Şeyden Sayılara

Zafer Ercan

???
ve
???'e

İçindekiler

Önsöz

0.1 Kitabın Amacı

2+2=4'ün huzurunu kaçırmak.

Bu kitabın amacı, matematiğin temel yapısı olan sayı kavramının inşasını "küme teori" olarak adlandırılan yapı içerisinde vermekle sınırlıdır. 20. yüzyılın ilk çeyreğinde küme teori kavramının inşasını zorunlu kılan nedenlerden birinin, Cantor'un "çokluk" denen şeyin, bir ardılı olarak adlandırılabilecek sonsuzluk kavramı üzerine yaptığı çalışmalar ve bu çalışmalar üzerinden üretilen sorulara, özellikle, Hilbert'in teşvikiyle yanıt arama girişimleri ve bir diğerinin "Russell paradoksu" olarak adlandırılan paradoks sonucunda olduğu söylenebilir. Küme teori mantık kavramı içinde özel bir yeri olan matematiksel mantık üzerine tesis edilmiştir. Mantık kavramının arkasındaysa "şeyler" var. Kitapta, sayıların inşasının temel güzergâhı

$$\text{Şey} \rightarrow \text{Mantık} \rightarrow \text{Matematiksel Mantık} \rightarrow \text{Küme Teori} \rightarrow \text{Sayılar}$$

olacak. Elbette bu güzergâhın her durağı bazı alt duraklardan oluşacak. Şeyin öncesinin ne olması gerektiği konusundaysa ise hiçbir şeyimiz yok!

Sayılar derken ele alınacak anahtar kelimeler doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve reel sayılar olup; reel sayıların inşasında izlenecek yol,

$$\text{Sıfır} \rightarrow \text{Doğal sayılar} \rightarrow \text{Tam sayılar} \rightarrow \text{Rasyonel sayılar} \rightarrow \text{Reel sayılar} \rightarrow \text{İrrasyonel sayılar}$$

olacaktır. Bu sayı kavramlarından doğal sayıların inşasında, temel kelimelerden biri *sıfır* ve bir diğeri doğal sayının hemen sonraki anlamında olan *ardılı* doğal sayı iken, reel sayıların rasyonel sayılardan türetilmesine neden olan şeylerden birinin *karekök* olarak adlandırılan şey olduğu söylenebilir. Bu geçişler sırasında kazanılan ve kaybedilen özellikler olabiliyor. Örneğin, tamsayılarda bir sayının ardılı varken, bu özellik rasyonel sayılar için yok. Bu bir kayıp olmasına karşın,

$$2x + 1 = 0$$

denklemi tam sayılarda çözülemezken, rasyonel sayılarda çözülebilir olması bir kazanç sayılmalı.

Bahsi geçen inşalar kitapta sadece teknik düzeyde değil, tarihsel gelişim süreci ve felsefesi üzerinde de yorumlar yapılarak verilmeye çalışılacak.

Alıştırmalar

0.1. Sınıfta bir öğrencinin "matematik ne işe yarar?" sorusuna karşılık "sınıfın bu köşesi, şu ağacın en tepesinde bulunan yaprak ve sen ne işe yarıyorsun soruları üzerinde düşün ve sonra soruna yanıtı birlikte arayalım" dedim. Bu yaklaşım ilgi çekici mi?

0.2 Nasıl Okunmalı ve İçerik

Matematik bir ynyle faizandr. Onu anlamak iin, yalnzca akl ve mantk yetmeyebilir; anarist bir yaklam da gerekir.

Bir matematik kitabı roman okur gibi okunmaz; bazen orta sayfadan okunmaya başlanır, bazen son sayfadan. Matematik kitabı her an kavgaya hazır bir anarşist militanın heyacanıyla okunmalı. Bu kitap ise çok daha anarşist bir yaklaşımla okunmalı.

Kitabı yazarken, zaman zaman becerememiş olsam da matematik otoroterlerine sataşacak fırsatlar kolladım. Hatta herkesin "saygı" duyduğu "bir" sayısıyla bile kavga etmek istedim ama bu kolay olmadı, en fazla 1 sayısına "0'a eşitsin" biçiminde çamur atabildim!

Kitabı her gözden geçirişimde, bir yönüyle kitabın kapsamının oldukça yeterli, diğer yönüyle de oldukça eksik olduğunu farkettim. Sanırım bu " çelişki" kitabın içerik olarak dengede ve canlı olduğunu gösteriyor. Okurun da kitabın kapsamını bazen yeterli, bazen yetersiz bulmasını umut ediyorum.

Kitap toplam 17 bölümden oluşmakta. Birinci bölüm "şey" ile başlıyor ve tanrı-gibi bir şeyin varlığı ve tekliğinin "kanıtı" ile bitiyor. Bu açıdan kitap, sadece matematikle ilgilenenler için değil, teoloji (ilahiyatla) ilgilenenlere de yönelik. Son bölümden üç önceki bölüm, yani 14, 15 ve 16. bölümler çeşitli yollarla inşa edilen reel sayılar sisteminin yapısıyla ilgili. Son bölüm ise reel sayılar sisteminin cebirsel yapısını incelemek için bir giriş niteliğinde. Ara bölümlerde doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar inşa edildi.

Çarpıcı olması açısından, ilginç sayılabilecek konulara zaman zaman değinildi. Bunlardan biri, Kurt Gödel'in Tanrı'ın varlığına ilişkin verdiği ontolojik kanıt[1]. Ahmet Çevik tarafından kaleme alınan bu kanıt 1.9.1'de verildi. Bir diğeri ise, Gauss'un (1777-1855) bir ilkokul öğrencisiyken 1'den 100'ye kadar

[1] Aslında, burada Tanrı'nın varlığı değil, "Tanrı-gibi" bir şeyin varlığı belirli varsayımlarla kanıtlanıyor.

olan sayıların toplamının 1050 olduğunu birkaç dakika içinde göstermesi üzerinedir. Gauss'un sonucunun doğru olduğu altbölüm 7.7.1'de "teyit" edilmiştir! Bu, doğru olan bir şeyin "inadına" sorgulanmasıdır.

Kitabın bölüm ya da altbölüm girişlerinde düşüncelerimi zaman zaman deyimsel yaklaşımlarla (aforizma) yansıttım. Bunlar bazen diyalog, bazen de şiir formatında oldu.

Edindiğim tecrübeler bir konuyu anlama sürecinde, konunun tarihsel süreçlerinin bilinmesinin oldukça yararlı olacağını gösteriyor. Bu nedenle, kitap içerisinde yer alan kavramların gelişim tarihlerine kısa da olsa yer verilmeye çalışıldı. Kitabın okunma sürecinde, okurlara konuyu tarihsel süreçleriyle takip etmelerini öneririm.

Okur, bu kitabı okurken kendini konuyu "hem biliyor, hem bilmiyor" gibi hissetmeli. Örneğin, "$\mathbb{R}$" sembolünün gerçel sayılar kümesini gösterdiği söylenmese bile bunun neyi gösterdiğini okurun bilmesi beklenir.

Kitapta, "Reel Sayılar Sistemi" ya da "Reel Sayılar Cismi" gibi aynı anlama geleceği düşünülebilecek ifadeler kullanıldı. Her ne kadar bunlar aynı gibi düşünülse bile farklıdırlar. İkincisi daha teknik bir ifade iken, birincisi bir kavramın genel isimlendirilmesi olup, ifadede geçen "sistem" teknik olarak tanımlanmış bir kelime değildir. Ayrıca bu tür ifadelerde, genel olarak kelimelerin ilk harfleri (yazım kuralı olarak yanlış olsa da) görüntü açısından küçük harflerle yazılabilecek. Örneğin ikinci ifade yerine, "reel sayılar cismi", "Seçim Aksiyomu" yerine "seçim aksiyomu" yazılması gibi. Umarım bu tür yazımlar okuru rahatsız etmeyecektir.

Alıştırmalar

0.2. Bu kitabı nasıl okuyacaksınız?

0.3 Teşekkür

Kitabın yazım sürecinde, her zaman olduğu gibi, "matematikçi" olmasa bile kitabın hem matematiği, hem Türkçesi üzerinde Nuran Ercan'ın önemli düzeltmeleri oldu. Kitabın yazım sürecinde Mehmet Vural ile hem içeriği, hem de kitabın üslubu üzerinde yüzyüze ve sıklıkla konuştuk. Ayrıca M. Vural, kitabın son halini okuyarak önemli düzeltmeler yaptı. Kitapta yer alan teknik olmayan bazı kısımları zaman zaman Facebook alanımda paylaşarak, bunların eleştirilmesini sağlamaya çalıştım. Bu konuda, Ahmet Cihan, Kubilay Sönmez, Emre Özel, Hasan Gümral ve birçok kişinin yapmış oldukları eleştiriler çok ve çok yararlı oldu. Yılmaz Akyıldız'ın bu konuya müdahaleleri unutulmaz nitelikteydi; sonsuzluk üzerine yazdığım birkaç satır üzerinden, benim için "adam şair" dedi! Ahmet Çevik'den öğrendiğim bazı şeylerin kitaba bazen dolaylı ve bazen de doğrudan katkıları oldu. Ayrıca Altbölüm 1.9.1, tümüyle Ahmet Çevik'e aittir. Resul Eryiğit zaman zaman LaTex yazımda yardımcı oldu.

Kitabı yazım sürecinde eşim Nihan Uygun Ercan'ın göstermiş olduğu sabır ve anlayış olmasa kitap bitmezdi. Eylül Ekin Ercan bir ilköğretim öğrencisi olmasına karşın, kitabın bazı bölümleriyle ilgili tartışma fırsatını onunla da dolaylı olarak aradım. Örneğin, "sonsuz ne?, negatif sayı ne?" gibi sorulara verdiği yanıtlar üzerinden arayışlarım oldu.

Kitabın yazım sürecinde emeği geçenler elbette yukarıda isimlerini andığım kişilerle sınırlı değil. Dolaylı ya da dolaysız emeği geçen her insana ve diğerlerine (ağaca, kuşa, ormana, yürürken düşünme fırsatı veren doğaya, göğsüme esen rüzgara, üzerime giydiğimde bana coşku ve enerji veren, emeğin sembolü Orak Çekiç resmini bulunduran tişörtüme v.s.) teşekkür ederim.

Alıştırmalar

0.3. Kitabın yazarı olarak kendi kendime neden teşekkür etmedim?

0.4. Kitap yazarı kitapta eşine teşekkür etmese neler olabilir?

Ocak 2019, BOLU

1. Giriş

Bomboş olmasına karşın bomboş durmayıp, bütün boşlukları dolduran şeye boşküme denir. Matematik, boşkümeyle oynama sanatıdır.

1.1 Aranan Ne?

Arananın ne olduğu nokta yanıtla cevaplanamayabilir. Ancak, ne olabileceğine ilişkin sorular sorularak tartışma ortamı oluşturulabilir. Bu yönü ile, her okur aranan konusunda kendine göre yanıtlar ve sezgiler geliştirebilir.

Kitabın amacı, bir dil yapısı kurarak sayı kavramını tanımlamak. Bu dil "matematik dili" olup, bunlar günümüzde "klasik" ve "modern"[1] matematik olarak adlandırılmakta[2]. Modern ve klasik matematik arasındaki fark, çarpıcı olması açısından, "*iki ile ikinin toplamı dört eder mi?*" sorusuna verilecek yanıt üzerinden anlaşılmaya çalışılabilir. Klasik matematik, sayıların bazı birimlerle donatılmasıyla elde edilen sonuç üzerinden ortaya çıkan algısal cesaretle[3], bu soruya tartışmasız biçimde "evet" yanıtını verirken, modern matematik yanıtın evet olduğunu göstermek için binlerce teorem kullanarak kanıt veriyor[4]. Klasik matematikte "inandırmaya" yer olmasına karşın, modern matematikte inandırma yeterli değildir; "kanıtlamak" gerekir. Tabii bir de kanıtlanacak şeyin bir yapı içinde tanımlanması gerekir. Mesela klasik matematikte "eğer m ve n birer tek sayı ise, m+n çift sayıdır" önermesi yeterince ikna edici olduğu için kanıtlanmasına ihtiyaç duyulmamıştır. Ancak, modern matematik anlayışında bu önermenin doğru olduğunu göstermek için kanıt gereklidir. Peki, "inandırma" ve "kanıtlama" arasında fark var mı? Bir ağaçtan kopan bir elmanın yere düştüğü kanıtlanabilir mi? Yoksa birileri elmanın yere

---

[1] Yazar olarak, "modern" kelimesi kullanmaktan rahatsız olmama karşın, yaygın kullanımı nedeniyle bu kelimeyi kullandım. Bunun yerine "soyut" kelimesi de kullanılabilirdi.

[2] Şahin Koçak [32]'de *serbest matematik* diyor, *özgür matematik* de denilebilir.

[3] İki sayısının yanına elma "birimi" ekleyerek "iki elmanın yanına iki elma daha eklenirse dört elma eder" gibi.

[4] Bunun için gerekli teorem sayısının 2913 olduğu söyleniyor.

düştüğüne inandırılabilir mi? Kanıt, bir "model" içerisinde yer alan bir kavramdır. İnandırma ise isteğe bağlı bir eylem olup, daha "duygusal"dır.

Şu cümlelere bakalım:

i. İki elma

ii. Elma

iii. İki

Bu cümlelerin ilk ikisi fiziksel varlığı temsil etmesine karşın, üçüncüsü fiziksel bir gerçekliği temsil etmiyor. (i)'de yer alan "iki" ile (iii)'de yer alan "iki" birbirinden çok farklıdır. Birincisinde yer alan iki, birimi elma olan "birimleşmiş sayı" iken üçüncüde yer alan iki, birimden arındırılmış bir sayı olup, modern matematikte tanımlanabilen bir kavramdır. Diğer taraftan ne "iki elma" ne de "elma", modern matematikte tanımlanabilir. Bunun yanında "iki elma" klasik matematikte anlamlaştırılabilen bir şey iken, "elma" ve "iki", klasik matematikte tanımlanmaz. Bu bakış açısına göre, modern matematikte sayı klasik matematikte yer alan birimleşmiş sayının birimden arındırılmış durumudur denilebilir. Şuna da dikkat çekelim: "iki elma" tek olmamakla birlikte "iki" tektir.

Bu kitabın yazılmasını teşvik eden ve yazara cesaret veren makalelerden biri Bilim ve Gelecek dergisinde yayınlanan "*Nedir bu "modern" matematik?*" ([15]) isimli makale ve bir diğeri de henüz yayınlanmamış olan "*Dil, Mantık ve Matematik: Bir Anlama ve Eleştiri Denemesi*" isimli makaledir. Birinci makalede, yazar, bir ilkokul öğrencisiyken, iki ile ikinin toplamının dört ettiği konusunda verdiği yanıttan şüphe duymazken, bu tür soruları daha sonra bir matematikçi olarak yanıtlarken bir an için duraksama yaşadığını vurgulamıştı. Bu şaşılacak bir durum olmayıp, Kayserili bir esnafın "*iki kere iki kaç eder?*" sorusuna, "alırken mi yoksa satarken mi?" sorusuyla karşılık vermesine benzer.

Klasik matematikte sayıların tanımlanmasına gerek yoktur; bir birdir, yüz elli olup, bunları tanımlamak umurunda değildir; sağduyu gereği, istenilen açıktır. Bunun bir diğer nedeniyse klasik matematikte sayıların dolaylı ya da dolaysız bazı birimlerle birlikte var olmasıdır. Modern matematikte ise sayılar belirli kurallara göre tanımlanır; sağduyuya olan güven yeterli değildir. Modern matematik "bir" sayısını büyük bir "kibir ve gururla" tanımlarken, örneğin iki yüz elli sayısını tanımlayan bir modern matematik kitabı henüz yazılmamıştır. Bu durumda okur, "o zaman modern matematikte 250 sayısı diye birşey yok mu?" diye sorabilir, varsa, nerede ve nasıl olduğu konusu farklı felsefik tartışmaya yönlendirilebilir. Modern matematik bir anlamda, bir kavram oluşturma denemesidir. Bir başka şey; her ne kadar modern matematik "ben kanıtlarım arkadaş" gibi bir tavır sergilese de

$$127 \times 227 = 28829$$

olduğunu modern matematik adına kanıtlayan biri henüz anasının karnından doğmamıştır[5]. Modern matematik bu anlamda "başarısız" olabilir ama öte yandan, iki farklı sonsuzu[6] tanımlayıp, bunların toplamlarının sonsuz olduğunu kanıtlayabilir. Klasik matematikte ise "sonsuz" ikna edici düzeyde bile tanımlanamaz çünkü, sonsuzun bir birimle donatılması gibi bir sorun oluşur. "Sonsuz tane elma" diye birşey olabilir mi?

Yukarıdaki açıklama ve sorgulamalar matematikle arananın ne olduğu konusuna bir giriş sağlamış olabilir. Ayrıca, arananın ne olduğu konusunda okura, Şakin Koçak'ın "50 soruda matematik" kitabını ([32]) el altında bulundurması öneririlir.

Alıştırmalar

1.1. "Var olmak" nasıl birşey?

1.2. Bir insan kendisinin "var" olduğuna kendisini inandırabilir mi? Yoksa bunu kanıtlayabilir mi? (Bu soruya Ahmet Çevik'ten bir katkı: "Descartes-Meditasyonlar: Metot Üzerine Konuşma" eserinde geçen Cogito ergo sum. Düşünüyorum, varım. Ama burda düşünüyorum (o halde) varım mı? Yoksa düşünüyorum (yani) varım anlamında mı? Burada çok felsefi tartışmalar var. Hintikka'nın "Cogito Ergo Sum: Inference or Performance" makalesinde bu konu detaylıca işlenmiş.

1.3. Mehmet'in Ayşe'ye "seni seviyorum" demesi ve buna Ayşe'nin inanması, Mehmet'in Ayşe'yi sevmesinin bir kanıtı olur mu? Ya da Mehmet'in kadınlardan iyi anladığını kanıtlar mı?

1.4. Modern matematikte sıfır tanımlanmaktadır. Peki "sıfır elma" fiziksel birşeyi temsil eder mi?

1.5. 2913 sayısıyla $2 + 2 = 4$ eşitliği arasındaki ilişki ne olabilir?

1.6. "1,2,3,4,5,?" dizisinde soru işareti yerine hangi sayı gelmelidir? a) 6 b)7 c)0 d)-1

1.7. Bir sayısını anlamak mı yoksa "gerçek peygamber ile sahte peygamberi ayırmak"mı daha zor[7]?

1.2 Aramaya Devam

Matematiksel düşüncenin insanı özgürleştirmesinin beklenemeyeceği gibi, o düşünce üzerinden inşa edilen sayılar insanların düşünce hücrelerine ördükleri demir perdeler olabilir; evren ve tanrının insan zihni için bir demir perde olabileceği gibi. Bu demir perdelerin anahtarının var olup olmadığı ve varsa kimde olduğu da bambaşka bir konudur..

Aşağıdaki ironi, belki de okuru önyargılardan uzak tutarak kitabın daha kolay okunmasını sağlayabilir.

[5] Bu kısmen "beyaz yalan" olabilir, Bölüm 7.8'e de bakılmalı.

[6] Sonsuzun bir "canavar" gibi görülme nedeni onu tanımamaktan kaynaklıdır.

[7] Ali Nesin'in bir paylaşımından esinlenmiştir.

Bilim tarihi, "Eğer bir adam marşla uyum içinde yürüyorsa o değersiz bir yaratıktır..." diyen Einstein da dahil olmak üzere, sayı marşları eşliğinde yürüyen ve sayılara marş komutları veren "çelişkili" bilim insanlarıyla doludur. Örneğin, binlerce yıl halkların kafasında özgürce var olan 0 ve 1 sayılarını halkın elinden alıp, seçkinci kavramlara mal edebilmek için, onları marş komutlarının bir benzeri olan aksiyomlara sıkıştırma eylemleri bu çelişkili ve değersiz görülen yürüyüşün bir benzeridir. 0, 1 ve bütün sayılara Özgürlük!

Her ne kadar yukarıdaki paragraf "özgürlük" sloganıyla bitirilmiş olsa da kitabın amacı bu yönlü bir özgürleştirmeye katkı sağlamak olmayacak. Tersine sayıların evcilleştirilme serüveni bir başarı ya da övgü diliyle anlatılacak[8].

İnsanlık tarihi insanların sayılarla yaptığı işlemlerle (bekli de Âşık Veysel'in **Kara Toprak** şiirinde yer alan "*İşkence yaptıkça bana gülerdi*" nitelikli "işkence"lerle) doludur. Onları topladı, çıkardı, çarptı. Bunları bazen zorunluluktan, bazen eğlence, bazen de meraktan yaptı. Bunlardan meslek yarattı! Adına sayı dedikleri yarattıklarından sadece birine **sıfır**, sadece birine **bir**, bazılarına **tam sayılar**, bazılarına **rasyonel** denildi. Hatta bu yaratılan rasyonel sayıları, "tanrı" yapan bir "din" kurdular. Sonra bu dine karşı çıkan, tanrıya ait olmayan bir $\sqrt{2}$ sayısının varlığı anlaşıldı;

$$x^2 = 2$$

olduğunu söyleyen x doğdu. $\sqrt{2}$ var diyen kişi bunun bedelini canıyla ödedi ama o tanrının da karizması çizildi. İşte bu acılar içerisinde $\sqrt{2}$ doğdu[9]. O'na akıldışı (**irrasyonel**) sayı denildi. Halbuki bu sayı aklın ürünüydü. O gün bugündür $\sqrt{2}$ yaşıyor. $\sqrt{2}$'yi inkar eden tanrıya ne oldu derseniz; rahmetli oldu!

Zaman içerisinde sayılar o kadar büyüdüler ki sonsuz oldular. Hatta sonsuzu aşıp sonsuzun sonsuzu oldular. O kadar ileri gittiler ki; bir zamanlar çok korktukları sonsuzluk kavramını "çocuk oyuncağına" çevirdiler. Bu bir yönüyle tanrıyla yapılan "it dalaşına" benziyordu. Bir sonsuzdan bir diğer sonsuza geçmek için **Küme Teorinin Temel Teoremi** adı verilen bir yöntem icat edildi. Bu yöntemle, istenilen çoklukta farklı sonsuzluk üretilebilmenin hazzı tadıldı. "Bu yöntemin ilk sonsuza uygulanması sonucu elde edilen diğer sonsuz arasında kalan başka sonsuz var mı?" sorusu, Cantor'un inşa ettiği ve çok yanıtlamak istemesine rağmen yanıtlayamadığı soruydu. Bu soru gerçekten önemliydi çünkü, "Düşün bir sonsuzdan diğer sonsuza zıplarken altında (varsa) yatan binlerce sonsuzu" niteliğindeydi.

[8]Bir anekdot: Derste tahtaya "2+3=7" yazmam üzerine ögrenciler, "7" değil "5" olacağı yönünde düzeltme yapmışlar ancak, düzeltmelerine ikna edici bir açıklama getirememişlerdi. Öğrenciler, "2+3=5" olacağı konusunda yıllarca öğretmenlerce ya da kendi kendilerince kandırılmış olamaz mıydı? Bu konuda yaptığım bir paylaşım üzerine "2+2=5"' isimli bir İran filmi dikkatime sunuldu. Okurlara bu kısa filmi izlemelerini öneririm.

[9]O dönemde $\sqrt{2}$ uzunluğu "alogos" yani "hakkında konuşulamayan" olarak adlandırılmış.

Cantor'un sorusunun çözümü için önerilen "her küme iyi sıralanabilir mi?" sorusu, Hilbert'in meşhur soru listesinin birinci sorusu oldu ve sonrasında da Cantor'un sorusu **Süreklilik Hipotezi** (Continuum Hypothesis[10]) olarak adlandırılarak dev bir kavram inşa edildi. Süreklilik hipotezini anlama sürecinde, insanlık başına matematikte **Seçim Aksiyomu** (Axiom of Choice) olarak adlandırılacak yeni bir "bela" açtı. Bu gerçekten bir belaydı; bu, halk diliyle, "herbirinde sonsuz tane kiraz bulunan sonsuz sepetin her birinden sadece ve sadece bir kiraz alarak, içerisinde sonsuz tane kiraz olacak bir sepet oluşturma" girişimi olarak ifade edilebilirdi. Bu, yumruklu ve küfürlü kavgalara neden oldu. Bu kavgayı cinlere ve perilere inanan Kurt Gödel sonlandırdı.

Alıştırmalar

1.8. $127 \times 227 = 28829$ olduğunu kanıtlayın.

1.9. Yukarıdaki soruda verilen eşitlik kanıtlanmadan kullanılsa ne olurdu?

1.10. Arananın ne olduğu kendini hissettirmeye başladı mı?

1.3 Neden "$0 = 1$" Olmasın?

Yukarıda hissettirilmeye çalışılan gizemli dünyanın temel yapısını çok az insan biliyor. Bilmesi de gerekmiyor; tıpkı topuyla oynayan bir çocuğun topunun hacminin kaç metreküp olduğunu bilmesinin beklenemeyeceği ya da annesinin sütünü emen bir bebeğin sütte kaç kalori olduğunu bilmesi gerekmediği gibi[11]. Benzer biçimde, sayıları kullanan halkın,

$$0 = 1$$

eşitlik önermesinin "değerinin" neden yanlış olduğunu bilmesi de beklenmemeli.

Bu kitapta yapılacak kurguya göre, $0 = 1$ eşitlik önermesinin "değeri", "yanlış" olacaktır. Bu önermenin değerini "doğru" yapacak bir kurgu olabilir mi? Böyle bir kurguyla yeni bir uygarlık yaratılabilir mi? Bu sorunun şu andaki amacı soruya yanıt bulmak değildir; doğru yanıtı aramaktan daha çok, sorgulama amaçlıdır. Bu tür sorgulamayla kitabın amacı daha iyi anlaşılabilir ve okur kitabı kendine daha yakın bulabilir.

Bu zamana kadar bize $0 = 1$ olamayacağı öğretilmiştir[12]. Yani, bu eşitlik önermesinin değerinin yanlış olduğu öğretilmiştir. Kimbilir, belki de *kötü insanlar* bizleri kandırmıştır; $0 = 1$ ifadesinin değeri doğrudur. Değeri yanlış olansa

[10] [32]'da buna Cantor Hipotezi deniyor.

[11] Bir an için bir bebeğin emdiği sütün kalori düzeyini öğrenmek için ağladığını ve annenin de bu istek karşısında çaresiz kaldığını düşünün.

[12] Aristoteles'e göre bir şey kendisinden başka olan şeyle aynı olamaz.

$$0 \neq 1$$

ifadesi olabilir. Ya da her ikisi de doğru ya da yanlış değer alacak nitelikte olmayabilir. Belki de değeri doğru olan

$$1 = 0$$

eşitliği ya da

$$1 \neq 0$$

eşitsizliği olabilir. Bu tür sorgulamayla sürekli sorular üretilebilir ve bunun sonucunda,

$$1 = 1$$

eşitliğinin bile değerinin ne olduğunu tartışmalı bir duruma dönüştürebilir. Belki de durumumuz daha da kötüdür;

$$0,$$

$$1,$$

$$=,$$

$$\neq$$

sembollerinin anlamını bile bilmiyor olabiliriz. Hatta ve hatta "sembol nedir?" sorusu karşısında duraklayabiliriz. Sanırım durum beklediğimizden de ciddi!

Bu kitabın içeriği yukarda verilen benzeri sorgulamaları temel düzeyde yanıtlayacaktır. Bunlara yanıt ararken öncelikle "mantıklı olmak" gerekir, bunun için de *mantıksal aksiyom* olarak bilinen kavramların bilinmesi gerekir. Burada geçen *aksiyom* kavramının temel motivasyonu aklımızın ya da sezgilerimizin "doğru" olduğunu söylediği "şeyler" olacak[13]. Şu iki örneğe bakalım.

Ayşe okuldaysa Ayşe okula gitmiştir.

Belirli bir yükseklikten bırakılan taş yere düşer.

Bu ifadelerden hangisi doğrudur? (Bu soruyu sorarken, okurun sezgisel olarak "doğru" kavramını bildiğini kabul ediyoruz elbette.) Herhalde birinci ifadenin doğruluğundan kimse kuşku duymaz[14]. İkinci ifade için de çok büyük bir kesim (belki de yüzde 99) doğru diyecektir. Yüzde birlik bir kesim de, Ay'a çok yakın mesafeden bırakılan cismin yeryüzüne düşmeyeceğini dikkate alarak, farklı bir yaklaşım ortaya koyacaktır. Bu noktada, yükseklik ile uzaklık kavramı arasındaki fark gündeme gelebilir ve ikinci ifade şuna evrilebilir:

[13] İngiliz yazar Holbrook Jackson(1874-1948), "Sezgi aceleyle akıl yürütmedir" diyor. Amerikalı matematikçi Tobias Dantzig(1884-1956) ise, "Sezgi çok uzun süre Yunanlıların katı eksizliklik anlayışının esiri oldu. Şimdi özgürlüğünü kazandı" diyor. Ne demek istiyorsa!?

[14] Ayşe okulda doğduysa ne olacak?

Yüz metre bir yükseklikten bırakılan taş yere düşer(mi?).

Buna verilecek yanıt çok ve çok yüksek oranda "evet" olacaktır. Ancak, belirli bir yüseklikten bırakılan bir taşın her bırakılışta yere düştüğü test edilebilir olmasına karşın, bu denemenin sürekli olarak farklı taş ve mekan için farklı farklı yapılamayacağı da ortada! Bu tür testlerle bırakılan taşın yere düşeceği "kanıtlanamaz". Ancak, elde ettiğimiz gözlemi ziyan etmenin ya da onunla çatışmanın gereği olmayabilir. Peki, nedir "kanıt"? Bu gerçeklikle ve bu yaklaşımla, yaptığımız deneylere saygı duyarak, daha genel olan,

belirli bir yükseklikten bırakılan taş yere düşer

ifadesini bir aksiyom olarak alarak, buradan elde edilen modellerle çalışmalar yapmak mantıklıca olabilir. Başka modeller de olabilir. Örneğin, takıntılı bir insan her yıl Ağustos ayınının her gününde belli bir yükseklikten bırakılan taşın yere düştüğünü 10 yıl boyunca gözlemlemesi sonucu,

Ağustos ayında belirli bir yükseklikten bırakılan taş yere düşer

ifadesini bir aksiyom olarak ele alarak, bir model geliştirebilir. Bu modele göre Ocak ayında belirli bir yükseklikte bırakılan bir taşın yere düşeceği bilinemez, daha teknik bir ifadeyle, kanıtlanamaz.

Alıştırmalar

1.11. Belirli yükseklikten bırakılan bir cismin yere düştüğünün ya da düşmediğinin testini yapan insan, niye bu testi kendini yere bırakarak yapmaz? Nedeni düşeceğini biliyor olmasından mıdır?

1.12. "$0 = 1$ dini" adında bir dinin olmadığını kanıtlayabilir misiniz?

1.4 Aksiyom

"Aksiyom"laştırma, kazasız belasız inanma amaçlı yapılan bir eylemdir..

Yukarıda yapılan gözlemler sonucunda gözlemlere uyumlu bir varsayım ortaya konulmasının gerekliliği ortaya çıkıyor. Buradan da doğruluğunu kabul ettiğimiz ve adına **aksiyom** diyeceğimiz bir kavram ortaya çıkıyor. Kitabın anahtar kelimelerden biri aksiyom olacak.

Issız bir adada yaşayan ve ölümü hiç görmemiş birinin,

ben hiç ölmem

biçiminde bir aksiyom kurması anlaşılabilir. Çünkü o ana kadar ölen birini görmemiş ve kendisi de ölümü tatmamıştır. Ancak, aynı kişi bir topluluk içerisinde yaşıyor olsaydı bu şekildeki bir aksiyom kabul görmezdi. Buradan da anlaşılacağı gibi aksiyomlar, dolaylı ya da dolaysız olarak çevresel etkilerle oluşur. Bu, matematiğin temel kavramları fiziksel gözlemlerin soyutlaştırılmasından geldiğini de söyleyebilir; fiziksel dünyada daireye benzer cisimler olmasaydı soyut daire kavramı da olmazdı.

Bir modeli oluşturan aksiyomlar mümkün olduğu kadar ne fazla ne de az olmalı; işlevsel de olmalı. Örneğin $1 = 1$ ifadesini bir aksiyom olarak almak çok işlevsel olmayabilir. Buna karşı $1 = 1$ ifadesininin değerinin doğru olmasını sağlamak için,

Aslan, kuzudan kuvvetlidir

gibi bir ifadeyi aksiyom olarak almak gereksiz olacaktır.

Matematiksel yapının inşası **önermesel yapı/dil** üzerine olur. Önermesel yapı, bazıları sabitleşmiş ve farklı anlamlar yüklendirilmiş sembollerden oluşan bir semboller topluluğudur. Bu temel yapı bu kitapta çalışılacak.

Bir önermesel yapıda sembollerin belirli bir kuralla dizilmiş biçimi (dizisi) **önerme/formül**, ve önermelerin belirli bir kurala dizilmiş biçimi **kanıt** ve kanıtın son terimi **teorem/hepdoğru** olarak adlandırılır. Bu tanımlamaya göre, her aksiyom bir teorem olacaktır. Matematik, tam olarak tanımlanamayan, **küme** olarak adlandırılan bir şeyi temel alarak bir önermesel yapı üzerine inşa edilir. Bu önermesel yapıda tanımlanan belirli aksiyomlar listesiyle elde edilen yapıya **Zermelo-Fraenkel Küme Teori**[15] denir. Bu teorinin aksiyom listesi detaylarıyla kitapta verilecek. Zermelo-Fraenkel Küme Teori üzerinden Von Neuman tarafından tanımlanan, **doğal sayılar** ve doğal sayılar kümesi kitabın temel konularından biri olacak. Bu şekilde tanımlanan doğal sayıların Peano Aksiyomlarıyla tanımlanan doğal sayılarla çakıştığı gösterilecek. Doğal sayılar sonrası tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçel sayılar yapısı inşa edilip, bu yapının cebirsel olarak tek olduğu gösterilerek, bunların temel özellikleri cebirsel ve küme teori kavramı diliyle verilecek.

Bir kez daha vurgulayalım: Kitapta geçen kavramları iyi takip edebilmek ve anlayabilmek için, gerektiğinde bazı "temel gerçekler" unutulabilmeli. Örneğin,

$$1 + 1 = 2^{16},$$

$$2 = 2$$

gibi bilgileri bilmenin yanında bu bilgilerin tutsağı olunmamalı,

$$0 = 1$$

[15]Teori yerine, kuram, kavram, sistem gibi kelimeler de kullanılır.

[16]Bunun kanıtı Whitead-Russell'ın Principia Mathematics adlı eserinin birinci cildinde verilen bir önteorem kullanıarak 2. ciltte veriliyor.

gibi ifadeler de "dışlanmamalı". Yanlış olsa bile onların da bir değeri vardır. Hem mantıkta yanlış değerin doğru değerden daha kıymetsiz olduğunu kim söyleyebilir ki!

Matematiksel düşünce kavramını formalist bir yapıya sokan kişinin Öklid olduğu söylenebilir. Bu formalizmin temel anahtar kelimeleri *tanım*, *aksiyom*, *theorem* ve *kanıt*tır. Bir matematiksel tanım içiçe geçen diğer formel tanımlardan oluşur. Örneğin, bir doğru parçası belirli özelliklerle yapılandırılmış noktalar kümesi olarak tanımlanabilir. Bu tanımlamada kullanılan *nokta* da tanımlanmaya muhtaçtır. Diğer taraftan bazı şeyleri tanımlamak güçtür, örneğin **küme**!

Alıştırmalar

1.13. "Mantık", "olmak" ve "mantıklı olmak" ne demektir?

1.14. Mantıklı olmak mı yoksa olmamak mı daha iyidir?

1.15. Tanrının varlığı bir aksiyoma dayandırılmış olsaydı dünyada ateist insan kalır mıydı?

1.5 "Hemen" Sonraki

Zaman olarak bir anın hemen sonraki anı yok! Cantor'u deli ederek cennetin kapısını açtıran soru: Bir sonsuzun hemen sonraki sonsuzu olabilir mi?

Bir önceki alt bölümde Zermelo-Fraenkel küme teori olarak ifade edilen yapının inşa edilmesinin temel nedenlerden birinin "sonsuz"luk üzerine yapılan sorgulamalar sonucu olduğu söylenebilir[17]. En az birinin sonsuzun olabilmesinin gerisinde olan (birçok) temel nedenlerden birinin (biraz bulanıkça olsa da) "hemen sonraki" olarak ifade edilebilecek kavram olduğu söylenebilir.

Burada kullanılacak "hemen sonraki" ifadesi, daha sonraki bölümlerde *ardıl* olarak daha net biçimde tanımlanacak. Bu altbölümde üstünkörü bir biçimde, Cantor'un sorusu hemen sonraki terimiyle ifade edildikten sonra genelleştirilmiş süreklilik hipotezi tanımlanacak. Bunlar yapılırken, okurun fonksiyon, birebir ve örten fonksiyon kavramlarına aşina oldukları varsayılacak.

Hemen sonraki ne olabilir? 1 doğal sayısından hemen sonraki doğal sayının 2 olduğu, hemen sonraki kavramı verilmemiş olsa da sağduyuyla hemen söylenebilir. Buna karşı, 1 doğal sayısından hemen sonraki rasyonel sayının ne olduğu sorusu karşısında muhtemelen duraksama yaşanır. "Bir kümenin hemen sonraki kümesi nedir?" sorusu, kötü niyetli olmayan ve ilgili herkesi duraksamanın ötesinde düşündürmeye başlatabilir. Örneğin, "$\{1\}$ kümesinin hemen

[17]Bunun gerekçelerinden biri en doğal sonsuz olan doğal sayıları aksiyomatik olarak inşa eden Peano aksiyom sisteminde sıfırdan farklı her doğal sayının hemen bir sonrakinin (ardılı) olmasıdır.

sonraki kümesi nedir?" sorusunun yanıtı $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 0\}$ ya da $\{1, a\}$ kümelerinden biri olabilir mi? Bir eve aynı uzaklıkta olan evlerin hangisi o evden hemen sonraki olabilir? Bir çemberin merkez noktasının çember üzerindeki noktalarından hangisi hemen sonraki noktasıdır? Bir şeyin hemen sonraki şeyi tek olmak zorunda mıdır? Bu sorular oluşturulurken ve bunlara yanıt aranırken, "hemen sonraki" kavramının henüz tanımlanmamış olduğunun okur elbette farkındadır ve bunun yarattığı zorluk da vardır.

Bir sonsuzun hemen sonraki sonsuzu var mıdır? Cantor sonsuz iki kümenin varlığını tespit ettikten sonra bunlardan birinin daha büyük sonsuz olduğunu da gördü. Bunlardan küçük olan sonsuz, doğal sayılar kümesi ω ve büyük olan sonsuz ise reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ idi. Cantor ω'nın hemen sonraki sonsuzun $\mathbb{R}$ olduğunu düşünüyordu. Cantor'un sorusunu ifade etmek için birkaç tanımlama yapalım: Bir X kümesinden Y kümesine tanımlı en az birebir fonksiyonun olması durumunda

$$card(X) \leq card(Y)$$

ve aynı zamanda Y'den X' e giden birebir fonksiyon varsa

$$card(X) < card(Y)$$

yazılsın. Eğer X'den Y'ye tanımlı en az birebir ve örten fonksiyon varsa

$$card(X) = card(Y)$$

yazılsın. Cantor,

$$\omega \subseteq X \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow card(\omega) = card(X) \text{ ya da } card(X) = card(\mathbb{R})$$

ifadesinin doğru olcağını düşünüyor ama gösteremiyordu. Gösterebilseydi "ω kümesinden hemen sonraki sonsuz küme $\mathbb{R}$" diyecekti.

Sonradan analaşıldı ki bu sorunun bir matematik sorusu olarak incelenebilmesi ve gerekli yanıtların verilmesi için sorunun yatırılacağı bir masa gerekliydi. O masalardan biri 20. yüzyılın ilk çeyreğinde inşa edildi, adı Zermole-Fraenkel küme teoridir. Bu süreç içerisinde, Cantor'un sorusu süreklilik olarak bilinen şu ifadeye evrildi: X sonsuz bir küme ve $\wp(X)$, X'in bütün altkümelerinin kümesi ise,

$$card(X) < card(Y) < card(\wp(X))$$

olacak biçimde Y kümesi yoktur. Günümüzde bu ifade *genelleştirilmiş süreklilik hipotezi* (generalized continuum hypothesis) olarak bilinir. Bu hipotez kabul edildiğinde, sonsuz bir X kümesinin bir sonraki sonsuz kümesi kuvvet kümesidir.

Alıştırmalar

1.16. Cantor’un yukarıda tanımlanan sorusuna yanıt verildi mi?
1.17. Boş olmayan her X kümesi için $card(\emptyset) < card(X)$ olur mu?
1.18. “X ve Y kümeleri $card(X) \leq card(Y)$ ve $card(Y) \leq card(X)$ koşullarını sağlıyorsa $card(Y) = card(X)$ olur mu?” sorusu anlamlı mı?
1.19. Her X ve Y kümeleri için $card(X) \leq card(Y)$ ve $card(X) \leq card(Y)$ koşullarından biri sağlanmalı mı?
1.20. X ve Y kümeleri $card(X) < card(Y)$ ifadesini sağlıyorsa $card(X) \leq card(Y)$ olur mu?

1.6 Dostoyevski “iki kere iki dört eder”den neden korkuyor!

Çünkü, Dostoyevski iki kere ikinin dört etmesini “ölümün başlangıcı” olarak görüyor!

Dostoyevski “korktuğum da nereden çıktı?” diye sorabilseydi de ve gerçekten de korkmamış olsaydı da ben korktuğunu varsayacağım!

Yukarıda verilen iki kere ikinin dört etmesiyle ölüm arasındaki bağlantı, Dostoyevski’nin “Yeraltından Notlar” adlı eserinden alınmıştır. Bu kitap daha detaylı incelendiğinde, Dostoyevski’nin ilgili yaklaşımında belirli çekingenlikler ve korkular yaşadığı düşünülebilir. Aslında Dostoyevski ne korkuyor ne de çekiniyor, sadece kafa buluyor da olabilir! Gerçekten de iki kere ikinin dört etmesinden korkan bir canlı olabilir mi? Ama diğer taraftan, yeri göğu inleten bir gök gürültüsünden korkabilen insan, “iki kere iki dört eder”den neden korkmasın ki?

Korkutan bu şeyin doğumunu Dostoveyski bilseydi, korkusu azalır mıydı? Hiç zannetmem. Bunu bilseydi bile, basit bazı manevralarla bu soruları “ölüm ölseydi ne olurdu?”, “ölümün doğuşu nasıl olmuştur?”, “doğumun doğuşu nasıl olur ki?” biçimli sorulara evrilterek, takıntılılığa devam ederek kafamızın ütüsünü bozmaya devam edebilirdi. Adam, tam bir serseri!

Dostoyevski korktuğu o şeyin ölümünü görseydi, korktuğu şeyden kurtulduğu için sevinir miydi? Yoksa korktuğu o şeyin doğduğunu görse, üzülür müydü?

Ölüm nedir? Bir şeyin ölümü iki biçimde tanımlanabilir: Birincisi; o şeyin yok olması, ikincisi; o şeyin belli bir miktarda farklılığa dönüşümüdür? Ölümü ikinciye göre tanımlama durumunda her ölü ölmeye devam edecektir. Yani bir şey ölmüyor, ölü olarak yaşıyor olacaktır. (Sanırım bu safhada hatlar karışabilir!) O halde, doğan hiçbir şey ölmeyecektir. Ölmenin yok olma olarak tanımlanması durumunda, ölmeyen bir şeye örnek olarak o, yani “iki kere iki dört eder” olabilir mi?

Bana öyle geliyor ki, Dostoyevksi’yi korkutan, “iki kere iki dört eder”in yukarıda verilen ölüm tanımlarına göre ölümsüz olmasıdır.

Dostoyevski, “bana kalırsa iki kere iki dört, büyük bir küstahlıktır ve etrafa tükürükler saçan, elleri belinde, yol kesen bir külhanbeyinin ta kendisidir” diyerek, o ölümsüz ya da hiç doğmamış bir şeye sataşıyor. Ayrıca, “iki kere iki dördün mükemmelliğine inanıyorum; fakat ondan daha üstün olduğuna inandığım şey, iki kere ikinin beş etmesidir” diyerek kendince rakipler yaratmaya çalışıyor.

Bütün bunlara karşın, esas problemin, “iki kere iki dört eder”in, Dostoyevski’ye “sikimden aşağı kasımpaşa” demesi olabilir.

İki kere ikinin dört etmesini “ölümün başlangıcı” olarak gören Dostoyevski, “iki kere iki dört eder”in neyin doğumunun başlangıcı olduğuna ilişkin bir yaklaşı sergilemiyor ya da sergileyemiyor ama tıkanıyor. Demek ki, Dostoyevski’nin bu konuda serseriliğin üst sınırı bu kadarmış.

Ölmeyi anlamak kolay olabilir! Ya doğmayı?

2. Şeyden Önermelere

İlk tartışma "şey"le başlamış ve "şey", "ney"le tohumlanmış olmalı. Yani, matematiğin anneannesi şey, dedesi ney olabilir.

Bu altbölümde, ne olduğu tam olarak tanımlanamayan "şey"den başlanıp, onun üzerine inşa edilecek önerme kavramı tanımlanarak, bunların özellikleri bu kitabın amacı için yeterli düzeyde verilecek.

2.1 Şey

En azından ezberi bozmak için, insanlığın en önemli keşfinin "şey" olduğunu söyleyelim[1]. Bir başka deyişle yapılan en büyük keşiflerden biri her biri soyut olmayıp fiziksel gerçek olan tekerleğin icadı, ateşin bulunması ya da uzaya gidilmesi olmayabilir. En büyük icat "şey"i hissetmek, anlamak ve sonucunda da onun resmini yapmak olabilir. Daha da ileri giderek, yapılan resme "hareket" vermek ve hatta onu "sonsuzun" ne olduğunu bile bilmeden sonsuza göndermek" olabilir;

$$x \to \infty$$

gibi.

Edmund Spenser[2] *şeyi, bir şeyi gösteren başka birşey* olarak tanımlıyor. Daha doğrusu bir başkası üzerinden anlamlaştırıyor. Bu yaklaşıma göre, bir şey, büyük bir olasılıkla bir şeye bağlı ve bu anlamda bağımsız değil.

Bir şey fiziksel olacağı gibi sadece ve sadece zihinde de olabilir. Başka türlü de olamaz[3]. Yani bir şey, fiziksel şey ve zihinsel şey olarak ikiye ayrılabilir.

[1]Şey kelimesi, ilk olarak ilkokulda ikinci ya da üçüncü sınıfta öğretmenin sorduğu soruya, Şenay adlı sınıf arkadaşımın "şeyle şeyi çarpacağız" yanıtıyla dikkatimi çekmişti. Öğretmenin beklediği yanıt, "üç ile beşi çarpacağız" biçiminde olduğundan, öğretmen, Şenay'ın yanıtını doğru kabul etmemişti. Aslında yanıt doğruydu!

[2]1552-1599 yılları arasında yaşamış İngiliz şair.

[3]Bir an için "dinsel şey" de eklenebilir ama bu da zihinsel şeyin içindedir.

Bunlar her ne kadar birbirlerinden bağımsız olsalar da "etle kemik gibi"dirler; birbirleriyle tuhaf bir ilişkileri var, biri olmadan diğeri olmuyor. Bu iki şey arasındaki farklılığı anlamak için ortaya çıkan kavrama **felsefe** deniyor. Yani felsefe şeyler arasındaki diyalog olarak tanımlanabilir. Biraz daha detaylandıralım: Felsefe şeyler ile o şeyleri temsil eden şeyler arasındaki ilişkiyi ölçmeye çalışan bir şeydir.

Şey ile o şeyi temsil eden bir başka şey aynı değildir. Örneğin, birine Hilbert'in bir resmini gösterip, "bu kim?" diye sorulduğunda, verilecek "Hilbert" yanıtı doğru olmayacaktır. Doğru yanıt, "Hilbert'i temsil eden bir şey" olmalı. Benzer biçimde, bazı harflerin dizisi olan "Hilbert", Hilbert değildir, Hilbert'i temsil eden şey topluluğudur.

Farklı iki fiziksel şey, fiziksel olmayan tek bir "değeri" temsil edebilir ve onun üzerinden "eşit" olabilir. Örneğin iki farklı 10 TL parası, kilosu 10 TL olan bir kilo patetes değeri üzerinden birbirlerine eşittir. Bir başka eşitlik ise 10 TL'nin bir kilo patatese eşit olmasıdır. Bu eşitliğe fiziksel anlamda eşitlik de denilebilir. Bunun yanında 10 TL'nin estetiği üzerinden zihne yansıyan bir değeri olabilir ki; buradan da bir zihinsel düzlemde farklı bir eşitlik kavramı akla gelebilir.

Zihinsel olan bir şey var mıdır? Bu sorunun yanıtı ancak ve ancak felsefik tartışmalar içerisinde aranabilir olsa da vardır/yoktur biçiminde bir yanıt şu ana kadar verilememiştir. Böyle bir tartışmaya, bir anlamda, *Armudun sapı, üzümün çöpü* detayına girmeden ve *akıllı düşünene kadar deli torun sahibi olur*, uyarısını dikkate alıp, ön sevişmeyi de fazla uzatmadan, o şeyin nasıl olması gerektiğinin tarif edilmesi gerekiyor. Tabii ki bunu yaparken, "tavuk yumurtadan mı yoksa yumurta tavuktan mı?" sorusuna horozun verdiği, "ben işime bakarım" yanıtı seviyesinde de olunulmayacak. "Şey şey şey" demeyi bırakıp, onun yerini alabilecek modern bir kelime, şeyin evrimleşmiş biçimi olan "sembol" kavramını tanımlayalım.

Alıştırmalar

2.1. Bir şey yazın.
2.2. Sonsuz şey yazın.
2.3. Sıfır şey yazın.
2.4. Eksi bir şey yazın.
2.5. Akıllı bir şey yazın.
2.6. Salakça birşey yazın.
2.7. Niye ve nasıl birşey yazdınız?
2.8. "x'i sonsuza göndermek", okura ne düşündürüyor?
2.9. "şey olmayan" ne var?
2.10. Ahmet Çevik "Modern matematik sadece şey ve şey-olmayan kavramlarının kullanılmasıyla da yapılabilir. Herhangi bir ikili bir sistem yeterli." diyor. Bu konuda siz ne düşünüyorsunuz?

2.2 Şeyden Sembole

Sembol, şeyin evrimleşmiş biçimidir. Thomas Hobbes sembollerin matematikte kullanımlarını "yakışıksız" ve "sevimsiz" buluyordu

Şey'den sembole bir geçiş örneği: Muhammet bin Musa el-Harizmi'nin 820'li yıllarda yazdığı cebir kitabınının[4] bir pasajı *"Eğer birisi size "onu iki parçaya böldüm ve bunlardan birini diğeriyle çarptım, sonuç yirmi birdi" derse, o zaman parçalardan birinin şey, diğerinin de on eksi o* **şey***, olduğunu bilirsiniz"* biçimindeydi. Günümüzde bu, sembolik olarak,

$$x(10 - x) = 21.$$

yazılır. Harizmi'nin **şey**'i, denklemde x olarak yerini alıyor.

Pierre Heégone, 1634 yılında yayınlanan *Curses mathematicus* adlı eserinin önsözünde, "herhangi bir dil kullanımına başvurmadan ispat yapabilmenin yeni bir yöntemini icat ettim" diyerek, kitabını semboller kullanarak yazdığını söylüyordu. Tobias Dantzig, cebirin semboller sayesinde kelimelerin köleliğinden kurtulduğu görüşündeydi. 1837'de De Morgen, matematikte sembol kullanımını *sembolik kalkülüs* adıyla kavramlaştırmak isteyerek, "Sembolik kalkülüsde uzmanlaşmış kişi, doğal olarak bunların anlamlarını da talep edecektir" diyordu. Bazı sembol tarihçileri, Gottfried Leibniz'in sembol yaratma ve kullanma konusunda bir deha olduğunu söylüyordu, yani Leibniz koyu bir sembol fanatiğiydi. Ama her düşünür "sembolist" değildi; politik felsefenin kurucularından biri olarak bilinen İngiliz felsefeci Thomas Hobbes, 1648'de sembollere "yakışıksız" diyor ve bunlara gelecekte "sevgiyle" bakılmayacağını açıklayarak matematiğin sembollerle anlatılmasına karşı çıkıyordu. Gelinen son nokta, matematiğin bir semboller oyunu olduğudur. Şunu da ifade etmek gerekir ki, bir matematik kitabının sadece ve sedece sembollerle ifade edilmesi matematiği görüntü olarak boğuyor, dolayısıyla edebi bir yazımı da olmalı.

Yunanca bir kelime olan sembol, kelime kökenleri *sum*("birlikte") ve *ballon* ("getirmek") olan iki kelimenin birleşimiyle elde edilen *sumbollon* olup, "bir araya getirme" anlamındadır. Kelimenin etimolojisi bir kişinin kimliği ya da iki kişi arasındaki ilişkinin saptanma yöntemine dayanıyor. Örneğin, bir fiziksel parça (dal, kemik, taş gibi) ikiye bölünüp, bu parçalar ilişki içerisinde olan iki kişiye verilerek, daha sonra, bu kişiler arasındaki ilişkinin ne olduğunun kanıtı bu parçaların birleştirilmesiyle yapıldığı ifade edilmekte. Bu anlamda, sembol bir çeşit kimlik işaretidir. Bu, bilinçli ve bilinşsiz düşüncelerin bağlantılarından

[4]Kitabın tam adı *El-Kitab'ul Muhtasar fi'l Hisab'il Cebri ve'l Mukabele* olup, çevirisi *Tamamlama ve Denklemleştirme Yoluyla Hesaplama Hakkında Özet Kitap.* Kitap başlığında geçen **cerb** kelimesi tazmin ya da tamamlama anlamındadır. Bu kelime kavram olarak *kaynaştırma* anlamındadır.

çıkan bir anlam olarak da yorumlanmakta. Bu konuda, özellikle matematik sembolleriyle ilgili bir bilgiye [36]'den ulaşıp, onun üzerinden geriye ve ileriye iz sürülebilir. Her ne kadar sembol köken olarak bu biçimde olsa da sembol bir gerçeğin zihnimize olan izdüşümünün zihnimizce dışarıya yansıtılan bir resmi ya da tepkisi olarak da görülebilir. Buna karşın, sembol üzerinden yapılacak "o ne, bu ne" gibi soruları ve yorumları en aza indirgemek için bu kavram bir tanım olarak aşağıdaki gibi verildi.

Tanım 2.1. ***Sembol*** anlamsız bir şeydir[5].

Bir sembolün "anlamsız"lık üzerinden tanımlanması o kavramı değersiz yapmıyor, tam tersine özgürleştiriyor. Bunun yanında sembol girişte verilen anlamda felsefik tartışmaların daha kolay anlaşılmasında bir araç da olabilir.

Fiziksel herşey "anlamlı"[6] olmasına karşın, anlamsızlık fiziksel bir gerçeklik olmadığından, tanımda geçen sembol bir fiziksel gerçekliği değil; sadece ve sadece zihnin ürettiği birşeyin resmi olup, zihnin inşa ettiği bir şeyi temsil ediyor. Peki bir sembol var mı? Yukarıdaki tanıma göre var olduğunu göstermek mümkün değil. Buradan yoktur sonucu da çıkmaz. Gerçekten de en az bir (zihinsel) sembol var olduğunu iddia eden birine, zihninde var olsa bile, "göster o zaman" denildiğinde gösteremeyecektir. Yani sembolün varolmasını istemekle varlığı gösterilemiyor. Bu durumda en az bir sembolün varlığı kabul edilmeli; eylemci olunmalı. Diğer türlü yola devam etmek mümkün değil.

> *Tek bir sembolle sonsuzu yaratma girişimi, tüm evreni bir sembole paketleme eylemidir. Bu, akıllı insanların eylemi olamaz; ancak "deliler" bunu düşünebilir*

Aksiyom 2.1 (Sembol, Varlık Aksiyomu)**.** *En az bir sembol var.*

Bu aksiyom gereği en az bir sembol var. Sembol, zihindeki bir şeyi temsil ediyor olmasından dolayı demek ki zihinde de en az bir şey olmalı.

Bir şey iki farklı sembolle de gösterilebilir. Örneğin, herhangi bir fiziksel şey kullanmadan zihinde tanımlanmış olan bir sayının farklı biçimlerde ve aynı anda birçok yerde temsil edilmesi gibi. Yukarıda verilen aksiyom gereği en az bir sembol var olduğuna göre, bu sembolü

$$|$$

ile gösterelim[7]. Tecrübelere bağlı olarak, tek bir tane sembol olması sıkıntılı bir durum[8]. Bu sıkıntı bir başka aksiyomla giderilebilir.

---

[5] Bakış açısına göre insanın var olması da anlamsız birşey olabilir ve bu yönüyle "anlamsız"lık kötü birşey olmayabilir.

[6] Gerçekten mi?

[7] Farklı biçimlerde de, örneğin "-" ile de gösterilebilir.

[8] Yalnızlık Allaha mahsustur!

Aksiyom 2.2 (İstenilen Çoklukta Sembol Aksiyomu)**.** *Verilen sembollerden farklı en az bir tane başka sembol vardır*[9].

Bu aksiyomda kullanılan temel yöntem daha sonra tanımlanacak olan bir çeşit "tümevarımsal" yaklaşımdır[10]. $|$ bir sembolü gösteriyorsa istenilen çoklukta sembol varlık aksiyomu kullanarak bu sembolden başka $||$ ile göstereceğimiz bir başka sembol daha var. Böylece

$$|, ||$$

ile gösterilen iki sembol oldu. Bu sembollerden başka, istenilen çoklukta sembol aksiyomu bir kez daha kullanarak, $|||$ ile gösterilen bir sembol daha elde edilir. Böylece üç tane farklı

$$|, ||, |||$$

sembol elde edilir. Bu şekilde semboller çoğaltılabilir. Bazı gösterimleri pratik olarak kullanmak için ***rakam sembolleri*** olarak bilinen

$$1,2,...,9$$

sembolleri kullanmaktan başka çare yok; tıpkı bu yazıyı yazarken kullanılan harfler, onları da kullanarak elde edilen kelimeler ve kelimeleri kullanarak elde edilen cümleler gibi. Bu rakamların herbirinin matematiksel bir tanımı var olmasına karşın bunları şu an için sadece sembol, yani anlamsız birşey olarak ele alıyoruz.

Gösterim kolaylığı açısından,

$$s_1 = |,$$

$$s_2 = ||,$$

$$s_3 = |||,$$

yazılabilir. Daha genel olarak, s_i, sadece ve sadece $|$ sembollerinden oluşan bir sembol ise, $s_{i+1} = s_i|$ yazarak,

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,...$$

[9]Bu aksiyomu "bir fazla sembol aksiyomu" olarak da adlandırabiliriz. Ancak hep "bir fazla"sı olacağından verilen isimlendirme sanırım yerinde.

[10]Tümevarım belirli bir kurala göre dizilmiş semboller topluluğunda bir sembole yüklenmiş anlamın "bir sonraki"ne taşınması durumunda, dizideki bütün sembollerin aynı anlamla donatılma varsayımı olarak tanımlanabilir.

sembolleri elde edilir. Gösterimde yer alan üç nokta, "böyle devam eder" anlamındadır. Demek ki | sembolünden hareket ederek istenilen çoklukta sembol tanımlanabilir ve bu sembollerin her biri s_i formunda gösterilebilir. s_i sembolleri yerine, örneğin v_i ve benzeri biçimde semboller de kullanabiliriz; bu konuda kısıtlamacı olunulmayacak, olunamaz da. Sonuç olarak, istenilen çoklukta sembolümüz var. Üstelik her yeni ürettiğimiz sembol için vergi ödemek zorunda olunmadığı gibi onlara "şerefli","şerefsiz" ya da "hain" gibi aptal sıfatlar da vermek gerekmez.

s bir sembol olsun denildiğinde söylenmek istenilen zihindeki şeyin, yani sembolün s ile gösterilmesidir. Okurun bu tür inceliklerin farkında olduğu varsayılacak.

Bir **sembol topluluğu** bir sembol olup, bu sembol topluluğuna ait denilen her şey bir sembol olacak. Yani, sembolleri olan bir sembol'e semboller topluluğu denir. Sembol topluluğunun varlığı için bir aksiyom gerekli.

Aksiyom 2.3. *Verilen semboller, sembolleri olan bir sembol vardır.*

Yani, bir semboller topluluğu da bir semboldür. $s_1, s_2, ...$ sembolleri verilsin. Sembolleri s_i'ler olan sembol topluluğunu S ile gösterecek olursak

$$S = \{s_1, ..., s_i, ...\}$$

yazılabilir[11].Yerine göre, bazen semboller topluluğuna **alfabe** denilebilir ve özel isimler verilebilir. Örneğin, sembolleri Türkçe harfler olan sembol topluluğuna **Türkçe alfabe** denilmesi gibi. Bu alfabe

$$T = \{a, b, ..., z\}$$

şeklinde gösterilebilir.

$p_1, p_2, ..., p_n$, $q_1, ..., q_m$ sembolleri verilsin. p, $p_1p_2...p_n$ ve q, $q_1q_2...q_m$ ifadelerini göstersin. Bu durumda $p_1p_2...p_nq_1q_2...q_m$ ifadesi pq ile gösterilir.

Tanım 2.2. S, bir semboller topluluğu olsun. Bir S-dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

i. s, S'de bir sembolse; s, bir S-dizidir.

ii. p ve q iki S-diziyse S'de pq bir S-dizidir.

iii. Bir S dizisi (i) ve (ii)'nin sonlu kez uygulanmasıyla S'e ait sembollerin yanyana yazılmasıyla elde edilir.

Örneğin, S, sembolleri x, y, z olan bir sembol topluluğu ise,

[11] "{" ve "}" (curly brackets, braces) sembolleri standarttır. Bu semboller ilk olarak 1895'de Georg Cantor tarafından verilmiştir.

$$x,\ xx,\ xyx,\ zxx$$

ifadelerinin her biri bir S dizisidir ama $txyz$ bir S dizisi değildir.

Alıştırmalar

2.11. Her sembol, sembolü sadece ve sadece | olan sembol topluluğunun dizisiyle gösterilseydi hayat nasıl olurdu?

2.12. Türkçe alfabe 29 sembolden oluşmakta ve belirli bir düzende sıralanmakta. k'ıncı sırada bulunan harfi (sembolü), k tane "|" sembolü "−" sembolünün arasına koyarak gösterelim. Örneğin, b harfi ikinci sırada olduğundan b harfini $-||-$ ile gösterelim. Bu gösterim altında ZONGULDAK sözcüğünü yazmak için kaç tane | sembolünün kullanılması gerekir.

2.13. Bir S-dizisindeki sembollerin toplam sayısına o dizinin uzunluğu denir. s, S semboller topluluğunun bir sembolü ise S dizisi s'nin uzunluğu nedir? S dizisi ss'nin uzunluğu nedir?

2.14. Bir S dizisi "sonsuz" olabilir mi?

2.15. Sonsuz sayıda sembol kavramı tanımlanmamış olsa da sezgisel olarak "İstenilen çoklukta sembol" ile "sonsuz sayıda sembol" arasında ne fark olabilir?

2.2.1 Bazı Semboller

Günümüzün matematiğini sembolsüz yapmaya kalkmak herhalde kabus olurdu. Bu altbölümde matematiğin "temel" ve standartlaşmış sembollerinden olan, eşitlik, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işaretlerinden bahsedilecek. Diğer matematiksel semboller yeri geldiğinde, dipnotlar biçiminde verilecek.

Eşitlik =: Eşitlik, *aequalis* latincesiyle, iki tarafın aynı olduğu anlamında olup, matematik kitaplarında bu anlamda kullanılıyordu. Gemini ya da Gemove olarak adlandırılan eşitlik sembolü, = ilk kez, takriben 1512-1558 yılları arasında yaşamış Fizikçi ve matematikçi Robert Recorde tarafından, 1557'de yazılmış olan *Whetstone of Witte* (Mantığın Bileytaşı) adlı eserinde kullanılmıştır. Recorde bu eserinde *""Is equal to" kelimelerinin bıktırıcı tekrarından kaçınmak için çalışmalarımda sık sık yaptığım gibi aynı uzunlukta bir çift çizgi kullanacağım: =, zira iki şey bundan daha eşit olamaz"* diyordu. Recorde eserinde = sembolünü kullanmadan önce yaklaşık olarak "is equal to" kelimelerini 250 kez kullanmıştı.Alman matematikçi Gottfried Leibniz(1646-1716), eşitlik sembolü yerine çoğu zaman köşeli n harfini kullandı. Bunun iki taraf arasındaki köprü anlamına geldiği tahmin ediliyor.

Toplama +: Artı olarak adlandırılan + sembolü farklı anlamlarda kullanılır. Matematikteki anlamı bir sayının işaretini gösterme ya da toplama anlamındadır. Alferd North Whitehead, "Denizlerin imparatorluğunu İngilizlere, karaları Fransızlara bulutların hakimiyetini de Almanlara veren eski bir nükte vardır. Gerçekten de Almanlar + ve −'yi bulutlardan almış olmalıdır. " demekte. Bu işaretin, ilk olarak Nicole Oresme'nin *Algorismus proportionum*'da latince " "and" anlamına gelen "et" kelimesinin kısaltması olarak kullanıldığı tahmin edilmekte. Bu işareti, Johannes Widmann 1489 tarihli *Behende und* *hübsche Rechnung auff allen Kauffmanschafften* (Ticarette Hızlı Düzgün Hesaplama) adlı eserinde "beklenenden fazla" anlamında kullanıyordu (örneğin, $+2$, beklenenden 2 fazla anlamında gibi). Günümüzdeki anlamında bu sembol ilk olarak Michael Stifel'in 1544 tarihli *Arithmetica Integra* isimli eserinde kullanıldı. O dönemde bu kitapta hâlâ $=$ sembolü kullanılmıyordu. Bu dönemlerde toplama için kullanılan notasyonlardan biri "p" ya da işlemi nicelikten ayırt etmek için p'nin üstüne ya da ortasına kısa bir çizgi atma biçiminde oluyordu. Tartagli toplamayı ϕ biçiminde kullanıyordu.

Çıkarma $-$: Eksi işaretinin kullanımı Diophantos dönemine kadar gitmekte. Diophantos, Arithmetika'sında $-$ yerine, yukarı ya da aşağıya yönelmiş oklar kullanıyordu. Johannes Widmann, yukarıda bahsedilen eserinde $-$ sembolünü "beklenenden az olma" anlamında kullanıyordu. Michael Stifel ise, eserinde günümüz anlamındaki çıkarma olarak kullanıyordu.

Çarpma $\times$: Günümüzde genellikle çarpma sembolü olarak $\times$ sembolü kullanılır. Harriot, çalışmalarında çarpılanların arasına "." işareti koyarken, Descartes yanyana yazmayı tercih ediyordu. Andreas haçı olarak bilinen $\times$ çarpma sembolü ilk olarak İngiliz matematikçi William Oughtred'in (1574-1660), 1631 tarihinde yayınlanan *Clavis mathematicae* adlı kitabında kullanılmıştır. Bu esere kadar a ve b gibi iki sayının çarpımı ab ile gösteriliyordu. Buna karşın Michael Stifel, bu işaret yerine "M"' sembolünü kullandı. Günümüzde, Harriot, Descartes ve Oughtred tarafından çapma için kullanılan sembollerin üçü de kullanılmaktadır.

Bölme $\div$: William Oughtred, Clavis Mathematicae adlı eserinde bölme sembolünü ":" ile gösterdi. Arap kesir sembolünde iki niceliği bölmek için $a-b$, a/b ve $\frac{a}{b}$ yazılımı kullanılırdı. Günümüzde bölme sembolü olarak Oughtred ve Arap gösteriminin bir karışımı olarak "$\div$" sembolü kullanılmakta. Bu gösterim ilk kez Johann Heinrich Rahn tarafından 1659'da kullanılmıştır. Amerika Matematik Topluluğu 1923 yılında yapmış olduğu bir açıklamada bölme işareti olarak : ve $\div$ yerine / işretinin kullanılmasını önermiştir.

2.3 Sembolden Önermesel Yapıya

Felsefenin ve mantığın ne olduğunu anlatmak (aslında anlatılamaz, tartışılabilir!) zor olsa da o kavramlardan üretilen önermesel yapıyı (mantığı) tarif etmek teknik olarak daha kolaydır. Bunun nedeni, önermesel yapının belirli sembollerle tanımlanabilir olmasıdır. Tanımda kullanılacak bazı semboller, rakamlar kadar standarttır. Bu standart sembollerden önce iki tanesi aşağıda verilen tanımda olduğu gibi gösterilir ve adlandırılır.

Tanım 2.3. ***Önermesel eklemler***den ikisi, aşağıdaki sembollerden oluşur.

$\neg$: ***değilleme eklemi***.

$\to$: ***koşulluk eklemi*** .

Değilleme eklemi bir anlamda bir sembolün "zıttını" belirtir. Bu açıdan oldukça doğal bir eklemdir. Benzer biçimde koşulluk eklemi de, "Ayşe, Ali'nin annesi ise Ali'nin annesinin adı Ayşe'dir" ifadesinde yer alan "ise" kadar doğaldır. Okur kurgunun ne olacağını ve nerelere gideceğini farketmiş olmalı.

Değilleme eklemi ve koşulluk eklemine bir semboller topluluğu eklenerek önermesel yapı tanımlanır.

Tanım 2.4. Bir **önermesel yapı** $\mathcal{P}$, P bir semboller topluluğu olmak üzere, sembolleri P'nin sembolleri, değilleme eklemi, koşulluk eklemi ve açma ve kapama parantezlerden oluşan semboller topluluğudur.

Tanımda yer alan "parantez" (ayraç) sembolleri genellikle

$$(,\ ),\ [,\ ],\ \{,\ \{$$

gibi sembollerle gösterilir ama bunlarla sınırlı olmayabilir.

$$(,[\text{ ve }\{$$

sembollerine **açma parantezleri** ve

$$),]\text{ ve }\}$$

sembollerine **kapama parantezleri** denir. Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda, $\neg$, $\to$ ve açma ve kapama parantez sembollerinin P'nin sembolü olmadığı varsayılacak. Ayrıca $\neg$ ve $\to$ sembollerinin birbirlerinden ve parantez sembollerinden farklı olduğunu söylemeye bile gerek yok. P'nin her sembolüne önermesel yapı $\mathcal{P}$'nin bir **temel önerme**si denir. Kolaylık olması açısından $\mathcal{P}$ önermesel yapının temel önermeleri, yani P'nin sembolleri

$$p_0, p_1, p_2, \dots$$

ile gösterilebilir. P'de hiç sembol olmayabileceği gibi, sonlu sayıda ya da istenilen kadar çoklukta sembol olabilir.

Alıştırmalar

2.16. Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda her temel önermenin uzunluğu 1 olan bir P dizisi olduğunu gösterin. Uzunluğu 1 olan bir $\mathcal{P}$ dizisi bir temel önerme olmak zorunda mı?

2.17. Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapının en az kaç sembolü vardır?

