin limitini tartışın.

34.26. Eğer her n için,

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $c \in [0, 1)$ varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***büzülen dizi*** adı verilir. Büzülen bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu, dolayısıyla yakınsadığını kanıtlayın.

34.27. Öyle bir $\mathbb{Q}$-dizisi bulun ki, sayılamaz sonsuzlukta Cauchy altdizisi olsun.

34.28. 0'a yakınsayan $\mathbb{Q}$-dizilerinin kardinalitesi kaçtır?

35. Sıralı Halkalarda Yakınsaklık ve Tamlık

35.1 Diziler ve Yakınsaklık

Terimleri bir X kümesinden gelen bir diziye X-dizisi adını verelim. X-dizilerinden oluşan kümeyi $\mathcal{D}(X)$ ile gösterelim.

Sıralı bir halkanın bir r elemanı için, $|r|$ elemanı, $\max\{r, -r\}$ olarak tanımlanır ve adına r'nin ***mutlak değeri*** denir. Mutlak değer tahmin edilen tüm özellikleri sağlar.

Tanım 35.1. *R sıralı bir halka olsun. $(x_n)_n \in \mathcal{D}(R)$ ve $a \in R$ olsun. Eğer her pozitif $\varepsilon \in R$ için,*

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir N doğal sayısı varsa, o zaman, $(x_n)_n$ dizisi (n sonsuza giderken) a'ya **topolojik yakınsar** *ya da a, $(x_n)_n$ dizisinin* **topolojik limitidir** *denir.*

Eğer $R = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise, bu ders notlarında daha önce tanımlanandan değişik bir kavram elde etmeyiz. Bu yüzden "topolojik" nitelemesini kullanmayacağız.

Aslında x_n terimleri ve a elemanı bir başka halkada da olabileceklerinden, "yakınsar" yerine "R'de yakınsar" dememiz daha doğru olur. İlerde bu ufacık ayrımın önemi olacak.

Demek ki $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması için, her pozitif $\varepsilon \in R$ elemanı için öyle bir N doğal sayısı bulmalıyız ki, N'den büyük her n göstergeci için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğru olsun. Bir başka deyişle, $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsaması demek, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - a| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin sonlu olması demektir.

Bir elemana yakınsayan dizilere ***yakınsak*** diziler denir. Yakınsak olmayan dizilere de ***ıraksak*** diziler denir. Ama dikkat: Bir dizinin yakınsaklığı R halkasına göre değişir. Öte yandan $R \leq S$ ise ve $x_n, a \in R$ ise, S'de yakınsaklık R'de yakınsaklığı gerektirir.

Bundan böyle R herhangi bir sıralı cismi simgeleyecek[1]. Birçoğunu $\mathbb{Q}$ sıralı cismi için kanıtladığımız sonuçları bu bölümde herhangi bir sıralı cisme genelleştireceğiz. Genel kanıt, $\mathbb{Q}$ için yaptığımız özel kanıta çok benzediğinde özel kanıta gönderme yapıp genel kanıtı okura paslama hakkını saklı tutacağız. İşte bu hakkı kullandığımız örnek bir önerme:

Olgu: Zamanla sabitleşen bir dizi zamanla sabitleştiği elemana yakınsar.

Şimdi iki doğal ve önemli soru soralım:

1) Sıralı bir cisimde bir dizinin limiti (eğer varsa tabii) biricik midir?

2) R'nin $(1/n)_n$ dizisi illa 0'a yakınsar mı? (R'deki n'nin anlamı için bkz. Bölüm 12.2: $n = n_R$.)

Birinci sorunun yanıtı olumlu:

Önsav 35.2. *Sıralı bir cisimde bir dizinin limiti, eğer varsa, biriciktir.*

Kanıt: Sıralı cisme R diyelim. Hem a hem de b elemanlarına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. $a = b$ eşitliğini kanıtlayacağız. $a \neq b$ eşitsizliğini varsayalım. $\varepsilon = |a-b|/2$ olsun. $(x_n)_n$ dizisi a'ya yakınsadığından, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ doğal sayısı için,

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Aynı nedenden, öyle bir N_2 vardır ki, her $n > N_2$ doğal sayısı için,

$$|x_n - b| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi n hem N_1'den hem de N_2'den büyük herhangi bir doğal sayısı olsun. Şu hesabı yapalım:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a-x_n)+(x_n-b)| \leq |a-x_n| + |x_n-b| \\ &= |a-x_n| + |b-x_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a-b|, \end{aligned}$$

yani $|a-b| < |a-b|$. Bu da bariz bir çelişkidir, bir eleman kendinden küçük olamaz! □

Bu önsava dayanarak, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ yazılımını herhangi bir karmaşaya neden olmadan kullanabiliriz.

[1] Sıralı halkalarda sıfırbölen olamayacağından, sıralı halkaların bölüm cisimleri vardır (bkz. Bölüm 38) ve bölüm cisimleri de (tahmin edileceği biçimde) sıralanabilirler. Yani sıralı halkalardan sözetmek yerine sıralı cisimlerden sözetmekle herhangi bir genellik kaybetmeyiz. Sıralı halkalar için kanıtlanmak istenen önerme, halkanın bölüm cismine geçip orada kanıtlanır ve sonra halkaya geri dönülmeye çalışılır.

35.2 Arşimet Cisimleri

İkinci sorumuzu olumlu yanıtlamaya çalışalım. Bakalım başarabilecek miyiz?

R'den herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. Öyle bir N doğal sayısı bulmak istiyoruz ki, her $n \geq N$ için

$$|1/n - 0| < \varepsilon$$

olsun, yani $1/n < \varepsilon$, yani $n\varepsilon > 1$ olsun. Sıralı bir cisimde olduğumuzdan

$$N\varepsilon > 1_R$$

eşitsizliğini sağlayan bir N bulmak yeterli, çünkü öyle bir n bulundu mu, her

$$n \geq N$$

için,

$$\varepsilon < 1/N \leq 1/n$$

olur. Demek ki soru şu:

Verilmiş herhangi bir pozitif $\varepsilon \in R$ *için,* $N\varepsilon > 1$ *eşitsizliğini sağlayan bir* N *doğal sayısı var mıdır?*

Bu özelliği anımsıyor olmalısınız. $\mathbb{Q}$'nün bu özelliği sağladığını Teorem 11.11'de kanıtlamıştık. Ama her sıralı cismin bu özelliği sağlamadığını Ek 40'te göreceğiz.

Tanım. *R sıralı bir cisim olsun. Eğer her pozitif $\varepsilon \in R$ için, $N\varepsilon > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir N doğal sayısı varsa R'ye* ***Arşimet cismi*** *adı verilir.*

(Bu durumda, bir N doğal sayısı için $N\varepsilon$ biçiminde yazılan elemanlar sadece 1'i değil, R'nin her elemanını aşarlar. Neden?)
Farkına varmışsınızdır, yukarda şu teoremi kanıtladık.

Teorem 35.3. *Sıralı bir cisimde $(1/n)_n$ dizisinin limitinin 0 olması için gerek ve yeter koşul cismin Arşimet cismi olmasıdır.*

Arşimet olmayan bir R cisminde öyle ε elemanları vardır ki, her n doğal sayısı için $n|\varepsilon| < 1$'dir, yani $|\varepsilon|$ ve katları hiçbir zaman 1'i geçemez. Bu tür elemanlara ***sonsuz küçük elemanlar*** ya da ***enfinitezimaller*** denir. 0 bir sonsuz küçüktür. 1 sonsuz küçük değildir. Sonsuz küçük elemanlar kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır (neden?) ama bölme altında kapalı değildir elbet.

Peki, sıralı bir cisimde $(1/n)_n$ dizisi 0'dan başka bir elemana yakınsayabilir mi? Bakalım... Diyelim dizi α'ya yakınsadı. Demek ki $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$|1/n - \alpha| < \varepsilon$$

olur, demek ki

(1) $$\alpha - \varepsilon < 1/n < \alpha + \varepsilon.$$

n yerine $n+1$ alırsak,

$$\alpha - \varepsilon < 1/(n+1) < \alpha + \varepsilon$$

buluruz. Bundan da

(2) $$-\alpha - \varepsilon < -1/(n+1) < -\alpha + \varepsilon.$$

eşitsizlikleri de geçerlidir. (1) ve (2)'yi altalta toplarsak, buluruz. Son eşitsizlikten de ε'un sonsuz küçük olamayacağı çıkar. Demek ki ε'u pozitif bir sonsuz küçük seçemeyiz, yani R'de tek sonsuz küçük 0_R'dır. Yani R Arşimet cismidir. Dolayısıyla Teorem 35.3'e göre $(1/n)_n$ dizisi 0'a yakınsar ve Önsav 35.2'e göre $\alpha = 0$'dır. Şu teoremi kanıtladık.

Teorem 35.4. *Sıralı bir cisimde $(1/n)_n$ dizisinin limitinin olması için gerek ve yeter koşul, cismin Arşimet cismi olmasıdır. Bu durumda dizinin limiti* 0 *olmak zorundadır.*

35.3 Yakınsak Diziler Halkası

. Bu paragrafta yakınsak dizilerle neler neler yapabileceğimizi göreceğiz.

Terimleri sıralı bir R cisminden alınan yakınsak diziler kümesini $\mathcal{Y}(R)$ ile gösterelim. Standart işlemler $\mathcal{Y}(R)$ kümesi üzerine de tanımlıdır.

Olgu [Teorem 19.1, 19.2, 19.3, 19.8]. *$\mathcal{Y}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır, yani iki yakınsak dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da yakınsaktır. Sabit* 0 *dizisi $s(0)$ ve sabit* 1 *dizisi $s(1)$ de $\mathcal{Y}(R)$'de olduklarından, $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{D}(R)$'nin bir althalkasıdır. Dahası,*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n),$$

olur. Ayrıca eğer $(y_n)_n$ dizisinin her terimi 0*'dan değişikse ve $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ ise, o zaman $(x_n/y_n)_n$ dizisi de yakınsaktır ve*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n/y_n) = (\lim_{n\to\infty} (x_n))/(\lim_{n\to\infty} (y_n))$$

olur.

Yukardaki olguyu, "limit alma işlemi toplamaya, çıkarmaya, çarpmaya ve bölmeye saygı duyar" olarak da ifade edebiliriz.

Limit alma işlemi sıralamayla da uyumludur:

Olgu [Önsav 19.6]. *$(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri sırasıyla a ve b'ye yakınsasınlar. Eğer belli bir göstergeçten sonra hep (ya da sonsuz defa) $x_n \geq y_n$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman $a \geq b$'dir.* Bir sonraki sonuç uygulamada çok yararlı olan ve sık sık başvurulan bir teoremdir.

Teorem 35.5. [Sandviç Teoremi, Teorem 19.10]. *$(x_n)_n$, $(y_n)_n$ ve $(z_n)_n$ üç dizi olsun. $x_n \leq y_n \leq z_n$ eşitsizlikleri belli bir M göstergecinden sonra doğruysa (aslında sonsuz defa doğruysa) ve $(x_n)_n$ ve $(z_n)_n$ dizileri aynı elemana yakınsıyorsa, $(y_n)_n$ dizisi de bu elemana yakınsar.*

0'a Yakınsayan Diziler. 0'a yakınsayan diziler kümesine $\mathcal{Y}_0(R)$ adını verelim.

Sonuç 35.6. *$\mathcal{Y}_0(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır. Sabit 0 dizisi $s(0)$'yi içerir ama sabit 1 dizisi $s(1)$'yi içermez.*

Kanıt: Olgu **??**'in doğrudan bir sonucudur. □

$\mathcal{Y}_0(R)$ kümesi çarpmanın etkisiz elemanı olan $s(1)$'yi içermediğinden bir halka olmaz. Ama $\mathcal{Y}_0(R)$'nin birkaç paragraf sonra sözedeceğimiz bir başka önemli özelliği vardır.

Sınırlı Diziler Halkası. Sınırlı R-dizileri kümesini $\mathcal{B}(R)$ simgesiyle göstereceğiz. $\mathcal{B}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve bunun kanıtı oldukça kolaydır.

Olgu [Önsav 4.4]. *$\mathcal{B}(R)$, $\mathcal{D}(R)$'nin bir althalkasıdır, yani $\mathcal{B}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve $s(0)$ ve $s(1)$ sabit dizilerini içerir.*

Olgu [Teorem 19.4]. *Yakınsak bir dizi sınırlıdır. Yani $\mathcal{Y}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$. Dolayısıyla $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{B}(R)$'nin bir althalkasıdır.*

Şimdilik

$$\mathcal{Y}_0(R) \subseteq \mathcal{Y}(R) \leq \mathcal{B}(R) \leq \mathcal{D}(R)$$

ilişkilerini kanıtladık. Daha neler neler olacak.

35.4 Temel R-Dizileri Halkası

Kesirli temel dizileri de genelleştirebiliriz:

Tanım 35.7. *$(x_n)_n$ bir R-dizisi olsun. Eğer R'nin her pozitif $\varepsilon > 0$ elemanı için,*

$$\text{her } n, m > N \text{ için } |x_n - x_m| < \varepsilon$$

*eşitsizliğinin sağlandığı bir N doğal sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine **temel R-dizisi** denir.*

Temel diziler kümesine $\mathcal{C}(R)$ adını verelim.

Olgu [Teorem 22.1 ve 22.2]. *Yakınsak diziler temel dizilerdir ve temel diziler sınırlıdır. Yani $\mathcal{Y}(R) \subseteq \mathcal{C}(R) \subseteq \mathcal{B}(R)$.*

Ama yukarda örneğini verdiğimiz gibi, her temel dizi yakınsak değildir. (Öte yandan ilerde göreceğimiz üzere, gerçel sayılarda her temel dizi yakınsaktır.) Ve elbette her sınırlı dizi temel değildir.

$\mathcal{C}(R)$ de aynen $\mathcal{Y}(R)$, $\mathcal{B}(R)$, $\mathcal{D}(R)$ gibi toplama, çıkarma, çarpma, ve çıkarma altında kapalıdır:

Olgu [Teorem 22.3, Sonuç 22.4 ve Teorem 22.5]. *$\mathcal{C}(R)$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır, yani iki temel dizinin toplamı, farkı ve çarpımı da temeldir. Demek ki, $s(0)$ ve $s(1)$ dizileri de $\mathcal{C}(R)$'de olduğundan, $\mathcal{C}(R)$ bir halkadır, $\mathcal{B}(R)$'nin bir althalkasıdır.*

Böylece artık

$$\mathcal{Y}_0(R) \subseteq \mathcal{Y}(R) \leq \mathcal{C}(R) \leq \mathcal{B}(R) \leq \mathcal{D}(R)$$

ilişkilerini biliyoruz.

$\mathcal{C}(R)$ halkası bölme altında da "olabildiğince" kapalıdır. Birazdan geleceğiz bu konuya. Önce altdizi kavramını işleyelim.

Olgu [Teorem 23.1, 23.2, 23.3]
a. *Temel bir dizinin her altdizisi temeldir.*
b. *Yakınsak bir dizinin her altdizisi yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar.*
c. *Temel bir dizinin bir altdizisi yakınsaksa dizinin kendisi de yakınsaktır ve her iki dizi de aynı limite yakınsarlar.*

Temel Dizilerde Bölme. $\mathcal{C}(R)$ halkasının bölme altında "olabildiğince" kapalı olduğunu kanıtlamak için birkaç temel olguya ihtiyacımız var.

