Ali Nesin

1956'da ...

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye...

Ali Nesin

Aksiyomatik Kümeler Kuramı II

Ordinaller, Kardinaller ve Seçim Aksiyomu

İçindekiler

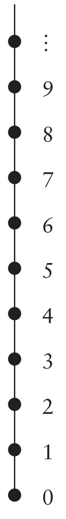
Önsöz

Kısım I

Sıralamalar

1. Sıralama

İlk bölümde her şeyin sıralanmayacağını gördük. Ama bu, hiçbir şey sıralanmaz anlamına gelmez tabii ki. Bazı şeyler bal gibi sıralanır. Örneğin ÖSS sınav sonuçlarına göre gençlerimiz sıralanabilirler, sıralanıyorlar da...



Bu bölümde sıralamanın matematiksel anlamını ve bir sürü örnek göreceğiz. Matematiksel tanımı daha sonraya saklayarak örneklerle başlayalım.

Örnekler.

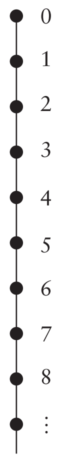
1.1. İlk örneğimiz doğal sayılar kümesi olsun. En küçük doğal sayı 0'dır, sonra 1 gelir, sonra 2, vs. Herhangi iki doğal sayıyı büyüklüklerine göre karşılaştırabiliriz. Örneğin $3 < 5$. Ayrıca $5 < 8$. Dolayısıyla $3 < 8$ vs. Doğal sayılar, herkesin bildiği üzere

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$$

diye sıralanmışlardır. Bu sıralamanın ***en küçük elemanı*** vardır (o da 0'dır). Ama ***en büyük elemanı*** yoktur, her doğal sayıdan daha büyük doğal sayı vardır çünkü. Bu sıralamanın bir başka özelliği de her elemanın hemen ***bir büyüğünün*** olması, 25'in bir büyüğü 26'dır örneğin. Ayrıca, bu sıralamada, 0 dışında her elemanın ***bir öncesi*** de vardır.

Doğal sayıların bu sıralamasına ***doğal sıralama*** adını vereceğiz ve bu sıralamayı $(\mathbb{N}, <)$ olarak göstereceğiz. Doğal sayıların doğal sıralamasını bir önceki sayfada solda resmettik. Küçük elemanları aşağıya, büyük elemanları yukarıya yazdık. Görsel olarak hep böyle yapacağız, küçükleri aşağıya, büyükleri yukarıya yazacağız.

1.2. İkinci örneğimizde doğal sayılarda alışık olduğumuz sıralamayı ters çevirelim: Bu sefer en küçük sayı (yani 0) bu yeni sıralamaya göre en "büyük" eleman olacak. Sayıları bir sınavda yapılan yanlış sayısı olarak yorumlarsak böyle bir sıralamanın neden gerekli olabileceğini anlarız. Bu kez 0 puan alan (yani 0 yanlış yapan) en iyisidir, ondan daha iyisi yoktur. 1 puan alan da fena değildir ama 0 puan kadar iyi değildir. Bu sıralamayı $\prec$ işaretiyle gösterelim:



$$\ldots \prec 5 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 1 \prec 0.$$

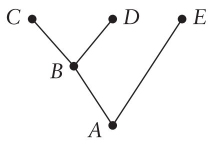
Bu yeni sıralamanın en büyük elemanı var, 0. Ama en küçük elemanı yok, her elemanın hemen bir küçüğü var, örneğin 5'in bir küçüğü bu sıralamaya göre 6. Ayrıca 0 dışında her sayının hemen bir büyüğü var. Bu sıralamaya göre 5'in hemen bir büyüğü 4'tür. Yandaki şekilde bu yeni sıralamayı resmettik. En büyük elemanı en tepede gösterdik, elemanlar küçüldükçe aşağılandılar. Aşağı doğru istediğimiz kadar gidebiliriz.
Doğal sayıların doğal sıralamasıyla karışmasın diye bu yeni sıralamayı $\prec$ simgesiyle gösterdik. Doğal sayılar üstündeki bu yeni sıralamaya gelecekte

$$(\mathbb{N}, \prec)$$

olarak gönderme yapacağız.
Dikkatli okur, bu sıralamayla negatif tamsayıların sıralaması arasında büyük bir ayrım olmadığını görmüştür. Nitekim, bildiğimiz sıralamayla, negatif tamsayılar, aynen bu örnekte olduğu gibi,

$$\ldots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0.$$

1.3. Üçüncü örneğimizi gönül işlerinden seçelim, daha heyecanlı oluyor. Diyelim Gül'ün beş talibi var: Ayhan, Burak, Can, Doğan ve Erdem. Gül, bu beş talipten birini seçmek için delikanlıları sınavdan geçiriyor. En öncelikli kıstası zekâ olduğundan önce taliplerine satranç oynatıyor.



Ayhan herkese yeniliyor, Burak hem Can'a hem de Doğan'a yeniliyor. Zaman kalmadığından başka da maç yapılmıyor. Bu aşamada Gül'ün sıralamasını şöyle gösterebiliriz:

$$A < B < C, A < B < D \text{ ve } A < E.$$

Burada A Ayhan'ı, B Burak'ı vs temsil ediyor elbette. Sıralamayı yukarda şeklettik. En düşük puan alan Ayhan'ı en alt sıraya yerleştirdik.

Bu aşamada Gül Erdem'le Burak arasında bir kıyaslama yapamıyor henüz ama bu kıyaslayamama yukardakinin bir sıralama ya da kısmi sıralama olmasına engel olmayacak. (Matematiksel tanım biraz sonra...)

Gül, Erdem'le Can ve Doğan'ı da kıyaslayamıyor. Ama Can'ı ve Doğan'ı Burak'a tercih ediyor.

1.4. Dördüncü örneğimizde bir kümenin altkümelerini 'küçükten büyüğe' sıralayacağız. E bir küme olsun (Evren'in E'si.) E'nin altkümeleri kümesine X diyelim. Örneğin

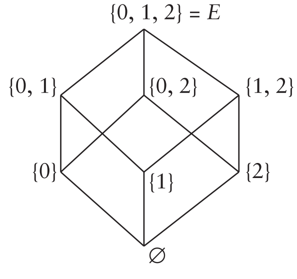
$$E = \{0, 1, 2\}$$

olabilir. O zaman X'in şu 8 elemanı vardır:

$$\begin{aligned}&\varnothing\\ &\{0\}, \{1\}, \{2\},\\ &\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}\\ &\{0, 1, 2\} = E.\end{aligned}$$

Eğer A, $B \in X$ ise, yani A ve B, E'nin altkümeleriyse, " A, B'den küçüktür" ilişkisini $A \subset B$ olarak tanımlayalım. Yani A, B'nin özaltkümesiyse ($A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise), o zaman A'nın B'den küçük olduğunu söyleyelim. Bu, birazdan tanımlayacağımız anlamda bir sıralamadır.

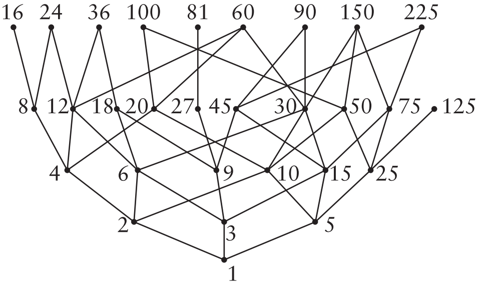
Bu sıralamada, üçüncü sıralamadaki gibi karşılaştırılamayan elemanlar vardır. Örneğin X'in $\{0\}$ ve $\{1\}$ elemanları (yani E'nin $\{0\}$ ve $\{1\}$ altkümeleri) karşılaştırılamazlar; birbirlerine eşit olmadıkları gibi ne biri diğerinin ne de beriki öbürünün özaltkümesidir. Bu sıralamayı $E = \{0, 1, 2\}$ durumunda "aşağıdan yukarı doğru" yandaki gibi resmedebiliriz.



Gelecekte bu sıralamaya $(\wp(E), \subset)$ sıralı çifti olarak gönderme yapacağız. Burada, $\wp(E)$, E'nin altkümeler kümesi, yani X anlamına geliyor.

1.5. Gene doğal sayıları ele alalım. Eğer x, y'yi (doğal sayılarda) bölüyorsa, yani $xz = y$ eşitliğini sağlayan bir z doğal sayısı varsa, ama $x \neq y$ ise, x, y'den (şu anda tanımlamak üzere olduğumuz sıralamaya göre) "küçük" olsun. Yani bölen sayılar küçük, bölünen sayılar büyük...

0, kendisi dışında hiçbir sayıyı bölmediğinden (çünkü z ne olursa olsun $0z = 0 \neq y$), 0'dan büyük sayı yoktur. Öte yandan (0 dahil!) her sayı 0'ı böldüğünden (çünkü $x0 = 0$) her sayı 0'dan küçüktür. Dolayısıyla doğal sıralamanın en küçük elemanı olan 0 bu sıralamanın en büyük elemanıdır.



1 her sayıyı böldüğünden, 1 bu sıralamanın en küçük elemanıdır. Asal sayılar da 1'den "bir boy büyük" elemanlardır elbette: 1'le bir asal sayı arasında bu sıralamaya göre bir başka eleman yoktur.

Bu sıralamaya göre, bir p asalından bir büyük elemanlar p^2 ve bir q asalı için pq biçiminde yazılan elemanlardır. Bu sıralamanın küçük bir parçasının bir resmini yukarıda sunduk. Bölen sayıları aşağıya, bölünen sayıları yukarı yazdık, ayrıca bu iki sayıyı bir doğruyla birleştirdik. Ancak şekil karışmasın diye, örneğin, 2 ile 36 arasına bir doğru çizmedik (bu yöntemle çizilen şekle ***Hasse diyagramı*** denir.) 2'den 36'ya giden en az bir yükselen yol olduğundan 2'nin (bu sıralamaya göre) 36'dan küçük olduğu şekle bakınca anlaşılıyor.

Bu sıralamanın tanımı son derece basit ama kendisi de bir o kadar karmaşık. Yukardaki şemaya bir de 7'yi eklerseniz bu sıralamanın ne kadar karmaşık bir sıralama olduğunu daha iyi anlarsınız, hatta sadece dördüncü katı tamamlamaya çalışın...

Bir sayıyı asallara ayırarak sayının 1'den yüksekliğini de hesaplayabiliriz. Örneğin,

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

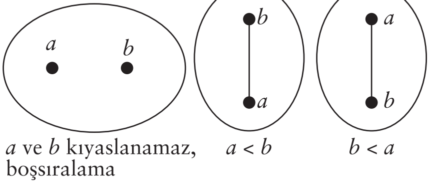
olduğundan, 60'ın yüksekliği $2 + 1 + 1 = 4$'tür, yani 1'den başlayarak tam dört adımda 60'a ulaşabiliriz, örneğin $1 - 2 - 6 - 30 - 60$ bu yollardan biridir.

Gelecekte bu sıralamaya $(\mathbb{N}, |)$ olarak gönderme yapacağız.

1.6. **Sonlu Kümeler Üzerine Sıralama.** Her ne kadar matematiksel değeri olmasa da, pedagojik önemi olduğundan az sayıda elemanı olan kümeler üzerine sıralamaları bulalım.

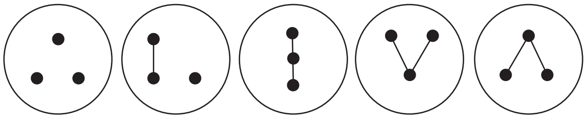
Eğer X boşkümeyse ya da X'in tek bir elemanı varsa, X'te kıyaslayabileceğimiz iki değişik eleman olamayacağından bu durumlarda yapacak bir şey yok, bu kümeler üzerine sadece tek bir sıralama vardır: ***boşsıralama*** denilen ve hiçbir elemanın hiçbir elemanla kıyaslanmadığı tek bir sıralama.

Eğer X'in iki elemanı varsa, diyelim $X = \{a, b\}$ ise, o zaman X üzerine aşağıda görülen üç değişik sıralama vardır.



a ve *b* kıyaslanamaz, boşsıralama $a < b$ $b < a$

Bunlardan son ikisi birbirlerine çok benzerler, birbirlerinden 'gerçekten farklı' olduklarını söylemek zor... İlerde, "eşyapısallığı" tanımladığımızda, son iki sıralamanın ***eşyapısal*** olduklarını söyleyeceğiz.
Şimdi X'in üç elemanı olduğunu varsayalım. O zaman, X üzerine 19 tane değişik ama sadece 5 tane "gerçekten değişik" yani "eşyapısal olmayan" sıralama vardır.



boşsıralama, bunlardan 1 tane var — bunlardan 6 tane var — bunlardan da 6 tane var — bunlardan 3 tane var — bunlardan 3 tane var

Eleman sayısı dörde çıkarsa sıralama sayısı çok artar. Bunların sayısını bulmayı okura bırakıyoruz.
Sonlu sıralama örneklerini saymazsak, yukarda beş sıralama örneği verdik. İlk ikisi ve sonuncusunda doğal sayıları üç değişik biçimde sıraladık: $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, \prec)$, $(\mathbb{N}, |)$. Birincisinde doğal sıralamayı aldık. İkincisinde doğal sıralamayı ters çevirdik. Sonuncusunda ise sıralamayı bölünebilirlikle tanımladık. Görüldüğü gibi aynı küme değişik biçimlerde sıralanabiliyor.
Son dört örnekte de görülebileceği gibi illa iki farklı elemandan birinin diğerinden küçük olması gerekmiyor. Bu durum ilk iki örnekte zuhur etmiyor; bu sıralamalarda birbirinden farklı herhangi iki elemanı karşılaştırabiliyoruz.

Matematiksel Tanım. Üstünde bir sıralama tanımlayacağımız kümeye X diyelim. X'in elemanlarını bir biçimde sıralamak istiyoruz. İlla birinci, ikinci diye değil, çünkü X'te birinci ya da ikinci olmayabilir.

Sıralama dediğimiz şey, X'in bazı elemanlarının X'in bazı elemanlarından daha küçük (ya da daha büyük) olduklarını buyurmaktır. Öylesine bir buyruk değil ama... Bu buyruğun şu iki özelliği sağlaması gerekir:

S1. *Hiçbir eleman kendinden küçük olamaz.*

S2. *Eğer x, y'den küçükse ve y de z'den küçükse, o zaman x, z'den küçük olmalıdır.*

Bu iki özelliği sağlayan ikili bir ilişkiye ***sıralama*** denir.

Eğer "x, y'den küçüktür" ifadesini $x < y$ olarak kısaltırsak, o zaman yukardaki S1 ve S2 koşulları şu biçimde yazılırlar:

S1. *Hiçbir $x \in X$ için $x < x$ olmaz.*

S2. *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise, $x < z$'dir*[1] .

Dikkat ederseniz herhangi iki elemanın karşılaştırılabileceğini söylemiyor sıralama koşulları, yani x'in y'den küçük olmadığı, y'nin de x'ten küçük olmadığı $x \neq y$ elemanları olabilir. Bu yüzden bu koşulları sağlayan bir sıralamaya kimi zaman ***kısmi sıralama*** dendiği de olur.

Herhangi iki elemanın karşılaştırılabildiği bir sıralamaya, yani S1 ve S2 dışında,

[1]S1 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye yansımasız ilişki denir. S2 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye ise geçişkenli ya da geçişli ilişki denir, bkz. [SKK]

S. *Her* $x, y \in X$ *için, ya* $x < y$ *ya* $y < x$ *ya da* $x = y$

koşulunu sağlayan bir sıralamaya ***tamsıralama*** denir. Yazının başında verdiğimiz ilk iki örnek birer tamsıralamadır, son üç örnek ise tamsıralama olmayan kısmi sıralamalardır çünkü son üç örnekte karşılaştırılamayan (ve eşit olmayan) elemanlar vardır.

Tamsıralamaları daha sonraki bölümlerde daha ayrıntılı olarak konu edeceğiz.

Bir sıralamada $<$ yerine kimi zaman $\subset$ (dördüncü örnekte olduğu gibi), $\prec$, $\sqsubset$, $\lhd$ gibi başka imgelerin kullanıldığı da olur. Örneğin doğal sayıları tersten sıraladığımız ikinci örneğimizde "doğal sıralama"yla karışmasın diye $<$ yerine $\prec$ imgesini kullanmıştık. Gene doğal sayıları sıraladığımız beşinci örneğimizde sıralama bölünebilirliğe göre tanımlandığından, $<$ yerine $|$ imgesini kullanmak yerinde bir karardı.

Eğer bir sıralamada $x < y$ ise, y'nin (bu sıralama için) x'ten ***daha büyük*** olduğunu söyleriz.

Bir sıralamada hem x, y'den hem de y, x'ten küçük olamaz, çünkü o zaman S2'de $z = x$ alarak, $x < x$ buluruz ki bu da S1'le çelişir.

Eğer $<$ diye adlandırılan bir sıralama verilmişse, elemanlar arasında eşitliği de içeren ve genellikle $\leq$ imiyle simgelenen ikili bir ilişki şöyle tanımlanır:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ ya da } x = y. \tag{1}$$

$\leq$ ikili ilişkisi şu özellikleri sağlar:

T1. *Her* $x \in X$ *için* $x \leq x$.

T2. *Her* $x, y, z \in X$ *için, eğer* $x \leq y$ *ve* $y \leq z$ *ise,* $x \leq z$*'dir.*

T3. *Her* $x, y \in X$ *için, eğer* $x \leq y$ *ve* $y \leq x$ *ise,* $x = y$ *eşitliği doğrudur.*

$<$ ilişkisinin S1 ve S2'yi sağladığını varsayarak yukarıda tanımlanan $\leq$ ilişkisinin T1, T2 ve T3'ü kanıtlayalım. T1 ve T2'nin doğrulukları çok bariz. T3'ü kanıtlayalım. $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsun. Eğer $x \neq y$ ise, $\leq$ ilişkisinin tanımına göre $x < y$ ve $y < x$ olur. Bundan ve S2'den $x < x$ çıkar, ki bu da S1'le çelişir.

Eğer bir X kümesi üzerine yukardaki T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ikili ilişkisi verilmişse ve $<$ ikili ilişkisini,

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ ve } x \neq y \tag{2}$$

olarak tanımlarsak, o zaman $<$ ilişkisi S1 ve S2 özelliklerini sağlar, dolayısıyla bir sıralama olur. Bunun kanıtı çok basittir ve okura bırakılmıştır.

Kolayca görüleceği üzere S1 ve S2 özelliğini sağlayan bir sıralamayla, T1, T2 ve T3 özelliğini sağlayan ikili ilişkiler arasında bir eşleme vardır. Birinden diğeri açıklanan yöntemlerle elde edilir. Ve açıklanan yöntemler iki kez uygulandığında başlanan ikili ilişki bulunur. Yani S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir $<$ sıralamasından başlarsak ve bu sıralamaya önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $<$ sıralamasını buluruz. Ayrıca eğer T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ilişkisinden başlarsak ve bu ilişkiye önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $\leq$ ilişkisini buluruz.

Demek ki S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir sıralamayla T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişki arasında pek bir fark yoktur. Bu yüzden bundan böyle T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkiye de ***sıralama*** diyeceğiz. Eğer sıralamayı $<$, $\prec$, $\subset$, $\sqsubset$, $\triangleleft$ gibi bir simgeyle tanımlarsak, sıralamanın S1 ve S2 özelliklerini sağladığını, ama eğer sıralamayı $\leq$, $\leqq$, $\lesssim$, $\subseteq$, $\sqsubseteq$, $\trianglelefteq$ gibi bir simgeyle tanımlarsak T1, T2, T3 özelliklerini sağladığını varsayacağız[2].

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasının bir tamsıralama olması için,

T. *Her* $x, y \in X$ *için, ya* $x \leq y$ *ya da* $y \leq x$

özelliğinin sağlanması yeter ve gerek koşuldur elbette.

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasında eğer $x \leq y$ ise, "x, y'den ***küçükeşittir***" ya da "y, x'ten ***büyükeşittir***" diyeceğiz.

Eğer bir sıralama verilmişse, $>$, $\geq$, $\not<$, $\not>$, $\not\leq$, $\not\geq$, $\not\prec$, $\not\succ$ gibi anlamı bariz olan ve alışık olduğumuz simgeleri hiç çekinmeden kullanacağız. Örneğin:

$$x > y \Leftrightarrow y < x$$
$$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$
$$x \not\geq y \Leftrightarrow x \geq y \text{ doğru değilse}$$
$$x \not\prec y \Leftrightarrow x \prec y \text{ doğru değilse}$$

Dikkat! Eğer $(X, <)$ bir tamsıralama değilse, $x \not< y$ illa $x \geq y$ anlamına gelmeyebilir, çünkü x ve y karşılaştırılamaz da olabilirler.

Dört sayfayı aşan bir örnek ve tanım faslından sonra bölümün kalan kısmında sıralamaların bazı özelliklerini ve bazı sıralama örnekleri göstereceğiz.

1.1 Daha Matematiksel Bir Deyişle...

Sıralamanın asıl matematiksel tanımı şöyledir. X bir küme olsun. $A \subseteq X \times X$,

S1. *Her* $x \in X$ *için* $(x, x) \notin A$,

S2. *Her* $x, y, z \in X$ *için, eğer* $(x, y) \in A$ *ve* $(y, z) \in A$ *ise o zaman* $(x, z) \in A$ *olur*

özelliklerini sağlayan bir altküme olsun. O zaman A'ya X üzerine bir ***sıralama*** denir ve bu sıralama (X, A) olarak yazılır.

X üzerine bir ***ikili ilişki*** sadece $X \times X$'in bir altkümesidir [SKK, Sİ]. Demek ki bir sıralama S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkidir.

[2] Arife not: Kategori teorisinde bu dediğimiz doğru değildir. Eğer sıralama tamsıralama değilse, eşyapı fonksiyonlarında sorun çıkar.

Eğer (X, A) bir sıralamaysa, sık sık $(x, y) \in A$ yerine $x < y$ gibi sezgilerimize daha fazla hitap eden ve daha fazla anlam ima eden bir yazılım kullanılır. O zaman sıralama (X, A) yerine $(X, <)$ olarak yazılır.

Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere, eğer $A = \varnothing$ ise S1 ve S2 özellikleri doğru olur ve böylece hiçbir elemanın hiçbir elemanla karşılaştırılmadığı ***boşsıralama*** adı verilen $(X, \varnothing)$ sıralamasını elde ederiz. Boşsıralamaya ***kararsız*** sıralama adını da verebiliriz. Zaten tek bir elemanı olan bir küme üzerine sadece boşsıralama olabilir. Hayatta boşsıralamadan daha ilginç sıralamalar vardır.

Alıştırmalar.

1.1. X bir küme olsun. Eğer (X, A) ve (X, B) sıralamalarsa ve

$$A \subseteq B$$

ise, (X, B) sıralamasının (X, A) sıralamasından daha büyük olduğunu söyleyelim. X üzerine bir tamsıralamanın, A'nın en büyük olduğu (X, A) sıralaması olduğunu kanıtlayın.

1.2 Eskilerden Yeni Sıralamalar Türetmek

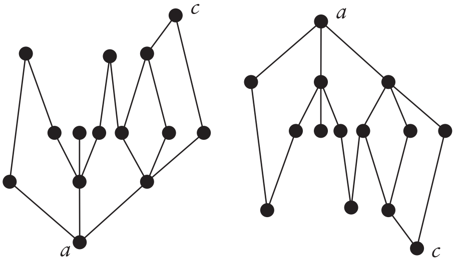
Bu altbölümde bir sıralamadan nasıl başka sıralamalar elde edileceğini göreceğiz.

1.2.1 Bir Sıralamayı Ters Çevirmek.

İkinci örneğimiz olan $(\mathbb{N}, \prec)$ sıralamasında birinci örneğimiz olan

$$(\mathbb{N}, <)$$

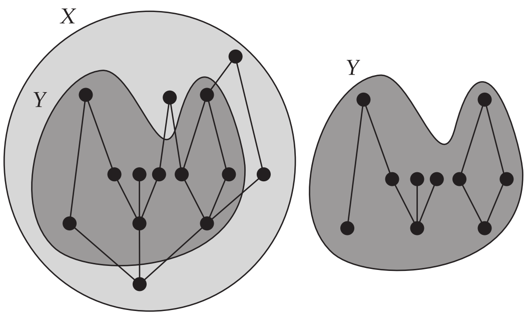
sıralamasını ters çevirmiştik, birinci örnekte büyük olan elemanlar ikinci örnekte küçük olmuşlardı. Genel olarak, herhangi bir sıralamayı ters çevirerek yeni bir sıralama elde edebiliriz: Eğer $<$, X kümesi üzerine bir sıralamaysa, $x \prec y$ ilişkisini $y < x$ olarak tanımlayalım;



Bir sıralama ve onun ters çevrilmiş hali o zaman $\prec$ de X üzerine bir sıralamadır. Bu iki sıralama arasında kaydadeğer bir fark olduğunu söylemek zor, biri bilindi mi diğeri de bilinir. Örneğin birinin en küçük elemanı varsa diğerinin en büyük elemanı vardır vs.

1.2.2 Sıralı Bir Kümenin Bir Altkümesini Sıralamak.

Sıralı bir X kümesinin bir Y altkümesi verilmişse, X'in sıralamasını Y'ye kısıtlayarak Y'yi de sıralayabiliriz, yani Y kümesi X üstkümesinin sıralamasıyla sıralanır.



Bir sıralama ve bir altkümesi

X'in sıralamasını sadece Y'nin elemanlarına kısıtlamak yeterlidir bunun için. Bu durumda Y'nin sıralamasının X'in sıralamasından ***miras kaldığı*** ya da X'in sıralamasının ***kalıntısı*** olduğu söylenir. Örneğin $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralaması hem $\mathbb{Q}$'nün hem de $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır. $\mathbb{N}$'nin doğal sıralaması da hem $\mathbb{Z}$'nin hem $\mathbb{Q}$'nün hem de $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır.

Y'nin bu sıralamasına X'in ***altsıralaması*** denir.

1.2.3 Yeni Bir Eleman Eklemek.

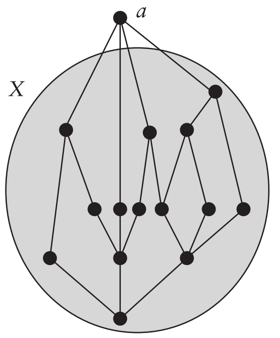
Eğer bir $(X, <)$ sıralaması verilmişse ve a, X'te olmayan bir elemansa, $X \cup \{a\}$ kümesini X'in sıralamasını bozmayacak şekilde çeşitli biçimlerde sıralayabiliriz. En kolayı ve en çok kullanım alanı bulanı a'yı en tepeye koymaktır, yani a'yı en büyük eleman yapmaktır. $X \cup \{a\}$ kümesinin bu sıralamasında, X'in eski düzeni aynen korunur, bir de ayrıca a'nın X'in tüm elemanlarından daha büyük olacağı buyrulur. Yani her x, $y \in X \cup \{a\}$ için,

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} x & , y \in X \text{ ve } (X,\ <) \text{ sıralamasında } x < y \text{ ya da} \\ x & \in X\text{ve } y = a \end{cases}$$

tanımı yapılır.

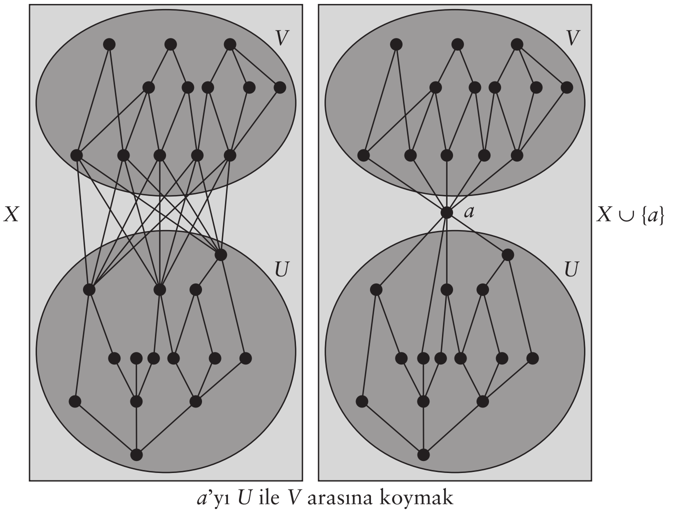
Bir sonraki şekilde X'in en tepesine eleman eklemeyi resmettik.

a elemanı yukardaki gibi X'in tepesine eklendiğinde a yerine ∞ yazmak fena fikir olmayabilir ama bu fikri kullanmayacağız.



Sıralanmış bir X kümesinin tepesine bir eleman eklemek

a'yı X'in tepesi yerine başka bir yerine de ekleyebiliriz. Örneğin X'in içinde şu özellikleri sağlayan U ve V kümeleri olduğunu varsayalım: $U \cup V = X$ ve U'nun her elemanı V'nin her elemanından küçük. Şimdi a'yı U ile V arasına koyalım, yani a'yı U'nun her elemanından büyük ve V'nin her elemanından küçük yapalım.



a'yı U ile V arasına koymak

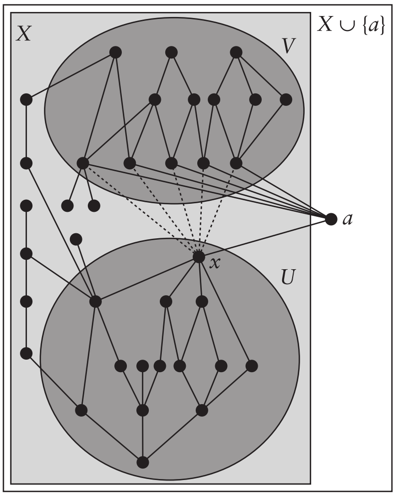
$X \cup \{a\}$ kümesi üstünde yeni bir sıralama elde ederiz. Böylece a elemanı diğer bütün elemanlarla karşılaştırılabilir olur.

Aslında a'yı en tepeye koymak bunun özel bir halidir: Eğer yukardaki inşada $U = X$ ve $V = \varnothing$ alırsak, a'yı en tepeye koymuş oluruz. Yeni bir sıralama elde etmek için illa $U \cup V = X$ eşitliği sağlanması gerekmez. Bu eşitlik geçerli olmadan da a'yı U ile V arasına koyabiliriz. Gene bir sıralama elde etmek için U ve V'nin sağlaması gereken gerek ve yeter koşulu bulmayı okura bırakıyoruz.

Bunun bir başka varyasyonu şöyledir: $x \in X$ ve

$$V = \{y \in X : x < y\} \text{ ve } U = \{y \in X : y \geq x\}$$

olsun. Şimdi a'nın V'nın elemanlarından küçük ve U'nun elemanlarından büyük olduğunu buyuralım. Böylece a'yı x'ten hemen sonra koymuş oluruz. Bunun resmi de aşağıda.



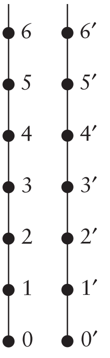
a'yı x'ten hemen sonra koymak

a

1.2.4 İki Sıralamayı Toplamak.

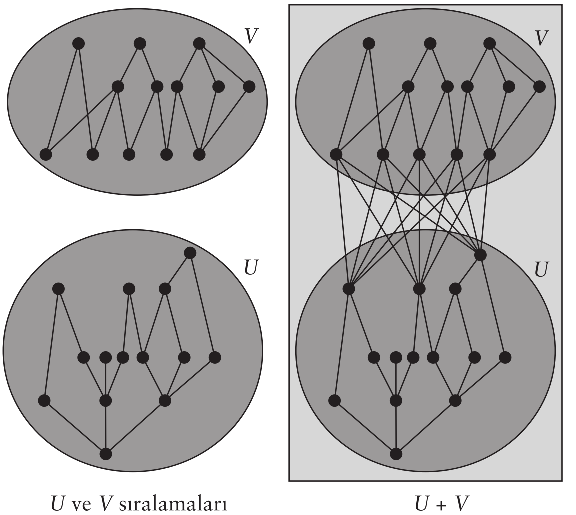
$(U, <)$ ve $(V, <)$ iki sıralama olsun. U ile V'nin ayrık olduklarını, yani kesişimlerinin boş olduğunu varsayalım. Şimdi, U ve V'de varolan sıralama dışında yeni herhangi bir sıralama eklemeden $U \cup V$ kümesini sıralı bir küme olarak algılayabiliriz. $(U \sqcup V, <)$ olarak simgeleyeceğimiz bu sıralamada U'nun elemanlarıyla V'nin elemanları birbirleriyle kıyaslanamazlar.

Eğer U ve V kümeleri ayrık değillerse ve illa U ve V ile yukardaki inşayı yapmak istersek, önce bu iki kümeyi bir biçimde "ayrıklaştırmak" gerekir. Bunun standart yolu U yerine $U \times \{0\}$, V yerine $V \times \{1\}$ yazmaktır. Ayrıca U ve V'nin sıralamalarını bozmadan $U \times \{0\}$ ve $V \times \{1\}$ kümelerine taşınır. Eğer bu çok meşakkatli geliyorsa, V'nin elemanlarına (U'nunkilere değil!) v yerine v' adını verilir. $U = V = \mathbb{N}$ durumunda bunun resmini yanda yaptık.



$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

$U \cup V$ bileşimini (kümeler hâlâ ayrık) şöyle de sıralayabiliriz. U ve V'nin varolan sıralamasını kabullenip ayrıca U'nun her elemanını V'nin her elemanından küçük addedebiliriz. $U \cup V$ kümesi üzerindeki bu sıralamaya $U + V$ olarak gösterilir. Resmi aşağıda.



U ve *V* sıralamaları　　　*U* + *V*

$\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sıralaması önemlidir. Aşağıda bu sıralamayı gösterdik,

$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

ancak yerden kazanmak için $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ sıralamasını aşağıdan yukarıya değil, soldan sağa yazdık. Zaten ilerde de elemanları küçükten büyüğe yazarken soldan sağa yazacağız.

1.2.5 Fonksiyonla Sıralama.

$(Y, <)$ bir sıralama, X bir küme ve $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. X üzerine şu $<$ ikili ilişkisini tanımlayalım: $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

olsun. Bu, kolayca kanıtlanabileceği üzere X üzerine bir sıralama tanımlar.

Dikkat: Tanımı

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

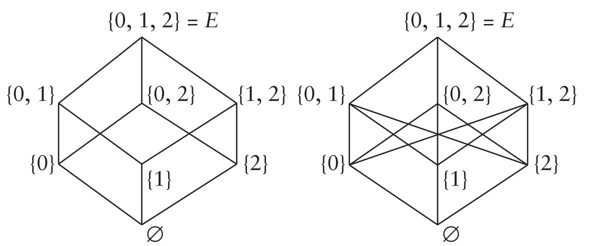
olarak yapsaydık, eğer f birebir değilse, bu tanım bir sıralama tanımlamazdı; çünkü $x_1 \neq x_2$, için $f(x_1) = f(x_2)$ olursa, o zaman, $x_1 \leq x_2$ ve $x_2 \leq x_1$ olur ama $x_1 = x_2$ olmaz.

Örnekler.

1.7. E bir küme olsun. X, E'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

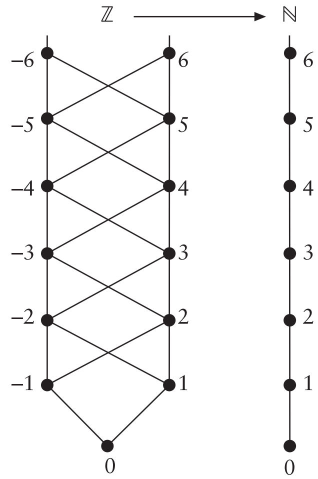
ilişkisi ($|x|$, x altkümesinin eleman sayısıdır) X üzerine bir sıralama tanımlar. Bu sıralama $(X, \subset)$ sıralamasından daha "ince" bir sıralamadır çünkü eğer $x_1 \subset x_2$ ise $x_1 < x_2$'dir. $E = \{1, 2, 3\}$ durumunda her iki sıralamanın resmi aşağıda.



1.8. $X = \mathbb{Z}$ olsun. $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ için,

$$x_1 \sqsubset x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

ilişkisi ($|x|$, x sayısının mutlak değeridir) $\mathbb{Z}$ üzerine bir sıralama tanımlar. Resmi aşağıda olan ve büyüklüğün mutlak değere göre ölçüldüğü bu sıralamaya göre, örneğin, -3, 2'den daha büyüktür, yani $2 \sqsubset -3$'tür. Ama bu sıralamada, mutlak değerleri aynı olan sayılar karşılaştırılmaz.



1.2.6 Alfabetik Sıralama.

En çok kullanılan ve en yararlı sıralamalardan biridir. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer sıralama olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu sıralamayı koyalım:

$x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ için,

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak

$$x_1 < x_2 \text{ ya da } x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$

ise. Bunun S1 ve S2 koşullarını sağlayan bir sıralama olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. (Mutlaka yapılmalı!) Bu sıralamaya ***alfabetik sıralama*** adı verilir.

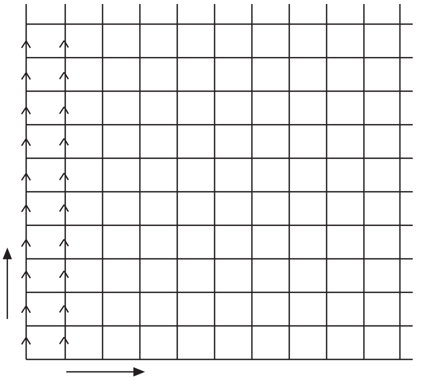
Neden alfabetik sıralama dendiği anlaşılmış olmalı: Önce ilk koordinata (ilk harfe!) göre sıralıyoruz. Sonra ikincisine göre... Üçüncü harfimiz olsaydı, bu sıralamaya devam edebilirdik.

Bu sıralamada bir (x, y) çiftinin yerini saptamak için önce x'e bakılır. x ne kadar küçükse (x, y) de o kadar küçüktür. Eğer birinci koordinatlar eşitse, o zaman ikinci koordinatlara bakılır.

Birkaç örnek vermekte yarar var. $(X, <) = (Y, <) = (\mathbb{N}, <)$ olsun. Bu sıralamaya göre

$$\begin{aligned}(5, 0) &> (4, 100) > (4, 5)\\ &> (4, 0) > (3, 1000)\\ &> (2, 1) > (2, 0)\\ &> (1, 5) > (0, 600)\\ &> (0, 1) > (0, 0)\end{aligned}$$

olur.



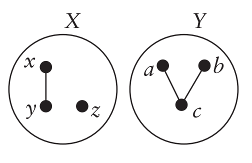
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ızgarasının elemanları sağa ve yukarı gittikçe büyürler. İkinci sütunun tüm elemanları birinci sütunun tüm elemanlarından daha büyüktür. Üçüncü sütunun tüm elemanları ikinci sütunun tüm elemanlarından daha büyüktür.

(0, 0) bu sıralamanın en küçük elemanıdır. Bu elemandan bir sonra gelen eleman (0, 1)'dır. Sonra (0, 2), (0, 3) vs gelir. Tüm $(0, n)$'ler bittikten sonra (!) ilk gelen eleman (1, 0)'dır. Bunun ardından (1, 1), (1, 2), (1, 3) vs gelir. $(1, n)$ türünden elemanlar bittikten sonra (2, 0) elemanı gelir ve sıralama böylecene sürer gider.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ örneğinde her elemandan hemen sonra gelen bir eleman vardır: (n, m) elemanından hemen sonra $(n, m+1)$ elemanı gelir. Ayrıca $(n, 0)$ türünden elemanlar dışında her elemanın hemen bir öncesi vardır: Eğer $m \neq 0$ ise, (n, m)'den hemen önce gelen eleman $(n, m-1)$ elemanıdır.

Alıştırmalar.

1.2. Eğer X ve Y sıralamaları yandaki gibiyse $X \times Y$ alfabetik sıralamasını bulun.



Aşağıdaki alıştırmalar matematiksel ifade edilmemişseler de okur sıralamaları kavramaya çalışarak ne sorulmak istendiğini anlayabilir.

1.3. X herhangi sıralı bir küme olsun. $\{0, 1\}$ kümesini $0 < 1$ olarak sıralayalım. $\{0, 1\} \times X$ alfabetik sıralamasıyla $X + X$ sıralamasının bir anlamda "aynı" sıralama olduklarını gösterin.

1.4. $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\mathbb{N}$'yi de doğal sıralayalım.

$$\mathbb{N} \times \{0, 1\}$$

sıralamasıyla $\mathbb{N}$ sıralaması arasında "pek fark olmadığını" gösterin.

1.5. $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\{a, b\}$ kümesi de boşsıralansın. $\{0, 1\} \times \{a, b\}$ alfabetik sıralamasıyla $\{a, b\} \times \{0, 1\}$ sıralamasının ayrı sıralamalar olduklarını gösterin.

1.3 Sıralamaların Özel Elemanları

1.3.1 En Küçük ve En Büyük Elemanlar.

Bir sıralamada en küçük ya da en büyük eleman olabileceğini de olmayabileceğini de gördük. $\mathbb{N}$'nin doğal sıralamasının en küçük elemanı vardır ama en büyük elemanı yoktur. Bunun ters yüz edilmişi olan $(\mathbb{N}, \prec)$ sıralamasının en büyük elemanı vardır (0'dır) ama en küçük elemanı yoktur. $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralamasının ne en küçük ne de en büyük elemanı vardır. Öte yandan $(\wp(E), \subset)$ sıralamasının hem en küçük $(\varnothing)$ hem de en büyük (E) elemanı vardır.

X, E'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. X'i $\subset$ ilişkisine göre sıralayalım, yani $(X, \subset)$ sıralamasına bakalım. Eğer E sonsuz bir kümeyse, bu sıralamanın en büyük elemanı yoktur, çünkü herhangi bir sonlu A kümesine E'den A'da olmayan bir eleman eklersek, A'dan daha büyük bir küme elde etmiş oluruz.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında 0 en büyük elemandır ama $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, |)$ sıralamasının en büyük elemanı yoktur.

Matematiksel tanım şöyle: Bir $(X, <)$ sıralamasının ***en büyük elemanı*** "her $x \in X$ için $x \le a$" özelliğini sağlayan bir $a \in X$ elemanıdır. ***En küçük eleman*** benzer biçimde tanımlanır. Eğer $A \subseteq X$ ise A'nın en büyük elemanı "her $x \in A$ için $x \le a$" özelliğini sağlayan bir $a \in A$ elemanıdır. Burada a'nın A'da olması önemlidir. Örneğin $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) ve $A = (0, 1)$ aralığı ise, A'nın en büyük elemanı yoktur. Ama $A = (0, 1]$ ise, A'nın en büyük elemanı vardır. A'nın en küçük elemanı benzer biçimde tanımlanır.

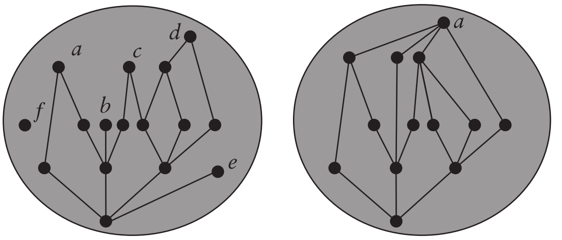
A'nın en büyük elemanı (eğer varsa) bir tanedir, çünkü a ve b, A'nın en büyük elemanlarıysa hem $a \le b$ hem de $b \le a$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan $a = b$ olur.

Alıştırmalar.

1.6. X ve Y sıralamalarının en büyük elemanları varsa, $X \times Y$ alfabetik sıralamasının da en büyük elemanı olduğunu gösterin.

1.7. $X \times Y$ alfabetik sıralamasının en büyük elemanı varsa, X ve Y sıralamalarının da en büyük elemanları olduğunu gösterin.

1.8. **Maksimal ve Minimal Elemanlar.** A'nın ***maksimal*** elemanları her $x \in A$ için $x \not> a$ özelliğini sağlayan $a \in A$ elemanlarıdır. Yani a'nın A'nın maksimal elemanı olması için, A'da a'dan büyük eleman olmamalı, ama yukarıdakinin tersine, bu sefer A'da a ile karşılaştırılamayan elemanlar olabilir. Burada da, bir önceki tanımda olduğu gibi, a'nın A'da olması gerektiğine dikkatinizi çekerim.



maksimal elemanlar: a, b, c, d, e, f — en büyük eleman: a

En büyük eleman, eğer varsa, tek maksimal elemandır. Ama aşağıdaki şekildeki örnekte de görüleceği üzere maksimal elemanlardan birkaç tane olabilir.

Bir tamsıralamada en büyük elemanla maksimal eleman arasında fark yoktur ve bu durumda en büyük eleman $\max A$ olarak gösterilir.

A'nın ***minimal*** elemanları benzer şekilde tanımlanırlar.

Sonlu bir sıralı kümede mutlaka minimal ve maksimal elemanlar olmak zorundadır.

$(\mathbb{Z}\setminus\{-1,\ 1\},\ |)$ sıralamasının en küçük elemanı yoktur. Ama bu sıralamada asal sayılardan daha küçük eleman olmadığından, asal sayılar bu sıralamanın minimal elemanlarıdır.

1.3.2 Hemen Sonraki ve Hemen Önceki Elemanlar.

$(X,\ <)$ bir sıralama ve $x \in X$ olsun. Verdiğimiz tüm örneklerde, belki maksimal elemanlar dışında, her elemandan hemen sonra gelen en az bir eleman vardı. Örneğin bölünmeyle tanımlanmış Örnek 5'te hem 4, hem 6, hem de 10 sayıları 2'den hemen sonra gelen elemanlar. Ama $(\mathbb{Q},\ <)$ ya da $(\mathbb{R},\ <)$ sıralamalarında hiçbir elemandan **hemen sonra** gelen bir eleman yoktur, çünkü her $a < b$ için, örneğin,

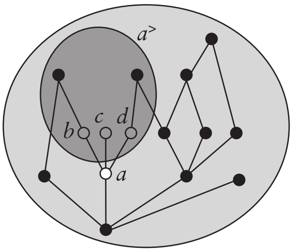
$$a < (a + b)/2 < b$$

eşitsizlikleri sağlanır. $(\wp(E),\ \subset)$ sıralamasında E dışında her elemandan hemen sonra gelen bir (ya da daha çok) eleman vardır.

Eğer $x \in X$ ise, $(x,\ \infty)$ kümesini

$$(x,\ \infty) = \{y \in X : x < y\}$$

olarak tanımlayalım. (Burada, ∞, yepyeni bir simgedir; X'te ∞ diye bir elemanın olmadığını varsayıyoruz.) O zaman x'ten ***hemen sonra gelen elemanlar***, yani x'in ardılları, $(x,\ \infty)$ kümesinin minimal elemanlarıdır. Yani bir $y \in X$ elemanı eğer $x < y$ eşitsizliğini sağlıyorsa ve hiçbir $z \in X$ için $x < z < y$ eşitsizlikleri sağlanmıyorsa, o zaman y, x'ten hemen sonra gelen elemanlardan biridir. Bir sonraki şeklin açıklayıcı olduğunu sanıyoruz.



a'dan hemen sonra gelen elemanlar: b, c, d

Eğer x'ten hemen sonra gelen eleman bir taneyse, bu eleman x^+ olarak yazılır. x'ten ***hemen önce gelen elemanlar*** benzer biçimde tanımlanırlar.

Eğer bir sıralamada her $a < b$ için, $a < c < b$ eşitsizliklerini sağlayan bir c elemanı varsa o zaman bu sıralamaya ***yoğun sıralama*** denir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalardır ama $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalar değildir. $(\wp(E),\ \subset)$ sıralaması da yoğun bir sıralama değildir, örneğin, eğer $a \in E$ ise, $\varnothing$ ile $\{a\}$ arasında bir başka eleman yoktur.

Yoğun sıralamalarda hiçbir zaman bir elemandan hemen sonraki ya da bir elemandan hemen önceki elemanlar olmaz. Ama yoğun bir sıralamada en küçük ya da en büyük elemanlar olabilir; örneğin $[0, 1]$ kapalı aralığı (doğal sıralamayla) böyle bir sıralamadır.

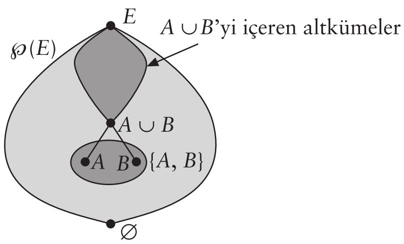
1.3.3 Üstsınır ve Altsınır.

$(X,\ <)$ bir sıralama olsun. A, X'in bir altkümesi olsun. A'nın tüm elemanlarından büyükeşit olan X'in bir elemanına A'nın ***üstsınırı*** adı verilir. Demek ki b'nin A'nın bir üstsınırı olabilmesi için her $a \in A$ için $a \le b$ eşitsizliği sağlanmalıdır. ***Altsınır*** benzer biçimde tanımlanır.

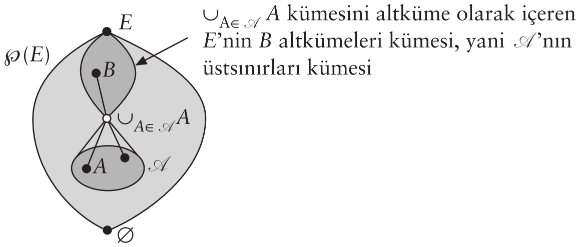
Birkaç örnek verelim. $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) olsun. 1 ve 1'den büyük her gerçel sayı hem $[0, 1]$ hem de $(0, 1)$ aralıklarının üstsınırıdır. Ama örneğin $\mathbb{R}$'de $\mathbb{Z}$'nin üstsınırı yoktur.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer A sonlu bir kümeyse, A'daki sayıların en küçük ortak katına bölünen her sayı A'nın bir üstsınırıdır; en küçük ortak kat da en küçük üstsınırdır. Bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırı 0'dır. Ancak $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, |)$ sıralamasında, sonsuz altkümelerin üstsınırı yoktur.

Şimdi örnek olarak $(\wp(E),\ \subset)$ sıralamasını ele alalım. $A, B \subseteq E$ olsun, yani $A, B \in \wp(E)$ olsun. O zaman $\{A, B\}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesidir. E'nin, hem A'yı hem de B'yi (altküme olarak) içeren bir altkümesi, yani E'nin $A \cup B$'yi içeren bir altkümesi $\{A, B\}$'nin bir üstsınırıdır. $A \cup B$ de $\{A, B\}$ altkümesinin bir üstsınırıdır ve üstsınırların en küçüğüdür.



$(\wp(E),\ \subset)$ sıralamasında $\wp(E)$'nin her altkümesinin bir üstsınırı vardır. E bunlardan biridir elbette. (Bir sıralamanın en büyük elemanı her altkümenin üstsınırıdır elbette!) Eğer $\mathcal{A}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesiyse, o zaman E'nin $\cup_{A\in\mathcal{A}}A$ altkümesi ve bu altkümenin her üstkümesi $\mathcal{A}$'nın bir üstsınırıdır. Elbette, $\cup_{A\in\mathcal{A}}A$, $\mathcal{A}$'nın üstsınırlarının en küçüğüdür.



1.3.4 En Küçük Üstsınır.

$(X,\ <)$ bir sıralama olsun. A, X'in bir altkümesi olsun. $A^{\geq}$, A'nın üstsınırları kümesini temsil etsin:

$$A^{\geq} = \{x \in X : \text{her } a \in A \text{ için } a \leq x\}.$$

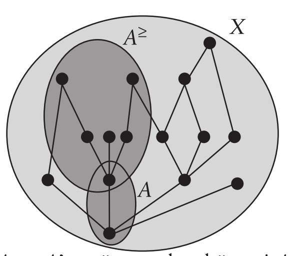
Eğer $x \in X$ için, $[x,\ \infty)$ kümesini

$$[x,\ \infty) = \{y \in X : x \leq y\}$$

olarak tanımlarsak,

$$A^{\geq} = \bigcap_{a\in A} [a,\ \infty)$$

olur.



A ve A'nın üstsınırları kümesi $A^{\geq}$

$A^{\geq}$ kümesinin en küçük elemanına (eğer varsa) A'nın ***en küçük üstsınırı*** adı verilir. Demek ki A'nın en küçük üstsınırı, her şeyden önce A'nın bir üstsınırıdır ve ayrıca A'nın tüm üstsınırlarından küçükeşittir.

A'nın ***en küçük üstsınırı***, eğer varsa, bir tanedir, çünkü hem a hem de b, A'nın en küçük üstsınırlarıysa, o zaman hem $a \leq b$ hem de $b \leq a$ olur, yani $a = b$ olur.

A'nın en küçük üstsınırı $\sup A$ olarak gösterilir. En büyük altsınır benzer biçimde tanımlanır ve $\inf A$ olarak gösterilir.

A'nin en büyük elemanı varsa o zaman bu eleman A'nın en küçük üstsınırıdır. Ayrıca eğer A'nın en küçük üstsınırı varsa ve A'daysa, o zaman bu eleman A'nın en büyük elemanı olmak zorundadır.

$(\mathbb{N}, <)$ ve $(\mathbb{Z}, <)$ sıralamalarında, üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin en küçük üstsınırı vardır, ancak aynı şey $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması için doğru değildir. Örneğin,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ise A'nın üstsınırları vardır (örneğin 5) ama A'nın en küçük üstsınırı yoktur, çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Öte yandan,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\} \subseteq \mathbb{Q}$$

kümesinin $\mathbb{Q}$'deki en küçük üstsınırı 5'tir.

$(\mathbb{R}, <)$ sıralamasında üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır. Bunu [Sİ]'de kanıtladık.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer A sonlu bir kümeyse, A'daki sayıların en küçük ortak katına (ekok) bölünen her sayı A'nın bir üstsınırıdır ve en küçük ortak kat bu sonlu kümenin en küçük üstsınırıdır. 0 her altkümenin üstsınırıdır. Sonsuz altkümelerin en küçük üstsınırı 0'dır. Öte yandan $(\mathbb{Z}\setminus\{0\}, |)$ sıralamasında sonsuz kümelerin en küçük üstsınırı yoktur çünkü bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırı yoktur.

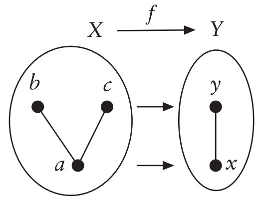
1.4 Sıralamaların Eşyapı Fonksiyonları

$(X, <)$ ve $(Y, \prec)$ iki sıralama olsun. Eğer X'ten Y'ye giden bir f fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \prec f(x_2) \tag{1}$$

koşulunu sağlıyorsa, yani sıralamaya saygı duyuyorsa, o zaman f'ye (sıralamaların) ***eşyapı fonksiyonu*** adı verilir. Bu fonksiyonlara ***mutlak artan fonksiyonlar*** da denir.

Bir eşyapı göndermesi birebir olmak zorunda değildir. Örneğin $X = \{a, b\}$ boşsıralamayla sıralanmışsa ve $Y = \{c\}$ ise, X'ten Y'ye giden sabit c fonksiyonu yukardaki koşulu sağlar ama birebir değildir elbet. Aşağıda birebir olmayan bir başka eşyapı fonksiyonu örneği var. Bu örnekte $f(a) = x < y = f(b) = f(c)$.



Yukardaki örnekten de görüleceği üzere, bir f eşyapı fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ için,

(2) $$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \preccurlyeq f(x_2)$$

koşulunu sağlamayabilir.

Öte yandan (2) koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu, ki bunlara ***artan fonksiyonlar*** denir, birebir olmalıdır. Nitekim, eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise, hem $f(x_1) \leq f(x_2)$ hem de $f(x_2) \leq f(x_1)$ olduğundan, hem $x_1 \leq x_2$ hem de $x_2 \leq x_1$ koşulları sağlanır; dolayısıyla $x_1 = x_2$ olmak zorundadır. Dolayısıyla eğer f fonksiyonu (2) koşulunu sağlıyorsa (1) koşulunu da sağlar.

Bu aşamada fikir değiştirip bir eşyapı fonksiyonundan (1) yerine daha güçlü olan (2) koşulunu sağlamasını isteyebiliriz. Şöyle de yapabiliriz: (1) koşulunu sağlayanlara $<$-***eşyapı fonksiyonu***, (2) koşulunu sağlayanlara $\leq$-***eşyapı fonksiyonu*** diyebiliriz. Demek ki $\leq$-eşyapı fonksiyonları $<$-eşyapı fonksiyonularıdır ama bunun tersi doğru değildir. Hangisinin sözkonusu olduğu bilindiğinde kısaca ***eşyapı fonksiyonu*** diyeceğiz. (Aşağıda göreceğimiz üzere tamsıralamalarda böyle bir ayrım yapmak gereksizdir.)

Eşyapı fonksiyonlarının birkaç özelliği:

a. İki eşyapı fonksiyonunun bileşkesi bir eşyapı fonksiyonudur.

b. Özdeşlik fonksiyonu Id_X, X'ten X'e giden bir eşyapı fonksiyonudur.

c. Eğer f bir eşyapı eşlemesiyse (yani birebir ve örtense), o zaman f^{-1} de bir eşyapı fonksiyonudur.

Bunların kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Eğer X bir tamsıralamaysa, X'ten Y'ye giden bir $<$-eşyapı fonksiyonu birebir olmak zorundadır. Nitekim $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Eğer $x_1 < x_2$ ise $f(x_1) < f(x_2)$ olur ve bu bir çelişkidir. Eğer $x_2 < x_1$ ise benzer şekilde bir çelişki elde edilir. Demek ki $x_1 = x_2$. Ayrıca birebir bir $<$-eşyapı fonksiyonu bir $\leq$-eşyapı fonksiyonu olmak zorundadır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. Demek ki tamsıralamalarda bu iki kavram arasında bir ayrım yok. Dolayısıyla X bir tamsıralama olduğunda iki kavram örtüşür.

Eşyapı eşlemeleri bir sıralamayı aynen kendisine benzeyen bir sıralamaya götürürler, yani eğer $f : X \to Y$ bir eşyapı eşlemesiyse, X'in sıralamasıyla Y'nin sıralaması, elemanlarının adları dışında aynıdır. Bu iki sıralamanın elemanlarının adlarını silersek arada bir fark göremeyiz. Aralarında eşyapı eşlemesi olan sıralamalara ***eşyapısal sıralamalar*** diyeceğiz. Örneğin, eğer f bir eşyapı eşlemesiyse,

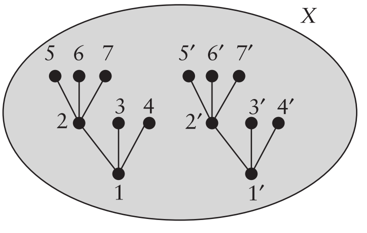
a) X'in bir en küçük elemanı varsa ve bu eleman a ise, Y'nin de en küçük elemanı vardır ve bu eleman $f(a)$'dır.

b) x'in bir sonraki elemanı varsa $f(x)$'in de bir sonraki elemanı vardır ve $f(x^+) = f(x)^+$ eşitliği sağlanır.

c) Her $x \in X$ için $f(x, \infty) = (f(x), \infty)$ eşitliği sağlanır.

d) Eğer $A \subseteq X$ ise ve $\sup A$ varsa, $\sup f(A)$ da vardır ve $f(\sup A)$'ya eşittir.

Eğer $X = Y$ ve sıralamalar aynıysa, eşyapı eşlemesi yerine ***özyapı eşlemesi*** denir. Basit bir örnek olarak aşağıdaki sıralamanın özyapı eşleşmelerini bulalım.



1 ve $1'$ elemanlarını sabit tutarak ama 5, 6 ve 7 elemanlarını, 3 ve 4 elemanlarını, $5'$, $6'$ ve $7'$ elemanlarını, $3'$, $4'$ elemanlarını kendi aralarında dilediğimiz gibi değiştirerek

$$3! \times 2! \times 3! \times 2! = 144$$

tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Ayrıca sağdaki ve soldaki parçaları tahmin edilebileceği biçimde (n'yi n' elemanına ve n' elemanını n'ye yollayarak, bu eşleşmeye τ diyelim) değiş tokuş edebiliriz. Böylece toplam $144 \times 2 = 288$ tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Başka da eşyapı eşleşmesi yoktur. Bunu kanıtlayalım. φ, böyle bir eşyapı eşleşmesi olsun. O zaman φ, X'in minimal elemanlarını yani 1 ve $1'$ elemanlarını gene X'in minimal elemanlarına gönderir. Eğer $\varphi(1) = 1'$ ise, $\varphi \circ \tau$ de bir eşyapı eşleşmesidir ama bu kez bu yeni eşleşme 1 ve $1'$ elemanlarını sabitler. Gerekirse φ yerine $\varphi \circ \tau$ eşleşmesini alarak φ'nin 1 ve $1'$ elemanlarını sabitlediğini varsayabiliriz. Bu koşulları sağlayan bir φ'nin yukardaki 144 eşleşmeden biri olacağı malum.

Eğer $(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralamaları arasında bir eşyapı eşlemesi varsa, o zaman $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da (eğer sıralamalar biliniyorsa ya da çok barizse) kısaca $X \approx Y$ yazılır.

Şimdi birkaç sıralamanın özyapı eşleşmelerini bulalım.

Teorem 1.1. $(\mathbb{N}, <)$ *sıralamasının bir tek özyapı eşleşmesi vardır:* $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ *özdeşlik fonksiyonu.*

Kanıt: f bir eşyapı eşleşmesi olsun. f, en küçük eleman olan 0'ı gene 0'a göndermelidir. Tümevarımla f'nin n'yi n'ye gönderdiğini varsayarsak,

$$f(n^+) = f(n)^+ = n^+$$

olur (neden?) ve böylece f'nin her elemanı sabitlediği kanıtlanır. Yani

$$f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$$

'dir. □

Teorem 1.2. $(\mathbb{Z}, <)$ *sıralamasının özyapı eşleşmeleri belli bir* $n \in \mathbb{Z}$ *için* $f_n x = x + n$ *eşitliğini sağlayan* f_n *fonksiyonlarıdır.*

Kanıt: Her f_n fonksiyonunun artan bir eşleşme (yani özyapı eşleşmesi) olduğu belli. Şimdi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ artan bir eşleşme olsun. $f(0) = n$ olsun. x üzerine tümevarımla, her $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x + n$ eşitliği şöyle kanıtlanır:

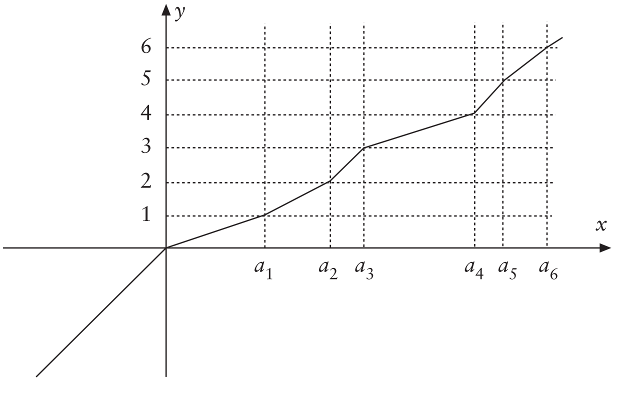
$$f(x+1) = f(x^+) = f(x)^+ = (x+n)^+ = (x+n) + 1 = (x+1) + n.$$

Benzer şekilde (x^+ yerine x^- kullanarak) her $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ için $f(x) = x+n$ eşitliği kolaylıkla kanıtlanır. □

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının çok özyapı eşleşmesi vardır. Aşağıdaki şekilden anlaşılacağı üzere, her

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

altkümesi için, $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının ayrı bir özyapı eşleşmesi bulunabilir.



Teorem 1.3. *X herhangi bir küme olsun. $\wp(X)$, X'in altkümeleri kümesi olsun. Her* $: X \to X$ *onksiyonu için*

$$\varphi_{:}\wp(X) \to \wp(X)$$

fonksiyonunu, her $A \in \wp(X)$ için,

$$\varphi_f(A) = (A) = \{f(a) : a \in A\}$$

olarak tanımlayalım. Eğer f bir eşleşmeyse, φ, $(\wp(X),\ \subseteq)$ sıralamasının bir özyapı eşleşmesidir, yani her A, $B \in \wp(X)$ için,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi_f(A) \subseteq \varphi_f(B)$$

olur. Ayrıca her $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ özyapı eşleşmesi, belli bir $f : X \to X$ eşleşmesi için, φ_f 'ye eşittir.

Kanıt: İlk önerme çok kolay. İkincisini kanıtlayalım.

i. Önce $\varphi(\varnothing) = \varnothing$ eşitliğini kanıtlayacağız. $\varphi(A) = \varnothing$ olsun (φ örten olduğundan böyle bir A var.) A'nın herhangi bir B altkümesini alalım. Verilen koşuldan dolayı, $\varphi(B) \subseteq \varphi(A) = \varnothing$, yani $\varphi(B) = \varnothing$. Demek ki

$$\varphi(B) = \varnothing = \varphi(A).$$

Bundan da, φ birebir olduğundan, $B = A$ çıkar. A'nın bir tek altkümesi olduğunu kanıtladık. Demek ki $A = \varnothing$.

ii. Şimdi, tek elemanlı kümelerin tek elemanlı kümelere gittiğini göstereceğiz. $A = \{x\}$ olsun. B, $\varphi(A)$'nın bir altkümesi olsun. C, $\varphi(C) = B$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan, böyle bir C vardır.) Demek ki $\varphi(C) = B \subseteq \varphi(A)$. Soruda verilen koşuldan dolayı $C \subseteq A$. Ama A tek elemanlı bir küme. Dolayısıyla ya $C = \varnothing$ ya da $C = A$. Sonuç olarak,

$$\text{ya } B = \varphi(C) = \varphi(\varnothing) = \varnothing \text{ ya da } B = \varphi(C) = \varphi(A).$$

Demek ki $\varphi(A)$'nın sadece iki altkümesi var: $\varnothing$ ve $\varphi(A)$. Dolayısıyla $\varphi(A)$ tek elemanlı bir kümedir.

iii. Eğer $x \in X$ ise, $\varphi(\{x\})$ kümesinin tek elemanlı olduğunu yukarda kanıtladık. $\varphi(\{x\})$ kümesinin o tek elemanına (x) diyelim:

$$\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

Böylece X'ten X'e giden bir f fonksiyonu tanımlamış oluruz.

Eğer $a \in A \subseteq X$ ise, $\{a\} \subseteq A$, dolayısıyla $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$ ve $(a) \in \varphi(A)$. Demek ki $f(A) \subseteq \varphi(A)$. Daha eşitliği bilmiyoruz.

φ birebir olduğundan, f'nin de birebir olduğu kolaylıkla kanıtlanır. Öte yandan daha f'nin örten olduğunu da bilmiyoruz.

iv. Şimdi f'nin örten olduğunu kanıtlayacağız. $a \in X$ olsun. $A = \{a\}$ olsun. X'in B altkümesi $\varphi(B) = A$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan böyle bir B vardır.) B'nin tek elemanlı bir küme olduğunu kanıtlayacağız. Soruda verilen koşuldan ve φ'nin birebir olmasından dolayı B'nin sadece iki altkümesi vardır: Eğer $C \subseteq B$ ise, $\varphi(C) \subseteq \varphi(B) = A = \{a\}$, yani ya $\varphi(C) = \varnothing = \varphi(\varnothing)$ ya da $\varphi(C) = A = \varphi(B)$, yani ($\varphi$ birebir olduğundan) ya $C = \varnothing$ ya da $C = B$. İki altkümesi olan kümeler tek elemanlı kümeler olduğundan B'nin tek bir elemanı vardır. Eğer $b \in B$ ise,

$$\{f(b)\} = \varphi(\{b\}) = \varphi(B) = A = \{a\}$$

ve $f(b) = a$. Demek ki f örtenmiş. Şimdi artık f'nin bir eşleşme olduğunu biliyoruz.

v. Artık, her $A \subseteq X$ için, $(A) = \varphi(A)$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. iii'te

$$f(A) \subseteq \varphi(A)$$

ilişkisini kanıtladık. $b \in \varphi(A)$ olsun. $f(a) = b$ eşitliğini sağlayan a elemanını alalım (iv'te f'nin örten olduğunu kanıtlamıştık.)

$$\varphi(\{a\}) = \{f(a)\} = \{b\} \subseteq \varphi(A)$$

olduğundan, soruda verilen koşuldan dolayı, $\{a\} \subseteq A$, yani $a \in A$, yani

$$b = f(a) \in f(A).$$

Demek ki $\varphi(A) \subseteq (A)$.

Şimdi artık, her $A \subseteq X$ için, $\varphi(A) = f(A)$ eşitliğini biliyoruz. Yani $\varphi = \varphi_f$.
□

Şimdi de şu ilginç soruya yanıt arayalım: Ya bir önceki teoremde

$$\text{her } A,\ B \in \wp(X) \text{ için } A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşulunu

$$\text{her } A,\ B \in P(X) \text{ için } A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşuluyla değiştirirsek ne olur? Bu son özelliği sağlayan

$$\varphi \colon \wp(X) \to \wp(X)$$

eşleşmelerine ***yarı-özyapı eşleşmesi*** diyelim.

Teorem 1.4. ($\wp(X)$, $\subseteq$) *sıralamasının yarı-özyapı eşleşmeleri özyapı eşleşmeleridir.*

Kanıt: $\varphi\colon \wp(X) \to \wp(X)$ bir yarı-özyapı eşleşmesi olsun. φ'nin bir

$$f : X \to X$$

eşleşmesi tarafından belirlendiğini kanıtlayacağız. Çeşitli aşamalardan geçeceğiz.

Sav 1. $\varphi(\varnothing) = \varnothing$.
Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = \varnothing$ eşitliğini sağlasın. Soruda verilen koşula göre A'nın her altkümesi boşkümenin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın sadece bir altkümesi vardır. Bundan da A'nın boşküme olduğu anlaşılır.

Sav 2. $\varphi(X) = X$.
Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'yı içeren her altküme, φ altında, X'i içeren bir altkümeye, yani X'e gitmek zorunda, mesela $\varphi(A) = X = \varphi(X)$. Bundan, φ birebir olduğundan, $A = X$ çıkar.

Sav 3. *$y \in X$ olsun. $A \subseteq X$ altkümesi, $\varphi(A) = \{y\}$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'nın tek bir elemanı vardır.*
Kanıt: Soruda verilen koşula göre, A'nın her altkümesi $\{y\}$ kümesinin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın en fazla iki altkümesi vardır. A'nın tek bir altkümesi olsaydı, $A = \varnothing$ olurdu ve, Sav 1'e göre, $\{y\} = \varphi(A) = \varphi(\varnothing) = \varnothing$ olurdu, ki bu bir çelişkidir. Demek ki A'nın iki altkümesi vardır. Bundan da A'nın tek elemanlı olduğu anlaşılır.

U kümesinı şöyle tanımlayalım:

$$U = \{x \in X : \varphi(\{x\}) \text{ tek bir elemanlı küme}\}.$$

Şimdi de $f : U \to X$ fonksiyonunu tanımlayalım: Eğer $x \in U$ ise,

$$\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$$

olsun. Sav 3'e göre, f'nin, U'dan X'e giden bir eşleme olduğu bariz. Önce U'nun X'e eşit olduğunu, sonra da φ'nin $f : X \to X$ eşleşmesi tarafından verildiğini kanıtlayacağız.

Sav 4. *$y \in X$ olsun. $x \in U$ elemanı $f(x) = y$ eşitliğini sağlasın. O zaman $\varphi(X \backslash \{x\}) = X \backslash \{y\}$ eşitliği geçerlidir.*
Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X \backslash \{y\}$ eşitliğini sağlasın. A'yı içeren her altküme, φ eşleşmesi altında, $X \backslash \{y\}$ kümesini içeren bir kümeye denk düşer. Demek ki A'yı içeren en fazla iki altküme vardır. Sav 2'ye göre $A \neq X$. Dolayısıyla A'yı içeren tam iki altküme vardır. Bu da, A'nın, belli bir $x \in X$ için, $A = X \backslash \{x\}$ olması demektir.

$z \in U$, $(z) = y$ eşitliğini sağlasın. Eğer $z \neq x$ ise olacakları görelim: Her şeyden önce $\{z\} \subseteq X \backslash \{x\}$. Demek ki

$$\{y\} = \{f(z)\} = \varphi(\{z\}) \subseteq \varphi(X\ \{x\}) = X \backslash \{y\},$$

yani $y \in X\backslash\{y\}$, bir çelişki. Dolayısıyla $x = z \in U$ ve $f(x) = y$.

Sav 5. *Eğer* $A \subseteq X$ *ise*, $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A) \subseteq (A^c \cap U)^c$.

Kanıt: $A \subseteq X$ olsun. $a \in A \cap U$ olsun. O zaman, $\{a\} \subseteq A$ ve $a \in U$ olduğundan, $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$. Demek ki $f(a) \in \varphi(A)$. Bundan da $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A)$ çıkar.

Şimdi $a \in A^c \cap U$ olsun. O zaman, $A \subseteq X\backslash\{a\}$ olduğundan ve $a \in U$ olduğundan, bir önceki sava göre,

$$\varphi(A) \subseteq \varphi(X\backslash\{a\}) = X\backslash\{f(a)\}.$$

Demek ki $(a) \notin \varphi(A)$, yani $(a) \in \varphi(A)^c$. Bundan da

$$(A^c \cap U) \subseteq \varphi(A)^c$$

çıkar, yani $\varphi(A) \subseteq (A^c \cap U)^c$.

Sav 6. *Eğer* $A \subseteq X$ *ise*, $\varphi(A) = f(A \cap U)$.
Kanıt:

$$f(A^c \cap U)^c = f(U\backslash(A \cap U))^c = (f(U)\backslash f(A \cap U))^c = (X\backslash f(A \cap U))^c = f(A \cap U)$$

eşitliğinden ve Sav 5'ten istediğimiz çıkar.

Artık istediğimizi kanıtlayabiliriz. Sav 6'da $A = X$ alırsak,

$$\varphi(X) = f(X \cap U) = \varphi(X \cap U) = \varphi(U)$$

çıkar, yani $X = U$. Demek ki $U = X$ ve gene yukardaki sava göre

$$\varphi(A) = f(A \cap U) = f(A \cap X) = f(A).$$

Kanıtımız bitmiştir. $\square$

Alıştırmalar.

1.9. P, $\mathbb{N}$'nin asal sayıları kümesi olsun. $(\mathbb{N}, |)$ sıralamasının tüm özyapı eşleşmelerini bulun.

2. Sayılabilir Yoğun Sıralamalar

Bu bölümün konusu kesirli sayıların bildiğimiz $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasıdır. Burada sözü edilen $<$ eşitsizlik ilişkisi ilkokuldan beri âşina olduğumuz ilişkidir; örneğin $2/3 < 4/5$.

Daha sonra matematiksel olarak ifade edeceğimiz şu olguyu kanıtlayacağız:

$(\mathbb{Q}, <)$ *sıralamasının birazdan açıklayacağımız bazı özelliklerine sahip sıralamalar* "*aynen ama aynen*" $(\mathbb{Q}, <)$ *sıralamasına benzeyen sıralamalardır.*

Bir başka ama gene edebi bir deyişle, $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması, birazdan sıralayacağımız birkaç özelliği tarafından betimlenebilir/karakterize edilir.

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının özünü karakterize eden bu "bazı özellikleri" birazdan sıralayacağız. "Aynen ama aynen benzemek"i Altbölüm 1.4'te tanımladığımız "eşyapısal olmak" anlamına kullandık. Gene de eşyapısallığı bu bölümde bir kez daha tanımlayacağız.

Önce $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasını karakterize edecek olan önemli özelliklerini teker teker yazalım.

Her şeyden önce $(\mathbb{Q}, <)$ bir ***sıralamadır***, yani,

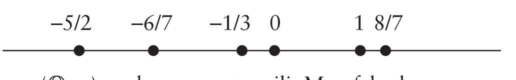
(1) *Hiçbir* x *için*, $x < x$ *doğru değildir.*

(2) *Her* x, y, z *için*, *eğer* $x < y$ *ve* $y < z$ *ise*, *o zaman* $x < z$*'dir.*

$(\mathbb{Q}, <)$ yalnızca bir sıralama değil, ayrıca bir ***tamsıralamadır*** da, yani herhangi iki kesirli sayı birbiriyle kıyaslanabilir:

(3) *Her* x, y *için*, *ya* $x < y$ *ya* $x = y$ *ya da* $y < x$.

Bunun sonucu olarak kesirli sayıları bir doğru üstünde temsil edebiliriz. Matematikçiler arasında yapılan sözsüz bir anlaşma gereği, soldaki sayılar sağdakilerden daha küçüktür.



$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının temsili. Mesafeler korunmamış olabilir ama sıralama korunmuştur.

Ayrıca $(\mathbb{Q}, <)$ ***yoğun*** bir sıralamadır: Herhangi iki kesirli sayı arasında üçüncü bir kesirli sayı vardır, daha matematiksel bir dille,

(4) *Her $x < y$ için, $x < z < y$ eşitsizliklerini sağlayan bir z vardır.*

Örneğin $z = (x+y)/2$ kesirli sayısı x'le y arasındadır.

(4) özelliği yüzünden (ya da sayesinde) en az iki elemanı olan bir yoğun sıralama sonsuz olmak zorundadır. Öte yandan $(\mathbb{Z}, <)$ sıralaması sonsuzdur ama yoğun değildir.

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasında ne en küçük ne en büyük eleman vardır, yani her kesirli sayıdan daha büyük bir kesirli sayı ve her kesirli sayıdan daha küçük bir kesirli sayı vardır:

(5) *Her x için, $x < y$ eşitsizliğini sağlayan bir y vardır.*

(6) *Her x için, $y < x$ eşitsizliğini sağlayan bir y vardır.*

(5)'te $y = x + 1$, (6)'da $y = x - 1$ alabiliriz.

Son iki özelliği sağlayan sıralamalara ***uçsuz sıralamalar*** denir. Örneğin, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$, $(0, 1)$ gerçel aralığı ve $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ kümeleri doğal sıralamayla birlikte uçsuz ve yoğun sıralamalardır. Öte yandan $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ gerçel sayı aralığı uçsuz değildir.

$\mathbb{Q}$ kümesinin bir özelliği daha vardır:

(7) *Sayılabilir sonsuzluktadır.*

Yani kesirli sayıları 0, 1, 2, 3, 4, ... diye doğal sayıları kullanarak koyun sayar gibi hiçbirini atlamadan teker teker sayabiliriz; her kesirli sayıyı doğal sayılarla numaralandırabiliriz [SKK]. Öte yandan, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir, elemanları teker teker doğal sayılarla sayılamaz.

Yukardaki $(1-7)$ özelliklerini sağlayan $(X, <)$ yapılarına ***uçsuz***, ***yoğun ve sayılabilir tamsıralamalar*** denir. Örneğin $(\mathbb{Q}, <)$ bu tür sıralamalardandır.

Şimdi bu 7 özelliğin $(\mathbb{Q}, <)$ yapısını (hemen aşağıda tanımlayacağımız anlamda) karakterize ettiğini göstereceğiz. Kanıta geçmeden önce, "karakterize etmek"i hangi matematiksel anlamda kullandığımızı söylemeliyiz.

$(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralamaları verilmiş olsun. Demek ki her iki yapı da (1) ve (2) özelliklerini sağlıyor. $f : X \to Y$, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlayan bir eşleme olsun. Böyle bir f fonksiyonuna ***eşyapı eşlemesi*** (ya da ***izomorfi*** ya da ***izomorfizma***) adı verilir ve bu durumda X ve Y'nin ***eşyapısal*** (ya da izomorf) oldukları söylenir ve

$$(X, <) \approx (Y, <)$$

yazılır. Eğer sıralamalar biliniyorsa kısaca $X \approx Y$ yazılır.

Şimdi artık kanıtlamak istediğimiz teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.1. *Uçsuz, yoğun ve sayılabilir herhangi iki tamsıralama eşyapısaldır.*

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması uçsuz, yoğun ve sayılabilir olduğundan, teoremden, her uçsuz, yoğun ve sayılabilir sıralamanın $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasıyla eşyapısal olduğu çıkar.

Örnekler.

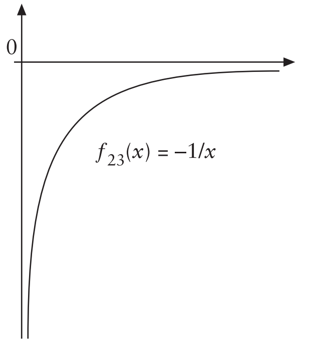
2.1. Teoremi kanıtlamadan önce uçsuz, yoğun ve sayılabilir sıralamalara örnekler verelim ve bu sıralamalar arasında eşyapı eşlemesi bulalım.
1) En bilineni: $(\mathbb{Q}, <)$.
2) Pozitif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$, doğal sıralamayla.
Bundan sonraki tüm örneklerimizin sıralaması doğal sıralama olacağından, sadece kümeyi yazmakla yetineceğiz.
3) Negatif kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{<0}$.
4) Sıfır olmayan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^*$.
5) $\mathbb{Q} \cup \{\pi\}$.
6) $(\sqrt{2}, \infty)_{\mathbb{Q}}$, yani $(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ kümesi.
7) $(0, \sqrt{2})_{\mathbb{Q}} = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$.
8) $(0, 1)_{\mathbb{Q}} = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.
9) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})_{\mathbb{Q}} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$.
Teoreme göre bu sıralamaların birbirleriyle eşyapısal olmalı, çünkü herbiri uçsuz, yoğun ve sayılabilir sonsuzluktadır. Bu sıralamalar arasında eşyapı eşlemeleri bulalım. Örneklerimiz eğlendirici ve öğretici olmasaydı, hiç böyle bir zahmete girmezdik.

$(2 \approx 3)$. Önce ikinciyle üçüncünün eşyapısal olduğunu gösterelim. Şu iki eşlemenin bileşkesini alalım:

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}^{>0} \to \mathbb{Q}^{>0} \to \mathbb{Q}^{<0} \\ x \mapsto 1/x \mapsto -1/x \end{array}$$

Her ikisi de sıralamayı ters çevirdiğinden (yani azalan fonksiyonlar olduklarından) bileşkeleri sıralamayı korur. Bu eşyapı eşlemesine f_{23} diyelim:

$$f_{23}(x) = \frac{-1}{x}.$$



($3 \approx 8$). Şimdi üçüncüyle sekizincinin eşyapısal olduğunu gösterelim. Aşağıdaki eşlemeleri takip edelim:

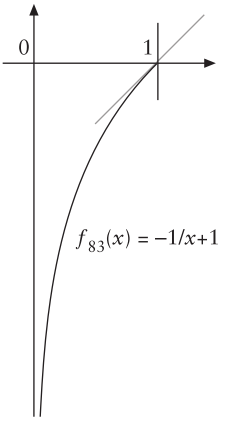
$$\begin{gathered}(0,\ 1)_{\mathbb{Q}} \to (1,\ \infty)_{\mathbb{Q}} \to (-\infty,\ -1)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{<0} \\ x \mapsto 1/x \mapsto -1/x \mapsto -1/x+1\end{gathered}$$

Birinci ve ikinci eşleme sıralamayı ters çevirir, üçüncüsü korur, dolayısıyla üçünün bileşimi sıralamayı iki kez ters çevirerek sıralamayı korur.

Bu eşyapı eşlemesine f_{83} diyelim:

$$f_{83}(x) = \frac{-1}{x} + 1.$$

Görmek isteyen için f_{83} fonksiyonunun grafiği aşağıda.



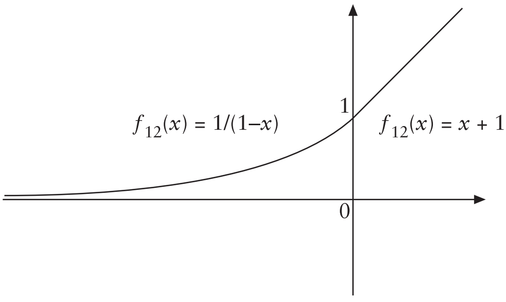
($1 \approx 2$). $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}^{>0}$ sıralamaları arasında bir eşyapı eşlemesi bulacağız. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}^{>0}$ kümelerini şöyle uygun biçimde parçalayalım:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{\geq 0} \approx (0,\ 1)_{\mathbb{Q}} \sqcup [1,\ \infty)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{>0}.$$

($\sqcup$ simgesi, $\cup$ gibi bileşim anlamına gelir, ancak, ayrıca, bileşimi alınan kümelerin ayrık olduğunu söyler.) Şimdi bu parçalanmaya bakarak, $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}^{>0}$ sıralamaları arasında bir f_{12} eşyapı eşlemesi bulunabilir:

$$f_{12}(x) = \begin{cases} f_{38}(x) = \frac{1}{1-x} & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \\ x+1 & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

Bu eşyapı eşlemesinin grafiği şöyle. □



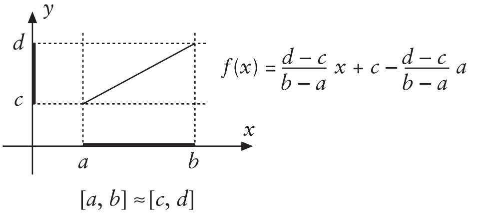
$(7 \approx 8)$. Önce, herhangi iki kesirli $a < b$ sayısı için, $(0, 1)_{\mathbb{Q}} \approx (a, b)_{\mathbb{Q}}$ eşyapısallığı gösterelim:

$$\begin{aligned}(0, 1)_{\mathbb{Q}} &\to (0, b-a)_{\mathbb{Q}} \to (a, b)_{\mathbb{Q}} \\ x &\mapsto (b-a)x \mapsto (b-a)x + a\end{aligned}$$

Böylece, $(0, 1)_{\mathbb{Q}}$ ile $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ sıralamaları arasında sıralamayı koruyan bir eşleme elde etmiş oluruz. Bundan da her $a < b$ ve $c < d$ kesirli sayıları için,

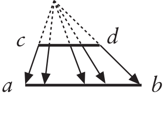
$$(a, b)_{\mathbb{Q}} \approx (c, d)_{\mathbb{Q}} \text{ ve } [a, b)_{\mathbb{Q}} \approx [c, d)_{\mathbb{Q}}$$

eşyapısallıkları çıkar.



$[a, b] \approx [c, d]$

Sıralamayı koruyan bir eşleşmeyi geometrik olarak şöyle gösterebiliriz:



Şimdi, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ için, $a_n = 1 - 1/(n+1)$ olsun. $(a_n)_n$ artarak 1'e yakınsayan bir kesirli sayılar dizisidir. $(b_n)_n$ de artarak $\sqrt{2}$'ye yakınsayan bir kesirli sayılar dizisi olsun. Örneğin b_n'yi $\sqrt{2}$'nin ilk n basamağı olarak alabiliriz, o zaman,

$$\sqrt{2} = 1{,}41421713562373\ldots$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} b_0 &= 0\\ b_1 &= 1\\ b_2 &= 1{,}4\\ b_3 &= 1{,}41\\ b_4 &= 1{,}414\\ b_5 &= 1{,}4142 \end{aligned}$$

olur. Biraz yukarda gördüğümüz üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$[a_n,\ a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \approx [b_n, b_{n+1})_{\mathbb{Q}}.$$

Bu eşyapısallığı gerçekleştiren fonksiyona f_n diyelim:

$$f_n : [a_n,\ a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \to [b_n,\ b_{n+1})_{\mathbb{Q}}.$$

Şimdi,

$$[0,\ 1)_{\mathbb{Q}} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n,\ a_{n+1})_{\mathbb{Q}}$$

ve

$$[0,\ \sqrt{2})_{\mathbb{Q}} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}}[b_n,\ b_{n+1})_{\mathbb{Q}}$$

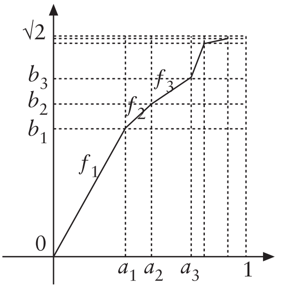
eşitliklerinden yola çıkarak f_n fonksiyonlarını yapıştırsak,

$$f : [0,\ 1)_{\mathbb{Q}} \to [0,\ \sqrt{2})_{\mathbb{Q}}$$

eşyapı eşlemesini elde ederiz. f'nin biçimsel tanımı şöyle:

$$f(x) = f_n(x) \text{ eğer } x \in [a_n,\ a_{n+1})_{\mathbb{Q}} \text{ ise.}$$

f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



$(6 \approx 8 \approx 9)$. Benzer biçimde kanıtlanırlar. Alıştırma olarak okura bırakılmıştır.

$(1 \approx 4)$. Daha önce kanıtladığımız eşyapısallıklar ve benzerlerinden,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &\approx (0,\,2)_{\mathbb{Q}} (1 \approx 8)\\ &= (0,\,\sqrt{2})_{\mathbb{Q}} \sqcup (\sqrt{2},\,2)_{\mathbb{Q}}\\ &\approx (0,\,1)_{\mathbb{Q}} \sqcup (1,\,2)_{\mathbb{Q}} (8 \approx 7)\\ &\approx \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{>0} = \mathbb{Q}^{*} (7 \approx 2)\end{aligned}$$

çıkar.

$(1 \approx 5)$. Daha önce kanıtladığımız eşyapısallıklar ve benzerlerinden,

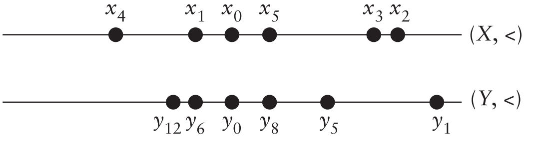
$$\begin{aligned}\mathbb{Q} \sqcup \{\pi\} &\approx \mathbb{Q}^{*} \sqcup \{\pi\} (1 \approx 2)\\ &= \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{>0} \sqcup \{\pi\}\\ &\approx (-\infty,\,\pi)_{\mathbb{Q}} \sqcup \{\pi\} \sqcup (\pi,\,\infty)_{\mathbb{Q}} (3 \approx 6)\\ &= \mathbb{Q}\end{aligned}$$

bulunur.

Yazının geri kalan kısmında teoremi kanıtlayacağız. Kanıtın yöntemine ***gel-git yöntemi*** adı verilir.