2.4 Önermesel Yapıdan Önermelere

$\mathcal{P}$ bir önermesel yapı olsun. Aşağıdaki yöntemlerin herbirine **önerme üretim kuralı** denir.

i. Her temel önerme bir önerme.

ii. p bir önerme ise $(\neg p)$ bir önerme.

iii. p ve q iki önerme ise $(p \to q)$ bir önerme.

Aslında yukarıdaki tanımın, önermenin ne demek olduğu tanımlanmadan verilmiş olmasından dolayı eksikliği var. Ama bunun üzerinden önerme tanımı yapılabilir. Sembolleri

$$(,\ ),\ \neg,\ \to,\ p_i$$

sembollerinden oluşan sembol topluluğunu $\mathcal{P}_1$ ile gösterelim, yani önerme üretim kuralı gereği, aşağıdaki S_1 dizilerinin herbiri,

$$p_i,\ (\neg p_i) \text{ ve } (p_i \to p_j)$$

bir önermedir. Sembolleri bu tür olan sembol topluluğunu P_1 ile gösterelim. Şimdi, $\mathcal{P}_2$, sembolleri P_1'in sembollerinden ve (,), $\neg$, $\to$ sembollerinden oluşan sembol topluluğu olsun. Bu durumda, p ve q, P_1 sembol topluluğunun sembollerinden ikisini göstermek üzere,

$$(\neg p),\ (p \to q)$$

$\mathcal{P}_2$'nin bir dizisi ve bir önermedir. Sembolleri bu tür önermeler olan sembol topluluğunu P_2 ile gösterelim. Bu yöntem takip edilerek her n sayısı için bir P_n sembol topluluğu elde edilir. Dikkat edilirse, her n için

i. P_n'nin her sembolü bir önermedir.

ii. P_n'nin her sembolü, P_{n+1}'nin bir sembolüdür.

Şimdi önermenin tanımı verilebilir.

Tanım 2.5. $\mathcal{P}$ bir önermesel yapı olmak üzere, her n doğal sayısı için, P_n yukarıdaki gibi tanımlansın. P_n'lerin "bileşimlerinin" herbir sembolüne bir **önerme** denir.

Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda bir p önermesi için aşağıdakilerin sadece ve sadece biri gerçekleşir.

i. p, bir temel önermedir.

ii. $p = (\neg q)$ olacak biçimde bir q önermesi var.

iii. $p = (q \to r)$ olacak biçimde p ve q önermeleri var.

Her önerme, sembolleri temel önerme, açma ayracı, kapama ayracı ve koşulluk ekleminden oluşan sembol topluluğunun bir dizisidir. Bazen önermelerin yazımı uzun olabilir. Bu nedenle, önermelerin kısaltılarak gösterilmesi söz konusudur. Okurun genel çerçeve içerisinde tanımlanacak kısaltmaları takip edebileceği varsayılacak. Bir önermenin **asal gösterimi**, önermenin yazımında sadece ve sadece açma parantezi, eklemleri ve temel önermelerin gözüküyor olmasıdır. Örneğin, p, q önermeleri sırasıyla $(\neg p_i)$, $(p_j \to p_k)$ önermesini göstersin. $(p \to q)$ önermesinin asal gösterimi

$$((\neg p_i) \to (p_j \to p_k))$$

olur.

Önermesel yapıda, açma parantezi ve kapama parantezi kullanılmadan önermeler gösterilebilir mi? Gerçekten yapılabildiğini bir an için varsayalım. p ve q önermeleri verilsin. İki farklı önerme tanımlayabiliriz.

Birinci önerme: (iii) gereği $p \to q$ bir önerme ve (ii) gereği bunun değili $\neg p \to q$ bir önermedir.

İkinci önerme: (ii) gereği p önermesinin değili $\neg p$ bir önerme ve (iii) gereği $\neg p \to q$ bir önermedir.

Görüldüğü gibi iki farklı önerme aynı gösterimle gösterilmiş oldu. Ortaya çıkan bu türden bir karmaşıklığı önlemek için açma ve kapama ayraçlarının kullanılmasının gerekliliği konusunda okurların hemfikir olduğu varsayılacaktır. Buna karşın, bazı önermelerde, açma ve kapama parentezlerinin çıkartılması anlam kaymasına neden olmayacakır.

Tanım 2.6. $\mathcal{P}$ önermesel yapıda, p ve q önermeleri için:

i. $(\neg p)$ önermesinin **kısaltılmışı** $\neg p$,

ii. $((\neg p) \to q)$ önermesinin **kısaltılmışı** $\neg p \to q$,

iii. $(p \to q)$ önermesinin **kısaltılmışı** $p \to q$

olarak gösterilir.

Yukarıdaki tanımın kısaltılmış önermeler üzerinden verilmediğine dikkat edilmeli. Örneğin, p, q ve r önermeleri verilsin.

$$((p \to q) \to (q \to r))$$

önermesinin kısaltılmışı

$$(p \to q) \text{ ve } (p \to r)$$

önermeleri için

$$(p \to q) \to (q \to r)$$

olur. Kısaltılmış önermeler üzerinden tanımlama yapılmış olsaydı, bu önermenin kısaltılmışı $p \to q \to q \to r$ ifadesine dönüşürdü. Ama bu, ne bir önermedir ne de bir önermenin kısaltılmışıdır.

Temel olmayan bir önerme p,

$$(\neg q) \text{ ya da } (q \to r)$$

biçimindedir. Birinci durumda q'ya p'nin **altönermesi** ve ikinci durumda q ve r'nin her ikisine de p'nin altönermeleri denir. p'nin bir altönermesinin altönermesi de p'nin bir altönermesi olarak adlandırılır.

Alıştırmalar

2.18. Bir önermesel yapıda p bir önerme ise (p)'nin bir önerme olması gerekmediğini gösterin.

2.19. Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda her önerme bir P dizi midir?

2.20. $\mathcal{P}$ bir önermesel yapı ve S, sembolleri sadece ve sadece (,), $\neg$, $\to$ ve temel önermeler olan sembol topluluğu olsun. Uzunluğu 2 olan önerme ve S-dizisi var mıdır?

2.21. Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda temel olmayan bir önermenin $(\neg p)$ ya da $(p \to q)$ biçiminde olduğunu gösterin.

2.22. Bir önermesel yapıda bir önermenin uzunluğu, önermenin asal yazımının dizi uzunluğu olarak tanımlanır. Önerme p ile gösteriliyorsa, uzunluğunu $u(p)$ ile gösterelim. Bir önermesel yapı için aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. Temel önermenin uzunluğu 1 olur, yani, $u(p_i) = 1$.

ii. p önermesi için $u((\neg p)) = u(p) + 3$.

iii. p ve q önermeleri için $u((p \to q)) = u(p) + u(q) + 3$.

iv Uzunluğu 2, 3 ve 6 olan önerme yok.

v. Uzunluğu 4 olan önerme $(\neg p_i)$ formundadır.

vi. Uzunluğu 5 olan önerme $(p_i \to p_j)$ biçimindedir.

vii. Her $n \geq 7$ için uzunluğu n olan önerme var.

2.23. Bir p önermesi için $u(\neg p)$ tanımlandı mı?

2.5 Önermeden Değere

S bir sembol topluluğu olmak üzere, S'nin herbir sembolü 0 ya da 1 sayılarından sadece biriyle işaretlenebilir. Bu işaretleme farklı biçimlerde olabilir. Örneğin, S'nin her sembolü 0 ile işaretlendiği gibi, her sembol 1 ile de işaretlenebilir. Ancak S'nin bir elemanının aynı zamanda hem 0 hem de 1 ile işaretlenmesine izin verilmeyecek.

S'nin s sembolünün 0 ile işaretlenmiş olması durumunda

$$d(s) = 0$$

yazılabilir. Benzer biçimde s, 1 ile işaretlenir ise

$$d(s) = 1$$

yazılabilir. S'nin her elemanı bir d aracıyla işaretlenir ise

$$d : S \to \{0, 1\}$$

ile gösterilir. d, bir "fonksiyon" olup, daha özel olarak d'ye **değerlendirme fonksiyonu** ya da kısaca **değerlendirme** denir[12]. Bir sembol topluluğunda değerlendirme birden fazla olabilir. Örneğin, bir n doğal sayısı için n tane sembolü olan bir sembol toplulul uğunun 2^n tane değerlendirmesi vardır.

Bir önermesel yapıda önermelere şu ana kadar "değer" verilmedi. Önermeler üzerinden tanımlanacak değer kavramı sonucunda farklı iki önermenin belirli bir değerlendirmeye göre değerleri aynı olabileceği gibi, bundan daha kuvvetlisi, her değerlendirmeye göre değerleri de aynı olabilecektir. Bu yaklaşımla, önermeler farklı olsa bile bu farklılığın biçimi değer kavramı üzerinden daha net anlaşılabilir ve sınıflanabilir.

$\mathcal{P}$ bir önermesel yapı olmak üzere, P'nin her sembolü, yani $\mathcal{P}$ önermesel yapının her temel önermesine "doğru" ya da "yanlış" olarak adlandırılan işaretlerden sadece biri verilir. Bu işaret doğru ise 1 ve yanlış ise 0 yazılarak, P sembol topluluğundan $\{0, 1\}$'e bir değerlendirme tanımlanır. Bu fonksiyon d_P ya da $d : P \to \{0, 1\}$ gibi yazımlarla gösterilebilir. $d(p_i)$'ye p_i önermesinin d'ye göre **değeri** denir.

S ve Q iki sembol topluluğu olsun. S'nin her sembolü, Q'nun bir sembolü oluyorsa, Q, S'i kapsar denir ve $S \subseteq Q$ yazılır. $S \subseteq Q$ olmak üzere, $d_S : S \to \{0, 1\}$ ve $d_Q : q \to \{0, 1\}$ iki fonksiyon olsun. S'nin her sembolü s için

$$d_Q(s) = d_S(s)$$

oluyorsa, d_Q, d_S'nin bir **genişlemesi** ve d_S'ye d_Q'nın bir kısıtlanışı denir.

Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda verilen bir değerlendirme d, bütün önermelere genişleyebilir, yani:

Teorem 2.1. *d, $\mathcal{P}$ önermesel yapının bir değerlendirmesi ve $\overline{P}$, sembolleri bu yapının önermeleri olan sembol olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\overline{d} : \overline{P} \to \{0, 1\}$ fonksiyonu vardır.*

i. *$\overline{d}$, d'nin bir genişlemesidir.*

ii. *Her önerme p için $\overline{d}((\neg p)) = 1 - \overline{d}(p)$,*

[12] Fonksiyon kavramı henüz tanımlanmamış olsa da okurun ne denilmek istendiğinin farkında olduğunu varsayıyoruz.

iii. *Her önerme p ve q için $d((p \to q)) = 1 - \overline{d}(p) + \overline{d}(p)\overline{d}(q)$.*

Ayrıca bu koşulları sağlayan fonksiyon tektir.

Kanıt: Her n sayısı için P_n, Tanım 1.5'de olduğu gibi tanımlansın. Bu durumda $P = P_1$ olur. $d_n : P_n \to \{0,1\}$ fonksiyonu d'nin bir genişlemesi olsun. Böyle bir genişleme $n = 1$ için var. $d_{n+1} : P_{n+1} \to \{0,1\}$ fonksiyonu, p ve q, P_n'de önermeler olmak üzere,

i. $d_{n+1}(p) = d_n(p)$,

ii. $(\neg p)$, P_{n+1}'in bir önermesiyse $d_{n+1}((\neg p)) = 1 - d_n(p)$,

iii. $(p \to q)$, P_{n+1}'in bir önermesiyse

$$d_{n+1}((p \to q)) = 1 - d_n(p) + d_n(q) - d_n(p)d_n(q)$$

olarak tanımlansın. d_{n+1}, d_n'nin bir genişlemesidir. "Tümevarımla" her n için d_{n+1}, d_n'nin genişlemesi ve $d_1 = d$ olacak biçimde

$$d_1,\ d_2, ...$$

fonksiyonları elde edilir.

$$\overline{d} : \overline{P} \to \{0,1\}$$

fonksiyonu, p, P_n'nin bir önermesiyse

$$\overline{d}(p) = d_n(p)$$

olarak tanımlansın. $\overline{d}$, istenilen özellikte bir fonksiyondur. Teklik ise yine P_n'ler üzerinden tümevarımla gösterilir. □

Yukarıdaki teoremde yer alan d'nin genişlemesi olan $\overline{d}$ fonksiyonu, bir karışıklık olmadığı sürece, yine d ile gösterilebilir. Bu fonksiyona da $\mathcal{P}$ önermesel yapının bir değerlendirmesi denir.

Bir önermesel yapıda her değerlendirme için değeri 1 olan önermeye **hepdoğru** ve her değerlendirmeye göre değeri 0 olan önermeye **hepyanlış** denir. Bir önermenin hepdoğru olması için gerek ve yeter koşulun, önermenin değilinin hep yanlış olması olacağı açık. Her p önermesi için

$$p \to p$$

önermesi verilen herhangi bir d değerlendirmesi için,

$$d(p)d(p) = d(p)$$

olması kullanılarak,

$$d((p \to p)) = 1 - d(p) + d(p)d(p) = 1 - d(p) + d(p) = 1$$

olur. Yani her önerme p için, $(p \to p)$ önermesi hepdoğru olur.

Bir önermenin hepdoğru ya da hep yanlış olduğu, klasik mantık kitaplarının hemen hemen hepsinde, önermelerin alacağı değerler bir tablo üzerinde gösterilerek yapılır. Örneğin, içerisinde toplam n farklı önerme bulunacak şekilde ifade edilen bir önermeler toplululuğu için yapılacak tablo, sütunlara önermeleri yerleştirmek için n sütun ve olası değerlendirmelerin yer alacağı 2^n kadar satır sayısı olan $n \times 2^n$ büyüklükte dikdörtgen olacaktır. Verilen sonlu sayıda önermeler için bütün değerlendirmeler şu yöntem izlenerek verilebilir: $q_1, ..., q_n$ önermeleri verilsin. Her bir q_i önermesi için bir sütun ve her $1 \leq j \leq 2^n$ için bir değerlendirme satırı açalım. Elde edilen $n \times 2^n$ birimli dikdörtgenin içine 0 ve 1 sayılarını şöyle yerleştirelim: q_i'ninci sütuna baştan başlayarak ilk 2^{n-i} kısmına 0, sonraki 2^{n-i} kısmına 1, sonraki 2^{n-i} kısmına tekrar 0 yazarak ve bu şekilde devam ederek sütun doldurulsun. Bu yolla, olası bütün değerlendirmeler verilmiş olur. Bunu daha formel olarak şöyle ifade edebiliriz: Değerlendirmeler

$$d_1, ..., d_{2^n}$$

olmak üzere, her i için,

$$0 \leq k \leq 2^i - 1 \text{ ve } k2^{n-i} < j \leq (k+1)2^{n-i}$$

eşitsizliğini sağlayan j'ler için,

$$d_j(q_i) = \begin{cases} 0 & ;\text{k çift} \\ 1 & ;\text{k tek} \end{cases}$$

olarak tanımlanabilir.

Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda verilen iki p ve q önermelerin denk olması, her değerlendirme d fonksiyonu için

$$d(p) = d(q)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda $p \equiv q$ yazılır[13]. Aşağıdakilerin doğruluğu verilen p, q ve r önermeleri için kolaylıkla gösterilebilir:

i. $p \equiv p$.

ii. $p \equiv q$ ise $q \equiv p$.

iii. $p \equiv q$ ve $q \equiv r$ ise $p \equiv r$.

[13]Matematikte, "$\equiv$ " sembolüne "denklik sembolü" denir.

Verilen iki önermenin denk olduğu bir önceki paragrafta bahsedilen tablolar yapılarak gösterilebileceği gibi, bazı önermeler için basit işlemlerle de gösterilebilir. Örneğin bir p önermesinin $(\neg(\neg p))$ önermesine denk olduğu verilen d değerlendirmesi için,

$$d((\neg(\neg p))) = 1 - d((\neg p)) = 1 - (1 - d(p)) = d(p)$$

eşitliğinden elde edilir.

Denk önermelerin çarşaf çarşaf listesi kitapta verilmeyecek. Önermelerin denkliği üzerine tanımlı cebirsel yapı özelliklerini çağrıştıran Alıştırma 1.17 denklik kavramının daha kolay anlaşılmasını sağlayabilir.

Alıştırmalar

2.24. $\mathcal{P}$ bir önermesel yapı olsun. p ve q önermeleri için aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin.

i. $d(((\neg p) \to q)) = 1$.

ii. $d(p) = 1$ ya da $d(q) = 1$.

2.25. $\mathcal{P}$ bir önermesel yapı olsun. p ve q önermeleri için aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin.

i. $d((\neg((p \to (\neg q)))) = 1$.

ii. $d(p) = 1$ ve $d(q) = 1$.

2.26. Temel önerme sayısı n olan bir önermesel yapıda 2^n tane değerlendirme (temel önermelerde tanımlı) olduğunu gösterin.

2.27. (mantıksal sonuç) Bir önermesel yapıda p ve q önermeleri verilsin. Bir d değerlendirmesi için p ve $p \to q$ önermelerinin değeri 1 ise q'nın değerinin de 1 olduğunu gösterin. Bu durumda, q'ya p ve $p \to q$'nın **mantıksal sonucu** denir.

2.28. Bir önermesel yapıda p bir öneme ve q, p'nin bir altönermesi olsun. p önermesinde q yerine r önermesi yazılarak elde edilen önerme s ile gösterilsin. Bir d değerlendirmesine göre $d(q) = d(r)$ ise $d(p) = d(s)$ olduğunu gösterin. Ayrıca $q \equiv r$ ise $p \equiv s$ olduğunu gösterin. Bunların terslerinin, yani $d(p) = d(s)$ ise $d(q) = d(r)$ olması gerekmediğini gösterin.

2.6 Birkaç "Eklem"

Bir önermesel yapının iki sabit sembolü değilleme ve koşul eklemleriydi. İşlemleri kolaylaştırmak ve kısaltmak için üç eklem daha eklenecek[14].

Önerme kavramını çok az da olsa duyan bir okur şu ya da bu şekilde, bu kavram içinde

ve, ya da, veya

[14]Değilleme ve koşul eklemlerine bağlı olarak tanımlanacak ve denklik kavramı üzerinden işlem görecek olan bu eklemler genel mantık teorisinde değilleme ve koşul eklemlerinden bağımsızdır. Bu konu, kitabın kapsamında olmayacak.

terimlerini duymuştur. Burada geçen *veya* ve *ya da* aynı anlamlarda kullanılacak. $\vee$ ve $\wedge$ sembolleri sırasıyla **tikel eklem** ve **tümel eklem** olarak adlandırılır ve okurken *ya da* (*veya*) ve *ve* olarak okunur.

Bu yeni eklemler, Alıştırma 13 ve Alıştırma 14 dikkate alınarak, günlük yaşamda kullanılan "ve" ve "ya da" anlamlarına ters düşmeyecek biçimde önermesel yapıya eklenerek, bazı önermelerin kısaltmaları yapılabilir.

Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda verilen p ve q için,

i. $((\neg p) \rightarrow q)$ önermesi $p \vee q$,

ii. $(\neg((p \rightarrow (\neg q)))$ önermesi $p \wedge q$

olarak kısaltılır. Daha önce yapılan kısaltma da göz önüne alarak

$$((\neg p) \rightarrow q)$$

önermesi

$$\neg p \rightarrow q \text{ ve } p \vee q$$

biçiminde kısaltılmış olur.

p ve q önermeleri için

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

önermesinin bir değerlendirmesinin doğruluk değerinin doğru olması için gerek ve yeter koşulun, p ve q önermelerinin doğruluk değerlerinin eşit olması olacağı kolaylıkla gösterilebilir. Bu bilginin vermiş olduğu ceseratle,

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

önermesi

$$p \leftrightarrow q$$

ile kısaltılarak gösterilir. Burada geçen $\leftrightarrow$ sembolüne **karşılıklı koşulluk eklemi** denir.

Sonuç olarak önermelerin kısa yazılımlarını sağlamak için önermesel yapıya

$$\vee, \wedge, \leftrightarrow$$

sembolleri eklenmiş oldu.

Tanımda yapılan kısaltmaların oldukça fazla avantajları olacak. Bunlardan biri, p ve q önermeleri için $p \vee q$ ve $q \vee p$ önermeleri aynı olmasa da denk olurlar. Bunun sonucu olarak, $p \vee q$ ve $q \vee p$ önermeleri birçok açıdan "aynıymış" gibi görülebilecek.

Alıştırmalar

2.29. $\mathcal{P}$ bir önermesel yapı olmak üzere, p ve q önermeleri için $p+q$, $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ önermesini ve pq, $p \wedge q$ önermesini göstersin. Ayrıca $\mathbf{1}$ ve $\mathbf{0}$ sırasıyla hepdoğru ve hep yanlış iki önerme olsun. Aşağıdakilerin sağlandığını gösterin.

i. $p + (q + r) \equiv (p + q) + r$.

ii. $p + p \equiv \mathbf{0}$.

iii. $p + \mathbf{0} \equiv \mathbf{0} + p \equiv p$.

iv. $p + q \equiv q + p$.

v. $p(qr) \equiv (pq)r$.

vi. $p\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}p \equiv p$.

vii. $p(q + r) \equiv pq + pr$.

viii. $pq \equiv qp$.

ix. $pp \equiv p$.

x. $p\neg p \equiv \mathbf{0}$.

2.7 Aksiyom, Kanıt ve Teorem

Hiçbir mantıksal aksiyom bir erkek gibi dırdır etmez (şaka şaka). Mantık felsefenin kontrol altına alınan bölgesidir..

Bir önermesel yapıda verilen bir önermenin hepdoğru olması o yapıda verilen her değerlendirmeye göre değerinin doğru olması olarak tanımlanmıştı. "Mantıksal aksiyomların" değeri her önermesel yapının her değerlendirmesine göre doğru olacak.

p, q ve r önermeleri için aşağıdakilerin herbirine bir **mantıksal aksiyom** denir.

i. $(p \to (q \to p))$.

ii. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

iii. $(\neg p \to \neg p) \to (p \to q)$.

Bir önermesel yapıda her mantıksal aksiyomun hepdoğru olduğu basit işlemlerle gösterilebilir. Ama tersi doğru değildir. Gerçekten $(p \to p)$ önermesi hepdoğru ve uzunluğu 5 olmasına karşın mantıksal aksiyomların uzunluğu 9 dan büyüktür.

Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda verilen bir

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

önermeler dizisinde $1 \leq i, j < k \leq n$ için, q_j önermesi $q_i \to q_k$ oluyorsa, q_k'ya bu dizinin **modus ponens önerme**si denir.

$\mathcal{P}$ bir önermesel yapı olmak üzere sıralanmış

$$q_1, q_2, ..., q_n$$

önermeler dizisinde her $1 \leq k \leq n$ için, q_k bir mantıksal aksiyom ya da bir modus ponen önerme ise, bu diziye bir **biçimsel kanıt**[15] ve q_n'ye bir **biçimsel teorem** denir[16]. Ayrıca bu biçimsel kanıta q_n biçimsel teoreminin kanıtı denir[17].

Bu tanımlamaya göre:

i. Bir kanıtın ilk iki önermesi bir mantıksal aksiyomdur.

ii. Her mantıksal aksiyom bir teoremdir.

iii. Bir teorem hepdoğrudur.

iv. Bir kanıtta yer alan her önerme bir teorem olur.

v. Bir teoremin istenilen çoklukta kanıtı vardır.

vi. En az bir temel önermesi olan önermesel yapının istenilen çoklukta mantıksal aksiyomu vardır.

Bir önermenin teorem olduğunu göstermek genelde hepdoğru olduğunu göstermekten, yöntem olarak daha zor olabilir. Örneğin verilen p, q ve r önermeleri için aşağıda verilen önermelerin herbiri hem teorem (göstermesi zor), hem de hepdoğrudur (göstermesi kolay). Aşağıdaki teoremlerin listesi [38]'dan alınmıştır.

i. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$.

ii. $\neg\neg p \rightarrow p$.

---

[15]Kanıt kelimesi köken olarak "test etmek" anlamında olan, latince *probare* kelimesinden gelmektedir. Matematiksel kanıtın gelişimi antik Yunan matematiğine ve geometriye dayanır. Aritmetik ve cebirin İslam matematkçileri tarafından geliştirilmesiyle kanıt kavramı bu alanlarda da daha genel olarak uygulanmaya başlanmıştır. Mevcut kayıtlara göre matematik tarihinde Thales bir çemberin çapının çemberi iki eşit parçaya böleceğini kanıtlayarak ilk kanıtı verimiştir (*A History of Mathematical Proof: Ancient Greece to the Computer Age*). Diğer taraftan Krantz'ın *The History and Concept of Mathematical Proof* isimli makalesinde, ilk kanıtın Babillere ait olan Pisagor teoreminin kanıtı olabileceği ifade edilmekte. Yine aynı makalede "teorem" kelimesinin ilk olarak MÖ 408-355 yılları arasında yaşamış olan Eudoxus olduğu ifade edilmekte. Kanıt kavramıyla ilgili birçok detaylı bilgiye Krantz'ın bu makalesinden ulaşılabilir. Bir Matematikte yapılan kanıtların farklı yöntemleri vardır; düz kanıt, devrik kanıt, çelişkiye indirgeme ve tümevarımsal kanıt gibi. Bu yöntemler hakkında Türkçe kaynaklardan biri [14]'dir.

[16]Teorem, etimolojisi Yunanca olarak sırayla *theoros* (seyirci), *theorein* (seyretmek), *theorema* (tahmin spekülasyon) olup, 16. yüzyılda İngilizcede "theorem" olarak kullanılmaya başlanmıştır.

[17]Kitabın birçok yerinde kullanılan "kanıt" ve "teorem" ifadeleri ile kastedilen aslında "biçimsel kanıt" ve "biçimsel teorem"dir. Ancak çok formel bir dil kullanılması her zaman uygun olmayacağı için "biçimsel" kelimesi kullanılmayabilir.

iii. $p \to \neg\neg p$.

iv. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$.

v. $p \to ((p \to q) \to q)$.

vi. $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$.

vii. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg(\neg p \to q))$.

viii. $(p \to q) \to ((\neg q \to q) \to q)$.

Bir önermenin hepdoğru olmasıyla teorem olmasının birbirlerine denk olduğu bir sonraki altbölümde kanıtlanacak. Bu bilgi kullanılarak, yukarda (i)'de verilen önermenin hepdoğru olduğu kolaylıkla gösterilebileceğinden bir teorem olduğu da gösterilmiş olur. Bu bilgiyi kullanmadan (i)'nin bir teorem olduğu, karmaşık sayılabilecek 17 adımda gösterilebilir.

Alıştırmalar

2.30. Bir aile içinde anne, baba ve çocuk (Ali, 9 yaşında) arasında şöyle bir diyalog geçmiştir.
Ali: Anne, ödevim ikiyle ikinin toplamının dört olduğunu kanıtlamak. Nasıl kanıtlayacağım?
Anne: Teoremlerle kanıtlayacaksın.
Ali: Kaç teoremle?
Anne: Bilmiyorum oğlum, babana sor.
Ali: Baba, 2+2=4 teoremini kanıtlamak için kaç teorem gerekli, söyler misin?
Baba: 2863 teorem oğlum.
Ali: Oohaa baba.
Baba: Bana oohaa deme oğlum, oohaa kanıt demelisin.

Bu diyalog hakkındaki düşünceleriniz nelerdir? Ali neden "oha" kelimesini cevabı bilmeyen annesine değil de bilen babasına karşı kullanmıştır?

2.31. Mantıksız birşey yazın ve bunun mantıksız olduğunu kanıtlayın.

2.7.1 İlk Aksiyom ve Kanıtlar: Öklid'in Elemanları

Bir önceki bölümde, aksiyom ve teorem kavramı formel bir biçimde verildi. Bu kavramların kökeni 2500 yıl öncelerine kadar gider: **Öklid'in Elemanları** (Euclid's Elements), İskenderiye'de MÖ 300 yıllarında Öklid ve arkadaşları tarafından yazıldığı düşünülen 13 parçadan (ciltten) oluşan eserdir. Bu eserin, papirüsler üzerine yazılmış olması ve papirüslerin ortalama ömürlerinin 200-300 yıl olması nedeniyle, orjinali günümüze ulaşamamıştır.

MS D'Orvile 301, Öklid'in Elemanları'nın en eski ve orjinaline en yakın kopyasıdır. Bu eser, 888'de İstanbul'da Katip Stephen tarafından Arethas Patras için yazılmış olup, 1808'de Vatikan Kütüphanesinde, Francois Peyrard tarafından keşfedilmiştir[18]. Günümüzde Öklid'in elemanları olarak bu eser temel

[18] Bu eserin bütünü için: http://www.claymath.org/library/historical/euclid .

alınmaktadır. MS D'Orvile 301 keşfedilene kadar, Öklid'in Elemanları'nın temel kopyası olarak 335-405 yılları arasında yaşamış İskenderiyeli Theon'un derleyerek yazdığı eser dikkate alınıyordu. Ancak, bu derleme eser, orjinal kitabın daha iyi anlaşılır olmasını sağlamak amacıyla, yazarın yorumlarını ve yazarın kendi yanlışlarını içeriyordu.

Öklid'in Elemanları eserini özgün yapan şeylerden biri, aksiyom kavramının kullanılmasıdır. Teoremler bu kavram kullanılarak ifade edilerek, kanıtlar verilmiştir. Bu kavram matematikte günümüzün formalizmine oldukça yakındır. Bu eserde **Pisagor Teoremi**'nin kanıtı ilk kez bu eserde verilmiş olup, II. cildinin 47. önermesidir. Eserde kullanılan aksiyomlar şunlardır:

i. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine de eşittirler.

ii. Eğer eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, elde edilenler de eşit olur.

iii. Eğer eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkartılırsa, eşitlik bozulmaz.

iv. Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.

v. Bütün, parçadan büyüktür.

Ancak, bunlarla birlikte bu aksiyomlar dışında doğruluğundan şüphe duyulmayacak kadar açık olan ve **postulatlar** olarak adlandırılan diğer "aksiyomlar"ı da içeriyordu. Bunlar:

vi. İki yol arasını birleştiren en kısa yol, doğrudur.

vii. Doğru, doğru olarak sonsuza kadar uzatılabilir.

viii. Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri çemberdir.

ix. Bütün dik açılar birbirine eşittir.

x İki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse, içte meydana gelen açıların toplamının 180 dereceden küçük olduğu tarafta bu iki doğru kesişir.

xi. Bir üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir.

xi. Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca bir tek paralel çizilebilir.

Bu aksiyomların bazılarının geri kalanlardan çıkartılabileceğini söyleyelim. Dolayısıyla, bunlar minumum aksiyomlar topluluğu değildir.

Öklid'in Elemanları Sinan Sertöz tarafından Türkçeye çevrilmiştir, [**?**].

2.8 Varsayımsal Kanıt ve Çıkarım Teoremi

$\mathcal{P}$ bir önermesel yapı, p bir önerme, Γ, sembolleri önermeler olan sembol topluluğu olmak üzere, $\mathcal{P}$'de verilen

$$q_1, q_2, ..., q_m, p$$

önermeler dizisinin her bir terimi,

i. aksiyom,

ii. Γ'nın biri sembolü,

iii. modus ponens önerme,

ifadelerinden birini sağlasın. Bu durumda, bu diziye p'nin Γ- kanıtı denir ve

$$\Gamma \vdash p$$

yazılır. Eğer, Γ'nın sembolleri v_1, v_2,...,v_n ise, $\Gamma \vdash p$ yerine doğrudan,

$$v_1, v_2, ..., v_n \vdash p$$

yazılabilir. Bu durum "p, Γ varsayımı altında kanıtlanır" diye ifade edilebilir.

Önermesel yapıda aşağıdakiler gerçekleşir.

1. Γ, sembolleri teoremler olan sembol topluluğu ve $\Gamma \vdash p$ ise, p bir teorem olur.

2. $p_1, p_2, ..., p_n$ bir kanıt ise $p_1, p_2, ..., p_{n-1} \vdash p_n$ olur.

3. Γ'nın hiç elemanı yoksa bir p önermesinin teorem olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma \vdash p$ olmasıdır. Bu durumda $\vdash p$ yazılabilir.

Teorem 2.2. *Bir $\mathcal{P}$ önermesel yapıda*

$$v_1, v_2, ..., v_n \vdash p$$

ise her $1 \leq l \leq n$ için

$$v_1, v_2, ..., v_{l-1}, v_{l+1}, ..., v_n \vdash v_l \to p$$

olur.

Kanıt: Γ, sembolleri v_1,...,v_n olan sembol topluluğunu ve her $1 \leq k \leq n$ için, sembolleri v_1,...,v_{l-1}, v_{l+1},...,v_n olan sembol topluluğu Γ_l ile gösterilsin. $\Gamma \vdash p$ teoreminin bir kanıtı, $q_m = p$ olmak üzere,

$$q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_m$$

dizisini K ile gösterelim. Burada her $i \neq j$ için q_i ve q_j önermelerinin farklı olduğunu varsayabiliriz. $1 \leq i \leq n$ verilsin. Her $1 \leq j \leq i-1$ için

$$\Gamma_l \vdash v_l \to q_j$$

olduğunda

$$\Gamma_l \vdash v_l \to q_i$$

oluyorsa, $*_i$ gerçekleşiyor diyelim.

$i = 1$ için $*_i$'in gerçekleştiği bariz. $1 < i$ olsun ve $*_i$'in gerçeklendiğini göstermek kanıtı tamamlar. Her $1 \leq j \leq i-1$ için

$$\Gamma_l \vdash v_l \to q_j$$

olsun. q_i için aşağıdaki durumlardan biri sözkonusu:

$q_i = v_l$: Bu durumda $v_l \to q_i$ önermesi $v_l \to v_l$ teoremi olur. K dizisinde bu teoremin kanıtı olan

$$v_l \to (v_l \to v_l),\ (v_l \to (v_l \to v_l)) \to (v_l \to v_l),\ v_l \to v_l$$

dizisinde q_i yerine yazarak elde edilen dizi,

$$\Gamma_l \vdash v_i \to q_i$$

ifadesinin bir kanıtı olacaktır.

Aksiyom: Bu durumda

$$q_i,\ q_i \to (v_l \to q_i),\ v_l \to q_i,$$

dizisi v_l terimini içermeyen bir kanıttır. Dolayısıyla $\Gamma_l \vdash v_l \to q_i$ olur.

Varsayım: K dizisindeki p_i yerine yukarıda oluşturulan dizi eklenerek elde edilen dizi $\Gamma_l \vdash p_i$'nin bir kanıtı olur.

Modus ponens: Yani, q_i önermesi K kanıtının bir modus ponens önermesi olsun. $k < j < i$

$$q_j = q_k \to q_i$$

ifadesini sağlayan i ve j'leri seçelim. Varsayım gereği

$$\Gamma_l \vdash v_l \to q_k \text{ ve } \Gamma_l \vdash v_l \to q_j.$$

$\Gamma_l \vdash v_l \to q_k$ ifadesinin kanıtını

$$s_1, \ldots, s_m$$

ve $\Gamma_l \vdash v_l \to q_j$ ifadesinin kanıtını

$$s_{k+1}, \ldots, s_t$$

olarak gösterelim.

$$s_m = v_l \to q_k \text{ ve } s_t = v_l \to q_j$$

olarak alabiliriz.

$r_1 = (v_l \to (q_k \to q_i)) \to ((v_l \to q_k)) \to (v_l \to q_i)$

$r_2 = (v_l \to q_k) \to (v_l \to q_i)$.

$r_3 = v_l \to q_i$ diyelim.

Bu durumda,

$$s_1, \ldots, s_k, \ldots, s_t, r_1, r_2, r_3$$

dizisi için aşağıdakiler gerçekleşir:

v_l, bu dizinin bir terimi değildir.

r_1 bir aksiyomdur.

s_t, r_1 ve r_2 önermeleri dikkate alınarak, r_2, bu dizinin bir modus ponens önermesidir.

s_m, r_2 ve r_3 önermeleri dikkate alınarak, r_3, bu dizinin bir modus ponens önermesidir.

Böylece bu dizide, Γ_l-kanıt olup, $\Gamma_l \to (v_l \to p_i)$ olduğu gösterilmiş olur. Sonuç olarak $*_i$ gerçekleşmiş olur ve kanıt biter. □

Alıştırmalar

2.32. $\mathcal{P}$ bir önermesel yapı ve Γ_1 ve Γ_2, sembolleri önermeler olan iki sembol topluluğu olsun. $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ise her Γ_1-kanıtın Γ_2-kanıt olduğunu gösterin. Dolayısıyla $\Gamma_1 \vdash p$ ise $\Gamma_2 \vdash p$ olur.

2.33. Bir önermesel yapıda p ve q iki önerme ve Γ, tek sembolü p olan sembol topluluğu olsun. $p \to q$ önermesinin bir teorem olmasıyla $\Gamma \vdash q$ olmasının aynı şeyler olduğunu gösterin.

2.34. $\mathcal{P}$ bir önermesel yapı ve p bir teorem olsun. Sembolleri önermeler olan her sembol topluluğu Γ için $\Gamma \vdash p$ olduğunu gösterin.

2.35. Bir önermesel yapıda hiç sembolü olmayan sembol topluluğunu $\emptyset$ ile gösterelim. $\emptyset \vdash p$ olması için gerek ve yeter koşulun p'nin teorem olması gerektiğini gösterin.

2.36. Bir önermesel yapıda p ve q önermeleri verilsin. $\neg p \vdash (p \to q)$ olduğunu gösterin. $\neg p \to (p \to q)$ bir teorem olur mu?

2.37. Bir önermesel yapıda $\Gamma \vdash p$ ve $\Gamma \vdash (p \to q)$ ise $\Gamma \vdash q$ olduğunu gösterin.

2.38. Bir önermesel yapıda verilen p ve q önermeleri için $\Gamma = \{p, \neg q\}$ olmak üzere,

$$\Gamma \vdash \neg(p \to q)$$

olduğunu gösterin. Bunun sonucu olarak,

$$p \to (\neg q \to (p \to q))$$

önermesinin bir teorem olduğunu gösterin.

2.39. Bir önermesel yapıda $\Gamma \vdash p$ ve $p \to q$ bir teorem ise $\Gamma \vdash q$ olduğunu gösterin.

2.40. Bir önermesel yapıda $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$ olduğunu gösterin.

2.9 Teorem ve Hepdoğru Kavramlarının Denkliği

Mantık dışında, örneğin yaşam içerisinde birşeyin "hepdoğru" olması, sadece tuhaf değil, aynı zamanda sıkıcı olmalı.

Bir önermesel yapıda bir önermenin hepdoğru olması için gerek ve yeter koşul biçimsel teorem olmasıdır. Bunun kanıtı için aşağıda verilen önsav kullanılacak. Bunun için, öncelikle birkaç gösterimi sabitleyelim.

$\mathcal{P}$ bir önermesel yapı ve p_1, p_2,...,p_n temel önermeleri verilsin. Bu temel önermeler üzerinde tanımlı 2^n tane olan değerlendirme $d_1, d_2, ..., d_{2^n}$ ile gösterilsin. S, asal gösteriminde sadece ve sadece verilen bu temel önermeler olan önermeler topluluğunu göstersin. Ayrıca, $1 \leq i \leq 2^n$ ve $1 \leq j \leq n$ için $f(i, j)$ önermesi

$$f(i,j) = \begin{cases} p_j & d_i(p_j) = 1 \\ \neg p_j & d_i(p_j) = 0 \end{cases}$$

ve her $1 \leq i \leq 2^n$ ve S'ye ait her önerme r için

$$g(i,r) = \begin{cases} r & d_i(r) = 1 \\ \neg r & d_i(r) = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her $1 \leq i \leq 2^n$ için

$$\Gamma_i = \{f(i,1), ..., f(i,n)\}$$

olarak gösterelim. Bu gösterimler altında aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Önsav 2.3. *Her i ve S'ye ait her önerme p için $\Gamma_i \vdash g(i,p)$ olur.*

Kanıt: Kanıt, verilen p önermesinin uzunluğu üzerinden tümevarım uygulanarak yapılacak. $1 \leq i \leq 2^n$ verilsin. S'ye ait ve uzunluğu $u(p)$'den küçük her önerme r için $\Gamma_i \vdash f(r)$ olduğunda $\Gamma_i \vdash f(p)$ oluyorsa, $u(p) = i$ olmak üzere, $*_i$ sağlanıyor diyelim.

$u(p) = 1$ ise $*_1$'nin sağlandığı açık[19].

$1 < u(p) = i$ olsun. r, S'ye ait ve $u(r) < i$ olduğunda $\Gamma_i \vdash f(r)$ olduğunu varsayalım. $1 < u(p)$ olmasından dolayı

$$p = \neg r \text{ ya da } p = r \to s$$

olacak biçimde r ve s önermeleri var.

$p = \neg r$ olduğunu varsayalım. $u(r) < i$ olduğundan varsayım gereği

$$\Gamma_i \vdash g(i,r)$$

[19] Bunun sağlandığı doğrudan tanım kullanılarak da gösterilebilir.

olur. İki durum sözkonusudur.

$d_i(p) = 1$: Bu durumda $d_i(r) = 0$ olur. Varsayım gereği

$$\Gamma_i \vdash g(i,r) = \neg r = p = g(i,p)$$

eşitliği elde edilir.

$d_i(p) = 0$: Bu durumda $d_i(r) = 1$ olur. Varsayım gereği

$$\Gamma_i \vdash g(i,r) = r$$

olur. Ayrıca $r \to \neg\neg r$ bir teorem olduğundan,

$$\Gamma_i \vdash \neg\neg r = \neg p = g(i,p)$$

elde edilir.

Şimdi $p = r \to s$ olduğunu varsayalım. Bu durumda da iki durum sözkonusu.

$d_i(p) = 0$: Bu durumda $d_i(r) = 1$ ve $d_i(s) = 0$ olur. Ayrıca, r ve s önermeleri S'ye ait ve uzunlukları, p önermesinin uzunluğundan küçük olduğundan,

$$\Gamma_i \vdash g(i,r) = r$$

ve

$$\Gamma_i \vdash g(i,s) = \neg s$$

olur. Elde edilen bu duruma,

$$r \to (\neg s \to \neg(r \to s))$$

önermesinin bir biçimsel teorem olduğu kullanılarak ve uygulanarak

$$\Gamma_i \vdash \neg(r \to s) = \neg p = g(i,p)$$

elde edilir.

$d_i(p) = 1$: Bu durumda $d_i(r) = 0$ ve $d_i(s) = 1$ olur. Ayrıca, r ve s, S'ye ait ve uzunlukları, p'nin uzunluğundan küçük olduğundan,

$$\Gamma_i \vdash g(i,r) = \neg r$$

ve

$$\Gamma_i \vdash g(i,s) = s$$

olur. Birinci duruma $\neg r \to (r \to s)$'nin bir biçimsel teorem olduğu uygulanarak

$$\Gamma_i \vdash r \to s = p = g(i,p).$$

elde edilir. Aynı ifade $s \to (r \to s)$'nin bir aksiyom olması $\Gamma_i \vdash s$'ye uygulanarak da elde edilir.

Böylece $*_i$ gerçekleşmiş olur ve kanıt tamamlanır.

Teorem 2.4. *Bir önermesel yapıda bir önermenin biçimsel teorem olması için gerek ve yeter koşul hepdoğru olmasıdır.* □

Kanıt: Herşey yukarda verilen önsavda olduğu gibi tanımlansın. Ayrıca, p önermesinin hepdoğru olduğunu varsayalım. Her $1 \leq i \leq 2^n$ için,

$$f(i,1), f(i,2), ..., f(i,n) \vdash g(i,p) = p$$

olması kullanılarak,

$$f(2^n,1), f(2^n,2), ..., f(2^n,n) = p_1, ..., p_n \vdash p$$

ve

$$f(2^n-1,1), f(2^n-1,2), ..., f(2^n-1,n) = p_1, ..., p_{n-1}, \neg p_n \vdash p$$

elde edilir. Buradan,

$$p_1, ..., p_{n-1} \vdash p_n \to p$$

ve

$$p_1, ..., p_{n-1} \vdash \neg p_n \to p$$

olur. Bunlara

$$(p_n \to p) \to ((\neg p_n \to p) \to p)$$

önermesinin bir teorem olduğu uygulanarak,

$$p_1, ..., p_{n-1} \vdash p$$

elde edilir. Daha detaylı bilgiye [38]'den ulaşılabilir.

2.9.1 Tanrının Varlığının "Kanıtı"

Tanrı'nın varlığı ya da yokluğu insanlık tarihi boyunca üzerinde en çok düşünülen sorulardan biri olmuştur. Birçok düşünür çeşitli yöntemlere başvurarak Tanrı'nın varlığını ya da yokluğunu bir şekilde kanıtlama girişiminde bulunmuştur. Bu yazıda, bir mantıkçı olan Kurt Gödel'in (1906-1978) Ontolojik Argümanı olarak bilinen, Tanrı'nın varlığıyla ilgili kanıtını vereceğiz. Okurun lise düzeyinde önermeler ve niceleme (yüklem) mantığı bildiğini varsayacağız. Bunun dışında, kanıtta kullanılan gerekli kavramlardan yeri geldiğinde bahsedilecek.

Gödel'in Ontolojik Argümanı, Kurt Gödel'in Tanrı'nın ya da tanrısal özelliğe sahip olan bir nesnenin varlığını kanıtladığı mantıksal bir argümandır. Bu argümanın bir benzeri daha önce St. Anselm tarafından ortaya atılmıştır. St. Anselm'in ontolojik argümanı şu şekilde verilmiştir: Tanrı, tanım gereği, kendisinden daha mükemmel bir varlığın düşünülemediği varlıktır. Tanrı, düşüncemizde mevcuttur. Eğer Tanrı düşüncemizde mevcutsa, bundan daha mükemmel olanı gerçekte var olmasıdır. O halde, Tanrı vardır.

St. Anselm'in argümanının bir benzeri Leibniz tarafından da öne sürülmüştür. Gödel, Leibniz'in argümanını geliştirmeye çalışmıştır. Gödel'in, argümanının ilk versiyonunu 1941 yılında yazdığı bilinir. Ancak 1970 yılına kadar bu kanıtı duyurmamıştır.

Gödel'in ontolojik kanıtı *modal mantık* (kipler mantığı) olarak bilinen bir mantık çeşidini kullanmaktadır. Modal mantıkta zorunlu (necessary) doğruluk ve olumsal (contingent) doğruluk arasında bir ayrım yapılmıştır. Bu mantığın anlamsal zemininde mümkün evrenler yorumu (possible worlds semantics) vardır. Eğer bir şey mümkün olan her evrende doğruysa, buna zorunlu doğru denir. Eğer bir şeyin doğru olması zorunlu değil de sadece mümkünse, buna olumsal doğru denir. Örneğin, "Ali dördüncü sınıf öğrencisi ise, Ali bir öğrencidir" önermesi zorunlu olarak doğrudur. Eğer Ali dördüncü sınıf öğrencisi ise, Ali'nin bir öğrenci olmadığı düşünülemez. Yanlış olması mümkün değildir. Öte yandan, "İstanbul, Türkiye'nin en kalabalık şehridir" önermesi olumsal doğrudur. Çünkü bu önerme zamana ve şartlara bağlı olduğu için yaşadığımız evrende doğru olsa bile bu gerçek başka bir mümkün evrende başka türlü de olabilirdi.

Zorunlu-olumsal ayrımının yanında, Gödel kendi argümanında yüksek dereceli (higher order) mantığa başvurmuştur. Lise eğitiminden bildiğimiz niceleme mantığında bir evren kümesinin olduğu düşülür ve bu evren kümesi üzerinden niceleme yapılır. Örneğin, doğal sayılardan bahsediyorsak,

$$\forall x \exists y (x + 1 = y)$$

önermesi "her x sayısı için x'ten 1 fazla olan bir y sayısı vardır." anlamına gelmektedir. Burada $\forall$ ve $\exists$ niceleme sembolleri doğal sayılar kümesinin elemanları üzerinden, yani sayıların kendisi üzerinden niceleme yapmaktadır. Eğer nicelemeler, verilen bir evren kümesinin elemanları üzerinden yapılıyorsa, buna birinci dereceden niceleme mantığı diyoruz. Eğer nicelemeler evren kümesinin altkümeleri üzerinden yapılsaydı, bu ikinci derece niceleme olurdu. Eğer ikinci derece nesnelerin altkümeleri üzerinden yapılsaydı, bu üçüncü derece niceleme olurdu, vs. Birinci dereceden yüksek niceleme mantıklarına yüksek dereceli mantık diyoruz. Gödel ontolojik kanıtında Tanrı kavramını tanımlarken yüksek dereceli niceleme mantığına başvurmuştur. Gödel önce olumlu (yani pozitif) özelliğin ne demek olduğunu tanımlamış, daha sonra Tanrı'yı tanımlarken Tanrı'nın tüm olumlu özelliklere sahip varlık olduğunu kabul etmiştir. "Olumlu" özellikten kastımız, mükemmel olan, etik ve estetik olarak kusursuz olan, saf olan şeylerdir.

Öncelikle sembolik bir operatör tanımlayalım. $S(x)$ bir özellik olsun. Eğer $\blacksquare S(x)$ yazılırsa, $S(x)$ zorunlu olarak doğrudur. Eğer $\blacklozenge S(x)$ yazılırsa, $S(x)$ olumsal yani mümkün olarak doğrudur. İlkinde $S(x)$ zorunlu doğru, ikincisinde $S(x)$ mümkün olarak doğrudur, yani $S(x)$'in doğru olduğu bir mümkün evren vardır. İşte $\blacklozenge$ ve $\blacksquare$ operatörlerini sırasıyla, zorunlu doğru ve olumsal doğruluğu göstermek için kullanacağız. Bir A önermesinin değillemesini $\neg A$ şeklinde gösterelim. Niceleme mantığından bildiğimiz $\forall$, $\exists$ sembolleri sırasıyla, "her" ve "vardır" anlamında kullanılır. Eğer $\exists! S(x)$ yazarsak, bu ifade, $S(x)$ özelliğini sağlayan sadece tek bir x olduğu anlamına gelir. Aşağıdaki formel kanıtta nesneleri x ve y ile, özellikleri φ, ψ, P, G gibi harflerle göstereceğiz.

Önce Gödel'in argümanının sembolik yani formel kanıtını vereceğiz, daha sonra kanıttaki her satırın ne anlama geldiğini açıklayacağız. Okurun bu argümanı daha iyi anlaması için formel kanıta aşağıda verdiğimiz açıklamalara paralel olarak bakmasını şiddetle tavsiye ediyoruz. Gerekli açıklamalar formel kanıtın altında verilmiştir.

Aksiyom 1. $(P(\varphi) \wedge \blacksquare \forall x(\varphi(x) \to \psi(x))) \to P(\psi)$.

Aksiyom 2. $P(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg P(\varphi)$.

Teorem 1. $P(\varphi) \to \blacklozenge \exists x \varphi(x)$.

Tanım 1. $G(x) \leftrightarrow \forall \varphi(P(\varphi) \to \varphi(x))$.

Aksiyom 3. $P(G)$.

Teorem 2. $\blacklozenge \exists x G(x)$.

Tanım 2. $Oz(\varphi, x) \leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall \psi(\psi(x) \to \blacksquare \forall y(\varphi(y) \to \psi(y)))$

Aksiyom 4. $P(\varphi) \to \blacksquare P(\varphi)$.

Teorem 3. $G(x) \to 0z(G, x)$.

Tanım 3. $E(x) \leftrightarrow \forall\varphi(Oz(\varphi, x) \to \blacksquare\exists y\varphi(y))$.

Aksiyom 5. $P(E)$.

Teorem 4 $\blacksquare\exists G(x)$.

Aksiyom 6. $\forall\varphi(\varphi(x) = \varphi(y)) \to x = y$.

Teorem 5. $\blacksquare\exists! xG(x)$.

Şimdi, yukarıda yazdığımız formel kanıtı açıklayalım. Gödel önce olumlu özellik ve olumsuz özellikleri kurallaştırmıştır (aksiyomlaştırma). Eğer olumlu bir φ özelliği her mümkün evrende bir ψ özelliğini gerektiriyorsa, o zaman ψ özelliği de olumludur. Buna Aksiyom 1 diyelim. Herhangi bir φ özelliği için, ya φ ya da $\neg\varphi$ olumlu bir özelliktir. Ancak, hem φ hem de $\neg\varphi$ aynı anda olumlu olamaz. Bu varsayım da Aksiyom 2 olsun.

Gödel daha sonra her olumlu özelliğin en az bir tane mümkün evrendeki bir nesne tarafından sağlandığına hükmediyor. Buna Teorem 1 diyelim. Daha sonra "tanrısal olma" özelliğinin tanımı veriliyor: Eğer bir varlık sadece ve sadece bütün olumlu özelliklere sahipse, bu varlık tanrısal bir varlıktır. Aksiyom 3, tanrısal olma özelliğinin kendisinin bir olumlu özellik olduğunu varsayıyor. Gödel, bütün bunlardan, tanrısal özelliğe sahip bir varlığın mümkün olduğu çıkarımında bulunmuştur. Buna Teorem 2 diyelim. Yani Teorem 2 tanrısal özelliğe sahip bir varlığın en az bir mümkün evrende var olduğunu söylemektedir. Tanrısal özelliği sağlayan bu varlığa "Tanrı" diyeceğiz. Tanrı'nın zorunlu olarak var olduğunu göstermek için Tanrı'nın tüm mümkün evrenlerde var olduğunu göstermek zorundayız. Şimdi, öz (essence) olma kavramını tanımlayalım. x mümkün bir evrende bir nesne ve φ bir özellik olsun. Eğer $\varphi(x)$ bu evrende sağlanıyorsa ve eğer $\varphi(x)$ özelliği x nesnesinin bu evrende sahip olduğu tüm ψ özelliklerini zorunlu olarak gerektiriyorsa, o zaman φ özelliğine x nesnesinin öz'ü denir. Buna Tanım 2 diyelim. Bir φ özelliğinin bir x nesnesinin öz'ü olmasını $Oz(\varphi, x)$ olarak gösterelim. Aksiyom 4 şunu varsayıyor: Olumlu her özellik, zorunlu olarak tüm evrenlerde olumludur. Gödel daha sonra tanrısal olma özelliğinin, Tanrı'nın (yani tanrısal olma özelliğini sağlayan nesnenin) özü olduğu çıkarımını yapmıştır. Buna Teorem 3 diyelim. Bundan sonra Gödel, zorunlu olarak var olmanın tanımını veriyor. Eğer bir x nesnesinin her φ özü için, φ özelliğine sahip olan bir y zorunlu olarak varsa (yani böyle bir y her mümkün evrende varsa), x nesnesi zorunlu olarak vardır.

Buna Tanım 3 dedik. Aksiyom 5 olarak şunu varsayalım: Zorunlu olarak var olma özelliği, olumlu bir özelliktir.

Peki buradan tanrısal özelliğe sahip nesnenin, yani Tanrı'nın, zorunlu olarak var olduğunu nasıl çıkarabiliriz? Tanrısal olma özelliğinin tanımından yola çıkarak, tanrısal olma özelliği Tanrı'nın özüdür. Çünkü bu özellik, olumlu olan bütün özellikleri gerektirir. Olumlu olmayan bir özellik, olumlusunun değillemesine denk olduğundan, Tanrı olumlu olmayan hiçbir özelliğe sahip değildir. Aksiyom 5 gereği, zorunlu var olma özelliği olumlu bir özelliktir. O zaman bu özellik, tanrısal olma özelliğine sahip olan her nesnenin bir özelliğidir. Çünkü Tanım 1 gereği, tanrısal olma özelliğini taşıyan bir nesne, olumlu olan her özelliği kendinde bulundurur. Tanrısal olma özelliğine sahip olan herhangi bir nesne, zorunlu olarak var olmak durumunda olduğu için, Tanım 3 gereği, mümkün bir evrende tanrısal özelliğe sahip bir nesne, mümkün olan her evrende tanrısal özelliğe sahiptir. Teorem 3 tanrısal bir nesnenin en az bir mümkün evrende var olduğunu söylüyor. O halde, bu nesne her evrende vardır. O zaman, Tanrı zorunlu olarak vardır.

Buraya kadar Tanrı'nın sadece var olduğu gösterilmiştir. Ancak, birden fazla Tanrı olmadığını nasıl bilebiliriz? Bunun için bir de tanrısal olma özelliğini sağlayan nesnenin tek ve sadece bir tek olduğunu göstermeliyiz. Leibniz'in farksızların eşitliği (the identity of indiscernibles) ilkesi, aynı özellikleri sağlayan iki nesnenin birbiriyle aynı olduğunu söylemektedir. Yani,

$$\forall\varphi(\varphi(x) = \varphi(y)) \to x = y$$

Leibniz'in bu ilkesine Aksiyom 6 diyelim. O zaman tanrısal özelliğe sahip iki farklı nesne yoktur, sadece tektir. O halde, Aksiyom 6 gereği, Teorem 5'e şöyle diyebiliriz: Tanrı zorunlu olarak vardır ve tektir.

Gödelin ontoloji kanıtı elbette Tanrı'nın varlığını mutlak anlamda göstermez. Matematik ve mantık gibi formel bilimlerde bir tezi "çürütmek kolaydır. Çünkü her sav, en nihayetinde tanımlara ve aksiyomlara dayanır. Yani formel bilimlerde, ortaya atılan tezler varsayımsal olmak zorundadır. Eğer yapılan tanımlar ve aksiyomlar kabul edilirse, ortaya atılan iddia kanıtlandığında doğrudur. Ancak tanımları değiştirirsek ya da aksiyomları farklı başka türlü kabul edersek sonuç da değişecektir. Gödel'in bu kanıtında, çeşitli aksiyomların kabul edildiğini görüyoruz. Örneğin, Aksiyom 4 "Olumlu özellik zorunlu olarak tüm evrenlerde olumludur" önermesini ifade eder. Bu aksiyomu *a priori* kabul etmemiz için bir neden var mıdır? Aksiyom 5 ise "zorunlu var olma özelliği, olumlu bir özelliktir" demektedir. Peki zorunlu yok olma özelliği neden mükemmel olmayan bir özellik olsun? Mukayese etmek adına, var olmayı olumlu bir özellik olarak kabul etmek için önce yok olmayı tecrübe etmek gerekli değil midir? Bir karşılaştırma yapmadan var olmayı neden mükemmel bir örneği alarak kabul edelim? Böyle bir ön kabul, yokluğu tecrübe edip "yokluğu tecrübe ettim, var olmak daha güzelmiş" demektir. Bu aksiyomun göreceli olduğunu basit bir örnekle anlayabiliriz. Nasıl ki hayatında türlü çileler ve acılar çekmiş biri, var olmayı kâmil bir özellik kabul etmezse, hayatı huzurlu ve mesut geçen biri de var olmayı mükemmelikle özdeşleştirir. Farklı yorumlamalardan dolayı, Gödel'in ontolojik kanıtında geçen aksiyomların genelgeçer özelliği olmayabilir.

Alıştırmalar

2.41. Peygamberin varlığı ya da son peygamberin son peygamber olduğu kanıtlanabilir mi?

2.42. Sahte peygamberin sahte olduğu kanıtlanabilir mi?

2.43. Euler, Tanrı'nın varlığı konusunda Volterci felfesecilerle girdiği bir tartışmada şöyle der:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

dolayısıyla, Tanrı vardır. Euler'in iddiası doğru mudur? Volterciler bu iddiayı neden kabul etmişlerdir?

3. Matematiğin Biçimleştirilmesi

Matematik biçimselleştirildikten sonra bir elmayı ikiye bölme becerisini kaybetti.

Cantor, 1873'de rasyonel sayılar kümesiyle doğal sayılar kümesinin birebir eşlenebileceğini gösterdikten bir yıl sonra doğal sayılar kümesiyle gerçel sayılar kümesinin birebir eşlenemeyeceğini gösteriyor. Yani, kavramsal olarak "sonsuz"luk tanımlanmamış olsa da, Cantor, sonsuzdan daha büyük bir başka sonsuzun olduğunu gösteriyor. Cantor burada kalmıyor, $[0, 1]$ aralığının $\mathbb{R}^n$ ile birebir eşleneceğini göstererek, *görüyorum ama inanamıyorum* diyerek arkadaşı Dedekind'e yazarak, heyecanını paylaşıyor. Cantor, sonsuzları daha iyi ayırt edebilmek için, 1895 ve 1897 yıllarında yazmış olduğu iki makalede, bugün süreklilik hipotezi olarak bilinen şu soruya yanıt arıyor: *Doğal sayılar ve gerçel sayılar kümeleri arasında kalan, ne doğal sayılar kümesiyle ne de gerçel sayılar kümeleriyle birebir eşlenemeyen bir küme var mıdır?* Ancak Cantor, sorduğu bu soruya yanıt veremiyor. Cantor'un bu uğraşları sürecinde, "küme" kavramı tanımlanmadan kullanılmış olmasına karşın, günümüzde tanımlanan küme kavramına uygun bir biçimde kullanılıyor. Cantor tarafından yapılan bu çalışmalar ve müdahalelerden sonra matematiğin biçimsel bir dil ile tanımlanması gereği ortaya çıkıyor. Bu tanımlama "küme teori" üzerinden yapılıyor. İnsanlıkla birlikte var olan sayıların kavramlaştırılması (yani evcilleştirilmesi/köleleştirilmesi) amacıyla Hermann Grassmann, aritmetik işlemlerin çoğunun ardılı işlemlerle tanımlanan ve tümevarım olarak adlandırılan kavramla yapılabileceğini gösteriyor; Charles Sanders Pierce, 1881'de doğal sayılarda aritmetiği aksiyomlaştırıyor; Dedekind 1888'de, aynı işi farklı bir yöntemle yaparak kavramın daha anlaşılır olmasına katkıda bulunuyor; ve hemen sonrasında Peono, bütün bunları daha belirgin formüllerle yaparak, sonuçlarını *The principles of arithmetic presented by a new method* başlıklı ve 1889 tarihli kitabında yayınlıyor. Bütün bunlar yapılırken bütün topluluklar bir *küme* sanılıyordu. Bunun ciddi bir "bela" olduğu kısa süre sonra anlaşılıyor ve yarattığı dalga aşağıda bahsedilecek Frege'nin, matematiğin çelişkisizliğini ortaya koymayı amaçlayan eserlererini sarsıyor. Bu sarsıntının artçıları da oluyor. Problemlerin ne olduğunun daha da netleştirilip ortaya konularak çözümlenmesi, aşağıda yapılan temel girişimlerle devam ediyor.

Russell'in Frege'ye mektubu ve Russell Paradoksu: Aritmetik matematiğin sayılar ve onun üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerini konu alan bir dalıdır. Başlangıç noktası doğal sayılar üzerindeki aritmetik işlemleridir.

Aritmetiğin sarsılmaz bir mantıksal temel üzerine inşa edilmesi konusunda sistemli ilk çalışmalardan biri, modern mantığın kurucularından sayılan Alman mantıkçı Frege'nin, "Aritmetiğin Temelleri I" (1893) ve bir diğeri ise "Aritmetiğin Temelleri II" (1903) isimli eserleridir. Frege, eserinin birinci cildinde her "özelliği" sağlayan şeylerin, "elemanı olma" olarak adlandırılan ifadeyi bulunduran bir küme olduğunu belirtiyordu. Russell, Frege'ye 16 Haziran 1902 tarihli yazdığı bir mektupla, kitabın birinci cildinde aritmetiğin sağlam temele dayanmadığını, bugün Russell Paradoksu olarak bilinen paradoksla açıklıyordu. Bu paradoks Frege tarafından da kabul ediliyor ve Frege, eserinin ikinci cildinde paradoksla ilgili şunları yazıyordu: "*Bir biliminsanı için, yapıtı biter bitmez temellerinin yıkılmasından daha korkunç bir şey düşünülemez. Yapıt tam baskıya hazırlanırken Bay Bertrand Russell'dan aldığım bir mektup beni bu duruma soktu*"[1]. Russell Paradoksu[2], Russell tarafından 1901 yılında [46]'de ortaya konan, kümenin kendi kendini içermesine izin verildiğinde ortaya çıkan çelişkiyle ilgilidir. Bir R kümesinin "Kendini içermeme" özelliğine göre tanımlandığını varsayalım. Dolayısıyla R, kendi kendini içermeyen elemanlardan oluşan küme olacak. Yani, sembolük olarak,

$$R = \{x : x \notin x\}$$

olsun. R'nin bir küme olamayacağı gösterilecek. Bunun gösterilmesi, verilen bir kümenin kendi kendini içerebileceği ya da içermeyeceği ve ikisinin de birden olamayacağı üzerinden yapılacak. R bu kümenin elemanıysa, yani $R \in R$ ise, tanım gereği $R \notin R$ olacaktır. R, R'nin bir elemanı değilse, yani $R \notin R$ ise tanım gereği $R \in R$ olacaktır. Bu bir çelişkidir. O halde R gibi bir küme yoktur. Frege'nin eserinin birinci cildi böyle bir çelişkiyi ürettiğinden, eserin tanımladığı aritmetiğin temeli sağlam olamazdı. Ortaya çıkan bu durum mate-

[1]Aslında bir şeyin inşa sürecinde inşa edilen şeye, yanlışın da en az doğru kadar katkısı olduğu dikkate alınırsa, ortada korkunç bir yıkımın olmadığı görülür.

[2]Bu paradoksun, Russell'den bağımsız olarak Zermelo tarafından da bulunduğuna ilişkin bir dipnot var; Zermelo'nın 1908'de yayınlanan bir makalesinde şöyle deniyor: *Bu paradoksu ben de Russell'den bağımsız olarak bulmuş ve 1903'te aralarında Profesör Hilbert'in bulunduğu birkaç matematikçiye bildirmiştim.* Russell paradoksunun matematikte üçüncü büyük krizi yarattığı düşünülür.

matiğin çelişkisiz bir şekilde tanımlanabilmesi için daha çok çaba sarf edilmesi gerektiğini ortaya koymuştur.

Cantor'un Süreklilik Hipotezi: Bu hipotez, gerçel sayılar kümesinin sonsuz her altkümesinin doğal sayılar kümesiyle ya da gerçel sayılar kümesiyle eşlenebildiğini söyler. Cantor bu hipoteze bütün uğraşlarına karşın yanıt verememiştir.

Hilbert'in Zermelo'ya sorduğu soru: Hilbert, 1900'de Paris'de gerçekleşen Dünya Matematik Kongresi'nde ünlü olarak atıflanan konuşmasını yapıyor ve bu konuşmada 20 soru soruyor. Bu soruların birincisi Cantor'un Süreklilik Hipotezi'ni çözme amaçlıydı. Bu sorunun yanıtına yaklaşabilmek için, bu sorudan daha kolay olduğu düşünülen ve Zermelo'ya sorulan soru şuydu: Boş olmayan her küme iyi sıralanabilir mi? Yani, verilen bir X kümesi (özelde gerçel sayılar kümesi) için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sıralama var mıdır?

i. Her $x \in X$ için $x \leq x$

ii. Her $x, y \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$.

iii. Her $x, y, z \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$.

iv. Her $x, y \in X$ ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ olur.

v. $A \subset X$ boş olmayan bir altküme ise, her $a \in A$ için $x \leq a$ olacak biçimde $x \in A$ vardır.

Bu soruda yer alan "küme" kavramının henüz tanımlanmamış olduğuna da dikkat çekelim.

Zermelo'nun yanıtı: Zermelo Hilbert'in yukarıda verilen sorusunu yanıtı "evet" olarak 1904'te kanıtlıyor. Ancak kanıtta, bugün *seçim aksiyomu* (axiom of choice) olarak adlandırılan bir aksiyomun kullanılmış olması, kanıta matematik dünyasında kuşkuyla bakılmasına neden oluyor. Sonrasında, 1908'de Zermelo farklı bir kanıtla soruyu bir kez daha yanıtlıyor. Ancak bu yanıtta da aynı aksiyomu kullanıyor ve dolayısıyla kuşkular bu kanıtla da giderilemiyor. Aslında başka çare de yok; seçim aksiyomu ile Hilbert'in sorusunun olumlu yanıtının birbirlerine denk olduğu, yani "boş olmayan her kümenin iyi sıralı olması için gerek ve yeter koşulun Seçim Aksiyomu" olduğu sonraları kanıtlanıyor[3].

Sonuç olarak, az gidiliyor uz gidiliyor ve bu serüven sonunda nur topu gibi bir oyuncak elde ediliyor. Bu oyuncağın adı "Zermelo-Fraenkel Küme Teori", kısaca ZFC. Bu aksiyomlardan bir sonraki bölümde bahsedilecek. Bu bölümde bu aksiyomların tanımlanabilmesi için bir ön hazırlık yapılarak, matematiksel mantık aksiyomlarının bir listesi verilecek.

[3] Zermelo'nun bu yanıtı, [22]'de "patlatılan barut fıçısını, Zermelo aydınlattı" olarak yorumlanmıştır.

3.1 Önermesel Matematik Yapı

Matematikte en zor olan şeylerden biri kümeyi tanımlama olabilir.

Bazı sembollere "nesne" ya da (şimdilik kulağı tırmalasa da) "değişken"[4] diyeceğiz. Nesnelerin bazılarına "küme" denilecek. Bu noktada, "küme olmayan nesne var mı?" biçiminde bir soru, hatta "nesne olmayan sembol var mı?" sorusu okurların zihninde oluşmuş olabilir.

Nesneler genellikle

$$v_0, v_1, ..., v_i, ...$$

biçiminde gösterilir. Bu gösterimde yer alan "i" indeksinin bir doğal sayı olması gerekmese de genellikle doğal sayı olarak yazılır. İstenilen çoklukta hatta istediğimiz kadar çok nesnenin var olduğunu varsayıyoruz. Daha sonraki bölümlerde nesneler x, y, z gibi sembollerle gösterilecek. Nesneler arasında "eşit" olarak okunan

$$=$$

ve "eleman" olarak adlandırılacak

$$\in$$

semboller üzerinden ilişki kurulacak [5]

$$v_i = v_j$$

ifadesi, "v_i nesnesi v_j nesnesine eşittir" biçiminde okunur. Benzer biçimde,

$$v_i \in v_j$$

ifadesi, "v_i nesnesi v_j nesnesinin elemanı" olarak okunur.

Tanım 3.1. $v_i = v_j$ ya da $v_i \in v_j$ biçimindeki her ifadeye **temel formül** denir.

İstenilen çoklukta değişken olduğundan, istenilen çoklukta temel formül de vardır.

---

[4] İngilizcesi "değişken" olan bu kelimeyi literatüre Leibniz sokmuştur.

[5] Eşitlik işareti "=" 1557'de *Whetstone of Witte* başlıklı kitapta Robert Recorde tarafından kullanıldı. Ancak, bu işaretin yaygın olarak kullanılması uzun yıllar aldı. Örneğin, 80 yıl sonra hâlâ Descartes eşitliği göstermek için, Latince "eşit" demek olan aequales sözcüğünün bir kısaltması "ae" nin çabucak yazılışı olan α sembolünü kullanıyordu.

Tanım 3.2. Temel önermeleri temel formüller olan önermesel yapıya **önermesel matematik yapı** denir.