Olgu [Teorem 22.11]. *$(x_n)_n \in \mathcal{C}(R)$ ise ve her x_n terimi 0'dan farklı ise ve $(x_n)_n$ dizisi 0'a yakınsamıyorsa, o zaman $(1/x_n)_n$ dizisi de $\mathcal{C}(R)$'dedir. Bir başka deyişle, $\mathcal{C}(R)$'nin tersinir elemanları kümesi,*

$$\mathcal{C}(R)^* = \{(x_n)_n \in \mathcal{C}(R) \setminus \mathcal{Y}_0(R) : \text{ her } n \text{ için } x_n \neq 0\}$$

dir.

Her temel dizinin yakınsak olduğu sıralı halkalara (ya da cisimlere) ***tam halka*** (ya da ***tam cisim***) denir.

Teorem 35.8. *R sıralı bir cisim olsun ve şu özelliği sağlasın: "Boş olmayan ve üstten sınırlı her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır." O zaman R Arşimet cismidir ve tamdır.*

Kanıt: Benzer özellik en büyük altsınır için de geçerlidir. (Neden?) İlk olarak, üstten sınırlı her artan dizinin bir limiti olduğunu kanıtlayalım. $(a_n)_n$ böyle bir diziolsun. s bu dizinin en küçük üst sınırı olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. s **en küçük** üstsınır olduğundan ve $s - \varepsilon < s$ olduğundan $s - \varepsilon$ bir üstsınır değildir. Demek ki bir N için,

$$s - \varepsilon < a_N$$

olur, yani her $n > N$ için,

$$s - \varepsilon < a_N < a_n \leq s$$

olur. Dolayısıyla her $n > N$ için $|s - a_n| < \varepsilon$ olur. İstediğimizi kanıtladık. Bundan, her sınırlı monoton dizinin yakınsadığı çıkar.

Şimdi herhangi bir $(a_n)_n$ temel dizisi alalım. Teorem 23.4'e göre bu dizinin monoton bir $(b_n)_n$ altdizisi vardır. Olgu **??**'e göre $(a_n)_n$ dolayısıyla $(b_n)_n$ sınırlıdır. Yukardaki kanıtladığımıza göre $(a_n)_n$ yakınsaktır. Olgu **??**'ye göre $(a_n)_n$ dizisi de yakınsaktır. Demek ki R bir tam halkadır.

$(1/n)_n$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan, $(1/n)_n$ dizinin de limiti vardır. Teorem 35.3'e göre R bir Arşimet cismidir.

Teorem kanıtlanmıştır. □

Böylece Teorem 29.1'i bir kez daha kanıtlayabiliriz.

Sonuç 35.9. *$\mathbb{R}$ bir Arşimet cismidir ve tamdır.*

Kanıt: Teorem 35.8 ve Sonuç 32.2'den çıkar. □

xxx Referans Teorem 19.2'ye verilmiş. Sonuc 19.2 var. xxx Temel dizi ile Cauchy dizisi arasında önemli bir fark vardır. $\mathbb{R}$'de (ve bir anlamda $\mathbb{Q}$'da da) bu fark kaybolur. Fark, metrik uzaylar konusu bilindiğinde daha iyi anlaşılacaktır. Cauchy dizisi kavramında, her zaman halka kavramının özünde olmayan ve $\mathbb{R}$'de değer alan bir "metrik" ya da "mesafe" kavramı vardır. Temel dizi kavramı için ise halkanın dışına çıkmak gerekmemektedir.

36. $\mathbb{R}$'nin Biricikliği

Bu noktaya gelene kadar $\mathbb{R}$'nin birçok özelliğini kanıtladık. Bu özelliklerin bir listesini çıkaralım:

1) $\mathbb{R}$, sıralı bir cisimdir.

2) $\mathbb{R}$ tamdır, yani $\mathbb{R}$'nin her temel (ya da Cauchy) dizisi $\mathbb{R}$'de yakınsaktır.

3) $\mathbb{R}$ bir Arşimet cismidir.

Bu bölümde yukardaki üç özelliği sağlayan $\mathbb{R}$'den başka bir cisim olmadığını kanıtlayacağız. Kanıtlayacağız ama bu yanlış... Örneğin $\mathbb{R}$'nin elemanlarının adlarını değiştirirsek, diyelim her $\alpha \in \mathbb{R}$ için α' diye yepyeni bir eleman yaratırsak, sözgelimi $\alpha' = (\alpha, 0)$ olabilir, ve bu elemanları şöyle toplayıp, çarpıp, sıralarsak:

$$\begin{aligned}
&\alpha' + \beta' = (\alpha + \beta)',\\
&\alpha'\beta' = (\alpha\beta)'\\
&\alpha' \leq \beta' \Leftrightarrow \alpha \leq \beta,
\end{aligned}$$

o zaman $\mathbb{R}' = \{\alpha' : \alpha \in \mathbb{R}\}$ kümesi aynen $\mathbb{R}$ gibi yukardaki özellikleri sağlayan bir cisim olur. Dolayısıyla yukardaki özellikleri sağlayan bir tane sıralı cisim olduğunu kanıtlayamayız, yanlış çünkü. Ama şunu kanıtlayabiliriz: Eğer R ve S, tam olan ve Arşimet özelliğini sağlayan iki sıralı cisimse,

$$\begin{aligned}
&f(x + y) = f(x) + f(y),\\
&f(xy) = f(x)f(y),\\
&f(1_R) = 1_S,\\
&x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan bir $f : R \to S$ eşlemesi vardır. Bu durumda, f'ye ***eşyapı eşlemesi*** ve R ve S cisimlerine ***eşyapısal*** denir. İki yapı arasındaki bir eşyapı eşlemesi, yapıların aslında birbirinin tıpatıp aynı olduğunu sadece elemanlarının adlarının değişik olduğunu söyler.

Teorem 36.1. *Tam olan ve Arşimet özelliğini sağlayan iki sıralı cisim eşyapısaldır. Ayrca bu iki cisim arasında tek bir eşyapı eşlemesi vardır.*

Teoremin püf noktası, böyle bir cismin içinde $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen yoğun bir altcismin varlığı ve $\mathbb{Q}$'ye benzeyen cisimlerin eşyapısal olmalarıdır.

Önce R'nin içinde $\mathbb{Q}$'ye çok benzeyen bir altcisim bulalım.

Önsav 36.2. *R sıralı bir cisim olsun. 0_R ve 1_R, sırasıyla toplamanın ve çarpmanın etkisiz elemanları olsunlar. $n > 0$ pozitif bir doğal sayıysa,*

$$i(n) = \underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n \text{ tane } 1_R} = n_R$$

olsun. $i(0) = 0_R$ olsun. Eğer $n < 0$ negatif bir doğal sayıysa,

$$i(n) = -i(-n) = n_R$$

olsun. O zaman, n, $m \in \mathbb{Z}$ ve $m \neq 0$ için,

$$i(n/m) = i(n)/i(m)$$

kuralıyla tanımlanan $i : \mathbb{Q} \to R$ fonksiyonu birebir bir eşyapı fonksiyonudur, yani her α, $\beta \in \mathbb{Q}$ için,

$$\begin{aligned}
&i(\alpha + \beta) = i(\alpha) + i(\beta),\\
&i(\alpha\beta) = i(\alpha) + i(\beta),\\
&i(1) = 1_R,\\
&\alpha \leq \beta \Leftrightarrow i(\alpha) \leq i(\beta)
\end{aligned}$$

önermeleri doğrudur. Ayrıca bundan başka bu özellikleri sağlayan bir

$$i : \mathbb{Q} \to R$$

fonksiyonu yoktur.

Kanıt: Konunun heyecanını öldürmemek için (kolay olan) kanıtı vermiyoruz. □

Kimileyin $i(n)$ yerine n_R yazılır. $i(\mathbb{Q})$ yerine de $\mathbb{Q}_R$ yazmak ve $\mathbb{Q}_R$'ye "R'deki $\mathbb{Q}$" demek fena fikir değildir. Öte yandan, bir karışıklığa neden olması imkânsızsa, $i(q)$ yerine doğrudan q de yazılabilir. Bu arada, her $r \in R$ ve her pozitif $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için, nr'nin n tane r'nin toplamı olarak tanımlandığını anımsayıp, $nr = i(n)r = n_{R^r}$ eşitliğinin farkına varalım:

$$nr = r + \cdots + r = 1_{R^r} + \cdots + 1_{R^r} = (1_R + \cdots + 1_R)r = i(n)r = n_{R^r}.$$

Şimdi $i(\mathbb{Q})$'nün ana teoremin kanıtında oynayacağı önemli rolü görelim:

Önsav 36.3. *Eğer R bir Arşimet cismiyse, o zaman $i(\mathbb{Q})$, R'de yoğundur, yani R'nin her $\alpha < \beta$ elemanı için, $\alpha \le i(q) \le \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir q kesirli sayısı vardır.*

Kanıt: q kesirli sayısı için, $i(q)$ yerine q yazacağız.

Eğer $\alpha \le 0 \le \beta$ ise $q = 0$ işi görür. Eğer $0 < \alpha < \beta$ için önsavı kanıtlarsak, $\alpha < \beta < 0$ için de kanıtlamış oluruz, çünkü $\alpha < \beta < 0$ ise, $0 < -\beta < -\alpha$'dır ve eğer $-\beta < q < -\alpha$ ise, $\alpha < -q < \beta$'dır. Bundan böyle $0 < \alpha < \beta$ eşitsizliklerini varsayalım.

$\beta - \alpha > 0$ olduğundan, Arşimet özelliğine göre, $n(\beta - \alpha) > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki $1/n < \beta - \alpha$.

Bir kez daha Arşimet özelliğini kullanalım: $1/n\beta > 0$ olduğundan, $m/n\beta > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla

$$\frac{m}{n} > \beta$$

olur. m'yi, bu eşitsizliği sağlayan en küçük doğal sayı olarak alalım. Demek ki,

$$\frac{m-1}{n} \le \beta < \frac{m}{n}$$

eşitsizlikleri geçerli. Şimdi,

$$\alpha < \frac{m-1}{n}$$

eşitsizliğini kanıtlayacağız.

Hesapları yukardaki şekilden takip edebilirsiniz:

$$\frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha.$$

Böylece $\alpha < q \le \beta$ eşitsizliklerini sağlayan bir $q \in \mathbb{Q}$ bulduk. Kanıtımız bitmiştir. □

Şimdi de $i(\mathbb{Q})$ ile R arasındaki yakın ilişkiyi görelim.

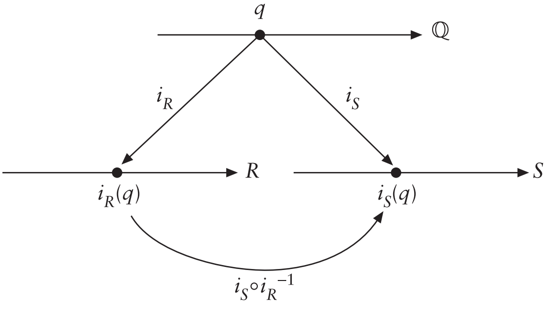
Önsav 36.4. *R'nin her elemanı, terimleri $i(\mathbb{Q})$'den olan bir dizinin limitidir.*

Kanıt: Kolaylık açısından, $i(\mathbb{Q})$ yerine $\mathbb{Q}$ yazacağız. $r \in R$ olsun. Yukardaki önsava göre, her pozitif n doğal sayısı için, $r-1/n$ ile $r+1/n$ arasında bir $q_n \in \mathbb{Q}$ vardır. R Arşimet özelliğini sağladığından, $(1/n)_n$ dizisinin limiti 0'dır (Teorem 35.4). O zaman Sandviç Teoremi'ne göre (Teorem 19.10), $(q_n)_n$ dizisinin limiti r'dir. □

Şimdi ana teoremin kanıtına girişebiliriz. R ve S, teoremde söylendiği gibi iki cisim olsun. i_R ve i_S, Teorem 36.1'deki xxx Referans Önsav 21.1'e verilmiş. Önsav 21.1 yok. Teorem 21.1 var.xxx $\mathbb{Q}$'nün sırasıyla R'ye ve S'ye gömmeleri olsun. R ve S'nin içinde bulunan "kesirli sayı kümelerine" sırasıyla $\mathbb{Q}_R$ ve $\mathbb{Q}_S$ adını verelim: $i_R(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_R$ ve $i_S(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_S$.

$\mathbb{Q}_R$ ile $\mathbb{Q}_S$ arasında bir eşyapı eşlemesi vardır:

$$i_S \circ i_R^{-1} : \mathbb{Q}_R \to \mathbb{Q}_S.$$



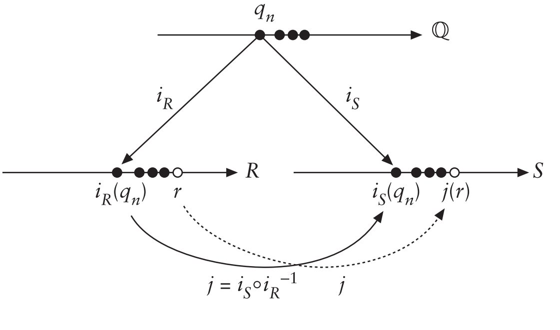
Bu eşyapı eşlemesine kısaca j adını verelim. Şimdi j'yi R'den S'ye giden bir eşyapı eşlemesine genişleteceğiz.

$r \in R$ olsun. Önsav 36.3'e göre, bir $(q_n)_n$ kesirli sayı dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n) = r$$

dir. $j(r) \in S$ şöyle tanımlansın:

$$j(r) = \lim_{n\to\infty} j(i_R(q_n)) = \lim_{n\to\infty} i_S(q_n).$$



Tabii bu tanımın geçerli olması için şunların kanıtlanması gerekiyor:

1) $\lim_{n\to\infty} i_S(q_n)$ gerçekten vardır.

2) Eğer bir başka $(p_n)_n$ kesirli sayı dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} i_R(p_n) = r$$

ise, o zaman,

$$\lim_{n\to\infty} i_S(q_n) = \lim_{n\to\infty} i_S(p_n)$$

olmalıdır.

Birincisinin kanıtı kolay, çünkü i_R^{-1} ve i_S fonksiyonları $\mathbb{Q}_R$ ve $\mathbb{Q}_S$ arasında eşyapı eşlemeleridir ve elbette $\mathbb{Q}_R$'nin temel dizisini $\mathbb{Q}_S$'nin temel dizisine götürürler.

$$(i_R(q_n))_n$$

dizisi $\mathbb{Q}_R$'de yakınsak olduğundan temeldir, dolayısıyla $(i_S(q_n))_n$ dizisi $\mathbb{Q}_S$'de temeldir. Ve S tam olduğundan, bu dizinin S'de bir limiti vardır.