Teoremin Kanıtı: Sıralamalar $(X,\ <)$ ve $(Y,\ <)$ olsun. X ve Y sayılabilir olduklarından, X ve Y kümelerinin elemanlarını $n \in \mathbb{N}$ için, x_n ve y_n olarak "sırayla" yazabiliriz. Burada, $n \neq m$ için $x_n \neq x_m$ ve $y_n \neq y_m$ varsayımlarını yapıyoruz.

X ve Y'nin elemanlarının numaralandırılmaları birbirleriyle ilgisiz olabilirler. X'ten ilk altı eleman alalım.

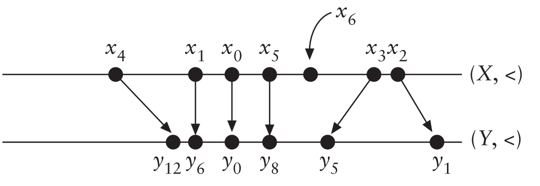


Y'den de rastgele altı eleman alalım. Bu elemanların dizilişi yukardaki şekildeki gibi olabilir. Dikkat ederseniz ilk altı eleman için sıralamalar birbirlerine benziyorlar çünkü ne de olsa altışar elemanı olan iki tamsıralamadan söz ediyoruz.

$$\begin{aligned} x_4 &\mapsto y_{12}\\ x_1 &\mapsto y_6\\ x_0 &\mapsto y_0\\ x_5 &\mapsto y_8\\ x_3 &\mapsto y_5\\ x_2 &\mapsto y_1\end{aligned}$$

eşlemesi bu iki sonlu sıralama arasında bir eşyapı eşlemesidir. Bu tür eşlemelere ***kısmi eşyapı eşlemesi*** denir.

Şimdi bir sonraki eleman olan x_6'ya ve x_6'nın x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 elemanlarına göre pozisyonuna bakalım. x_6 bu altı eleman tarafından belirlenen 7 aralıktan birinde olmalı. Diyelim x_6'nın yeri şöyle:



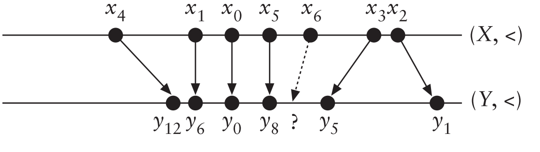
Y'nin,

$$y_{12} < y_6 < y_0 < y_8 < y_5 < y_1$$

elemanlarına göre pozisyonu, X'te x_6'nın

$$x_4 < x_1 < x_0 < x_5 < x_3 < x_2$$

elemanlarına göre pozisyonuna benzer olan bir y elemanı bulabilir miyiz? x_6 elemanı x_5 ile x_3 arasında olduğundan, Y'de y_8 ile y_5 arasında bir eleman bulmalıyız.



Y'de böyle bir eleman var mıdır? Evet vardır, çünkü Y'nin sıralaması yoğun olduğundan, herhangi iki eleman arasında üçüncü bir eleman vardır. Dolayısıyla y_8 ile y_5 arasında da bir eleman vardır. y_8 ile y_5 arasında olan elemanlardan herhangi birini alalım, diyelim y_7 bu özelliği sağlıyor, yani y_8 ile y_5 arasında. Demek ki

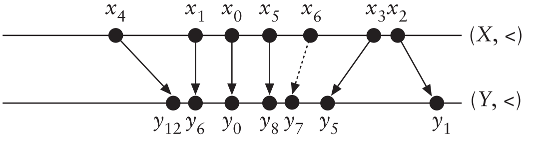
$$y_{12} < y_6 < y_0 < y_8 < y_7 < y_5 < y_1.$$

Dolayısıyla x_6'nın x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 elemanlarına göre pozisyonu, aynen y_7'nin y_{12}, y_6, y_0, y_8, y_5, y_1 elemanlarına göre pozisyonu.

Şimdi yukardaki kısmi eşyapı eşlemesini x_6'yı y_7'ye gidecek şekilde büyütebiliriz:

$$x_4 \mapsto y_{12}$$
$$x_1 \mapsto y_6$$
$$x_0 \mapsto y_0$$
$$x_5 \mapsto y_8$$
$$x_6 \mapsto y_7$$
$$x_3 \mapsto y_5$$
$$x_2 \mapsto y_1$$

Şimdilik resim şöyle:



Bir sonraki x_7 elemanını da ekleyip kısmi eşyapı eşlemesini bir adım daha genişletebiliriz. Bunun için x_7'nin x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 elemanlarına göre pozisyonunu belirlemek ve Y'de bu pozisyona uyan bir eleman bulmak yeterlidir.

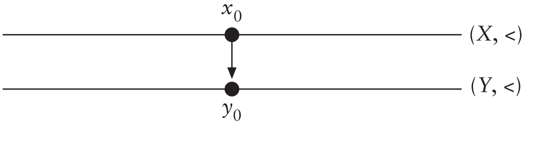
Bunu sürekli yapabiliriz ve sonuçta X'ten Y'ye giden ve sıralamaya saygı duyan bir fonksiyon bulabiliriz. Bu fonksiyon birebir olacaktır ama ne yazık ki örten olmak zorunda değildir.

Fonksiyonu örten yapmak için bir X'ten Y'ye bir de (Y'de hiçbir eleman unutmamak için) Y'den X'e gitmeliyiz.

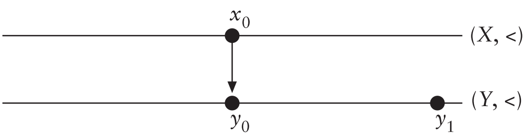
Yöntem şöyle. İlk adımda X'in x_0 elemanını Y'de herhangi bir elemana yollayalım. Bu eleman y_0 olsun:

$$x_0 \mapsto y_0$$

İlk kısmi eşyapı eşlemesini bulduk. Resmi aşağıda.



Bu ilk adımda X'ten Y'ye gittik. Şimdi Y'den X'e gideceğiz. Y'de şimdiye kadar erişmediğimiz ilk elemanı alalım. Y'nin ilk erişilmeyen elemanı y_1. Ve y_1'in y_0'a göre konumuna bakalım. İki şık var ya $y_1 < y_0$ ya da $y_1 > y_0$. İkinci şıkta olduğumuzu varsayalım.



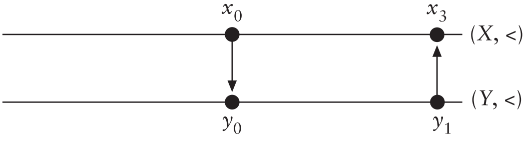
Şimdi $(X, <)$ sıralamasında, x_0'a göre konumu, y_1'in y_0'a göre konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız. y_1, y_0'dan daha büyük olduğundan, X'te x_0'dan daha büyük bir eleman bulmalıyız. X'te böyle bir eleman var mı? Evet vardır, çünkü X'in en büyük elemanı olmadığından, her elemandan, dolayısıyla x_0'dan da büyük bir eleman var. Bu eleman x_1 olmayabilir belki, belki x_2 de olmayabilir, ama mutlaka x_0'dan büyük bir eleman olmalı. x_0'dan büyük elemanlar arasından göstergeci en küçük olanını seçelim. Bu elemana x_3 diyelim. (Demek ki x_1 ve x_2 elemanları x_0'dan daha küçük, ama bunun gelecekte hiçbir önemi olmayacak.) Şimdi x_3'le y_1'i eşleştirip daha önceki

$$x_0 \mapsto y_0$$

kısmi eşyapı eşlemesini genişletelim:

$$x_0 \mapsto y_0 \tag{2.1}$$
$$x_3 \mapsto y_1 \tag{2.2}$$

Bu da ikinci kısmi eşleme. Resmi aşağıda:



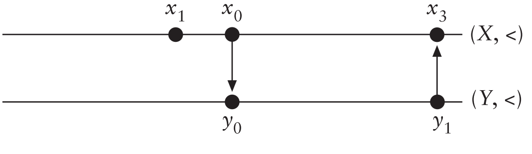
İkinci adımda Y'den X'e gittik. Üçüncü adımda X'ten Y'ye gideceğiz. X'in daha önce dokunmadığımız elemanlarından en küçük göstergeçi olanını seçelim. X'in x_0 ve x_3 elemanlarına dokunmuşuz. x_1'e daha dokunmamışız. x_1'in daha önce dokunulmuş olan x_0 ve x_3 elemanlarına göre konumuna bakalım. Önümüzde üç şık var.

Birinci şık: $x_1 < x_0 < x_3$.

İkinci şık: $x_0 < x_1 < x_3$.

Üçüncü şık: $x_0 < x_3 < x_1$.

(Aslında birinci şıkta olmamız gerektiğini biliyoruz, ama daha önce söylediğimiz gibi bunun hiçbir önemi yok.) Birinci şıkta olduğumuzu varsayalım: $x_1 < x_0 < x_3$.



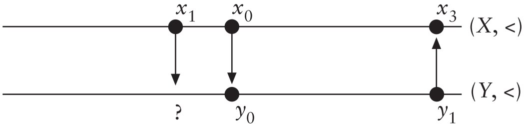
Şimdi, $(Y, <)$ sıralamasında, y_0 ve y_1'e göre konumu, x_1'in x_0 ve x_3'e göre olan konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız.

$$x_1 < x_0 < x_3$$

olduğundan, Y'de

$$y < y_0 < y_1$$

eşitsizliklerini, yani $y < y_0$ eşitsizliğini sağlayan bir y elemanı bulmalıyız. Böyle bir eleman var mıdır?



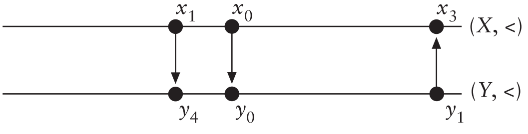
Vardır, çünkü Y'nin ilk elemanı olmadığından, her elemandan, dolayısıyla y_0'dan da küçük bir eleman vardır. Bu eleman y_2 olmayabilir, y_3 de olmayabilir, ama böyle bir eleman mutlaka olmalı. Bu koşulu sağlayan ve daha önce dokunulmamış elemanlardan en küçük göstergeçlisini alalım, diyelim y_4. Şimdi, daha önce bulduğumuz,

$$x_0 \mapsto y_0$$
$$x_3 \mapsto y_1$$

kısmi eşyapı eşleşmesini

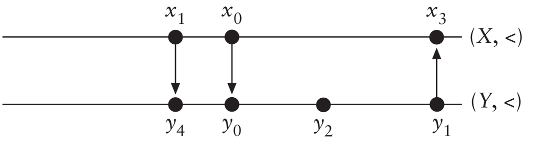
$$x_0 \mapsto y_0$$
$$x_1 \mapsto y_4$$
$$x_3 \mapsto y_1$$

olarak genişletelim. Resmi aşağıda:



Bir sonraki adımda, ki bu dördüncü adım, Y'den hareket edeceğiz. Y'de daha önce bulaşmadığımız en küçük göstergeçli eleman y_2. Bu y_2 elemanının daha önce bulaşılmış olan y_0, y_1 ve y_4 elemanlarına göre konumuna bakalım. Dört şık olabilir.

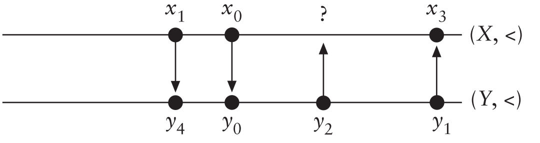
Birinci şık: $y_2 < y_4 < y_0 < y_1$.
İkinci şık: $y_4 < y_2 < y_0 < y_1$.
Üçüncü şık: $y_4 < y_0 < y_2 < y_1$.
Dördüncü şık: $y_4 < y_0 < y_2 < y_1$.
Üçüncü şıkta olduğumuzu varsayalım: $y_4 < y_0 < y_2 < y_1$. Durum şöyle:



Şimdi, $(X, \ <)$ sıralamasında, x_0, x_1 ve x_3'e göre konumu, y_2'nin y_0, y_1 ve y_4'e göre olan konumuna benzeyen bir eleman bulmaya çalışacağız. Yani X'te

$$x_1 < x_0 < x < x_3.$$

eşitsizliklerini, yani $x_0 < x < x_3$ eşitsizliklerini sağlayan bir x elemanı bulmalıyız. Böyle bir eleman var mıdır?



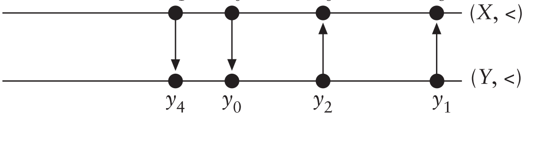
Vardır, çünkü X'in sıralaması yoğundur; herhangi iki eleman arasında olduğu gibi, x_0 ve x_3 elemanları arasında da bir eleman vardır. Bu elemanlar arasından göstergeci en küçük olanı seçelim. Diyelim x_8 elemanı $x_0 < x_8 < x_3$ eşitsizliklerini sağlayan en küçük göstergeçli eleman. Şimdi, daha önce bulduğumuz,

$$\begin{aligned} x_0 &\mapsto y_0 \\ x_1 &\mapsto y_4 \\ x_3 &\mapsto y_1 \end{aligned}$$

kısmi eşyapı eşleşmesini

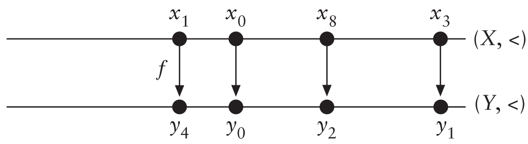
$$\begin{aligned} x_0 &\mapsto y_0 \\ x_1 &\mapsto y_4 \\ x_3 &\mapsto y_1 \\ x_8 &\mapsto y_2 \end{aligned}$$

olarak genişletelim. Resmi aşağıda:



Bunu böylece sürdürebiliriz. Ne X'te ne de Y'de bir eleman unutmadığımızdan emin olmak için, tek sayılı adımlarda X'ten, çift sayılı adımlarda Y'den başlarız.

X ve Y sayılabilir olduğundan, bu yöntemi sonsuza kadar sürdürürsek, X ve Y'nin sıralamalarının eşyapısal olduklarını görürüz. Yukardaki örnekte elde edilen eşleme şöyle olur:



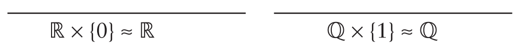
Sayılamaz Sonsuzlukta Yoğun ve Uçsuz Tamsıralamalar. Eğer kümeler sayılabilir sonsuzlukta değilse teorem yanlıştır. Örneğin gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin sonuna kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'yü koyalım, yani

$$(\mathbb{R} \times \{0\}) \sqcup (\mathbb{Q} \times \{1\})$$

kümesini alalım ve bu kümeyi şöyle sıralayalım:

$$\begin{aligned}
&(x,\, 0) < (y,\, 0) \Leftrightarrow \mathbb{R}\text{'de } x < y \text{ ise}\\
&(x,\, 1) < (y,\, 1) \Leftrightarrow \mathbb{Q}\text{'de } x < y \text{ ise}\\
&(x,\, 0) < (y,\, 1) \text{ her koşulda.}
\end{aligned}$$

Bu sıralamanın resmi şöyle:



Bu sıralamaya (kümeye de) $\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ adını verelim. Bu sıralamanın uçsuz ve yoğun olduğu çok açık olmalı.

$\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ kümesiyle $\mathbb{R}$ kümesi arasında bir eşleşme vardır. (Bu eşlemeyi bulabilir misiniz?) Ama bu iki sıralama arasında bir eşyapı eşlemesi yoktur. Bunu kanıtlayalım.

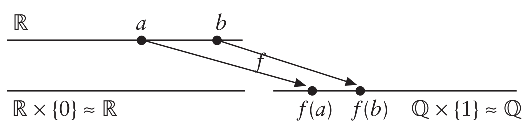
Diyelim $\mathbb{R}$ sıralamasından $\mathbb{R} + \mathbb{Q}$ sıralamasına giden bir f eşyapı eşleşmesi var. O zaman

$$\begin{aligned}
f(a) &= (0,\, 1)\\
f(b) &= (1,\, 1)
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlayan $a,\, b \in \mathbb{R}$ vardır. $\mathbb{R}$'de $0 < 1$ olduğundan $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{Q}$ sıralamasında

$$(0,\, 1) < (1,\, 1)$$

olur, dolayısıyla $a < b$ olur. f sıralamaya saygı duyduğundan



$[a, b]$ aralığı f altında $(0, 1)$ ile $(1, 1)$ arasındaki tüm elemanlara yani

$$[0, 1]_{\mathbb{Q}} \times \{1\}$$

kümesine gitmelidir. Bu da $[a, b]$ aralığı ile $[0, 1]_{\mathbb{Q}}$ kesirli sayılar arasında bir eşlemeye yol açar ki, bir gerçel sayı aralığının sayılabilir sonsuzlukta olmadığını biliyoruz [SKK].

Kısım II

İyisıralamalar

3. İyisıralamalar

3.1 İyisıralamaları Hissetmek

İyisıralamayı koyun sıralamaya benzetmek pek yanlış olmaz. Sonsuz sayıda koyun da olsa, iyisıralanmış bir koyun sürüsünde mutlaka birinci koyun olmalı. İkinci, üçüncü, dördüncü koyun da... Son koyun dışında (eğer varsa öyle bir koyun!), her koyundan hemen sonra gelen bir koyun olmalı. Dahası, sürü öyle sıralanmalı, yani koyunlar öyle numaralanmalı ki, her altsürüde numarası en küçük bir koyun olsun... İşte bu son özelliği sağlayan sıralamalara ***iyisıralama*** denir.

Sonlu bir sürüyü iyisıralamak marifet sayılmaz. Az sonsuz (örneğin doğal sayılar kadar sonsuz olan) sürüleri iyisıralamak da marifet sayılmaz. Marifet, çok sonsuz (örneğin gerçel sayılar kadar olan) sürüleri iyisıralamakta. Bu ve bundan sonraki birkaç bölümün ana sorularından biri de işte bu: Bir sürü ne kadar büyük olursa olsun iyisıralanabilir mi?

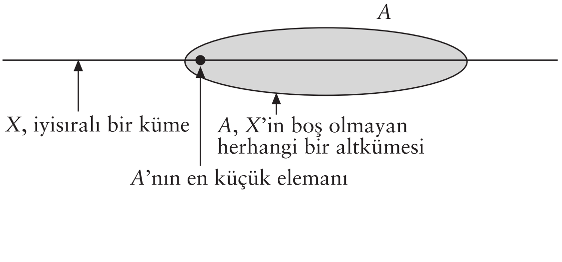
Şu teoremi biliyoruz [Sİ]:

Teorem 3.1. $\mathbb{N}$*'nin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır.*

$(\mathbb{N}, <)$ sıralamasında olduğu gibi, boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı olduğu sıralamalara ***iyisıralama*** denir. Yani bir $(X, <)$ sıralamasının iyi sıralama olması için,

İS. *Her* $\varnothing \neq A \subseteq X$ *altkümesi için, öyle bir* $a \in A$ *vardır ki her* $x \in A$ *için* $a \leq x$ *olur*

özelliğinin sağlanması gerekir.

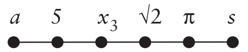


İS özelliğini sağlayan $(X, <)$ sıralamalarına ***iyisıralama*** denir. X'e de $<$ sıralamasıyla ***iyisıralanmıştır*** denir.

Tanımdan hemen anlaşılacağı üzere, bir iyisıralamanın her altkümesi de bir iyisıralamadır, yani $(X, <)$ bir iyisıralamaysa ve $Y \subseteq X$ ise, $(Y, <)$ de bir iyisıralamadır; sonuçta, Y'nin her altkümesi X'in de bir altkümesidir.

İyisıralı kümeler tamsıralıdır, yani iyisıralı bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir. Nitekim, eğer x ve y iyisıralı bir kümenin iki elemanıysa ve İS özelliğinde $A = \{x, y\}$ alırsak, x ve y'den birinin diğerinden küçükeşit olduğunu görürüz.

Sonlu her tamsıralama iyisıralama olmak zorundadır elbette.



Sonlu bir iyisıralama:
$a \prec 5 \prec x_3 \prec \sqrt{2} \prec \pi \prec s$

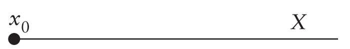
Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin doğal sıralamasıyla birlikte bir iyisıralama olduğunu gördük. Doğal sıralamayla iyisıralanmış bir küme olarak görüldüğünde $\mathbb{N}$ yerine ω (omega, Yunan alfabesinin son harfi) yazmak bir gelenektir; biz de bundan böyle $\mathbb{N}$ yerine sık sık ω yazacağız.

Bu bölümde iyisıralamaları biraz olsun anlamaya çalışacağız.

$(X, <)$ herhangi bir iyisıralama olsun.

Eğer $X = \varnothing$ ise söylenecek fazla bir şey yok, boşküme hakkında ne söylenebilirse, bu iyisıralama hakkında da o kadar söylenebilir.

Eğer $X \neq \varnothing$ ise, o zaman İS özelliğinde $A = X$ alarak, X'in bir en küçük elemanı olduğunu görürüz. X'in bu en küçük elemanına x_0 diyelim. (Demek ki boş olmayan her iyi sıralamanın bir en küçük elemanı vardır.)



$(X, <)$ iyisıralaması ve X'in en küçük elemanı x_0

Şimdi $X \setminus \{x_0\}$ kümesine bakalım. Eğer bu küme boşsa, o zaman X sadece x_0 elemanından oluşmuştur ve gene söyleyecek fazla bir şey olamaz. Eğer $X \setminus \{x_0\}$ kümesi boş değilse, o zaman İS özelliğinde $A = X \setminus \{x_0\}$ alalım ve bu kümenin en küçük elemanına x_1 diyelim. x_1, x_0'dan sonra gelen ilk elemandır.

$(X, <)$ iyisıralaması ve X'in en küçük iki elemanı x_0 ve x_1

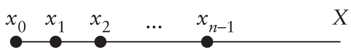
Eğer $X = \{x_0, x_1\}$ ise, X iyisıralaması için tek söyleyebileceğimiz şey, x_0'ın x_1'den küçük olduğudur. Diyelim X sadece bu iki elemandan ibaret değil. O zaman $X \setminus \{x_0, x_1\}$ kümesi boş olmadığından, İS özelliğine göre bu kümenin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_2 diyelim. x_2, x_1'den sonra gelen ilk elemandır.

$(X, <)$ iyisıralaması ve X'in en küçük üç elemanı x_0, x_1 ve x_2

Bunu böylece sürdürebiliriz. n-inci aşamada, X'in en küçük ilk n elemanını bulduk diyelim. Bu elemanlara (sırasıyla!)

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$$

diyelim.



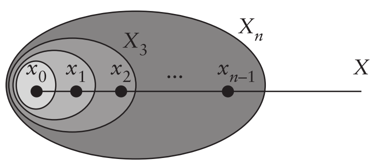
Şimdi,

$$X_n = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}\}$$

tanımını yapalım. Demek ki

$$\begin{aligned} X_0 &= \varnothing, \\ X_1 &= \{x_0\} \\ X_2 &= \{x_0,\ x_1\} \\ X_3 &= \{x_0,\ x_1,\ x_2\} \end{aligned}$$

vb.



Eğer $X \neq X_n$ ise, yani $X \setminus X_n \neq \varnothing$ ise, o zaman İS özelliğine göre $X \setminus X_n$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_n diyelim. x_n, x_{n-1}'den sonra gelen ilk elemandır.

X'in tüm elemanlarını bu yöntemle sonlu bir zaman sonra tüketirsek, yani belli bir n doğal sayısı için,

$$X = X_n = \{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}\}$$

ise, o zaman X sonlu bir kümedir (tam n elemanı vardır) ve sıralaması doğal sıralanmış

$$\{0,\ 1,\ \ldots,\ 2,\ n-1\}$$

kümesinden pek farklı değildir. Doğal sıralanmış

$$\{0,\ 1,\ \ldots,\ 2,\ n-1\}$$

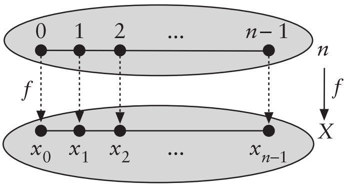
kümesinin n olarak simgelenmesi okuru şaşırtmamalı [Sİ]:

$$n = \{0, 1, \ldots, 2, n-1\}$$

ve

$$0 < 1 < \; .... \; < n - 1.$$

X'in sonlu tane, diyelim n tane elemanı varsa, yukarda da dediğimiz gibi, X iyisıralaması aynen n iyisıralanmasına benzer, elemanların adlarından başka aralarında bir fark yoktur. Daha matematiksel deyişle n'den X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani sürekli artan) bir f eşlemesi vardır.



Eğer X'in n elemanı varsa, $X \approx n$

Bu f eşlemesi i sayısını x_i elemanına götürür, yani her $i < n$ için, $f(i) = x_i$'dir. (Burada x_i, X'in i-inci elemanıdır.)

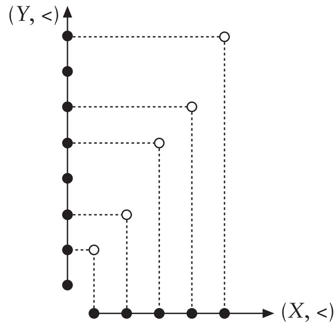
Sıralamayı bozmayan fonksiyonlara ***eşyapı fonksiyonu*** ya da ***sıralama morfizması*** adı verilir, kısaca ***morfizma*** dendiği de olur. Matematiksel tanım şöyle: $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer iyisıralama olsunlar ve $f : X \to Y$ fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlasın. O zaman f'ye ***sıralama morfizması*** adı verilir. Okullarda sıralama morfizması daha çok ***artan fonksiyon*** adıyla anılır.

İyisıralanmış kümeler üzerine sıralama morfizmaları birebir olmak zorundadır, çünkü iyisıralı bir küme tamsıralıdır. Nitekim, $f(x_1) = f(x_2)$ ise ne $x_1 < x_2$ ne de $x_2 < x_1$ doğru olabilir, dolayısıyla, tamsıralamadan dolayı, $x_1 = x_2$ olmalı.

Eğer f sıralama morfizması ayrıca örtense, o zaman f'ye ***sıralama eşlemesi*** denir. Aralarında bir eşyapı eşlemesi olan $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iyisıralamalarına ***eşyapısal*** (ya da ***izomorfik***) denir ve bu olgu $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da kısaca $X \approx Y$ olarak gösterilir.



Bir sıralama morfizması

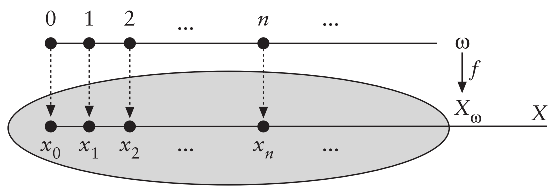
Demek ki tam n tane elemanı olan iyisıralı bir kümeyle

$$n = \{0,\ 1,\ \ldots,\ 2,\ n-1\}$$

iyisıralaması eşyapısaldır. Böylece sonlu iyisıralamaları anlamış olduk. Sıra geldi sonsuz iyisıralamalara...

Bundan böyle X sonlu olmasın. O zaman her n doğal sayısı için X'in n-inci elemanı vardır. Bu elemana x_n demiştik, demeye de devam edeceğiz.

Bu x_n elemanlarından ($n \in \mathbb{N}$) oluşan kümeye $X\omega$ adını verelim. X_ω'nın aynen $\mathbb{N}$'ye (daha doğrusu ω'ya) benzediğini okur anlamıştır herhalde, yani X_ω ile ω (yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$) arasında bir sıralama eşlemesi vardır: $X_\omega \approx \omega$.

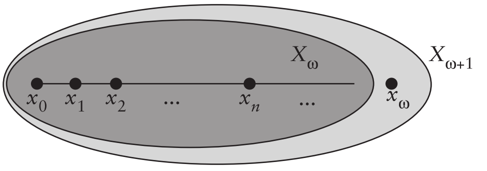


$X_\omega = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \approx \omega$

Not: X_ω'nın gerçekten bir küme olduğu pek bariz olmayabilir. [Sİ] ders notlarımızda kümeler kuramının birkaç basit aksiyomunu vermiştik. Bu aksiyomlara dayanarak X_ω'nın küme olduğunu kanıtlayabiliriz: $\varphi(x)$ şu özellik olsun: "$\{y \in X : y < x\}$ kümesiyle bir doğal sayısı arasında bir eşleme var." $X_\omega = \{x \in X : \varphi(x)\}$ eşitliğinden dolayı, X_ω bir kümedir. (Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu, [Sİ].)

İki seçenek var. Ya $X = X_\omega \approx \omega$ ya da $X \neq X_\omega$. Birinci şıkta X'in neye benzediği belli, ω'ya benzer. İkinci şıkta yoğunlaşalım. O zaman $X \setminus X_\omega$ boşküme değildir, dolayısıyla en küçük bir elemanı vardır. Bu elemana x_ω diyelim. x_ω elemanı daha önce bulduğumuz bütün $x_n (n \in \mathbb{N})$ elemanlarından ***hemen*** sonra gelen **ilk** elemandır, yani x_ω elemanı, her n doğal sayısı için, $x_n < x$ eşitsizliğini sağlayan X'in en küçük elemanıdır.

$X_{\omega+1} = X_\omega \cup \{x_\omega\}$ olsun. Burada $\omega + 1$ simgesine özel bir anlam vermeye çalışmayın, $\omega + 1$'i daha sonra tanımlayacağız. Şimdilik $\omega + 1$ simgesini tek bir simge gibi algılayıp $X_{\omega+1}$ iyisıralamasına yoğunlaşın: $X_{\omega+1}$ iyisıralaması, X_ω iyisıralamasının "sonuna" x_ω elemanı eklenerek elde edilmiştir.



Eğer x_ω, X'in son elemanıysa, yani X'te x_n'lerden ve x_ω'dan başka eleman kalmamışsa, o zaman $X = X_\omega \cup \{x_\omega\} = X_{\omega+1}$'dir. Bu durumda, X'i ve sıralamasını anladık: X, sonuna bir eleman eklenen ω'ya benziyor. (Bir sonraki bölümde bir iyisıralamanın sonuna bir eleman eklemenin ne demek olduğunu daha ayrıntılı bir biçimde anlatacağız.)

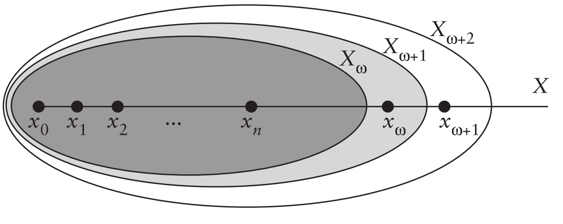
Eğer x_ω, X'in son elemanı değilse, yani

$$X \neq X_{\omega+1}$$

ise, o zaman $X \setminus X_{\omega+1} \neq \emptyset$ olur ve $X \setminus X_{\omega+1}$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana, tahmin edeceğiniz gibi, $x_{\omega+1}$ diyelim. $x_{\omega+1}$, x_ω'dan sonra gelen ilk elemandır. Gene tahmin edeceğiniz gibi

$$X_{\omega+2} = X_{\omega+1} \cup \{x_{\omega+1}\} = X_\omega \cup \{x_\omega,\, x_{\omega+1}\}$$

olsun.



Genel olarak, bir n doğal sayısı için, X'in

$$X_{\omega+n} = X_\omega \cup \{x_\omega,\, x_{\omega+1},\, \cdots,\, x_{\omega+n-1}\}$$

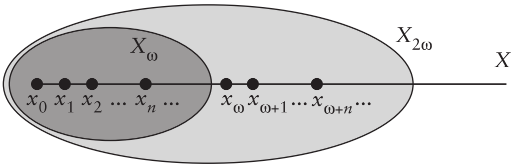
altkümesini bulduğumuzu varsayalım. Eğer belli bir n doğal sayısı için

$$X = X_{\omega+n}$$

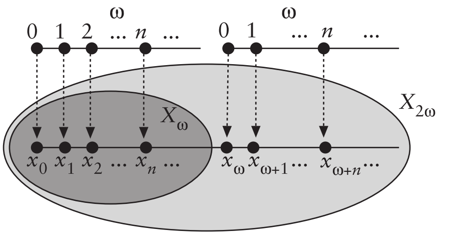
ise ne âlâ, X'i anladık demektir. Eğer $X_{\omega+n} \neq X$ ise $X \setminus X_{\omega+n}$ kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana $x_{\omega+n}$ diyelim. Eğer hiçbir n doğal sayısı için $X \neq X_{\omega+n}$ ise o zaman bu yöntemle X'i tüketemeyiz ve sürekli $x_{\omega+n}$ elemanlarını buluruz.

$$X_{2\omega} = X_\omega \cup \{x_{\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

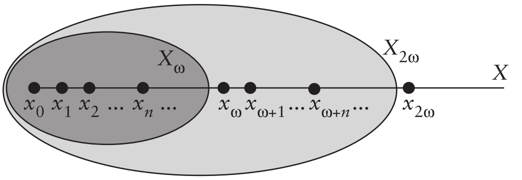
olsun.



$X_{2\omega}$ sıralamasının nasıl bir sıralama olduğu belli. Başında ω (yani $\mathbb{N}$) iyisıralaması var. Bir de sonunda **ayrı** bir ω var. Demek ki $X_{2\omega}$, ω'nın (yani doğal sayılar kümesinin) iki ayrık kopyasından oluşuyor, biri başında (küçükler), diğeri sonunda (büyükler).



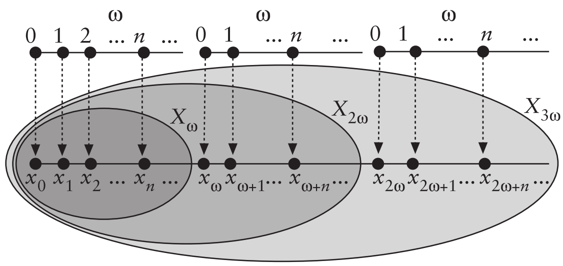
Eğer $X = X_{2\omega}$ ise, işimiz bitti, o zaman X'i ve iyisıralamasını anladık. Eğer $X \neq X_{2\omega}$ ise, o zaman $X \setminus X_{2\omega}$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana $x_{2\omega}$ diyelim.



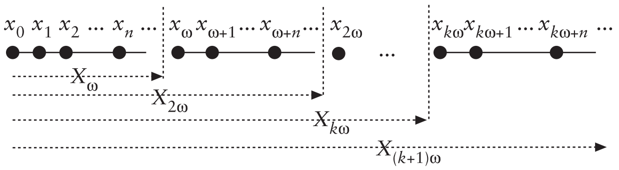
Bunu böylece sürdürebiliriz. X'te $x_{2\omega}$'dan daha büyük bir eleman varsa, $x_{2\omega}$'dan daha büyük elemanların en küçüğüne $x_{2\omega+1}$ diyelim. Varsa, malum yöntemle $x_{2\omega+2}$, $x_{2\omega+3}$, ... elemanlarını bulalım. Eğer X'in sonuna varırsak işimiz biter. Yoksa,

$$X_{3\omega} = X_{2\omega} \cup \{x_{2\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Eğer $X = X_{3\omega}$ ise o zaman X, ω'nın üç kopyasından oluşuyor demektir: küçük kopya, ortanca kopya, üçüncü kopya.



Kendimizi biraz fazla tekrarlamaya başladık... k-inci seviyeye kadar, yani $X_{k\omega}$'ya kadar geldiğimizi varsayalım. $X_{k\omega}$, sıralama olarak ω'nın k tane kopyasına benzer: 1'inci kopya, 2'inci kopya, ..., k-inci kopya. Her kopya kendi içinde doğal sıralanmıştır ve her kopyanın tüm elemanları daha sonraki kopyaların tüm elemanlarından daha küçüktür.



Örneğin üçüncü kopyanın 25'i, dördüncü kopyanın 2'sinden daha küçüktür.

Eğer $X_{k\omega} = X$ ise işimiz bitti. Yoksa $X \setminus X_{k\omega}$ kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana $x_{k\omega}$ diyelim.$x_{k\omega}$'dan hemen sonra gelen elemana $x_{k\omega+1}$ diyelim. (Eğer $x_{k\omega}$, X'in en büyük elemanı değilse böyle bir eleman vardır.) Devam edip $x_{k\omega+2}$, $x_{k\omega+3}$, ... elemanlarını da (varsa!) bulabiliriz. X'te eleman kaldığı sürece devam edelim. Eğer $x_{k\omega+n}$ elemanlarının hiçbiri X'in en büyük elemanı değilse (k sabit, n değişiyor) bu yöntemi hiç durmadan sürdürebiliriz. $X_{(k+1)\omega}$ şimdiye kadar bulduğumuz tüm elemanların kümesi olsun. ($X_{(k+1)\omega}$ bir kümedir, güvenin bana!) Eğer $X = X_{(k+1)\omega}$ ise, durmak zorundayız ve bu durumdan pek yakınmıyoruz herhalde. Ama eğer $X \neq X_{(k+1)\omega}$ ise, o zaman boş olmayan $X \setminus X_{(k+1)\omega}$ kümesinin en küçük elemanına $x_{(k+1)\omega}$ diyelim ve mümkün olduğu sürece bu yöntemle yolumuza devam edelim. Böylece her k doğal sayısı için $X_{k\omega}$ kümelerini elde ettiğimizi ama X'in bu yöntemle tükenmediğini varsayalım.

X_{ω^2}, tüm bu $X_{k\omega}$ kümelerinin bileşimi olsun:

$$X_{\omega^2} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_{k\omega}.$$

Alıştırmalar.

3.1. X_{ω^2} topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. (X'in iyisıralı bir küme olduğunu kullanabilirsiniz.)

Eğer $X_{\omega^2} = X$ ise sorun yok. Eğer $X_{\omega^2} \neq X$ ise $X \setminus X_{\omega^2}$ kümesinin en küçük elemanına x_{ω^2} diyelim. $X_{\omega^2+1} = X_{\omega^2} \cup \{x_{\omega^2}\}$ olsun.

Eğer X'te başka eleman kalmamışsa o zaman $X = X_{\omega^2+1}$'dır. Kalmışsa, x_{ω^2}'den hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_{ω^2+1} adını verelim. Eğer X'in elemanları bitmezse, X'in

$$x_{\omega^2+1},\ x_{\omega^2+2},\ x_{\omega^2+3},\ x_{\omega^2+4},\ \ldots$$

elemanlarını bulabiliriz.

$X_{\omega^2+\omega}$ kümesi X'in şimdiye kadar bulabildiğimiz tüm elemanlarından oluşsun.

$$x_{\omega^2+\omega},\ x_{\omega^2+\omega+1},\ x_{\omega^2+\omega+2},\ x_{\omega^2+\omega+3},\ \ldots$$

elemanlarının nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir: Her biri bir öncekinden hemen sonra gelen elemandır. Bu $x_{\omega^2+\omega+k}$ elemanlarının sonu gelmiyorsa, tüm bu elemanlar kümesine $X_{\omega^2+2\omega}$ diyelim.

Okur herhalde, eğer X tükenmezse,

$$X_{\omega^2+3\omega},\ X_{\omega^2+4\omega},\ X_{\omega^2+5\omega},\ \ldots$$

kümelerinin nasıl bulunduklarını anlamıştır. Bunların bileşimine $X_{2\omega^2}$ diyelim. Gidebildiğimiz kadar gidelim. Eğer X tükenmezse, sırayla

$$X_{2\omega^2},\ X_{3\omega^2},\ X_{4\omega^2},\ \ldots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların bileşimine de X_{ω^3} diyelim. Eğer X daha önce tükenmezse, X'in

$$X_{\omega^3},\ X_{\omega^4},\ X_{\omega^5},\ \ldots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların bileşimine de X_{ω^ω} diyelim.

Ardından sırayla X_{ω^ω}, $X_{2\omega^\omega}$, $X_{3\omega^\omega}$, ... altkümelerini de bulabiliriz. Bunların bileşimine $X_{\omega\omega^\omega}$, ya da $X_{\omega^{\omega+1}}$ diyelim. Bundan sonra $X_{\omega^{\omega+2}}$, $X_{\omega^{\omega+3}}$, $X_{\omega^{\omega+4}}$ altkümeleri (başlangıç dilimleri) bulunur. Devam edelim ve tüm bu altkümelerin bileşimine $X_{\omega^{\omega+\omega}}$ ya da $X_{\omega^{2\omega}}$ diyelim. Devam edelim. Sırayla

$$X_{\omega^{3\omega}},\ X_{\omega^{4\omega}},\ X_{\omega^{4\omega}},\ \ldots$$

altkümelerini de bulruuz. Bunların bileşimine $X_{\omega^{\omega\omega}}$ ya da $X_{\omega^{\omega^2}}$ diyelim. Eğer X'i hala daha bitirememişsek, $X_{\omega^{\omega^3}}$, $X_{\omega^{\omega^4}}$, $X_{\omega^{\omega^5}}$, ... altkümelerini de bulabiliriz. Bunların bileşimine $X_{\omega^{\omega^\omega}}$ diyelim. X'in hala daha bitmediğini varsayalım.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \omega,\\
\alpha_2 &= \omega^\omega,\\
\alpha_3 &= \omega^{\omega^\omega},\\
\alpha_4 &= \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\\
\alpha_5 &= \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}
\end{aligned}$$

olsun. Genel olarak,

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$$

olarak tanımlansın (α_n^ωolarak değil!) Bu tanımlar şimdilik biçimsel, yani α_n'ler anlamsız şeyler. α_n'leri göstergeç (endis, indeks) olarak kullanacağız. X_{α_1}, X_{α_2}, X_{α_3} altkümelerinin nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir. Eğer X izin verirse, devam edip, her $n \in \mathbb{N}$ için, X'in X_{α_n} altkümelerini de bulabiliriz. X'in hiç bitmediğini varsayarak, X_{α_n} altkümelerinin bileşimine X_{ε_0} diyelim.

X'te yer kalmışsa devam edebiliriz. İsteyen devam etsin. Ben sıkıldım.

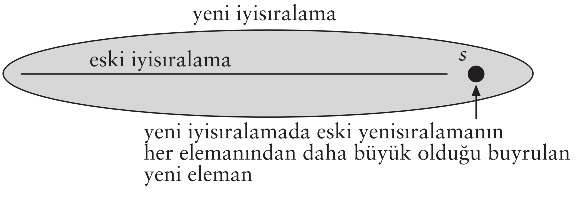
İmkânsız Uğraş. Okur, konunun zevkine daha çok varmak için doğal sayılar kümesinin altkümelerinin kümesi olan $\wp(\mathbb{N})$'nin bir iyisıralamasını bulmaya çalışmalıdır. En az yarım saat kadar. En fazla da bir saat... Bir saati aşmasın çünkü - önceden söyleyelim - başaramayacaktır. $\wp(\mathbb{N})$'nin bir iyisıralaması bulunamaz ama vardır. $\wp(\mathbb{N})$'nin iyisıralanabileceğini (iyisıralamayı bulamadan) ilerde yeni bir aksiyom yardımıyla kanıtlayacağız.

3.2 Eski İyisıralamalardan Yeni İyisıralamalar Türetmek

Bu alt bölümde eski iyisıralamalardan yenilerini elde etmeyi öğreneceğiz. Basitten zora doğru gideceğiz.

3.2.1 İyisıralamanın Sonuna Bir Eleman Eklemek.

Bu altbölümde, bir iyisıralamanın "en sonuna" yeni bir eleman ekleyeceğiz.

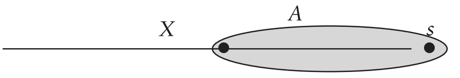


$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. s, X'te olmayan bir eleman olsun. X'teki sıralamayı koruyarak ama s'yi X'in her elemanından büyük yaparak $X \cup \{s\}$ kümesini sıralayabiliriz. $X \cup \{s\}$ kümesi üzerine kurulan ve $\prec$ olarak simgeleyeceğimiz bu yeni sıralama biçimsel olarak şöyle tanımlanır: $x, y \in X \cup \{s\}$ için, $x \prec y$ ancak ve ancak

1) $x, y \in X$ ve $x < y$ ise ya da

2) $x \in X$ ve $y = s$ ise.

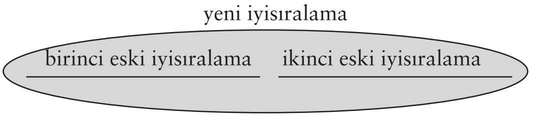
Bu sıralama da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup \{s\}$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap X \neq \varnothing$ ise, o zaman



$A \cap X$ kümesinin $<$ sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın $\prec$ sıralamasına göre en küçük elemanıdır. Öte yandan eğer $A \cap X = \varnothing$ ise o zaman $A = \{s\}$ olmak zorundadır ve s elbette bu durumda A'nın en küçük elemanıdır.

3.2.2 İki İyisıralamayı Toplamak.

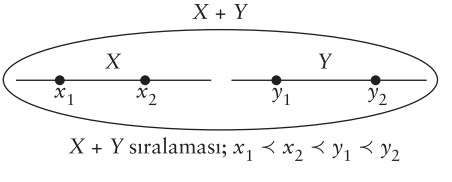
Bu paragrafta bir iyisıralamayı bir başka iyisıralamanın "sonuna" ekleyerek bir önceki paragraftaki yöntemi genelleştireceğiz ve yeni bir iyisıralama elde edeceğiz. Bölüm 1.2.4'te bu yöntemden sözetmiştik.



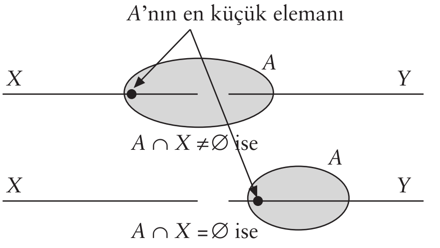
$(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Şimdilik X ve Y kümelerinin ayrık olduklarını (yani kesişmediklerini) varsayalım. $X \cup Y$ kümesi üzerine, $X + Y$ adını vereceğimiz bir sıralama tanımlayacağız. $X \cup Y$ kümesini, X ve Y'nin sıralamalarını koruyarak, ama Y'nin elemanlarını X'in elemanlarından daha büyük olduklarına hükmederek sıralayalım. Biçimsel tanım şöyle: $u, v \in X \cup Y$ için, $u \prec v$ ancak ve ancak

1) $u, v \in X$ ve $u < v$ ise ya da
2) $u, v \in Y$ ve $u < v$ ise ya da
3) $u \in X$ ve $v \in Y$ ise.

$X + Y$ sıralamasının resmi aşağıda.



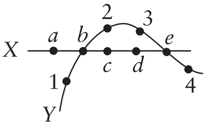
Bu da bir iyisıralamadır. Nitekim A, $X \cup Y$ kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer A'nın X'le kesişimi boş değilse, o zaman $A \cap X$ altkümesinin X sıralamasına göre en küçük elemanı A'nın en küçük elemanıdır. Eğer A'nın X'le kesişimi boşsa, o zaman A, Y'nin boş olmayan bir altkümesidir ve



A'nın Y sıralamasındaki en küçük elemanı A'nın $X+Y$'nin sıralamasındaki en küçük elemanıdır.

Eğer X ve Y kümeleri kesişiyorsa, o zaman X yerine $X \times \{0\}$, Y yerine $Y \times \{1\}$ alalım ve X ve Y'nin verilen sıralamalarını sırasıyla $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümelerinin üstüne taşıyalım. Sonra bir önceki paragrafta X ve Y ile yaptığımızı artık ayrık olan $X \times \{0\}$ ve $Y \times \{1\}$ kümeleriyle yapalım.

Bunu bir örnekle gösterelim. X ve Y bir sonraki şekildeki gibi olsunlar.



Yani

$$X = \{a < b < c < d < e\}$$

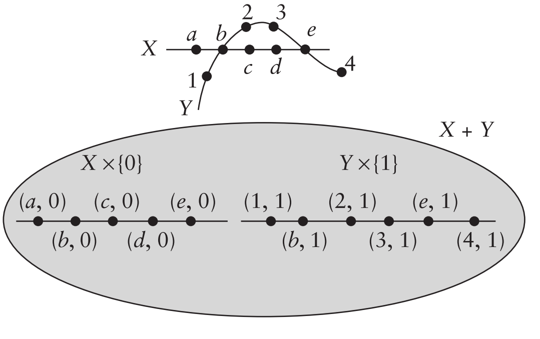
ve

$$Y = \{1 < b < 2 < 3 < e < 4\}$$

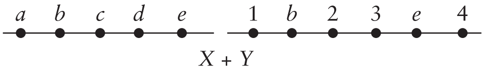
olsun. Bu iki sıralamayı şöyle yazalım:

$$X \times \{0\} : (a, 0) < (b, 0) < (c, 0) < (d, 0) < (e, 0),$$
$$Y \times \{1\} : (1, 1) < (b, 1) < (2, 1) < (3, 1) < (e, 1) < (4, 1).$$

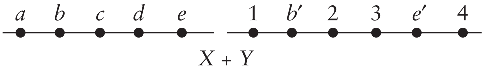
Dikkat ederseniz X'ten $X \times \{0\}$'a geçerken X'in sıralamasını koruduk. Aynı özeni Y için de gösterdik. Şimdi, aşağıdaki şekildeki gibi $X \times \{0\}$'ın elemanlarından hemen sonra $Y \times \{1\}$'in elemanlarını yazalım.



Matematikçi günlük koşuşturma içinde bu kadar çok özen göstermez. X ve Y kesişse bile X ve Y'nin elemanlarını iki kez yazar. Örneğin, profesyonel matematikçi yukardaki örneği,

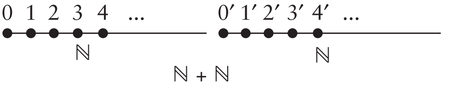


olarak yazar, ama bilir ki birinci b ile ikinci b farklı elemanlardır. Eğer çok başı sıkışırsa, $X + Y$'yi



olarak gösterir.

Örneğin $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ iyisıralaması, $\mathbb{N}$ iyisıralamasının sonuna aynı sıralamanın bir kopyası konarak elde edilir. İşte resmi:



3.2.3 Alfabetik Sıralama ya da İki İyisıralamayı Çarpmak.

$(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. Bu paragrafta $X \times Y$ kümesi üzerine Bölüm 1.2.6'da tanımladığımız alfabetik sıralamanın bir iyisıralama olduğunu kanıtlayacağız. Alfabetik sıralamayı anımsatalım: (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) çiftleri $X \times Y$ kümesininin iki elemanı olsun. Eğer

$$x_1 < x_2$$

ise ya da

$$x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$

ise, (x_1, y_1)'in (x_2, y_2)'den daha küçük olduğu söylenir ve bu

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

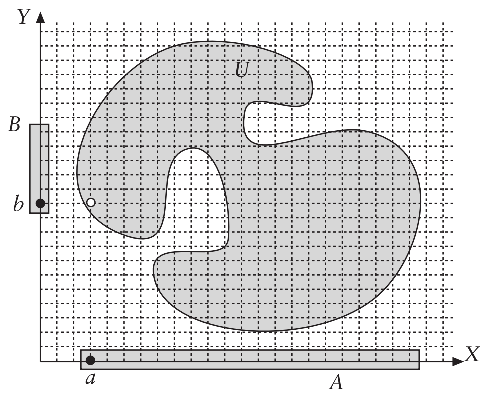
olarak yazılır. Bunun bir sıralama olduğu çok belli. Bir iyisıralama olduğunu kanıtlayalım. Aşağıdaki şekilden takip edin. U, $X \times Y$ kümesininin boş olmayan bir altkümesi olsun.

$$A = \{x \in X : \text{bir } y \in Y \text{ için } (x, y) \in U\}$$

olsun. A, boşküme olamaz. Demek ki A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana a diyelim.

$$B = \{y \in Y : (a, y) \in U\} = (\{b\} \times Y) \cap U$$

olsun. $a \in A$ olduğundan, B boşküme olamaz. Demek ki B'nin de bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana b diyelim. $b \in B$ olduğundan, $(a, b) \in U$.



Şimdi (a, b)'nin U'nun en küçük elemanı olduğunu kanıtayalım. (x, y), U'nun herhangi bir elemanı olsun. Demek ki $x \in A$. Dolayısıyla $x \geq a$. Eğer $x > a$ ise, elbette $(a, b) < (x, y)$. Eğer $x = a$ ise, o zaman $(a, y) = (x, y) \in U$ olduğundan, $y \in B$. Demek ki $y \geq b$. Eğer $y > b$ ise, o zaman elbette $(a, b) = (x, b) < (x, y)$. Eğer $y = b$ ise, o zaman $(a, b) = (x, y)$. Kanıtımız tamamlanmıştır.

3.3 İyisıralamalarda Tümevarım

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'de tümevarımla kanıt yapmasını biliyoruz. Anımsayalım:

Olgu 1. [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 1]. *$A \subseteq \mathbb{N}$ bir altküme olsun. A'nın şu iki özelliği olduğunu varsayalım:*

1) $0 \in A$.

2) *Her n doğal sayısı için, $n \in A$ ise o zaman $n+1 \in A$.*

Bu durumda $A = \mathbb{N}$ olur.

Bu teoremi doğal sayıları ve doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımladığımız [Sİ] ders notlarında kanıtlamıştık. Aynı ders notlarında bir tümevarım ilkesi daha kanıtlamıştık:

Olgu 2. [Doğal Sayılarda Tümevarım İlkesi 2]. *$A \subseteq \mathbb{N}$ bir altküme olsun. X'in şu özelliği olduğunu varsayalım:*

Her n doğal sayısı için, eğer

$$\{m \in \mathbb{N} : m < n\} \subseteq A$$

ise, o zaman $n \in A$.

Bu durumda $A = \mathbb{N}$ olur.

Bu teoremlerden en azından biri olmadan doğal sayılar hakkında ele avuca sığan bir teorem kanıtlayamayız.

Birinci teorem doğal sayılarda toplamayla ilgili bir şey söylüyor. İkinci teoremde ise toplama yerine sadece $<$ eşitsizliği var. Birinci teoremi olmasa da ikinci teoremi iyisıralamalara genelleştirebiliriz. En azından ikinci teoremin aynısını iyisıralamalar için formüle edip kanıtlamaya çalışabiliriz.

Birinci teorem de, yazıldığı biçimde değil ama buna yakın bir biçimde iyisıralamalara genelleştirilebilir. Bunu daha sonra ordinaller için yapacağız.

Bu bölümün amacı ikinci tümevarım ilkesini doğal sayılardan iyisıralamalara genelleştirmek.

Teorem 3.2. [***İyisıralamalarda Tümevarım İlkesi***]. *$(X, <)$ bir iyi sıralama olsun. $A \subseteq X$ bir altküme olsun. A'nın şu özelliği olduğunu varsayalım:*

Her $x \in X$ için, eğer $\{y \in X : y < x\} \subseteq A$ ise, o zaman $x \in A$.

Bu durumda $Y = X$ olur.

Kanıt: Diyelim, A, X'e eşit değil. O zaman $X \setminus A$ kümesi boş değildir. Dolayısıyla X iyisıralamasının $X \setminus A$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x diyelim.

x, $X \setminus A$ altkümesinin en küçük elemanı olduğundan, x'ten küçük hiçbir eleman $X \setminus A$ kümesinde olamaz, yani x'ten küçük her eleman A'dadır. Varsayılan koşula göre x, A'da olmalı. Bir çelişki elde ettik. Demek ki A, X'e eşit olmalı. □

Görüldüğü gibi kanıt çok basit. Nasıl doğal sayılarla ilgili en küçük bir gerçeği kanıtlamak için tümevarım kullanılıyorsa, iyisıralamalarda da en küçük bir şeyi kanıtlamak için tümevarım gerekir. İyisıralamalarda tümevarımsız bir şey kanıtlanamaz desek yeridir. Belki şu tuhaf teorem dışında...

Teorem 3.3. *İyisıralı bir kümede sürekli azalan bir dizi yoktur.*

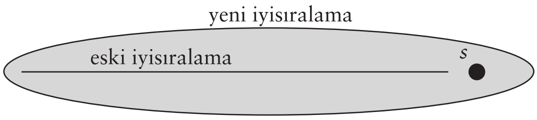
Kanıt: $(X, <)$ iyisıralı bir küme olsun. $(x_n)_n$, X'in sürekli azalan bir dizisi olsun. Demek ki her $n < m$ doğal sayıları için $x_n, x_m \in X$ ve eğer $n < m$ ise $x_m < x_n$. Bir çelişki elde edeceğiz.

$$A = \{xn : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_n diyelim. Ama o zaman $x_{n+1} \in A$ ve $x_{n+1} < x_n$, bir çelişki. □

Bir Uygulama. İyisıralamalarda tümevarımla kanıt tekniğinin bir uygulamasını görelim şimdi.

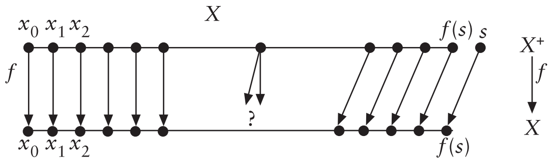
Altbölüm 3.2.1'de, bir iyisıralamanın sonuna yeni bir eleman ekleyerek yeni bir iyisıralama elde ettik. Yeni iyisıralamanın resmi aşağıdaki gibi.



Eğer X bir iyisıralamaysa, X'in sonuna bir eleman eklenerek elde edilen sıralamaya X^+ diyelim.

Bu bölümde X iyisıralamasıyla X^+ iyisıralamasının gerçekten farklı olduklarını kanıtlayacağız. Daha matematiksel bir deyişle, aralarında bir eşyapı eşlemesi olmadığını kanıtlayacağız. Daha açık bir deyişle, X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani artan) bir eşleme olmadığını kanıtlayacağız.

Kanıta girişmeden önce problemi biraz tartışalım. Diyelim X^+'dan X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani mutlak artan) bir eşleme var. Bu eşlemeye f diyelim ve f'yi anlamaya çalışalım.



Yukardaki şekilden takip edin. f, X^+ iyisıralamasının ilk elemanlarını (ki bunlar X'in de ilk elemanlarıdır) gene kendilerine götürmeli, yani f başlangıçta her x'i gene kendisine götüren özdeşlik fonksiyonu olmalı. Örneğin X^+'nın ilk elemanı (ki bu X'in ilk elemanıdır) f altında gene X'in ilk elemanına gitmeli, yoksa f hiçbir zaman X'in ilk elemanına değemez ve dolayısıyla örten olamaz.

X'in ilk elemanlarına şekildeki gibi x_n dersek, $f(x_n) = x_n$ eşitliği hemen hemen bariz olmalı. Yani sol tarafta asayiş berkemal, her eleman f altında kendisine gidiyor.

Öte yandan, X^+'nın en son elemanına, şekilde olduğu gibi, s dersek, $f(s)$, X'in en son elemanı olmalı, çünkü eğer $y \in X$ herhangi bir elemansa, belli bir $x \in X^+$ için, $y = f(x)$ olur ve $x \leq s$ olduğundan, $y = f(x) \leq f(s)$ olur.

Şimdi $f(s)$'nin f altında gittiği eleman olan $f(f(s))$'ye, yani $f^2(s)$'ye bakalım. Bu eleman $f(s)$'den hemen önceki eleman olmalı, çünkü $f(s)$, s'den hemen önceki elemandır. Aynı nedenden, $f^2(s)$, $f(s)$'den hemen önce gelen eleman olduğundan, $f^3(s)$, $f^2(s)$'den hemen önce gelen eleman olmalı.

Görüldüğü gibi sol tarafta özdeşlik fonksiyonu olan f, sağ tarafta elemanları bir eksiltiyor... Ortalarda bir yerde sorun çıkmalı... Bir yerde f elemanı kendisine mi götürmek, yoksa eksiltmek mi gerektiğine birtürlü karar verememeli...

Yukardaki parlak fikir ne yazık ki matematiksel olarak beş para etmez. "Ortalarda bir yer" diye bir yerden sözedilemez matematikte.

Söylediğimizi kanıtlayacağız ama tümevarım kullanarak kanıtlayacağız. Tümevarımla, her $x \in X$ için $f(x) = x$ eşitliğini kanıtlayacağız. Böylece s'ye gidecek yer kalmayacak ve bir çelişki elde edeceğiz.

$$A = \{x \in X : f(x) = x\}$$

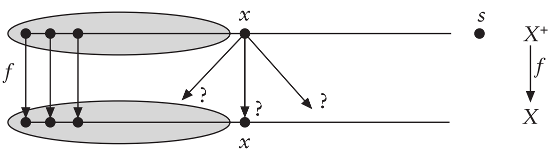
olsun. A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için, X'ten herhangi bir x elemanı alıp,

$$\{y \in X : y < x\} \subseteq A$$

varsayımından yola çıkıp $x \in A$ ilişkisini kanıtlamalıyız.

Demek ki x'ten küçük her elemanın f altında kendisine gittiğini varsayıyoruz ve x'in de f altında kendisine gittiğini kanıtlayacağız.

$f(x)$ elemanına bakalım. Bu elemanın nerede olduğunu anlamaya çalışacağız.



$f(x)$, x'ten küçük olamaz. Aksi takdirde $f(x) \in A$, yani $f(f(x)) = f(x)$ olurdu ve f birebir olduğundan $f(x) = x$ olurdu, bir çelişki.

$f(x)$, x'ten büyük olamaz. Aksi takdirde X^+'nın hiçbir elemanı x'e değemezdi. Nitekim eğer $f(y) = x$ ise, $f(y) = x < f(x)$ ve $y < x$ olur. Ama o zaman da $y \in A$ içindeliği ve $x = f(y) = y < x$ eşitsizliği bize beklediğimiz çelişkiyi verir.

Demek ki $f(x) = x$.

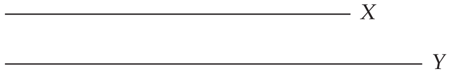
Kanıtladığımızı yazalım.

Teorem 3.4. *Eğer X bir iyisıralamaysa, X ile X^+ iyisıralamaları eşyapısal olamazlar.*

□

3.4 İyisıralamaları Birbirine Gömmek

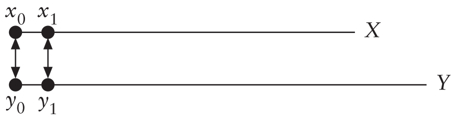
İki iyi sıralama alalım: $(X, <)$ ve $(Y, <)$. Bunlar tamsıralama olduklarından, her ikisini de aşağıdaki şekildeki gibi birer doğru üzerinde temsil ederek çok



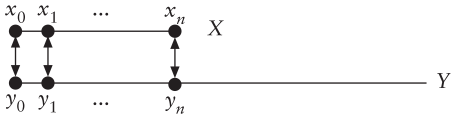
büyük bir yalan söylemiş olmayız. (Temsilde sağdaki elemanlar soldakilerden daha büyük olacaklar.)

Eğer X ve Y boşküme değillerse her ikisinin de birer en küçük elemanı vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_0 ve y_0 diyelim.

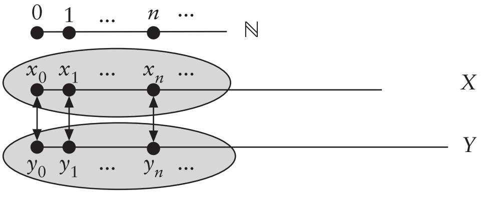
Eğer X ve Y'de eleman kalmışsa o zaman x_0 ve y_0'dan hemen sonra gelen elemanlar vardır. Bu elemanlara sırasıyla x_1 ve y_1 diyelim.



Bunu böyle "sürdürebileceğimiz kadar" sürdürelim. Eğer X ya da Y sonlu adımda biterse, önce bitenden diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu buluruz.



Eğer X ya da Y sonlu adımda bitmezse, o zaman her ikisinde de $\mathbb{N}$'ye eşyapısal olan bir "başlangıç dilimi" var demektir.



Daha fazla devam etmeden (çünkü bu tür akıl yürütmeler tehlikeli sularda yüzmek demektir), biraz teori yapalım, en azından kullandığımız "başlangıç dilimi" terimini tanımlayalım. Önce okurun sezgisine hitap edelim: Amacımız iki iyisiralı kümeyi, ilk elemanlarından başlayarak ve gidebildiğimiz kadar giderek, birbiriyle eşleştirmeye çalışmak. İkisinden birinin diğerinden daha önce tükeneceğini umup tükeneni diğerinin "başlangıç dilimine" gömmek. Okur okumaya devam etsin, her şey zamanla arzulanan matematiksel açıklığa kavuşacak.

3.4.1 Başlangıç Dilimi

$(X, <)$ bir iyisıralama olsun. $I \subseteq X$ bir altküme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$y \leq x \in I$$

koşulları doğru olduğunda,

$$y \in I$$

oluyorsa, I'ya ***başlangıç dilimi*** (İngilizcesi *initial segment*) adı verilir. Örneğin X'in kendisi bir başlangıç dilimidir. Daha ilginç örnekler: Her $a \in X$ için,

$$\{x \in X : x < a\}$$

ve

$$\{x \in X : x \leq a\}$$

kümeleri X'in birer başlangıç dilimleridir. Bunlardan başka da başlangıç dilimi yoktur, yani eğer bir başlangıç dilimi X'ten değişikse, o zaman bu başlangıç dilimi, belli bir $a \in X$ için,

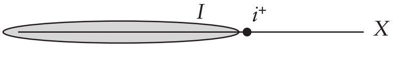
$$\{x \in X : x < a\}$$

kümesine eşit olmalıdır. Nitekim $I \subset X$ bir başlangıç dilimi olsun. a, $X \setminus I$ kümesinin en küçük elemanı olsun. Elbette

$$\{x \in X : x < a\} \subseteq I$$

olur. İçindeliğin diğer istikametini kanıtlayalım. $x \in I$ olsun. Eğer $a \leq x$ ise, başlangıç diliminin tanımından dolayı $a \in I$ olmalı, ki bunun yanlış olduğunu biliyoruz. Demek ki $x < a$. İstediğimizi kanıtladık.

Eğer $I \neq X$ bir başlangıç dilimi ise, i^+, $X \setminus I$



kümesinin en küçük elemanını simgeleyecek. Yani i^+, X'in I'nin bütün elemanlarından daha büyük olan en küçük elemanıdır. Demek ki

$$I = \{x \in X : x < i^+\}.$$

Bu arada $I \cup \{i^+\}$ kümesinin de bir başlangıç dilimi olduğuna dikkatinizi çekerim. Eğer başlangıç dilimine J ya da K dersek, bu elemanları j^+ ve k^+ diye anacağız.

Bu bulduğumuzu sık sık kullanacağız; not edelim:

Önsav 3.5. *X'in bir başlangıç dilimi ya X'e eşittir ya da bir $a \in X$ için $\{x \in X : x < a\}$ biçiminde bir kümedir.*

□

Sonuç 3.6. *Eğer I ve J, X'in birer başlangıç kümesiyse, ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$.*

Kanıt: Eğer I ya da J, X ise, sorun yok. Böyle olmadığını varsayalım. Eğer $i^+ \leq j^+$ ise $I \subseteq J$, aksi halde $J \subseteq I$. □

Aşağıdaki sonuç da yukardakinden çıkar ama biz çeşni olsun diye başka bir kanıt vereceğiz.

Önsav 3.7. *$\wp$, elemanları X'in bazı başlangıç dilimlerinden oluşan bir küme olsun. O zaman $\cup\wp$, yani $\bigcup_{I\in\wp} I$ bir başlangıç dilimidir.*

Kanıt: $x \in \bigcup_{I\in\wp} I$ ve $y < x$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Ama I bir başlangıç dilimi. Demek ki $y \in I$. Dolayısıyla $y \in \bigcup_{I\in\wp} I$. □

Aşağıdaki alıştırmalarda X iyisıralı bir kümeyi simgeleyecek.

Alıştırmalar.

3.2. Eğer I ve J, X'in birer başlangıç dilimiyse, ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$ olduğunu kanıtlayın.

3.3. $\wp$, her elemanı X'in bir başlangıç dilimi olan bir küme olsun. O zaman $\cap\wp$ kümesinin, yani $\cap_{I\in\wp} I$ kümesinin de X'in bir başlangıç dilimi olduğunu kanıtlayın.

3.4. Y iyisıralı küme olsun. $f : X \to Y$, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu olsun. $I \subseteq X$ bir başlangıç dilimiyse, $f(I)$'nın Y'nin de bir başlangıç dilimi olduğunu gösterin.

3.5. $\wp \neq \emptyset$, her elemanı X'in bir başlangıç dilimi olan bir küme olsun. $\wp$'nin en küçük bir elemanı olduğunu kanıtlayın; yani öyle bir $I \in \wp$ elemanının varlığını kanıtlayın ki, her $J \in \wp$ için $I \subseteq J$ olsun.

3.6. X'in en büyük elemanının olmadığını varsayalım. $\wp$, X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesi olsun. $\bigcup_{I\in\wp} I = X$ eşitliğini kanıtlayın.

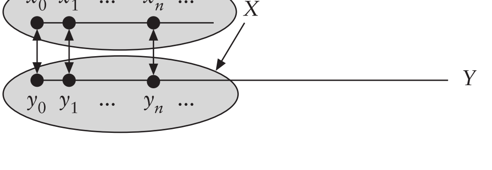
3.7. A, X'in bir altkümesi olsun.
$I(A) = \{x \in X : x,\ A\text{'nın bir elemanından küçükeşit}\}$
olsun. $I(A)$'nın bir başlangıç dilimi olduğunu kanıtlayın. $I(A)$'nın A'yı içeren başlangıç dilimlerinin en küçüğü olduğunu kanıtlayın. $I(A)$'nın X'in A'yı içeren tüm başlangıç dilimlerinin kesişimi olduğunu kanıtlayın.)

3.8. $J = \bigcup_{I\in\wp} I$ olsun. $\{i^+ : I \in \wp\}$ kümesiyle j^+ elemanı arasında nasıl bir ilişki vardır?

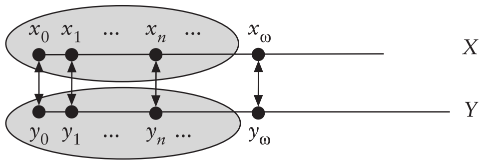
3.9. $I \subseteq Y \subseteq X$ olsun ve I, hem X'in hem de Y'nin başlangıç dilimi olsun. i^+elemanı X'te ve Y'de farklı elemanlar olabilir. Aslında, i^+ yerine $i^+(X)$ ve $i^+(Y)$ yazmak gerekir. $i^+(X) \leq i^+(Y)$ eşitsizliğini kanıtlayın.

3.4.2 Gömme Teoremi (1)

Bölümün başında tanımladığımız x_n ve y_n elemanlarını anımsayalım. Eğer X ve Y'den biri sadece bu x_n ve y_n elemanlarından oluşmuşsa, o zaman, bu elemanlardan oluşandan (aşağıdaki resimde X'ten) diğerinin başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır.



Eğer hem X'te hem de Y'de eleman kalmışsa, x_ω ve y_ω kalan elemanların en küçüğü olsun.



Bunu böylecene sürdürebiliriz ve X ya da Y'nin elemanlarını bir zaman sonra tüketebiliriz. Böylece, önce tükeneni diğerinin bir başlangıç dilimine gömebiliriz... gibi bir hisse kapılabilir insan ilk anda ama ikinci anda bundan matematiksel olarak henüz emin olamayacağımızı anlarız...

Yukardaki akıl yürütmenin beyne değil hislere hitap ettiğinin farkına vardınız mı? Matematikte "bunu böylecene sürdürebiliriz" diye bir tümce yazılamaz, böyle bir tümce ancak edebiyat sınıfına girebilir. Oysa burada matematik yapılmaktadır.

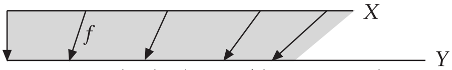
Bu bölümde yukardaki edebiyatı matematiğe dönüştürerek şu teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 3.8. *$(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden birinden diğerinin bir başlangıç dilimine giden bir eşyapı fonksiyonu vardır ve bu başlangıç dilimi ve eşyapı fonksiyonu birer tanedir. Ayrıca her ikisinden de diğerinin başlangıç dilimine giden eşyapı fonksiyonları varsa, bu eşyapı fonksiyonları eşyapı eşlemeleri (izomorfizma) olmak zorundadır.*

Teoremi şöyle yazmayı tercih ediyoruz:

Teorem 3.9. *$(X, <)$ ve $(Y, <)$ iki iyisıralama olsun. O zaman ikisinden biri diğerinin başlangıç dilimine gömülür. Ayrıca her ikisi de diğerinin başlangıç dilimine gömülüyorsa, bu gömmeler eşyapı eşlemeleri (izomorfizma) olmak zorundadırlar.*

Matematiksel tanımı verelim ki sonradan maraza çıkmasın. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer iyisıralama olsun. $f : X \to Y$ sıralamayı koruyan bir fonksiyon olsun, yani $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ olsun.



X'in Y'nin bir başlangıç dilimine gömülüşü

Bir de ayrıca $f(X)$'in Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu varsayalım. O zaman f'nin X'in Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömülüşü*** olduğunu ya da f'nin X'i Y'nin bir ***başlangıç dilimine gömdüğünü*** ya da X'in Y'nin ***başlangıç dilimine gömüldüğünü*** söyleyeceğiz.

Teoremi kanıtlamak biraz zaman alacak. İyisıralamalarda tümevarımla kanıt ilkesini sık sık kullanacağız. (Bkz. Teorem 3.2.)

Bundan böyle X ve Y, iyisıralanmış birer küme simgeleyecekler.

Bir sonraki önsavın tümevarımda nasıl kullanılacağını görmek için kâhin olmaya gerek yok.

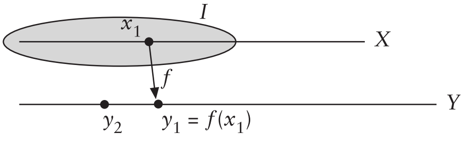
Önsav 3.10. *f, X'in Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömülüşü olsun. I, X'in bir başlangıç dilimi olsun.*

i. *O zaman $f(I)$, Y'nin bir başlangıç dilimidir, yani f'nin I'ya kısıtlanışı olan $f_{|I}$ fonksiyonu I'nin Y'nin bir başlangıç dilimine gömülüşüdür.*

ii. *Eğer $I \neq X$ ve $J = f(I)$ ise, $f(i^+) = j^+$ olur.*

Kanıt: i. $y_1 \in f(I)$ ve $y_2 < y_1$ olsun. y_2'nin $f(I)$'da olduğunu kanıtlayacağız.

Madem ki $y_1 \in f(I)$, $f(x_1) = y_1$ eşitliğini sağlayan bir $x_1 \in I$ vardır.



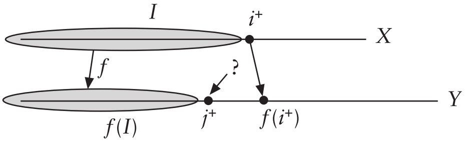
$y_1 \in f(X)$ ve $f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan, y_1'den küçük olan y_2 de $f(X)$'in bir elemanıdır. $f(x_2) = y_2$ eşitliğini sağlayan bir $x_2 \in X$ elemanı alalım.

$$f(x_2) = y_2 < y_1 = f(x_1)$$

olduğundan, $x_2 < x_1$ olmalı. Ama $x_1 \in I$. Demek ki $x_2 \in I$ ve

$$y_2 = f(x_2) \in f(I).$$

ii. i^+, I'nin bütün elemanlarından daha büyük olduğundan, $f(i^+)$, $f(I)$'nin bütün elemanlarından daha büyük olmalı. Demek ki $j^+ \leq f(i^+)$. Dolayısıyla ($f(X)$ bir başlangıç dilimi olduğundan) $j^+ \in f(X)$ ve bir $x \in X$ için, $f(x) = j^+$ olmalı.



$f(x) = j^+ \leq f(i^+)$ olduğundan, $x \leq i^+$ olmalı. Eğer $x < i^+$ ise, o zaman $x \in I$ ve $f(x) \in f(I)$ olur ki bu da $f(x) = j^+ \notin f(I)$ ile çelişir. Demek ki $x = i^+$. □

Önsav 3.11. *X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir gömme vardır.*

Kanıt: f ve g, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden iki gömme olsun. Her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini kanıtlayacağız. Demek ki,

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

tanımını yaparsak, A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamamız gerekiyor. Tümevarımla kanıt ilkesini kullanacağız.

$x \in X$ olsun ve $I = \{y \in X : y < x\}$ kümesinin A'nın bir altkümesi olduğunu varsayalım. Eğer x'in de A'da olduğunu kanıtlarsak, tümevarım ilkesine göre A'nın X'e eşit olduğunu kanıtlamış olacağız ve önsavımız kanıtlanmış olacak.

Ama $x = i^+$ ve Önsav 3.10.ii'ye göre, $f(I) = J = g(I) = K$ ise,

$$f(x) = f(i^+) = j^+ = k^+ = g(i^+) = g(x).$$

Demek ki $x \in A$. □

Yukardaki önsava göre X'in bir başlangıç diliminden Y'nin bir başlangıç dilimine en fazla bir tane gömme vardır. Nitekim eğer I, X'in bir başlangıç dilimiyse, Önsav 3.11'yi X yerine I'ya uygulayabiliriz.

Sonuç 3.12. *Özdeşlik fonksiyonu* Id*, X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 3.11'dan dolayı X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden başka da böyle bir gömme yoktur.* □

Teoremin Birinci Yarısının Kanıtı: $\wp$, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in başlangıç dilimleri kümesi olsun. Yani,

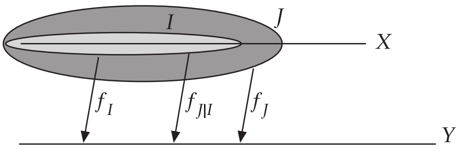
$$\wp = \{I \subseteq X : I,\ X\text{'in başlangıç dilimi ve } I\text{'dan } Y$$

$$\text{'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme var }\}$$

olsun.

Önsav 3.11'ye göre, eğer $I \in \wp$ ise, I'dan Y'nin bir başlangıç kümesine giden sadece bir tane gömme vardır. Bu gömmeye f_I adını verelim.

Eğer I ve J, X'in iki başlangıç dilimiyse, Sonuç 3.6'ye göre ya $I \subseteq J$ ya da $J \subseteq I$. Diyelim $I \subseteq J$. Şimdi, f_J gömmesi J'den Y'ye gidiyor, ve $I \subseteq J$ olduğundan, f_J fonksiyonunu I'da değerlendirebiliriz. Önsav 3.10'ya göre



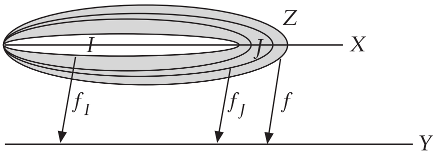
$f_{J|I}(I)$ de Y'nin bir başlangıç dilimidir ve $f_{J|I}$ da f_I gibi, I'dan Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 3.11'ye göre,

$$f_{J|I} = f_I.$$

Demek ki, her $x \in I$ için, $f_I(x) = f_{J|I}(x) = f_J(x)$.

Şimdi $Z = \cup\wp = \bigcup_{I\in\wp} I$ olsun. Z'nin $\wp$'de olduğunu kanıtlayacağız. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük elemanı olduğunu gösterecek, çünkü ne de olsa Z, $\wp$'nin elemanlarının bileşimi. Yani Z, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in en büyük başlangıç dilimi olacak.

Önsav 3.7'e göre Z, X'in bir başlangıç dilimidir. Z'den Y'ye giden bir f fonksiyonu tanımlayacağız. $x \in Z$ olsun. O zaman bir $I \in \wp$ için $x \in I$. Şimdi $f(x)$'i $f_I(x)$ olarak tanımlayalım. Bu tanım "yasal"dır çünkü, I yerine, x'in içinde bulunduğu bir başka $J \in \wp$ başlangıç dilimi seçseydik, bir üstteki paragrafta yaptıklarımızdan dolayı $f_I(x) = f_J(x)$ olurdu. Yani $f(x)$'in tanımı, seçilen I başlangıç diliminden bağımsızdır, yeter ki x, I'da olsun. Bu da tanımın yasal olduğunu gösterir.

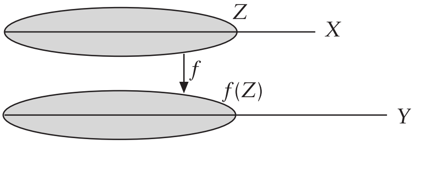


Şimdi f'nin sıralamaya saygı duyan bir fonksiyon olduğunu kanıtlayacağım. Bunun kanıtı oldukça kolay. $y < x \in Z$ olsun. Demek ki bir $I \in \wp$ için $x \in I$. O zaman y de I'da. Demek ki,

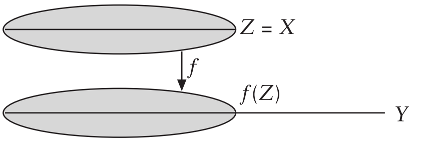
$$f(y) = f_I(y) < f_I(x) = f(x).$$

Böylece f'nin sıralamaya saygı duyduğunu kanıtlamış olduk.

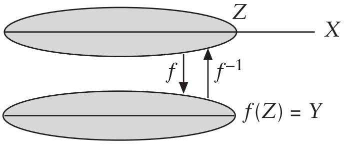
Önsav**??**'ten dolayı $f(Z)$'nin Y'nin bir başlangıç dilimi olduğunu biliyoruz. Demek ki f, Z'den Y'nin bir başlangıç dilimine bir gömme. Dolayısıyla $Z \in \wp$ ve Z, $\wp$'nin en büyük elemanı. Durum şöyle:



Eğer $Z = X$ ise işimiz bitmiştir, çünkü o zaman X, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülür.



Eğer $f(Z) = Y$ ise de işimiz bitmiştir, çünkü o zaman Y, f^{-1} sayesinde X'in bir başlangıç dilimine (Z'ye) gömülür.

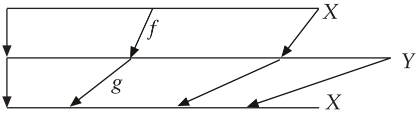


Şimdi $Z \neq X$ ve $f(Z) \neq Y$ varsayımlarını yapalım. Bir çelişki elde edeceğiz. $T = f(Z)$ olsun. Bu durumda z^+ ve t^+ elemanları vardır. Şimdi X'in $Z \cup \{z^+\}$ başlangıç kümesinden Y'nin

$$f(Z) \cup \{t^+\}$$

başlangıç kümesine giden ve sıralamayı koruyan bir fonksiyon bulabiliriz. Bunun için, Z üzerine tanımlı olan f'yi z^+ elemanını t^+ elemanına götürecek biçimde genişletmek yeterli. Ama o zaman da $Z \cup \{z^+\} \in \wp$ olur. Bu da Z'nin $\wp$'nin en büyük elamanı olmasıyla çelişir. □

Teoremin İkinci Yarısının Kanıtı: f, X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir gömme olsun.



g, Y'den X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömme olsun. O zaman, $g \circ f$, X'ten X'in bir başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 3.11'ya göre

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \,.$$

Demek ki her $x \in X$ için $g(f(x)) = x$. Dolayısıyla g örtendir, yani bir eşyapı eşlemesidir. (g'nin birebir olduğunu zaten biliyoruz.)

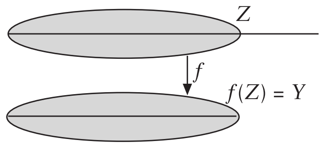
Eğer f örten değilse, o zaman Y'de her $x \in X$ için, $f(x) < u$ eşitsizliğini sağlayan bir u elemanı vardır. Bu eşitsizliğin her iki tarafına da g'yi uygularsak, her $x \in X$ için, $x = g(f(x)) < g(u)$, yani

$$x < g(u)$$

olur. Bu eşitlikte eğer $x = g(u)$ alırsak, ki g örten olduğundan bunu yapabiliriz, bir çelişki elde ederiz. Demek ki f de örtendir, yani f de bir eşyapı eşlemesidir. □

Yukardaki teoremin kanıtından aşağıdaki sonuç çıkar:

Sonuç 3.13. *X ve Y birer iyisıralama olsun. O zaman, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülen X'in bir en büyük Z başlangıç dilimi vardır ve bir tanedir. Ayrıca eğer $Z \neq X$ ise bu gömme örten olmak durumundadır, yani $Z \approx Y$'dir.*



Kanıt: Nitekim kanıtta bulunan X'in Z altkümesi tam bu başlangıç dilimidir. □

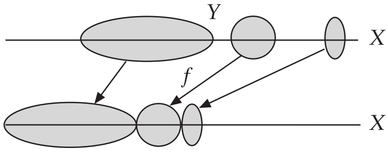
3.4.3 Gömme Teoremi (2)

Yukarda iyisıralı kümeleri birbirine gömdük. Burada iyisıralı bir kümenin heraltkümesini iyisıralı kümenin bir başlangıç dilimine gömeceğiz.

Teorem 3.14. *İyisıralı bir X kümesinin her altkümesi (iyisıralı bir küme olarak) X'in tek bir başlangıç dilimine ve tek bir biçimde gömülür.*

Teoremin Tartışması. Gömmenin biricikliği Teorem 3.8'ten çıkar ama gömmenin varlığı aynı teoremden çıkmaz.

İyisıralı küme X olsun, altkümesi de Y olsun. Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere X'in Y altkümesini sola kaydıracağız. Sorun, bu "sola kaydırma"yı matematikçe ifade edip teoremi kanıtlamak. Ve aslında teoremi kanıtlamakta karşılaşılan tek sorun bu.



Teorem, solda her zaman Y için yeterince yer olduğunu söylüyor. Yani arka kapıdan binilen bir otobüste, ayaktaki yolcular ön kapıya doğru ilerleyip yan-yana durabilirler, yolcular ön kapıya doğru ilerlediklerinde arkada yer açılır, otobüste yer kalmaması diye bir sorun yaşanmaz, yolcu sayısı sonsuz, hatta çok çok sonsuz bile olsa...

Engin deneyimime göre birinci sınıf matematik öğrencileri burada neyin kanıtlanması gerektiğini anlayamıyorlar. "Elbette Y'nin elemanlarını sola doğru itekleyebiliriz" diyorlar. Belki Y sonluysa 'elbette' de, Y sonsuz olduğunda "elbette" kanıtı hafif kaçabilir. Ayrıca, bariz bile olsa, matematikte her şeyin kanıtlanması gerekir.

Bir derste iki saatimi bu "itelemenin" hiç de bariz olmadığını, burada bir şeylerin kanıtlaması gerektiğinin anlaşılmasına harcadığımı anımsıyorum. Öğrencilerden ısrarla "sola kaydırmayı" matematikçeye çevirmelerini istedim. Sonunda buldular. "Sola kaydırmak" demek "f gömmesi artmayan bir fonksiyondur" demektir, yani her $y \in Y$ için $f(y) \leq y$ eşitsizliği geçerlidir demektir. "Y'yi sola kaydırmak" edebiyattır, oysa

$$\text{“her } y \in Y \text{ için } f(y) \leq y\text{”}$$

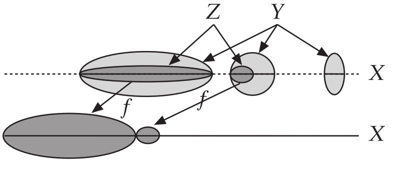
matematiktir. (Bkz. aşağıdaki kanıttaki Arasav.)

Öğretmen arkadaşlarıma yukardaki aşamayı ısrarla öğrencilere atlatmalarını öneririm. Bu alıştırma matematiğin ne olduğunu öğretme konusunda son derece faydalıdır.

Teorem 3.14'un Kanıtı: X'in altkümesine Y diyelim. Y de iyisıralı bir altkümedir (iyisıralamayı X'ten miras almıştır.) Yukarda kanıtladığımız teoreme göre ya X, Y'nin ya da Y, X'in bir başlangıç dilimine gömülür. Dolayısıyla eğer X, Y'nin başlangıç dilimine gömülmüyorsa o zaman teoremimiz kanıtlanmıştır. Ama ne yazık ki X bazen Y'nin başlangıç dilimine gömülebilir. Örnek: $X = \mathbb{N}$ ve $Y = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ise, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu X'i Y'ye (ki Y, Y'nin bir başlangıç dilimidir) gömer. Dolayısıyla bu kanıt denemesi fiyaskoyla sonuçlanır.

Bir başka yol bulmalıyız.

Biraz önce çıkardığımız sonucu (Sonuç 3.13'u) kullanacağız. O sonuçta X ile Y'nin yerlerini değiştirelim. O zaman X'in bir başlangıç dilimine gömülen Y'nin en büyük bir başlangıç dilimi vardır. Bu başlangıç dilimine Z diyelim. Z'nin Y'ye eşit olduğunu kanıtlamak istiyoruz.



Z'yi X'in başlangıç dilimine gömen gömmeye f diyelim. Z'nin Y'ye eşit olmadığını varsayıp bir çelişki elde etmeye çalışalım. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman Sonuç 3.13'e göre $f(Z) = X$ olmalı. (Kanıtı anımsayın: Yoksa f'yi bir adım daha genişleterek Z'den daha büyük bir başlangıç dilimi bulabiliriz ve bu bir çelişki olur.)

Arasav. *Her* $z \in Z$ *için* $f(z) \leq z$.
Savın Kanıtı: Savı tümevarımla kanıtlayacağız.

$$A = \{z \in Z : f(z) \leq z\}$$

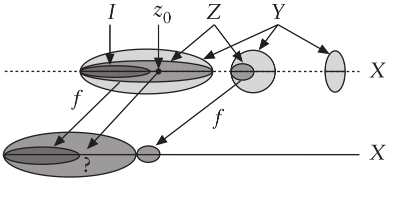
olsun. A'nın Z'ye eşit olduğunu tümevarımla kanıtlayacağız. Bir $z_0 \in Z$ için, Z'nin z_0'dan küçük elemanlarının A'da olduklarını varsayıp, z_0 elemanının A'da olduğunu kanıtlayalım. Yani

$$I = \{z \in Z : z < z_0\} \subseteq A$$

varsayımında bulunup $z_0 \in A$ ilişkisini kanıtlayalım. Ama $i^+ = i^+(Z) = z_0$ ve Önsav 3.10.ii'ye göre, $J = f(I)$ ise,

$$f(z_0) = f(i^+) = j^+.$$

Öte yandan her $z \in I \subseteq A$ için, $f(z) \leq z < z_0$. Demek ki z_0, $f(I)$'nin her elemanından daha büyük, yani $j^+ \leq z_0$. Bundan da $f(z_0) = f(i^+) = j^+ \leq z_0$ çıkar. Arasavımız kanıtlanmıştır.