Her önermesel matematik yapı bir önermesel yapı olmasına karşın, tersi doğru değil. Önermesel matematik yapıda belirli bir kurala göre tanımlanan diziler "formül" olarak adlandırılacak. Yapılacak bu tanımlamaya göre her formül bir önerme olmasına karşın her önerme bir formül olmayacak, yani önermelerden daha fazla formül olacak. Önerme olmayan formülleri tanımlamak için iki sembol daha kullanılacak. Bu semboller "her" olarak okunacak

$$\forall$$

sembolü[6] ve "bazı" olarak okunacak

$$\exists$$

sembolü[7]. Böylece bir önermesel matematik yapının alfabesi, önermesel yapı olmasından dolayı

$$\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge, v_i = v_j,\ v_i \in v_j$$

ve bunların dışında tanımlanan

$$\forall,\ \exists$$

sembollerinin katılımıyla

$$\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge, \forall,\ \exists,\ v_i = v_j,\ v_i \in v_j$$

sembollerinden oluşur. Elbette açma işareti (ve kapama işareti) yanında

$$= \text{ ve } \in$$

sembollerinin bu topluluğa katılması bütünlük açısından uygun olur. Vurgu yapmak için bunu tanım olarak verelim.

Tanım 3.3. $(, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge, =, \in, \forall, \exists, v_i = v_j, v_i \in v_j,)$ sembol topluluğuna **matematikçe** denir.

Önermesel matematik yapıda $\neg(v_i = v_j)$ yerine $(v_i \neq v_j)$ ve $\neg(v_i \in v_j)$ yerine $v_i \notin v_j$ yazılır[8].

Alıştırmalar

[6]İngilizce olarak *universal quantifier* olarak okunan bu sembol, Gerhand Gentzen'in "Untersuchungen ueber das logische Schliessen," Math.Z., 39 (1935) eserinde kullanıldı.

[7]Bu sembol, İngilizce olarak *existential quantifier* olarak okunur. Bu sembol, ilk olarak 1897'de Giuseppe Peano tarafından kullanılmıştır.

[8]Bu gösterim ilk olarak Nicholas Bourbaki tarafından 1939'da kullanıldı.

3.1. Neden okurların büyük bir çoğunluğu, "$v_i = v_i$ olur mu?" sorusuna "evet" yanıtını verirken, "$v_i \in v_i$ olur mu?" sorusu karşında genelde duraksama yaşar?

3.2. Önermesel matematik yapıda, v_i, v_j ve v_k değişkenleri için aşağıdaki ifadeler hakkında ne söylenebilir?

i. $v_i = v_i$,

ii. $v_i = v_j$ ise $v_j = v_i$,

iii. $v_i = v_j$ ve $v_j = v_k$ ise $v_i = v_k$.

3.3. Yukarıdaki problemi $=$ yerine $\in$ alarak da yanıtlayın.

3.2 Formül

Bir önermesel matematik yapının, bir önermesel yapı olduğunu aklımızda iyi tutalım. Yeni formüller temel formüller üzerinden hareket ederek aşağıdaki gibi üretilir.

Tanım 3.4. Bir önermesel matematik yapıda,

i. Her temel formül bir formüldür.

ii. φ ve ψ iki formül ise,

$$(\neg\varphi),\ (\varphi \to \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \wedge \psi),\ \forall v_i(\varphi),\ \exists v_i(\varphi)$$

ifadelerinin herbiri bir formüldür.

Her ($\forall$) ve en az ($\exists$) eklemlerinin günlük yaşamda kullanımlarına ters düşmeyecek biçimde, bir φ formülü ve v_i değişkeni için

$$(\neg(\forall v_i(\varphi))) \leftrightarrow (\exists v_i(\neg\varphi))$$

ve

$$(\neg(\exists v_i(\varphi))) \leftrightarrow (\forall v_i(\neg\varphi))$$

formüllerinin teorem olduğu aksiyom olarak kabul edilecek.

Dikkat edilirse, bir formül bir ya da birden fazla formülün yanyana sıralanmasıyla elde edilir. Bu sıralamada yer alan her formüle o formülün altformülü denilecek. Daha açık olarak tanımlayalım.

Tanım 3.5. φ bir formül olmak üzere,

i. φ, kendisinin bir altformülü.

ii. $(\neg\psi)$, φ'nin bir altformülü ise, ψ de, φ'nin bir altformülüdür.

iii. Bazı φ_1 ve φ_2 formülleri için,

$$(\varphi_1 \to \varphi_2),\ (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2),\ (\varphi_1 \vee \varphi_2),\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

formüllerinden en az biri φ'nin altformülü ise, φ_1 ve φ_2 formülleri de φ'nin altformülleri olur.

iv. ψ formül ve bir v_i değişkeni için

$$\forall v_i(\psi),\ \exists v_i(\psi)$$

formülerinden biri, φ'nin bir altformülü ise, ψ formülü de φ'nin bir altformülü olur.

Şimdi (en azından bana göre) matematikte en zor tanımlamalardan birini yapalım.

Tanım 3.6. Bir formül içinde yer alan her nesneye bir **küme** denir.

x ve y nesneleri için "$x \in y$" ifadesinin "x, y'nin elemanıdır" diye okunacağı söylenmişti. Şimdi bunu tanımlaştıralım.

Tanım 3.7. Önermesel matematiksel yapıda, $x \in y$ hepdoğru ise x'e y'nin **elemanıdır** denir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 3.1. *Bir kümenin her elemanı bir kümedir.*

Alıştırmalar

3.4. Bir matematiksel yapıda verilen v_i ve v_j değişkenleri için aşağıdakilerin formül olduğunu gösterin.

  i. $\forall v_i(v_i = v_j)$.

  ii. $\forall v_j(v_i = v_j)$.

  iii. $\forall v_i \forall v_j(v_i = v_j)$.

  Ayrıca $=$ yerine $\in$ alındığında da bunların formül olduğunu gösterin.

3.5. Bir önermesel yapıda bir değişkenin bir formül olamayacağını gösterin.

3.6. $\mathcal{P}$ önermesel yapıda $v_i = v_j$ formülünün, önermesel yapı için tanımlanan önerme uzunluğu olarak uzunluğu nedir? $v_i = v_j$, $\mathcal{P}$ dizi olarak uzunluğu nedir?

3.7. x bir küme ise en az bir y nesnesi için "$y \in x$" ifadesini içeren bir formülün olduğunu gösterin.

3.8. Her nesnenin bir küme olduğunu gösterin.

3.9. Nesne olmayan bir sembol var mıdır?

3.10. Hiç elemanı olmayan bir küme olabilir mi?

3.3 Formülün Değişkeni

Bir φ formülünün yazımında yer alan her değişkene φ'nin bir değişkeni, diğer durumda φ'de gözükmeyen formül denir. Benzer söylemler de olabilir. Bir formülde gözüken değişken serbest, bağlı ya da hem bağlı hem de serbest biçimde olabilir. Bu tür değişkenleri tanımlayalım.

φ bir formül ve v_i değişken olsun. v_i'nin φ'de **serbest değişken** olması aşağıdaki koşulların birinin sağlanması anlamındadır:

i. φ bir temel formül ve v_i, φ'de gözükür.

ii. Bir ψ formülü için v_i, ψ'i de serbest değişken ve φ, $(\neg\psi)$ biçimindedir.

iii. Bazı φ_1 ve φ_2 formülleri için φ,

$$(\varphi_1 \to \varphi_2),\ (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2),\ (\varphi_1 \vee \varphi_2),\ (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

formüllerinden biri biçiminde ve v_i, φ_1 ya da φ_2 için serbest değişkendir.

iv. φ, bir ψ formülü için, $i \neq j$ olmak üzere, $\forall v_j(\psi)$ ya da $\exists v_j(\psi)$ biçiminde ve v_i, ψ için serbest değişkendir.

Bir φ formülünün,

$$\forall v_i(\psi) \text{ ya da } \exists v_i(\psi)$$

biçiminde bir altformülü varsa, v_i'ye φ'nin bir **bağlı değişkeni** denir.

Dikkat edilirse bir formül için bir değişkenin serbest ya da bağlı olması için o değişkenin formülde, gözükmesi gerekir. Bir formül içerisinde yer alan bir değişken aynı zamanda hem serbest, hem de bağlı olabilir.

Bir φ formülünde v_i, serbest, olmayan değişken ve v_j φ'nin bir değişkeni değilse, formülde v_i yerine v_j yazılarak elde edilen formül φ formülüne, aksiyom olarak denk olacak.

$\forall v_i(\phi)$ biçimindeki bir formülde, v_i, ϕ için bağlı olmayan serbest değişken ve v_j, ϕ formülünün bir değişkeni değilse, $\forall v_i(\phi)$ formülünde v_i yerine v_j yazılarak elde edilen yeni önerme bu önermeye denk olacaktır.

Alıştırmalar

3.11. Bir temel formülün ve değilinin değişkenlerinin serbest olduğunu gösterin.

3.12. Bütün değişkenleri bağlı olan ama serbest olmayan bir formül yazın.

3.13. $(\forall v_1((v_1 = v_2) \to (v_1 \in v_0)) \wedge \exists v_2(v_2 \in v_1))$ formülündeki serbest ve bağlı değişkenleri ve bağlı olmayan serbest değişkenleri belirleyin.

3.4 Tamamıyle Serbest Değişken

Tanım 3.8. Bir formül içerisinde yer alan ve formülün hiçbir altformülü için bağlı olmayan değişkene o formülün **tamamıyle serbest değişkeni** denir.

Tanım 3.9. Bir v_i değişkeni φ formülünün tümüyla serbets değişkeniyse. φ'ye v_i değişkenin bir özelliği denir. En az bir değişkeninin özelliği olan formüle **özellik** denir.

Bir v_i değişkeninin φ formülü için tamamıyla serbest olması için gerek ve yeter koşulun formül içerisinde $\exists v_i$ ya da $\forall v_i$ ifadesinin yer almaması olduğu açık. Bir formülde yer alan bir serbest değişken tamamıyla serbest olmasa bile, yapılacak uygun değişikliklerle, formül bir özellik olan denk bir formüle dönüştürülebilir. Bu dönüşümü yapmak için izlenilen yol şöyle olacak:
v_i, φ formülünün bir serbest değişkeni olsun. v_j değişkeni verilsin.

i. φ'de bağlı değişkeni olarak yer alan v_i değişkeni yerine formülün bir değişkeni olmayan v_l değişkenini yaz. Yani, φ'nin $\forall v_i(\Theta)$ ya da $\exists v_i(\Theta)$ biçimindeki altformüllerinde v_i yerine v_l yaz.

ii. Yukarıda yapılan uygulamayla elde edilen formül ψ olsun. ψ'nin $\forall v_j(\Theta)$ ya da $\exists v_j(\Theta)$ biçimindeki altformüllerinde v_j yerine formülün bir değişkeni olmayan v_k değişkenini yaz.

iii. (i) ve (ii)'nin φ'ye uygulanmasıyla elde edilen formül Φ olsun. Φ'de yer alan değişken v_i yerine v_j yaz.

Yukarıda φ formülüne uygulanılarak elde edilen Φ formülü, aksiyom olarak, φ formülüne denk olacak. Yani,

$$\psi \leftrightarrow \Phi$$

bir teorem olduğu kabul edilecek. Ayrıca, v_i, φ formülü için tamamıyla serbest olmasa bile, v_j, Φ formülü için tamamıyla serbest olacaktır. Yapılan işlemlerin neye yönelik olarak yapıldığını anlamak için, Φ formülü yerine,

$$\varphi(v_i|v_j)$$

yazılabilir. Bu yazılımla v_i'nin φ formülü için bir serbest değişken ve v_j, $\varphi(v_i|v_j)$ formülü için tamamıyla serbest değişken olduğu anlaşılacak.

Her ne kadar yukarıda yapılan tanımlamalar tek bir serbest değişken üzerinden yapılmış olsa da sonlu sayıda serbest değişkenler için de yapılabilir. Örneğin, $v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}$, φ formülünün serbest değişkenleri ise, $u_{j_1}, u_{j_2}, ..., u_{j_n}$, değişkenleri için φ formülüne denk olacak biçimde bir

$$\varphi(v_{i_1}|u_{i_1}, v_{i_2}|u_{j_2}, ..., v_{i_n}|v_{j_n})$$

formülü, $u_{j_1}, u_{j_2}, ..., u_{j_n}$ değişkenlerinin her birisinin bir özelliği olarak tanımlanabilir.

Alıştırmalar

3.14. v_i, φ'nin serbest değişkeni ise φ ve $\varphi(v_i|v_i)$ formüllerinin denk olduklarını gösterin.

3.15. φ, $v_i = v_j$ önermesini göstermek üzere, $\varphi(v_i|v_j)$ formülünün $v_j = v_j$ olduğunu gösterin. Benzer biçimde, φ, $v_i \in v_j$ önermesini gösterirse $\varphi(v_i|v_j)$ formülünün $v_j \in v_j$ olduğunu gösterin.

3.16. v_i ve v_j, φ formüllerinin değişkenleri olmasın ve v_k, φ'nin tümüyle serbest değişkeni olsun.

$$v_i = v_j \to (\varphi(v_k|v_i) \leftrightarrow \varphi(v_k|v_j))$$

formülü bir teorem olmazsa ayıp olmaz mı?

3.17. Yukarıda verilen alıştırmada oluşturulan formülde $v_i = v_j$ yerine $v_i \in v_j$ yazarak elde edilen formülü bir teorem olarak kabul edersek başımız belaya girer mi?

3.18. φ, $v_k \in v_l$ formülünü göstermek üzere, $\varphi(v_k|v_i)$ ve $\varphi(v_l|v_i)$ formüllerini yazın. Ayrıca

$$v_i = v_j \to (\varphi(v_k|v_i) \leftrightarrow \varphi(v_k|v_j))$$

ve

$$v_i = v_j \to (\varphi(v_l|v_i) \leftrightarrow \varphi(v_l|v_j))$$

formüllerinin birer teorem olması beklenmeli mi?

3.19. Bir $\mathcal{P}$ önermesel matematik yapıda $\forall v_i(v_i = v_j)$ formülü yukarıda verilen yöntemle bir özelliğe denk yapılabilir mi?

3.20. Bir $\mathcal{P}$ önermesel matematik yapıda $\forall v_i(v_i = v_j)$ bir özellik değildir. Bu formül bir özelliğe denk olabilir mi?

3.5 Matematiksel Mantık Aksiyomları

Küme teorinin inşasının gerisinde matematiksel mantık aksiyomları olarak adlandırılan aksiyomlar vardır. Bu aksiyomların bir kısmı mantıksal aksiyomlar adı altında zaten verilmişti. Bütünlük açısından matematiksel mantık aksiyomların bir listesi o aksiyomları da içerecek şekilde aşağıda verildi. φ, ϕ ve ψ formülleri verilsin.

i. $(\varphi \wedge \phi) \to \neg(\varphi \to \neg\phi)$

ii. $(\neg(\varphi \to \neg\phi)) \to (\varphi \wedge \phi)$

iii. $\varphi \to (\phi \to \varphi)$.

iv. $(\varphi \to (\phi \to \psi)) \to ((\varphi \to \phi) \to (\varphi \to \psi))$.

v. $((\neg\varphi) \to (\neg\phi)) \to (\pi \to \varphi)$.

vi. $(\exists v_i(\varphi)) \to \neg(\forall v_i(\neg\varphi)$.

vii. $(\neg(\forall v_i(\neg\varphi))) \to \exists v_i(\varphi)$.

viii. $\forall v_i(\varphi \to \phi) \to (\forall v_i(\varphi) \to \forall v_i(\phi))$.

ix. v_i, φ'nin bir değişkeni değilse $\varphi \to \forall v_i \varphi$.

x. v_i, φ'de bağlı değişken olmamak üzere, v_j, φ'nin bir değişkeni olmasın. $(\forall v_i(\varphi)) \to \varphi(v_i|v_j)$ bir teoremdir.

xi. $(v_i = v_j) \to (v_i = v_k \leftrightarrow v_j = v_k)$.

xii. $(v_i = v_j) \to (v_k = v_i \leftrightarrow v_k = v_j)$.

xiii. $(v_i = v_j) \to (v_i \in v_k \leftrightarrow v_j \in v_k)$.

xiv. $(v_i = v_j) \to (v_k \in v_i \leftrightarrow v_k \in v_j)$.

xv. $\forall v_i(v_i = v_i)$.

xvi. $(v_i = v_j) \to \forall v_k(v_i = v_k \leftrightarrow v_j = v_k)$.

xvii. $(v_i = v_j) \to \forall v_k(v_k = v_i \leftrightarrow v_k = v_j)$.

xviii. $(v_i = v_j) \to \forall v_k(v_i \in v_k \leftrightarrow v_j \in v_k)$.

xix. $(v_i = v_j) \to \forall v_k(v_k \in v_i \leftrightarrow v_k \in v_j)$.

Yukarıda verilen aksiyomlar farklı biçimlerde verilebileceği gibi daha zayıf aksiyomların sonucu olarak da çıkartılabilir. Ancak, okuma ve kullanım kolaylığı açısından bu biçimde verildi. Buna ilişkin bir örnek verelim. φ, $v_l = v_k$ formülünü göstersin. Bu durumda,

$$v_i = v_j \to (\varphi(v_l|v_i) \leftrightarrow \varphi(v_l|v_j))$$

formülü bir teorem olup, yukarı listede yer alan (xii)'ye karşılık gelir.

Bir not: Her ne kadar Matematikçede $=$ sembolü yer almış olsa da, bu sembol diğer semboller üzerinden, aynı amaca hizmet edebilecek yeterlilikte tanımlanabilir. Verilen v_i, v_j ve v_k değişkenleri için,

$$\forall v_k(v_k \in v_i \leftrightarrow v_k \in v_j)$$

ve

$$\forall v_l(v_l \in v_i \leftrightarrow v_l \in v_j)$$

formüllerinin denk olması dikkate alınarak, i ve j indeksleri 0'dan farklı olmak üzere,

$$\forall v_0(v_0 \in v_i \leftrightarrow v_0 \in v_j)$$

formülü bir teoremse, bu formülü $v_i = v_j$ ile göstererek eşitlik sembolü $=$ tanımlanmış olur. Bu tanımlamayla elde edilen $=$ sembolüyle Matematikçede tanımsız olarak verilen eşitlik sembolü, verilen aksiyomlar altında çakışır. Eleman olma üzerinden tanımlanarak elde edilen eşitliğe göre,

$$\forall v_0(v_0 \in v_i \leftrightarrow v_0 \in v_i)$$

formülü bir teorem olacağından,

$$v_i = v_i$$

formülü bir teorem olur. $v_0 = v_0$ olması da ayrı bir aksiyom olarak kabul edilebilir. Benzer biçimde,

$$v_i = v_j \leftrightarrow v_j = v_i$$

formülünün bir teorem olduğu gösterilebilir.

Soyutlamanın bir sınırı yok. Ancak, soyutlama gelişigüzel yapılmamalı, estetiğe dikkat edilmeli!

3.6 Sınıf

Güvercinlerin tipik özelliklerinin biliniyor olmasından dolayı, sadece ve sadece güvercinlerden oluşan kuş topluluğunun yapısını anlamak hangi tür kuşlardan oluştuğu belli olmayan bir kuş topluluğunun yapısını anlamaktan daha kolaydır. Buna benzer biçimde, nasıl bir kurala göre oluştuğu bilinmeyen bir değişkenler topluluğunun yapısını anlayabilmek belirli bir kurala bağlılık içerisinde verilen değişkenler topluluğunu anlayabilmek elbette daha zordur. Bu son cümlede geçen "kural" kelimesini bir formüle indirgemenin oldukça kolaylaştırıcı yanı olacak. Bir formül üzerinden belirlenebilen değişkenler topluluğuna sınıf denilecek.

Tanım 3.10. v_i, φ formülünün bir serbest değişkeni olmak üzere, $\varphi(v_i|v_j)$ formülünü teorem yapan v_j değişkenler topluluğuna, v_i değişkenine göre φ önermesi tarafından tanımlanan sınıf denir.

Dikkat edilirse bir sınıf, bir formül ve o formülün verilen sabit değişkenine göre belirleniyor. Dolayısıyla, bir φ formül ve bu formülün verilen bir sabit v_i değişkenine göre tanımlanan sınıf formül ve sabit değişkenin gözükeceği biçimde gösterilmeli, bu konuda,

$$\{v_i : \varphi\}.$$

standart bir gösterimdir.

İki temel sınıf örneği,

$$\{v_0 : \neg(v_0 = v_0)\}$$

ve

$$\{v_0 : v_0 = v_0\}$$

dir. Ayrıca her i indeksi için

$$\{v_i : \neg(v_i = v_i)\} \text{ ve } \{v_i : v_i = v_i\}$$

birer sınıf olup, sınıflar arasında aşağıda yapılan eşitlik tanımlamasına göre

$$\{v_0 : v_0 = v_0)\} \text{ ve } \{v_i : v_i = v_i)\}$$

sınıfları birbirlerine eşit olacak. Benzer biçimde

$$\{v_0 : \neg(v_0 = v_0)\} \text{ ve } \{v_i : \neg(v_i = v_i)\}$$

sınıfları da birbirlerine eşit olacak. Bu eşitlikten dolayı bunlar özel bir isimle ödüllendirilecek.

v_i ve v_j değişkenleri için,

$$\{v_i : v_i \in v_j\}$$

bir sınıftır. Uygun tanımlamalarla bu sınıf, her v_l değişkeni için

$$\{v_l : v_l \in v_j\}$$

sınıfına "eşit" olarak tanımlanabilecek. Bunun sonucu olarak,

$$\{v_i : v_i \in v_j\}$$

sınıfı, v_i değişkeninden bağımsız olarak değerlendirilerek, bu sınıf v_j ile gösterilebilir. Böylece her değişken formülü temel formül olan bir sınıfla temsil edilebilir.

Eleman olma ve eşit olma kavramı sınıflar için aşağıdaki gibi genellenebilir. φ ve ψ iki formül, v_i, φ'nin ve v_j, ψ'nin serbest değişkenleri olsun.

i. $\forall v_l(\varphi(v_i|v_l) \leftrightarrow \psi(v_j|v_l))$ bir teorem ise, φ formülünce v_i serbest değişkenine göre belirlenen sınıf, ψ formülünce v_j serbest değişkenine göre belirlenen sınıfa eşit denir. Bu durum

$$\{v_i : \varphi\} = \{v_j : \psi\}$$

ile gösterilir.

ii. $\exists v_l((\varphi(v_i|v_l) \wedge \forall v_i((v_i \in v_l) \leftrightarrow \varphi)))$ bir teorem ise φ formülünce v_i serbest değişkenine göre belirlenen sınıf, ψ formülünce v_j serbest değişkenine göre belirlenen sınıfın elemanı denir. Bu durum

$$\{v_i : \varphi\} \in \{v_j : \psi\}$$

ile gösterilir.

Yukarıda tanımlanan yapıyla ilgili birkaç gözlem ve tanımlama daha verelim.

a. Sınıflar arasında tanımlanan eşitlik değişmelidir. Yani, A ve B iki sınıfsa $A = B$ olması için gerek ve yeter koşul $B = A$ olmasıdır.

b. φ ve ψ formülleri birbirlerine denkse, bunların bir ortak serbest değişkenlerine göre belirlenen sınıflar birbirlerine eşit olur.

c. Verilen v_i, v_j ve v_k değişkenleri için,

$$\{v_i : v_i \in v_j\} = \{v_k : v_k \in v_j\}.$$

d. A, B ve C ile gösterilen sınıflar için, $A = B$ ve $B \in C$ ise $A \in C$ olur.

e. v_i bir değişkeni ve A bir sınıfı göstersin.

$A = \{v_j : v_j \in v_i\}$ ise $A = v_i$,
$A \in \{v_j : v_j \in v_i\}$ ise $A \in v_i$,
$\{v_j : v_j \in v_i\} \in A$ ise $v_i \in A$,

yazılır.

Tanım 3.11. $\{v_i : v_i = v_i\}$ sınıfına **evrensel sınıf** ve $\{v_i : \neg(v_i = v_i)\}$ sınıfına **boş sınıf** denir.

Alıştırmalar

3.21. Evrensel sınıfın boş sınıfa eşit olmadığını gösterin.

3.22. v_i, v_j ve v_k değişkenleri için,

a. $\{v_i : v_i \in v_j\} = \{v_i : v_i \in v_k\}$ ise $v_j = v_k$ olur mu?

b. $v_j = v_k$ ise $\{v_i : v_i \in v_j\} = \{v_i : v_i \in v_k\}$ olur mu?

3.23. v, v_1, v_2 değişkenleri verilsin.

$$\{v_1 : v_1 \in v\} = \{v_2 : v_2 \in v\}$$

olduğunu gösterin.

4. Zermelo Fraenkel Küme Teori

ZF boş kümeyle oynama sanatının kurallarının adıdır.

Matematik kavramının neden formülleştirilmesi gerektiğine ilişkin bazı yorumlar bir önceki bölümün girişinde verilmiş ve formülleştirmenin yapılabilmesi için önermesel matematik yapı adında bir önermesel yapı tanımlanmıştı. Günümüzün matematiği aşağı yukarı, bu yapı üzerinde tanımlanan ve Zermelo Fraenkel aksiyomları olarak adlandırılan aksiyomlar üzerine inşa edilir. Bu bölümde, bu aksiyomlar hem günlük dil, hem de formel bir dil kullanılarak verilecek.

Zermelo kümelerin aksiyomlaştırma çalışmalarına 1905'de başlamış ve elde ettiği aksiyom listesini, 1908 yılında [60]'de yayınlamıştır. Bu listede Yerleştirme Aksiyomu, Temellendirme Aksiyomu ve Seçim Aksiyomu yer almamıştır. Zermelo ve Fraenkel arasında yapılan yazışmalar sonrasında, Zermelo'nun aksiyom listesinde ortaya çıkan boşluk Fraenkel'in 1922'de yayınlanan makalesinde yer alan Yerleştirme Aksiyomuyla giderilmiştir. Yerleştirme Aksiyomunu Fraenkel'den bağımsız olarak Thoralf Skolem de (1923) vermiştir. Bir rivayete göre, bu aksiyom Cantor'un yayınlanmamış çalışmalarında da yer almıştır. Zermelo'nun aksiyom listesine Fraenkel'in Yerleştirme Aksiyomu eklenerek elde edilen aksiyomlar listesi, von Neumann'ın bir yazısında ***Zermelo-Fraenkel küme teori*** diye adlandırmıştır. Bu genişletilmiş listeye von Neuman'a ait olan temellendirme aksiyomu (Axiom of regularity) eklenerek elde edilen liste 1930'da Zermelo tarafından yeniden yayınlanmıştır. Bu listeyi tekrar verelim:

i. Eşitlik Aksiyomu.

ii. Boşküme Aksiyomu.

iii. İki Elemanlı Küme Aksiyomu.

iv. Bileşim Aksiyomu.

v. Yerleştirme Aksiyomu.

vi. Altkümeler Kümesi Aksiyomu.

vii. Sonsuzluk Aksiyomu.

viii. Temellendirme Aksiyomu.

Bu liste topluluğuna genelde ***Zermelo-Fraenkel Aksiyomlar Listesi*** denir ve ZF ile gösterilir.

ZF bir önermesel matematik yapı inşa eder. Bu yapıda değişkenler "küme" olarak adlandırılacak. Bu yapı bir kümenin ne olduğunu tanımlamaz; verilen kümeden yeni küme üretir. Yani ZF değişkenleri "küme" olarak adlandırılan küme üretme sistemidir. Örneğin, bir önermesel matematik yapıda "$a \in b$" kullanıldığında a ve b o yapının değişkenleri olacağından, ZF'nin tanımladığı yapıda x bir "küme" ise $x \in \{x\}$ formülü anlamlı olacağından, $\{x\}$ bir değişken ve bu yapıda üretilen bir küme olacak. Bütün bunların yapılabilmesi için bir dayanak kümenin olması gerekecek ve bu dayanak olacak küme bir aksiyomla verilecek.

ZF listesinde verilmeyen bir başka aksiyom seçim aksiyomudur:

ix. Kendisi ve her elemanı boşkümeden farklı her kümenin seçim fonksiyonu vardır. Yani, X, her elemanı boşkümeden farklı boş olmayan bir küme ise her $x \in X$ için $f(x) \in x$ olacak biçimde $f : X \to \bigcup X$ fonksiyonu var.

Seçim aksiyomunun bu listeye eklenmesiyle elde edilen liste ZFC ile gösterilir. Her ne kadar seçim aksiyomu kullanılmadan sayılar sistemi inşa edilebilse de, seçim aksiyomsuz matematik yapmak çok zor! Bu nedenle seçim aksiyomuna bu kitapta yer verilecek. Bu aksiyom bir sonraki bölümde çalışılacak.

Bu bölümde verilecek olan aksiyomlar bir önermesel matematik yapı için verilecek. Bu yapının en az bir değişkeninin olduğu bir aksiyom olarak verilecek.

4.1 Eşitlik Aksiyomu

Onları sadece ve sadece matematik eşitleyebilir. Amen.

Eşitlik kavramı "çantada keklik" olacak kadar basit bir kavram değildir: MS 340 yılında İskenderiye'de doğduğu tahmin edilen, İskenderiye okulunun son büyük matematikçisi olduğu kabul gören ve günümüzde kaybolmuş birçok matematik kitabının yazarı olan Pappus'ün, "Bir dik açıya eşit olan açı bir dik açıdır" önermesine karşı çıktığı söylenir.

Bir önceki bölümde bir önermesel matematik yapıda verilen aksiyomlar kullanılarak bir a değişkeni için

$$a = a$$

gibi masum bir formülün bile hepdoğru olduğu söylenemez. Diğer taraftan $a = a$ formülünü hepdoğru yapmayan bir yapıyı hiçbir kimse ciddiye almaz. Bu eksiklik tanımlanacak eşitlik aksiyomuyla giderilecek.

Eşitlik kavramını daha doğal anlayabilmek için kurgusal birkaç benzetme yapalım: Bir an için, bir insan topluluğunda verilen x ve A kişiler aynı soydansa ve A'nın yaşı x'in yaşından büyükse, "x, A'nın elemanıdır" diyelim ve $x \in A$ yazalım. A ve B aynı kişilerse her x için $x \in A$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in B$ olmasıdır. Ama bunun tersi doğru değildir. Yani "her x için $x \in A$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in B$" özelliğinde ve birbirlerinden farklı A ve B insanları bulunabilir. Gerçekten de A ve B ikiz kız kardeş olabilir.

Bir çocuğun en fazla bir babası olabileceğinden, bir a çocuğun babaları A ve B ise $A = B$ olur. Ama tersi doğru değildir. Yani babaları aynı olan çocuklar aynı olmak zorunda değildir; babalar aynı, anneler farklı olabileceğinden dolayı.

Üyeleri aynı olan iki derneğin aynı olması gerekmez. Burada okur üyelerin insan olduklarına, derneğin bir insan olmadığına dikkat etmeli.

Eşitlik nasıl olmalı? Temel olarak beklenti ne olmalı?

Aksiyom 4.1 (Eşitlik Aksiyomu)**.** *Elemanları aynı olan iki küme birbirlerine eşittir. Yani, x ve y kümeleri için,*

$$(\forall z(z \in x \to z \in y) \to x = y).$$

Bu aksiyom kelimeler kullanılmadan, Matematikçede

$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \to z \in y) \to x = y)$$

olarak yazılır.

Bu aksiyom şu şekilde de ifade edilir: x ve y iki küme olsun. x'e ait olan her eleman y'nin bir elemanı ve y'e ait olan her eleman x'in bir elemanı oluyorsa x ve y kümeleri eşit olur. Dikkat edilirse bir kümenin var olup olmadığı bilinmeden, olursa eşitliğin nasıl olması gerektiği aksiyomla verilmiş olundu.

Teorem 4.1. *İki kümenin eşit olması için gerek ve yeter koşul birine ait herhangi bir elemanın diğerine ait olmasıdır. Yani, bir a ve b kümeleri için*

$$a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

bir teoremdir.

Yukarıdaki teorem daha formel olarak

$$\forall a \forall b(\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b)$$

biçiminde ifade edilir. Bu teoremin kanıtı

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \text{ ve } \forall y(y \in a \leftrightarrow y \in b)$$

formüllerinin denk oldukları kuralı kullanılarak yapılır.

Bundan böyle, verilen teoremler eşitlik aksiyomunun varlığı üzerinden verilecek. Dahası, bir teorem ifade edildiğinde, aksi bir durum belirtilmediği sürece, teoremden önce verilen bütün aksiyomlar kabul edilecek.

Sıklıkla sorulan "$a = a$ olur mu?" sorusuna şimdi yanıt verilebilir.

Teorem 4.2. *Her küme kendisine eşittir. Yani, verilen her a kümesi için a için $a = a$.*

Kanıt: $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in a)$ formülünün hepdoğru olmasını ve eşitlik aksiyomunu ele alarak, Modus Ponens'in bir sefer uygulanmasıyla istenilen elde edilir. □

Teorem 1.2'nin kullanılmasıyla aşağıdaki teoremin kanıtı kolayca verilir.

Teorem 4.3. *a ve b kümeleri için*

i. $a = b \to b = a$.

ii. $((a = b) \wedge (b = c)) \to a = c$.

Formel olmayan dilde yukarıdaki ifadeler "$a = b$ ise $b = a$" ve "$a = b$ ve $b = c$ ise $a = c$" biçiminde ifade edilir. Ayrıca bu teorem

$$(a = b) \equiv (b = a)$$

olduğunu, yani $a = b \leftrightarrow b = a$ formülünün hepdoğru olduğunu söyler. Bir başka değişle, eşitlik sembolü $=$ değişmelidir.

Tanım 4.1. x ve y iki küme olmak üzere, x'in her elemanı, y'nin de bir elemanı oluyorsa x'e y'nin ***altkümesi*** denir ve $x \subseteq y$ ya da $y \supseteq x$ olarak gösterilir[1].

Tanımı sembollerle ifade edecek olursak, a ve b kümeleri için

$$\forall x(x \in a \to x \in b) \to a \subseteq b$$

olur. Aşağıdaki teoremin kanıtı kolayca verilir.

Teorem 4.4. *x, y ve z kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.*

i. $x \subseteq x$.

[1]Kapsama sembollerinden "$\subset$", 1817'de Joseph Gergonne tarafından, $\supset$ sembolü ise 1890'da Ernst Schröder tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Bazı kitaplarda $x \subset y$ olması $x \subseteq y$ ile gösterilir.

ii. *$x = y$ olması için gerek ve yeter koşul $x \subseteq y$ ve $y \subseteq x$.*

iii. *$x \subseteq y$ ve $y \subseteq z$ ise $x \subseteq z$.*

Alıştırmalar

4.1. Teorem 3.4'i kanıtlayın.

4.2. Bir x kümesi için $x \in x$ olur mu?

4.3. $x \in y$ ve $y \in z$ özelliğini sağlayan x, y ve z kümeleri için $x \in z$ olur mu?

4.4. Bir değişkenin bir sınıfa eşit olması Tanım 2.9'ın üstünde yer alan (e)'nin ilk kısmında verilmişti. Bu tanıma göre her kümenin bir sınıfa eşit olduğunu gösterin.

4.2 Boşküme Aksiyomu

"Bana yeterince uzun bir kaldıraç ve sağlam bir dayanak noktası verin, dünyayı yerinden oynatayım" ifadesinde geçen dayanak noktası matematik için bulunmuştur: Boşluk..

Eşitlik aksiyomu, iki kümenin eşit olmasını eleman olma kavramı üzerinden belirtiyor olmasına karşın, hiç elemanı olmayan bir kümenin var olduğunu söylemiyor. Ancak, böyle bir küme varsa bu kümelerin eşit olduğunu söyleyebiliyoruz. Varlığını bile bilmediğimiz kümelerin eşit olma durumlarını tanımlamak, deyim yerindeyse *doğmamış çoçuğa don biçmektir.* Bu altbölümde, bir aksiyomla "çocuk doğurulacak".

Yukarı altbölümün girişinde soy üzerinden küme kavramı hissetirilmeye çalışılmıştı. Bir soy olabilir ama o soya ait şu anda yaşayan hiçbir insan olmayabilir. Bu durumda bu soya "boş" denilebilir. Bu gözlemi kullanarak aşağıdaki aksiyomu verelim.

Aksiyom 4.2 (Boşküme Aksiyomu)**.** *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır. Yani,*

$$\exists x \forall y (\neg (y \in x)).$$

Birbirinden farklı hiç elemanı olayan iki kümenin olamayacağını aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 4.5. *Hiç elemanı olmayan iki küme eşittir.*

Kanıt: x ve y hiç elemanı olmayan iki küme olsun. $x \neq y$ olduğunu varsayalım. Bu durumda ya x'de olan ve y'de olmayan bir eleman ya da y'de olup x'de olmayan bir eleman vardır. Her iki durumda da x ve y'nin elemanları olmadığından çelişki oluşur. O halde, $x = y$ olmak zorundadır. $\square$

Demek ki hiç elemanı olmayan küme tektir ve dolayısıyla bir özel ismi hak ediyor.

Tanım 4.2. Hiç elemanı olmayan kümeye ***boşküme*** denir. Boşküme $\emptyset$ ile gösterilir[2].

Boşküme Aksiyomu 4.2 ve Tanım 4.2 gereği en az bir küme vardır. En az bir kümenin var olduğu, boşküme aksiyomu kullanılmadan da doğrudan aksiyom olarak kabul edilip, sonrasında boşküme tanımlanabilir.

Boş küme sayılar teorisinde sıfırı tanımlar.

Tanım 4.3. Sayılar teorisinde boşkümeye ***sıfır*** denir ve 0 ile gösterilir.

O halde resmi olarak tanımlanmış bir sayı da var. Diğer sayılar sıfır üzerinden inşa edilecek.

Alıştırmalar

4.5. Boşkümenin bir küme olduğunu gösterin.

4.6. En az bir kümenin var olduğunu gösterin. Bu, x bir nesneyi göstermek üzere, "$\exists x$" ile gösterilir.

4.7. Bir x kümesi için aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

   i. $\emptyset \subseteq x$.

   ii. $x \subseteq \emptyset$ ise $x = \emptyset$.

4.8. Teorem 2.1'in ifadesini önermesel dilde yazın.

4.9. $\neg(\emptyset \in \emptyset)$ önermesinin hepdoğru olduğunu gösterin.

4.10. Boşsınıfın boşkümeye eşit olduğunu gösterin.

4.2.1 Sıfır'ın Sayı Olma Mücadelesi

Sıfırın sayı olabilmek için verdiği emeği bir Allah, bir kendisi bilir. Meğerse o olmadan hiçbir sayı olamazmış. Lütfen sıfıra saygı gösterin.

Sıfır köken olarak Sanskritçe'de Hindu ismi *sunya*, Arapçada *as-sifr* olup, her ikisi de *boş* anlamına gelir. as-sifr Ortaçağ Latincesinde *zefirum* ve *cefirum* olarak yazılıyordu. Zefirum kelimesi İtalyancada *zefro* ve *zevero*'ya evrilmiştir. Bu kelime Venedik lehçesiyle *zero*'ya dönüşüyor. Diğer Latince kelime olan cefirum ise *cifra* olarak kullanılmaya başlanıyor. Bu kelime Oxford Ingilizce

[2] Norveç ve Danimarka alfabesinde bir harf olan $\emptyset$ sembolü Bourbaki grubu tarafından (özellikle Andre Weil) 1939'da kullanılmaya başlanmıştır. Nadir de olsa $\emptyset$ yerine $\{\}$ sembolü kullanılır.

Sözlüğü'nde *cipher* olarak yer almakta ve anlamlarından biri *hiçbirşey* ya da *yok* anlamında olarak tanımlanmış olsa da kullanılmayan bir terim olduğu belirtilmekte.

Sıfırın iki evresi var, birinci evresi *yer tutucu* görevidir. Her sayının farklı bir sembol ile gösterilme durumu olamaz. Ancak her sayı sonlu sayıda sembol grubunun bir dizisi ile yazılabilir. Örneğin

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

sayılar topluluğuyla her sayı belirli bir gruba göre yazılabilir. Örneğin üç sayısı

$$3$$

ile, otuz iki sayısı 3 ve 2 sayıları kullanılarak

$$32$$

ile gösterilebilirken, üç yüz iki sayısı, yine bu rakamlar kullanılarak

$$3\quad 2$$

gösterilebilir. Üç bin iki sayısı

$$3\qquad 2$$

ile gösterilebilir. Dikkat edilirse, son üç sayı arasındaki yazım farklılığı 3 ve iki sayı arasındaki boşluklara göre belirleniyor: "32" de hiç boşluk yok iken, "3 2" yazılımında bir boşluk ve "3   2" yazılımında iki boşluk var. Bırakılan boşlukların kaç adet olduğunu belirlemenin zorluğu ortada; özellikle görme konusunda problemleri olanlar için. Bu zorluğu aşmanın yollarından biri boşluk sayısı kadar nokta "." işareti olabileceği gibi, bu boşlukların herbiri yerine boşluk simgesi olan "0" sembolü kullanılır. Bu anlamda, 0 bir yer tutucudur. Dikkat edilirse, her bir boşluğa farklı bir sembolün konulmasına gerek yok. İkinci evresi ise rakamlar protokülünde, hem de baş sırada aslanlar gibi yerini almasıdır.

Sayıları yazarken boşluk bırakma MÖ 2000-1800 yılları arasında, Babilliler tarafından bulunmuştur. Babiller bu dönemde 60'lık taban sistemini kullanıyordu. Yine Babiller tarafından MÖ 200-300 yılları arasında, boşluk bırakma yerine *Babil sıfırı* olarak adlandırılan sembol kullanılmaya başlanıldı. Bu yaklaşıma günümüzde *yer tutucu*, *yer gösterici* gibi isimler verilmekte. Babillerden bağımsız olarak MÖ 5. yüzyılda, bir Orta Amerika uygarlığı olan Mayalar yer tutucu kavramını 20'lik taban sayı sistemlerine uygulamışlardır. Yer göstericiler Çin'de de MÖ altıncı yüzyıldan beşinci yüzyıla kadarki paralarda bir yuvarlak olarak gösterilmiştir. Anlaşılıyor ki yer göstericilik bağımsız uygarlıkların ortak bir ürünü.

Çinliler'in yer tutucu olarak kullandığı yuvarlak sembol, günümüzdeki sıfır sembolünün atasıdır.

Yer tutucu kavramı dikkate alındığında sıfırın boşluk ya da boşküme olarak tanımlanmasının (Tanım 3.3) çok isabetli olduğu anlaşılmakta.

Yer tutucu olarak görevlendirilen sıfır yerinde durmuyor; Brahmagupta'nın Brahmasphutasiddhanta'sı ve Harizmi'nin girişimiyle, bir sayı olma şerefine binbir güçlükle, mücadele ede ede ulaşıyor. Bu sayının diğerlerinden farkı, büyüklüğü olmayan bir nicelikte olması. Bu sayıyla sayılar arasındaki toplama ve çıkarmaya yeni yeni yön veriliyor, yeni sayıların yolu açılıyor. Hoşgeldin sıfır.

Sıfırla ilgili detayların izleri [30] ve [36]'te bulunabilir ya da izleri sürülebilir.

4.3 İki Elemanlı Küme Aksiyomu

Şu an için en az bir kümenin var olduğunu bilmekle birlikte, bu kümenin hiç elemanının olmaması bir yönüyle, hiç askeri olmayan orduya benzer. Başka kümeler de olmalı.

"En az bir elemanı olan bir küme var mıdır?" sorusuna, yukarıda verilen eşitlik aksiyomu ve boşküme aksiyomu kullanılarak yanıt verilemez. Ancak, bu aksiyomlarla birlikte verilecek bir başka aksiyomun kullanılmasıyla, soruya olumlu yanıt verilebilir.

Aksiyom 4.3 (İki Elemanlı Küme Aksiyomu)**.** *Verilen iki küme için elemanları sadece ve sadece o kümeler olan bir küme vardır. Yani,*

$$\forall x \forall y \exists z \forall a (a \in z \longleftrightarrow (a = x) \vee (a = y)).$$

Elemanları sadece ve sadece x ve y olan z kümesi,

$$\{a : (a = x) \vee (a = y)\}$$

sınıfına eşittir. Bu küme

$$\{x, y\}$$

ile gösterilir[3].

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

olduğu açık. $\{x, x\}$ kümesi yerine $\{x\}$ yazılır. $\{x\}$ biçimindeki kümelere bir elemanlı ve y, x'e eşit olmayan bir kümeyse, $\{x, y\}$ biçiminde yazılabilen kümeye iki elemanlı küme denir.

Teorem 4.6. *Boşkümeden farklı bir başka küme vardır.*

[3]Bu gösterim ilk olarak Cantor tarafından 1878'de, *Ein Beitrag zur Mannifaltigkeitslehre* adlı çalışmasında kullanştır.

Kanıt: $x = \emptyset$, $y = \emptyset$ alarak $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\} = \{\emptyset\}$ bir kümedir. Ayrıca, $\emptyset \in \{\emptyset\}$ olduğundan, bu küme boşkümeden farklıdır. □

Böylece, bundan böyle boşkümeden farklı bir küme daha var. Hatta hiç elemanı olmayan küme, sadece bir elemanı olan küme ve iki elemanı olan kümeler var. Acaba üç elemanlı bir küme var mır? Örneğin, verilen x, y ve z kümeleri için,

$$\{a : (a = x) \vee (a = y) \vee (a = z)\}$$

sınıfı bir küme olur mu? Sorunun yanıtının evet olabilmesi için bir sonraki aksiyoma ihtiyacımız var.

Alıştırmalar

4.11. Verilen bir x kümesi için $\{x\}$ kümesinin $\{a : a = x\}$ sınıfına eşit olduğunu gösterin.

4.12. Bir x kümesi için $a \in \{x\}$ ise $a = x$ olduğunu gösterin. Tersine, $a = x$ ise $a \in \{x\}$ olduğunu gösterin.

4.13. a ve b iki küme olmak üzere, $a = b$ olması için gerek ve yeter koşulun $\{a\} = \{b\}$ olduğunu gösterin.

4.14. Birbirlerine eşit olmayan x, y ve z kümeleri için $\{\{x, y\}, z\}$ kümesinin kaç elemanı var?

4.15. Birbirlerinden farklı bir elemanlı üç farklı küme yazın.

4.4 Bileşim Aksiyomu

İki kümenin "birleştirilmesi"ne izin vermek bir doğal hak (canlıların çiftleşme hakkına benzer bir durum) gibi duruyor. Bu "doğal hak" bir aksiyomla verilebilir. Böyle bir doğal hakkın verilmesi sonrası, "verilen bir kümeyi kapsayan ama eşit olmayan bir başka küme var mıdır?" gibi doğal bir soru olumlu olarak yanıtlanabilir. Daha fazlası da elde edilebilir; üç elemanlı bir küme vardır.

Aksiyom 4.4 (Birleşim Aksiyom)**.** *Elemanları sadece ve sadece elemanlarının elemanlarından oluşan bir küme vardır. Yani,*

$$\forall x \exists y \forall a (a \in y \longleftrightarrow \exists t \in x (a \in t)).$$

Sınıf gösterimi altında bu aksiyomun söylediği, x kümesi için,

$$\{t : \exists y((y \in x) \wedge (t \in y))\}$$

sınıfının bir küme olduğudur. Bu aksiyomda yer alan y tek olup, x'in **bileşimi** denir. x kümesinin bileşimi $\cup x$ ile gösterilir. Yani,

$$\cup x = \{t : \exists y(y \in x \wedge t \in y)\}.$$

Aşağıdaki teoremin kanıtını okura bırakıyoruz.

Teorem 4.7. *Birbirlerine eşit iki kümenin bileşimleri de eşittir. Yani, $x = y$ ise $\cup x = \cup y$ olur.*

x ve y iki küme olmak üzere, $\{x, y\}$ kümesinin bileşimi $x \cup y$ ile gösterilir. $\{x, y\} = \{y, x\}$ olmasından dolayı da $x \cup y = y \cup x$ olduğu açık.

Boşkümenin arakesiti tanımlı değildi. Ama boşkümenin bileşimi tanımlıdır. Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 4.8. $\cup\emptyset = \emptyset$.

x, y ve z birbirlerine eşit olmayan üç küme olmak üzere $\{x, y\}$ ve $\{z\}$ kümelerinin bileşimi

$$\{a : (a = x) \vee (a = y) \vee (a = z)\}$$

sınıfına eşittir. Böylece, elemanları sadece ve sadece x, y ve z kümelerinden oluşan bir küme vardır. Bu küme sıralama önemsenmeksizin $\{x, y, z\}$ ile gösterilir. Böylece üç elemanlı bir kümenin varlığı gösterilmiş olur. x, y ve z birbirlerine eşit olmayan üç küme olmak üzere, $\{x, y, z\}$ biçiminde yazılabilen kümelere üç elemanlı küme denir.

Alıştırmalar

4.16. x, y, z ve t kümeler olmak üzere,

$$\{a : (a = x) \vee (a = y) \vee (a = z) \vee (a = t)\}$$

sınıfının bir kümeye eşit oluğunu kanıtlayın.

4.17. x kümesi verilsin. x'e eşit olmayan ve x'i kapsayan bir kümenin olduğunu kanıtlayın.

4.18. İstenilen çoklukta kümenin olduğunu gösterin.

4.5 Yerleştirme Aksiyomu

İki küme arasında tanımlı bir fonksiyonun ne anlama geldiğinin bilindiği varsayımıyla, okur fonksiyonun "görüntü kümesinin" bir kümeler topluluğu olduğuna lütfen itiraz etmesin. "Fonksiyonun görüntü kümesi bir küme olur mu?" sorusuna şu ana kadar verilmiş bulunan aksiyomlarla yanıt verilemez. Bu soruyu özel olarak "evet" şeklinde yanıtlayacak bir aksiyom verilecek. Daha genel olarak, verilecek aksiyom bir kümeden bir sınıfa tanımlı her fonksiyonun görüntü kümesinin küme olduğunu söyleyecek. Bu aksiyomun uygulanması sonucu olarak, son derece "doğal" olan, iki kümenin arakesiti, farkı, bir kümenin arakesiti gibi kavramlar tanımlanabilecek.

Bir kümeden bir sınıfa tanımlı fonksiyon, kümenin her elemanını sınıfın tek bir elemanına karşılık getiren bir şeydir. Aşağıda verilen aksiyom, f, bir X kümesinden bir Y sınıfına tanımlı bir fonksiyon ve $x \in X$ elemanına Y sınıfında karşılık gelecek eleman $f(x)$ ile gösterilecek olunursa, elemanları sadece ve sadece $f(x)$ formunda olan bir kümenin olduğunu söyler.

Aksiyom 4.5 (Yerleştirme Aksiyomu[4]). *X bir küme ve x ve y'ler $\varphi(x, y)$ formünün serbest iki değişkeni olmak üzere,*

[4] İngilizcesi The Replacement Axiom Scheme.

i $\forall t(t \in X \to \exists u(\varphi(x|t, y|u))$

ii $\forall t \forall u \forall v(t \in X \wedge \varphi(x|t, y|u) \wedge \varphi(x|t, y|v) \to u = v))$

formülleri doğrusa,

$$\{y : \exists t(t \in X \wedge \varphi(x|t, y))\}$$

sınıfı bir kümedir.

İngilizce olarak The Comprenensive Scheme olarak bilinen aşağıdaki teoremi kanıtsız olarak verelim.

Teorem 4.9. *x bir küme ve t, φ formülünün serbest değişkeniyse*

$$\{t : (t \in x) \wedge \varphi\}$$

sınıfı bir kümedir.

Teoremde geçen küme genellikle $\{t \in x : \varphi\}$ olarak gösterilir.

Verilen aksiyomlar kullanılarak iki kümenin arakesitini tanımlayabiliriz. x ve y kümeleri verilsin. $\{t : t \in y\}$, y kümesine eşit bir sınıftır. The Comprehension Scheme gereği,

$$\{t : (t \in x) \wedge (t \in y)\}$$

bir kümedir. Bu kümeye x ve y kümelerinin **arakesiti** denir ve $x \cap y$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 4.10. *x, y ve z kümeleri verilsin. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.*

i. $x \cap y = y \cap x$,

ii. $x \cap y \subseteq x$,

iii. $x \cap y \subseteq y$,

iv. $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$,

Yukarıda verilen teoremin sonucu olarak $x \cap (y \cap z)$ kümesi $x \cap y \cap z$ ile gösterilebilir. Ayrıca $x \cap y = y$ olması için gerek ve yeter koşul $y \subseteq x$ olmasıdır. Bunu takip ederek verilen sonlu tane $x_1, x_2, ..., x_n$ kümenin arakesiti

$$\{y : (y \in x_1) \wedge (y \in x_2) ... \wedge (y \in x_n)\}$$

olarak tanımlanır. Bu küme genellikle $\bigcap_{i=1}^{n} x_i$ olarak gösterilir.

Verilen iki kümenin ya da üç kümenin arakesitini tanımlamış olsak da okur, verilen bir x kümesinin arakesitinin henüz tanımlanmadığının farkındadır. Bunu yapabilmek için kanıtı okura bırakılan bir teorem verelim.

Teorem 4.11. *x bir küme olsun. Her $a \in x$ için*

$$\{t \in a : \forall y \in x(t \in y)\}$$

bir kümedir. Üstelik, her $b \in x$ için

$$\{t \in a : \forall y \in x(t \in y)\} = \{t \in b : \forall y \in x(t \in y)\}$$

olur.

Verilen bu teorem aşağıdaki tanımın kapısını açabilir.

Tanım 4.4. Bir x kümesinin arakesiti, herhangi bir $a \in x$ için,

$$\{t \in a : \forall y \in x(t \in y)\}$$

kümesidir. Bu küme $\cap x$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre verilen x ve y kümeleri için,

$$x \cap y = \cap\{x, y\}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Verilen x ve y kümeleri için,

$$x \setminus y = \{a \in x : a \notin y\}$$

de bir kümedir. Bu küme "x fark y" diye okunur. Aşağıda verilen teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 4.12. *x ve y kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.*

i. $x \setminus \emptyset = x$.

i. $\emptyset \setminus x = \emptyset$.

iii. $x \setminus y = \emptyset$ *olması için gerek ve yeter koşul* $x \subseteq y$ *olmasıdır.*

iv. $x \setminus x = \emptyset$.

Russell'ın Frege'ye yazdığı mektupta ifade edilen teorem şudur.

Teorem 4.13 (Russell)**.** *Her küme elemanı olan bir küme yoktur.*

Kanıt: Olduğunu varsayalım ve bu kümeyi $V = \{x : x = x\}$ olarak gösterebiliriz. Bu durumda, $\{x : x \notin x\}$ bir sınıf olduğundan The Comprehension Scheme gerği

$$R = \{x \in V : x \notin x\}$$

bir küme olacaktır. Buradan da

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R$$

çelişkisi elde edilir. □

Alıştırmalar

4.19. Bu altbölümde kanıtı verilmeyen teoremleri kanıtlayın.

4.20. Kümeler için tanımlanan arakesit ve fark kavramlarını sınıflar için genelleyin. Bu genelleme bir sınıfla bir kümenin arakesitini bir küme yapacak biçimde olsun, diğer türlüsünü saymam!

4.21. Boş sınıf ile herhangi bir kümenin arakesitinin boşküme olduğunu gösterin.

4.22. x bir küme olsun. $\{y : \exists a(a \in x \wedge y = \{a\})\}$ sınıfının bir küme olduğunu gösterin.

4.6 Altkümeler Kümesi Aksiyomu

x ve y iki küme ise elemanları sadece ve sadece $\{x\}$ ve $\{x, y\}$ olan bir küme vardır. Bu kümeye **sıralı ikili** denir ve (x, y) ile gösterilir. Yani,

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$[5].

$(a, b) = (c, d)$ olduğunda $a = c$ ve $b = d$ olduğu barizdir. Elbette tersi de doğrudur. Her x kümesi için

$$(x, x) = \{\{x\}\}$$

olduğunu okur kolaylıkla görebilir. Şu sorunun akla gelmesi doğaldır: X ve Y iki küme olsun. Elemanları sadece ve sadece (x, y)'ler olan ($x \in X$, $y \in Y$) bir küme var mıdır? Yani,

$$\{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

sınıfı bir küme olur mu? Şu ana kadar verilen aksiyomların toplam gücü bu sınıfı küme yapmaya yetmez. Bu olmadan da fonksiyon tanımlanamaz, doğal sayılar dışında birçok sayı tanımlanamaz. Bunun için bir el verelim.

Aksiyom 4.6 (Altkümeler Kümesi Aksiyomu)**.** *Bir kümenin altkümelerinin topluluğu bir kümedir. Yani, bir x kümesi için,*

$$\exists y \forall a(a \in y \longleftrightarrow a \subseteq x).$$

olur

[5]Bu tanımlama Kuratowski tarafından 1921 yılına vermiştir. Bu ikili çifti, 1914 yılında Hausdorff $(x, y) = \{\{x, 1\}, \{y, 2\}\}$ olarak ve Wiener $(x, y) = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$ olarak tanımlamıştır.

Formülde geçen y tektir ve bu küme $\wp(x)$ ile gösterilir. Eşitlik aksiyomu, boşküme aksiyomu ve altkümeler kümesi aksiyomları kullanılarak boşkümeden farklı bir kümenin varlığı gösterilebilir. Gerçekten de $\emptyset \in \wp(\emptyset)$ olduğundan, $\wp(\emptyset)$ boşkümeden farklı bir kümedir. Üstelik,

$$1 = \wp(\emptyset)$$

olur. Ayrıca her x için

$$\emptyset \neq \wp(x) \text{ ve } x \neq \wp(x)$$

olur. Okur x ve y kümeleri için $x = y$ olması için gerek ve yeter koşulun $\wp(x) = \wp(y)$ olması gerektiğini gösterebilir.

x ve y iki küme olsun. Yukarıdaki aksiyomlar sonucu, elemanları sadece ve sadece (a, b) $(a \in x$ ve $y \in y)$ biçimindeki elemanlardan oluşan bir kümenin varlığı söylenebilir. Bu küme $x \times y$ ile gösterilir ve x ve y kümelerinin ***kartezyen çarpımı*** denir. $x \times y$, $\wp(\wp(x \cup y))$ kümesinin altkümesidir.

$$x \times y = \{z \in \wp(\wp(x \cup y)) : \exists a \exists b((a \in x) \wedge (b \in y) \wedge z = (a, b)\}$$

olur.

Fonksiyon kavramı matematikle az da olsa ilgilenmiş herkes tarafından bilinir. Bu kavram, verilen aksiyomların kullanılmasıyla, biçimsel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.5 (Bourbaki, 1939)**.** x ve y iki küme olmak üzere, $x \times x$ kümesinin f altkümesi için,

$$(\forall a \exists b((a, b) \in f)) \wedge (\forall a \forall b \forall c((((a, b) \in f) \wedge (a, c) \in f) \to b = c)$$

formülü bir teorem ise, f'ye, x'den y'ye tanımlı **fonksiyon** denir[6].

Yukarı tanımda yer alan f'ye x'den y'ye tanımlı fonksiyon denir ve $f : x \to y$ ile gösterilir[7].

Bu durumda, x'e f'nin tanım kümesi ve y'ye f'nin değer kümesi denir. $(a, b) \in f$ ise genel olarak $f(a) = b$ yazılır. Bu tanım, f'nin x'deki her elemanı y'de bir sadece ve sadece bir elemanla eşleştiğini söyler.

Alıştırmalar

[6] Bu kavramın temelleri binlerce yıl öncesine kadar gidiyor olsa da belirleyici olarak, farklı zamanlarda Descartes, Dirichlet ve Leibniz tarafından verildiği anlaşılıyor. “Fonksiyon” kelimesi literatüre Leibniz'in 1673 tarihli bir mektubuyla giriyor. Burada verilen tanıma en yakın ilk versiyon 1837 yılında Gustave-Peter Lejeune Dirichlet tarafından verildi. Bourbaki “fonksiyon” kelimesi yerine “functional relation” diyordu. Fonksiyon kavramının tarihsel gelişim süreciyle ilgili bilgilere [20], [31] ve [56] kaynaklarından ulaşılabilir.

[7] Bazı kaynaklara göre bu gösterim ilk olarak 1940 yılında, Witold Hurewicz tarafından kullanıldı ve bunun öncesinde, 1936'da Oystein Ore tarafından, bir elemanın görüntüsü anlamında kullanıldığı iddia edilse de bu gösterimin kullanımı, yaygın olmayan biçimde, Eduard Study'nin 1881 tarihli çalışmalarına kadar gidiyor.

4.23. $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ olduğunu gösterin.

4.24. Bir x kümesi için $\emptyset \times x = x \times \emptyset = \emptyset$ olduğunu gösterin.

4.25. x ve y kümeleri için $x \times y = y \times x$ olması için gerek ve yeter koşulun $x = y$ olması gerektiğini gösterin.

4.26. X bir küme olmak üzere $\{\{x\} : x \in X\}$ sınıfının bir küme olduğunu gösterin.

4.27. Boş kümeden başka bir kümeye tanımlı her fonksiyonun boş küme olduğunu gösterin.

4.28. Sıralı ikili kavramıyla barışık bir matematikçi aynı zamanda iyi bir çiftçi ise "2 elma"yı

$$\{\{2\}, \{2, elma\}\}$$

sıralı ikili ile gösterip, sonrasında bunu kavramlaştırabilir. Hatta bu kavram üzerinden "2 elma" ve "3 elma"nın birbirlerinden farklı olduğunu gösterebilir ama nasıl? Benzer biçimde bu matematikçi-çiftçi "elma 2" ile "elma 3"ün birbirinden farklı olduğunu gösterebilir ama "elma 2"nin ne olduğunu halka anlatamayabilir, doğru mu? (Bu sulu sorudan rahatsız olan ciddi matematik okurlarından şimdiden özür dilerim.)

4.7 Sonsuzluk Aksiyomu

Boş kümenin hiç elemanı olmadığından, bu kümenin eleman sayısını sıfır olarak adlandıralım. Sonra $1 = \{\emptyset\}$ kümesinin eleman sayısını 1 olarak adlandıralım. Bu yaklaşımla eleman sayıları, 0,1,2,... olacak biçimde kümeler elde edilir. Böylece eleman sayıları istenildiği kadar çok olan kümeler elde edilir. Ancak, bu yaklaşımla "sonsuz" bir küme elde edilmiş olunmaz. Peki sonsuz bir küme var mı? Doğal sayılar kümesi bir sonraki bölümde tanımlanacak. Bu küme üzerinden, bir kümenin "sonsuz" olması tanımlanabilecek. Doğal sayılar kümesinin tanımlanabilmesi için yeni bir aksiyoma ihtiyaç var.

Bir x kümesi için $x \cup \{x\}$ kümesi bundan böyle $s(x)$ ile gösterilecek.

Tanım 4.6. Bir x kümesi için,

$$((\emptyset \in x) \wedge (\forall t(t \in x \longrightarrow s(t) \in x))),$$

formülü bir teoremse, x'e bir **tümevarımsal küme** denir.

En az bir tümevarımsal kümenin varlığı bir aksiyomla verilebilir.

Aksiyom 4.7 (Sonsuz Küme Aksiyomu)**.** *En az bir tümevarımsal küme vardır. Yani,*

$$\exists x((\emptyset \in x) \wedge (\forall t(t \in x \longrightarrow s(t) \in x))).$$

İki tümevarımsal kümenin arakesiti de tümevarımsal kümedir. Ayrıca, elemanları tümevarımsal küme olan bir kümenin arakesiti de tümevarımsaldır. Bu gözlem sonucu olarak, bir sonraki bölümde her tümevarımsal küme tarafından kapsanan bir tümevarımsal küme tanımlanacak ve o kümeye doğal sayılar kümesi denilecek. Ayrıca bu küme ilk sonsuz kümemiz olacak.

4.8 Temellendirme Aksiyomu

Bir x kümesi için $x \in x$ olması, hatta verilen x ve y kümeleri için $x \in y$ ve $y \in x$ olması beklenemez[8]. Bu aykırılık yukarıda verilen aksiyomlarla giderilemez ise de aşağıdaki aksiyomla giderilebilir

Aksiyom 4.8 (Temellendirme Aksiyomu)**.** *Boş olmayan her x kümesinin en az bir elemanıyla arakesiti boşkümedir. Yani x boşkümeden farklıysa $x \cap y = \emptyset$ olacak biçimde $y \in x$ elemanı vardır. Formül olarak ifade edecek olursak:*

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)).$$

Teorem 4.14. *Her x kümesi için $x \notin x$ olur.*

Kanıt: x kümesi verilsin. Sadece tek bir elemanı, o da x olan bir küme var. $z = \{x\}$ temellendirme beliti gereği $z \cap y = \emptyset$ olacak biçimde $y \in z$ vardır. $y = x$ olmak zorundadır; yani $x \cap z = \emptyset$ olur. $x \in z$ olduğundan $x \notin x$ elde edilir.

Bu teoremin sonucu olarak, aşağıdaki teorem hemen elde edilir.

Teorem 4.15. *Verilen x ve y kümeleri için ya $x \notin y$ ya da $y \notin x$ olur.*

Kanıt: $z = \{x, y\}$ bir kümedir. Temellendirme Aksiyomu gereği ya $z \cap x = \emptyset$ ya da $z \cap y = \emptyset$ olur. Birinci durum için, $y \in z$ olduğundan $y \notin x$ olur. Benzer biçimde, ikinci durum için $x \notin y$ elde edilir.

Bu kitabın amaçlarından biri olan sayıların inşasında temellendirme aksiyomu kullanılmadan da her sayı x için $x \notin x$ olur. Verilen bu aksiyom bu yönüyle bir fazlalık gibi gözükse de bir aksiyomlar bütünlüğü içerisinde verilmesi gerekir.

Alıştırmalar

4.29. $\forall x \forall y(x \in y \to y \notin x)$ formülünün bir teorem olduğunu gösterin.

4.30. $\forall x(x \notin x)$ formülünün teorem olduğunu gösterin.

4.8.1 Matematik Mısır'da mı Doğdu?

Matematik, hayvanla doğdu. Belki de doğmadı!

"Matematik nerede ve nasıl doğmuştur?" gibi sorulara verilebilecek yanıt göreceli olabileceğinden böyle bir soruya mutlak bir yanıt beklememek gerekir. Buna karşın, bu soruya kuşkuya yer verilmeyecek olan belgeler üzerinden yanıt aramak çok daha güvenilir olacaktır. Bu belgeler genellikle arkeolojik

[8] Niye ki!

çalışmalar sonrası elde edilen tabletler[9], papirüsler[10] ya da Mısır Piramitlerinin kendisi olabilir. Elbette bu soruların yanıtı "matematik nedir?" sorusuna verilebilecek yanıtla doğrudan ilişkilidir. Bu soruya verilecek yanıtın da göreceli olduğunu not edelim.

Matematik Mısır'da doğmuştur!:Yazıda yer alan "Mısır"dan kastedilen Antik Mısır'dır[11]. Herodotos'a (MÖ 485-415) göre, matematik Mısır'da doğmuştur.

Mısır topraklarının yüzde 97 si tarıma elverişsiz olup, Mısır'a hayat veren topraklar Nil deltasını oluşturan yüzde üçlük bir kesimdi. Bu bölgedeki topraklar halka paylaştırılmıştı ve bu topraklardan elde edilen gelir sonucu halk devlete vergi vermekteydi. Ancak, Nil Nehri'nin sıklıkla taşması sonucunda, bu topraklar su altında kalmakta ve sular çekildikten sonra, toprakların sınırları kaybolmaktaydı. Herodotos'a göre, devletin taşkın sonrası sınırların belirlenip sahiplerine iade edilmesi için görevlendirdiği görevliler tarafından yapılan ölçüm ve hesaplar sürecinde geometri ve dolayısıyla matematik doğmuştur.

Aristo'ya (MÖ 384-422) göre de matematik Mısır'da doğmuştur; ancak doğum nedeni farklıdır. Aristo'ya göre matematiğin doğmasına neden olan, Nil Nehri'nin taşması sonrası tarla sınırlarının belirlenmesi için yapılan ölçümler değildir, o dönemde üretime hiçbir katkısı olmayan ve bütün ihtiyaçları halk tarafından karşılanan din adamı ve rahiplerin, vakitlerini doldurmak ve can sıkıntılarını gidermek için kurdukları "oyunlar" sonucunda matematik doğmuştur.

Ahmes papirüsü, Antik Mısır'da MÖ 2000 yıllarında yazılmış bir papirüsün kopyası olup, MÖ yaklaşık olarak 1680-1620 yılları arasında Antik Mısırlı katip/matematikçi Ahmes tarafından yazılmış olup, "*şeylere, var olan bütün şeylerin bilgisine girişin doğru hesabı için rehber"* isimli bir kitapçıktır[12]. Bu papirüs kaçak yapılan Rameesum kazılarında ortaya çıkmış, İskoçyalı Alexander Henry Rhind tarafından 1858'de satın alınmış ve 1863'te British Mu-

---

[9]Bu tabletler daha çok Mezopotomya'da yaşamış olan medeniyetlerin yazı aracı olarak kullandıkları kil tabletleridir. Pişirilen ya da güneş altında üretilen bir kil tabletin ömrü çok uzun olabilmektedir.

[10]Papirüs Nil kenarında yetişen ve Cyperus papyrus olarak adlandırılan su bitkisinin gövdesinden yapılan kâğıttır. Bu bitkinin boyu 4-5 metre boyundadır. Papirüs MÖ 3300-MS 1100 yılları arasında aktif bir biçimde kullanılmıştır. İngilizcede kâğıt anlamına gelen "paper" kelimesi papirüs kelimesinden türetilmiştir.

[11]Antik Mısır bölgesi MÖ 3050 civarında bugünün Mısır toprakları içerisinde kalan bölgedir. Antik Mısır uygarlığının kuruluşundan önce, bu bölge Aşağı Mısır (Nil deltası ve güneyi ve şimdiki Kuzey Mısır) ve Yukarı Mısır (Teb kenti merkez olmak üzere günümüzdeki Güney Mısır) olarak ikiye ayrılmaktaydı. MÖ 3150 yılları sırasında, bu iki bölge ilk firavun tarafından politik olarak birleştirildi ve bu birlik yaklaşık 3000 yıl sürdü.

[12]Papirüslerin ömürlerinin yaklaşık 300-400 yıl olmasına karşın, Ahmes papirüsünün yaşının yaklaşık 2700 yıl olması dikkat çekici olup, kaynaklarda bununla ilgili bir belgeye rastlamadım.

seum'a konulmuştur. Ahmes papirüsü kaynaklarda bazen **Rhind papirüsü** olarak da geçmektedir. Bu papirüs 6 metre uzunlukta ve 35 cm metre genişliğinde olup, 87 adet problem içermektedir. Bu papirüste yer alanlanların bazıları şunlardır:

i. "Bir uzunluk, kendisinin yedide biri kadar bir başka uzunlukla toplandığında ortaya çıkan sonuç 19 olduğuna göre bu uzunluğun kendisi ne kadardır?". Bu soru bilinen en eski cebir sorusu olup, sorunun yanıtı papirüsde verilmiştir.

ii. "Bir dairenin çapının dokuzda birini kes, geriye kalanın üzerine bir kare çiz. Karenin alanı dairenin alanına eşittir." Buna göre, papirüste pi sayısı

$$(2 - \tfrac{2}{9})^2 = (\tfrac{16}{9})^2 = 3.16049$$

olup, yapılan hata yüzde birden azdır.

iii. Ahmes içinde 7,49,343,2401 ve 16807 sayıları olan bir merdivenden bahsetmektedir. 7'nin kuvvetleri olan bu sayıların hemen yanında resim, kedi, fare, arpa ve ölçü kelimeleri vardır. Moritz Cantor bunu "7 kişinin her birinin 7 tane kedisi varmış, her kedi 7 fare yermiş, her fare de 7 başak yermiş, her başak 7 ölçü mısır vermiş. Acaba toplam kaç kişi, kaç kedi, kaç fare, kaç arpa başağı ve kaç ölçek vardır?" sorusu olarak yorumlamıştır. Bugünün terminolojisine göre, bu, Ahmes papirüsünün, hem aritmetik hem de geometrik dizi bilgisini içerdiğini göstermektedir.

iv. Mısırlılar kesirli sayıların yazımında güçlük yaşıyorlardı. Kesirlerin $\frac{1}{n}$ biçiminde olanını kolay anlıyorlardı ve diğer kesirleri bu tür kesirlerin toplamı biçiminde gösteriyorlardı. Ahmes papirüsünde yer alan problemlerin bir kısmı bu tür kesirlerin yazımı ve tablolarıyla ilgilidir.