İkincisinin kanıtı da zor değil, $(i_R(q_n - p_n))_n$ dizisi 0_R'ye yakınsadığından, bu dizinin j imgesi olan $(i_S(q_n - p_n))_n$ dizisi de 0_S'ye yakınsar çünkü ne de olsa j, $\mathbb{Q}_R$ ile $\mathbb{Q}_S$ arasında bir eşyapı eşlemesidir.

Şimdi j'nin R'den S'ye giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak gerekir: j toplamaya ve çarpmaya saygı duyan bir fonksiyondur. Bunların kanıtı zor değildir. Örneğin j'nin toplamaya saygı duyduğunu gösterelim.

r ve $s \in R$ olsun. $(q_n)_n$ ve $(p_n)_n$ kesirli sayı dizileri

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n) = r$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} i_R(p_n) = s$$

eşitliklerini sağlasınlar. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} i_R(q_n + p_n) = r + s$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} j(r+s) &= \lim_{n\to\infty} i_S(q_n + p_n) = \lim_{n\to\infty} (i_S(q_n) + i_S(p_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} i_S(q_n) + \lim_{n\to\infty} i_S(p_n)) = j(r) + j(s). \end{aligned}$$

Çarpma için de aynı akıl yürütme yapılır.

j'nin sıralamaya saygı duyduğunu doğrudan kanıtlayabiliriz ama biz çok daha ekonomik olan bir başka yöntem izleyeceğiz. Teorem 33.5'i analım: Arşimet özelliği olan her tam cisimde, negatif olmayan elemanlar tam tamına karelerdir. Dolayısıyla böyle bir cisimde şu doğrudur:

$$x \le y \Leftrightarrow y - x \ge 0 \Leftrightarrow \exists z(y - x = z^2) \Leftrightarrow \exists z(y = x + z^2).$$

Demek ki Arşimet özelliği olan bir tam cisimde, sıralama toplama ve çarpmayla ifade edilir. Dolayısıyla, Arşimet özelliği olan tam cisimler arasındaki toplamaya ve çarpmaya saygı duyan her eşleme, aynı zamanda sıralamaya da saygı duyar.

Ve j örtendir çünkü S'nin her elemanı bir $\mathbb{Q}_S$-dizisinin limitidir ve her $\mathbb{Q}_S$ dizisi j yoluyla bir $\mathbb{Q}_R$-dizisinden gelmektedir.

Şimdi son olarak R ve S arasındaki bu eşyapı eşlemesinin biricik olduğunu kanıtlayalım. Eğer φ ve ψ, R'den S'ye giden iki eşyapı eşlemesi olsaydı,

$$\theta = \varphi^{-1} \circ \psi,$$

R'den R'ye giden bir eşyapı eşleşmesi (otomorfizma) olurdu. $\theta = Id_R$ eşitliğini kanıtlamak yeterli.

$\theta(0) = \theta(0 + 0) = \theta(0) + \theta(0)$ olduğundan, $\theta(0) = 0$ olmak zorundadır. $\theta(1) = \theta(1 \cdot 1) = \theta(1) \cdot \theta(1)$ olduğundan, $\theta(1)$, ya 0 ya da 1 olmak zorundadır. Ama $\theta(0) = 0$ olduğundan, $\theta(1)$ de 0 olamaz. Demek ki $\theta(1) = 1$. Bundan, her n doğal sayısı için (tümevarımla) $\theta(n) = n$ çıkar. Ayrıca,

$$0 = \theta(0) = \theta(n + (-n)) = \theta(n) + \theta(-n)$$

olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\theta(-n) = -\theta(n)$$

olur. Demek ki, her $z \in \mathbb{Z}$ için,

$$\theta(z) = z.$$

Şimdi m, $n \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ için,

$$m = \theta(m) = \theta(n \cdot m/n) = \theta(n) \cdot \theta(m/n) = n \cdot \theta(m/n)$$

dolayısıyla,

$$\theta(m/n) = m/n.$$

θ'nın $\mathbb{Q}$ üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtladık. θ'nın R üzerine de bir özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlayacağız. $r \in R$ olsun. Diyelim $\theta(r) \neq r$, örneğin $r < \theta(r)$ olsun. $\mathbb{Q}$, R'de yoğun olduğundan (Önsav 36.3), $r \leq q \leq \theta(r)$ eşitsizliklerini sağlayan bir q vardır. Şimdi $r \leq q$ eşitsizliğine θ'yı uygulayalım. $\theta(r) \leq \theta(q) = q$ elde ederiz. Bir çelişki. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 36.5. *$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve toplamayla çarpmaya saygı duyan iki fonksiyon vardır: sabit* 0 *ve özdeşlik fonksiyonları.*

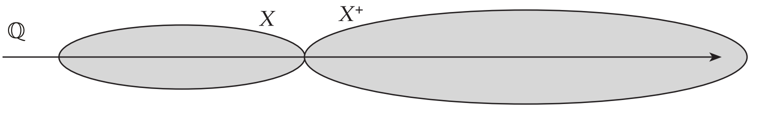
Kanıt: Sabit 0 olmayan bir θ fonksiyonu 1'i 1'e götürmek ve sıralamaya saygı duymak zorundadır (çünkü pozitif elemanlar karelerdir.) Kanıt aynen yukardaki gibidir. □

$(\mathbb{R}, +, \times)$ gibi özdeşlikten başka eşyapı eşlemesi olmayan yapılara matematikte ***eğilmez bükülmez yapılar*** (İngilizcesi rigid) denir.

37. Dedekind Kesitleri

Geçen bölümlerde gerçel sayıları, $\mathbb{Q}$'den hareketle ve temel $\mathbb{Q}$-dizilerini kullanarak yarattık. $\mathbb{Q}$'den hareketle gerçel sayıları yaratmanın Dedekind tarafından bulunmuş daha şık bir yöntemi vardır.

Tanımın Gerekçesi. Dedekind'in yöntemi şu düşünceden kaynaklanır: Üstten sınırlı ve boş olmayan bir kesirli sayılar kümemiz olsun. X diyelim bu kümeye. X'in en küçük üstsınırını yaratmak istiyoruz. Böyle bir üstsınır $\mathbb{Q}$'de olsa da olmasa da...



X'in üstsınırları kümesine bakalım. Bu kümeyi yukardaki şekildeki gibi X^+ olarak gösterelim:

$$X^+ = \{s \in \mathbb{Q} : \text{ her } x \in X \text{ için } x \leq s\}.$$

Örneğin,

$$(0,1)^+ = [1, \infty) \cap \mathbb{Q},$$
$$(0,1]^+ = (1, \infty) \cap \mathbb{Q}.$$

Üstten sınırlı ve boş olmayan bir X kümesi için X^+ kümesinin hangi özellikleri var?

1) $X^+ \neq \emptyset$ çünkü X'in en az bir üstsınırı var,
2) $X^+ \neq \mathbb{Q}$ çünkü X boşküme değil,
3) Eğer $s \in X^+$ ve $s \leq t$ ise, $t \in X^+$.

Eğer bir $Y \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ kümesi

$$(*) \qquad \forall s \forall t ((s \in Y \wedge t \in \mathbb{Q} \wedge s \leq t) \to t \in Y)$$

özelliğini sağlıyorsa, o zaman

$$X = \{x \in \mathbb{Q} : \text{her } y \in Y \text{ için } x \leq y\}$$

kümesi için $X^+ = Y$ eşitliği doğru olur. (Alıştırma.)

X'in en küçük üstsınırı olarak X^+ kümesini aday göstermek istiyoruz. Yani üstten sınırlı ve boş olmayan her $X \subseteq \mathbb{Q}$ için X^+ kümesini bir gerçel sayı olarak tanımlamak istiyoruz. Daha açık yazalım:

$$\mathbb{R} = \{Y \subseteq \mathbb{Q} : Y \neq \emptyset, \mathbb{Q} \text{ ve } (*)\}$$

tanımını yapmak istiyoruz.

Yalnız burada küçük bir sorun var. O da şu: $(0,1)$ ve $(0,1]$ aralıklarının aynı en küçük üstsınırları var, her ikisi de 1. Oysa bu aralıkların üstsınırları kümesi $(0,1)^+$ ve $(0,1]^+$ kümeleri değişik, biri 1'i içeriyor, diğeri içermiyor. Bu iki kümeden birini tercih etmemiz lazım, yoksa $\mathbb{R}$'de iki değişik 1 elemanı olurdu! R'nin tanımına bir koşul daha ekleyelim: Y'nin en küçük elemanı yoktur, yani en büyük altsınırını (eğer varsa bu altsınır) içermez. (Böylece $(0,1)^+$ ve $(0,1]^+$ kümelerinden ikincisini seçeriz.)

En büyük altsınırını içermeyen ve (*) özelliğini sağlayan, $\mathbb{Q}$'nün $Y \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ altkümelerine ***Dedekind kesiti*** adı verilir. Örneğin, her $a \in \mathbb{Q}$ için,

$$\{q \in \mathbb{Q} : a < q\}$$

kesirli sayı aralığı bir Dedekind kesitidir. Bir Dedekind kesiti sonsuza kadar giden bir aralığa çok benzer ama kesirli sayılarda en büyük altsınırı yoksa kesirli sayılar kümesinde bir aralık değildir. Örneğin,

$$\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ ve } x^2 > 2\}$$

bir Dedekind kesitidir ama $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olmadığından, kesirli sayılar kümesinde bir aralık değildir. Öte yandan bir Dedekind kesitinin en büyük altsınırı varsa ve bu en büyük altsınır a ise, o zaman Dedekind kesiti (a, ∞) aralığı olmalıdır.

Dedekind, ***gerçel sayılar kümesi*** $\mathbb{R}$'yi Dedekind kesitleri kümesi olarak tanımlayacağız.

$\mathbb{Q}$'nün (*) özelliğini sağlayan bir $Y \neq \emptyset$, $\mathbb{Q}$ altkümesinden, varsa en küçük altsınırını çıkarırsak bir Dedekind kesiti, yani bir gerçel sayı buluruz. Bu kolay olguyu sık sık kullanacağız bu bölümde.

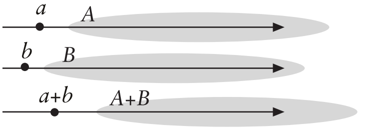
37.1 İşlemler, Sıralama ve Her Şeyin Kanıtı

Şimdi bu tanımdan hareketle, böylece tanımlanmış $\mathbb{R}$ kümesi üzerine toplamayı, çarpmayı ve sıralamayı tanımlayalım.

Kanıtların birçoğunu alıştırma olarak okura bırakacağız.

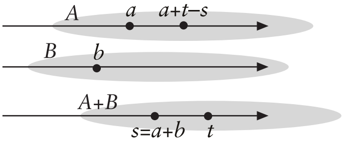
Önsav 37.1. *Eğer A, $B \in \mathbb{R}$ ise, $A + B \in \mathbb{R}$'dir.*

Kanıt: A ve B boşküme olmadıklarından, $A+B$ de boşküme değildir elbette. (2)'yi kanıtlayalım. (3)'ten dolayı her Dedekind kesiti alttan sınırlıdır. a, A'nın tüm elemanlarından daha küçük bir kesirli sayı olsun. b de B'nin tüm elemanlarından daha küçük bir kesirli sayı olsun. O zaman $A+B$ 'nin tüm elemanları



$a+b$'den daha büyüktür ve $a+b$ sayısı $A+B$ kümesinde değildir. Demek ki $A+B \neq \mathbb{Q}$. (2) de kanıtlandı.

(3)'ü kanıtlayalım. $\in A+B$ ve $s \leq t \in \mathbb{Q}$ olsun. t'nin de $A+B$ kümesinde olduğunu kanıtlayacağız.

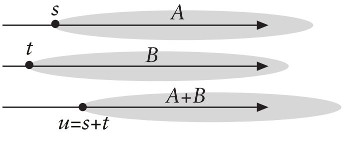


$a \in A$ ve $b \in B$ için $s = a+b$ olsun. O zaman,

$$t = s+t-s = a+b+t-s = (a+t-s)+b.$$

Ama $a \leq a+t-s$ olduğundan, $a+t-s \in A$. Demek ki, $t = (a+t-s)+b \in A+B$. (3) de kanıtlandı.

Gelelim (4)'e... $A+B$'nin bir en büyük altsınırı olduğunu ve bu en büyük altsınırın $A+B$'de olduğunu varsayalım. Bu en büyük altsınıra u adını verelim. Demek ki $s \in A$ ve $t \in B$ için $u = s+t$.



Ama o zaman s, A'nın en büyük altsınırı olur. Çünkü $s > a \in A$ olsa,

$$u = s+t > a+t \in A+B$$

olur, ki bu da u'nun $A+B$'nin en büyük altsınırı olmasıyla çelişir. Demek ki s, A'nın bir altsınırı. s, A'da olduğundan, s, A'nın en büyük altsınırıdır. □

Demek ki iki gerçel sayının toplamı da bir gerçel sayıdır. Bu iyi bir haber.

Önsav 37.2. $(\mathbb{R}, +, 0_{\mathbb{R}})$ *değişmeli bir gruptur, yani*

a. *Her* A, B, $C \in \mathbb{R}$ *için,* $A + (B + C) = (A + B) + C$.

b. $\{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$ *bir gerçel sayıdır ve toplamanın etkisiz elemanıdır. Bu elemanı* $0_{\mathbb{R}}$ *olarak gösterelim.*

c. *Her* $A \in \mathbb{R}$ *için,* $A + B = B + A = 0_{\mathbb{R}}$ *eşitliğini sağlayan bir* $B \in \mathbb{R}$ *vardır.*

d. *Her* A, $B \in \mathbb{R}$ *için,* $A + B = B + A$.

Kanıt: İlk iki önermenin kanıtı kolay, yukarda sözünü etmiştik. Sonuncusu daha da kolay. Üçüncüsünü kanıtlayalım. Aşağıdaki resimden izleyebilirsiniz. $A \in \mathbb{R}$ verilmiş.

$$A + B = B + A = 0_{\mathbb{R}}$$

eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R}$ bulmaya çalışıyoruz.

$$B = (-A)^+ \setminus \{\inf(-A)^+\}$$

olsun. Eğer $\inf(-A)^+$ yoksa, tanıma göre, $B = (-A)^+$ olmak zorundadır. Ayrıca, burada $-A$ şu anlama gelmektedir:

$$-A = \{q \in \mathbb{Q} : -q \in A\}.$$

(Yani buradaki $-A$, gerçel sayı A'nın değil, küme olarak A'nın eksisidir. Gerçel sayı A'nın eksisini tanımlamak üzereyiz.) B'nin bir Dedekind kesiti olduğunu, yani bir gerçel sayı olduğunu ve $A + B = B + A = 0_{\mathbb{R}}$ eşitliğinin sağlandığını göstermeyi okura bırakıyoruz. □

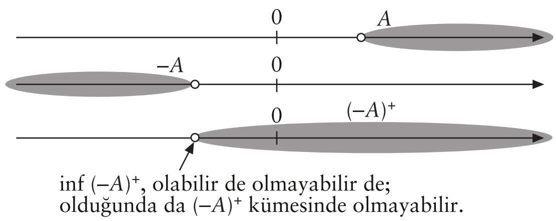
Aşağıda c maddesinde varlığı gösterilen $B \in \mathbb{R}$, $-A$ olarak yazılır. Ancak bu $-A$, yukardaki kanıttaki $-A$ ile karıştırılmamalıdır. Kanıttaki $-A$ hiçbir zaman bir gerçel sayı olamaz. Bundan böyle $-A$ hep gerçel sayı $-A$ anlamına gelecek.