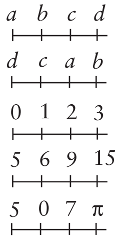


Şimdi teoremin kanıtının sonunu getirebiliriz. Eğer $Z \neq Y$ ise, o zaman $Y \setminus Z$ boşküme değildir. $Y \setminus Z$ kümesinden bir y elemanı alalım. O zaman, her $z \in Z$ için, $f(z) \leq z < y$. Dolayısıyla y, $f(Z)$'de değil. Demek ki $f(Z) \neq X$ ve bu, Sonuç 3.13'la çelişir. $\square$

Sonuç 3.15. *Eğer bir X iyisıralamasından bir Y iyisıralamasına giden sıralamayı koruyan bir fonksiyon varsa, o zaman X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir (ve bir tek) gömme vardır.* $\square$

3.5 Eşyapısallık ve Gömme

Dört elemanlı ve iyisıralı çok küme vardır. Tam 24 tane. Hepsinin resmini yapamayız (yeterince yer ve zaman yok!) ama birkaçının resmini yanda yaptık. Resimde beş tane iyisıralı (ya da tamsıralı, aynı şey) dört elemanlı küme görüyorsunuz. Elemanların soldan sağa doğru sıralandığını varsayıyoruz: Küçükler solda, büyükler sağda. Örneğin sonuncusunda $5 < 0 < 7 < \pi$, doğal sıralamadan



farklı bir sıralama belli ki. Dört elemanlı her tamsıralı kümenin elemanlarını küçükten büyüğe doğru,

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3$$

olarak dizebiliriz. Dolayısıyla 4 elemanlı her tamsıralı küme,

$$0 < 1 < 2 < 3$$

olarak tamsıralanmış $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesine benzer. Dört elemanlı çok iyisıralı küme var ama hepsi birbirine benzer. Bunların hepsi "eşyapısal"dır.

3.5.1 Eşyapısallık

X ve Y tamsıralanmış iki küme olsun. Her iki sıralamayı da $<$ simgesiyle gösterelim. Aslında X'in sıralamasını $<_X$ ile Y'nin sıralamasını $<_Y$ ile göstermek gerekiyor, çünkü, örneğin X, Y'ye eşit bile olsa üzerlerindeki sıralamalar farklı olabilir. Eğer bir $f : X \to Y$ fonksiyonu,

$$\text{her } x_1, x_2 \in X \text{ için, } x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlıyorsa, f'ye ***eşyapı fonksiyonu*** ya da ***morfizma*** adı verilir. Yani eşyapı fonksiyonları elemanların sıralamalarını değiştirmezler, matematiksel deyimle "sıralamaya saygı duyarlar".

Bir eşyapı fonksiyonu birebir olmak zorundadır, çünkü eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise ne $x_1 < x_2$ olabilir ne de $x_2 < x_1$, demek ki $x_2 = x_1$ olmak zorundadır. Bu yüzden eşyapı fonksiyonlarına ***gömme*** de denir. Eğer f ayrıca örtense, f'ye ***eşyapı eşlemesi*** ya da ***izomorfizma*** denir. Bu durumda tamsıralı X ve Y kümelerine ***eşyapısal tamsıralamalar*** ya da ***izomorfik*** denir ve $X \approx Y$ yazılır.

Eşyapısallığın ortaya çıkarmaya çalıştığı şey şu: Eğer $X \approx Y$ ise, X ve Y tamsıralamaları arasında elemanlarının adları dışında hiçbir fark yoktur.

Eğer n bir doğal sayıysa n elemanlı tüm tamsıralamalar birbirine eşyapısaldır. Nitekim, X ve Y, n elemanlı iki tamsıralama olsunlar. X ve Y'nin elemanlarını küçükten büyüğe doğru

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1}$$

ve

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1}$$

olarak tamsıralayalım. Şimdi $f(x_i) = y_i$ olarak tanımlanmış f fonksiyonu X'le Y arasında bir eşyapı eşlemesidir.

Sonsuz tamsıralamalar çok değişik olabilirler ama. Örneğin, doğal sıralanmış $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri birbirinden değişiktirler, yani aralarında eşyapı eşlemesi olamaz. Açıklayalım: Doğal sıralanmış $\mathbb{N}$ kümesi bir iyisıralamadır, örneğin $\mathbb{N}$'nin bir en küçük elemanı vardır: 0. Öte yandan diğerlerinin en küçük elemanı yoktur. Demek ki $\mathbb{N}$ diğerlerinden biriyle (doğal sıralama altında) eşyapısal olamaz. $\mathbb{Q}$ ise ***yoğun*** bir sıralamadır, yani herhangi iki elemanı arasında bir eleman vardır. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ yoğun olmadıklarından bu özellik $\mathbb{Q}$'yü $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$'den ayrıştırır. Aynı nedenden $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{Z}$ eşyapısal olamaz. $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ arasındaki ayrımı görmek için sıralamalar dünyasından çıkmamız lazım. Doğal sıralanmış $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında sıralama bakımından “pek” bir ayrım yoktur. (“Pek bir ayrım yoktur” tümcesine matematiksel bir anlam verilebilir ama konumuz bu değil; okur bu tümceyi hafife alarak okusun.) $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ sıralı kümeleri arasındaki ayrım sıralamadan değil “eleman sayısından” kaynaklanır: $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzluktadır, ama $\mathbb{R}$ sayılabilir sonsuzlukta değildir, dolayısıyla $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ kümeleri arasında, bırakın bir eşyapı eşlemesini, eşleme bile yoktur!

Şimdi eşyapı fonksiyonlarının ve eşyapısallığın birkaç özelliğini görelim.

E1. Eğer X, Y ve Z tamsıralı üç kümeyse ve

$$f : X \to Y \text{ ve } g : Y \to Z$$

birer eşyapı eşlemesiyse (fonksiyonuysa), o zaman

$$g \circ f : X \to Z$$

bir eşyapı eşlemesidir (fonksiyonudur) elbette. Sonuç: $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$ olur.

E2. Eğer X ve Y tamsıralı iki kümeyse ve

$$f : X \to Y$$

bir eşyapı eşlemesiyse , o zaman

$$f^{-1} : Y \to X$$

bir eşyapı eşlemesidir. Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır. Sonuç: $X \approx Y$ ise $Y \approx X$ olur.

E3. Eğer X tamsıralı bir kümeyse, $\mathrm{Id}_X(x) = x$ olarak tanımlanmış,

$$\mathrm{Id}_X : X \to X$$

özdeşlik fonksiyonu bir eşyapı eşlemesidir. Sonuç: $X \approx X$'tir.

Bu üç özelliği daha simgesel bir yazıyla yazalım:

E1. $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$.

E2. $X \approx Y$ ise $Y \approx X$.

E3. $X \approx X$.

Görüldüğü üzere tamsıralı kümeler arasında tanımladığımız $\approx$ ilişkisi sanki gibi davranıyor. Ama eşitlik olmadığı gibi, denklik ilişkisi bile değildir çünkü tamsıralı kümelerden oluşan bir küme yoktur. Birazdan, iyisıralıeşitlikmiş kümeler arasında, tamsıralama gibi davranan bir $\preccurlyeq$ ilişkisi bulacağız. (Acele davranıp tanımı hemen verelim: X'ten Y'ye giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, bunu $X \preccurlyeq Y$ olarak göstereceğiz.)

Tamsıralanmış bir kümeden gene kendisine giden eşyapı eşlemelerine ***eşyapı eşleşmesi*** ya da ***otomorfizma*** adı verilir. Örneğin Id_X her zaman bir eşyapı eşleşmesidir.

X'in eşyapı eşleşmeleri kümesi $\mathrm{Aut}\, X$ olarak yazılır. Yukardaki üç özellikten şunlar çıkar:

1. $f, g \in \mathrm{Aut}\, X$ ise $f \circ g \in \mathrm{Aut}\, X$.
2. $f \in \mathrm{Aut}\, X$ ise $f^{-1} \in \mathrm{Aut}\, X$.
3. $\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Aut}\, X$.

Bir tamsıralamanın tüm eşyapı eşlemelerini bulmak, o tamsıralamayı iyice anlamak demektir. Birkaç örnek verelim:

Örnekler.

3.1. X, tamsıralanmış sonlu bir kümeyse, $\mathrm{Aut}\, X = \{\mathrm{Id}_X\}$.

3.2. $\mathrm{Aut}\, \mathbb{N} = \{\mathrm{Id}_\mathbb{N}\}$.

3.3. Daha genel olarak, eğer X iyisıralanmış bir kümeyse, Önsav 3.11'ye göre $\mathrm{Aut}\, X = \{\mathrm{Id}_X\}$ olur.

3.4. $\mathrm{Aut}\, \mathbb{Z} = \{f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z} \text{ ve } f_a(x) = x + a\}$.

3.5. $\mathrm{Aut}\, \mathbb{Q}$ çok daha karmaşık bir kümedir. Eğer $a, b \in \mathbb{Q}$ ve $a > 0$ ise,

$$f_{a,b}(x) = ax + b$$

kuralıyla tanımlanmış $f_{a,\, b} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonlarının herbiri $\mathbb{Q}$'nün bir eşyapı eşleşmesidir. Ama $\mathbb{Q}$'nün çok daha fazla eşyapı eşleşmesi vardır. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } x \notin (0,\, 1) \text{ ise} \\ \frac{2x}{x+1} & \text{eğer} x \in (0,\, 1) \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon bir eşyapı eşlemesidir. (Henüz işlemediğimiz kardinal sayıları bilenler için: $\mathbb{Q}$'nün eşyapı eşlemesi sayısı olabilecek en yüksek sayıda, yani $2^{\aleph_0}$ tanedir.)

Alıştırmalar.

3.10. Tüm bir elemanlı kümeleri içeren bir kümenin olamayacağını kanıtlayın. (İpucu: Aksi halde tüm kümeler kümesi olurdu!) Bundan, tüm tamsıralı ya da iyisıralı kümeleri içeren bir kümenin olamayacağını çıkarın.

3.11. Eğer X ve Y iyisıralı kümelerse, X'le Y arasında en fazla bir tane eşyapı eşlemesi olabilir.

3.5.2 İyisıralamaları Birbirine Gömmek

X ve Y iki iyisıralı küme olsun. X'ten Y'ye giden bir eşyapı fonksiyonu varsa (ki bunlara gömme dedik), Sonuç 3.15'a göre X'ten Y'nin bir başlangıç dilimine giden bir ve bir tane gömme vardır.

Eğer X iyisıralaması Y iyisıralamasının içine gömülüyorsa, bunu $X \preccurlyeq$ olarak gösterelim. Her X, Y, Z iyisıralaması için,

E4. $X \preccurlyeq X$,

E5. $X \preccurlyeq Y$ ve $Y \preccurlyeq Z$ ise $X \preccurlyeq Z$,

E6. $X \preccurlyeq Y$ ve $Y \preccurlyeq X$ ise $X \approx Y$

olur.

Bunlardan ilk ikisini zaten biliyorduk. Üçüncüsü Sonuç 3.12'den dolayı doğru.

E4, E5, E6 önermeleri, dikkat ederseniz, $\preccurlyeq$ ilişkisinin iyisıralı kümeler üzerinde bir tür sıralama olduğunu söylüyor. Tek sorun iyisıralamaların bir küme oluşturmaması.

Teorem 3.8'ün birinci kısmı, $\preccurlyeq$ ilişkisinin iyisıralı kümeleri tamsıraladığını söylüyor: Her X ve Y iyisıralaması için,

E7. Ya $X \preccurlyeq Y$ ya da $Y \preccurlyeq X$.

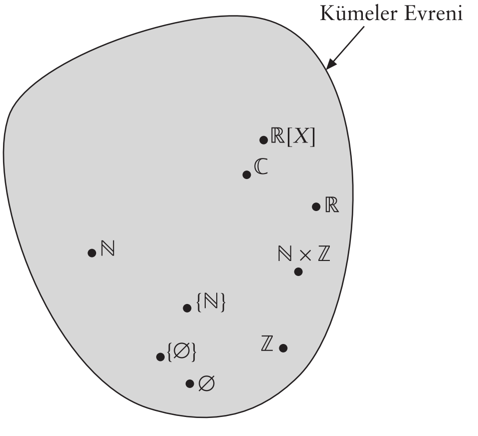
Kısım III

Ordinaller

4. Ordinaller I

4.1 Ordinallerin İşlevi

Kümeler topluluğunun bir küme olamayacağını Bertrand Russell Paradoksu'ndan biliyoruz [SKK]. Küme olmayan bir şeye küme diyemeyeceğimize göre, tüm kümeler topluluğuna bir başka ad bulmalıyız. Bu topluluğa ***kümeler evreni*** ya da kısaca ***evren*** diyelim.



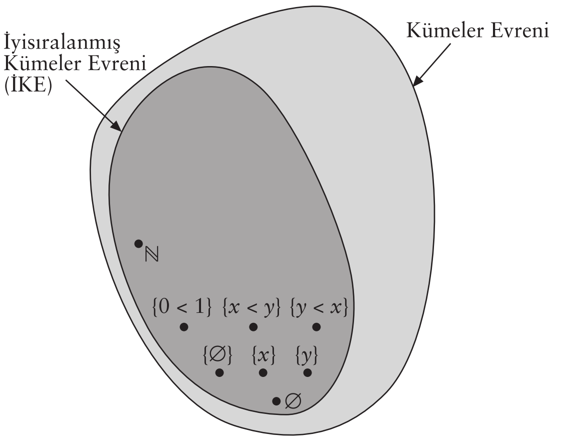
Muazzam bir şey olan evreni yukarda resmettik. (Zaten küme olmamasının nedeni de bu muazzamlığı! Küme olmak için çok büyük. O kadar büyük küme mi olurmuş!) İçine de bildiğimiz birkaç küme yerleştirdik.

İyi sıralanmış her küme (sıralamasıyla birlikte) bu evrenin içinde yer alıyor. Çünkü ne de olsa, iyi sıralanmış bir küme, bazı özellikleri sağlayan bir

$$A \subseteq X \times X$$

altkümesi için (X, A) biçiminde yazılan bir çifttir ve [Sİ]'den de bildiğimiz üzere her çift bir kümedir.

İyisıralanmış kümelerin topluluğu da küme olamaz, çünkü tek elemanlı her küme iyisıralı bir küme olduğundan, eğer iyisıralanmış kümeler topluluğu bir küme olsaydı, Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu'na göre, tek elemanlı kümeler topluluğu da bir küme olurdu, ama o zaman da bu kümenin bileşimi de, ki bu tüm kümeler evrenidir, Bileşim Aksiyomu'na göre bir küme olurdu.

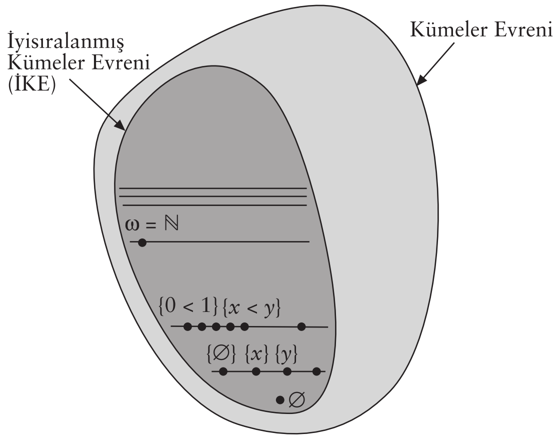


İyisıralanmış kümeler topluluğuna ***iyisıralanmış kümeler evreni*** (İKE) diyelim. Bunu yukarda resmettik.

Bütün iyisıralanmış kümeleri koyu gri renkteki İKE'nin içine koymalıyız. Dolayısıyla tüm tek elemanlı kümeler, bedavadan iyisıralanmış olduklarından, İKE'nin içinde olmalılar. Ayrıca birbirinden farklı her x ve y kümesi için, $\{x, y\}$ kümesinden İKE'nin içinde iki tane olmalı, biri $x < y$ iyisıralaması için, diğeri de $y < x$ iyisıralaması için. Bu iki iyisıralanmış kümeyi resimde $\{x < y\}$ ve $\{y < x\}$ olarak gösterdik. Genel olarak, $x_0, \ldots, x_{n-1}$ birbirinden farklıysa, $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ kümesi $n!$ değişik biçimde tam (ya da iyi, farketmez) sıralandığından, bu küme İKE'nin içinde tam $n!$ değişik biçimde yer alır.

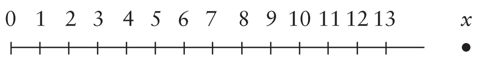
Tahmin edildiğini sandığım üzere, aslında İKE'ye kümeleri değil, kümelerle birlikte kümelerin elemanlarının iyisıralanmış hallerini koyuyoruz. Yani İKE topluluğunda X kümeleri değil, $(X, <)$ iyisıralamaları var, ama biz kolaylık olsun diye, sıralamayı kümenin bir parçasıymış gibi addedip $(X, <)$ yerine yanlış da olsa X yazacağız.

İyisıralanmış kümeleri İKE'nin içine yerleştirirken, küçükleri aşağıya büyükleri yukarıya yazalım, yani eğer iyisıralanmış bir Y kümesi sıralaması bozulmadan X'in içine gömülüyorsa, yani Y'den X'e giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, (ve yine) yani Bölüm 3.5.2'deki yazılımla $Y \preccurlyeq X$ ise, o zaman Y'yi görsel olarak X'in altına yazalım. Eğer $Y \preccurlyeq X$ ve $X \preccurlyeq Y$ ise, yani $X \approx Y$ ise (Bölüm 3.5.2. Özellik E6), X ve Y'yi aynı satıra yazalım. Örneğin, tüm tek elemanlı kümeler aynı satıra yazılsın.



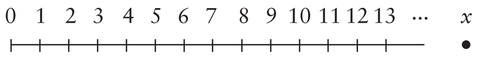
Böylece iyisıralanmış kümeleri kat kat sıralarız. İyisıralanmış küme ne kadar büyükse o kadar yukarı yazılır. Eşyapısal olanları da aynı kata yerleştirdik.

Zemin katta $\varnothing$ var elbette, boşküme zemin katta tek başına oturuyor. Bunun bir üstündeki birinci kat oldukça kalabalık, birinci katta bir elemanlı tüm kümeler var. Bir sonraki katta iki elemanlı kümeler var ama bu kümelerin her biri iki kez yer alıyor. n-inci katta n tane elemanı olan kümeler var, her biri n! kez yer alıyor. Sonlu kümeler bittiğinde karşımıza $\mathbb{N}$ (doğal sıralamayla) ve $\mathbb{N}$'ye eşyapısal olan iyisıralamalar çıkıyor. Doğal olarak sıralanmış $\mathbb{N}$ kümesini, ω olarak göstermenin bir gelenek olduğunu ve bu geleneğe uyacağımızı söylemiştik.



ω iyisıralaması

ω'nın oturduğu katın bir üst katında ω'nın en sonuna tek bir eleman getirilerek oluşan iyisıralamalar oturuyor. ω'da olmayan herhangi bir x kümesi alıp x'i ω'nın en sonuna en büyük eleman olarak koyalım. Böylece $\omega \cup \{x\}$ kümesi iyisıralanır. (Bkz. Altbölüm 3.2.1.) Bu yeni iyisıralamada x, tüm doğal sayılardan daha büyüktür. Ayrıca ω'nın bir üst katında oturan tüm iyisıralamalar bu biçimdedirler.



ω'nın üstkatındaki bir iyisıralama.
x, ω'da olmayan bir kümedir ve ω'nın en sonuna eklenmiştir.

Doğal sayılar da kendi aralarında doğal olarak sıralanmışlardır. ω, ω'nın bir elemanı olmadığından (bkz. Teorem 4.1), burada x yerine ω alabiliriz. Yani

$$S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$$

iyisıralaması, ω'nın oturduğu katın bir üst katında oturuyor.

Teorem 4.1. *$\omega \notin \omega$.*

Kanıt: $\omega \in \omega$ olsa, ω bir n doğal sayısına eşit olur. O zaman da

$$S(n) \in \omega = n$$

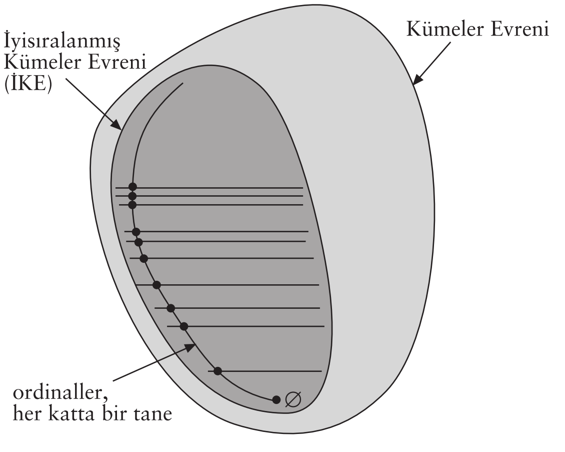
olur [Sİ]. Bu da $S(n) < n$ demektir. Ama $n < n + 1 = S(n)$ eşitsizlizliğinden dolayı $S(n) < n$ olamaz. □

Her katın bir üst katı vardır. Eğer X bir iyisıralamaysa, X'te bulunmayan bir Y kümesini (ki vardır öyle bir küme, yoksa X tüm kümeleri içerirdi) alıp X'e eleman olarak ekleyelim ve Y'yi X'in tüm elemanlarından daha büyük yapalım. Böylece,

$$X \cup \{Y\}$$

kümesi iyisıralanmış olur ve bu iyi sıralı küme X'in oturduğu katın hemen bir üstünde oturur.

Eğer $X \notin X$ ise (ki eğer gerekmedikçe kabul etmek istemediğimiz Temellendirme Aksiyomu'nu kabul edersek $X \notin X$ olmak zorundadır, bkz [Sİ]), o zaman $Y = X$ alabiliriz ve böylece iyisıralanmış $S(X) = X \cup \{X\}$ kümesini X'in bir üst katında buluruz.



Şimdi önümüzdeki birkaç bölümün ana hedefini söyleyelim: Her iyisıralanmış kümeler katından bir ve sadece bir tane temsilci seçeceğiz ve bunu olabildiğince doğal biçimde yapacağız. Bu temsilcilere ***ordinal*** adını vereceğiz.

Her katta en fazla bir ordinal olacak. Bunu kanıtlaması kolay. Ve her katta en az bir ordinal olacak. Bunu kanıtlamak daha zor. Hatta şu anki halimizle imkânsız. Bunu kanıtlamak için adına ***Yerleştirme Aksiyomu*** diyeceğimiz yeni bir aksiyoma ihtiyacımız olacak. Bu aksiyoma neden gereksindiğimizi anlatmaya çalışacağız, yani okura bu gereksinimi hissettirmeye çalışacağız.

4.2 Ordinaller

Bir α kümesine ordinal denmesi için iki koşul gerçekleşmelidir. Koşullardan ilki şu.

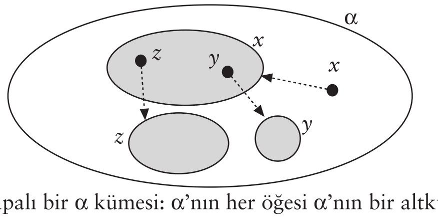
Ord1. *α'nın her elemanı, aynı zamanda α'nın bir altkümesidir.*

Bu koşul, tam tamına,

$$(y \in x \in \alpha) \Rightarrow y \in \alpha$$

diyor, yani α'nın elemanlarının elemanları α'nın elemanlarıdır diyor, yani α'nın her elemanı α'nın altkümesidir diyor.

Ord1 özelliği sağlayan kümelere $\in$-***kapalı***[1] denir. Biraz zor gerçekleşen bir koşul olduğu düşünülebilir, ama boşkümenin (yani 0'ın)



$\in$-kapalı bir α kümesi: α'nın her öğesi α'nın bir altkümesi

$\in$-kapalı olduğu çok bariz. Aslında her doğal sayı, [Sİ]'de tanımlandığı biçimde, $\in$-kapalıdır. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ de (yani ω da) $\in$-kapalıdır. Bunların kanıtını birazdan vereceğiz.

Eğer $x = \{y\}$ ve $y = \{x\}$ ise $\{x, y\}$ kümesi $\in$-kapalıdır[2].

Kolayca görüleceği üzere, $\in$-kapalı bir α kümesinde

$$x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_1 \in \alpha$$

koşulları

$$x_n \in \alpha$$

koşulunu gerektirir. $\in$-kapalı kümelerin bize gerekecek birkaç özelliği daha var:

Önsav 4.2. *Elemanları $\in$-kapalı olan bir kümenin bileşimi ve kesişimi de $\in$-kapalıdır.*

---

[1] İngilizcesi $\in$-complete.

[2] Öte yandan eğer Temellendirme Aksiyomu doğruysa $x = \{y\}$ ve $y = \{x\}$ eşitliklerini sağlayan x ve y kümeleri olamaz. (Bkz. [Sİ].)

Kanıt: A, elemanları $\in$-kapalı kümeler olan bir küme olsun. $y \in x \in \cup A$ varsayımını yapalım. O zaman, $\cup A$ kümesinin tanımı gereği, bir $\alpha \in A$ için, $y \in x \in \alpha$ olur. Ama α kümesi $\in$-kapalı olduğundan, bundan $y \in \alpha$ çıkar. Demek ki

$$y \in \alpha \subseteq \bigcup A,$$

yani $y \in \cup A$. Böylece $\cup A$ bileşiminin $\in$-kapalı olduğu kanıtlandı. $\cap A$ için kanıt aynıdır ve okura bırakılmıştır. □

Not 1. x herhangi bir küme olsun. $\varnothing$, x'in $\in$-kapalı bir altkümesidir. x'in tüm $\in$-kapalı altkümelerinin bileşimi x'in en büyük $\in$-kapalı altkümesidir.

Not 2. x herhangi bir küme olsun. x'i altküme olarak içeren $\in$-kapalı bir küme olduğunu (yani x'in $\in$-kapalı bir üstkümesi olduğunu) varsayalım. O zaman, x'in tüm $\in$-kapalı üstkümelerinin kesişimi x'in en küçük $\in$-kapalı üstkümesidir. (Bu kümelerin kesişimi neden bir kümedir?)

Not 3. x herhangi bir küme olsun. x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı kümeyi bulmaya kalkışalım. $A_0 = \{x\}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için, A_n tanımlanmışsa,

$$A_{n+1} = A_n \cup (\cup A_n)$$

olsun. Tanımdan dolayı A_n'nin elemanları A_{n+1}'in hem elemanları hem de altkümeleri. Şimdi $n = 0, 1, \ldots$ için A_n kümelerinin

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

bileşimini alalım. Eğer bu bileşim bir kümeyse, x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı kümedir. (Alıştırma.) Bölüm 5'de sözünü edeceğimiz Yerleştirme Aksiyomu kullanılarak $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ topluluğunun küme olduğu gösterilebilir.

$\in$-kapalı kümeler hakkında birkaç basit olgu kanıtlayalım. Eğer α bir kümeyse, $S(\alpha)$'nın

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

larak tanımlandığını anımsayalım [Sİ].

Önsav 4.3. *Eğer α kümesi $\in$-kapalıysa, $S(\alpha)$ da $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ ve $y \in x$ olsun.

Eğer $x \in \alpha$ ise, α bir $\in$-kapalı küme olduğundan, $y \in \alpha$ olmalı. Ama ayrıca $\alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$. Demek ki $y \in S(\alpha)$.

Eğer $x \notin \alpha$ ise, $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ olduğundan, $x = \alpha$ olmalı. O zaman da $y \in x = \alpha$. □

Sonuç 4.4. *Her doğal sayı $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: $0 = \varnothing$ olduğundan 0 sayısı $\in$-kapalıdır. Önsav 4.3 tümevarımla kanıt için zemini hazırlamıştır. □

Sonuç 4.5. *Doğal sayılar kümesi $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: Her n doğal sayısı $S(n)$'nin yani $n+1$'in elemanı olduğundan,

$$\mathbb{N} = \cup\mathbb{N}.$$

İstediğimiz Sonuç 4.4'ten ve Önsav 4.2'den çıkar. □

Alıştırmalar.

4.1. Eğer $a \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi $\in$-kapalıysa, o zaman ya $a \in \mathbb{N}$ ya da $a = \mathbb{N}$ olduğunu kanıtlayın.

4.2. x herhangi bir küme olsun. $A_0 = \{x\}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_{n+1} = A_n \cup (\cup A_n)$$

olsun. $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ bileşiminin bir küme olduğunu varsayıp, bu bileşimin x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı küme olduğunu kanıtlayın.

Bir α kümesine ordinal denmesi için ikinci koşul şu:

Ord2. *α kümesi $\in$ ikili ilişkisi tarafından iyisıralanmıştır.*

Ord2 aşağıdaki önermelerin topuna denktir:

Ord2a. *Eğer $x \in \alpha$* ise *$x \notin x$.*

Ord2b. *Eğer x, y, $z \in \alpha$ ve $z \in y$ ve $y \in x$ ise $z \in x$.*

Ord2c. *Eğer x, $y \in \alpha$ ise ya $x \in y$ ya $x = y$ ya da $y \in x$.*

Ord2d. *Eğer A, α'nın boş olmayan bir altkümesiyse, öyle bir $a \in A$ vardır ki, her $b \in A$ için ya $a \in b$ ya da $a = b$.*

Ord1 ve Ord2 özelliklerini sağlayan bir kümeye ***ordinal*** denir.

Herhangi bir doğal sayı kümesi Ord2'yi sağladığından [Sİ], Sonuç 4.4 ve 4.5'ten her doğal sayının ve $\mathbb{N}$'nin ordinal oldukları çıkar.

Not 1. Ord2a, sıralama dilinde "x, x'ten küçük değil" diye okunur. Eğer Temellendirme Aksiyomu'nu doğru kabul edersek, hiçbir x kümesi için $x \in x$ olamayacağından bunu söylemeye gerek yoktur, zaten doğrudur [Sİ]. Ayrıca

Ord2a'dan $\alpha \notin \alpha$ çıkar, çünkü aksi halde $\alpha \in \alpha$ olurdu ve Ord2a'ya göre $\alpha \notin \alpha$ olurdu!

Not 2. Ord2b, $\in$ ikili ilişkisinin geçişli bir ilişki olduğunu söylüyor. Sıralama dilinde bu şöyle ifade edilir: α'nın her x, y, z elemanı için, z, y'den ve y de x'ten küçükse, o zaman z, x'ten küçüktür. Demek ki Ord2a ve 2b, α'nın $\in$ ilişkisi tarafından sıralandığını söylüyor. Dolayısıyla, bir ordinalin x ve y elemanları için, "$x < y$" ve "$x \in y$" ifadelerini ayırt etmeksizin kullanabiliriz. Demek ki ilk okuyuşta tuhaf gelebilecek ama yaşamı çok kolaylaştıran ve alışılması gereken şu önerme doğrudur: *Bir ordinalin her elemanı, kendinden küçük elemanların kümesidir.*

Eğer α bir ordinalse, α, Ord1'i sağladığından, Ord2b'de y ve z'nin α'nın elemanları olduğunu söylemeye gerek yoktur, bu zaten zorunlu olarak öyledir.

Eğer α bir ordinalse, Ord2b, ayrıca α'nın elemanlarının $\in$-kapalı olduklarını söylüyor. Buradan hareketle bir ordinalin elemanlarının da ordinal olduklarını kanıtlamak çok basittir. Birazdan bunu kanıtlayacağız.

Not 3. Ord2d, α'nın iyisıralandığını söylüyor. Nitekim, sıralamaca dilinde, Ord2d'de belirtilen a, A'nın en küçük elemanıdır.

Not 4. Ord2c, $\in$ ikili ilişkisinin α'yı tamsıraladığını söylüyor. Eğer Ord2d doğruysa, Ord2c'ye gerek yoktur, bu zaten doğrudur; bunu görmek için Ord2d'deki A altkümesini $\{x, y\}$ almak yeterlidir.

Kanıtların satır sayısında tasarruf sağlamak amacıyla bir kümeyi ordinal yapan en az sayıda özelliği yazalım:

Ord1. *α'nın her elemanı, aynı zamanda α'nın bir altkümesidir.*

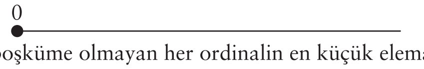
Ord2a. *Eğer $x \in \alpha$ ise $x \notin x$.*

Ord2b′. *Eğer $x \in \alpha$ ise ve $z \in y$ ve $y \in x$ ise o zaman $z \in x$.*

Ord2d. *Eğer A, α'nın boş olmayan bir altkümesiyse, öyle bir $a \in A$ vardır ki, her $b \in A$ için ya $a \in b$ ya da $a = b$.*

4.3 Ordinallerimizi Tanıyalım

$\varnothing$'den, yani 0'dan değişik bir α ordinalinin ($\in$ ilişkisi için elbette, başka bir sıralama yok) bir en küçük elemanı olmalı. Nedir bu eleman? Bu en küçük elemana a dersek, $a \cap \alpha = \varnothing$ olmalı, çünkü $a \cap \alpha$'nın bir elemanı a'dan küçük olur. Öte yandan α ordinal olduğu için, $a \subseteq \alpha$. Demek ki $a = a \cap \alpha = \varnothing = 0$, yani ordinallerin en küçük elemanı boşkümedir, yani 0'dır.



0, boşküme olmayan her ordinalin en küçük elemanıdır.

İlk kez gören için, bu tür akıl yürütmeler biraz şaşırtıcı olabilir. Zamanla alışılıyor.

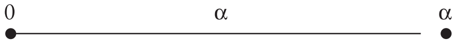
Birazdan bir ordinalin ikinci elemanının, eğer varsa elbet, 1 olduğunu kanıtlayacağız. 1'den sonraki eleman da 2 olmalı...

Eğer x bir α ordinalinin bir elemanıysa ama en büyük elemanı değilse, o zaman, α iyisıralı olduğundan, α'da x'ten hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemanı teşhir edelim. x'ten hemen sonra gelen elemana y diyelim. Küçüklüğün tanımından dolayı, y, kendisinden küçük elemanların (yani kendi elemanlarının!) kümesidir.

y, x'ten hemen sonra gelen eleman olsun. y, kendisinden küçük elemanlar kümesidir. Bu elemanlar da ya x'ten küçüktür ya da x'e eşittir. Demek ki $y = x \cup \{x\} = S(x)$.

Bu elemanlar da ya x'e eşittir ya da x'ten küçüktür. x'ten küçük olanlar tam tamına x'in elemanları olduğundan, $y = x \cup \{x\}$ buluruz.

Teorem 4.6. *Eğer α bir ordinalse, $S(\alpha)$ da bir ordinaldir.*



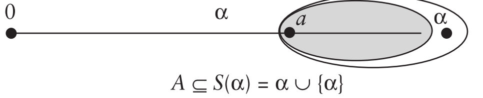
$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Kanıt: Önsav 4.3'de $S(\alpha)$'nın Ord1'i sağladığını gösterdik.

Ord2a'nın Kanıtı: $x \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ olsun. Diyelim $x \in x$. α bir ordinal olduğundan, x, α'da olamaz, çünkü Ord2a'ya göre bir ordinalde $x \in x$ ilişkisi yasak. Demek ki $x = \alpha$. Dolayısıyla $\alpha \in \alpha$. Ama α bir ordinal olduğundan, α'nın bir elemanı (bu eleman α bile olsa!) kendi elemanı olamaz. (Bu da alışık olmadığımız ilginç kanıtlardan!)

Ord2b'nin Kanıtı: $x \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ olsun ve $z \in y$ ve $y \in x$ ilişkilerini varsayalım. Eğer $x \in \alpha$ ise, α bir ordinal olduğundan $z \in x$. Eğer $x \notin \alpha$ ise, $x = \alpha$ olmak zorunda. Demek ki $z \in y$ ve $y \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan bundan $z \in \alpha = x$ çıkar.

Ord2d'nin Kanıtı: A, $S(\alpha)$'nın boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap \alpha = \varnothing$ ise, o zaman $A = \{\alpha\}$ olmak zorunda ve $a = \alpha$ görevi görür.



$A \subseteq S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Öte yandan eğer $A \cap \alpha \neq \varnothing$ ise, o zaman

$$A \cap \alpha$$

kümesinin ($\in$ için elbette, başka sıralama yok) bir en küçük a elemanı vardır. a, A'nın en küçük elemanıdır. $\square$

Bu teoreme göre, bir ordinalin en küçük elemanı 0 olduğundan, 0'dan sonra gelen ilk eleman 1'dir. Sonra 2, 3, 4 gelir ve eleman kaldığı sürece bu böylecene devam eder.

4.4 Temel Olgular

Aşağıda kanıtlayacağımız teoremler ordinaller hakkında temel ve basit olgulardır. Ordinalleri hissetmenizde etkili olacaklarını umuyoruz.

Teorem 4.7. *Bir ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

Kanıt: α bir ordinal ve $x \in \alpha$ olsun. Ord2b'ye göre x, Ord1'i sağlar. Şimdi $\in$ ilişkisinin x'i iyisıraladığını kanıtlayalım. $x \subseteq \alpha$ olduğundan, x, α'yı iyisıralayan ilişki tarafından iyisıralanır. (Her iyisıralı kümenin altkümesi, üstkümeyi sıralayan ilişki tarafından iyisıralanmıştır.) Demek ki $\in$ ikili ilişkisi x'i de iyisıralar. $\square$

Teorem 4.8. *Eğer x bir α ordinalinin başlangıç dilimiyse, ya $x = \alpha$ ya da $x \in \alpha$'dır. Demek ki bir ordinalin bir başlangıç dilimi bir ordinaldir.*

Kanıt: α bir ordinal olsun ve x, α'nın bir başlangıç dilimi olsun. Eğer $x \neq \alpha$ ise a, $\alpha \setminus x$'in en küçük elemanı olsun. O zaman

$$x = \{y \in \alpha : y < a\} = \{y \in \alpha : y \in a\} = a \in \alpha$$

olmalıdır. $\square$

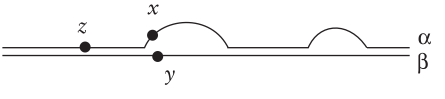
Teorem 4.9. *β, α ordinalinin bir altkümesi olsun. β'nın bir ordinal olması için β'nın α'nın bir başlangıç dilimi olması gerek ve yeterdir.*

Kanıt: β, α'nın başlangıç dilimiyse, sonuç bir önceki teoremde verildi. Şimdi α ve β birer ordinal ve $\beta \subseteq \alpha$ olsun. Her iki kümede de sıralamanın $\in$ ikili ilişkisi tarafından verildiğini aklımızda tutalım. β bir ordinal olduğundan, β'nın bir elemanından küçük bir eleman β'nın bir elemanıdır. Bu da β'nın α'nın bir başlangıç dilimi olduğunu gösterir. $\square$

4.5 Derin Olgular

Teorem 4.10. *Eğer α ve β birer ordinalse, ya $\alpha \in \beta$ ya $\alpha = \beta$ ya da $\beta \in \alpha$'dır.*

Kanıt: Diyelim $\alpha \cap \beta$, hem α'nın hem de β'nın özaltkümesi. Bir çelişki elde edeceğiz. x, $\alpha \setminus \alpha \cap \beta$'nın ve y, $\beta \setminus \alpha \cap \beta$'nın en küçük elemanı olsunlar. $x = y$ eşitliğini kanıtlayabilirsek, işimiz iş, çünkü o zaman $x = y \in \alpha \cap \beta$ olacak ve istediğimiz çelişkiyi elde edeceğiz.



x ve y'nin rolleri simetrik olduğundan, $x \subseteq y$ ilişkisini kanıtlamak yeterli.

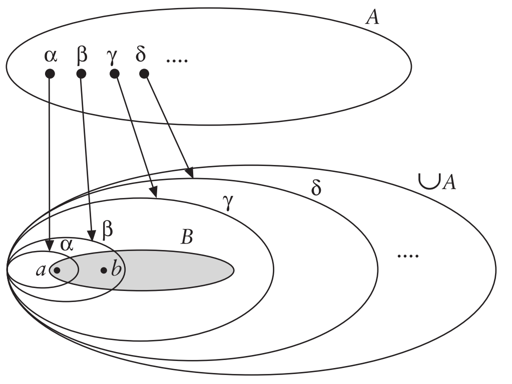
$z \in x$ olsun. Demek ki α ordinalinde $z < x$ eşitsizliği geçerli. x elemanı $\alpha \setminus \alpha \cap \beta$'nın en küçük elemanı olduğundan, bundan $z \in \alpha \cap \beta$ çıkar. Dolayısıyla $z \in \beta$. Şimdi, ya $z = y$ ya $z \in y$ ya da $y \in z$. Bakalım hangisi. Birinci şıkta, $z = y \notin \alpha \cap \beta$, imkânı yok! Üçüncü şıkta, $z \in x$ ilişkisinden dolayı $y \in x$ elde ederiz, ki bundan da $y \in \alpha \cap \beta$ çıkar, gene çelişki. Dolayısıyla sadece ikinci şık mümkün: $z \in y$. Böylece $x \subseteq y$ içindeliğini elde etmiş oluruz. □

Teorem 4.11. *Boşküme olmayan herhangi bir ordinaller kümesinin en küçük elemanı vardır.*

Kanıt: A, bir ordinaller kümesi olsun. $\alpha \in A$ olsun. Eğer α, A'nın en küçük elemanı varsa sorun yok. Bundan böyle α'nın A'nın en küçük elemanı olmadığını varsayalım. O zaman $\alpha \cap A$ boşküme değildir. Demek ki, bir ordinalin boş olmayan bir altkümesi olduğundan, $\alpha \cap A$ kümesinin en küçük elemanı vardır. Bu eleman elbette A'nın en küçük elemanıdır. □

Teorem 4.12. *Boşküme olmayan herhangi bir ordinaller kümesinin bileşimi ve kesişimi de bir ordinaldir.*

Kanıt: Kesişimin ordinal olduğu Teorem 4.12'den belli: Kesişim, ordinaller kümesinin en küçük elemanına eşit. Bileşimin bir ordinal olduğunu kanıtlayalım.



A, ordinaller kümesi. Aslında şekil yanlış, çünkü, örne¼n, α, β'nın bir elemanı olmalıydı. Doğru şekil kafa karıştırıcı demeye cesaret edemeyiz de, çok karmaşık.

Her $\alpha \neq \beta \in A$ için, bir önceki teoreme göre, ya $\alpha \in \beta$ ya da $\beta \in \alpha$. Bunu kullanacağız.

$x \in \cup A$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$ olur. Ama α ordinal olduğundan $x \subseteq \alpha$. Öte yandan, $\alpha \subseteq \cup A$. Demek ki $x \subseteq \cup A$. Ord1 kanıtlandı.

Ord2a'yı kanıtlayalım. Bu kolay: $x \in \cup A$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan $x \notin x$.

Sıra Ord2b'de. Bu da kolay: $x \in \cup A$ ve $z \in y \in x$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan $z \in x$.

Şimdi yukardaki teoremi kullanarak Ord2d'yi kanıtlayacağız. $\varnothing \neq B \subseteq \cup A$ olsun. O zaman A'da $\alpha \cap B \neq \varnothing$ önermesini sağlayan bir α vardır. α bir ordinal olduğundan, α'nın $\alpha \cap B$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana a diyelim. Bu a'nın B'nin en küçük elemanı olduğunu iddia ediyorum. $b \in B \setminus \{a\}$ olsun. Belli bir $\beta \in A$ için, $b \in \beta$. Teorem 4.7'ya göre a ve b birer ordinal. Teorem 4.10'a göre ya $a \in b$ ya da $b \in a$. İkinci durumda, $b \in a \in \alpha$ olacağından, $b \in \alpha$, yani $b \in \alpha \cap B$ ve bu da a'nın $\alpha \cap B$'nin en küçük elemanı olmasıyla çelişir. Demek ki $a \in b$ ve a, B'nin en küçük elemanı. □

Teorem 4.13. *Sıralı küme olarak eşyapısal olan iki ordinal birbirine eşittir.*

Kanıt: α ve β, $f \colon \alpha \to \beta$ eşyapısal eşlemesiyle eşyapısal olan iki ordinal olsun. O zaman, Teorem 4.10'a göre ya $\alpha \subseteq \beta$ ya da $\beta \subseteq \alpha$. Birincisini varsayabiliriz. O zaman, Teorem 4.9'e göre, $i(x) = x$ formülüyle tanımlanmış $i : \alpha \to \beta$ fonksiyonu da α'dan β'nın α başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 3.11'ya göre $f = i$. Demek ki $\beta = f(\alpha) = i(\alpha) = \alpha$. □

Sonuç 4.14. *İyisıralı bir küme en fazla bir ordinale ve tek bir eşyapı eşlemesiyle eşyapısal olabilir.*

Kanıt: Eğer A iyisıralı (ya da sadece sıralı) kümesi α ve β ordinalleriyle eşyapısalsa, α ve β da birbiriyle eşyapısaldır, dolayısıyla yukardaki teoreme göre $\alpha = \beta$'dır. Eşyapısal eşlemenin biricikliği Önsav 3.11'dan çıkıyor. $\square$

İlerde her iyisıralı kümenin bir ordinalle eşyapısal olduğunu kanıtlayacağız ama bunun için daha güçlü bir kümeler kuramına ihtiyaç duyacağız.

Teorem 4.15. *Eğer bir α ordinalinden bir β ordinaline giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, o zaman ya $\alpha = \beta$ ya da $\alpha \in \beta$ olur. Dolayısıyla $\alpha \subseteq \beta$ ve $\alpha \leq \beta$ olur.*

Kanıt: $f : \alpha \to \beta$ sıralamayı koruyan bir fonksiyon olsun. Teorem 3.14'a göre $f(\alpha)$'nın β'nın bir başlangıç dilimi olduğunu varsayabiliriz. Teorem 4.8'ye göre ya $f(\alpha) = \beta$ ya da $f(\alpha) \in \beta$ ve $f(\alpha)$ bir ordinaldir. Teorem 4.13'ye göre de $f(\alpha) = \alpha$. $\square$

Sonuç 4.16. *α ve β ordinal olsunlar. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.*

1. $\alpha \in \beta$ *ya da* $\alpha = \beta$,
2. $\alpha \subseteq \beta$,
3. $\alpha \leq \beta$,
4. α, *β'nın bir başlangıç dilimi*,
5. α, *β'nın bir altkümesiyle eşyapısal.*

Alıştırmalar.

4.3. α bir ordinal olsun. Eğer α'nın en büyük elemanı varsa bu elemanın $\cup\alpha$ olduğunu kanıtlayın. Eğer α'nın en büyük elemanı yoksa $\cup\alpha = \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

4.4. B bir ordinal kümesi olsun. $C \subseteq B$ şu özelliği sağlasın: "Her $\beta \in B$ için $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in C$ vardır". Bu durumda

$$\cup_{\beta \in B}\beta = \cup_{\gamma \in C}\gamma$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.5. $\alpha = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$ olsun. α bir ordinalse, β'nın da bir ordinal olduğunu kanıtlayın.

4.6. α ve β birer ordinal olsunlar. $S(\alpha) = S(\beta)$ ise $\alpha = \beta$ eşitliğini kanıtlayın.

4.6 Limit Ordinaller ve Ordinallerde Tümevarım İlkesi

İyisıralı kümelerde tümevarımla kanıtlama yönteminden 6'ncı bölümde sözettik. O bölümde şu teoremi kanıtladık:

Teorem 4.17. ***İyisıralamalarda Tümevarım İlkesi*** *$(X, <)$ bir iyi sıralama olsun. $A \subseteq X$ bir altküme olsun. A'nın şu özelliği olduğunu varsayalım:*
Her $x \in X$ için, eğer $\{y \in X : y < x\} \subseteq A$ ise, o zaman $x \in A$.
Bu durumda $A = X$ olur.

Her ordinal iyisıralı bir küme olduğundan, aynı teorem ordinallerde de geçerlidir elbet. Ama ordinaller sözkonusu olduğunda, aynı teoremi başka türlü yanlış ifade etmek kanıtlarda bazı avantajlar sağlar.

Bazı ordinallerin en büyük elemanları vardır. Örneğin 5'in en büyük elemanı 4'tür. $S(\omega)$'nın en büyük elemanı ω'dır. Ama her ordinalin en büyük elemanı yoktur. Örneğin en büyük doğal sayı olmadığından, ω'nın en büyük elemanı yoktur. En büyük elemanı olmayan 0'dan değişik ordinallere ***limit ordinal*** denir. ω ilk limit ordinaldir. Limit ordinaller genelde λ (lambda) simgesiyle gösterilir.

Limit olmayan ve 0'dan değişik olan bir α ordinalinin en büyük elemanı β ise, $\alpha = S(\beta)$'dır elbet. (Okura basit bir alıştırma.)

Teorem 4.18. [***Ordinallerde Tümevarım İlkesi***] *Bir önerme,*
a) 0 *için doğruysa,*
b) *Bir α ordinali için doğru olduğunda $S(\alpha)$ ordinali için de doğruysa,*
c) *her λ limit ordinali için, önerme λ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunda λ için de doğruysa,*
o zaman o önerme her α ordinali için doğrudur.

Kanıt: Önermeye $\varphi(x)$ diyelim. $\varphi(x)$'in her ordinal için doğru olmadığını varsayalım. Diyelim $\varphi(x)$, α ordinali için yanlış. $\beta = S(\alpha)$ olsun.

$$A = \{\gamma \in \beta : \varphi(\gamma) \text{ yanlış}\}$$

olsun. A bir kümedir ve bir ordinal kümesidir. $\alpha \in A$ olduğundan, $A \neq \varnothing$. O zaman A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana γ diyelim. Demek ki $\varphi(x)$ önermesi γ'dan küçük ordinaller için doğru. (a) varsayımına göre $\gamma \neq 0$. (b) varsayımına göre bir δ ordinali için $\gamma = S(\delta)$ olamaz. (c) varsayımına göre γ bir limit ordinal olamaz. Demek ki γ olamaz! □

Kimileyin bu ilke yerine kanıtı kullanılır. Diyelim ordinaller hakkında kanıtlamak istediğimiz bir $\varphi(\alpha)$ önermesi var. Bir an için φ'nin her α ordinali için doğru olmadığını varsayalım, diyelim φ önermesi α için doğru değil.

$$\{\beta \leq \alpha : \varphi(\beta) \text{ yanlış}\}$$

kümesine bakalım. α bu kümede olduğundan, bu ordinal kümesi boş değil. Demek ki bir en küçük elemanı var. O elemana β diyelim. Şimdi $\varphi(\beta)$ yanlış ama β'dan küçük her γ ordinali için $\varphi(\gamma)$ doğru. Buradan bir çelişki elde etmeye çalışılır. Bunun için önce β'nın 0 olamayacağı kanıtlanır. Sonra β'nın bir γ ordinali için $S(\gamma)$'ya eşit olamayacağı kanıtlanır. Ardından, β'nın bir limit ordinal de olamayacağı kanıtlanır. Böylece β'nın hiçbir şey olamayacağı anlaşılır ve bir çelişki elde edilir.

İlerde tümevarım ilkesini sık sık kullanacağımızdan örnek vermiyoruz.

Alıştırmalar.

4.7. $\alpha \neq \varnothing$ bir ordinal olsun. α'nın limit ordinal olması için

$$\cup\alpha = \alpha$$

eşitliğinin yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

4.8. $\alpha \neq \varnothing$ limit olmayan bir ordinal olsun. $\alpha = S(\cup\alpha)$ eşitliğini kanıtlayın, yani $\cup\alpha$, α'nın en büyük elemanıdır.

4.9. Elemanları limit ordinaller olan ama boşküme olmayan bir kümenin bileşiminin de bir limit ordinal olduğunu kanıtlayın.

4.10. $A \neq \varnothing$, en büyük elemanı olmayan bir ordinaller kümesiyse $\cup A$'nın bir limit ordinal olduğunu kanıtlayın.

5. Ordinaller II

5.1 Deneme

Bu bölümde her iyisıralı kümenin bir ve bir tek ordinalle eşyapısal olduğunu kanıtlamaya çalışacağız ve bigüzel çuvallayacağız. [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlarla bu önerme kanıtlanamaz. Ama biz gene de inatla kanıtlamaya çalışacağız ve bildiğimiz kümeler kuramının nerede eksik kaldığını ayan beyan göreceğiz. Eksik kaldığımız yeri yeni bir aksiyomla tamamlayacağız.

Yeni aksiyomumuz bizce doğru olması gereken doğal bir önermedir. Ama okur, bu yeni aksiyomun doğallığına yeri geldiğinde kendi kendine karar vermelidir. Sonuç olarak, aksiyomların seçimi, neyin doğru olması gerektiği konusunda inanca dayanır.

Herhangi iyisıralı bir küme alalım. Bu kümeyle bir ordinal arasında sıralamayı koruyan bir eşleme, yani bir izomorfizma ya da Türkçesiyle bir eşyapı eşlemesi bulacağız, daha doğrusu bulmak istiyoruz.

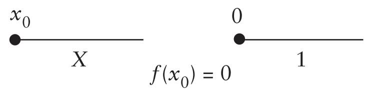
İyisıralı kümemize $(X, <)$ diyelim. Sonuç 4.14'e göre, $(X, <)$ ancak tek bir α ordinaline eşyapısal olabilir ve X'le α arasında ancak tek bir eşyapı eşlemesi olabilir. Yani eğer X iyisıralı kümesinden bir α ordinaline giden bir $f : X \to \alpha$ eşyapı eşlemesi varsa, hem α hem de f bir tanedir.

Matematikte bir şeyden bir tane varsa o şeyi bulmak genellikle çok kolaydır. Matematikte zor olan, tek bir tane olan nesneleri bulmak değil, tam tersine çok olanlardan birini bulmaktır. Örneğin, eğer bir nesneden sonsuz tane varsa, kimileyin bu sonsuz tane olan nesnelerden birini bile bulmak mümkün olmayabilir. Bu ilginç ve bir o kadar da tuhaf olguya ilerde değineceğiz.

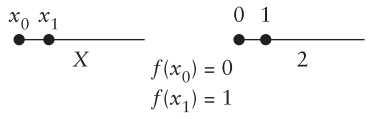
Tüm iyimserliğimizi takınıp başlıktaki önermeyi kanıtlamaya (çalışmaya) başlayalım.

Eğer X boşkümeyse, o zaman X, 0 ordinaline eşittir. Bu durumda X'in kendisi zaten bir ordinaldir. Fazla bir şey söylemeye gerek yok.

Eğer X boş küme değilse, X'in bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_0 diyelim. Eğer X'in bundan başka elemanı yoksa, o zaman X, 1 ordinaliyle eşyapısaldır elbette. Resmi aşağıda çizdik. Bu durumda, X'le 1 ordinali arasındaki (tek) eşyapı eşlemesi (hatta tek fonksiyon!) x_0'ı 0'a gönderen fonksiyondur.

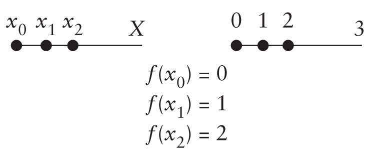


Eğer X'in x_0'dan başka elemanları varsa, o zaman X'te x_0'dan hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_1 diyelim. Eğer X'te x_1'den büyük başka eleman yoksa, yani X'te sadece x_0 ve x_1 elemanları varsa, o zaman X, 2 ordinaliyle eşyapısaldır.



Bu durumda, X'le 2 ordinali arasındaki (tek) eşyapı eşlemesi x_0'ı 0'a, x_1'i 1'e gönderen fonksiyondur; en küçük eleman en küçük elemana, en büyük eleman en büyük elemana gitmelidir.

Eğer X'te x_1'den büyük elemanlar varsa, o zaman X'te x_1'den hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_2 diyelim. Eğer X'te x_2'den büyük başka eleman yoksa, yani X'te sadece x_0, x_1 ve x_2 elemanları varsa, o zaman X, 3 ordinaliyle eşyapısaldır[1].



Bu durumda, X'le 2 ordinali arasındaki (tek) eşyapı eşlemesi x_0'ı 0'a, x_1'i 1'e, x_2'yi 2'ye gönderen fonksiyondur; en küçük eleman en küçük elemana, en büyük eleman en büyük elemana gitmelidir.

Bunu böylece sürdürebiliriz... Eğer sonlu zamanda (her ne demekse!) X'in en büyük elemanına ulaşırsak, o zaman X iyisıralaması bir doğal sayıyla eşyapısaldır.

Eğer X'te $n+1$ tane eleman varsa ve bu elemanları küçükten büyüğe doğru,

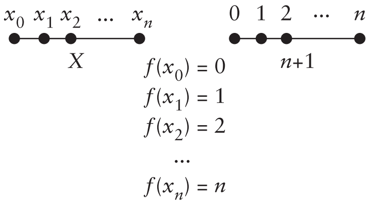
$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

diye sıralarsak, o zaman X,

$$f(x_i) = i$$

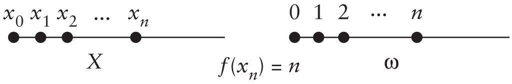
eşlemesiyle $n+1$ ordinaline eşyapısaldır.

[1]Yazının Bölüm 3.1'e benzemeye başladığını okur fark etmiş olmalı.

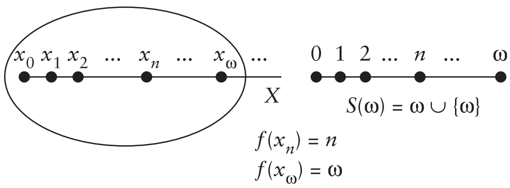


Ama X'in elemanlarını böyle teker teker sonlu zamanda bitiremeyebiliriz, X sonsuz da olabilir. Şimdi X'in sonsuz olduğunu varsayalım.

Eğer x_n, X'in $n+1$'inci elemanıysa ve X'te bu x_n'lerden başka bir eleman yoksa, o zaman X'in ω'ya (yani $\mathbb{N}$'ye) benzediği, hatta $f(x_n) = n$ fonksiyonu sayesinde ω'yla eşyapısal olduğu aşikâr.



X'te bu x_n'lerden başka elemanlar da olabilir, neden olmasın? Tüm bu x_n'lerden büyük olan elemanların en küçüğüne x_ω diyelim. X'in, x_ω dahil olmak üzere, x_ω'ya kadar olan kısmı belli ki $S(\omega)$ ile eşyapısal[2].



Bunu böylece sürdürebiliriz... Ama nereye kadar sürdürebiliriz? X'in sonuna ulaşabilecek miyiz? Zamanın (istediğimiz kadar) sonsuz olduğu bir evrende yaşasaydık belki bu tür kanıtlar o evrenin matematiğinde kabul edilebilirdi, ama ne yazık ki öyle bir evrende yaşamıyoruz ve yukarda yapılanlar bir yere kadar kabul edilebilir. Daha matematiksel bir yöntem bulmalıyız.

Bu noktadan sonra matematik başlıyor.

5.2 Matematik Başlıyor

$(X, <)$ iyisıralı bir küme olsun. X'in bir ordinale eşyapısal olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

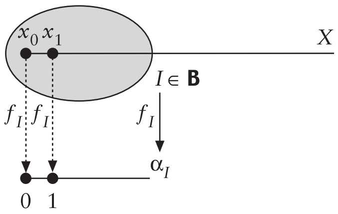
X'in bir ordinale eşyapısal olup olmadığını bilmiyoruz henüz ama X'in bazı başlangıç dilimlerinin bir ordinale eşyapısal olduğunu biliyoruz. Örneğin, eğer X'te en az 10 eleman varsa, X'in ilk 10 elemanından oluşan küme (ki bu bir başlangıç dilimidir) 10 ordinaliyle eşyapısaldır.

---

[2]Yazının Bölüm 3.1s'e benzemeye başladığını okur fark etmiş olmalı

$\wp$, X'in bir ordinale eşyapısal olan başlangıç dilimlerinin kümesi olsun. $\wp$, gerçekten bir kümedir. [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlardan hareketle $\wp$'nin bir küme olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir.) Amacımız X'in $\wp$'de olduğunu kanıtlamak tabii.

Eğer $I \in \wp$ ise, I başlangıç diliminin eşyapısal olduğu tek bir ordinalin olduğunu biliyoruz (Teorem 4.13). Bu ordinale α_I adını verelim. Ayrıca, I başlangıç dilimiyle α_I ordinali arasında tek bir eşyapı eşlemesi olduğunu da biliyoruz (Sonuç **??** ya da 4.14). Bu eşyapı eşlemesine de f_I adını verelim.



Sav 1. *J ve I, $\wp$'den iki başlangıç dilimi olsun. O zaman ikisinden biri diğerinin altkümesidir. Ayrıca, eğer $J \subseteq I$ ve $x \in J$ ise, $f_J(x) = f_I(x)$ olur.*

Savın Kanıtı: I ve J, X'in başlangıç kümeleri olduğundan ikisinden biri diğerinin altkümesi olmalı (Bölüm 3.4.1). Diyelim $J \subseteq I$.

I ve J başlangıç dilimleri,

$$f_I : I \to \alpha_I$$

ve

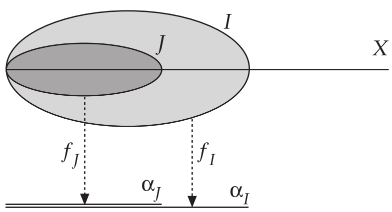
$$f_J : J \to \alpha_J$$

eşlemeleriyle, sırasıyla, α_I ve α_J ordinallerine eşyapısallar.

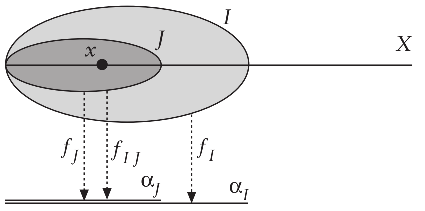
Eğer $\alpha_J \to J \subseteq I \to \alpha_I$ yolunu takip edersek, α_J'den α_I'ya giden

$$f_I \circ f_J^{-1} : \alpha_j \xrightarrow{f_J^{-1}} J \subseteq I \xrightarrow{f_I} \alpha_I$$

eşyapı fonksiyonunu buluruz. O zaman Teorem 4.15'e göre $\alpha_J \subseteq \alpha_I$ ve hatta α_J, α_I'nin bir başlangıç dilimi (Teorem 4.9).



Şimdi $f_I : I \to \alpha_I$ fonksiyonunu I'nin J başlangıç dilimine kısıtlayabiliriz, yani f_I'nin I'da aldığı değerlere bakacağımıza f_I'nin sadece J'de aldığı değerlere bakabiliriz.



Eğer bu fonksiyonu $f_{I\downarrow J}$ olarak simgelersek, her $x \in J$ için, $f_{I\downarrow J}$ fonksiyonunun tanımı gereği,

$$f_{I\downarrow J}(x) = f_I(x)$$

olur. Demek ki

$$f_{I\downarrow J}(J) = f_I(J)$$

ve dolayısıyla $f_{I\downarrow J}(J)$, α_I'nin bir başlangıç dilimi (Önsav 3.10.i). Şimdi J'yi α_I'nin başlangıç kümelerine gömen iki eşyapı fonksiyonumuz var: biri f_J, diğeri $f_{I\downarrow J}$. Önsav 3.11'ya göre

$$f_J = f_{I\downarrow J}.$$

Bir başka deyişle, eğer $x \in J$ ise,

$$f_J(x) = f_I(x).$$

Savımız kanıtlanmıştır. □

Bu sav bize parlak ve hatta tozpembe bir gelecek işaret ediyor. Sanki her şey yolunda gibi.

Şimdi amacımız $\wp$'nin elemanı olan başlangıç kümelerinin bileşimini alıp bunun X'e eşit olduğunu, yani

$$X = \cup_{I\in\wp} I$$

eşitliğini göstermek. Bir de α_I ordinallerinin bileşiminin bir ordinal olduğunu gösterebilirsek o zaman işimiz iş... Zaten bir ordinal kümesinin bileşiminin bir ordinal olduğunu biliyoruz (Teorem 4.12). Bu ordinale α diyelim:

$$\alpha = \cup_{I\in\wp} \alpha_I.$$

Bütün bunları yaptığımızı varsayarsak, X'ten α'ya giden şu eşyapı eşlemesini tanımlayabiliriz: Eğer $x \in X = \cup_{I\in\wp} I$ ise, o zaman $x \in I \in \wp$ ilişkilerini sağlayan bir I vardır. Şimdi,

$$f(x) = f_I(x) \in \alpha_I \subseteq \alpha$$

olarak tanımlayalım.

Sav 1'e göre, tanımda, $\wp$'nin x'i içeren hangi I başlangıç diliminin alındığı önemli değildir, tüm seçimler aynı sonucu verir. Bu aşamada f'nin X'ten α'ya giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak işten bile değildir. Zamanı geldiğinde yapacağız.

$\cup_{I\in\wp} I = X$ eşitliğini göstermek için küçük bir numara yapmamız gerekiyor. Bir an için $(X, <)$ iyisıralı kümesinin bir ordinale eşyapısal olmadığını varsayalım. X'in bir ordinale eşyapısal olmayan başlangıç dilimlerinin en küçüğünü alalım. Bu başlangıç dilimine şimdilik X' diyelim. Alıştırma 5'e göre böyle bir başlangıç dilimi vardır. Hem X hem de X' bir ordinale eşyapısal olmayan iyisıralı kümeler. Ama X' iyisıralamasının X'e göre bir ayrıcalığı var: X' iyisıralamasının kendisine eşit olmayan her başlangıç dilimi bir ordinale eşyapısal. Şimdi X yerine ayrıcalığı olan bu X' iyisıralamasını alabiliriz. Bundan böyle,

1. X'in bir ordinale eşyapısal olmadığını, ve
2. X'in X'e eşit olmayan her başlangıç diliminin bir ordinale eşyapısal olduğunu varsayıyoruz. Bir başka deyişle, $\wp$, artık X'e eşit olmayan X'in tüm başlangıç dilimleri.

Sav 2. *X'in en büyük elemanı olamaz.*
Kanıt: X'in en büyük elemanı olduğunu varsayalım. Bu elemana s diyelim. Şimdi,

$$I = \{y \in X : y < s\}$$

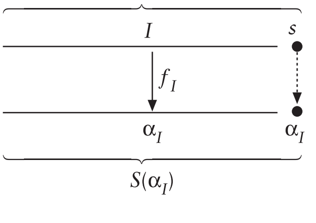
olsun. I, X'in bir başlangıç dilimidir. Ama s, I'da olmadığından, $I \neq X$. Demek ki I bir α_I ordinaline bir f_I eşyapı eşlemesi aracılığıyla eşyapısal. Ama

$$X = I \cup \{s\}$$

ve

$$S(\alpha_I) = \alpha_I \cup \{\alpha_I\}$$

ve X'in ve $S(\alpha_I)$'nin sıralamaları son derece uyumlu. f_I eşyapı eşlemesini I'dan X'e genişletmek çok kolay: Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi X'in en sonundaki s elemanını $S(\alpha_I)$'nin en sonundaki α_I elemanına yollayalım.



Böylece X ile $S(\alpha_I)$ arasında bir eşyapı eşlemesi bulduk. $S(\alpha_I)$ bir ordinal olduğundan (Teorem 4.6), bu bir çelişkidir. □

Artık $\cup_{I\in\wp} I = X$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. $\wp$'nin X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesi olduğunu anımsatırım.

Sav 3. $\cup_{I\in\wp} I = X$.
Kanıt: $x \in X$ olsun. x, X'in en büyük elemanı olmadığından (Sav 2), X'te x'ten büyük bir eleman vardır. Bu elemanlardan biri y olsun. O zaman,

$$I = \{z \in X : z < y\},$$

X'in x'i içeren ama y'yi içermeyen bir başlangıç dilimidir. Demek ki $x \in \bigcup_{I\in\wp} I$. □

İstediğimizin nerdeyse sonuna geldik.

Sıra, her $I \in \wp$ başlangıç diliminin eşyapısal olduğu α_I ordinallerinin bileşiminin bir ordinal olduğunu kanıtlamada, yani $\cup_{I\in\wp}\alpha_I$ bileşiminin bir ordinal olduğunu kanıtlamalıyız.

Sav 4. $\cup_{I\in\wp}\alpha_I$ *bir ordinaldir.*
Kanıt: Teorem 4.12'de bir ordinaller kümesinin bileşiminin gene bir ordinal olduğunu kanıtlamıştık. Demek ki bilmemiz gereken tek şey

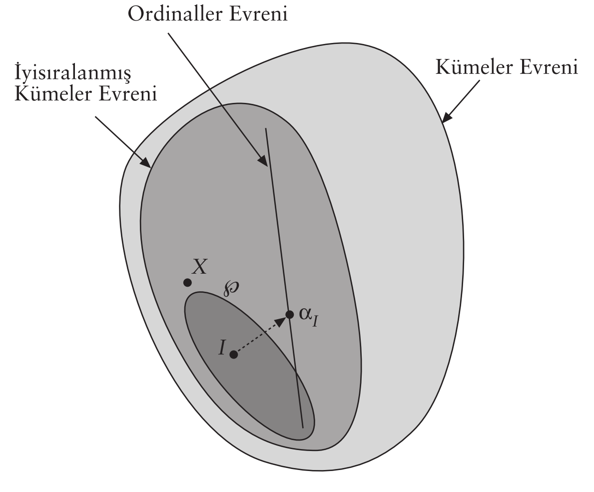
$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğunun bir küme olduğu... Bunu bilirsek gerisi gelecek...

Maalesef bunu [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlarla kanıtlayamayız. Neden kanıtlayamayacağımızı biraz açıklamaya çalışayım.

Önce bir durum değerlendirmesi yapalım. Neyle karşı karşıyayız? $\wp$ bir küme; bundan kuşkumuz yok. Her $I \in \wp$ için α_I iyi tanımlanmış bir ordinal; bundan da kuşkumuz yok. Nitekim α_I, I iyisıralamasının eşyapısal olduğu yegâne ordinal, bir ikincisi daha yok.

Durumu özetleyen şöyle bir resim çizdik. Beğenilerinize sunuyoruz:

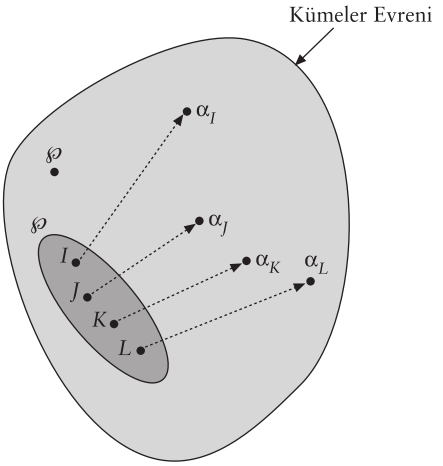


Aslında resim çok daha sade. Resmin iyi sıralanmış kümelerle ya da ordinallerle filan pek bir ilgisi yok. En yalın haliyle resim şöyle: $\wp$ bir küme. $\wp$'nin her I elemanı için bir ve bir tek α_I kümesi tanımlanmış. $\wp$'nin küme olduğundan hareketle,

$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

Durumu bu daha yalın haliyle aşağıda resmettik.



Kritik soru: $\wp$ bir küme. $\wp$'nin her elemanı için α_I kümesi bir biçimde tanımlanmış. α_I'lerin topluluğu da bir küme olur mu?

Eğer $\wp$ sonluysa sorun yok, çünkü o zaman

$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğu sonlu bir topluluk olur ve her sonlu topluluk gibi bu da bir küme olur. Sorun, $\wp$ sonsuz olduğunda.

Öte yandan eğer α_I'ler rastgele, yani hiçbir kurala bağlı olmaksızın seçilmişlerse (ki aslında böyle bir seçim fiziksel olarak mümkün bile değildir!) α_I'lerin topluluğunun bir küme olmasını bekleyemeyiz. Öte yandan burada özel bir durumla karşı karşıyayız. Her α_I, I'ya belli bir kuralla bağlı: α_I, I iyisıralamasının eşyapısal olduğu yegâne ordinal. Yani, eğer $\varphi(x, y)$, Türkçe söylediğimiz şu özelliğin

x bir sıralama ve y, x'le eşyapısal olan bir ordinal,

matematikçesini simgelerse, o zaman her $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ formülünü sağlayan bir ve bir tane y kümesi vardır.

Şimdi sorumuzu soruyoruz:

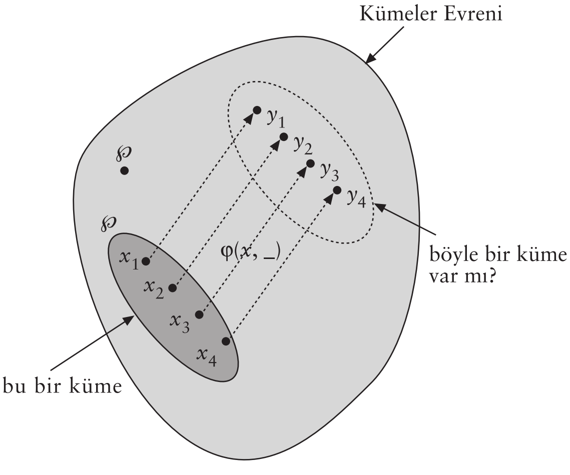
Önemli Soru: *$\wp$ bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesinin olduğunu varsayalım. O zaman bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluşturur mu? Yani*

$$\{y : \exists x(x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

ise, o zaman bunun bir küme olduğunu biliyoruz. Sorun, tüm y'leri eleman olarak içeren bir $\Re$ kümesinin olup olmadığını bilmediğimizde ortaya çıkıyor; bu şanssız durumda

$$\{y : \exists x(x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğunun bir küme olduğuna hükmedemiyoruz.



$\wp$ bir küme olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y olduğunu varsayalım. O zaman, belli bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar mı?
Not: $\wp$ kümesinin elemanlarını $x_1, x_2, \ldots$ diye yazmamız okuru yanıltmasın, $\wp$ kümesi sayılabilir olmak zorunda değildir.

Bu arada $\varphi(x, g)$'nin nerdeyse tanım kümesi $\wp$ olan bir fonksiyon tanımladığına dikkatinizi çekerim. Gerçekten de her $x \in \wp$ için bir ve bir tek y değeri veriyor. Tek eksiği değer kümesinin olmaması... Hatta değerleri içeren bir kümenin olmaması.

Sanırım soruyu ve sorunu yeterince tartıştık. Yanıtı vermenin zamanı geldi. Böyle bir kümenin varlığı [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomların yardımıyla kanıtlanamaz. Bu kanıtlanamazlığın kanıtı zor olmasa da bizi konumuzdan bayağı saptıracağından kanıtı burada vermeyeceğiz.

Bir yandan böyle bir kümenin olmasını istiyoruz, çünkü her iyisıralamanın bir ordinale eşyapısal olması gerektiğini hissediyoruz (en azından ben öyle hissediyorum, ben dünyayı öyle algılıyorum), diğer yandan böyle bir kümenin varlığını kanıtlayamıyoruz. O zaman yeni bir aksiyom gerekiyor.

5.3 Yerleştirme Aksiyomu

İşte ihtiyacımız olan aksiyom:

Yerleştirme Aksiyomu. *$\wp$ bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesinin olduğunu varsayalım. O zaman bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar. Yani*

$$\{y : \exists x(x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğu bir kümedir.

Eğer Yerleştirme Aksiyomu'nun var olduğunu söylediği kümeye $\Re$ dersek, o zaman $\varphi(x, y)$ özelliği (ya da formülü), $\wp$'den $\Re$'ye giden örten bir fonksiyon verir. Mecazi konuşacak olursak, Yerleştirme Aksiyomu, $\wp$ kümesini $\Re$'ye yerleştirerek $\Re$'nin küme olduğuna hükmedebileceğimizi söylüyor.

Şimdi Sav 4'ün kanıtını tamamlayabiliriz. Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\alpha_I : I \in \wp\}$ bir kümedir, hatta bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla bu kümenin elemanlarının bileşimini aldığımızda bir küme buluruz: $\cup_{I\in\wp}\alpha_I$ bir kümedir. Hatta, Teorem 4.12'e göre bu bileşim bir ordinaldir. $\square$

Teorem 5.1. *Her iyisıralı küme bir ve bir tek ordinale eşyapısaldır.*

Kanıt: İyisıralı bir kümenin iki değişik ordinale eşyapısal olamayacağını Teorem **??**'den biliyoruz.

Bulduklarımızı tekrarlayalım. Bir ordinale eşyapısal olmayan iyisıralı bir X kümesiyle başladık. Biraz uğraşla, X'in X'e eşit olmayan her I başlangıç diliminin bir α_I ordinaline eşyapısal olduğunu varsayabileceğimizi gördük. Sav 2'de, X'in en büyük elemanının olamayacağını gördük.

Eğer $\wp$, X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesiyse, her $I \in \wp$ için, I'nin eşyapısal olduğu tek bir α_I ordinali ve I'dan α_I'ya giden tek bir f_I eşyapı eşlemesi vardır.

Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\alpha_I : I \in \wp\}$ topluluğu elemanları ordinaller olan bir kümedir. Dolayısıyla bu kümenin bileşimi de bir ordinaldir. Bu ordinale α adını verelim.

$$\alpha = \cup_{I\in\wp}\alpha_I.$$

Ayrıca Sav 3'e göre $\bigcup_{I\in\wp} I = X$.

Bir de Sav 1 çok önemli: Eğer I ve J, $\wp$'delerse ve eğer $J \subseteq I$ ise ve eğer ayrıca $x \in J$ ise, o zaman $f_J(x) = f_I(x)$.

Şimdi X'ten α'ya giden şu f fonksiyonunu tanımlayabiliriz: Eğer

$$x \in X = \cup_{I\in\wp} I$$

ise, $x \in I \in \wp$ ilişkilerini sağlayan bir I başlangıç dilimi vardır.

$$f(x) = f_I(x) \in \alpha_I \subseteq \alpha$$

olsun.

$$\begin{array}{ccc} X = \bigcup_{I\in\wp} I & \xrightarrow{f} & \alpha = \bigcup_{I\in\wp} \alpha_I \\ \cup & & \cup \\ I & \xrightarrow{f_I} & \alpha_I \\ \cup & & \cup \\ J & \xrightarrow{f_J} & \alpha_J \end{array}$$

Sav 1'e göre, $f(x)$'in tanımında,$\wp$'nin x'i içeren hangi I başlangıç diliminin alındığı önemli değildir, tüm seçimler aynı sonucu verir.

f'nin X'ten α'ya giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak kaldı geriye. Bu kolay:

f **Örtendir:** $\beta \in \alpha$ olsun. $\alpha = \bigcup_{I\in\wp} \alpha_I$ olduğundan, belli bir $I \in \wp$ için $\beta \in \alpha_I$ olmalıdır.

$$f_I : I \to \alpha_I$$

örten olduğundan, belli bir $x \in I$ için, $f_I(x) = \beta$ olmalıdır. Demek ki

$$f(x) = f_I(x) = \beta.$$

Ve, $x \in I \subseteq \bigcup_{I\in\wp} I = X$.

f **Sıralamaya Saygı Duyar:** $x,\ y \in X$ olsun. $x < y$ eşitsizliğini varsayalım. $X = \bigcup_{I\in\wp} I$ olduğundan, $I,\ J \in \wp$ için $x \in I$ ve $y \in J$. Ama I ve J, X'in başlangıç kümeleri olduklarından, ikisinden biri diğerinin altkümesi olmalı. Diyelim $J \subseteq I$. O zaman, hem x hem de y, I'nin elemanları. Dolayısıyla $f(x)$ ve $f(y)$'nin tanımlarında aynı I başlangıç dilimini alabiliriz:

$$f(x) = f_I(x),$$
$$f(y) = f_I(y).$$

Ayrıca, $f_I : I \to \alpha_I$ bir eşyapı eşlemesi olduğundan ve $x < y$ eşitsizliğinden, $f_I(x) < f_I(y)$ eşitsizliği çıkar.

Şimdi, $f(x) = f_I(x) < f_I(y) = f(y)$, yani $f(x) < f(y)$. İstediğimiz kanıtlanmıştır, X iyisıralı kümesi α ordinaline eşyapısaldır. □

5.4 Yerleştirme Aksiyomu'nun İzin Verdiği Kümeler

Eskiden küme olmayan toplulukların küme olduklarını Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayabiliriz.

Örnekler.

5.1. $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \ldots\}$ topluluğu bir kümedir.

5.2. Aslında bu kümeyi böyle yazmak günah sınıfına olmasa da kabahat sınıfına sokulabilir, çünkü matematikte "nokta nokta nokta" diye bir simge yoktur.
Şunu kanıtlayacağız: $a_0 = 0$ olsun ve her $n \in \omega$ için, $a_{n+1} = \{a_n\}$ olsun. Öyle bir $\varphi(x, y)$ formülü vardır ki, $\varphi(x, y)$'nin doğru olması için yeter ve gerek koşul x'in bir doğal sayı olması ve y'nin a_x'e eşit olmasıdır.
$\varphi(x, y)$ formülünü yarı Türkçe yarı matematikçe yazacağız; sadece matematikçe yazarsak formülü gereksiz yere uzatmış oluruz.
$\varphi(x, y)$ formülü, önce $x \in \omega$ diyecek. Sonra

$$z = \{a_0, a_1, \ \ldots, a_{x-1}\}$$

diye bir kümenin varlığından sözedecek. Bunu şöyle söyleyeceğiz: Öyle bir z kümesi ve öyle bir $f : x \to z$ eşlemesi vardır ki, $f(0) = a_0$ ve her $0 \leq i < x - 1$ için $f(S(i)) = \{f(i)\}$'dir.
Şimdi bir de ayrıca $y = \{f(x - 1)\}$ diyelim.
$x = 0$ şıkkı yukarda sorun yaratır. Eğer $x = 0$ ise $\varphi(x, y)$ formülü "$y = 0$" desin.
Böylece dilediğimiz gibi $\varphi(x, y)$ formülü bulduk. Şimdi Yerleştirme Aksiyomu'nu $\varphi(x, y)$'ye ve ω'ya uygularsak, eleman olarak sadece a_n'leri ($n \in \omega$) içeren bir kümenin varlığını kanıtlamış oluruz.

Not 1. Bu aşamaya kadar [Sİ]'de ve bu ders notlarında gördüğümüz kümeler kuramına Zermelo-Fraenkel kümeler kuramı adı verilir ve bu "teori" ZF olarak kısaltılır. Kümeler kuramınının son aksiyomu ileride göreceğimiz Seçim Aksiyomu'dur. ZF'ye Seçim Aksiyomu eklenerek elde edilen teori ZFC olarak yazılır.

Not 2. Artık her iyisıralı kümenin bir (ve bir tek) ordinale eşyapısal olduğunu biliyoruz ama henüz sayılamaz sonsuzlukta bir kümenin iyisıralanabileceğini, dolayısıyla sayılamaz sonsuzlukta bir ordinalin olduğunu bilmiyoruz. Böyle bir ordinalin varlığını ileride, Seçim Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayacağız. Daha ileri gidip, her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlayacağız.

Not 3. Ne ZF'de ne de ZFC'de tüm ordinaller topluluğu bir kümedir. Bunu bir sonraki altbölümde kanıtlayacağız.

Not 4. Burali-Forti Paradoksu Ω, tüm ordinaller kümesi olsun. O zaman, $\alpha = \cup\Omega$ bir ordinaldir (Teorem 4.12; aslında $\Omega = \alpha$, ama bunun hiçbir önemi yok) ve elbette ordinallerin en büyüğüdür. Ama $S(\alpha)$, α'dan daha büyük bir ordinaldir. Çelişki! (İhtiyacınız varsa Ord2a'yı da kullanın.)

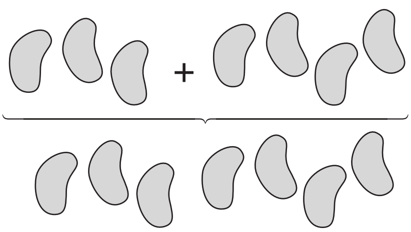
Buna "Burali-Forti Paradoksu" denir. 1897'de Cesare Burali-Forti (1861-1931) tarafından bulunmuştur, Bertrand Russell (1872-1970) Paradoksu'ndan 4 yıl daha önce. Burali-Forti Paradoksu'nun bir benzeri iki yıl sonra Cantor tarafından bulunmuştur. Tüm paradoksların kökeni aynıdır: Her biri çok çok "büyük" toplulukların küme olduklarını varsayar. Dün paradoksa yol açan akıl yürütme bugün paradoks olmaktan çıkmıştır, çünkü ordinaller topluluğu Ω bir küme değildir! Ω 'nın küme olmadığının kanıtı yukarda: Yoksa Burali-Forti Paradoksu gerçekten bir paradoks olurdu ve çelişki elde ederdik (olmayana ergi yöntemi).

Burali Forti, Peano'nun asistanlığını yapmıştır. 200'den fazla matematiksel makalesi vardır. Matematik eğitimi konusuna da eğilmiştir. Ancak Einstein'in izafiyet kuramına inanmamış ve (Tommaso Boggio ile birlikte) kuramın yanlışlığını göstermeye çalışan bir kitap yazmıştır.

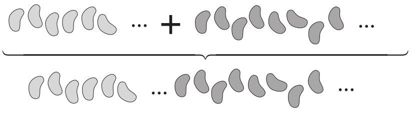
5.5 Ordinallerde Toplama

5.5.1 Toplamanın Tanımı

İlkokulda doğal sayıları toplamayı nasıl öğrendiğinizi anımsayın. $3 + 4 = 7$ yerine, 3 fasulye +4 fasulye = 7 fasulye eşitliğini öğrenmişsinizdir önce herhalde. Öğretmen sola 3 fasulye dizmiştir. Bu grubun sağına dört fasulye daha dizmiştir. Sonra tüm fasulyeleri saymanızı rica etmiştir.



Öğretmen fasulyeleri sıraya dizmeden karışık koymuş olabilir. Sıraya dizerse, sayması daha kolay olur. Biz iyi öğretmenle okuduğumuzu varsayalım: Sayacağımız nesneler sıralansın.



Ordinaller de aynen fasulye toplar gibi toplanır.

Daha matematiksel olmak gerekirse... α ve β iki ordinal olsun. Bu iki ordinali toplamak için α tane fasulyenin **sağına** β tane fasulye koyarız ve böylece elde edilen fasulyeleri **soldan sağa** sayarız... Burada, "saymak"la "iyisıra-lamak"ı kastediyoruz.

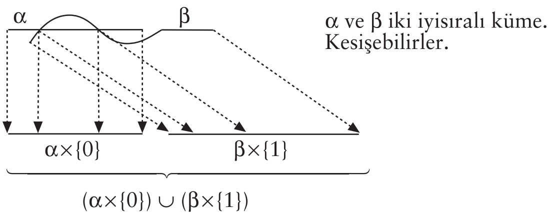
Daha daha matematiksel olalım. α ve β birer ordinal olsunlar. Aşağıdaki şekilden takip edin. Ordinal olduklarından, α ve β iyisıralı kümelerdir: $\in$, yani "elemanı olmak" ilişkisiyle iyisıralanmışlardır. Altbölüm 3.2.2'de herhangi iki iyisıralı kümeyi toplamayı tanımlamıştık. Şöyle yapmıştık: Önce α ve β iyisıralı kümelerini $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümeleriyle değiştirmiştik, çünkü α ve β kümelerinin kesişmelerini istemiyorduk (bu iki küme eşit bile olabilirler!), her türlü kesişme olasılığına karşı önlem olarak α ve β yerine, kesişmediklerinden emin olduğumuz $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerini almıştık. Sonra, α ve β üzerindeki sıralamaları sırasıyla $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerine yansıtmıştık, yani her $a_1,\, a_2 \in \alpha,\, b_1,\, b_2 \in \beta$ için,

$$(a_1,\, 0) < (a_2,\, 0) \Leftrightarrow a_1 < a_2,$$
$$(b_1,\, 1) < (b_2,\, 1) \Leftrightarrow b_1 < b_2$$

tanımlarını yapmıştık. En sonunda da, kesişmediklerini bildiğimiz $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin

$$(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$$

bileşimini alıp bu bileşimi, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ altkümelerinin sıralamalarıyla uyumlu olacak biçimde sıralamıştık. Bileşimin sıralaması, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin sıralamasına saygı duyar, ve ayrıca, β'ya bir ayrıcalık tanıyarak, $\beta \times \{1\}$'in her elemanını $\alpha \times \{0\}$'in her elemanından daha büyük ilan eder.



α ve β yerine, α×{0} ve β×{1} kümeleri alınıyor. Bu kümeler kesişmezler. α ve β'nın sıralamalarını α×{0} ve β×{1} kümelerine yansıtılıyor. Ayrıca α×{0}'ın elemanlarının β×{1}'in elemanlarından daha küçük oldu¼una hükmediliyor.

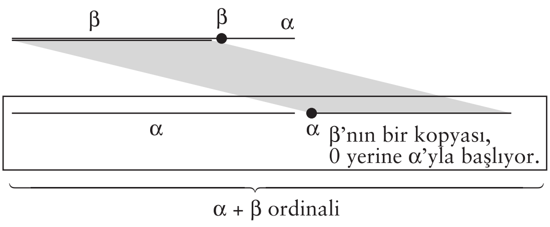
Biçimsel tanım şöyle: Her $a_1,\, a_2 \in \alpha,\, b_1,\, b_2 \in \beta$ için,

$$(a_1,\, 0) < (a_2,\, 0) \Leftrightarrow a_1 < a_2,$$
$$(b_1,\, 1) < (b_2,\, 1) \Leftrightarrow b_1 < b_2,$$
$$(a_1,\, 0) < (b_2,\, 1) \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (yani her zaman!)}$$

Bunun bir iyisıralama olduğunu kanıtlayıp adına $\alpha + \beta$ demiştik (Altbölüm 3.2.2). Bu bölümde $\alpha+\beta$'yı bir başka anlamda kullanacağımızdan, $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesi üzerine tanımlanan yukardaki iyisıralamaya geçici olarak $\alpha \uplus \beta$ adını vereceğiz.

Akılda tutulması gereken şey şu: $\alpha \uplus \beta$ sıralamasında, özünde, β sıralaması, α'dan ayrık bir küme olarak α sıralamasının sonuna getirilmiştir.