Antik Mısır döneminden kalan bir başka belge, 1890'da bulunmuş ve 1893 yılında Mısır'dan satın alınmış, $10cm \times 5.5metre$ boyutunda olan **Moskova Papirüsü**dür. Bu papirüste günlük uygulamaları içeren 25 problem vardır. Bu problemlerden biri, 14. problem, tepesi kesilmiş bir piramidin hacminin hesap edilmesiyle ilgilidir.

Her ne kadar Antik Mısır bulunduğu dönem içerisinde matematikte pi sayısını yüzde birlik bir hatayla hesap edebilecek parlaklıkta olmasına karşın, sonrası 2000 yıl içerisinde kayda değer bir ilerleme yapılamamıştır. Bunun nedenlerinden birisi Mısır matematiğinin onluk tabana göre olması ve bunu Roma rakam sistemleri gibi kullanılmasının yarattığı zorluk olarak değerlendirilmektedir.

Matematiğin yukarıda verilen anlamıyla Mısır'da doğmuş olmasına karşın, ortaya çıkan belgeler birkaç papirüsle sınırlıdır. Bunun nedenlerinden birisi

Mısırlıların yazı yazmak için papirüsleri kullanmaları ve papirüslerin ortalama ömürlerinin yaklaşık 300 yıl olmasıdır. Böyle olsa bile yeni papirüslere bilgi aktarımı yapılmamış olması başka bir soru işaretidir. Bir başka nedense İskenderiye[13] kütüphanelerinin üç büyük yangın geçirmesidir. Son yangınsa 642'de Mısır'ın Müslümanlarca fethi esnasında meydana gelmiştir[14].

Ahmes papirüsünün MÖ 2000 yılının bilgilerini içermesi, Mısır pramitlerinin bazılarının bu tarihten 600 yıl önce yapılmış olması ve bu pramitlerin inşasında mükemmel bir geometri kullanılmış olması dikkate alındığında, "matematik, Mısır'da doğmuştur" iddiasının güçlü ve haklı nedenleri olabilir.

Alıştırmalar

4.31. Matematik Mısır'da mı doğdu?

[13]MÖ 332'de Mısır'ı fetheden Büyük İskender (Aleksander, İskender Rumi, İskender Yunani, Makedonyalı İskender olarak da bilinir) Nil kenarının ağzında İskenderiye şehrini kurmuştur. Büyük İskender'in ölümünden sonra (belki de ölmeden önce) şehir yönetimine gelen Ptolemaios I. Soter, kütüphane ve müze kurarak İskenderiye'yi bir bilim kentine dönüştürmüştür. Bu kütüphane kuruluşundan sonra, yaklaşık 300 yıl boyunca dünyanın en büyük kütüphanesi olmuştur. Burada Arşimed mekanik okulunu, Öklid matematik okulunu kurdu. Kütüphane yaklaşık 150.000 (bazı kaynaklara göre 900.000) adet papirüslere yazılmış kitabı barındırdı. Bu kütüphanenin girişinde "Bilim bizi tanrıların gazabından kurtarır" diye yazıyordu. 2002 yılında bu kutüphanenin yerine benzeri olan Yeni İskenderiye Kütüphanesi yapıldı. Ayrıca, İskenderiye aydınlatılan caddeleriyle, bir uçtan bir uca uzanan, kireçtaşından yapılmış sıra sütunlarıyla, Kleopatra'nın heykelleri, cam ürünleri ve kaynak taşından süs eşyaları üreten sanatçıların ve hayat kadınlarının dostça yaşadığı bir antik çağ kenti olarak bilinir. Bu nedenlerden dolayı, kent aynı zamanda matematikçileri çeken bir şehirdi.

[14]Bu yangınların ilki, rivayetlere göre, Romalı vali Theophilos'in kütüphanenin bulunduğu yere kilise yaptırmak istemesi ve bu süreçte Mısırlılara ait bir mabet taşının yıkılması ve Hiristiyanlarla karşıtları arasında bunun sonucu çıkan karmaşada, Theophilos'in emriyle kütüphane yakılmıştır. Sonuncu yangınsa İbnu Haldun'un Mukaddime adlı eserine göre, "Bu kitaplardaki bilgiler Kuran'a aykırı ise haramdır, Kuran'da yazanlarla aynıysa gereksizdir" diyen Halife Ömer'in emriyle olmuştur. Sonuç olarak, bu kütüphanenin yakılma işlemi Hiristiyanlarca başlatılmış, Müslümanlar tarafından tamamlanmıştır. Bu konuda İlber Ortaylı'nın *İskenderiye Kütüphanesi* (Türk Kütüphaneciliği, 20,1 (2006), 85-88) adlı bir makelesi bulunmakta.

5. Doğal Sayılar Kümesi ve Tümevarım

Kronecker yanılıyor; doğal sayıları tanrı değil, insan yarattı.

MÖ 572-497 yılları arasında yaşayan Pisagor (Pythagoras) sayı olarak sadece doğal sayıları kabul edip, "Sayı, tanrıdır" diyerek, bir "din" inşa ediyordu. Bu dine inananlara "Pisagorcular" deniliyordu. Bu inanç sonucu olarak, Hippasus doğal sayılarla açıklanamayan $\sqrt{2}$ sayısını inşa etmesi nedeniyle, Pisagorcular tarafından öldürülüyor[1].

Sayının tanrılaştırılmasına başlanmasından yaklaşık 2500 yıl sonra, doğal sayıların modern anlamda tanımlanması yönünde temel fikrin Hermann Grassmann tarafından, 1860'larda önerilen tekrarlama (recursion) yöntemi olduğu söylenebilir. Grassmann doğal sayılar üzerindeki aritmetik işlemlerin temel yapısının ardılı ve tümevarım yöntemiyle anlaşılabileceğini görmüş ve bu yönlü biçimselleştirme yapılabileceğinin işaretini vermiştir.

1881'de Charles Sanders Peirce aritmetik işlemler konusunda biçimsel bir yaklaşım ortaya koymuştur.

Dedekind, 1888 yılında yayınladığı *What are numbers and what should they be? or The Nature of Meaning of Numbers* başlıklı eserinde,

a. X boş olmayan küme,

b. $e \in X$,

c. $s : X \to X$ birebir bir fonksiyon ve $e \notin s(X)$,

d. $e \in M \subseteq X$ ve $s(M) \subseteq M$ ise $M = X$,

olmak üzere, (X, e, s) üçlüsüne **doğal sayılar sistemi** ve X'e **doğal sayılar kümesi** diyordu. Dedekind'in doğal sayıları tanımlama önerisinde yer alan

[1] Bu konuda Türkçe yazılmış bir kaynak [54].

ancak özü etkilemeyen ufak tefek eksiklikler 1889'da Peano tarafından, Dedekind'in aksiyomlarını daha açık formüllerle belirtilmesiyle giderilmiştir. Bu aksiyomlar Peano'nun *The principles of arithmetic presented by a new method* başlıklı kitabında yayınlanmıştır.

Küme kavramıyla, Frege tarafından bir doğal sayı, belirli bir kümeyle birebir eşlenebilen kümelerin topluluğu olarak tanımlanmış olsa da Russell tarafından ortaya konulan Russell Paradoksunun bir sonucu olarak, bu tanımlamanın yetersiz olduğu anlaşılmıştır.

Bütün bu sürecin sonrasında, günümüzde bilinen doğal sayılar von Neumann tarafından, 1923'te küme kavramıyla tanımlanmıştır. Küme-teorik olarak inşa edilen doğal sayılar kümesinin Dedekind tarafından tanımlanan doğal sayılar kümesi olduğu ve belirli anlamlarda tek olduğu gösterilerek, Dedekind'in önerisinin tam isabetli olduğu anlaşılmıştır.

Bu bölümün ilk altbölümünde doğal sayılar tanımlanarak birkaç sonuç verilecek. Sonraki bölümlerde, elemanları sadece ve sadece doğal sayılar olan toplululuğun bir küme olması üzerinden tümevarım kavramı tanımlanarak, bu kavramın kullanılmasıyla doğal sayıların temel özellikleri verilecek.

Doğal sayılar sonsuzluk aksiyomu ve temellendirme aksiyomu kullanılmadan tanımlanabilmesine karşın, elemanları doğal sayılar olan toplululuğun bir küme olduğunu göstermek için sonsuzluk aksiyomu gerekli olacak ama temellendirme aksiyomu gerekli olmayacak.

5.1 Doğal Sayılar

Bir'in nesi var?

Tanım 3.3'de sıfır, boşküme olarak tanımlanmıştı. Şimdi "bir"i tanımlayabiliriz.

Tanım 5.1. $\{\emptyset\}$ kümesine ***bir*** denir ve 1 ile gösterilir.

$\{0, 1\}$ topluluğu da bir kümedir. Buna da bir isim verelim.

Tanım 5.2. $\{0, 1\}$ kümesine ***iki*** denir ve 2 ile gösterilir.

$$0 \in 1,$$

$$0 \subset 1,$$

$$1 \in 2,$$

$$1 \subset 2,$$

olduğunu not edelim. Okur hızını alamayıp, "devam edelim, üçü, dördü, beşi de tanımlayalım" beklentisine ve heyecanına kapılabilir; ancak bunun sonu gelmez. Bu sorun, yani "sonu gelmez" çıkmazı, bir doğal sayıdan "bir sonraki" doğal sayıyı tanımlayabilmek üzerinden giderilebilir. Yani sihirli sözcük "bir sonraki". Bunu tanımlayalım. Sonsuzluk aksiyomunun tanıtımında bir x kümesi için $x \cup \{x\}$ kümesi $s(x)$ ile gösterilmişti.

Tanım 5.3. Bir x kümesinin ***ardılı***

$$s(x) = x \cup \{x\}$$

olarak tanımlanan kümedir.

x kümesinin ardılı $s(x)$ ile gösterilir. Verilen x ve y kümeleri için $x = y$ olması için gerek ve yeter koşulun $s(x) = s(y)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$$0 = s(x)$$

olacak biçimde bir x kümesinin olmadığı kolaylıkla gösterilir. Ayrıca,

$$1 = s(0),$$

$$2 = s(1),$$

olur. Benzer biçimde,

$$3 = s(2),$$

$$4 = s(3),$$

$$5 = s(4)$$

olarak tanımlanır, daha doğrusu gösterilir. Bunların herbirine birer doğal sayı denir. Daha doğrusu, doğal sayılar kümesi olarak adlandırılacak kümenin elemanlarından sadece bazılarıdır. Bu takiple, okur sıfırdan farklı her n doğal sayısı için,

$$n = s(m)$$

olacak biçimde tekbir n sayısıyla tanımlanabileceğini sezmiştir. Burada m'ye n'den ***bir sonraki*** (ya da n'nin ***ardılı***) sayı denir. Verilen her doğal sayıdan bir sonraki sayı tanımlanabilir ama bunun bütün doğal sayıların tanımlanabileceği anlamını taşımaz. Buna karşın, nasıl olması gerektiğine ilişkin sinyaller veriyor olabilir.

Bir x kümesi için,

$$(x = \emptyset) \vee (\exists y(x = s(y))$$

formülü $\varphi(x)$ ve

$$\forall y(y \in x \to ((y = \emptyset) \vee (\exists z((z \in x) \wedge (y = s(z))))))$$

formülü $\phi(x)$ile gösterilsin. Bu gösterimler altında şu tanım verilir:

Tanım 5.4. Bir n kümesi için $\varphi(n) \wedge \phi(n)$ formülü bir teoremse n kümesine bir **doğal sayı** denir[2].

0,1,2,3 kümelerinin her birinin bir doğal sayı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Aşağıdaki teorem alıştırma olarak bırakılmıştır.

Teorem 5.1. *Her n doğal sayısı için $s(n)$ bir doğal sayı olur.*

Bir n doğal sayısının ardılı daha özel gösterilir:

$$s(n) = n + 1$$

yazılır. Buna göre,

$$0 + 1 = 1,$$

$$1 + 1 = 2,$$

$$2 + 1 = 3,$$

olduğu kolaylıkla gösterilir[3].

Tanım 5.5. Her elemanı altkümesi olan kümeye **transitiv** denir.

0,1,2,3 doğal sayılarının transitiv olduğu el yordamıyla gösterilebilir.

Aşağıda verilen iki teorem doğal sayılar kümesi temellendirme aksiyomu kullanılmadan tanımlandıktan sonra, tümevarımla, temellendirme aksiyomu kullanılmadan da kanıtlanabilir.

Teorem 5.2. *Her doğal sayı transitiv kümedir.*

Kanıt: n bir doğal sayı olsun. n'nin transitiv olmadığını varsayalım. Bu durumda $k \in n$ ve $k \not\subseteq n$ olacak biçimde k kümesi var. Yani,

---

[2]MÖ 5. yüzyılda, Yunanlılar dünyadaki herşeyin bir doğal sayıyla eşleştirileceğine inanırlardı. Bununla ilgili bir kaç eşlemeyi şöyle yapıyorlardı: 2'yi fikir, 3'ü uyum, 4'ü adalet, 5'i evlilik (bunun nedeni, tahmin olarak, 5'in ilk tek sayı ile ilk çift sayının toplamı olması. 10, ilk dört boyutun toplamı olması nedeniyle kutsallığı temsil ediyordu. Benzer birçok metaforik gösterim mevcut.)

[3]"+" sembolü, Latince "ve" anlamına gelen "et" kelimesinin kısa yazımı et'deki "t"den gelmektedir. Bu sembol ilk kez Johannes Widmann'ın 1489 yılında *Behende und hübsche Rechenung auff allen Kauffmanschaft*(Ticarette Hızlı ve Düzgün Hesaplama) başlıklı kitabında hem "ve" bağlacını, hem de matematiksel bir işlemi simgelemek için kullanılmış.

$$x = \{k \in n : k \nsubseteq n\}$$

kümesi boşkümeden farklıdır. Temellendirme aksiyomu gereği

$$x \cap y = \emptyset$$

olacak biçimde $y \in x$ elemanı var. $\emptyset \notin x$ ve $y \in n$ olduğundan $y = s(t)$ olacak biçimde $t \in n$ vardır. $t \in y$ ve $x \cap y = \emptyset$ olduğundan $t \notin x$ olur. Dolayısıyla, $t \subset n$. Buradan $y = s(t)$ olmasından dolayı, $y \subseteq n$ olur. Bu çelişkidir. □

Teorem 5.3. *Bir doğal sayının her elemanı doğal sayıdır.*

Kanıt: Sıfırın, sıfırdan farklı her doğal sayının elemanı olduğunu(?) not edelim. En az bir elemanı doğal sayı olmayan n doğal sayısının var olduğunu varsayalım. Yani,

$$x = \{k \in n : k \text{ doğal sayı değil}\}$$

kümesi boşkümeden farklı olsun. Temellendirme aksiyomu gereği $x \cap y = \emptyset$ olacak biçimde $y \in x$ elemanı var. $0 = \emptyset$ bir doğal sayı olmasından dolayı $\emptyset \notin x$ olur. Dolayısıyla $y \neq \emptyset$ olur. $y \in n$ olmasından dolayı, $y = s(k)$ olacak biçimde $k \in n$ bulunur. $k \in y$ ve $x \cap y = \emptyset$ olmasından $k \notin x$ olur. Ayrıca, $k \in n$ olması nedeniyle k doğal sayı olur. Dolayısıyla, k'nın ardılı olan y kümesi de doğal sayı olur. Bu çelişkidir. □

Doğal sayılar tanımlanırken sonsuzluk aksiyomu kullanılmadı. Bu durum her ne kadar bir avantaj gibi gözükse de bu aksiyom olmadan, elemanları doğal sayılar olan sembol topluluğun bir küme olduğu kanıtlanamazdı.

Alıştırmalar

5.1. 0,1,2,3 kümelerinin doğal sayı olduğunu gösterin.

5.2. $n \in 2$ ise $n \subset 2$ olur mu?

5.3. Verilen iki doğal sayının arakesitinin ve bileşiminin doğal sayı olduğunu gösterin.

5.4. Temellendirme aksiyomunu kullanmadan, Teorem 4.2'yi kanıtlamayı deneyin.

5.5. Teorem 4.1'i kanıtlayın.

5.6. Temellendirme aksiyomu kullanmadan, verilen x ve y kümeleri için, $x = y$ olması için gerekli ve yeterli koşulun $s(x) = s(y)$ olduğu gösterilebilir mi?

5.7. Teorem 4.3 ve Teorem 4.3'ün kanıtında sonsuzluk aksiyomu kullanılmadı ama temellendirme aksiyomu kullanıldı. Bu teoremler temellendirme aksiyomu kullanılmadan kanıtlanabilir miydi?

5.8. $1 + 1 = 2$ olduğunu gösterin.

5.1.1 Rakam Sembolleri

Günümüzde yaygın olarak her doğal sayı, **Hint-Arap rakamları** (kısaca rakam) olarak adlandırılan

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

sembollerin belirli bir kural içerisinde yazarak gösterilir. Bu gösterim 16. yüzyıldan itibaren standartlaşmış olup, bunlar MÖ 3. yüzyılda kullanılan **Brahmi rakamları** olarak adlandırılan sembollerin evriminden oluşmuştur.

Tahmin edilebileceği gibi uygarlıkların ilk üç sayıyı üç nokta, birbirlerine paralel üç yatay ya da dikey çizgilerle gösterildiği anlaşılmaktadır. Günümüzde kullanılan sayı sembollerinin Brahmi rakamları olarak adlandırılan sembollerden evrildiği anlaşılıyor. Brahmi rakamlarında 1, bir tane yatay çizgiyle, 2, birbirine paralel iki yatay çizgiyle, 3 ise birbirine paralel olan üç yatay çizgiyle gösteriliyordu. 2 sembolünün Brahmi sayısında ikiyi gösteren iki yatay çizginin hızlı çizilmesi ve bu süreçte mürekkepin dağılımı sonucu oluştuğu düşünülmekte. Benzer biçimde üç sayısının önce birbirine paralel üç yatay çizgiyle, sonra bu gösterimin hızlı yazılması ya da yazım sırasında mürekkep dağılımı sonucu 3 sembolününe evrildiği tahmin edilmekte.

Sayılar tarihinde antik sayı sistemleri olarak adlandırılan birçok sayı sistemleri vardır. Bu sistemler de belirli yazı biçimlerine göre kendi içlerinde farklılıklar gösterebilir. Bu sistemlerin belli başlı olanlarına, detaya girilmeden, genelde 1'den 9 ya da 10'a kadar olan rakamlar kitapta heyecansız ve düz biçimde yer verilecek.

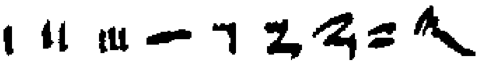
Antik sayı sistemlerinden biri Babillilere aittir. 60 tabanlı sayı sistemi kullanan Babilliler 1'den 59'a kadar olan sayıları göstermek için sadece iki farklı şekilden oluşan sembol kullanıyorlardı. bu sayı sisteminin 1'den 9'a kadar olan gösterimi 5.1'de verilmiştir. Bu semboller MÖ 2400 civarında yapılmış tabletlerde yer almaktadır. Her ne kadar Babil sayı sistemi 60 tabanına göre

Şekil 5.1

olsa da sayıları göstermek için toplam 59 farklı sembol değil, sadece iki farklı sembol bulunmakta. Bütün diğer sayılar bu iki sembol belirli bir kurala göre kullanılarak verilmekte.

Bir diğer antik sayı sistemi Mısırlılara aittir. Mısır sayı sisteminin hiyeroglifik (Hieroglyphic), hieratic ve demotic olarak adlandırılan üç farklı gösterimi vardır. 1'den 10'a kadar olan sayıların bu sisteme göre Hiyerogfilik (Hieroglyphic) gösterimi 5.2'de verilmiştir. Mısır Hiyerogfilik sayı sisteminin izleri MÖ 3300 yıllarına kadar gitmektedir. Bu izler taş, tahta ve metallerde yer almıştır.

6 ve 7. yüzyıla ait olan bazı belgelere göre, Suriyeliler 1'den 9'a kadar olan rakamları, 10'dan 90'a kadar olan 10'arlık rakamları ve 100'den 400'e kadar olan 100'erlik rakamları göstermek için, 22 harften oluşan alfabelerinin



Şekil 5.2

harflerini kullanmışlardır. Bunlardan 1'den 9'a kadar olan rakamları gösterimi 5.3'de verilmiştir.

Şekil 5.3

İbrani alfabesi 22 harften oluşmaktadır ve bu harflerin her biri bir sayıyı sembolize ediyordu. Ayrıca, bunların dışında sadece kelimelerin sonlarında kullanılan, 500, 600,700, 800 ve 900'ü temsil eden beş harf daha vardı. İbrani sayı sisteminde 1'den 9'a kadar olan rakamların gösterimi 5.4'teki gibidir.

Şekil 5.4

Yukarıda verilen sayı sistemleri dışında bilinen bazı diğer sayı sistemleri, Yunan, Maya, eski Arap, Çin, Japon, Hint sayı sistemleridir. Günümüzün sayı sisteminin MÖ 3. yüzyılda var olan Brahmi sayı sisteminden evrildiği söylenebilir. Bu evrilme süreciyle ilgili [36]'den (s.49) alınan soyağacı Şekil 5.5'te verilmiştir. Brahmi sayı sisteminin evrimi ise Şekil 5.6'daki gibidir.

Sayı sistemleriyle ilgili bilgiler [5], [12], [11], [36]'te bulunabilir ya da bu kaynaklar üzerinden referans takibi yapılabilir.

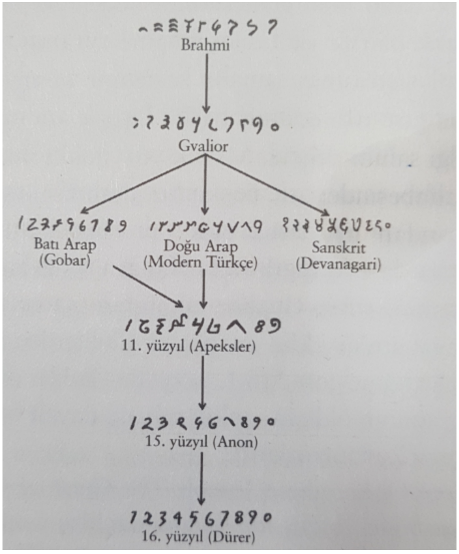
Alıştırmalar

5.9. Bazı matematik tarihçiler Babil sisteminde 10 sayısı gösteren sembolün, bir insanın dua etme halindeki ellerinin birleştirilmiş durumundan geldiğini iddia etmekte. Yazar olarak, hiç de öyle bir şeye benzediğini düşünmüyorum. Bu konuda siz ne düşünüyorsunuz?

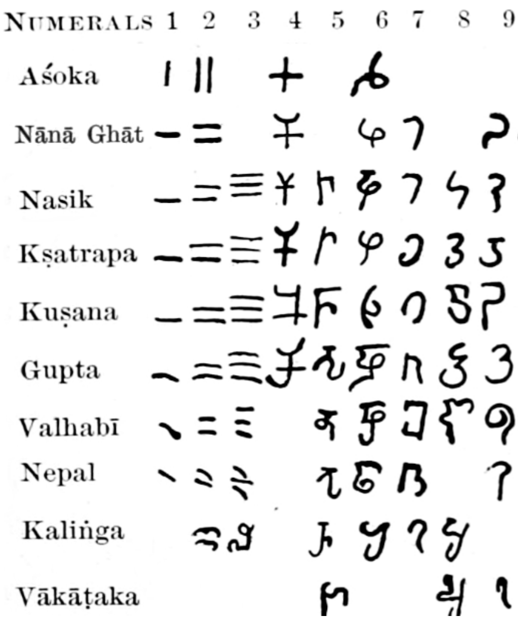
5.2 Doğal Sayılar Kümesi

Altın çamura düşse de düşmese de bir çeşit "çamur"dur. Ama sıfır, çamurun içine düşmesiyle değerinden birşey kaybetmez. Sıfır altına değer vermeyen, tanrıya meydan okuyan ve doğa dışı olmasına karşın doğal birşeydir.

Elemanları doğal sayılar olan topluluk, yani



Şekil 5.5



Şekil 5.6

$$\{n : n \text{ bir doğal sayı}\}$$

bir küme olur mu? Bu soruya yanıt vermek için şu teoreme ihtiyaç var:

Teorem 5.4 (Von Neumann, 1923)**.** *Verilen her tümevarımsal küme ta-*

rafından kapsanan bir tümevarımsal küme vardır ve tektir.

Kanıt: Tümevarımsal küme aksiyomu gereği bir tümeverasımsal küme var. Bunu t ile gösterelim. Elemanları t'nin tümevarımsal altkümelerinden oluşan kümeyi de $\mathcal{T}$ ile gösterelim. Yani,

$$\mathcal{T} = \{x \subseteq t : x,\ \text{tümevarımsal küme}\ \}$$

$\mathcal{T}$'nin arakesiti tümevarımsal olup, bu küme w ile gösterilsin. k bir tümerımsal küme olsun. $t \cap k \in \mathcal{T}$ olur. Dolayısıyla

$$w \subseteq t \cap k \subseteq k$$

elde edilir. Yani w'nin bütün tümevarımsal küme tarafından kapsandığı gösterilmiş olur. w_0, her tümevarımsal küme tarafından kapsanan tümevarımsal küme olsun. Varsayım gereği

$$w \subseteq w_0 \text{ ve } w_0 \subseteq w$$

olur. Buradan da $w = w_0$ olur. Yani w, istenilen koşulları sağlayan kümedir.□

Tanım 5.6 (Von Neumann, 1923.)**.** Her tümevarımsal küme tarafından kapsanan tümevarımsal kümeye ***doğal sayılar kümesi*** denir[4].

Küme teori dilinde doğal sayılar kümesi genellikle w ile gösterilir. $\omega \setminus \{0\}$ kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir[5].

Aşağıdaki teorem yukarıda verilen tanının isabetli olduğunu söyler:

Teorem 5.5. $\omega = \{n \in \omega : n$ *doğal sayı*$\}$.

Kanıt: $A = \{n \in \omega : n$ doğal sayı$\}$ kümenin tümevarımsal küme olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. $0 \in A$ olduğu açık. $n \in A$ verilsin. ω tümevarımsal küme olduğundan, $s(n) \in \omega$ olur. Ayrıca n doğal sayı olduğundan, $s(n)$ aynı zamanda doğal sayıdır. Böylece, A tümevarımsal küme, dolayısıyla $\omega \subseteq A$ olur. $A \subseteq \omega$ olduğu kullanılarak $\omega = A$ olur. □

$s(n) = n \cup \{n\}$ eşitliğiyle tanımlı $s : \omega \to \omega$ fonksiyona ***ardılı fonksiyon*** denir[6].

---

[4]Doğal sayılar Peano Aksiyomları kullanılarak da inşa edilebilir. Bir başka inşa Zermelo tarafından 1908'de verilmiştir. Bu inşada $0 = \{\}$, $1 = \{0\}$,...,$n = \{n-1\}$ olarak tanımlanmıştır.

[5]$\mathbb{N}$ notasyonu ilk kez 1895'de G. Peano tarafından kullanılmıştır.

[6]Fonksiyon kavramı bir sonraki bölümde tanımlanacak. İlgilenen okur öncelikle fonksiyon tanımına bakabilir.

Tanım 5.7. $(\omega, 0, s)$ üçlüsüne ***doğal sayılar sistemi*** denir.

Bu üçlü aslında şunu söylüyor: 0 ile gösterilen bir "ilk" doğal sayı ve verilen bir doğal sayıdan sonraki doğal sayının ne olduğunu belirleyen bir s fonksiyon var. Bu ve farklı biçimlerde tanımlanabilen doğal sayılar sistemleri olsa da bunların belirli anlamlarda "aynı" olduğu gösterilebilecek ve dolayısıyla doğal sayılar sistemi "tek" olacak.

Teorem 5.6 (Tümevarım). *$A \subseteq w$ kümesi verilsin. $0 \in A$ olsun. $n \in A$ olduğunda $s(n) \in A$ oluyorsa $A = w$ olur*[7]*.*

Kanıt: A'nın tümevarımsal küme olduğu açık. Dolayısıyla $w \subseteq A$ olur. Varsayımdan $w \subseteq A$ olduğundan $A = w$ elde edilir. □

Alıştırmalar

5.10. Doğal sayılar kümesinin tanımında, temellendirme aksiyomunun kullanılmasına gerek duyuldu mu? Duyulmadıysa, doğal sayılar kümesinin inşası için temellendirme aksiyomu gereksiz mi?

5.11. Tümevarımsal bir doğal sayının olamayacağını gösterin. Dahası $s(x) = \omega$ olacak biçimde bir x kümesinin olmadığını gösterin.

5.12. $s(\omega)$ kümesinin transitiv fakat tümevarımsal küme olmadığını gösterin.

5.13. 3218 semboller dizisi bir doğal sayı mıdır? Yanıt evet ise, yanıtınızı kanıtlayın.

5.14. Üç yaşında yüze kadar sayabilen bir çocuğa "zeki çocuk" denilmesine karşın 40 yaşında, fiili olarak kırk milyara kadar sayabilmek için, sayı saymaya fiili olarak devam eden bir adama neden "aptal" denir?

5.3 Tümevarımın Temel Uygulamaları

Tümevarım aspirin gibi, birçok derde deva olabilecek nitelikte. Tümevarımla temel bazı teoremlerin kanıtlarında sıklıkla kullanılacak.

Teorem 5.7. *Her doğal sayı doğal sayılar kümesinin bir altkümesidir.*

Kanıt: $A = \{n \in w : n \subseteq w\}$ diyelim. $A = \omega$ olduğunu göstereceğiz. Boşküme her kümenin altkümesi olduğundan $0 \in A$ olur. $n \in A$ olduğunu

[7]İngilizcesi "induction" olan"Tümevarım" kavramının izi, Öklid'in asal sayıların sonsuz olduğunu gösteren teoremin kanıtında gözüküyor. Bu terim ilk olarak, 1656 yılında John Wallis tarafından yazılmış *Arithmetica infinitorium* eserinde geçmektedir. "Matematiksel tümevarım" ifadesi ise ilk olarak DeMorgan'ın "*Induction(Mathematics)-Tümevarım (Matematik)*" kitabında yer almıştır. Maurolycus, 1575 tarihli Arithmetica adlı eserinde "$1 + 3 + ... + (2n + 1) = n^2$" eşitliğini açık bir biçimde tümevarım ilkesini kullanarak kanıtlamıştır. Pascal, bir mektubunda günümüzde "Pascal üçgeni" olarak bilinen yapıyı, Maurolycus'un yöntemini kullanarak verdiğini yazmıştır. Cantor'a göre, bu yöntem Pascal'a aittir. Bir başka görüş, tümevarım yöntemi kullanılarak binomial teoremi al-Karaji'nin 1000'de kanıtladığı yönünde. Bu konuda yazılmış makalelerden birinde [10], bu kavramın birbirinden bağımsız, farklı orijinlerinin olduğu ifade edilmektedir. Aynı konuda yazılmış bir diğer makale [9]'dir.

varsayalım. $\{n\} \subseteq w$ ve varsayımda $n \subseteq w$ olacağından bunların bileşimi olan küme $s(n) = n \cup \{n\} \subseteq w$ olur. Yani, $s(n) \in A$. Tümevarım teoremi gereği $A = w$ olur $\square$

Aşağıdaki teorem ile Teorem 4.2 aynı olmakla birlikte bu teoremin kanıtında temellendirme aksiyomu kullanılmamıştır.

Teorem 5.8. *Bir doğal sayının her elemanı aynı zamanda o doğal sayının bir altkümesidir.*

Kanıt: $A = \{n \in w : k \in n \to k \subset n\}$ olmak üzere $A = \omega$ olduğu gösterilecek. $0 \in A$ olduğu açık. $n \in A$ ve $k \in s(n)$ verilsin. $k \in n$ ya da $k = n$ olur. Her iki durumda da $k \subset s(n)$ olur. $s(n) \in A$ olduğu gösterilmiş olur. Tümevarım gereği $A = w$ elde edilir. $\square$

$$0 \notin 0,\ 1 \notin 1,\ 2 \notin 2$$

olduğunu biliyoruz. Aslında, temellendirme aksiyomu gereği, her x kümesi için $x \notin x$ olur. Bu özellik doğal sayılar için temellendirme aksiyomu kullanılmadan da verilebilir.

Teorem 5.9. *Hiçbir doğal sayı kendi kendisinin elemanı olamaz.*

Kanıt: $A = \{n \in w : n \notin n\}$ kümesinin tümevarımsal küme olduğunu göstereceğiz. $0 \in A$ olduğu bariz. $n \in A$ ve $s(n) \notin A$ olsun, yani $n \notin n$ ve $s(n) \in s(n)$ olsun. Bu durumda $s(n) \in n$ ya da $s(n) = n$ olur. Birinci durumda, Teorem 3.4 gereği, $s(n) \subset n$ ve dolayısıyla $n \in n$ elde edilir. Aynı durum ikinci durum için de geçerlidir; yani $n \in n$ olur. Bu, varsayımla çelişir. $\square$

Teorem 5.10. *Her doğal sayı ya sıfırdır ya da bir doğal sayının ardılıdır.*

Kanıt: $A = \{n \in w : n = 0$ ya da $n = s(k)$ olacak biçimde, $k \in w$ var $\}$ olarak tanımlayalım. $0 \in A$ olduğu tanımdan elde edilir. $0 \neq n \in A$ verilsin. $n = s(k)$ olacak biçimde $k \in w$ var. Buradan $s(n) = s(s(k))$ olacağından, $s(n) \in A$ olur. Tümevarım gereği $A = w$ olur. $\square$

Teorem 5.11. *Bir doğal sayıyı kesin olarak kapsayan başka bir doğal sayı, ardılını da kapsar.*

Kanıt: n ve m doğal sayılar olmak üzere, $m \subset n$ ve $m \neq n$ ise $s(m) \subseteq n$ olduğunu göstereceğiz. Her n için

$$A_n = \{m \in w : ((m \subset n) \wedge (m \neq n)) \to s(m) \subseteq n\}$$

olmak üzere,

$$A = \{n \in w : A_n = w\}$$

olarak tanımlansın. $A = \omega$ olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. Mantıktan $A_0 = \omega$ olduğundan, $0 \in A$ olur. $n \in A$ verilsin, yani $A_n = \omega$ olsun. $s(n) \in A$, yani $A_{s(n)} = \omega$ olduğu gösterilecek. $0 \in A_{s(n)}$ olduğu açık. $n \in A$, yani $A_n = \omega$ olsun. $A_{s(n)} = \omega$ olduğu gösterilecek. $m \in w$ ve $m \subset s(n)$ olsun. n ve $\{n\}$ kümeleri ayrık olduklarından, üç durum söz konusu:

1. Durum. $m \subset n$: Bu durumda varsayım gereği, $s(m) \subset n \subset s(n)$ ve dolayısıyla, $s(m) \subset s(n)$ olur. Bu durumda $m \in A_{s(n)}$ elde edilir.

2. Durum: $m = n$: Bu durumda $s(m) = s(n) \subset s(n)$ de dolayısıyla, $m \in A_{s(n)}$ olur.

3. Durum: $m \subset \{n\}$: $m = 0$ için istenilen açık. Diğer durumda $m = \{n\}$ ve bu durumda $n \in m$ olur. Teorem 3.4 gereği, $n \subset m$ olur. Varsayımdan $n \subset m \subset s(n)$ olur. n ile $s(n)$ arasında kalan ve bunlardan farklı olan bir küme olmayacağından, bu durum sözkonusu olamaz.

Sonuç olarak $m \in A_{s(n)}$ olduğu ve buradan da $s(n) \in A$ elde edilir. Kanıt tümevarımla tamamlanır. □

Teorem 5.12. *Verilen her iki doğal sayıdan biri diğerini kapsar.*

Kanıt: Her $n \in w$ için

$$A_n = \{m \in w : n \neq m \to (n \subset m \text{ ya da } m \subset n)\}$$

olmak üzere,

$$A = \{n \in w : A_n = w\}$$

diyelim. $A_0 = w$ olduğu açık ve dolayısıyla, $0 \in A$ olur. $n \in A$ olduğunu varsayalım, yani $A_n = w$ olsun. $m \in w$ verilsin ve $s(n) \neq m$ sağlansın. $n = m$ ise $m \subset s(n)$ ve $m \in A_{s(n)}$ olur. $n \neq m$ ise varsayım gereği $n \subset m$ ya da $m \subset n$ olur. Birinci durumda, Teorem 4.11 gereği $s(n) \subseteq m$, fakat $s(n) \neq m$ varsayımından $s(n) \subset m$ ve dolayısıyla, $m \in A_{s(n)}$ olur. İkinci durumda da $m \subset n \subset s(n)$ olduğundan, yine $m \in A_{s(n)}$ elde edilir. Böylece, her koşulda $m \in A_{s(n)}$ ve buradan da $A_{s(n)} = w$, yani $s(n) \in A$ olur. Tümevarım gereği $A = w$ olur. □

Teorem 5.13. *Birbirlerinin elemanı olan iki doğal sayı yoktur.*

Kanıt: Tersine, $n, m \in w$, $n \in m$ ve $m \in n$ özelliğinde iki doğal sayı olsun. Teorem 3.4 gereği $n \subset m$ ve $m \subset n$ olacağından $m = n$ elde edilir. Teorem 3.5 gereği bir sayı kendi kendinin elemanı olamayacağından, bu bir çelişkidir ve kanıt biter. □

Teorem 5.14. *Her iki doğal sayının arakesiti doğal sayıdır.*

Kanıt: Her $n \in w$ için

$$A_n = \{m \in w : n \cap m \in w\}$$

olmak üzere,

$$A = \{n \in w : A_n = w\}$$

kümesinin tümevarımsal küme olduğunu göstereceğiz. $0 \in A$ olduğu bariz. $n \in A$ verilsin. $s(n) \in A$, yani $A_{s(n)} = w$ olduğunu göstereceğiz. $m \in w$ verilsin.

$$k = s(n) \cap m = (n \cup \{n\}) \cap m = (n \cap m) \cup (\{n\} \cap m)$$

diyelim. $n \notin m$ ise $k = n \cap m$ ve dolayısıyla varsayımdan $k \in w$ olur. $n \in m$ ise $n \subset m$ ve bunun sonucu olarak, $k = s(n) \in w$ olur. □

Temellendirme Beliti olmadan x ve y kümeleri için $s(x) = s(y)$ olduğunda, $x = y$ olduğu gösterilemeyebilir. Buna karşın, $n, m \in w$ için, Temellendirme Beliti kullanılmadan, $n \notin n$ olduğu kullanılarak, aşağıdaki teoremin kanıtı kolaylıkla verilir.

Teorem 5.15. *Verilen iki doğal sayının eşit olması için gerek ve yeter koşul ardılarının eşit olmasıdır.*

Kanıt: $m, n \in w$ verilsin. $s(n) = s(m)$ olduğunu varsayalım. $n \neq m$ olduğunda, $n \in m$ ve benzer biçimde $m \in n$ olur. Teorem 4.2 gereği, $n \subset m$ ve $m \subset n$ ve buradan da $n \subset n$ olur ki bu çelişkidir. □

Alıştırmalar

5.15. Doğal sayılar kümesine eşit olan doğal sayı olmadığını gösterin.

5.16. Her elemanı aynı zamanda altkümesi olan kümeye ***inductive*** küme denir. Kendisi ve her elemanı inductive olan kümeye ***ordinal*** denir. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

  i. Her doğal sayı bir ordinaldir. Ayrıca sonlu[8] bir kümenin ordinal olması için gerek ve yeter koşul bir doğal sayıya eşit olmasıdır.

  ii. Doğal sayılardan farklı bir ordinalin olduğunu gösterin. (w bir ordinaldir.)

  iii. α bir ordinal ise $\alpha \cup \{\alpha\}$ kümesinin bir ordinal olduğunu gösterin.

5.17. Elemanları ordinal olan bir kümenin bileşiminin bir ordinal olduğunu gösterin.

5.18. Sonlu ve elemanları ordinal olan bir kümenin ordinal olması gerekmediğini gösterin.

[8] Sonlu küme tanımını henüz yapmadığımızı hatırlayalım.

5.4 Peano Aksiyomları

Doğal sayılar kümesinin yukarıda verilen inşasından daha önce, farklı bir aksiyomlar listesiyle, farklı bir inşası İtalyan matematikcisi Giuseppe Peano (1858-1932) tarafından 1889'da derlenip ve sunulmuştur. Bu inşanın verilmesi aşamasında yukarıda verilen ve verilecek olan matematiksel mantık henüz bebekler gibi ses çıkartıyordu, yani ne dediği pek anlaşılmıyordu:-).

Aşağıdaki aksiyomları tanımlarken, kullanılan sembollerin anlamını açıklamaya gerek duymayıp, bunları okurun sezgilerine bırakalım. Örneğin, $\mathbb{N}$'ye küme derken, "ne demek küme?" diye sormayalım!

Tanım 5.8 (Peano Aksiyomları, Dedekind-Paeno Aksiyomları)**.** Aşağıdaki aksiyomlar topluluğuna Peano Aksiyomlar listesi denir.

1. $\mathbb{N}$ bir küme.
2. $0 \in \mathbb{N}$.
3. Her $x \in \mathbb{N}$ için $x = x$.
4. Her x, $y \in \mathbb{N}$ için $x = y$ ise $y = x$.
5. Her x, y ve $z \in \mathbb{N}$ için $x = y$ ve $y = z$ için $x = z$.
6. a bir sembol, $x \in \mathbb{N}$ ve $a = x$ ise $a \in \mathbb{N}$.
7. $x \in \mathbb{N}$ ise $s(x) \in \mathbb{N}$.
8. $x = y$ ise $s(x) = s(y)$.
9. $s(x) = s(y)$ ise $x = y$.
10. $\sigma(n) = 0$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ yok.
11. $0 \in S$ olmak üzere, $S \subset \mathbb{N}$ kümesi, $n \in S$ olduğunda $s(n) \in S$ olma özelliğini sağlıyorsa, $S = \mathbb{N}$ olur.

Bu aksiyomlar topluluğuna ***Dedekind-Peano Aksiyomlar Topluluğu*** ve $(\mathbb{N}, 0, \sigma, =, \in)$ ifadesine de ***Dedekind-Peano Doğal Sayılar Sistemi*** denir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı kolaylıkla verilir.

Teorem 5.16. *$(w, 0, s)$ bir Dedekind-Peano doğal sayılar sistemidir.*

Dedekind-Peano doğal sayılar sistemi şu anlamda tektir. $(N, s_N, 0_N)$ ve $(M, s_M, 0_M)$ iki Dedekind-Peano doğal sayılar sistemi ise,

$$f(0_N) = 0_m \text{ ve } f(s_N(n)) = s_M(f(n))$$

eştsizliğini sağlayan birebir ve örten $f : N \to M$ fonksiyonu vardır.Bunun kanıtı bir sonraki bölümde, recursion teoreminin bir uygulaması olarak verilecek.

Uyarı: Dedekind-Peano doğal sayılar sistemi ZF dışında tanımlandığında bazı yetersizlikler oluşacaktır. Örneğin. $(\mathbb{N}, s, 0)$ Dedekind-Peano aksiyom sisteminde $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{N}$'nin kuvvet kümesi tanımlanamayacaktır. Bunun sonucu olarak, iki kümenin kartezyen çarpımı da tanımlanamaz.

5.5 Doğal Sıralama ve İyi Sıralama Prensibi

n, m doğal sayıları için $m \in n$ ise $m < n$ yazarız. Bu gösterim sonucu, her $n \in w$ için

$$n = \{m \in w : m \in n\} = \{m \in w : m < n\}$$

olur.

Teorem 5.17. *$m, n \in w$ için aşağıdakiler denktir.*

i. $m \in n$.

ii. $m \subset n$.

iii. $x < y$ *olur.*

Kanıt: $i \Rightarrow ii$: $m \in n$ olsun. Bir doğal sayı kendi kendinin elemanı olamayacağından $m \neq n$ olur. Ayrıca Teorem 4.11 gereği $m \subset n$.

$ii \Rightarrow iii$: $m \subset n$ olduğunu varsayalım. Buradan $s(m) \subset n$ ve dolayısıyla $m \in n$ elde edilir. Bir başka gösterimle $m < n$.

$iii \Rightarrow i$: $m < n$ ise $m \in n$ olur. Doğal sayıların transitiv olmasından $m \subset n$ olur. $m \neq n$ olmasından dolayı $s(m) \subset n$ olur. Dolayısıyla $m \in n$ olur. □

Teorem 5.18. *Her $n, m \in w$ için şunlardan sadece ve sadece biri gerçekleşir:*

$$n < m,\ m < n \text{ ya da } n = m.$$

Kanıt: Teorem 4.11 gereği $n \subseteq m$ ya da $m \subseteq n$ olur. Yukarıdaki teorem gereği, $m \neq n$ ise, yukarıdaki teoremin uygulanmasıyla $m < n$ ya da $n < m$ olacaktır. Kanıt tamamlanır. □

Teorem 5.19. *$m < n < s(m)$ olacak biçimde m, n doğal sayıları yoktur.*

Kanıt: Olduğunu varsayalım. $m < n$ olmasından dolayı $m \in n$ olur. $n < s(m)$ olmasından $n < m$ ya da $n = m$ olur. Bu, $m \in n$ olmasıyla çelişir. □

Doğal sayılar kümesi w'de

$$\leq = \{(m,n) : m,n \in w, m = n \text{ ya da } m < n\}$$

kümesine ***doğal sıralama*** denir. $(m,n) \in \leq$ olması $m \leq n$ ile gösterilir. $m \leq n$ olması için gerek ve yeter koşulun $m < n$ ya da $m = n$ olması gerektiği açık.

Teorem 5.20. *Doğal sıralama bir tam sıralamadır*[9]. *Yani, aşağıdaki koşullar her m, n, $k \in w$ için sağlanır.*

i. $m \leq m$.

ii. $m \leq n$ *ve* $n \leq m$ *ise* $m = n$.

ii. $m \leq n$ *ve* $n \leq k$ *ise* $m \leq k$.

ii. $m \leq n$ *ya da* $n \leq m$.

$A \subseteq w$ olmak üzere her $n \in A$ için $m \leq n$ önermesini sağlayan $n \in A$'ya A'nın bir ***altsınırı*** denir. w'nin boş olmayan her altkümesinin en az bir altsınırı vardır. Altsınır tek olmak zorunda değidir. Bir kümenin bir altsınırı aynı zamanda kümeye aitse, o elemana kümenin ***en küçük alt sınırı*** denir.

Teorem 5.21. *Sıfır, her doğal sayılar kümesinin bir altsınırıdır.*

Teorem 5.22 (İyi Sıralama İlkesi)**.** *Doğal sayılar kümesinin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır.*

Kanıt: A, w'nin boş olmayan altkümesi ve $A \neq \omega$ olsun. $0 \in A$ ise 0, A'nın en küçük elemanı olacaktır. $0 \in A$ olmadığını varsayalım.

$$B = \{n \in w \setminus A : k < n \to k \in w \setminus A\}$$

olarak tanımlayalım. $0 \in w \setminus A$ ve her $k < 0$ için, mantıksal olarak $k \in w \setminus A$ olacağından $0 \in B$ olur. $B \neq \omega$ olduğundan B tümevarımsal küme değildir ve bunun sonucu olarak $m \in B$ ve $s(m) \notin B$ olacak biçimde $m \in \omega$ vardır. $k < s(m)$ olduğunda $k < m$ ya da $k = m$ olduğundan, $m \in B$ olmasi kullanılarak $k \in \omega \setminus A$ olacaktır. Buradan $s(m) \notin \setminus A$ elde edilir. Dolayısıyla, $s(m) \in A$ olur. $s(m)$'nin A'nın en küçük elemanı olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. Varsayalım ki değil. Bu durumda $s(m) \leq a$ olmayacak biçimde $a \in A$ var. Dolayısıyla, $a < s(m)$. Bu durumda $a = m$ ya da $a < m$. İkinci durumda $m \in \omega \setminus A$ olduğunda $a \in \omega \setminus A$ olacağından $a \notin A$ olur ki, bu çelişkidir. O halde $a = m$ olur. $m \in B$ olduğundan $a \in B$ ve dolayısıyla, $a \notin A$ olur ki bu da çelişkidir. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

5.19. Temellendirme aksiyomu ve sonsuzluk aksiyomu kullanmadan, bir an için elemanları doğal sayılar olan topluluğun bir aksiyom olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında, İyi Sıralama İlkesi ile Tümevarım ilkesinin denk kavramlar olduğunu gösterin.

[9]Tam sıralı küme kavramı daha genel olarak 5.1'de verilecek.

6. Sıralama ve Fonksiyon

İki farklı şey eşitlik üzerinden karşılaştırılabilir. Eşit olmayan iki şey de büyüklük ve küçüklük olarak adlandırılacak kavramlar üzerinden karşılaştırılabilir. Bu tür karşılaştırmalar elbette nereden bakıldığına, tanımlanmasına göre değişir. Buna karşın, bir şeyin kendisinden büyük ya da küçük olması beklenmez. Diğer taraftan, a, b'den büyük ve c'den küçük ise, c'nin a'dan büyük olması beklentisi teamüldendir. Genel olarak bu tür teamüllere uyulacak.

Bir kümenin kartezyen çarpımının herhangi bir altkümesine **bağıntı** denir. Bir X kümesi için en temel bağıntıların

$$R_1 = \emptyset$$

$$R_2 = X \times X$$

$$R_3 = \{(x, y) : x = y\}$$

ve

$$R_4 = \{(x, y) : x \in y\}$$

olduğu söylenebilir. Bununla birlikte,

$$R_5 = \{(x, y) : x \subset y\}$$

$$R_5 = \{(x, y) : x \subseteq y\}$$

bağıntıları yabana atılamaz.

Bir bağıntıya göre kümenin elemanları arasında bir “kıyaslama” yapılabilir. Böyle bir kıyaslama doğal sayılar kümesi için doğal sıralama altında zaten yapılmıştı.

Bir bağıntı, sağladıkları özelliklere göre, **kısmi sıralama** adını alır. Kümenin her iki elemanını karşılaştırabilen kısmi sıralamaya **zincir (tam) sıralama** ve kümenin boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanını var yapan tam sıralamaya **iyi sıralama** denir. Bu kavramlar daha sonra açık biçimde tanımlanacak.

Bir küme üzerinde tanımlanan kapsama sıralaması tam sıralı olmayan kısmi sıralama, gerçel sayılar kümesinde tanımlı "bildiğimiz sıralama" iyi sıralı olmayan tam sıralama ve doğal sayılar kümesinde tanımlı sıralama iyi sıralamadır.

Her doğal sayının her elemanı o doğal sayının bir altkümesidir. Bu tür özellikteki kümelere **transitiv** küme denir. Bazı kümelerin hem kendisi hem de her elemanı transitiv kümedir. Bu tür özellikteki kümelere de **ordinal** denir. Bu tanıma göre, her doğal sayı bir ordinal ve doğal sayı olmayan bir ordinal doğal sayılar kümesidir. Bir ordinal

$$x < y \Leftrightarrow x \in y$$

sıralamasına göre, iyi sıralı bir kümedir. Ayrıca,

$$x < y \Leftrightarrow x \subset y$$

olur. Dolayısıyla bu tür sıralama oldukça doğaldır. Ancak, ZF'de her küme böyle bir mükemmel sıralamaya göre kısmi sıralama olmasına karşın tam sıralama olmuyor. Demek ki bu yönüyle ordinal kavramı doğal sayıları ve doğal sayılar kümesini genelleyen bir kavramdır.

İki küme arasındaki bezerlikleri anlayabilmek için gerekli temel araçlardan biri kümeler arasında **fonksiyon** olarak adlandırılacak bir yolun olmasıdır. İki küme farklı olsa bile bu kümeler bazı fonksiyonlara göre birebir eşleniyor olabilir. İki küme arasında birebir bir eşleme varsa bu kümelere "denk kümeler" denir. Bu tanımlamaya göre iki eşit küme denk olacaklarından, denklik, eşitlik kavramını geneller. Denk kümelerle ilgili temel teoremlerden biri, verilen iki kümeden biri diğerinin bir altkümesine denk ise bu kümelerin denk olduğunu söyleyen Schroder-Bernstein Teoremi'dir. Fonksiyon kavramının tanım ve temel bazı özelliklerinin verilmesi sonrası Schroder-Bernstein Teoremi'nin bir kanıtı verilecek.

Bir sonraki bölümde doğal sayılar kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri olarak adlandırılacak iki özel fonksiyon tanımlanacak. Bu tanımlama recursion teoremi olarak bilinen teorem üzerinden yapılacak. Bu bölümde recursion teoremi kanıtıyla verilecek. Bu teoremin ifadesi şudur: X bir küme, $g : X \to X$ bir fonksiyon, $x_0 \in X$ ve

$$f(0) = x_0$$

olmak üzere, her n doğal sayısı için

$$f(s(n)) = g(f(n))$$

eşitliğini sağlayan $f : \omega \to X$ fonksiyonunun varlığını söyler. Aslında bu fonksiyon,

$$f(0) = x_0$$

$$f(1) = g(x_0)$$

$$f(2) = g(g(x_0))$$

olarak devam eder. Daha genel olarak, $f(n)$, g'nin x_0 noktasındaki n'inci bileşimidir.

Aşağıdaki iki soruyu karşılaştıralım:

i. Her n doğal sayısı için X_n, bir X kümesinin iki elemanlı bir altkümesi olsun. Elemanları sadece ve sadece X_n'den seçilmiş bir elemandan oluşan bir küme var mıdır. Yani, X'in öyle bir altkümesi Y var mıdır ki, her n için X ve X_n'nin arakesiti bir elemanlı olsun? Bir başka deyişle, her n için, A_n, X_n'nin bir elemanlı bir altkümesi ise A_n'lerin sınıf olarak bileşimi $\bigcup_n A_n$ bir küme olur mu?

ii. Her n doğal sayısı için X_n, bir X kümesinin iki elemanlı bir altkümesi olsun. X_n'nin elemanlarının adları a_n ve b_n'ler olsun. Elemanları sadece ve sadece a_n elemanlarından oluşan bir küme var mıdır? Yani, X'in öyle bir altkümesi Y var mıdır ki her n için X ve X_n'nin arakesiti $\{a_n\}$ olsun?

Bu iki soru arasındaki farkı okur iyi görmeli. Bu fark, birinci soruda X_n'nin elemanlarının isimlendirilmemiş olmasına karşın ikinci, soruda isimlendirilmiş olmasıdır.

İkinci sorunun yanıtı ZF'de evettir. Birinci soruya ZF'de ne olumlu, ne de olumsuz yanıt verilebilir. Bu tür problemler, Seçim Aksiyomu olarak adlandırılan yapı içerisinde yanıt bulur.

Seçim aksiyomu, elemanları boş olmayan bir a kümesinden, bu kümenin bileşimine tanımlı ve her $x \in a$ için $f(x) \in x$ özelliğini sağlayan bir f fonksiyonun var olduğunu söyler[1]. Bu tür özellikteki fonksiyona a'nın bir seçim fonksiyonu denir. Bu bölümde Seçim Aksiyomu tanımlanarak temel düzeyde bazı sonuçları verilecek. Bu temel sonuçlardan biri seçim aksiyomunun her kümenin iyi sıralanabilir olmasına denk olmasıdır. Seçim aksiyomuna denk olan kavramların bazıları çok "doğal" olmasına karşın bazıları "anormal"dir. Bu yönüyle Seçim Aksiyom'u "densiz"dir. Buna karşın, bu densiz kavram yoksa matematiğin çok önemli bazı dalları da yoktur. Örneğin: fonksiyonel analiz yok; çünkü Hahn Banach Teoremi olmayacak.

Yukarda bahsedilen kavramların temel özellikleri bu bölümde çalışılacak.

6.1 Sıralama

X bir küme olmak üzere $X \times X$'nin her altkümesine X'te bir ***bağıntı*** denir.

[1] Çocuklardan torunlara tanımlı bir fonksiyondur!

Tanım 6.1. R, X üzerinde bağıntı olsun. R, sağladığı özelliklere göre aşağıdaki gibi isimlendirilir.

Simetrik: Her $x \in X$ için $(x, x) \in R$.

Terssimetrik: (x, y) ve $(y, x) \in R$ ise $x = y$.

Geçişken: $(x, y), (y, z) \in R$ ise $(x, z) \in R$.

Kısmi sıralı: Simetrik, terssimetrik ve geçişken.

Zincir: Kısmi sıralı ve her x, $y \in X$ için $(x, y) \in R$ ya da $(y, x) \in R$.

R, X kümesinde tanımlı bir kısmi sıralama ise X'e R'ye göre **kısmi sıralı küme** denir. "(X, R) kısmı sıralı küme" denildiğinde kastedilen, X'in bir sıralama R ile donatılmış olmasıdır. Kargaşaya neden olacak bir durum yoksa kısaltmak açısından (X, R) ikilisini sadece X ile gösterebiliriz. Kısmi sıralı bir X kümesinin bağıntısı genellikle $\leq$ sembolünü içeren sembolle gösterilir. Örneğin,

$$\leq, \leq_X, \leq'$$

gibi. Ayrıca, $\leq$, X üzerinde bir kısmi sıralama ise

$$(x, y) \in \leq \text{ yerine } x \leq y \text{ ya da } y \geq x$$

yazılır. $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ ya da $y > x$ gösterimi kullanılır[2].

Belirli bir kısmi sıralamayla donatılmış kümeye **kısmi sıralı küme** ve bir zincir sıralamayla donatılmış kümeye **zincir küme**[3] denir.

Eşitlik, her küme üzerinde bir kısmi sıralamadır. Yani, bir X kümesi üzerinde, $x \leq y$ olması $x = y$ olarak tanımlanırsa, $\leq$, X üzerinde bir kısmi sıralamadır. Bu oldukça basit bir kısmi sıralama olup, pek kıymeti harbiyesi yoktur.

Bir kümenin kuvvet kümesinin her altkümesi, kapsama işlemine göre kısmi sıralıdır. Yani, X bir küme olmak üzere, $\mathcal{R} \subseteq \wp(X)$ kümesi,

$$A \leq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$$

sıralamasına göre kısmi sıralı kümedir. Bu sıralamaya **kapsama sıralama** denir.

$\leq$, X kümesinde bir kısmi sıralama ise, her $Y \subset X$ için

---

[2] $>$ ve $<$ sembolleri 1631'de T. Harriot tarafından, "Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas" adlı eserinde kullanılmaya başlanmıştır. $\leq$ ve $\geq$ sembolleri ilk olarak 1734'te Pierre Bouguer tarafından kullanılmıştır.

[3] Aslında, burada tanımlanan anlamda "zincir sıralı küme"ye, genelde tam sıralı küme denir. Ancak burada geçen "tam" kelimesi, bazı cebirsel yapılar için farklı anlamlarda kullanılacağından, böyle bir isimlendirme kullanılmıştır.

$$\leq_Y = \{(x, y) \in Y \times Y : x \leq y\},$$

Y üzerinde bir kısmi sıralamadır.

Tanım 6.2. X kısmi sıralı küme, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ verilsin.

Üst sınır: Her $a \in A$ için $a \leq x$ oluyorsa x'e A'nın üst sınırı denir. Bu durumda $A \leq x$, $x \geq A$ yazılabilir.

Alt sınır: Her $a \in A$ için $a \geq x$ oluyorsa x'e A'nın alt sınırı denir. Bu durumda $A \geq x$ ya da $x \leq A$ yazılabilir.

Supremum: x, A'nın üst sınırı ve elemanları A'nın üst sınırları olan kümenin bir alt sınırı ise, x'e A'nın supremumu denir ve $x = \sup A$ ile gösterilir.

İnfimum: x, A'nın alt sınırı ve elemanları A'nın alt sınırları olan kümenin bir üst sınırı ise x'e A'nın infimumu denir ve $x = \inf A$ ile gösterilir.

Maksimum: $x = \sup A$ ve $x \in A$ ise x'e A'nın maksimumu denir ve $x = \max A$ yazılır.

Minumum: $x = \inf A$ ve $x \in A$ ise x'e A'nın minimumu denir ve $x = \min A$ yazılır.

Bir kümenin maksimumuna **en büyük eleman** denir. Benzer biçimde, kümenin minimumuna **en küçük eleman** denir.

Bir kısmi sıralı X kümesinde $a \in X$ olmak üzere a'dan farklı $a \leq x$ olacak biçimde $x \in X$ yoksa a'ya X'nin bir ***maksimal*** elemanı denir. X'in en büyük elemanı maksimal elemandır. Tersinin doğru olması gerekmediği gibi maksimal elemanın tek bir tane olması da gerekmez. Bazı sıralamalara göre hiç maksimal eleman olmayacağı gibi bazen de her elemanı maksimal olabilir. Benzer durum minimal elemanlar için de tanımlanır. Yani, X kümesinde $a \in X$ kümesi için a'dan farklı $a \geq x$ olacak biçimde $x \in X$ yoksa a'ya X'nin bir ***minimal*** elemanı denir.

Tanım 6.3. Boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı olan kısmi sıralı kümeye ***iyi sıralı*** küme denir.

Doğal sayılar kümesi ω, $\in$ (eleman olma) sıralamasına göre, yani

$$m \leq n \Leftrightarrow m = n \text{ ya da } m \in n$$

sıralamasına göre iyi sıralı kümedir. İyi sıralı bir kümenin her altkümesinin de iyi sıralı olduğu kolaylıkla gösterilir. Bunun sonucu ve her $n \in \omega$ için $n \subseteq \omega$ olması kullanılarak her doğal sayının iyi sıralı olduğunu söyleyebiliriz.

Alıştırmalar

6.1. Elemanları bir küme üzerinde tanımlı kısmi sıralamalar olan kümenin arakesitinin bir kısmi sıralama olduğunu gösterin.

6.2. X boş olmayan bir küme olsun.

$$R = \{(x, y) : x = y \text{ ya da } x \in y\},$$

X üzerinde kısmi sıralama olur mu?

6.3. w'de tanımlı doğal sıralamanın iyi sıralama olduğunu gösterin.

6.4. Boş olmayan her kümenin en az bir iyi sıralaması var mıdır?

6.5. Doğal sayılar kümesi tek elemanlıdır! Kanıt:

$$A = \{n \in \omega : \forall a \forall b(((a \in \omega) \wedge (b \in \omega) \wedge (\max\{a, b\} = n)) \rightarrow a = b)\}$$

kümesini tanımlayalım. $0 \in A$ olduğu açık. $n \in A$ verilsin. $\max\{a, b\} = n + 1$ olsun. Buradan,

$$n = \max\{a, b\} - 1 = \max\{a - 1, b - 1\}$$

olur. $n \in A$ olmasından $a - 1 = b - 1 = n$ ve dolayısıyla $a = b$ olur. Hata nerede?

6.6. X ve Y iki tam sıralı küme ise $X \times Y$ kümesi üzerine tam sıralama konulabileceğini gösterin.

6.2 Fonksiyon

Bir X kümesinden bir Y kümesine tanımlı fonksiyon, X'in her elemanını Y'de en az ve sadece ve sadece bir elemana karşılık getiren bir kuraldır. Fonksiyon olarak adlandırılacak bu kurala göre, $X \times Y$'nin bir altkümesidir.

Tanım 6.4 (Bourbaki, 1939)**.** X ve Y kümeleri verilsin. Her $f \subset X \times Y$ için f'nin özelliği olan

$$\forall x \in X \exists y \in Y((x, y) \in f)$$

önermeyi $\varphi(f)$ ve

$$\forall x \in X \forall y \in Y \forall z \in Y(((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \rightarrow y = z)$$

önermesini $\phi(f)$ ile gösterelim.

$$\{f \in \wp(X \times Y) : \varphi(f) \wedge \phi(f)\}$$

bir kümedir. Bu küme $Fonk(X, Y)$ ya da Y^X ile gösterilir. $Fonk(X, Y)$'nin her elemanına X'den Y'ye tanımlı ***fonksiyon***[4] denir ve $f : X \rightarrow Y$ ile gösterilir[5].

[4][3]'de fonksiyonun esas özelliğinin 1837'de Dirchlet tarafından verildiği ifade ediliyor. Fonksiyon sembolü $f(x)$ ilk kez Leonhard Euler tarafından, 1734 yılında kullanılmaya başlanmıştır. İlk ok, bilinen kayıtlara göre Güney Afrika'da Sibudu Mağarasında bulunmuş olup, 64.000 yıl öncesine aittir. Bu işaret matematikte ilk kez, özel bir elemanın görüntüsünü göstermek üzere, Oystein Ore tarafından 1936'da kullanılmıştır. Bir fonksiyonun $f : X \rightarrow Y$ gösterimi 1940'da Witold Hurewicz tarafından, *On duality theorems* (Bull. Am. Math. Soc. 47, 562-563) eserinde kullanılmıştır.

[5]Matematikte "fonksiyon" kelimesi ilk olarak Gottfried Leibniz'in 1773 tarihli mektubunda yer almıştır. Bourbaki grubunun üyelerinden Dieudonne, modern anlamda fonksiyon kavramının Dedekind'in *Was sind und was sollen die Zahlen* makalesinde yer aldığını belirtmektedir.

$f : X \to Y$ bir fonksiyon ise X'e f'nin ***tanım kümesi*** ve Y'e ***değer kümesi*** denir. Her $x \in X$ $(x, y) \in f$ olacak biçimde tek bir tane $y \in Y$ vardır ve y, genel olarak $f(x)$ ile gösterilir ve x'in f altındaki görüntüsü denir.

$$\{z \in X \times Y : \exists x \in X(z = (x, f(x)))\}$$

kümesine f fonksiyonunun ***grafiği*** denir ve genelde G_f ile gösterilir. Her $y \in Y$ için $y = f(x)$ olacak biçimde $x \in X$ varsa f'ye ***örten***, $f(a) = f(b)$ olduğunda $a = b$ oluyorsa f'ye ***birebir*** fonksiyon denir.

$s : \omega \to \omega$, $s(n) = n \cup \{n\}$ eşitliğiyle tanımlı fonksiyon birebir ama örten değildir.

X, Y'nin altkümesi ise $f : X \to Y$, $f(x) = x$ eşitliğiyle tanımlı fonksiyon birebirdir. Bu fonksiyonun örten olması için gerek ve yeter koşul $X = Y$ olmasıdır. $f : X \to X$ fonksiyonuna ***birim*** fonksiyon denir.

Teorem 6.1. *X boş olmayan küme olsun.*

i. *X'ten $\wp(X)$'e tanımlı birebir fonksiyon vardır.*

ii. *X'ten $\wp(X)$'e tanımlı örten fonksiyon yoktur.*

Kanıt: (i). $f(x) = \{x\}$ istenilen özellikte bir fonksiyondur.
(ii). Birebirdir ve örten bir $f : X \to \mathcal{P}(X)$ fonksiyonunun olduğunu varsayalım.

$$A = \{x \in x : x \notin f(X)\}$$

diyelim. Varsayım gereği,

$$f(a) = A$$

olacak biçimde $a \in x$ vardır. Bu durumda

$$a \in A \leftrightarrow a \notin A$$

çelişkisi elde edilir. □

Her Y kümesi için $Fonk(\emptyset, Y)$ bir elemanlı kümedir. X boş olmayan küme ise X'den boşkümeye tanımlı fonksiyon yoktur. Yani, $Fonc(X, \emptyset) = \emptyset$ olur. $X \neq \emptyset$ olmak üzere Y ve Z kümeleri için $Y \subseteq Z$ olması için gerek ve yeter koşul $Fonc(X, Y) \subseteq Fonc(X, Z)$ olmasıdır.

$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ verilsin.

$$f_{|A} = \{z \in f : \exists a \in A \exists y \in Y(z = (a, y) \in f)\}$$

olarak tanımlanan küme A'dan Y'ye tanımlı bir fonksiyondur. Bu fonksiyona f'nin A'ya olan ***kısıtlanması*** denir.

$f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ olmak üzere,

$$g \circ f = \{a \in X \times Y : \exists x \in X \exists y \in Y((y = f(x)) \wedge (a = (x, g(y))\},$$

X'den Z'ye bir fonksiyondur. Bu fonksiyona g ve f'nin ***bileşke fonksiyonu*** denir[6]. $f : X \to X$ bir fonksiyon olmak üzere, f ile kendisinin bileşkesi f^2 ile, f^2 ile f'nin bileşkesi f^3 ile ve benzer biçimde, her $n \in \omega$ için f^n tanımlanır. Özel olarak, f^0, birim fonksiyonu ve f^1, f fonksiyonunu gösterir.

Alıştırmalar

6.7. $s : \omega \to \omega$, $s(n) = n \cup \{n\}$ fonksiyonunun birebir ama örten olmadığını gösterin.

6.8. Birebir fonksiyonun kısıtlamasının birebir olmasına karşın, örten fonksiyonun her kısıtlanmış fonksiyonunun örten olması gerekmediğini gösterin.

6.3 Schröder-Bernstein Teoremi

İki kümenin eşitlikten bir adım daha "zayıf benzerliği" denklik olarak adlandırılacak kavram üzerinden verilebilir. İki kümenin ***denk*** olması, aralarında en az bir tane birebir ve örten fonksiyonun olmasıdır. X ve Y kümelerinin denk olması

$$|X| = |Y| \text{ ya da } card(X) = card(Y)$$

ile gösterilir. Bu gösterimde kullanılan eşitlik "=" sembolü eşitlik aksiyomunda geçen eşitlik anlamında değildir; sadece bir gösterimdir[7]. Her X kümesi için $|X| = |X|$ olduğu açık. Gerçekten de

$$i : X \to X,\ i(x) = x$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon birebir ve örtendir. Elbette başka bir sürü birebir ve örten fonksiyon vardır ama denklik kavramının tanımlanması birebir ve örten fonksiyonun çokluğu üzerinden değil, varlığı üzerinden verilmekte. Bir X kümesinden Y kümesine tanımlı en az bir tane birebir fonksiyon varsa

$$|X| \leq |Y| \text{ ya da } card(X) \leq card(Y)$$

yazarız. $X \subseteq Y$ ise $|X| \leq |Y|$ olduğu açıktır. $|X| \leq |Y|$ olmasına karşın, X'den Y'e tanımlı birebir ve örten fonksiyon yoksa

$$|X| < |Y| \text{ ya da } card(X) < card(Y)$$

yazarız. Teorem 5.1(ii) kullanılarak her X kümesi için

[6] Bileşke fonksiyonunu gösteren notasyon büyük bir olasılıkla ilk olarak Bourbaki grubunca, 1949'da kullanılmaya başlandı.