Her değişmeli grupta olduğu gibi $B - A$ elemanı, $B + (-A)$ anlamına gelecek.

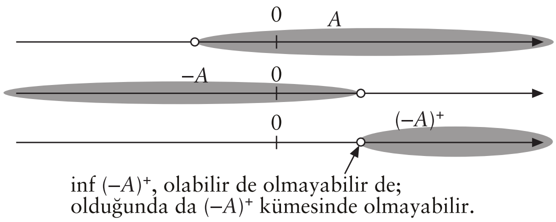
$$A - (B - C) = A - B + C$$

gibi her değişmeli grupta geçerli olan cambazlıkları kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

$0 \notin A$ durumunda $B = (-A)^+ \setminus \{\inf (-A)^+\}$:



$0 \in A$ durumunda $B = (-A)^+ \setminus \{\inf (-A)^+\}$:



Çarpmaya gelmeden önce sıralamayı tanımlayalım. Eğer $A, B \in \mathbb{R}$ ise, $\leq$ ikili ilişkisini altküme ilişkisi olarak tanımlayalım:

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Örneğin, tanımdan dolayı $\max\{A, B\} = A \cap B$. Ama dikkat, sonsuz tane gerçel sayının kesişimi boşküme olmasa bile bir gerçel sayı olmak zorunda değildir, çünkü sonsuz kesişim en küçük üstsınırı içerebilir, örneğin,

$$\bigcap_{n-1}^{\infty} \{q \in \mathbb{Q} : q > -1/n\} = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\},$$

ve solda kesişimi alınan kümelerin her biri bir gerçel sayı olmasına karşın, sağdaki - en büyük altsınırı olan 0'ı içerdiğinden - bir gerçel sayı (yani Dedekind kesiti) değildir. Ama böyle bir kesişimden - eğer boşküme değilse - içinde olma ihtimaline karşı, en büyük altsınırı atarsak, o zaman bir gerçel sayı elde ederiz. Bu, birazdan önemli olacak

Önsav 37.3. *Yukarda tanımlanan $\leq$ ilişkisi, $\mathbb{R}$ üzerine bir tamsıralamadır, yani her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için,*
a. $A \leq B$ *ve* $B \leq C$ *ise* $A \leq C$.
b. $A \leq B$ *ve* $B \leq A$ *ise* $A = B$.
c. $A \leq A$.
d. *Ya* $A \leq B$ *ya da* $B \leq A$.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Bu arada,

$$0_{\mathbb{R}} < A \Leftrightarrow 0 \in B$$

önermesinin doğruluğuna da dikkatinizi çekeriz.

Şimdi çarpmayı tanımlayalım. Çarpmanın tanımı ne yazık ki toplamanın tanımı kadar sade değil.

A, $B \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $A \geq 0_\mathbb{R}$ ve $B \geq 0_\mathbb{R}$ ise,

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlansın. Diğer durumlarda tanım şöyle:

Eğer $A \leq 0_\mathbb{R}$ ve $B \geq 0_\mathbb{R}$ ise, $AB = -((-A)B)$.
Eğer $A \geq 0_\mathbb{R}$ ve $B \leq 0_\mathbb{R}$ ise, $AB = -(A(-B))$.
Eğer $A \geq 0_\mathbb{R}$ ve $B \leq 0_\mathbb{R}$ ise, $AB = (-A)(-B)$.

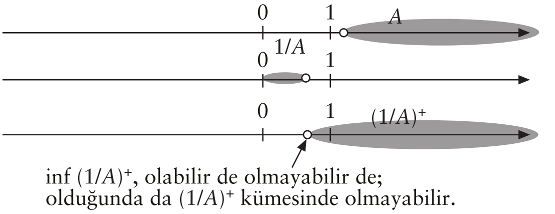
Önsav 37.4. *Eğer A, $B \in \mathbb{R}$ ise, $AB \in \mathbb{R}$'dir.*

Kanıt: Önsavı sadece $A \geq 0_\mathbb{R}$ ve $B \geq 0_\mathbb{R}$ durumu için kanıtlamak gerekiyor; diğer durumlar bundan çıkar. Bu durumu da okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Kesirli sayılar hakkında her şeyi bildiğinizi varsayabilirsiniz elbet. □

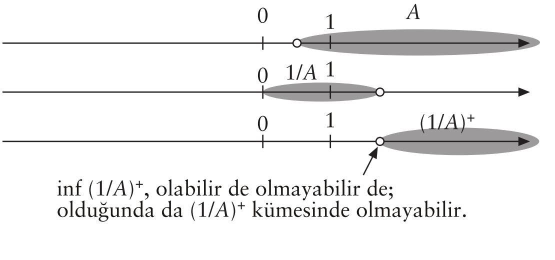
Önsav 37.5. i. *Her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için, $A(BC) = (AB)C$.*
ii. $\{q \in \mathbb{Q} : q > 1\}$ *bir gerçel sayıdır ve çarpmanın etkisiz elemanıdır. Bu elemanı $1_\mathbb{R}$ olarak gösterelim.*
iii. *Her $A \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ için, $AB = BA = 1_\mathbb{R}$ eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}$ vardır.*
iv. *Her A, $B \in \mathbb{R}$ için, $AB = BA$.*

Kanıt: İlk iki ve sonuncu önermelerin kanıtı oldukça kolay. Üçüncü önermeyi ise $A > 0_\mathbb{R}$ için kanıtlamak yeterli. (Neden?) Kanıtlayalım.

$1 \notin A$ durumunda $B = (1/A)^+ \setminus \{\inf (1/A)^+\}$:



$1 \in A$ durumunda $B = (1/A)^+ \setminus \{\inf (1/A)^+\}$:



$A > 0_\mathbb{R}$ bir gerçel sayı olsun. $AB = BA = 1_\mathbb{R}$ eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathbb{R}$ bulmaya çalışıyoruz.

$$B = (1/A)^+ \setminus \{\inf(1/A)^+\}$$

olsun. (Bkz. yukardaki şekil.) Burada $1/A$ şu anlama gelmektedir:

$$1/A = \{q \in \mathbb{Q} : 1/q \in A\}.$$

(Yani gerçel sayı A'nın değil, küme olarak A'nın tersini alıyoruz. Gerçel sayı A'nın tersini tanımlamak üzereyiz.) B'nin bir Dedekind kesiti olduğunu, yani bir gerçel sayı olduğunu ve $AB = BA = 1_\mathbb{R}$ eşitliğinin sağlandığını göstermeyi okura bırakıyoruz. $\square$

Sonuç 37.6. $(\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}, \times, 1_\mathbb{R})$ *değişmeli bir gruptur.*

Şimdi de toplamayla çarpma arasındaki yegâne ilişki olan dağılma özelliği:

Önsav 37.7. *Her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için, $A(B + C) = AB + AC$.*

Kanıt: Son derece basit. Bir kümeden bir eleman alıp bu elemanın diğer kümede olduğunu göstermek gerekiyor. Bu da $\mathbb{Q}$'deki dağılma özelliğinden hemen çıkar. $\square$

Sonuç 37.8. $(\mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}, +, \times, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R})$ *bir cisimdir.*

Beklenildiği gibi $\mathbb{R}$ cismi sıralıdır:

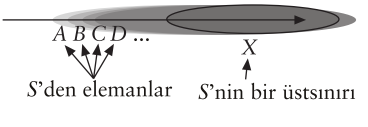
Önsav 37.9. $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, 0_\mathbb{R}, 1_\mathbb{R})$ *sıralı bir cisimdir, yani her A, B, $C \in \mathbb{R}$ için,*
i. *$A \leq B$ ise $A + C \leq B + C$.*
ii. *$A \leq B$ ve $0_\mathbb{R} \leq C$ ise $AC \leq BC$.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. $\square$

Şimdi $\mathbb{R}$'nin en önemli özelliğini görelim:

Önsav 37.10. *Eğer $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ ise ve S'nin bir üstsınırı varsa, o zaman S'nin en küçük üstsınırı vardır.*

Kanıt: Önsav 37.3'ten hemen önce gelen tartışma bu kanıtta önemli olacak. $S \subset \mathbb{R}$, boş olmayan ve üstsınırı olan bir altküme olsun.



$X \in \mathbb{R}$, S'nin bir üstsınırı olsun. Demek ki her $A \in S$ için, $X \subseteq A$. Dolayısıyla

$$X \subseteq \bigcap_{A \in S} A.$$

Soldaki ifadeye U diyelim:

$$U = \bigcap_{A \in S} A.$$

X'i içerdiğinden, U boşküme değil. Ama gene de U bir Dedekind kesiti, yani gerçel sayı olmayabilir, çünkü en büyük altsınırını içerebilir. $V = U \setminus \{\inf U\}$ olsun. V bir gerçel sayıdır. V'nin $\sup S$ olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. $\square$

Demek ki Teorem 35.8'e göre $\mathbb{R}$ tamdır ve Arşimet özelliğini sağlar. Dolayısıyla Teorem 36.1'e göre geçen yazılarda tanımlanan $\mathbb{R}$'yle eşyapısaldır.

Kısım VI

Ekler

38. Bölüm Cisimleri ve Yerelleştirme

38.1 Örnekler

Bölüme örneklerle başlayalım, ne yapmak istediğimizi en iyi örneklerle anlatabileceğiz.

Notlar ve Örnekler

38.1. Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ değişmeli bir halkadır[1], ama bir cisim değildir, çünkü bir cisimde, cismin tanımı gereği, 0'a eşit olmayan her elemanın çarpımsal tersi olmalıdır ve $\mathbb{Z}$'de 0'a eşit olmayan her elemanın çarpımsal tersi yoktur. Örneğin 2'nin çarpımsal tersi olan (ya da olması gereken) $1/2$ sayısı $\mathbb{Z}$'de değildir. Daha doğru (yani daha matematiksel) bir ifadeyle, $\mathbb{Z}$'de $2x = 1$ denklemini çözemeyiz.
Öte yandan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, tamsayıları içeren bir cisimdir[2], hatta $\mathbb{Q}$, şu anlamda tamsayıları içeren cisimlerin en küçüğüdür: Tamsayıları içeren her cismin içinde $\mathbb{Q}$'nün bir "kopyası" bulunur. Bu ifadeyi yazının en sonunda daha anlamlı bir hâle getireceğiz. Şimdilik sezgilerimizle yetinelim.

38.2. $p \in \mathbb{Z}$ sabit bir asal olsun. p elbette $\mathbb{Z}$'de tersinir değildir, çünkü

$$1/p \notin \mathbb{Z}.$$

Şimdi,

$$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \{a/p^n : n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. Kolayca görüleceği üzere, $\mathbb{Z}_p$ kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalıdır, ayrıca 1'i de içerir, yani bir halkadır. Bu halkanın tersinir elemanları, bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\pm p^n$ biçiminde yazılan sayılardır.
$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$, belli ki, $\mathbb{Z}$'yi içeren ve p'nin tersinir olduğu "en küçük" halkadır. "En küçük halka" ifadesinin ne demek olduğunu yazının en sonunda matematiksel olarak açıklayacağız.

38.3. Katsayıları tamsayılar olan polinomları ele alalım. Bu polinomların kümesi $\mathbb{Z}[X]$ olarak yazılır.

$$\frac{X^2+1}{X-1}$$

türünden ifadeler $\mathbb{Z}[X]$'te değiller. Polinom olmasalar da bu tür ifadeler matematikte sık sık kullanılırlar. "Kesirli sayılar"dan esinlenerek bu tür nesnelere ***kesirli polinom*** adını

[1] Yani her x ve y için $xy = yx$ eşitliği geçerlidir.

[2] Yani hem değişmeli bir halkadır hem de 0 dışında her elemanın çarpımsal bir tersi vardır: Her $x \neq 0$ için, $xy = 1$ eşitliğini sağlayan bir y vardır.

verelim. Bir kesirli polinom, tanımı gereği, f, $g \in \mathbb{Z}[X]$ ve $g \neq 0$ için, f/g biçiminde yazılan bir terimdir. Kesirli polinomlar kümesi $\mathbb{Q}(X)$ olarak ($\mathbb{Z}(X)$ değil!) gösterilir:

$$\mathbb{Q}(X) = \{f/g : f, g \in \mathbb{Z}[X] \text{ ve } g \neq 0\}.$$

Basit ama önemli bir olgu: Eğer $fk = gh$ ise, f/g kesirli polinomu h/k kesirli polinomuna eşittir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer

$$f/g = h/k$$

ise, $fk = gh$ eşitliği de doğrudur.

Kesirli polinomlar kümesinde toplama, çıkarma ve çarpma yapmasını okur herhâlde biliyordur:

$$f/g \pm h/k = (fk \pm gh)/gk \text{ ve } (f/g) \times (h/k) = fh/gk.$$

Böylece tanımlanan toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında, kesirli polinomlar kümesi bir halkadır. Hatta halkadan öte, bir cisimdir de: $f/g \neq 0$ ise, bu kesirli polinomun çarpımsal tersi g/f kesirli polinomudur.

Her f polinomunu $f/1$ biçiminde yazarsak, her polinomun aslında kesirli bir polinom olduğunu anlarız. (Her tamsayı da aynı zamanda kesirli bir sayıdır.)

Ne yaptık? $\mathbb{Z}[X]$ polinom halkasını $\mathbb{Q}(X)$ diye bir cismin içinde soktuk. Daha önce de $\mathbb{Z}$ halkasını benzer biçimde $\mathbb{Q}$ cisminin içine sokmuştuk.

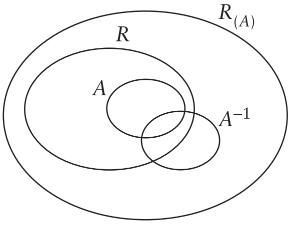
38.4. Katsayıları kesirli sayılar olan polinom halkası $\mathbb{Q}[X]$ olarak yazılır. Şu S kümesine bakalım:

$$S = \{f(X)/X^n : f \in \mathbb{Q}[X], n \in \mathbb{N}\}.$$

S, elbette $\mathbb{Q}(X)$ cisminin bir altkümesidir ve $\mathbb{Q}[X]$ halkasını içerir ($f(X)/X^n$ ifadesinde $n = 0$ alın.) Ayrıca, toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğundan S bir halkadır. Bu halkada X tersinirdir, çünkü $1/X \in S$. Dikkatle incelenecek olursa, S'nin, bir anlamda, X'in tersinir olduğu ve $\mathbb{Q}[X]$'i içeren en küçük halka olduğu kolaylıkla anlaşılır. S'de, örneğin $1 + X$ tersinir değildir. (Neden?)

38.2 Amaç

Bu örneklerden sonra yazının amacını açıklayalım. Amacımız, değişmeli bir R halkası ve bu halkanın bir A altkümesi verildiğinde, A'nın elemanlarının içinde tersinir olduğu R'yi altküme olarak içeren bir halka bulmak ve bunu en **ekonomik** biçimde yapmak. Uygulamada en çok, R'nin bir bölge olduğu, yani A'nın $R \setminus \{0\}$ olabileceği durum kullanılır.