Bir önceki bölümde her iyisıralı kümenin bir ve bir tek ordinale eşyapısal olduğunu kanıtlamıştık (Teorem 5.1). Dolayısıyla $\alpha \uplus \beta$ iyisıralaması da bir ve bir tek ordinale eşyapısaldır. İşte $\alpha \uplus \beta$ iyisıralamasına eşyapısal yegâne ordinale $\alpha + \beta$ adı verilir. Örneğin, $\beta < \alpha$ olduğunda, $\alpha + \beta$ ordinalinin şekli şöyle:



α'nın $\alpha + \beta$ ordinalinin başlangıç dilimi olduğu bariz olmalı. Eğer $\beta < \alpha$ ise, elbette β da $\alpha + \beta$ ordinalinin başlangıç dilimidir. Ama bu bizi pek ilgilendirmeyecek. Daha önemli olan β'nın $\alpha + \beta$ ordinalinin "son dilimi"ne eşyapısal olmasıdır. Nitekim,

$$\beta \approx \{x \in \alpha + \beta : \alpha \leq x\}$$

olur. Burada, sağ taraftaki $\{x \in \alpha + \beta : \alpha \leq x\}$ kümesi, $\alpha + \beta$'nın altkümesi olarak gene $\in$ ilişkisiyle (iyi)sıralanmıştır.

5.5.2 Temel Sonuçlar

Hemen birkaç alıştırma yaparak ordinallerle toplama hakkında sezgi edinelim. İlk olarak doğal sayıları andıran bir olgu:

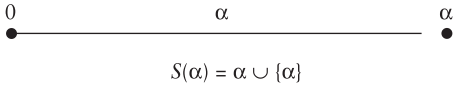
Önsav 5.2. *Her α ordinali için,* $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ *ve* $\alpha + 1 = S(\alpha)$.

Kanıt: Son eşitliği kanıtlayalım, diğerleri bariz. Önce, $\alpha + 1$ ve $S(\alpha)$'nın tanımlarını anımsayacağız. Bunlar birer ordinal olarak tanımlanmışlardı. Bu ordinallerin eşit olduklarını kanıtlamak için, iyisıralamalarının eşyapısal olduklarını kanıtlamak yeterli, çünkü Teorem 4.13'ye göre eşyapısal olan iki ordinal birbirine eşit olmak zorunda. Demek ki $\alpha + 1$ ve $S(\alpha)$'nın tanımlarında önemli olan nesnelerin kendileri değil, sıralamaları: Bu iki sıralı küme eğer eşyapısallarsa o zaman eşittirler.

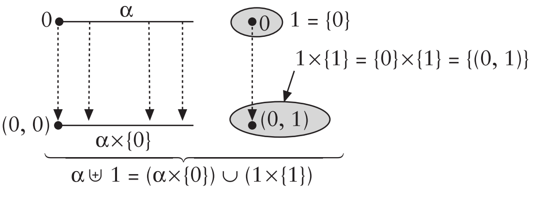
Önce $S(\alpha)$'nın ve sıralamasının tanımlarını anımsayalım: $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ ve $S(\alpha)$ sıralamasında α elemanı α kümesinin en sonuna konmuştur. İşte

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

sıralamasının resmi:



Bu kolaydı. Şimdi, bir sayfa önce tanımladığımız $\alpha+1$'in sıralamasıyla eşyapısal olan $\alpha \uplus 1$ iyisıralamasını anımsayalım. $\alpha \uplus 1$ iyisıralamasında, 1 kümesi, ayrık bir küme olarak, α sıralamasının en sonuna eklenmişti; $1 = \{0\}$ olduğundan, bu, α'nın sonuna yeni bir eleman (0'ın bir kopyasını) eklemek demektir.



Her iki sıralamanın da aynı oldukları, yani sıralamaların eşyapısal oldukları çok belli. Her ikisinde de α'nın en sonuna bir eleman ekleniyor. Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Yukardaki yöntemi sürekli kullanacağız. İki ordinalin birbirine eşit olduklarını kanıtlamak için sıralamalarının birbirine eşyapısal olduklarını kanıtlamak yeterlidir.

Her ne kadar ordinal toplaması doğal sayıların toplamasını andırıyorsa da, doğal sayılarda geçerli olan $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ eşitliği ordinallerde maalesef geçerli değil, örneğin

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1.$$

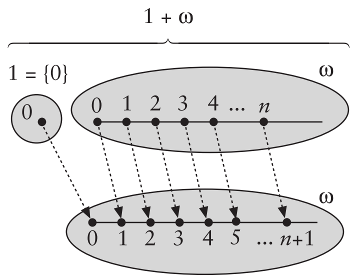
Hemen $1 + \omega = \omega$ eşitliğini göstererek okurun haklı merakını giderelim. Yukardaki kadar ayrıntılara girmeyeceğiz, yoksa bu bölüm bitmez. $1 + \omega$, yani $\{0\} \uplus \omega$ iyisıralamasında, 0 elemanının sonuna ω eklenmiştir, yani

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

kümesinin en başına -1 gibi yorumlayabileceğimiz bir eleman eklenmiş ve

$$\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

kümesinin sıralamasına benzer bir sıralama elde edilmiş.



Bu son sıralamanın ω'nın sıralamasından pek bir farkı yok, sayılar 0'dan başlayacağına -1'den başlamış. Dolayısıyla $1+\omega = \omega$. Öte yandan, $\omega+1$'in en büyük elemanı olduğundan (ω, $\omega+1$'in en büyük elemanıdır), $\omega+1$, ω'ya eşyapısal olamaz, yani $\omega \neq \omega+1$.

Ordinal toplaması doğal sayı toplamasıyla örtüşür, yani $5+8$, doğal sayı olarak da toplansa, ordinal olarak da toplansa 13 bulunur. Bariz olan bu sonuç, daha matematiksel olarak Önsav 5.2'den ve şimdi kanıtlayacağımız Önsav 5.3'den çıkacak. (Bkz. Sonuç 5.5.)

Önsav 5.3. *Her α, β, γ ordinali için, $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$ olur.*

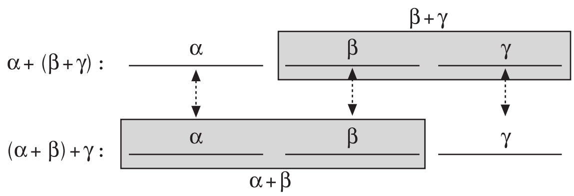
Kanıt: Her zaman olduğu gibi, eşitliği değil,

$$\alpha + (\beta+\gamma) \approx (\alpha+\beta)+\gamma$$

eşyapısallığını kanıtlayacağız. Her iki sıralamanın da nasıl inşa edildiğini anımsayalım.

$\alpha+(\beta+\gamma)$ sıralaması için α sıralamasının sonuna $\beta+\gamma$ sıralaması getirildi. $\beta+\gamma$ sıralaması da β sıralamasının sonuna γ sıralaması konularak elde edildi. Demek ki $\alpha+(\beta+\gamma)$ sıralaması için önce α, sonra β, daha sonra da γ sıralamasını peşpeşe koyduk.

$(\alpha+\beta)+\gamma$ sıralaması için ise $\alpha+\beta$ sıralamasının sonuna γ sıralaması getirildi. $\alpha+\beta$ sıralaması da α sıralamasının sonuna β sıralaması konularak elde edildi. Demek ki $(\alpha+\beta)+\gamma$ sıralaması için, önce α, sonra β, daha sonra da γ sıralamasını peşpeşe koyduk.



Yukardaki şekilden ve sıralamaların tanımından da belli ki

$$\alpha + (\beta+\gamma) \approx (\alpha+\beta)+\gamma.$$

Yani eşitlik sözkonusu. □

Sonuç 5.4. *Her α ve β ordinalleri için, $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$, yani $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.*

Sonuç 5.5. *Doğal sayıların doğal sayı olarak ve ordinal olarak toplamı eşittir.*

Kanıt: Önsav 5.2'den dolayı ordinal olarak $n+0 = n$, aynen doğal sayılardaki eşitlik. Gene Önsav 5.2'e göre sağdan 1'le toplamak da bir ayrım yaratmıyor. Şimdi $n+m$ toplamında bir fark olmadığını varsayarak, $n+(m+1)$ toplamında bir ayrım olmadığını gösterelim. Ama bu, doğrudan Sonuç 5.4'ten çıkar. □

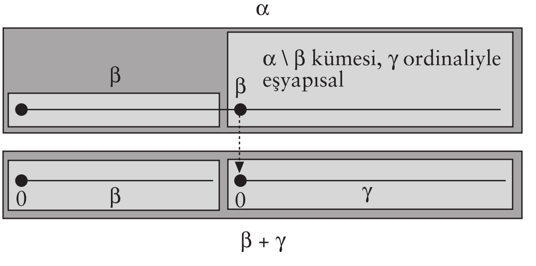
Bir sonraki önsavda göreceğimiz üzere ordinallerde doğal sayılardakine benzer bir çıkarma yapılabilir.

Önsav 5.6. *$\beta \leq \alpha$ iki ordinal olsun. O zaman $\beta + \gamma = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tane γ ordinali vardır. Ayrıca eğer α, β ve γ birer ordinalse ve $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ ise o zaman $\beta = \gamma$'dır.*

Kanıt: Eğer $\beta = \alpha$ ise $\gamma = 0$ alabiliriz. Şimdi $\beta < \alpha$ varsayımını yapalım, yani $\beta \in \alpha$ ve dolayısıyla β, α'nın başlangıç dilimi. $\alpha \setminus \beta$, α'nın bir altkümesi olduğu için, α'nın sıralamasından miras kalan sıralamayla iyisıralı bir kümedir. Demek ki

$$\alpha \setminus \beta$$

iyisıralamasına eşyapısal olan bir γ ordinali vardır. Şimdi $\alpha \approx \beta + \gamma$, yani $\alpha = \beta + \gamma$ çok bariz; kanıtının bir resmi aşağıda.



γ ordinalinin biricikliği ikinci önermeden çıkar. İkinci önermeyi kanıtlayalım.

Toplamanın tanımından dolayı, β, $\alpha + \beta$'nın $(\alpha + \beta) \setminus \alpha$ altkümesiyle eşyapısal. Aynı şekilde γ, $\alpha + \gamma$'nın $(\alpha + \gamma) \setminus \alpha$ altkümesiyle eşyapısal. Demek ki,

$$\beta \approx (\alpha + \beta) \setminus \alpha = (\alpha + \gamma) \setminus \alpha \approx \gamma.$$

Sonuç olarak $\beta = \gamma$. □

Bu önsavdan hareketle, eğer α sonsuz bir ordinalse, $1+\alpha$ ordinalinin α'ya eşit olduğunu kanıtlayabiliriz. Ama önce "sonsuz ordinal"i tanımlamalıyız. Daha önce sonlu ordinalleri tanımlayalım: ω'nın elemanlarına ***sonlu ordinal*** denir. Sonlu olmayan, yani ω'nın elemanı olmayan ordinallere ***sonsuz ordinal*** denir. Demek ki bir α ordinalinin sonsuz olması için

$$\text{ya } \omega = \alpha \text{ ya da } \omega \in \alpha,$$

$$\omega \le \alpha,\ \omega \subseteq \alpha$$

eşdeğer önermelerinden biri (dolayısıyla hepsi) geçerli olmalı. (Sonuç 4.16.)

Şimdi oldukça şaşırtıcı bir sonuç kanıtlayalım:

Önsav 5.7. *Eğer α sonsuz bir ordinalse ve n bir doğal sayıysa o zaman $n+\alpha = \alpha$'dır.*

Kanıt: α sonsuz bir ordinal olsun. Önsav 5.3'ye göre $1+\alpha = \alpha$ eşitliğini kanıtlamak yeterli, gerisi n üzerine tümevarımla gelir. Önsav 5.6'e göre, bir β ordinali için $\alpha = \omega + \beta$. Demek ki,

$$1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha.$$

Yukarda, Önsav 5.3'yi ve daha önce kanıtladığımız $1 + \omega = \omega$ eşitliğini kullandık. □

Demek ki sonlu ordinaller sonsuz ordinaller tarafından soldan yutuluyorlar. İlerde daha da şaşırtıcı bir teorem kanıtlayacağız, bkz. Teorem 5.29 ve Sonuç 5.31.

5.5.3 Toplama ve Sıralama

Aynı küme üzerinde çeşitli işlemler ve ilişkiler tanımlanmışsa, bu işlem ve ilişkiler arasında ilişkiler aramak ve hatta bulmak lazımdır, yoksa aynı küme üzerinde birbirinden bağımsız birkaç matematiksel yapı olur ki, o zaman da gereksiz yere kalabalık etmiş olurlar. Bu bölümde ordinallerde toplamayla sıralama arasındaki ilişkileri irdeleyeceğiz.

Önsav 5.8. *Her α ve β ordinali için, $\alpha \le \alpha + \beta$ ve $\beta \le \alpha + \beta$. Ayrıca eğer $\beta \neq 0$ ise $\alpha < \alpha + \beta$.*

Kanıt: $\alpha + \beta$ ordinalinin tanımına bakılacak olursa, α ve β sıralamalarının $\alpha + \beta$'nın birer altkümesiyle eşyapısal oldukları hemen anlaşılır. Nitekim α, $\alpha + \beta$'nın bir başlangıç dilimine eşyapısaldır; β da bu dilimden geri kalana eşyapısaldır. Teorem 4.15'e göre $\alpha \leq \alpha + \beta$ ve $\beta \leq \alpha + \beta$.

Eğer $\beta \neq 0 = \varnothing$ ise, toplamanın tanımından da belli ki, α'nın eşyapısal olduğu başlangıç dilimi, $\alpha + \beta$'nın öz başlangıç dilimidir (yani $\alpha + \beta$'ya eşit değildir), çünkü $\alpha + \beta$'nın α başlangıç diliminden hemen sonra gelen elemanı α'dır; dolayısıyla $\alpha \in \alpha + \beta$, yani $\alpha < \alpha + \beta$. □

Eğer $\beta \neq 0$ ise $\alpha < \beta + \alpha$ eşitsizliğinin doğru olmayabileceğini $1 + \omega = \omega$ eşitliğinden biliyoruz. Can sıkıcı ama böyle, yapacak bir şey yok.

Gene $1 + \omega = \omega = 0 + \omega$ eşitliğinden ordinal toplamasında her zaman sağdan sadeleştirmenin olmadığını biliyoruz. Peki ya soldan sadeleşme var mı? Evet! Bu Önsav 5.6'te kanıtlandı.

Önsav 5.9. *Her α, β ve γ ordinali için $\beta < \gamma$ ise o zaman $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ ve $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$ olur. Ayrıca, eğer $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ ise o zaman $\beta < \gamma$ olur.*

Kanıt: Birinci eşitsizliğin olası birçok kanıtından biri: $\beta < \gamma$ varsayımını yapalım. Önsav 5.6'e göre, bir δ ordinali için $\beta + \delta = \gamma$ eşitliğini sağlanır. Demek ki, birinci eşitsizliği kanıtlamak için,

$$\alpha + \beta < \alpha + (\beta + \delta)$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Önsav 5.3'ye göre,

$$\alpha + \beta < (\alpha + \beta) + \delta$$

eşitsizliğini kanıtlamak aynı şey. Önsav 5.8'nin ikinci kısmına göre, bu eşitsizliğin sağlanması için δ'nın 0 olmaması gerekir, ki β, γ'ya eşit olmadığından, δ, 0 olamaz.

Ayrıca, Önsav 5.8'ye göre $\alpha \leq \delta + \alpha$ olduğundan, yukarda kanıtlanandan $\beta + \alpha \leq \beta + (\delta + \alpha)$ çıkar. Demek ki,

$$\beta + \alpha \leq \beta + (\delta + \alpha) = (\beta + \delta) + \alpha = \gamma + \alpha.$$

İkinci eşitsizlik de kanıtlandı.

Şimdi, $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ varsayımını yapalım. Demek ki bir $\delta > 0$ ordinali için $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + \gamma$ ve

$$\alpha + \gamma = (\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta).$$

Şimdi Önsav 5.6'e göre $\gamma = \beta + \delta$ ve birinci kısma göre

$$\beta = \beta + 0 < \beta + \delta = \gamma$$

olur. □

Alıştırmalar.

5.1. $\alpha \le \gamma$ ve $\beta \le \delta$ ve ise $\alpha + \beta \le \gamma + \delta$ eşitsizliğini kanıtlayın.

5.2. $\alpha + \beta \le \alpha + \gamma$ ise $\beta \le \gamma$ eşitsizliğini kanıtlayın.

5.5.4 Limit Ordinaller ve Toplama

Şimdi çok ilginç bir teorem kanıtlayacağız. Ama önce bu aşamada okura kolay gelmesi gereken bir alıştırma:

Alıştırmalar.

5.3. α ve β birer ordinal olsunlar. $\alpha + \beta$ ordinalinin limit ordinal olması için gerek ve yeter koşulun ya β'nın bir limit ordinal olması, ya da β'nın 0 ve α'nın bir limit ordinal olması olduğunu kanıtlayın.

Teorem 5.10. *Her sonsuz α ordinali bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $\lambda + n$ olarak tek bir biçimde yazılabilir. Bu λ, α'dan küçükeşit en büyük limit ordinaldir.*

Kanıt: Eğer varsa, λ'nın α'dan küçükeşit en büyük limit ordinal olması gerektiği malum. Bu bilgi ışığında λ'yı arayalım. A, α'dan küçükeşit limit ordinaller kümesi olsun. A bir ordinal kümesi olduğundan, $\bigcup A$ da bir ordinaldir (Teorem 4.12). Ayrıca A'nın elemanları limit ordinaller olduğundan, $\bigcup A$ da bir limit ordinaldir (Alıştırma 9). A'nın her elemanı α'nın bir altkümesi olduğundan, $\bigcup A$ da α'nın bir altkümesidir. Demek ki $\bigcup A \le \alpha$. Bundan böyle $\bigcup A = \lambda$ olsun. Önsav 5.6'e göre $\lambda + \beta = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir β ordinali vardır. Şimdi β'nın sonlu olduğunu, yani ω'nın bir elemanı olduğunu kanıtlayacağız. Eğer β sonsuzsa, yani $\beta \notin \omega$ ise, o zaman ya $\beta = \omega$ ya da $\omega \in \beta$'dır. Her iki durumda da $\omega \le \beta$. O zaman $\lambda + \omega \le \lambda + \beta = \alpha$ ve yukardaki alıştırmaya göre $\lambda + \omega$, α'dan küçükeşit bir **limit** ordinaldir. Ama o zaman da, $\lambda + \omega \subseteq \bigcup A = \lambda$ olur, bir çelişki.

Demek ki $\beta = n$, bir doğal sayıdır ve $\alpha = \lambda + n$. Eğer λ' limit ordinali ve n' doğal sayısı için $\alpha = \lambda' + n'$ ise, λ' de aynen λ gibi α'dan küçükeşit en büyük ordinal olduğundan, $\lambda' = \lambda$'dır. Şimdi,

$$\lambda + n = \alpha = \lambda' + n' = \lambda + n'$$

eşitliğinden ve Önsav 5.6'dan $n = n'$ çıkar. □

Bu teoremden şu ilginç sonuç çıkar. α ve β iki sonsuz ordinal olsun. α'yı teoremdeki gibi $\lambda + n$ olarak yazalım. O zaman, Önsav 5.7'ya göre,

$$\alpha + \beta = (\lambda + n) + \beta = \lambda + (n + \beta) = \lambda + \beta$$

Demek ki sonsuz ordinalleri toplarken, soldaki ordinalin bir limit ordinal olduğunu varsayabiliriz.

5.5.5 Tümevarımla Toplama

Daha önce $\alpha+0 = \alpha$ ve $\alpha+S(\beta) = S(\alpha+\beta)$ eşitliklerini kanıtladık. [Sİ]'de doğal sayılarda toplamayı bu iki formülle tümevarım yöntemiyle tanımlamıştık, çünkü her doğal sayı ya 0'a eşittir ya da bir β doğal sayısı için $S(\beta)$ şeklinde yazılabilir. Ordinallerde bunun doğru olmadığını biliyoruz, buınların dışında bir de limit ordinaller var. Demek ki eğer her λ limit ordinali için $\alpha+\lambda$ ordinal toplamını λ'dan küçük β ordinalleri için $\alpha + \beta$ toplamları cinsinden yazabilirsek, o zaman ordinal toplamasını doğal sayılarda olduğu gibi tümevarımla tanımlayabiliriz.

Alıştırma 4.6'da okurdan her λ limit ordinalinin kendisinden küçük ordinallerin bileşimi olduğunu kanıtlamasını istemiştik:

$$\lambda = \cup_{\beta<\lambda}\beta.$$

Demek ki,

$$\alpha + \lambda = \alpha + (\cup_{\beta<\lambda}\beta).$$

Bu aşamada ne kanıtlanması gerektiği belli:

$$\alpha + (\cup_{\beta<\lambda}\beta)$$

toplamındaki soldaki α'yı bileşimin içine dağıtıp

$$\alpha + \lambda = \alpha + (\cup_{\beta<\lambda}\beta) = \cup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta).$$

yazabilmek istiyoruz. Bunu hemen kanıtlayalım.

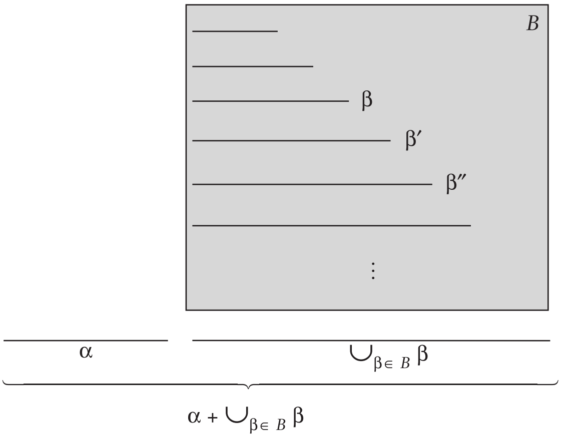
Önsav 5.11. *Eğer B bir ordinal kümesiyse, $\alpha + (\cup_{\beta\in B}\beta) = \cup_{\beta\in B}(\alpha + \beta)$.*

Kanıt: Önce Teorem 4.12'den dolayı eşitliğin sağındaki ve solundaki kümelerin birer ordinal olduklarına dikkatiniz çekerim. Demek ki

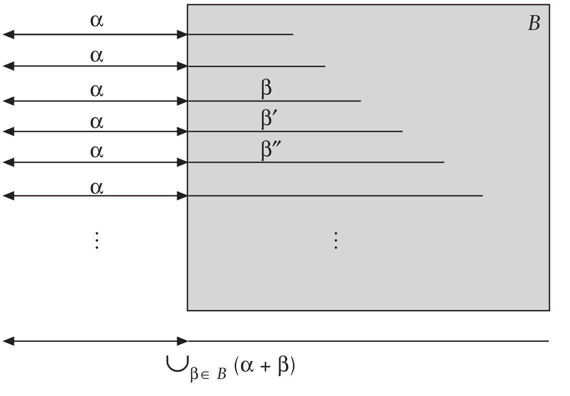
$$\alpha + (\cup_{\beta\in B}\beta) \text{ ve } \cup_{\beta\in B}\,(\alpha + \beta).$$

kümelerindeki sıralamaların eşyapısal olduklarını kanıtlamalıyız.

Önce $\alpha + (\cup_{\beta\in B}\beta)$ kümesinin sıralamasına bakalım. "Bir resim bin söze denktir" özdeyişinden hareket ederek bu kümenin ve sıralamasının bir resmini çizelim.



Şimdi $\bigcup_{\beta\in B}(\alpha+\beta)$ kümesini ve sıralamasını resmedelim. Bu sefer, önce $\alpha+\beta$ işlemlerini yapıp sonra bu toplamların bileşimini alacağız.



Görüldüğü gibi (!), her iki sıralama da aynı!

Bu görsel kanıttan memnun olmayanlar için daha biçimsel bir kanıt sunalım. B'nin boşküme olmadığını ve B'de boşküme olmadığını varsayabiliriz.

Önce $\alpha+(\cup_{\beta\in B}\beta)$ ordinalinden bir γ elemanı alalım. γ'nın

$$\cup_{\beta\in B}(\alpha+\beta)$$

kümesinde olduğunu kanıtlayacağız. Elbette $\gamma\geq\alpha$. Demek ki

$$\alpha\leq\gamma<\alpha+(\cup_{\beta\in B}\beta)$$

ve bir $\delta\in\cup_{\beta\in B}\beta$ için,

$$\gamma=\alpha+\delta$$

olur. Ayrıca $\delta\in\cup_{\beta\in B}\beta$ olduğundan, bir $\beta\in B$ için $\delta\in\beta$'dır. Demek ki $\gamma=\alpha+\delta<\alpha+\beta$, yani $\gamma\in\alpha+\delta\in\alpha+\beta$.

Şimdi $\cup_{\beta \in B}(\alpha+\beta)$ ordinalinden bir γ elemanı alalım. γ'nın

$$\alpha + (\cup_{\beta \in B}\beta)$$

kümesinde olduğunu kanıtlayacağız. Bir $\beta \in B$ için

$$\gamma \in \alpha + \beta$$

olur. γ'nın α'dan büyükeşit olduğunu varsayabiliriz, çünkü $\gamma < \alpha$ olursa, o zaman $\gamma \in \alpha \subset \alpha + (\bigcup_{\beta \in B} \beta)$ olur. Demek ki $\gamma \geq \alpha$ ve bir $\delta \in \beta$ için, $\gamma = \alpha + \delta$ olur. Öte yandan,

$$\beta \subseteq \cup_{\beta \in B}\beta$$

olduğundan, $\beta \leq \cup_{\beta \in B}\beta$ (Teorem 4.15). Demek ki

$$\gamma = \alpha + \delta < \alpha + \beta \leq \alpha + \cup_{\beta \in B}\beta$$

olur. □

Ve sözverdiğimiz gibi toplamanın tümevarımsal tanımı:

Sonuç 5.12. *Ordinal toplaması,*

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ \alpha + S(\beta) &= S(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha + \lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} (\alpha + \beta)$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir. Bir başka deyişle, eğer A ve B birer ordinalse, öyle yeterince büyük bir C ordinali vardır ki, her $\alpha \in A$ ve $\beta \in B$ için,

$$f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

kuralıyla tanımlanmış $f : A \times B \to C$ fonksiyonu, yukardaki üç eşitliği sağlayan ve $A \times B$ kartezyen çarpımından C'ye giden biricik fonksiyondur ve ayrıca $f(\alpha, \beta)$'nın değeri α'yı içeren A'dan ve α'yı içeren B'den bağımsızdır. □

Birçok kitapta ordinallerin toplamı yukardaki formüllerle tanımlanır. Biz, daha doğal bulduğumuz bir yolu seçtik.

Bu sonuç, tümevarım ilkesiyle kanıtlanacak teoremlerde çok büyük kolaylık sağlar.

5.5.6 Kofinallik

α bir ordinal ve $A \subseteq \alpha$ olsun. Eğer her $\beta \in \alpha$ için, $\beta < \gamma$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in A$ varsa, A'ya α'da ***kofinal*** ya da α'nın ***kofinal altkümesi*** denir. Eğer $A \subseteq B \subseteq \alpha$ ise ve A, α'da kofinalse, B de α'da kofinaldir elbette. Demek ki kofinal kümelerin küçükleri makbuldür. Ancak limit ordinallerin kofinal bir altkümesi olduğunu okurun dikkatine sunarız. (Alıştırma 5.5.6.)

Örneğin, kareler kümesi ω'da kofinaldir. $\{\omega + 3n : n \in \omega\}$ kümesi $\omega 2$'de kofinaldir. Ordinalleri ve üs almayı öğrediğimizde, $\{\omega n : n \in \omega\}$ kümesinin ω^2'de (Alıştırma 13), $\{\omega^n : n \in \omega\}$ kümesinin de ω^ω'de kofinal olduğunu (Önsav 5.27) göreceğiz.

Alıştırmalar.

5.4. Ancak limit ordinallerin kofinal bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.

5.5. α bir ordinal ve A, $B \subseteq \alpha$ olsun. Eğer her $x \in A$ için

$$x \leq y \in B$$

ilişkilerini sağlayan bir y varsa ve A, α'da kofinalse, o zaman B'nin de α'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

5.6. λ bir limit ordinal olsun. $A \subseteq \lambda$ için, A'nın λ'da kofinal olması için yeter ve gerek koşulun $\lambda = \bigcup A$ eşitliği olduğunu kanıtlayın. λ bir limit ordinalse, λ'nın λ'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

5.7. A, en büyük elemanı olmayan bir ordinaller kümesiyse, A'nın $\bigcup A$'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

5.8. α ve λ ordinal olsunlar. λ limit ordinal olsun. $\alpha + \lambda$ ordinalinin limit ordinal olduğunu biliyoruz (Alıştırma 3).

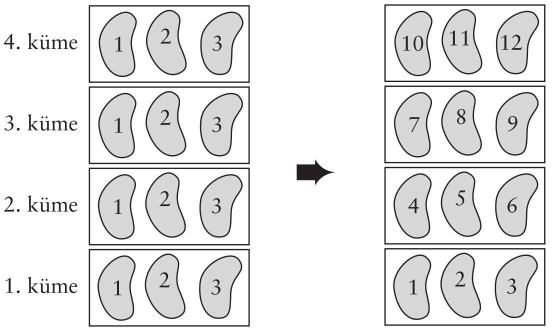
$$\{\alpha + \beta : \beta \in \lambda\}$$

altümesinin $\alpha + \lambda$'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

5.6 Ordinallerde Çarpma İşlemi

5.6.1 Çarpmanın Tanımı

Gene ilkokul yıllarımızdan başlayalım. İlkokulda doğal sayıların çarpımını nasıl öğrendiğinizi anımsayın. $3 \times 4 = 12$ eşitliği için her biri içinde üç fasulye barındıran dört küme üstüste konur ve bütün fasulyeler teker teker sayılır.



Yukardaki şekilde fasulyeleri saymaya en alttan ve en soldan başladık ve sağa doğru gittik. En sağa ulaştığımızda bir üst sıranın tekrar en solundan başladık. Yani fasulyeleri yatay, fasulye kümelerini dikey sıraya dizdik, önce doğuya sonra kuzeye giderek saydık.

Ordinaller de işte aynen böyle çarpılır.

α ve β iki ordinal olsun. Her birinin içinde α tane fasulye bulunan β tane fasulye kümesini üstüste koyup yukardaki "önce doğu sonra kuzey" yöntemiyle sayalım. Burada saymakla aslında iyisıralamayı kastediyoruz.

Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz. Önce tanım planımızı açıklayalım: α ve β, çarpımını tanımlayacağımız iki ordinal olsun. Ordinal olduklarından, α ve β iyisıralanmış kümelerdir. Önce $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımını iyisıralayacağız. Her iyisıralama gibi, iyisıralanmış $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımı da bir ordinale eşyapısaldır. $\alpha\beta$ çarpımını, $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımının eşyapısal olduğu ordinal olarak tanımlayacağız.

Bölüm 1.2.6'da X ve Y sıralı kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımının ***alfabetik sıralama*** denilen yöntemle nasıl sıralanabileceğini görmüştük. Ayrıca Bölüm 3.2.3'te eğer X ve Y iyisıralı kümelerse, bu alfabetik sıralamanın $X \times Y$'yi iyisıraladığını görmüştük.

Ordinaller sözkonusu olduğunda (nedendir bilinmez!) alfabetik sıralama değil, birazdan tanımlayacağımız ters alfabetik sıralama kullanılır.

$(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralı birer küme olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu sıralamayı koyalım: $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ için,

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak

$$y_1 < y_2 \text{ ya da } y_1 = y_2 \text{ ve } x_1 < x_2$$

ise. Bu, aynen biraz önceki "önce doğu sonra kuzey" sıralamasıdır. (x, y) çiftleri önce y'lere göre sıralanırlar; y'ler eşit olduğunda x'lere bakılır. Bu, gerçekten bir sıralamadır. Bu sıralamaya ***ters alfabetik sıralama*** denir.

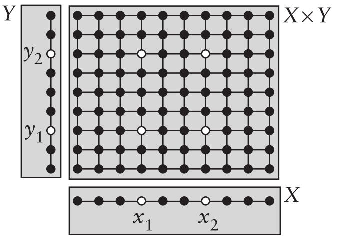
Örneğin eğer $X = \{a, b, c\} = Y$ ise ve her iki sıralamada da

$$a < b < c$$

ise, (x, y) yerine xy yazarsak, ters alfabetik sıralamada,

$$aa < ba < ca < ab < bb < cb < ac < bc < cc$$

olur.



$(x_1, y_1) < (x_2, y_1) < (x_1, y_2) < (x_2, y_2)$

Ayrıca eğer $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iyisıralı kümelerse, $X \times Y$ de ters alfabetik sıralamayla iyisıralanır. Bunun kanıtı çok kolaydır ve aynen alfabetik sıralamada olduğu gibidir.

Her $y \in Y$ için, $X \approx X \times \{y\}$ ve her $x \in X$ için $Y \approx \{x\} \times Y$ olduğundan, eğer her ikisi birden boşküme değilse, X ve Y sıralamaları $X \times Y$'nin içine gömülürler. Eğer Y'nin en küçük elemanı varsa, diyelim y_0, o zaman, $X \times \{y_0\}$, $X \times Y$'nin başlangıç dilimi olduğundan, X, $X \times Y$'nin içine bir başlangıç dilimi olarak gömülür.

Şimdi ordinallere gelelim. α ve β birer ordinal olsun. Demek ki α ve β iyisıralı kümeler. Dolayısıyla $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımı ters alfabetik sıralamayla iyisıralanmıştır. Her iyisıralı küme gibi, iyisıralı $\alpha \times \beta$ kümesi de bir ordinale eşyapısaldır. İşte, ters alfabetik sıralanmış $\alpha \times \beta$'nın eşyapısal olduğu bu ordinale α'yla β'nın ***çarpımı*** denir. α ve β'nın bu çarpımı $\alpha\beta$ ya da $\alpha.\beta$ olarak yazılır. Bir önceki paragrafta, eğer $\alpha, \beta \neq \emptyset$ ise, $\alpha \leq \alpha\beta$ ve $\beta \leq \alpha\beta$ eşitsizliklerinin kanıtlandığına dikkatinizi çekerim.

5.6.2 Temel Sonuçlar

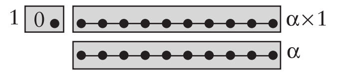
Her şeyden önce, $0.\alpha = \alpha.0 = 0$eşitliği geçerlidir, çünkü

$$0 = \emptyset \text{ ve } \alpha \times \emptyset = \emptyset \times \alpha = \emptyset.$$

Sonra, $1.\alpha = \alpha.1 = \alpha$, çünkü

$$\alpha \times 1 = \alpha \times \{0\} = \{(\beta, 0) : \beta \in \alpha\} \approx \alpha.$$

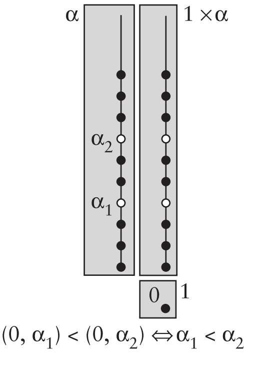
Burada, en sondaki $\approx$ işareti iki (iyi)sıralı küme arasındaki eşyapısallığı belirtiyor. Soldaki kartezyen çarpım ters alfabetik sıralanmış,



ama y koordinatı tek bir değer alabildiğinden ters ya da düz alfabetik sıralamalar arasında bir fark yok. Sağdaki ise bildiğimiz α ordinali... Resim yukarda.

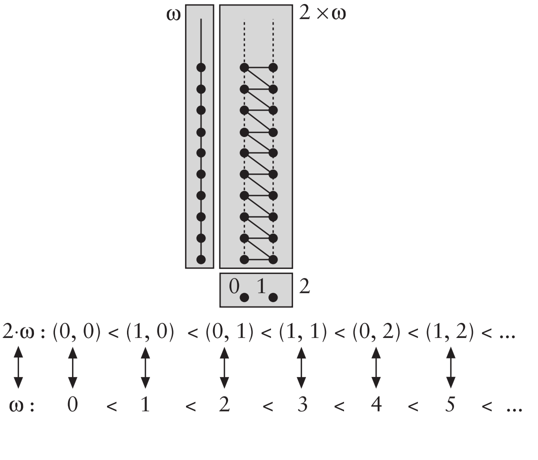
Aynen bunun gibi, $1 \times \alpha \approx \alpha$'dır, yani $1.\alpha = \alpha$ ama bu sefer şekil yatay değil yanda görüldüğü gibi dikey. Dikey mikey, gene de eşyapısal.

$\alpha\beta = \gamma$ gibi bir ordinal eşitliği göstermek için, toplamada da yaptığımız gibi, $\alpha\beta \approx \gamma$ eşyapısallığını göstermek yeterlidir, çünkü eşyapısal iki ordinal eşit olmak zorundadır. Demek ki $\alpha\beta = \gamma$ eşitliği için, ters alfabetik sıralanmış $\alpha \times \beta$ ile γ'nın eşyapısal olduklarını göstermek yeterlidir.



Ordinal çarpmasında da toplamada olduğu gibi bazı sürprizler var. Soldan çarpmayla sağdan çarpma aynı sonucu vermez. Örneğin $2\omega = \omega$'dır, ama $\omega 2 \neq \omega$'dır. (Demek ki ordinallerin çarpımında sağdan sağdeleştirme doğru değil, çünkü $2\omega = 1\omega$ oluyor ama $2 = 1$ olmuyor.)

Önce $2\omega = \omega$ eşitliğini görelim. Tanım gereği $2\omega \approx 2 \times \omega$ olduğundan, $2 \times \omega \approx \omega$ eşyapısallığını göstermek yeterlidir, çünkü o zaman $2\omega \approx \omega$ elde ederiz ve buradan $2\omega = \omega$ çıkar.



Resim yararlıdır, $2\times\omega$'nın ve ters alfabetik sıralamasının bir resmini yaptık bir önceki sayfada. Bu resim ve açıklaması bize ordinal çarpması hakkında bayağı bir sezgi kazandıracak. Resmin açıklaması: En alt kattan başlayarak önce soldan sağa, sonra aşağıdan yukarıya doğru zigzag sıraladığımızı anımsayın. $2\times\omega$ kümesi, ters alfabetik sıralamayla,

$$(0,\,0) < (1,\,0) < (0,\,1) < (1,\,1) < (0,\,2) < (1,\,2) < \ldots$$

diye sıralanmış, aynen

$$\omega : 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$$

sıralaması gibi. Daha biçimsel olarak, $2\times\omega$ iyisıralamasıyla ω arasındaki eşyapı eşlemesi, $f(i,\,j) = 2j+i$ kuralıyla belirlenen

$$f : 2 \times \omega \to \omega$$

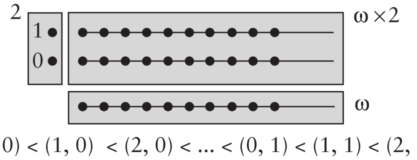
fonksiyonuyla verilmiş. (Herhangi iki iyisıralama arasında en fazla bir eşyapı eşlemesi olabilir.) Demek ki $2\omega \approx 2 \times \omega \approx \omega$ ve, 2ω ile ω eşyapısal ordinal olduklarından eşittirler.

Şimdi de $\omega 2$'nin nasıl bir sıralama olduğunu anlayalım.

$$\omega 2 \neq \omega$$

eşitsizliğini göreceğiz.

$\omega 2 \approx \omega\times 2$ olduğundan, bu kez $\omega\times 2$'nin ters alfabetik sıralamasına bakmak gerekiyor, yani bu kez ω yatay eksen, $2 = \{0,\,1\}$ ise dikey eksen olacak. Şekil aşağıda.



ω ×2 : (0, 0) < (1, 0) < (2, 0) < ... < (0, 1) < (1, 1) < (2, 1) < ...

$(0,\,0)$'dan başlayarak sağa gidiyoruz. İkinci koordinatı 0 olan $(n,\,0)$ çiftlerini bitirdiğimizde, ikinci koordinatı 1 olan $(n,\,1)$ çiftlerine sıra geliyor.

$\sqcup$ simgesinin ayrık kümelerin bileşimini simgelediğini anımsayarak,

$$\omega \times 2 = \omega \times \{0,\,1\} = \omega \times \{0\} \sqcup \omega \times \{1\}$$

olarak yazabiliriz. Ters alfabetik sıralamada, $\omega \times \{0\}$ kümesinin her elemanı $\omega \times \{1\}$ kümesinin her elemanından daha küçüktür. Ayrıca $\omega \times 2$'nin hem $\omega\times\{0\}$ altsıralaması hem de $\omega\times\{1\}$ altsıralaması ω sıralamasıyla eşyapısaldır. Yani $\omega\times 2$ sıralamasında ω'nın bir kopyası olan $\omega\times\{1\}$, gene ω'nın bir kopyası olan $\omega \times \{0\}$'dan sonra konulmuştur, aynen $\omega + \omega$'da olduğu gibi... Demek ki $\omega 2 \approx \omega \times 2 \approx \omega + \omega$, yani $\omega 2 = \omega + \omega \neq \omega$.

Demek ki ordinaller çarpımında $\alpha\beta = \beta\alpha$ eşitliği her zaman doğru değildir, yani çarpma işlemi değişmeli değildir. Toplama da değişmeli değildi anımsarsanız.

Öte yandan $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ eşitliği (neyse ki!) doğrudur.

Önsav 5.13. *Eğer α , β ve γ birer ordinalse, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ olur.*

Kanıt: $(\alpha\beta)\gamma$ ordinali, her bir kartezyen çarpımın ters alfabetik sıralanmış olduğu $(\alpha \times \beta) \times \gamma$ sıralamasıyla eşyapısaldır. $\alpha(\beta\gamma)$ ordinali ise, kartezyen çarpımların gene ters alfabetik sıralanmış olduğu $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ sıralamasıyla eşyapısaldır. Dolayısıyla $(\alpha\times\beta)\times\gamma \approx \alpha\times(\beta\times\gamma)$ eşyapısallığını kanıtlamalıyız.

$(\alpha \times \beta) \times \gamma$ ile $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ arasında doğal bir eşleme vardır,

$$f((a,\, b),\, c) = (a,\, (b,\, c))$$

eşlemesi. Bu eşlemenin sıralamaya saygı duyduğunu kanıtlamak istiyoruz. Demek ki

$$((a,\, b),\, c) < ((a',\, b'),\, c') \Leftrightarrow (a,\, (b,\, c)) < (a',\, (b',\, c'))$$

önermesini kanıtlamalıyız. Başlayalım:

$((a,\, b),\, c) < ((a',\, b'),\, c')$ eşitsizliğini varsayalım.

$$(a,\, (b,\, c)) < (a',\, (b',\, c'))$$

eşitsizliğini kanıtlayacağız. Eğer $c < c'$ ise $(b,\, c) < (b',\, c')$ olacağından, bu durumda sorun yok. Bundan böyle $c = c'$ eşitliğini varsayalım. O zaman $(a,\, b) < (a',\, b')$ olmak zorunda. Eğer $b < b'$ ise, $(b,\, c) = (b,\, c') < (b',\, c')$ olur, bu durumda da sorun yok. Bundan böyle bir de ayrıca $b = b'$ eşitliğini varsayalım. O zaman $a < a'$ olmak zorunda. O zaman da

$$(a,\, (b,\, c)) < (a',\, (b,\, c)) = (a',\, (b',\, c'))$$

olur ve bu durumda da sorun yok. $(a,\, (b,\, c)) < (a',\, (b',\, c'))$ eşitsizliğinden hareketle $((a,\, b),\, c) < ((a',\, b'),\, c')$ eşitsizliğini kanıtlamayı okura bırakıyoruz. $\square$

$(1+1)\omega = 2\omega = \omega \neq \omega + \omega = 1\omega + 1\omega$ eşitliklerinden çarpmanın sağdan toplamaya dağılmadığını biliyoruz, yani

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

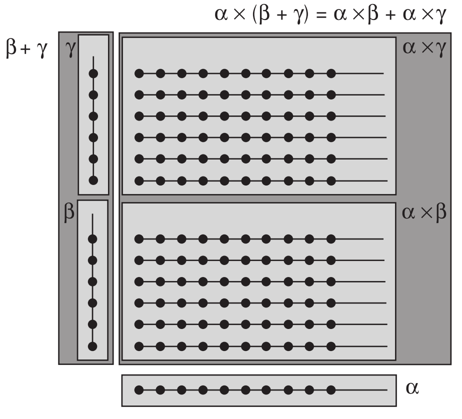
eşitliği her zaman doğru değil. Öte yandan

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

eşitliği doğrudur:

Önsav 5.14. *Eğer α, β ve γ birer ordinalse, $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.*

Kanıt: $\alpha \times (\beta + \gamma) \approx \alpha \times \gamma + \alpha \times \gamma$ eşyapısallığını kanıtlamalıyız. Aşağıdaki resmin yararlı olacağını ve daha fazla söze gerek olmayacağını umuyoruz. Gene de bir iki laf edelim:



$\alpha \times (\beta+\gamma)$'nın elemanlarını soldan sağa ve aşağıdan yukarı sayarken zorunlu olarak önce $\alpha \times \beta$'nın elemanlarını sayıyoruz, ardından $\alpha \times \gamma$'nın elemanlarını; bu da bize $\alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$ sıralamasını verir. □

Sonuç 5.15. *Eğer α ve β birer ordinalse, $\alpha(\beta+1) = \alpha\beta + \alpha$ olur.* □

Sonuç 5.16. *Doğal sayıların doğal sayı olarak ve ordinal olarak çarpımı eşittir.*

Kanıt: 0 ve 1'ile çarpmanın uyuştuklarını gördük. Sonuç 5.15'ten dolayı n ile m'nin çarpımları uyuşuyorsa, n ile $m+1$'in (yani $S(m)$'nin) de uyuşuyordur. Tümevarımla kanıt işi bitirir. □

5.7 Çarpma ve Sıralama

Toplamayla çarpma arasındaki ilişki Önsav 5.14'de verilmişti. Şimdi sıralamayla çarpma arasındaki ilişkiyi irdeleyelim.

Önsav 5.17. *Eğer $\alpha < \beta$ ordinallerse, her $0 < \gamma$ ordinali için,*

$$\gamma\alpha < \gamma\beta, \alpha \leq \gamma\alpha \text{ ve } \alpha \leq \alpha\gamma$$

olur.

Kanıt: $\alpha < \beta$ olduğundan, bir $0 < \delta$ ordinali için, $\beta = \alpha + \delta$ (Önsav 5.6). Şimdi, Önsav 5.14'ye göre,

$$\gamma\beta = \gamma(\alpha + \delta) = \gamma\alpha + \gamma\delta > \gamma\alpha.$$

Burada ayrıca Önsav 5.8'yi kullandık.

Kanıtı $\gamma \times \alpha$'yı $\gamma \times \beta$'nın içine gömerek de yapabilirdik.

α, $\gamma\alpha$'nın (ya da $\gamma \times \alpha$'nın) içine $\{0\} \times \alpha$ olarak gömüldüğünden $\alpha \leq \gamma\alpha$.

$\alpha \leq \alpha\gamma$ eşitsizliğini, α'yı $\alpha \times \gamma$'nın içine $\alpha \times \{0\}$ olarak gömerek elde ederiz.
□

Sonuç 5.18. *α, β, γ ordinalleri için, $\gamma\alpha < \gamma\beta$ ise, o zaman $\alpha < \beta$. Ayrıca $\gamma > 0$ ve $\gamma\alpha = \gamma\beta$ ise, o zaman $\alpha = \beta$.*

Kanıt: İlk önerme: $\gamma = 0$ olamaz. $\alpha = \beta$ da olamaz. Eğer $\alpha > \beta$ olsaydı, Önsav 5.17'e göre $\gamma\alpha > \gamma\beta$ olurdu, çelişki.

İkinci önerme: $\alpha < \beta$ olsaydı, Önsav 5.17'e göre $\gamma\alpha < \gamma\beta$ olurdu, çelişki.□

Önsav 5.19. *Eğer α ve β ordinalleri $\alpha \leq \beta$ eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her γ ordinali için, $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ olur.*

Kanıt: $\alpha \leq \beta$ olduğundan, $\alpha \times \gamma$ sıralaması $\beta \times \gamma$ sıralamasının bir altkümesi. Demek ki $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$'nın içine gömülüyor. Teorem **??**'e göre $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ olur. □

Önsavdaki $\leq$ küçükeşitlik simgesini $<$ simgesiyle değiştiremeyiz, çünkü, örneğin $1 < 2$ ama $\omega = 2\omega$. Sağdan sadeleştirmenin doğru olmadığı aynı eşitlikten belli. Soldan sadeleştirme doğru ama (Sonuç 5.18).

5.7.1 Ordinallerde Bölme

Ordinallerde doğal sayılardakine benzer bir bölme işlemi vardır. Nasıl doğal sayılarda, 25'i 7'ye,

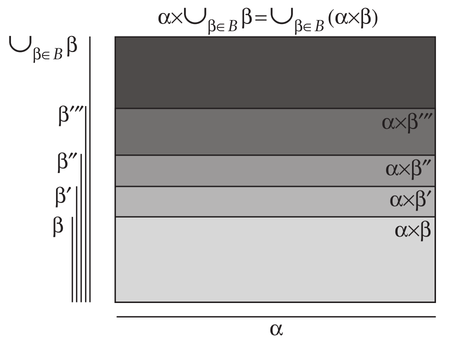
$$25 = 7 \times 3 + 4$$

olarak kalanlı bölebiliyorsak, ordinallerde de buna benzer bir bölme yapabiliriz.

Bölme teoremini kanıtlamadan önce daha sonra da ihtiyacımız olacak olan teknik bir önsavı aradan çıkaralım:

Önsav 5.20. *B bir ordinaller kümesi olsun. α bir ordinal olsun. O zaman $\alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta) = \bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta$ olur.*

Kanıt: Aslında kanıt, aşağıdaki şekilden hemen hemen bariz olmalı. Okurun matematiksel bir kanıtla çok zaman geçirebileceği olasılığını dikkate alarak biçimsel kanıtı sunuyoruz.



Önce ordinallerde $\in$, $<$ ve $\subset$ ilişkilerinin eşdeğer olduklarını anımsatırız (Sonuç 4.16). $\beta \in B$ herhangi bir ordinal olsun.

$$\beta \subseteq \bigcup_{\beta \in B} \beta$$

olduğundan,

$$\beta \leq \bigcup_{\beta \in B} \beta.$$

Önsav 5.17'ye göre, $\alpha\beta \leq \alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta)$. Demek ki

$$\alpha\beta \subseteq \alpha \left(\bigcup_{\beta \in B} \beta \right)$$

ve dolayısıyla

$$\bigcup_{\beta \in B} \alpha\beta \subseteq \alpha \left(\bigcup_{\beta \in B} \beta \right).$$

$\subseteq$ işaretinin her iki tarafında da ordinaller olduğundan, $\bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta$ ordinali $\alpha \left(\bigcup_{\beta\in B} \beta\right)$ ordinalinin başlangıç dilimi olmalı. Bu kolay kısım.

Eşitliği tek bir hamlede kanıtlamakta yarar var. Bunun için $\bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta$ ve $\alpha \left(\bigcup_{\beta\in B} \beta\right)$ ordinallerinin birbirlerine izomorf oluğunu kanıtlayacağız. Bunun için de ordinallerin çarpımının tanımına, yani kartezyen çarpımına döneceğiz.

Başlıyoruz: $\alpha \left(\bigcup_{\beta\in B} \beta\right)$ ordinali, tanım gereği, iyisıralanmış $\alpha \times \left(\bigcup_{\beta\in B} \beta\right)$ kartezyen çarpımına izomorftur. İyisıralanmış $\alpha \times \left(\bigcup_{\beta\in B} \beta\right)$ kartezyen çarpımı da başlangıç dilimleri olan $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımlarının birleşimidir, yani

$$\alpha \times \left(\bigcup_{\beta \in B} \beta \right) = \bigcup_{\beta \in B} (\alpha \times \beta)$$

olur. İyi sıralanmış $\bigcup_{\beta\in B}(\alpha\times\beta)$ kümesi de doğal olarak $\bigcup_{\beta\in B}\alpha\beta$ ordinaline izomorftur. Demek ki iyisıralı kümeler olarak,

$$\alpha\left(\bigcup_{\beta\in B}\beta\right)\simeq\alpha\times\left(\bigcup_{\beta\in B}\beta\right)=\bigcup_{\beta\in B}(\alpha\times\beta)\simeq\bigcup_{\beta\in B}\alpha\beta$$

olur. Bir ordinal ancak kendisine izomorf olabileceğinden, bundan,

$$\alpha\left(\bigcup_{\beta\in B}\beta\right)=\bigcup_{\beta\in B}(\alpha\times\beta)\simeq\bigcup_{\beta\in B}\alpha\beta$$

çıkar. □

Şimdi ordinallerde aynen doğal sayılardaki gibi bölme yapabileceğimizi kanıtlayabiliriz.

Teorem 5.21. *α ve β birer ordinal olsunlar. $\beta>0$ olsun. O zaman $\alpha=\beta\gamma+p$ eşitliğini ve $p<\beta$ eşitsizliğini sağlayan bir ve bir tane $(\gamma,\,p)$ ordinal çifti vardır.*

Kanıt: Önce $(\gamma,\,p)$ çiftinin varlığını kanıtlayalım. γ'yı $\beta\gamma\le\alpha$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinal olarak alacağız.

Eğer $\beta\gamma\le\alpha$ ise, Önsav 5.17'ye göre $\gamma\le\alpha$ olmalı (yoksa $\alpha\ge\beta\gamma>\beta\alpha\ge\alpha$, çelişki.) Demek ki,

$$\Gamma=\{\gamma:\beta\gamma\le\alpha\}=\{\gamma\le\alpha:\beta\gamma\le\alpha\}$$

topluluğu bir kümedir ve elbette bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma$ bir ordinaldir (Teorem 4.12). Önsav 5.20'den dolayı

$$\beta(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\beta\gamma\subseteq\alpha$$

(çünkü eğer $\gamma\in\Gamma$ ise $\beta\gamma\le\alpha$ ve $\beta\gamma\subseteq\alpha$). Demek ki $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\in\Gamma$, ve $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma$, Γ'nın en büyük elemanı. Bu elemana γ diyelim. Özet olarak, γ, $\beta\gamma\le\alpha$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinal.

Önsav 5.6'ya göre, $\alpha=\beta\gamma+p$ eşitliğini sağlayan bir p ordinali vardır.

Şimdi p ordinalinin β'dan küçük olduğunu kanıtlayalım. Tersini varsayalım: $p\ge\beta$ olsun. O zaman $p=\beta+\delta$ eşitliğini sağlayan bir δ vardır. Demek ki,

$$\alpha=\beta\gamma+p=\beta\gamma+(\beta+\delta)=(\beta\gamma+\beta)+\delta=\beta(\gamma+1)+\delta\ge\beta(\gamma+1)$$

ve γ'dan daha büyük olan $\gamma+1$, Γ'nın bir elemanı, bir çelişki. $p<\beta$ eşitsizliği kanıtlanmıştır.

Şimdi (γ, p) çiftinin biricikliğini kanıtlayalım. $\beta\gamma+p = \beta\gamma_1+p_1$ eşitliğini ve $p, p_1 < \beta$ eşitsizliklerini varsayalım. $p = p_1$ ve $\gamma = \gamma_1$ eşitliklerini kanıtlayacağız. Eğer $\gamma = \gamma_1$ eşitliğini kanıtlarsak, o zaman sadeleştirerek (Önsav 5.6)

$$p = p_1$$

eşitliğini elde ederiz. Demek ki $\gamma = \gamma_1$ eşitliğini kanıtlamalıyız. $\gamma \geq \gamma_1$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman öyle bir δ vardır ki $\gamma = \gamma_1 + \delta$ (Önsav 5.6). Demek ki,

$$\begin{aligned}\beta\gamma_1 + p_1 = \beta\gamma + p &= \beta(\gamma_1 + \delta) + p \\ &= (\beta\gamma_1 + \beta\delta) + p = \beta\gamma_1 + (\beta\delta + p).\end{aligned}$$

Sadeleştirerek $\beta > p_1 = \beta\delta + p \geq \beta\delta$ elde ederiz. Dolayısıyla $\delta = 0$ ve

$$\gamma = \gamma_1 + \delta = \gamma_1$$

olur. □

Sonuç 5.22. *Eğer λ bir limit ordinalse, bir ve bir tek γ ordinali için $\lambda = \omega\gamma$ olur.*

Kanıt: Yukardaki teoreme göre bir γ ordinali ve bir n doğal sayısı için $\lambda = \omega\gamma + n$ olur. Limit ordinalin tanımına göre, $n = 0$ olmalı. □

Sonuç 5.23. *Eğer λ bir limit ordinalse, her n doğal sayısı için, $n\lambda = \lambda$'dır.*

□

5.7.2 Çarpmanın Tümevarımsal Tanımı

Önsav 5.20'den (ve elbette Sonuç 14.3'ten) ordinallerde çarpmanın tümevarımsal bir tanımını elde edebiliriz.

Sonuç 5.24. *Ordinal çarpması*

$$\begin{aligned}&\alpha 0 = 0,\\ &\alpha\ S(\beta) = \alpha\beta + \alpha,\end{aligned}$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha\gamma = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha\beta$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir. Bir başka deyişle, eğer A ve B birer ordinalse ve C, $A \times B$ iyisıralamasına eşyapısal bir ordinal içeren bir ordinalse, o zaman, her $\alpha \in A$ ve $\beta \in B$ için,

$$f(\alpha,\, \beta) = \alpha\beta$$

kuralıyla tanımlanmış $f : A \times B \to C$ fonksiyonu, yukardaki üç eşitliği sağlayan ve $A \times B$ kartezyen çarpımından C ordinaline giden tek fonksiyondur.

Alıştırmalar.

5.9. α ve β ordinal olsunlar.

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\} \text{ ve } \alpha\beta = \{\alpha\theta + p : \theta < \beta \text{ ve } p < \alpha\}$$

eşitliklerini kanıtlayın.

5.10. $(\omega 2)\omega = \omega\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

5.11. $(\omega + 1)\omega = \omega\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

5.12. α bir ordinal olsun. $n \in \mathbb{N}$ için, α^n ordinalini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{n+1} = \alpha^n\alpha.$$

$\{\alpha^n : n \in \omega\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Yerleştirme Aksiyomu kullanılmalı; $\varphi(n,\, z)$ formülü şunu desin: n bir doğal sayıdır ve öyle A ordinaller kümesi ve

$$f : n + 1 \to A$$

eşlemesi vardır ki,
a) $f(0) = 1$ ve
b) her i için, eğer $0 \le i \in n$ ise, $f(i + 1) = f(i)\alpha$ ve
c) $z = f(n)$.

5.13. α bir ordinal olsun. λ bir limit ordinalse, $\alpha\lambda$'nın da limit ordinal olduğunu ve

$$\{\alpha\beta : \beta < \lambda\}$$

'nın $\alpha\lambda$'da kofinal (bkz. Bölüm 5.5.6) olduğunu kanıtlayın.

5.8 Ordinallerde Üs Alma

5.8.1 Yanlış Bir Yöntem

Geçen iki bölümde ordinallerde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlamıştık. α ve β ordinallerini (bu sırayla) toplamak için α sıralamasının sonuna β sıralamasını eklemiştik; çarpmak için ise $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımını ters alfabetik sıralamayla sıralamıştık.

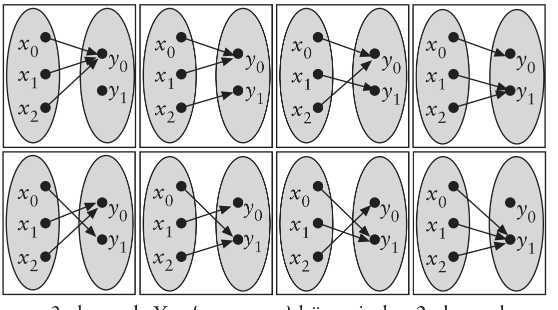
Ya "α üssü β" (yani α^β) ordinalini tanımlamak için ne yapmalı? Toplama ve çarpmaya benzetmeye çalışırsak, "α üssü β kadar" elemanı olduğunu düşündüğümüz bir Z kümesi bulup Z'yi iyisıralamalıyız ve α^β ordinalini de Z'nin bu iyisıralamasına eşyapısal olan biricik ordinal olarak tanımlamalıyız.

Eğer bu dediklerimizi bir de “doğal biçimde” yapmayı başarırsak, o zaman üs alma işleminin toplama ve çarpma işlemleriyle uyumlu olacağını umma hakkına sahip olabiliriz.

Doğal sayılardan esinlenelim. Eğer X ve Y, sırasıyla m ve n elemanı olan sonlu iki kümeyse, n^m tane elemanı olan bir küme bulabilir miyiz? Evet! X’ten Y’ye giden tam tamına n^m tane fonksiyon vardır. Nitekim, eğer

$$X = \{x_0, \ \ldots, \ x_{m-1}\}$$

ise, X’ten Y’ye giden bir f fonksiyonunu belirlemek için, X’in her x_i elemanı için Y’nin bir $f(x_i)$ elemanını belirlemeliyiz. Her bir x_i için tam n tane seçeneğimiz olduğundan, ve toplam m tane x_i olduğundan, X’ten Y’ye giden toplam fonksiyon sayısı tam tamına n^m’dir.

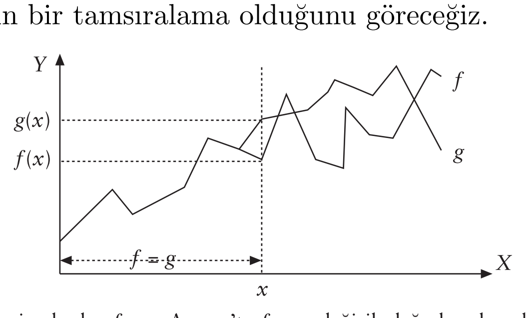


3 elemanlı $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ kümesinden 2 elemanlı $Y = \{y_0, y_1\}$ kümesine giden $2^3 = 8$ fonksiyon.

Şimdi X ve Y iyisıralanmış iki küme olsun. Her iki kümenin sıralamasını da aynı simgeyle, $<$ simgesiyle gösterelim. $Fonk(X, Y)$, X’ten Y’ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. $Fonk(X, Y)$ kümesi üzerine şu $<$ ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$$f < g \Leftrightarrow f \neq g \text{ ve eğer } x, X\text{'in } f(x) \neq g(x)$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük
elemanıysa o zaman $f(x) < g(x)$.
Bu ikili ilişkinin bir tamsıralama olduğunu göreceğiz.



x’ten öncesine kadar $f = g$. Ama x’te f ve g değişik değerler alıyorlar. Eğer $f(x) < g(x)$ ise $f < g$ deniyor. x’ten sonra alınan değerlerin önemi yok. Fonksiyonların ayrıştıkları ilk noktaya bakılıyor.

Sayfanın başındaki resimde, 8 fonksiyonu yukarda tanımlanan ilişkiye göre küçükten büyüğe doğru sıraladığımıza dikkatinizi çekerim. Eğer bu örnekte, bir f fonksiyonunu,

$$(f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2))$$

üçlüsü olarak gösterirsek, o zaman fonksiyonlar küçükten büyüğe doğru (yani soldan sağa doğru) şöyle yazılırlar:

$$(y_0,\ y_0, y_0), (y_0, y_0, y_1), (y_0, y_1, y_0), (y_0, y_1, y_1)$$
$$(y_1,\ y_0, y_0), (y_1, y_0, y_1), (y_1, y_1, y_0), (y_1, y_1, y_1)$$

Eğer y_0 yerine 0, y_1 yerine 1 yazarsak ve parantezleri ve virgülleri atarsak, o zaman fonksiyonlar küçükten büyüğe doğru,

$$000\,,\ 001,\ 010,\ 011$$
$$100\,,\ 101,\ 110,\ 111$$

olarak yazılırlar. Sıralamaya dikkat ettiniz mi? Aynen sayılar gibi (mesela 2 tabanında):

$$0,\ 1,\ 10,\ 11,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111,\ \ldots$$

Bundan da bu tanımın oldukça doğal bir tanım olduğu kanısına varabiliriz.

Yukarda tanımlanan ikili ilişkinin bir tamsıralama olduğunu kanıtlayalım.

1. Hiçbir f fonksiyonu için $f < f$ olamaz, çünkü tanımda $f < g$ olabilmesi için $f \neq g$ olması gerektiği yazıyor.

2. Şimdi $f < g$ ve $g < h$ eşitsizliklerini varsayıp $f < h$ eşitsizliğini kanıtlayalım. f ve g'nin ayrıştıkları ilk nokta x_0 olsun. Demek ki her $x < x_0$ için $f(x) = g(x)$ ama $f(x_0) < g(x_0)$. g ve h'nin ayrıştıkları ilk noktaya da x_1 diyelim. Üç şık var, üçünü de teker teker ele alalım.

Eğer $x_0 < x_1$ ise o zaman x_0'dan küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$, ama $f(x_0) < g(x_0) = h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0'dan küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$ ama $f(x_0) < g(x_0) < h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Eğer $x_1 < x_0$ ise o zaman x_1'den küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$ ama $f(x_1) = g(x_1) < h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Her üç durumda da $f < g$ eşitsizliğini gösterdik.

Demek ki fonksiyonlar kümesinde tanımlanan $<$ ilişkisi bir sıralamadır. Şimdi bu sıralamanın bir tamsıralama olduğunu gösterelim. Ama bu çok kolay... Eğer $f \neq g$, iki fonksiyonsa,

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

boşküme değildir, dolayısıyla (X bir iyisıralama olduğundan) Y'nin

$$f(x) \neq g(x)$$

eşitsizliğini sağlayan bir en küçük x elemanı vardır. Y bir tamsıralama olduğundan ya $f(x) < g(x)$ ya da $g(x) < f(x)$. Birinci durumda $f < g$, ikinci durumda $g < f$.

Buraya kadar her şey yolunda gitti ama bundan ötesi yolunda gitmeyecek. $F(X, Y)$ üzerine tanımladığımız bu tamsıralama ne yazık ki genellikle bir iyisıralama değildir; X ve Y'nin birer iyisıralama olduğu durumda bile.

Bir örnek verelim. $X = \omega$ ve $Y = 2 = \{0, 1\}$ olsun. X'ten Y'ye giden bir fonksiyonu bir 01-dizisi olarak gösterebiliriz. Örneğin,

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

dizisi çift sayılarda 0, tek sayılarda 1 değerini alan fonksiyonu simgelesin. Hatta terimlerin arasındaki virgülleri de atarak bu fonksiyonu,

$$01010101\ldots$$

olarak da gösterebiliriz. Şimdi,

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1111111\ldots.\\
f_1 &= 0111111\ldots\\
f_2 &= 0011111\ldots\\
f_3 &= 0001111\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}$$

fonksiyonlarını alalım. Bunlar ilk n sayıda 0, daha sonra hep 1 değeri alan fonksiyonlar. Bu fonksiyonlar kümesi A olsun. A'nın en küçük elemanı yoktur. Çünkü tüm f_n'lerden küçük fonksiyonların en büyüğü hep 0 değerini alan $0000000\ldots$ fonksiyonudur, bu da A'da değildir. Dolayısıyla bu sıralama bir iyisıralama olmuyor.

Ordinallerde üs almayı, toplama ve çarpmada olduğu gibi o kadar doğal bir biçimde tanımlayamayız. Bu uğraşa bir sonraki bölümde girişeceğiz ve üs almayı tümevarımla kanıtlayacağız.

$F(X, Y)$ kümesi üzerine yukarda tanımladığımız tamsıralama gene de ilginç bir sıralamadır. Bu sıralamayla ilgili bir iki alıştırmayla bitirelim bölümü.

Y iyisıralı bir küme olsun. **Alıştırmalar.**

5.14. $F(\omega, Y)$'nin boş olmayan her altkümesinin en büyük altsınırı olduğunu gösterin. Yani $\varnothing \neq A \subseteq F(\omega, Y)$ ise, öyle bir $f \in F(\omega, Y)$ vardır ki,
a. Her $a \in A$ için, $f \leq a$,
b. Eğer $g \in F(\omega, Y)$ "her $a \in A$ için, $g \leq a$" koşulunu sağlıyorsa o zaman $g \leq f$.

5.15. $F(\omega, Y)$'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük üstsınırı her zaman var mıdır?

5.16. İlk alıştırmayı ω yerine iyisıralı bir X alarak yapın.

5.17. $f,\ g \in F(\omega, Y)$ olsun. Eğer $f \neq g$ ise, n, $f(n) \neq g(n)$ eşitsizliğini sağlayan en küçük doğal sayı olsun. $d(f, g) = 1/2^n$ olsun.

$$d(f, f) = 0$$

olarak tanımlansın. Şunları gösterin:
a. $d(f, g) \geq 0$ ve, $d(f, g)$, ancak ve ancak $f = g$ ise 0 olabilir.
b. $d(f, g) = d(g, f)$.
c. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$. Dolayısıyla d, $F(\omega, Y)$ üzerine bir "mesafe"dir. d mesafesinin (c)'den daha güçlü bir özelliği vardır:
d. $d(f, g) \leq \max\{d(f, h), d(h, g)\}$.

5.8.2 Ordinallerde Üs Alma

Ordinallerde toplama ve çarpmayı oldukça doğal bir biçimde tanımladıktan sonra, bir önceki bölümde üs almayı da aynı doğallıkta yapmaya çalıştık ama beceremedik. Bu bölümde ordinallerde üs almayı tümevarımla tanımlayacağız. Önceki bölümlerde şu sonuçları kanıtlamıştık.

Tümevarımla Ordinal Toplaması Sonuç 5.12. *Ordinal toplaması, α ve β ordinalleri için,*

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ \alpha + S(\beta) &= S(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha + \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta)$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir.

Tümevarımla Ordinal Çarpması Sonuç 5.24 *Ordinal çarpması,*

$$\begin{aligned} \alpha 0 &= 0, \\ \alpha S(\beta) &= \alpha\beta + \alpha, \end{aligned}$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha\gamma = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha\beta$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir.

Ordinallerde üs almayı da bu yöntemle tümevarımla tanımlayacağız.

Tanım: α ve β ordinal olsunlar.

$$\alpha^{0} = 1,$$
$$\alpha^{S(\beta)} = \alpha^{\beta}\alpha$$

olarak tanımlayalım. Eğer λ limit ordinalse,

$$\alpha^{\lambda} = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^{\beta}$$

olsun.

Önsav 5.25. *α ve β birer ordinalse, α^{β} da ordinaldir.*

Kanıt: β üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. α'yı kanıt boyunca sabitliyoruz.

$\beta = 0$ ise, önermenin doğruluğu bariz.

Eğer önerme β için doğruysa $S(\beta)$ için de doğru olduğu çok belli, çünkü

$$\alpha^{S(\beta)} = \alpha^{\beta}\alpha.$$

Şimdi λ bir limit ordinal olsun ve λ'dan küçük β ordinalleri için α^{β}'nın bir ordinal (dolayısıyla bir küme) olduğunu varsayalım. $\alpha^{\gamma} = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^{\beta}$ olduğundan,

$$A(\lambda) = \{\alpha^{\beta} : \beta < \lambda\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlamak yeterlidir, çünkü herhangi bir ordinal kümesinin bileşiminin (hem bir küme hem de) bir ordinal olduğunu (Teorem 4.12) biliyoruz.

$A(\lambda)$ topluluğun bir küme olduğunu göstermek için Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanacağız.

α ordinalini sabitleyelim. Her $\beta < \lambda$ ordinali için, α^{β} ordinalini β cinsinden ifade eden bir formül bulmalıyız. Yani öyle bir $\varphi(x, z)$ formülü bulmalıyız ki, eğer $\beta < \lambda$ ise, $\varphi(\beta, z)$ ancak $z = \alpha^{\beta}$ olduğunda doğru olsun.

$\varphi(\beta, z)$ formülü şunları desin: β bir ordinaldir ve öyle bir A ordinaller kümesi ve bir $f : \beta + 1 \to A$ eşlemesi vardır ki,

a) $f(0) = 1$

b) her γ için eğer $\gamma \in \beta$ ise, $f(\gamma + 1) = f(\gamma)\alpha$

c) her limit $\lambda \in \beta + 1$ için, $f(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\gamma)$ ve

d) $z = f(\beta)$

olur. Buradaki A ordinaller kümesinin (eğer varsa)

$$\{\alpha^{\gamma} : \gamma \leq \beta\}$$

olması gerektiği ve f fonksiyonunun $f(\gamma) = \alpha^\gamma$ kuralıyla verilmesi gerektiği belli. Tek yapmamız gereken, $\beta < \lambda$ için,

$$\{\alpha^\gamma : \gamma \leq \beta\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu göstermek. Bunun için, elbette $A(\beta)$'nın bir küme olduğunu göstermek yeterli.

Şimdi kanıtın ta en başına dönelim ve "*α ve β ordinallerse, α^β da ordinaldir*" önermesi yerine "*α ve β ordinallerse, α^β da ordinaldir* ***ve*** *$A(\beta)$ bir kümedir*" önermesini aynen yukarda yaptığımız gibi kanıtlayalım. Ayrıntıları (eğer kalmışsa!) okura bırakıyoruz. □

α^β ordinaline "α ***üssü*** β" denir.

0^0'ın 1 olarak tanımlandığına dikkatinizi çekerim.

5.8.3 Temel Özellikler

Tahmin edilen ilk eşitlik gerçekten doğru:

$$\alpha^1 = \alpha^{S(0)} = \alpha^0\alpha = 1\alpha = \alpha.$$

İkinci eşitlik de:

$$\alpha^2 = \alpha^{S(1)} = \alpha^1\alpha = \alpha\alpha.$$

Her şey bu kadar doğal seyretmiyor ama; örneğin

$$2^\omega = \bigcup_{n<\omega} 2^n = \omega.$$

Teorem 5.26. *Eğer $1 < \alpha$ ise $\beta < \gamma$ ancak ve ancak $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.*

Kanıt: $\beta < \gamma$ varsayımını yapalım. Sonucu γ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $\gamma = 1$ ise, $\beta = 0$ olmalı. O zaman da $\alpha^\beta = \alpha^0 = 1 < \alpha = \alpha^1 = \alpha^\gamma$ olur.

Önsavın γ ve γ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunu varsayıp, $\gamma + 1$ için kanıtlayalım. $\beta < \gamma + 1$ olsun. Eğer $\beta < \gamma$ ise o zaman tümevarımla $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Eğer $\beta = \gamma$ ise o zaman $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$. Demek ki her iki durumda da $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$. Ama Önsav 5.17'e göre

$$\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma = \alpha^\gamma 1 < \alpha^\gamma\alpha = \alpha^{\gamma+1}.$$

Şimdi λ bir limit ordinal olsun. λ'dan küçük ordinaller için önsavın doğru olduğunu varsayalım. $\beta < \lambda$ olsun. Tanımdan dolayı $\alpha^\beta \subseteq \alpha^\lambda$. Demek ki $\alpha^\beta \leq \alpha^\lambda$. Ama λ limit olduğundan, $\beta + 1 < \lambda$ ve gene $\alpha^{\beta+1} \leq \alpha^\lambda$. Öte yandan Önsav 5.17'e göre $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+1}$. Demek ki $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+1} \leq \alpha^\lambda$.

Şimdi $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ varsayımını yapalım. Eğer $\beta \geq \gamma$ olsaydı, birinci kısma göre $\alpha^\beta \geq \alpha^\gamma$ olurdu, çelişki. Demek ki $\beta < \gamma$. □

Sonraki teoremler için teknik bir sonuca ihtiyacımız var:

Önsav 5.27. *α bir ordinal olsun.*

i. *λ bir limit ordinal ve $B \subseteq \lambda$, λ'da kofinal bir altkümeyse, $\{\alpha^\beta : \beta \in B\}$ kümesi α^λ'da kofinaldir.*

ii. *B bir ordinal kümesiyse $\bigcup_{\beta\in B} \alpha^\beta = \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}$.*

Kanıt: **i.** $\delta \in \alpha^\lambda$ olsun. $\alpha^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma$ olduğundan, bir $\gamma < \lambda$ için $\delta \in \alpha^\lambda$ olur. B, λ'da kofinal olduğundan, bir $\beta \in B$ için $\gamma \leq \beta$ olur. Demek ki, Teorem 5.26'ye $\delta \in \alpha^\lambda \subseteq \alpha^\beta$ olur, yani $\delta < \alpha^\beta$.

ii. Teorem 5.26'ye göre her $\beta \in B$ için $\alpha^\beta \subseteq \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}$. Aynı teorem, eğer B'nin en büyük elemanı varsa eşitliği verir. B'nin en büyük elemanının olmadığını varsayıp ters içindeliği kanıtlayalım. Bu durumda, $\bigcup_{\beta\in B} \beta = \lambda$ bir limit ordinaldir (Alıştırma 10) ve B bu limit ordinalde kofinaldir (bkz. Bölüm 5.5.6). Birinci kısma göre

$$\bigcup_{\beta\in B} \alpha^\beta = \alpha^\lambda = \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}.$$

önsav kanıtlanmıştır. □

Teorem 5.28. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$.

Kanıt: γ üzerine tümevarımla. $\gamma = 0$ için:

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta = \alpha^\beta 1 = \alpha^\beta\alpha^0 = \alpha^\beta\alpha^\gamma.$$

Teoremi γ için doğru olduğunu varsayıp, eşitliği $\gamma + 1$ için kanıtlayalım:

$$\alpha^{\beta+(\gamma+1)} = \alpha^{(\beta+\gamma)+1} = \alpha^{\beta+\gamma}\alpha = (\alpha^\beta\alpha^\gamma)\alpha = \alpha^\beta(\alpha^\gamma\alpha) = \alpha^\beta\alpha^{\gamma+1}.$$

Son olarak λ bir limit ordinal olsun. Teoremdeki eşitliğin λ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunu varsayıp λ için kanıtlayalım. $\beta + \lambda$'nın da bir limit ordinal olduğunu ve

$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta+\gamma}$$

eşitliğini Önsav 5.27.ii'den biliyoruz. Demek ki,

$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta+\gamma} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\beta\alpha^\gamma = \alpha^\beta \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma = \alpha^\beta\alpha^\lambda.$$

Son eşitlikte Önsav 5.20'i kullandık. □

Teorem 5.29. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

Kanıt: γ üzerine tümevarımla.

Eğer $\gamma = 0$ ise, $(\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha^\beta)^0 = 1$ ve $\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\beta 0} = \alpha^0 = 1$.

Eğer eşitlik γ için doğruysa,

$$(\alpha^\beta)^{\gamma+1} = (\alpha^\beta)^\gamma \alpha^\beta = \alpha^{\beta\gamma}\alpha^\beta = \alpha^{\beta\gamma+\beta} = \alpha^{\beta(\gamma+1)}.$$

Eğer γ limit ordinalse ve teorem γ'dan küçük δ ordinalleri için doğruysa,

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha^\beta)^\delta = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta\delta}.$$

Alıştırma 13'e göre $\beta\gamma$ bir limit ordinaldir ve

$$\{\beta\delta : \delta < \gamma\}$$

kümesi $\beta\gamma$'da kofinaldir. Önsav 5.27.i'e göre

$$\{\alpha^{\beta\delta} : \beta \in B\}$$

kümesi $\alpha^{\beta\gamma}$'da kofinaldir. Gene Önsav 5.27.i'e göre

$$\bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta\delta} = \alpha^{\beta\gamma}.$$

Teorem kanıtlanmıştı ki. □

Son olarak, toplama işlemini çok kolaylaştıracak ve $1 + \omega = \omega$ eşitliğini genelleştiren bir eşitlik kanıtlayalım.

Teorem 5.30. *Eğer $\beta < \alpha$ ise, $\omega^\beta + \omega^\alpha = \omega^\alpha$.*

Kanıt: $\alpha = \beta + \gamma$ eşitliğini sağlayan bir $\gamma > 0$ vardır. Demek ki,

$$\begin{aligned}\omega^\beta + \omega^\alpha &= \omega^\beta + \omega^{\beta+\gamma} = \omega^\beta + \omega^\beta\omega^\gamma \\ &= \omega^\beta(1+\omega^\gamma) = \omega^\beta\omega^\gamma = \omega^{\beta+\gamma} = \omega^\alpha.\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 5.31. *Eğer $\beta < \alpha$ ve $\omega^\alpha < \gamma$ ise $\omega^\beta + \gamma = \gamma$.*

Kanıt: δ ordinali $\gamma = \omega^\alpha + \delta$ eşitliğini sağlasın. O zaman,

$$\omega^\beta + \gamma = \omega^\beta + \omega^\alpha + \delta = \omega^\alpha + \delta = \gamma$$

olur. □

6. Ordinallerin Cantor Normal Biçimi

Bilindiği gibi, sayıları genelde,

$$3546 = 3 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

gibi onluk tabanda yazarız. Aynı sayıyı başka tabanlarda da yazabiliriz. Örneğin 11 tabanında,

$$3546 = 2 \times 11^3 + 7 \times 11^2 + 3 \times 11^1 + 4 \times 11^0$$

dır. Aynı şeyi $1 > 0$ ya da 11 yerine herhangi bir $p > 1$ doğal sayısı için de yapabiliriz: Her n doğal sayısı, her

$$a_0,\ \dots,\ a_k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ p-1\},\ a_k \neq 0$$

için,

$$n = a_k p^k + \cdots + a_0 p^0$$

toplamı biçiminde tek bir biçimde yazılır. Buna n'nin p ***tabanında yazılımı*** adı verilir.

On parmağımız olduğundan 10 tabanı önemlidir. Bilgisayarlar sayesinde 2 tabanı da önemlidir. Saat ve dereceler de 60 tabanına belli bir önem kazandırır.

Bu bölümde benzer şeyi ordinaller için yapacağız, p doğal sayısı yerine herhangi bir $\alpha > 1$ ordinali alacağız ve her β ordinalinin "α'lık tabanda" tek bir biçimde yazabileceğini göreceğiz. İşte teorem:

Teorem 6.1. $1 < \alpha$ *ve* $0 < \beta$ *iki ordinal olsun. O zaman,*

- *bir k doğal sayısı,*
- $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k$ *ve*
- $0 < \delta_i < \alpha (1 \leq i \leq k)$ *ordinalleri için, β ordinali*

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k, γ_i ve $\delta_i (1 \leq i \leq k)$ biriciktir.

Teoremi, α'yı sabit tutup β üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Önsav 6.2. *Eğer* $1 < \alpha$, $\gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ *ve* $0 < \delta_i < \alpha$ *ise, o zaman*

$$\alpha^{\gamma_1} \leq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 \leq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1) \leq \alpha^{\gamma_1+1}$$

olur.

Kanıt: İlk iki eşitsizlik ve sonuncusu bu aşamada kolay olmalı. Üçüncüsü olan

$$\alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1)$$

eşitsizliğini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım.

Eğer $k = 1$ ise $\alpha^{\gamma_1}\delta_1 < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1)$ eşitsizliği kanıtlanmalı ki bu da bariz.

Şimdi $k > 1$ olsun. Önceki bölümlerde kanıtladığımız sonuçları kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k &= \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + (\alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k)\\ &< \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2+1} \leq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_1} = \alpha^{\gamma_1}(\delta 1 + 1).\end{aligned}$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Sonuç 6.3. *Eğer* β *ordinali teoremdeki gibi yazılırsa, o zaman*

$$\gamma_1,\ \alpha^\gamma \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük γ *ordinalidir ve* δ_1, $\alpha^\gamma\delta \leq \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük* δ *ordinalidir.* □

Eğer teorem doğruysa, γ_1 ve δ_1 yukardaki sonuçtaki gibi olmak zorunda olduklarından, bu özelliği sağlayan γ_1 ve δ_1 ordinallerinin varlıklarını kanıtlamalıyız:

Önsav 6.4. $1 < \alpha$ *ve* $0 < \beta$ *iki ordinal olsun. O zaman* $\alpha^\gamma \leq \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük bir* γ *ordinali ve* $\alpha^\gamma\delta \leq \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük bir* δ *ordinali vardır.*

Kanıt: $\alpha^\gamma \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan tüm γ ordinallerin topluluğu bir küme olduğundan (okura alıştırma), bu ordinallerin bileşimi de bir ordinaldir (Teorem 4.12) ve aynı eşitsizliği sağlar (Önsav 5.27.ii); dolayısıyla bu bileşim

$$\alpha^\gamma \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük γ ordinalidir.

$$\alpha^{\gamma}\delta \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlayan tüm δ ordinaller topluluğu da bir küme olduğundan (okura alıştırma), bu ordinallerin bileşimi de bir ordinaldir ve aynı eşitsizliği sağlar (Önsav 5.20), dolayısıyla bu bileşim

$$\alpha^{\gamma}\delta \leq \beta$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük δ ordinalidir. □

Teorem 6.1'in Kanıtı: Artık teoremi kolaylıkla kanıtlayabiliriz. α ve β teoremde söylendiği gibi olsun. γ_1 ve δ_1 yukardaki önsavdaki gibi olsun. β_1,

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \beta_1$$

eşitliğini sağlayan biricik ordinal olsun. Elbette $\beta_1 < \alpha^{\gamma_1}$, çünkü aksi takdirde

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \beta_1 \geq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_1} = \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1);$$

ama δ, $\alpha^{\gamma}\delta \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinaldi, çelişki. Demek ki $\beta_1 < \alpha^{\gamma_1} \leq \beta$. Şimdi tümevarımla teoremdeki koşulları sağlayan endisli γ ve δ ordinalleri için,

$$\beta_1 = \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k.$$

Önsav 6.2'den dolayı,

$$\alpha^{\gamma_2} \leq \beta_1 < \alpha^{\gamma_2+1} < \alpha^{\gamma_1}$$

ve Teorem 5.26'ye göre $\gamma_2 < \gamma_1$ olur. □

$\alpha = \omega$ ise δ'lar doğal sayı olmak zorunda olduklarından, bu sonuç $\alpha = \omega$ için daha dikkat çekicidir:

Teorem 6.5. Ordinallerin Cantor Normal Biçimi. $0 < \beta$ *bir ordinal olsun. O zaman,*

- *bir k doğal sayısı,*
- *$\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k$ ordinalleri ve*
- *$n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitif doğal sayıları için,*

$$\beta = \omega^{\gamma_1}n_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \ldots + \omega^{\gamma_k}n_k$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k, γ_i ve $n_i (1 \leq i \leq k)$ biriciktir.

Aynı olguyu şöyle de söyleyebiliriz:

Teorem 6.6. Ordinallerin Cantor Normal Biçimi. $0 < \beta$ *bir ordinal olsun. O zaman,*

- *bir* k *doğal sayısı,*
- $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_k$ *ordinalleri için,*

$$\beta = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_k}$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k *ve* γ_i $(1 \leq i \leq k)$ *biriciktir.*

Ordinalleri Cantor normal biçimiyle toplayıp çarpmak oldukça pratiktir. Yazının geri kalan bölümünde bu pratiği öğreneceğiz. Önce toplamanın üstesinden gelelim. Teoremlerimizi ω tabanı için kanıtlayacağız.

6.1 Toplama

Teorem 6.7. $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k$ *ve* $\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_\ell$ *ordinal olsunlar.* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *ve* $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ *pozitif doğal sayı olsunlar. O zaman, eğer* i, $\gamma_i \geq \delta_1$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük göstergeç ise*

$$\begin{aligned}&(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k) + (\omega^{\delta_1} m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell} m_\ell)\\&[= \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} n_i + \omega^{\delta_1} m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell} m_\ell]\end{aligned}$$

olur.

Kanıt: Eğer $\gamma < \delta$ ise $\omega^\gamma n + \omega^\delta m = \omega^\delta m$ eşitliğini kanıtlamak yeterli. $\gamma < \delta$ olsun. Teorem 5.26'den dolayı

$$\omega^\gamma < \omega^\delta.$$

Teorem 5.29'ten dolayı, $\omega^\gamma + \omega^\delta = \omega^\delta$'dir. n ile çarpma n kez toplama olduğundan kanıt bitmiştir! □

Demek ki $\alpha + \beta$ toplamını bulmak için α ve β'yı Cantor normal biçiminde yazıp α'nın kuyruğundaki küçük terimleri atıp β'yı bu kısaltılmış α'nın sonuna olduğu gibi eklemeli.

6.2 Çarpma

Şimdi çarpmaya gelelim. Çarpma toplama kadar kolay değil, ama çok da zor değil.

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k$$

ve
$$\beta = \omega^{\delta_1} m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell} m_\ell$$

çarpmak istediğimiz ve Cantor normal biçimde yazılmış iki ordinal olsun. Cantor normal biçimde yazılmış ordinalleri toplamayı bildiğimizden ve soldan dağılmadan dolayı (Önsav 5.14),

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^{\delta} m$$

çarpımını bilmemiz yeterli. Hatta $m = 1$ bile alabiliriz. Demek ki,

$$(\omega_1^{\gamma} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^{\delta}$$

çarpımını bulmalıyız. $\delta = 0$ ise çarpımın ne olması gerektiği belli. $\delta > 0$ durumuna yoğunlaşmalıyız. Önsav 6.2'den dolayı,

$$\begin{aligned} \omega^{\gamma_1+\delta} &= \omega^{\gamma_1}\omega^{\delta} \leq (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^{\delta} \\ &\leq \omega^{\gamma_1+1}\omega^{\delta} = \omega^{(\gamma_1+1)+\delta} = \omega^{\gamma_1+(1+\delta)}, \end{aligned}$$

yani
$$\omega^{\gamma_1+\delta} \leq (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^{\delta} \leq \omega^{\gamma_1+(1+\delta)}.$$

Demek ki, eğer δ sonsuzsa, $1 + \delta = \delta$ olacağından,

$$\omega^{\gamma_1+\delta} \leq (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^{\delta} \leq \omega^{\gamma_1+(1+\delta)} = \omega^{\gamma_1+\delta}$$

ve dolayısıyla
$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^{\delta} = \omega^{\gamma_1+\delta}.$$

Ya $\delta = m \in \omega$ ise
$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^{m}$$

çarpımı nedir? $m = 0$ ise çarpımın ne olacağı belli. Bundan böyle $m > 0$ olsun. Elbette sağdan ω^m ile bir defa çarpmak yerine sağdan ω ile m defa çarpmak yeterli. Demek ki
$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega$$

çarpımını bulmalıyız.

