

## 2008 Lise Yazokulu Soruları II

Ali Nesin

1. Her  $k$  doğal sayısı için  $10^k > k$  eşitsizliğini kanıtlayın.
2. Her  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  için,  $\frac{1}{i(n-i)} \leq \frac{1}{n-1}$  eşitsizliğini kanıtlayın.
3. Her  $n > 1$  tamsayısı için,  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} \leq 1$  eşitsizliğini kanıtlayın.
4.  $A = \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{N}\}$  olsun.  $A$  kümesinin çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın.
5.  $B = \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{Q}\} \setminus \{0\}$  olsun.  $B$  kümesinin çarpma ve bölme altında kapalı olduğunu kanıtlayın.
6. Eğer  $s \geq 0$  bir gerçel sayıysa, her  $n$  doğal sayısı için  $(1 + s)^n \geq 1 + ns$  eşitsizliğini kanıtlayın.
7. Hangi  $s$  gerçel sayıları, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(1 - s)^n \geq 1 - ns + n(n-1)s^2/2$  eşitsizliğini sağlar?
8. Her  $n \geq 1$  doğal sayısı için,  
$$1/1^2 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2 \leq 2 - 1/n$$
eşitsizliğini kanıtlayın.
9.  $A$  hangi sayı olursa olsun,  
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n > A$$
eşitsizliğini sağlayan bir  $n$  doğal sayısının varlığını kanıtlayın.
10. Her  $n \geq 1$  tamsayısı için,  $\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} < 3$  eşitsizliğini kanıtlayın. Hangi  $a$  sayıları için,  
$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} < a$$
 eşitsizliğini kanıtlayabilirsiniz?