Bulmak istediğimiz bu halkayı R_A olarak yazalım. R_A'dan özetle şunları istiyoruz:

i. R_A, R'yi içeren bir halka olsun.

ii. $R \leq R_A$ olsun. Yani her iki halkanın da birim elemanları aynı olsun ve her x, $y \in R$ için, $x + y$ ve xy'nin değerleri, R'de de hesaplansa, R_A'da da hesaplansa aynı olsun.

iii. A'nın her elemanı R_A'da tersinir olsun.

iv. R_A'da sadece yukardaki özellikleri sağlayacak kadar eleman olsun, gereksiz elemanlar olmasın. (Bunu daha matematiksel bir biçimde de söyleyebilirdik, yazının sonunda söyleyeceğiz de.) Yukardaki dört örnekte R, A ve R_A şöyle:

a. $R = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ya da $A = \{\mathbb{Z}\text{'nin asalları }\}$ ve $R_A = \mathbb{Q}$. **b.** $R = \mathbb{Z}$ ve $A = \{p\}$ ya da $A = \{p^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $R_A = \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$.

c. $R = \mathbb{Z}[X]$, $A = \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ ve $R_A = \mathbb{Q}(X)$.

d. $R = \mathbb{Q}[X]$, $A = \{X\}$ ya da $A = \{X^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $R_A = S$.

38.3 Arayış

Bir an için dilediğimiz gibi bir R_A halkasının varolduğunu varsayıp bu halkanın ne menem bir şey olduğunu anlamaya çalışalım. Ancak R_A'nın ne menem bir şey olması gerektiğini anladıktan sonra R_A halkasını inşa edeceğiz.

Şunu da belirtelim ki, illa yukardaki özellikleri sağlayan R_A diye bir halka olmak zorunda değildir. Böyle bir R_A halkası olmayabilir de... R_A'nın varlığı ve yokluğu A'ya göre değişebilir, bazı A'lar için olabilir bazı A'lar için olmayabilir. R verildiğinde, R_A halkasının hangi A'lar için olduğunu da bulacağız.

Eğer $A = \emptyset$ ise, $R_A = R$ alırsak problemi çözmüş oluruz. Bundan böyle $A \neq \emptyset$ olsun.

Eğer $a \in A$ ise, a, R_A halkasında tersinirdir, çünkü öyle olsun istiyoruz. a'nın R_A halkasındaki tersini, alışıldığı üzere, a^{-1} ya da $1/a$ olarak gösterelim.

A'nın elemanları R_A halkasında tersinir olduklarından, A'nın hiçbir a elemanı (ne R'de ne de R_A'da) bir ***sıfırbölen*** olamaz, yani $ab = 0$ ise $b = 0$ olmak zorundadır. İşte bunun kanıtı:

$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1\dot{b} = b.$$

Demek ki 0 elemanı da A'da olamaz.

Bundan böyle A'nın hiçbir elemanının sıfırbölen olmadığını varsayalım (yoksa istediğimiz özellikleri sağlayan bir R_A halkası bulamayız.)

Eğer $r \in R$ ise, $r \in R_A$ olmalı, çünkü R_A'nın R'yi içermesini istiyoruz. Demek ki her $r \in R$ ve $a \in A$ için, R_A halkasında r ile $1/a$ elemanlarını çarpabilmeliyiz. R_A halkasında olması gereken bu çarpımı r/a olarak yazalım.

Elbette

$$\begin{aligned}
&r/a = ra^{-1},\\
&a(r/a) = r\\
&s(r/a) = (sr)/a
\end{aligned}$$

gibi eşitlikler R_A halkasında sağlanmalı.

Bir halka olduğundan, R_A'nın r/a biçiminde yazılmış elemanlarını toplayıp çarpabilmeliyiz. r/a ve s/b elemanlarının bir halkada nasıl toplanıp çarpılmaları gerektiği belli: Halkanın en basit özelliklerinden,

$$r/a \pm s/b = (rb \pm sa)/ab \text{ ve } r/a \times s/b = rs/ab$$

çıkar.

Yukardaki üç formüle bakarsak, a, $b \in A$ ise, ab'nin de A'da olmasının yararlarını görürüz, çünkü o zaman yukardaki üç işlemin herbirinin sonucunun paydasında hep A'nın elemanları olmuş olur. Zaten, eğer A çarpma altında kapalı değilse, A yerine A'nın elemanlarının tüm sonlu çarpımlarının kümesini alarak, A'nın çarpma altında kapalı olduğunu varsayabiliriz, çünkü bu sonlu çarpımlar da R_A'da tersinlenmeli. Bundan böyle A'nın gerçekten çarpma altında kapalı olduğunu varsayalım. Yeni A'nın da, eski A gibi, sıfırbölen içermediğini dikkatinize sunarım.

A artık çarpma altında kapalı olduğundan, yukardaki formüllerden,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalı olduğunu anlarız.

Bütün bunları, R_A'nın olduğunu varsayarak yaptık. Sezgilerimizle, R_A halkasının, eğer varsa, yukardaki gibi bir küme olması gerektiğini gördük. Demek ki R_A adayımız,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

kümesi olmalı.

Bu, hemen hemen doğru, ama tam doğru değil, çünkü R halkası bu aday kümenin bir altkümesi olmayabilir. Nitekim, R'nin her elemanı illa belli bir $r \in R$ ve $a \in A$ için r/a biçiminde yazılmak zorunda değil. Ama 1'i de A'nın içine atarsak, yani eğer A yerine $A \cup \{1\}$ kümesini alırsak, o zaman, $r = r/1$ eşitliğinden, R'nin aday kümenin bir altkümesi olduğu anlaşılır. (Ayrıca A'nın sıfırböleni olmama ve çarpma altında kapalı olma özellikleri hâlâ korunur.)

Bundan böyle $A \subseteq R$, sıfırböleni olmayan, çarpma altında kapalı olan ve 1'i içeren bir küme olsun. O zaman R_A halkası, eğer varsa,

$$\{r/a : r \in R, a \in A\}$$

olmalı. Toplama, çıkarma ve çarpma da yukarda açıklandığı gibi olmalı.

Olmalı ama r/a diye bir eleman yok ki evrenimizde! Kendinizi tamsayıları bilen ama kesirli sayıların ne demek olduğunu bilmeyen bir çocuk yerine koyarsanız ne demek istediğimi anlarsınız. 2/3 gibi, r/a diye elemanlar yaratmalıyız, çünkü elimizde sadece r ve a diye nesneler var, r/a diye bir nesne yok.

Adına "r/a" diyeceğimiz nesneler yaratmalıyız, yaratacağız da, yaratması da kolay. Bunun için adına r/a diyeceğimiz yepyeni, daha önce olmayan soyut şeyler yaratmak yeterli!

Eğer bütün r/a elemanları birbirinden değişik olsalardı gerçekten de böyle yapardık. Ama, öyle değil, örneğin, eğer $b \in A$ ise,

$$r/a = (rb)/(ab)$$

olmak zorunda. Sözünü etmek istediğimiz sorun şu: R_A halkasının bir r/a elemanı, $s \neq r$ ve $b \neq a$ için aynı halkanın s/b elemanına eşit olmak zorunda olabilir ve o zaman soyut r/a ve s/b elemanları yaratmak bu eşitliği gözardı eder ve eşit olmaları gereken r/a ve s/b birbirine eşit olmaz... Bilmem anlatabildim mi?

R_A halkasının bir r/a elemanı ne zaman aynı halkanın bir s/b elemanına eşit olur, daha doğrusu olmak zorunda kalır? $r/a = s/b$ eşitliğini ab'yle çarparsak, R'de geçerli olan $rb = sa$ eşitliğini buluruz. Bunun tersi de doğrudur: Eğer R'de $rb = sa$ eşitliği sağlanıyorsa, o zaman R_A halkasında, bu eşitliği ab'ye bölerek, $r/a = s/b$ eşitliğinin geçerli olduğunu anlarız.

Şimdi artık R_A halkasının elemanlarının ne olması gerektiğini aşağı yukarı biliyoruz. Yukardaki bilgileri biçimselleştirmeliyiz, yani bildiklerimizi matematikçeye çevirmeliyiz.

38.4 Plan

Yukardaki uzun tartışmadan sonra R_A halkasını yaratacak planı kuralım. R_A halkasının r/a elemanlarını yaratacağız. Evrenimizde r/a diye elemanlar yok ama (r, a) ikilileri var, bunlar $R \times A$ kümesinin elemanları. R_A halkasının r/a elemanını (r, a) ikilisi olarak görmek istiyoruz.

Ama o zaman da yukarda sözettiğimiz sorun çıkacak karşımıza: (r, a) ikilisi, (s, b) ikilisiine eşit olmayabilir ama R_A halkasında $r/a = s/b$ eşitliği boy gösterebilir. O zaman da eşit olmaları gereken (r, a) ve (s, b) ikilileri birbirine eşit olmazlar. Biz de eşit olmasını istediğimiz bu ikililere birbirine ***denk*** ikililer diyelim ve bunu $\equiv$ olarak yazalım. Matematiksel tanım az sonra.

38.5 Matematiksel Tanımlar

Nihayet matematik yapabileceğiz. Yukarda söylenen her şeyi unutun, daha doğrusu unutmuş gibi davranın! Baştan başlıyoruz. Önce tanımlar.

R bir halka. A, R'nin çarpma altında kapalı, 1'i içeren ama 0'ı içermeyen (dolayısıyla sıfırbölen de içermeyen) bir altkümesi.

Eğer (r, a), $(s, b) \in R \times A$ ise,

$$(r, a) \equiv (s, b)$$

ilişkisini,

$$rb = sa$$

olarak tanımlayalım ve bu durumda (r, a), (s, b) elemanlarına ***birbirine denk*** diyelim. Bu denklik daha sonra $r/a = s/b$ olarak yorumlanacak, ama daha değil. Demek ki,

$$(r, a) \equiv (s, b) \Leftrightarrow rb = sa.$$

Önsav 38.1. *$R \times A$ kümesi üzerine,*

$$(r, a) \equiv (s, b) \Leftrightarrow rb = sa$$

olarak tanımlanan ilişki bir denklik ilişkisidir.

Kanıt: Önce $(r, a) \equiv (r, a)$ ilişkisini kanıtlayalım. Tanıma göre, bu, matematiğin en doğru eşitliklerinden biri olan $ra = ra$ anlamına gelir.

Şimdi $(r, a) \equiv (s, b)$ ise $(s, b) \equiv (r, a)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Bu çok kolay, okura bırakıyoruz.

Son olarak, $(r, a) \equiv (s, b)$ ve $(s, b) \equiv (t, c)$ ilişkileri geçerliyse $(r, a) \equiv (t, c)$ ilişkisini kanıtlamalıyız, yani $rb = sa$ ve $sc = tb$ ise $rc = ta$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Kanıtlayalım:

$$(rc)b = (sa)c = (sc)a = (tb)a = (ta)b$$

eşitliğinden,

$$(rc - ta)b = 0$$

elde ederiz. b, A'da olduğundan sıfırbölen olamaz. Bu eşitlikten $rc - ta = 0$, yani $rc = ta$ çıkar. □

Eğer $(r, a) \in R \times A$ ise, $[r, a]$ kümesini, (r, a) elemanının denklik sınıfı olarak tanımlayalım:

$$[r, a] = \{(s, b) \in R \times A : (r, a) \equiv (s, b)\} = \{(s, b) \in R \times A : br = as\}.$$

Her $[r, a]$'nın $R \times A$ kümesinin bir altkümesi olduğunu unutmayalım. Örneğin,

$$[1, 1] = \{[a, a] : a \in A\},$$
$$[0, 1] = \{[0, a] : a \in A\}$$

ve her $r \in R$, a, $b \in A$ için $(br, ba) \in [r, a]$

Sonuç 38.2. *$R \times A$'nın $[r, a]$ ve $[s, b]$ altkümeleri ya birbirine eşittir ya da iki ayrık kümedir. Yani her,*

$$(r, a), (s, b) \in R \times A$$

için, ya $[r, a] = [s, b]$ ya da $[r, a] \cap [s, b] = \emptyset$'dir. Ayrıca birinci şık ancak ve ancak $(r, a) \equiv (s, b)$ ise mümkündür.

R_A kümesini $(R \times A)/\equiv$ bölüm kümesi olarak tanımlayalım.

$$R_A = (R \times A)/\equiv = \{[r, a] : r \in R, a \in A\}.$$

İlerde, R_A'nın r/a elemanı $[r, a]$ olarak tanımlanacak.

Daha R_A üzerine hiçbir işlem tanımlamadık, R_A henüz sadece safkan bir küme. İşlemleri şimdi tanımlıyoruz: $(r, a), (s, b) \in R \times A$ olsun. $[r, a] + [s, b]$ ve $[r, a] \times [s, b]$ işlemlerini tanımlayacağız. Eğer $[r, a]$'nın r/a ve $[s, b]$'nin s/b anlamına geleceğini hesaba katarsak, tanımların nasıl olması gerektiği belli:

$$[r, a] + [s, b] = [rb + sa, ab]$$
$$[r, a] \times [s, b] = [rs, ab].$$

Yalnız bu tanımlarda önemli bir sorun çıkabilir. Örneğin toplamanın tanımında şöyle bir sorun çıkabilir:

$$[r, a] = [r', a'] \text{ ve } [s, b] = [s', b']$$

olabilir ve o zaman yukarda tanımlanan $[r, a] + [s, b]$'nin $[r', a'] + [s', b']$ elemanına eşit olması gerekir, ki toplama işlemi gerçekten hakkıyla tanımlanmış bir işlem olsun, ne de olsa birbirine eşit elemanlar toplandığında toplamlar farklı çıkmamalı! Bir sonraki önsav bunun bir sorun olmadığını söylüyor:

Önsav 38.3. *(r, a), (r', a'), (s, b), $(s', b') \in R \times A$ olsun. Eğer*

$$[r, a] = [r', a'] \text{ ve } [s, b] = [s', b']$$

ise o zaman

$$[rb + sa, ab] = [r'b' + s'a', a'b'] \text{ ve } [rs, ab] = [r's', a'b'].$$

olur.

Kanıt: Son derece basit, sadece tanımları uygulamak yeterli. Kolay kanıtı okura bırakıyoruz. □

Artık yukarda önerdiğimiz gibi,

$$[r,a]+[s,b]=[rb+sa,ab]$$
$$[r,a]\times[s,b]=[rs,ab].$$

toplama ve çarpma tanımlarını yapabiliriz, buna hakkımız olduğunu gördük.

Önsav 38.4. *R_A kümesi yukardaki işlemlerle bir halkadır. $[0,1]$ elemanı toplamanın etkisiz elemanı, $[1,1]$ ise çarpmanın etkisiz elemanıdır. $[-r,a]$ elemanı $[r,a]$ elemanının toplama için tersidir. Ayrıca eğer $a \in A$ ise, $[a,1]$ elemanı halkada tersinirdir ve bu elemanın tersi $[1,a]$ elemanıdır.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Şimdi geriye R'nin R_A halkasının bir altkümesi olduğunu kanıtlamak kalıyor. Ama bu yanlış! Hatta R ile R_A kümeleri çoğu zaman kesişmez bile.