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega = \cup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)r$$

eşitliğinden dolayı,
$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)r$$

çarpımını bulmalıyız. Ama bu,

$$\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k$$

sayısını kendisiyle r kez toplamak demek ve Cantor normal biçiminde yazılmış ordinalleri toplamayı bir önceki teoremden biliyoruz. Örneğin,

$$\begin{aligned}(\omega^{\gamma_1}n_1+&\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)+(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\\&=\omega^{\gamma_1}n_1+\omega^{\gamma_1}n_1+\omega^{\gamma_2}n_2+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k\\&=\omega^{\gamma_1}2n_1+\omega^{\gamma_2}n_2+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k.\end{aligned}$$

Buradan kolayca görüleceği üzere,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)r=\omega^{\gamma_1}rn_1+\omega^{\gamma_2}n_2+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k.$$

Demek ki

$$\begin{aligned}(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\omega&=\bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)r\\&=\cup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}rn_1+\omega^{\gamma_2}n_2+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\\&\leq\cup_{r\in\omega}\omega^{\gamma_1}(rn_1+1)=\omega^{\gamma_1+1}.\end{aligned}$$

Öte yandan, r sonsuza gittiğinde, rn_1 de sonsuza gittiğinden, r'yi yeterince büyük alırsak, rn_1 her s doğal sayısını aşacağından,

$$\begin{aligned}\omega^{\gamma_1+1}&=\omega^{\gamma_1}\omega=\cup_{s\in\omega}\omega^{\gamma_1}s\leq\cup_{r\in\omega}\omega^{\gamma_1}rn_1\\&\leq\cup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}rn_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\\&=(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\omega.\end{aligned}$$

Sonuçta, $(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\omega=\omega^{\gamma_1+1}$. Demek ki,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\omega^m=\omega^{\gamma_1+m},$$

ve $\delta>0$ sonlu da olsa sonsuz da olsa,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\omega^\delta=\alpha^{\gamma_1+\delta}.$$

Bulduklarımızı toparlayalım:

Teorem 6.8. *$\gamma_1>\ldots>\gamma_k$ ve $\delta>0$ ordinal olsunlar. r bir doğal sayı olsun. O zaman,*

$$(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)\omega^\delta=\omega^{\gamma_1+\delta}$$

ve

$$(\omega^{\gamma_1}n_1+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k)r=\omega^{\gamma_1}rn_1+\omega^{\gamma_2}n_2+\cdots+\omega^{\gamma_k}n_k$$

olur.

Bu teorem sayesinde Cantor normal biçiminde yazılmış herhangi iki ordinali kolaylıkla çarpabiliriz. Örneğin,

$$\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7$$

ile

$$\omega^{\omega^{\omega^2}}8 + \omega^{\omega^\omega}8 + \omega^{\omega^3+\omega}5 + \omega^4 3 + \omega + 3$$

ordinallerinin çarpımı için, sırasıyla

$$\begin{aligned}
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^{\omega^{\omega^2}}\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^{\omega^\omega}8\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^{\omega^3+\omega}5\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^4 3\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,3
\end{aligned}$$

çarpımlarını bulup bu sırayla toplamalıyız. Başlayalım

$$\begin{aligned}
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^{\omega^{\omega^2}} = \omega^{\omega^\omega 2 + \omega^{\omega^2}} = \omega^{\omega^{\omega^2}}\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^{\omega^\omega}8 = \omega^{\omega^\omega 2 + \omega^\omega}8 = \omega^{\omega^\omega 3}8\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^{\omega^3+\omega}5 = \omega^{\omega^\omega 2 + \omega^3 + \omega}5\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^{\omega^3} + 1 = \omega^{\omega^\omega 2 + \omega^3 + 1}\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega^4 3 = \omega^{\omega^\omega 2 + 4}3\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,\omega = \omega^{\omega^\omega 2 + 1}\\
&(\omega^{\omega^\omega 2}4 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\,3\\
&= \omega^{\omega^\omega 2}12 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7.
\end{aligned}$$

Çarpım bu ordinallerin bu sırayla toplanmasıyla çıkar. İşte sonuç:

$$\begin{aligned}
\omega^{\omega^{\omega^2}} + \omega^{\omega^\omega 3}8 + \omega^{\omega^\omega 2 + \omega^3 + \omega}5 + \omega^{\omega^\omega 2 + \omega^3 + 1} + \omega^{\omega^\omega 2 + 4}3 + \omega^{\omega^\omega 2 + 1}\\
+ \omega^{\omega^\omega 2}12 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7.
\end{aligned}$$

6.3 Ordinal Sınavı

1. Her α ordinali için, $1^\alpha = 1$ eşitliğini gösterin.
2. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$ eşitliği her zaman geçerli mi?
3. Her n, $m \in \omega$ için $\omega^n\omega^m = \omega^m\omega^n$ eşitliği doğru mudur?

4. $\alpha > 0$ için $\omega^\alpha \omega^\beta = \omega^\beta$ olabilir mi?
5. Eğer $1 < \alpha$ ve $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$ ise $\beta = \gamma$ eşitliğini kanıtlayın.
6. $2^\omega = 3^\omega = \omega$ eşitliğini kanıtlayın.
7. $\alpha > 1$ ise $\alpha^\beta \geq \beta$ eşitsizliğini kanıtlayın.
8. $\alpha > 1$ ise $\alpha^{\beta+1} > \beta$ eşitsizliğini kanıtlayın. Öte yandan $\alpha^\beta > \beta$ eşitsizliğinin $\alpha = \omega$ ve $\beta = \varepsilon_0$ için yanlış olduğunu kanıtlayın.
9. $\alpha > 1$ bir ordinal olsun. $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ ise $\beta < \gamma$ eşitsizliğini kanıtlayın. ($\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$ ise $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. β üzerinden tümevarım yapın.)
10. $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ olsun. Örneğin,

$$\alpha_1 = \omega^{\alpha_0} = \omega^\omega,\ \alpha_2 = \omega^{\alpha_1} = \omega^{\omega^\omega},\ \alpha_3 = \omega^{\alpha_2} = \omega^{\omega^{\omega^\omega}}.$$

10a. $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. (Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanmalısınız.)
10b. $\varepsilon_0 = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$ olsun. $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$ eşitliğini kanıtlayın.
10c. Eğer $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ ise $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ eşitsizliğini kanıtlayın.
10d. ε_0'ın ω'dan büyük ve toplama, çarpma ve üs alma altında kapalı en küçük ordinal olduğunu kanıtlayın.
11. $(\omega+1)^2$ ve $(\omega+1)^3$ ordinallerini ω cinsinden bir "polinom" olarak yazın. Aynı şeyi $(\omega+1)^n$ için yapın.
12. $(\omega+1)^n$ ordinalini Cantor normal biçimde yazın.
13. $(\omega+1)^\omega = \omega^\omega$ eşitliğini kanıtlayın.
14. $\omega^{\omega^{\omega^2}}3 + \omega^{\omega^{\omega+1}}3 + \omega^{\omega^3}2 + \omega^2 + \omega 3 + 4$ ile

$$\omega^{\omega^{\omega^2}}5 + \omega^{\omega^{\omega+1}}2 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3+\omega}2 + \omega^4 + \omega^2 + 1$$

ordinallerini toplayın ve çarpın ve sonucu Cantor normal formda yazın.

Kısım IV

Seçim Aksiyomu

7. Seçim Fonksiyonları ve Seçim Aksiyomu

7.1 Giriş

Sonsuz sayıda ayakkabı çifti var ve biri sizden her çiftten bir adet getirmenizi istiyor... Her çiftten sol ayakkabıyı seçebilirsiniz örneğin. Ya da hep sağ ayakkabıyı... Ya da bir sağ bir sol ayakkabıyı... Yani iki ayakkabıdan birini seçmek için bir kural bulabilirsiniz.

Şimdi, diyelim sonsuz sayıda ayakkabı çifti degil de, sonsuz sayıda çorap çifti var. Her çiftten birini seçeceksiniz... Çorapların sağı solu belli olmadığından bu sefer belli bir kural bulamazsınız. Çorapların biri sağda biri solda olsa ya da biri üstte biri altta olsa ya da biri yırtık biri pırtık olsa, o zaman çorap seçme kuralını koymak kolay. Sorun, sonsuz sayıda çorap çifti olduğunda ve çiftleri oluşturan çoraplardan birini diğerinden ayırdedemediğimizde.

Ayaktakımını bir kenara bırakıp matematik dünyasına dönelim.

$$X = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots\}$$

olsun. Yani X bir küme ve elemanları bir n doğal sayısı için,

$$\{2n + 1, 2n + 2\}$$

biçiminde. X'in her elemanı iki elemanlı bir küme. Amacımız X'in her elemanından bir eleman seçmek. X'in her elemanı iki doğal sayıdan oluştuğuna göre, bu doğal sayıların en büyüğünü seçebiliriz: $\{1, 2\}$'den 2'yi, $\{3, 4\}$'ten 4'ü ve genel olarak

$$\{2n + 1, 2n + 2\}$$

kümesinden $2n + 2$ elemanını seçebiliriz.

Başka seçim yöntemleri de olabilir elbet. Amacımız seçim yöntemlerinden birini bulmaktı ve başardık.

Bir başka örnek: Eğer

$$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \ldots\}$$

ise, 1, X'in her elemanında olduğundan, hep 1'i seçebiliriz. Böylece X'in her elemanından bir eleman (1'i) seçmiş olduk.

Birazdan örneklerimizi artıracağız ve seçimin her zaman kolay, hatta kimileyin mümkün bile olmadığını göreceğiz.

Soruyu daha matematiksel olarak şöyle ifade edelim. Elinizde bir X kümesi var. Bu kümenin elemanları da küme ve hiçbiri boş değil. X'in her elemanından bir eleman (örnek, numune, eşantiyon) seçmek istiyoruz. Eğer $x \in X$ ise, x'ten seçilen numuneye $f(x)$ adını verelim. $f(x)$'ten tek istediğimiz x'in bir elemanı olması, yani $f(x) \in x$ koşulu.

Bir başka deyişle, tanım kümesi X olan öyle bir f fonksiyonu bulmak istiyoruz ki, her $x \in X$ için, $(x) \in x$ olsun. Böyle bir fonksiyona X'in ***seçim fonksiyonu*** denir.

Elbette X'in bir seçim fonksiyonu olabilmesi için, X'in elemanlarının (ki bu elemanlar da birer küme) hiçbirinin boşküme olmaması gerekir.

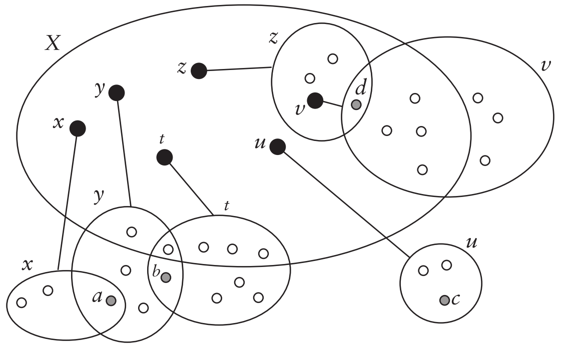
Bu bölümde soracağımız soru şu: *Boş olmayan kümelerden oluşan her kümenin bir seçim fonksiyonu var mıdır?*

Sorunun zorluk derecesini örneklerle ölçeceğiz. Bundan sonraki bölümlerde de sorunu derinlemesine tartışacağız.

7.2 Seçim Örnekleri

7.2.1 Kolay Şıklar

Eğer X, aşağıdaki şekildeki gibi, elemanları boş olmayan kümeler olan **sonlu** bir kümeyse, o zaman X'in bir seçim fonksiyonunu bulmak çok basittir: X'in her elemanından bir eleman alın, olsun bitsin!



Yukarda, X kümesinin x, y, z, t, u ve v olmak üzere 6 elemanı görülüyor. Bu elemanları resimde siyah noktalar olarak gösterdik. x, y, z, t, u ve v'nin herbiri ayrıca birer küme. x, y, z, t, u ve v'yi ayrıca bir de küme olarak, "oval patates" biçiminde gösterdik. Bu altı kümenin elemanlarını "nokta"larla gösterdik. Örne¼n a, hem x'in hem de y'nin bir elemanı. v'nin z'nin bir elemanı oldu¼una dikkat edin. X kümesinin bir seçim fonksiyonu şöyle olabilir: $f(x) = a \in x$, $f(y) = a \in y$, $f(t) = b \in t$, $f(u) = c \in u$, $f(z) = v \in z$, $f(v) = d \in v$.

Sonlu tane çorap çiftinin her birinden bir adet seçmeyi herkes bilir... Sorun X sonsuz olunca...

X sonlu olduğunda bir seçim fonksiyonunun olduğu X'in eleman sayısı üzerine tümevarımla kolaylıkla tanımlanabilir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Eğer X'in elemanlarının ortak bir elemanı varsa, o zaman da kolay, hep o ortak elemanı seçelim. Örneğin yukardaki örneklerden birinde, 1, X'in bütün elemanlarının ortak elemanıydı ve biz hep 1'i seçmiştik.

Eğer X'in her elemanında (ki bu elemanlar da birer küme, tekrarlıyoruz), a ve b diye adlandıracağımız iki elemandan biri varsa, o zaman da seçim kolay: X'in herhangi bir x elemanını alalım. Eğer $a \in x$ ise a'yı seçelim, yani $f(x) = a$ olsun. Eğer $a \notin x$ ise, o zaman x'ten b'yi seçelim, yani bu durumda $f(x) = b$ olsun.

Bunlar kolay şıklar. Şimdi işi biraz zora sokalım.

$\wp(A)^*$, A'nın boş olmayan altkümelerinden oluşan küme olsun:

$$\wp(A)^* = \wp(A) \setminus \{\varnothing\}.$$

Yazının bundan sonrasında çeşitli A'lar için $\wp(A)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmaya çalışacağız. Eğer A'nın n elemanı varsa, $\wp(A)^*$ kümesinin $2^n - 1$ tane elemanı vardır, ama bizi daha çok A'nın sonsuz olduğu durumlar ilgilendiriyor.

Örnekler.

7.1. $\wp(\mathbb{N})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu. Boş olmayan her doğal sayı kümesinden kolaylıkla bir eleman seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını seçebiliriz. Bu yöntemle, sözgelimi,

$$\{1, 5, 8\}$$

kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz. Bir başka örnek: Seçim fonksiyonuna f dersek,

$$f(\{7, 5, 8\}) = 5$$

olur.

Bu soru da oldukça kolaydı. Şimdi biraz daha zor bir soru soralım:

7.2. $\wp(\mathbb{Z})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu.

Boş olmayan her tamsayı kümesinden de belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. Örneğin şu yöntemi alalım: $\varnothing \neq x \subseteq \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı seçelim. Eğer x'in en büyük elemanı yoksa o zaman $x \cap \mathbb{N}$ kümesi boşküme olamaz, bu kümenin en küçük elemanını seçelim. Böylece boş olmayan her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

Bu yöntemle $\{-5, 2, 6\}$ kümesinden en büyük sayı olan 6'yı, $5\mathbb{Z}+3$ kümesinden 3'ü seçeriz. Bunun da üstesinden geldik.

$\wp(\mathbb{Z})^*$ kümesinin başka seçim fonksiyonları da vardır. Biz, bunlardan sadece birini bulduk. Hepsini bulmak gibi bir amacımız yoktu.

Dikkat ederseniz her seferinde x'ten seçilen $f(x)$ elemanı için bir kural ortaya koyuyoruz. Bu kurala uyan biri söylenen elemanı seçmek zorundadır, "onu mu seçeyim, bunu mu seçeyim" gibi bir ikilemi olamaz.

7.3. $\wp(\mathbb{Q}^{\geq 0})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu. Boş olmayan bir pozitif kesirli sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Birçok seçim yöntemi vardır. İşte bunlardan biri: Kümeye x diyelim. Şimdi şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(x) = \{a + b : a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N} \text{ ve } a/b \in x\}.$$

x boşküme olmadığından, $A(x)$ de boş değildir. Boş olmayan her doğal sayı kümesi gibi, $A(x)$'in en küçük elemanı vardır. Bu elemana $n(x)$ diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in x : a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N} \text{ ve } a + b = n(x)\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, ayrıca boşküme değildir, dolayısıyla en küçük elemanı vardır. İşte x'ten bu elemanı seçelim.
Bulduğumuz bu seçim fonksiyonu aşağıda gerekecek, ona bir ad verelim: f.
Küme karmaşıklaştıkça seçim fonksiyonu bulmanın da zorlaştığına dikkatinizi çekerim. Bir zaman sonra imkânsız hale gelecek.

7.4. $\wp(\mathbb{Q})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu.
Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz.

$$X \subseteq \mathbb{Q},$$

boş olmayan herhangi bir küme olsun. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşküme değilse, yukardaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, o zaman $X \cap \mathbb{Q}^{<0}$ ve -$X \cap \mathbb{Q}^{>0}$ kümeleri boş değildir; bu durumda X'ten $-f(-X \cap \mathbb{Q}^{>0})$ elemanını seçelim. (f, bir önceki örnekteki seçim fonksiyonuydu.)
Genel olarak, eğer X sayılabilir bir kümeyse (yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile aralarında bir eşleme varsa), $\wp(X)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmak oldukça kolaydır. Nitekim, $f : X \to \mathbb{N}$ fonksiyonu X'ten $\mathbb{N}$'ye giden bir eşleme olsun. Ve $\varnothing \neq x \subseteq X$ olsun. Eğer n, $f(x)$'in en küçük elemanıysa, o zaman x'ten $f^{-1}(n)$ elemanını seçeriz.

7.5. **Aralıklar kümesinin seçim fonksiyonu.** Gerçel sayıların boş olmayan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. İşte bir yöntem:

$$[a,\ b],\ [a,\ b),\ (a,\ b],\ (a,\ b)$$

aralıklarından "orta noktayı", yani $(a+b)/2$ sayısını, $(-\infty,\ a]$ ve $(-\infty,\ a)$ aralıklarından $a - 1$ sayısını, $[a,\ \infty)$ ve $(a,\ \infty)$ aralıklarından $a + 1$ sayısını ve son olarak $(-\infty,\ -\infty)$ aralığından 0 sayısını (gene orta noktayı!) seçelim.

7.6. $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin seçim fonksiyonu.
İşte şimdi en civcivli soruya geldik. Yukardaki örneklerde kimileyin kolayca kimileyin biraz zorlanarak da olsa, her seferinde bir seçim fonksiyonu bulduk. Ama bu kez bir seçim fonksiyonu bulmak hiç kolay değil.
Hemen söyleyelim: $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulamazsınız. İstediğiniz kadar deneyin... Sadece siz değil, kimse bulamaz!
Bu kümenin seçim fonksiyonu yok demiyorum. Yoksa elbet bulamazsınız. Var da demiyorum... Ama varsa da bulamazsınız!
Bu kümenin bir seçim fonksiyonunun olduğu ancak şu aksiyomla kanıtlanabilir:

Seçim Aksiyomu (C): *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Bu aksiyom kullanılarak $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonu olduğu kanıtlanabilir (elbette!), ama o seçim fonksiyonunun kuralı bulunamaz! Yani açık açık seçim fonksiyonunu yazamazsınız. Bir başka deyişle, varlığı **ancak** yukardaki aksiyom kullanılarak kanıtlanan bir seçim fonksiyonunun "kuralı" yoktur. Olamaz da.

Okur haklı olarak böyle bir fonksiyonun neden olamayacağını soruyordur; hatta belki de iyi anlayamadığını sanıyordur.

Şöyle bir örnek verelim, verilebilecek örneklerin en basiti: X, elemanları birbirinden ayrık kümelerden oluşan sonsuz bir küme olsun. Daha tane tane söyleyelim: X bir küme, X'in elemanları da küme ve X'in herhangi iki elemanının kesişimi boşküme. Hatta diyelim X, sayılabilir sonsuzlukta. X'in elemanlarını teker teker sayıp numaralandıralım: Bu elemanlara

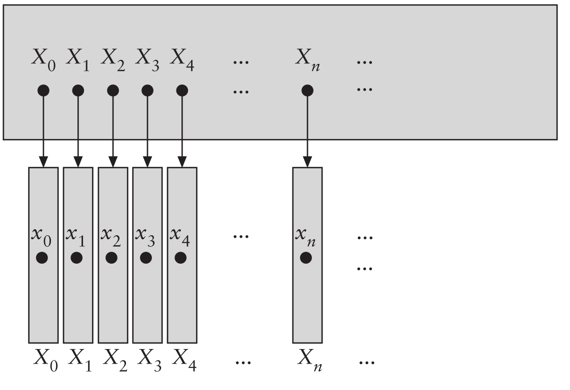
$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots$$

diyelim. Bunların her biri bir küme, hiçbiri boş değil, ama herhangi ikisinin kesişimi boşküme. Bu boş olmayan her kümeden bir eleman seçmek istiyoruz.

Birinci küme olan X_0'dan x_0 adını vereceğimiz bir eleman seçelim. Aşağıdaki şekilden takip edin. X_0 boşküme olmadığından, böyle bir elemanın varlığını biliyoruz. Herkes X_0'dan aynı elemanı seçmeyebilir, ama bu bir sorun değil bizim için. Şimdi sıra X_1 kümesinde. Bu kümeden de rahatlıkla bir eleman seçebiliriz. Seçtiğimiz elemana x_1 diyelim. Bunu böylece hep sürdürebiliriz. X_n kümesinden seçilen elemana x_n diyelim. Şimdi f fonksiyonunu

$$f(X_n) = x_n$$

olarak tanımlayalım. Her n için $f(X_n) \in X_n$ olduğundan sorun yok gibi görünebilir. Ama var... Sorun f'nin bir fonksiyon olduğunu kanıtlamada. f, bir fonksiyon olmayabilir. Fonksiyonlar da dahil olmak üzere matematikte her şey bir kümedir.



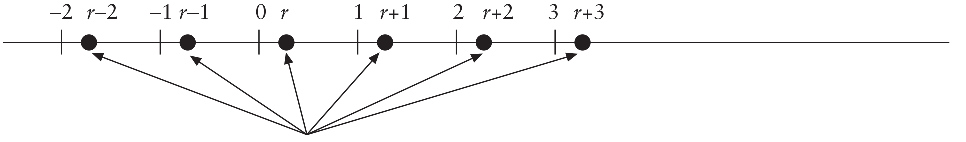
f'nin bir fonksiyon olması için de x_n'leri içeren $\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\}$ nesnesinin (f'nin imgesinin yani) bir küme olması gerekir. Bu nesnenin bir küme olduğu da şu ana kadar gördüğümüz kümeler kuramının aksiyomlarıyla kanıtlanmalıdır. İşte bu kanıtı yapmaktan aciziz. Kanıt için Seçim Aksiyomu gerekmektedir.

Örnekler.

7.7. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kümesinin seçim fonksiyonu.
Her r gerçel sayısı için,

$$r + \mathbb{Z} = \{r + n : n \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. Bu örnekte her $r + \mathbb{Z}$ kümesinden bir eleman seçmeye çalışacağız.
Elbette r, $r + \mathbb{Z}$ kümesinin bir elemanıdır, dolayısıyla $r + \mathbb{Z}$ kümesinden r'yi seçelim diyebilirsiniz. Ama $r + \mathbb{Z}$ kümesi r'yi belirlemiyor ki...



Nitekim, birbirinden değişik r ve s sayıları için, $r + \mathbb{Z} = s + \mathbb{Z}$ olabilir. Örneğin,

$$\sqrt{2} + \mathbb{Z} = (1 + \sqrt{2}) + \mathbb{Z} = (-3 + \sqrt{2}) + \mathbb{Z}$$

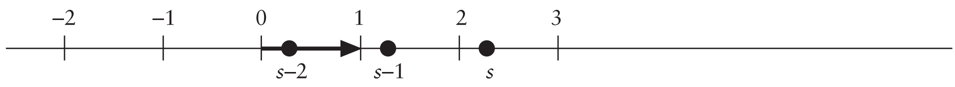
dir.
Yukarda sözü edilen sorunu iyice anlamak için sorumuzu şöyle görelim:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} : r \in \mathbb{R}\}$$

olsun. Amacımız $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'nin her elemanından bir eleman seçmek. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'den herhangi bir eleman alalım. Bu elemana α diyelim. Elemanı özellikle α diye yazdık, $r + \mathbb{Z}$ diye r'yi önplana çıkaracak biçimde yazmadık. Her ne kadar α, birçok r için $r + \mathbb{Z}$ 'ye eşitse de, tüm bu r'ler arasından hangisini seçmeliyiz?
Aslında her bir $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in \mathbb{R}$ seçebiliriz. Ama bu seçimlerde bir düzen olmazsa, yani seçimleri belli bir kurala bağlı kalarak yapmazsak, o zaman seçilen r'lerin bir küme oluşturduğunu bu aşamaya kadar verdiğimiz aksiyomlarla kanıtlayamayız. Ama Seçim Aksiyomu böyle bir seçimin olduğunu (yani seçimlerin bir küme oluşturduğunu) söylüyor.
Bu örnekte, belli bir kurala bağlı kalarak, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in \mathbb{R}$ seçebiliriz, yani Seçim Aksiyomu'na gerek yok bu örnekte. Nitekim, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliği sağlayan **bir ve bir tek** $r \in [0, 1)$ sayısı vardır. İşte α'dan, $[0, 1)$ aralığındaki bu r sayısını seçelim. Bu sefer binlerce (!) r'den rastgele birini seçmedik, $[0, 1)$ aralığında bulunan $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan tek r'yi seçtik.
Bu yöntemle, $\pi + \mathbb{Z}$ kümesinden $\pi - 3$'ü, $\sqrt{2} + \mathbb{Z}$ kümesinden $\sqrt{2} - 1$'i seçeriz.
Eğer bir $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ elemanı verilmişse, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan $r \in [0, 1)$ pratikte nasıl bulunur? Şöyle bulunur: Önce,

$$\alpha = s + \mathbb{Z}$$

eşitliğini sağlayan **herhangi** bir s alınır. Böyle bir s'nin varlığını biliyoruz. Şimdi, s'ye yeterince 1 ekleyerek ya da s'den yeterince 1 çıkararak, $\alpha = r + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan bir $r \in [0, 1)$ sayısına ulaşırız. Ayrıca, $[0, 1)$ aralığında bu eşitliği sağlayan başka bir sayı da yoktur.



$r = s - 2 \in [0, 1)$

Burada s'yi belli bir kurala uymadan seçtiğimizi belirtelim. Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan buna hakkımız var mı? Var! Çünkü $[0, 1)$ aralığında bulunan r sayısı s'nin seçiminden bağımsızdır. $\alpha = s + \mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan hangi s'yi seçersek seçelim, aynı r'ye ulaşırız. Burada Seçim Aksiyomu'na ihtiyacımız yok. Aslında r, $s - [s]$ sayısına eşittir ve α'dan hangi s seçilirse seçilsin, $s - [s]$ hep aynı sonucu verir. Hatta r'yi şöyle de tanımlayabiliriz:

$$r = \alpha \cap [0, 1) \text{ } \textit{kümesinin yegâne elemanı},$$

ya da

$$r = \cap(\alpha \cap [0, 1)).$$

Burada Seçim Aksiyomu'nu kullanmadık. Her α için bir $s \in \alpha$ seçtik ama kanıtımızda bu seçimlerin bir küme oluşturmasına ihtiyacımız olmadı.

Sonuç: Yukarda tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'nin bir seçim fonksiyonudur ve Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç duyulmadan bulunmuştur.

Bu fonksiyonun varlığında $[0, 1)$ aralığının şu özelliği önemli: Her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ için,

$$|\alpha \cap [0, 1)| = 1.$$

Şimdi bu örneği hafifçe değiştirerek Seçim Aksiyomu'na ihtiyacımız olan bir seçim örneği vereceğiz.

Örnekler.

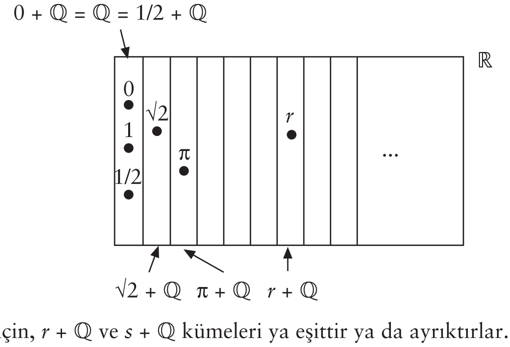
7.8. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ kümesinin seçim fonksiyonu.
Her r gerçel sayısı için,

$$r + \mathbb{Q} = \{r + q : q \in \mathbb{Q}\}$$

olsun. Bu sefer her $r + \mathbb{Q}$ kümesinden bir eleman seçmeye çalışacağız. Yani,

$$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{r + \mathbb{Q} : r \in \mathbb{R}\}$$

ise, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$'nün bir seçim fonksiyonunu bulacağız.



$r, s \in \mathbb{R}$ için, $r + \mathbb{Q}$ ve $s + \mathbb{Q}$ kümeleri ya eşittir ya da ayrıktırlar. (Okura alıştırma.)

Bu, her $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ için, $|\alpha \cap X| = 1$ eşitliğini sağlayan bir $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi bulmaya eşdeğerdir.

Elle bulamayız. Sadece biz değil kimse bulamaz. Böyle bir seçim fonksiyonunu ancak insanüstü yetenekleri olan birileri bize verebilir... Bu sefer seçim fonksiyonunu bulmak için Seçim Aksiyomu'nu kullanmak zorundayız. Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir fonksiyon bulamayız. İnanmazsanız bulmaya çalışın! Başaramayacağınızı göreceksiniz.

Seçim Aksiyomunu kullandığımız sonuçların başına kimi zaman "[ZFC]" ibaresi koyacağız. "[ZF]" ibaresi ise koyduğumuzda Seçim Aksiyomu kanıtta kullanılmıyor demektir.

8. ZFC Kümeler Kuramı

Tüm matematiği kümeler kuramına dayandırabiliriz, yani matematik, en azından kuramsal olarak, kümeler kuramında ifade edilebilir, kümeler kuramının içinde yer alabilir. Örneğin topoloji, analiz, cebir, sayılar kuramı, diferansiyel denklemler, kompleks analiz gibi duyduğunuz ya da duymadığınız her matematik dalı kümeler kuramının bir altdalı olarak görülebilir. (Matematikte pek de merkezi olmayan kategori kuramını kaideyi bozmayan istisna olarak kabul edelim. Kategori kuramı küme olmayan nesnelerle ilgilenir.)

Dolayısıyla kümeler kuramı çelişkisizse, o zaman tüm matematik çelişkisiz demektir. Eğer $0 = 1$ eşitsizliği kümeler kuramında kanıtlanamıyorsa, kümeler kuramının ***çelişkisiz*** olduğu söylenir. Çelişkili bir kuramda, doğru olsun ya da olmasın, her önerme kanıtlanabilir.

Ama ne yazık ki kümeler kuramının çelişkisiz olduğu kanıtlanamaz. Bu, Gödel'in, çağının en büyük matematikçisi Hilbert de dahil olmak üzere, birçok kişiyi düşkırıklığına uğratan derin bir teoremidir.

Öte yandan kümeler kuramının çelişkili olduğu kanıtlanabilir. Bunun için $0 = 1$ eşitliğini kanıtlamak yeterlidir. Birazdan açıklayacağımız kümeler kuramında henüz böyle bir eşitlik kanıtlanamamıştır, umarız hiçbir zaman da kanıtlanamaz.

Bugün kimse ciddi olarak kümeler kuramının çelişkili olabileceğine ihtimal vermiyor. Genel kanı, "çelişkili olsaydı bugüne kadar bir çelişki bulunurdu" şeklinde.

Yukarda, birinci paragrafta, "matematik, en azından **kuramsal olarak**, kümeler kuramında ifade edilebilir" dedik. Burada "kuramsal olarak" sözleri hafife alınmamalı. Matematiğin her dalını kümeler kuramına dayandırmaya çalışmak her ne kadar mümkünse de, böyle bir uğraşa girmek akla zarardır ve bu çabanın makul bir süre içinde başarıya ulaşması mümkün değildir. Üstelik bunu başarmak uygulamada pek bir işe de yaramaz.

Matematiğin merkezine yerleştirdiğimiz "kümeler kuramı"nın ne olduğu sorusu bu aşamada doğal, doğru ve sorulması gereken bir sorudur. [Sİ]'de ve önceki bölümlerde kümeler kuramından ve aksiyomlarından (yani aksiyomlarından) sözetmiştik. Bu bölümde konuyu toparlayıp kümeler kuramının aksiyomlarını toplu halde vereceğiz.

Birbirine aşağı yukarı eşdeğer birkaç kümeler kuramı vardır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanı ZFC kısaltmasıyla anılan ve büyük ölçüde ilk kez Ernst Zermelo tarafından ifade edilen kuramdır. Bunun dışında, örneğin, Bertrand Russell'ın tipler kuramı ve von Neumann, Bernays ve Gödel'in kümeler kuramı (NBG) vardır. Biz burada sadece ZFC'yi açıklamakla yetineceğiz.

ZFC kümeler kuramının tanımsız iki terimi vardır: "Küme" ve "elemanı olmak".

Küme. ZFC'de sözü edilen her nesne (elemanlar, fonksiyonlar, sıralamalar vs) bir kümedir. Örneğin, "öyle bir x var ki" diye başlayan bir önerme, aslında "öyle bir x kümesi var ki" olarak okunmalıdır.

Elemanı Olmak. Bu, iki küme arasında bir ilişkidir ve bu da tanımsız olarak verilmiştir. "$x \in y$" yazılımı, "x, y'nin bir elemanıdır" anlamına gelir demeyeceğiz, çünkü tanımsız olduğundan "x, y'nin bir elemanıdır"ın anlamı yoktur; ama "$x \in y$" yazılımı, "x, y'nin bir elemanıdır" olarak okunur ve öyle de hissedilir.

"$x \notin y$" yazılımı ise, "x, y'nin bir elemanı değildir" anlamına gelir. Artık "x, y'nin bir elemanıdır" önermesinin anlamını bildiğimizi varsaydığımızdan, bu varsayıma dayanarak, "x, y'nin bir elemanı değildir"in ne demek olduğunu biliyoruz.

Kümeler kuramında (en azında ZFC'de) her şey küme olduğundan, bir kümenin elemanları da kümedir. (Ortaokullarda ve liselerde elemanla küme apayrı şeylermiş gibi gösterilir, oysa kümeler kuramında öyle değildir.)

Tanımsız verilmiş bu "küme" ve "elemanı olmak" terimlerinin aşağı yukarı ne anlama gelmeleri gerektiğini biz sezgilerimizle biliriz elbet, ne de olsa hayat tecrübemiz var, ama kuram bunu bilmez.

Kümeler kuramının (ve matematiğin) diğer tüm tanımları bu iki terim kullanılarak yapılır. Örneğin, eğer x kümesinin her elemanı y kümesinin de bir elemanıysa, x'e y'nin bir altkümesi denir. Bunun gibi matematiğin doğal sayı, gerçel sayı, karmaşık sayı, fonksiyon, türev, süreklilik gibi kavramları kümeler kuramına indirgendiğinde, tanımlanmamış ve hiçbir zaman da tanımlanmayacak olan "küme" ve "elemanı olmak" terimleri kullanılarak tanımlanırlar.

Aşağıdaki ZFC'nin aksiyomlarını bulacaksınız.

Aksiyomların sayısı sonlu (10 tane) gibi gözükebilir ama bu yanıltıcı: 3'üncü ve 9'uncu aksiyomlar aslında sonsuz sayıda aksiyomdan oluşuyorlar, her biri her φ özelliği için ayrı birer aksiyomu simgeler. [Sİ]'de açıklamıştığımız "özellik"in tam ne anlama geldiğini bilmek pek önemli olmayacak, okur yeter ki "asal sayı olmak" gibi sözlü ifade edebildiği her şeyin aslında matematiksel anlamda bir özellik olduğuna ikna olsun.

ZFC'nin Z'si yukarda da dediğimiz gibi Zermelo'nun Z'sidir. Bertrand Russell'dan bağımsız olarak zamanının kümeler kuramında bir çelişki yakalayan Zermelo, çelişkiden kurtulmak için kümeler kuramını aksiyomlaştırma çabasına girişir. Kümeler kuramının aksiyomlarının çoğu ona aittir.

Zermelo, sisteminin çelişkisiz olduğunu kanıtlamaya çalışmışsa da başaramamıştır. Başaramamasının nedeni vardı: Sistemin çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını bugün Gödel sayesinde biliyoruz.

ZFC'nin F'si ise 1922'de Temellendirme ve Yerleştirme aksiyomlarına gereksinildiğinin farkına varan Adolf Fraenkel'in F'sidir. Thoralf Skolem de, Fraenkel'den bağımsız olarak Yerleştirme Aksiyomu'nu aynı yıl keşfetmiştir. İki kişinin birden aynı aksiyomu bulması manidardır elbet, bu, aksiyomun gerçekten gerektiğine dair bir delildir. (Öte yandan kümeler kuramına ciddi olarak eğilmemiş birinin Temellendirme Aksiyomu'na ihtiyaç duyması olanaksızdır.)

8.1 ZFC Aksiyom Sistemi

1. Boşküme Aksiyomu. *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır*: $\varnothing$.

2. Eşitlik Aksiyomu. *Aynı elemanlara sahip iki küme birbirine eşittir.*

3. Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu. *Eğer φ bir özellikse ve x bir kümeyse, x'in φ özelliğini sağlayan elemanlarını eleman olarak içeren ve bunlardan başka eleman içermeyen bir küme vardır*: $\{y \in x : \varphi(y)\}$.

4. Bileşim Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, eleman olarak sadece ve sadece x'in elemanlarının elemanlarını içeren bir küme vardır*:

$$\bigcup x = \bigcup_{y \in x} y = \{z : \text{bir } y \in x \text{ } için\ z \in y\}.$$

5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. *Eğer x ve y birer kümeyse, eleman olarak sadece ve sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır*: $\{x, y\}$.

6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, eleman olarak sadece ve sadece x'in altkümelerini içeren bir küme vardır*:

$$\wp(x) = \{y : y \subseteq x\} = \{y : y\text{'}nin\ her\ elemanı\ x\text{'}in\ de\ elemanıdır\}.$$

7. Tümevarımsal Küme Aksiyomu. *Boşkümeyi içeren ve içerdiği her x kümesi için $x \cup \{x\}$ kümesini de içeren (en küçük) bir küme vardır.*

8. Temellendirme Aksiyomu. [Fraenkel] *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, o zaman x'in $x \cap y = \varnothing$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.* (Bu aksiyom sadece kümeler kuramında kullanılır.)

9. Yerleştirme Aksiyomu. [Fraenkel ve Skolem] *a bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in a$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y*

kümesi varsa o zaman bir $x \in a$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar. Yani

$$\{y : \exists x(x \in a \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğu bir kümedir.

10. Seçim Aksiyomu (C). *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Bugüne dek hiç gereksinmediğimiz Temellendirme Aksiyomu'ndan [Sİ]'de uzun uzun sözettik. Bu aksiyom matematikte sadece kümeler kuramında kullanılır.

İlk 9 aksiyoma ZF adı verilir. Sonuncusu da eklenirse, sistem ZFC adını alır. C, "seçim"in İngilizcesi olan "choice" sözcüğünün (ilk!) c'sidir.

ZFC kümeler kuramında sonsuz sayıda aksiyom vardır. Montague 1961'de bu sistemin sonlu sayıda aksiyoma indirgenemeyeceğini kanıtlamıştır. Gödel, Bernays ve von Neumann'ın bulduğu NBG aksiyom sistemi sonludur. Her iki sistemde de kümelerle ilgili aynı sonuçların kanıtlanacağı biliniyor. Ancak NBG siteminde küme olmayan sınıflardan da söz edildiğinden, sonlu olmasına karşın, bir anlamda NBG sistemi ZFC'den daha zengindir diyebiliriz. Bir başka deyişle, ZFC sisteminin dili $\forall$, $\vee$, $=$ gibi standard matematik simgeleri dışında sadece $\in$ simgesini kullanırken, NBG sistemi $\in$ simgesi dışında, küme olmayan topluluklardan sözedebilmek için fazladan bir simge daha kullanır.

Seçim Aksiyomu. Son aksiyom (Seçim Aksiyomu ya da kısaca C, bazen AC) diğer aksiyomlardan farklıdır, çünkü (ikincisi dışında) diğer aksiyomlar "yapıcı" nitelikte aksiyomlardır, bir ya da birkaç kümeden yeni bir küme inşa etme yöntemini söylerler. İlk on aksiyomla inşa edilen her küme kullanılan aksiyom tarafından tanımlanmış ve belirlenmiştir; bu aksiyomlarla inşa edilen o kümeden sadece bir tane vardır. (7'nci aksiyom bu dediğimize bir istisna belki ama olsun... Önemsemeyin. 7'nci aksiyomun varlığını söylediği kümenin biricik olmaması bu aksiyomun en önemli niteliği değildir. Bu aksiyomu birazcık değiştirerek, (en küçük) parantezini ekleyerek, tek bir kümenin varlığını söyler hale getirebiliriz.) Oysa Seçim Aksiyomu'nda varlığı söylenen kümenin (daha doğrusu fonksiyonun, ama fonksiyonlar da bir kümedir) nasıl bir şey olduğuna dair bir şey söylenmemektedir. Seçim Aksiyomu sadece bir fonksiyonun varlığından sözetmektedir, fonksiyonun hangi fonksiyon olduğunu söylememektedir. Seçim Aksiyomu'nda varlığı söylenen fonksiyonlardan birkaç tane olabilir, ki genellikle öyledir, ve bu fonksiyonlardan birini göstermek imkânsızdır.

Varlığı Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanmak **zorunda** olan fonksiyonlar açık seçik tanımlanamazlar. Bu yüzden Seçim Aksiyomu uygulamada işe yarar bir biçimde, örneğin bilgisayarlarda ya da teknolojide) kullanılamaz, Seçim Aksiyomu'nun sadece kuramsal bir önemi vardır.

Hilbert'in teşvikiyle kümeler kuramıyla ilgilenmeye başlayan Zermelo, her kümenin iyi sıralanabileceğini kanıtlayarak genç yaşında ünlenmiş, ancak kanıtında herkes tarafından kabul görmeyen Seçim Aksiyomu'nu kullanmıştır (1904). Bugün Seçim Aksiyomu'yla Zermelo'nun bu teoreminin eşdeğer olduğu biliniyor, yani Zermelo, teoremini kanıtlamak için Seçim Aksiyomu'nu kullanmak zorundaydı, başka türlü yapamazdı. Bu eşdeğerliliği Bölüm 11'te İyisıralama Teoremi'nde kanıtlayacağız.

Seçim Aksiyomu Zermelo'dan önce de kullanılmıştı, ancak kümeler kuramı henüz aksiyomlaşmadığından ve matematikçilerin böyle bir sorunu da olmadığından kimse bunun farkına varmamıştı.

Bağımsızlık. Seçim Aksiyomu'nun değillemesi elbette şöyledir:

Seçim Aksiyomu'nun Değillemesi (¬C). *Elemanları boş olmayan kümeler olduğu halde seçim fonksiyonu olmayan bir küme vardır.*

1935'te Gödel, eğer ZF çelişkisizse ZFC'nin de çelişkisiz olduğunu kanıtlamıştır.

1963'te Cohen, eğer ZF çelişkisizse, ZF'ye C'nin değillemesi olan $\neg C$ önermesi (yani C'nin yanlış olduğu) eklendiğinde de elde edilen kuramın çelişkisiz olduğunu kanıtlamıştır.

Yani Gödel ve Cohen'in sonuçlarıyla aşağıdaki sonuç kanıtlanır. Ama bu olguyu kanıtlamak hiç de kolay değildir. Böyle bir uğraş bu ders notlarının amaçlarını kat kat aşar. Ama gene de bu önemli olguyu not edelim.

(Gödel ve Cohen). *Eğer* **ZF** *çelişkisizse*, *hem* (ZF + C) *hem de* (ZF +¬ C) *çelişkisizdir.*

Bundan C'nin ZF'den bağımsız olduğu sonucu çıkar: Eğer ZF çelişkisizse, ZF'ye C'yi de, değillemesi olan $\neg C$'yi de eklesek çelişkisiz bir kuram elde ederiz.

Bu aşamada, C'yi mi yoksa ¬ C'yi mi aksiyom olarak kabul etmeli gibi artık matematiği aşan felsefi bir problemle karşı karşıyayız. Ne C'yi ne de C'nin değillemesini kabul edip sadece ZF'yle yetinmek de bir seçenektir elbet.

C'yi Kabul Etmeli mi Etmemeli mi? C'yi kabul edersek daha çok teorem kanıtlarız elbet, çünkü kuramımız C'nin kabulüyle daha da zenginleşmiştir, örneğin C'nin kendisi bu teoremlerden biridir. C'nin değillemesini kabul edersek de daha çok teorem elde ederiz ama C'yi kabul ederek daha "olumlu" teoremler elde edilir, çünkü C sonuç olarak bir fonksiyonun varlığını söylüyor; C'nin değillemesi ise böyle bir fonksiyonun her zaman olmayabileceğini söylüyor, üstelik ne zaman olmayacağından hiç sözetmeden...

Eğer sadece olumlu teorem (varlık teoremleri) elde etmek bizi ilgileniyorsa, o zaman C'yi kabul etmeliyiz.

Ama C'yi kabul edip etmemek felsefi bir sorun olarak da görülebilir (ve hatta görülmeli). Sonuç olarak matematikle gerçeği anlamaya ve açıklamaya çalışıyoruz. Gerçeğe uymadığını düşündüğümüz bir önermeyi aksiyom olarak kabul etmemeliyiz. Yani C'yi kabul edip etmemek gerçeği nasıl algıladığımızla ve gerçeğin ne olduğuyla ilgili bir sorundur. Gerçek yaşamda (her ne demekse!) C'nin doğru olduğunu düşünüyorsak o zaman C'yi kabul etmeliyiz, yoksa etmemeliyiz.

En iyisi C'nin sonuçlarına bakmak. Eğer C'nin sonuçları kabul edilebilir, beklenen, çok şaşırtmayan sonuçlarsa o zaman C'yi kabul etmeliyiz. Ama eğer C'nin sonuçları tüyleri diken diken eden sonuçlarsa, o zaman C'yi kabul etmemeliyiz.

İlerde C'nin birçok sonucunu göreceğiz. Bunlardan ikisini alalım bu bölüme.

Seçim Aksiyomu'ndan çok "doğal" sonuçlar çıkabildiği gibi hiç de doğal görünmeyen sonuçlar çıkar. Her ikisinden de birer örnek vereceğiz.

"Doğal" Bir Sonuç. X sonsuz bir küme olsun. X'in sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi var mıdır? Yani X'ten öyle x_0, x_1, x_2, x_3, ... elemanları bulabilirmiyiz ki,

$$\{x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\}$$

sayılabilir sonsuzlukta, yani $\mathbb{N}$ ile aralarında

$$n \mapsto x_n$$

gibi bir eşleme olan bir küme olsun?

Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir kümenin varlığını kanıtlanamaz. Zorluk şurdadır:

$$\{x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\}$$

diye X'in sayılabilir sonsuzlukta elemanını içeren bir "nesne" bulabiliriz. Ama bu nesnenin küme olduğunu kümeler kuramının ZF aksiyomlarıyla kanıtlamak gerekiyor, oysa Seçim Aksiyomu olmadan bu kanıtlanamaz. Bazı X kümeleri için kanıtlanabilir, ama her sonsuz küme için kanıtlanamaz. Küme olmanın bazı koşulları vardır. $\{x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\}$ nesnesinin bu koşulları yerine getirdiğini kanıtlayamayız.

"Doğal Olmayan" Bir Sonuç. 1 yarıçaplı (içi dolu) bir küre alalım. Şimdi çok şaşırtıcı bir şey söyleyeceğim. Bu küreyi öyle beş parçaya bölebilirim ki ve bu beş parçayı döndürerek ve öteleyerek (yani hacim ve alan değiştirmeyen dönüşümlerden geçirdikten sonra) öyle bir araya getirebilirim ki, parçalardan ikisinden yarıçapı 1 olan bir küme, geri kalan üçünden gene yarı çapı 1 olan bir küme elde edebilirim. Bu saçmasapan görünen teorem Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanabilir ancak. Matematikte buna *Banach-Tarski Paradoksu* denir. Ama aslında bir paradoks değildir, sadece şaşırtıcıdır, paradoksa benzer. Beş parçanın hiçbirinin hacmi olamaz elbet, yoksa hacmi büyütemezdik.) Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla, $\mathbb{R}^3$ uzayının hacmi hesaplanamayan altkümelerini bulabiliriz.

Banach-Tarski Paradoksu ileride Bölüm 16'da kanıtlanacak. Daha basit, dolayısıyla daha anlaşılır ama en az Banach-Tarski Paradoksu kadar şaşırtıcı bir örnek için [SKK, Bölüm 4.6]'den sonraki "Seçim Aksiyomu ve Bir Oyun" başlıklı "okuma parçası"na bakın.

Seçim Aksiyomu ve Peano Seçim Aksiyomu'ndan tarihte ilk sözeden Peano'dur. Zermelo'dan 14 yıl önce Seçim Aksiyomu'nun farkına varmıştır. 1890'da yazdığı "Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles" [Math. Ann. 37 (1890) 182-229] makalesinin 210'uncu sayfasında sonsuz sayıda seçim yapılamayacağını açıkça yazarak Seçim Aksiyomu'nu kullanmayı reddetmiştir. Daha da ilginci, bundan beş yıl önce 1985'te, "Sull'integrabilità della equazioni differenziali di primo ordine" [Atti Acad. Sci. Torino 21 (1885/86) 677-685] adlı makalesinde,

R, $\mathbb{R}^2$'de kapalı bir dikdörtgen ve f, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli bir fonksiyon olsun. Her $(x, y) \in R$ için, bu noktanın bir U komşuluğunda tanımlı ve türevlenebilir öyle bir h fonksiyonu vardır ki,$h(x) = y$ ve her $u \in U$ için,

$$h'(u) = f(u, h(u))$$

eşitlikleri geçerlidir

teoremini kanıtlarken, hers $0 < i < 2^n$ için, hiçbiri boş olmayan

$$A(n, i) \subseteq \mathbb{R}$$

kümelerinden birer eleman seçmek zorunda kaldığında, Peano, çok şaşırtıcı bir biçimde, burada tuhaf bir yöntem uygulamak üzere olduğunu ayrımsamış ve rastgele bir seçimin mümkün olmaması gerektiğini açık ve net bir biçimde söylemiştir:

Mais comme on ne peut appliquer une infinité de fois une loi arbitraire avec laquelle à une classe a on fait correspondre un individu de cette classe, on a formé ici une loi déterminée avec laquelle à chaque classe a, sous des hypothèses convenables, on fait correspondre un individu de cette classe.

Nitekim, $A(n, i)$ kümelerinden her biri kapalı ve üstten sınırlı olduğundan, Peano bu kümelerin maksimal elemanını almıştır ve böylece Seçim Aksiyomu'nu kullanmamıştır.

8.1.1 Seçim Aksiyomu Neden Doğaldır?

Bu bölümde okuru Seçim Aksiyomu'nun neden doğal bir aksiyom olduğuna ikna etmeye çalışacağız. Bu bölüm de okuru ikna etmezse hiçbir şey etmez!

Çıkış noktamız Bertrand Russell'ın çok bilinen sonsuz sayıda çorap çifti örneği. Sonsuz sayıda çorap çiftimiz var ve her çorap çiftinden bir tane çorap seçeceğiz. Çorap yerine ayakkabı çifti olsaydı, örneğin hep sol ayakkabıyı seçerek kolayca bir seçim yapabilirdik. Ama çorap çiftlerinin sağı solu belli olmadığından, sonsuz sayıdaki çorap çiftinin her birinden bir tekini seçmekte zorlanırız. Sonlu sayıda çorap çifti olsa, sorun olmaz da, sonsuz sayıda çorap çiftinden birini hiçbir kurala bağlı kalmaksızın seçim yapabilmek hiç de bariz değildir.

Russell'ın örneğini aklımızda tutup, bir başka konuya geçelim. Bağlantıyı daha sonra kuracağız.

Sayılabilir sonsuzlukta bir X kümemiz olsun. Sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, X'in elemanlarını

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots$$

olarak sıraya dizebiliriz.

Şimdi de her x_n'nin iki elemanlı bir küme olduğunu varsayalım. Elemanları, x_{n0} ve x_{n1} olsun. Demek ki,

$$\begin{aligned}
x_0 &= \{x_{00},\ x_{01}\},\\
x_1 &= \{x_{10},\ x_{11}\},\\
x_2 &= \{x_{20},\ x_{11}\},\\
x_3 &= \{x_{30},\ x_{11}\},\\
&\ldots\\
x_n &= \{x_{n0},\ x_{n1}\},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Şimdi bu x_n kümelerinin bileşimini alalım:

$$\begin{aligned}
\bigcup X &= \bigcup_{n=0}^{\infty} x_n\\
&= \{x_{00},\ x_{01}\} \cup \{x_{10},\ x_{11}\} \cup \ldots \cup \{x_{n0},\ x_{n1}\} \cup \ldots\\
&= \{x_{00},\ x_{01},\ x_{10},\ x_{11},\ \ldots,\ x_{n0},\ x_{n1},\ \ldots\}.
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $\cup X$ sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir, elemanlarını 0, 1, 2, 3 diye doğal sayılarla sayabiliyoruz. Nitekim, $y_{2n+i} = x_{ni}$ olsun:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_{00}, \\ y_1 &= x_{01}, \\ y_2 &= x_{10}, \\ y_3 &= x_{11}, \\ y_4 &= x_{20}, \\ y_5 &= x_{21}, \\ y_6 &= x_{30}, \\ y_7 &= x_{31}, \\ &\dots \\ y_{2n} &= x_{n0}, \\ y_{2n+1} &= x_{n1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Burada sanki bir teorem kanıtladık.

Teorem Her elemanı iki elemanlı bir küme olan sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin elemanlarının bileşimi sayılabilir sonsuzlukta bir kümedir.

Şimdi çorap sorununa geri dönelim. Yukardaki her x_n bir çorap çiftini simgelesin. Çorapların teki x_{n0}, diğeri x_{n1}. Çorapları yukarıdaki gibi

$$y_{2n+i} = x_{ni}$$

yöntemiyle numaralandıralım. Şimdi göstergeci çift olan çorapları, yani

$$y_0,\ y_2,\ y_4,\ y_6,\ \dots$$

çoraplarını seçelim...

Hani sonsuz tane çorap çiftinin her birinden bir tane seçemezdik? Seçtik işte! Yukardaki "Teorem"in kanıtı biraz yanlış! Yanlışın nerede olduğunu açıklayalım.

x_n iki elemanlı bir küme (bir çorap çifti) olsun. x_n'nin iki elemanı olduğundan bu iki elemandan birini seçip bu elemana x_{n0}, diğerine x_{n1} adını verebiliriz. Ama tüm x_n'ler için böyle bir seçim ve kodlama yapmaya hakkımız yok. (En azından hakkımızın olup olmadığını bilmiyoruz.)

Her x_n kümesiyle $\{0, 1\}$ kümesi arasında tam iki eşleme vardır. x_n'nin elemanlardan birine x_{n0}, diğerine x_{n1} adını vermek demek, bu iki eşlemeden birini seçmek demektir. Eğer eşlemelere f_n ve g_n dersek, her $\{f_n, g_n\}$ kümesinden bir eleman seçtik... Gene sonsuz bir kümeden yazılı bir kurala bağlı kalmaksızın seçim yapıyoruz... Bu ancak Seçim Aksiyomu'yla mümkündür.

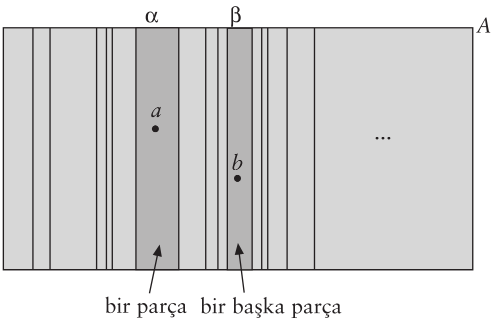
Yukardaki teorem ancak Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla kanıtlanabilir. Teoremin doğruluğuna inanıyorsanız (en azından elemanları 2 elemanlı kümelerden oluşan sayılabilir sonsuzluktaki kümeler için) Seçim Aksiyomu'na inanmalısınız.

Bu teoremi ilerde gerçekten (ama Seçim Aksiyomu'nu kullansarak) kanıtlayacağız.

9. Seçim Aksiyomu'nun Yaygın Bir Kullanımı

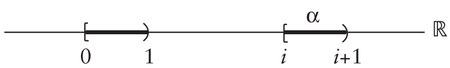
9.1 Eleman Seçmek

Bir A kümesi verilmiş olsun ve A, bir biçimde, hiçbiri boş olmayan ayrık altkümelere ayrılmış olsun. A'nın bu ayrık altkümelerine "parça" diyelim. Demek ki A, parçalara ayrılmış bir küme. (Modern deyişle, A üzerine bir denklik ilişkisi verilmiş ve A'nın her bir ayrık parçası bir denklik sınıfı.) İki örnek üzerinde çalışalım.



Örnekler.

9.1. $A = \mathbb{R}$ olsun. A'nın ayrık parçaları, i tamsayıları için, $[i,\ i+1)$ aralıkları olsun. Bu aralıklar gerçekten ayrıktırlar ve bileşimleri A'dır.



9.2. Gene $A = \mathbb{R}$ olsun. Ayrık parçalarımız $r \in \mathbb{R}$ için,

$$r + \mathbb{Q} = \{r + q : q \in \mathbb{Q}\}$$

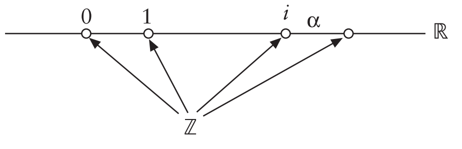
altkümeleri olsun. Herhangi iki r ve s gerçel sayısı için,

$$\text{ya } r + \mathbb{Q} = s + \mathbb{Q} \text{ ya da } (r + \mathbb{Q}) \cap (s + \mathbb{Q}) = \varnothing$$

olur. (Okura alıştırma.) Demek ki $\mathbb{R}$'nin $r + \mathbb{Q}$ biçimindeki altkümeleri $\mathbb{R}$'yi ayrık parçalara böler. Bunun Örnek 7 ile aynı örnek olduğu belli.

Şimdi bu iki örneği ayrı ayrı irdeleyelim:

Birinci Örnek. Birinci örnekte her $[i,\ i+1)$ parçasından kolaylıkla bir sayı (tabir caizse, ki caizdir, bir temsilci) seçebiliriz; örneğin $[i,\ i+1)$ aralığının en küçük sayısı (ve aynı zamanda tek tamsayısı) olan i'yi seçebiliriz. Parçalardan teker teker seçtiğimiz bu sayılar $\mathbb{Z}$ kümesini oluştururlar. $\mathbb{Z}$, her parçayı bir ve tek bir noktada, tam tamına parçadan seçtiğimiz noktada keser. İşte resim:



X, parçalarımızın kümesi olsun:

$$X = \{[i,\ i+1) : i \in \mathbb{Z}\}.$$

Parçalardan seçilen sayıların oluşturduğu $\mathbb{Z}$ kümesinin şu özelliği vardır:

(P) *Her* $\alpha \in X$ *için,* $\alpha \cap \mathbb{Z}$ *kümesinin bir ve bir tek elemanı vardır.*

$\mathbb{Z}$, bir anlamda, parçaların temsilci meclisi; $\mathbb{Z}$'de her parçadan bir ve bir tane eleman (temsilci) var.

Her parçanın en küçük elemanı seçeceğimize, her parçanın orta noktasını da seçebilirdik, yani $[i,\ i+1)$ parçasından $i + 1/2$ noktasını da seçebilirdik. Bunlar, bir j tek tamsayısı için $j/2$ türünden yazılan kesirli sayılardır. Şimdi Z bu temsilcilerin kümesi olsun:

$$Z = \{j/2 : j \in \mathbb{Z} \text{ ve } j \text{ tek sayı}\}.$$

O zaman, Z aynen yukardaki (P) özelliğini sağlar.

(P) *Her* $\alpha \in X$ *için,* $\alpha \cap Z$ *kümesinin bir ve bir tek elemanı vardır.*

İkinci Örnek. Şimdi benzer şeyi ikinci örnekte yapmaya çalışalım. İkinci örneğin parçalarından birini ele alalım. Diyelim $r+\mathbb{Q}$ parçasını ele aldık. Şimdi bu parçadan bir eleman seçelim. $r \in r + \mathbb{Q}$ olduğundan bu parçadan bal gibi r elemanını seçebiliriz. Buraya kadar bir sorun yok.

Bu örnekte de birinci örnekte olduğu gibi her parçadan bir eleman seçtik. Yalnız ikisinin arasında çok önemli bir fark var ve bu önemli fark Seçim Aksiyomu'nun özünü oluşturuyor.

Birinci örnekte X'in bir α elemanından seçilen eleman, α'nın en küçük elemanıydı (aynı zamanda α'nın tek tamsayısıydı). Biri size ve bir arkadaşınıza α'yı verse ve α'nın en küçük elemanını bulun dese, hata yapmadığınız takdirde ikiniz de aynı elemanı bulursunuz, çünkü α'nın bir ve bir tane en küçük elemanı vardır.

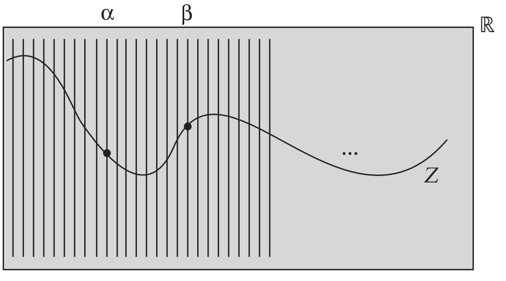
Şimdi gelelim ikinci örneğe. Diyelim size ve bir arkadaşınıza ikinci örnekteki X kümesinden bir α elemanı verildi ve bu α elemanından bir eleman seçmeniz istendi. Yöntemimizi uygulayalım: α elemanının bir $r \in \mathbb{R}$ için $r + \mathbb{Q}$ kümesine eşit olduğunu biliyoruz. Yukarda açıkladığımız yöntem, α'dan, yani $r + \mathbb{Q}$ altkümesinden r'yi seçiyordu. Ama α, **birçok** $r \in \mathbb{R}$ için $r + \mathbb{Q}$ altkümesine eşittir. Hatta α'dan hangi r elemanını seçerseniz seçin, $\alpha = r + \mathbb{Q}$ olur. Bu r'lerden hangisini seçmeliyiz? Anlattığımız yöntemle, X'in verilen bir α elemanından sizin ve arkadaşınızın aynı elemanı elde etme olasılığı oldukça düşüktür, o kadar düşüktür ki bu olasılık 0'a eşittir.

Birinci örnekte X'in her α elemanından bir eleman seçme **yöntemi** verilmişti ve bu yöntemi kim uygularsa uygulasın hep aynı eleman seçiliyordu. İkincisinde böyle bir yöntem yok. İkinci örnekte α kümesi **ancak** $r + \mathbb{Q}$ biçiminde yazılarak verilmişse, yani özel bir r elemanı gözler önüne serilmişse bu kümeden **tek** bir eleman (r'yi) seçmesini biliyoruz.

İkinci örneğimizi irdelemeye devam edelim. Birinci örnekte (P) özelliğini sağlayan bir Z kümesi bulmuştuk. Bunu ikinci örnekte yapmaya kalkışalım.

$$X := \{r + \mathbb{Q} : r \in \mathbb{R}\}$$

olsun. X, aynen birinci örnekteki gibi $\mathbb{R}$'yi parçalayan kümelerin kümesi. Şimdi $\mathbb{R}$'nin öyle bir Z altkümesi bulmaya çalışalım ki, Z, X'in her α elemanını tek bir noktada kessin. İşte bulmak istediğimiz Z'nin temsili resmi:



Böyle bir Z bulmak çok zor değil, X'in her α elemanından bir ve bir tek sayı seçmek yeterli bunun için. X'in hiçbir α elemanı boşküme olmadığından, X'in her α elemanından bir sayı seçmek mümkündür. Ancak bu seçimlerle Z'yi küme yapmak zordur, hatta Seçim Aksiyomu kullanılmaksızın, seçim nasıl yapılırsa yapılsın, Z'nin bir küme olduğu bu ikinci örnekte kanıtlanamaz.

Güçlük, X'in her α elemanını tek bir sayıda kesen bir Z **topluluğu** bulmakta değil, güçlük, o Z topluluğunu **küme** olarak bulabilmektir.

Seçim Aksiyomu'yla (P)'yi sağlayan bir $Z \subseteq \mathbb{R}$ bulmak çok kolaydır: f, X'in seçim fonksiyonu olsun. Seçim Aksiyomu, tanım kümesi X olan böyle bir fonksiyonun olduğunu söylüyor. Demek ki f fonksiyonu X'ten $\mathbb{R}$'ye gidiyor ve her $\alpha \in X$ için $f(\alpha) \in \alpha$ özelliğini sağlıyor. Şimdi $Z = f(X)$ olsun. Z bir kümedir. (Fonksiyonun tanımından dolayı bir fonksiyonun imgesi her zaman bir kümedir, bkz. [Sİ].) Ayrıca Z, (P) özelliğini sağlar.

Seçim Aksiyomu olmaksızın $\mathbb{R}$'nin (P) özelliğini sağlayan bir Z **altkümesini** bulamazdık. (Ama bunu bu ders notlarında kanıtlamamız mümkün değildir, bu ders notlaruının çapını çok çok aşar.)

Seçim Aksiyomu sayesinde, herhangi bir A kümesi ayrık altkümelere (parçalara) ayrılmışsa, A'nın, her parçadan tek bir eleman içeren bir Z altkümesini bulabiliriz. Bunu aynen yukarda yaptığımız gibi kanıtlayabiliriz. Kanıtlayalım, çünkü dikkatli olmamız gereken bir nokta var.

Teorem 9.1. *A herhangi bir küme olsun. $X \subseteq \wp(A)$ olsun. $\varnothing \notin X$ ve*

$$\text{"}X\text{' in değişik her } \alpha \text{ ve } \beta \text{ elemanı için } \alpha \cap \beta = \varnothing\text{"}$$

varsayımlarını yapalım. O zaman öyle bir $Z \subseteq A$ vardır ki, her $\alpha \in X$ için $Z \cap \alpha$'nın tek bir elemanı vardır.

Kanıtta X'in bir küme olduğunu kullanacağız. Yoksa teorem yanlış olur. Teoremde yazdığımız "$X \subseteq \wp(A)$" tümcesi, X, $\wp(A)$'nın bir **altkümesi** demektir, yani hem X'in her elemanı $\wp(A)$'nın bir elemanıdır hem de X, üstüne basa basa söylüyoruz, bir **kümedir**.

Ayrıca kanıtta Seçim Aksiyomu'nu kullanacağız. Aksi takdirde teoremi kanıtlayamayız.

Son bir not daha: Örneklerimizde $\cup X = A$ idi. Buna ihtiyacımız yok. Gerekirse, A yerine $\cup X$ alarak bu varsayımı sağlayabiliriz ama dediğimiz gibi gerek yok.

Kanıta başlıyoruz ve başlar başlamaz da bitiriyoruz:

Teorem 9.1'in Kanıtı: f, X kümesinin bir seçim fonksiyonu olsun. $Z = f(X)$ olsun. Gerisi kolay. □

Seçim Aksiyomu'nu kullanarak yukardaki teoremi kanıtladık. Yukardaki teoremi varsayarak (ZF'de elbette) Seçim Aksiyomunu da kanıtlayabiliriz.

Teorem 9.2. *Bir önceki teorem doğruysa Seçim Aksiyomu da doğrudur.*

Kanıt: X, boşkümeyi içermeyen herhangi bir küme olsun. X'in elemanları $\cup X$ kümesinin altkümeleridir, yani $X \subseteq \wp(\cup X)$ dir. Eğer $A = \cup X$ olarak alırsak nerdeyse bir önceki teoremin varsayımlarına düşeceğiz; tek sorun, X'in elemanlarının birbirinden ayrık olmadığı durum.

Şimdilik X'in elemanlarının birbirinden ayrık olduklarını varsayıp X'in bir seçim fonksiyonunu bulalım. $A = \cup X$ olsun. Bir önceki teoreme göre, A'nın,

$$\text{her } \alpha \in X \text{ için } Z \cap \alpha\text{'nın tek bir elemanı vardır}$$

özelliğini sağlayan bir Z altkümesi vardır. Her $\alpha \in X$ için bu elemana $f(\alpha)$ diyelim. Şimdi f, X'ten A'ya giden ve her $\alpha \in X$ için $f(\alpha) \in \alpha$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur, yani X'in bir seçim fonksiyonudur.

Eğer X'in elemanları ayrık olsalardı, işimiz bu aşamada bitmişti. Gelgelelim, X'in elemanları birbirinden ayrık olmayabilirler. Şimdi, X'in ayrık olmayan elemanlarını yapay olarak ayrıklaştıracağız. X'in her α elemanını $\{\alpha\} \times \alpha$ elemanıyla değiştireceğiz. α ve β kümeleri ayrık olmasa da, $\alpha \neq \beta$ ise $\{\alpha\} \times \alpha$ ile $\{\beta\} \times \beta$ kümeleri ayrıktırlar.

$$Y = \{\{\alpha\} \times \alpha : \alpha \in X\}$$

olsun. (ZF'nin en basit aksiyomlarını kullanarak Y'nin küme olduğunu kanıtlamak zor değildir. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.) Şimdi Y, boşkümeyi içermiyor ve elemanları ayrık kümeler. Varsayıma göre, Y'nin bir seçim fonksiyonu vardır. Bu seçim fonksiyonuna g diyelim. Tabii ki, her $\alpha \in X$ için,

$$g(\{\alpha\} \times \alpha) \in \{\alpha\} \times \alpha,$$

yani bir $f(\alpha) \in \alpha$ için,

$$g(\{\alpha\} \times \alpha) = (\alpha,\, f(\alpha)).$$

İşte bu f, X'in bir seçim fonksiyonudur. Bir başka deyişle, f fonksiyonunu $\pi_2 \circ g$ olarak tanımlayalım. (Buradaki π_2 ikinci izdüşüm fonksiyonudur. Hangi kartezyen çarpımdan hangi kümeye gittiğini okura bırakıyoruz.) □

Yanlış Anlaşılmasın... Boş olmayan bir kümeden bir eleman seçmek için Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç yoktur... Kimi zaman hangi eleman seçildiği bilinmese bile boş olmayan bir kümenin bir elemanı (bir anlamda) seçilebilir.

Örneğin, eğer "ikiz asallar sanısı" doğruysa $X = 2\mathbb{Z}$ olarak tanımlansın, yanlışsa $X = 2\mathbb{Z} + 1$ olarak tanımlansın. İkiz asallar sanısının doğru olup olmadığı şimdilik bilinmediğinden X'in $2\mathbb{Z}$'ye mi yoksa $2\mathbb{Z}+1$'e mi eşit olduğu da şimdilik bilinmemektedir. Ama her iki durumda da X'in bir küme olduğu ve boşküme olmadığı belli. X'ten bir eleman seçebilir miyiz? Bir anlamda evet! X'ten x elemanını seçelim... x'i 4 ya da 5 olarak alabiliriz, ama hangisi olduğunu bilemeyiz.

X'in elemanlarını bilmiyorsak bile, X'in boşküme olmadığını biliyorsak, X'ten bir eleman "seçmek" zor değildir. Bunun için Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç yoktur. (Antrparantez, bundan şu çıkıyor: Lisede söylenegeldiği ya da ima edildiği gibi, bir kümenin var olması için kümenin tüm elemanlarının bilinmesine gerek yoktur, küme sonlu bile olsa!)

Seçim Aksiyomu, sonsuz tane boş olmayan küme olduğunda ve bu kümelerin hiçbiri boşküme olmadığında, bu kümelerin herbirinden birer eleman seçmeye yarar. Tabii burada işin püf noktası, seçilen bu elemanlar topluluğunun bir küme oluşturmasıdır.

Sonlu sayıda kümeden birer eleman seçmek her zaman mümkündür, çünkü sonlu sayıda eleman her zaman bir küme oluşturur. (ZFC'nin 4 ve 5'inci aksiyomlarından çıkar bu.)

9.2 Seçim Aksiyomu'nun Bir Uygulaması

Teorem 9.3. *X, kısmi sıralı bir küme olsun. Aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.*

i. *X'in boş olmayan her altkümesinin maksimal bir elemanı vardır.*

ii. *X'in artan[1] her $(x_n)_n$ dizisi bir zaman sonra sabitleşir.*

Kanıt: **($i \Rightarrow ii$).** $(x_n)_n$, X'in artan bir dizisi olsun, yani $n \leq m$ doğal sayıları için, $x_n \leq x_m$ olsun. x_N, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin maksimal elemanı olsun. O zaman her $n \geq m$ için, $x_n = x_N$ olur, yani bu aşamadan sonra dizi sabitleşir.

($ii \Rightarrow i$). Y, X'in boş olmayan ama maksimal elemanı olmayan bir altkümesi olsun. O zaman her $y \in Y$ için,

$$\{t \in Y : y < t\}$$

olarak tanımlanan (y, ∞) kümesi boş değildir. Elemanları bu

$$(y, \infty)$$

kümelerinden oluşan kümeye Z diyelim. Z'nin bir seçim fonksiyonu vardır. Bu seçim fonksiyonuna f diyelim. $i : Y \to Z$ fonksiyonu da $i(y) = (y, \infty)$ olarak tanımlansın. $g = f \circ i$ olsun.

Demek ki, her $y \in Y$ için,

$$g(y) \in (y, \infty),$$

yani $y < g(y)$. Şimdi Y'den bir y_0 elemanı seçelim ve y_n'yi tümevarımla,

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

olarak tanımlayalım (bkz. [Sİ], Sonuç **??**). $(y_n)_n$ dizisi hiçbir zaman sabitleşmez, bir çelişki. □

[1] "Artan dizi"yi "azalmayan dizi" anlamında kullanıyoruz, yani $m \leq n$ ise $x_m \leq x_n$ özelliğini sağlayan $(x_n)_n$ dizisi anlamında.

Kısım V

Zorn Önsavı

10. Zorn Önsavı

10.1 Problemler

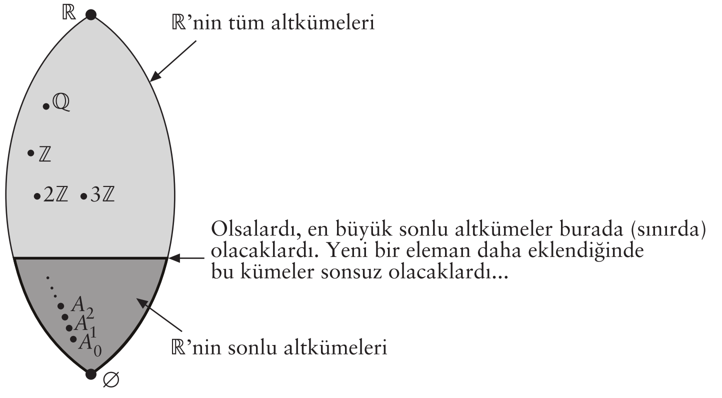
10.1.1 İmkânsız Bir Problem

İmkânsız bir problemle başlayalım: Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'nin **maksimal** bir sonlu altkümesini bulmaya çalışalım...

Doğru anladınız! Dediğimiz gibi imkânsız bir problemi çözmeye çalışacağız... Gerçel sayılardan oluşan öyle bir sonlu küme bulmaya çalışacağız ki, bu kümeden daha fazla gerçel sayı içeren hiçbir gerçel sayı kümesi sonlu olamasın...

Böyle bir küme olamaz elbet. Eğer bir kümenin sonlu sayıda elemanı varsa, bu kümeye yeni bir eleman ekleyerek ondan daha büyük ama gene sonlu sayıda elemanı olan bir başka küme elde ederiz.

Biz gene de böyle bir küme bulmaya çalışalım. Çalışmakla beyin aşınmaz! Maksat komiklik olsun...



Aradığımız, "en büyük" sonlu küme değil, yani tüm sonlu kümeleri altküme olarak içeren sonlu bir küme aramıyoruz. Sadece o sonlu kümeden daha büyük bir sonlu altküme olmamasını istiyoruz.

$\mathbb{R}$'nin sonlu bir altkümesini alalım. Eğer bu küme $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesiyse işimiz iş. Değilse (ki değildir!) o zaman bu kümeden daha büyük ama hâlâ sonlu bir küme daha vardır. (Kümelerimiz hep $\mathbb{R}$'nin altkümeleri olsunlar, artık bunu sürekli tekrarlamayalım.) Şimdi eskisinden daha büyük olan bu yeni kümeye bakalım. Bu yeni kümenin maksimal sonlu küme olma olasılığı eski kümeye göre daha yüksek tabii... Eğer bu yeni küme maksimal bir sonlu kümeyse, işimiz iş, istediğimizi elde ettik. Değilse, o zaman bu kümeden daha büyük sonlu bir küme daha vardır (ki var, biliyoruz). Şimdi bu en yeni sonlu kümeye bakalım, acaba bu en yeni sonlu küme maksimal bir sonlu küme mi? Eğer öyleyse maksimal bir sonlu küme bulduk ve sorunumuzu hallettik. Değilse, bu kümeden daha büyük bir sonlu altküme vardır. Şimdi bu sonlu altkümeye bakalım, acaba bu en gıcır sonlu küme maksimal bir sonlu altküme mi?..

Birinci kümemize A_0 diyelim. Eğer A_0, $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesiyse, sorun yok. (Ama olmadığını biliyoruz; eğer a, A_0'da olmayan bir gerçel sayıysa, $A_0 \bigcup \{a\}$, A_0'dan daha büyük sonlu bir kümedir.). Diyelim şansımız yaver gitmedi (!) ve A_0, $\mathbb{R}$'nin maksimal bir sonlu altkümesi değil, ondan daha büyük sonlu bir küme var. A_0'dan daha büyük sonlu bir küme alalım ve bu kümeye A_1 diyelim. A_1, maksimal bir sonlu küme değilse, A_1'den daha büyük sonlu bir küme vardır. Bu kümeye de A_2 diyelim. Bunu böylece sürdürebiliriz:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n.$$

Bunların biri maksimal bir sonlu kümeyse imkânsız problemimizi çözdük demektir. Ama değilse işlemi sonsuza kadar sürdürebiliriz. Sürdürelim:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Böyle bir diziye ***zincir*** adını verelim.

Yukardaki zincirin A_n "halkaları" sonlu gerçel sayı kümeleri. Herbirinin bir öncekinden daha fazla elemanı var. Dolayısıyla hiçbiri maksimal bir sonlu küme değil. Bunların **herbirinden** daha büyük ama hâlâ sonlu bir gerçel sayı kümesi bulup bu kümenin maksimal bir sonlu küme olup olmadığına bakalım... Bulacağımız bu yeni küme A_n'lerin hepsini (altküme olarak) içermek zorunda olduğundan sonlu olamaz maalesef. Ama olsaydı ne güzel olurdu... Bu, bütün A_n'leri içeren sonlu kümeye A_ω der ve kaldığımız yerden devam ederdik... Durum şöyle olurdu:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \subset A_\omega.$$

Eğer A_ω maksimal bir sonlu kümeyse sorunu çözmüş olurduk. Değilse (ki değil, çünkü A_ω sonlu bile değil), o zaman A_ω'dan daha büyük sonlu bir küme bulur ve aynı işlemi maksimal bir sonlu altkümeye toslayana dek sürekli tekrarlardık. Bir zincire geldiğimizde ise zincirin bileşimini içeren sonlu bir küme bulmayı umup gene yolumuza devam ederdik. Bu yöntemi hiç durmadan tekrarlayarak maksimal bir sonlu küme bulmaya çalışabilirdik.

Ama ne yazık ki bunlar hayal, bütün A_n'leri içeren A_ω gibi sonlu bir küme yok evrende.

Bütün bu yaptıklarımızı sonlu altkümeler yerine $\mathbb{R}$'nin sayılabilir altkümeleriyle yapsaydık, gene başarısızlığa uğrardık, çünkü $\mathbb{R}$'nin en büyük sayılabilir altkümesi de yoktur (çünkü sayılabilir bir kümeye bir eleman daha eklersek gene sayılabilir bir küme elde ederiz) ama bu sefer yukardaki yöntemle başarısızlığa uğrayacağımızı gösteremezdik (çünkü ilerde kanıtlayacağımız üzere, sayılabilir sonsuzluktaki sayılabilir kümenin bileşimi gene sayılabilirdir (ama bu sonucu kanıtlamak için Seçim Aksiyomu'na ihtiyaç vardır)).

Gene de yukardaki fikrin başarıya ulaşacağı durumlar olacaktır. Bizi izlemeye devam edin!

10.1.2 Çok Kolay Bir Problem

Gene çok kolay bir problem ele alalım, ama bu sefer lütfen çözümü olsun! Bu sefer $\mathbb{R}$'nin 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulalım.

Gerçekten çok kolay bir problem bu. Tek bir çözümü var: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Yani bu sefer sadece maksimal değil, gerçekten de koşulumuzu sağlayan **en büyük** altküme var. Ama biz bu çözümü bilmediğimizi varsayarak yukardaki yöntemi deneyelim.

$\mathbb{R}$'nin 1'i içermeyen herhangi bir altkümesinden başlayalım. Bu altküme boşküme de olabilir, $\{0\}$ ya da $\{\pi\}$ kümesi de olabilir, hatta, şans bu ya, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesi de olabilir; önemli olan 1'i içermemesi. 1'i içermeyen bu ilk kümeye A_0 diyelim. Eğer A_0 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir altkümeyse, o zaman keyfimize diyecek yok, problemi çözdük. Ama diyelim A_0 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir küme değil. O zaman A_0'ı içeren ve A_0'dan daha fazla elemanı olan ama 1'i içermeyen bir A_1 kümesi vardır. Eğer A_1 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir. Ama diyelim A_1 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir küme değil. O zaman A_1'i içeren ve A_1'den daha fazla elemanı olan ama hâlâ daha 1'i içermeyen bir A_2 kümesi vardır. Eğer A_2 kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Bunu böylece devam ettirelim. Eğer belli bir aşamada, diyelim n'inci aşamada A_n kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Diyelim hiçbir A_n, 1'i içermeyen maksimal bir küme değil, sürekli daha büyüğünü buluyoruz. Durumu resmedelim:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

ve özetleyelim: Bunların hepsi gerçel sayı kümeleri ve hiçbiri 1'i içermiyor ve herbirinin bir öncekinden daha fazla elemanı var.

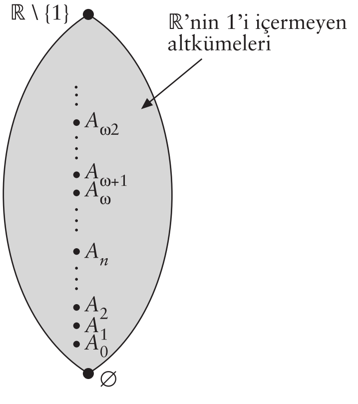
Bunların herbirinden daha büyük ve 1'i içermeyen bir küme bulup bu kümenin 1'i içermeyen maksimal bir küme olup olmadığına bakalım. Bulacağımız bu yeni kümenin A_n'lerin hepsinden daha büyük olmasını istediğimizden, A_n'lerin hepsini altküme olarak içermek zorundadır. Bir önceki örnekte A_n'lerin hepsinden daha büyük ve sonlu bir küme bulamamıştık, yoktu öyle bir küme, bakalım şimdi bulabilecek miyiz? Heyecan son haddinde!

Bütün bu A_n'lerin bileşimini alırsak, A_n'lerin hepsinden daha büyük bir küme buluruz elbet. Ayrıca, A_n'lerin hiçbiri 1'i eleman olarak içermediğinden, A_n'lerin bileşimi de 1'i eleman olarak içermez. Ne güzel!

Demek ki tüm A_n'leri altküme olarak içeren ama 1'i eleman içermeyen en az bir küme vardır. A_ω, bu kümelerden biri olsun. Örneğin

$$A_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

olabilir, ama bundan daha büyük bir küme de olabilir, ne olduğu pek önemli değil, önemli olan A_ω'nın A_n'lerin hepsini altküme olarak içermesi ama 1'i-çermemesi. (Bu arada, kafa karıştırmamak için parantez içinde söyleyelim: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ bileşiminin küme olduğu hiç de bariz değildir. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$'nin küme olduğu ZFC'nin aksiyomlarına dayanılarak kanıtlanmalı. Münasip A_n'ler seçilerek bu kanıtlanabilir. Ama okur bu bölümde bu sorunu bunu önemsemesin.)



Kaldığımız yerden A_0 yerine A_ω ile devam edelim. Eğer A_ω kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman başarıya ulaştık demektir... Değilse, A_ω'yı altküme olarak içeren ama A_ω'dan daha büyük olan ve 1'i içermeyen bir küme var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+1}$ diyelim. Okur tahmin ediyordur bundan sonra ne yapacağımızı. Eğer $A_{\omega+1}$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, $A_{\omega+1}$'in, $A_{\omega+1}$'den daha büyük ve 1'i içermeyen bir üstkümesi var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+2}$ diyelim... Bunu böylece sürdürürüz... Eğer

$$A_\omega \subset A_{\omega+1} \subset A_{\omega+2} \subset \ldots \subset A_{\omega+n} \subset \ldots$$

zincirinin $A_{\omega+n}$ halkalarından hiçbiri 1'i içermeyen maksimal bir küme değilse, bunların bileşimi örneğin, 1'i içermeyen ve yukardakilerin herbirinden daha büyük bir kümedir. Böyle bir kümeye $A_{\omega 2}$ adını verelim. Eğer $A_{\omega 2}$ kümesi 1'i içermeyen maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, işlemi devam ettirebiliriz... Eğer belli bir aşamada, 1'i içermeyen maksimal bir altkümeye (yani $\mathbb{R}\setminus\{1\}$'e, ama sonucun bu olduğunu bilmiyormuş gibi davranıyoruz) rastlarsak o zaman gayretlerimiz amacına ulaşmış demektir, duralım. Ama eğer kümeleri hep 1'i içermeyecek biçimde büyütebiliyorsak, bir adım ileri gidelim. Başarıya ulaşmadığımız sürece hep ileri gidebileceğimizi biliyoruz.

$$A_{\omega 2} \subset A_{\omega 2+1} \subset A_{\omega 2+2} \subset \ldots \subset A_{\omega 2+n} \subset \ldots$$

Eğer hep başarısızlığa uğramışsak, bir sonraki aşamada bu kümelerin bileşimini içeren ama 1'i içermeyen herhangi bir küme alıp buna $A_{\omega 3}$ diyelim ve yukardaki gibi devam edelim.

Peki ama bu durmadan ileri gitmenin bir sonu gelecek mi? En sonunda, gerekirse sonsuz hatta çok sonsuz adımı aşıp $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ kümesine ulaşabilecek miyiz?

Bu sorunun yanıtı hiç de bariz değil. $\mathbb{R}$ çok büyük bir küme olduğundan (bkz. [SKK]) ulaşmak istediğimiz $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ kümesi de bayağı büyüktür, sayılamaz sonsuzluktadır. (Bunun ne demek olduğunu bilmeyen umursamasın.) Yukardaki yöntemle zaten bildiğimiz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ çözümüne ulaşıp ulaşamayacağımızdan emin olamayız. (Limit ordinallerde bileşim alarak sayılabilir adımda ulaşamayacağımız belli ama, daha ilerde göreceğimiz üzere sayılabilir sayıda sayılabilir kümenin bileşimi de sayılabilirdir çünkü.)

10.1.3 Benzer Bir Problem

Bu sefer $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümesini bulmaya çalışalım. Yani $\mathbb{R}$'nin öyle bir altkümesini bulalım ki, $\mathbb{R}$'nin bu altkümeden daha büyük bir altkümesi $\mathbb{R}$'ye eşit olsun. Yanıtı gene biliyoruz: Eğer a, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir elemanıysa, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ kümesi $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümelerinden biridir, $\mathbb{R}$'nin ondan daha büyük bir özaltkümesi yoktur.

Bu sefer birden fazla yanıt var, $\mathbb{R}$'nin her a elemanı için bir çözüm ($\mathbb{R} \setminus \{a\}$ çözümünü) bulabiliriz.

Aynı yöntemi denersek bu sefer de birinci örneğimizdeki zorluğa toslarız: Eğer

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

herbiri $\mathbb{R}$'nin özaltkümesiyse, bunların hepsini birden içeren bir küme $\mathbb{R}$'ye eşit olabilir, yani bunların hepsinin bileşimi $\mathbb{R}$ olabilir. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_n = (-\infty,\, n)$$

aralığıysa, bu A_n'lerin hepsi özaltkümedir, hiçbiri maksimal bir özaltküme değildir, ama bileşimleri $\mathbb{R}$'dir.

Bu zorluğu yenmek için bu problemi bir önceki probleme dönüştürüp belli bir a için ($a = 1$ olabilir), bu belirlenmiş a'yı içermeyen maksimal bir altkümeyi bulmaya çalışmalıyız. Şans bu ya, a'yı içermeyen maksimal bir altküme $\mathbb{R}$'nin maksimal bir özaltkümesidir.

10.1.4 Orta Zorlukta Bir Problem

Şimdi bir başka probleme el atalım. Bu problem daha zor olacak. Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'nün çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulmaya çalışalım. Yani öyle bir $M \subseteq \mathbb{Q}$ kümesi bulmaya çalışalım ki,

1. Her x, $y \in M$ için, $x - y \in M$ olsun.
2. 1 sayısı M'de olmasın.
3. M, $\mathbb{Q}$'nün yukardaki iki koşulu sağlayan maksimal bir altkümesi olsun. Yani $M \subset N \subseteq \mathbb{Q}$ ise, N ya çıkarma altında kapalı olmayacak (yani birinci koşulu sağlamayacak) ya da 1'i içerecek (yani ikinci koşulu sağlamayacak).