[7] Daha sonra yapılacak tanımlamayla, $|x|$ bir kardinal sayı olarak ele alınacak. Bu durumda, $|x|$ bir küme olacak ve $|x| = |y|$ ifadesinde yer alan eşitlik sembolü eşitlik aksiyomunda geçen anlamda olacak.

$$|X| < |\wp(X)|$$[8]

olduğu kolaylıkla gösterilir. Bu eşitsizliğin böyle masum durduğuna bakmayın; bize çeşit çeşit sonsuzlukların yolunu açıyor.

Teorem 6.2 (Schröder-Bernstein Teoremi)**.** *İki kümenin denk olması için gerek ve yeter koşul her birinin bir diğerinin bir altkümesine denk olmasıdır.*

Kanıt: X ve Y kümeleri verilsin.

$$|X| \leq |Y| \text{ ve } |Y| \leq |X|$$

olduğunu varsayalım. Yani, birebir $f : X \to Y$ ve $g : Y \to X$ fonksiyonları var olsun. X'den Y'ye tanımlı birebir ve örten bir fonksiyonun olduğu gösterilecek. Eğer,

$$g(Y \setminus f(X_1)) = X \setminus X_1$$

olacak biçimde bir $X_1 \subseteq X$ altkümesi bulunabilirse,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & ; x \in X \setminus X_1 \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlı $h : X \to Y$ birebir ve örten fonksiyon olacak ve kanıt tamamlanacak.

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus g(Y) \subseteq A \text{ ve } g \circ f(A) \subseteq A\}$$

kümesini tanımlayalım. $X \in \mathcal{F}$ olduğundan, boşkümeden farklıdır. $\mathcal{F}$ kümesinin arakesitine X_1 diyelim. $\mathcal{F}$'nin her elemanı $X \setminus g(Y)$ kümesini kapsadığından,

$$X \setminus g(Y) \subseteq X_1$$

olur. Ayrıca her $F \in \mathcal{F}$ için

$$g \circ f(X_1) \subseteq g \circ f(F) \subseteq F$$

olmasından

$$g \circ f(X_1) \subseteq X_1$$

elde edilir. Böylece, X_1, $\mathcal{F}$'nin en küçük elemanıdır. Yani, $X_1 \in \mathcal{F}$ ve her $F \in \mathcal{F}$ için $X_1 \subseteq F$ olur.

$$X \setminus g(Y) \subseteq X_1$$

olmasından dolayı

[8] Bu teorem, "Küme teorinin temel teoremi" olarak bilinir.

$$X \setminus X_1 \subseteq g(Y)$$

olur. Ayrıca,

$$g \circ f(X_1) \subset X_1$$

olması kullanılarak,

$$X \setminus X_1 \subseteq g(Y \setminus f(X_1))$$

elde edilir. Bu, kapsamanın bir yönü. Diğer yönü için önce aşağıdaki eşitliği gösterelim:

$$(X \setminus g(Y)) \cup (g \circ f(X_1)) = X_1$$

olduğu gösterilecek. $X_1 \in \mathcal{F}$ olduğundan yukarıdaki önermede sol taraf X_1 tarafından kapsanır. Bunu $g \circ f$ fonksiyonuna uygulayarak,

$$g \circ f((X \setminus g(Y)) \cup (g \circ f(X_1))) \subseteq g \circ f(X_1) \subseteq (X \setminus g(Y)) \cup (g \circ f(X_1))$$

elde edilir. Ayrıca,

$$X \setminus g(Y) \subseteq (X \setminus g(Y)) \cup (g \circ f(X_1))$$

olmasından,

$$(X \setminus g(Y)) \cup (g \circ f(X_1)) \in \mathcal{F}$$

olur. X_1, $\mathcal{F}$'nin en küçük elemanı olduğundan,

$$X_1 \subseteq (X \setminus g(Y)) \cup (g \circ f(X_1))$$

olur. Bu eşitsizlikten, X_1 ve $g(Y \setminus f(X_1))$ kümelerinin ayrık olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$g(Y \setminus f(X_1)) \subseteq X \setminus X_1$$

elde edilir. Böylece,

$$g(Y \setminus f(X_1)) = X \setminus X_1$$

elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

6.9. $|n| = |m|$ olması için gerek ve yeter koşulun $n = m$ olduğunu gösterin.

6.10. $|\omega| = |\omega \setminus \{0\}|$ olduğunu gösterin. Hatta her $n \in \omega$ için $|\omega| = |\omega \setminus n|$ olduğunu gösterin.

6.11. $|n| = |\omega|$ olacak biçimde $n \in \omega$ olmadığını gösterin.

6.12. $|\omega| = |s(\omega)|$ olduğunu gösterin.

6.13. $f : X \to Y$ fonksiyonu için $|f(X)| \leq |X|$ olduğunu gösterin.

6.4 Recursive Fonksiyon

Recursive fonksiyonun (hesaplanabilir fonksiyon, özyinelemli fonksiyon da denilebilir) formel bir tanımı yoktur. Çeşitli biçimleri vardır. Bu fonksiyonlar belirli özellikleri sağlayan fonksiyonları tanımlamada oldukça kullanışlıdır. Bu altbölümde doğal sayılarda toplama ve çarpma işlemini tanımlamaya yeterli düzeyde olabilecek biçimde, recursive fonksiyonlarla ilgili birkaç teorem verilecek. Recursive fonksiyonlarla ilgili detaylı bilgilere [42] üzerinden ulaşılabilir.

X boş olmayan bir küme, $a \in X$ ve $g : X \to X$ bir fonksiyon olsun. g^n, g'nin kendisiyle n'inci kez bileşim fonksiyonu olmak üzere,

$$Y = \{g^n(a) : n \in \omega\}$$

topluluğu bir küme olsaydı ω'dan X'e

$$f(0) = a$$

ve her $n \in \omega$ için

$$f(s(n)) = g(f(n))$$

eşitliğini sağlayan bir fonksiyon tanımlanabilirdi. Ancak, Y'nin bir küme olduğu söylenemez. Buna rağmen, bu koşulları sağlayan fonksiyon vardır ve tektir.

Teorem 6.3 (Recursion[9]). *X boş olmayan bir küme, $a \in X$ ve $g : X \to X$ bir fonksiyon olsun.*

i. $f(0) = a$,

ii. *her* $n \in \omega$ *için* $f(s(n)) = g(f(n))$

koşullarını sağlayan $f : \omega \to X$ fonksiyonu vardır.

Kanıt: $R \subseteq \omega \times X$ altkümesi

i. $(0, a) \in R$,

ii. $(n, x) \in R$ ise $(s(n), g(x)) \in R$.

koşullarını sağlıyorsa R'ye *suitable* küme diyelim. Elemanları suitable kümeler olan topluluğun bir küme olduğu bu kümenin arakesitinin de bir suitable küme ve üstelik bu arakesitin bir fonksiyonun grafiği olduğu gösterilerek kanıt tanımlanacak. Aşağıdaki gözlemleri açık bir şekilde yazalım.

a. Suitable kümelerin topluluğu $\mathcal{S}$ bir kümedir.

b. $\omega \times X \in \mathcal{S}$ olduğundan $\mathcal{S}$ boş kümeden farklıdır.

c. $S = \bigcap \mathcal{S}$ suitable kümedir.

d. S, ω'dan X'e tanımlı bir fonksiyonun grafiğidir: Her $n \in \omega$ için $(n, y) \in S$ olacak biçimde $y \in X$'in olması S'nin suitable olmasındandır.

[9] İngilizce "Recursion" kelimesi Türkçe kaynaklarda "Özyineleme" olarak çevrilse de bu kitapta İngilizcesi kullanıldı.

$$(n, y_1),\ (n, y_2) \in S \text{ olduğunda } y_1 = y_2$$

olduğunu göstereceğiz. Yani,

$$I = \{n \in \omega : (n, y) \in S \text{ olacak biçimde tek bir tane } y \in X \text{ var }\},$$

olmak üzere $I = \omega$ olduğu gösterilecek. Bunun için I'nın tümevarımsal küme olduğunu göstermek yeterli. Devam edelim.

e. $0 \in I$ olmadığını varsayalım. Bu durumda

$$(0, a),\ (0, b) \in S,\ a \neq b$$

olacak biçimde a, $b \in X$ var.

$$R = S \setminus \{(0, b)\}$$

kümesinin suitable olduğu kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla, $R \subset S$ olur ki bu çelişkidir. O halde $0 \in I$.

f. $n \in I$ verilsin. $(n, u) \in S$ olacak biçimde tek olan $u \in X$ seçelim. S suitable olduğundan,

$$(s(n), g(u)) \in S$$

olur.

$$(s(n), b) \in S \text{ ve } g(u) \neq b$$

olacak biçimde $b \in X$ olmadığını gösterelim. Varsayalım ki var.

$$R = S \setminus \{s(n), b\}$$

diyelim. R'nin suitable olduğunu göstereceğiz. Bunun için, S suitable ve $s(n) \neq 0$ olduğundan, $(n, v) \in R$ verildiğinde

$$(s(n), g(v)) \in R$$

olduğunu göstermek yeterli. $(n, v) \in R$ verilsin. $(n, v) \in S$ olduğundan,

$$(s(n), g(v)) \in S$$

olur.

$$(n, u), (n, v) \in S \text{ ve } n \in I$$

olduğundan, $u = v$ olur. Böylece,

$$b \neq g(u) = g(v)$$

elde edilir.

$$(s(n), g(v)) \in S \text{ olmasından } (s(n), g(v)) \in R$$

olur. Böylece, R'nin suitable olduğu gösterilmiş olur. S'nin tanımından $S \subset R$ elde edilir. Bu, çelişkidir. Böylece, $s(n) \in I$ olmak zorunda. I'nın tümevarımsal olduğu gösterilmiş olur. Yani, $I = \omega$ olur.

g. $S = G_f$ olacak biçimde, $f : \omega \to X$ fonksiyonunun var olduğu gösterilmiş olur. Bu fonksiyon teoremin koşullarını sağlar.

h. Teklik: Teoremin koşullarını sağlayan bir başka $h : \omega \to X$ fonksiyon olsun.

$$A = \{n \in \omega : f(n) = h(n)\}$$

olmak üzere $0 \in A$ olduğu açık. $n \in A$ verilsin. Yani, $f(n) = h(n)$ olsun. Buradan $g(f(n)) = g(h(n))$ ve buradan da $f(s(n)) = h(s(n))$ olur. Yani, $s(n) \in A$ olur. Tümevarım gereği, $A = \omega$ olur. Böylece, $f = h$ olduğu kanıtlanmış olur. □

Recursion teoremi kullanılarak Dedekind-Peano doğal sayılar sisteminin aşağıdaki anlamda tek olduğu gösterilebilir.

Teorem 6.4. *(X, e, σ) bir Dedekind-Peano doğal sayılar sistemi olsun. Her $n \in \omega$ için*

$$\sigma(f(n)) = f(s(n))$$

eşitliğini sağlayan birebir örten $f : \omega \to X$ fonksiyonu vardır.

Kanıt: Recursion teoremini σ fonksiyonuna uygulayarak, her $n \in \omega$ için

$$\sigma(f(n)) = f(s(n))$$

eşitliğini sağlayan $f : \omega \to X$ fonksiyonu vardır. f'nin örten olduğu açık. Birebir olduğunu gösterelim. Her $n \in \omega$ için

$$A_n = \{m \in \omega : f(m) = f(n)\} \setminus \{n\}$$

olmak üzere

$$A = \{n \in \omega : A_n = \emptyset\}$$

kümesinin w'ye eşit olduğunu göstereceğiz.

$$m \neq 0 \text{ ve } f(m) = f(0) = e$$

olduğunu varsayalım. $m = s(k)$ olacak biçimde $k \in \omega$ seçebiliriz. Buradan,

$$e = f(m) = f(s(k)) = \sigma(f(k))$$

olur. Bu, $e \notin \sigma(\omega)$ olmasıyla çelişir. O halde, $0 \in A$ olur. $n \in A$, yani $A_n = \emptyset$ olduğunu varsayalım. $m \in A_{s(n)}$ verilsin.

$$m \neq s(n) \text{ ve } f(m) = f(s(n))$$

olur. Buradan,

$$\sigma(f(k)) = f(s(k)) = f(s(n)) = \sigma(f(n))$$

ve buradan da $f(k) = f(n)$ olur. $n \in A$ olduğundan, $k = n$ ve dolayısıyla, $m = s(n)$ olur ki, bu çelişkidir. Tümevarımla $A = \omega$ olduğu gösterilmiş olur. Kanıt biter. □

Recursion teoremi kullanılarak, aşağıdaki teoremin kanıtı verilebilir. Bu teoremin kullanılmasıyla da doğal sayılarda toplama, çarpma, üstel fonksiyonlarının tanımlanması yapılabilecek.

Teorem 6.5. *$g : \omega \to \omega$ ve $f : \omega \times \omega \to \omega$ iki fonksiyon olsun. Her $m \in \omega$ için*

i. $h(m, 0) = g(m)$.

ii. $h(m, s(n)) = f(h(m, n), m)$

eşitliklerini sağlayan $h : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonu vardır.

Kanıt: $m \in \omega$ verilsin. $f_m : \omega \to \omega$ fonksiyonu $f_m(n) = f(m, n)$ eşitliğiyle tanımlansın. Her $n \in \omega$ için

i. $p_m(0) = g(m)$.

ii. $p_m(s(n)) = f_m(p_m(n))$

koşullarını sağlayan $p_m : \omega \to \omega$ fonksiyonu vardır. Böylece,

$$p(m) = p_m$$

eşitliğiyle $p : \omega \to Fonk(\omega, \omega)$ fonksiyonu tanımlanmış olur. $h(m, n) = p_m(n)$ eşitliğiyle $h : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyon istenilen koşulları sağlar. □

6.4.1 Tek ve Çift Sayılar

Çift ve tek sayıları bilmeyen okur herhalde yoktur. Bir n doğal sayısı için $2n$ biçimindeki her doğal sayı çift, $2n + 1$ biçimindeki doğal sayı tektir. Genel tanım böyledir. Ancak henüz doğal sayılar arasında toplama ve çarpma tanımlanmadığı için, bu tanımlama doğru olsa bile bu yöntemle tanımlamanın zamanı değil. Ancak, recursion teoremini uygulayarak tanımlamayı yapabiliriz.

Teorem 6.6. *$f : \omega \to \omega$ fonksiyonu*

$$f(n) = s(s(n))$$

eşitliğiyle tanımlansın.

i. $t(0) = 1$ *ve her* $n \in \omega$ *için*

$$t(s(n)) = f(t(n))$$

eşitliğini sağlayan bir t *fonksiyonu var.*

ii. $c(0) = 0$ *ve her* $n \in \omega$ *için*

$$c(s(n)) = f(c(n))$$

eşitliğini sağlayan bir c *fonksiyonu var.*

Kanıt: Recursion teoreminin uygulanmasıyla, istenilen hemen elde edilir. □

Yukarıda tanımlanan t ve c fonksiyonlarının birebir olduğu kolaylıkla gösterilir.

Tanım 6.5. Yukarıdaki teoremde tanımlanan c fonksiyonunun görüntü kümesi $c(\omega)$'nin her elemanına **çift sayı**, ve $t(\omega)$ kümesinin her elemanına **tek sayı** denir[10].

1,3,5 doğal sayıları tek olmasına karşın, 0,2,4 sayıları tek sayı değildir.

Teorem 6.7. *Her* $n \in \omega$ *için*

$$s(t(n)) = c(s(n)) \text{ ve } s(c(n)) = t(s(n))$$

olur.

Kanıt: $A = \{n \in \omega : s(t(n)) = c(s(n))\}$ kümesinin tümevarımsal olduğu gösterilecek. $0 \in A$ olduğu açık. $n \in A$ verilsin.

$$s(t(s(n))) = s(s(s(t(n)))) = s(s(c(s(n)))) = c(s(s(n)))$$

olduğundan, $s(n) \in A$ olur. Dolayısıyla, A tümevarımsal kümedir. İkinci kısım da benzer biçimde kanıtlanabilır. □

Teorem 6.8. *Aşağıdakiler gerçekleşir.*

[10]Tek ve çift sayıların tarihi Pisagorculara kadar gider. Bu dönemde Pisagorcular 1'in dışındaki tek sayıları erkek, çift sayıları dişi olarak görüyorlardı.

i. *$t(\omega)$ ve $c(\omega)$ kümeleri sayılabilir sonsuzdur.*

ii. $t(\omega) \cap c(\omega) = \emptyset$.

iii. $t(\omega) \cup c(\omega) = \omega$.

Kanıt: i. $c : \omega \to \omega$ birebir olduğundan $c(\omega)$, $|\omega| \leq |c(\omega)|$ olur. Teorem 5.2 kullanılarak $|c(\omega)| = |\omega|$ elde edilir. Benzer biçimde $|t(\omega)| = |\omega|$ olur.

ii. $A = \{n \in \omega : n \in t(\omega) \cap c(\omega)\}$ diyelim. A'nın boşkümeden farklı olduğunu varsayalım. $n = \min A$ diyelim.

$$n = t(a) = c(b)$$

olacak biçimde, a, $b \in \omega$ seçelim. $a, b \geq 2$ olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Dolayısıyla,

$$a = s(u) \text{ ve } b = s(v)$$

olacak biçimde u, $v \in \omega$ var. Buradan,

$$n = t(s(u)) = c(s(v))$$

ve dolayısıyla,

$$n = s(s(t(u))) = s(s(c(v)))$$

elde edilir. Buradan da $t(u) = c(v) \in A$ olur. $t(u) < n$ olmasından dolayı, bu çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $A = \emptyset$ olur.

iii. $A = t(\omega) \cup c(\omega)$ diyelim. $0 \in A$ olduğunu biliyoruz. $n \in A$ verilsin. Teorem 5.7 gereği n çift sayı ise $s(n)$ tek ve n tek ise $s(n)$ çift sayı olacağından $s(n) \in A$ olur. Tümevarımla istenilen gösterilmiş olur. □

6.5 Seçim Fonksiyonu

Hilbert'in 1900'de Dünya Matematik Kongresinde sorduğu ikinci soru olan

Her küme iyi sıralanabilir mi?

sorusu kulağa hoş gelmesine ve daha anlaşılır olmasına karşın,

Kendisi ve her elemanı boşkümeden farklı bir A kümesinin bileşimi $\cup A$'ya tanımlı, her $x \in a$ için $f(x) \in x$ olacak biçimde f fonksiyonu var mıdır?

sorusu için aynı şey söylenemez. Her ne kadar Hilbert'in sorusunun sorulduğu zaman küme kavramının oturduğu ZF sistemi henüz tanımlanmamış olsa da bu sorulara ZF'de yanıt aranır. İlerleyen zamanlarda yukarıdaki soruların yanıtlarının aynı olduğu kanıtlanacak. Yani, birinci sorunun yanıtının evet olması için gerek ve yeter koşulun ikinci sorunun yanıtının evet olması olduğu gösterilecek.

Bazı soruların yanıtı ne "doğrulanabilir" ne de "yanlışlanabilir." Örneğin,

sonsuz yıl yaşayabilen bir kişi sonsuz odalı bir otelin her odasında bir yıl kalabilir mi?

Bu soruya verilecek herhangi bir yanıtın doğruluğu kanıtlanamaz. Ancak, sonsuz yıl yaşayabilen kişinin yaşadığı her yıl otelin bir odasıyla eşlenebiliyor olsaydı verilecek yanıtın kanıtı verilebilirdi. Yani tek tek deneyerek yanıt verilemeyebilir. Bu da yanıtın belirli kural çerçevesinde verilmesinin gerekliliğini ortaya çıkıarıyor. Konuyu biraz daha irdeleyerek devam edelim.

Bir çift çorabın sağı solu olmaz. Buna karşın bir çift ayakkabı sağ ve sol olarak adlandırılan ayakkabılardan oluşur. Elimizde sonsuz sayıda çorap çifti bulunsun ve bu çift çorapların herhangi bir özelliği bilinmiyor olsun. Ayrıca, sonsuz sayıda ayakkabı çifti olsun. Şu soruları soralım:

i. Her bir çift çoraptan birer çorap seçerek bir çorap topluluğu oluşturulabilir mi?

ii. Her bir çift ayakkabıdan birer ayakkabı seçerek bir ayakkabı topluluğu oluşturulabilir mi?

Bu sorular matematiksel soru olmasa da, bunlar, oluşturulacak bir matematiksel sorunun yapısının anlaşılmasında kolaylık sağlayacak. Bu soruda geçen "seçebilmenin" karşılığı matematiksel anlamda bir "kuralın" olmasıdır. Kural olmazsa bu seçim hiçbir zaman bitmeyecek ve seçim hiçbir zaman tamamlanamayacaktır. Buradan, seçilemeyeceği anlamı da çıkmayacaktır. Ayakkabıların seçimi konusunda, görevli her çift ayakkabının sağ olanını seçerek bir kural oluşturabilir. Yani,

Her çiftin sağ ayakkabısı kenara ayrılsın

biçiminde bir komut verebilir. Ama aynı biçimde bir kural çoraplar için oluşturulamaz. Yani,

Her çiftin sağ çorapları kenara ayrılsın

komutu verilemez. Dahası,

çorap çiftlerinden şu özelliği sağlayan çoraplar kenara ayrılsın denilemez çünkü çorap çiftlerinin bilinen özelliği verilmemiş. Buna karşın, her çift çorabın birinin sağlam ve diğerinin yırtık olduğu biliniyor olsaydı,

her çift çoraptan yırtık olanlar kenara ayrılsın

denilerek bir kurala göre seçim yapılabilırdı.

Toparlayacak olursak, yukarıda bahsedilen anlam çerçevesince birinci sorunun yanıtı hayır, ikinci sorunun yanıtı evet olacaktır.

Yukarıdaki soru biraz daha matematikselleştirilebilir: X sonsuz bir küme ve her $x \in X$ için $f_x : \{0,1\} \to x$ birebir fonksiyon olsun. X'in her elemanından bir eleman,

bir kurala göre seçilebilir mi?

Bu sorunun yanıtı evettir. Gerçekten de her $x \in X$ elemanından $f_x(0)$ elemanını seçebiliriz. Böylece,

$$f : X \to \cup X,\ f(x) = f_x(0) \in x$$

özelliğinde bir f fonksiyonunun varlığı gösterilmiş olur. Bu özellik üzerinde seçim fonksiyonu şöyle tanımlanır.

Tanım 6.6 (Zermelo-1904)**.** X, elemanları boş olmayan bir küme olmak üzere X'ten $\cup X$ kümesine tanımlı ve her $x \in X$ için $f(x) \in x$ özelliğini sağlayan f fonksiyonuna X'in bir ***seçim fonksiyonu***[11] denir.

Bazı kümeler için seçim fonksiyonları aşağıda olduğu gibi kolaylıkla verilebilir. Aşağıda verilen örneklerde verilen bir A kümesi için $A^* = A \setminus \{\emptyset\}$ yazalacak.

Örnekler

6.1. Kendisi ve elemanları boşkümeden farklı sonlu her kümenin seçim fonksiyonu var.

6.2. X sayılabilir sonsuz küme ise $\wp(X)^*$ kümesinin seçim fonksiyonu var. Gerçekten, bu durumda $f : X \to \omega \setminus \{0\}$ birebir ve örten fonksiyonu seçilebilir ve

$$F : \wp(X)^* \to \bigcup \wp(X)^* = X,\ F(A) = f^{-1}(\min f(A))$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon $\wp(X)^*$'nin bir seçim fonksiyonu olur.

6.3. Yukarıda verilen örnek kullanılarak, $\wp(\omega)^*$, $\wp(\mathbb{Z})^*$, $\wp(\mathbb{Q}^+)^*$ ve $\wp(\mathbb{Q})^*$ kümelerinin seçim fonksiyonlarının olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

6.4. X her elemanı en az iki elemanlı bir küme olsun. Ayrıca, her $x \in X$ için, $f_x : \{0,1\} \to x$ birebir fonksiyon olmak üzere,

$$g : X \to \cup X,\ g(x) = f_x(0)$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon X'in bir seçim fonksiyonudur. Ayrıca,

$$h : X \to \cup X,\ h(x) = f_x(1)$$

[11]İngilizcesi choice function.

kuralıyla tanımlı fonksiyon da X'in bir seçim fonksiyonudur.

6.5. "Her elemanı iki elemanlı olan her kümenin seçim fonksiyonu olması gerekmez" ifadesi yukarıda verilen örnekle neden çelişmez?

6.6. Her $r \in \mathbb{R}$ için
$$[r] = r + \mathbb{Z}$$
olmak üzere,
$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[r] : r \in \mathbb{R}\}$$
bir kümedir. Ayrıca her $r \in \mathbb{R}$ için
$$r + \mathbb{Z} = f(r) + \mathbb{Z}$$
eşitliğini sağlayan $f(r) \in [0, 1)$ vardır ve tektir. Tekliğin vermiş olduğu avantaj kullanılarak,
$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}, [r] \to f(r)$$
fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$'nin seçim fonksiyonudur.

Bir kümenin seçim fonksiyonunu ararken, o kümenin elemanlarının özelliklerini iyi bilmek gerekir. Yukarıda $\wp(\mathbb{Q})^*$ ya da $\wp(\mathbb{Q}^+)^*$ kümelerinin seçim fonksiyonları var denilirken, doğruyu söylemek gerekirse, işin kolayına kaçıldı. Bu kümelerin seçim fonksiyonunun olduğunu göstermek için Rasyonel Sayılar Kümesinin nasıl inşa edildiğine bakmak ve elemanları daha dikkatli tanımak gerekir. Doğal Sayılar Kümesinde sıfır elemanı boşküme iken, rasyonel sayılar kümesinin sıfırı boşküme olmadığı gibi, sayılabilir sonsuzdur. Benzer biçimde, Gerçel Sayılar Kümesi $\mathbb{R}$'nin standart inşasına göre, seçim fonksiyonu f varsa (ki yok!) örneğin,
$$f(\sqrt{2}) \in \sqrt{2}$$
olması gerekir, ve dolayısıyla, $\mathbb{R}$'nin elemanı olan $\sqrt{2}$ kümesini iyi tanımak gerekir. Sayılar sistemlerini inşa ettikten sonra bu konuya tekrar devam edilebilir.

Elemanları ve kendisi boş olmayan her kümenin seçim fonksiyonunun varlığını kanıtladığını söyleyen, her kim olursa olsun, kanıtı yanlıştır!

Alıştırmalar

6.14. f, X kümesinin seçim fonksiyonu ve $A \subseteq X$ boş olmayan bir kümeyse $f|_A$, A kümesinin seçim fonksiyonu olduğunu gösterin.

6.15. X ve Y ayrık kümeler olmak üzere, f, X'in seçim fonksiyonu ve g, Y'nin seçim fonksiyonu ise,
$$h(a) = \begin{cases} f(a) & ; a \in X \\ g(a) & ; a \in Y \end{cases}$$
eşitliğiyle tanımlı fonksiyonun $X \cup Y$ kümesinin seçim fonksiyonu olduğunu gösterin.

6.16. $\equiv$, $\omega \times \omega$'da bir denklik bağıntısı olsun. Ayrıca, $Q = \omega \times \omega/\equiv$ kümesinin tam sıralı olduğunu varsayalım. $\wp(Q)^*$ kümesinin seçim fonksiyonu olduğunu gösterin. (Gerçekten, $x \subset Y$ verilsin.
$$A(x) = \{a + b : a, b \in \omega, (a, b) \in x\}$$

kümesi, ω'nın boşkümeden farklı altkümesidir. Dolayısıyla $n(x) = \min A(x)$ var.

$$B(n(x)) = \{(a, b) \in x : a + b = n(x)$$

kümesi, Q'nin boş olmayan sonlu altkümesidir. Q tam sıralı olduğundan, $\min B(n(x))$ x'in elemanıdır.

$$f : \wp(Q)^* \to Q,\ f(x) = \min B(n(x))$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon $\wp(Q)^*$'nin seçim fonksiyonudur.

7. Seçim Aksiyomu

Seçim aksiyomu insanı çıldırtabilir; panikleme!.

Zermelo'nun her kümenin iyi sıralanabilir olduğunu söyleyen kanıtında, ZF aksiyomları olarak adlandırılan aksiyomlar henüz tümüyle aksiyom olarak tanımlanmamış olsa da bu aksiyomların çok doğal gözükmeleri nedeniyle, kullanılmış olmalarına itirazı olan yoktu. Ancak, bu kanıtta bu aksiyomlar dışında, daha sonra seçim aksiyomu olarak adlandırılan bir aksiyom da kullanılıyordu. Bu aksiyom öyle "sinsi" bir aksiyom ki birçok kanıtta bu aksiyomun kullanıldığının anlaşılması bile özellikle yeni başlayan okurlar için oldukça güçtür. Zermelo'nın kanıtında bu aksiyomun kullanılmış olmasının farkedilmiş olması matematikçiler arasında bir kavga (neyse, tartışma diyelim) başlatmıştır. Kanıtlara kaşla göz arasında sızan, bir yönüyle melek ve bir yönüyle şeytan gibi olan bu aksiyomun dediği şudur: *Elemanları boş kümeden farklı her kümenin bir seçim fonksiyonu var.* Bu aksiyomun ya da değilinin ZF'ye aksiyom olarak eklenmesinin bir çelişki yaratmayacağının kanıtlanmasıyla, bu aksiyomunun kullanımı üzerinden oluşan gerginlik son bulmuş ve matematiğe yeni bir nefes aldırmıştır.

P. Bernays ve A. A. Fraenkel'e göre seçim aksiyomu matematikçiler arasında Öklid'in parelellik aksiyomundan sonraki en ilginç ve en çok tartışılan aksiyom olmuştur. Gregory H. Moore ise seçim aksiyomunu farkında olmadan araştırmalarında kullanan birçok matematikçinin, seçim aksiyomunun resmi olarak tanımlanmasından sonra, bu aksiyomun kullanılmasına karşı duruşlarının matematik tarihinde bir ironi olduğundan bahsetmiştir.

ZF aksiyomlarının toplam niteliği bir kümenin varlığını garantilemenin dışında, iki küme arasındaki eşitlik kavramını tanımlama ve verilen kümelerle yeni kümeler üretmeye yöneliktir. Örneğin, verilen iki kümeyi birleştirerek, "bileşimi" olarak da adlandırılan yeni bir küme tanımlama gibi. Bu yönüyle, ZF aksiyomları oldukça "aklı başında" ve "gerçeklikle" bağlarını koparmamış kavramlardır. Ancak, seçim aksiyomu, Cantor'un süreklilik hipotezi'ne çözüm bulma amaçlı olarak Hilbert tarafından sorulan, "her küme iyi sıralanabilir mi?" doğal-somut bir sorusuna yanıt ararken ortaya çıkan, "soyut" bir kavramdır. Burada geçen "soyut"luk, fiziksel kavramlarla hiçbir ilişkisinin olmamasına vurgu yapmaktır. Seçim aksiyomu seçim fonksiyonunun nasıl ya da ne kadar çok olduğunu değil, varlığı söyler. Bu fark seçim aksiyom'u ile ZF aksiyomları arasındaki nitelik farkıdır.

Birçok teoremin kanıtı seçim aksiyomu kullanılarak kolayca verilebilmekle birlikte, bu aksiyomun yanında, bu aksiyomun kullanılmadan verilmesi çok daha fazla itibar görür. Bu tür kanıtlar daha "ekonomik" olmasına karşın, bunun bedeli uzun vadeli ya da daha zor olabilir. Bunlarla ilgili bazı örnekler Altbölüm 6.4'te verilecek.

Elbette ZF aksiyomlarıyla seçim aksiyomunun yanyana gelmeleri sonucu ortaya çelişkilerin çıkmaması gerekir. Bu konuda bir sıkıntı olmadığı iki teoremle, kanıtsız olarak verilecek. Bu teoremlerin kanıtları bu ölçekli bir kitapta verilemez.

Sayılar sisteminin inşasında seçim aksiyomuna ihtiyaç yoktur. Buna karşın, sayı kümelerinin özelliklerini anlamada bu aksiyomuna her an gereksinim duyulabilir. O nedenle, seçim aksiyomu bu bölümde temel özellikleriyle çalışılacak. Bazı örneklerde kullanılacak bazı kavramlar okurlara oldukça yabancı olabilir. Örneğin, ZF'ye seçim aksiyomunun eklenmesiyle Lebesgue ölçülemeyen $\mathbb{R}$'nin Vitali kümesi olarak adlandırılan, en az bir altkümesinin var olması gibi. Okurların bu tür örneklerde yer alan kavramları konuyu takip edecek düzeyde bildikleri varsayılmıştır.

Seçim aksiyomuna denk ve temel olan Zorn Lemma ve iyi sıralanma teoremi kanıtlarıyla verilecek. Ayrıca, bu kavramların zaman zaman uygulamaları zaman zaman verilecek. Bu üç kavram birbirlerine denk olsalar da birbirlerinden oldukça ayrık algılanabilir. Bununla ilgili, [48], p.145'te Jerry Bona'ya ait bir şaka şöyle: "Seçim aksiyomu tümüyle doğru, İyi Sıralama Teoremi tümüyle yanlış. Zorn Lemma hakkında kim ne söyleyebilir?"

7.1 Seçim Aksiyomu

Boş olmayan sonlu bir küme kartezyen çarpımına denk değildir. Ancak bu durum sonsuz kümeler için doğru değil. Örneğin, ZF'de

$$|\omega \times \omega| = |\omega| \text{ ve } |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

olur. Diğer taraftan ZF'de, genel olarak, sonsuz bir kümenin kartezyen çarpımına denk olup ya da olmadığı söylenemez. Aşağıda ifadesi verilecek olan seçim aksiyomu, sonsuz her kümenin kartezyen çarpımına denk olduğunu söyleyen ifadeye denk bir kavramdır. Diğer bir denk kavram ise verilen iki kümenin en azından birinden diğerine tanımlı birebir fonksiyonun olmasıdır. Bu yönüyle seçim fonksiyonu'nun ne dediği denk olduğu kavramlar üzerinden daha somut olarak okunabilir.

Sonlu her kümenin seçim aksiyomunun olduğu tümevarımla gösterilebilir. Boş kümeyi içermeyen, boşkümeden farklı bir A kümesinin seçim fonksiyonlarının kümesini $secim(A)$ ile gösterelim. $X_1, X_2, ..., X_n$ kümelerinin herbiri boşkümeden farklıysa bu kümelerin kartezyen çarpımı $\prod_{i=1}^{n} X_i$ kümesi

$$A = \{X_i : i = 1, 2, ..., n\}$$

olmak üzere, $secim(A)$ kümesine denktir. Gerçekten, her $(x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ için,

$$f_{(x_1,...,x_n)} : A \to \cup A,\ f(X_i) = x_i$$

fonksiyonu A'nın bir seçim fonksiyonu olup,

$$F : \prod_{i=1}^{n} X_i \to secim(A),\ F((x_1, ..., x_n)) = f_{(x_1,...,x_n)}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon birebir ve örtendir. Dolayısıyla, sonlu tane küme için tanımlanan kartezyen çarpım, kümelerin denkliği üzerinden, herhangi bir küme için genellemenin yolunu açmış olur.

İnsanlık tarihi boşkümeyi içermeyen, boşkümeden farklı ve seçim fonksiyonu olmayan bir kümeye henüz rastlamadı. Bu nedenle aşağıdaki aksiyom delikanlı bir aksiyomdur:

Aksiyom 7.1 (Seçim Aksiyomu)**.** *Elemanları boşkümeden farklı, boş olmayan her kümenin en az bir seçim fonksiyonu vardır.*

İki küme arasındaki fonksiyonların topluluğu bir küme olduğundan, bir A kümesinin seçim fonksiyonlarının sınıfı bir küme olup, bu küme genellikle

$$\prod_{a \in A} a$$

ile gösterilir. Bir A kümesi, her $a \in A$ için, $X_a = a$ yazılmak üzere, yaygın olarak

$$A = \{X_a : a \in A\}$$

ile gösterilebilir.

Bir I kümesinden bir sınıfa tanımlı f fonksiyonunun görüntüsü, her $i \in I$ için $f(i) = X_i$ yazılmak üzere, $\{X_i : i \in I\}$ ile gösterilebilir. Böylece, her küme, bir kümeden bir sınıfa tanımlı bir fonksiyonun görüntüsü olarak görülebilir. Bu, gösterimler altında, A kümesinin seçim fonksiyonlarının kümesi

$$\prod_{i \in A} X_i$$

ile gösterilebilir. Daha açık yazacak olursak,

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f \in Fonk(I, \bigcup_{i \in I} X_i) : \text{ her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i\}$$

olur. Bu kümeye, $X = \{X_i : i \in I\}$ kümesinin **kartezyen çarpımı** denir[1].

Seçim aksiyomu yaygın olarak şöyle de ifade edilir: I boş olmayan bir küme olmak üzere, her $i \in I$ için, X_i kümesi boş kümeden farklı olsun.

$$\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$$

olur.

A elemanları boşkümeden farklı boş olmayan bir küme olsun. Her $x \in A$ için $|C \cap x| = 1$ olacak biçimdeki $C \subseteq A$ kümesine A'nın bir **seçim kümesi** denir. Seçim fonksiyonunun görüntü kümesi ve seçim kümesi arasındaki temel bir ilişki şöyledir:

Teorem 7.1 (Zermelo-1908)**.** *Aşağıdakiler denktir:*

i. *Seçim aksiyomu.*

ii. *[Russell-1906] Elemanları ve kendisi boşkümeden farklı ve farklı elemanları ayrık olan her kümenin seçim kümesi var.*

iii. *Elemanları ve kendisi boşkümeden farklı her kümenin seçim kümesi var.*

Kanıt: $i \Rightarrow ii$: X, boş olmayan bir küme, her elemanı boşkümeden farklı ve elemanları ikişer ikişer ayrık olsun. Varsayım gereği, X'in seçim fonksiyonu $f : X \to \cup X$ vardır. f'nin görüntü kümesi $C = f(X)$, X'in bir seçim kümesidir.
$iii \Rightarrow i$: X, kendisi ve elemanları boşkümeden farklı bir küme olsun. Bu durumda,

$$Y = \{x \times \{x\} : x \in X\},$$

elemanları ve kendisi boşkümeden farklı bir küme olur. Varsayım gereği, Y'nin bir seçim C kümesi var. $x \in X$ verilsin.

$$|C \cap (x \times \{x\})| = 1$$

olduğundan, $(a_x, x) \in C \cap (x \times \{x\})$ olacak biçimde tek bir tane $a_x \in x$ elemanı var.

$$f : X \to \cup X,\ f(x) = a_x$$

kuralıyla tanımlı fonksiyonun görüntü kümesi X'in seçim kümesidir.
$i \Rightarrow iii$: Yukarıda kullanılan fikrin uygulanmasıyla, istenilen elde edilir.

[1] 1902'de Whitehead, $X = \{X_i : i \in I\}$ kümesinin kartezyen çarpımını $\prod_{i\in I} X_i = \{A \subseteq \cup_i X_i :$ her $i \in I$ için $X_i \cap A$ tek elemanlı $\}$ olarak tanımlamıştır, ama günümüzde bu tanımlama kullanılmamaktadır.

Kanıt tamamlanır[2]. □

Giriş kısmında da belirtildiği gibi, seçim aksiyomunun ZF'ye eklenmesiyle elde edilen aksiyomlar topluluğu çelişkisiz olup, bir model oluştururlar. Aynı durum seçim aksiyomunun değilinin eklenmesi durumu için de geçerlidir. ZF'ye seçim aksiyomunun eklenmesiyle elde edilen aksiyomlar topluluğu ZFC ya da $ZF+C$ ile gösterilir. ZF'ye seçim aksiyomunun değilinin eklenmesiyle elde edilen aksiyomlar topluluğu $ZF\neg C$ ile gösterilir.

Teorem 7.2. *(Gödel-1938) ZF çelişkisizse ZFC çelişkisizdir.*

Teorem 7.3. *(Cohen-1963) ZF çelişkisizse $ZF\neg C$ çelişkisizdir.*

Kurt Gödel esas olarak seçim aksiyomunun değilinin ZF'de bir teorem olmadığını göstermiştir. Cohen ise seçim aksiyomunun ZF'de bir teorem olmadığını göstermiştir. Bu teoremlerin kanıtlanması kolay olmadığı gibi kitabın da amacı dışındadır. Diğer taraftan, bu teoremlerin sonucu olarak, yukarıda verilen teorem elde edilir. Yani, ZF çelişkisizse ZFC ve $ZF\neg C$ ifadelerinin çelişkisiz olduğu elde edilir. Gerçekten de bir an için ZFC'nin çelişkili olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$ZFC \to p \text{ ve } ZFC \to \neg p$$

formüllerini hepdoğru yapacak bir p formülü vardır. ZF hepdoğru varsayımı altında değerlendirmeler üzerinden gerekli işlemler yapıldığında, seçim aksiyomu hepdoğru olur. Buradan da $ZF \to C$ hepdoğru ve dolayısıyla C, ZF'de teorem olur ki bu çelişkidir. Bu, ZF çelişkisizse ZFC'nin çelişkisiz olduğunu kanıtlar. Benzer biçimde, Cohen'in teoremi kullanılarak, $ZF\neg C$'nin çelişkisiz olduğu gösterilir.

Alıştırmalar

7.1. Bir kümenin seçim fonksiyonunun tek bir tane olması için gerek ve yeter koşulun kümenin her elemanının tek elemanlı olması gerektiğini gösterin.

7.2. Bir elemanlı bir kümenin sonsuz seçim fonksiyonunun olabileceğini gösterin.

7.3. ZF'de birçok kümenin seçim fonksiyonlarının olduğunu çıplak gözle görebiliyoruz. "En az bir kümenin seçim fonksiyonunun olmadığını kanıtladım" diyen birinin kanıtının yanlış olacağını gösterin.

7.4. Denk iki kümeden birinin seçim fonksiyonunun olmasının diğerinin seçim fonksiyonunun olmasını gerektirmeyeceğini gösterin.

7.5. Boş olmayan her kümeye denk ve seçim fonksiyonu olan bir kümenin olduğunu gösterin.

[2]Kanıtın oldukça basit olmasına karşın, dönemin otorite matematikçilerinden olan Russel, makalesinde (ii) aksiyomu seçim aksiyomunun özel hali olmasına karşın bunların denk olup olmadığını bilmediğini belirtmiştir. Aynı durumu Hardy tarafından da [25] makalesinde ifade edilmiştir. Ama görüldüğü gibi, kanıt meğerse çok kolaymış!

7.1.1 Peano: Seçim Problemini İlk Hisseden

[37]'a (66. sayfa) göre, sonsuz tane seçim yapılamayacağını düşünerek, bu biçimde bir seçim yapmayı reddeden Peano, seçim aksiyomunun farkına varan ilk matematikçidir. 1986 yılında, Peano [40] makalesinde şu teoremi kanıtlıyor:

Teorem. *$\mathbb{R}^2$'de bir dikdörtgen ve f, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon olsun. Her $(x, y) \in R$ için, bu noktanın bir U komşuluğunda tanımlı ve türevlenebilir öyle bir h fonksiyonu vardır ki $f(x) = y$ ve her $u \in U$ için, $h'(u) = f(u, h(u))$ eşitlikleri geçerlidir.*

Peano bu teoremi kanıtlarken, her $0 < i < 2^n$ eşitsizliğini sağlayan

$$A(n, i) \subseteq \mathbb{R}$$

kümelerinden birer eleman seçerek bir küme elde edilmesinin gerektiği ortaya çıkıyor. Bu seçimi gelişigüzel yapmanın rahatsız edici olduğunu sezinleyerek, seçimi bir kurala göre yapmanın gerekliliğini düşünüyor ve bunu başarıyor: Tanımladığı $A(n, i)$ kümelerinin her biri kapalı ve üstten sınırlı olduğundan, bu kümelerden seçeceği elemanları

$$x_{n,i} = \max A(n, i)$$

kuralıyla seçerek,

$$\{A(n, i) : 0 < i < 2^n\} \to \bigcup_{n,i} A(n, i),\ A(n, i) \to x_{n,i}$$

fonksiyonunu tanımlıyor.

Her ne kadar Peano yukarıdaki teoremin kanıtında seçimi bir kurala göre yaparak kanıtı tamamlamış olsa da başka kanıtlamak istediği teoremler için herşey yolunda gitmiyor: [41]'da çoklu seçimden bir tane seçim yapılamayacağının farkına vararak, bu yönlü bir seçim yapmayı reddediyor. Yani, günümüz terminolojisiyle seçim aksiyomu'nu reddediyor.

Alıştırmalar

7.6. ZFC'de X maksimal elemanı olmayan kısmi sıralı bir küme ise her $x \in X$ için $x < f(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir $f : X \to X$ fonksiyonunun olduğunu gösterin.

7.7. ZFC'de ölçüm teorisinde aranan temel örneklerden biri ölçülemeyen kümenin varlığı üzerinedir. Böyle bir küme seçim Aksiyomu'nun uygulanmasıyla verilir. Fırsatı değerlendirip, örneği verelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\}$$

olarak tanımlansın. Aşağıdakileri gösterin:

i. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $[a] = [b]$ ya da $[a] \cap [b] = \emptyset$.

ii. Her $a \in \mathbb{R}$ için $[a]$, $\mathbb{R}$'de yoğundur.

iii. Her $a \in \mathbb{R}$ için $|([a] \cap [0, 1]) \cap V| = 1$ olacak biçimde $V \subset [0, 1]$ var. V'ye **Vitali küme** denir.

iv. Her $A \subset \mathbb{R}$ için,

$$\lambda^*(E) = \inf\{\sum_n (b_n - a_n) : E \subset \cup_n (a_n, b_n)\}$$

olmak üzere, her $A \subset \mathbb{E}$ için

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c)$$

eşitliğini sağlayan $E \subset \mathbb{R}$ kümesine **Lebesque ölçülebilir** denir. Vitali kümesinin Lebesque ölçülebilir küme olmadığını gösterin.

7.2 Zorn Lemma

ZF'de seçim aksiyomuna denk olan kavramlardan biri Zorn Lemma olarak bilinir. Matematiğin birçok alanı seçim aksiyomu yoksa çöker. Bu alanlarda birçok temel teoremin kanıtında, seçim aksiyomu değil, doğrudan Zorn Lemma kullanılır. Örneğin, Hahn-Banach Teoremi yoksa fonksiyonel analiz yoktur; bu teoremin kanıtı Zorn Lemma kullanılarak verilir. Her ne kadar Hahn-Banach Teoremi Zorn Lemma'ya denk olmasa da Fonksiyonel Analiz'in önemli teoremlerinden olan Krein-Milman Teoremi Zorn Lemma'ya denktir. Topolojide kompaktlık kavramının en önemli teoremi olan Tychonoff Teoremi Zorn Lemma kullanılarak verilir ve üstelik bunlar birbirlerine denktir. Hausdorff uzayları için Tychonoff Teoremi, sıfırdan farklı Boolean halkalarında bir maksimal idealin olmasına denktir. Vektör uzayların tabanının olması da Zorn Lemma'ya denktir. Cebirde ise sıfırdan farklı değişmeli her halkanın maksimal idealinin olmasına denktir. Bu paragrafta geçen kavramlara okur yabancı olabilir; bunlardan, Zorn lemma kavramının önemine vurgu yapmak için bahsedilmiştir. Bu açıdan, hem genel kültür hem de önemi açısından, bu noktaya kadar gelip Zorn Lemma'dan bahsetmemek olmaz.

Zorn Lemma, kısmi sıralı bir kümenin maksimal elemanının varlığını, zincirlerin oldukça makul bir ortak özelliği üzerinden belirleyen bir kavram olup, seçim aksiyomu ile birebir çakışır. X, maksimal elemanı olmayan kısmi sıralı küme olsun. $x_1 \in X$ verilsin. x_1 maksimal eleman olmadığından, $x_1 < x_2$ olacak biçimde $x_2 \in X$ vardır. Bu şekilde devam ederek,

$$x_1 < x_2 < ...$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\{x_n : n \in \omega\}$ zinciri elde edilir. Bu zincir için iki durum sözkonusudur: Birinci durumda üst sınırı yoktur ya da vardır; ikinci durumda, bu zincirin x_ω gibi bir üst sınırı vardır. x_ω bir maksimal eleman olmayacağından,

$$x_1 < x_2 < ...x_\omega < x_{\omega+1} < x_{\omega+2} < ...$$

özelliğinde

$$\{x_n : n \in \omega\} \cup \{x_{\omega+n} : n \in \omega\}$$

zinciri elde edilir. Bu zincirin de ya üst sınırı yoktur ya da vardır. Benzer biçimde, ikinci durum için bir başka zincir elde edilir. Bu şekilde devam ederek, durum $|X| < |C|$ olacak biçimde bir C zincirinin varlığına taşınabilir ki bu olamaz. Bu durum en az bir zincirin üst sınırının olmaması gerektiğinin işaretini verir. Bu, incelenmeye değer olmalı. Bunu şöyle ifade edebiliriz:

Maksimal elemanı olmayan kısmi sıralı bir kümenin üst sınırı olmayan bir zinciri vardır.

Zorn Lemma tamı tamına bu olup, çerçevesi de çok temizdir!

Teorem 7.4. *Aşağıdakiler denktir:*

i. *Seçim aksiyomu.*

ii. *[Zorn Lemma] Her zincirinin bir üst sınırı olan kısmi sıralı kümenin maksimal elemanı vardır*[3].

Kanıt: *ii* $\Longrightarrow$ *i*. X, elemanları ve kendisi boşkümeden farklı bir küme olsun.

$$\mathcal{A} = \{(A, f) : A \subseteq X \text{ ve} f, A\text{'nın bir seçim fonksiyonu}\}$$

kümesi

$$(A, f) \leq (B, g) \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ ve } g|_A = f$$

sıralamasına göre, kısmi sıralı bir kümedir. Ayrıca, $\mathcal{A}$'nın her zincirinin bir üst sınırı olduğu kolaylıkla gösterilir. Varsayım gereği, $\mathcal{A}$'nın bir maksimal elemanı var. Bunu (A_∞, f_∞) ile gösterelim. $A_\infty = X$ ise f, X'in bir seçim fonksiyonu olur. Değilse $x \in X \setminus A_\infty$ seçelim. $x \neq \emptyset$ olduğundan, $t \in x$ seçebiliriz.

$$h(a) = \begin{cases} f_\infty(a) & ; a \in A_\infty \\ t & ; x = a \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlı

$$h : A_\infty \cup \{x\} \to \cup A_\infty \cup \{x\}$$

fonksiyonu, $A_\infty \cup \{x\}$ kümesinin seçim fonksiyonu olup,

$$(A_\infty, f_\infty) < (A_\infty \cup \{x\}, h)$$

[3]Zorn Lemma ile ilgili tartışmalarda ilk göndeme [61]'e yapılır ve bu lemmanın bu makalede verildiği ve kanıtlandığı algısı vardır. Bu lemmanın aslında Zorn'a ait olmadığı konusu [13]'de detaylarıyla veriliyor. Bu lemma Kuratowski-Zorn Lemma olarak da bilinir. Kuratowski bu lemmanın çok benzer versiyonunu 1922'de kanıtladı. "Zorn Lemma" isimlendirilmesi ilk olarak John Tukey'nin 1940 yılında yayınlanan *Convergence and Uniformity in Topology* kitabında yer aldı.

eşitsizliği sağlanır ve bu, (A_∞, f_∞)'nın maksimal olmasıyla çelişir. Kanıtın bu yönü tamamlanır.
$i \implies ii$. ([33]) X kısmi sıralı küme olsun. X'de her zincirin bir üst sınırı olmasına karşın, X'in bir maksimal elemanının olmadığını varsayalım. X'in bütün zincirlerinin kümesi $\mathcal{C}$ ile gösterilsin. Varsayım gereği, her $C \in \mathcal{C}$'nin bir üst sınırı $u(C) \in X$ var. Yani, her $c \in C$ için $c \leq u(C)$ olacak biçimde $u(C) \in X$ var. Ayrıca, C'in maksimal elemanı olmadığı varsayımı gereği, $u(C)$ maksimal eleman olamaz, dolayısıyla

$$u(C) < k(C)$$

olacak biçimde $k(C) \in X$ var. Seçim aksiyom'u varsayımı gereği,

$$k : \mathcal{C} \to X,\, C \to k(C) \in C$$

seçim fonksiyonu var. Her $C \in \mathcal{C}$ ve $x \in C$ için,

$$P(C, x) = \{y \in C : y < x\}$$

yazalım. Ayrıca,

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{C} : U \text{ iyi sıralı ve her } x \in U \text{ için } k(P(U, x)) = x\}$$

olarak tanımlansın. $A, B \in \mathcal{U}$ ve $A \setminus B \neq \emptyset$ ise, $x = \min A \setminus B$ olmak üzere, $P(A, x) \subseteq B$ olduğu açık.

$$B = P(A, x)$$

olduğunu göstereceğiz. Olmadığını varsayalım.

$$y = \min B \setminus P(A, x)$$

diyelim.

$$\{v \in A : \text{ bazı } u \in P(B, y) \text{ için } v < u\} \subseteq P(B, y)$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. $A \subseteq P(B, y)$ kümesi boş küme olamaz. Gerçekten boşküme olursa, $A \subseteq P(B, y)$ ve dolayısıyla, $A \subseteq B$ olur. Bu, $A \setminus B \neq \emptyset$ olmasıyla çelişir. Buradan da $A \setminus P(B, y) \neq \emptyset$ elde edilir.

$$z = \min A \setminus P(B, y)$$

diyelim. Buradan

$$P(A, z) = p(B, y)$$

elde edilir. Ayrıca $z \leq x$ olur.

$$z = k(P(A, z)) = k(P(B, y)) = y$$

ve $y \in B$ olmasından $z = x$ olamaz. Dolayısıyla, $z < x$ elde edilir. Buradan da

$$y = z \in P(A, x)$$

olur ki bu y'nin seçimiyle çelişir. Sonuç olarak,

$$P(A, x) = B$$

elde edilir. Yukarıda verilen özellik kullanılarak,

$$x \in A \in \mathcal{U},\ y \in X \text{ ve } y < x$$

ise y, $\mathcal{U}$'nın hiçbir elemanının elemanı olamaz. Buradan da $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{U}$ olduğu elde edilir. $U = \bigcup \mathcal{U}$ diyelim. $U \bigcup \{k(U)\} \in \mathcal{U}$ olacağından, $k(U) \in U$ elde edilir. Buradan da $k(U) < k(U)$ çelişkisi elde edilir. Bu çelişkiye neden olan varsayım X'in maksimal elemanının olmadığı varsayımıdır. Kanıt tamamlanır. □

Seçim aksiyomundan Zorn Lemmanın elde edilmesinin, kısa olarak nitelendirilen başka kanıtları da vardır. Bunlardan biri de [59]'da bulunabilir.

Alıştırmalar

7.8. Kısmi sıralı bir kümede kendisinden başka bir zincir ile kapsanmayan zincire **maksimal zincir** denir. Aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin:

i. Zorn Lemma.

ii. [Hausdorff Maksimal Prensibi, Hausdorff-1914] Kısmi sıralı her kümenin bir maksimal zinciri var.

iii. Kısmi sıralı bir kümede her zincir bir maksimal zincir tarafından kapsanır.

7.9. Zorn Lemma'nın bir uygulaması: $\mathbb{R}$'nin boş olmayan $B \subset \mathbb{R}$ altkümesi sıfırı içermiyor ve $q_i \in \mathbb{Q}$ ve $b_i \in B$ olmak üzere,

$$q_1 b_1 + q_2 + b_2 + ... + q_n b_n = 0 \Rightarrow q_1 = q_2 = ... = q_n = 0$$

özelliğini sağlıyorsa B'ye **doğrusal bağımsız** denir. Aşağıdakilerin doğruluğunu ZFC sisteminde gösterin:

i. En az bir doğrusal bağımsız küme var.

ii. $\mathcal{X}$, kapsama sıralamasına göre, elemanları doğrusal bağımsız kümeler olan kısmi sıralı kümeyi göstersin. $\mathcal{X}$'in bir maksimal elemanı $B \subset \mathbb{R}$ var.

iii. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x = q_1 b_1 + ... + q_n b_n$ olacak biçimde, $q_i \in \mathbb{Q}$ ve $b_i \in B$'ler var ve bu yazılım tektir.

iv. Genel olarak,

$$\bigoplus_{b \in B} \mathbb{Q} = \{f \in \mathbb{Q}^B : \{x \in B : f(x) \neq 0\} \text{ kümesi sonlu } \}$$

gösterimi kullanılır.

$$F : \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ F(f) = \sum_{b \in B} f(b) b$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon birebir ve örtendir.

v. Her x, $y \in \mathbb{R}$ için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan ve sürekli olmayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var.

7.10. $X = \{A \subset \mathbb{R} : A$ sayılabilir$\}$ kümesini kapsama sıralamasına göre kısmi sıralı küme olarak alalım. X'te sayılabilir her zincirin bir üst sınırı olmasına karşın, X'in maksimal elemanının olmadığını gösterin.

7.3 İyi Sıralanabilme Teoremi

Hilbert'in birinci sorusu neden,

her küme tam sıralanabilir mi?

değilde

her küme iyi sıralanabilir mi?

olmuştur? Bunun yanıtı, Hilbert'in sorusu gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ temelliydi. Ayrıca $\mathbb{R}$ zaten tam sıralı olduğu gibi, sorunun amacı Cantor'un süreklilik Hipotezi'ni çözme amaçlıydı. Hilbert sormadıysa da biz soralım: Her küme tam sıralanabilir mi? Bu sorunun yanıtı için akla gelecek ilk yöntem herhalde şu olurdu: X boş olmayan bir küme olsun. X, $\mathbb{R}$'nin bir altkümesine denkse $\mathbb{R}$'nin tam sıralı olması kullanılarak, yanıt kolayca verilir. X sayılamaz sonsuz bir küme olsun. $x_0 \in X$ seçelim. Sonra, $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$ seçip,

$$x_0 < x_1$$

sıralamasını yapalım. $x_0, ..., x_n \in X$ seçilmiş ve

$$x_0 < x_1 < ... < x_n$$

sıralaması yapılmış ise $x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, ..., x_n\}$ seçerek, yukarıdaki sıralamayı

$$x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1}$$

sıralamasına genişletelim. Sonsuz seçme ve dizme gücümüzün olduğunu zannederek, bu seçim işini ilerletelim ve

$$x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} < ...$$

sıralamasını yapalım. Dikkat edilirse, X'in sayılabilir sonusuz bir altkümesi $\{x_n : n \in \omega\}$, hem seçildi, hem de sıralandı. Ancak, bu biçimde seçilen küme sayılabilir ve X sonsuz olduğundan, X'e ulaşılamadı. Bu durum başarıyla sonuçlanmamış olsa da kullanılan yöntem akıllara yeni bir fikir getirebilir: Yukarıdaki seçimde yapılan $x_n \in X$ yerine $X_n \subseteq X$ olacak biçimde sayılabilir sonsuz X_n kümesi alınsın ve her $n \neq m$ için X_n ve X_m kümelerinin ayrık olduğunu varsayalım. (Bir anlamda, sonlu $\{x_n\}$ kümesi yerine sayılabilir sonsuz X_n kümesi alınıyor.) Her n için X_n üzerine tam sıralama $<_n$ koyabiliriz. Sonra, bu sıralamaları

$$A = \bigcup_n X_n$$

kümesi üzerine, $n < m$, $x \in X_n$, $y \in X_m$ oluğunda $x < y$ olarak genişletelim. Bu sıralamaya göre, A tam sıralı bir küme. Ama bu noktada bir sorun ortaya çıkıyor; $X = A$ olup olmadığı bilinmemekte. Bu yaklaşımda ortaya çıkan yetersizliklerin benzeri, yukarıdaki seçimde X_n'leri sayılabilir değil de $\mathbb{R}$'ye denk ayrık kümeler alınmış olsa da devam edecektir. Peki, X_i'ler ayrık tam sıralı kümeler olmak üzere,

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i$$

olsa, bir çözüme ulaşılabilir mi? Bu noktada indeks I kümesinin tam sıralanma problemi devreye girecektir. Yani, problem "tavuk-yumurta problemi" sarmalına dönüşecek gibi.

Julies König, 1904'te Gerçel Sayılar Kümesi $\mathbb{R}$'yi iyi sıralı yapacak bir sıralama konulamayacağını kanıtladığını düşünerek, kanıtını matematikçilere sundu. Ancak bu doğru olamazdı. Bugün ZF'de, $\mathbb{R}$'nin iyi sıralanamayacağının kanıtlanamayacağı biliniyor. İyi sıralanabilir olduğu da kanıtlanamaz.

Her ne kadar yukarıda yapılan denemeler sonuç vermeyecek olsa da Zorn Lemma kullanılarak, kümenin iyi sıralı bir altkümesinden başlayarak bütün kümeye ulaşılabilir.

Teorem 7.5 (Zermelo-1904). *Aşağıdakiler denktir:*

i. *Seçim aksiyomu.*

ii. *Her küme iyi sıralanabilir.*

Kanıt: $i \Longrightarrow ii$: X boş olmayan bir küme olsun.

$$\mathcal{X} = \{(A, \leq_A) : A \subseteq X, (A, \leq_A) \text{ iyi sıralı}\}$$

kümesi tanımlansın. $(A, \leq_A), (B, \leq_B) \in \mathcal{X}$ için,

i. $A \subseteq B$,

ii. $x, y \in A$ ise, $x \leq_A y \Longleftrightarrow x \leq_B y$

iii. $a \in A$, $b \in B$ ve $b \leq_B a$ ise $b \in A$

koşulları sağlanıyorsa

$$(A, \leq_A) \leq_{\mathcal{X}} (B, \leq_B)$$

yazalım. $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$'in kısmi sıralı küme olduğunun gösterilmesini okura bırakalım. Zorn Lemma kullanarak, $\mathcal{X}$'in maksimal elemanının olduğunu göstermek için gereğini yapalım. $((A_i, \leq_{A_i}))_{i\in I}$, $\mathcal{X}$'te bir zincir olsun. $x, y \in A_i \cap A_j$ olduğunda,

$$x \leq_{A_i} y \iff x \leq_{A_j} y$$

olduğu dikkate alınarak, $A = \bigcup_i A_i$ kümesi üzerinde

$$x, y \in A,\ x \leq_A y \iff x \leq_{A_i} y \text{ olacak biçimde, } i \in I \text{ var}$$

olarak tanımlanan $\leq_A$ sıralamasına göre, (okur bu tanımlanın i'lerin seçiminden bağımsız olduğunun farkında olmalı) $(A, \leq_A)$'nın kısmi sıralı küme olduğu kolaylıkla gösterilir. Üstelik iyi sıralıdır. Gerçekten, $B \subseteq A$ boş olmayan altküme verilsin. En az bir $i \in I$ için $B \cap A_i$ boşkümeden farklıdır. A_i iyi sıralı olduğundan,

$$b = \min B \cap A_i$$

var. $x \in B$ verilsin. $b \leq_A x$ olmadığını varsayalım. $b, x \in A_j$ olacak biçimde $j \in I$ seçelim. A'daki sıralamanın tanımı gereği, $b \leq_{A_j} x$ olamaz. A_j tam sıralı olduğundan $x <_{A_j} b$ olur. Buradan, $A_j \not\subseteq A_i$ sonucuna varılır. O halde, $A_i \subseteq A_j$ olur. $b \in A_i$ olmasının yanında $\leq_A$'yı tanımlayan üçüncü özellik gereği $x \in A_i$ olmak zorundadır. Bu, b'nin seçimiyle çelişir. Sonuç olarak,

$$b = \min B$$

olduğu gösterilmiş olur. $x, y \in A$ için, $B = \{x, y\}$ kümesinin minumumu olduğundan $x \leq_A y$ ya da $y \leq_A x$ olur. Yani A, tam sıralıdır. $(A, \leq_A) \in \mathcal{X}$ olur. Üstelik bu, $(A_i, \leq_{A_i})_{i \in I}$ zincirinin üst zinciridir.

Zorn Lemma'yı kullanarak $\mathcal{X}$'in bir maksimal elemanı $(Y, \leq_Y)$ elde edilir. $Y = X$ ise kanıt tamamlanır. Değilse, $z \in X \setminus Y$ seçerek ve $Z = Y \cup \{z\}$ diyerek, $\leq_Y$ sıralaması her $y \in Y$ için $y \leq_Z z$ olacak biçimde, Z kümesine genişletilir.

$$(Z, \leq_Z) \in \mathcal{X} \text{ ve } (Y, \leq_Y) <_Z (Z, \leq_Z)$$

olur. Bu, $(Y, \leq_Y)$'nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde $Y = X$. Kanıtın bir yönü tamamlanır.

$ii \Longrightarrow i$: X, kendisi ve elemanları boşkümeden farklı bir küme olsun.

$$A = \bigcup X$$

diyelim. Her $x \in X$ için $x \subset A$ olur. Varsayım gereği, A kümesini iyi sıralı küme olarak görebiliriz. Her $x \in X$, A'nın boş olmayan bir altkümesi olduğundan, x'in minumumu $\min x$ var.

$$f : X \to A,\ f(x) = \min x$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon, X kümesinin seçim fonksiyonudur. Kanıtın bu yönü de tamamlanmış olur.

Sonuç olarak, kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

7.11. İyi sıralanabilir bir kümeye denk olan her kümenin iyi sıralanabilir olduğunu gösterin.

7.12. İyi sıralı bir kümenin her altkümesinin iyi sıralı olduğunu gösterin.

7.13. İyi sıralı bir kümede kesin azalan bir dizinin olmadığını gösterin.

7.14. Kesin azalan dizi içermeyen tam sıralı kümenin iyi sıralı olması gerekmediğini gösterin.

7.15. ZFC'de $\mathbb{R}$'yi iyi sıralama yapan en az bir sıralama var. O sıralama açık bir biçimde yazılabilir mi?

7.16. (Tümevarım İlkesi) X iyi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in X$ için, $\{a \in X : a < x\} \subseteq A$ ise $A = X$ olduğunu kanıtlayın. Bu, ω için verilen Tümevarım İkesinin genel halidir.

7.3.1 İyi Sıralı Kümelerin Karşılaştırılması

Küme teoride, eşitlik kavramına en "yakın" olan şeyin denklik kavramı olduğu söylenebilir. Bunun altküme versiyonu, altkümeye denk olmadır. Bu yaklaşım sonucu şu sorulabilir: Verilen X ve Y kümeleri için $|X| = |Y|$ olması gerekmediğini biliyoruz ama

$$|X| \leq |Y| \text{ ya da } |Y| \leq |X|$$

olur mu? Bu sorunun yanıtı elbette Doğal Sayılar Kümesinin altkümeleri için olumlu. Bu bölümde, bu sorunun yanıtının iyi sıralı kümeler için de olumlu olduğu gösterilecek. Hem de fazlasıyla. Ayrıca, "verilen herhangi bir iyi sıralı X kümesi, $\wp(X)$'in kapsama sıralamasına göre iyi sıralanmış altkümesiyle temsil edilebilir mi?" sorusunun yanıtının evet olduğu da gösterilecek.

X iyi sıralı bir küme ve x, $y \in X$ verilsin. $x = y$ olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\{a : a{\leq}x\} = \{a : a{\leq}y\}$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla,

$$X,\ \{\{a : a{\leq}x\} : x \in X\}$$

kümeleri eşleştirilebilir. Dikkat edilirse bu eşlemede X'in altkümeleri olan

$$\{a : a \leq x\} \text{ ve } \{a : a \leq y\}$$

kümeleri eşit olmasalar da en az biri diğerinin altkümesi olabiliyor. Eğer X'in üst sınırı yoksa

$$X \text{ ve } \{\{a : a < x\} : x \in X\}$$

kümeleri de birebir eşleştirilebilir. İyi sıralı bir kümenin her iki elemanının kapsama sıralamasına göre karşılaştırılabilir elemanlar olan kümeyle eşleştirilebiliyor olması önemli bir durum çünkü iyi sıralı küme üzerindeki sıralama, özellikleri iyi bilinen kapsama sıralamasına indirgeniyor. Söylenenler sembollerle ifade edilecek olursa:

$$f : X \to \{\{a : a \le x\} : x \in X\},\ f(x) = \{a : a \le x\}$$

fonksiyonu birebir örten ve $f(x) < f(y)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\{a : a < x\} \subset \{a : a < y\}$$

olmasıdır. Benzer biçimde, X'in bir üst sınırı yoksa

$$g : X \to \{\{a : a < x\} : x \in X\},\ g(x) = \{a : a < x\}$$

fonksiyonu birebir, örten ve $g(x) < g(y)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\{a : a < x\} \subset \{a : a < y\}$$

olmasıdır.

Yukarıdaki açıklamalar şu teoremi kanıtlar.

Teorem 7.6. *X iyi sıralı küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{I} \subseteq \wp(X)$ kümesi var.*

i. $(\mathcal{I}, \subseteq)$ *iyi sıralı.*

ii. *Birebir, örten ve*

$$x < y \Leftrightarrow f(x) \subset f(y)$$

koşulunu sağlayan $f : X \to \mathcal{I}$ fonksiyonu var.

Ortaya konan bu yaklaşımda X'in "anahtar" altkümelerinin

$$\{a : a < x\} \text{ ve } \{a : a \le x\}$$

biçimindeki kümeler olduğu düşünülebilir. Bunları I ile gösterecek olursak, bu kümelerin en belirgin özelliği: $a \in I$, $b \in X$ ve $b \le a$ olduğunda, $b \in I$ olmasıdır. Bu gözlem üzerinden bir tanımlama yapalım.

Tanım 7.1. X iyi sıralı bir küme olsun. $I \subseteq X$ kümesi,

$$y \in I,\ x \in X,\ x \le y \Longrightarrow y \in I$$

koşulunu sağlıyorsa, I'ya X'in bir **başlangıç dilimi** denir.

Başlangıç dilimleri yabancı kümeler değil. Yani;

Teorem 7.7. *X iyi sıralı bir küme olsun. $I \subseteq X$ kümesinin başlangıç dilimi olması için gerek ve yeter koşul*

$$I = \{a : a < x\}$$

olacak biçimde $x \in X$ olmasıdır.

Kanıt: $I = \{a : a < x\}$ ise zaten I bir başlangıç sıra dilimidir. $I \neq X$ olduğundan, $X \setminus I$ boş olmayan bir kümedir.

$$x = \min(X \setminus I)$$

olmak üzere,

$$I = \{a : a < x\}$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. □

İyi sıralı bir kümenin elbette her altkümesinin bir başlangıç dilimine eşit olması elbette beklenmemeli. Ama her altkümesi bir başlangıç dilimine denk olur. Üstelik "sıra izomorfik" olur. Bu durum için el yordamıyla bir gözlem yapalım. X iyi sıralı bir küme olsun. $A, B \subseteq X$ verilsin.

$$a_0 = \min A,\ a_1 = \min A \setminus \{a_0\}, ..., a_n = \min A \setminus \{a_0, ..., a_{n-1}\}$$

$$b_0 = \min B,\ b_1 = \min B \setminus \{b_0\}, ..., b_n = \min B \setminus \{b_0, ..., b_{n-1}\}$$

olarak tanımlayarak ve

$$a_i \longleftrightarrow b_i$$

karşılaştırması yapılarak, A ve B kümeleri arasında sırayı koruyan bir eşleme ya da benzerlik yakalanabilir. Burada geçen benzerliğin ne olabileceğini tanımlayalım.