Evet, R, R_A'nın bir altkümesi değil ama, R'ye çok benzeyen bir althalka var R_A'da: $[r,1]$ türünden yazılan elemanların kümesi R_A'nın R'ye çok benzeyen althalkasıdır. Nitekim, her r, $s \in R$ için,

$$[r,1]+[s,1]=[r+s,1]$$
$$[r,\ 1][s,1]=[rs,1].$$

Görüldüğü gibi, R'deki toplama ve çarpma işlemleri aynen R_A'nın

$$\{[r,\ 1] : r \in R\}$$

kümesine yansıyor.

Önsav 38.5. *$i : R \to R_A$ fonksiyonu $i(r)=[r,1]$ kuralıyla tanımlanmış olsun. O zaman,*
a. *i birebirdir.*
b. *i toplamaya ve çarpmaya saygı duyar, yani, her r, $s \in R$ için,*

$$i(r+s)=i(r)+i(s),$$
$$i(rs)\ =i(r)i(s).$$

c. *i, R halkasının birim elemanını R_A halkasının birim elemanına götürür.*

Kanıt: Sadece tanımları uygulamak yeterli. □

Yukardaki b ve c koşullarını sağlayan bir fonksiyona halkaların ***eşyapı fonksiyonu*** adı verilir. (c koşulu küçümsenmemelidir!)

Yukardaki önsavı dikkate alarak, bundan böyle R'nin r elemanıyla R_A'nın $i(r)$ elemanı arasında bir fark gözetmeyeceğiz. Bir başka deyişle, R_A kümesinden $i(R)$ altkümesini kesip, onun yerine R kümesini koyacağız, yani $i(R)$'le R'yi özdeşleştireceğiz. Böylece R_A'dan $[r,1]$ elemanını silip yerine r'yi koymuş oluruz ve R yapay yolla da olsa R_A'nın bir altkümesi olur. Bu yöntemle A'nın elemanları R_A'da tersinir oldular:

$$a^{-1} = [1, a].$$

Bunun sonucu olarak

$$[r, a] = [r, 1][1, a] = ra^{-1} = r/a$$

yazabiliriz. Demek ki,

$$R_A = \{r/a : r \in R, a \in A\},$$

tam istediğimiz gibi bir halka.

Burada açıklanması uzun sürecek geometrik nedenlerden, R_A halkasına R'nin A'da ***yerelleştirilmişi*** adı verilir. Eğer R bir bölgeyse, yani $xy = 0$ eşitliği $x = 0$ ya da $y = 0$ eşitliklerinden birini gereksindiriyorsa, bir üst halkada tersinlemek istediğimiz A kümesi yerine $R \setminus \{0\}$ alabiliriz. O zaman, R_A bir cisim olur (neden?) ve bu durumda R_A cismine R'nin ***bölüm cismi*** (field of fractions) adı verilir.

Eğer R bir bölgeyse ve $p \in R$ bir asalsa [yani her x ve y için, p, xy'yi böldüğünde p ya x'i ya da y'yi bölüyorsa, $A = R \setminus pR$ olabilir. Kolayca görüleceği üzere, $1 \in A$'dır ve p asal olduğundan, A çarpma altında kapalıdır. Örneğin eğer p, $\mathbb{Z}$'nin ya da $\mathbb{Q}[X]$'in bir asalıysa,

$$\{a/n \in \mathbb{Q} : a, n \in \mathbb{Z}, \text{ebob}(p, n) = 1\}$$

ve

$$\{a/b \in \mathbb{Q}(X) : a, b \in \mathbb{Q}[X], \text{ebob}(p, b) = 1\}$$

bu tür yerelleştirilmiş halkalardandır. Ek 2 39'da aynı şeyi değişmeli olmayan halkalar üzerinde deneyeceğiz.

38.6 En Küçük Ne Demek?

Şimdi R'nin bir bölge olduğunu varsayalım ve R'nin bölüm cisminin neden ve hangi anlamda R'yi içeren en küçük cisim olduğunu matematiksel olarak açıklayalım.

Teorem 38.6. *R bir bölge olsun ve F, R'nin yukarda inşa edilen bölüm cismi olsun. K herhangi bir cisim ve*

$$\varphi : R \to K$$

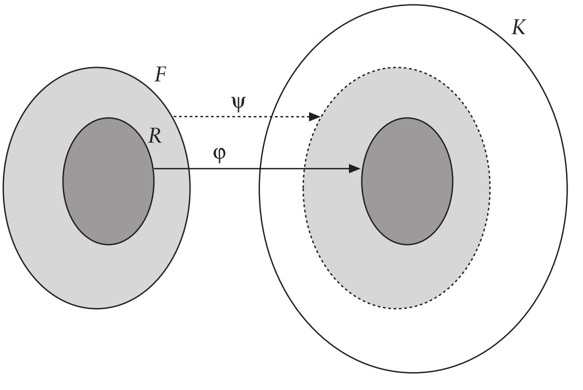
herhangi bir birebir eşyapı fonksiyonu olsun (yani φ toplamaya ve çarpmaya saygı duysun.) O zaman, her $r \in R$ için,

$$\psi(r) = \varphi(r)$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane birebir

$$\psi : F \to K$$

eşyapı fonksiyonu vardır. Ayrıca, yukardaki özelliği sağlayan ve R'yi içeren her F' cismi, F'ye eşyapısal olmak zorundadır.



Kanıt: Herhangi bir $\alpha \in F$ alalım. α'yı, r, $s \in R$ olmak üzere, r/s olarak yazabiliriz: $\alpha = r/s$. Demek ki $s\alpha = r$. Eğer söz edildiği gibi bir $\psi : F \to K$ eşyapı fonksiyonu varsa, o zaman,

$$\varphi(r) = \psi(r) = \psi(s\alpha) = \psi(s)\psi(\alpha) = \varphi(s)\psi(\alpha)$$

olmalı, yani,

$$\psi(\alpha) = \varphi(s)^{-1}\varphi(r)$$

olmalı, başka seçenek olamaz. Demek ki söylendiği gibi bir ψ varsa ancak bir tane olabilir. Şimdi ψ'nin varlığını kanıtlayalım. Elbette, ψ'yi şöyle tanımlayacağız: Herhangi bir $\alpha \in F$ alalım. α'yı, r, $s \in R$ olmak üzere, r/s olarak yazalım: $\alpha = r/s$. Burada s'nin 0 olamayacağına dikkatinizi çekerim. Şimdi,

$$\psi(\alpha) = \varphi(s)^{-1}\varphi(r) \in K$$

olsun. Bu tanımın matematiksel açıdan sakıncalı olmadığını gösterelim.

Her şeyden önce, $\varphi(s) \in R \leq K$. Eğer $\varphi(s) = 0$ olsaydı,

$$\varphi(s) = 0 = \varphi(0)$$

olurdu ve birebirlikten dolayı $s = 0$ olmak zorunda olurdu, ki bunun doğru olmadığını biliyoruz. Demek ki $s \neq 0$ ve K'da $j(s)$'nin tersi vardır, yani olduğundan ve K bir cisim olduğundan, $\varphi(s)^{-1}$, K'dadır. Dolayısıyla K'nın $\varphi(s)^{-1}\varphi(r)$ elemanından sözedebiliriz.) Ama bu yetmez. Tanımın gerçekten iyi bir tanım olduğunu kanıtlamalıyız. Yani $\varphi(s)^{-1}\varphi(r)$ gerçekten K'nin bir elemanı.

Daha bitmedi. Eğer

$$\alpha = r/s = r'/s'$$

ise,

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(r) = \varphi(s')^{-1}\varphi(r')$$

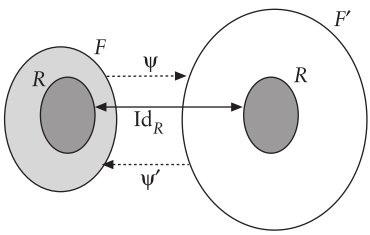
olmalı ki, ψ'nin önerilen tanımı bize çelişik sonuçlar vermesin. (Burada r, s, r', $s' \in R$ ama s, $s' \neq 0$.) Bunu hemen kanıtlayalım: R halkasında $s'r = r's$ eşitliği geçerli olduğundan, her iki tarafa da φ'yi uygularsak,

$$\varphi(s')\varphi(r) = \varphi(s)\varphi(r')$$

olmalı. Buradan da istenilen

$$\varphi(s)^{-1}\varphi(r) = \varphi(s')^{-1}\varphi(r')$$

eşitliği çıkar.



Şimdi ikinci kısmı kanıtlayalım. R'yi içeren F' cismi aynen teoremin birinci kısmında belirtilen özelliğe sahip olsun. I_R, R'den R'ye giden özdeşlik fonksiyonu olsun: Her $r \in R$ için, $\mathrm{I}_R(r) = r$.

Şimdi teoremin birinci kısmında K yerine F' ve φ yerine I_R alalım. O zaman her $r \in R$ için,

$$\psi(r) = \mathrm{I}_R(r) = r$$

eşitliğini sağlayan birebir bir

$$\psi : F \to F'$$

eşyapı fonksiyonu vardır.

İkinci olarak F ile F' cisimlerinin rollerini değiştirelim. Varsayıma göre, her $r \in R$ için,

$$\psi'(r) = \mathrm{I}_R(r) = r$$

eşitliğini sağlayan birebir bir

$$\psi' : F' \to F$$

eşyapı fonksiyonu vardır.

Demek ki,

$$\psi' \circ \psi : F \to F$$

eşyapı fonksiyonu, her $r \in R$ için,

$$(\psi' \circ \psi)(r) = r$$

eşitliğini sağlar. Ama $\mathrm{I}_F : F \to F$ özdeşlik fonksiyonu da her $r \in R$ için bu eşitliği sağlar. Bu eşitliği sağlayan fonksiyonun biricikliğinden dolayı,

$$\psi' \circ \psi = \mathrm{I}_F$$

eşitliği geçerlidir. $\psi' \circ \psi$ yerine $\psi' \circ \psi : F' \to F'$ eşyapı fonksiyonunu ele alacak olursak, aynı şekilde

$$\psi' \circ \psi = \mathrm{I}_{F'}$$

eşitliğini elde ederiz. Bundan da ψ'nin birebir ve örten, yani bir eşyapı eşlemesi olduğu çıkar. □

Bölüm cisminin yukardaki teoremde yazılan özelliği görüldüğü gibi bölüm cisminin eşyapısallığını belirliyor. Bu özellik, "evrensel özelliklere" bir örnektir. "Evrensel özelliklere" cebirde daha çok rastlayacağız. Benzer sonuç yerelleştirilmiş R_A halkaları için de geçerlidir. Bu sonucu yazmayı ve kanıtlamayı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

39. Ore Bölgeleri ve Halkaları

Geçen bölümde, bir bölgenin bölüm cismini tanımlamış ve var etmiştik: Eğer R bir bölgeyse, R'nin 0 dışındaki elemanlarının tersinir olduğu en küçük halkayı (aslında cismi) bulmuştuk.

Bir R halkasının bölge olması için iki koşul gereklidir:

$$\text{Her } x, y \in R \text{ için } xy = yx,$$

yani halka değişmelidir, ve

Her x, $y \in R$ için, $xy = 0$ ise ya $x = 0$ ya da $y = 0$'dır. Yani 0

elemanı halkanın tek sıfırbölenidir.

Bu bölümde, Ek 38'de yaptığımızın benzerini değişmeli olmayan halkalarda yapmaya çalışacağız. Her zaman başarılı olamasak da başarılı olmamız için yeterli koşulu göreceğiz.

İkinci koşuldan vazgeçemeyiz çünkü R'nin 0 dışındaki elemanlarının daha büyük bir halkada tersinir olmaları için bu koşul illa ki gereklidir. Ama eğer birinci koşuldan vazgeçiyorsak, ikinci koşulu güçlendirmemiz gerekir. Bundan böyle, her x, y elemanı için,

$$xy = 0 \textit{ ya da } yx = 0 \textit{ ise}, \textit{ ya } x = 0 \textit{ ya da } y = 0\textit{'dır}$$

koşulunu sağlayan R halkalarında çalışalım.

Öyle bir D halkası bulacağız ki,

1. R, D'nin bir althalkası olacak,

2. R'nin 0 dışındaki her elemanı D'de tersinir olacak[1],

3. Her $d \in D$ için $d = s^{-1}r$ koşulunu sağlayan r, $s \in R$ elemanları olacak. (s tabii ki 0 olamaz.)

Son iki özellikten D'nin 0 olmayan her d elemanının tersinir olduğu çıkar. Nitekim, eğer r, $s \in R$ için $d = s^{-1}r$ ise, $r \neq 0$ olur, dolayısıyla D'de r'nin tersi olan r^{-1} vardır ve $r^{-1}s$ elemanı D'dedir. Kolayca görüleceği üzere bu $r^{-1}s$

[1] Burada, bir $x \in D$ elemanının tersinir olması demek, hem $xy = 1$ hem de $yx = 1$ eşitliklerini sağlayan bir $y \in D$ olması demektir

elemanı d'nin tersidir. 0 olmayan her elemanının tersinir olduğu bu tür halkalara ***bölüm halkası*** denir. Bir bölüm halkasının cisim olması için çarpmanın değişkenliği yeter ve gerek koşuldur (neden?)

Yukardaki (3) koşulu yerine şu koşulu da alabilirdik:

3'. Her $d \in D$ için $d = rs^{-1}$ koşulunu sağlayan r, $s \in R$ elemanları olacak.

R, illa değişkenli bir halka olmadığı için (3) ve (3') koşulları birbirlerine denk olmayabilirler, yani birinin doğru olması, diğerinin de doğru olduğu anlamına gelmeyebilir, nitekim gelmez de.

D'yi inşa etmek için daha önceki bölümde kullandığımız yöntemi deneyeceğiz. D'nin $s^{-1}r$ elemanını (r, s) ikilisi olarak göstereceğiz ve $R \times R \setminus \{0\}$ kümesi üzerinde $\equiv$ ikili ilişkisini, inşa edeceğimiz D'de

$$(r, s) \equiv (t, u) \Leftrightarrow s^{-1}r = u^{-1}t$$

denkliği doğru olacak biçimde tanımlayacağız. Yalnız sağ taraftaki

$$s^{-1}r = u^{-1}t$$

koşulu henüz var olmayan ve daha sonra, ancak D'yi inşa ettiğimiz zaman var olacak olan s^{-1} ve u^{-1} elemanlarını kullanıyor. R değişkenli bir halka olduğunda, doğru olması gereken

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow ur = st$$

denkliğini kullanıp, $\equiv$ ikili ilişkisini,

$$(r, s) \equiv (t, u) \Leftrightarrow ur = st$$

olarak tanımlamıştık. Ama artık R'nin değişkenli bir halka olduğunu varsaymıyoruz. Dolayısıyla ciddi bir sorunla karşı karşıyayız. $s^{-1}r = u^{-1}t$ koşuluyla eşdeğer olan ama R'nin elemanları kullanılarak ifade edilebilen bir eşitlik arıyoruz.