"Maksimal" koşulundan vazgeçip ilk iki koşulu sağlayan bir küme bulalım. $\emptyset$ ya da $\{0\}$ bu tür kümelerdendir. Çift sayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ de çıkarma altında kapalıdır ve 1'i içermez. Bu iki özelliği sağlayan herhangi bir küme alalım ve bu kümeye A_0 adını verelim. Eğer A_0 ilk iki koşulu sağlayan maksimal bir kümeyse sorun yok, çözüme ulaştık. Değilse, ilk iki koşulu sağlayan ve A_0'dan daha büyük bir $A_1 \subset \mathbb{Q}$ vardır.

Bu işlemi sürdürelim.

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n$$

kümelerini elde ederiz. Amacımıza henüz ulaşmamışsak, yani A_n, ilk iki koşulu sağlayan maksimal bir küme değilse devam edelim. Sonlu bir aşamada ilk iki koşulu sağlayan $\mathbb{Q}$'nün maksimal bir altkümesine rastlamamışsak şöyle bir zincir elde ederiz:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Bunların her biri $\mathbb{Q}$'nün 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı altkümeleri, ama hiçbiri en büyüğü değil, yani her biri bir öncekinden daha fazla eleman içeriyor. Bunların bileşimini alalım:

$$A_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

A_ω da 1'i içermez, çünkü A_n'lerin hiçbiri 1'i içermiyor. (A_ω'nın 1'i içermesi için A_n'lerin en az birinin 1'i içermesi gerekir.) Ayrıca A_ω da çıkarma altında kapalıdır. Bunu kanıtlayalım. A_ω'dan iki eleman alalım, diyelim x ve y. Bu iki eleman A_ω'da olduğundan, herbiri A_n'lerden birindedir, ama ikisi birden aynı

A_n'de olmayabilir, en azından bundan henüz emin değiliz, birazdan olacağız ama... Diyelim,

$$x \in A_n \text{ ve } y \in A_m.$$

Şimdi ya $n \leq m$ ya da $m \leq n$. Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $n \leq m$ eşitsizliğini varsayabiliriz. Böylece,

$$x \in A_n \subseteq A_m$$

olur. Demek ki hem x, hem de y, A_m'deler. Ama A_m çıkarma altında kapalı. Buradan $x-y \in A_m$ çıkar. Ama şimdi, $A_m \subseteq A_\omega$ olduğundan, $x-y \in A_\omega$ çıkar. Böylece A_ω kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlamış olduk.

Demek ki bir sonraki aşamada A_ω kümesini alabiliriz. Bu küme A_n'lerin hepsinden daha büyük ve ayrıca 1'i içeriyor ve de çıkarma altında kapalı. Kaldığımız yerden A_0 yerine A_ω ile devam edelim. Eğer A_ω kümesi, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı olan maksimal bir kümeyse, o zaman işimiz bitti, istediğimizi bulduk. Öyle değilse, o zaman, A_ω'yı altküme olarak içeren (yani A_ω'nın üstkümesi olan) ama A_ω'dan daha fazla eleman içeren öte yandan 1'i içermeyen ve gene çıkarma altında kapalı bir küme var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+1}$ diyelim. Eğer $A_{\omega+1}$ kümesi 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, $A_{\omega+1}$'in, $A_{\omega+1}$'den daha büyük ve 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı bir üstkümesi var demektir. Bu kümeye $A_{\omega+2}$ diyelim... Bunu böylece sürdürürüz... Eğer

$$A_\omega \subset A_{\omega+1} \subset A_{\omega+2} \subset \ldots \subset A_{\omega+n} \subset \ldots$$

zincirinin $A_{\omega+n}$ halkalarından hiçbiri 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir küme değilse, bunların bileşimi örneğin, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı ve yukardakilerin herbirinden daha büyük bir kümedir. Böyle bir kümeye $A_{\omega 2}$ adını verelim. Eğer $A_{\omega 2}$ kümesi 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir kümeyse, o zaman problemimizi çözdük demektir... Değilse, işlemi devam ettirebiliriz... Eğer belli bir aşamada, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal bir altkümeye rastlarsak o zaman çabalarımız amacına ulaşmış demektir, duralım. Ama eğer kümeleri hep 1'i içermeyecek ve çıkarma altında kapalı olacak biçimde büyütebiliyorsak, bir adım ileri gidelim. Hep ileri gidebileceğimizi biliyoruz.

$$A_{\omega 2} \subset A_{\omega 2+1} \subset A_{\omega 2+2} \subset \ldots \subset A_{\omega 2+n} \subset \ldots$$

Eğer sürekli başarısızlığa uğramışsak, bir sonraki aşamada bu kümelerin bileşimini içeren ama 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı herhangi bir küme alıp buna $A_{\omega 3}$ diyelim ve yolumuza devam edelim...

Bir zaman sonra istediğimiz kümeye rastlayacak mıyız? Zor soru...

Çözüm: Yukardaki yöntemi terkedelim, belli ki bir yere varamayacak. Aradığımız kümelerden birini ayan beyan yazacağım:

p herhangi bir asal sayı olsun.

$$M = \{pa/b\colon a,\, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p,\, b\text{'yi bölmüyor}\}$$

olsun. M çıkarma altında kapalıdır, bunu görmek kolay. Ayrıca M, 1'i de içermez; çünkü aksi takdirde, p'nin b'yi bölmediği a, $b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için $1 = pa/b$ olur, buradan $pa = b$ ve p'nin b'yi böldüğü çıkar ki bunun böyle olmadığını biliyoruz... Demek ki $1 \notin M$.

Şimdi M'nin, $\mathbb{Q}$'nün bu iki özelliği olan maksimal bir altkümesi olduğunu kanıtlayalım. N, M'den daha büyük ve çıkarma altında kapalı herhangi bir kesirli sayılar kümesi olsun. 1'in N'de olduğunu kanıtlayacağız ve böylece istediğimiz kanıtlanmış olacak.

Önce çıkarma altında kapalı kümelerin çok bilinen ve kolay kanıtlanan bir özelliğini verelim:

Önsav 10.1. *Eğer N çıkarma altında kapalıysa ve boşküme değilse, o zaman $0 \in N$ ve N toplama altında da kapalıdır. Ayrıca $-N \subseteq N$ olur.*

Kanıt: $N \neq \varnothing$ olduğundan, N'de en az bir eleman vardır. a ve b, (birbirine eşit ya da değil) N'nin herhangi iki elemanı olsun. N çıkarma altında kapalı olduğundan,

$$0 = a - a \in N,$$

$$-a = 0 - a \in N$$

ve

$$a + b = a - (-b) \in N$$

olur. □

Sonuç 10.2. *N ve M, $\mathbb{Q}$'nün çıkarma altında kapalı iki altkümesi olsun.*

$$M \subseteq N$$

ve $x \in N$ ise o zaman $M + Zx \subseteq N$ olur. □

Şimdi biraz önce tanımladığımız,

$$M = \{pa/b\colon a,\, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p,\, b\text{'yi bölmüyor}\}$$

kümesinin, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı maksimal kesirli sayı kümesi olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 10.3. *Yukarda tanımlanan M kümesi, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı bir maksimal kesirli sayı kümesidir.*

Kanıt: N, M'nin çıkarma altında kapalı herhangi bir üstkümesi olsun. Diyelim, N'de olan ama M'de olmayan bir x kesirli sayısı var. a ve b tamsayıları için, $x = a/b$ yazalım. a ve b'nin birbirine asal olduklarını varsayabiliriz. x, M'de olmadığından, p, a'yı bölmez. Demek ki a ve p birbirine asallar. Dolayısıyla $pu + av = 1$ eşitliğini sağlayan u ve v tamsayıları vardır [S]. Dolayısıyla,

$$pu + vbx = pu + vb(a/b) = pu + va = 1.$$

Ama $pu = pu/1 \in M$ ve $vbx \in \mathbb{Z}x$. Dolayısıyla,

$$1 = pu + vbx \in M + \mathbb{Z}x \subseteq N.$$

Böylece, M'nin özaltkümesi olduğu çıkarma altında kapalı her kesirli sayı kümesinin 1'i içermek zorunda olduğunu kanıtladık. Demek ki M, 1'i içermeyen ve çıkarma altında kapalı olan $\mathbb{Q}$'nün bir maksimal altkümesidir. □

10.1.5 Çetin Bir Problem

Son olarak çetin bir problemi ele alacağız. Problemimiz bir önceki problemin benzeri olacak. Yalnız bu sefer $\mathbb{Q}$'nün değil $\mathbb{R}$'nin altkümeleriyle uğraşacağız.

$\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini bulmaya çalışacağız.

Yöntemimizi biliyorsunuz, eğer çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen bir küme maksimalsa, duralım; değilse o kümeden bir büyüğü vardır. Şimdi o büyük kümeden hareket edelim. Bunu böylece sürdürelim. Eğer hiçbir zaman maksimal bir kümeye rastlamazsak, o zaman

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

diye bir dizi elde ederiz. Bu dizideki kümelerin her biri bir öncekinden daha büyüktür. Her biri çıkarma altında kapalıdır. Hiçbirinde 1 yoktur. Şimdi bu kümelerin bileşimini alalım. Bu bileşim de çıkarma altında kapalıdır ve 1'i içermez. Şimdi A_0'la yaptığımızı bu bileşimle yapalım. Ve bunu çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir kümeye rastlayana dek sürekli sürdürelim.

Bu yöntemle, böyle bir kümeye rastlama şansımız var mı? [Sİ] ders notlarında gördüklerimiz böyle bir maksimal kümeye rastlayacağımız konusunda bize bir güvence veremez.

Peki, bir önceki problemdeki gibi, çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir kümeyi - sanki gökten inmiş gibi - okurlara sunabilir miyiz? Sunamayız! Sadece biz değil kimse sunamaz.

Böyle bir kümenin varlığı bir sonraki bölümde söz edeceğimiz **Zorn Önsavı** kullanılarak kanıtlanabilir. Zorn Önsavı'nın kanıtı da Seçim Aksiyomu'nu gerektirir, Seçim Aksiyomu olmadan yapılamaz.

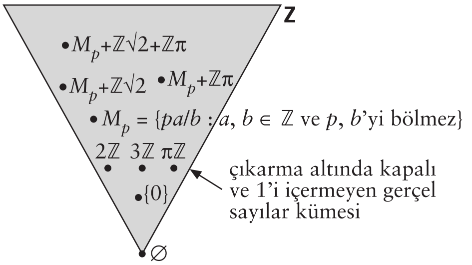
Seçim Aksiyomu'nun yardımıyla kanıtlayacağımız Zorn Önsavı sayesinde, elle, akılla, emek vererek bulamayacağımız matematiksel nesnelerin varlığını kanıtlayabileceğiz. Zorn Önsavı'nı (daha doğrusu Seçim Aksiyomu'nu) matematikçilerin yardımına yetişen tanrısal bir el olarak algılayabilirsiniz: Seçim Aksiyomu sayesinde, olmasını çok arzuladığımız ama geleneksel yöntemlerle varlığı kanıtlanamayan kümeler var olacaklar.

10.2 Zorn Önsavı ve Birkaç Sonucu

10.2.1 Hazırlık

Okurun bir önceki altbölümü okuduğunu ve orada ortaya konulan sorunu anladığını varsayıyoruz. O bölümde ele aldığımız ama pek başarılı olamadığımız kanıtlama yönteminden, yani bir kümenin belli koşullara sahip maksimal bir altkümesinin varlığını gösterme çabamızdan sözedeceğiz bu altbölümde.

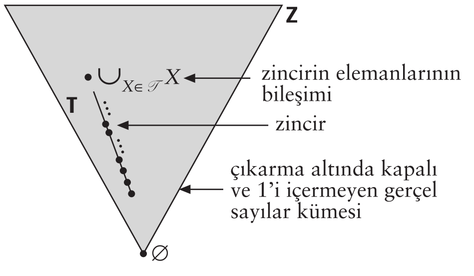
Geçen altbölümde, son örnekte, çıkarma altında kapalı olan ve 1'i içermeyen gerçel sayılar kümelerini ele almıştık. Bu bölümün en azından başında $\mathbb{R}$'nin bu tür altkümelerine yoğunlaşalım. $\mathbb{R}$'nin bu tür altkümelerini eleman olarak içeren kümeye $\mathcal{Z}$ adını verelim. Uzunca bir süre bu örnekle uğraşacağız.



Yukardaki şekilde $\mathcal{Z}$'yi çizdik. Altkümeleri aşağıya, üstkümeleri yukarıya yazdık, yani $\mathcal{Z}$'nin elemanlarının (altküme ilişkisine göre aşağıdan yukarıya doğru) sıralanmasına dikkat ettik: $A \subset B$ ise A'yı alta B'yi yukarıya yazdık. Dolayısıyla boşkümeyi en alta koyduk. Bunun bir üstünde $\mathcal{Z}$'nin tek sonlu sayıda elemanı olan $\{0\}$ kümesi var. Daha yukarda 1 ve -1 dışındaki a sayılarının katlarından oluşan $a\mathbb{Z}$ kümeleri var. Resimde göstermedik ama bir üst katta $\sqrt{2}\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ gibi iki elemanla "gerilen" çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ kümeleri var. (Soru: $\sqrt{2}\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ kümesi $\mathcal{Z}$'de midir?) Resimde bir de M_p diye bir küme var, tanımına bakılırsa 1'i içermiyor ve çıkarma altında kapalı, yani $\mathcal{Z}$'de. Velhasıl, $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermesyen her altkümesi $\mathcal{Z}$'nin bir elemanı ve bu altkümeler küçükten büyüğe doğru dizilmişler.

$\mathcal{Z}$ kümesinin ***zincir özelliği*** adı verilen şu özelliği var:

Zincir Özelliği. *Eğer $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ ise ve her $X, Y \in \mathcal{T}$ için ya $X \subseteq Y$ ya da $Y \subseteq X$ ise, o zaman $\mathcal{T}$ 'nin elemanlarının bileşimi olan $\cup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi de $\mathcal{Z}$' dedir.*



Bunun kanıtı oldukça kolay. Eğer $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi 1'i içerseydi, $\mathcal{T}$'nin bir X elemanı da 1'i içermek zorunda olurdu ki, bu imkânsız, çünkü

$$X \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}.$$

Demek ki $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesi 1'i içeremez. Şimdi $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlayalım. x ve y, $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinden iki eleman olsun. O zaman, $x \in X$ ve $y \in Y$ ilişkilerinin doğru olduğu $X, Y \in \mathcal{T}$ kümeleri vardır. $\mathcal{T}$'nin zincir özelliğinden dolayı ya $X \subseteq Y$ ya da $Y \subseteq X$ olmalı. x ve y açısından durum simetrik olduğundan, $Y \subseteq X$ ilişkisini kabul etmede bir mahsur yok. O zaman $y \in Y \subseteq X$ ve hem x hem de y, X'in birer elemanı. Ama X çıkarma altında kapalı bir küme. Demek ki $x - y \in X$. Öte yandan, X elbette $\cup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin bir altkümesi. Sonuç: $x - y \in \cup_{X\in\mathcal{T}} X$ ve $\bigcup_{X\in,\mathcal{T}} X$ kümesi çıkarma altında kapalı.

$\mathcal{Z}$'nin, "her $X, Y \in \mathcal{T}$ için ya $X \subseteq Y$ ya da $Y \subseteq X$" özelliğini sağlayan $\mathcal{T}$ altkümelerine zincir diyelim. O zaman yukardaki özellik şöyle okunur:

$\mathcal{Z}$'nin her zincirinin bileşimi gene $\mathcal{Z}$'dedir.

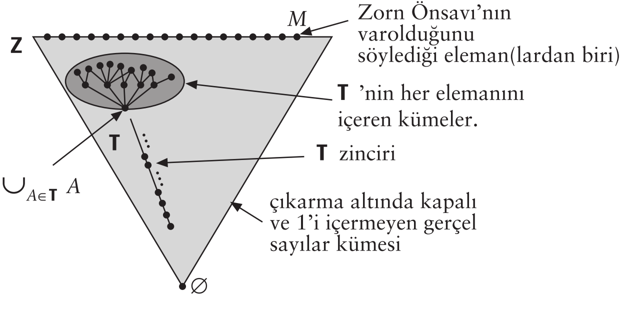
Geçen bölümde, bu özelliği, $\mathcal{Z}$'nin sayılabilir sonsuzlukta elemanı olan zincirleri için kullanmıştık. Birazdan yazacağımız Zorn Önsavı'nda $\mathcal{Z}$'nin sayılabilir ya da sayılamaz sonsuzluktaki tüm zincirlerini ele almamız gerekecek.

Bu arada, $\bigcup_{X\in\mathcal{T}} X$ kümesinin kimileyin $\bigcup \mathcal{T}$ olarak yazıldığını da anımsatalım. Bu tıkız yazılım, simge sayısında hatırı sayılır bir indirim sağlar.

Birazdan ifade edeceğimiz Zorn Önsavı için "$\mathcal{Z}$'nin her zincirinin bileşimi gene $\mathcal{Z}$'dedir" özelliğinden daha zayıf bir özellik gerekir. İşte o özellik:

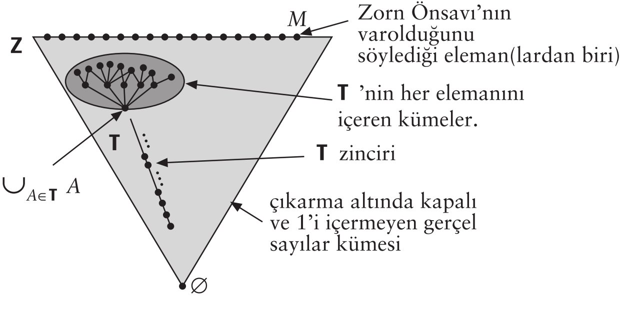
$\mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$'nin herhangi bir zinciriyse, $\mathcal{Z}$'de *$\mathcal{T}$'nin her elemanından büyükeşit bir eleman vardır.*

Yukardaki örnekte, eğer $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincirse, $\cup\mathcal{T}$,$\mathcal{Z}$'dedir ve $\mathcal{T}$'nin her elemanından büyükeşittir. (Eğer $A \subseteq B$ ise B'nin A'dan ***büyükeşit*** olduğunu söylüyoruz. Eğer $A \subset B$ ise B'nin A'dan ***büyük*** olduğunu söyleyeceğiz. Aslında, aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere, $\bigcup \mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$'de bulunan ve $\mathcal{T}$'nin her elemanın



dan daha büyükeşit olan elemanların en küçüğüdür. Ama bu özelliğin bir önemi olmayacak bizim için.)

Birazdan tanıtacağımız Zorn Önsavı, eğer $\mathcal{Z}$ yukardaki son italik koşulu sağlıyorsa, o zaman $\mathcal{Z}$'nin en az bir maksimal elemanının olduğunu söyler.

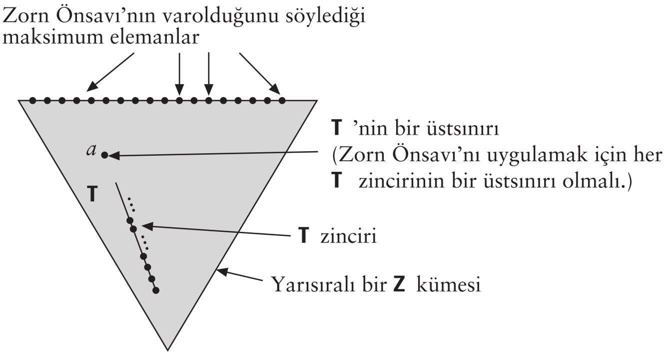


Yani, Zorn Önsavı, $\mathcal{Z}$ üzerine koşulan yukardaki italik koşul doğru olduğunda, öyle bir $M \in \mathcal{Z}$ vardır ki, der, $\mathcal{Z}$'nin hiçbir elemanı M'den daha büyük olamaz, en fazla M'ye eşit olabilir. Ama dikkat: Bu maksimal elemanlardan sonsuz sayıda olabilir (ki çoğu zaman da öyledir).

10.3 Zorn Önsavı

Artık Zorn Önsavı'nı anlayacak bilgi birikimine sahibiz:

Önsav 10.4 (Zorn Önsavı)**.** *$(\mathcal{Z}, \le)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ ise ve $\mathcal{Z}$'nin her zincirinin bir üstsınırı varsa o zaman $\mathcal{Z}$'nin maksimal bir elemanı vardır.*



Dikkat ederseniz, Zorn Önsavı, geçen bölümde yapmak isteyip de yapamadığımızı herhangi bir zahmete girmeksizin yapıyor. Bir tür sihirbazlık, ya da Tanrı'nın eli diyebilirsiniz ("Al sana uğraşıp da bir türlü bulamadığın küme evlat!").

Zorn Önsavı'nı Bölüm 12'te Seçim Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayacağız. Şimdilik Zorn Önsavı'nı kanıtlamadan kabul edip önsavı kullanan birkaç basit ama önemli örnek verelim.

İlk olarak, Zorn Önsavı'nı kullanarak, geçen bölümde bulmaya çalışıp bulamadığımız, bu bölümde de konu mankeni olarak kullandığımız kümenin varlığını kanıtlayalım:

Teorem 10.5. *Gerçel sayılar kümesi* $\mathbb{R}$*'nin çıkarma altında kapalı ve* 1*'i içermeyen maksimal bir altkümesi vardır.*

Kanıt: Zorn Önsavı'nı kullanacağız.

$$\mathcal{Z} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ çıkarma altında kapalı ve } 1 \notin A\}$$

olsun. $\mathcal{Z}$'yi "altkümesi olmak" ilişkisiyle sıralayalım. Şimdi $(\mathcal{Z}, \subseteq)$ kısmi sıralamasının Zorn Önsavı'nın koşullarını sağladığını gösterelim. $\{0\} \in \mathcal{Z}$ olduğundan $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Şimdi ikinci koşulun sağlandığını kanıtlayalım. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincir olsun. $\cup\mathcal{T}$,$\mathcal{T}$'nin her elemanının bir üstkümesi olduğundan, eğer $\cup\mathcal{T} \in \mathcal{Z}$ ise, $\cup\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$'nin bir üstsınırı olur. Dolayısıyla $\cup\mathcal{T} \in \mathcal{Z}$ önermesini kanıtlayalım. Bunun için iki şey kanıtlamalıyız:

1. $\cup\mathcal{T}$ çıkarma altında kapalı olmalı,
2. $\cup\mathcal{T}$, 1'i içermemeli.

Birinciden başlayalım. x, $y \in \cup\mathcal{T}$ olsun. Bu iki eleman $\mathcal{T}$'nin elemanlarından birindedir, ama ikisi birden aynı elemanda olmayabilir, en azından bundan henüz emin değiliz, birazdan olacağız ama... Diyelim, A, $B \in \mathcal{T}$ için, $x \in A$ ve $y \in B$. Ama $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan,

$$\text{ya } A \subseteq B \text{ ya da } B \subseteq A.$$

Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $A \subseteq B$ ilişkisini varsayabiliriz. Böylece,

$$x \in A \subseteq B$$

olur. Demek ki hem x, hem de y, B'de. Ama B çıkarma altında kapalı. Buradan $x - y \in B$ çıkar. Ama şimdi, $B \subseteq \cup\mathcal{T}$ olduğundan, $x - y \in \cup\mathcal{T}$ olur. Böylece $\cup\mathcal{T}$ kümesinin çıkarma altında kapalı olduğunu kanıtlamış olduk.

Şimdi, $1 \notin \cup\mathcal{T}$ önermesini kanıtlayalım. $\cup\mathcal{T}$ kümesinin elemanları $\mathcal{T}$'nin elemanlarının elemanlarıdır; dolayısıyla 1, $\cup\mathcal{T}$ kümesinde olsaydı, 1, $\mathcal{T}$ kümesinin bir elemanının elemanı olurdu. Ama $\mathcal{T}$'nin hiçbir elemanı 1'i içermez. Dolayısıyla, 1 de $\cup\mathcal{T}$ kümesinde olamaz. □

Notlar

1. Zorn Önsavı'nda $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ koşulunu kanıtlamak genel olarak kolaydır ama gene de unutulmaması gerekir. Eğer $\mathcal{Z}$ boşkümeyse, $\mathcal{Z}$'nin maksimal bir eleman barındırma şansı yoktur!

2. Uygulamada çoğu zaman $\mathcal{Z}$ bir kümeler kümesidir ve kısmi sıralama da $\subseteq$ tarafından verilmiştir. Bu arada, $\mathcal{Z}$ 'de bir kısmi sıralama tanımlanmamışsa önsavı uygulayamayacağınıza dikkatinizi çekerim.

3. Uygulamada çoğu zaman $\mathcal{Z}$'nin bir $\mathcal{T}$ zincirinin en küçük üstsınırı bulunmaya çalışılır (daha kolaydır çünkü) ama böyle bir zorunluluk yoktur tabii.

4. Zorn Önsavı'nın var olduğunu söylediği maksimal elemanı görebiliyorsanız, yani açık açık tanımını yazabiliyorsanız ya da diğer tüm maksimal elemanlardan ayırdedebiliyorsanız, o zaman Zorn Önsavı'nı gereksiz yere kullanmışsınız demektir, maksimal elemanın varlığını Zorn Önsavı'nı kullanmadan da kanıtlayabilirdiniz.

Örneğin, Zorn Önsavı yardımıyla yukarda varlığı kanıtlanan $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı ve 1'i içermeyen maksimal bir altkümesini açık açık yazamazsınız. Zorn Önsavı doğruysa böyle maksimal bir altküme vardır ama birini bile "işte budur" diye gösteremezsiniz. Öte yandan aynı problemi $\mathbb{Q}$ için sormuş ve Teorem 10.3'te açık açık bir çözümünü bulmuştuk. Demek ki $\mathbb{Q}$ için Zorn Önsavı gerekmiyor ama $\mathbb{R}$ için gerekiyor. İlginç...

5. Zorn Önsavı'nı gerekmedikçe kullanmamakta estetik ve matematiksel yarar vardır. Örneğin maksimal elemandan tek bir tane varsa, Zorn Önsavı'nı gereksiz yere kullanmış olmalısınız. Aynı teoremi bu sefer Zorn Önsavı kullanmadan kanıtlamaya çalışmalısınız.

6. Zorn Önsavı'nın varsayımlarını sağlayan $\mathcal{Z}$ kümelerine talihsiz bir şekilde ***tümevarımsal*** küme denir. [Sİ]'de verdiğimiz tümevarımsal küme tanımıyla karıştırılmamalı.

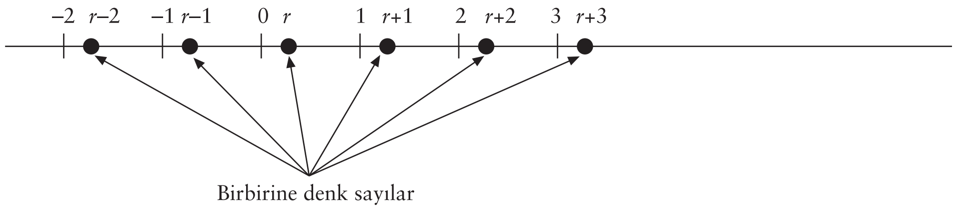
Zorn Önsavı uygulaması olarak bir başka örnek verelim. Bu örneği aslında Bölüm 7'de (Örnek 7 ve 8) yapmıştık ama orada problemi biraz değişik bir dilde ifade etmiştik.

Eğer iki r ve s gerçel sayısı arasındaki fark tamsayıysa bu iki gerçel sayıya birbirine ***denk*** diyelim ve bunu $r \equiv s$ olarak gösterelim. Demek ki,

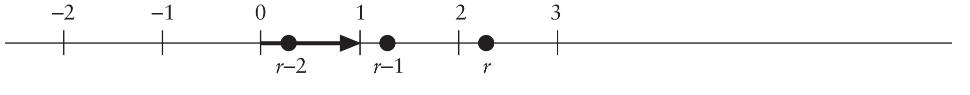
$$r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Z}.$$

Örneğin, π, $\pi+1$, $\pi+2$, $\pi-3$ sayıları birbirine denktir. π'ye denk gerçel sayılar belli bir $n \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için $\pi + n$ olarak yazılan sayılardır.

Bu, daha genel olarak doğrudur, her r gerçel sayısı için, r'ye denk gerçel sayılar, belli bir $n \in \mathbb{Z}$ için $r + n$ olarak yazılan sayılardır.



Şimdi amacımız, öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulmak ki, her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \equiv x$ denkliğinin doğru olduğu bir ve bir tek $x \in X$ olsun. Böyle bir X kümesi kolaylıkla bulunabilir, örneğin $X = [0, 1)$ yarı açık aralığı istediğimiz özelliği sağlar.



Nitekim, eğer bir r gerçel sayısı verilmişse, r'ye yeterince 1 ekleyerek ya da r'den yeterince 1 çıkararak, $[0, 1)$ aralığında r'ye denk bir sayıya ulaşırız ve $[0, 1)$ aralığında r'ye denk başka bir sayı da yoktur.

Şu basit teoremi kanıtladık:

Teorem 10.6. *Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ vardır ki, her $r \in \mathbb{R}$ için $r - x$'in tamsayı olduğu bir ve bir tek $x \in X$ vardır. ($X = [0, 1)$ alınabilir.)*

Yukardaki basit teoremde $\mathbb{Z}$ yerine $\mathbb{Q}$ koyarsak teorem çok daha çetin bir önermeye dönüşür: □

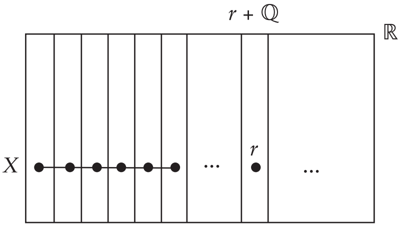
Teorem 10.7. *Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ vardır ki, her $r \in \mathbb{R}$ için $r - x$ sayısının kesirli bir sayı olduğu bir ve bir tek $x \in X$ vardır.*

Kanıt: $\mathbb{R}$ kümesi üzerine $\equiv$ ilişkisini,

$$r \equiv s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Q}$$

olarak tanımlayalım. Daha önceki $\mathbb{Z}$ burada $\mathbb{Q}$ oldu. Ama bu sefer, $[0, 1)$ aralığı gibi açık seçik bir yanıtı yok bu sorunun.

Öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulmak istiyoruz ki, her $r \in \mathbb{R}$ için, $r \equiv x$ denkliğinin doğru olduğu bir ve bir tek $x \in X$ olsun.



Böyle bir X kümesi vardır. Hem de çok vardır. Ama biri bile elle bulunamaz, illa Zorn Önsavı gerekiyor!

X kümesinin varlığını hemen kanıtlayalım. Kanıtta (zorunlu olarak) Zorn Önsavı'nı kullanacağız. (Aslında aynı kanıt Seçim Aksiyomu kullanılarak çok daha basit bir biçimde yapılabilir ama vereceğimiz kanıt Zorn Önsavı'nın kullanıldığı kanıtların tipik özelliklerini taşıdığından, kanıtımızı önemsiyoruz.)

$$\mathcal{Z} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X\text{'in iki farklı elemanı birbirine denk olamaz}\}$$

olsun. Yani $X \in \mathcal{Z}$ ise, X'in iki farklı elemanının farkı $\mathbb{Q}$'de olamaz. $\mathcal{Z}$'yi "altküme olma" ilişkisiyle sıralandıralım. Bakalım $\mathcal{Z}$, Zorn Önsavı'nın koşullarını sağlıyor mu?

Boşküme ve tek elemanlı her sayı kümesi $\mathcal{Z}$ 'de olduğundan, $\mathcal{Z}$ boşküme değildir. Gözü örneğe doymayan okur, $\{1, \sqrt{2}\}$ kümesinin de $\mathcal{Z}$'de olduğunu kanıtlayabilir.

Şimdi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{Z}$ bir zincir olsun. $\cup\mathcal{T}$'nin $\mathcal{Z}$'nin bir elemanı olduğunu kanıtlayacağız. x ve y, $\cup\mathcal{T}$ kümesinden iki değişik sayı olsun. Bu iki eleman $\mathcal{T}$ 'nin elemanlarından birinin elemanıdır. Diyelim, $A, B \in \mathcal{T}$ için, $x \in A$ ve $y \in B$. Ama $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan, ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$. Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, birinin diğerinden farkı yok, dolayısıyla gönül rahatlığıyla $A \subseteq B$ ilişkisini varsayabiliriz. Böylece, $x \in A \subseteq B$ olur. Demek ki hem x, hem de y, B'de. B, $\mathcal{Z}$'de olduğundan x ve y denk olamazlar.

Demek ki $\mathcal{Z}$, Zorn Önsavı'nın önkoşullarını sağlıyor. Dolayısıyla Zorn Önsavı'na göre $\mathcal{Z}$'nin bir maksimal elemanı olmalı. Bu elemana X diyelim. Şimdi bu X'in dilediğimiz X olduğunu kanıtlayacağız.

$r \in \mathbb{R}$ olsun. Diyelim r'nin denk olduğu bir $x \in X$ yok. O zaman r, X'te olamaz. Şimdi $X_1 = X \cup \{r\}$ olsun. X_1, X'ten daha büyük olduğundan, X_1, $\mathcal{Z}$ kümesinde olamaz. Ama biz gene de X_1'in $\mathcal{Z}$'de olduğunu kanıtlama başarısında bulunacağız.

Eğer X_1, $\mathcal{Z}$'de olmasaydı, o zaman X_1'de $x \equiv y$ denkliğini sağlayan iki farklı x ve y elemanı olurdu.

$$X_1 = X \cup \{r\} \text{ ve } X \in \mathcal{Z}$$

olduğundan, hem x hem de y, X'te olamaz, demek ki ikisinden biri r'ye eşit olmalı. Diyelim $y = r$. Ama o zaman da $r \equiv x \in X$ olur, oysa biz böyle bir x'in olmadığını varsaymıştık. Bir çelişki. Demek ki böyle bir $r \in \mathbb{R}$ yok. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin her elemanı X'in bir elemanına denktir.

Eğer $\mathbb{R}$'nin bir elemanı X'in iki elemanına denk olsaydı, o zaman X'in o iki elemanı birbirine denk olurdu, dolayısıyla $X \in \mathcal{Z}$ olduğundan, bu iki eleman birbirine eşit olurdu. Demek ki $\mathbb{R}$'nin her elemanı X'in bir ve bir tek elemanına denktir. Kanıtımız bitmiştir. □

11. İyisıralama Teoremi

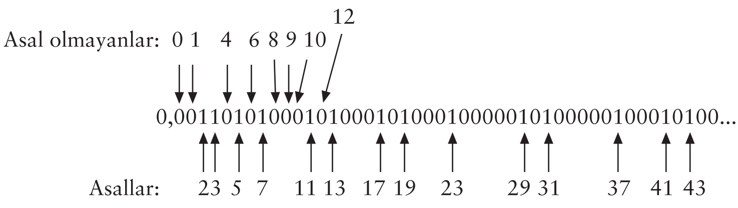
[1] Bir kümenin elemanlarını tamsıralamak hiç de kolay değildir. Zorluğu kavramak için, doğal sayıların altkümelerinin kümesi olan $\wp(\mathbb{N})$'yi tamsıralamaya çalışalım. Kolay olmasa da mümkündür:

Her doğal sayı kümesine, birazdan örneklerle açıklayacağımız yöntemle, 0'la 1 arasında bir gerçel sayı iliştireceğiz, bir başka deyişle her doğal sayı kümesini [0, 1] aralığından bir sayıyla kodlayacağız; sonra da iliştirilen gerçel sayıları kullanarak doğal sayı kümelerini tamsıralayacağız.

Örnekle başlayalım: Asal sayılar kümesine iliştirilen gerçel sayı

$$0{,}0011010100010100010100010000010100000101010\ldots$$

olacak. Dikkat ederseniz virgülden sonraki sayılar, rakamın bulunduğu yerin (saymaya 0'dan başlıyoruz) asal sayı olup olmamasına göre 1 ya da 0. Resmi aşağıda.



Asal sayıları kodlayan gerçel sayı

Bu yöntemle boş küme 0 olarak, N kümesi de $0{,}1111\ldots$ sayısı olarak kodlanır. Çift sayılar kümesi de $0{,}10101010101\ldots$ olarak.

Bir A doğal sayı kümesine karşılık gelen sayıya $n(A)$ diyelim. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $i \in \mathbb{N}$ ise

$$A(i) = \begin{cases} 0 \text{ eğer } i \notin A \text{ ise} \\ 1 \text{ eğer } i \in A \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman,

$$n(A) = \sum_{i=0}^{\infty} A(i)/10^i$$

[1]Yazarı: Niyazi Anıl Gezer

olur.

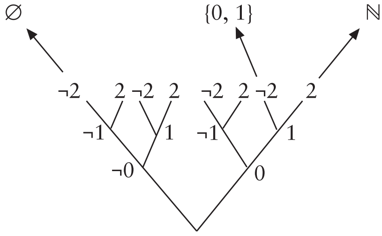
Şimdi A ve B doğal sayı kümelerini, bu kümelere karşılık gelen sayıların büyüklüğüne göre karşılaştırabiliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow n(A) \leq n(B)$$

tanımını yapalım. Böylece doğal sayı kümeleri tamsıralanmış olurlar.

Atla deve değil belki ama çok çok da kolay olmadı. Aşağıdaki gri karede, doğal sayıları başka türlü (ama benzer) bir tamsıralama yöntemini bulacaksınız.

Do al Sayı Kümelerini Tamsıralamak



i'inci katta, *i*'yi içermeyen kümeler için sola, *i*'yi içeren kümeler için sağa gidelim. Örneğin, asal sayılar kümesi için sol-sol-sağ-sağ-sol-sağ-sol-sağ-sol-sol-sol-sağ... yörüngesi seçilir. Böylece her doğal sayı kümesi bu ikili a¼acın sonsuz bir dalı olarak görülebilir. Bir *A* doğal sayı kümesinin dalının sağındaki dallarla simgelenen doğal sayı kümeleri *A*'dan daha büyük olsunlar. Örneğin, 0'i içeren kümeler 0'ı içermeyen kümelerden daha büyük olsunlar. Böylece doğal sayı kümeleri tamsıralanır. Ama bu tamsıralama bir iyisıralama değildir, örneğin ∅'den (en soldaki daldan) "hemen sonra gelen" bir küme yoktur.

Doğal sayı kümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})$'yi başarıyla tamsıraladık. Şimdi aynı şeyi $\wp(\mathbb{R})$ için yapmaya çalışın. Zorlanmaktan da öte, elle başaramayacaksınız, illa Zorn Önsavı'nı kulanmanız gerekecek.

Eğer bir kümeyi tamsıralamak zorsa, iyisıralamak çok daha zor olmalı.

Sonlu kümeleri iyisıralamakta sorun yaşanmaz elbet. Sayılabilir sonsuzluktaki (yani ℕile aralarında bir eşleme olan) bir kümeyi iyisıralamak da oldukça kolaydır. Gerçekten de, eğer sayılabilir kümeye X dersek ve $f : X \to \mathbb{N}$ bir eşlemeyse, $f(x)$'i x'in numarası olarak algılayıp, X'in elemanlarını numaralarına göre sıralayabiliriz. Yani, X üzerine $\leq$ ilişkisini, her x, $y \in X$ için,

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

olarak tanımlarsak, ℕ'nin iyisıralamasını aynen X'e taşımış oluruz. (Aslında sadece ℕ ile değil, iyisıralanmış bir kümeyle arasında eşleme bulunan her kümeyi yukardaki yöntemle iyisıralayabiliriz.)

Demek ki iyisıralaması kolay olmayan bir küme sayılamaz sonsuzlukta olmalı. Örneğin $\mathbb{R}$'yi ya da $\wp(\mathbb{N})$'yi çıplak elle iyisıralamak imkânsızdır, Seçim Aksiyomu ya da Zorn Önsavı gibi güçlü silahlar gerekir.

Bu bölümde ZF'yi ve bir de ayrıca Zorn Önsavı'nı kabul edip her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlayacağız. Ayrıca ZF'yi ve İyisıralama Teoremi'ni kullanarak Seçim Aksiyomu'nu kanıtlayacağız. Bir sonraki bölümde de ZFC varsayılarak Zorn Önsavı kanıtlanacak ve böylece ZF aksiyomlar sisteminde Seçim Aksiyomu, Zorn Önsavı ve İyisıralama Teoremi'nin (matematiksel anlamda eşdeğer oldukları gösterilmiş olacak.

11.1 Zorn Önsavı ⇒ İyisıralama

Teorem 11.1. *Zorn Önsavı doğruysa her küme iyisıralanabilir.*

Kanıtta ZFC'yi değil sadece ZF'yi kullanacağımızı üstüne basarak tekrar söyleyelim.

Teoremin Kanıtı: A, iyisıralanacak küme olsun. A'nın iyisıralanmış altkümeler kümesine $\mathcal{Z}$ diyelim. Demek ki,

$$\mathcal{Z} = \{(X, \leq) : X \subseteq A \text{ ve } \leq, X\text{'i iyisıralayan ve } X \text{ üzerine tanımlanmış ikili bir ilişkidir}\}.$$

$\mathcal{Z}$ 'nin elemanlarını iyice anlayalım. $\mathcal{Z}$'de, aynı $X \subseteq A$ için, $(X, \leq)$ ve $(X, \preccurlyeq)$ gibi iki değişik iyisıralama olabilir. (Hatta eğer $|X| > 1$ ise ve X üzerine bir tane iyisıralama varsa mutlaka bir başka iyisıralama daha vardır, örneğin iki elemanın sıralarını değiş tokuş ederek bir başka iyisıralama elde ederiz.)

$\mathcal{Z}$'ye Zorn Önsavı'nı uygulayacağız, ama Zorn Önsavı ancak kısmi sıralanmış kümelere uygulanabilir. Dolayısıyla önce $\mathcal{Z}$'yi kısmi sıralamalıyız.

$\mathcal{Z}$'nin kısmi sıralaması. $(X, \leq)$ ve $(Y, \preccurlyeq)$, $\mathcal{Z}$ 'den iki eleman olsun. Eğer $(X, \leq)$ iyisıralaması $(Y, \preccurlyeq)$ iyisıralamasının ***başlangıç dilimi***yse, yani,

1) $X \subseteq Y$,

2) $x_1, x_2 \in X$ ise, $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 \preccurlyeq x_2$,

3) $x \in X$, $y \in Y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise $y \in X$,

koşulları sağlanıyorsa, o zaman $(X, \leq)$'ye $(Y, \preccurlyeq)$'den küçükeşit diyeceğiz ve bunu $(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \preccurlyeq)$ olarak göstereceğiz. $(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \preccurlyeq)$ olduğunda, ikinci koşuldan dolayı sıralamaların ikisini de aynı simgeyle (örneğin $\leq$ ile) gösterebiliriz.

$\sqsubseteq$ ilişkisi $\mathcal{Z}$ kümesini kısmi sıralar. Yani,

$(X, \leq) \sqsubseteq (X, \leq)$,

$(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \leq)$ ve $(Y, \leq) \sqsubseteq (X, \leq) ise X = Y$,

$(X, \leq) \sqsubseteq (Y, \leq)$ ve $(Y, \leq) \sqsubseteq (Z, \leq)$ ise $(X, \leq) \sqsubseteq (Z, \leq)$

koşulları doğrudur. Bunların oldukça kolay olan kanıtını okura bırakıyoruz. Şimdi, bu sıralamayla birlikte $\mathcal{Z}$'nin Zorn Önsavı'nın önkoşullarını sağladığını kanıtlayalım.

Zorn Önsavı'nın Önkoşulları. Herşeyden önce boşkümenin (boşsıralamasıyla birlikte) $\mathcal{Z}$'de olduğunu görelim, dolayısıya $\mathcal{Z}$ boşküme olamaz. Eğer bu örnek hoşunuza gitmediyse, A'nın boşküme olmadığını varsayıp, bir $a \in A$ için $X = \{a\}$ alın ve X'i mümkün olan tek sıralamayla sıralayın.

Şimdi $\mathcal{Z}$'den bir $\mathcal{T}$ zinciri alalım. Bu $\mathcal{T}$ zincirinin $\mathcal{Z}$'de bir üstsınırını bulmalıyız. $\mathcal{T}$'deki elemanları $(X, \leq_X)$ olarak yazalım.

$$Y = \bigcup_{(X, \leq_X) \in \mathcal{T}} X$$

olsun. Y elbette A'nın bir altkümesi. Şimdi Y'yi birazdan tanımlayacağımız bir $\leq$ ikili ilişkisiyle iyisıralayıp her

$$(X, \leq_X) \in \mathcal{T}$$

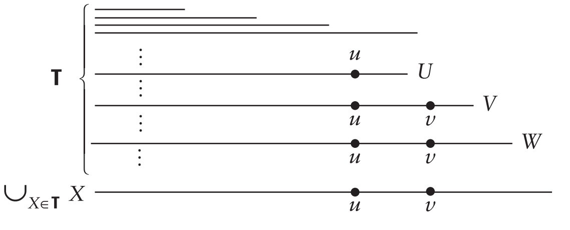
için, $(X, \leq_X) \sqsubseteq (Y, \leq)$ önermesini göstereceğiz. Aslında, Y'nin ve $\sqsubseteq$ ilişkisinin tanımından ve (2) özelliğinden dolayı, Y üzerine,

$$X \in \mathcal{T} \text{ için, } (X, \leq_X) \sqsubseteq (Y, \leq)$$

özelliğini sağlayan tek bir sıralama vardır, o da şöyle tanımlanmıştır: Y'den herhangi iki eleman alalım: u ve v. (Aşağıdaki şekilden takip edin.) Y'nin tanımından dolayı, $\mathcal{T}$'nin $(U, \leq_U)$ ve $(V, \leq_V)$ elemanları için $u \in U$ ve $v \in V$'dir. Ama $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan, ya $U \subseteq V$ ya da $V \subseteq U$. Diyelim birinci ilişki geçerli. O zaman hem u hem de v, V'nin bir elemanıdır. Eğer $u \leq_V v$ ise, Y'de de u'nun v'den küçük olduğuna hükmedelim. Yani

$$u \leq v \Leftrightarrow u \leq_V v$$

olsun. Yalnız bu tanımda bir sorun olabilir: $u \leq v$'nin tanımını yaparken, hem u'yu hem de v'yi içeren bir $V \in \mathcal{T}$ kullandık. $u \leq v$ tanımının bu seçimden bağımsız olduğunu göstermemiz gerekir, yoksa tanım kabul edilir bir tanım olmaz. Nitekim, diyelim hem u hem de v aynı zamanda $\mathcal{T}$'nin bir W elemanındalar. Ya $W \subseteq V$ ya da $V \subseteq W$ ve (2) özelliğinden dolayı,



$$u \leq_V v \Leftrightarrow u \leq_W v.$$

Tanımın U'dan bağımsız olduğunu kanıtladık; u ve v'nin her ikisini birden içeren hangi $(U, \leq_U) \in \mathcal{T}$ alınırsa alınsın, aynı tanımı elde ediyoruz.

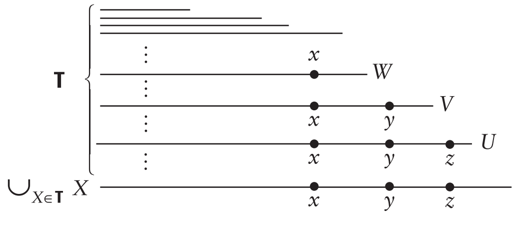
Şimdi bu ilişkinin Y üzerine bir iyisıralama olduğunu kanıtlamamız lazım. Önce kısmi sıralama olduğunu kanıtlayalım. Bunun için,

1) Her $x \in Y$ için, $x \leq x$,

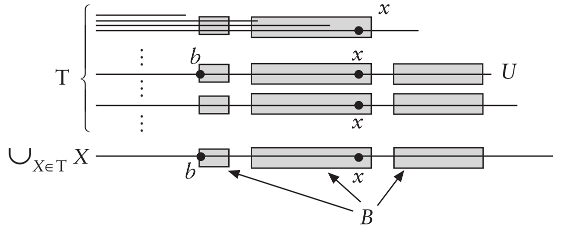
2) Her $x, y \in Y$ için, $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$,

3) Her $x, y, z \in Y$ için, $x \leq y$ ve $y \leq$z ise $x \leq z$

özelliklerini göstermeliyiz. $\mathcal{T}$ bir zincir olduğundan, eğer Y'nin üç tane x, y ve z elemanı verilmişse, bu elemanların hepsinin birden içinde bulunduğu bir $(U, \leq_U) \in \mathcal{T}$ bulabiliriz. O zaman, verilen x, y ve z için yukardaki eşitsizliklerde, $\leq$ yerine $\leq_U$ alabiliriz. Ama $(U, \leq_U)$ bir kısmi sıralama olduğundan özelliklerin üçü de doğrudur.



Tamsıralama özelliğini (dördüncü özelliği) şimdilik pas geçerek, iyisıralama özelliğini (beşinci özelliği) kanıtlayalım. Bir sonraki şekilden izleyin. B, Y'nin boş olmayan herhangi bir altkümesi olsun. B'nin en küçük elemanını bulmak istiyoruz. $x \in B$ olsun.



Demek ki $x \in Y$. Dolayısıyla, belli bir $(U, \leq_U) \in \mathcal{T}$ için $x \in U$ olur. Şimdi $U \cap B$ kümesinin U'nun boş olmayan bir altkümesi olduğunu biliyoruz (x'i içeriyor). $(U, \leq_U)$ bir iyisıralama olduğundan, $U \cap B$ kümesinin $\leq_U$ sıralaması için bir en küçük elemanı vardır. Bu en küçük elemana b diyelim.

Şimdi bu b elemanının B'nin en küçük elemanı olduğunu kanıtlayacağız. $a \in B$, B'nin herhangi bir elemanı olsun. $b \leq a$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Hem b'yi hem de a'yı içeren herhangi bir $(V, \leq_V) \in \mathcal{T}$ alalım. $b \leq_V a$ eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Diyelim, $a <_V b$. Eğer $V \subseteq U$ ise $a \in U$ olur. Eğer $U \subseteq V$ ise, o zaman U, V'nin başlangıç dilimidir ve (3)'ten dolayı $a \in U$ olur. Demek ki her iki durumda da $a \in U$. Ama o zaman da a, $U \cap B$ kümesinde, b'den küçük bir eleman olur ki bu da b'nin tanımıyla çelişir. Demek ki $a <_V b$ olamaz, $b \leq_V a$, yani $b \leq a$ olmalı.

Tamsıralama özelliği (dördüncü özellik) beşinci özelliğin bir sonucudur. Nitekim, x, $y \in Y = \bigcup_{X \in \mathcal{T}} X$ ise, $B = \{x,y\}$ alalım. B'nin en küçük elemanı, diğerinden küçükeşittir, yani ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ olur.

Demek ki $Y = \bigcup_{X \in \mathcal{T}} X$ kümesi A'nın iyisıralanmış bir altkümesidir, dolayısıyla $\mathcal{Z}$ 'dedir.

Daha kanıtımız bitmedi. Her $(X, \leq_X) \in \mathcal{T}$ için,

$$(X, \leq_X) \sqsubseteq (Y, \leq)$$

ilişkisini göstermeliyiz, ki $(Y, \leq)$, $\mathcal{T}$'nin üstsınırı olsun. Yani $\mathcal{T}$'nin her

$$(X, \leq_X)$$

elemanının $(Y, \leq)$'nin bir başlangıç dilimi olduğunu göstermeliyiz.

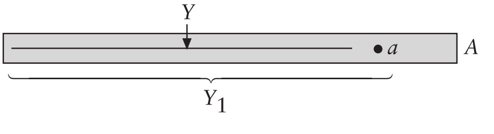
Başlangıç dilimi olmanın birinci özelliği olan $X \subseteq Y$ elbette doğru. İkincisini kanıtlayalım. x_1, $x_2 \in X$ ise "$x_1 \leq_X x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$" önermesini kanıtlamalıyız. Ama bu, Y üzerine tanımladığımız $\leq$ sıralamanın bir özelliği.

Son özelliğe gelelim. $x \in X$, $y \in Y$ ve $y \leq x$ olsun. y'nin X'in bir elemanı olduğunu göstermeliyiz. Hem x hem de y'yi eleman olarak içeren bir

$$(U, \leq_U) \in \mathcal{T}$$

vardır. Y üzerine koyduğumuz $\leq$ ilişkisinin tanımından dolayı, $y \leq_U x$ ilişkisi elbette doğrudur. Eğer $X \subseteq U$ ise, X, U'nun bir başlangıç dilimidir ve bu yüzden $y \in X$ olur. Eğer $U \subseteq X$ ise, elbette $y \in X$ olur. Demek ki her iki durumda da $y \in X$.

Zorn Önsavı'nı Kullanıyoruz. Demek ki, Zorn Önsavı'na göre, $\mathcal{Z}$ 'nin maksimal bir elemanı var. Bu elemana $(Y, \leq)$ diyelim. Y'nin A olduğunu kanıtlayacağız. Eğer $Y \subset A$ olsaydı, o zaman bir $a \in A \setminus Y$ olurdu. Şimdi $Y_1 = Y \cup \{a\}$ olsun. Y_1'i iyisıralayalım. Bunun için, Y'nin sıralamasını alıp, a elemanını Y_1'in en sonuna koyalım, yani a, Y'nin bütün elemanlarından daha büyük olsun.



Bu yeni sıralamaya $(Y_1, \leq)$ diyelim. $(Y_1, \leq)$ iyisıralı bir kümedir, yani

$$(Y_1, \leq) \in \mathcal{Z}$$

olur. Ayrıca kolaylıkla görüleceği üzere, $(Y, \leq) \sqsubseteq (Y_1, \leq)$ olur, yani Y, Y_1'in başlangıç dilimidir. Ama hani $(Y, \leq)$, $\mathcal{Z}$ 'nin maksimal elemanıydı? Oysa $\mathcal{Z}$ 'de $(Y, \leq)$'den daha büyük bir eleman bulduk. Bir çelişki. Demek ki $Y = A$ ve A kümesi $\leq$ tarafından iyisıralanmıştır. $\square$

11.2 İyisıralama ⇒ Seçim Aksiyomu

Örnek 1'de $\mathbb{N}$'nin boş olmayan altkümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})^*$'nin bir seçim fonksiyonunu bulduk. Okur anımsasın: $\mathbb{N}$'nin boş olmayan her A altkümesinden A'da bulunan en küçük doğal sayıyı seçtik. Görüldüğü gibi burada önemli olan, $\mathbb{N}$'den ziyade $\mathbb{N}$'nin iyisıralanmış olması. $\mathbb{N}$ yerine iyisıralanmış hangi X kümesini alırsak alalım, aynı yöntemle, $\wp(X)^*$'in bir seçim fonksiyonunu buluruz: X'in boş olmayan her altkümesinden, altkümenin en küçük elemanını seçelim. Bir önceki teoremden, her kümenin iyisıralanacağını bildiğimizden, bu fikri kullanabiliriz.

Aşağıdaki teoremde sadece ZF'yi kullanacağız.

Teorem 11.2. *İyisıralama Teoremi doğruysa, Seçim Aksiyomu da doğrudur.*

Kanıt: X, hiçbir elemanı $\varnothing$ olmayan bir küme olsun.

$$A = \bigcup X = \bigcup_{Y \in X} Y$$

olsun. A, X'in elemanlarının elemanlarından oluşur ve böylece X'in her elemanı A'nın bir altkümesi olur. Varsayıma göre A'yı iyisıralayabiliriz. İyisıralayalım. Şimdi eğer $Y \in X$ ise, Y, A'nın boş olmayan bir altkümesi olduğundan, Y'nin en küçük elemanı vardır. Y'den işte bu en küçük elemanı seçelim. Yani $f(Y) = Y$'nin en küçük elemanı olsun. Böylece $f(Y) \in Y$ olur ve f bir seçim fonksiyonudur. $\square$

İyisıralanabilirlik Teoremi'nin Kısa Tarihi 1878'de Cantor ***Süreklilik Varsayımı***'nı ortaya attı:

Süreklilik Varsayımı. $\mathbb{R}$'*nin her sonsuz altkümesi ya doğal sayılar kümesiyle ya da* $\mathbb{R}$'*nin kendisiyle eşlendirilebilir.* (*Bu kitapta ilerde açıklayacağımız daha modern bir söylemle*, $|\mathbb{N}| = \omega = \aleph_0$ ile $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ *arasında bir başka kardinalite yoktur.*)

Çok denemesine karşın Cantor bu varsayımını kanıtlayamadı. Çağının en önemli matematikçisi Hilbert, Cantor'un bu varsayımının önemini hemen kavradı ve 1900'de Paris'te verdiği ünlü konuşmasında, Cantor'un bu sorusunu dinleyicilere (ve 20'nci yüzyıl matematikçilerine) ilk soru olarak sundu. Hilbert, Süreklilik Önsavı'ndan önce her kümenin iyisıralanabileceğinin kanıtlanması gerektiğini önerdi.

O sırada Hilbert'le aynı üniversitede (Göttingen'de) bulunan Zermelo, 1904'te Hilbert'in önerdiği sonucu (İyisıralanabilirlik Teoremi) kanıtladı. Zermelo bu kanıtıyla Göttingen'de profesör oldu ve ün kazandı. (Daha o zamanlar Zorn Önsavı bilinmiyordu, dolayısıyla Zermelo'nun kanıtı burada verdiğimiz kanıt olamaz. Burada verdiğimiz kanıt, profesörlük unvanını kazanmak için biraz fazla kolay!) Zermelo'nun kanıtı Seçim Aksiyomu'nu kullanıyordu. O zamanlar, Russell Paradoksu daha yeni yeni bulunmuştu ve Kümeler Kuramı büyük bir kriz yaşıyordu. Bu tür kanıtları birçok matematikçi kuşkuyla karşılıyordu. Kanıtı o kadar çok eleştiri aldı ki, 1908'de aynı sonucun daha kabul edilir bir kanıtını verdi. Kanıtı gene Seçim Aksiyomu'nu kullanıyordu elbet ama bu sefer kanıtını matematikçilerin daha alışık oldukları bir kılıfa sokmuştu. Bu makalesinde ayrıca, hem Seçim Aksiyomu'nu kullanımını savundu hem de diğer matematikçilerin de (özellikle analizcilerin) farkına varmadan Seçim Aksiyomu'nu kullandıklarını gösterdi.

12. Hausdorff Zincir Teoremi ve Zorn Önsavı'nın Kanıtı

[1] Geçen bölümde, Zorn Önsavı varsayılarak İyisıralama Teoremi ve İyisıralama Teoremi varsayılarak Seçim Aksiyomu kanıtlandı. Bu bölümde önce Seçim Aksiyomu'nu varsayarak Hausdorff Zincir Teoremi'ni, ardından Hausdorff Zincir Teoremi'ni varsayarak Zorn Önsavı'nı kanıtlayacağız. Böylece bu dört önermenin (Zorn Önsavı, İyi Sıralama Teoremi, Seçim Aksiyomu ve Hausdorff Zincir Teoremi'nin) ZF altında denk olduğu sonucuna ulaşılacak.

12.1 Hausdorff Zincir Teoremi

Kanıtlayacağımız teoremi yazalım önce. Kullandığımız terimleri hemen sonra açıklayacağız.

Teorem 12.1. *Yarısıralanmış her kümede maksimal bir zincir vardır.*

Yarısıralı bir kümenin tamsıralanmış bir altkümesine ***zincir*** adı verilir. Örneğin, $(\wp(\mathbb{N}),\ \subseteq)$ kısmi sıralamasının şu elemanlarından oluşan kümeyi alalım:

$$\varnothing,\ \{0\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ 1,\ 2\},\ \{0,\ 1,\ 2,\ 3\},\ \ldots$$

Bu bir zincirdir. Yani bu kümeler arasından alınan herhangi iki kümeden biri diğerini içerir, sıralama diliyle, diğerinden küçükeşittir. Bu zincire $\mathbb{N}$'yi eklersek daha büyük bir zincir elde ederiz ve elde ettiğimiz bu zincir $(\wp(\mathbb{N}),\ \subseteq)$ kısmi sıralamasının maksimal bir zinciridir. (Okura alıştırma.)

Bir başka zincir alalım:

$$\begin{aligned}\varnothing \subset \{0,\ 2\} \subset \{0,\ 2,\ 4,\ 6\} \subset \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}\\ \subset \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\} \subset \ldots\end{aligned}$$

[1] Yazarı: Tolga Karayayla

zincirini, yani

$$\{\varnothing, \{0, 2\}, \{0, 2, 4, 6\}, \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}, \ldots\}$$

altkümesini. Bu altküme $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ kısmi sıralamasının bir zinciridir elbette, çünkü herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir; ama maksimal bir zincir değildir, çünkü, $\varnothing$ ile $\{0, 2\}$ arasına $\{0\}$ kümesini ekleyerek daha büyük bir zincir elde edebiliriz. Bu yeni zincire $\mathbb{N}$'yi eklersek de daha büyük bir zincir elde ederiz. Hatta

$$2\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \cup \{1\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{1, 3\} \subset \ldots.$$

altkümelerini ekleyerek de daha büyük bir zincir elde ederiz.

Bu bölümde irdeleyeceğimiz problem şu: $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ gibi verilmiş bir kısmi sıralamanın her zinciri için, bu zinciri içeren maksimal bir zincir var mıdır? Okur, alıştırma olarak yukardaki zinciri içeren maksimal bir zincir bulmaya çalışmalıdır.

Alıştırmalar.

12.1. $(A_n)_n$, $\mathbb{N}$'nin bir altkümeler kümesi olsun.

$$A_{n+1} \subset A_n,$$
$$\bigcap_n A_n = \varnothing$$

ve

$$\bigcup_n A_n = \mathbb{N}$$

varsayımlarını yapalım. A_{n+1} ile A_n arasına (altküme olma ilişkisi için) maksimal bir $\mathcal{C}_n$ zinciri sıkıştıralım. Bütün bu zincirlerin bileşiminin $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ kısmi sıralamasının maksimal bir zinciri olduğunu kanıtlayın.

12.2. $\{n!\mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}$ kümesinin bir zincir olduğunu gözlemleyin. Bu zincire $2\mathbb{N} \subset 2\mathbb{N} \cup \{1\} \subset 2\mathbb{N} \cup \{1, 3\} \subset \ldots$ altkümelerini ekleyerek daha büyük bir zincir elde edeceğimizi gösterin. Bu daha büyük zincirin maksimal olmadığını kanıtlayın. Bu zincire $6\mathbb{N}$ ile $2\mathbb{N}$ arasına girebilecek en büyük bir zincir sokuşturun. Aynı şeyi, her $n \in \mathbb{N}$ için, $(n+1)!\mathbb{N}$ ile $n!\mathbb{N}$ için yapın. Elde ettiğiniz zincir maksimaldir ve tek sonlu elemanı boşkümedir.

Daha matematiksel tanımlar şöyle: $(\mathcal{Z}, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ olsun. Eğer $\mathcal{X}$'in her x ve y elemanı için, $x \leq y$ ve $y \leq x$ eşitsizliklerinden biri doğruysa, $\mathcal{X}$'e ***zincir*** denir. $\mathcal{Z}$'nin zincirlerinden oluşan küme, altküme olma ilişkisi altında kısmi sıralanmıştır. Bu kısmi sıralamanın maksimal elemanlarına ***maksimal zincir*** adı verilir. Yani eğer $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$'nin bir zinciriyse ve $\mathcal{X}$'i özaltküme olarak içeren $\mathcal{Z}$'nin bir başka zinciri yoksa, $\mathcal{X}$'e $\mathcal{Z}$'nin maksimal zinciri denir.

Bir $\mathcal{X}$ zincirinin $\mathcal{Z}$ kısmi sıralı kümesinin maksimal bir zinciri olması için, her $a \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{X}$ için, $\mathcal{X} \cup \{a\}$'nın bir zincir olmaması gerek ve yeter koşuldur.

Bu bölümde Seçim Aksiyomu'nu kabul edip Hausdorff Zincir Teoremi'ni elde edeceğiz. Kanıta şu oldukça zorlu önsavla başlayalım (işin neredeyse tamamını bu önsav yapacak).

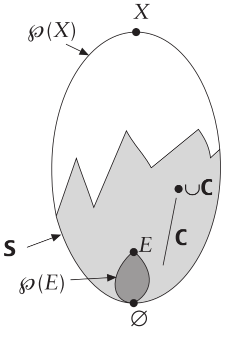
Önsav 12.2. *X bir küme ve $\mathcal{S}$, $\wp(X)$'in şu özellikleri sağlayan bir altkümesi olsun:*

i. $\varnothing \in \mathcal{S}$,

ii. $F \subseteq E \in \mathcal{S}$ *ise* $F \in \mathcal{S}$, *yani* $E \in \mathcal{S}$ *ise* $\wp(E) \subseteq \mathcal{S}$,

iii. $\mathcal{S}$*'nin her* $\mathcal{C}$ *zinciri için,* $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{S}$.

O zaman $\mathcal{S}$'de maksimal bir küme vardır. Yani $\mathcal{S}$'de öyle bir M vardır ki, eğer $M \subseteq N \in \mathcal{S}$ ise $M = N$'dir.



Önsavdaki $\mathcal{S}$, $\wp(X)$'in "altküme olma" ve "altzincirlerin bileşimini alma" ilişkileri altında kapalı ve boş olmayan bir altkümesidir. Resmi yukarda çizilmiştir.

Hausdorff Zincir Teoremi'ni bu önsavdan elde etmek için, $\mathcal{S}$'yi kısmi sıralanmış kümenin zincirlerinden oluşan küme olarak alacağız.

Önsav 12.2'nin Kanıtı: Seçim Aksiyomu'nu kabul ettiğimize göre, $\wp(X)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonu vardır.

$$s : \wp(X)^* \to X$$

bir seçim fonksiyonu olsun. Demek ki, X'in boş olmayan her E altkümesi için

$$s(E) \in E.$$

Şimdi,

$$g : \mathcal{S} \to \wp(X)$$

fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: Her $E \in \mathcal{S}$ için

$$g(E) = \{x \in X : E \cup \{x\} \in \mathcal{S}\}.$$

Sav 1. *Her $E \in \mathcal{S}$ için, $E \subseteq g(E)$.*

Kanıt: Eğer $x \in E$ ise, $E \cup \{x\} = E \in \mathcal{S}$ ve dolayısıyla $x \in g(E)$ olur. □

Sav 2. *$g(E) = E$ eşitliği sadece ve sadece $\mathcal{S}$'nin maksimal E elemanları tarafından sağlanır. Maksimal olmayan bir $E \in \mathcal{S}$ için, $E \subset g(E)$ olur.*

Kanıt: $E \in \mathcal{S}$ maksimal olsun. Eğer $g(E) \neq E$ ise o zaman $g(E)$'de olan ama E'de olmayan bir $x \in X$ bulunur; bu durumda, $E \subset E \cup \{x\} \in \mathcal{S}$ olduğundan E'nin maksimalliğiyle çelişiriz.

Şimdi $g(E) = E$ olsun. Eğer E maksimal değilse $E \subset G \in \mathcal{S}$ olacak şekilde bir G bulunur. $x \in G \setminus E$ olsun. Demek ki

$$E \cup \{x\} \subseteq G \in \mathcal{S}.$$

Dolayısıyla $\mathcal{S}$ 'nin (ii) özelliğine göre, $E \cup \{x\} \in \mathcal{S}$ ve $x \in g(E)$. Ama x, $G \setminus E$'nin bir elemanı olduğundan, E'nin bir elemanı değildir. Demek ki $E \subset g(E)$ olur ve bu da $g(E) = E$ varsayımına ters düşer. $\square$

Şimdi $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonunu

$$f(E) = \begin{cases} E & \text{eğer } g(E) = E \text{ ise} \\ E \cup \{s(g(E) \setminus E)\} & \text{eğer } g(E) \neq E \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

f fonksiyonu gerçekten de $\mathcal{S}$'de değer alır: Eğer $g(E) = E \in \mathcal{S}$ ise,

$$f(E) = E \in \mathcal{S}.$$

Eğer $g(E) \neq E \in \mathcal{S}$ ise, $E \subset g(E)$ olduğu için, $g(E) \setminus E \neq \varnothing$ ve

$$s(g(E) \setminus E) \in g(E).$$

Dolayısıyla $g(E)$'nin tanımından dolayı,

$$f(E) = E \cup \{s(g(E) \setminus E)\} \in \mathcal{S}$$

olur.

Kolayca görüldüğü gibi her $E \in \mathcal{S}$ için

$$E \subseteq f(E) \text{ ve } |f(E) \setminus E| \leq 1$$

olur. (Dikkat! Bu son özellik kanıtın sonunda bitirici rol oynayacak).

Sav 3. *$f(E) = E$ ancak ve ancak $g(E) = E$ ise.*
Kanıt: Eğer $g(E) = E$ ise, f'nin tanımından dolayı $f(E) = E$. Öte yandan, eğer $f(E) = E$ ama $g(E) \neq E$ ise, o zaman

$$E = f(E) = E \cup \{s(g(E) \setminus E)\}$$

ve $s(g(E) \setminus E) \in E$; oysa $s(g(E) \setminus E)$, $g(E) \setminus E$'de olduğundan E'de olamaz. $\square$

Sav 4. *$\mathcal{S}$'nin bir E elemanının maksimal olması için $f(E) = E$ eşitliği gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Sav 2'ye göre, $g(E) = E$ eşitliği, E'nin maksimal olması için gerek ve yeter koşuldur. Sav 3'e göre, $f(E) = E$ eşitliği, $g(E) = E$ eşitliği için gerek ve yeter koşuldur. □

Eğer $\mathcal{S}$ 'nin bir $\mathcal{T}$ altkümesi,
(1) $\varnothing \in \mathcal{T}$,
(2) $E \in \mathcal{T}$ ise $f(E) \in \mathcal{T}$,
(3) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ bir zincir ise, $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{T}$
koşullarını sağlıyorsa, $\mathcal{T}$'ye ***kule*** diyelim.

Dikkat ederseniz $\mathcal{S}$'nin kendisi de bir kuledir. Ayrıca, bir kule ailesinin kesişiminin de kule olduğunu kanıtlamak çok kolay. Dolayısıyla tüm kulelerin kesişimi de bir kuledir ve en küçük kuledir.

Sav 5. *Eğer $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ hem bir kule hem de bir zincirse, $\cup\mathcal{M}$, $\mathcal{S}$'nin maksimal bir elemanıdır.*
Kanıt: $\mathcal{M}$, hem zincir hem de kule olsun. Kuleliğin (3) özelliğine göre

$$(\mathcal{C} = \mathcal{T} = \mathcal{M} \text{ alın}),\ \cup\,\mathcal{M} \in \mathcal{M}.$$

Kuleliğin (2) özelliğine göre de $f(\cup\mathcal{M}) \in \mathcal{M}$; dolayısıyla $f(\cup\mathcal{M}) \subseteq \cup\mathcal{M}$. Öte yandan $\cup\mathcal{M} \subseteq f(\cup\mathcal{M})$ olduğunu biliyoruz. Böylece $f(\cup\mathcal{M}) = \cup\mathcal{M}$ elde ederiz. Sav 4'e göre, $\cup\mathcal{M}$ maksimaldır. □

Demek ki $\mathcal{S}$'nin hem kule hem de zincir olan bir altkümesini bulmalıyız. O da bir sonraki savda verilecek.

Sav 6. *Tüm kulelerinin kesişimi, yani $\mathcal{S}$'nin*

$$\mathcal{M} := \cap\{\mathcal{T} : \mathcal{T} \text{ bir kule}\}$$

altkümesi hem bir kule hem de $\mathcal{S}$'nin bir zinciridir.
Kanıt: $\mathcal{M}$, kulelerin kesişimi olduğundan, bir kuledir.

$\mathcal{M}$'nin zincir olduğunu göstermek için yeni bir küme tanımlıyoruz:

$$\mathcal{Z} = \{E \in \mathcal{S} : \text{her } x \in \mathcal{M} \text{ için ya } x \subseteq E \text{ ya da } E \subseteq x\}$$

olsun.

Eğer $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Z}$ ise, elbette $\mathcal{M}$ bir zincir olmak zorundadır. Demek ki $\mathcal{M}$'nin $\mathcal{Z}$'nin altkümesi olduğunu göstermeliyiz; bunun için de $\mathcal{Z}$'nin kule olduğunu göstermek yeter çünkü $\mathcal{M}$ tüm kulelerin kesişimi. Demek ki aşağıdaki altsav savımızın kanıtını bitirir.

Altsav. *$\mathcal{Z}$ bir kuledir.*

Kanıt: Kulenin tanımındaki koşulları teker teker gözden geçirelim. Elbette $\varnothing \in \mathcal{Z}$, yani $\mathcal{Z}$, kule olmanın ilk koşulunu sağlar. $\mathcal{Z}$'nin (3) koşulunu sağladığını söylemek için $\mathcal{Z}$'de bir $\mathcal{C}$ zinciri alalım ve $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{Z}$ önermesini kanıtlayalım. Yani

a) $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{S}$,

b) her $x \in \mathcal{M}$ için, ya $x \subseteq \cup\mathcal{C}$ ya da $\cup\mathcal{C} \subseteq x$

koşullarını kanıtlamalıyız.

$\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ 'nin bir altkümesi olduğundan, $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ 'de de bir zincirdir, dolayısıyla (iii)'ten dolayı $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{S}$ olur. Demek ki (a) kanıtlandı.

(b)'yi kanıtlamak için, herhangi bir $x \in \mathcal{M}$ alıp x'in $\cup\mathcal{C}$'nin altkümesi olmadığını varsayalım. $\cup\mathcal{C}$'nin x'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamalıyız.

$$y \in C$$

olsun. x, $\cup\mathcal{C}$'nin altkümesi olmadığına göre, x, y'nin de altkümesi olamaz. y, $\mathcal{Z}$'nin elemanı olduğundan, $\mathcal{Z}$'nin tanımından $y \subset x$ çıkar. Bu her $y \in \mathcal{C}$ için doğru. Böylece $\cup\mathcal{C} \subset x$ bulunur ve $\mathcal{Z}$'nin (3)'ü sağladığı kanıtlanmış olur.

Son olarak $\mathcal{Z}$'nin (2)'yi sağladığını göstermeliyiz. Bunun için $\mathcal{Z}$'den bir E elemanı alalım. $f(E) \in \mathcal{Z}$ önermesini kanıtlamalıyız. $\mathcal{M}$'den herhangi bir x elemanı alıp, $f(E) \subseteq x$ ve $x \subseteq f(E)$ önermelerinden birinin doğru olduğunu kanıtlamalıyız.

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{M} : \text{ya } f(E) \subseteq x \text{ ya da } x \subseteq E\}$$

olsun. Demek ki $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}$ olduğunu göstermek yeterli (çünkü $E \subseteq f(E)$).

$\mathcal{T}$'nin bir kule olduğunu kanıtlamak işi bitirir, çünkü $\mathcal{M}$ tüm kulelerin kesişimi. Demek ki aşağıdaki altsav, Altsav 6.1'in, dolayısıyla Sav 6'nın, dolayısıyla önsavımızın kanıtını bitirir. (Aşağıdaki kanıtta $\mathcal{T}$'nin tanımındaki E'nin $\mathcal{Z}$'nin sabit bir elemanı olduğunu unutmayın.)

Altsav. *$\mathcal{T}$ bir kuledir.*

Kanıt: Boşküme $\mathcal{T}$'de elbette, (1) tamam.

(3)'ü kanıtlayalım. $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}$'de bir zincir olsun. $f(E) \subseteq \cup\mathcal{C}$ ve $\cup\mathcal{C} \subseteq E$ önermelerinden birini kanıtlamalıyız.

$\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$'nin bir altkümesi olduğundan, $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}$'nin de bir zinciridir. Demek ki $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{M}$ çünkü $\mathcal{M}$ bir kule.

Eğer $f(E)$, $\cup\mathcal{C}$'nin altkümesi değilse, $f(E)$, $\mathcal{C}$'nin hiçbir elemanının altkümesi olamaz. Öyleyse, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ olduğundan, $\mathcal{C}$'nin her elemanı E'nin altkümesidir. Sonuç olarak $\cup\mathcal{C} \subseteq Eve\mathcal{T}$, (3)'ü sağlıyor.

Son adımda $\mathcal{T}$'nin (2)'yi sağladığını göstereceğiz, yani eğer x, $\mathcal{T}$'nin bir elemanıysa, $f(x)$'in de $\mathcal{T}$'nin bir elemanı olduğunu göstereceğiz. Böyle bir x alalım. Demek ki,

$$\text{“}f(x) \in \mathcal{M}\text{” ve “ya } f(E) \subseteq f(x) \text{ ya da } f(x) \subseteq E\text{”}$$

koşullarını göstermeliyiz.

$x \in \mathcal{T}$ olduğundan, x, $\mathcal{M}$'nin de bir elemanıdır. $\mathcal{M}$ bir kule olduğundan, $f(x) \in \mathcal{M}$. Birinci koşulu gösterdik. Sıra,

$$f(E) \subseteq f(x) \text{ ya da } f(x) \subseteq E$$

koşullarından birinin doğru olduğunu göstermeye geldi. $x \in \mathcal{T}$ olduğundan,

$$\text{ya } f(E) \subseteq x \text{ ya da } x \subseteq E.$$

Üç değişik şıkkı incelemeliyiz:

Şık 1. $f(E) \subseteq x$. Bu durumda $f(E) \subseteq x \subseteq f(x)$.

Şık 2. $E = x$. Bu durumda $f(E) \subseteq f(x)$ elbette.

Şık 3. $x \subset E$. Şimdi bu son durumu irdeleyelim. $f(x) \in \mathcal{M}$ ve $E \in \mathcal{Z}$ olduğundan, $\mathcal{Z}$'nin tanımına göre

$$\text{ya } f(x) \subseteq E \text{ ya da } E \subset f(x).$$

Eğer $E \subset f(x)$ olursa $x \subset E \subset f(x)$ olur, fakat bu bir çelişki çünkü

$$|f(x) \setminus x| \leq 1$$

olmalıydı. Demek ki $f(x) \subseteq E$. □

Hausdorff Zincir Teoremi'nin (Teorem 12.1'in) Kanıtı: X, kısmi sıralı küme olsun. Eğer $X = \varnothing$ ise $\varnothing$ maksimal bir zincirdir. Bundan böyle $X \neq \varnothing$ varsayımını yapalım.

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{C} : \mathcal{C},\ X\text{'te bir zincir}\}$$

olsun. Seçim Aksiyomu kabul edildiğine göre yukarıda kanıtladığımız önsavı kullanmanın hiçbir sakıncası yok. Tek yapmamız gereken kanıtladığımız önsavın koşullarını kontrol etmek. Teoremimiz, önsavımızın özel bir durumu olacak.

(i) $\varnothing$ bir zincirdir, dolayısıyla $\varnothing \in \mathcal{S}$.

(ii) E zincirse ve $F \subseteq E$ ise F de bir zincirdir elbette. Demek ki $F \in \mathcal{S}$.

(iii) $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$'de bir zincir olsun. ($\mathcal{C}$, bir zincirler zinciridir.) $\cup\mathcal{C}$'nin X'te bir zincir olduğunu gösterelim. $x, y \in \cup\mathcal{C}$ olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ olacak şekilde A, $B \in \mathcal{C}$ zincirleri vardır. $\mathcal{C}$ zincir olduğundan ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$. Genelliği kaybetmeden $A \subseteq B$ kabul edebiliriz. Bu durumda $x \in B$ olur ve B, X'te bir zincir olduğundan x ya da y'den biri diğerinden küçükeşittir. Bu da E'nin X'te bir zincir olduğunu kanıtlar: $E \in \mathcal{S}$. □

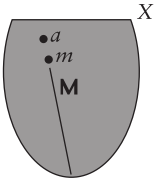
12.2 Zorn Önsavı'nın Kanıtı

Seçim Aksiyomu'nu kabul edip önsavı, onu kullanarak da Hausdorff Zincir Teoremi'ni kanıtladık. Şimdi Hausdorff Zincir Teoremi'ni kullanarak Zorn Önsavı'nı kanıtlayalım.

Teorem 12.3. *X, boş olmayan kısmi sıralı bir küme olsun. X'in her zincirinin X'te bir üstsınırı varsa, X'in maksimal bir elemanı vardır.*

Kanıt: Seçim Aksiyomu'nu kabul ettiğimizden, sonucu olan Hausdorff Zincir Teoremi'ni kullanarak X'te maksimal bir zincirin varlığını söyleyebiliriz. $\mathcal{M}$, böyle bir zincir olsun. Varsayımımıza göre X'te $\mathcal{M}$'nin üstsınırı olan bir m elemanı vardır. m'nin X'in maksimal bir elemanı olduğunu gösterelim. $a \in X$, $a > m$ olsun. m, $\mathcal{M}$'nin üstsınırı olduğundan $a \notin \mathcal{M}$ ve

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \cup \{a\}.$$



Okur kolaylıkla $\mathcal{M} \cup \{a\}$'nın bir zincir olduğunu kanıtlayabilir ve bu da $\mathcal{M}$'nin maksimalliğiyle çelişir. Demek ki m, X'in maksimal bir elemanıdır. $\square$

Yukarıdaki son teoremi aslında sadece Hausdorff Zincir Teoremi'ni kabul ederek kanıtladık.

Şöyle özetleyebiliriz: Seçim Aksiyomu Hausdorff Zincir Teoremi'ni o da Zorn Önsavı'nı gerektirir. Daha önceki bölümün sonuçlarıyla birlikte, tüm bu önermelerin birbirine denk olduklarını söyleyebiliriz.

Kaynakça

M. Eisenberg, Axiomatic Theory of Sets and Classes, 1971, Holt, Rinehart and Winston, Inc. (sayfa 259-265).

12.3 İki Basit Sonuç

Teorem 12.4. *Her küme en az bir ordinale eşleniktir.*

Kanıt: Teorem 12.4'e göre Zorn Önsavı doğrudur. Teorem 11.1'e göre her küme iyisıralanabilir. Teorem 5.1'e göre her iyisıralı küme bir ve bir tek ordinalle eşyapısaldır. Demek ki her küme en az bir ordinale eşleniktir. $\square$

Sonuç 12.5. *Sonsuz bir kümenin sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi vardır.*

Kanıt: X sonsuz bir küme olsun. Teorem **??**'e göre X bir α ordinaliyle eşleniktir. $f : \alpha \to X$ bir eşleme olsun. Teorem 4.10 ve Ord1'e göre ya $\omega \subseteq \alpha$ ya da $\alpha \in \omega$. Ama X sonsuz olduğu ikinci şık olamaz, dolayısıyla $\omega \subseteq \alpha$. Şimdi $f(\omega)$, X'in sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesidir. □

12.4 Seçim Aksiyomu'na Denk Üç Sonuç

1. Aşağıdaki önermenin Seçim Aksiyomu'na eşdeğer olduğu çok bariz:

Teorem 12.6. *$(X_i)_{i \in I}$, hiçbiri boş olmayan bir küme ailesiyse, $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$.*

2. X bir küme ve $\mathrm{Im} \subseteq \wp(X)$ olsun. Eğer Im şu iki özelliği sağlıyorsa:
1) Eğer $A \in \mathrm{Im}$ ise, A'nın her sonlu altkümesi Im'dedir.
2) Eğer X'in bir A altkümesinin her sonlu alkümesi Im'deyse A da Im'dedir,
o zaman Im'ye ***sonlu karakterli*** denir.

Önsav 12.7. *Sonlu karakterli ve boş olmayan her kümenin (altküme olma ilişkisine göre) maksimal bir elemanı vardır.*

3. Her ne kadar Hausdorff Zincir Teoremi'nden daha güçlü gibi görünse de aşağıdaki Önsav da Seçim Aksiyomu'na denktir.

Önsav 12.8. *Yarısıralı her kümede her zincir maksimal bir zincirin içindedir.*

13. Zorn Önsavı'nın Birkaç Cebirsel Uygulaması

Bu bölümde Zorn Önsavı'nın çeşitli uygulamalarını verceğiz. Matematik seviyesi ve olgunluğu teoremi anlamaya yetmeyen okur, sorun etmeden o bölümü atlasın, nasıl olsa ileride kullanılmayacak.

13.1 Maksimal İdealler

Bir halkanın en az iki ideali vardır: 0 (yani $\{0\}$) ve R. Dolayısıyla R, bir halkanın maksimal idealidir. Bu yüzden, "maksimal ideal" nitelemesi, "maksimal özideal" anlamına kullanılır. İlk teoremimiz maksimal ideallerin olduğunu söyleyecek.

Teorem 13.1. *R değişmeli ve birim elemanlı bir halka olsun. $I \lhd R$ herhangi bir özideal olsun. O zaman R'nin I'yı içeren maksimal bir ideali vardır.*

Kanıt: $\mathcal{Z} = \{J \lhd R \colon I \subseteq J \text{ ve } J \neq R\}$ olsun. Z'yi altküme olma ilişkisine göre kısmi sıralayalım:

$$J_1 \leq J_2 \Leftrightarrow J_1 \subseteq J_2.$$

$I \in Z$ olduğundan $Z \neq \varnothing$. Zorn Önsavı'nı uygulamak amacıyla, Z'nin tümevarımsal bir küme (Bölüm 10.3) olduğunu, yani Z'nin her zincirinin bir üstsınırı olduğunu kanıtlayalım. $(J_k)_{k\in\kappa}$, Z'den alınmış herhangi bir zincir olsun. Bu şu demektir: Her k, $\ell \in \kappa$ için ya $J_k \subseteq J_\ell$ ya da $J_\ell \subseteq J_k$. Şimdi: $\bigcup_{k\in\kappa} J_k \in Z$ içindeliğini kanıtlayacağız. O zaman muradımıza ereceğiz çünkü her $k \in \kappa$ için $J_k \subseteq \bigcup_{k\in\kappa} J_k$ olduğundan, kısmi sıralamanın tanımına göre

$$J_k \leq \bigcup_{k\in\kappa} J_k$$

olur.

- Elbette $I \subseteq \cup_{k\in\kappa} J_k$ çünkü her J_k ideali I'yı içeriyor.

• $\cup_{k\in\kappa}J_k$'nın bir ideal olduğunu kanıtlayalım. a, $b \in \cup_{k\in\kappa}J_k$ ve $r \in R$ olsun. $a \in J_k$, $b \in J_\ell$ içindeliklerini sağlayan k, $\ell \in \kappa$ seçelim. Diyelim $J_\ell \subseteq J_k$. O zaman hem a hem de b, J_k'nin elemanı olurlar. J_k bir ideal olduğundan,

$$a + b \in J_k \subseteq \cup_{k\in\kappa}J_k \text{ ve } ra \in J_k \subseteq \cup_{k\in\kappa}J_k$$

olur. Bu da $\cup_{k\in\kappa}J_k$ kümesinin bir ideal olduğunu kanıtlar.

• Son olarak $\cup_{k\in\kappa}J_k$ idealinin R'ye eşit olmadığını kanıtlayalım. Bunu kanıtlamak için, şu basit olguyu kullanacağız: Bir R halkasının bir J idealinin R'ye eşit olmaması için "$1 \notin J$" yeter ve gerek koşuldur. J_k ideallerinin hiçbiri R'ye eşit olmadığından, 1 elemanı hiçbirinde olamaz, dolayısıyla 1 elemanı J_k ideallerinin bileşiminde de olamaz, yani $1 \notin \cup_{k\in\kappa}J_k$.

Zorn Önsavı'nın koşulları gerçekleştiğinden, Zorn Önsavını uygulayabiliriz. Z kümesinin maksimal bir elemanı vardır. Bu maksimal eleman elbette bir maksimal ideal olmak zorunda. Aynı zamanda I'yı da içerir. □

Notlar:

1. Benzer teorem gruplar için doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Q}$'nün maksimal bir altgrubu yoktur. Genel olarak, ($\mathbb{Q}$ gibi) bölünebilir bir grubun maksimal altgrubu olamaz. (Bkz. Alıştırma 10.)

2. Teoremde halkanın birim elemanı olma koşulundan vazgeçemeyiz. Örneğin R halkasını şöyle tanımlayalım: Küme olarak $R = \mathbb{Q}$ olsun. Toplama, bildiğimiz toplama olsun. Çarpmayı, her x, $y \in R$ için $xy = 0$ olarak tanımlayalım. Bir halka elde ederiz. (Dikkat, bu halkada $1x = 0$'dır.) Bu halkanın idealleri aynen $\mathbb{Q}$'nün altgruplarıdır. Bir önceki nottan R'nin maksimal ideali olmadığı görülür.

3. Teoremi elbette $I = 0$ idealine uygulayabiliriz.

4. K herhangi bir cisim olsun. Halkamız $R = \prod_{\mathbb{N}} K$ olsun (Kartezyen çarpım.) $I = \bigoplus_{\mathbb{N}} K$ olsun. O zaman I, R'nin bir özidealidir. Teoreme göre I'yı içeren maksimal bir ideal olmalı. Ne siz ne de başka biri, böyle bir idealin ne olduğunu anlayamaz. Ama vardır! R'nin idealleri ültrafiltrelerle verilir. Ültrafiltreler de başka bir bölümün konusu olacak. Öte yandan, sabit bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için,

$$I_{n_0} = \{(x_n)_n : x_{n_0} = 0\},$$

maksimal bir idealdir. Bu idealler dışındaki her maksimal ideal yukarda tanımlanan I idealini içermek zorundadır (bkz. Alıştırma 6), dolayısıyla betimlenemezler.

Alıştırmalar.

13.1. G bir grup olsun. Eğer her $g \in G$ ve $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $h^n = g$ eşitliğini sağlayan bir $h \in G$ varsa, G'ye ***bölünebilir grup*** denir.

1a. $\mathbb{Q}$'nün (toplama altında) bölünebilir bir grup olduğunu kanıtlayın.

1b. Bölünebilir ve sonlu bir grubun 1 olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

1c. G bölünebilirse ve $H \lhd G$ ise G/H bölüm grubunun da bölünebilir olduğunu kanıtlayın.

13.2. G değişmeli bir grup, H de G'nin (G'ye eşit olmayan) maksimal bir altgrubu olsun. G/H'nin bir p asalı için $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$'ye eşit olduğunu kanıtlayın.