Tanım 7.2. X ve Y iyi sıralı kümeleri ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

i. $x < y$ olduğunda $f(x) < f(y)$ olursa f'ye **kesin artan**,

ii. f kesin artan ve $f(X)$ başlangıç dilimiyse f'ye **başlangıç dilimine gömen** denir.

X ve Y iki iyi sıralı küme olmak üzere, başlangıç dilimine gömen $f : X \to Y$ fonksiyonu varsa X, Y'nin **başlangıc dilimine gömülür** denir. Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 7.8. *X ve Y iki iyi sıralı küme olsun.*

i. *$f : X \to Y$ fonksiyonunun kesin artan olması için gerek ve yeter koşul her x, $y \in X$ için, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ olmasıdır.*

ii. *$f : X \to X$ kesin artan ise her $x \in X$ için $x \leq f(x)$ olur.*

iii. *$f(X) \subseteq X$ başlangıç dilimi olacak biçimde kesin artan $f : X \to X$ yoktur.*

iv. *X'den Y'ye tanımlı en fazla bir tane başlangıç dilimine gömen fonksiyon var. Yani, f, $g : X \to Y$ başlangıç dilimine gömen fonksiyonlarsa $f = g$ olur.*

Şimdi esas teoremlerden biri verilebilir.

Teorem 7.9. *Birbirlerine eşit olmayan iki iyi sıralı küme arasında, en az birinden diğerine tanımlı başlangıç dilimine gömen fonksiyon vardır ve tektir.*

Kanıt: X ve Y iki iyi sıralı küme ve $X \neq Y$ olsun. $\wp$, Y'nin bir başlangıç dilimine gömülebilen X'in başlangıç dilimlerinin altkümeleri olsun. Elbette $\emptyset \in \wp$ olur. Başlangıç dilimleri kapsamaya göre karşılaştırılabilir olduklarından $\wp$ bir zincir olur. Başlangıç dilimlerinin bileşimleri de bir başlangıç dilimi olduğundan,

$$P = \bigcup \wp,$$

X'de bir başlangıç dilimidir. $P \in \wp$ olduğunu göstermek için, P'den Y'ye tanımlı başlangıç dilimine gömen bir $f : P \to Y$ fonksiyonunun varlığı gösterilmeli. Her $I \in \wp$ için $f_I : I \to Y$ başlangıç dilimine gömen bir f_I fonksiyonu var ve tektir. Ayrıca, I, $J \in \wp$ verildiğinde, $I \subseteq J$ va da $J \subseteq I$ olacağından ve teklik durumu kullanılarak, f_I ve f_J'lerin en az biri diğerinin genişlemesidir. Şimdi,

$$f : P \to Y,\ f(x) = f_I(x)\ (x \in I \in \wp)$$

fonksiyonu tanımlanabilir. f'nin başlangıç dilimine gömen fonksiyon olduğu kolaylıkla gösterilir. Üç durum sözkonusu:

Birinci durum. $P = X$: Bu durumda kanıt biter.

İkinci durum. $f(P) = Y$. Bu durumda $f^{-1} : Y \to P$ başlangıç dilimine gömen fonksiyon olur ve bu durumda da kanıt biter.

Üçüncü durum (imkansız durum). $P \neq X$ ve $f(P) \neq Y$:

$$x = \min X \setminus P \text{ ve } y = \min Y \setminus f(P)$$

diyelim. $P^{'} = P \cup \{x\}$, X'in

$$f(P)^{'} = f(P) \cup \{y\}$$

Y'nin başlangıç dilimleri ve $f^{'} : P^{'} \to \wp(P)^{'}$,

$$f^{'}(x) = y$$

olacak biçimde f'nin genişlemesi f' fonksiyonu tanımlanabilir. Üstelik f' başlangıç dilimine gömen fonksiyondur. Dolayısıyla, $P' \in \wp$ olur ve buradan da $P' \subseteq P$ çelişkisi oluşur. O halde üçüncü durum olamaz.

Kanıt biter. □

Alıştırmalar

7.17. (ZFC) Verilen her X ve Y kümesi için $|X| \leq |Y|$ ya da $|Y| \leq |X|$ olduğunu gösterin. Aslında bunun tersi de doğrudur.

7.4 Seçim Fonksiyonlarının Kanıtlarda Kullanımı

Bazı teoremlerin kanıtlarında seçim aksiyomu birçok okurun ruhu bile duymadan kullanılabilir. Bu yönüyle, eğer matematik ZF'de yapılıyor ve teoremin kanıtında, seçim aksiyomu, kullanılıyorsa, teoremin kanıtı eksiktir! Buna ilişkin birkaç örnek verelim. Bölümün giriş kısmında da belirtildiği gibi, örneklerde yer alan kavramların okurca bilindiğini varsayıyoruz.

Örnek 7.1.
Teorem. Dizisel sürekli her $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon süreklidir.
Eksik kanıt. f'nin bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olmadığını varsayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x - x_n| \leq \tfrac{1}{n} \Longrightarrow |f(x_n) - f(x)| > \epsilon$$

önermesini doğru yapan $x_n \in \mathbb{R}$ var. Böylece, terimleri x_n'ler olan (x_n) dizisi ve $\epsilon > 0$ elde edilir. Bu durumda, (x_n) dizisi x yakınsamakta ama $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsamaz. Bu, f'nin dizisel sürekli olma varsayımıyla çelişir. Kanıt tamamlanır. □

Yukarıda verilen kanıtta, her n için istenilen koşulu sağlayan bir x_n gerçel sayısı olmasına karşın, bir (x_n) dizisinin, yani $f(n) = x_n$ eşitliğiyle tanımlı bir $f : \omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun olduğu söylenemez. Söylenebilinecek her $n \in \omega$ için

$$A_n = \{a \in \mathbb{R} : |x - a| < \tfrac{1}{n}, |f(a) - f(x)| > \epsilon\}$$

kümesinin boşkümeden farklı olduğudur. Bu durumda,

$$A = \{A_n : n \in \omega\}$$

küme olacaktır. Eğer A kümesinin bir seçim fonksiyonu olsaydı,

$$g : A \to \mathbb{R},\ f(A_n) \in A_n$$

olacak biçimde bir fonksiyon var olurdu. Diğer taraftan,

$$h : \omega \to A,\ h(n) = A_n$$

fonksiyonu tanımlanarak ve

$$f = g \circ h : \omega \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu alınarak $f(n) = x_n$ gösterimi kullanılabilirdi. Ancak, A kümesinin seçim fonksiyonunun var olduğu bilinmediğinden istenilen özellikte bir (x_n) dizisinin varlığı söylenemez. Dolayısıyla, kanıt eksiktir.

Her ne kadar yukarıda verilen kanıt eksik olsa da bir başka kanıt verilebilir.

Eksiksiz kanıt. $x \in \mathbb{R}$ verilsin. f'nin x notasında sürekli olduğu gösterilecek. Öncelikle, f'nin $\mathbb{Q} \cup \{x\}$ kümesine kısıtlanışının sürekli olduğunu gösterelim.

$$f|_{\mathbb{Q}\cup\{x\}} = g$$

diyelim. g fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Olmadığını varsayalım. Bu durumda her $n \in \omega$ için,

$$A_n = \{y \in \mathbb{Q} : |x - y| < \tfrac{1}{n}, |g(x) - g(y)| > \epsilon\}$$

kümesini boşkümeden farklı yapan bir $\epsilon > 0$ sayısı var. Rasyonel sayılar kümesi sayılabilir olduğundan,

$$\mathbb{Q} = \{r_m : m \in \omega\}$$

biçiminde yazabiliriz. Dolayısıyla,

$$A_n = \{r_m :\in \mathbb{Q} : |x - r_m| < \tfrac{1}{n}, |g(x) - g(r_m)| > \epsilon\}$$

yazılabilir. Her $k \in \omega$ için,

$$n_k = \min\{i : r_i \in A_k\}$$

olarak tanımlansın. Dolayısıyla, (r_{n_k}) bir dizi olur. Üstelik,

$$|x - r_{n_k}| < \tfrac{1}{k}.$$

Dolayısıyla,

$$r_{n_k} \to x.$$

olur. f, dizisel sürekli olduğundan,

$$g(r_{n_k}) \to g(x).$$

elde edilir. Bu, varsayımla çelişir ve sonuç olarak, g süreklidir. şimdi, f'nin sürekli olduğunu gösterebiliriz. $x \in \mathbb{R}$ verilsin. Yukarıda yapılan açıklama nedeniyle,

$$r \in \mathbb{Q}, |x - r| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(r)| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde $\delta > 0$ var. $y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta$ eşitsizliğini sağlasın. $y < x$ ise, $r_n \to y$ ve $y < r_n < x$ eşitsizliklerini sağlayan ve y noktasına yakınsayan rasyonel sayılar dizisi (r_n) vardır. f dizisel sürekli olduğundan, her $n \geq n_0$ için

$$|f(y) - f(r_n)| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde $n_0 \in \omega$ var. Aynı zamanda,

$$|x - r_{n_0}| < \delta$$

olduğundan,

$$|f(x) - f(r_{n_0})| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Buradan da $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ elde edilir. Aynı eşitsizlik $x < y$ olma durumu için de geçerlidir. Kanıt tamamlanır.

Örnek 7.2.
Teorem: Sonsuz her kümenin sayılabilir sonsuz altkümesi vardır.
Eksik kanıt. X sonsuz küme olsun. X, boşkümeden farklı olduğunda, $x_1 \in X$ seçebiliriz. $\{x_1\}$, X'in sonlu altkümesi ve X sonsuz küme olduğundan, $X \setminus \{x_1\}$ boş olmayan bir kümedir.

$$x_2 \in X \setminus \{x_1\}$$

seçebiliriz. Bu şekilde devam ederek, her $0 < n \in \omega$ için,

$$x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, ..., x_n\}$$

özelliğinde $x_n \in X$ bulunabilir. Böylece,

$$f(n) = x_{s(n)}$$

eşitliğiyle birebir $f : \omega \to X$ fonksiyonu tanımlanır. Kanıt tamamlanır. $\square$

Yukarıda verilen teorem doğru ya da yanlış olsa da verilen kanıt eksik: x_1, x_2'yi seçebiliriz. $x_1, x_2, ..., x_{100}$ seçildiğinde, x_{101}'i de seçebiliriz. Ama bu seçim el yordamıyla tek tek nasıl yapılacak? Sonuçta, sonsuz sayıda doğal sayı var. Dolayısıyla, bu biçimde, $\{x_n : n \in \omega\}$'yı küme yapacak biçimde, x_n sayıları, en azından kanıtta geçen biçimde yapılamaz.

Diğer taraftan, yukarıdaki teoremin ifadesini şöyle değiştirelim.
Teorem: X sonsuz bir küme ve $\wp(X) \setminus \{\emptyset\}$ kümesinin seçim fonksiyonu varsa, X'in sayılabilir sonsuz altkümesi vardır.
Eksiksiz kanıt. f, $\wp(X) \setminus \{0\}$ kümesinin seçim fonksiyonu olsun. $\bigcup \wp(X) \setminus \{0\} = X$ olduğundan $f : \wp(X) \setminus \{0\} \to X$ olur. $\mathcal{F}$, elemanları sadece ve sadece X'in sonlu altkümeleri olan küme olsun. Her $A \in \mathcal{F}$ için, $X \setminus A$, X'in boş olmayan altkümesi olduğundan f'nin tanım kümesinin elemanıdır.

$$g : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ f(F) = F \cup \{f(F)\}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $A_0 = \emptyset$ olmak üzere, recursion teoremini f fonksiyonuna uygulayarak,

$$r(0) = A_0$$

ve her $n \in \omega$ için,

$$r(s(n)) = g(r(n))$$

eşitliğini sağlayan $r : \omega \to \mathcal{F}$ fonksiyonu elde edilir.

$$h : \omega \to X,\ h(n) = f(X \setminus r(n))$$

kuralıyla tanımlanan h fonksiyonu birebirdir. Dolayısıyla, $h(\omega)$, X'in sayılabilir sonsuz altkümesidir.

Örnek 7.3.
Teorem $\mathbb{R}$'nin sonlu kapalı aralığında tanımlı gerçel değerli sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir.
Eksik kanıt. $\epsilon > 0$ verilsin. Her $x \in [0, 1]$ için,

$$y \in [0,1],\ |x-y| < \delta_x \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

olacak biçimde bir $\delta_x > 0$ var. Ayrıca,

$$U_x = [0,1] \cap (x-\delta_x, x+\delta_x)$$

olmak üzere,

$$\{\delta_x : x \in [0,1]\} \to \{U \subset [0,1] : U \text{ açık }\},\ \delta_x \to U_x$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\mathcal{U} = \{U_x : x \in [0,1]\}$ kümesi $[0,1]$ kümesinin açık örtüsüdür. $[0,1]$ kompakt olduğundan

$$[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

olacak biçimde $x_1, ..., x_n \in [0,1]$ seçilebilir.

$$\delta = \min\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_1}\}$$

olarak seçilirse

$$x, y \in [0,1],\ |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon$$

olur. f'nin düzgün sürekli olduğu gösterilmiş olur. □

Dikkat edilirse yukarıda verilen kanıtta $\{\delta_x : x \in [0,1]\}$'in bir küme olduğu ve dolayısıyla bunun bir görüntüsü olan $\mathcal{U}$'nın bir küme olduğu varsayıldı. Bunu ZF'de söyleyemeyiz. Çünkü küme olarak gördüğümüz $\{\delta_x : x \in [0,1]\}$ sınıfın elemanları bir kurala göre seçilmiş değil. δ_x'leri belirli bir kurala göre seçerek eksiksiz kanıt verilebilir.

Eksiksiz kanıt. Her $x \in [0,1]$ için,

$$N(x) = \{n \in \omega \setminus \{0\} : y \in [0,1], |x-y| < \tfrac{1}{n} \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \tfrac{\epsilon}{2}\}$$

kümesi olmak üzere, $N(x)$ boşkümeden farklı ve

$$\mathcal{N} = \{N(x) : x \in [0,1]$$

bir kümedir.

$$\delta : [0,1] \to \mathcal{N} \to \omega \to (0,1]\},\ x \to N(x) \to \min N(x) \to \tfrac{1}{\min N(x)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi, her $x \in [0,1]$ için,

$$U_x = [0,1] \cap (x-\delta(x), x+\delta(x))$$

olmak üzere,

$$\mathcal{U} = \{U_x : x \in [0,1]\}$$

bir kümedir. Kanıtın devamı eksik kanıtta olduğu gibi devam eder. □

8. Doğal Sayılar Sistemi

Fiziksel bir yapıda bir elma ikiye bölünebilirken bir ikiye bölünemiyor. Matematiksel bir yapıdaysa bir ikiye bölünebilirken bir elma ikiye bölünemiyor. Bu iki yapı arasındaki temel farklardan biri bu olmalı. Matematikte iki eşit sayı toplanabilirken, matematik dışında yapılan toplamalarda birşey kendisiyle toplanamıyor; bir elmanın kendisiyle toplanamaması gibi.

"*Yaşamda herşey matematikte olduğu gibi* $2+2=4$ *etmez*" deyimi doğrudur. Ancak, bunun doğru olmasının nedeni sanıldığı gibi değildir. Gerçek neden yaşamda $2+2=4$ olmamasıdır. Yani, $2+2=4$ fiziksel bir gerçeklik değildir.

Bu bölümde yapılacak bazı standart tanımlamalar sonrası, yaşamda var olmayan $2+2=4$ yaratılacak. Bu yaratılan şey vardan yok edilen birşey gibi algılanmamalı. Bu, 2 tane elmayla, başka 2 elmanın yanyana gelerek dört elma etmesinin evrimleşmiş halidir. Dolayısıyla, bir evrimin sonucu olan $2+2=4$'ten korkmamak gerekir!

Bazı doğal sayıları ve toplama işaretini kullanarak,

$$1+2,$$

$$2+2,$$

$$1+4$$

gibi şeyler yazılabilir. Bu yazılanlar bazı doğal sayılara karşılık getirilerek,

$$1+2=3,$$

$$2+2=4,$$

$$1+4=5$$

yazılabilir. Hatta her n, m doğal sayısı için

$$n+m$$

yazılabilir ve bir doğal k sayısı için,

$$n + m = k$$

yazılabilir. Ancak, bu yazım belirli bir formül kuralıyla yazılmadığı sürece,

$$\{n + m : n, m \in \omega\}$$

değil bir küme, bir sınıf bile olmayabilir. Söylemek istediğimiz şeylerden biri şu: Bazı verilen doğal sayılar çiftini el yordamıyla toplayabiliriz ama bir toplama fonksiyonu tanımlamak bambaşka birşey.

Eğer $f : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonu beklentilerimizi karşılayacak biçimde tanımlanırsa, n, m doğal sayıları için,

$$f(n, m) = n + m$$

yazarak,

$$\{m + n : m, n \in \omega\}$$

kümesi elde edilir. Benzer yaklaşımla,

$$\{m \times n : m, n \in \omega\}$$

kümesi tanımlanır.

Doğal Sayılar Kümesinin tanımlanmış ve doğal sıralama olarak adlandırılan bir sıralamaya göre iyi sıralı küme olduğu gösterilmişti. Bu bölümde, başka fonksiyonların dışında, Doğal Sayılar Kümesi üzerinde toplama ve çarpma olarak adlandırılacak iki fonksiyon tanımlanacak. Bunların sağladığı bazı temel özellikler nedeniyle tek oldukları gösterilerek, elde edilen yapı **dogal sayılar sistemi** olarak adlandırılacak.

Yazar olarak beni de kısmen rahatsız eden iki konuda okuru uyarmak istiyorum: Birincisi, bu bölümde yer alan teoremlerin kanıtları, genellikle doğal sayılar kümesinin beklentileri karşılayan uygun bir altkümesi tanımlanarak, onun tümevarımsal küme olduğunu gösterme biçiminde olacak. Bu uygulamada zaman zaman tekrarlar olabilecek, bu bıkkınlık verebilir. İkincisi, çarpma ve toplama fonksiyonları iki farklı biçimde ama birbirlerine denk olarak tanımlanacak. İkinci tür tanımlamada "sonluluk" kavramı kullanılacak. Geniş kapsamlı olan bu kavram, her ne kadar bir sonraki bölümde detaylarıyla verilecek olsa da okurun konuyu buradaki kullanım düzeyinde bildiği varsayılacak.

8.1 Diophantos'un Arithmetika'sı

İskenderiyeli Yunan matematikçi tahminen 250'de, özgün Yunancada 13 kitap yazmıştır. Seçkin matematikçilerden Wilbur Knorr Arithemetikanın, 3. yüzyılda değil, 1. yüzyılda yazılmış olabileceğini iddia etmektedir.

Bu kitaplar bütününe *Arithmetika* denir. Bu kitaplardan sadece ilk altısının kopyası ve yedincisinin kopyasının bir kısmı mevcuttur. İlginç olan, Arapça Arithmetika'nın dördü (4-7'ye dek olanlar) 1968'de keşfedildi.Arithmetika'nın orjinalleri olmamasına karşın, bu kitap hakkındaki bilgilerin hepsi, 1545 sonrası bir zamanda Ionanes Hydruntis tarafından kaleme alınmış Parsinius 2379 elyazmasının, Behcet tarafından yapılan Latince çevirisi üzerinden edinilmekte ya da yorumlanmaktadır. Orjinal eserle kopyaları arasında farklıklar olabilir. Arithmetika ile ilgili bir başka 13. yüzyıl elyazması Matritensis 48'dir.

Matematik tarihçileri Arithmetika'nın cebirsel karakter yapısı üzerinden, cebir kavramının Arithematika ile başladığını yorumlar. Arithemetika, birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözümlerine ilişkin yöntemlerden de bahseder.

Arithemetika'da toplama için bir sembol kullanılmamıştır.Çıkarma için "-" işareti kullanmamasına karşın, bunun için başka bir sembol kullanılmıştır. Bu arada toplama ve çıkarma kavramının ilk kullanımıyla ilgili bir not verelim: MÖ 18.yüzyılda, insanların eklenen ya da çıkarılan miktarlarda birbirlerine doğru ya da birbirlerinden uzağa koştuğu oymalarla toplama ve çıkarmayı belirten hiyerogliflere (ilkçağlara kullanılan bir yazı dili) sahip olduğu belirtilmekte. Buna göre, toplama ve çıkarmayla ilgili olarak, Mazur kitabını([36]) yazmadan birkaç yıl öncesine kadar, "...On ikinci yüzyıldan önce matematiksel anlamda toplama için kullanan bir sembolün olmadığını" zannettiğini yazıyor.

8.2 Toplama ve Çarpma Fonksiyonlarından Beklenenler

Doğal sayılar sisteminde aritmetik, toplama ve çarpma olarak, adlandırılan ve belirli koşulları sağlayan $\omega\times\omega$'dan ω'ya tanımlı iki fonksiyondur. Bu fonksiyonlar toplama ve çarpma olarak adlandırılır. Genel olarak toplama fonksiyonu $+$ ve çarpma fonksiyonu . ya da $\times$ ile gösterilir. Verilen $(m, n) \in \omega \times \omega$ elemanlarının toplama fonksiyonu altındaki görüntüsü $m+n$ ile ve çarpma fonksiyonu altındaki görüntüsü mn ya da $m \times n$ ile gösterilir.

Toplama fonksiyonu farklı biçimlerde inşa edilebilir. Bu tanımlamalar yapılırken elden bırakılmaması gereken, toplamanın olmazsa olmaz koşullarından bazıları olan,

i. $m + 0 = m$,

ii. $(m + n) + 1 = m + (n + 1)$,

eşitliklerinin her m, $n \in \omega$ için sağlanmasıdır[1]. $\omega \times \omega$'dan ω'ya tanımlı bir f fonksiyonu verilen her m, $n \in \omega$ için

[1]Toplamada sıfırın rolünü, ilk olarak Brahmagupta "sıfır ile negatif bir sayının toplamı negatif, sıfır ile pozitif bir sayının toplamı pozitif ve sıfır ile sıfırın toplamı sıfır" olarak tanımladı. Benzer bir biçimde, negatif ve pozitif sayının sıfırdan çıkartılmasını tanımladı.

i. $f(m, 0) = m$

ii. $f(m, f(n, 1)) = f(f(m, n), 1)$

koşullarını sağlıyorsa f'ye ***toplamanın temel özellikleri***ni sağlıyor denir. Bu özelliklerin toplama fonksiyonunu tanımlamak için, yeter ve gerek olan minumum koşullar olduğu gösterilecek. Toplamanın temel koşullarını sağlayan iki fonksiyonun eşit olduğu tümevarımdan hemen elde edilir. Bu koşulları sağlayan fonksiyonun var olduğunu gösterebilmek için bilinen iki temel yöntem vardır[2]. Biri recursion teoreminin uygulanması, diğeriyse küme bileşimi işlemi yardımıyla olacak.

Recursion teoreminin Uygulanması: Bu yöntemin ana fikri şudur: Bir f fonksiyonunun toplamanın temel koşullarını sağlaması için f'nin grafiği G_f'nin her m, n, $k \in \omega$ için

i. $((m, 0), m) \in G_f$.

ii. $((m, n), k) \in G_f$ ise $((m, s(n)), s(k)) \in G_f$.

koşullarını sağlamasının gerek ve yeterli olduğu açık. Bu koşulları sağlayan bir fonksiyonun grafiğinin var olduğunu göstermek kolay olmayabilir, ancak bu koşulları sağlayan $(\omega \times \omega) \times \omega$ kümesinin altkümeleri oldukça çoktur. Bunlardan bir tanesi $(\omega \times \omega) \times \omega$. Bu özelliği sağlayan kümelerin arakesiti de bu özelliği sağlar. Ayrıca, hepsinin arakesitinin toplamanın temel koşullarını sağlayan ve tek bir tane olan fonksiyonun grafiği olacağı recursion teoremi kullanılarak kanıtlanır. Bu yaklaşımla, sonuç olarak, toplamanın temel koşullarını sağlayan fonksiyonun var ve tek olduğu gösterilmiş olunacak.

Küme bileşimi olarak: Verilen iki doğal sayıyı ayrık kümelerle denkleştirip, elde edilen denk kümelerin bileşimini de bir doğal sayıyla denkleştirerek elde edilen doğal sayı, verilen o sayıların toplamı olarak adlandıracak. Biraz daha açacak olursak; verilen iki kümenin toplamı için, "olsa olsa onların bileşimidir" yaklaşımı çok da yanlış bir yöntem olmayabilir. Bu yaklaşım ayrık kümeler için daha da doğru olacaktır[3]. Bu bakış açısını 1 ve 0 sayılarına uygulayacak olursak ve bu sayıların toplamını $1 + 0$ ile gösterirsek

$$1 + 0 = 1 \cup 0 = \{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset\} = 1$$

olur. Bu beklentiyi karşılayan bir durum. Benzer biçimde,

$$0 + 1 = 1$$

olur. Daha da ilerisi her $n \in w$ için

[2]Üçüncü farklı bir yöntemin olduğunu zannetmiyorum.
[3]Sıfırdan farklı iki doğal sayının ayrık olmadığı da ortada!

$$n + 0 = 0 + n = n$$

olacaktır. Buna karşılık 1 ile kendisinin toplamını

$$1 + 1 = 1 \cup 1 = 1$$

olarak tanımlayacak olursak bu, beklentiyi karşılayan bir sonuç olmayacaktır. 1 doğal sayısına denk olan iki ayrık kümenin bileşimine denk olan doğal sayıyı 1 ile kendisinin toplamı olarak, tanımlarsak, elde edilen toplam 2 olacak ve bu da beklentiyi karşılayacaktır. Yapılan,

$$|1 + 1| = |(1 \times \{0\}) \cup (1 \times \{1\})| = |2|$$

ve buradan da $1+1 = 2$ elde edilir. Elbette 2, 1'e denk ve ayrık olan kümelerin seçiminden bağımsızdır.

Bu yöntem temel alınarak verilen iki doğal sayının toplamını onun tarihsel yapısına aykırı olmayacak biçimde tanımlayarak, kavram resmileştirilebilir.

Benzer biçimde ve farklı iki yöntemle iki doğal sayının çarpımı tanımlanacak. Daha genel olarak $w \times w$ kümesinden w'ye tanımlı çarpma fonksiyonu inşa edilecek. Bu inşa sürecinde tanımlanacak $f : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonunun ***çarpmanın temel koşulları*** olarak adlandırılacak olan

i. $f(m, 0) = 0$

ii. $f(m, s(n)) = f(m, n) + m$

koşulları sağlaması esas alınacak. Birinci tanımlama yöntemi recursion teoreminin uygulanarak, diğer yöntem ise kartezyen çarpım terimi kullanılarak gerçekleştirilecek.

Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan aritmetik işlemler doğal sayıların sonlu altkümelerinin kümesi üzerinde genellenebilecek.

Sonuç olarak doğal sayılar sistemi $(\omega, 0, s)$, toplama ve çarpma olarak adlandırılan fonksiyonlarla donatılarak $(\omega, 0, s, +, .)$ yapısı elde edilecek ve bu yapının bazı özellikleri çalışılacak.

8.3 Toplama Fonksiyonu

"İki artı iki dört eder" diye geçme, tanı!
Anla içindeki binbir "saçma sapan" nedeni, beyin terini.

Tanım 8.1. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonuna, ***toplamanın temel koşulları***nı sağlıyor denir.

i. $f(m, 0) = m.$

ii. $f(m, s(n)) = s(f(m, n))$

Teorem 8.1. *Toplamanın temel koşullarını sağlayan fonksiyon vardır ve tektir.*

Kanıt: $g : \omega \to \omega$ fonksiyonu $g(m) = m$ eşitliğiyle ve $f : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonu $f(m, n) = s(m)$ eşitliğiyle tanımlansın. Teorem 5.7'nin uygulanmasıyla,

i. $t(m, 0) = g(m)$.

ii. $t(m, s(n)) = f(t(m, n), m)$

koşullarını sağlayan tek bir tane $t : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonu vardır.

$$t(m, n) = m + n$$

yazarak, t fonksiyonunun toplamanın temel koşullarını sağladığını gösterelim. m, $n \in \omega$ verilsin.

$$\begin{aligned} m + 0 &= t(m, 0) \\ &= g(m) \\ &= m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m + 1 &= t(m, 1) \\ &= t(m, s(0)) \\ &= f(t(m, 0), m) \\ &= f(m, m) \\ &= s(m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m + (n + 1) &= t(m, n + 1) \\ &= t(m, s(n)) \\ &= f(t(m, n), m) \\ &= s(t(m, n)) \\ &= t(m, n) + 1 \\ &= (m + n) + 1 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, toplamanın temel koşullarını sağlayan fonksiyonun varlığı gösterilmiş olur. Teklik ise tümevarımla hemen gösterilir. Kanıt tamamlanır. □

Tanım 8.2. Toplamanın temel koşulunu sağlayan fonksiyona ***toplama fonksiyonu*** denir.

$(m, n) \in \omega \times \omega$ elemanının toplama fonksiyonu altındaki görüntüsü $m + n$ ile gösterilir.

Toplama fonksiyonu toplamanın temel koşullarını sağlamasının yanında, aşağıdaki teoremde listelenen temel özellikleri de sağlar.

Teorem 8.2. *Aşağıdaki ifadeler her m, n, $k \in \omega$ için doğrudur.*

i. $0 + m = m$.

ii. $1 + m = s(m)$.

iii. $1 + n = n + 1$.

iv. $1 + (n + k) = (1 + n) + k$.

v. $(k + 1) + n = k + (1 + n)$.

vi. $m + n = n + m$.

vii. $m + (n + k) = (m + n) + k$.

viii. $m + n = 0$ *ise* $m = 0$ *ve* $n = 0$.

ix. $m + k = n + k$ *ise* $m = n$.

x. $m = n$ *ise* $m + k = n + k$.

Kanıt: Bu teoremin kanıtında uygulanacak yöntem, ω'nın uygun bir altkümesini tanımlayıp o kümenin tümevarımsal küme olduğunu göstermek olacak. Kanıtlanacak şeylerin temel olmasına karşın, kanıtlarda can sıkıcı tekrarlar olabileceği konusunda okurları şimdiden uyaralım.
i. ω'nun

$$A = \{m : 0 + m = m\},$$

altkümesini ele alalım. $0 + 0 = 0$ olduğundan, $0 \in A$ olur. $m \in A$ verilsin.

$$0 + s(m) = 0 + (m + 1) = (0 + m) + 1 = m + 1 = s(m)$$

olduğundan $s(m) \in A$ olur. Buradan tümevarımla $A = \omega$ olur.

ii. Bu kez,

$$A = \{m \in \omega : 1 + m = s(m)\}$$

kümesinin tümevarımsal küme olduğunu gösterelim. $1+0 = 1 = s(0)$ olduğundan, $0 \in A$ olur. $m \in A$ olsun.

$$1 + s(m) = 1 + (m + 1) = (1 + m) + 1 = s(m) + 1 = s(s(m))$$

olduğundan, $s(m) \in A$ ve dolayısıyla $A = \omega$ olur.

iii. Okura bırakıldı.

iv. ω'nun

$$A = \{k \in \omega : \forall n(1 + (n + k) = (1 + n) + k)\}$$

kümesini ele alalım. $0 \in A$ olduğu açık. $k \in A$ olsun. Yani her $n \in \omega$ için $1 + (n + k) = (1 + n) + k$ olsun.

$$\begin{aligned}
1 + (n + s(k)) &= 1 + [n + (k + 1)] \\
&= 1 + [(n + k) + 1] \\
&= 1 + [1 + (n + k)] \\
&= [1 + (n + k)] + 1 \\
&= [(1 + n) + k] + 1 \\
&= (1 + n) + (k + 1) \\
&= (1 + n) + s(k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $s(k) \in A$ olur. Tümevarımla $A = \omega$ eşitliğinden, istenilen kanıtlanmış olur.

v. k, $n \in \omega$ verilsin.

$$\begin{aligned}
(k + 1) + n &= (1 + k) + n \\
&= 1 + (k + n) \\
&= (k + n) + 1 \\
&= k + (n + 1) \\
&= k + (1 + n),
\end{aligned}$$

eşitliğinden istenilen elde edilir.

vi. $A = \{m :$ bazı $n \in \omega$ için $m + n \neq n + m\}$ diyelim. A'nın boşküme olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. Varsayalım ki değil. p, A'nın en küçük elemanı olsun. $0 \notin A$ olduğundan $p \neq 0$ olur. $p = s(k)$ olacak biçimde $k \in \omega$ alalım. $k \notin A$ olduğundan her $n \in \omega$ için $k + n = n + k$ olur. $n \in \omega$ verilsin.

$$\begin{aligned}
p + n &= s(k) + n \\
&= (k + 1) + n \\
&= k + (1 + n) \\
&= k + (n + 1) \\
&= (k + n) + 1 \\
&= (n + k) + 1 \\
&= n + (k + 1) \\
&= n + p
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu, $p \in A$ olmasıyla çelişir. O halde, A boş kümedir.

vii. $A = \{m \in \omega : m + (n + k) \neq (m + n) + k$ olacak biçimde $n, k \in \omega$ var $\}$ kümesinin boşküme olduğu gösterilecek. Varsayalım ki $A \neq \emptyset$. p, A'nın en küçük elemanı olsun. $p = 0$ olamaz. O halde, $p = s(t)$ olacak biçimde $t \in \omega$ seçebiliriz. $t \notin A$ olduğundan, her n, $k \in \omega$ için

$$t + (n + k) = (t + n) + k$$

olur. Bu eşitlik kullanılarak her n, $k \in \omega$ için

$$\begin{aligned}
p + (n + k) &= s(t) + (n + k) \\
&= (t + 1) + (n + k) \\
&= (n + k) + (t + 1) \\
&= [(n + k) + t] + 1 \\
&= [t + (n + k)] + 1 \\
&= [t + (k + n)] + 1 \\
&= t + [(k + n) + 1] \quad , \\
&= t + [k + (n + 1)] \\
&= t + [k + (1 + n)] \\
&= t + [(1 + n) + k] \\
&= [t + (1 + n)] + k \\
&= [((t + 1) + n)] + k \\
&= (p + n) + k
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu $p \in A$ olmasıyla çelişir.

viii. $m + n = 0$ ise $m = 0$ ve $n = 0$ olur. $m \neq 0$ ya da $n \neq 0$ olduğunu varsayalım.

$$m = k + 1 \text{ ya da } n = p + 1$$

olacak biçimde k, $p \in \omega$ vardır. Buradan da

$$m + n = s(k + n) \text{ ya da } m + n = s(p + m)$$

olur. Bu $m + n = 0$ olmasıyla çelişir.

ix. Şu kümeyi ele alalım.

$$A = \{k \in \omega : \forall n \forall m(m + k = n + k \to m = n)\}.$$

$0 \in A$ olduğu açık. $k \in A$ olsun. $m + s(k) = n + s(k)$ ise $s(m + k) = s(n + k)$ ve buradan $m + k = n + k$ elde edilir. $k \in A$ olmasından $m = n$ olur. O halde, $s(k) \in \omega$ olur. Tümevarımla, $A = \omega$ olduğu gösterilmiş olur.

x. Toplama fonksiyonunun bir fonksiyon olmasının doğrudan sonucudur.

Böylece teoremin kanıtı tamamlanır. $\square$

Yukarıdaki teorem gereği her n, m, $k \in \omega$ için,

$$m + (n + k) = (m + n) + k$$

olması nedeniyle,

$$(m + n) + k = m + n + k$$

yazabiliriz.

Yine yukarıda verilen özellikleri kullanarak aşağıdaki birkaç toplamayı verebiliriz.

$$1 + 1 = 1 + s(0) = s(1 + 0) = s(1) = 2.$$

$$1 + 2 = 1 + s(1) = s(1 + 1) = s(2) = 3.$$

$$1 + 3 = 1 + s(2) = s(1 + 2) = s(3) = 4.$$

$$2 + 2 = (1 + 1) + 2 = 1 + (1 + 2) = 1 + 3 = 1 + s(2) = s(1 + 2) = s(3) = 4.$$

Teorem 4.12'de verilen herhangi iki doğal sayı m, $n \in \omega$ için, $n \neq m$ ise $n \in m$ ya da $m \in n$ olacağı kanıtlanmıştı. Ayrıca, $n \in m$ olması ile $m \subset n$ olmasının denk olduğu da kanıtlanmıştı. Bu zincire bir ekleme daha yapılabilir.

Teorem 8.3. *Her m, $n \in \omega$ için $m = n + p$ ya da $n = m + p$ olacak biçimde $p \in \omega$ vardır.*

Kanıt:

$$A = \{n \in \omega : \forall m[n \in m \leftrightarrow \exists p((p \neq 0) \wedge (m = n + p))]\}$$

diyelim. Tümevarımla $A = \omega$ olduğunu göstereceğiz. $0 \in A$ olduğu açık. $n \in A$ verilsin. $s(n) \in A$ olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. $s(n) \in m$ olduğunu varsayalım. $n \in s(n)$ olduğundan $n \in m$ olur. $n \in A$ olması nedeniyle,

$$m = n + p$$

olacak biçimde $p \neq 0$ bulunur. $p = s(k)$ olacak biçimde $k \in \omega$ seçelim.

$$m = n + k + 1 = s(n) + k$$

olur. Ayrıca, $s(n) \neq m$ olduğundan $k \neq 0$ olur. Şimdi $p \neq 0$ olmak üzere

$$m = s(n) + p$$

olsun.

$$m = n + (p + 1),\ p + 1 \neq 0 \text{ ve } n \in A$$

olmasından $n \in m$ olur. Buradan $s(n) = m$ ya da $s(n) \subset m$ olur. $p \neq 0$ olmasından dolayı birinci durum olamaz. O halde $s(n) \subset m$ ve dolayısıyla, $s(n) \in m$ olur. Böylece $s(n) \in A$ olduğu gösterilmiş olur. Kanıt tamamlanır.□

Teorem 4.12 ve yukarıda verilen sonuçlar kullanılarak aşağıdaki toparlayıcı teorem verilebilir.

Teorem 8.4. *m, $n \in \omega$ için aşağıdakiler denktir.*

i. $m \in n$.

ii. $m \subset n$.

iii. *$n = m + k$ olacak biçimde tek bir tane $k \neq 0$ var.*

Alıştırmalar

8.1. 100 olarak gösterilen bir doğal sayı var mı? Varsa $100 + 100 = 200$ olduğunu kanıtlayın.
8.2. $n + n = m + m + 1$ olacak biçimde n, m doğal sayılarının olmadığını kanıtlayın.
8.3. Her n doğal sayısı için $n + n$ sayısının çift, $n + n + 1$ sayısının tek olduğunu gösterin.
8.4. Her doğal sayının $n + n$ ya da $n + n + 1$ formunda olduğunu gösterin. Yani,

$$\omega = \{n + n : n \in \omega\} \cup \{n + n + 1 : n \in \omega\}$$

8.5. $\{n + n : n \in \omega\}$ ve $\{n + n + 1 : n \in \omega\}$ kümelerinin ω'ya denk olduğunu gösterin.
8.6. Her m, $n \in \omega$ için, $m \leq n$ ise her $k \in \omega$ için $m + k \leq n + k$ olduğunu gösterin.
8.7. m, n, $k \in \omega$ için $m + k \leq n + k$ ise $m \leq n$ olduğunu gösterin.

8.4 Bileşim Yöntemiyle Toplama Fonksiyonu

Bu bölümün girişinde de belirtildiği gibi, iki doğal sayının toplamı ilk bakışta onların bileşimleri olması gerekir gibi gözükse de tam olarak öyle olmuyor. Gerçekten öyle olsaydı, yani iki sayının toplamı o sayıların bileşimi olsaydı, örneğin, 2 ve 3'in toplamı

$$2 + 3 = 2 \cup 3 = 3$$

olur ve bu da beklentiyi karşılamazdı. Ancak, 2 ve 3'ü ayrık kümeler gibi ayarlayarak, örneğin 2 yerine $2 \times \{0\}$ ve 3 yerine $3 \times \{1\}$ alırsak bu kümelerin bileşimlerinin eleman sayısı 5 olacak ve bu da gerçekten 2 ile 3'ün toplamı olacaktır. Buradan alınan veriler, toplama fonksiyonunun nasıl tanımlanması gerektiği konusunda yeterli bilgi veriyor.

Sıklıkla kullanılacak olan iki notasyonu sabitleyelim: Bir A kümesi için

$$A^- = A \times \{0\} \text{ ve } A^+ = A \times \{1\}$$

olarak gösterilecek. Her A ve B kümeleri için A^- ve B^+ kümeleri ayrıktır. A, A^+ ve A^- kümeleri denktir.

Bölümün girişinde de ifade edildiği gibi, sonlu küme kavramı Bölüm 9'da detaylıca çalışılacak. Ancak, bu bölümde bazı tanımlamalarda ve kanıtlarda sonlu küme kavramı kullanılacak ve okurun kullanım düzeyinde bu kavramı bildiği varsayılacak. Bir doğal sayıya denk olan kümeye **sonlu küme** denir. Sonlu iki kümenin bileşimi ve kartezyen çarpımı sonludur.

Her n, $m \in \omega$ için $m^- \cup n^+$ kümesi sonlu olup, bu kümelerin bileşimine denk olan doğal sayı $m \oplus n$ ile gösterilecek. A ve B iki ayrık sonlu küme ve $m, n \in w$ olmak üzere,

$$|A| = |n| \text{ ve } |B| = |m|$$

ise

$$|A \dot{\cup} B| = |m \oplus n|$$

olur.

Teorem 8.5. *Her m, n, $k \in w$ için aşağıdakiler doğrudur.*

i. $m \oplus 0 = 0 \oplus m = m.$

ii. $m \oplus 1 = 1 \oplus m = s(m).$

iii. $m \oplus n = n \oplus m.$

iv. $(m \oplus n) \oplus k = m \oplus (n \oplus k).$

Kanıt: **i**. 0^+ boşküme olduğundan,

$$|m \oplus 0| = |m^+ \cup 0^-| = |m^+| = |m|$$

olur. Alıştırma 5.8 gereği $m \oplus 0 = m$ elde edilir.

ii. $f : m^- \cup 1^+ = m^- \cup \{(0,1)\} \to s(m)$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} k & ; x = (k, 0) \in m \times \{0\} \\ m & ; x = (0, 1) \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlansın. f fonksiyonunun birebir ve örten olduğu açık. Böylece,

$$|m \oplus 1| = |s(m)|$$

ve dolayısıyla,

$$m \oplus 1 = s(m)$$

olur.

iii. $f((k,0) = (k,1)$ ve $f((k,1)) = (k,0)$ kuralıyla tanımlı $f : m^- \cup n^+ \to n^- \cup m^+$ fonksiyonu birebir ve örten olduğundan

$$|m \oplus n| = |m^- \cup n^+| = |n^- \cup m^+| = |n \oplus m|$$

olur ve buradan da

$$n \oplus m = m \oplus n$$

elde edilir.

iv. m, n, $k \in \omega$ verilsin.

$$|(n^+ \times \{0\}) \dot\cup (k \times \{0\}| = |(n^- \dot\cup k^+) \times \{1\}| = |(n^- \times \{1\}) \dot\cup (k^+ \times \{1\}| = |n \oplus k|$$

eşitliği kolaylıkla gösterilir. Bu eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
|(m \oplus n) \oplus k| &= |(m \oplus n)^- \dot\cup k^+| \\
&= |((m^- \dot\cup n^+) \times \{0\}) \dot\cup (k \times \{0\})| \\
&= |(m^- \times \{0\}) \dot\cup (n^+ \times \{0\}) \dot\cup (k \times \{0\})| \\
&= |m^- \dot\cup (n \oplus k)^+| \\
&= |m \oplus (n \oplus k)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da istenilen sonuca ulaşılır. □

Yukarıdaki teoremin uygulanmasıyla,

$$1 \oplus 1 = s(1) = 2,$$

$$1 \oplus 2 = 2 \oplus 1 = s(2) = s(s(1)) = s(s(s(0))) = 3,$$

$$2 \oplus 2 = 2 \oplus (1 \oplus 1) = (2 \oplus 1) \oplus 1 = s(2) \oplus 1 = s(s(2)) = s(s(s(s(0)))) = 4$$

elde edilir. Bu yöntemle

$$100 + 100 = 200$$

olduğunun gösterilmesini istemek felaketin ta kendisidir.

Teorem 8.6. *$f : \omega \times \omega \to \omega$, $f(m,n) = m \oplus n$ kuralıyla tanımlı fonksiyon toplama fonksiyonudur.*

Kanıt: Teorem 7.5'nin sonucu olarak f, toplamanın temel koşullarını sağlar. Toplamanın temel koşulunu sağlayan tek fonksiyon toplama fonksiyonu olduğundan f, toplama fonksiyonudur. □

Bu teoremin sonucu olarak her m, $n \in \omega$ için

$$m \oplus n = m + n$$

yazabiliriz.

Doğal sayılar m, n için $m \in n$ ise $n = m + k$ olacak biçimde tek bir tane $k \in \omega$ olduğu gösterilmişti. Bu, yukarıda tanımlanan toplama fonksiyonunu kullanarak farklı biçimde de gösterilebilir: $m \in n$ olduğundan $n \setminus m$ sonlu küme ve $|n \setminus m| = |k|$ olacak biçimde tek bir tane $k \in \omega$ vardır. Buradan

$$|n| = |m \,\dot\cup\, (n \setminus m)| = |m^- \cup k^+| = |m \oplus k|$$

ve buradan da $n = m \oplus k$ elde edilir.

Alıştırmalar

8.8. Her $k \in \omega$ için $f(n) = n + k$ eşitliğiyle tanımlı fonksiyonun birebir olduğunu gösterin.

8.9. $f(n) = n + n$ ve $g(n) = n + n + 1$ eşitliğiyle tanımlı fonksiyonların birebir olduğunu gösterin.

8.10. Altbölüm 5.1'de yer alan teorem ve problemlerde $+$ yerine $\oplus$ yazılarak farklı kanıtlar verilebilir. Bunları yapın.

8.11. X boş olmayan bir küme ve $* : X \times X \to X$ bir fonksiyon olmak üzere her x, y, $z \in X$ için

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise $(X, *)$ ikilisine bir ***yarıgrup*** denir. Her $x \in A$ için

$$e * x = x * e = x$$

koşulunu sağlayan $e \in X$ varsa tektir ve bu durumda, e'ye yarıgrubun birimi denir. Birimli yarıgruba ***monoid*** denir. Her x, $y \in X$ için

$$x * y = y * x$$

ise $(X, *)$'a ***değişmeli yarıgrup*** denir. $(\omega, 0, +)$'nin değişmeli monoid olduğunu gösterin. $(\omega \setminus \{0\}, +)$'nin değişmeli yarıgrup olduğunu ama monoid olmadığını gösterin.

8.12. Her f, $g \in Fonk(\omega, \omega)$ için $f + g \in Fonk(\omega, \omega)$ fonksiyonu

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

eşitliğiyle tanımlansın. Sıfır fonksiyonu $e \in Fonk(\omega, \omega)$, $e(n) = 0$ eşitliğiyle tanımlanmak üzere $(Fonk(\omega, \omega), e, +)$'nın değişmeli monoid olduğunu gösterin.

8.13. (X, e, σ) Dedekind doğal sayılar sistemi olsun. Ayrıca $* : X \times X \to X$ fonksiyonu her x, $y \in X$ için $x * \sigma(y) = \sigma(x * y)$ eşitliğini sağlayan fonksiyon olsun. $f(0) = e$ ve her n, $m \in \omega$ için

$$f(m + n) = f(n) * f(m)$$

eşitliğini sağlayan birebir ve örten $f : \omega \to X$ fonksiyonunun varlığını gösterin. Bunun sonucu olarak, her x, $y \in X$ için $x * y = y * x$ olduğunu gösterin.

8.5 Çarpma Fonksiyonu

Verilen iki doğal sayı m ve n'nin çarpımını mn ile gösterecek olursak

$$m0 = 0 \text{ ve } m(n + 1) = mn + m$$

olması gerektiğini biliyoruz. Bu koşullar çarpma fonksiyonunu tanımlamak için gerek ve yeter minumum koşullar olacak. Bu koşulları fonksiyon terimiyle verelim.

Tanım 8.3. Aşağıdaki koşulları her $m, n \in \omega$ için sağlayan $f : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyona ***çarpmanın temel koşulları***nı sağlıyor denir.

i. $f(m, 0) = 0$.

ii. $f(m, s(n)) = f(m, n) + m$.

Teorem 8.7. *Çarpmanın temel koşullarını sağlayan fonksiyon var ve tektir.*

Kanıt: $g : \omega \to \omega$ fonksiyonunu $g(m) = 0$ eşitliğiyle ve $f : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonu toplama fonksiyonu, yani $f(m, n) = m + n$ olsun. Teorem 5.5 uygulanarak,

i. $c(m, 0) = 0$.

ii. $c(m, s(n)) = c(m, n) + m$.

koşullarını sağlayan ve tek olan c fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon çarpmanın temel koşullarını sağlar. Teklik ise tümevarımın uygun bir kümeye uygulanmasıyla kolayca gösterilir. □

Tanım 8.4. Doğal sayılar kümesinde tanımlı olan ve çarpmanın temel koşullarını sağlayan fonksiyona ***çarpma fonksiyonu*** denir ve c ile gösterilir.

$(m, n) \in \omega \times \omega$ elemanının çarpma fonksiyonu altındaki görüntüsü $m \times n$ ya da mn ile gösterilir. Yani

$$c(m, n) = m \times n = mn$$

yazılır. Buna karşılık, m ve n yerine doğrudan rakamlar verildiyse $m.n$ yazarız. Örneğin $(2, 3)$ noktasının görüntüsü 2.3 ile gösterilir.

Teorem 8.8. *Aşağıdaki eşitlikler her m, n, $k \in \omega$ için doğrudur.*

i. $m0 = 0$.

ii. $m1 = m$.

iii. $m(n + 1) = mn + m$.

iv. $m(n + k) = mn + mk$.

v. $0m = 0$.

vi. $1m = m$.

vii. $(m+1)n = mn + n.$

viii. $mn = nm.$

ix. $(m+n)k = mk + nk.$

x. $(mn)k = m(nk)$

xi. $m \leq n$ *ise* $mk \leq nk.$

xii. $mk \leq nk$ *ve* $k \neq 0$ *ise* $m \leq n.$

Kanıt: Bunların kanıtları oldukça kolay olmasına karşın oldukça fazla da tekrar durumları var. Kanıtlarda yer alan m, n, k'lar doğal sayıları gösterecek.
i. $m.0 = c(m, 0) = 0.$

ii. $m1 = c(m, 1) = c(m, s(0)) = c(m, 0) + m = m0 + m = 0 + m = m.$

iii. $m.(n+1) = ms(n) = c(m, s(n)) = c(m, n) + m = mn + m.$

iv. $A = \{k \in \omega : \forall m \forall n (m(n+k) = mn + nk)\}$ diyelim. A'nın tümevarımsal olduğunu göstereceğiz. $0 \in A$ olduğu açık. $k \in A$ verilsin.

$$\begin{aligned} m(n+s(k)) &= ms(n+k) \\ &= c(m, n+k) + m \\ &= m(n+k) + m \\ &= mn + mk + m \\ &= mn + m(k+1) \\ &= mn + ms(k) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $s(k) \in A$ olur. A'nın tümevarımsal bir küme olduğu gösterilmiştir. Yani $A = \omega$ olur.

v. $A = \{m \in \omega : 0m = 0\}$ kümesinin tümevarımsal olduğunu göstereceğiz. $0 \in A$ olur. $n \in A$ ise

$$0s(m) = 0(m+1) = 0m + 01 = 0 + 0 = 0$$

olacağından, $s(m) \in A$. Böylece $A = \omega$ olur.

vi. $A = \{m \in \omega : 1m = m\}$ kümesinin tümevarımsal olduğunu göstereceğiz. $0 \in A$ olur. $m \in A$ ise

$$1s(m) = 1(m+1) = 1m + 1.1 = m + 1 = s(m)$$

olacağından $s(m) \in A$. Böylece $A = \omega$ olur.

vii. $A = \{n \in \omega : \forall m((m+1)n = mn+n)\}$ kümesinin tümevarımsal olduğunu göstereceğiz. $0 \in A$ olduğu aşikar. $n \in A$ verilsin.

$$\begin{aligned}
(m+1)s(n) &= (m+1)(n+1) \\
&= (m+1)n + (m+1)1 \\
&= mn + n + (m+1) \\
&= (mn+m) + (n+1) \\
&= m(n+1) + (n+1) \\
&= ms(n) + s(n)
\end{aligned}$$

Yani $s(n) \in A$. Sonuç olarak, A tümevarımsal bir küme ve buradan $A = \omega$ olur.

viii. $A = \{m \in \omega : \forall n(m.n = n.m)\}$. Her $n \in \omega$ için $n.0 = 0.n$ olacağından $0 \in A$ olur. $m \in A$ olsun.

$$ns(m) = n(m+1) = nm + n.1 = mn + 1n = (m+1)n = s(m)n$$

elde edilir. Tümevarımla, istenilen gösterilmiş olur.

ix. Yukarıdaki eşitliklerin doğrudan sonucudur.

x. $A = \{k \in \omega : \forall m \forall n(m(nk) = (mn)k)\}$ kümesinin tümevarımsal olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. $0 \in A$ olduğu açık. $k \in \omega$ verilsin.

$$\begin{aligned}
m(ns(k)) &= m(n(k+1)) \\
&= m(nk+n) \\
&= m(nk) + mn \\
&= (mn)k + mn \\
&= (mn)(k+1) \\
&= (mn)s(k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $s(k) \in A$ olur. A'nın tümevarımsal olduğu gösterilmiş olur.

xi. $m \leq n$ ise $n = m + p$ olacak biçimde $k \in \omega$ vardır. Buradan

$$nk = (m+p)k = mk + pk$$

ve dolayısıyla, $mk \leq nk$ olur.

xii. $mk \leq nk$, $k \neq 0$ olsun. $m \leq n$ olmadığını varsayalım. $n < m$ olacaktır. $m = n + p$ olacak biçimde $p \neq 0$ vardır. Ayrıca,

$$nk = mk + p^{'}$$

olacak biçimde $p^{'}$ vardır. Buradan

$$nk = mk + p^{'} = (n+p)k + p^{'} = nk + pk + p^{'}$$

ve buradan da $pk + p^{'} = 0$ olur. Buradan $pk = 0$ elde edilir. $k \neq 0$ olduğundan $p = 0$ olur. Bu çelişkidir.

Alıştırmalar

8.14. $m \in \omega$ için $2m = m + m$ olduğunu gösterin.

8.15. $2.2 = 4$ olduğunu gösterin.

8.16. $2n = 3$ olacak biçimde, $n \in \omega$ olamayacağını gösterin.

8.17. $2n = 2m + 1$ olacak biçimde, $m, n \in \omega$ olamayacağını gösterin.

8.18. $2n$ biçiminde yazılan doğal sayıların çift ve $2m + 1$ biçimde yazılabilen sayıların tek olduğunu gösterin.

8.19. Tek sayılar kümesinin ve çift sayılar kümesinin doğal sayılar kümesine denk olduklarını gösterin.

8.20. $mm = 1$ olması için gerek ve yeter koşulun $m = 1$ olduğunu gösterin.

8.21. $mn = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $m = 0$ ya da $n = 0$ olduğunu gösterin.

8.22. (***Bölüm Algoritması***) $n \in \omega$ verilsin.

$$\{m \in \omega : \exists q \exists r((n = qn + r) \wedge (r \in n)\} = \omega$$

olduğunu gösterin. Böylece verilen her $m, n \in \omega$ için $m = nq + r$, $r < n$ olacak biçimde $q, r \in \omega$ vardır.

8.23. $f : \omega \to \omega$ fonksiyonu ve $c \in \omega$ için $cf : \omega \to \omega$ fonksiyonu $(cf)(k) = cf(k)$ eşitliğiyle tanımlansın. Boş olmayan sonlu her $A \subset \omega$ için

$$\textstyle\sum_{k \in A} cf(k) = c \sum_{k \in A} f(k)$$

olduğunu gösterin.

8.24. $0 \neq k \in \omega$ olmak üzere, $f(n) = kn$ eşitliğiyle tanımlı $f : \omega \to \omega$ fonksiyonunun birebir olduğunu gösterin.

8.6 Çarpmanın Farklı Biçimde Tanımlanması

$m, n \in \omega$ için $n \times m$ sonlu olduğundan $|n \times m| = |k|$ olacak biçimde tekbir tane k doğal sayısı vardır. Bu doğal sayı $n \odot m$ ile gösterilir.

Teorem 8.9. *$f : \omega \times \omega \to \omega$, $f(n,m) = n \odot m$ eşitliğiyle tanımlanan fonksiyon, çarpmanın temel koşullarını sağlar.*

Kanıt: $|m \odot 0| = |m \times \emptyset| = |\emptyset| = |0|$ olduğundan $m \odot 0 = 0$ olur. $m, n \in omega$ verilsin.

$$\begin{array}{rcl} |m \odot (n+1)| & = & |m \times (n+1)| \\ & = & |m \times (n \cup \{n\})| \\ & = & |(m \times n) \cup (m \times \{n\})| \\ & = & |(m \odot n)^{-} \cup m^{+}| \\ & = & |(m \odot n) \oplus m| \end{array}$$

ve böylece $m \odot (n+1) = m \odot n + m$ elde edilir. Kanıt tamamlanır.

Teorem 8.10. *Her m, $n \in \omega$ için $mn = m \odot n$ olur.*

Kanıt: Çarpmanın temel koşullarını sağlayan fonksiyonun tek olmasından hemen elde edilir. □

$m \odot n$ tanımını kullanarak, bir önceki altbölümde verilen teoremler belirli anlamlarda daha kolay ve kısa olarak kanıtlanabilir. Örneğin,

$$|mn| = |m \times n| = |n \times m| = |nm| = |nm|$$

ve buradan da $mn = nm$ elde edilir.

Alıştırmalar

8.25. Çarpma kavramı genellenebilir: $f : \omega \to \omega$ fonksiyonu verilsin. Her $0 < n \in \omega$ için $\prod_{k \in n} f(k)$ sonlu bir kümedir. Dolayısıyla, bu sonlu küme tek bir doğal sayıya denktir. Bu doğal sayıyı $\otimes_{k \in n} f$ ile gösterelim[4]. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. m,$n \in \omega$ verilsin. $f : \omega \to \omega$ fonksiyonu için $f(0) = m$, $f(1) = n$ ise

$$mn = \otimes_{k \in 2} f$$

olduğunu gösterin. Ayrıca $m = \otimes_{k \in 1} f$ olur.

ii. $f : \omega \to \omega$ fonsiyonu $f(n) = s(n)$ olmak üzere her $m \in \omega$ için $\otimes_{k \in s(m)} f(k)$ doğal sayısına n'nin faktöryeli denir ve $m!$ ile gösterilir.

$$0! = 1,\ 1! = 1 \text{ ve } 2! = 2$$

olduğunu gösterin. Bu tanımlama daha sonra tekrar ele alınarak faktöryel fonksiyon tanımlanacak.

iii. $0 \neq m \in \omega$ sabit olmak üzere $f : \omega \to \omega$ fonksiyonu $f(n) = m$ eşitliğiyle $\otimes_{k \in n} f(k)$'ye m'nin n'inci kuvveti denir ve m^n ile gösterilir. Her $n \geq 1$ için

$$1^n = 1 \text{ ve } 2^2 = 4$$

olduğunu gösterin. Bu tanımlama bir sonraki altbölümde farklı bir biçimde ele alınarak üstel fonksiyon tanımlanacak.

---

[4] Yaygın olarak $m \geq 2$ olmak üzere, $\odot_{k \in s(m)} f(k)$ yerine $f(0)f(1)...f(m)$ yazarız. Hatırladınız mı? Tanımlama yapmadan kullanılan $f(0)f(1)...f(n)$ semboller dizisinin matematiksel bir terim olduğu söylenemezdi.

8.6.1 Kurt Gödel

A: Hi. How are the truths in your brain system?
B: There are two types of truths in the system.
A: What are those?
B: One of those can be realized from system towards to world by symbols and languages.
A: Good. What about the other one?
B: The system is not authorized to explain it in details.
A: Fuck your brain system.

19.yüzyıl matematiğinin "patronu" David Hilbert, matematikte $0 = 1$ eşitliğinin gerçekleşme ihtimalini matematiğe yakıştıramıyor, matematiğin bu sonucu oluşturacak mantıksal bir yapıda olmadığından yüzde yüz emin bir tavırla, matematikçileri bunun kanıtlamaları için yönlendiriyordu. Yani matematiğin çelişkisiz olduğunun kanıtlanmasını istiyordu. Kurt Gödel, Hilbert'in emin ve gurur yüklü tahmininde yanıldığını kanıtlayarak, matematik topluluğunda tabir-i caizse "vayyy eyemkey" şaşkınlığı yaratıyordu.

Doğal sayılar sistemi'ni tanımlamayan sistemin bir matematiksel sistem olmasının beklenemeyeceği teamülden olup, teorik olarak bu sistemi inşa eden ve kabul gören teorik sistemin ZF olmasından dolayı, Gödel, Hilbert'in sorusunu bu zemin üzerinden yanıtlamıştır. Bu yanıt iki teoremden oluşur.

ZF sisteminde her teoremin bir kanıtının var olmasına karşın o kanıtı "açık bir kuralla" yazmak mümkün olmayabilir. Bu, Gödel'in **Birinci Eksiklik Teoremi** olarak bilinir ve şöyle de ifade edilebilir:

i. (ZF çelişkisiz ise) ZF'de her teoremin (doğru formül) kanıtı yazılamaz.

Bu, doğru olan "Kanıtı yazılabilen her formül bir teoremdir" ifadesinin ters yönünün doğru olmadığını söyler. Şöyle de ifade edilebilir: T, ZF'de bütün teoremlerin topluluğu, KT, en az bir kanıtı yazılabilen teoremlerin topluluğu olsun. Birinci Eksiklik Teoremi'nin dediği, tamı tamına

$$T \neq KT$$

olduğudur. Bu sonuç 1931'de yayınlanmıştır. Aslında Gödel, (i)'den daha fazlasını söylüyordu:

ii. Doğal sayılar sistemini üreten her önermesel yapıda doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanamayan bir doğru önerme var.

Peki, matematiğin oturtulduğu ZF sistemi "mükemmel" mi? Gödel'in bir diğer teoremi bu soruyu şöyle yanıtlar:

iii. ZF sisteminin tutarlı olduğu kendi içinde kanıtlanamaz.

Yani, ZF sisteminde

$$p, \neg p \in T$$

olacak biçimde bir p teoreminin olmadığı kanıtlanamaz. Buna **İkinci Eksiklik Teoremi** denir.

Yukarıdaki iki teorem Hilbert'in ortaya koymuş olduğu problemleri yanıtlıyordu. Bu yanıt, matematiğin varolması için tek ölçütün onu var yapan sistemin kendi içerisinde mantıksal olarak tutarlı olması gerektiği anlayışının doğru olmadığını söylüyordu. Demek ki kendi içinde tutarlı olduğu kanıtlanan bir sistem içerisinde matematik yapılamaz!

Gödel bu teoremleri 7 Eylül 1930'da Köninsberg'deki bir toplantıda, yirmi dakikalık bir konuşmada sunmasına karşın, John von Neumann dışında, toplantıya katılanlar bu sonuçları hiç umursamadılar. Daha sonra yayınlanacak olan bu sonuçlara toplantının tutanağında bile yer vermediler. Von Neumann, Gödel'i sonuçlarını daha ayrıntılı yazmaya yönlendirdi. Hilbert, Kurt Gödel'in bu sonuçlarına inanmasa da, bu teoremlerin kanıtını Paul Bernays ile yazdığı kitapta detaylı bir biçimde verdi. Bunun neticesinde, Gödel'in sonuçları dünya matematikçileri arasında geniş bir yer ve kabul görmekle birlikte, dönemin önemli mantıkçılarından Bertrand Russell için durum kuşkuluydu.

Günümüzde doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanmamış *tahmin* (*conjecture*) olarak adlandırılan formüller vardır. Bunlardan biri Riemann tahmini (Riemann Hipotezi) olarak adlandırılır. Kim bilir, belki de bu tahminlerin bazılarının ne doğruluğu, ne de yanlışlığı kanıtlanabilir. Örneğin, Riemann tahmini doğru (teorem) olabilir ama kanıtı yazılamayabilir. Bir başka örnek Goldbach tahminidir. Bu, 2'den büyük her çif sayının iki asal sayının toplamı olduğunu tahmin eder. Bu bir teorem olmuş olsa bile kanıtı yazılamayabilir!

Kurt Gödel'in bu teoremlerinin sonuçlarının matematik dünyasında yaratmış olduğu hayal kırıklığı, yaklaşık 2500 yıl önce karekök iki sayısının varlığının Pisagorcular için yarattığı hayalkırıklığına benzetilir.

Kurt Gödel 1906-1978 yılları arasında yaşamış, Avusturya'lı mantıkçı ve matematikçidir. Bazı yorumculara göre, Aristo'dan sonra gelmiş geçmiş en önemli mantıkçıdır. Doktorasını 1929'da Hahn Hans danışmanlığı altında tamamladı.

Gödel, 1938'de Avusturya'nın Almanya tarafından işgali sonrası zorunlu olarak Alman vatandaşı olur, sonrasında hem akademide hem de sosyal yaşamında tehditler algılamaya başlar. Ayrıca, askere alınma durumu oluşması üzerine, Amerika'ya gitmek için güvenli bir güzergah olarak önce Japonya'ya, sonra Pasifik'i aşarak San Fransisko'ya 4 Mart 1940'da ulaşmayı seçer. Sonrasında daha önce araştırmalarda bulunduğu İleri Araştırma Enstitüsü'nde çalışmaya başlar.

Gödel Seçim Aksiyomu'nun ZF sistemine eklenmesiyle elde edilen yapının çelişkisiz olduğunu 1935'de kanıtladı. Yani ZF sistemi çelişkisiz ise bu sisteme Seçim Aksiyomunun eklenmesiyle elde edilen ZFC sisteminin çelişkisiz olduğunu kanıtladı. Bunun uygulanmasıyla, Seçim Aksoyomunun değilinin ZF sisteminde bir teorem olmadığı gösterilmiş olur. Süreklilik Hipotezi 9.6.1'de konu edilecek. Süreklilik Hipotezi doğal sayılarla reel sayılar arasında kalan ve bu kümelere denk olmayan kümenin olmadığını söyler. Kurt Gödel ZFC sistemine Süreklilik Hipotezi'nin eklenmesiyle elde edilen yapının çelişkisiz olduğunu 1938'de kanıtlayarak sonucu 1940'da yayınlandı. Bunun sonucu olarak, Seçim Aksiyomunun değili ZFC'de bir teorem olamaz. Seçim Aksiyomunun değilinin ZF'ye ve Süreklilik Hipotezinin ZFC'ye eklenmesiyle nelerin olacağına 9.6.1'de yer verilecek ve ayrıca, Gödel ve Cohen arasındaki ilginç bir diyalogdan bahsedilecek.

Gödel'in bazı otorotilerce Aristo'dan sonra gelmiş geçmiş en iyi mantıkçı olarak değerlendirilmesine karşın, bu durum yaşam biçimine yansımamış, yani Gödel "mantıksızca" yaşamıştır. Bununla ilgili olarak birkaç çarpıcı anektod Gödel hakkında anlatılmaktadır. Bu geleneğe uyarak, o anekdotlardan bazılarını verelim: 1. Gödel 1948'de Amerika vatandaşı oldu. Gödel'in Amerikan vatandaşı olması için gerekli koşullardan biri, Amerika Anayasası ile ilgili temel bazı soruları yerel bir mahkeme önünde yanıtlaması idi. Ayrıca, bu sınav esnasında Gödel'e eşlik edecek iki kişinin olması gerekiyordu. Bu kişiler Albert Einstein ve Oskar Morgenstern'di. Yargıç'ın "Şimdiye kadar Alman vatandaşıydınız" demesi üzerine, "hayır, Avusturyalı" diyerek, ilk düzeltmeyi yaparak, "aşağılanmayı" bertaraf etti, Gödel istemi dışında Alman vatandaşı olmuştu. Yargıç'ın, "her neyse, orası berbat bir diktatörlük altındaydı... ama ne iyi ki Amerika'da böyle birşey sözkonusu bile olamaz" demesi üzerine, "Amerika Anayasası da bir diktatörlük üretebilir. İsterseniz kanıtlayabilirim" demesi üzerine, Yargıç, Einstein'in ve Morgenstern'in telkinleriyle Gödel'in kanıtını vermesini engeller. 2. General MacArthur'un, Kore'den dönüşü nedeniyle düzenlenen törendeki bir fotoğrafı New York Times gazetesinde yayınlanmış ve bu fotoğrafa ilişkin Gödel, Einstein'a "MacArthur'un bende gerçek bir fotoğrafı var. Bu fotoğrafla gazetede yayınlanan fotoğraftaki kişilerin, burunlarının uzunluğuyla burunların çeneye olan uzunluklarının oranları farklı. Gazetedeki fotoğraf MacArthur'in olamaz" demesi üzerine Einstein'in ne yanıt verdiği bilinmemektedir. Muhtemelen, "çattık deliye" demiştir. 3. Gödel, kendisiyle görüşmek için arayan kişilerle zaman ve mekan bildirerek sözleşmesine karşın, bu sözlerini yerine getirmeme nedenini soran arkadaşlarına, Gödel'in "ziyaretçisiyle görüşmemesini garantileyen en iyi yolun bu" olduğunu söylediği ifade edilir.

Gödel, Tanrı'nın varlığını (daha doğrusu Tanrı-gibi'nin varlığını) "ontolojik" olarak vermiştir. Bu kanıta, Altbölüm 1.9.1'de "Tanrının Varlığının "Kanıtı" başlığıyla yer verildi.

Matematik Dünyası dergisinin 2006- III sayısında şu ifadeler yer alır: "Einstein'la Gödel" başlıklı yazıdan: "...Einstein üstüne başına dikkat etmez, rahat giyinirdi. Pantolonu düşmesin diye sapan lastiği gibi birşey takardı. Gödel ise sanki sürekli kız istemeye gidiyor gibi hep iki dirhem bir çekirdek... Einstein çapkındır, eli işte gözü oynaşta denilenlerden. Gödel'in bir güzele yan gözle baktığı görülmemiştir...".

Gödel ile Cohen arasındaki Süreklilik Hipotezi üzerindeki bir iletişime 9.6.1'de değinilecek.

Gödel, yaşamının son yıllarında karısı dışında kendisi de dahil herkesin kendisini zehirlemek istediğini düşünmeye başlaması nedeniyle, sadece ve sadece karısının hazırladığı yemekleri yiyordu. Karısı öldükten sonra da bu düşüncesinden vazgeçmemiş ve 1978'de açlıktan ölmüştür. Tanrı, Gödel'i tuzağa düşürmüştü!