$s^{-1}r = u^{-1}t$ eşitliğinde s'yi diğer tarafa geçirip hiç olmazsa s^{-1} teriminden kurtulabiliriz:

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow r = su^{-1}t.$$

Şimdi $r = su^{-1}t$ ilişkisinden R'de olup olmadığından emin olmadığımız u^{-1} terimini atmanın bir yolunu bulmalıyız. (Eğer u'nun tersi R'de olsaydık sorun olmazdı, ama u'nun tersi R'de olmayabilir.)

R değişkenli olduğunda, daha ilerde, D'yi inşa ettiğimizde doğru olacak olan

$$su^{-1} = u^{-1}s$$

eşitliğini kullanmıştık. Bu sefer böyle bir eşitlik geçerli olmayabilir. Bu eşitlik yerine, s_1, $u_1 \in R \setminus \{0\}$ için,

$$su^{-1} = u_1^{-1}s_1$$

eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Daha doğrusu, bu eşitlikten ziyade, buna denk olan ama R'de geçerli olan,

$$u_1 s = s_1 u$$

eşitliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Eğer bu koşul her

$$(u, s) \in R \times (R \setminus \{0\})$$

için sağlanıyorsa, halkaya ***sol Ore bölgesi*** adı verilir. Bu varsayım altında,

$$s^{-1}r = u^{-1}t \Leftrightarrow r = su^{-1}t \Leftrightarrow r = u_1^{-1}s_1 t \Leftrightarrow u_1 r = s_1 t$$

eşdeğerliklerine ulaşırız. Demek ki, eğer R bir sol Ore bölgesiyse, $R \times (R \setminus \{0\})$ kümesi üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini,

$(r, s) \equiv (t, u)$ ancak ve ancak

$$u_1 s = s_1 u \text{ ve } u_1 r = s_1 t \text{ eşitliklerini sağlayan } u_1, s_1 \in R \setminus \{0\} \text{ varsa}$$

yani

$$\exists u_1, s_1 \in R \setminus \{0\}(u_1 s = s_1 u \text{ ve } u_1 r = s_1 t)$$

olarak tanımlayıp bu tanımın değişmeli halkalarda tanımlanan benzer ilişkiyle aynı işlevi göreceğini umabiliriz.

Sol Ore koşulu, a/s ve b/u gibi elemanları toplarken paydaları eşitlememize olanak sağlayacak.

Sol Ore Koşulu: Her s, $u \in R \setminus \{0\}$ için,

$$u_1 s = s_1 u$$

eşitliğini sağlayan u_1, $s_1 \in R \setminus \{0\}$ vardır, yani

$$Rs \cap Ru \neq \{0\}$$

olur.

Önsav 39.1. *R, bir sol Ore bölgesiyse, $R \times (R \setminus \{0\})$ üzerine yukarda tanımlanan $\equiv$ ikili ilişkisi bir denklik ilişkisidir.*

Kanıt: Önce her r, $s \in R \times (R \setminus \{0\})$ için, $(r, s) \equiv (r, s)$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Bunun için $u_1 = s_1 = 1$ almak yeterli.

Şimdi $(r, s) \equiv (t, u)$ denkliğini varsayıp $(t, u) \equiv (r, s)$ denkliğini kanıtlayalım. u_1, $s_1 \in R \setminus \{0\}$,

$$u_1 s = s_1 u \text{ ve } u_1 r = s_1 t$$

eşitliklerini sağlasın. $(t, u) \equiv (r, s)$ denkliğini kanıtlamak için,

$$u_2 u = s_2 s \text{ ve } u_2 t = s_2 r$$

eşitliklerini sağlayan u_2, $s_2 \in R \setminus \{0\}$ bulmalıyız. Çok kolay:

$$u_2 = s_1, s_2 = u_1$$

olsun. Buraya kadar Ore koşulunu kullanmadık. Şimdi kullanacağız.

Son olarak, $(r, s) \equiv (t, u)$ ve $(t, u) \equiv (v, w)$ denkliklerini varsayıp

$$(r, s) \equiv (v, w)$$

denkliğini kanıtlayalım. Varsayıma göre,

$$u_1 s = s_1 u, u_1 r = s_1 t, w_2 u = u_2 w \text{ ve } w_2 t = u_2 v$$

eşitliklerini sağlayan u_1, s_1, w_2, $u_2 \in R \setminus \{0\}$ elemanları var. Ve biz de,

$$w_3 s = s_3 w, w_3 r = s_3 v$$

eşitliklerini sağlayan w_3, $s_3 \in R \setminus \{0\}$ elemanları arıyoruz. Ore koşulunu w_2 ve s_1 elemanlarına uygularsak, $as_1 = bw_2$ eşitliğinin geçerli olduğu a, $b \in R \setminus \{0\}$ elemanlarını buluruz. Şimdi hesaplayalım:

$$au_1 s = as_1 u = bw_2 u = bu_2 w$$

buluruz. Demek ki $w_3 = au_1$ ve $s_3 = bu_2$ alırsak, $w_3 s = s_3 w$ birinci eşitliğini elde ediyoruz. Bakalım $w_3 r = s_3 v$ eşitliği de doğru mu?

$$w_3 r = au_1 r = as_1 t = bw_2 t = bu_2 v = s_3 v.$$

Doğruymuş! Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Şimdi $D = (R \times (R \setminus \{0\}))/\equiv$ olsun. D üzerinde bir halka yapısı belirleyeceğiz.

D'nin bir elemanını $[r, s]$ olarak yazalım. Buradaki

$$[r, s]$$

elemanı, $R \times (R \setminus \{0\})$ kümesinin (rs) elemanının denklik sınıfıdır. İlerde $[r, s]$'nin $s^{-1}r$ anlamına geleceğini biliyoruz. Eğer $a \in R \setminus \{0\}$ ise $[r, s] = [ar, as]$ eşitliğine dikkatinizi çekerim.

Önce toplamadan başlayalım. İşin özü şu:

$$s^{-1}r + t^{-1}u$$

toplamını $x^{-1}y$ olarak yazmak istiyoruz. Eğer bunu yapabilirsek, o zaman,

$$[r, s] + [t, u] = [x, y]$$

olarak tanımlayabiliriz. Demek ki,

$$x(s^{-1}r + t^{-1}u) \in R$$

olacak biçimde bir $x \neq 0$ bulmak yeterli (o zaman y elemanını $x(s^{-1}r + t^{-1}u)$ olarak alabiliriz).

$$x(s^{-1}r + t^{-1}u) = xs^{-1}r + xt^{-1}u$$

olduğundan, x'i xs^{-1}, $xt^{-1} \in R$ ilişkilerini sağlayacak biçimde seçebilirsek, sorun kalmayacak. Yani x'i $Rs \cap Rt \setminus \{0\}$ kümesinden seçmeye çalışalım. Ama böyle bir x'in olduğunu da sol Ore koşulundan biliyoruz. Şimdi tanımı yapabiliriz.

$(r, s), (t, u) \in R \times (R \setminus \{0\})$ olsun. $x \in Rs \cap Rt \setminus \{0\}$ ve
$y = x(s^{-1}r + t^{-1}u) \in R$ olsun. O zaman,

$$[r, s] + [t, u] = [x, x(s^{-1}r + t^{-1}u)]$$

olarak tanımlansın. Ama bu tanım pek o kadar güzel olmadı. R'nin bir elemanı olduğunu bildiğimiz sağ taraftaki $x(s^{-1}r+t^{-1}u)$ teriminde s^{-1} ve t^{-1} gibi R'de olmayan elemanlar gözüküyor. Bu küçük kusuru giderelim. $s_1 \neq 0$ ve $t_1 \neq 0$ için $x = t_1 s = s_1 t$ eşitliği sağlansın. Şimdi toplamayı

$$[r, s] + [t, u] = [t_1 s, t_1 r + s_1 u]$$

olarak tanımlayalım. Yalnız bu tanımın r, s, t, u, t_1, s_1 elemanlarından bağımsız olduğunu göstermek gerekir. Yani şu önsavı kanıtlamalıyız:

Önsav 39.2. *$[r, s] = [r', s']$ ve $[t, u] = [t', u']$ olsun. Ayrıca,*

$$t_1 s = s_1 t \text{ ve } t'_1 s' = s_{1'} t'$$

eşitlikleri sağlansın. O zaman,

$$[t_1 s, t_1 r + s_1 u] = [t_{1'} s', t_{1'} r' + s_{1'} u']$$

eşitliği doğrudur.

Bu önsavı kanıtlamayacağız. Okura alıştırma olarak bırakıyoruz[2]. Bu önsavdan sonra toplama, $t_1 s = s_1 t$ eşitliği sağlayan t_1, $s_1 \in R \setminus \{0\}$ elemanları için,

$$[r, s] + [t, u] = [t_1 s, t_1 r + s_1 u]$$

[2]Dileyen okur John A. Beachy'nin Introductory Lectures on Rings and Modules kitabına bakabilir. London Mathematical Society, Student Texts 47 (1999) ISBN 0521 64340 6 ve 0521 64407 0.

olarak tanımlansın.

Çarpma için de benzer şeyi yapacağız. Gene işin özüne gidelim:

$$(s^{-1}r)(u^{-1}t)$$

çarpımını $x^{-1}y$ biçiminde yazmak istiyoruz, ki

$$[r, s][t, u] = [y, x]$$

olarak tanımlayabilelim.

$$(s^{-1}r)(u^{-1}t) = s^{-1}(ru^{-1})t$$

eşitliğinden dolayı, çarpımının en başındaki s^{-1} ile en sonundaki t'nin bir önemi yok elbet. ru^{-1} elemanını $y^{-1}x$ biçiminde yazabilirsek, işimiz biter. O zaman

$$(s^{-1}r)(u^{-1}t) = s^{-1}y^{-1}xt = (ys)^{-1}xt$$

olur ve

$$[r, s][t, u] = [xt, ys]$$

tanımını deneyebiliriz. Eğer $ru^{-1} = y^{-1}x$ ise, $yr = xu$'dur. Sol Ore koşuluna göre de R'de bu son eşitliği sağlayan $x, y \neq 0$ elemanları vardır. Şimdi çarpmayı tanımlayabiliriz:

(r, s), $(t, u) \in R \times (R \setminus \{0\})$ olsun. x, $y \in R \setminus \{0\}$ elemanları, $yr = xu$ eşitliğini sağlasın.

$$[r, s][t, u] = [xt, ys]$$

tanımını yapalım. Bir kez daha bu tanımın yasal olduğunu kanıtlamalıyız:

Önsav 39.3. *$[r, s] = [r', s']$ ve $[t, u] = [t', u']$ olsun. Ayrıca, $yr = xu$ ve $y'r' = x'u'$ eşitlikleri sağlansın. O zaman, $[xt, ys] = [x't', y's']$ eşitliği doğrudur.*

Böylece çarpmayı yukardaki gibi tanımlayabiliriz.

Eğer tanımda $r = t = 1$ alırsak, o zaman $x = y = 1$ alabiliriz ve

$$[1, s][t, 1] = [t, s]$$

buluruz.

Ama dikkat: Eğer tanımda $s = t = 1$ alırsak, $yr = xu$ eşitliğini sağlayan x ve y elemanları için,

$$[r, 1][1, u] = [x, y]$$

eşitliği bulunur ve $ur = ru$ doğru olmadıkça bu çarpım $[r, u]$ olmaz.

Okur bir de $[r, s][s, r]$ çarpımını hesaplasın.

$$[r, s][s, r] = [s, s] = [1, 1]$$

bulacaktır.

Bütün bunlardan sonra, artık D kümesinin bu iki işlemle birlikte bir halka olduğunu, hatta $[0,1]$ dışında her elemanın tersinir olduğunu kanıtlayabiliriz. Ayrıca, $r \mapsto [r,1]$ fonksiyonunun R'den D'ye giden bir halka gömmesi olduğunu kanıtlayabiliriz.

Teorem 39.4. *R bir sol Ore bölgesiyse, bu tanımlarla*

$$(D, +, \times, [0,1], [1,1])$$

yapısı bir halkadır. Bu halkada $[0,1]$ toplamanın, $[1,1]$ de çarpmanın etkisiz elemanlarıdır. Eğer $r \neq 0$ ise, D'nin her $[r,s]$ elemanı tersinirdir ve

$$[r,s]^{-1} = [s,r]$$

'dir. Ayrıca,

$$[r,s] = [1,s][r,1] = [s,1]^{-1}[r,1]$$

dir. Dahası, $i(r) = [r,1]$ kuralıyla tanımlanan

$$i : R \to D$$

fonksiyonu birebirdir, toplamaya ve çarpmaya saygı duyar ve R'nin 0 ve 1 etkisiz elemanlarını sırasıyla D'nin $[0,1]$ ve $[1,1]$ etkisiz elemanlarına götürür.

Eğer $i(R)$ ile R'yi özdeşleştirirsek, istediğimiz,

$$D = (R \setminus \{0\})^{-1}R$$

eşitliğini buluruz.

Son olarak bölge olmayan Ore halkalarından söz edelim. Bir R halkasında,

$$\textit{Her } y \in R \textit{ için}, xy = 0 \text{ ya da } yx = 0 \text{ ise } y = 0\textit{'dır}$$

önermesini doğrulayan elemanlara (yani sıfırbölen olmayan elemanlara) ***düzgün eleman*** denir. R'nin düzgün elemanlar kümesini R_0 ile gösterelim. Yukarda yaptıklarımızda, $R_0 = R \setminus \{0\}$ idi.

Sol Ore Koşulu: *Her u, $s \in R_0$ için, $u_1 s = s_1 u$ eşitliğini sağlayan u_1, $s_1 \in R_0$ vardır.*

Bu koşulu sağlayan bir halkaya ***Ore halkası*** denir. Aynen yukardaki yöntemle, bir R Ore halkasını, R_0'ın elemanlarının tersinir olduğu $D = R_0^{-1}R$ eşitliğini sağlayan bir D halkasının içine gömebiliriz.

40. Sonsuz Küçük Eleman

Bu bölümde, bugüne dek ancak rüyalarınızda göreceğinizi tahmin edeceğiniz bir numara gerçekleştireceğiz: 3/5, 7/9, −4/5 ve 3 gibi kesirli sayılara ***sonsuz küçük*** bir eleman ekleyeceğiz. Miniminnacık bir şey olacak bu sonsuz küçük eleman (ya da bu yeni "sayı"). O kadar küçük, ama o kadar küçük olacak ki, milyarda 1'den, katrilyonda 1'den ve her pozitif kesirli sayıdan daha küçük olacak.

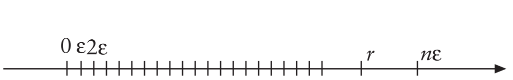
Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü içeren, ama ayrıca bir de "sonsuz küçük" bir eleman içeren yepyeni bir "sayı sistemi" yaratacağız. Bu sayı sisteminde, "sayı"ları toplayıp çıkarıp çarpabileceğiz, hatta birbirine bölebileceğiz. (Tabii ki 0'a bölemeyeceğiz!)