13.3. Değişmeli ve bölünebilir bir grubun maksimal altgrubu olamayacağını kanıtlayın. (İlk iki alıştırmadan çıkar.) Dolayısıyla $\mathbb{Q}$'nün maksimal altgrubu olamaz.

13.4. X, bir G grubunun bir altkümesi olsun. Eğer $1 \notin X$ ise, G'nin $X \cap H = \varnothing$ eşitliğini sağlayan maksimal bir altgrubu olduğunu kanıtlayın. Ama dikkat bu H altgrubu maksimal bir altgrup değildir, sadece G'nin $X \cap H = \varnothing$ eşitliğini sağlayan altgrupları arasında maksimaldir, yani H'den daha büyük bir altgrup X ile kesişmek zorundadır.

13.5. Yukardaki örneği $G = \mathbb{Q}$ ve $X = \{1\}$ altkümesine uygulayalım. (Dikkat: $\mathbb{Q}$'nün etkisiz elemanı 0'dır.) O zaman yukardaki alıştırmaya göre $\mathbb{Q}$'nün 1'i içermeyen maksimal bir altgrubu vardır. Ancak bu örnekte bunu kanıtlamak için Zorn Önsavı'na ihtiyacımız yok. Nitekim, bir p asalı için,

$$H = \{pa/b : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\},$$

$\mathbb{Q}$'nün 1'i içermeyen maksimal bir altgrubudur. Bunu kanıtlayın.

13.6. K herhangi bir cisim, $R = \prod_{\mathbb{N}} K$ ve $I = \bigoplus_{\mathbb{N}} K$ olsun. $n_0 \in \mathbb{N}$ için,

$$I_{n_0} = \{(x_n)_n : x_{n_0} = 0\},$$

tanımını yapalım. I_{n_0}'ın maksimal bir ideal olduğunu kanıtlayın. Bu I_{n_0} idealleri dışındaki her maksimal idealin I'yı içermek zorunda olduğunu kanıtlayın.

13.2 Vektör Uzaylarının Tabanı

K bir cisim ve V, K üzerine bir vektör uzayı olsun. $X \subseteq V$ olsun.

Tanım 13.1. Eğer X'in her sonlu ve birbirinden değişik $v_1, \ldots, v_n$ elemanı ve her $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ için,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

önermesi sağlanıyorsa, X'e ***doğrusal bağımsız küme*** adı verilir.

Örnekler.

13.1. $\varnothing$ doğrusal bağımsızdır. Doğrusal bağımsız bir kümede 0 vektörü olamaz. Eğer $v \in V \setminus \{0\}$ ise $\{v\}$ doğrusal bağımsızdır. Eğer $v \in V \setminus \{0\}$ ve $w \in V \setminus Kv$ ise ise $\{v, w\}$ doğrusal bağımsızdır. Doğrusal bağımsız bir kümenin her altkümesi doğrusal bağımsızdır. Bir kümenin doğrusal bağımsız olması için yeter ve gerek koşul, kümenin her sonlu altkümesinin doğrusal bağımsız olmasıdır. Bu, önemli bir özelliktir ve bundan alabildiğine yararlanacağız birazdan. Bu tür özelliklere "sonlu karakterli" özellik denir. Bir küme ne kadar kalabalıksa, doğrusal bağımsız olması o kadar güçtür.

Tanım. Eğer V'nin her v elemanı, $v_1, \ldots, v_n \in X$ ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ için,

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

olarak yazılıyorsa, X'e (V'yi) ***geren*** ya da ***üreten küme*** denir.

Örnekler.

13.2. V, V'yi gerer. Geren bir kümenin her üstkümesi de V'yi gerer. Bir küme ne kadar küçükse, geren küme olması o kadar güçtür.

Tanım. Eğer X hem lineer bağımsız hem de geren bir kümeyse, X'e V'nin ***tabanı*** adı verilir.

Teorem 13.2. *Her vektör uzayının bir tabanı vardır. Daha da genel olarak bir vektör uzayının her doğrusal bağımsız kümesi, maksimal bir doğrusal bağımsız kümeye genişletilebilir ve maksimal bir doğrusal bağımsız küme bir tabandır.*

Kanıt: Vektör uzayımıza V diyelim. $X \subseteq V$, doğrusal bağımsız bir altküme olsun.

$$Z = \{Y \subseteq V : X \subseteq Y \text{ ve } Y \text{ doğrusal bağımsız}\}$$

olsun. Z'yi altküme olma ilişkisiyle sıralayalım. $X \in Z$ olduğundan Z boşküme değildir. Şimdi Z'nin tümevarımsal olduğunu kanıtlayalım. $(Y_k)_{k\in\kappa}$, Z'den alınmış herhangi bir zincir olsun. $\cup_{k\in\kappa} Y_k \in Z$ içindeliğini kanıtlayacağız. Bileşim elbette X'i içeriyor. Şimdi bu bileşimden, sonlu sayıda birbirinden değişik vektör alalım, diyelim $v_1, \ldots, v_n$. Her $i = 1, \ldots, n$ için, $v_i \in Y_{k_i}$ içindeliğini sağlayan bir $k_i \in \kappa$ bulalım. Bu sonlu sayıdaki

$$Y_{k_1}, \ldots, Y_{k_n}$$

arasından biri en büyüğüdür, diyelim Y_k. O zaman $v_1, \ldots, v_n \in Y_k$ olur ve dolayısıyla $v_1, \ldots, v_n$ arasında trişkadan olmayan doğrusal bir bağımlılık olamaz. Demek ki $\cup_{k\in\kappa} Y_k$ doğrusal bağımsızdır ve Z'dedir. Her $k \in \kappa$ için $Y_k \subseteq \cup_{k\in\kappa} Y_k$ olduğundan, bundan Z'nin tümevarımsal bir küme olduğu çıkar. Zorn Önsavı'na göre Z'nin maksimal bir elemanı vardır. Bu maksimal eleman elbette maksimal doğrusal bağımsız kümedir ve X'i içerir. Şimdi böyle bir kümenin taban olduğunu kanıtlayalım.

Y, V'nin maksimal lineer bağımsız herhangi bir altkümesi olsun. Diyelim v vektörü, hiçbir $v_1, \ldots, v_n \in Y$ ve hiçbir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ için,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

biçiminde yazılamıyor. Bu durumda $Y \cup \{v\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu kanıtlamak kolaydır (ama bunun için K'nın bir cisim olduğunu kullanmak gerekir. Şimdiye kadar yaptıklarımız sadece vektör uzayları için değil, modüller için de geçerlidir. Ama bundan sonra yapacaklarımız sadece vektör uzayları için geçerlidir.) Nitekim, $v_1, \ldots, v_n \in Y$ ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in K$ için,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0$$

varsayımını yapalım. Eğer $\lambda = 0$ ise, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ eşitliğinden ve Y'nin doğrusal bağımsızlığından $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ elde edilir. Eğer $\lambda \neq 0$ ise, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0$ eşitliğinden,

$$v = (-\lambda^{-1}\lambda_1)v_1 + \cdots + (-\lambda^{-1}\lambda_n)v_n$$

bulunur, ki bu da v üzerine yaptığımız varsayımla çelişir. Demek ki $Y \cup \{v\}$ doğrusal bağımsızdır, ki bu da Y'nin maksimalliğiyle çelişir. $\square$

Sonuç 13.3. *V bir vektör uzayı ve $W \leq V$ olsun. Öyle bir $U \leq V$ vardır ki $V = W \bigoplus U$ olur, yani $V = W + U$ ve $W \cap U = \{0\}$ olur.*

Kanıt: $A \subseteq W$, W'nin bir tabanı olsun. B, V'nin A'yı içeren bir tabanı olsun.

$$U = \{a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n : n \in \mathbb{N},\ u_i \in B \setminus A,\ a_i \in K\}$$

olsun. O zaman $U \leq V$ ve $V = W + U$ olur elbette. Doğrusal bağımsızlıktan $W \cap U = \{0\}$ eşitliğini kanıtlamak da zor değildir. $\square$

Bir vektör uzayının tabanının "eleman sayısı"nın (yani kardinalitesinin) tabandan bağımsız olduğu da kanıtlanabilir ama bunu yapmak için gereken "kardinal sayıları"nı henüz işlemedik.

Teorem 13.4. *Bir vektör uzayının iki tabanı arasında bir eşleme vardır.*

Alıştırmalar.

13.7. V bir vektör uzayı olsun. V'nin altuzaylardan oluşan bir zincirine ***bayrak*** denir. Her bayrağın maksimal bir bayrağın içinde bulunduğunu kanıtlayın.

13.3 Zorn Önsavı Alıştırmaları (Gruplar)

Bu alıştırmalar kolay olmayabilecekleri gibi, bazıları bazı öğrencilerin seviyesini aşabilir. Ama her biri matematikte önemlidir. **Alıştırmalar.**

13.8. P bir asallar kümesi olsun. Eğer bir grubun elemanlarının derecesinin asal bölenleri P kümesindeyse, o zaman gruba ***P-grubu*** adı verilir. Her grubun maksimal bir P-altgrubu olduğunu kanıtlayın. (Eğer $P = \{p\}$ ise P-altgrubu yerine ***Sylow p-altgrubu*** denir.)

13.9. Değişmeli, bölünebilir ve burması olmayan ($g^n = 1$ ise ya $g = 1$ ya da $n = 0$) bölünebilir bir grubun $\bigoplus_I \mathbb{Q}$ grubuyla eşyapısal olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Teorem 13.2)

13.10. G değişmeli bir grup olsun. $H \leq G$ bölünebilir bir altgrup olsun. Bir K altgrubu için $G = H \bigoplus K$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Zorn Önsavı'nı $\{K \leq G : K \cap H = 1\}$ kümesine uygulayın.) Değişmeli gruplarla $\mathbb{Z}$-modüller arasında bir ayrım olmadığını anımsayarak, bu alıştırmayı tek üreteçli idealleri olan bir bölüm halkası (TÜİB) üzerine bir modüle uyarlayıp kanıtlayın.

13.11. p bir asal ve G, elemanlarının en yüksek mertebesi p^n olan değişmeli bir grup olsun. H, G'nin $\bigoplus_I \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ grubuna eşyapısal bir altgrubu olsun. Bir K altgrubu için $G = H \bigoplus K$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: Zorn Önsavı'nı $\{K \leq G : K \cap H = 1\}$ kümesine uygulayın.) Değişmeli gruplarla $\mathbb{Z}$-modüller arasında bir ayrım olmadığını anımsayarak, bu alıştırmayı bir TÜİB üzerine modüller için kanıtlayın.

13.12. Yukardaki alıştırmayı kullanarak, elemanlarının en büyük mertebesinin sonlu olduğu değişmeli burmalı grupların, döngüsel grupların direkt toplamına eşyapısal olduğunu kanıtlayın.

13.13. Bölünebilir ve değişmeli bir p-grubun, bir I göstergeç kümesi için Prüfer p-gruplarının direkt toplamına eşyapısal olduğunu kanıtlayın.

13.14. Bölünebilir ve değişmeli bir grubun bazı göstergeç kümeleri için,

$$(\oplus_{I_0}\mathbb{Q}) \oplus (\oplus_{p \text{ asal}}(\oplus_{I_p}\mathbb{Z}_{p^\infty}))$$

grubuyla eşyapısal olduğunu kanıtlayın. (İpucu: T, grubun burmalı elemanlarından oluşan altgrubu olsun. T bölünebilir bir altgruptur. Alıştırma 10'e göre bir $K \leq G$ için $G = T \bigoplus K$. Alıştırma 2, K'nın ne olması gerektiğini söylüyor. T'yi asal bileşenlerine ayırıp her bileşene Alıştırma 6'yı uygulayın.)

13.15. G bir grup ve H, G'nin bir altgrubu olsun. Eğer *her* $h \in H$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için*, $h = x^n$ *denkleminin* G*'de bir çözümü varsa* H*'de de bir çözümü vardır* önermesi doğruysa H'ye G'de ***saf*** denir. G değişmeli bir grup ve H, G'nin saf bir altgrubu olsun ve H'nin en büyük mertebesinin sonlu olduğunu varsayalım. O zaman bir K altgrubu için $G = H \bigoplus K$ eşitliğini kanıtlayın. (İpucu: H'nin en büyük mertebesi üzerine tümevarımla. İlk olarak H'nin bir p asalı için bir p-grup olduğunu varsayabileceğimizi kanıtlayın. Eğer H'nin mertebesi p^n ise, $Gp^n \cap H = 1$ olur. Şimdi

$$Z = \{K \leq G : Gp^n \leq K \text{ ve } K \cap H = 1\}$$

olsun. Zorn Önsavı'nı bu kümeye uygulayın.)

13.4 Zorn Önsavı Alıştırmaları (Sıralı Halkalar)

Alıştırmalar.

13.16. R sıralı ve değişmeli bir halka olsun. P, 0'dan büyükeşit elemanların kümesi olsun. K, sonlu sayıda karelerin toplamlarından oluşan küme olsun.

a. P ve K kümelerinin toplama ve çarpma altında kapalı olduklarını kanıtlayın.

b. $K \subseteq P$ içindeliğini kanıtlayın.

c. -1'in karelerin toplamı olarak yazılamayacağını ve sonlu sayıda karenin toplamının 0'dan büyükeşit olduğunu kanıtlayın.

13.17. F bir cisim olsun. -1'in F cisminde karelerin toplamı olarak yazılamayacağını varsayalım. F'nin (belki birkaç değişik biçimde) sıralı bir cisim olacağını kanıtlayacağız. K, F'nin sonlu sayıda karenin toplamı olarak yazılabilen elemanlarından oluşan küme olsun.

a. K'nin toplama, çarpma ve (0 dışında elemanlarıyla) bölme altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

b. $P \subseteq F$ kümesi, toplama ve çarpma altında kapalıysa, K'yı altküme olarak içeriyorsa ama -1 elemanı değilse, P'ye ***koni*** diyelim. Maksimal bir koninin varlığını kanıtlayın.

c. F üzerine $\leq$ ikili ilişkisinini

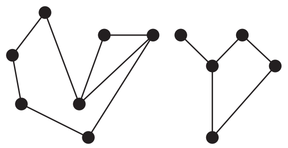
$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

olarak tanımlayalım. Bunun F üzerine bir tamsıralama olduğunu ve bu sıralamanın F'yi sıralı bir cisim yaptığını kanıtlayın.

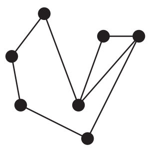
d. F'yi sıralı bir cisim yapan bütün tamsıralamaların yukardaki gibi elde edilebileceğini gösterin.

14. König Önsavı

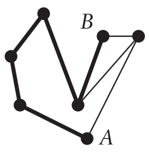
Bir ***çizge***, noktalardan ve bazı nokta çiftleri arasına “çizilen” adına ***kenar*** ya da ***bağıntı*** denilen çizgilerden oluşur. Bir noktanın bağlantılı olduğu noktalara o noktanın ***komşuları*** diyelim. Ardışık noktaların komşu oldukları bir noktalar dizisine ***yol*** denir.



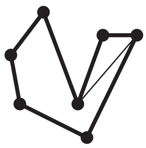
İki parçalı bir çizge



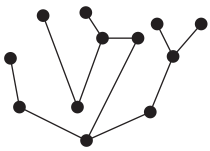
Tekparça bir çizge



A’dan *B*’ye giden bir yol

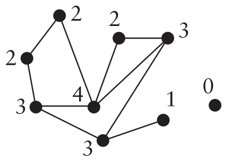


Bir döngü



Bir ağaç

Herhangi bir noktadan herhangi bir başka noktaya sonlu sayıda noktadan oluşan bir yolla ulaşılabilen çizgelere ***tekparça çizge*** denir. Geçtiği bir noktadan bir daha geçmeyen yollara ***dal*** adı verilir. Başladığı noktada biten yollara ise ***döngü*** denir. Döngüsü olmayan tekparça çizgelere ***ağaç*** denir. Bir ağaçta bir noktadan bir başka noktaya tek bir yol vardır, yoksa kolayca bir döngü elde edilir. Bir noktanın ***derece***si, o noktaya bağıntılı nokta sayısıdır. Bir noktanın derecesi sonsuz da olabilir, sonlu da. Bir noktanın bir başka noktaya ***uzaklığı*** o iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğudur. Eğer iki nokta arasında yol yoksa, uzaklığın sonsuz olduğu söylenir; böyle bir durumda çizge tekparça olamaz elbet. Komşular arasındaki uzaklık 1’dir.



Noktaların dereceleri

Eğer her çizgede her noktanın derecesi sonluysa, bu çizgenin sabit bir noktasına uzaklığı n olan sonlu tane nokta vardır doğal olarak.

Şimdi teoremimizi yazabiliriz:

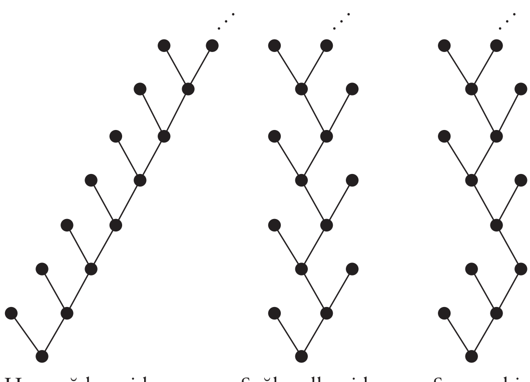
Önsav 14.1. *Sonsuz sayıda noktası olan ve her noktasının derecesi sonlu olan bir ağaçta sonsuz noktalı bir dal vardır.*

Kanıtı biraz geciktireceğiz.

Her şeyden önce, bunun doğruluğu çok açık bir teorem olduğunu söylemek gerekiyor. Ama kanıtı pek o kadar kolay değil. Kanıt, zorunlu olarak Seçim Aksiyomu'nu kullanır. Ancak kanıtta Seçim Aksiyomu'nun tüm gücüne gerek yoktur. Seçim Aksiyomu'ndan daha hafif bir aksiyom da yeterlidir.

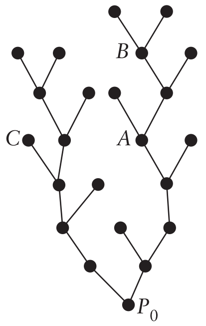
König Önsavı daha çok mantıkta kullanılır.

Kanıtın zorluğunu kavramak amacıyla, sonsuz sayıda noktası olan ve her noktasının derecesi sonlu olan birkaç ağaç çizip bu ağaçların her birinde sonsuz bir dal bulalım.



Hep sağdan giden dal sonsuzdur | Sağlı sollu giden dal sonsuzdur | Sonsuz bir dal belli ki var, ama hangisi?

Aslında üç örneğin de aynı örnek olduğuna dikkatinizi çekerim. Kafa karıştırmak amacıyla değil, bir çizgede sağ sol (ya da alt üst) gibi kavramların olmadığına göstermek amacıyla aynı çizgeyi üç değişik biçimde çizdik. Eğer sağı solu iyice karıştırırsak, üçüncü çizgeyi elde ederiz ve bu çizgede sonsuz dalın hangisi olduğu pek belli olmaz. İşte Seçim Önsavı bu sonsuz dalın adresini vermekte kullanılacak.



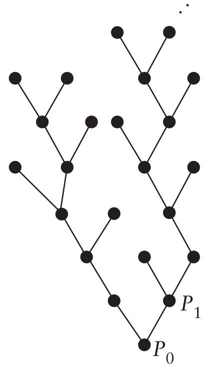
$A \leq B$, ama A ile C karşılaştırlamaz.

Bir ağacın herhangi bir noktasını seçmek, ağacın noktalarını kısmi sıralamamıza olanak sağlar. Bu kısmi sıralamayı açıklayalım, teoremin kanıtında ihtiyacımız olacak. Diyelim ağaçtan P_0 noktasını seçtik. Bu P_0 noktası, tanımlayacağımız sıralamada ağacın en küçük noktası olacak. Şimdi ağaçtan iki A ve B noktası seçelim ve $A \leq B$ ilişkisini tanımlayalım: $A \leq B$ ancak ve ancak B ile P_0 noktası arasındaki (yegâne) yol A'dan geçiyorsa. Bunun gerçekten bir kısmi sıralama olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. Büyük noktaları yukarıya, küçük noktaları aşağıya çizmek nerdeyse bir gelenek halini almıştır ve biz de bu geleneğe uyacağız.

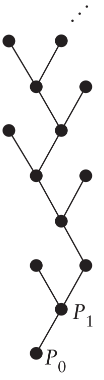
Bu sıralamada bir dalın bir zincir olduğuna dikkatinizi çekeriz. (Bkz. Bölüm 10.1.1.)

Şimdi artık teoremimizi kanıtlayabiliriz.

Önsavın Kanıtı: Ağacımıza A adını verelim. Ağaçtan herhangi bir P_0 noktası alalım ve ağacı bu P_0 noktası ağacın en küçük noktası olacak şekilde yukarda açıklandığı gibi kısmi sıralayalım. Ağaç, tekparça bir çizge olduğundan, ağacın her noktasından bu P_0'a giden bir yol vardır.



Bu yolların her biri elbette P_0'ın komşularının birinden geçer. Ama P_0'ın derecesi sonlu olduğundan, P_0'ın sonlu sayıda komşusu vardır.



Demek ki, P_0'ın öyle bir P_1 komşusu vardır ki, çizgenin sonsuz tane noktası P_0'a bu P_1 noktasından geçerek bağlanır. Şimdi tüm diğer noktaları atıp sadece bu noktaları (yani P_0 noktasını ve P_1 noktasından büyükeşit noktaları) ve aralarındaki bağıntıları tutalım. (Yukardaki çizge, bir üstteki ağaçtan bu şekilde elde edilmiştir.) Kalan çizge de bir ağaçtır, çünkü sonuç olarak noktalarının her biri P_0'a (P_1'den geçen) bir yolla bağlıdır. Kalan ağaca A_1 diyelim. A_1 teoremdeki varsayımların hepsini sağlar. Şimdi, A_1 ağacının sonsuz tane noktasının her biri, P_1'in sonlu tane komşusundan birinden geçen bir yolla P_1'e bağlanır. Demek ki bu yollardan sonsuz tanesi P_1'in komşularından birinden geçecektir. P_1'in bu komşularından birini seçelim ve bu noktaya P_2 adını verelim. $P_2 \neq P_0$ elbette, hatta $P_0 < P_1 < P_2$. Şimdi çizgenin tüm noktalarını atıp P_0, P_1 ve P_2'den büyükeşit noktaları tutalım. Kalan çizgeye A_2 diyelim ve yukardaki yöntemi sürdürelim. Böylece tümevarımla, $P_0 < P_1 < P_2 < \ldots < P_n < \ldots$ noktaları tanımlanır. Bu noktalar elbette sonsuz bir dal oluştururlar..

Kanıt bitmiştir. □

Seçim Önsavı'nın tam olarak nerede kullanıldığı sanırım açıktır. Her P_n noktasından bir sonraki P_{n+1} noktasını bulmak için bir seçim yapıyoruz, belli bir özelliği olan noktalardan birini seçiyoruz.

Tümevarımsal kanıttan ve Seçim Aksiyomu'nun biraz gizlenerek kullanılmasından rahatsızlık duyan okur için Önsav'ın bir başka kanıtı verelim. Bunun için, Teorem 9.3'ü kullanacağız.

Önsavın İkinci Kanıtı: Ağacımıza gene A adını verelim. Ve gene ağaçtan herhangi bir P_0 noktası alıp ağacı bu P_0 noktası ağacın en küçük noktası olacak şekilde kısmi sıralayalım. Diyelim Önsav yanlış. O zaman yukardaki Teorem 9.3'ün (b) koşulu, A ve üstünde tanımlanan kısmi sıralama için doğrudur. Demek ki, A'nın boş olmayan her altkümesinin maksimal bir elemanı vardır, dolayısıyla A'nın maksimal elemanları vardır. maksimal elemanlar arasından P_0'a en uzak elemanlardan birini seçelim. (Seçim Aksiyomu burada kullanılmıyor tabii! Seçim Aksiyomu'nu Teorem 9.3'ün kanıtında zaten kullandık.) Bu uzaklık

n olsun. Demek ki, ağacın her noktasının P_0'a uzaklığı en fazla n'dir. Ama her noktasının derecesinin sonlu olan bir ağaçta, P_0'a uzaklığı en fazla n olan sonlu tane nokta vardır; demek ki ağaç sonludur. Çelişki. □

15. Hahn-Banach Teoremi

[1] Fonksiyonel analizin temel yapıtaşlarından biri olan ve kanıtında (kaçınılmaz olarak) Zorn Önsavı kullanılan ***Hahn-Banach Teoremi***'ni kanıtlayacağız.

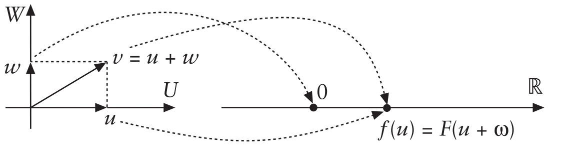
V, bir vektör uzayı, U da V'nin bir altuzayı olsun. (U'nun V'nin altuzayı olduğunu belirtmek için, alışılageldiği üzere $U \leq V$ yazacağız.) Her x, $y \in U$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ ve } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

koşullarını sağlayan bir $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna U üzerine ***doğrusal fonksiyonel*** ya da kısaca ***fonksiyonel*** denir.

Eğer $F : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonelse ve $U \leq V$ ise, F'yi U'ya kısıtlarsak, U üzerine bir fonksiyonel elde ederiz elbet. U altuzayına kısıtlanmış bu fonksiyone $F_{|U}$ olarak gösterilir.

Bir fonksiyoneli bir U altuzayına kısıtlamak kolaydır, bunu herkes yapar. Ama V'nin bir U altuzayında tanımlanmış bir $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini V'ye genişletmek daha zordur, Seçim Aksiyomu'nu gerektirir: W, U'yu V'de tümleyen bir altuzay olsun, yani $U \oplus W = V$ olsun (Sonuç 13.3).



Şimdi F'yi, her $u \in U$ ve $w \in W$ için, $F(u+w) = f(u)$ olarak tanımlayalım. F, V üzerine fonksiyoneldir ve f'yi U'dan V'ye genişletir.

U, V'ye eşit değilse, U üzerine tanımlanmış bir f fonksiyonelinin birden çok V'ye genişlemesi vardır.

V'nin bir U altuzayı üzerine tanımlanmış verilen bir

$$f : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonelini, başka bir koşul aramaksızın V'ye genişletmek, yukarda gördüğümüz gibi çözümü çok çok zor olmayan bir problemdir. Ancak, belli bir

[1] Yazarı: İlksen Acunalp

özelliği olan bir fonksiyoneli, bu özelliğini kaybetmeyecek biçimde genişletmek çok daha zor bir problem olabilir. Bu bölümde kanıtlayacağımız Hahn-Banach Teoremi işte bu türden bir problemin çözümüdür. Problem şu: Eğer $U \leq V$ ise ve $f: U \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli bir $p: V \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli tarafından üstten sınırlıysa (yani her $u \in U$ için $f(u) \leq p(u)$ ise), f'yi tüm uzaya gene p'yle üstten sınırlı olacak biçimde genişletebilir miyiz? Hahn-Banach Teoremi, bundan daha genel bir soruya olumlu yanıt verir:

Teorem 15.1. *V bir vektör uzayı ve $p: V \to \mathbb{R}$, her x, $y \in V$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ ve } p(\lambda x) = \lambda p(x)$$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. U, V'nin bir altuzayı ve $f: U \to \mathbb{R}$, her $u \in U$ için,

$$f(u) \leq p(u)$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyonel olsun. O zaman, her $x \in V$ için,

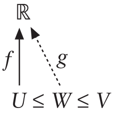
$$F(x) \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan ve f'yi genişleten (yani U'ya kısıtlanışı f'yi veren) bir $F: V \to \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyoneli vardır.

Kanıt: Önce, Zorn Önsavı'nı uygulayacağımız $(\mathcal{Z}, \leq)$ kısmi sıralamasını tanımlayalım. $\mathcal{Z}$ kümesi,

$$\mathcal{Z} = \{ (W, g): U \leq W \leq V,\ g: W \to \mathbb{R} \text{ fonksiyonel, her } w \in W \text{ için } g(w) \leq p(w) \text{ ve her } u \in U \text{ için } g(u) = f(u)\}$$

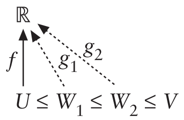
olsun. Dikkat ederseniz, $\mathcal{Z}$, f'yi, p'yle üstten sınırlı olacak biçimde, U'yu içeren W altuzaylarına genişleten fonksiyoneller kümesi.



$(U, f) \in \mathcal{Z}$'nin elemanı olduğundan $\mathcal{Z}$ boş küme değildir. Şimdi $\mathcal{Z}$ üzerine bir sıralama tanımlayalım. (W_1, g_1), (W_2, g_2) ise, $(W_1, g_1) \leq (W_2, g_2)$ ilişkisini,

$$\text{“}W_1 \leq W_2 \text{ ve } g_1,\ g_2\text{'nin } W_1\text{'e kısıtlanışıdır”}$$

biçiminde tanımlayalım. Bunun bir kısmi sıralama olduğu tanımın her halinden ve yukardaki şekilden belli.



Şimdi $(\mathcal{Z}\ ,\ \leq)$ sıralamasının her zincirinin bir üstsınırı olduğunu gösterelim, ki Zorn Önsavı'nı uygulayabilelim.

$\mathcal{Z}$ 'den herhangi bir $\mathcal{C}$ zinciri alalım.

M, $\mathcal{C}$ zincirinin tüm $(W,\, g)$ elemanlarının W altuzaylarının bileşimi olsun.

M'nin V'nin bir altuzayı olduğunu savlayıp kanıtlıyoruz: $\alpha_1,\, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve

$$m_1,\, m_2 \in M$$

olsun. O zaman $\mathcal{C}$ 'nin iki $(W_1,\, g_1)$ ve $(W_2,\, g_2)$ elemanı için $m_1 \in W_1$ ve $m_2 \in W_2$ olur. W_1 ve W_2altuzay olduklarından, $\alpha_1 m_1 \in W_1$ ve $\alpha_2 m_2 \in W_2$. Öte yandan, $\mathcal{C}$ bir zincir olduğundan,

$$\text{ya } (W_1,\, g_1) \leq (W_2,\, g_2) \text{ ya da } (W_1,\, g_1) \leq (W_2,\, g_2).$$

Demek ki, sıralamanın tanımından dolayı,

$$\text{ya } W_1 \leq W_2 \text{ ya da } W_2 \leq W_1.$$

Her iki durumda da bir $(W,\, g) \in \mathcal{C}$ için,

$$\alpha_1 m_1 \in W \text{ ve } \alpha_2 m_2 \in W.$$

Ama W bir altuzay olduğundan, bundan,

$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \in W \subseteq M$$

çıkar. Demek ki $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \in M$ ve M, V'nin bir altuzayıdır.

Elbette, her $(W,\, g) \in \mathcal{C}$ için, $W \leq M'$dir.

Şimdi bir $h : M \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli tanımlayacağız. Bilene: h, $\mathcal{C}$ zincirinin tüm $(W,\, g)$ elemanlarının g'lerinin bileşimi olacak [SKK]. Fonksiyonlar zincirinin bileşiminin ne demek olduğunu bilmeyenlere h'yi tanımlayalım: $m \in M$ olsun. O zaman M'nin tanımından dolayı, bir $(W,\, g) \in \mathcal{C}$ için, $m \in W$'dir. Şimdi $h(m)$'yi $g(m)$ olarak tanımlayalım. Yalnız bu tanımın geçerli olması için, $g(m)$'nin $\mathcal{C}$'nin $(W,\, g)$ elemanına göre değişmediğini kontrol etmeliyiz. Nitekim eğer bir başka $(W_1,\, g_1) \in \mathcal{C}$ için, $m \in W_1$ ise, ya g, g_1'in ya da g_1, g'nin kısıtlaması olduğundan, $g(m) = g_1(m)$'tir. Dolayısıyla $h(m)$'yi $g(m)$ ya da $g_1(m)$ olarak tanımlamak arasında bir ayrım yoktur.

h'nin M üzerine bir fonksiyonel olduğu, M'nin altuzay olduğunun kanıtı gibidir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Her $(W,\, g) \in \mathcal{C}$ için, h fonksiyoneli g'nin M'ye bir genişletilmesidir. Bunun kolay kanıtını da okura bırakıyoruz. Bunun sonucu olarak her $(W,\, g) \in \mathcal{C}$ için, h fonksiyonelinin f'nin M'ye bir genişletilmesi olduğu anlaşılır.

Her $m \in M$ için $h(m) \leq p(m)$ eşitliğini görmek de kolaydır.

Demek ki $(M,\, h) \in \mathcal{Z}$ ve $(M,\, h)$, $\mathcal{C}$ 'nin her elemanından büyükeşit.

Şimdi artık Zorn Önsavı'nı $\mathcal{Z}$'ye uygulayabiliriz: $\mathcal{Z}$'nin bir maksimal $(M,\, h)$ elemanı vardır. Eğer M'nin V'ye eşit olduğunu kanıtlayabilirsek, $F = h$ alarak teoremimizin kanıtını bitirmiş oluruz.

M'nin V'ye eşit olduğunun kanıtı yukarda kanıtladıklarımız kadar standart değil. Biraz çaba gerektiriyor.

Diyelim $M < V$. O zaman $V \setminus M$ boşküme değildir. $w \in V \setminus M$ ve

$$N = M + \mathbb{R}w$$

olsun. $w \in N \setminus M$ olduğundan, $M < N$'dir. Şimdi h'yi,

$$(M,\, h) < (N,\, g) \in \mathcal{Z}$$

olacak şekilde N üzerinde tanımlanmış bir g'ye genişleteceğiz. Bu da $(M,\, h)$'nin maksimallığıyla çelişecek ve istediğimizi verecek. Başlıyoruz:

Her $x,\, y \in M$ için,

$$\begin{aligned} h(x) + h(y) &= h(x+y) \leq p(x+y) = p(x - w + y + w) \\ &\leq p(x-w) + p(y+w) \end{aligned}$$

ve

$$-p(x-w) + h(x) \leq p(y+w) - h(y)$$

olur. Demek ki,

$$\sup_{x \in M} \left[-p(x-w) + h(x)\right] \leq \inf_{x \in M} \left[p(x+w) - h(x)\right].$$

Bu iki sayı arasından bir α seçelim. O zaman her $x \in M$ için,

$$\alpha \leq p(x+w) - h(x) \text{ ve } -\alpha \leq p(x-w) - h(x)$$

olur. Bu eşitsizlikleri birazdan kullanacağız.

Artık g'yi tanımlayabiliriz: $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in M$ için

$$g(x + \lambda w) = h(x) + \lambda\alpha$$

olsun. g, elbette h'nin N üzerine genişletilmesi olan bir fonksiyoneldir. Şimdi her $y \in N$ için $g(y) \leq p(y)$ eşitsizliğini gösterelim. Belli bir $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in M$ için $y = x + \lambda w$ olur. Eğer $\lambda = 0$ ise, $(M,\, h) \in \mathcal{Z}$ olduğu için,

$$g(y) = g(x + \lambda w) = h(x) \leq p(x) = p(x + \lambda w) = p(y)$$

olur. Eğer $\lambda > 0$ ise,

$$\begin{aligned} g(y) &= g(x+\lambda w) = h(x) + \lambda\alpha = \lambda(h(x/\lambda) + \alpha) \\ &\leq \lambda(h(x/\lambda) + p(x/\lambda + w) - h(x/\lambda)) \\ &= \lambda p(x/\lambda + w) = p(x+\lambda w) = p(y) \end{aligned}$$

olur. Eğer $\lambda = -\mu < 0$ ise,

$$\begin{aligned} g(y) &= g(x+\lambda w) = h(x) - \mu\alpha = \mu[-\alpha + h(x/\mu)] \\ &\leq \mu[p(x/\mu - w) - h(x/\mu) + h(x/\mu)] \\ &= \mu p(x/\mu - w) = p(x - \mu w) = p(x+\lambda w) = p(y) \end{aligned}$$

olur.

Kaynakça

[1] T. Terzioğlu, **Fonksiyonel Analizin Yöntemleri**, Matematik Vakfı Yayınları, 1998.

[2] K. Ciesielski, J. W Bruce, **Set Theory for the Working Mathematician**, Cambridge University Press, 1997.

16. Banach-Tarski Paradoksu

[1] Sonsuzluğun yol açtığı paradokslar binyıllardır (tam 2,5 binyıldır) biliniyor. Zeno'nun paradokslarını okurlarımızın bilmesi gerekir [SKK]. Galile de doğal sayılarla doğal sayıların kareleri arasında bir eşleme olduğunu görüp, parçanın bütünü kadar elemanı olabilmesine şaşırmıştır. Bu yöntemle, sonsuz bir kümeden, bu kümeyle aynı "büyüklükte" birkaç küme çıkarılabilir. Dolayısıyla Galile'ye göre "daha büyük" ya da "eşit" gibi nitelemeler sonsuz nesnelere uygulanamaz. Artık modası geçmiş de olsa, sonsuzlukla ilgili bu tür düşünceler insanoğlunu uzunca bir süre meşgul etmiştir. Bu bölümde sonsuz bir kümeyi parçalayarak neler yapılabileceğini göreceğiz.

Seçim Aksiyomu'nun bazı sonuçlarını ve eşdeğer ifadelerini önceki bölümlerde gördük. Bu bölümde Seçim Aksiyomu'nun o masum dış görünüşünün altında yatan "canavarın" bir yüzünü göreceğiz.

Hemen belirtelim: Her ne kadar bölümün başlığında "paradoks" sözcüğü geçse de aslında başımıza gelecekler Seçim Aksiyomu'nun bir sonucu olacak. Kabul ettiğimiz aksiyomların sonuçlarına katlanmalıyız. Matematiksel anlamda bir paradokstan sözetmeyeceğiz; sözedemeyiz de, çünkü bugün, matematiksel bir paradoks bilinmemektedir. Eski paradoksların her biri, matematiğin aksiyomlarının (örneğin ZF ya da ZFC sistemleriyle) belirlenmesi sayesinde artık birer paradoks olmaktan çıkmışlar ve hiçbiri günümüze kadar hayatta kalmayı becerememiştir.

Burada "paradoks" sözcüğü "bize imkânsız gibi gelen, sezgilerimize ters düşen, bir türlü inanmak istemediğimiz" bir durum anlamında kullanılmıştır. Örneğin bir futbol topundan aynı ebatta iki futbol topu yaratmak paradoksaldır, bize saçma gelir, "olmaz öyle şey" ya da "bu ancak masallarda ve fantastik öykülerde olabilir" deriz.

Seçim Aksiyomu'nu ilk kez gören biri Seçim Aksiyomu'na matematikte neden özel bir yer ayrıldığını, bu konuda neden bu kadar yazılıp çizildiğini anlamayabilir. Sonuç olarak, her gün seçim yaparız, o zaman seçim yapmak neden bir sorun yaratsın ki? Seçim yapmaktan daha doğal ne olabilir ki? İşte bu doğallık duygusu bu bölümde oldukça sarsılacak.

[1]Yazarı: Ali Altuğ ve Aykut Arslan

1924'te, her ikisi de Polonyalı olan Stefan Banach ve Alfred Tarski tarafından kanıtlanan Banach-Tarski Teoremi (ya da Paradoksu), Seçim Aksiyomu kabul edildiğinde, bir topu (içi dolu bir küreyi) sonlu sayıda parçaya (5 parça yetiyor, parçalardan biri de sadece merkezi içeren tek noktalı küme) ayırıp, bu parçaları sadece öteleyip ve döndürüp (yani hacim değiştirmeyen dönüşümlerden geçirip) birbirine yapıştırarak ilk topla aynı boyutta iki tane top elde edilebileceğini söylüyor bize. Yöntem çok doğal: Bir top al, topu parçala, parçaları döndür, ötele ve sonra eğip bükmeden, çekip çekiştirmeden tekrar yapıştır, al sana iki top! Top doğurdu! Bunu patatesle ya da köfteyle yapabilseydik dünyanın açlık sorunu kökünden çözülürdü.

Aslında Banach'la Tarski Seçim Aksiyomu'nun ne kadar tuhaf sonuçlar doğurabileceğini göstermek ve reddini sağlamak için kanıtlamışlardır bu teoremi, ancak istedikleri gerçekleşmemiş ve Seçim Aksiyomu gene de matematikçilerin çok büyük çoğunluğu tarafından kabul görmüştür.

16.1 Gruplar

İçinde yaşadığımız üç boyutlu uzayda, yani $\mathbb{R}^3$'te çalışacağız. Yazı boyunca $\mathbb{R}^3$'ün iki tür dönüşümünü kullanacağız: Ötelemeler ve döndürüler.

Görece daha basit olduklarından önce ötelemelerden başlayalım. $\mathbb{R}^3$'te herhangi bir (a, b, c) vektörünü sabitleyelim ve $\mathbb{R}^3$'ün her (x, y, z) vektörünü

$$(x + a,\ y + b,\ z + c)$$

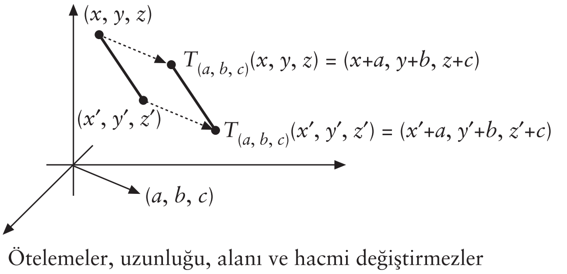
vektörüne götüren dönüşümünü $T_{(a,\ b,\ c)}$ olarak gösterelim. Demek ki,

$$T_{(a,b,c)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

dönüşümü,

$$T_{(a,b,c)}(x,\ y,\ z) = (x + a,\ y + b,\ z + c)$$

kuralıyla tanımlanmıştır. $\mathbb{R}^3$'ün bu tür dönüşümlerine ***öteleme*** adı verilir.



Ötelemeler, uzunluğu, alanı ve hacmi değiştirmezler

$\mathbb{R}^3$'ün ötelemeler kümesine T diyelim. Kolayca görüleceği üzere,

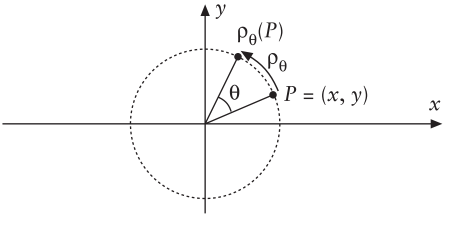
G1. $T_{(0,0,0)} = \text{Id} =$ özdeşlik dönüşümü $\in T$,

G2. $T_{(a,b,c)} \circ T_{(a',b',c')} = T_{(a+a',b+b',c+c')} \in T$,

G3. $T^{-1}_{(a,b,c)} = T_{(-a,-b,-c)} \in T$

olur. Yani T dönüşümler kümesi özdeşlik fonksiyonunu içerir, bileşke altında kapalıdır ve her elemanının tersini de içerir. Bu özellikleri olan dönüşüm kümelerine ***grup*** denir.

Şimdi ***döndürüleri*** açıklayalım. $\mathbb{R}^2$'nin ve $\mathbb{R}^3$'ün "O merkezli döndürüleri"nden sözedeceğiz. $SO_2(\mathbb{R})$ ve $SO_3(\mathbb{R})$ olarak göstereceğimiz gruplar, sırasıyla $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$'ün O'yu sabit bırakan döndürülerinden oluşan grup olacak.



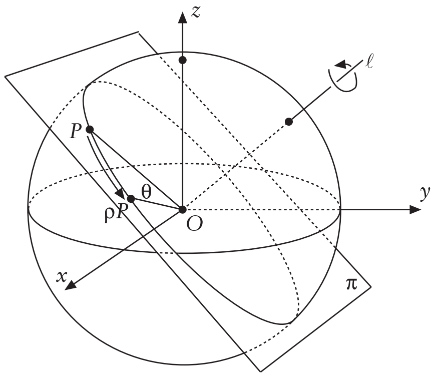
$\rho_\theta(P) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

$\mathbb{R}^2$'nin O merkezli döndürüleri, $\mathbb{R}^2$ düzleminin noktalarını O etrafında belli bir θ açısıyla döndüren r_θ dönüşümleridir. Bunların kümesi $SO_2(\mathbb{R})$ olarak simgelenir.

$$p_0 = \text{Id} = \text{Özdeşlik dönüşümü} \in SO_2(\mathbb{R}),$$
$$p_\theta{}^{-1} = p_{-\theta} \in SO_2(\mathbb{R}),$$
$$p_\theta \circ p_\varphi = p_{\theta+\varphi} \in SO_2(\mathbb{R})$$

özellikleri doğrudur. Demek ki $SO_2(\mathbb{R})$ de bir gruptur.

$\mathbb{R}^3$'ün döndürülerinden oluşan $SO_3(\mathbb{R})$, anlaşılması biraz daha güç olan bir gruptur. O noktasından geçen herhangi bir ℓ doğrusu (ekseni) ve bir θ açısı seçelim. $\mathbb{R}^3$'te bir P noktası alalım. π, bu ℓ doğrusuna dik olan ve P ve O'dan geçen bir düzlem olsun. π düzleminde P noktasını saatin ters yönünde O etrafında (ya da ℓ etrafında, aynı şey) θ kadar döndürelim. Bu dönüşüme $p_{\ell,\theta}$ diyelim. Tüm $p_{\ell,\theta}$ dönüşümlerin kümesine $SO_3(\mathbb{R})$ diyelim. Son özelliğin kanıtlanması zor da olsa $SO_3(\mathbb{R})$ bir gruptur:



$$\begin{aligned}
&p_{\ell,0} = \text{Id} = \text{Özdeşlik dönüşümü} \in SO_3(\mathbb{R}),\\
&p_{\ell,\theta^{-1}} = p_{\ell,-\theta} \in SO_3(\mathbb{R}),\\
&p_{\ell,\theta} \circ p_{\ell',\theta'} \in SO_3(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

$p_{\ell,\theta} \circ p_{\ell',\theta'}$ dönüşümünün hangi ℓ'' doğrusu ve hangi θ'' açısı için $r_{\ell'',\theta''}$ dönüşümüne eşit olduğunu bulmak hiç de kolay bir uğraş değildir, ama öyledir.

G_3 olarak göstereceğimiz grup ise $\mathbb{R}^3$'ün döndürüleri ve ötelemelerini içeren en küçük grup olacak. G_3'ün her elemanı (tek) bir $t \in T$ ve (tek) bir $r \in SO_3(\mathbb{R})$ için tp biçiminde yazılır yani,

$$G_3 = T \cdot SO_3(\mathbb{R}) = \{tr : t \in T \text{ ve } r \in SO_3(\mathbb{R})\}$$

dir: Sağ taraf T'yi ve $SO_3(\mathbb{R})$'yi içerir elbet. Sağ tarafın bir grup olduğunu kanıtlamak gerekiyor:

$$(t\alpha)(s\beta) = tss^{-1}\alpha s\beta = (ts)(s^{-1}\alpha s\beta)$$

eşitliğinden ve $ts \in T$ olduğundan, $s^{-1}\alpha s$ elemanının bir döndürü olduğunu kanıtlamak yeter. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

16.2 Grupların Kümelere Etkisi

Tanımlarla başlayalım.

$$\begin{aligned}
&S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\\
&S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},\\
&T^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}
\end{aligned}$$

olsun. Uzunca bir süre (G, X) çifti,

$$(SO_2(\mathbb{R}), S^1), (SO_3(\mathbb{R}), S^2), (G_3, \mathbb{R}^3)$$

çiftlerinden birini simgeleyecek. G'ye ***grup***, X'e de G'nin ***etki ettiği küme*** denir. Her $g \in G$ ve $x \in X$ için, $g(x)$ noktasının gene X'te olduğuna dikkatinizi çekeriz. $g, h \in G$ için, $g \circ h$ yerine gh yazmayı tercih edeceğiz. Ayrıca eğer $x \in X$ ise $g(x)$ yerine gx yazdığımız da olacak.

E1. $\mathrm{Id}(x) = x$,

E2. $g(hx) = (gh)x$.

eşitlikleri önemli olacak.

Tanım 16.1. $E \subseteq X$ olmak üzere,

$$E = \bigcup_i g_i(A_i) = \bigcup_j h_j(B_j)$$

olacak şekilde, E'nin, ikişerli kesişimleri boşküme olan

$$A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$$

altkümeleri ve G'nin

$$g_1, g_2, \ldots, g_m, h_1, h_2, \ldots, h_n$$

elemanları varsa, E kümesine (G, X)-***çelişik*** ya da kısaca G-***çelişik*** diyeceğiz.

Eğer bu tanımda $E = X = T_3$, $G = G_3$ ve

$$A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n = T_3$$

olarak alabilirsek, o zaman amacımıza ulaşmış olacağız. Demek ki bir biçimde T_3'ün (G_3, T_3)-çelişik olduğunu kanıtlamalıyız.

Tanım 16.2. A ve B, X'in iki altkümesi olsun. Eğer

- $A = \cup_i A_i$, $B = \cup_i B_i$,
- her $0 < i < j \leq n$ için, $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \varnothing$,
- $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ için $g_i(A_i) = B_i$

koşullarını sağlayan $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$, $B_1, \ldots, B_n \subseteq B$ altkümeleri varsa, A ve B kümelerine (G, X)-**eşparçalanabilir** ya da kısaca G-**eşparçalanabilir** denir.

A ile B, G-eşparçalanabilirse bunu $A \sim_G B$ olarak göstereceğiz.

16.3 Banach-Tarski Paradoksu'nun Kanıtı

Kanıtımız birkaç parçadan oluşacak. Öncelikle, birazdan tanımlayacağımız uygun bir D altkümesi için $S^2 \setminus D$'nin SO_3-çelişik olduğunu göstereceğiz. (Buna ***Hausdorff paradoksu*** denir.) Bu paradoksun kanıtı biraz teknik olacakve teoremimizin ana hattını oluşturacak. Bu noktada, Hausdorff Paradoksu'nu kabul ederek Banach-Tarski Paradoksu'nu kanıtlayalım, sonra da geri dönüp boşlukları doldurarak Hausdorff Paradoksu'na bakalım.

Önsav 16.1. *A, B, X'in G-eşparçalanabilen iki altkümesi olsun. Eğer A, G-çelişikse, B de G-çelişiktir.*

Kanıt: Çok kolay; okura bırakılmıştır. □

Teorem 16.2. *Eğer $P \in S^1$ ise, $S^1 \setminus \{P\} \sim_{SO_2(\mathbb{R})} S^1$.*

Kanıt: $\mathbb{R}^2$'yi $\mathbb{C}$'yle, S^1'i de $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ ile gösterelim. Kanıtın kolaylığı açısından P noktamızı $e^0 = (1, 0)$ noktası olarak seçelim.

$$A = \{e^{in} : n = 1, 2, \ldots\}$$

olsun. 2π irrasyonel olduğundan, A'nın bütün elemanları birbirinden farklıdır. g ile düzlemin saat yönünde 1 radyanlık döndürüsünü gösterelim: Her $z \in \mathbb{C}$ için, $g(z) = e^{-i}z$. Elbette $g \in SO_2(\mathbb{R})$.

$$gA = A \cup \{e^0\}$$

olduğuna dikkat ediniz. Şimdi buradan

$$S^1 \setminus \{P\} = ((S^1 \setminus \{P\}) \setminus A) \cup A \sim_{SO_2(\mathbb{R})} (S^1 \setminus \{P\}) \setminus A \cup g(A) = S^1$$

elde edilir, yani $S^1 \setminus \{P\} \sim_{SO2(\mathbb{R})} S^1$. □

Teorem 16.3. *Sayılabilir herhangi bir D altkümesi için $S^2 \setminus D \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2$ olur.*

Kanıt: "Eğer $m \neq n$ ise $p^m(D) \cap p^n(D) = \varnothing$" yani,

$$\text{“eğer } k = 1, 2, \ldots \text{ ise, } p^k(D) \cap D = \varnothing\text{”}$$

özelliğini sağlayan bir $p \in SO_3(\mathbb{R})$ bulduğumuzu varsayalım.

$$C = \bigcup \{p^k(D) : k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

olsun. O zaman

$$S^2 = (S^2 \setminus C) \cup C \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2 \setminus C \cup p(C) = S^2 \setminus D$$

olur ve teoremimiz kanıtlanır.

Yukardaki özelliği sağlayan bir p bulalım. Önce 0'dan geçen ve D'yi kesmeyen herhangi bir ℓ ekseni seçelim. A, ℓ eksenli ve bir $n > 0$ tamsayısı için, $r^n(D) \cap D \neq \varnothing$ özelliğini sağlayan r döndürülerinin kümesi olsun. D sayılabilir sonsuzlukta olduğundan A da sayılabilir sonsuzluktadır. Öte yandan ℓ eksenli döndürüler kümesi sayılamaz sonsuzluktadır ($[0, 2\pi)$ kadardırlar). Şimdi p'yi ℓ eksenli ama A'da olmayan bir döndürü olarak seçelim. □

Teorem 16.4. *$S^2 \setminus D$'nin SO_3-çelişik olduğu sayılabilir bir D kümesi vardır.*

Kanıt: Kanıt asıl teoremden sonra verilecek.

Sonuç 16.5. *S^2, $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir.*

Kanıt: Hausdorff Paradoksu bize $S^2 \setminus D$'nin $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olacağı sayılabilir bir $D \subseteq S^2$ kümesinin olduğunu söylüyor. Teorem 16.3,

$$S^2 \setminus D \sim_{SO_3(\mathbb{R})} S^2$$

diyor. Şimdi Önsav 16.1'i kullanarak, S^2'nin $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olduğunu görürüz. □

Teorem 16.6. *Merkezi O'da olan içi dolu herhangi bir top $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir. $\mathbb{R}^3$'te içi dolu herhangi bir top G_3-çelişiktir.*

Kanıt: Kanıtımızda topun çapının bir önemi olmadığı için T_3 ile çalışabiliriz.

Birinci Adım: $T_3 \setminus \{O\} \sim_{SO_3(\mathbb{R})} T_3$.

Topumuzun içinde olan ve O noktasından geçen bir çember alalım. Bu çemberden O noktasının çıkmış haline C diyelim. O zaman, Teorem 16.2'den dolayı,

$$T_3 \setminus \{O\} = ((T_3 \setminus \{O\}) \setminus C) \cup \sim_{SO_3(\mathbb{R})} (T_3 \setminus \{O\}) \setminus C \cup (C \cup \{O\}) = T_3.$$

olur.

İkinci Adım: $T_3 \setminus \{O\}$, *$SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir.*

S^2'nin herhangi bir parçalanışından,

$$T_3 \setminus \{O\} = \{\alpha p \colon p \in S^2 \text{ ve } 0 < \alpha \leq 1\}$$

eşitliği yardımıyla, $T_3 \setminus \{O\}$ kümesinin bir parçalanışını elde edebiliriz. S^2, $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olduğu için, $T_3 \setminus \{O\}$ de $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir.

Üçüncü Adım: T_3, $SO_3(\mathbb{R})$-*çelişiktir.*
İkinci ve üçüncü adımlardan ve Önsav 16.1'den hemen çıkar.

Teoremin ikinci önermesi için, G_3'te bütün ötelemelerin olduğunu anımsayalım ve topumuzu merkezi O'ya gelecek şekilde öteleyelim. □

Bu noktada bölümün asıl amacına ulaştık ama küçük bir teoremi kanıtını eksik bıraktık. Geri kalan bölümde de bu küçük teoremi kanıtlayacağız. Aslında Banach-Tarski Paradoksu, 100 yıl önce kanıtlanmış o küçük teoremin (Hausdoff Paradoksu'nun) bir sonucudur. Bu yüzden Banach-Tarski Paradoksu'na kimi zaman daha hakkaniyetli olan Hausdorff-Banach-Tarski Paradoksu denir.

Yukarda (G, X) çiftini aşağıdaki üç örnekten biri olarak almıştık:

$$(G, X) = (SO_2(\mathbb{R}), S^1), (SO_3(\mathbb{R}), S^2), (G_3, \mathbb{R}^3).$$

Oysa, yaptıklarımız bir X kümesi üzerine "etki yapan" her G grubu için geçerlidir. Örneğin, bir G grubunun kendi üstüne de etkisi vardır: X'i G'ye eşit alalım ve $g \in G$ ve $x \in X$ için $g(x)$'i gx (grup çarpması) olarak tanımlayalım. (Yazının bu aşamasından sonrası için grup teoriyle aşinalık gerekebilir.)

Tanım. G bir grup olsun. Eğer G, G-çelişikse kısaca buna "G **çelişiktir**" diyeceğiz.

Teorem 16.7. *İki üreteçli bir F serbest grubu (F'nin elemanlarıyla soldan çarpmaya göre) çelişiktir.*

Kanıt: Grubumuza F diyelim. F, α ve β elemanları tarafından üretilsin. $\mathcal{X} \in F$ için, $B(\mathcal{X})$, F'nin, sadeleştirilmiş gösterimi $\mathcal{X}$ ile başlayan elemanları kümesini simgelesin. O zaman,

$$F = \{1\} \cup B(\alpha) \cup B(\alpha^{-1}) \cup B(\beta) \cup B(\beta^{-1})$$

dir. Öte yandan,

$$F = B(\alpha) \cup \alpha B(\alpha^{-1}) \text{ ve } F = B(\beta) \cup \beta B(\beta^{-1})$$

dir. Bu kümelerin ikişerli kesişimleri boşküme olduğundan F'nin çelişik olduğu çıkar.

Buraya kadar bölümün hiçbir yerinde Seçim Aksiyomu'ndan sözetmedik, ama şimdi zamanı geldi. Aşağıdaki teoremin kanıtında Banach-Tarski Paradoksu'nun Seçim Aksiyomu'yla olan ilişkisini göreceğiz.

Önce bir tanım verelim. G grubunun X kümesi üzerine bir etkisi olsun; yani her $g \in G$ ve her $x \in X$ için, E1 ve E2'yi sağlayan bir $g(x) \in X$ elemanı verilmiş olsun. $g(x)$ yerine daha basit olarak gx yazmak bir gelenektir. Eğer (bir tek $x \in X$ için bile) $gx = x$ eşitliği sadece g birim elemanı olduğu zaman sağlanıyorsa, G'nin X üzerine etkisine ***özgür etki*** denir.

Teorem 16.8. *G grubu X kümesini özgürce etkilesin. Eğer G çelişikse, X de (G, X)-çelişiktir.*

Kanıt: G çelişik olduğundan, belli bir n ve m pozitif tamsayıları ve her $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ göstergeçleri için,

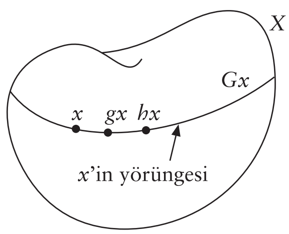
$$G = \bigcup g_i(A_i) = \bigcup h_j(B_j)$$

eşitliklerini sağlayan ve ikişerli kesişimleri boş olan A_i, $B_j \subseteq G$ altkümeleri ve g_i, $h_j \in G$ elemanları vardır.

Bir $x \in X$ için, X'in,

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

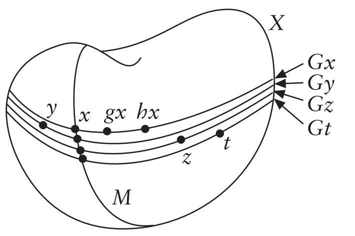
altkümelerine X'in ***yörüngesi*** denir. Her $x \in X$ için, $x \in Gx$ olduğundan, X'in tüm yörüngelerinin bileşimi olarak yazılabileceği açıktır,



yani

$$X = \bigcup_{x \in X} Gx.$$

Kolayca kanıtlanabileceği üzere, eğer iki yörünge birbirine eşit değilse ayrıktırlar, yani kesişimleri boşkümedir.



M, her yörüngeden bir temsilci içerir.

Dolayısıyla yörüngeler X'in bir parçalanışını verir: $X = \sqcup_{x\in X} Gx$.

M, her yörüngeden tek bir eleman (bir temsilci) içeren bir küme olsun. Yani M, her Gx yörüngesiyle ortak tek bir elemanı olan bir kümedir. Seçim Aksiyomu'nu kabul ettiğimizden böyle bir M kümesi vardır: Nitekim, eğer f, $\{Gx : x \in X\}$ kümesinin bir seçim fonksiyonuysa, M'yi f'nin imgesi olarak alabiliriz.

Sav. *$X = \cup_{g\in G} gM$ ve $g \neq h$ ise, $gM \cap hM = \varnothing$.*
Bu savın kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

O zaman elimizde X kümesinin bir parçalanışı var. Şimdi bu parçalanıştan faydalanarak, $i = 1, \ldots, n$ ve $j = 1, \ldots, m$ için,

$$g_i(A_i)(M) = \bigcup \{g_i g(M) : g \in A_i\}$$

ve

$$h_j(B_j)(M) = \bigcup \{h_j h(M) : h \in B_j\}$$

kümelerini oluşturalım. Artık okur

$$X = \bigcup_i g_i(A_i)(M) = \bigcup_j h_j(B_j)(M)$$

eşitliklerini ve ikişerli kesişimlerin boşküme olduğunu kolaylıkla gösterebilir.□

Teorem 16.9. *$SO_3(\mathbb{R})$'de, bir k pozitif doğal sayısı ve hepsi birden 0 olmayan a_i, b_j tamsayıları için*

$$T^{a_1} S^{b_1} T^{a_2} S^{b_2} \cdots T^{a_k} S^{b_k} = 1$$

türünden hiçbir eşitliği sağlamayan T ve S döndürüleri vardır. Bir başka deyişle, derecesi (rank'ı) 2 olan serbest bir grubu geren T ve $S \in SO_3(\mathbb{R})$ vardır.

Kanıt: Kanıt biraz uzun ve teknik olduğundan sadece bu tip döndürülere bir çift örnek vereceğiz. $cos^{-1}(1/3)$ radyanla z-ekseni etrafındaki döndürüyle, yine aynı açıyla x-ekseni etrafındaki döndürü teoremdeki koşulları sağlar. Okura alıştırma. □

Kanıttaki iki döndürünün gerdiği F serbest grubuna bakalım. $F \subset SO_3(\mathbb{R})$ elbette. Şimdi Hausdorff Paradoksu'ndaki D kümemizi seçeceğiz. F'nin birim olmayan elemanlarının S^2'de sabitlediği noktaları alalım ve bunların kümesine D diyelim. (D sayılabilir sonsuzluktadır çünkü $SO_3(\mathbb{R})$'nin birim olmayan her elemanı S^2'de tam iki nokta sabitler.) İşte bu D kümesi teoremdeki kümemiz olacak. Öte yandan F grubu $S^2 \setminus D$ üzerine özgürce etki eder, çünkü sabit noktaları D'nin içine koymuştuk. Bu noktada aklımıza hemen Teorem 16.8 geliyor, ama bize S^2'nin F-çelişik olması değil $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olması gerekiyor. Bir sonraki teoremle bunu da gösterip Hausdorff Paradoksu'nun kanıtını bitireceğiz.

Teorem 16.10. *Eğer G'nin çelişik bir altgrubu varsa, G de çelişiktir.*

Kanıt: H, G üzerine soldan çarpmayla özgürce etki eder. Teorem 16.8'ten dolayı G, H-çelişiktir. H de G'nin altgrubu olduğundan G kendisi çelişiktir. □

Teorem 16.11. ***Hausdorff Paradoksu.*** *$S^2 \setminus D$'nin $SO_3(\mathbb{R})$-çelişik olduğu sayılabilir bir D kümesi vardır.*

Kanıt: D kümemizi yukarıdaki gibi seçelim. O zaman Teorem 16.7 ve 16.8'ten dolayı $S^2 \setminus D$, F-çelişiktir. Öte yandan da Teorem 16.9'dan dolayı $S^2 \setminus D$ kümesi $SO_3(\mathbb{R})$-çelişiktir. □

Hausdorff paradoksuyla beraber, Banach-Tarski paradoksunun kanıtını da tamamladık. Yani artık elimizde bir küre olduktan sonra istediğimiz kadar küre yapabiliriz! Tabii ki işlerin böyle yürümediği kanıttan görülebilir. Kanıtımız Seçim Aksiyomu kabul edildiğinde bir toptan iki tane aynı boyutta top yapılabileceğini söylüyor, nasıl yapılacağına ilişkin bir ipucu ise vermiyor.

Nitekim bir toptan iki top elde etmek için elde edilen sonlu sayıdaki parça, hacmi hesaplanamayan parçalardır. Aksi takdirde, $4\pi r^3/3$ hacimli bir toptan toplam $4\pi r^3/3$ hacmi olan iki top elde edemezdik. $\mathbb{R}^3$'ün "Lebesgue hacmi" hesaplanamayan altkümeleri Seçim Aksiyomu olmadan bulunamaz.

Kısım VI

Kardinaller

17. Cennete Hoşgeldiniz!

Sonlu bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğunu herkes bilir. Örneğin, $\{0, 2, 6, 7, 13\}$ kümesinin 5 elemanı vardır. Bu sayımızın kapak konusunda, sonsuz bir kümenin "eleman sayısı" sözlerini anlamlandırıp sonsuzluğu derecelendireceğiz. Örneğin "doğal sayılar kadar" kesirli sayılar olacak, ama "doğal sayılardan daha fazla" gerçel sayı olacak.

"Bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğunu göreceğiz" demek yerine, "bir kümenin eleman sayısı kavramını (tanımlayarak) yaratacağız" demek daha uygun düşerdi, çünkü sonuç olarak matematiksel kavramları biz zihnimizde yaratıyoruz.

Öte yandan, yarattığımız matematiksel kavramların hissettiklerimizle, gözlemlediklerimizle ve sağduyumuzla uyumlu olmaları gerektiğinden, matematiksel kavramların bizim dışımızda belli bir nesnelliği olmalı, onları rastgele yaratamayız, tanımların hissettiğimiz gerçeklikle uyumlu olmaları gerekir.

O zaman sormamız gereken ilk soru şu: Şimdilik sadece sezgilerimizle algıladığımız (ama birkaç sayfa ötede matematiksel tanımını vereceğimiz) "bir kümenin eleman sayısı" sözlerinden ne anlıyoruz, henüz matematiksel olarak tanımlanmamış olan bu kavram bize ne söylemeli, neyi anlatmaya çalışmalı, kavramın özellikleri ne olmalı?

İlk aşamada bazı kümelerin "sonlu", bazı kümelerinse "sonsuz" olduklarını söyleyebiliriz. Örneğin $\{0, 2, 6, 7, 13\}$ kümesi sonludur ama doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ sonsuzdur.

Sonlu bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğu belli: Kümenin her elemanına 1'den başlayarak ardışık numaralar verilir, verilen en son numara kümenin eleman sayısıdır.

Ya bir kümenin sonsuz olması ne demektir? Sonlu olmaması demektir elbet! Demek ki sonlu kümenin anlamını bilirsek, sonsuz kümenin de anlamını biliriz: Sonlu olmayan kümelere sonsuz denir!

Burada "sonsuz"un bir ad değil bir sıfat olarak kullanıldığına dikkatinizi çekerim.

Peki, sonsuz bir kümenin eleman sayısı ne olabilir? Okurların çoğunun "sonsuz" diyeceğini tahmin ediyorum. Doğru elbet! Sonsuz bir kümede hiç kuşkusuz sonsuz sayıda eleman vardır. Ama biz, ders notlarının bu kısmında, küme hakkında bu yanıttan çok daha fazla bilgi içeren başka bir yanıt bulacağız. Vereceğimiz yanıt, örneğin, doğal sayılardan daha fazla gerçel sayı olduğunu söyleyecek. (Ama ne kadar daha fazla gerçel sayı olduğunu hiçbir zaman bilemeyeceğiz!)

Öte yandan, vereceğimiz yanıt, tamsayıların doğal sayılar kadar olduğunu da söyleyecek, ne bir fazla ne bir eksik! Bu, biraz değil, oldukça şaşırtıcı, hatta biraz da rahatsız edici. Ne de olsa her doğal sayı bir tamsayıdır ama her tamsayı (örneğin -2) bir doğal sayı değildir. Bariz biçimde daha fazla tamsayı varken "doğal sayı kadar tamsayı vardır" demek saçma bulunabilir.

Bu "saçmalığı" ilk olarak Galile farketmiştir. Galile, 0, 1, 4, 9, 16 gibi tamkare sayıları (karekök ve kare alarak) 0, 1, 2, 3, 4 gibi doğal sayılarla eşleştirmiş ve böylece çift sayılarla doğal sayıların "aynı sayıda" olmaları gerektiğini görmüştür. Böylece, Galile sonsuzlukla yapılan aritmetiğin bambaşka türden bir aritmetik olması gerektiği sonucuna varmıştır.

Uzunca bir süre altkümelerin üstkümelerden daha az sayıda elemanı olduğu düşünüldü. İlk kez Öklid tarafından yazılı olarak ifade edilen ve çok da yanlış olmayan bu "parça bütününden küçüktür" düşüncesi, 19'uncu yüzyılın sonuna kadar yaygındı. 19'uncu yüzyılın sonunda Cantor bugün herkes tarafından değeri ve "doğruluğu" kabul edilen ama zamanında büyük tartışmalara neden olan "büyüklük/küçüklük" tanımını verdi.

David Hilbert, Cantor'un bu çalışmalarını, "matematiksel dehanın en zarif ürünlerinden ve saf insan zekâsınının varabileceği en yüce noktalardan biri" olarak tasvir etmiş ve bu yepyeni matematiksel dünyaya "Cantor'un cenneti" adını vermiştir.

18. Sonsuz Bir Kümeden Bir Eleman Atmak

Aralarında bir eşleme olan iki kümeye ***eşlenik*** ya da **denk** kümeler diyeceğiz. Sonlu kümeler ancak aynı sayıda elemana sahiplerse eşlenik olabilirler. Aynı önermeyi sonsuz kümeler için de yapmak geçiyor içimizden ama ne yazık ki sonsuz bir kümenin eleman sayısının ne demek olduğunu bilmiyoruz. Zaten ders notlarının bu kısmının amacı da "sonsuz bir kümenin eleman sayısı" sözlerine anlam kazandırmak ve bunu yukardaki önerme doğru olacak biçimde yapmak. Yavaş yavaş da olsa o aşamaya geliyoruz.

Doğal sayılar kümesi

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

ile

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

pozitif doğal sayılar kümesinin, örneğin,

$$f(n) = n + 1$$

fonksiyonu sayesinde eşlenik oldukları düşünülürse, "sonsuz bir kümenin eleman sayısı" sözlerine anlam kazandırmanın pek de kolay olmayacağı görülür. Ama üstesinden geleceğiz.

Eğer X ve Y kümeleri eşleniklerse, bu, $X \approx Y$ olarak gösterilir. Kümeler arasındaki $\approx$ ilişkisinin şu özellikleri vardır: Her X, Y, Z kümesi için,

- $X \approx X$,
- $X \approx Y$ ise $Y \approx X$,
- $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$.

Bunları [SKK]'da kanıtlamıştık.

Hemen derin bir soru ortaya atalım: Eğer X sonsuz bir kümeyse, X'ten bir eleman atarsak, kalan küme X'e eşlenik olur mu? Yani, bir anlamda, sonsuz bir kümeden bir eleman eksilirse, "eleman sayısı" azalır mı?

Her iki kümede de sonsuz tane eleman var elbette, bundan kimsenin kuşkusu yok. Ama bu, bu iki küme arasında eşleme var anlamına gelmez. Örneğin,

[SKK]'da $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme olmadığını gördük. Yani iki sonsuz küme arasında bir eşleme olmayabilir. Öte yandan, eğer kümelerin arasındaki fark tek bir elemansa, o zaman kümeler arasında bir eşleme olacağını umabiliriz.

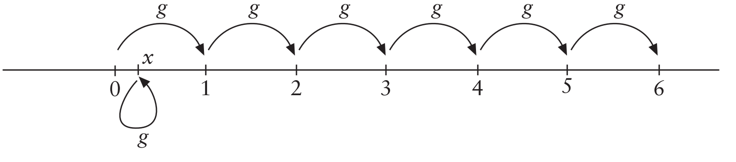
Örnek olarak gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi ele alalım. $\mathbb{R}$'den 0'ı atalım. Bu iki küme birbirine bayağı yakın, farkı tek bir eleman yaratıyor. Bu iki küme arasında bir eşleme var mıdır? Yani,

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olur mu? Genel sorunun yanıtını vermeden önce bu sorunun yanıtını verelim. Evet! $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eşleniktirler. İşte böyle bir eşleme:

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{eğer } x \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ x & \text{eğer } x \notin \mathbb{N} \text{ ise} \end{cases}$$

Bu fonksiyon, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesine giden bir eşlemedir.



Benzer şekilde $\mathbb{R}^{>0}$ ile $\mathbb{R}^{\geq 0}$ arasında da bir eşleme bulabiliriz elbet.

Genel sorumuza geri dönelim.

Soru. *X sonsuz bir küme olsun. $x \in X$ olsun. X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme var mıdır?*

$X = \mathbb{R}$ ve $x = 0$ iken yanıtın olumlu olduğunu gördük. Ama olumlu yanıtımız gerçel sayıları ve bu sayılarla yapılan işlemleri kullanıyordu. Oysa herhangi bir X kümesinde göze çarpan doğal bir işlem yoktur.

Aynı soruyu, "X sonsuz bir kümeyse ve $x \in X$ ise, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme **olmalı** mıdır?" şeklinde de sorabilirdik, çünkü sorumuz özünde bir inanç meselesidir, çünkü matematikte teoremler, kanıtlanmadan kabul edilen aksiyomlar sayesinde kanıtlanırlar ve hangi aksiyomu kabul edip etmemek gerektiği, son analizde, neyin "doğru" olup olmadığıyla ilgili felsefi, hatta inanca göre değişen bir sorudur.

Baklayı ağzımızdan çıkaralım. Yanıt (matematiksel anlamda) olumludur. Eğer X sonsuz bir kümeyse ve $x \in X$ ise, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme **var**dır. Ancak böyle bir eşlemenin varlığının kanıtı, herkesin her zaman doğal bulmadığı ama bugün artık matematikte tartışmasız kabul edilen Seçim Aksiyomu'nu kullanır.

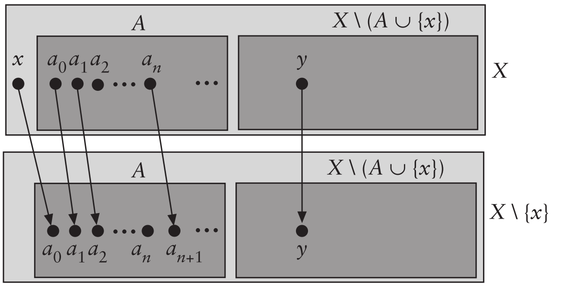
Kanıtın püf noktası aşağıdaki masum görünüşlü önsavda gizlidir:

Önsav 18.1. *Her sonsuz küme sayılabilir sonsuzlukta bir altküme barındırır.*

Kanıt Yerine: Geçmişte kanıtladığımız iki güçlü teoremle bu önsavı bu aşamada kanıtlamak işten bile değildir. Ancak geçmişe bu kadar erken referans vermemek için önsavın kanıtını Sonuç **??**'ya erteliyoruz. Kanıtın ipucunu fısıldayalım: Kanıt, her kümenin iyisıralanabileceği olgusunu kullanır.

Teorem 18.2. *Eğer X sonsuz bir kümeyse ve $x \in X$ ise, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme vardır.*

Kanıt: $X \setminus \{x\}$ kümesi sonsuz olduğundan, yukardaki önsava göre $X \setminus \{x\}$ kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir altkümesi vardır. Bu altkümeye A diyelim ve A'nın elemanlarını



$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olarak numaralandıralım. Şimdi, X ile $X \setminus \{x\}$ kümeleri arasındaki eşleme yukardaki şekildeki gibi bulunabilir. $f : X \to X \setminus \{x\}$ fonksiyonunu,

$$f(z) = \begin{cases} a_0 & \text{eğer } z = x \text{ ise} \\ a_{n+1} & \text{eğer } z = a_n \text{ ise} \\ z & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. f'nin bir eşleme olduğu apaçık ortada. $\square$

Sonuç 18.3. *Eğer X sonsuz bir kümeyse, X ile $X \cup \{x\}$ kümeleri arasında bir eşleme vardır.*

Kanıt: $Y = X \cup \{x\}$ olsun. O zaman $X = Y \setminus \{x\}$ olur. Yukardaki teoreme göre X ve Y, yani X ile $X \cup \{x\}$ kümeleri eşleniktirler. $\square$

19. Kardinal Sayıları, Tanım ve İlk Özellikler

19.1 Kardinal Tanımı

Her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlamıştık (Teorem 11.1).

Özel iyisıralı kümeler olan ordinalleri de Bölüm 4.2'de tanımlamıştık. Ordinallerde iyisıralama $\alpha \in \beta$ ilişkisiyle verilir, yani bir ordinalde $<$ sıralaması,

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$$

olarak tanımlanır. Ordinalin elemanları da ordinaldirler (Teorem 4.7).

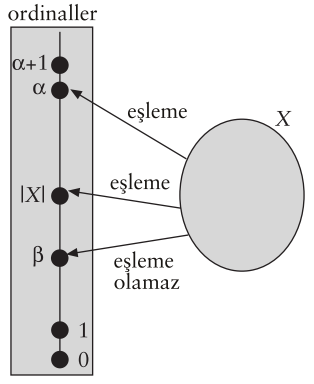
Her iyisıralı kümenin bir ve bir tek ordinale eşyapısal olduğunu Teorem 5.1'de kanıtlamıştık.

Demek ki her küme en az bir ordinale eşleniktir, yani eğer X bir kümeyse X'le arasında bir eşleme olan en az bir ordinal vardır. X'le arasında bir eşleme bulunan ordinallerden birine α dersek,

$$\{\beta \leq \alpha : X\text{'le } \beta \text{ arasında bir eşleme var, yani } X \approx \beta\}$$

kümesi, α ordinalinin boş olmayan bir altkümesidir. Demek ki en küçük bir elemanı vardır. Bu ordinali $|X|$ olarak gösterelim.

Eğer β ve γ iki ordinalse, ya $\beta < \gamma$, ya $\gamma < \beta$ ya da $\beta = \gamma$ olur. (Teorem 4.10). Dolayısıyla yukarda tanımlanan $|X|$, seçilen α'dan bağımsızdır ve sadece X'e göre değişir. Demek ki $|X|$, X'le arasında bir eşleme bulunan en küçük ordinaldir.



X kümesiyle arasında eşleme bulunan bu en küçük $|X|$ ordinaline X'in ***kardinali***, ***kardinal sayısı***, ***kardinalitesi*** ya da ***eleman sayısı*** denir.

$|X|$'le $|X|$'ten daha küçük bir ordinal arasında bir eşleme olamaz elbette. (Yoksa X'le bu daha küçük ordinal arasında bir eşleme olurdu.) Bir ***kardinal sayıyı***, kendisinden daha küçük bir ordinalle arasında eşleme olmayan ordinal olarak tanımlayalım. Her X kümesi için, $|X|$ bir kardinal sayıdır.

Her kardinal sayısının kardinali kendisine eşittir elbette, yani $||X|| = |X|$.

Kardinaller özel ordinaller olduklarından, ordinallerin sıralamasıyla sıralanırlar.

Alıştırmalar.

19.1. $|X| = \bigcap\{\alpha : \alpha \text{ ordinal ve } X \approx \alpha\}$ eşitliğini kanıtlayın.

İlk kardinal sayılarımızı bulalım:

Teorem 19.1. *Her doğal sayı bir kardinal sayısıdır.*

Kanıt: Bir n doğal sayısıyla kendisinden küçük bir m doğal sayısı arasında bir eşleme olamayacağını kanıtlamalıyız. Bu çok bariz önermeyi kanıtlayabilmek için doğal sayının tanımınabaşvurmamız gerekir elbet. Bu tanımı [Sİ]'de vermiştik. O ders notlarında doğal sayıları teker teker değil, topunu birden, yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tanımlamıştık. Ardından, doğal sayıları $\mathbb{N}$'nin elemanları olarak tanımlamıştık. Okurun tanımı bildiğini varsayıyoruz. Ancak

$$0 = \varnothing \text{ ve } n + 1 = n \cup \{n\}$$

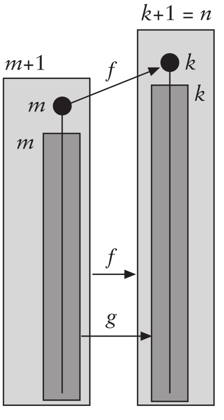
tanımlarını ve her n doğal sayısının kendisinden küçük elemanlar kümesi olduğunu anımsatalım.

"Her n ve m doğal sayısı için, $m < n$ ise, n ile m arasında bir eşleme yoktur" önermesini m üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız.

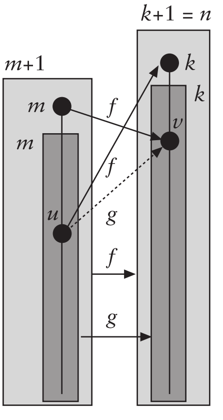
Eğer $m = 0 = \varnothing$ ise, m'den n'ye giden bir fonksiyonun imgesi ancak $\varnothing$ olabilir, dolayısıyla $n \neq 0 = \varnothing$ olduğundan, böyle bir fonksiyon örten olamaz.

Önermenin m için doğru olduğunu varsayıp önermeyi $m+1$ için kanıtlayalım. $m+1 < n$ olsun ve $m+1$'den n'ye giden bir f eşlemesi olduğunu varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. n, 0'dan büyük olmak zorunda olduğundan, bir k doğal sayısı için, $n = k+1$ olmalı. $u < m+1$ ve $v < n$ sayılarını $f(u) = k$ ve $f(m) = v$ eşitlikleriyle tanımlayalım.

Aşağıda resimlediğimiz iki değişik şık var.



Birinci Şık: $f(m) = k$.



İkinci Şık: $f(m) \neq k$.

Birinci Şık: $u = m$ **ise**. Bu durumda, f, m'den k'ye giden bir g eşlemesine yol açar: $g = f_{|m}$. Ama tümevarım varsayımı bunu yasaklar.

İkinci Şık: $u \neq m$ **ise**. Bu durumda, $g : m \to k$ fonksiyonunu,

$$g(i) = \begin{cases} f\ \ (i) \text{ eğer } i \neq u \text{ ise} \\ v \quad \text{eğer } i = u \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu da m ile k arasında bir eşlemedir ve bize gereken çelişkidir. □

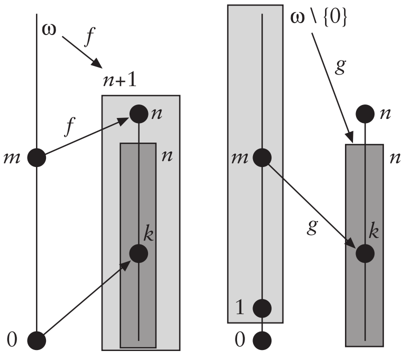
Şimdi ilk sonsuz kardinal sayımızı bulalım:

Teorem 19.2. *ω bir kardinal sayısıdır.*

Kanıt: ω'nın kendisinden küçük bir ordinale, yani bir n doğal sayısına "eşlenik" olamayacağını kanıtlamamız gerekiyor. (Bundan böyle, aralarında eşleme olan kümelere ***eşlenik kümeler*** diyeceğiz.) Bunu n üzerine tümevarımla yapacağız.

ω'nın sonsuz olduğu, n'nin ise sonlu olduğu, dolayısıyla aralarında bir eşleme olamayacağı bariz de olsa, bu önermenin matematiksel olarak kanıtlanması gerekiyor.

$0 = \emptyset$ olduğundan, ω, 0 ile eşlenik olamaz. ω'nın n ile eşlenik olmadığını varsayıp, ω'nın $n+1$ ile eşlenik olamayacağını kanıtlayalım. Çelişki elde etmek amacıyla ω'dan $n+1$ sayısına giden bir f eşlemesi ele alalım. $f(0) = k$ ve $f(m) = n$ olsun. (Bkz. bir yukardaki şekil.)



Şimdi

$$g : \omega \setminus \{0\} \to n$$

fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{eğer } i \neq m \text{ ise} \\ v & \text{eğer } i = m \text{ ise} \end{cases}$$

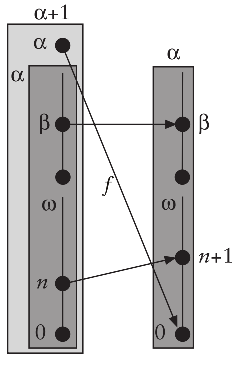
f bir eşleme olduğundan, g de bir eşlemedir elbet. Aşağıdaki resim bunun bir kanıtı! Şimdi

$$h : \omega \to n$$

fonksiyonu

$$h(x) = g(x+1)$$

olarak tanımlansın. g bir eşleme olduğundan h de bir eşlemedir. Bu, tümevarım varsayımımızla çelişir. $\square$



Her ordinal bir kardinal olamaz, örneğin $|\omega + 1| = \omega$ olduğundan, $\omega + 1$ bir kardinal olamaz. Aslında $\alpha + 1$ biçiminde yazılan hiçbir sonsuz ordinal bir kardinal olamaz:

Teorem 19.3. *Sonsuz bir kardinal limit ordinal olmak zorundadır.*

Kanıt: α, herhangi bir sonsuz ordinal olsun. $|\alpha+1| = |\alpha|$ eşitliğini kanıtlayacağız. α, sonsuz olduğundan, $\omega \le \alpha$, yani $\omega \subseteq \alpha$, hatta ω, α'nın bir başlangıç dilimi. Şimdi

$$f : \alpha + 1 \to \alpha$$

fonksiyonunu yandaki resimdeki gibi ve aşağıdaki formülle tanımlayalım:

$$f(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \beta = \alpha \text{ ise} \\ \beta & \text{eğer } \omega \le \beta < \alpha \text{ ise} \\ \beta & +1 \text{ eğer } \beta < \omega \text{ ise} \end{cases}$$

f bir eşlemedir elbet. □

Ama bunun tersi doğru değildir, örneğin ω^2 bir limit ordinaldir ama

$$|\omega^2| = \omega$$

olduğundan (neden?) bir limit ordinal olan ω^2 bir kardinal değildir.

Teorem 19.4. *Bir kardinal kümesinin bileşimi bir kardinaldir. Yani eğer $(\kappa_i)_{i\in I}$ bir kardinal ailesiyse, $|\cup_{i\in I}\kappa_i| = \cup_{i\in I}\kappa_i$.*

Kanıt: K bir kardinaller kümesi ve $\kappa = \cup K = \cup_{\alpha\in K}\alpha$ olsun. κ bir ordinaldir [Olgu **??**'ten hemen sonrası]. $\beta < \kappa$ herhangi bir ordinal olsun. Eğer K'nın her α kardinali için, $\alpha \le \beta$ olsaydı, o zaman $\alpha \subseteq \beta$ olurdu ve $\kappa = \cup_{\alpha\in K}\alpha \subseteq \beta$, yani $\kappa \le \beta$ elde ederdik, bir çelişki. Demek ki bir $\alpha \in K$ için $\beta < \alpha$. Bu da $|\beta| < \alpha \le \kappa$ demektir. Dolayısıyla κ bir kardinaldir.

19.2 Üç Sonuç ve Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi

Teorem 19.5. *X ve Y iki küme olsun. Ya X'ten Y'ye ya da Y'den X'e giden birebir bir fonksiyon vardır.*

Kanıt: X'le $|X|$ kardinali arasında, Y ile $|Y|$ kardinali arasında birer eşleme olduğundan, önermeyi kardinal sayıları için kanıtlamak yeterli. Ama kardinal sayıları birer ordinaldir ve herhangi iki ordinalden biri diğerinin altkümesidir (hatta bir başlangıç dilimidir, Sonuç 4.16).

Teorem 19.6. *X ve Y boş olmayan iki küme olsun. Ya X'ten Y'ye ya da Y'den X'e giden örten bir fonksiyon vardır.*

Kanıt: Önermeyi gene α ve β ordinal sayıları için kanıtlamak yeterli. $\alpha \subseteq \beta$ olsun (Sonuç **??**). $\alpha \neq 0$ olduğundan, $0 \in \alpha$. Şimdi,

$$f(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{eğer } \gamma < \alpha \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } \gamma \geq \alpha \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanmış $f : \beta \to \alpha$ fonksiyonu örtendir. □

Teorem 19.7. *X ve Y kümeleri için aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*

i. $|X| \leq |Y|$.
ii. *X'ten Y'ye giden birebir bir fonksiyon var.*
iii. *Y'den X'e giden örten bir fonksiyon var.*

Kanıt: ($i \Rightarrow ii$) ve ($i \Rightarrow iii$) yukardaki kanıtlardan çıkar.

($ii \Rightarrow i$)X ve Y'nin birer kardinal olduklarını varsayabiliriz. Eğer $Y \leq X$ ise, Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi'ne göre [SKK], Y'yle X arasında bir eşleme vardır ve bu da önce $X = Y$ eşitliğini, bu da haliyle $X \leq Y$ eşitsizliğini doğurur. Aksi halde $X < Y$.

($iii \Rightarrow ii$) Y'den X'e giden örten fonksiyona f diyelim.g,

$$\{f^{-1}(x) : x \in X\}$$

kümesinin bir seçim fonksiyonu olsun. Demek ki

$$g(f^{-1}(x)) \in f^{-1}(x) \subseteq Y$$

ve

$$f(g(f^{-1}(x))) = x.$$

Şimdi $h : X \to Y$ fonksiyonu

$$h(x) = g(f^{-1}(x))$$

olarak tanımlansın. $f(h(x)) = f(g(f^{-1}(x))) = x$ eşitliğinden dolayı h birebirdir. □

Teorem 19.8 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *X ve Y iki küme olsun. Eğer X'ten Y'ye ve Y'den X'e giden birebir fonksiyonlar varsa, X ile Y arasında bir eşleme vardır.*

Kanıt: Bu teoremin iki farklı kanıtını vereceğiz, birincisi Seçim Aksiyomu'nu kullanacak, ikincisi kullanmayacak.

Birinci Kanıt: $|X| \leq |Y| \leq |X|$ olduğundan $|X| = |Y|$. Demek ki X ile Y arasında bir eşleme vardır. (Her kümenin bir kardinalitesi olduğu ancak Seçim Aksiyomu'yla kanıtlanabilir, yani bu kanıtta Seçim Aksiyomu kullanılmıştır.)