8.7 Üstel Fonksiyon

Bir X kümesinden Y kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi $Fonk(X, Y)$ ile gösterilmişti. X ve Y kümeleri sonlu ise $Fonk(X, Y)$ kümesi de sonlu ve bir doğal sayıya denktir. Özel olarak m, $n \in \omega$ için $Fonk(m, n)$ sonlu kümesine denk olan doğal sayı n^m ile gösterilecek[5].

A ve B ayrık kümeler ve C bir küme ise $f \to (f|_A, f|_B)$ olarak tanımlanan $Fonk(A \cup B, C) \to Fonk(A, C) \times Fonk(B, C)$ fonksiyon birebir ve örten olduğundan,

$$|Fonk(A \cup B, C) = |Fonk(A, C) \times Fonk(B, C)|$$

olur. Keyfi A, B ve C kümeleri için

$$\varphi(F)(a, b) = F(a)(b)$$

eşitliğiyle bir fonksiyon tanımlanabileceğinden,

$$|Fonk(A, Fonk(B, C)| = |Fonk(A \times B, C)|$$

olur.

Teorem 8.11. *m, n, $k \in w$ doğal sayıları için aşağıdaki eşitlik gerçekleşir.*

[5]Herhangi bir x reel sayı ve doğal sayı n için, x'in n'inci kuvveti olan x^n gösterimi, ilk olarak 1677'de Rene Descartes tarafından kullanılmıştır. Buna karşın, Descartes x^2 yerine xx yazıyordu.

i. $n^0 = 1$[6].

ii. $n^{m+k} = n^m n^k$.

iii. $n^{mk} = (n^m)^k$.

Kanıt: **i**. $|n^0| = |Fonk(0,n) \equiv Fonk(\emptyset,n)| = |1|$ olmasından $n^0 = 1$ olur.
ii. İstenilen, aşağıdaki eşitlikten elde edilir.

$$\begin{aligned} n^{m+k} &= |Fonkc(m+k,n)| \\ &= |Fonk(m^- \cup k^+, n)| \\ &= |Fonk(m^-, n) \times Func(k^+, n)| \\ &= |Fonk(m,n) \times Fonk(k,n)| \\ &= |n^m \times n^k| \\ &= n^m n^k \end{aligned}$$

.
iii. Aşağıdaki eşitlikten,

$$\begin{aligned} (n^m)^k &= |Func(k, n^m)| \\ &= |Func(k, Func(m,n))| \\ &= |Func(k \times m, n)| \\ &= |Func(km, n)| \\ &= n^{km} \end{aligned}$$

istenilen elde edilir.

Tanım 8.5. $f(n,m) = n^m$ eşitliğiyle tanımlı $f : \omega \times \omega \to \omega$ fonksiyonuna ***üstel fonksiyon*** denir.

Toplama ve çarpma fonksiyonları, recursive fonksiyon kavramı uygulanarak tanımlanmasına karşın, üstel fonksiyonun tanımlanmasında bu durum uygulanmadı. Öyle de yapılabilir: $(\omega \times \omega) \times \omega$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan P altkümesine ***üstel küme*** diyelim.

i. $((n,0),1) \in P$.

ii. $((m,n),k) \in P$ ise $((m,s(n)),mk) \in P$

$(\omega \times \omega) \times \omega$ bir üstel küme olduğundan, elemanları üstel kümeler olan küme, boşkümeden farklıdır. Aşağıdaki teoremin kanıtını okura bırakıyoruz.

Teorem 8.12. *Elemanları üstel kümeler olan kümelerin arakesiti üstel fonksiyonun grafiğidir.*

[6]Sıklıkla, sıfırın sıfırıncı kuvveti 0^0 sayısının neye eşit olduğu “tartışmalı” biçimde sorulur. Bu tanımlamaya göre tartışılacak bir durum yok.

Alıştırmalar

8.26. n^m sayısının çift olması için gerek ve yeter koşulun $m = 0$ ya da n'nin çift olması olduğunu gösterin.

8.27. n^m sayısının tek olması için gerek ve yeter koşulun $m \neq 0$ ve n'nin tek olması olduğunu gösterin.

8.28. Her $m \in \omega$ için, $e_m : \omega \to \omega$ fonksiyonu,

$$e_m(0) = 1 \text{ ve } e_m(s(n)) = e_m(n)m$$

eşitliğiyle tanımlansın. Her $n, m \in \omega$ için,

$$e_m(n) = m^n$$

olduğunu gösterin.

8.29. $\omega \times \omega$ kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan F altkümesine **faktöryel küme** diyelim.

i. $(0, 1) \in F$.
ii. $(n, k) \in T \Rightarrow (s(n), s(n)k) \in F$.

Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

a. En az bir faktöryel küme var.
b. Bütün faktöryel kümelerin arakesiti faktöryel kümedir. Bu kümeyi F ile gösterelim.
c. F, bir $f : \omega \to \omega$ fonksiyonunun grafiğidir.
d. $g : \omega \to \omega$ fonksiyonu,

$$g(0) = 1 \text{ ve her } n \in \omega \text{ için } g(n+1) = g(n)(n+1)$$

eşitliğini sağlıyorsa, $f = g$ olur. f fonksiyonuna **faktöryel fonksiyon** denir ve

$$f(n) = n!$$

yazılır[7].

8.30. $0! = 1$, $1! = 1$ ve $2! = 2$ olduğunu gösterin.

8.31. $26! \neq 3226$ olduğunu kanıtlayın:-)

8.7.1 Gauss'un Toplaması Gerçekten Doğru!

Üç noktanın ("...") içinde kimbilir neler neler var; dikkat etmek lazım.

Ahmet'in kendisine "Senin ananı avradını ..." diyen Mehmet'e hakaret davası açması sonucu mahkemenin "hakaret unsuruna rastlanmamıştır" kararını vermesi yanlış olmayabilir. Çünkü teknik açıdan-önermesel mantık olarak- üç nokta "..." da bir hakaret unsuru yoktur. Matematikte de tanımlanmadığı sürece üç noktanın bir anlamı yoktur. Örneğin bir n doğal sayısı için

[7] $n!$ notasyonu ilk kez 1808 yılında, Christian Kramp tarafından kullanmıştır. Albert Eagle bunun yerine 1958'de $!n$ kullanmış olsa da günümüzde $n!$ kullanılmaktadır.

$$0+1+...+n$$

ifadesininin ne anlama geldiği sezgisel olarak tahmin edilse de bu ifadede geçen üç nokta matematiksel bir ifade olmadığından, üç noktayı "..." içeren semboller topluluğu bir matematiksel ifade olmayacaktır. Dolayısıyla, Gauss'un

$$1+2+...+100=5050$$

"eşitliği" eşitlik değildir. Yıllarca kandırılmışız!

Bu altbölümde, yukarıda konu edilen belirsizlik matematiksel tanımlamalarla giderilecek. Ayrıca, toplama ve çarpma fonksiyonları daha da genellenecek.

$n \in \omega$ olmak üzere, $f : s(n) \to \omega$ bir fonksiyon olsun.

$$A = \{f(k) \times \{k\} : k \in n\}$$

elemanları sonlu olan sonlu bir kümedir. Dolayısıyla, A'nın bileşimi $\cup A$ sonlu bir kümedir. Bu küme $\oplus f$ ile göstereceğimiz tek bir doğal sayıya denktir. Bazen

$$\oplus f = f(1) + f(2) + ... + f(n) = \sum f = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

yazabiliriz. $n = 1$ ise

$$f(0) + f(1) + ... + f(n) = f(1),$$

ve $n = 2$ için

$$f(0) + f(1) + ... + f(n) = f(1) + f(2)$$

olacaktır.

Tanım 8.6. $n \in \omega$ olmak üzere, $f : s(n) \to \omega$ fonksiyonu için, $\oplus_{k \in s(n)} f(k)$ doğal sayısına f fonksiyonunun toplamı denir.

Teorem 8.13. *$m, n \in \omega$ verilsin. $f : s(1) \to \omega$ fonksiyonu*

$$f(0) = m \text{ ve } f(1) = n$$

eşitliğiyle tanımlansın.

$$m + n = \sum_{k \in s(1)} f(k)$$

olur.

Teorem 8.14. *$n \in \omega$ verilsin. $f : s(n) \to s(n)$ birebir ve örten fonksiyon, $g : s(n) \to \omega$ bir fonksiyon ise*

$$\sum g \circ f(k) = \sum g(k)$$

olur.

Teorem 8.15. *n, $m \in \omega$ olmak üzere $f : s(n) \to \omega$ ve $g : s(m) \to \omega$,*

$$h(k) = \begin{cases} f(k) & ; 0 \leq k \leq n \\ g(k) & ; s(n) \leq k \leq s(n+m) \end{cases}$$

olmak üzere $h : s(s(m+n)) \to \omega$ fonksiyonu tanımlansın.

$$\sum f(k) + \sum g(k) = \sum h(k)$$

olur.

Tanım 8.7. $A \subset \omega$ boş olmayan sonlu bir küme olsun. $f : n \to A$ birebir ve örten olmak üzere A kümesinin toplamı

$$\sum A = \oplus f$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $\sum \emptyset = 0$ alırız.

Tanım 8.8. $\bar{t}(A, B) = (\sum A) + (\sum B)$ eştliğiyle tanımlı $\bar{t} : \wp(\omega) \times \wp(\omega) \to \omega$ fonksiyonuna ***genellenmiş toplama fonksiyonu*** denir.

Her m, $n \in \omega$ için

$$\bar{t}(\{m\}, \{n\}) = m + n$$

olur. $A = \{m_k : k \in s(n)\} \subset \omega$ ise

$$\sum A = m_0 + m_1 + ... + m_n$$

gösterimi altında üç nokta ... tanımlanmış olur.

$f : s(n) \to \omega$ fonksiyon verilsin. $\prod_{k \in s(n)} f(k)$ sonlu bir kümedir. Bu kümeye denk olan doğal sayıya f'nin çarpımı denir ve $\odot f$ ile gösterilir. Bazen

$$\odot f = f(0)f(1)...f(n)$$

gösterimleri de kullanılır. Bu gösterimde sıra önemli değildir. Yani $k : s(n) \to s(n)$ birebir ve örten fonksiyon ise

$$\odot f = f(k(0))f(k(1))...f(k(n))$$

olur.

$A \subseteq \omega$ boş olmayan bir küme ve $f : s(n) \to A$ birebir ve örten fonksiyon ise A kümesinin çarpımı

$$\odot A = \odot f$$

olarak gösterilir.

Teorem 8.16. *f, g ve h fonksiyonları Teorem 7.15'deki gibi olsun.*

$$\odot h = (\odot f)(\odot g)$$

olur.

Tanım 8.9. $\overline{c}(A,B) = (\odot A)(\odot B)$ eşitliğiyle tanımlı $\overline{c} : \wp(\omega) \times \wp(\omega) \to \omega$ fonksiyonuna ***genellenmiş çarpma fonksiyonu*** denir.

Her m,$n \in \omega$ için $\overline{c}(\{m\} \times \{n\}) = mn$ olur.

Alıştırmalar

8.32. Verilen fonksiyona göre, her $n \in \omega$ için eşitlikleri tanımlanan $f : s(n) \to \omega$ fonksiyonları için aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $\sum f = 0$, $f(k) = 0$

ii. $\sum f = n + 1$, $f(k) = 1$

iii. $2\sum f = n(n+1)$, $f(k) = k$.

iv. $6\sum f = n(n+1)(2n+1)$, $f(k) = k^2$.

8.33. $f, g : \omega \to \omega$ fonksiyonu için, $f+g : \omega \to \omega$ fonksiyonu $(f+g)(k) = f(k)+g(k)$ eşitliğiyle tanımlansın. Boş olmayan sonlu her $A \subset \omega$ kümesi için,

$$\sum f + g = \sum f + \sum g$$

olduğunu gösterin.

8.34. $f : \omega \to \omega$ bir fonksiyon ve A ve B, ω'nın boş olmayan iki ayrık altkümesi olsun.

$$\textstyle\sum_{k \in A \cup B} f(k) = \sum_{k \in A} f(k) + \sum_{k \in B} f(k).$$

8.35. $f : \omega \times \omega \to Fonk(\omega, \omega)$ fonksiyonu

$$f(m,n)(k) = \begin{cases} m & ; k = 0 \\ n & ; k = 1 \\ 0 & ; k \notin \{0,1\} \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlansın.

$$m + n = \textstyle\sum_{k \in \{0,1\}} f(m,n)(k)$$

olduğunu gösterin.

8.36. $m \in \omega$ verilsin. $n \in \omega$ olmak üzere, $f : s(n) \to \omega$ fonksiyonu $f(k) = m$ eşitliğiyle tanımlansın.

i. $\oplus f = ms(n)$.

i. $\oplus f = m^{s(n)}$.

olduğunu gösterin.

8.37. m, $n \in \omega$ olmak üzere, $a_i \in \omega$ $(0 \leq i \leq n)$ ve $b_i \in \omega$ $(0 \leq i \leq m)$ doğal sayıları verilsin. $i \leq n$ için $c_i = a_i$ ve $0 \leq i \leq m$ için $c_{s(n+i)} = b_i$ olarak tanımlansın.

$$(a_0 a_1 ... a_n)(b_0 b_1 ... b_m) = c_0 c_1 ... c_{s(m+n)}$$

olduğunu gösterin.

8.8 Doğal Sayıların Gösterimi

Gram ve ton iki ağırlık ölçü birimi olmasına karşın, bir geminin ağırlığı gramla ifade edilmez. Benzer biçimde milimetre, santimetre ve kilometre uzunluk ölçü birimleri olmasına ve iki gezegen arasındaki mesafe santimetre ya da milimetreyle ifade edilebilir olmasına rağmen, bu tür uzaklıklar kilometre ya da daha büyük birimlerle ifade edilir. Böyle yapmakla amaç, daha kolay ifade etme ve daha kolay algılamayı sağlamaktır. Gerçekten de bir pazarda bir satıcıdan "4000 gr elma lütfen" diye elma isteyen bir müşteriye rastlanamayacağı gibi, rastlansa bile pazarcı böyle bir talebi "algılamakta" duraksama yaşayacaktır. Bu tür yaklaşımlar herhangi bir birim ile donatılmamış sayılar üzerinden de farklı ve soyut biçimlerde yapılabilir. Sayı sisteminin tanımlamasında kullanılan "taban" kavramının kökeni, yukarıda birkaç satırla anlatılmaya çalışılan yaklaşımın soyut biçimidir denilebilir.

Sıfırdan ona kadar olan sayıların nasıl gösterildiğini ve hangi yöntemle tanımlandığını biliyoruz. Bir n doğal sayısı için 10^n'nin ne anlama geldiğini de biliyoruz. Bilmesek de tümevarımla kolaylıkla anlayabiliriz. Bunun nasıl gösterildiğini (bilmiyorsak bile) biliyoruz diyelim; örneğin 10^3 sayısı anlamlı, 1000 (henüz) anlamsız olsa da, 10^3, 1000 ile gösterilir ve $10^3 = 1000$ yazılır. Burada yer alan $=$ sembolü, sadece bir gösterim anlamındadır.

Verilen her $n \in \omega$ ve $1 \leq m \leq 9$ eşitsizliğini sağlayan m doğal sayısı için, $m(10^n)$ sayısının ne olduğunu biliyoruz ve bu sayıyı m'nin sağına n tane sıfır yazarak gösterebiliyoruz. Örneğin, $3(10^2)$ sayısını 300 ile, $5(10^6)$ sayısını 5000000 ile gösterip,

$$3(10^2) = 300 \text{ ve } 5(10^6) = 5000000$$

yazıyoruz.

"$2(10^3) + 5(10^2) + 1(10^1) + 6$ sayısı neden 2516 ile gösterilir? Bu gösterim gelişi güzel bir gösterim midir?" sorusu oldukça anlamlıdır. Bu, rastgele gösterim olmayıp, bir kurala göre yazılır. Bu kuralın keşfi en büyük devrimlerden biridir çünkü bütün doğal sayılar sıfırdan dokuza kadar olan sayıların yanyana dizilmesiyle gösterilebilir. Bunu göstermek için önce aşağıdaki teoremi verelim. Teoremin kanıtı tümevarımla verilebilir olup, detaylar okura bırakılmıştır.

Teorem 8.17. *Her $0 \neq m \in \omega$ için,*

$$m = k_n 10^n + k_{n-1} 10^{n-1} + ... + k_1 10^1 + k_0 10^0$$

ve $k_n \neq 0$ olacak biçimde $0 \leq k_j < 10$ doğal sayılar vardır. Ayrıca bu yazılım tektir.

Bu teoremin verdiği avantajla, aşağıdaki tanımlama yapılabilir.

Tanım 8.10. n bir doğal sayı ve $k_n \neq 0$ olmak üzere, $0 \leq k_j < 10$ doğal sayıları verilsin.

$$k_n10^n + k_{n-1}10^{n-1} + ... + k_1 10^1 + k_0 10^0$$

sayısı

$$k_n k_{n-1} ... k_1 k_0$$

ile gösterilir ve

$$k_n10^n + k_{n-1}10^{n-1} + ... + k_1 10^1 + k_0 10^0 = k_n k_{n-1} ... k_0$$

yazılır.

Bu tanım ve yukarıda verilen teorem kullanılarak sıfırdan farklı her doğal sayı m,

$$m = k_n k_{n-1} ... k_0$$

ve $k_n \neq 0$ olacak biçimde $0 \leq k_i \leq 9$ doğal sayıları vardır.

Yukarıdaki teoremde 10 yerine herhangi bir $2 \leq p$ doğal sayısı alındığında da bu teorem doğrudur. Bunun sonucu olarak, yukarıda verilen tanım, p doğal sayısı için geçerli olur. Bu durumda,

$$n = k_n k_{n-1} ... k_1 k_0$$

ifadesine, n'nin p **tabanına göre yazılımı** denir[8]. Doğal sayının hangi tabana göre yazıldığını belirtmek için,

$$n = (k_n k_{n-1} ... k_1 k_0)_p$$

gösterimi kullanılabilir.

Alıştırmalar

[8]Birçok farklı tabana göre inşa edilmiş sayı sistemleri vardır. Günümüzde yaygın olarak kullanılan sayı sistemi 10'luk taban sistemi olup, bunun arkasındaki temel kökenin her insanın iki eli ve her elde 5 parmak olması olduğu düşünülür. 5'lik taban sisteminin tanımlanıp kullanılmasının arkasında da aynı neden sözkonusu. 20'lik taban sisteminin kullanılmasının arka planındaysa, bunun bir ileri aşaması olan, iki el ve iki ayakta toplam 20 parmak bulunması olduğu düçünülmektedir. Bunun sonucu olarak ayak parmakları açık olarak yaşamlarını sürdüren medeniyetlerin, diğerlerine göre, 20'lik taban sistemini daha önce kullanmaya başladıkları mantıksal bir sonuç olarak düşünülmekte. Kayıtlara göre 20'lik taban sisteminin ilk kullanıcıları Maya medeniyetidir. 20'lik taban sisteminin tarihsel kökenini araştırma sürecinde bu sayıyla ilgili bazı ilginç bilgilerle karşılaştım: Fransızca'da 80 sayısı dört yirmilik, "skor" kelimesi İngilizce'de yirmi anlamına gelen antik bir sözcük, İncil'in Kral Jamak versiyonunda ideal insan boyu skorla ifade edilip, "üş skor artı 10", 13. yüzyılda Paris'te 300 savaş gazisini barındırmak için inşa edilen hastanenin adı " L'Hopital des Quinze-Vingts" olup, "On Beş-Yirminin hastanesi" anlamındadır. 60'lık taban sayı sisteminin kullanımı MÖ 3000 yıllarına kadar gitmektedir. Bu tabana göre sayı sistemini ilk kullananların Sümerler olduğu ve buradan Babillere geçtiği sanılmakta. Zamanın, açının ve coğrafi koorinatların kullanımı bu tabana göre olan sayı sisteminden gelmektedir. 2'lik taban sistemi de ilk kullanılan sistemlerden olup, günümüzün bilgisayar yapısının çalışma düzeneği bu sistem üzerine inşa edilmiştir.

8.38. Her doğal sayının 10'luk tabana göre yazılabiliyor olmasını kullanarak, iki doğal sayı için yapılan ve günümüzde herkesin bildiği toplama ve çarpma işleminin "anlamlı" bir kurala göre yapıldığını gösterin ve ikna olun. Bunun bir uygulaması olarak,

$$127 \times 227 = 28829$$

eşitliğini kanıtlayın.

8.39. Her ne kadar her doğal sayının $p \geq$ doğal sayı tabanına göre yazılabileceği ifade edilmiş olsa da $p = 1$ için de yazılabileceğini tümevarımla gösterin.

9. Aritmetiğin Temel Teoremi

Verilen iki doğal sayı arasındaki temel ilişki aritmetik işlemlerle belirlenebilir. Bu ilişki, verilen doğal sayılar m, n olmak üzere, bazı k ve r doğal sayılar için

$$m = kn + r \text{ ya da } n = km + r$$

biçiminde yazılabilir olmasıdır. Bu yazılımda, genel olarak k ve r doğal sayıları tek olmayabilir. Örneğin, $m = 0$ ve $n = 0$ olmak üzere her $k \in \omega$ için

$$m = kn + 0$$

olması gibi. Ya da $m = 7$ ve $n = 3$ için

$$m = 2.n + 1 = 1.n + 4$$

olması gibi. Ama pratik nedenlerden dolayı tek yazılım önemli olacak. Aslında bu kısıtlama çok ağır bir kısıtlama değildir. Gerçekten de en az biri sıfırdan farklı iki doğal sayı için belirli koşullar altında bu yazılım tek olacaktır. Bu yazılım sonucu doğal sayıların aritmetiğinin çok daha iyi anlaşılmasının yolu açılabilecektir. Bu bölümde, bu yazılımın getirdiği sonuçlardan bazı temel sonuçlar verilecek. Bunlardan biri ***Aritmetiğin Temel Teoremi*** dir.

9.1 Bölme Algoritması

Teorem 9.1. *$m, n \in \omega$, $m > 1$ doğal sayıları verilsin.*

$$n = qm + r,\ 0 \leq r < m$$

olacak biçimde, q ve r doğal sayıları var ve tektir.

Kanıt: Her $k \in \omega$ için, A_k, km'den büyük ya da eşit ve $(k+1)m$'den küçük olan doğal sayıların kümesi olsun. Yani,

$$A_k = \{n \in \omega : km \leq n < (k+1)m\}$$

olsun. Bu kümelerin ayrık olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$$A = \bigcup_k A_k$$

diyelim. $A = \omega$ olduğu tümevarımla hemen gösterilir. $n \in \omega = A$ olduğundan, $n \in A_k$ olacak biçimde tek bir tane $k \in \omega$ var.

$$km \leq n < (k+1)m$$

olacağından,

$$n = km + r$$

olacak biçimde, $r \in \omega$ vardır.

$$km \leq km + r < (k+1)m$$

eşitsizliği üzerinden sadeleştirme yapılarak $0 \leq r < m$ olur. A_k kümeleri ayrık olduğundan, bu eşitliği sağlayan k doğal sayısı da tektir. Kanıt biter. □

Yukarıda verilen teoremde $m = 0$ alınma durumunda $r = 0 < m$ olamayacağından $n = qm + r$ gibi bir yazılım olamayacaktır. Aşağıdaki teoremin kanıtı yukarıda verilen teoremin uygulanmasıyla hemen elde edilir. Teoremde geçen

$$n\omega + r,\ \{nk + r : k, r \in \omega\}$$

kümesini göstermekte.

Teorem 9.2. *Her $n \geq 1$ için $s(k) = n$ olmak üzere*

$$\omega = \bigcup_{r=0}^{k} (n\omega + r)$$

olur. Ayrıca bileşen kümeler ikişerli olarak ayrıktır.

9.2 Ortak Bölen

Tanım 9.1. $n, d \in \omega$ için $n = dm$ olacak biçimde $m \in \omega$ varsa d'ye n'yi ***böler*** ya da n'nin **böleni** denir ve $d|n$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 9.3. *$m, n, k, t \in \omega$ için aşağıdakiler doğrudur.*

i. $m|0$, $1|m$, $m|m$.

ii. $m|1$ *olması için gerek ve yeter koşul* $m = 1$ *olmasıdır.*

iii. $m|n$ *ve* $k|t$ *ise* $mk|nt$.

iv. *$m|n$ ve $n|k$ ise $m|k$.*

v. *$m|n$ ve $n|m$ olması için gerek ve yeter koşul $m = n$ olmasıdır.*

vi. *$m|n$ ve $n \neq 0$ ise $m \leq n$.*

vii. *$m|n$ ve $m|k$ ise her x, $y \in \omega$ için $m|(nx + ky)$ olur.*

Tanım 9.2. d, m ve n doğal sayılarının böleni ise, d'ye bu sayıların ***ortak böleni*** denir.

En az biri sıfırdan farklı olan iki doğal sayının ortak bölenleri sonludur. Dolayısıyla, bu bölenlerin en büyüğü vardır. $0 \neq m$ ve $n \in \omega$ sayılarının en büyük ortak böleni $gcd(m, n)$ ile gösterilir. Yani şunlar sağlanır:

i. $gcd(m, n)|m$ ve $gcd(m, n)|n$.

ii. $k|m$ ve $k|n$ ise $k \leq gcd(m, n)$.

En büyük ortak bölen sonlu adımda aşağıdaki teoremin uygulanmasıyla bulunur.

Teorem 9.4. *$n \neq 0$ olmak üzere $m = qn + r$ ise $gcd(m, n) = gcd(n, r)$ olur.*

Kanıt: $d = gcd(m, n)$ ise $d|r$ olduğu açık. Dolayısıyla d, n ve r'nin ortak bölenidir. c, n ve r'nin ortak böleniyse, m'nin de ortak böleni olur. O halde, $c \leq d$ olur. Böylece d, n ve r'nin en büyük ortak böleni olur. □

m ve n doğal sayıları verilsin. Bölme algoritmasının uygulanmasıyla,

$$m = q_1 n + r_1 \text{ ve } 0 \leq r_1 < n$$

olacak biçimde doğal sayılar vardır. $r_1 = 0$ ise $gcd(m, n) = n$ olur. Değilse işlemi bir adım daha ilerleterek

$$n = q_2 r_1 + r_2$$

ve $0 \leq r_2 < r_1$ eşitliğini sağlayan doğal sayılar elde edilir. $r_2 = 0$ ise

$$gcd(m, n) = gcd(n, r_1) = r_1$$

olacaktır. $r_2 > 0$ olma durumunda yine

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3$$

ve $0 \leq r_2 < r_3$ olacak biçimde doğal sayılar vardır. $r_3 = 0$ ise

$$gcd(m, n) = gcd(n, r_1) = gcd(r_1, r_2) = r_2$$

olur. Bu şekilde devam ederek, $r_n = 0$ olmak üzere,

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

eşitliğine ulaşılır. Burada

$$s(s(n-2)) = s(n-1) = n$$

olur. Sonuç olarak,

$$gcd(m, n) = gcd(n, r_1) = ... = gcd(r_{n-1}, 0) = r_{n-1}$$

elde edilir.

Örneğin, 28 ve 83'ün en büyük ortak bölenini bulmak için,

$$83 = 2.28 + 27$$

$$28 = 1.27 + 1$$

$$27 = 27.1 + 0$$

olmasını ve yukarıdaki algoritmayı uygulayarak sonuç olarak

$$gcd(83, 28) = gcd(28, 27) = gcd(27, 1) = 1$$

elde edilir.

En az biri sıfırdan farklı iki doğal sayının en büyük ortak böleninin hangi formda yazılabileceğine ilişkin bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 9.5. *En az biri sıfırdan farklı olan iki doğal sayı m ve n'nin en büyük ortak böleni d vardır. Ayrıca, bazı x, $y \in \omega$ için*

$$d + mx = ny \text{ ya da } d + my = nx$$

olur.

Kanıt: A, bazı x, $y \in \omega$ için

$$d + mx = ny \text{ ya da } d + my = nx$$

biçiminde yazılan, sıfırdan farklı $d \in \omega$ sayılarının kümesi olsun. $m \neq 0$ ise

$$m + 0.n = 1m \in A$$

olacağından, $m \in A$ olur. Benzer biçimde $n \neq 0$ ise $n \in A$ olacaktır. Dolayısıyla, A boş olmayan bir kümedir. İyi sıralama ilkesi gereği A'nın en küçük elemanı d vardır. Bazı x, $y \in \omega$ için

$$d + mx = ny$$

olduğunu varsayabiliriz. $d \neq 0$ olduğundan, n ve y sıfırdan farklı olur.

Ayrıca, $m \neq 0$ ve $n = 0$ ya da $m = 0$ ve $n \neq 0$ için istenen açık. Dolayaısıyla, m ve n sıfırdan farklı alınabilir. Bölüm algoritması kullanılarak

$$m = qd + r,\ 0 \leq r < d$$

olacak biçimde q, $r \in \omega$ vardır. $d + mx = ny$ eşitliği q ile çarpılıp r eklenerek,

$$m + qmx = qd + r + qmx = qny + r$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$r + (qy)n = m(1 + qx)$$

elde edilir. $0 < r$ olsaydı, $r \in A$ ve dolayısıyla, $d \leq r$ olurdu. Bu da $r < d$ olmasıyla çelişir. O halde $r = 0$ olur. Böylece, $r = 0$ olur ve d, m'yi böler. d'nin n'yi böldüğünü göstermek için:

$$n = qd + r \text{ ve } 0 \leq r < d$$

olacak biçimde q, $r \in \omega$ seçelim. $y \neq 0$ olduğunu not edelim. $x = 0$ ise

$$n \geq d = ny \geq n$$

olacağından, $d = n$ ve dolayısıyla d, n'yi böler. $x \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. $d + mx = ny$ eşitliğini q ile çarpıp elde edilen eşitliğin her iki tarafına r eklenirse,

$$n + qmx = (qy)n + r$$

elde edilir. $qy \geq 1$ olduğundan, $qy = s + 1$ olacak biçimde $s \in \omega$ seçebiliriz. Buradan

$$n + qmx = (s + 1)n + r$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$r + sn = (qx)m$$

olur. $0 < r$ olsaydı $r \in A$ ve dolayısıyla, $d \leq r$ olurdu ki, bu çelişkidir. O halde $r = 0$ ve dolayısıyla, d, n'yi de böler.

d'nin m ve n'nin ortak bölenlerinin en büyüğü olduğunu göstermek kanıtı tamamlayacak. $0 \neq c \in \omega$'nın m ve n'yi böldüğünü varsayalım.

$$m = kc \text{ ve } n = qc$$

olacak biçimde k, $q \in \omega$ vardır. Buradan

$$d + (kx)c = (qy)c$$

olur. $(kx)c \leq (qy)c$ ve dolayısıyla, $kx < qy$ olur. $qy = kx + s$ olacak biçimde $0 \neq s \in \omega$ vardır. Buradan

$$d + (kx)c = (qy)c = (kx + s)c = (kx)c + sc$$

ve buradan da $d = sc$ olur. Sonuç olarak $d \geq c$ elde edilir. □

Alıştırmalar

9.1. En az biri sıfırdan farklı olan m, $n \in \omega$ için $gcd(m, n) = gcd(n, m)$ olduğunu gösterin.

9.2. Sıfırdan farklı her $m \in \omega$ için $gcd(m, 0) = m$ olduğunu gösterin.

9.3. Doğal sayılar kümesinde $gcd(m, n) = d$ ve $c \in \omega$ olmak üzere aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

   i. $c + mx = ny$ ya da $c + my = nx$ olacak biçimde x, $y \in \omega$ var.

   ii. $d|c$.

9.4. m ve n, en az biri sıfırdan farklı doğal sayı olmak üzere $gcd(m, n) = 1$ ise m ve n ikilisine ***aralarında asal*** denir. m ve n'nin aralarında asal olması için gerek ve yeter koşulun $1 + mx = ny$ ya da $1 + nx = my$ olacak biçimde x ve y doğal sayılarının olduğunu gösterin.

9.5. m, n ve k doğal sayıları için $n \neq 0$ ve $m = nk$ ise k yerine $\frac{m}{n}$ yazalım. $gcd(m, n) = d$ ise $gcd(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$ olduğunu gösterin.

9.6. $m|k$ ve $n|k$ ve $gcd(m, n) = 1$ ise $mn|k$ olduğunu gösterin.

9.3 Ortak Katı

Tanım 9.3. $a|d$, $b|d$ koşullarını sağlayan $a, b, d \in \omega$ doğal sayıları için, d'ye a ve b'nin **ortak katı** denir.

Verilen her $a, b \in \omega$ için, ab, a ve b'nin ortak katı olur. Dolayısıla a ve b'nin en küçük ortak katı vardır ve $lcm(a, b)$ ile gösterilir. Yani,

i. $a|lcm(a, b)$ ve $b|lcm(a, b)$,

ii. $a|k$ ve $b|k$ ise $lcm(a, b) \leq k$

olur. İki doğal sayının en büyük ortak böleniyle en küçük ortak katı arasındaki temel ilişki şudur:

Teorem 9.6. *$a, b \in \omega$ için.*

$$gcd(a, b)lcm(a, b) = ab$$

Herşeyi yazardan beklemeyin; bu teoremin kanıtı okura bırakıldı.

9.4 Asal Sayılar ve Aritmetiğin Temel Teoremi

Asal sayıların tanımı yukarıda alıştırmalar kısmında verilmişti. Farklı bir biçimde ona denk olan tanımı tekrarlayalım.

Tanım 9.4. $m > 1$ ve $n > 1$ olmak üzere mn biçiminde yazılamayan doğal sayılara ***asal sayı*** denir.

Elemanları sadece ve sadece asal sayılar olan topluluk bir kümedir. Bu küme P ile gösterilsin.

$$P = \{p \in \omega \setminus \{0,1\} : \forall m \forall n (p = mn \to (m = 1 \vee n = 1))\}$$

olur. P kümesini

$$P = \omega \setminus [(\omega \setminus \{0,1\})(\omega \setminus \{0,1\})]$$

olarak da ifade edebiliriz.

Tanım gereği, 0 ve 1 doğal sayıları asal değildir. 2 bir asal sayıdır. Gerçekten de $m > 1$, $n > 1$ olmak üzere

$$2 = mn$$

olarak yazılabildiğini varsayalım.

$$m = 2 + k \text{ ve } n = 2 + t$$

olacak biçimde k ve t doğal sayılar vardır. Buradan

$$\begin{aligned} 2.1 &= 2 \\ &= mn \\ &= (2+k)(2+t) \\ &= 2.2 + 2.t + 2k + 2.2 \\ &= 2(2 + t + k + 2) \end{aligned}$$

eşitliği üzerinden 2 ile sadeleştirme yapılarak

$$1 = 2 + t + k + 1 + 1$$

eşitliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılarak

$$0 = 2 + t + k + 1 = s(2 + t + k)$$

eşitliği elde edilir. Bu çelişkidir. O halde 2 asal sayıdır.

Teorem 9.7. *m, n ve k sıfırdan farklı doğal sayılar ve $gcd(k, m) = 1$ olsun. $k|mn$ ise $k|n$ olur.*

Kanıt: Varsayım ve Teorem 8.5 kullanılarak

$$1+kx=my \text{ ya da } 1+my=kx$$

olacak biçimde $x, y \in \omega$ elde edilir. Birinci durumda, eşitliğin iki yanı m ile çarpılarak

$$n+knx=mny$$

elde edilir. $k|mn$ ve $k|knx$ olduğundan $k|n$ olur. $1+my=kx$ olması durumunda da $k|n$ elde edilir. □

Bu teoremin bir uygulaması olarak şu söylenebilir: Sıfırdan farklı doğal sayılar m, n ve bir p asal sayı için $gcd(m,p)=1$ ve $gcd(n,p)=1$ olacağından, $p|mn$ ise $p|m$ yada $p|n$ olur. Bu gözlemin bir uygulaması olarak da şu söylenir: $m^2 = pn^2$ eşitliğini sağlayan, aralarında asal m ve n doğal sayılarının olamayacağı gösterilebilir[1].

Aşağıdaki anlamda asal sayıların çarpımı hakkında şu söylenebilir: Her $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için p_i ve q_j'ler asal sayılar olsunlar.

$$p_1 p_2 ... p_n = q_1 . q_2 ... q_m$$

ise

$$\{p_i : 1 \leq i \leq n\} = \{q_j : 1 \leq j \leq m\}$$

olur. Ayrıca p_i'ler birbirlerinden farklı ve q_j'ler birbirlerinden farklı asal sayılar ve k_i ve t_j'ler,

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n} = q_1^{t_1} . q_2^{t_2} ... q_m^{t_m}$$

eşitliğini sağlayan doğal sayılar ise $n=m$ ve

$$\{(p_i, k_i) : 1 \leq i \leq n\} = \{(q_j, t_j) : 1 \leq j \leq m\}$$

olur.

Teorem 9.8 (Aritmetiğin Temel Teoremi)**.** *Sıfır ve birden farklı her doğal sayı sonlu tane asal sayının çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabilir.*

Kanıt: P, asal sayıların kümesi olmak üzere, elemanları sadece ve sadece sonlu tane asal sayıların çarpımı olarak yazılabilen doğal sayıların kümesi Q ile gösterilsin. Yani,

$$Q = \{p_1 p_2 ... p_n : n \in \omega, p_i \in P\}$$

olsun.

[1] Bu, $\sqrt{p}$'nin rasyonel olamayacağını söyler

$$A = \{n \in \omega : \forall k(2 \leq k \leq n \rightarrow k \in Q)\}$$

diyelim. Tanım gereği $0, 1 \in A$ olduğu açık. $2 \leq n \in A$ olsun. $k \leq s(n)$ verilsin. $k = n$ ise $k \in Q$ olur. $k = s(n)$ olma durumunda $s(n)$ bir asal sayı ise $k \in Q$ olacaktır. Değilse $2 \leq s, t$ ve $s(n) = st$ olacak biçimde s, $t \in \omega$ vardır. $s, t \leq n$ olduğu bariz. Dolayısıyla,

$$s = p_1p_2...p_n$$

ve

$$t = q_1q_2...q_m$$

olacak biçimde

$$p_1, p_2, ..., p_n, q_1, q_2, ..., q_m$$

asal sayıları vardır. O halde, $s(n)$, s ve t nin çarpımı ve s,$t \in Q$ olduğundan $st \in Q$ ve dolayısıyla, $s(n) \in Q$ olur. Teklik ise teoremin ifadesinden hemen önce yer alan açıklamayla zaten gösterilmişti. □

Teorem 9.9. *Asal sayılar kümesi sonlu değildir.*

Kanıt: Tersine, asal sayılar kümesi P sonlu olsun.

$$P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$$

yazılabilir.

$$k = p_1p_2...p_n + 1$$

doğal sayısı her $p \in P$ için $p < k$ olduğundan asal değildir. Dolayısıyla, $k = mn$ olacak biçimde m, $n \geq 2$ doğal sayıları vardır. Teorem 8.8 gereği m ve n asal sayıların çarpımları olarak yazılabilir. q_i'ler asal olmak üzere

$$m = q_1q_2...q_m$$

diyelim. $q_1|k$ olur. Ayrıca,

$$q_1|p_1p_2...p_n$$

olur. $q_1 = p_j$ olacak biçimde $1 \leq j \leq n$ seçilebilir. Buradan

$$(q_2...q_m)n = \frac{k}{q_1} = p_1...p_{j-1}p_{j+1}...p_n + \frac{1}{q_1}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da $q_1|1$ olur. Bu çelişkidir. Kanıt biter. □

Elemanları asal sayıların sonlu altkümeleri olan küme $\wp(P)^{<\infty}$ ile gösterilsin.

$$f(\{p_1, ..., p_n\}) = p_1 p_2 ... p_n$$

kuralıyla tanımlı $f : \wp(P)^{<\infty} \to \omega$ fonksiyonun birebir olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu gözlem sonrası, sayılabilir sonsuzluk kavramı verildikten sonra (bir sonraki bölümde tanımlanacak) $\wp(P)^{<\infty}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğu kanıtlanmış olacak. Bunun kullanılmasıyla, elemanları doğal sayıların sonlu altkümeleri olan kümenin de sayılabilir olduğu gösterilmiş olacak.

Alıştırmalar

9.7. İkiden büyük bir asal sayının çift olamayacağını gösterin.

9.8. 3'ün asal sayı olduğunu gösterin.

10. Sonlu Küme

Boş kümeye "sonsuz" ol demek densizliktir. O halde boş küme sonlu olsun.

Sayı saymasını bilmeyen biri için iki koyun sürüsünün hangisinde daha fazla koyun olduğunu anlamanın birinci yolu, sürülerdeki koyunları eşleştirmek olabilir. Bu eşleştirme sonucunda, her koyunu eşleştirilmiş olan sürünün koyun sayısı diğer sürünün koyun sayısına eşit ya da daha az olacaktır. Diğer sürünün en az bir koyununun eşleştirilememe durumu oluşması durumunda da, kesinlikle daha az koyun olmuş olacaktır. Bu gözlemle, "eşleştirme" kelimesi kendini hissettiriyor. 1638'de İtalyan matematikçi Galileo,

$$\{1, 2, 3, ...\} \text{ ve } \{1, 4, 9, ...\}$$

kümeleri arasında birebir bir eşlemenin farkına varıyor. Çoğu okurun tahmin edebileceği gibi bu eşleme

$$n \to n^2$$

kuralıyla tanımlanır. Böyle bir eşlemenin var olması nedeniyle sanki bu kümelerin aynı çoklukta olması gerektiği düşünülebilir. Ama çıplak gözle bakıldığında hiç de öyle değil! "Eşleştirme" bir kez daha kendini hissettiriyor. Galileo, bu işte bir "bit yeniği" olduğunu ima ederek, bu durumla ilgilenmeyeceğini söylüyor. Galileo'nun bu eşleştirmesi yaklaşık 250 yıl sonra Cantor tarafından tekrar ele alınarak sonsuzluk kavramının kapısı aralanıyor. Hilbert, bu kapı arkasındaki şeye "cennet" diyor.

Motivasyonu fiziksel olan sonsuzluk kavramının ne olduğunun sezilebilir olmasına karşın, bu kavramın fiziksel anlamda tanımlanması oldukça güç, belki de imkansız. Sadece sonsuzluk değil, "sonlu"luk kavrami da kolaylıkla tanımlanabilir değil. Aslında birinin tanımlanması durumunda diğerinin ne olacağı daha iyi anlaşılabilir.

Sonsuzluk, insan hayalinin toplamı da olabilir. Yoksa sonluluk ve sonsuzluk aynı şey mi? Bu kadar saçmalık yeter!

Sonluluk ve sonsuzluk, matematikte küme kavramı üzerinden tanımlanır. Bir kümeye "sonlu" ya da "sonsuz" sıfatlarından birinin verilmesinin uygunluğunu anlayabilmek için, tanımlanan ilk küme olan boşkümenin sonlu mu yoksa sonsuz mu olması gerektiği üzerinden işe başlamak anlamlı olur.

Boşküme sonlu mudur?

sorusuna yanıt vermek,

Boşküme sonsuz mudur?

sorusuna yanıt vermekten daha zor olabilir. Diğer taraftan, boşkümeye hiçbir kimse sonsuz demeye "cesaret" edemez. O halde en iyisi, sonlu kümenin tanımı, boşküme sonlu olacak biçimde ayarlanmalı. Aynı soru bir elemanlı küme üzerinden de sorulabilir. Örneğin, $\{x\}$ ve $\{\mathbb{R}\}$ kümeleri sonlu mu olmalı? Bir elemanlı bir kümeye de, hiç kimse sonsuz demeye cesaret edemez!

İki sonlu kümenin bileşiminin de sonlu olması beklenir. Bunun daha öncülü, sonlu kümeyle bir elemanlı sonlu kümenin bileşimi teamüller gereği, sonlu olması gerektiğidir. Konuya böyle yaklaşılarak, sonlu kümeyi tanımlamaya yeterli özelliklerin neler olması gerektiği belirlenip, sonlu kümenin tanımı yapılabilir.

Bir kümenin sonlu olmasını tanımlayan çeşitli yaklaşımlar vardır. Bu yaklaşımların çoğu hemen hemen aynı kapıya çıkar. Bunlardan bazıları:

i. Sonlu küme.

ii. Kuratowski sonlu küme.

iii. Tarski sonlu küme

iv. Dedekind sonlu küme.

Bunlardan ilk üçü ZF'de birbirlerine denk olup, kümenin sonsuz olması, sonlu olmaması üzerinden tanımlanır. Dedekind sonlu küme kavramının tanımlanması diğerlerinden oldukça farklıdır. Bu yaklaşımda önce, Dedekind sonsuz küme tanımlanarak, Dedekind sonsuz olmayan kümeye Dedekind sonlu denir. Dedekind sonlu kavramı ZF'de diğer sonluluk kavramlarına denk olmasa da ZFC'de yukarıda bahsedilen sonluluk kavramlarının hepsi birbirlerine denktir.

Her ne kadar yukarıda tanımlanan ilk üç sonluluk kavramı birbirlerine denk ve dolayısıyla, biri için geçerli olan sonuçlar diğeri içinde geçerli olsa da, bu sonuçlardan temel sonuçlar diyebileceğimiz bazıları tanımlara bağlı olarak ayrı ayrı verilerek, farklı kanıt yöntemleri verilmiş olunacak. Burada "temel sonuçlar"la kastedilenlerden bazıları:

i. İki sonlu kümenin bileşimi sonludur.

ii. Sonlu bir kümenin kuvvet kümesi sonuludur.

iii. İki sonlu kümenin kartezyen çarpımı sonludur.

iv. Verilen iki sonlu küme arasında tanımlı fonksiyonların kümesi sonludur.

Sonsuz küme kavramında algı yanılmasına dikkat çekmek için bir örnek verelim: Doğal Sayılar Kümesi'nin sıfırı boşküme olduğundan sonludur. Diğer taraftan, bu sıfırı Gerçel Sayılar Kümesi'nde temesil eden sıfır'ın sonlu olması gerekmeyebilir! Peki, $\mathbb{R}$'de $\sqrt{2}$ ve -1 sayıları (küme olarak) sonlu mudur?

Sonlu küme kavramının sistematik olarak ilk şekilde Tarski [52] tarafından başlatıldığı söylenebilir. Doğal Sayılar Kümesi'ne denk olan her kümeye sayılabilir sonsuz küme denir. Dolayısıyla, Doğal Sayılar Kümesi yok sayılarak, sayılabilir sonsuzluk kavramı tanımlanamaz. Sayılabilir sonsuzluk kavramına denk olacak bir tanımlamanın Kuratowski ve Tarski sonlu küme kavramı üzerinden yapılıp yapılamayacağı ilginç bir konu olabilir. Yazar olarak bu konuda bir bilgim yok.

Sonlu küme kavramıyla ilgili ilk detaylı derleme çalışma Tarski tarafından [52]'de verilmiştir. Bugün Tarski sonlu küme olarak adlandırılan kavram bu makalede yer almıştır. Ayrıca, [52]'de Zermelo, Russell, Sierpinksi, Kuratowski tarafından önerilen sonlu küme tanımına ilişkin detaylara ulaşılabilir.

10.1 Sonlu Küme

Neden hiçbir insanın adı Sonlu ya da Sonsuz değildir? Halbuki kız çocuğuna Sonsuz, erkek çocuğuna Sonlu isimleri çok yakışır.

En yaygın olarak bilinen sonlu küme tanımlarından biri doğal sayılar üzerinden verilir.

Tanım 10.1. Bir doğal sayıya denk olan kümeye ***sonlu küme*** denir[1].

Yani, bir X kümesinin sonlu olması için gerek ve yeter koşul en az bir n doğal sayısı için birebir ve örten

$$f : X \to n$$

fonksiyonunun olmasıdır, yani

$$|X| = |n|$$

[1]Sonlu kümeye bazen w-sonlu ya da $\mathbb{N}$-sonlu küme denir.

olmasıdır. Her küme kendi kendine denk olduğundan tanım gereği her doğal sayı sonlu bir kümedir. İki doğal sayının eşit olması için gerek ve yeter koşulun birbirlerine denk olması gerektiği, yani aralarında birebir ve örten fonksiyon olması gerektiği tümevarımla kolaylıkla gösterilir. Bu, bir kümenin eleman sayısı kavramının yolunu açar.

Tanım 10.2 (von Neumann, Standart Nümerik Tanım)**.** $n \in \omega$ olmak üzere, n'ye denk olan kümeye n elemanlı küme ya da kardinalitesi n olan küme denir.

X, n elemanlı bir kümeyse

$$card(X) = n$$

yazılır[2]. Bu tanıma göre, boşküme 0 elemanlı, bir a kümesi için $\{a\}$ kümesi 1 elemanlı, a ve b kümeleri için $\{a, b\}$ kümesi iki elemanlı bir kümedir. X, n elemanlı küme ve $f : n \to X$ birebir ve örten bir fonksiyonsa, her $i \in n$ için $f(i) = x_i$ olmak üzere, X kümesini

$$X = \{x_0, ..., x_{n-1}\} = \{x_i : i = 0, 1, ..., n-1\}$$

yazmak adettendir[3]. Bu yazım, küme eşitliği nedeniyle, elbette f'nin seçiminden bağımsızdır. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ olarak da yazılır[4].

0 elemanlı tek bir tane küme olup, boşkümedir. Buna karşın, $n > 0$ için, n elemanlı birçok küme vardır. Hatta $n > 0$ elemanlı kümelerin sınıfı bir küme değildir. Yani,

$$\{x : card(x) = n\},$$

küme olmayan bir sınıftır.

Her kümenin eleman sayısı şu an için "ölçülemez". Örneğin, ω için, "şu kadar elemanlı küme" diyebilmenin zamanı değil.

Sonluluk kavramı denklik kavramı üzerinden verilebilir. Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 10.1. *Bir sonlu kümeye denk olan her küme sonludur.*

Sonsuz bir kümenin her altkümesinin sonsuz olması beklenmez ama sonlu her kümenin altkümesinin sonlu olması beklenir.

Teorem 10.2. *Bir doğal sayının her altkümesi de sonludur.*

---

[2]Kardinalite çok daha genel olarak her küme için tanımlanabilen bir kavramdır. Çoğu zaman bir X kümesinin kardinalitesi $|X|$ ile gösterilir. Bir x sayısının mutlak değeri de $|x|$ ile gösterilir. Okur bu gösterimin hangi anlamda kullandığının farkında olmalı. Denk kümelerin kardinaliteleri eşittir.

[3]$n = 0$ olma durumunda bu gösterim $\{\}$ olur. Bu nedenle, boşküme bazen bu gösterimle gösterilir ama yaygın bir kullanım değildir.

[4]Okur belli bir yerden sonra bu tür yazımlara takılmamalı.

Kanıt: Kanıtı tamamlamak için

$$A = \{n \in w : B \subseteq n \to B \text{ sonlu } \}$$

olarak tanımlanan A kümesinin tümevarımsal olduğunu göstermek yeterlidir: $0 \in A$ olduğu açık. Gerçekten de $n = 0$ ve $B \subseteq n$ ise B boşküme ve dolayısıyla, B kümesi, 0 doğal sayısına denk olması nedeniyle, sonlu kümedir. Yani, $0 \in A$. $n \in A$ olmak üzere $B \subseteq s(n)$ verilsin. $n \notin B$ ise $B \subseteq n$ olacağından, varsayım gereği B sonludur. $n \in B$ olma durumunda $B \setminus \{n\} \subseteq n$ olacağından, yine varsayım gereği $B \setminus \{n\}$ sonlu ve dolayısıyla, bir $k \in w$ için birebir ve örten $f : B \setminus \{n\} \to k$ fonksiyonu vardır. $\overline{f} : B \to s(k)$ fonksiyonu,

$$\overline{f}(m) = \begin{cases} f(m) & ; m \in B \setminus \{n\} \\ k & ; m = n \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlansın. Bu fonksiyon birebir ve örtendir. Yani B sonludur. Böylece, $s(n) \in A$ olduğu gösterilmiş olur. Sonuç olarak A, w'nin tümevarımsal altkümesi ve dolayısıyla, $A = w$ olacağından istenilen elde edilir. □

Yukarıdaki teorem kullanılarak, teoremin kendisi aşağıdaki gibi genellenebilir.

Teorem 10.3. *Sonlu bir kümenin her altkümesi sonludur.*

Kanıt: A sonlu küme olmak üzere $B \subseteq A$ verilsin. Bir $n \in w$ için birebir ve örten $f : A \to n$ fonksiyonu vardır. Yukarıdaki gözlemden, $f(B) \subseteq n$ sonlu bir küme ve bir $m \in w$ için birebir ve örten $g : f(B) \to m$ fonksiyonu vardır. Buradan da

$$|B| = |f(B)| = |m|$$

elde edilir. □

Yukarıdaki teoremin sonucu olarak, en az biri sonlu olan iki kümenin arakesitinin sonlu olacağı söylenebilir. Daha genel olarak, en az bir elemanı sonlu olan kümenin arakesiti sonludur. Buna karşın, arakesiti sonlu olan iki kümenin en az birinin sonlu olması gerekmez. Ancak, bunun için en az bir sonlu olmayan kümenin varlığını gösterene kadar beklemeliyiz. Gerçekten de en az bir sonlu olmayan X kümesi varsa $X \times \{X\}$ kümesi de sonlu olmayacak (neden?) ve bu kümenin X ile arakesiti boşküme olup, sonlu olacaktır.

Teorem 10.4. *Bir doğal sayı kendi elemanına denk olamaz.*

Kanıt: $m, n \in w$ için, tanımdan $m < n$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in n$ olduğunu biliyoruz. Her $m \in w$ için,

$$A_m = \{n \in w : m < n \to |n| \neq |m|\}$$

olmak üzere

$$A = \{m \in w : A_m = w\}$$

kümesinin tümevarımsal olduğu gösterilecek. $A_0 = w$ olduğundan $0 \in A$ olur. $k \in A$, yani $A_k = w$ olsun. $A_{s(k)} = w$ olduğunu göstermek kanıtı tamamlayacak. $A_{s(k)} \neq w$ olduğunu varsayalım. Yani,

$$s(k) < n \text{ ve } f : n \to s(k)$$

birebir fonksiyon olacak biçimde $n \in w$ var. $k < n$ ve $A_k = w$ olduğundan, n'den k'ya tanımlı birebir fonksiyon yoktur. Dolayısıyla, $f(n) \subseteq k$ olamaz. Diğer taraftan $f(n) \subseteq s(k)$ olmasından dolayı, $k \in f(n)$ ve dolayısıyla,

$$f(a) = k$$

olacak biçimde $a \in n$ vardır. $n-1$, n'nin öncülünü göstersin, yani $n = s(n-1)$ olacak biçimde doğal sayı olsun ($0 < n$ olduğundan, böyle bir sayı var). $a = n-1$ olamaz. (Gerçekten de, olsaydı

$$f(n-1) = k$$

olur, her $x \in n-1$ için,

$$g(x) = f(x)$$

eşitliğiyle $g : n-1 \to k$ birebir fonksiyonu tanımlanabilirdi. Ancak, $n-1 > k$ olduğundan ($k \cup \{k\} = s(k) < n$ ve $k \in n = (n-1) \cup \{n-1\}$ olacağından, $k \in n-1$ ya da $k = n-1$ olur. Fakat $k = n-1$ olma durumunda $s(k) = s(n-1) = n$ olur. Bu, $s(k) < n$ olmasıyla çelişir) varsayım gereği bu olamaz.) Bunun sonucu olarak,

$$f(a) = k \text{ ve } f(n-1) = b$$

olmak üzere $k \neq b$ olur. $\overline{f} : n \to s(k)$ fonksiyonu,

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} k & ; x = n-1 \\ b & ; x = a \\ f(x) & ; x \in n \setminus \{n-1, a\} \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlansın. Bu fonksiyon birebir fonksiyondur. Ancak, n kümesinden $s(k)$ kümesine tanımlı ve n-1 doğal sayısını k'ya götüren birebir fonksiyonun olamayacağı yukarıda gösterildi. O halde $\overline{f}(n-1) \neq k$ olmalı. Bu bir çelişkidir. O zaman $s(k) \in A$ olmalı. Kanıt biter. □

Genelde denk iki kümenin birbirlerine eşit olması gerekmez. Örneğin, her A kümesi için $A \times \{0\}$ ve $A \times \{1\}$ kümeleri arasında

$$f : A \times \{0\} \to A \times \{1\},\ f(a, 0) = (a, 1)$$

olarak tanımlanan fonksiyon birebir ve örten olduğundan, birbirlerine denk olmalarına karşın, A boş küme olmadıkça eşit değillerdir. Doğal sayılar için durum farklıdır.

Teorem 10.5. *Verilen iki doğal sayının denk olması için gerek ve yeter koşul eşit olmalarıdır.*

Kanıt: m, $n \in w$ verilsin. $m \leq n$ olduğunu varsayabiliriz. $m = n$ olma durumunda birbirlerine denktir. m ve n denk ama eşit olmasın, yani $m < n$ olsun. Yukarıdaki teorem gereği, n'den m'ye birebir fonksiyon olamaz ve bu varsayımla çelişir. □

Verilen m, n doğal sayıları için, $|m| \leq |n|$ olması için gerek ve yeter koşulun $m \subseteq n$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $A, B \subseteq w$ sonlu kümeleri için $|A| \leq |B|$ olmasına karşın, $A \subseteq B$ olmayabilir. Sonlu bir kümeyle bir elemanlı kümenin bileşimi sonludur. Gerçekten de bir A kümesi bir $n \in w$ sayısına denk ise bir $x \notin A$ için $A \cup \{x\}$ kümesi $s(n)$ sayısına denktir. Eğer $x \in A$ ise $A \cup \{x\} = A$ olacağından, A kümesi yine sonludur.

Teorem 10.6. *İki sonlu kümenin bileşimi de sonludur.*

Kanıt: Her $n \in w$ için

$$A_n = \{m \in w : \forall X \forall Y((|X| = |n|) \wedge (|Y| = |m|) \to X \cup Y \text{ sonlu })\}$$

olmak üzere

$$A = \{n \in w : A_n = w\}$$

kümesinin tümevarımsal olduğunu göstermek yeterlidir. $0 \in A$ olduğu açık. $n \in w$ olduğunu varsayalım. $s(n) \in A$ olduğunu göstereceğiz. X ve Y kümeleri verilsin. Bu kümelerin ayrık olduğunu varsayabiliriz. (Nasıl?)

$$|X| = |s(n)| \text{ ve } |Y| = |m|$$

olduğunu varsayalım. $f : X \to s(n)$ fonksiyonu birebir ve örten olsun. $f(x) = n$ olacak biçimde $x \in X$ seçelim.

$$|X \setminus \{x\}| = |f(X) \setminus \{n\}| = |n|$$

ve $n \in A$ olduğundan $(X \setminus \{x\}) \cup Y$ kümesi sonludur. Bu kümenin bir elemanlı kümeyle bileşimi de sonlu olacağından

$$X \cup Y = ((X \setminus \{x\}) \cup Y) \cup \{x\}$$

kümesi de sonludur. $s(n) \in A$ olduğunu göstermiş oluruz. Sonuç olarak, A tümevarımsal kümedir. $\square$

Yukarıdaki teorem, bir başka deyişle, a ve b iki sonlu küme olmak üzere, $\{a, b\}$ kümesinin bileşimi de sonludur şeklinde. Bu, daha genel olarak şöyle ifade edilebilir.

Teorem 10.7. *Elemanları sonlu olan sonlu bir kümenin bileşimi sonludur.*

Kanıt: Her $n \in \omega$ için, $P(n)$, "her elemanı sonlu n elemanlı kümenin bileşimi sonlu" önermesini göstermek üzere

$$A = \{n \in \omega : P(n)\}$$

kümesinin tümevarımsal küme olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. $n = 0$ ve $|X| = |n|$ ise X boşküme ve boşkümenin bileşimi boşküme ve dolayısıyla, sonlu olacağından $0 \in A$ olur. $n \in A$ verilsin. X, $s(n)$ elemanlı ve her elemanı sonlu olan küme olsun. $f : s(n) \to X$ birebir ve örten fonksiyonu verilsin. f'nin n'ye kısıtlanışı olan $g : n \to X \setminus \{f(n)\}$ fonksiyonu birebir ve örten olur. Varsayım gereği,

$$\bigcup\{g(i) : i \in n\}$$

kümesi sonludur. İki sonlu kümenin bileşimi sonlu olduğundan,

$$\bigcup X = \bigcup f(s(n)) = \{f(i) : 0 \leq i \leq n\} \cup f(n)$$

kümesi sonludur. Yani, $s(n) \in A$ olur. Tümevarım gereği, $A = \omega$ olur. Kanıt biter. $\square$

Sonuç olarak,

$$\omega = \{n \in \omega : X, n \text{ elemanlı ve her elemanı sonluysa} \cup A \text{ sonlu}\}.$$

Bir sonlu kümenin her altkümesinin sonlu olmasının doğal olmasına karşın, sonlu bir kümeyi kapsayan kümeler için bu durum doğal olmayabilir. Ama belirgin bir sınır çekilebilir.

Teorem 10.8. *Bir kümenin sonlu olması için gerek ve yeter koşul kuvvet kümesinin sonlu olmasıdır.*

Kanıt: Kanıtı tamamlamak için,

$$A = \{n \in \omega : \forall X(|X| = n \to \wp(X) \text{ sonlu})\}$$

olarak tanımlanan kümenin ω'ya eşit olduğunu göstermek, bunun için de A'nın tümevarımsal küme olduğunu göstermek yeterlidir. $0 \in A$ olduğu açık. $n \in A$ olsun.

$$|X| = |s(n)|$$

olduğunu varsayalım. $f : s(n) \to X$ birebir ve örten fonksiyon olsun.

$$|n| = |\wp(X \setminus \{f(n)\})|$$

olduğundan, $\wp(X \setminus \{f(n)\}$ kümesi sonludur. Ayrıca,

$$|\wp(X \setminus \{f(n)\})| = |\{A \cup \{f(n)\} : A \subset \wp(X \setminus \{f(n)\}\}|$$

olduğundan,

$$\{A \cup \{f(n)\} : A \subset \wp(X \setminus \{f(n)\})\}$$

kümesi sonludur. İki sonlu kümenin bileşimi sonlu olacağından,

$$\wp(X) = (\wp(X \setminus \{f(n)\}) \cup \{A \cup \{f(n)\} : A \subset \wp(X \setminus \{f(n)\})\}$$

kümesi sonludur. Yani $s(n) \in A$. Tümevarımdan $A = \omega$ olur.

Tersine $\wp(X)$ sonlu ise $f : X \to \wp(X)$, $f(x) = \{x\}$ fonksiyonu birebir olduğundan X sonludur. Kanıt tamamlanır. □

Teorem 10.9. *İki kümenin kartezyen çarpımının sonlu olması için gerek ve yeter koşul her ikisinin de sonlu olmasıdır.*

Kanıt: X ve Y iki sonlu kümeyse $X \cup Y$ sonlu ve dolayısıyla, $\wp(X \cup Y)$ kümesi sonlu ve buradan da $\wp(\wp(X \cup Y))$ kümesi sonludur. Sonlu bir kümenin her altkümesi sonlu ve $X \times Y \subseteq \wp\wp(X \cup Y)$ olacağından, $X \times Y$ kümesi sonludur. $X \times Y$ sonlu kümeyese X ve Y kümelerinin sonlu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. □

Yukarıdaki teoremin, verilen sonlu a ve b kümeleri için,

$$|a \times b| = |\{f : f : \{a, b\} \to \cup\{a, b\}, f(a) \in a, f(b) \in b\}|$$

olması dikkate alınarak, sonlu bir X kümesi için

$$\{f : f : X \to \cup X, \text{ her } x \in X \text{ için}, f(x) \in x|$$

kümesinin sonlu olduğu gösterilerek genellenebilir. Daha fazlası da yapılabilir.

Teorem 10.10. *X ve Y sonlu kümeler olsun. X'den Y'ye tanımlı fonksiyonların kümesi Y^X sonludur.*

Kanıt: . $F : Y^X \to \wp(X \times Y)$ fonksiyonu

$$F(f) = \{(x, y) : x \in X, y \in f(X)\}$$

eşitliğiyle tanımlansın.

$$F(f) = F(g)$$

olmak üzere, $x \in X$ verilsin.

$$(x, f(x)) \in F(f)$$

olmasından dolayı $(x, f(x)) \in F(g)$ olur. Dolayısıyla,

$$(x, f(x)) = (a, g(a))$$

olacak biçimde $a \in X$ vardır. Buradan $x = a$ ve dolayısıyla,

$$f(x) = g(a) = g(x)$$

olur. Yani $f = g$ elde edilir. Sonuç olarak, F'nin birebir fonksiyon ve $\wp(X \times Y)$ sonlu olmasından dolayı, istenilen elde edilmiş olur. □

Alıştırmalar

10.1. Her n doğal sayısı için $card(n) = n$ olduğunu gösterin.

10.2. Bir elemanlı kümeler topluluğu bir küme olur mu? Yani,

$$\{x : |x| = |1|\}$$

bir küme midir?

10.3. n,$m \in \omega$ verilsin. $|n| = |m|$ olması için gerek ve yeter koşulun $n = m$ olması gerektiğini gösterin.

10.4. Her $n \in \omega$ için $|n| < |\wp(n)|$ olduğunu tümevarımla gösterin.

10.5. Her X kümesi için $|X| = |X|$ olduğunu gösterin.

10.6. X ve Y kümeleri için $|X| = |Y|$ olmasının $X = Y$ olmasını gerektirmeyeceğini gösterin.

10.7. Verilen X ve x kümeleri için $|X \times \{x\}| = |X|$ olduğunu gösterin.

10.8. Boşkümeden farklı sonlu bir kümenin bileşiminin sonlu olması gerekmediğini gösterin. Dahası bir kümenin bileşiminin sonlu olması için gerek ve yeter koşulun kümenin ve her elemanının sonlu olması gerektiğini gösterin.

10.9. A ve B iki sonlu küme ise,

i. $card(A \cup B) + card(A \cap B) = card(A) + card(B)$

ii. $card(A \times B) = card(A)card(B)$

olduğunu gösterin.

10.10. n elemanlı bir kümenin kuvvet kümesinin eleman sayısının 2^n olduğunu kanıtlayın[5].

10.11. Bir önceki problemi genelleyin: n ve k iki doğal sayı ve $k \leq n$ olsun. A eleman sayısı k olan n'nin altkümelerinin kümesi olsun.

$$card(A)n! = (n-k+1)(n-k+2)...n$$

olduğunu kanıtlayın. (Henüz $n-k$ gibi bir kavramın tanımlanmadığının farkında olsanız da!)

10.12. n, k iki doğal sayı ve $F = \{f : f : k \to n \text{ birebir fonksiyon}\}$ olmak üzere,

$$card(F)n! = (n-k+1)(n-k+2)...n$$

olduğunu kanıtlayın.

---

[5]Bu konuyla ilgili bir makale, [23].

10.2 Sonsuz Küme

Fizikte sonsuzluk kavramı yok. Matematikte ise bir kümenin bir sonsuzu o kümeye ait olmayan bir noktadır. Bu durumda, her nokta boşkümenin sonsuzudur. Ayrıca, küme kendisinin sonsuzudur..

Tanım 10.3. Sonlu olmayan kümeye ***sonsuz küme*** denir.

Tanım gereği, bir küme hem sonlu hem de sonsuz olamaz. Sonsuz olan doğal sayı yoktur. Şu an için, sonsuz olan bir kümenin varlığını bilmiyoruz. Diğer taraftan, ω kümesi sonsuz gibi duruyor. Bu umudumuzu koruyarak, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 10.11. *A sonsuz bir küme olmak üzere, $|A| \leq |B|$ özelliğindeki B kümesi sonsuzdur.*

Kanıt: $f : A \to B$ birebir fonksiyon olsun. B'nin sonlu olduğunu varsayalım. Bir $k \in w$ için $g : B \to k$ birebir fonksiyonu vardır. $g \circ f$, A'dan k'ya birebir fonksiyon olur. Bu, A'nın sonsuz olmasıyla çelişir. $\square$

Doğal sayılar kümesinden bir noktanının çıkartılmasıyla elde edilen küme doğal sayılar kümesine denktir. Benzer biçimde, doğal sayılar kümesine bir noktanının eklenmesiyle elde edilen küme de doğal sayılar kümesine denktir. Gerçekten, $n \in \omega$ verilsin.

$$f(k) = \begin{cases} k & ; k < n \\ s(k) & ; k \geq n \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon $f : \omega \to \omega \setminus \{n\}$ birebir ve örten. Dolayısıyla,

$$|\omega \setminus \{x\}| = |\omega|$$

olur.

Şimdi x, doğal sayı olmayan bir küme olsun.

$$f(k) = \begin{cases} 0 & ; k = x \\ s(k) & ; k \neq x \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon $f : \omega \cup \{x\} \to \omega$ birebir ve örten. Dolayısıyla,

$$|\omega \setminus \{n\}| = |\omega|$$

olur.

Yukarıda yapılan gözlemle elde edilen sonuçlar aşağıda verilen iki teoremle genellenir.

Teorem 10.12. *Doğal sayılar kümesinden sonlu bir altkümesinin çıkartılmasıyla kalan küme ω'ya denk olur.*

Kanıt: Kanıtı tamamlamak için

$$T = \{n \in \omega : \forall A \subseteq \omega(|A| = |n| \to |\omega \setminus A| = |\omega|\}$$

kümesinin tümevarımsal küme olduğunu göstermek yeterli. Detaylar okura bırakılmıştır. □

Yukarıdaki teoreme benzer biçimde, aşağıdaki teorem kanıtlanır.

Teorem 10.13. *Doğal sayılar kümesine sonlu bir kümenin eklenmesiyle elde edilen küme ω'ya denk olur.*

Sonsuz bir kümenin varlığını göstermek var ya, inanılmaz birşey olmalı. Bu, matematiği fizikten farklı yapan değer biçilmez bir durum olurdu.

Heeyyyyyyttttt, bir sonsuz bulundu.

Teorem 10.14. *w sonsuz kümedir.*

Kanıt: ω'nın sonlu olduğunu varsayalım. $f : \omega \to n$ birebir ve örten olacak biçimde n doğal sayısı seçelim. Bu durumda, $\omega \setminus f^{-1}(n)$ kümesi boşküme olur. Bu küme aynı zamanda, $f^{-1}(n)$ kümesinin sonlu olmasından dolayı, ω'ya denk olur. Bu çelişkidir ve kanıt biter. □

Doğal sayılara denk olan her kümenin sonsuz küme olduğu açık. Dolayısıyla, doğal sayıların sonlu her altkümesi A için $\omega \setminus A$ kümesi sonsuz olur. Ayrıca, her n doğal sayısı için $\omega \setminus n$ sonsuz bir kümedir. Dolayısıyla, en az doğal sayılar kadar sonsuz küme var. Gerçekten de A, ω'nın sonsuz altkümelerinin kümesi olmak üzere,

$$f(n) = \omega \setminus n$$

eşitliğiyle tanımlı $f : \omega \to A$ fonksiyonu birebirdir. Buna karşılık, A kümesinin elemanlarının bağlandığı bir merkez nokta var: Doğal sayıların bir altkümesinin sonsuz olması için gerek ve yeter koşul ω'ya denk olmasıdır. Bunu yaparken izlenecek yol şu olacak: $A \subset \omega$ sonlu küme olmasın.

$$a_0 = \min A$$

diyelim. Sonra,

$$a_1 = \min A \setminus \{a_0\}$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde devam ederek,

$$a_{s(n)} = \min A \setminus \{a_0, ..., a_n\}$$

tanımlansın. Böylece, ω'dan A tanımlı n'yi $a_{s(n)}$'ye götüren fonksiyon birebir ve örten olacaktır. Daha matematiksel olarak:

Teorem 10.15. *Doğal sayıların her altkümesi sonlu ya da doğal sayılar kümesine denk olur.*

Kanıt: $A \subseteq \omega$ kümesi sonlu olmasın. ω'dan A ya tanımlı birebir örten fonksiyonun varlığı gösterilecek. $g : A \to A$ fonksiyonu

$$g(n) = \min\{a \in A : a > n\}$$

eşitliğiyle tanımlansın.

$$a_0 = \min A$$

olmak üzere, recursion teoremi kullanılarak,

$$f(0) = a_0$$

ve her n için

$$f(s(n)) = g(f(n))$$

eşitliğini sağlayan $f : \omega \to A$ fonksiyonu tanımlanabilir. f'nin birebir ve örten olduğu açık. □

Bir sonsuz küme var ama "ilk sonsuz" küme diye birşey tanımlanabilir mi? İlk akla gelen, "sonsuz bir kümenin kendisinden farklı her altkümesi sonluysa o kümeye "ilk sonsuz" tanımlaması olurdu. Ancak, böyle bir küme olamaz. Bu olumsuzluğa karşın, buna, denklik terimi kullanılarak yaklaşılabilir.