Sonsuz küçük elemana ϵ adını verirsek, $1/\epsilon$ gibi bir elemanımız da olacak doğal olarak. Tahmin edileceği üzere, ϵ sonsuz küçük olduğundan, $1/\epsilon$ sonsuz büyük olacak!..

40.1 Arşimet Özelliği

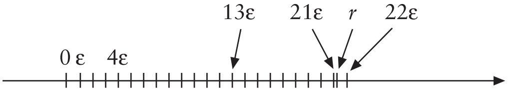
Arşimet'in insanlık için yaptığı haddi hesabı olmayan iyiliklerden biri de, ne kadar küçük adımlar atarsak atalım, eğer hep aynı uzunlukta adımlar atarsak ve eğer yeterince adım atarsak, dilediğimiz kadar uzağa gidebileceğimizi anlamasıdır. Buna kısaca "sabreden derviş yol katetmiş teoremi" diyebiliriz, ama daha da kısa olarak ***Arşimet Özelliği*** adıyla bilinir.

Arşimet Özelliği. $\epsilon > 0$ *bir kesirli sayı olsun.* q *bir başka kesirli sayı olsun. O zaman* $n\epsilon > q$ *eşitliğini sağlayan bir* n *doğal sayısı vardır. Yani* ϵ *ne kadar küçük olursa olsun, eğer pozitifse, kendisiyle yeterince defa toplanınca her sayıyı geçer.*



n adet ε uzunluğunda adımla r geçiliyor

Kanıt: Eğer $q \leq 0$ ise $n = 1$ almak yeterli. Şimdi $q > 0$ varsayımını yapalım. Pozitif a, b, c, d doğal sayıları için, $\epsilon = a/b$ ve $q = c/d$



22 adet ε uzunluğunda adımla r geçiliyor

olarak yazalım. O zaman, $b\epsilon = b \times a/b = a \geq 1$. Dolayısıyla

$$c(b+1)\epsilon = c(b\epsilon + \epsilon) \geq c(1+\epsilon) > c \geq c/d = q$$

Demek ki $n = c(b+1)$ almak yeterli. □

Eğer bir ϵ sayısı 0 değilse ve her n tamsayısı için, $n|\epsilon| < 1$ oluyorsa, ϵ sayısına ***sonsuz küçük*** diyelim... Arşimet Özelliği sonsuz küçük bir kesirli sayının olmadığını söylüyor!

Sonsuz küçük gerçel sayı da yoktur elbette. Ama bizim için bu önemli olmayacak, biz kesirli sayılarla çalışacağız.

Bir ϵ sayısının sonsuz küçük olmasıyla bunun mutlak değeri olan $|\epsilon|$ sayısının sonsuz küçük olması aynı şeydir tabii ki...

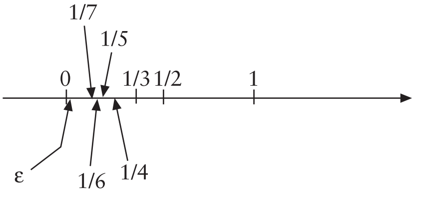
Tanıma bakılırsa, pozitif bir ϵ sayısının sonsuz küçük olması için,

$$\begin{gathered} 0 < \epsilon < 1, \\ 0 < \epsilon < 1/2, \\ 0 < \epsilon < 1/3, \\ 0 < \epsilon < 1/4, \\ \dots \end{gathered}$$

koşullarının hepsinin birden doğru olması gerekiyor. Kesirli sayılarda bu koşulların hepsini birden sağlayan bir ϵ yoktur, çünkü Arşimet Özelliği'ne göre **her** $n > 0$ doğal sayısı için,

$$0 < \epsilon < 1/n$$

koşullarının hepsini birden sağlayan kesirli (hatta gerçel) bir sayı yoktur.



Gerçekle başa çıkılmaz... Bunu dert etmeyeceğiz. Biz gene de sonsuz küçük bir sayı bulacağız. Bulduğumuz sayı kesirli (ya da gerçel) sayı olmayacak tabii. Bambaşka bir evrene geçeceğiz.

Bir şeye dikkatinizi çekerim: Yukarda sıraladığımız sonsuz sayıdaki koşulun sonlu tanesini sağlayan bir ϵ mutlaka vardır. Örneğin, $\epsilon = 1/1001$, ilk bin koşulu sağlar (ama bu ϵ sonraki koşulları sağlamaz.)

Matematikçiler bu gibi durumlarda tüm koşulları sağlayan bir başka sistemin olduğunu hissederler. Tecrübe diye buna derler işte... Mantıkçılar ise bir başka sistemin olduğunu bilirler. Buna da bilim denir! Eğer sonsuz tane koşulun sonlu tanesi hep sağlanabiliyorsa, o zaman sonsuz tane koşulu da sağlayan bir evren olmalı! Bu ilkeye göre, yukardaki sonsuz koşulu sağlayan ϵ'un olduğu bir evren olmalıdır. İşte bu bölümde bu evreni bulacağız. Üstelik soyut bir buluş olmayacak bu, evren karşımızda etiyle kemiğiyle belirecek.

Önce böyle bir ϵ'un olduğu bir evrenin olduğunu varsayalım. Bakalım bu varsayımsal evren hakkında neler söyleyebileceğiz? Biraz düşünerek evrene toslayacağız.

Sonsuz küçük bir sayı içeren evrene E diyelim.

E'nin sonsuz küçük bir elemanına ϵ diyelim:

$$\epsilon \in E.$$

Ayrıca kesirli sayıların da E'de olmalarını istiyoruz. Demek ki $\mathbb{Q} \subseteq E$ olmalı.

Elbette $e \notin \mathbb{Q}$.

E'nin elemanlarını çarpabilmek istediğimizden (bölmeyi daha sonra ele alacağız), E'de sadece $\mathbb{Q}$ değil, örneğin $\mathbb{Q}\epsilon$, $\mathbb{Q}\epsilon^2$, $\mathbb{Q}\epsilon^3$ gibi altkümeler de olmalı. Bu altkümelerin elemanlarını toplayabilmeliyiz de. Yani E'de,

$$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\epsilon + \mathbb{Q}\epsilon^2 + \mathbb{Q}\epsilon^3$$

gibi altkümeler olmalı. Demek ki E'de kesirli katsayılı ve "değişkeni" ϵ olan tüm polinomlar olmalı. Eğer bölme yapmaktan vazgeçip sadece toplama, çarpma ve çıkarmayla yetinmeye razı olursak, sadece polinomlar yettiğini göreceğiz, E'de başka bir şey olmasına gerek yok.

$$E = \mathbb{Q}[\epsilon]$$

olsun. E, katsayıları kesirli olan ve değişkeni ϵ olan polinomlar kümesidir. Daha açık olarak, E'nin her f elemanı, bir n doğal sayısı ve f_0, f_1, $\cdots$,f_n kesirli sayıları için

$$f = f_0 + f_1\epsilon + \ldots + f_n\epsilon^n$$

olarak yazılırlar. (Eğer katsayıların hepsi birden 0 değilse, f'nin de 0 olamayacağının kanıtı yan sütundaki gri kutucuğun içindedir.) Burada ϵ'u tanımsız, anlamsız ve yepyeni bir terim olarak görüyoruz.

Yalnız ϵ'un sonsuz küçük olmasını istediğimizi unutmayalım. Bir de ϵ'un pozitif olmasını istiyoruz. Yani, her pozitif n doğal sayısı için,

$$0 < \epsilon < 1/n$$

olmasını istiyoruz. Dolayısıyla her pozitif $q = m/n$ kesirli sayısı için, (m ve n'yi pozitif alalım)

$$0 < \epsilon < 1/n \leq m/n = q,$$

yani

$$0 < \epsilon < q$$

olmalı.

E halkasında henüz tanımlamadığımız eşitsizliğin başka özelliklerini de irdeleyelim. Yukardaki eşitsizliklerin üç terimini de herhangi bir pozitif kesirli sayıyla çarparsak, q de rastgele seçildiğinden, her a, b pozitif kesirli sayısı için,

$$0 < a\epsilon < b$$

olması gerektiğini görürüz. Bunları ϵ ile çarparsak

$$0 < a\epsilon^2 < b\epsilon$$

olması gerektiği anlaşılır. Bunu böylecene devam ettirirsek, her pozitif

$$a_0, a_1, \ldots, a_k$$

kesirli sayısı için,

$$0 < a_k\epsilon^k < \cdots < a_2\epsilon^2 < a_1\epsilon < a_0$$

olması gerektiğini görürüz.

Buradan, her a_0, a_1, ..., a_k kesirli sayısı için, eğer $a_0 > 0$ ise,

$$a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \cdots + a_k\epsilon^k > 0$$

olması gerektiği çıkar. Bunu kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} -a_1\epsilon - a_2\epsilon^2 - \cdots - a_k\epsilon^k &\leq |a_1|\epsilon + \cdots + |a_k|\epsilon^k \\ &\leq |a_1|\epsilon + \cdots + |a_k|\epsilon \\ &= (|a_1| + \cdots + |a_k|)\epsilon < a_0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, eğer $a_i > 0$ ise ve i aşağıda görülen göstergeçlerin en küçüğüyse,

$$a_i\epsilon^i + \cdots + a_k\epsilon^k > 0$$

olması gerekir.

40.2 ϵ Cebirsel Olamaz

Hemen yukardaki satırdan, hepsi birden 0 olmayan

$$f_0, f_1, \ldots, f_n$$

kesirli sayıları için,

$$f_0 + f_1\epsilon + \cdots + f_n\epsilon^n$$

teriminin 0 olamayacağı kolaylıkla kanıtlanabilir. Yani ϵ, cebirsel bir sayı olamaz.

Şimdi E kümesinin tüm elemanlarını (polinomları) tek bir hamleyle sıralayalım.

E'den rastgele iki a ve b elemanı alalım. Bunlardan hangisinin daha büyük olması gerektiğine karar vereceğiz. Yani $a \geq b$ eşitsizliğinin mi yoksa $a \leq b$ eşitsizliğinin mi doğru olması gerektiğine karar vereceğiz. Tabii, $a \leq b$ eşitsizliği için, $b - a \geq 0$ eşitsizliği gerek ve yeter koşul olmalı. Dolayısıyla hangi polinomun hangi polinomdan daha büyükeşit olduğuna karar vermek için negatif olmayan polinomları bilmek yeterli olmalı.

Rastgele bir $f \neq 0$ polinomu alalım. Bu polinomun pozitif olup olmaması gerektiğine karar vereceğiz. Polinomu,

$$f = f_0 + f_1\epsilon + \cdots + f_m\epsilon^m$$

olarak yazalım. $f_0 = 0$ olabilir elbette. f_1 katsayısı da 0 olabilir. Ama eğer $f \neq 0$ ise, bu katsayılardan biri 0 olmamalı. fk, 0'a eşit olmayan katsayıların ilki olsun. Demek ki,

$$f = f_k\epsilon^k + \cdots + f_m\epsilon^m,$$

ve k, yukarda beliren göstergeçlerin en küçüğü ve $f_k \neq 0$. Daha önce yaptığımız hesaplardan,

$$\begin{aligned} f > 0 &\Leftrightarrow f_k\epsilon^k + \cdots + f_m\epsilon^m > 0 \\ &\Leftrightarrow f_k + f_{k+1}\epsilon + \cdots + f_m^{\epsilon^{m-k}} > 0 \Leftrightarrow f_k > 0 \end{aligned}$$

olması gerektiğini biliyoruz. Demek ki aslında eşitsizliğin tanımını da biliyoruz:

$$f > 0 \Leftrightarrow f\text{'nin 0 olmayan ilk katsayısı } > 0.$$

Dolayısıyla, f, $g \in E$ için,

$$f > g \Leftrightarrow f - g > 0$$

tanımını yapalım. Bunun yardımıyla, tahmin edildiği gibi $\leq$ ilişkisinin de tanımını yapabiliriz.

Teorem 40.1. *Yukarda tanımlanan $\leq$ ilişkisi $E = \mathbb{Q}[\epsilon]$ halkasını sıralı bir halkaya dönüştürür.*

Görüldüğü gibi E, $\mathbb{Q}$'nün aksine, bu sıralamayla Arşimet özelliğini sağlamaz. yani $\mathbb{Q}$'nün her pozitif α elemanı için, $n\alpha > 1$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı olmayabilir, örneğin $\alpha = \epsilon$ için böyle bir eleman yoktur.

E'nin pozitif α, β elemanları, her $n \in \mathbb{N}$ (ya da her $n \in \mathbb{Q}$) için,

$$n\alpha < \beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, α'ya β'ya ***göre sonsuz küçük*** diyelim ve bunu

$$\alpha << \beta$$

olarak yazalım. Demek ki $\epsilon << 1$. Hatta, hangi pozitif a ve b sayılarını alırsak alalım,

$$a\epsilon << b$$

olur. ϵ^2 de ϵ'a ve 1'e göre sonsuz küçüktür ve ϵ^3 de ϵ^2'ye, ϵ'a ve 1'e göre sonsuz küçüktür.

E bir halkadır. Yani E'de toplama, çıkarma ve çarpma gibi işlemler vardır ve bu işlemler hepimizin bildiği ve tahmin ettiği özellikleri sağlarlar.

Ama E bir cisim değildir, çünkü E'de bölme yapılamaz. Bölme yapabilmek için E yerine,

$$F = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in E, g \neq 0 \right\}$$

kümesine geçmeliyiz. Burada,

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow fg_1 = f_1 g$$

eşkoşulunu anımsatırız.

$f/g = (-f)/(-g)$ eşitliğinden dolayı, F'nin her elemanı, bir $f \in E$ ve bir $g \in E$ ve $g > 0$ için f/g biçiminde yazılır. Böyle yazılmış f/g ve f_1/g_1 için,

$$\frac{f}{g} \leq \frac{f_1}{g_1} \Leftrightarrow fg_1 \leq f_1 g$$

tanımını yapalım. Şimdi, F, üstünde toplama, çıkarma, çarpma ve (0'dan değişik bir elemanla) bölme yapılabilen ve yukardaki teoremi sağlayan bir nesnedir.

$\epsilon \in F$, gene sonsuz küçüktür, yani her $n > 0$ doğal sayısı için, $0 < \epsilon < 1/n$ dir. Ama $1/\epsilon$, F'nin sonsuz büyük bir elemanıdır, yani her $n \in \mathbb{Z}$ için, $n < 1/\epsilon$ eşitsizliği doğrudur.

Bütün bu yaptıklarımızı kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ yerine, mot à mot, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile yapabilirdik.

Kaynakça

[CK] Chang C. C ve Keisler H. J., **Model Theory**, 1973, North Holland.

[Mar] Marker, David, **Model Theory: An Introduction**, 2002, Springer, Graduate Texts in Mathematics.

[Ne1] Nesin, Ali, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı II**, yayımlanacak.

[Ne2] Nesin, Ali, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 3'üncü basım, Nesin Yayıncılık 2013.

[Ne3] Nesin, Ali, **Önermeler Mantığı**, Nesin Yayıncılık 2014.

[Ne4] Nesin, Ali, **Analiz I**, Nesin Yayıncılık xxxx

[Po] Poizat, Bruno, **An Introduction To Contemporary Mathematical Logic**, Springer-Verlag, New York, 2000.

Simgeler Dizini

Dizin