İkinci Kanıt: Kümelerimize X ve Y yerine E ve K diyelim. E'yi erkekler, K'yı kadınlar kümesi olarak düşünelim. E'den K'ya giden birebir fonksiyona *kız*, K'dan E'ye giden birebir fonksiyona *ogul* adını verelim. Eğer $e \in E$ ve $k \in K$ için $kız(e) = k$ oluyorsa, bunu, "k, e'nın kızı" olarak yorumlayalım; eğer $ogul(k) = e$ oluyorsa, bunu, "e, k'nın oğlu" olarak yorumlayalım. Bu tuhaf yoruma göre her erkeğin tek bir kızı ve her kadının tek oğlu var. Bir kadının ya da bir erkeğin ataları tahmin ettiğiniz gibi tanımlanır, mesela k kadınının babasının annesinin babasının annesi k'nın atalarından biridir; k'nın babası da k'nın atalarından biridir. Erkekler için de aynı tanımı yapıyoruz. Ayrıca herkesin kendi atası olduğunu varsayacağız. Tabii bazılarının kendilerinden başka atası olmayacak. Kendisinden başka atası olmayan kadınlara, yani babası olmayan kadınlara Havva adını vereceğiz. Bir erkeğin ya da kadının ataları arasında bir Havva olabilir ya da olmayabilir. (Adem tanımına ihtiyacımız olmayacak, ama tahmin ettiğiniz gibi annesi olmayan erkeklere Adem deseydik o zaman ataları arasında Havva ve Adem olayanların ecdadı ta sonsuzdan geliyor olacaktı!) Şu tanımları yapalım:

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & \text{Ataları arasında Havva olmayan erkekler kümesi} \\ E_2 & = & \text{Ataları arasında Havva olan erkekler kümesi} \\ K_1 & = & \text{Ataları arasında Havva olmayan kadınlar kümesi} \\ K_2 & = & \text{Ataları arasında Havva olan kadınlar kümesi} \end{array}$$

Elbette $E = E_1 \sqcup E_2$ ve $K = K_1 \sqcup K_2$ olur.

Eğer $e \in E_1$ ise elbette $kız(e) \in K_1$ olur, ne de olsa e'nin ataları $kız(e)$'nin de atalarıdır. Demek ki *kız* fonksiyonu E_1'i K_1'e götürüyor. Şimdi $k \in K_1$ olsun. O zaman k bir Havva olamaz. Demek ki bir babası var. k'nın babasına e diyelim, yani $kız(e) = k$ olsun. Elbette $e \in E_1$ olmalı, çünkü e'nin ataları arasında bir Havva olsaydı, o Havva k'nın da atası olurdu. Buradan *kız* fonksiyonunun E_1'e kısıtlanışının E_1 ile K_1 arasında bir eşleme olduğu çıkar.

Şimdi $k \in K_2$ olsun. Elbette $ogul(k) \in E_2$ olmalı, çünkü k'nin ataları $ogul(k)$'nın da atalarıdır. Şimdi $e \in E_2$ olsun. e kadın olmadığından, kendisi bir Havva olamaz, ama ataları arasında bir Havva var; demek ki e'nin bir annesi olmalı, o anneye k diyelim: $ogul(k) = e$. Ama e'nin ataları arasında Havva olduğundan k'nın da ataları arasında Havva vardır (hatta k'nın kendisi Havva olabilir, ama ne gam!) Demek ki $k \in K_2$. Böylece *ogul* fonksiyonunun K_2'ye kısıtlanışının K_2 ile E_2 arasında bir eşleme olduğunu gösterdik.

Kanıtımız bitmiştir. □

19.3 ω_0 ve ω_1 Kardinalleri

ω yerine bazen ω_0 yazılır. ω_0 elbette en küçük sonsuz kardinal sayısıdır. "Elbette" dedik ama bu, Seçim Aksiyomu olmadan kanıtlanamaz. (Bkz. Sonuç **??**.)

ω_0'dan daha büyük bir kardinal sayısı var mıdır?

Sadece ω_0'dan değil, her kardinal sayısından daha büyük bir kardinal sayısı vardır. Eğer α bir kardinal sayısıysa ve $\wp(\alpha)$, α'nın altkümeleri kümesiyse, $|\wp(\alpha)|$, α'dan daha büyük bir kardinal sayısıdır, çünkü α'dan $\wp(\alpha)$'ya giden birebir bir fonksiyon vardır (örneğin, $a \mapsto \{a\}$ fonksiyonu) ama bilindiği üzere α'dan $\wp(\alpha)$'ya giden örten bir fonksiyon yoktur [SKK]. Demek ki,Teorem 19.7'ye göre, $\alpha < |\wp(\alpha)|$.

Madem ki α kardinal sayısından daha büyük bir kardinal sayısı vardır, α'dan sadece "bir boy büyük" bir kardinal sayısı da vardır; yani α'dan büyük kardinal sayılarının en küçüğü vardır. Nitekim, boş olmayan

$$\{\beta \leq |\wp(\alpha)| : \alpha < \beta \text{ ve } \beta \text{ kardinal}\}$$

ordinal kümesinin en küçük elemanı işte tam bu elemandır. α'dan sadece bir boy büyük olan kardinal sayısını α^+ olarak gösterelim. Demek ki

$$\alpha < \alpha^+ \leq |\wp(\alpha)|$$

eşitsizlikleri ve

eğer β kardinal sayısı $\alpha < \beta \leq \alpha^+$ eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman $\beta = \alpha^+$

önermesi doğrudur.

ω_0'dan bir boy büyük kardinal sayı ω_1 olarak yazılır: $\omega_1 = \omega_0^+$.

ω_1 elbette, sayılamaz sonsuzluktaki en küçük ordinaldir, dolayısıyla (eleman sayısı) sayılabilir sonsuzlukta olan ordinallerin kümesidir:

$$\omega_1 = \{\alpha : \alpha \text{ ordinal ve } |\alpha| \leq \omega\}.$$

Bundan da sayılamaz sonsuzlukta sayılabilir ordinal olduğu çıkar (yoksa ω_1 sayılabilir sonsuzlukta olurdu.)

2ω, 3ω, 4ω gibi ordinallerin bileşimi olan ω^ω ve ω^ω, ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$ gibi ordinallerin bileşimi olan ε_0 ordinali ω_1'in elemanıdır.

Alıştırmalar.

19.2. ω_1'in sayılabilir sonsuzluktaki her altkümesinin üstsınırı vardır. (Bu özelliği olan sıralı bir küme bulmak pek kolay değildir.)

20. Kardinal Sayılarıyla İşlemler

Bu bölümde, α ve β kardinal sayıları için, örneğin, $\alpha+\beta$ adını vereceğimiz bir kardinal sayısını, "α ve β'nın toplamı"nı tanımlayacağız.

Aslında amaç iki kardinalin toplamını tanımlamak değildir, olamaz da, çünkü en yaygın ve saygın matematiksel tanımlar bir gereksinim sonucu ve doğal olarak ortaya çıkarlar, oysa iki kardinalin toplamı diye bir işleme gereksinim duymadık şimdiye dek. Durduk yerde yapay tanım yapmayalım.

Zaten her kardinal sayı bir ordinal sayı olduğundan ve ordinal sayıları toplamayı bildiğimizden, durduk yerde kardinal sayıları yeniden toplamanın bir anlamı olamaz.

Amaç, iki kardinal sayıyı toplamaktan ziyade, iki kümenin bileşiminin eleman sayısını bulmaktır, yani A ve B kümeleri verilmişse, $A \cup B$ kümesinin "eleman sayısı" olarak algıladığımız $|A \cup B|$ kardinal sayısını $|A|$ ve $|B|$ kardinalleri cinsinden bulmaktır. Bu da son derece anlaşılır ve sempatik bir amaçtır.

Eğer A ve B kümeleri sonluysa, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı $A \cap B$ kesişimine göre değişir elbet; genel formül şöyle:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$A \cap B$ kümesi ne kadar küçükse $A \cup B$ kümesi o kadar büyük olur. Sonuç, $\max\{|A|, |B|\}$ ile $|A|+|B|$ arasında değişir. Örneğin A'nın 5, B'nin 7 elemanı varsa, bileşimin en az 7 (A'nın B'nin altkümesi olduğu durum), en çok 12 (A ve B'nin ayrık oldukları durum) tane elemanı vardır.

İlginçtir, birazdan kantlayacağımız üzere, eğer A ve B kümelerinden en az biri sonsuzsa, $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı $A \cap B$ kesişimine göre değişmez; kesişim ne olursa olsun hep aynı kardinal sayısı, $\max\{|A|, |B|\}$ bulunur. Bunu şimdilik kabul edelim. O zaman, sonlu durumla benzerlik kurarak, $|A|$ ya da $|B|$ kardinallerinin en az biri sonsuzsa,

"$|A| + |B| = \max\{|A|, |B|\}$ eşitliği sağlanır" diyebilmek istiyoruz. Kardinal toplamasını bu eşitlik sağlanacak biçimde biçimsel olarak şöyle tanımlayabilirdik:

$$|A| + |B| = \begin{cases} \text{bilinen toplam} & \text{eğer } A \text{ ve } B \text{ sonluysa} \\ \max\{|A|, |B|\} & \text{eğer } A \text{ ya da } B \text{ sonsuzsa} \end{cases}$$

Ama bu yapay yolu tercih etmeyeceğiz. Daha doğal bir yol izlemek istiyoruz.

Kardinal toplamasıyla ordinal toplamasının karışmasını istemiyorsak, yukarda + yerine $\oplus$ işaretini kullanabilirdik. Ama bunu pek sık yapmayacağız. Yazılımı karmaşıklaştırmaktansa okurun kafasının karıştırmayı tercih ederiz!

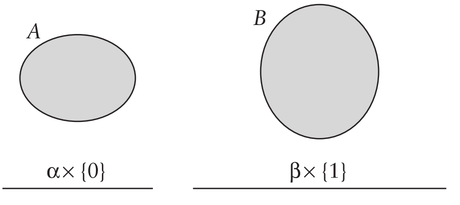
Önsav 20.1. *Eğer A ve B ayrık kümelerse ve en az biri sonsuzsa, o zaman $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$ olur.*

Kanıt: Sonuç 18.3'ten dolayı A ve B'nin sonsuz olduklarını varsayabiliriz. Ayrıca $|A| \leq |B|$ eşitsizliğini de varsayabiliriz. Demek ki, $|A \cup B| = |B|$ eşitliğini kanıtlamalıyız.

$|A| = \alpha$ ve $|B| = \beta$ olsun.

$|A| = \alpha = |\alpha \times \{0\}|$ ve $|B| = \beta = |\beta \times \{1\}|$ eşitliklerinden ve $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin ayrık olmalarından dolayı, A yerine $\alpha \times \{0\}$ ve B yerine $\beta \times \{1\}$ alabiliriz. Demek ki $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesiyle β arasında bir eşleme bulmalıyız.

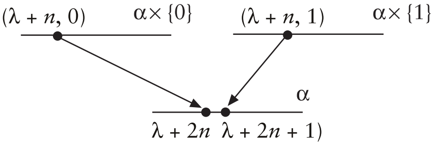
Önce $\alpha = \beta$ özel durumunu ele alalım. Teorem 5.10'a göre, her $\gamma < \alpha$, bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $\lambda + n$



olarak tek bir biçimde yazılır. Bu yazılımı kullanarak

$$(\alpha \times \{0\}) \cup (\alpha \times \{1\})$$

kümesiyle α arasında bir eşleme bulacağız. $\alpha \times \{0\}$'ın, bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $(\lambda + n, 0)$ olarak yazılan bir elemanını α'nın $\lambda + 2n$ elemanına ve $\alpha \times \{1\}$'in, bir λ limit ordinali ve bir n doğal sayısı için $(\lambda + n, 1)$ olarak yazılan bir elemanını α'nın $\lambda + 2n + 1$ elemanına yollayalım.



Böylece $(\alpha \times \{0\}) \cup (\alpha \times \{1\})$ kümesiyle α arasındaki aradığımız eşlemeyi buluruz. Bu fonksiyonun görüntü kümesinin α olduğu, bir kardinal olan α'nın limit ordinal olmasından çıkar (Teorem 19.3). Örten ve birebir olduğu çok bariz.

Yukarda yaptığımızın tek ve çift ordinalleri tanımlamak olduğuna dikkatinizi çekerim. Ayrıca sonsuz bir α ordinali için, $|\alpha + \alpha| = |\alpha|$ eşitliği, yani $\alpha + \alpha \approx \alpha$ denkliği kanıtlandı. Bunu aklımızda tutalım, bu bir.

Şimdi $\alpha < \beta$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman Önsav 5.6'e göre bir γ ordinali için $\beta = \alpha + \gamma$ eşitliği doğrudur. Bu iki.

Ordinallerin dilinde ifade edecek olursak, ordinal toplamasının tanımından dolayı, $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesiyle β arasında bir eşleme bulmak demek, $\alpha + \beta$ ordinaliyle β arasında bir eşleme bulmak demektir. Bu da üç.

Yukardaki bir, iki ve üç sayesinde kanıtımızı tamamlayabiliriz:

$$\alpha + \beta = \alpha + (\alpha + \gamma) = (\alpha + \alpha) + \gamma \approx \alpha + \gamma = \beta.$$

Önsav kanıtlanmıştır. □

Şimdi ***kardinal toplamasını*** tanımlayabiliriz. Kardinal toplaması ordinal toplamasından değişik olduğundan, kardinalleri toplarken çok kısa bir süre $+$ yerine $\oplus$ yazmayı yeğleyeceğiz:

Eğer α ve β birer kardinal sayıysa, $\alpha \oplus \beta$, kardinaliteleri α ve β olan iki ayrık kümenin kardinalitesidir. Eğer α ve β sonlu kardinal sayılarıysa, yani birer doğal sayılarsa, bu tanım bize bildiğimiz doğal sayı toplamasını verir. Ama ikisinden beri sonsuzsa, o zaman hep $\max\{\alpha, \beta\}$ elde ederiz:

$$\alpha \oplus \beta = \begin{cases} \text{bilinen toplam} & \text{eğer } \alpha \text{ ve } \beta \text{ sonluysa} \\ \max\{\alpha, \beta\} & \text{eğer } \alpha \text{ ya da } \beta \text{ sonsuzsa} \end{cases}$$

Artık $\oplus$ yerine $+$ yazacağız. Umarız bu yazılım bir karışıklığa meydan vermez.

Bu tanımın sonucu olarak, kardinaller için derhal şu cebirsel eşitlikler elde edilir:

Önsav 20.2. *α, β ve γ birer kardinalse, o zaman,*

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = \beta + \alpha, \\ &\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \\ &\alpha \leq \beta \textit{ ise } \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \end{aligned}$$

olur. □

"Teorem" adına biraz daha yakışan bir önerme (çok daha yakışanlarını göreceğiz):

Teorem 20.3. *A ve B, en az biri sonsuz iki kümeyse,*

$$|A \cup B| = |A| + |B| = \max\{|A|,\ |B|\}$$

olur.

Kanıt: $|B| \leq |A|$ olsun. O zaman

$$|A| \leq |A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A| = \max |A|,\ |B \setminus A| = |A|.$$

Demek ki her yerde eşitlik var. (En son eşitlikte Önsav 20.1'i kullandık.) □

Sonuç 20.4. *A ve B iki küme olsun. Eğer A sonsuzsa ve $|B| < |A|$ ise*

$$|A \setminus B| = |A|$$

olur.

Kanıt: B yerine $A \cap B$ alarak, B'nin A'nın bir altkümesi olduğunu varsayabiliriz. O zaman,

$$|B| \neq |A| = |(A \setminus B) \cup B| = |A \setminus B| + |B| = \max\{|A \setminus B|, |B|\}.$$

Demek ki $|A \setminus B| = |A|$. □

20.1 Kardinal Sayılarının Çarpımları

Eğer α ve β iki kardinal sayıysa, α ve β'nın çarpımı $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımının kardinalitesi olarak tanımlanır:

$$\alpha \odot \beta = |\alpha \times \beta|.$$

Çarpmada, ordinal çarpmasıyla karışmasın diye $\odot$ imgesini kullanıyoruz. Nitekim, ordinal çarpmasında

$$\omega\omega = \omega^2 \neq \omega$$

olur (Önsav 5.17) ama kardinal çarpmasında

$$\omega \odot \omega = |\omega \times \omega| = \omega$$

olur çünkü sayılabilir sonsuzluktaki iki kümenin kartezyen çarpımı sayılabilir sonsuzluktadır. Biz gene de bu bölümlerde sadece kardinal çarpmasından sözedeceğimizden, $\alpha \odot \beta$ yerine, kolaylık olsun diye, kısaca $\alpha\beta$ yazacağız. Herhangi bir karışıklık olasılığı durumunda, ordinal toplamından mı yoksa kardinal toplamından mı sözettiğimizi özellikle belirteceğiz.

Eğer α ve β birer doğal sayıysa, bu, aynen ilkokullu yıllarımızda kâbuslarımıza giren çarpmadır. Bunun kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Önsav 20.5. *Her α, β, γ ve δ kardinal sayıları için,*
i. $\alpha 0 = 0$, $\alpha 1 = \alpha$,
ii. $\alpha\beta = \beta\alpha$,
iii. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,
iv. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,
v. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\gamma \leq \delta$ *ise* $\alpha\gamma \leq \beta\delta$.

Kanıt: Bunların her biri işlemlerin tanımından doğrudan çıkar ve kanıtları son derece basittir, dolayısıyla okura bırakılmışlardır, ama kanıtı çok daha uzun olan bir sonraki teoremden de çıkarlar. □

Bir sonraki uzun kanıtlı teorem, aslında eğer α ve β'dan biri sonsuzsa toplamadan çok değişik bir kavram tanımlamadığımızı gösterecek:

Teorem 20.6. *Hiçbiri* 0 *olmayan α ve β kardinallerinden en az biri sonsuzsa, $\alpha\beta = \max\{\alpha, \beta\}$'dır.*

Kanıt: α'nın sonsuz olduğunu varsayalım. Eğer β sonluysa,

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+1) &= |\alpha \times (\beta+1)| = |\alpha \times S(\beta)| \\ &= |\alpha \times (\beta \cup \{\beta\})| = |(\alpha \times \beta) \cup (\alpha \times \{\beta\})| \\ &= |\alpha \times \beta| + |\alpha \times \{\beta\}| = \alpha\beta + \alpha\end{aligned}$$

eşitliğinden, β üzerine tümevarımla $\beta \neq 0$ için $\alpha\beta = \alpha$ eşitliği kolaylıkla kanıtlanr. Önsav 20.5.iv varsayılırsa kanıt daha da sadeleşir:

$$\alpha(\beta+1) = \alpha\beta + \alpha = \alpha + \alpha = \alpha.$$

(Son eşitlik Teorem 20.3'ten.)

Şimdi her ikisinin birden sonsuz olduğunu varsayalım. Kanıta başlamadan önce, eski sonuçlarımıza bir göz atalım. [SKK]'da $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ eşlenikliği kanıtlamıştık ve kanıtı oldukça kolaydı. Ama aynı kitapta $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ eşlenikliğini kanıtlarken zorlanmıştık. Kanıt pek kolay değildi. Dolayısıyla bu teoremin de kanıtının kolay olmayabileceğini tahmin edebiliriz. Nitekim kanıt pek kolay değildir.

Önce $\alpha = \beta$ şıkkını ele alalım.

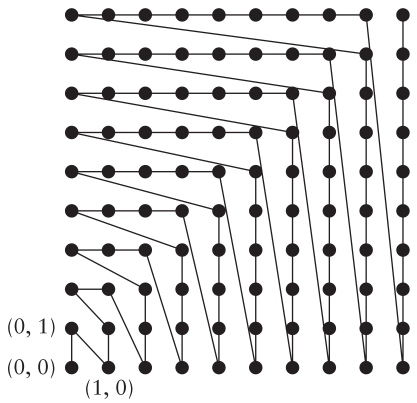
$\alpha\alpha = \alpha$ eşitliğini α üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $\alpha = \omega$ durumunda kanıtı biliyoruz. Bundan böyle α'dan küçük her β kardinali için $\beta\beta = \beta$ eşitliğini varsayalım.

Şimdi $\alpha \times \alpha$ kartezyen çarpımı üzerine bir iyisıralama tanımlayacağız. $(\beta, \gamma), (\beta_1, \gamma_1) \in \alpha \times \alpha$ için, $(\beta, \gamma) \leq (\beta_1, \gamma_1)$ ancak ve ancak

- $\max\{\beta, \gamma\} < \max\{\beta_1, \gamma_1\}$ ise, ya da
- $\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta_1, \gamma_1\}$ ve $\beta < \beta_1$ ise, ya da

- $\max\{\beta, \gamma\} = \max\{\beta_1, \gamma_1\}$, $\beta = \beta_1$ ve $\gamma \le \gamma_1$ ise.

Bunun bir sıralama olduğunun (kolay) kanıtını okura bırakıyoruz. Ne tür bir sıralamadan sözedildiğini daha iyi kavrayabilmek için aşağıya sıralamayı açıklayacağını umduğumuz bir resim çizdik.



Sıralamayı izlemek için en alt sol köşedeki (0, 0)'dan başlayarak yolu takip edin: (0, 0) < (0, 1) < (1, 0) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < (2, 0) < (2, 1) < (2, 2) < (0, 3) < (1, 3) < (2, 3) < (3, 0) < (3, 1) < (3, 2) < (3, 3) < ...
Eğer $\alpha < \alpha_1 < \beta$ ise, $(\alpha, \beta) < (\alpha_1, \beta) < (\beta, \alpha) < (\beta, \alpha_1) < (\beta, \beta)$.

Bu sıralama, $\alpha \times \alpha$ kartezyen çarpımını iyisıralar. Nitekim eğer $A \subseteq \alpha \times \alpha$ boş olmayan bir altküme olsun. (Kanıtı aşağıdaki şekilden izleyebilirsiniz.)

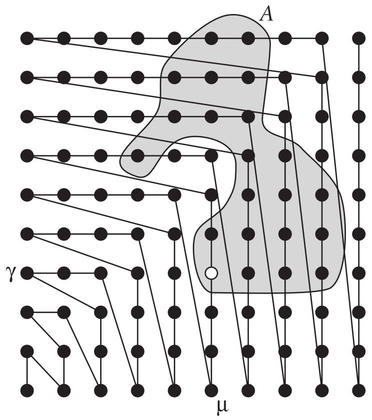
$$B = \{\max\{\beta, \gamma\} : (\beta, \gamma) \in A\}$$

olsun. Boş olmayan bir ordinaller kümesi olduğundan, B'nin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana μ diyelim. Şimdi,

$$C = \{(\beta, \gamma) \in A : \max\{\beta, \gamma\} = \mu\}$$

olsun. (Aşağıdaki şekilde C'nin iki elemanı var.) C boşküme değildir. C'yi iki parçaya ayıralım:

$$D_1 = \{\beta : (\beta, \mu) \in C\}$$
$$D_2 = \{\gamma : (\mu, \gamma) \in C\}$$



Eğer $D_1 \neq \varnothing$ ise ve β, D_1'in en küçük elemanıysa, (β, μ), A'nın en küçük elemanıdır. Eğer (şekilde olduğu gibi) $D_1 = \varnothing$ ise o zaman $D_2 \neq \varnothing$'dir ve eğer γ, D_2'nin en küçük elemanıysa, (μ, γ), A'nın en küçük elemanıdır.

Demek ki tanımladığımız $<$ ilişkisi $\alpha \times \alpha$ kartezyen çarpımını iyisıralar. Her iyisıralı küme bir ordinalle eşyapısal olduğundan, $(\alpha\times\alpha,\ <)$ iyisıralaması bir $(\beta,\ \in)$ ordinaliyle eşyapısaldır. Şimdi β'nın α'dan büyük olamayacağını kanıtlayacağız.

Diyelim β ordinali α'dan büyük. O zaman $\alpha \in \beta$ olmalı. f, $(\beta,\ \in)$ ordinalinden $(\alpha \times \alpha, <)$ iyisıralamasına giden bir eşyapı eşlemesi olsun (izomorfizma yani).

$$f(\alpha) = (\beta_0,\, \gamma_0) \in \alpha \times \alpha$$

olsun. f'nin α'ya kısıtlanmasına g diyelim:

$$g = f|_\alpha.$$

Demek ki g, α'dan

$$Y = \{(\beta,\, \gamma) \in \alpha \times \alpha : (\beta,\, \gamma) < (\beta_0,\, \gamma_0)\}$$

kümesine giden bir eşlemedir. Elbette $\alpha = |Y|$. Şimdi,

$$\delta_0 = \max\{\beta_0,\, \gamma_0\}$$

tanımını yapalım. α bir kardinal olduğundan ve δ_0, α'dan küçük olan β_0 ve γ_0 ordinallerinden birine eşit olmak zorunda olduğundan, $|\delta_0| < \alpha$. Tümevarım varsayımına göre $|\delta_0 \times \delta_0| = |\delta_0|$. Ama Y, $\delta_0 \times \delta_0$'nın bir altkümesi, dolayısıyla $\alpha = |Y| \le |\delta_0| < \alpha$, bir çelişki. Demek ki β ordinali α'dan büyük olamaz. Bundan da

$$|\alpha| \le |\alpha \times \alpha| = |\beta| \le \alpha \text{ ve } |\alpha \times \alpha| = \alpha$$

çıkar.

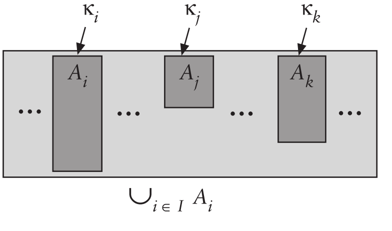
Şimdi, iki α ve β iki sonsuz kardinal sayısı olsun. $\beta \le \alpha$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman

$$\beta \le \alpha\beta = |\alpha \times \beta| \le |\beta \times \beta| = \beta.$$

Kanıt bitti[1]. □

20.2 Sonsuz Sayıda Kardinal Toplamı

Toplamanın tanımını sonlu sayıda kardinalin toplamından sonsuz sayıda kardinalin toplamına genellemek için dahi olmaya gerek yok. $(\kappa_i)_{i\in I}$ bir kardinal ailesi olsun. (Bu, bir I kümesinden bir kardinal kümesine giden örten bir κ fonksiyonu anlamına gelir. $i \in I$ için, i'nin imgesini κ_i olarak yazıyoruz.) Amacımız her birinin kardinalitesi κ_i olan ayrık A_i kümeleri bulmak ve $(\kappa_i)_{i\in I}$ kardinal ailesinin toplamını bu ayrık kümelerin bileşiminin kardinalitesi olarak tanımlamak.



Okur, sonucun seçilen ayrık A_i kümelerinden bağımsız olduğunu düşünecektir muhtemelen. Böyle düşünen okur haklıdır ama bir dereceye kadar haklıdır, çünkü haklılığını kanıtlamak için Seçim Aksiyomu'na şiddetle ihtiyacı vardır.

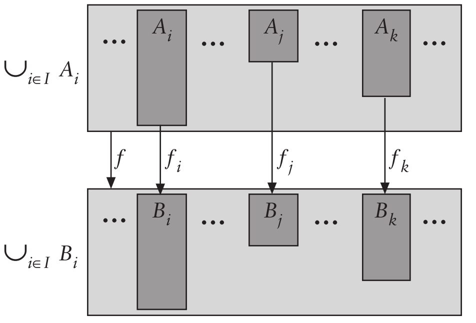
Önsav 20.7. *$(A_i)_{i\in I}$ ve $(B_i)_{i\in I}$ iki ayrık kümeler ailesi olsun. Eğer her $i \in I$ için A_i ve B_i eşlenik kümelerse o zaman $\cup_{i\in I} A_i$ ve $\cup_{i\in I} B_i$ kümeleri de eşleniktir.*

Kanıt: Kanıtın belki bariz olmayan tek tarafı, olsa olsa, I sonsuz olduğunda ve A_i ile B_i arasında eşlemeler i'ye bağımlı bir biçimde bir formülle filan verilmediğinde Seçim Aksiyomu'nu kullanma zorunluluğudur. Bu durumda, her $i \in I$ için,

$$\{f : A_i \to B_i : f \text{ eşleşme}\}$$

kümesinden bir f_i elemanı seçilmesi gerekiyor ve bu seçim genel olarak Seçim Aksiyomu olmaksızın yapılamaz.

[1]Bu kanıt ve bundan sonraki René Cori ve Daniel Lascar'ın Mathematical Logic, Oxford University Press 2001 (çeviren Donald H. Pelletier) adlı kitaptan alınmıştır. Sayfa 154-157.



Seçim Aksiyomu sayesinde seçilen bu f_i'leri yapıştırarak bileşimler arasında yukardaki resimdeki gibi bir f eşlemesi bulunabilir. □

Bölümün ilk paragrafında genel hatlarını çizdiğimiz programı uygulayalım. $\kappa_i \times \{i\}$, kardinalitesi κ_i olan bir kümedir ve değişik i belirteçleri için bunlar ayrık kümelerdir. $(\kappa_i)_{i\in I}$ kardinal ailesinin toplamını bu kümelerin bileşiminin kardinalitesi olarak tanımlayalım:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |\cup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})|.$$

Önce kolay bir özellik: Her $i \in I$ için $\kappa_i \leq \lambda_i$ ise,

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i.$$

Bu sonsuz toplamın özelliklerini kanıtlamak için kardinal çarpmasından yararlanacağız.

Teorem 20.8. *Eğer κ_i'lerden en az biri sonsuzsa, o zaman*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \max\{\cup_{i\in I}\kappa_i,\ |I|\}$$

olur.

Kanıt: Teorem 19.4'ten dolayı $\cup_{i\in I}\kappa_i$ ordinalinin aslında bir kardinal olduğunu biliyoruz, bu yüzden önermede $|\cup_{i\in I}\kappa_i|$ yazmadık.

Hiçbir κ_i'nin 0 olmadığını varsayabiliriz.

$\cup_{i\in I}\kappa_i \leq \sum_{i\in I}\kappa_i$ eşitsizliği için, her $i \in I$ için,

$$\kappa_i \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir elbette, ki bu da

$$\varphi(\alpha) = (\alpha,\, i)$$

kuralıyla tanımlanan

$$\varphi\colon \kappa_i \to \cup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})$$

birebir fonksiyonundan çok bariz biçimde çıkar.

$|I| \leq \sum_{i\in I}\kappa_i$ eşitsizliği de

$$\Psi(i) = (0,\, i)$$

kuralıyla tanımlanan

$$\Psi\colon I \to \cup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})$$

birebir fonksiyonundan çıkar. Demek ki

$$\max\{\cup_{i\in I}\kappa_i,\, |I|\} \leq \sum_{i\in I}\kappa_i.$$

Geri kalan eşitsizlik bir sonraki bölümde kanıtlanacak olan aşağıdaki teoremin sonucudur.

Teorem 20.9. *$(X_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi olsun. Eğer X_i'lerden en az biri sonsuzsa, o zaman*

$$|\cup_{i\in I} X_i| \leq \max\{\cup_{i\in I}|X_i|,\, |I|\}$$

olur.

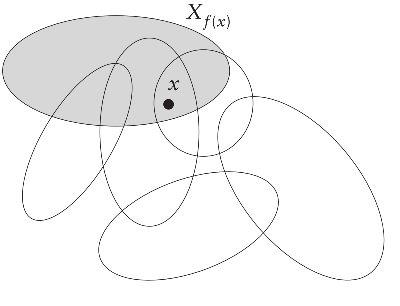
Kanıt: Varsayıma göre $\max\{\cup_{i\in I}|X_i|,\, |I|\}$ sonsuz bir kardinal sayısıdır. Bu sayıya λ diyelim.

$$X = \cup_{i\in I}X_i$$

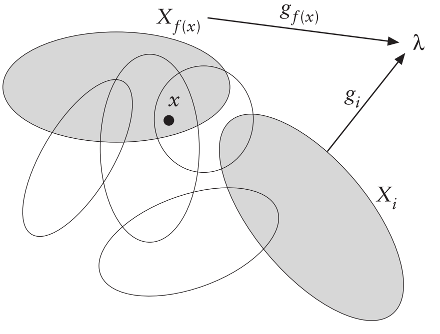
olsun. Her $x \in X$ için,

$$I_x = \{i \in I : x \in X_i\}$$

olsun. I_x boşküme değildir. Seçim Aksiyomu'nu kullanarak I_x'ten $f(x)$ adını vereceğimiz bir eleman seçelim. (Bkz. aşağıdaki şekil.) Yani $f : X \to I$ fonksiyonu $\{I_x : x \in X\}$ kümesinin bir seçim fonksiyonu olsun.



Demek ki her $x \in X$ için, $x \in I_{f(x)}$. Ayrıca, gene Seçim Aksiyomu'nu kullanarak, her $i \in I$ için, X_i'den λ'ya giden birebir bir g_i fonksiyonu seçelim.



Böyle bir birebir fonksiyon vardır çünkü $|X_i| \le \lambda$. Şimdi,

$$h(x) = (f(x),\, g_{f(x)}(x))$$

kuralıyla tanımlanan

$$h\colon X \to I \times \lambda$$

fonksiyonu birebirdir. Çünkü, $x, y \in X$ için, $h(x) = h(y)$ ise, yani

$$(f(x),\, g_{f(x)}(x)) = (f(y),\, g_{f(y)}(y))$$

ise, o zaman $f(x) = f(y) = i$'dir. Demek ki,

$$g_i(x) = g_{f(x)}(x) = g_{f(y)}(y) = g_i(y),$$

ve g_i birebir olduğundan, $x = y$ çıkar. Dolayısıyla, Teorem 20.6'dan dolayı, $|X| \le |I \times \lambda| \le |\lambda \times \lambda| = \lambda$. □

Alıştırmalar.

20.1. Her $\kappa_i = \kappa$ ise, $\sum_{i \in I} \kappa_i = \kappa |I|$ eşitliğini kanıtlayın. (Demek ki kardinal çarpması kardinal toplamasından tanımlanabilir.)

20.2. Önsav 20.7'yi $\prod_{i \in I} A_i$ ve $\prod_{i \in I} B_i$ kümeleri için kanıtlayın.

20.3. **[Sonsuz Sayıda Kardinal Çarpımı.]** $(\kappa_i)_{i \in I}$ bir kardinal ailesi olsun. $\prod_{i \in I} \kappa_i$ kardinal sayısını, $\prod_{i \in I} \kappa_i$ kartezyen çarpımının kardinalitesi olarak tanımlayalım. ($\prod_{i \in I} \kappa_i$ kardinal sayısıyla $\prod_{i \in I} \kappa_i$ kartezyen çarpımı, aynı biçimde yazılan iki değişik şeydir. Birincisi bir kardinal sayı, ikincisi [SKK ve Sİ]'de

$$\{f : I \to \cup_{i \in I} \kappa_i : \text{her } i \in I \text{ için } f(i) \in \kappa_i\}$$

olarak tanımlanmıştı.

Eğer κ_i ve λ_i kardinal sayıları, her $i \in I$ için, $\kappa_i \le \lambda_i$ eşitsizliğini sağlıyorsa, $\prod_{i \in I} \kappa_i \le \prod_{i \in I} \lambda_i$ kardinal sayı eşitsizliğini kanıtlayın.

Teorem 20.10. *$(A_i)_{i\in I}$ ve $(B_i)_{i\in I}$ iki küme ailesi olsun. Eğer her $i \in I$ için $|A_i| < |B_i|$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman $|\cup_{i\in I} A_i| < |\prod_{i\in I} B_i|$ eşitsizliği de geçerlidir. Kardinal sayılar olarak ifade edersek: Eğer her $i \in I$ için $\kappa_i < \lambda_i$ ise,*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

olur.

Kanıt: $|\cup_{i\in I} A_i| \leq |\prod_{i\in I} B_i|$ eşitsizliğinin kanıtını okura bırakıp katı eşitsizliği kanıtlıyoruz. $A = \cup_{i\in I} A_i$ ve $B = \prod_{i\in I} B_i$ olsun. f, A'dan B'ye giden bir fonksiyon olsun. f'nin örten olamayacağını kanıtlayacağız. Her $a \in A$ için,

$f(a) = (f(a)_i)_{i\in I}$ olsun. Burada, $f(a)_i$, B_i'nin bir elemanıdır. Böylece,

$$f_i : A_i \to B_i$$

fonksiyonunu

$$f_i(a) = f(a)_i$$

olarak tanımlayabiliriz. $|A_i| < |B_i|$ eşitsizliğinden dolayı f_i örten olamaz. O zaman $B_i \setminus f_i(A_i)$ kümesi boş olamaz. Seçim Aksiyomu'nu kullanarak $B_i \setminus f_i(A_i)$ kümelerinden birer eleman seçelim, diyelim b_i. O zaman, B'nin $(b_i)_{i\in I}$ elemanı $f(A)$'da olamaz, çünkü bir $a \in A$ için $f(a) = (b_i)_{i\in I}$ olsaydı, bir $i \in I$ için $a \in A_i$ olur ve f_i'nin tanımından dolayı, $f_i(a) = b_i$ olurdu. □

Yukarda kanıtlanan König Teoremi aslında Seçim Aksiyomu'na eşdeğerdir. Çünkü eğer B_i kümelerinin hiçbiri boşküme değilse, o zaman $|\varnothing| = 0 < |B_i|$ olur ve dolayısıyla,

$$0 = |\cup_{i\in I} \varnothing| < \left|\prod_{i\in I} B_i\right|,$$

yani

$$\prod_{i\in I} B_i \neq \varnothing,$$

bu da Seçim Aksiyomu'na eşdeğerdir elbet, ne de olsa $\prod_{i\in I} B_i$ kümesinin bir elemanı her B_i'den bir eleman seçer.

20.3 Kardinallerle Üs Alma

n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır. Aynı şey sonsuz elmanlı kümeler için de doğru! Bu bölümde α ve β kardinalleri için α^β kardinalini öyle tanımlayacağız ki, her X kümesi için, $|\wp(X)| = 2^{|X|}$ olacak. ($\wp(X)$'in X'in altkümeleri kümesi olduğunu anımsatırım.)

Önce şu çok kolay sonucu kanıtlayalım:

Önsav 20.11. *X bir küme olsun. $\wp(X)$ ile X'ten 2'ye (yani $\{0, 1\}$ kümesine) giden fonksiyonlar kümesi eşleniktir:*

$$\wp(X) \approx \{f : f,\ X\text{'ten } 2\text{'ye giden bir fonksiyon}\}.$$

Kanıt: Her $A \in \wp(X)$ için, yani X'in her A altkümesi için,

$$\mathcal{X}_A : X \to 2$$

fonksiyonunu,

$$X_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \notin A \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlayalım. $\mathcal{X}_A$'ya A'nın ***karakteristik fonksiyonu*** adı verilir. $\mathcal{X}_A$ fonksiyonu A'nın elemanlarında 1, X'in A'da olmayan elemanlarında 0 değerini alır. Dolayısıyla, A, $\mathcal{X}_A$'yı belirlediği gibi, $\mathcal{X}_A$ da A'yı belirler:

$$A = \{x \in X : \mathcal{X}_A(x) = 1\}.$$

Demek ki, $f(A) = \mathcal{X}_A$ olarak tanımlanan

$$f : \wp(X) \to \{f : f,\ X\text{'ten 2'ye giden bir fonksiyon}\}$$

birebir ve örten bir fonksiyondur. □

Demek ki X sonlu bir kümeyse,

$$2^{|X|} = |\wp(X)| = |\{f : X \to 2\}|.$$

Eğer X ve Y iki kümeyse, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini bazıları Y^X olarak yazar:

$$Y^X = \{f : X \to Y\}.$$

Bazıları da bu kümeyi, anlaşılır nedenlerden ${}^XY$ olarak yazar. Biz, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini $\{f : X \to Y\}$ olarak yazacağız!

Şimdi α ve β iki kardinal sayı olsun. α^β kardinal sayısını,

$$\alpha^\beta := |\{f : \beta \to \alpha\}|$$

olarak tanımlayalım. Bunun ordinallerde üs almadan farklı bir işlem olduğuna dikkatinizi çekerim.

Örneğin, her α için $\alpha^0 = 1$ (çünkü boşkümeden α'ya bir tek ***boş fonksiyon*** gider! [SKK]) ve her $\alpha > 0$ için $0^\alpha = 0$ (çünkü boş olmayan bir kümeden boşkümeye giden bir fonksiyon yoktur!) Ayrıca, her α için, $\alpha^1 = \alpha$ ve $1^\alpha = 1$ (çünkü $1 = \{0\}$).

Tanımdan nerdeyse hemen çıkan aşağıdaki özelliklerin kolay kanıtlarını okura bırakıyoruz.

Önsav 20.12. *Her α, β, γ ve δ kardinal sayıları için,*

i. $\beta \leq \gamma$ *ise* $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$,
ii. $\alpha \leq \beta$ *ve* $\gamma \leq \delta$ *ise ama* $\alpha = \beta = \gamma = 0 < \delta$ *değilse,* $\alpha^\gamma \leq \beta^\delta$,
iii. $2^\alpha = |\wp(\alpha)|$,
iv. $\alpha < 2^\alpha$,
v. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$,
vi. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$,
vii. $\alpha^\gamma \beta^\gamma = (\alpha\beta)^\gamma$
eşitlikleri doğrudur. □

Okurun özellikle vi'yı kanıtlamasını öneririz.

Yukardaki önsavın iv şıkkını König Teoremi'yle de kanıtlayabiliriz: Teorem 20.10'da $I = \alpha$, $\kappa_i = 1$, $\lambda_i = 2$ alırsak,

$$\alpha = \sum_{i \in \alpha} 1 < \prod_{i \in I} 2 = 2^\alpha$$

buluruz! Sadece bir hoşluk!..

Alıştırmalar.

20.4. Her sonsuz κ kardinali ve $n > 0$ doğal sayısı için $\kappa^n = \kappa$ eşitliğini kanıtlayın.

20.5. Her $i \in I$ için, $\kappa_i = \kappa$ ise, $\prod_{i \in I} \kappa_i = \kappa^{|I|}$ eşitliğini kanıtlayın. (Demek ki kardinallerde üs alma kardinal çarpımından tanımlanabilir.)

20.6. $\prod_{i \in I} \kappa_i \leq (\cup_{i \in I} \kappa_i)^{|I|}$eşitsizliğini kanıtlayın.

Şimdi şaşırtıcı bir sonuç sunacağız. Aşağıdaki teoreme göre, örneğin

$$\omega^\omega = 2^\omega = 3^\omega$$

olur. Sonuç ilk bakışta şaşırtıcı, ikinci bakışta da şaşırtıcı, kanıtın basitliği daha da şaşırtıcı...

Teorem 20.13. *Eğer β sonsuz bir kardinalse ve $2 \leq \alpha \leq 2^\beta$ ise $\alpha^\beta = 2^\beta$. Özellikle, $\beta^\beta = 2^\beta$.*

Kanıt: Önsav 20.12'ye ve Teorem 20.6'ya göre,

$$2^\beta \leq \alpha^\beta \leq (2^\beta)^\beta = 2^{\beta\beta} = 2^\beta.$$

Demek ki her yerde eşitlik geçerli olmalı. İkinci önerme $\beta < 2^\beta$ eşitsizliğinden ve birinci önermeden çıkıyor. □

Teorem 20.14. *Eğer $2 \leq \alpha$ ve $1 \leq \beta$ ise ve α ve β'dan biri sonsuzsa, o zaman*

$$\max\{\alpha,\, 2^\beta\} \leq \alpha^\beta \leq \max\{2^\alpha,\, 2^\beta\}$$

olur.

Kanıt: İlk eşitsizlik bariz. Eğer $\alpha \leq 2^\beta$ ise, α ya da β sonsuz olduğundan, β sonsuz olmak zorunda ve sonuç bir yukardaki sonuçtan çıkıyor: $\alpha^\beta = 2^\beta$. Eğer $2^\beta \leq \alpha$ ise, o zaman $\beta < 2^\beta \leq \alpha$ ve $\alpha^\beta \leq (2^\alpha)^\beta = 2^{\alpha\beta} = 2^\alpha$. □

Yukardaki kanıttan şu çıkıyor:

Teorem 20.15. *$2 \leq \alpha$, $1 \leq \beta$ olsun ve α ve β'dan biri sonsuz olsun. O zaman, eğer $\alpha \leq 2^\beta$ ise, $\alpha^\beta = 2^\beta$, eğer $2^\beta \leq \alpha$ ise, $\alpha^\beta \leq 2^\alpha$ olur.* □

Gerçekten de Hilbert'in dediği kadar var. Cantor bize gerçekten de sonsuz sayıları da içeren fantastik bir cennet sunmuş!

21. Kardinallerde Tümevarım ve ω_ω

Doğal sayılarda tümevarımla kanıt artık harcıâlem bir yöntem olmalı okur için. Geçmişte bu çok bilinen yöntemi doğal sayılardan ordinallere genelleştirdik. Burada benzer bir yöntemi şimdi kardinal sayılarına uygulayacağız.

Eğer κ bir kardinalse, $|\wp(\kappa)| > \kappa$ eşitsizliğini biliyoruz [SKK ve Sİ]. Demek ki,

$$\{\alpha \leq |\wp(\kappa)| : \kappa < \alpha \text{ ve } \alpha \text{ bir kardinal}\},$$

boş olmayan bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla en küçük bir elemanı vardır. Bu elemana κ^+ diyelim.

Elbette, $\kappa < \kappa^+ \leq |\wp(\kappa)|$ ve ayrıca κ^+, κ'dan büyük kardinallerin en küçüğü, yani κ'dan sonra gelen ilk kardinal.

Her kardinal belli bir κ kardinali için κ^+ olarak yazılamayabilir. 0 ve ω için bu elbette doğru da, ω'dan daha büyük kardinaller de κ^+ biçiminde yazılamayabilirler. Örneğin, $\omega_0 = \omega$ ise ve her n doğal sayısı için ω_{n+1} kardinalini ω_n^+ olarak tanımlarsak, o zaman

$$\omega_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n$$

olarak tanımlanan ω_ω kardinali hiçbir κ kardinali için κ^+ olarak yazılamaz. (ω_ω kardinalinin daha matematiksel bir tanımı için yan sütundaki gri kareye bakın.) Nitekim, ω_ω'dan küçük bir κ kardinali, ya sonlu bir kardinal olmalıdır ya da bir n doğal sayısı için ω_n'ye eşit olmalıdır. Nitekim $\kappa < \omega_\omega$ olsun. Her ω_n kardinali κ'dan küçükeşit olamaz, yoksa $\omega_\omega \leq \kappa$ olurdu. Demek ki bazı n doğal sayıları için $\kappa < \omega_n$. Şimdi n bu doğal sayıların en küçüğü olsun. Eğer $n = 0$ ise κ bir tamsayıdır. Eğer $n > 0$ ise, o zaman, $\omega_{n-1} \leq \kappa < \omega_n = \omega_{n-1}^+$ ve $\omega_{n-1} = \kappa$.

Belli bir κ kardinali için κ^+ olarak yazılamayan kardinallere ***limit kardinal*** diyelim. 0, ω ve ω_ω ilk üç limit kardinaldir. Bir limit kardinal kendisinden küçük kardinallerin bileşimidir. (Neden?)

Teorem 21.1. *$\varphi(\alpha)$, kardinallerle ilgili bir önerme olsun. Eğer $\varphi(\alpha)$ limit kardinaller için doğruysa ve her α kardinali için, $\varphi(\alpha)$ doğru olduğunda $\varphi(\alpha^+)$ da doğru oluyorsa, o zaman $\varphi(\alpha)$ her kardinal için doğrudur.*

Kanıt: $\varphi(\alpha)$'nın bir α kardinali için doğru olmadığını varsayalım. O zaman,

$$\{\beta \leq \alpha : \beta \text{ kardinal ve } \varphi(\beta) \text{ yanlış}\}$$

boş olmayan bir kardinaller (dolayısıyla ordinaller) kümesidir. β, bu kümenin en küçük elemanı olsun. Teoremin varsasayımına göre β limit kardinal olamaz. Demek ki bir γ kardinali için $\gamma^+ = \beta$. Ama $\gamma < \beta$ olduğundan, $\varphi(\gamma)$ doğrudur. Ama o zaman da teoremin varsayımına göre $\varphi(\gamma^+)$, yani $\varphi(\beta)$ doğrudur. Bir çelişki.

ω_ω

ω_ω'nın bir kardinal olması için, ω_ω her şeyden önce bir küme olmalıdır. Oysa

$$\omega_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$$

tanımında küme olduğunu bilmediğimiz

$$\{\omega_n : n \in \omega\}$$

topluluğunun bileşimi alınıyor ve biz sadece kümelerin bileşiminin küme olduğunu biliyoruz. Birleşimi alınan bu topluluğun bir küme olduğu ancak Yerleştirme Aksiyomu'yla kanıtlanır. ω_n kardinallerini başka türlü tanımlamalıyız.

$\varphi(n, y)$ formülü şunları söylesin:

n bir doğal sayıdır ve öyle bir X kardinal kümesi ve

$$f : n + 1 \to X$$

fonksiyonu vardır ki,

- $f(0) = \omega$
- Her $i + 1 \in n$ için $f(i + 1) = f(i)^+$,
- $y = f(n)$.

Kanıtını okura bıraktığımız şu özellikler doğrudur.

1. Her n doğal sayısı için $\varphi(n, y)$'nin doğru olduğu tek bir y kardinal sayısı vardır. Bu kardinal sayısına bundan böyle ω_n adını verelim.

2. $\varphi(0, \omega)$ doğrudur.

3. Her n doğal sayısı için, eğer $\varphi(n, y)$ doğruysa o zaman $\varphi(n + 1, y^+)$ doğrudur, yani

$$\omega_{n+1} = \omega_n^+.$$

Birinci özellikten dolayı ve Yerleştirme Aksiyomu sayesinde,

$$\{y : \text{bir } n \in \omega \text{ için } \varphi(n,\, y) \text{ doğru}\}$$

yani $\{\omega_n : n \in \omega\}$ bir kümedir. Şimdi ω_ω'yı bu kümenin bileşimi olarak tanımlayabiliriz.

22. Sonsuz Kardinallerin Sıralanması (Alefler) ve Kofinalite

ω'nın ilk sonsuz kardinal olduğunu biliyoruz, hatta bu olguyu daha da gözler önüne sermek için, ω yerine ω_0 bile yazmıştık. Geçen bölümlerin birinde ikinci sonsuz kardinal ω_1'i de gördük. Hatta her n doğal sayısı için n'inci sonsuz kardinal ω_n'yi de tanımladık. Ve bir yerde de ω'ıncı sonsuz kardinal ω_ω'yı da fısıldadık.

Bu bölümde, her α ordinali için "α'ıncı sonsuz kardinal"i tanımlayacağız ve her sonsuz kardinalin belli bir α ordinali için "α'ıncı sonsuz kardinal" olduğunu göreceğiz.

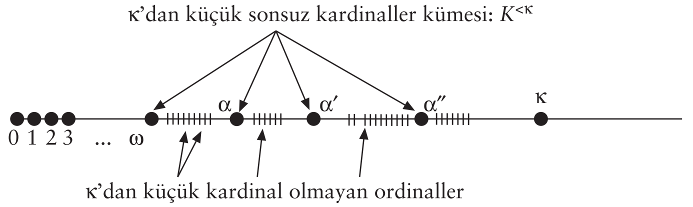
Konuya şöyle de bir giriş yapabilirdik: Her kardinal bir ordinal olduğundan, sonsuz kardinallerden oluşan herhangi bir küme, ordinallerin sıralamasıyla doğal olarak iyisıralanır. Tüm sonsuz kardinaller de, küme oluşturmasalar da, iyisıralanmışlardır. Bu bölümde, sonsuz kardinallerin işte bu doğal (ve iyi!) sıralamasını yakından irdeleyeceğiz.

22.1 Sonsuz Kardinalin Ordinal Sırası

Sonsuz bir κ kardinali verilmiş olsun.

$$K^{<\kappa} = \{\lambda < \kappa \colon \lambda \text{ sonsuz kardinal}\}$$

kümesini ele alalım. $K^{<\kappa}$, κ ordinalinin bir altkümesi olduğundan, κ'nın ordinal sıralamasıyla iyisıralanır, dolayısıyla $K^{<\kappa}$ iyisıralı bir küme olarak bir ve bir tek ordinalle eşyapısaldır.

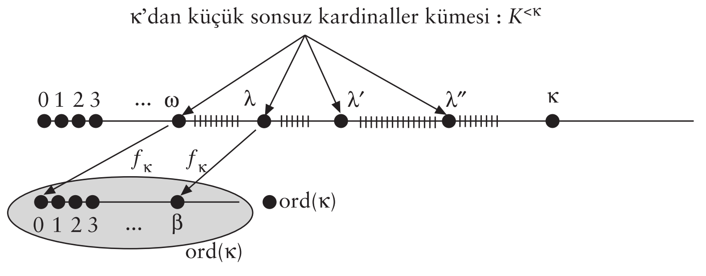


Bu ordinale $ord(\kappa)$ diyelim. Demek ki sıralı küme olarak,

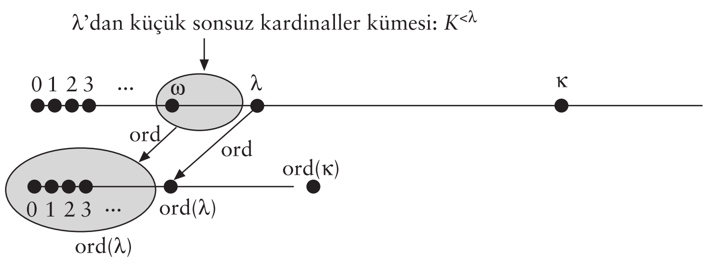
$$K^{<\kappa} \approx ord(\kappa).$$

Bu $\approx$ simgesi, iki küme arasında sadece bir eşleme olduğunu söylemiyor, daha fazlasını söylüyor, iki sıralı küme arasında sıralamayı koruyan bir eşleme (izomorfizma) olduğunu söylüyor.

Ayrıca, $K^{<\kappa}$ kümesinden $ord(\kappa)$ ordinaline giden bir tek eşyapı eşlemesi olduğunu da biliyoruz (Teorem 5.1). Bu eşyapı eşlemesine f_κ diyelim diyeceğim ama f_κ elbette (tanım kümesi üzerinde) ord'a eşit!

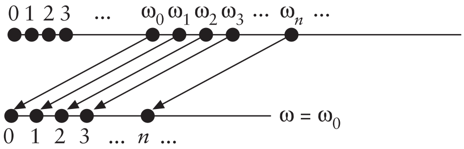


Yani λ'dan küçük sonsuz kardinaller kümesi, $f_\kappa(\lambda)$'dan küçük ordinaler kümesiyle (yani $f_\kappa(\lambda)$'yla) eşyapısal. Bu çok bariz olgunun doğruluğu yukardaki şekilden de hemen anlaşılıyor. Demek ki $f_\kappa(\lambda) = ord(\lambda)$ ve f_κ yazılımına gerek yok, f_κ yerine ord kullanabiliriz.



Örneğin, $K^{<\omega} = \varnothing$ ve dolayısıyla $ord(\omega) = 0$. Ama eğer $\kappa > \omega$ ise, o zaman $0 \in ord(\kappa)$, yani $0 < ord(\kappa)$, elbette! Daha ilginç örneklerimiz de var:

Bölüm 21'te her n doğal sayısı için ω_n sonsuz kardinalini tanımlamıştık. Elbette $ord(\omega_n) = n$ olur, yani ω_n, gerçekten de n'inci sonsuz kardinaldir.



Geçen bölümde $\omega_0 = \omega$ ve $\omega_{n+1} = \omega_n^+$ olarak tanımlanmıştı. Aynı yerde ω_ω kardinalin ω_n kardinallerinin birleşimi olarak tanımlamıştık. Bu bölümde $\omega_{\omega+1}$ kardinalini ω_ω^+ olarak tanımlayaca¼z ve böylece devam edece¼z.

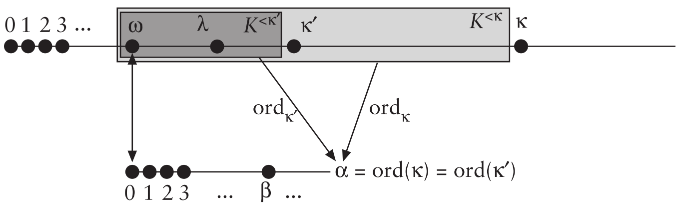
Şimdi dikkat, çok ilginç bir şey geliyor: $ord(2^\omega)$'nın kaç olabileceğinin bilinmemesi ve hiçbir zaman da bilinemeyecek olması (bu bilinemezlik kanıtlanmıştır) son derece ilginçtir. Birkaç bölüm ötede bu ilginç konuyu daha ayrıntılı ele alacağız.

$ord(\kappa)$, bir anlamda değil, birazdan göreceğimiz üzere tam anlamıyla, κ kardinalinin sonsuz kardinaller topluluğunun içindeki sırasıdır: κ'ya $ord(\kappa)$-ıncı sonsuz kardinal diyebiliriz, ilerde diyeceğiz de. Ama bunu iç rahatlığıyla diyebilmemiz için, her α ordinali için bir α-ıncı kardinalin olması gerektiği gibi, iki değişik sonsuz κ kardinalinin aynı $ord(\kappa)$'yı da vermemesi gerekir.

Önce iki değişik κ ve κ' kardinalinin aynı ordinali veremeyeceğini kanıtlayalım. Daha iyisini de kanıtlayabiliriz: ord artar.

Önsav 22.1. *$\kappa' < \kappa$ iki sonsuz kardinalse, $ord(\kappa') < ord(\kappa)$ dır.*

Kanıt: İki κ ve κ' sonsuz kardinal için $\kappa' < \kappa$ eşitsizliğini varsayalım. $K^{<\kappa'}$, elbette $K^{<\kappa}$ iyisıralamasının bir başlangıç dilimidir. $K^{<\kappa}$'dan $ord(\kappa)$'ya giden eşyapı eşlemesini ord olarak değil de bu kanıtlık ord_κ olarak gösterelim. $ord_{\kappa'}$ aynı biçimde tanımlansın.



Dolayısıyla $ord_{\kappa'}(K^{<\kappa'}) = ord(\kappa')$, $ord_\kappa(K^{<\kappa}) = ord(\kappa)$'nın bir başlangıç dilimidir. Demek ki $ord(\kappa') \leq ord(\kappa)$. Eşitlik olduğunu varsayalım:

$$\alpha = ord(\kappa') = ord(\kappa).$$

olsun. Ama şimdi,

$$ord_{\kappa'}^{-1} \circ ord_\kappa$$

fonksiyonu, $K^{<\kappa}$ ile $K^{<\kappa'}$ arasında bir eşyapı eşlemesi oldu. $K^{<\kappa'}$, $K^{<\kappa}$ iyisıralamasının bir başlangıç dilimi olduğundan, bundan $K^{<\kappa'} = K^{<\kappa}$ çıkar

[Önsav 3.10]. Ama κ ve κ', sırasıyla, $K^{<\kappa}$ ve $K^{<\kappa'}$ kümelerindeki kardinallerin hepsinden daha büyük olan kardinallerin en küçüğüdür. Demek ki $\kappa' = \kappa$, bir çelişki. $\square$

22.2 α'ıncı Ordinal ω_α

Şimdi her α ordinali için, α-ıncı sonsuz kardinali tanmlayacağız, yani öyle bir ω_α sonsuz kardinali bulacağız ki, $ord(\omega_\alpha) = \alpha$ olacak. Ama bunun böyle olduğunu uzun süren bir tanım devresinden sonra kanıtlayacağız.

α herhangi bir ordinal olsun. α 'ıncı ω_α sonsuz kardinalini α üzerine tümevarımla şöyle tanımlayalım (daha doğrusu tanımlamaya kalkışalım, tanımda bazı ince narin sorunlarla karşılaşacağız):

• Eğer $\alpha = 0$ ise, $\omega_0 = \omega$ olsun.

• Eğer α bir limit ordinal değilse, yani bir β ordinali için $\alpha = \beta + 1$ ise, o zaman,

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \omega_\beta^+ = \omega_\beta\text{'dan büyük ilk kardinal} \\ &= \omega_\beta\text{'dan büyük kardinallerin en küçüğü olsun.} \end{aligned}$$

• Eğer α bir limit ordinalse, o zaman, ω_α,

$$\omega_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$$

olarak tanımlansın.

Şimdi okura tuhaf gelebilecek bir teorem kanıtlayacağız, ama aksiyomatik kümeler kuramının tüm inceliği böyle bir teorem kanıtlama gereksinimin hissedilmesinde yatar. Matematiksel olarak kanıtın pek bir önemi yoksa da felsefi açıdan önemlidir. Dileyen okur, aşağıdaki oldukça uzun sayılabilecek kanıtı, daha doğrusu kanıt taslağını atlayıp üç yıldızlı (***) yerden devam edebilir.

Teorem 22.2. *ω_α kardinali gerçekten vardır.*

Teoremin ne demek istediğini kanıtı vermeden anlatmak oldukça zor. Yukardaki tanımda, her α ordinali için ω_α'nın gerçekten bir kardinal olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Sorun, yukarda tanımlanmaya çalışılan ω_α'nın bir kardinal olup olmasından öte bir küme olup olmasında yatıyor.

Kanıt Taslağı: Teoremi α üzerinden tümevarımla kanıtlamaya kalkışacağız.

Eğer $\alpha = 0$ ise, $\omega_0 = \omega$ olarak kanıtlanmıştır ve ω diye bir kardinal var!

Eğer α bir limit ordinal değilse, yani bir β ordinali için $\alpha = \beta + 1$ ise, o zaman, tümevarım varsayımına göre ω_β tanımlanmıştır. Dolayısıyla, $\omega_\alpha = \omega_\beta^+$ kardinali de tanımlanmıştır.

Şimdi $\alpha > 0$ bir limit ordinal olsun. (Burada sorun yaşayacağız.) Tümevarım varsayımına göre, her $\beta < \alpha$ için ω_β kardinali tanımlanmıştır. Dolayısıyla $\omega_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$'dan sözedebiliriz. Ayrıca, bir kardinal kümesinin bileşiminin de kardinal olduğunu bildiğimizden (Teorem 19.4), ω_α bir kardinaldir.

Yukardaki kanıtta bir sorun var. $\cup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$ kardinaller topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlanmadı. Ama eğer $\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayabilirsek, o zaman, ZF aksiyom sistemine göre bu kümenin elemanlarının bileşimi olan $\cup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$ topluluğu da bir küme (dolayısıyla da bir kardinal) olur.

Bu yaklaşımla $\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayamayız. Bambaşka bir yaklaşım gerekiyor. Yukarda yaptığımız ω_β tanımını unutun. Her şeye sil baştan başlıyoruz. Başarıya ulaşmamız için Yerleştirme Aksiyomu'nu esaslı bir biçimde kullanmamız gerekiyor.

Aşağıdaki kanıtı okumadan önce, okurun, hazırlık olarak Bölüm 21'ü okumasını salık veririz.

Öyle bir $\varphi(\alpha,\, \kappa)$ formülü bulacağız ki,

1) Her α ordinali için, $\varphi(\alpha,\, \kappa)$ formülü tek bir κ kardinal sayısı için doğru olacak.

2) $\varphi(0,\, \omega)$ doğru olacak.

3) $\varphi(\beta,\, \kappa)$ doğruysa $\varphi(\beta + 1,\, \kappa^+)$ da doğru olacak.

4) Eğer α bir limit ordinalse ve her $\beta < \alpha$ için, $\varphi(\beta,\, \omega_\beta)$ formülü doğruysa, o zaman $\varphi(\beta,\, \cup_{\beta<\alpha}\, \omega_\beta)$ doğru olacak. (Dikkat: Buradaki ω_β'nın daha önce başarısız bir şekilde tanımlanmaya çalışılmış olan ω_β ile bir ilgisi yoktur. Buradaki ω_β, $\varphi(\beta,\, \kappa)$ formülünü doğru kılan yegâne κ kardinalidir.)

Bütün bunlardan sonra, ω_α,'yı, $\varphi(\alpha,\, \kappa)$ formülünü doğru kılan yegâne κ kardinali olarak tanımlayacağız. Elbette, böylece tanımlanan ω_α dilediğimiz,

- $\omega_0 = \omega$,
- $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+$,
- Eğer α bir limit ordinalse, $\omega_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$ özelliklerini sağlayacak.

$\varphi(\alpha,\, \kappa)$ formülü şunları desin: α bir ordinaldir ve eğer $\alpha = 0$ ise $\kappa = \omega$ olur ve eğer $\alpha \neq 0$ ise, öyle bir kardinaller kümesi X ve bir $f : \alpha \to X$ örten fonksiyonu vardır ki,

a. $f(0) = \omega$, ve

b. $\beta + 1 < \alpha$ ise $f(\beta + 1) = f(\beta)^+$, ve

c. $\beta < \alpha$ bir limit ordinalse $f(\beta) = \cup_{\gamma<\beta}f(\gamma)$, ve

d. X'in en büyük bir δ elemanı varsa $\kappa = \delta^+$, ve

e. X'in en büyük elemanı yoksa $\kappa = \cup X$.

Bunların hepsini kümeler kuramının bir formülüyle söylemek mümkündür.

Eğer $\varphi(\alpha, \kappa)$ formülü doğruysa, $f(\alpha) = X$ bir sonsuz kardinaller kümesi olmalı, f artan bir fonksiyon yani bir eşyapı eşlemesi olmalı ve son iki koşuldan dolayı X, κ'dan küçük sonsuz kardinaller kümesi olmalı. Bütün bunlar tümevarımla kanıtlanabilir.

Şimdi her α ordinali için $\varphi(\alpha, \kappa)$ formülünün yukarda sıraladığımız 1, 2, 3 ve 4 özelliklerine sahip olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Bu, α üzerinden tümevarımla şöyle yapılabilir. $\alpha = 0$ şıkkı tanımdan hemen çıkıyor. $\alpha = \beta + 1$ şıkkı da oldukça kolay. Asıl zorluk α limit olduğunda. Ama bu durumda da Yerleştirme Aksiyomu hızır gibi imdadımıza yetişiyor. Tümevarımla her $\beta < \alpha$ için $\varphi(\beta, \kappa)$'nın doğru olduğu bir ve bir tek κ vardır. Bu κ'ya ω_β diyelim. Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$ bir kümedir. Şimdi $\omega_\alpha := \cup_{\beta<\alpha}\omega_\beta$ olsun. Artık, $\varphi(\kappa, \omega_\alpha)$ formülünün doğru olduğu, ω_α'nın $\varphi(\alpha, \kappa)$'yı doğru kılan tek kardinal olduğu ve (4)'ü sağladığı oldukça kolay biçimde kanıtlanabilir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Alıştırmalar.

22.1. Yukardaki inceliği kavramış olan okur kendini şu alıştırmayla sınasın. A herhangi bir küme olsun.
$\wp_0(A) = A$ olsun. Her n doğal sayısı için,

$$\wp_{n+1}(A) = \wp(\wp_n(A)) = \wp_n(A)\text{'nın altkümeler kümesi}$$

tanımını yapalım.

$$\{\wp_n(A) : n \in \omega\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu gösterin. Yukardaki kanıtta yaptığımız gibi, $\wp_n(A)$'nın tanımını bir formülle yapmalısınız ve Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanmalısınız.

Eğer α bir ordinalse, $\wp_\alpha(A)$ kümesini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$\wp_0(A) = A \text{ ve } \wp_{\alpha+1}(A) = \wp(\wp_\alpha(A))$$

ve eğer α bir limit ordinalse,

$$\wp_\alpha(A) = \cup_{\beta<\alpha}\wp_\beta(A)$$

olsun. Bu tanımdaki sorunu kavrayıp, aynı kavramı sorunsuz biçimde tanımlayın.

***

Yukarda, *ord*'un artan olduğunu kanıtlamıştık. α ordinalini ω_α sonsuz kardinaline götüren "şey"in de artan olduğu, yani $\alpha < \beta$ ordinalleri için $\omega_\alpha < \omega_\beta$ eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanabilir.

ω_α'lar üzerine daha zor bir şey kanıtlamadan önce, oldukça basit ama birazdan kilit noktada yararlanacağımız bir önsav kanıtlayalım:

Önsav 22.3. *Her α ordinali için, $\omega_\alpha \geq \alpha$.*

Kanıt: Elbette $\omega_0 > 0$. Eşitsizliğin α için doğru olduğunu varsayıp eşitsizliği $\alpha+1$ için kanıtlayalım: $\omega_{\alpha+1} = \omega_\alpha^+ > \omega_\alpha + 1 \geq \alpha + 1$. Burada, $\omega_\alpha + 1$'deki toplama ordinal toplamasıdır ve $\omega_\alpha + 1$ ordinal olarak görülmelidir; kullanılan $\omega_\alpha^+ > \omega_\alpha + 1$ eşitsizliği $\omega_\alpha^+ > \omega_\alpha$ eşitsizliğinden ve Sonuç **??**'den çıkar. Şimdi α bir limit ordinal olsun ve var eşitsizliğin α'dan küçük β ordinalleri için doğru olduğunu varsayalım. O zaman, her $\beta < \alpha$ için, $\beta \leq \omega_\beta < \omega_\alpha$ olur ve bundan da $\alpha \leq \omega_\alpha$ çıkar. □

Dikkat: Yukardaki önsavda $\leq$ yerine katı eşitsizlik alınamaz. Kanıtlamaya çalışın, beceremeyeceksiniz. Beceremediğinize göre "mutlaka" bir karşıörnek vardır. İşte karşı örnek: ω, ω_ω, ω_{ω_ω}, ... kardinallerinin bileşimi böyle bir karşıörnektir.

$\alpha \mapsto \omega_\alpha$ şeyinin artan, dolayısıyla birebir olduğunu biliyoruz. Şimdi bu şeyin örten olduğunu kanıtlayalım:

Teorem 22.4. *Tüm sonsuz kardinaller ω_α biçiminde yazılırlar. Yani her sonsuz κ kardinali için, $\omega_\alpha = \kappa$ eşitliğini sağlayan bir (ve bir tane) α ordinali vardır. Dolayısıyla, eğer α bir ordinalse, $\beta \mapsto \omega_\beta$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon, α'dan*

$$K^{<\omega_\alpha} = \{\lambda < \omega_\alpha : \lambda \text{ sonsuz kardinal }\}$$

kümesine giden birebir, örten ve sıralamayı koruyan bir fonksiyondur, yani bir eşyapı eşlemesidir.

Kanıt: κ sonsuz bir kardinal olsun. Önermeyi κ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $\kappa = \omega$ ise $\alpha = 0$ olur. Şimdi teoremin κ için doğru olduğunu varsayıp teoremi κ^+ için kanıtlayalım. Bir α ordinali için, $\kappa = \omega_\alpha$ olsun. O zaman,

$$\kappa^+ = (\omega_\alpha)^+ = \omega_{\alpha+1}.$$

Şimdi κ bir limit kardinal olsun ve teoremin κ'dan küçük sonsuz kardinaller için doğru olduğunu varsayalım.

$$\beta = \{\alpha : \alpha \text{ ordinal ve } \omega_\alpha < \kappa\}$$

tanımını yapalım. Önsav 22.3'e göre, β'daki her ordinal κ'dan küçük olmak zorunda. Demek ki,

$$\beta = \{\alpha < \kappa : \omega_\alpha < \kappa\}.$$

Dolayısıyla β bir kümedir ve bir ordinaller kümesidir. Ayrıca, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ artan olduğundan, β, (kardinal olan ama ayrıca ordinal de olan) κ'nın bir başlangıç dilimidir. Demek ki β bir ordinaldir [Teorem 4.9]. Şimdi, hesaplarımıza başlayalım:

$$\kappa = \cup_{\lambda<\kappa}\lambda = \cup_{\alpha\in\beta}\omega_\alpha = \cup_{\alpha<\beta}\omega_\alpha.$$

Burada, ikinci eşitlik, tümevarım varsayımından çıkar.

Eğer β bir limit ordinal değilse, o zaman β'nın bir en büyük elemanı vardır, diyelim γ. Bu durumda, $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ artan olduğundan, $\cup_{\alpha<\beta}\omega_\alpha = \omega_\gamma$ eşitliği geçerlidir ve kanıt tamamlanmıştır. Eğer β bir limit ordinalse, ω_β'nın tanımından dolayı, bu sefer $\cup_{\alpha<\beta}\omega_\alpha = \omega_\beta$ eşitliği geçerlidir ve kanıt gene tamamlanmıştır.

İkinci önerme birincisinden hemen çıkar. □

Sonuç 22.5. *α bir ordinal olsun. ord, $K^{<\omega_\alpha}$ kümesinden α'ya giden bir eşyapı eşlemesidir ve $\beta \mapsto \omega_\beta$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun tersidir: Her β ordinali ve sonsuz κ kardinali için, $ord(\omega_\beta) = \beta$ ve $\omega_{ord(\kappa)} = \kappa$ olur.*

Kanıt: ord, $K^{<\omega_\alpha}$ kümesiyle $ord(\omega_\alpha)$ ordinali arasındaki yegâne eşyapı eşlemesidir. Ayrıca $ord(\omega_\alpha)$ ordinali böyle bir eşyapı eşlemesi olan yegâne ordinaldir (Teorem 5.1). Teorem 22.4'ten dolayı $ord(\omega_\alpha) = \alpha$. Şimdi

$$\beta \mapsto ord(\omega_\beta)$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon, α'dan α'ya giden bir eşyapı eşlemesidir. Demek ki $ord(\omega_\beta) = \beta$. Aynı şekilde $\omega_{ord(\kappa)} = \kappa$ eşitliği kanıtlanabilir. □

Kardinal sayısı olarak görüldüğünde, ω_α'yı $\aleph_\alpha$ (alef) olarak yazmak bir gelenektir. Alef, İbrani alfabesinin elifi, yani ilk harfidir.

22.3 Kofinalite

α ve β birer ordinal, $f\colon \alpha \to \beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\delta < \beta$ için, $f(\gamma) \geq \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma < \alpha$ elemanı varsa, f'ye ***sonsuza gider*** ya da (β'da) ***kofinal*** diyeceğiz. Eğer $\beta = \delta^+$ ise, f'nin sonsuza gitmesi, f'nin δ değerini alması demektir. Eğer β limitse, bu, $\cup_{\gamma\in\alpha} f(\gamma) = \beta$ demektir.

Örneğin $\mathrm{Id}_\beta : \beta \to \beta$ fonksiyonu sonsuza gider. Daha hoş bir örnek,

$$f(n) = \omega_n$$

kuralıyla tanımlanmış $f\colon \omega \to \omega_\omega$ fonksiyonu sonsuza gider. Bu son örnekte ω, sonsuza giden bir $\alpha \to \omega_\omega$ fonksiyonunun olduğu en küçük α ordinalidir. Sonsuza giden bir $f\colon \alpha \to \beta$ fonksiyonunun olduğu en küçük ordinale, β'nın ***kofinalitesi*** adı verilir ve bu ordinal $cf(\beta)$ olarak yazılır.

$$cf(\beta) = \min\{\alpha\colon \exists f : \alpha \to \beta \text{ ve } \cup_{\delta\in\alpha} f(\delta) = \beta\}.$$

Kolayca görüleceği üzere, kofinalite, 0, 1 ya da sonsuz bir kardinal olmak zorundadır.

Elbette $cf(\beta) \leq \beta$. Ve elbette $cf(0) = 0$, ama diğer sonlu sayıların ve limit olmayan ordinallerin kofinalitesi 1'dir; elbette.

$$cf(\omega) = cf(\omega_\omega) = cf(\omega_{2\omega}) = cf(\varepsilon_0) = \omega$$

eşitliklerini kanıtlamak çok kolay. Öte yandan $cf(2^\omega) > \omega$ eşitsizliği kanıtlanabilir. Bu da (ZFC'de) $2^\omega \neq \omega_\omega$ eşitsizliğini kanıtlar.

2^ω'nın kofinalitesinin sayılamaz olan herhangi bir kardinal olabileceği ZFC'yle tutarlıdır. Örneğin, 2^ω'nın kofinalitesi 2^ω da olabilir.

ω_1'in kofinalitesinin ω'dan büyük olduğunu kanıtlamak çok kolaydır: ω_1'in her elemanı sayılabilir olduğundan, eğer ω_1'in kofinalitesi sayılabilir olsaydı, sayılabilir sayıda sayılabilir kümenin bileşimi olarak yazılacağından, ω_1 sayılabilir bir küme olurdu.

Kofinalitesine eşit bir ordinale ***düzgün*** ordinal adı verilir. Düzgün olmayan ordinallere de ***tekil*** denir. Örneğin ω_ω tekildir. Her α için $\omega_{\alpha+1}$ kardinalinin düzgün olduğu gösterilebilir. Demek ki her pozitif n doğal sayısı için, ω_n düzgün bir ordinaldir.

Her α için, $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$ eşitliğini de göstermek pek zor değildir. Demek ki $cf(\alpha)$, düzgün bir ordinaldir.

Eğer β bir limit ordinalse, $cf(\beta)$, β'dan küçük kardinallerden oluşan ve toplamı β olan kümelerin olası en küçük kardinalitesidir:

$$cf(\beta) = \min\left\{|I| : \sum_{i \in I} \lambda_i = \beta \text{ ve } \lambda_i < \beta\right\}.$$

23. Süreklilik Hipotezi ve Felsefi Sonuçları

Doğal sayıların sayılabilir sonsuzlukta, gerçel sayıların ise sayılamaz sonsuzlukta olduğunu biliyoruz [Sİ, SKK]. Hatta gerçel sayıların kardinalitesinin 2^ω olduğunu biliyoruz. Demek ki,

$$|\mathbb{N}| = \omega < \omega_1 \leq 2^\omega = |\mathbb{R}|.$$

1877'de, henüz 32 yaşındayken, kümeler kuramının ve ordinal ve kardinal kavramlarının yaratıcısı Alman matematikçi Georg Cantor, $\mathbb{R}$'nin, doğal sayılardan "daha büyük" ama gerçel sayılardan "daha küçük" bir altkümesinin olup olmayacağı sorusunu sordu. Yani $\mathbb{R}$'nin sayılamaz sonsuzlukta olan ama kardinalitesi 2^ω olmayan bir altkümesi var mıdır? Ya da $\mathbb{R}$'nin her sonsuz altkümesi ya $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{R}$ ile eşlenik olmak zorunda mıdır? Daha modern bir deyişle, $\omega_1 = 2^\omega$ eşitliği doğru mudur?

Cantor yanıtın olumsuz olacağını tahmin etti ama bir türlü kanıtlayamadı. Cantor'un bu tahminine ***Süreklilik Hipotezi*** denir:

Süreklilik Hipotezi [SH]. $\omega_1 = 2^\omega$.

1900'de, Paris'teki meşhur konferansında David Hilbert bu problemi 20'nci yüzyılın matematikçilerine sordu. Hilbert bu probleme o kadar önem veriyordu ki, sunduğu 23 problem arasında buna birinci sırada yer verdi. Yanıtı bulmak 63 yıl aldı.

Kurt Gödel 1938'de, Süreklilik Hipotezi'nin ZFC'yle[1] tutarlı olduğunu kanıtladı. Yani eğer ZFC çelişkisizse (bir başka deyişle, ZFC'de $0 = 1$ eşitliği kanıtlanamazsa), o zaman ZFC'ye Süreklilik Hipotezi'ni eklersek de çelişkisiz bir kümeler kuramı elde ederiz.

Gödel'in bu sonucundan, ZFC'de, Süreklilik Hipotezi'nin yanlışlığının kanıtlanamayacağı çıkar, ama doğruluğunun kanıtlanabileceği çıkmaz. Bunu 1963'te Paul Cohen göstermiştir. Cohen'in kanıtı, o güne dek bilinmeyen bir yöntem

[1] ZFC, matematikçilerin çok büyük çoğunluğuyla çalıştıkları aksiyom sistemidir.

kullanır: İngilizcesiyle ***Forcing***, Türkçesi ***zor kullanma*** ya da ***zorlama*** olabilir. Zorlamayla, Cohen, ZFC'nin aksiyomlarının doğru olduğu ama SH'nin yanlış olduğu bir evren (ZFC + ÿSH'nin bir modelini) inşa etmiştir ve bu inşasıyla 1966'da Fields Madalyası'nı kazanmıştır.

Gödel'le Cohen'in sonuçlarını bir araya koyarsak, ZFC'nin, Süreklilik Hipotezi'nin doğruluğu ya da yanlışlığı konusunda herhangi bir şey söyleyemeyeceği çıkar. Eğer ZFC çelişkisiz (yani tutarlı) bir kuramsa, ZFC'ye Süreklilik Hipotezi olan $\omega_1 = 2^\omega$ eşitliğini de aksiyom olarak eklesek, tam tersine, Süreklilik Hipotezi'nin değillemesi olan $\omega_1 < 2^\omega$ eşitsizliğini de aksiyom olarak eklesek, her iki durumda da çelişkisiz bir kuram elde ederiz. Mantıkçıların deyimiyle Süreklilik Hipotezi, ZFC'den bağımsızdır.

Bütün bunlar akla başka sorular getiriyor. Acaba ZFC, $2^\omega \leq \omega_2$ eşitsizliğini kanıtlayabilir mi? Ya da $2^\omega \leq \omega_5$ eşitsizliğini? Hayır!

Peki, ZFC, bir α ordinali için $2^\omega \leq \omega_\alpha$ eşitsizliğini kanıtlayabilir mi? Elbette: $\alpha = 2^\omega$ için örneğin (Önsav 22.3). Ama bu yanıt doyurucu değil, çünkü 2^ω kardinalinin ne kadar büyük olduğunu anlamak için gene 2^ω kardinalini kullanıyoruz.

n hangi doğal sayı olursa olsun, ZFC'ye $2^\omega = \omega_n$ eşitliğini eklersek, tutarlı, yani çelişkisiz bir kuram elde ederiz. Yani ZFC'de hiçbir n doğal sayısı için,

$$2^\omega \leq \omega_n$$

eşitsizliği kanıtlanamaz.

2^ω kardinalini nerdeyse istediğimiz kadar büyük yapabiliriz. Ama

$$2^\omega = \omega_\omega$$

yapamayız. 2^ω'nın ω_ω'dan daha küçük ya da daha büyük olduğu ZFC'yle tutarlıdır, ama eşitlik ZFC'yle tutarlı değildir. (Bkz. Altbölüm **??**.)

Öte yandan, bazı ilginç varsayımlar $2^\omega = \omega_2$ eşitliğini kanıtlıyor. Eğer tüm ω_n'ler arasından 2^ω'nın illa birine eşit olduğunu varsaymak gerekiyorsa, $n = 1$ ya da 2 en "tabii" seçim olarak önümüze çıkıyor.

Yukardaki tartışmadan şu sonuç çıkıyor: Matematiksel olarak, Süreklilik Hipotezi'ni kabul etsek de olur, etmesek de. Ya da bu konuda hiçbir karar almayabiliriz. Demek ki bu daha çok gerçeği algılamamızla ilgili felsefi bir sorudur.

Matematiksel olarak yapılabilecek en doğal şey, SH'nin ve değillemesinin sonuçlarına bakıp, çıkan sonuçların "doğallığına" ve "yapaylığına" göre karar vermek. Bu konuda bugüne dek bir fikir birliğine varılamadığından, ne Süreklilik Hipotezi ne de değillemesi aksiyomlara eklenmiştir.

Felsefi olarak düşünüldüğünde, en filozof matematikçiler, 2^ω'nın çok daha büyük olması gerektiğini düşünüyorlar ve bu satırların yazarı da bu bakış açısına katılıyor. Ama 2^ω kardinalinin neye eşit olması "gerektiği" bugün kümeler kuramını enerjik ve son derece ilginç kılan sorudur.

SH'nin (ya da SH'nin ZFC'den bağımsızlığının) standart matematikte, daha çok analiz, topoloji ve ölçüm kuramı gibi konularda önemli sonuçları vardır. Bu sayede, bu konulardaki yanıtlanmamış birçok sorunun ZFC'den bağımsız olduğu anlaşılmıştır.

SH'den daha genel bir hipotez vardır:

Genelleştirilmiş Süreklilik Hipotezi [GSH]. *Her sonsuz κ kardinali için, $2^\kappa = \kappa^+$. Yani κ ile 2^κ arasında üçüncü bir kardinal yoktur, ya da her α ordinali için $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$ eşitliği geçerlidir.*

Süreklilik Hipotezi'nin bu genelleşmiş halini ilk ortaya atan Hausdorff'tur. Yıl 1908.

ZFC, bunun da doğruluğuna (elbette!) ya da yanlışlığına karar veremiyor (Gödel-1938 ve Cohen-1963).

Öte yandan, ZF ve GSH, Seçim Aksiyomu'nu kanıtlayabiliyor. Bunu Polonyalı matematikçi/kümeler kuramcısı Sierpinski kanıtlamıştır.

GSH kardinal aritmetiği oldukça kolaylaştırır:

$$\omega_\alpha^{\omega_\beta} = \begin{cases} \omega_{\beta+1} \text{ eğer } \alpha \leq \beta+1 \\ \omega_\alpha \text{ eğer } \beta+1 < \alpha \text{ ve } \omega_\beta < cf(\omega_\alpha) \\ \omega_{\alpha+1} \text{ eğer } \beta+1 < \alpha \text{ ve } \omega_\beta \geq cf(\omega_\alpha) \end{cases}$$

Bunu okura alıştırma olarak bırakıyoruz. (Bkz. Bölüm 22.3)

Gödel'in Teoremi 1900'deki ünlü Paris konferansında Hilbert, yaşadığı çağa göre anlaşılır bir iyimserlikle, matematikçilerden matematiğin çelişkisiz olduğunu kanıtlamalarını istemiştir. (Hilbert'in ikinci sorusu.) Gödel de, 1931'de, toplama ve çarpmayla ilgili en temel aritmetiğin en temel özelliklerini ortaya çıkarabilecek güçte olan çelişkisiz bir kuramın kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamayacağını göstererek Hilbert'in sorusunu olumsuz yanıtlamıştır. (Gödel'in **İkinci Eksiklik Teoremi**).

Gödel'in **Birinci Eksiklik Teoremi**, toplama ve çarpmayla ilgili en temel aritmetiğin en temel özelliklerini ortaya çıkarabilecek güçte olan ve hangi önermenin aksiyom olup olmadığını bir bilgisayar programının anlayabildiği çelişkisiz bir kuramda ne kendisinin ne de değillemesinin kanıtlanabildiği bir önermenin olduğunu söyler. Pek sanılmıyor ama İkiz Asallar Sanısı ya da Goldbach Sanısı bu tür önermelerden olabilir.

1939'da Kurt Gödel, eğer ZF çelişkisizse, ZF'nin Seçim Aksiyomu'nu yanlışlayamayacağını kanıtladı. Gene Paul Cohen ve gene 1963'te, eğer ZF çelişkisizse, ZF'nin Seçim Aksiyomu'nu kanıtlayamayacağını kanıtladı. Demek ki Seçim Aksiyomu da ZF'den bağımsızdır.

Gödel ve Süreklilik Hipotezi Gödel, Süreklilik Hipotezi'nin (SH) yanlış olduğunun kanıtlanamayacağını göstermesine karşın gene de SH'nin yanlış olduğunu sanıyordu. Kanıtlanabilmekle doğru olmak iki ayrı kavramdır. Bir önerme, kümeler kuramının bir modelinde (yani kümeler kuramının aksiyomlarının doğru olduğu bir evrende) doğru olabilir ama kanıtlanamayabilir.

Ama ZFC'nin bir modelinin varlığını ZFC kanıtlayamaz, yoksa ZFC kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlardı (çünkü çelişkili kuramların modelleri olamaz elbette).

Bu durumda Gödel'in SH'nin yanlış olduğuna inanması matematiksel olarak bir şey ifade etmez elbette. Gödel'in inanışı tamamıyla felsefiydi. Gödel, Platonist bir görüşe sahip olduğundan, tüm bu kavramların bir yerlerde varolduğunu ve kümeler kuramının bir modelinin bizim algılayamadığımız bir seviyede var olduğuna inanıyordu. Gödel'e göre SH işte o evrende yanlıştır/yanlış olmalıdır.

Gödel'e göre, ZFC'nin SH'yi yanlışlayamamasının nedeni, ZFC'nin yaşadığımız dünyayı/evreni eksik betimlemesinden kaynaklanmaktadır. Yani aslında SH'nin yanlışlığı kanıtlanmalı, ama ne yazık ki ZFC matematiği yeterince betimlemiyor. Dolayısıyla Gödel'e göre Cantor'un SH'sini çürütecek yeni aksiyomlar bulunmalı.

Paul Cohen formalist (biçimci) olmasına karşın, o da SH'nin doğru olmaması gerektiğine inanıyordu.

Cohen ve Süreklilik Hipotezi. "Bu satırların yazarına göre, gün gelecek, SH'nin bariz biçimde yanlış olduğuna karar verilecek. Kümelere birer birer eleman ekleyerek tüm evreni kapsayacağımızı düşünmek deli saçması olduğundan, [sonludan daha büyük olan] sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin varlığına inanmak zorundayız. Aynı şey daha büyük sonsuzluklar için de geçerli. Şimdi, ω_1, çok özel bir kardinal: Sayılabilir ordinallerin kümesi ve sayılamaz sonsuzlukta bir ordinal bulmanın en kestirme yolu. Ama c (yani $2^\omega = |\mathbb{N}| = |\wp(\mathbb{N})|$), tam tersine, yepyeni ve çok daha güçlü bir ilkeyle, Altkümeler Kümesi Aksiyomu'yla bulunmuştur. ω'dan yola çıkarak ve Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanarak elde edilen bir kardinalin c'ye ulaşacağını ummak akıl kârı bir şey değil. Demek ki c kardinali ω_n, ω_ω, ω_{ω_ω} ve benzerlerinden çok daha büyük olmalı. Bu bakış açısına göre, c, bize gözüpek bir aksiyom tarafından verilmiş, inanılmaz zenginlikte bir kardinaldir ve peyderpey inşa edilemez. Belki gelecek kuşaklar problemi daha net bir biçimde görüp kendilerini daha iyi ifade edeceklerdir." Paul Cohen