Alıştırmalar

10.13. Sonsuz bir kümeden sonlu bir altkümesinin çıkartılmasıyla elde edilen kümenin sonsuz olduğunu gösterin.

10.14. ω sonsuz küme olduğundan

$$card(\omega) = \infty$$

yazalım. Diğer taraftan

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

ifadesinin ne anlama geldiğini okurun bildiğini varsayalım. Bu durumda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = card(\omega)$$

olmuş oluyor!? Bir tuhaflık var mı?

10.3 Sayılabilir Sonsuz Küme

Aşağıdaki teorem sonsuzları çeşitlendirir.

Teorem 10.16. *Sonsuz iki kümenin birbirine denk olması gerekmez.*

Kanıt: X sonsuz küme olsun. X'den $\wp(X)$'e

$$x \to \{x\}$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon birebir olduğundan $\wp(X)$ kümesi sonsuzdur. Diğer taraftan X ve $\wp(X)$ kümeleri denk değildir. Gerçekten de $f : X \to \wp(X)$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu varsayalım.

$$A = \{x \in X : x \in f(x)\} \in \wp(X)$$

olmasına karşın, $f(x_0) = A$ olacak biçimde $x_0 \in X$ yoktur. Bu çelişki kanıtı tamamlar. □

Küme Teori'nin Temel Teoremi her X kümesi için,

$$|X| < |\wp(X)|,$$

olduğunu söyler. Bu teoremin özel hali,

$$|\omega| < |\wp(\omega)|,$$

Hilbert'in deyimiyle, Cantor tarafından sonsuz cennetine açılan kapıdır. Bu sonuç nedeniyle birbirlerinden farklı en az iki sonsuz var. Farklı farklı sonsuzlar edilebildiğine göre, sonsuzları sınıflamak gerekir.

Tanım 10.4. Doğal sayılar kümesine denk olan her kümeye **sayılabilir sonsuz** denir.

Ayrıca, sayılabilir sonsuz ya da sonlu kümeye **sayılabilir küme** denir. ω, sayılabilir sonsuz küme, $\wp(\omega)$ sayılabilir olmayan sonsuz kümeye bir örnektir. Başka örnekler de var:

$$\wp(\wp(\omega)),\ \wp(\wp(\wp(\omega))),...$$

Bu örnek üzerinden akla şu soru gelir: Bu arka arkaya devam eden sonsuzlar arasında başka sonsuz kümeler var mıdır? Daha basit olarak, şu soru ile başlanabilir.

Cantor'un Sorusu: $|\omega| < |A| < |\wp(\omega)|$ olacak biçimde A kümesi var mıdır?

Bu soruya, masum gözükmesine karşın, ZF'de ne olumsuz ne de olumlu yanıt verilebilir[6]. Yani, biri,"ZF'de $|\omega| < |A| < |\wp(\omega)|$ olacak biçimde bir A kümesinin varlığını kanıtladım" derse, o kanıt kesinlikle yanlıştır.

Aksiyom 10.1 (Genelleştirilmiş Süreklilik Hipotezi). $|X| < |A| < |\wp(X)|$ *olacak biçimde sonsuz X ve A kümeleri yoktur.*

Bu hipotez şimdilik bir kenarda dursun.

Teorem 10.17. *Sayılabilir sonsuz bir kümenin her altkümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuzdur.*

Kanıt: Teorem 8.15'in uygulanmasıyla kanıt hemen verilir.

Alıştırmalar

10.15. Sonlu her k kümesi için $|\omega| = |\omega \cup \{k\}|$ olduğunu gösterin.

10.16. Bir elemanlı bir kümenin bileşiminin sonsuz olabileceğine ilişkin bir örnek verin.

10.17. Doğal sayı, ω ve $s(\omega)$ kümelerinin göze çarpan ortak özellikleri nedir?

10.18. $s(\omega)$'nun kendisinin ve her elemanının transitiv olduğunu gösterin. ω'da tanımlanan toplama fonksiyonu, her $n \in \omega$ için,

$$0 + \omega = \omega + 0 = \omega,\ 1 + \omega = \omega \text{ ve } \omega + 1 = s(\omega)$$

olarak $s(\omega)$'ya genellenebilir. Böyle bir genellemede amaç ne olabilir? Benzer genelleme çarpma, üst alma ve faktöriyel fonksiyonları için yapılabilir mi?

10.19. Sayılabilir bir kümenin her altkümesinin sayılabilir sonsuz ya da sonlu olduğunu gösterin.

10.3.1 Sonsuz Kümenin Sayılabilir Sonsuz Altkümesi Var

Sonlu kümenin sayılabilir sonsuz altkümesi olamaz. Sayılabilir sonsuz kümenin birbirlerinden farklı birçok sayılabilir sonsuz altkümesi bulunabilir. Ama, her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz bir altkümesinin olduğu ZF'de her zaman söylenemeyebilir. Buna karşın, şu teorem verilebilir.

Teorem 10.18. *X sonsuz bir küme ve $\wp(X)^*$ kümesinin seçim fonksiyonu varsa, X'in sayılabilir sonsuz altkümesi vardır.*

Kanıt: f, $\wp(X)^*$ $(= \wp(X) \setminus \{\emptyset\})$ seçim fonksiyonu olsun. $\mathcal{F}$, X'in sonlu altkümelerinin kümesini göstersin. Her $A \in \mathcal{F}$ için $X \setminus A \in \wp(X)^*$ olur.

$$g : \mathcal{F} \to \mathcal{F},\ g(A) = A \cup \{f(X \setminus A)\}$$

[6]Bu sorunun yanıtı, ancak bir aksiyomla"hayır" olabilir. O aksiyom, Süreklilik Hipotezi olarak bilinir. Gödel, 1940'da ZFC'den Süreklilik Hipotezinin değilinin kanıtlanamayacağını, Cohen ise, 1963'de ZFC'den süreklilik hipotezinin kanıtlanamayacağını kanıtladı. Böylece, ZF'de ZFC'ye süreklilik hipotezinin ya da değilinin eklenmesiyle elde edilen sistem çelişkisiz olacaktır. Cohen'in yapmış olduğu bu kanıt nedeniyle 1966 Fields ödülünü almış olması konunun önemini gösteriyor olmalı.

kuralıyla g fonksiyonu tanımlansın. Başlangıç noktasını boşküme alarak ve recursion teoremi'ni g'ye uygulayarak,

$$u : \omega \to \mathcal{F},\ u(0) = \emptyset$$

ve her $n \in \omega$ için,

$$u(s(n)) = g(u(n))$$

eşitliğini sağlayan u fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon

$$u(n) = \begin{cases} \emptyset & ; n = 0 \\ u(m) \cup \{f(X \setminus \sigma(m))\} & ; n = s(m) \end{cases}$$

biçimindedir.

$$v : \omega \to X,\ v(n) = f(X \setminus u(n))$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyonun birebir olduğu kolaylıkla gösterilir. O halde, $v(\omega)$, X'in sayılabilir sonsuz altkümesi olur. $\square$

Yukarıdaki teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani, bir sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz altkümesinin olması o kümenin seçim fonksiyonunun olmasını gerektirmez. Ancak, ZFC'de her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz altkümesinin olduğunu söyleyebiliriz.

10.3.2 Sayılabilir İki Kümenin Bileşimi ve Kartezyen Çarpımı

Sayılabilir sonsuz bir kümeyle sonlu bir kümenin bileşiminin sayılabilir olduğu kanıtlandı. Bundan daha kuvvetli olanı, sayılabilir sonsuz iki kümenin bileşiminin sayılabilir sonsuz olmasıdır. Bunu kanıtlamak için doğal sayılar kümesinin iki ayrık sayılabilir sonsuz kümenin bileşimi olarak yazılabiliyor olması yeterlidir. Öyledir de. Gerçekten de, çift ve tek sayılar kümesi sayılabilir, ayrık ve bileşimleri ω'ya eşittir.

Teorem 10.19. *İki sayılabilir sonsuz kümenin bileşimi sayılabilir sonsuzdur.*

Kanıt: A ve B iki sayılabilir sonsuz küme olsun. T, tek sayıların kümesini ve C, çift sayıların kümesini göstersin. Bu kümeler sayılabilir sonsuz olduğundan, $|A| = |T|$ ve $|B| = |C|$ olur. A ve B'lerin ayrık olması durumunda,

$$|\omega| = |T \cup C| = |A \cup B|$$

olduğundan, $A \cup B$ sayılabilir sonsuz olur. Genel olarak, $A \setminus B$, $B \setminus A$ ve $A \cap B$ kümelerinin en az biri sayılabilir sonsuz olan sayılabilir ayrık kümelerdir. Yukarıdaki gözlemi bu ayrışıma uygulayarak, $A \cup B$'nin sayılabilir sonsuz küme olduğu kanıtlanır. $\square$

Yukarıdaki teorem aşağıdaki gibi genellenir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Teorem 10.20. *Elemanları sayılabilir ve en az bir elemanı sayılabilir sonsuz olan sonlu kümenin bileşimi sayılabilir sonsuzdur.*

Teorem 10.21. *$\omega \times \omega$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.*

Kanıt: $w \times w$ kümesinin sayılabilir olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $f : \omega \times \omega \to \omega \times \omega$ fonksiyonu,

$$f((n,k)) = \begin{cases} (n-1, k+1) & ; n+k \text{ tek ve } \quad n > 0 \\ (n+1, k-1) & ; n+k \text{ çift ve } \quad n > 0 \\ (n+1, 0) & ; n \text{ çift ve } \quad k = 0 \\ (0, k+1) & ; k \text{ tek ve } \quad n = 0 \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlansın. Başlangıç noktasını $(0,0)$ alarak, f'ye recursion teoremi uygulanarak elde edilen

$$g : \omega \to \omega \times \omega, \; g(0) = (0,0)$$

ve her n için,

$$g(s(n)) = f(g(n))$$

eşitliğini sağlayan g fonksiyonu elde edilir. g'nin birebir ve örten olduğu kolaylıkla gösterilir. (Kanıtta yer alan $k-1$, $s(k-1) - k$ anlamındadır.) □

Kanıtta tanımlanan f fonksiyonu şöyle de ifade edilebilir.

i. $f(2k+1, i) = (2k+1, i+1)$ $(1 \leq i < 2k+1)$

ii. $f(i, 2k+1) = (i-1, 2k+1)$ $(1 \leq i < 2k+1)$

iii. $f(0, 2k-1) = (0, 2k)$

iv. $f(i, 2k) = (i+1, 2k)$ $(0 \leq i < 2k-1)$

iv. $f(0,0) = (1,0)$

Ayrıca,

$$g(0) = f^0(0,0) = (0,0)$$

$$g(1) = g(s(0)) = f(g(0)) = f^1((0,0))$$

$$g(2) = g(s(1)) = f(g(1)) = f(f((0,0))) = f^2((0,0))$$

ve genel olarak her $n \in \omega$ için

$$g(n) = f^n((0,0))$$

olur. Dikkat edilirse, bu teoremin kanıtı tek ve çift sayılarla ilgili kavram verildikten hemen sonra, sonsuzluk kavramı kullanılmadan, $|\omega \times \omega| = |\omega|$ biçiminde de verilebilirdi.

Yukarıdaki teoremin uygulanmasıyla şu teorem verilebilir.

Teorem 10.22. *Her elemanı boşkümeden farklı, sayılabilir ve en az bir elemanı sayılabilir sonsuz bir kümenin kartezyen çarpımı sayılabilir sonsuzdur.*

Alıştırmalar

10.20. $f : \omega \times \omega \to \omega$, $f((n,m)) = 2^n 3^m$ eşitliğiyle tanımlı fonksiyonun birebir olduğunu gösterin. Böylece, $\omega \times \omega$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğu bu şekilde de gösterilmiş olur.

10.4 Kuratowski Sonlu Küme

Bir kümenin sonlu olması, doğal sayılar kullanılmadan farklı biçimde de verilebilir. Bunlardan biri Kuratowski sonluluk kavramıdır. Bir kümenin sonlu olmasıyla Kuratowski sonlu olması birbirlerine denk kavramlardır. Buna karşın, bu denklik kavramı kullanılmadan, bazı temel sonuçların kanıtları farklı biçimlerde de verilebilir.

Tanım 10.5. X bir küme olmak üzere, $\mathcal{S} \subseteq \wp(X)$ kümesi,

i. $\emptyset \in \mathcal{S}$,

ii. Her $S \in \mathcal{S}$ ve $x \in X$ için $S \cup \{x\} \in \mathcal{S}$

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{S}$'ye **tümevarımsal sistem** denir.

Tümevarımsal sistemle ilgili birkaç temel gözlem:

a. Bir kümenin kuvvet kümesi tümevarımsal sistemdir.

b. $\mathcal{S} = \{A \subset \omega : A \text{ sonlu}\}$ kümesi, $\wp(\omega)$ kümesinden farklı ve tümevarımsal sistemdir.

c. Bir küme üzerinde tanımlı tümevarımsal sistemlerin arakesiti de bir tümevarımsal sistemdir.

d. X bir küme ve $A \subseteq X$ verilsin. $\mathcal{R}$, X'de tümevarımsal sistem ve $\mathcal{S}$, A'da tümevarımsal sistem ise $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, A'da tümevarımsal sistem olur. Ayrıca $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}(A)$, A'da tümevarımsal sistemdir.

Bazı kümelerde tümevarımsal sistem sadece tek bir tane olabilir.

Tanım 10.6 (Kuratowski-1920)**.** Tümevarımsal sistemi sadece ve sadece kuvvet kümesi olan kümeye ***Kuratowski küme*** (K-sonlu) denir.

Birbirine denk iki kümenin biri K sonluysa diğerinin de K sonlu olduğu kolaylıkla gösterilir.

En az bir K-sonlu küme vardır.

Teorem 10.23. *Boş küme K-sonludur.*

Kanıt: $X = \emptyset$ olmak üzere $\mathcal{S} \subseteq \wp(X)$ tümevarımsal sistem olsun. $A \in \wp(X)$ ve $x \in X$ verilsin. Mantıksal sonuç olarak,

$$A = \emptyset = A \cup \{x\} \in \mathcal{S}$$

olacağından, $A \in \mathcal{S}$ olur. Sonuç olarak, $\mathcal{S} = \wp(X)$ olur. Tanım gereği X, K-sonlu kümedir. □

Teorem 10.24. *Aşağıdakiler gerçekleşir.*

i. *Her doğal sayı K-sonlu.*

ii. *Her K-sonlu küme sonlu.*

Kanıt: *i.* $A = \{n \in \omega : n, K\text{-sonlu}\}$ diyelim. Yukarıdaki teorem gereği $0 \in A$ olur. $n \in A$ verilsin. $\mathcal{S}$, $s(n)$'de tümevarımsal sistem olsun. $\mathcal{S} \cap \wp(n)$, n'de tümevarımsal sistem ve varsayım gereği n, K-sonlu olduğundan,

$$\wp(n) = \mathcal{S} \cap \wp(n)$$

olur. $B \in \wp(s(n))$ verilsin.

$$B \setminus \{n\} \in \wp(n) \subset \mathcal{S}$$

olduğundan,

$$B = (B \setminus \{n\}) \cup \{n\} \in \mathcal{S}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\mathcal{S} = \wp(s(n))$$

olur. O halde, $s(n)$, K-sonlu, yani $s(n) \in A$ olur. Tümevarım gereği $A = \omega$.
ii. A, K-sonlu küme olmak üzere, $\mathcal{S} = \{B \subseteq A : B, \text{ sonlu}\}$ kümesini tanımlayalım. $\mathcal{S}$'nin tümevarımsal sistem olduğu açık. Dolayısıyla, $A \in \mathcal{S}$ olur. Buradan da, A'nın sonlu olduğu görülür. □

Bu teoremin bir sonucu: Bir kümenin sonlu olması için gerek ve yeter koşul K-sonlu olmasıdır.

Teorem 10.25. *K-sonlu bir küme ile tek elemanlı bir kümenin bileşimi K-sonludur.*

Kanıt: A, K-sonlu ve $B = \{x\}$ bir elemanlı küme olsun. $C = A \cup B$ diyelim. $x \in A$ ise $A = C$ olacağından, isetenilen açık. $x \notin A$ olsun. $\mathcal{R}$, C'de bir tümevarımasal sistemi olsun. $\mathcal{R} = \wp(C)$ olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}(A)$, A'da tümevarımsal sistem ve A'nın K-sonlu olmasından dolayı

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}(A)$$

olur. Buradan $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{R}$ elde edilir. $R \in \wp(C)$ verilsin. $R \setminus \{x\} \in \wp(A)$ olduğundan, $R \setminus \{x\} \in \mathcal{R}$ olur. $\mathcal{R}$ tümevarımsal olduğundan da $R \in \mathcal{R}$ elde edilir. Böylece, $\mathcal{R} = \wp(C)$ olduğu gösterilmiş olur ve kanıt biter. İkinci kısmın kanıtı açık. $\square$

Yukarıdaki teoremin uygulanmasıyla K-sonlu altkümelerinin kümesinin o kümede tümevarımsal küme olduğu hemen görülür.

Teorem 10.26. *Tek elemanlı küme K-sonludur.*

Kanıt: Boşküme K-sonlu olduğundan, yukarıdaki teorem gereği tek elemanlı küme de sonludur.

Teorem 10.27. *Verilen bir kümede tanımlı tümevarımsal sistemlerin arakesiti, elemanları kümenin K-sonlu altkümeleri olan kümedir.*

Kanıt: X kümesi verilsin. Her $A \subseteq X$ için $\mathcal{S}(A)$, A'da tanımlı bütün tümevarımsal sistemlerin arakesiti ve $\mathcal{F}(A)$, A'nın K-sonlu altkümeleri olsun. $\mathcal{F}(A)$, Teorem 9.25'in kanıtı sonrası paragrafta ifade edildiği üzere, tümevarımsal sistemdir. $\mathcal{S}(A)$ da her tümevarımsal sistem tarafından kapsanan tümevarımsal sistemdir. Dolayısıyla, $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{F}(A)$ olur. Ayrıca, $\mathcal{S}(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$ olur. $F \in \mathcal{F}(X)$ verilsin.

$$F \in \wp(F) = \mathcal{F}(F) \subseteq \mathcal{F}(X)$$

olduğundan, $\mathcal{F}(X) = \mathcal{S}(X)$ elde edilir. $\square$

Teorem 10.28. *Bir kümenin Kuratowski sonlu olması için gerek ve yeter koşul kümenin her tümevarımsal sistemin elemanı olmasıdır.*

Kanıt: X sonlu küme olsun. Tanım gereği X'nin tümevarımsal sistemi sadece ve sadece kuvvet kümesi olduğundan, X'in bütün tümevarımsal kümeleri X'i içerir. Tersine, X'in K-sonlu kümelerinin oluşturduğu küme, tümevarımsal sistem ve her tümevarımsal küme tarafından kapsandığından istenilen elde edilir. $\square$

Teorem 10.29. *K-sonlu kümenin her altkümesi K-sonludur.*

Kanıt: X, K-sonlu bir küme olsun. $\mathcal{F}(X)$ ve $\mathcal{S}(X)$ bir önceki Teorem 9.27'nin kanıtında olduğu gibi tanımlansın. Yukarıdaki teorem ve X'in K-sonlu olması kullanılarak,

$$\wp(X) = \mathcal{S}(X) = \mathcal{F}(X)$$

olur. Kanıt tamamlanır. □

Teorem 10.30. *K-sonlu A kümesi için aşağıdakiler doğrudur.*

i. *$f : E \to A$ birebirse E, K-sonludur.*

ii. *$f : A \to E$ örtense E, K-sonlu.*

iii. *İki denk kümeden biri K-sonluysa diğeri de K-sonludur.*

Kanıt: **i**. $\mathcal{S} = \{C \in \wp(A) : p : D \to C$ birebir ise D, K-sonlu$\}$ kümesinin A'da tümevarımsal sistem olduğu kolaylıkla gösterilir. A tümevarımsal sistem olduğundan, $\wp(A) = \mathcal{S}$, dolayısıyla, $A \in \mathcal{S}$ olur. İstenilen elde edilir.

ii. $\mathcal{S} = \{C \in \wp(A) : p : C \to D$ örten ise D, K-sonlu$\}$ kümesinin A'da tümevarımsal sistem olduğu kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla, $A \in \mathcal{S}$ olur. İstenen kanıtlandı.

iii. (i) ve (ii) den hemen elde edilir.

Alıştırmalar

10.21. Aağıdakileri, "bir kümenin sonlu olması için gerek ve yeter koşul K-sonlu olmasıdır"ı kullanmadan kanıtlayın:

i. İki K-sonlu kümenin bileçimi K-sonludur.

ii. Bir kümenin K-sonlu olması için gerek ve yeter koşul kuvvet kümesinin K-sonlu olmasıdır.

iii. İki K-sonlu kümenin kartezyen çarpımı K-sonludur.

iv. İki K-sonlu küme arasında tanımlı fonksiyonlar kümesi K-sonludur.

10.22. Verilen iki K-sonlu küme arasında birebir ya da örten fonksiyonun varlığını gösterin.

10.23. K-sonlu küme tanımını kullanarak her elemanı K-sonlu olan K-sonlu kümenin bileşiminin K-sonlu olduğunu gösterin.

10.5 Tarski Sonlu Küme

Sonlu küme kavramını kavramsal olarak ilk ele alanlardan biri Polonyalı matematikçi Alferd Tarski'dir. [52]'de Tarski, günümüzde '"Tarski sonlu" olarak bilinen bir tanımlama yapmıştır. Bu tanımlama birçok yönüyle doğal olup, diğer birçok sonluluk kavramına denktir.

X kümesi ve $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ kümesi verilsin. $A \in \mathcal{A}$ tarafından kapsanan $\mathcal{A}$'nın başka elemanı yoksa A'ya $\mathcal{A}$'nın, (kapsama sıralamasına göre) **$\subseteq$-minimal elemanı** denir. Benzer biçimde, $A \in \mathcal{A}$'yı kapsayan $\mathcal{A}$'nın A'dan başka elemanı yoksa, A'ya $\mathcal{A}$'nın bir **$\subseteq$-maksimal elemanı** denir.

Teorem 10.31. *Bir X kümesi için aşağıdakiler denk olur.*

i. *$\wp(X)$ kümesinin her altkümesinin bir minimal elemanı vardır.*

ii. *$\wp(X)$ kümesinin her altkümesinin bir maksimal elemanı vardır.*

Kanıt: (i)'nin gerçeklendiğini varsayalım. $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ verilsin. Varsayım gereği $\mathcal{B} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ kümesinin bir minimal elemanı A vardır. $X \setminus A$, $\mathcal{B}$'nin bir maksimal elemanı olduğu kolaylıkla gösterilir. Benzer biçimde, (ii)'nin gerçeklenmesi durumunda, (i) gerçekleşir. $\square$

Doğal sayıların sonsuz altkümelerinin minimal elemanı yoktur. Buna karşılık, her n doğal sayısı için $\wp(n)$ kümesinin altkümesinin minimal elemanı vardır. Bir kümenin sonlu olması, minimal eleman terimi kullanılarak da verilebilir.

Tanım 10.7 (Tarski-1924 [52])**.** Kuvvet kümesinin boş olmayan her altkümesinin minimal elemanı olan kümeye ***Tarski sonlu küme*** denir.

Sonlu küme ile Kuratowski sonlu kümelerin çakıştığı gösterilmişti. Bu kavramlar Tarski sonlu kümeyle de çakışır. Bunlara ilaveten, diğer denk koşullar aşağıdaki teoremdeki gibi verilebilir. Bu kanıtların çoğu [45]'den alınmıştır.

Teorem 10.32. *Bir X kümesi için aşağıdakiler denk olur.*

i. *Sonlu.*

ii. *Tarski sonlu.*

iii. *X'de tersi de iyi sıralama olan bir iyi sıralama var.*

iv. *X, tam sıralı ve X üzerindeki her tam sıralama iyi sıralamadır.*

v. *Her $A \subseteq X$ için $F(A) \nsubseteq A$ olacak biçimde $F : X \to X$ fonksiyonu var.*

vi. *Kuratowski sonlu.*

Kanıt: X boşküme ise istenen açık. Dolayısıyla, $X \neq \emptyset$ alabiliriz.
$ii \Rightarrow i$: X'in sonlu olmayan Tarski sonlu küme olduğunu varsayalım.

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : A \text{ sonlu }\}$$

kümesini tanımlayalım. $\mathcal{F}$'nin $\subseteq$-minimal elemanının olmadığı gösterilerek çelişki elde edilecek. M, $\mathcal{F}$'nin $\subseteq$-maximal elemanı olsun. X sonlu olmadığından, $X \setminus M$ boşkümeden farklıdır. $a \in X \setminus M$ seçelim. $M \cup \{a\}$, X'in sonlu altkümesi olur. Bu, M'nin $\subseteq$-maksimal elemanı olmasıyla çelişir. O halde, Teorem 9.31 gereği, en az bir $\mathcal{F} \subseteq \wp(X)$'in $\subseteq$-minimal elemanı yoktur, yani X, Tarski sonlu değildir. Bu, varsayımla çelişir.

iii $\Rightarrow$ *i*: $\leq$, X'de hem kendisi, hem de tersi iyi sıralama $\leq$ olsun. $\leq$'nın ters sıralamasını $\leq_t$ ile gösterelim. Yani,

$$a \leq b \Leftrightarrow b \leq_t a.$$

X'in sonlu olmadığını varsayalım. Bu durumda, X'in her sonlu altkümesi için $X \setminus A$ boşkümeden farklıdır.

$$f : X \to X,\ f(x) = \min X \setminus \{y \in X : y < x\}$$

kuralıyla f fonksiyonu tanımlansın. Başlangıç noktasını $x_0 = \min X$ alıp f'ye recursion teoremini uygulayarak,

$$g(0) = 0, \text{ ve her } n \in \omega \text{ için } g(s(n)) = f(g(n))$$

eşitliğini sağlayan $g : \omega \to X$ fonksiyonu var. g'nin birebir olduğu kolaylıkla gösterilir. $Y = g(\omega)$ diyelim. Y'nin $\leq_t$ sıralamasına göre minimumu yoktur: Olduğunu varsayalım ve bu sıralamaya göre minimum s olsun. $s = g(n)$ olacak biçimde $n \in \omega$ seçelim. F'nin tanımından,

$$g(n) < g(n+1)$$

olur. Bir başka deyişle,

$$g(n+1) <_t g(n) \text{ ve } g(n+1) \neq s$$

olur. Bu, $\leq_t$ sıralamasına göre, $\min g(\omega)$'nın infimumunun s olmasıyla çelişir. O halde, X'in boş olmayan bir altkümesinin ters sıralama $\leq_t$'ye göre minimumu yoktur. Bu, varsayımla çelişir. O halde, X sonludur.

iv $\Rightarrow$ *iii*: (*iv*)'in gerçekleştiğini varsayalım. $\leq$, X'te tam sıralama olsun. $\leq$'dan gelen ters sıralama $\leq_t$'de tam sıralama olur. Varsayım gereği $\leq$ ve $\leq_t$ iyi sıralamadır.

v $\Rightarrow$ *i*: (*iv*) gerçekleşsin. $a \in X$ seçelim. başlangıç noktasını a seçerek ve recursion teoremini F'ye uygulayarak,

$$G(0) = 0 \text{ ve her } n \in \omega \text{ için } G(n+1) = F(G(n))$$

eşitliğini sağlayan $G : \omega \to X$ fonksiyonu elde edilir.

$$F(G(Y)) \subseteq G(Y)$$

olduğundan, varsayım gereği

$$G(Y) = X$$

olur. $G(n) = a$ olacak biçimde, $n > 0$ vardır. (Olmasaydı, $F(X \backslash \{a\}) \subseteq X \backslash \{a\})$ olur ve bu (iv) ile çelişirdi.)

$$m = \min\{n > 0 : F(n) = F(0)\}$$

diyelim. Bu durumda

$$X \subseteq \{G(0), G(1), ..., G(m-1)\}$$

elde edilir. Dolayısıyla, X sonlu kümedir.

(i)'nin gerçekleşmesi durumunda diğer kısımların gerçekleşeceğinin kanıtı okura bırakıldı. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

10.24. Sonlu küme ve K-sonlu küme için verilen teorem ve kanıtları, sadece ve sadece Tarski sonlu küme tanımı kullanarak, Tarski sonlu kümeler için yapın. (İki Tarski sonlu kümenin bir altkümesinin Tarski sonlu olduğunu göstermek gibi.)

10.6 Dedekind Sonsuz Küme

Daha önce verilen sonsuzluk kavramıyla bağlantılı ama birbirlerine ZF'de denk olmayan başka sonsuzluk kavramları da vardır. Buna karşın, bunlar ZFC'de denk kavramlardır. Verilecek yeni sonsuzluk kavramının tanımlanmasında doğal sayılar kümesi kullanılmamış olsa da w kümesi kullanılarak, bazı karakterizasyonları verilebilir.

Tanım 10.8 (Dedekind-1888)**.** Kendisine eşit olmayan bir altkümesine denk olan kümeye ***Dedekind-sonsuz*** küme denir. Dedekind sonsuz olmayan kümeye ***Dedekind-sonlu*** denir[7].

Yani bir X kümesinin Dedekind-sonsuz olması, en az bir $Y \subset X$ kümesi için X ve Y kümelerinin denk olmaları durumudur. Dedekind sonlu kümeye kısaca D-sonlu ve Dedekind sonsuz kümeye D-sonsuz denir.

En az bir Dedekind sonsuz küme vardır. Gerçekten de w, Dedekind sonsuz kümedir: w ve $\omega \backslash \{0\}$ kümeleri denktir[8]. D-sonsuz kümelerle ilgili temel olarak, denk ifadeler aşağıdaki gibidir.

[7] Bu yaklaşım Peirce tarafından Dedekind'ten bağımsız olarak aynı yıllarda verilmiştir. Detaylar Collected Papers of Charles Sanders Peirce.– Volume III, 210-249'da bulunabilir.

[8] Denklik, $f : \omega \to \omega$, $f(n) = s(n)$ olarak tanımlanan fonksiyon üzerinden elde edilebilir.

Teorem 10.33. *Bir X kümesi için aşağıdakiler denktir.*

(i) X*, Dedekind-sonsuz.*

(ii) X*'e ait olmayan bir ∞ için X ve $X \cup \{\infty\}$ kümeleri denktir.*

(iii) *w kümesinden X kümesine tanımlı birebir fonksiyon vardır.*

(iv) X*'in sayılabilir sonsuz bir altkümesi vardır.*

Kanıt: $i \Rightarrow iii$: $f : X \to X$, $f(X) \neq X$ olacak biçimde birebir ve örten f fonksiyonu var. $y \in X \setminus f(X)$ seçelim. Başlangıç noktasını y alarak ve f'ye recursion teoremini uygulayarak,

$$g(0) = y,\ g(n+1) = f(g(n))\ (n \in w)$$

eştliklerini sağlayan $g : w \to X$, fonksiyonu tanımlanabilir. g fonksiyonu birebirdir.
$iii \Rightarrow ii$: $f : w \to X$ birebir fonksiyon olsun. $g : X \to X \cup \{\infty\}$ fonksiyonu,

$$g(f(0)) = \infty,\ g(f(n+1)) = f(n) \text{ ve } g(x) = x \text{ (diğer durumlarda)}$$

kuralıyla tanımlansın. g birebir ve örten fonksiyondur.
$ii \Rightarrow i$: $f : X \to X \cup \{\infty\}$ birebir örten bir fonksiyon olsun. f^{-1}'in X kümesine olan kısıtlanışı, X'den $X \setminus \{f^{-1}(\infty)\}$'ye tanımlı birebir örten fonksiyondur.□

Teorem 10.34. *Her sonlu küme Dedekind sonludur.*

Kanıt: X kümesinin sonlu ama Dedekind sonlu olmadığını, yani Dedekind sonsuz olduğunu varsayalım. Yukarıda verilen teorem gereği $f : w \to X$ birebir fonksiyon vardır.

$$\mathcal{A} = \{\{f(m) : m \geq n\} : n \in w\}$$

kümesi boş olmayan bir kümedir ve minimal elemanı yoktur. Teorem 9.31 gereği X sonsuz olur. Bu çelişkidir ve kanıtı tamamlar. □
$iii \Rightarrow iv$: Açık.

Yukarıda verilen teoremin tersi ZF'de doğru değildir. Yani, her Dedekind sonlu kümenin sonlu olduğu söylenemez. Bir başka deyişle

Dedekind her sonlu kümenin sonlu olduğunu kanıtladım

diyen herkesin kanıtı yanlıştır. Gerçekten de

Sonsuz ve Dedekind sonlu kümeler vardır

ifadesi bir aksiyom olarak ZF'ye eklenirse elde edilen sistem çelişkisiz olacaktır.

Teorem 10.35 (Tarski-1924)**.** *Bir kümenin sonlu olması için gerek ve yeter koşul kuvvet kümesinin kuvvet kümesinin Dedekind sonlu olmasıdır.*

Kanıt: X sonlu küme olsun. $\mathcal{P}(X)$ kümesinin sonlu olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ kümesi sonlu ve Teorem 9.34 gereği Dedekind sonludur. Şimdi X'in sonsuz olduğunu varsayalım. $f : w \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ fonksiyonu

$$f(n) = \{A \subset X : |A| = n\}$$

kuralıyla tanımlansın. f birebirdir. Teorem 9.33 gereği, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ Dedekind sonsuzdur. □

Bir kümenin kuvvet kümesinin Dedekind sonlu olmasını karakterize eden teoremlerden biri aşağıdadır. Bir sonraki teorem sonlu küme ve Dedekind sonlu kümelerin hangi koşullarda çakıştığına ilişkindir. Bu teoremlerin bir kanıtı [26]'de bulunabilir.

Teorem 10.36. *Verilen bir X kümesi için aşağıdakiler denktir.*

i. *X'den w'ye tanımlı örten fonksiyon var.*

ii. *$\mathcal{P}(X)$ Dedekind sonsuz.*

Teorem 10.37. *Aşağıdakiler denktir.*

(i) *Bir kümenin Dedekind sonlu olması için gerek ve yeter koşulun sonlu olmasıdır.*

(ii) *Her elemanı Dedekind sonlu olan Dedekind sonlu kümenin bileşimi Dedekind sonludur.*

(iii) *Bir Dedekind sonlu kümenin bir fonksiyon altındaki görüntüsü Dedekind sonludur.*

(iii) *Bir Dedekind sonlu kümenin kuvvet kümesi Dedekind sonludur.*

(iv) *Verilen her x kümesi için ya x'den w'ye ya da w'den x'e birebir fonksiyon vardır.*

Bölümün girişinde de ifade edildiği gibi Seçim Axiomu altında, bir kümenin Dedekind sonlu olması için gerek ve yeter koşul sonlu olmasıdır. Her sonlu kümenin Dedekind sonlu olduğu zaten biliniyor. Şimdi tersini gösterelim. Bunun için her sonsuz kümenin Dedekind sonsuz olduğunu göstermek yeterli. X sonsuz küme ve her $n \in \omega$ için, X_n, X'in n kez kartezyen çarpımı olsun. Seçim Aksiyomu gereği $\prod_n X_n$ boş olmayan bir kümedir.

$$(y_n) \in \prod_n X_n$$

seçelim. Her n için,

$$y_n = ({x_n}^1, ..., {x_n}^n)$$

biçiminde olacaktır. Her $k \in \{1, ..., n+1\}$ için

$$x_{n\frac{n+1}{2}+k} = {x_{n+1}}^k$$

olmak üzere $\{x_n : n \in \omega\}$ kümesi sonsuz olur.

$$f(n) = x_{\min\{k : x_k \notin \{f(m) : m < n\}\}}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon birebirdir. Teorem 9.33 gereği X Dedekind sonsuz olur.

Dedekin sonlu ve sonlu küme arasındaki ilişkiyle ilgili detaylı bilgi [26]'da bulunabilir.

10.6.1 Süreklilik Hipotezi

Bir sonsuz kümenin olması ve bir kümeyle onun kuvvet kümelerinin denk olmaması, farklı sonsuzların olmasının yolunu açtı. İlk elde edilen sonsuz kümenin ω ve bir sonrakinin $\wp(\omega)$ olduğunu hatırlayalım.

$$card(\wp(\omega) = card(\mathbb{R})$$

olduğu 14.11'de gösterildi. Bu iki sonsuzun kardinalitesi iki özel sembol ile gösterilir:

$$card(\omega) = \aleph_0$$

ve

$$card(\mathbb{R}) = c.$$

Böylece bu gösterimlerle

$$\aleph_0 < c$$

olur. Cantor'un uğraşmasına karşın, başarılı olamadığı problemlerin başta geleni

$$\aleph_0 < card(X) < c$$

olacak biçimde bir kümenin olup olmadığıydı. Bu sorunun olumlu yanıtı, ω'dan farklı sonsuz bir kümenin kuvvet kümesi olarak yazılamayacak sonsuz kümelerin var olacağını söyler. Sorunun yanıtı için akla gelecek kümeler $\omega \times \omega$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmasına karşın, bu kümeler istenileni sağlamıyordu.

Tanım 10.9 (Cantor, 1978)**.** $\aleph_0 < card(X) < c$ olacak biçimde bir X kümesinin olmamasına **Süreklilik Hipotezi** denir.

Bir başka deyişle, Süreklilik Hipotezi,

$$\aleph_0 \leq card(X) \leq c$$

eşitsizliğini sağlayan bir X kümesi için

$$\aleph_0 = card(X) \text{ ya da } card(X) = c$$

olmasını söyler.

1963'de Cohen Seçim Aksiyomu'nun değilinin ZF'ye eklenmesiyle elde edilen yapının $(ZF + C)$ çelişkisiz olduğunu gösterdi. Aynı zamanda, Süreklilik Hipotezi'nin $ZF + C$'e eklenmesiyle elde edilen yapının $(ZF + C + SH)$ çelişkisizliğini kanıtladı. Sonuç olarak, Gödel tarafından kanıtlanmak isetenen, Seçim Aksiyomu'nun ZF'de ve Süreklilik Hipotezi'nin ZFC'de bir teorem olmadığı Cohen tarafından kanıtlanmış oldu. Bunun sonucu olarak, $ZF + C$, $ZF + \neg C$, $ZF + C + SH$ ve $ZF + C + \neg SH$ matematiğin "temiz alanları" olduğu kanıtlanmış oldu.

Stanford'da doktora öğrencisi olan Cohen, $ZF+C+\neg SH$ yapısının çelişkisiz olduğunu kanıtladıktan sonra, kanıtın doğruluğunu kontrol etmesi için Princeton'da Gödel'in kapısın çalar. Gödel kapıyı sadece ve sadece Cohen'in kanıt kağıtlarını alacak kadar aralar. İki gün sonra, sonucun doğru olduğunu bildirmek için Gödel Cohen'i evine davet eder ve kanıtının doğru olduğunu söyler.

Süreklilik Hipotezi Hausdorff tarafından şöyle genellendi:

Tanım 10.10. (**Genelleştirilmiş Süreklilik Hipotezi GSH**) X sonsuz bir küme olmak üzere $card(X) < card(Y) < card(\wp(X))$ olacak biçimde bir Y kümesi yoktur.

$ZF + C + GSH$ ve $ZF + C + \neg GSH$ yapılarının çelişkisiz olduğu sırasıyla Gödel (1938) ve Cohen (1963)'de gösterildi. Bunun yanında, Seçim Aksiyomunun $ZF + GSH$'de bir teorem olduğu Sierpinski tarafından kanıtlanmıştır.

10.6.2 Sonsuzluk ve Georg Cantor

Kronecker, Cantor'un sonsuzlarından nefret etti. Cantor 1918'de sonsuzlarını bırakıp bir başka sonsuza gitti.

Yunan Filozof Zenon (MÖ 490-430), atılan bir okun sabit olan hedefine ulaşamayacağı paradoksunu şöyle kuruyordu: Ok önce, hedefe olan mesafenin yarısını gitmek durumunda. Sonra, geriye kalan yolun yarısını ve bu şekilde, bu kurala göre kalan yolun yarısı gidilmeli. Bu biçimde oluşturulacak "yarı yollar" hiç bitmeyecek, hep bir sonraki olacaktır. İste bu hiç bitmeyecekmiş gibi görünen durum insanlığı sonsuz kapısına yönlendiriyordu[9]. Bir rivayete göre, bir meydanda toplanan halkın, hocası Parmenides'in görüşleriyle alay etmesi Zenon'un ağırına gider ve bu nedenle Zenon, bir masa başında toplanmış ahali ile şöyle bir polemiğe girer:

Zenon: Bu masa aslında sonsuz büyüktür.

Ahali: Neresi sonsuz büyük, işte başında oturuyoruz.

Zenon: Bu masayı istediğiniz kadar bölüp parçalayın. Neticede yok edebilir misiniz? Hep bir parçası kalır, değil mi? Öyleyse, sonsuz büyüktür.

Ahali: Höö!

Zenon: Bu masa aynı zamanda sonsuz küçüktür.

Ahali: Az önce sonsuz büyük dedin, ikna ettin bizi. Bir masa nasıl hem sonsuz büyük, hem de sonsuz küçük olabilir?

Zenon: Bu masadan istediğiniz kadarını yan yana getirin. Sonsuz büyük bir masa elde edebilir misiniz?

Ahali: Edemeyiz. Hep yeni bir masa koyabilecek yer kalır.

Zeno: Öyleyse bu masa sonsuz küçük. Dağılabilirsiniz[10].

Zeno'nun hareket konusuna olan yaklaşımıyla ilgili detaylı bilgilere F. Cajori'nin Amer. Math. Montly dergisinde 1915'de yayınlan "History of Zeno's Arguments on Motion" başlıklı seri yazıları üzerinden ulaşılabilir.

Karenin dört köşesi var. Bu kareyi eş 8-gene dönüştürerek 8 köşe elde edilir. Elde edilen 8-genin eş 16-gene dönüştürülmesiyle, 16 köşegen elde edilir. Bu şekilde devam edilerek, diğer taraftan da köşegenlerin sayısı artarken, bir taraftan köşegenlerin "yok olması" gibi paradoks elde edilir. Bu tuhaf durum insanlığı başka bir biçimde, geometri üzerinden, daha sonra da "sonsuz" olarak

[9]Günümüze Zeno'nun hiçbir yazısı ulaşmamakla birlikte onunla ilgili bilgiler Platon, Aristoteles, Simplicius sayesinde elde edilebilmekte. Örneğin, Aristoteles'in *Physics* adlı kitabının VI. cildinin 9. sayfasında, *Zenon Paradoksları* adı altında Zeno'ya atfedilen tartışmalar bulunmakta. Zeno'nun ortaya koyduğu paradoksların arkasında, süreklilik, sonsuzluk ve sonsuz küçüklük kavramları yatar. Bunlar, belirli biçimlerde günümüzde hala tartışılmaktadır. Zeno'nun paradokslarına Cantor'un "süreklilik" ve "küme teori" kavramıyla yanıt verilebilmektedir. Zeno'nun "hareket" yaklaşımına ilişkin kapsamlı çalışmalardan biri, Fransız filozof Pierre Bayle'in 1969 yılında yayınladığı *Historique et critiqe* isimli kitabında yer alan "Zeno d'Elee" adı makalesidir.

[10]Bu diyaloğa dikkatimi çeken Ahmet Cihan'a teşekkür ederim.

yorumlanacak birşeye yönlendiriyordu. Bu, Yunan matematikçi Arşimedyan'ın (MÖ 287-212[11]) gözlemiydi.

Galileo doğal sayıları doğal sayıların kareleriyle birebir eşleyerek farklı iki sonsuzun birbirleriyle eşleniyor olmasından, "sonsuzluk" kavramını anlamanın yöntemlerinin karşılaştırma içinde olduğunu sezinliyor ama üzerine gitmiyor. Galileo, dünyanın yuvarlak olmasının yarattığı "tehlike" ortadayken "neme lazım" çekingenliği yaşamış olabilir.

Cantor, reel sayılarla doğal sayıların sonsuz olmasına karşın, bunların karşılaştırılamadığını göstererek karşımıza iki farklı sonsuz çıkarttı. Sonra, gelsin çeşit çeşit sonsuzlar oldu. Bu, Galileo'nun farklı iki sonsuzu eşleştirebilme durumunun tersi bir durumdu. Cantor'un bu gözlemi, günümüzde "potansiyel sonsuz" olarak adlandırılan "sonsuz"larından mutlu, mesut ve bahtiyar olan bir çok matematikçinin huzurunu kaçırdı. Sadece matematikçilerin değil, sonsuzluğun tanrıya ait ve tek olduğunu söyleyen din bilginlerinin de canını sıkmıştı. Potansiyel sonsuz, istenildiği kadar çoğaltılabilen, örneğin doğal sayılar kümesi gibi bir şeydi. Ama Cantor sonsuzlara çomağı sokmuştu ve arı kovanının içinden tuhaf tuhaf sonsuzlar fırlamıştı. Bir zamanlar Cantor'un hocası ve arkadaşı olan Kronecker'in, bu çomak sokma eylemini gerçekleştiren Cantor'a tavrının argoya tercümesi, "senin belanı sikeceğim" türündendi.

Cantor'un temel çalışmaları şöyle sıralanabilir.

i. Trigonometrik seri açılımlarıyla ilgili Gauss'un başlattığı ama tamamlamadığı, bir fonksiyonun trigonometrik seri açılımının tekliği ile ilgili açık bir problemi 1870'de kanıtladı. Bunu ve bununla ilgili sonuçları 1870-1872 yılları arasında yayınlattı.

ii. 1872'de trigonometrik serilerle ilgili bir yayınında irrasyonel sayıları bir rasyonel sayılar dizisinin limiti olarak tanımladı. Bu tanımlama, Dedekind'in reel sayıları "Dedekind kesitler" olarak bilinen yöntemle tanımladığı ve 1982'de yayınlanan makalede referans olarak yer aldı.

iii. 1873'te rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu, yani rasyonel sayılarla doğal sayıların birbirleriyle eşlenebileceğini kanıtladı. Katsayıları tamsayılar olan bir polinomun köklerine (yani polinomu sıfır yapan sayı) **cebirsel sayı** denir. Cantor cebirsel sayıların sayılabilir olduğunu "Über eine Eigenshaft des Inbegrif algebraischen Zahen" adlı makalesinde kanıtladı ve bu makale Crelle's Journal'da 1974'te yayına kabul edildi.

iv. 1973'te reel sayıların doğal sayılarla eşlenemeyeceğini kanıtladı ve bu sonucunu 1974'te yayınlattı.

[11] Bu kadar kesin bir tarihin nasıl verildiği şaşırtıcı.

v. Katsayıları tamsayılar olan bir polinomun kökü olmayan irrasyonel sayılara transental sayı denir. Liouville π sayısının trasental sayı olduğunu 1951'de gösterdi. Bu, gösterilen ilk transental sayıydı. 1874'te Cantor transental sayıların sayılabilir olmadığını kanıtladı.

vi. Cantor, bir kare ile kapalı bir aralığın eşlenip eşlenemeyeceği üzerindeki düşüncelerini 5 Ocak 1874 tarihli bir mektupta Dedekind'le paylaştı ve mektubunda olamayacağını düşündüğünü ifade etti. Bu sorunun yanıtını 1877'de $[0,1]$ aralığı ile her p doğal sayısı için $[0,1]^p$ kümesinin birebir eşlenebileceğini kanıtladı. Cantor, kendisi için son derece süpriz olan sonucunu, **görüyorum ama inanamıyorum** diyerek, Dedekind ile paylaştı. Bu sonuç, Kronecker'in olumsuz bakışına karşın, Dedekind'in girişimiyle, Crelle'e Journal'de (Journal für die reine und angewandte Mathematik), 1878'de yayınlandı. Bu makalede $[0,1]$ ve $[0,1]^2$ kümelerinin sürekli bir fonksiyon ile eşlenip eşlemeyeceğini de tartıştı.

vii. 1878'de bir önceki bölümde tanımlanan *Süreklilik hipotezi*ni (continuum hypothes) bir tahmin olarak ortaya koydu. Bu tahmin, Hilbert'in 1900'de gerçekleşen Matematik Kongresinde sunduğu 24 problemin başında geliyordu.

Cantor küme teoriyle ilgili temel çalışmalarını 1879-1884 tarihleri arasında Klein'in desteğiyle, Mathematische Annalen dergisinde yayınladı. Gauss sonsuzluğu kimsenin ulaşamayacagı bir şey olarak tanımlarken, Cantor o sonsuzluğu kulağından tutup gözümüzün önüne getirerek, sonsuzluğu matematiksel bir nicelik yapmanın yolunu açtı. Ama yapılacak daha çok iş vardı, aritmetiğinin yapılması gerkiyordu. Sonrasında, çeşitli nedenlerden dolayı, Cantor'un çalışmalarını öncesinde olduğu gibi Mathematische Annalen dergisinde yayınlatamadığı anlaşılmakta.

Kronecker'in Cantor'un çalışmalarına olan olumsuz bakışı ve buna karşı Cantor'un gösterdiği sert tepki nedeniyle, Kronecker'in editörü olduğu Crelle's Journal'da Cantor'un sonuçlarını yayınlama imkanı da kalmadığı anlaşılıyor. Kronecker 1881-1892 tarihleri arasında bu derginin editörlüğünü yapmıştı.

Kronocker'in Cantor'un sonsuz küme kavramıyla ilgili yaptığı çalışmalara ilişkin olarak "gençleri doğal sayılar yolundan ayırıp sonsuz şeyler tımarhanesine saptıran siren sesleri" gibi açıklamalar yapması ve dönemin güçlü matematikçisi Henri Poincare'nin Cantorun çalışmaları için "Matematiğe yapışmış bir hastalık. Matematik bu hastalığı temizleyecek" demesi, o dönemde Cantor'a karşı çekilen keskin kılıçlardı. Cantor'un bu tür sataşmalara yanıtı, "*Benim kuramlarım bir kaya kadar sağlam duruyor; onlara atılan her ok, geldiği hızla okçuya geri döner*" oluyordu. Cantor eğitim bakanına yazdığı bir mektupla ateşe devam ediyordu: "*Schwarz ve Kronecker birgün Berlin'e gelirim korkusuyla dört yıldan beri entrikalar çeviriyorlar... Hareketimin sonucunun ne* *olacağını iyi biliyorum: Kronecker bir akrep sokmuş gibi alevlenecek ve askerleriyle öyle bir uluyacak ki Berlin aslanları, kaplanları ve çakallarıyla birlikte Afrika'nın çöllerine taşınmış olduğunu sanacak.*" Yani, Türkçe deyimle, Cantor "it ürer kervan yürür" diyordu.

Cantor'un çalışmalarını üç matematik dergisinden ikisi olan Mathematische Annalen ve Crelle'se Journal'da yayınlatma olanağı yukarıda açıklanan nedenlerden dolayı yoktu. Geriye, editörü Gösta Mittag-Leffer olan Acta Mathematica dergisi kalıyordu. Mittag-Lefer Cantor'un çalışmalarına sempatiyle bakmaktaydı ve Cantor'un küme teoride bir makalesini yayınlamıştı. Kronecker'in Gösta Mittag-Lefer'e Cantor'un çalıştığı küme kuramının öneminin bulunmadığına ilişkin bir makale yazmak istediğini belirten bir yazı yazmasını, Cantor makalelerinin bu dergide yayınlatılmaması için bir tezgah olarak değerlendirdi. Bunun yanında, zor problemlerden birini çözememesi sonucu 1884 yılının ilkbaharında sinirsel bir bunalıma girdi ve bir aylık tedaviden sonra iyileşir gibi oldu. Bu bunalımın Kronecker ile olan ilişki biçiminden kaynaklandığını düşünerek, Kronecker'e bir uzlaşma mektubu yazdı. Bu mektuba Kronecker'in yanıtı olumlu olmasına karşın, kavga kısa sürede tekrar alevlendi. Bu esnada Mittag-Leffer'in bir makalesini geri çevirmesine Cantor çok alındı ve bir daha da bu dergiye yazı göndermeme kararı aldı. Cantor matematikle ilgili problemler üzerine yoğunlaşmasının akıl sağlığını olumsuz etkilediğini düşünerek, bu süreçte matematiği bıraktı. Sonsuzluklarla ilgili çalışmalarınının felsefe ve dile yansımaları hakkında, felsefe dergilerinde makaleler yazmaya başladı.

1891'de yapılan Alman matematikçiler toplantısında, Cantor ve Kronecker'in kozlarını paylaşmak için karşı karşıya gelmeleri beklenirken, Kronecker'in karısının bir kaza sonucu ölmesi nedeniyle, Kronecker bu toplantıya katılamadı. Bundan kısa bir süre sonra da Kronecker öldü. Cantor ise bir dizi akıl sağlığı problemleri yaşayarak, yaşamının uzun yıllarını hastanelerde ve sanatoryumlarda geçirdikten sonra, sonsuzlarını bırakarak bir başka sonsuza 1918'de geçiş yaptı.

Hilbert 1926 tarihli ve "Über das Unendliche" başlıklı yazısında, "Cantor'un yarattığı cennetten bizi kimse kovamaz" diyordu.

11. Temel Cebirsel Sistemler

Kitabın temel amacı olarak inşaları verilecek olan tam sayılar sistemi rasyonel sayılar sistemi ve reel sayılar sistemi, cebir alanında bazı temel kavramların örnekleri ve motivasyon kaynağıdır. Örneğin: halka teorisini anlatan bir ders kitabında, tam sayılar halkasını bir halka örneği olarak vermemek "böyle bir şey olamaz" tepkisine yol açabilir. Benzer durum, rasyonel sayılar cismini, cisim örneği olarak vermeme için de geçerlidir. Sayı sistemlerinin yapısını cebirsel kavramlar ve yöntemler içerisinde anlamak ve sınıflamak çok daha derleyici ve kolaylaştırıcı olabilmesinin yanında, birçok açıdan yeterli de olabilir. Örneğin, tam sayılar sisteminde sağlanan birçok özelliği el yordamıyla tek tek anlamak ya da kontrol etmek yerine, "tam sayılar sistemi bir halkadır" diyerek, daha geniş bir çerçevede anlaşılması sağlanabilir. Ayrıca, sayı sistemlerini karakterize eden cebirsel aksiyomlarla sınırlar çizilebilir. Bu nedenle, cebirsel yapı kavramının en azından amaca yeter düzeyde verilmesinde yarar var. Bu doğrultuda, bu bölümde grup, halka ve cisim kavramları tanımlanarak, bunların temel özellikleri verilecek.

Sayı sistemlerini cebirsel yapı içerisinde ele almanın avantajlarından biri, "tekliği" belirlemedir. Örneğin, birçok farklı yöntemlerle, Cauchy reel sayılar sistemi, Dedekind reel sayı sistemi gibi çeşitli reel sayı sistemleri inşa edilebilir[1]. Bu sistemlerin birbirlerinden farklı olmadıkları, tam sıralı cisim olarak adlandırılacak cebirsel yapı çatısı altında ifade edilebilir. Bunun sonucu olarak, *onun, bunun ya da bir başkasının* reel sayı sistemi değil, herkesin olan tek bir tane reel sayılar sistemi'nin olduğu söylenebilir. Böyle bir isimlendirme, "eşitlik" üzerinden verilemez, belirli özelliklerin sağlandığı denklik üzerinden, "izomorfik" kavramı altında verilebilir.

Bu bölümün nihai amacı, tam sıralı cisim olarak adlandırılacak cebirsel yapıyı, cebirsel aksiyomlarla tanımlamaktır. Bu nedenle, bu bölümün başlığı *tam sıralı cisim* olarak da verilebilirdi. Daha sonraki bölümlerde, tam sıralı cismin var olduğu çeşitli yöntemlerle gösterilecek.

Gerek kitabın amacı açısından ve gerekse kitabın hacmini arttırmamak için klasik kitapların çoğunda yer alan cebirsel yapılarla ilgili birçok temel

[1] Bir sıralı cismin tam olmasına denk olan 72 farklı koşul listesi [19]'de verilmiştir.

özelliğin kanıtları kitabın bu bölümünde verilmemiş ya da detaylara girilmeden verilmiştir. Örneğin, bir halkada

$$(-x)y = -(xy)$$

eşitliğinin sağlandığı detaylı gösterimlerden kaçınmak için ve okurun kolaylıkla gösterebileceği varsayımıyla verilmemiştir. Ayrıca, klasik kitaplarda detaylarıyla verilen halka teoriyle ilgili kavramlar ve temel sonuçlar (örneğin bir bölüm halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşulun bölen idealin maksimal olması gibi), problemler içerisine tabiri caiz ise "sıkıştırılmıştır". Bu tür teoremlerin kanıtları zor olabilir ya da kanıt yöntemine okur yabancı olabilir. Bu durum okuru panikletmemeli!

Bu bölümde örnek ya da alıştırmaların çoğunluğu sayılar sistemi üzerinden verilmiştir. Okurun sayılar sisteminin cebirsel yapıları hakkında (iki reel sayının toplamı, çarpımı, üssü gibi) temel düzeyde bilgi sahibi olduğu varsayılmıştır.

11.1 Cebirin Doğuşu

Cebirin gelişimiyle ilgili detaylar, doğal olarak "dipsiz bir kuyu" olup, detaylar bu kitabın konusuna ve kapsamasına sığmaz. Bu altbölümde cebir kavramının temeli sayılan bir kaç süreçten bahsedilecek. Çok daha fazla detaylı bilgilere [36]'dan ulaşılabilir ya da onun üzerinden iz sürülebilir.

Cebir olarak adlandırılan en eski çalışmalar Pisagorcular'a ya da Suriyeli filozof İamlikhos'a göre, n bilinmeyenli denklem çözümü konusunda bir kural veren Pisagorcu bilgin Paroslu Thymaridas'a kadar uzanır. Bu kural şöyle: *Üç niceliğin toplamı ve bu niceliklerden belirli birini içeren çiftlerin toplamı verildiğinde, bu belirli nicelik bu çiftlerin toplamları ile en baştaki üç niceliğin toplamı arasındaki farka eşittir.* ([36]). Pisagorcuların yazılmış "kitapları" bildiğim kadarıyla yok!

Matematikte, özellikle cebir tarihinde cebirin kurucuları olarak öne çıkan üç isimden ilki, MS 300'de *Aritmetika*'yı yazan Diophantos (MÖ 205-290(+-15)), ikincisi Hintli matematikçi Brahmagupta (598-668), üçüncüsü İran'lı matematikçi Ebu Abdullah Muhammed bin Musa el-Harizmi'dir (kısaca Harizmi, 780-850).

Brahmagupta, 628 yılında "iyi matematikçiler ve gökbilimciler sevsin" diye *Brahmasphutasiddhanta* (Brahma'nın Doğru Kurulmuş Öğretisi) isimli eserini yazdı. Harizmi bu kitap, astronomi üzerine Sanskrit dilinde yazılmış bir kitaptır. 771'de bir Hintli bir elçi tarafından Halife Mansur'a hediye edilen bu kitap, Halife'nin emriyle Arapçaya çevrilmiştir.

Harizmi, Brahmasphutasiddhanta'nın etkisi altında, bu kitabın Arapça çevirisinden öğrendiği Hint rakamlarını kullanarak bir ders kitabı yazar. Bu kitap sonrasında, özellikle ikinci dereceden denklemlerin pozitif köklerinin çözümünü konu alan *Hisabül-Cebrve'l Mukabele* (Cebir ve Denklem Hesabı Üzerine) başlıklı bir kitabı 820'li yıllarda yazdı. Bu kitap Cebir konusunda Arapça yazılmış en eski kitap olarak bilinmekte. Bu kitabın orijinalinin mevcut olmamasına karşın, Latinceye Chesterlı Robert tarafından çevrilmiş hali mevcuttur. (Bu çevirinin varlığı 19.yüzyılda fark edilmiştir.) Brahmasphutasiddhanta'den alındığı tahmin edilen ve Araplarca *Sindhind* olarak adlandırılan astronomi tabloların özetinin çıkartılması konusunda, Halife Al-Manun'un Harizmi'yi görevlendirği ve Harizmi'nin Sindhind'in bir Arapça versiyonu olan *Zicü's-Sindhind*'i adlı eserini 825 yılından önce tamamladığı, ilgili tarih kitaplarında ifade edilmektedir. Bu çalışmanın içeriği, Sindhiler ve Hintlilerin kullandığı yöntemlere dayanan bir gökbilim çalışmasıydı. Harizmi'nin MS 825 yıllarında yazdığı *Kitap al Muhtasar fil Hisap el Hind* (Hint Rakamlarıyla Hesap) isimli kitap, önce Arap Dünyasında ve ardından da Latince çevirilerle 12. yüzyılda Avrupa'da yayılmıştır. Harizmi, bu çalışmasından beş yıl sonra, Türkçeye "Tamamlama ve Denkleştirme Yoluyla Hesaplama Hakkında Özet Kitap" olarak çevrilebilecek *El-Kitan'ul Muhtasar fi'l Hisab'il Cebri ve'l Mukabele* adlı bir kitap yayımladı. Bu kitabın içeriği, matematik problemlerinde yer alan niceliklerin (günümüzde denklemler içinde yer alan bilinmeyenler) bulunmasına ilişkindir.

Harizmi'nin kitaplarının başlıklarında geçen *cebrn*, "tazmin" ya da "tamamlama" olarak çevrilmekte olup, "kaynaştırma" anlamındadır. "Cebr" kelimesi, Batı dillerine "algebra" olarak geçti. Bu kelime, 12. yüzyılın ortalarında, Latinceye *Algebra et Almucubala* olarak çevrildi. 15. yüzyılın ortalarında İtalyanca ve Latince yazan bazı yazarlar, cebire "Şeylerin Çıkarılması ve Çarpılması" anlamına gelen *Regula rei e census* diyordu. Cebir'e Françis Viete, "analitik sanat", John Wallis (İngiliz matematikçi, 1616-1703), İngilizce *specious arithmetic*(aldatıcı aritmetik) ve Newton, "evrensel matematik" derken, Rene Descartes'a (Fransız matematikçi, 1595-1650)'e göre Arapça kökenli olan cebir ismi "barbarca"ydı. Sonuçta matematiğin bir dalı olan Cebir, kökeni cebrn olan isimle standartlaştı.

Diophantos'ın Aritmatika'sı on üç kitaptan oluşup Yunanca yazılmıştır. Ancak, bunların sadece altısı günümüze ulaşabilmiştir. Aritmetika takriben 350-370 yılları arasında yaşadığı tahmin edilen Yunan kadın matematikçi olan Hypatia tarafından yorumlanmıştır. *Liber abbaci* kitabınının yazarı olan Fibonacci'nin, Brahmasphutasiddhanta ve Harizmi'nin geliştirdiği cebirsel kavramları Avrupaya taşıdığı tarih kitaplarında yazar.

11.2 Cebirsel yapı

Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki ***ikili işlem***, $X \times X$'den X'e, tanımlı bir fonksiyondur. $\mathcal{A}$, X üzerinde $\mathcal{B}$ aksiyomlarını sağlayan ikili işlemler kümesiyse, X'e bu işlemler ve sağladığı aksiyomlarla birlikte bir ***cebirsel yapı*** denir. Bu yapı $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ ile gösterilebilir. Burada $\mathcal{A}$'ya X'in cebirsel işlem kümesi, $\mathcal{B}$'ye cebirsel aksiyomları denir. $\mathcal{A} = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ ise cebirsel yapı, gösterim kolaylığı açısından, cebirsel aksiyomlar $\mathcal{B}$'yi hiç yazmadan

$$(X, s_1, ..., s_n)$$

ile gösterilebilir. Elbette bu gösterimlerde mutlak bir standart durum yok. $\mathcal{A}$ topluluğunun her elemanına cebirsel yapının bir **cebirsel işlemi** ve $\mathcal{B}$'nin her elemanına cebirsel yapının **cebirsel aksiyomu** denir. Cebirsel yapının hiç aksiyomu olmayabilir, yani $\mathcal{B}$ topluluğunun hiç elemanı olmayabilir. Zaman zaman "$(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$ cebirsel yapı" ifadesi yerine kısaca, "X cebirsel yapı" diyebiliriz. Bu söylem biçimi yazımda kolaylık sağlayacaktır.

Bu kitapta cebirsel yapının cebirsel işlemleri bir ya da iki tane olacaktır. Tek bir cebirsel işlemli cebirsel yapı, cebirsel aksiyomlarının özelliklerine göre,

i. yarıgrup,

i. monoid,

iii. grup,

olarak adlandırılır. Belirli özellikleri sağlayan iki cebirsel işlemli cebirsel yapı ise

iv. halka, cisim

olarak adlandırılacak. Bu yapılar üzerine belirli anlamlarda uyumlu sıralamalar konularak,

v. sıralı halka, sıralı cisim ve tam sıralı cisim

kavramları tanımlanacak.

Bazı kolaylıklar açısından sembol kullanımları hakkında okurla kitap arasında gayri resmi olsa da birkaç "hukuki" anlaşma yapalım.

i. $*$, X cebirsel yapının bir cebirsel işlemi ise her $x, y \in X$ için

$$*(x, y) = x * y$$

yazılır.

ii. Bir X cebirsel yapının herhangi bir sembolle belirtilmeyen bir cebirsel işlemine göre, (x, y) ikilisinin cebirsel işlem altındaki görüntüsü xy ile gösterilebilir.

iii. Bir ifadede yer alan iki farklı cebirsel yapının cebirsel işlemleri aynı sembolle gösterilebilir. Örneğin, $(X, *)$, $(Y, *)$ iki cebirsel yapı olsun denildiğinde, $*$ ile gösterilen cebirsel işlemler aynı olmak zorunda değildir. (Aynı evde yaşayan iki farklı kişin isimlerinin aynı olması gibi.)

iv. İki cebirsel işlemi olan bir cebirsel yapıda, en azından bu kitap özelinde, bu işlemlerin biri *toplama* ve diğeri *çarpma* olarak adlandırılır. Toplama işareti "+" ve çarpma işareti "×" ile gösterilir. Ancak, bazı durumlarda, bu işlemler bu sembolü içerecek biçimde gösterilebilir;

$$+, +_i, \oplus, \times, \times_i, \otimes$$

gibi.

v. $(R, +, .)$ bir cebirsel yapı ise her $x, y, z, t \in X$ için $(xy) + (zt)$ elemanı $xy + zt$ ile gösterilecek.

vi. Sayı sistemlerinde tanımlanan sıralama, toplama ve çarpma gibi kavramlar her ne kadar daha sonraki bölümlerde titiz bir şekilde tanımlanacak olsa da bu bölümde, okurun bu kavramları temel düzeyde bildiği varsayılacak. Bazı örnekler bu sistem üzerinden verilebilir.

vi. Bir X kümesinde tanımlı nokta işareti . ile gösterilen cebirsel işlem için $x.y$ yerine xy yazılabilir. Özellikle halka, cisim olarak adlandırılan yapılarda, bu çarpma işlemi olacak.

vii. Bir $(X, .)$ cebirsel yapıda her $x \in X$ için $x^1 = 1$ yazılır. Bir $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in X$ için $x^n \in X$ olarak tanımlıysa $x^n x = x^{n+1}$ yazılır. Bunun sonucu olarak, fazla "titizliğe" girmeden, $x \in X$, $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, x^n, x^m tanımlanmış ise,

$$x^{n+m} = x^n x^m$$

olur. Bu yazılımda, ikili işlem toplama sembolüyle ya da toplama sembolünü içeren bir sembolle gösteriliyorsa x^n yerine, genel olarak, nx yazılır.

viii. Notasyon kullanımı ile ilgili sınırlamalar sadece yukarıda belirtilen biçimde olmayabilir; "suistimal edilmedikçe" genişletilebilir ve bu durumda, ne demek istenildiğinin okurca anlaşıldığı varsayılacaktır.

11.3 Yarıgrup ve Monoid

Pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{>0}$'da

$$a * b = \frac{b}{a}$$

eşitliğiyle tanımlı ikili işlem genelde

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

eşitliğini sağlamaz. Ancak, cebirsel yapıların çoğunda bu eşitliğin sağlanması beklenir.

Tanım 11.1 (Seguier[49])**.** Cebirsel aksiyomu,

$$\text{Her } x,\ y,\ z \in X \text{ için } x(yz) = (xy)z$$

olan cebirsel yapı $(X, .)$'a ***yarıgrup*** denir.

Cebirsel yapıların birçoğu yarıgruplar için bir örnektir. O nedenle örnek vermeye bile gerek yok!

Yarıgrubun özelliğinden dolayı, X bir yarıgrup ise her $a, b, c \in X$ için $a(bc) = (ab)c$ olması nedeniyle, $a(bc)$ ve $(ab)c$ yerine abc gösterimi kullanılabilir. Bu gösterim verilen $a_1, ..., a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ elemanları için $a_1...a_n$ tanımlandığında,

$$a_1...a_{n+2} = ((a_1...a_n)a_{n+1})a_{n+2}$$

olarak tanımlanır.

X bir yarıgrup ve $e, e^{'} \in X$ elemanları her $x \in X$ için

$$xe = ex = x \text{ ve } xe^{'} = e^{'}x = x$$

eşitliklerini sağlıyorsa $e = e^{'}$ olur. Bu eşitliği sağlayan $e \in X$ elemanına X'in **birimi** denir.

Tanım 11.2. Birimli olan yarıgruba **monoid** denir[2].

X cebirsel yapısının cebirsel işlemi . ve birimi e ise, cebirsel yapı birimini belirtmek için $(X, ., e)$ ile gösterilebilir.

X bir yarıgrup ve boş olmayan bir $A \subseteq X$ kümesi, her $a, b \in A$ için $ab \in A$ oluyorsa, A bir **yarıgrup** olur. Bu yarıgruba X'in **altyarıgrubu** denir. Benzer biçimde **altmonoid** tanımlanır.

Alıştırmalar

[2]Monoid kelimesinin ilk olarak [51]'de kullanıldığı anlaşılmakta. Bazılarına göre, bu kelimenin sıklıkla kullanılması, Chevalley'nin 1956'da yayınlanan "Fundamental Concept of Algebra" adlı kitabından sonra olmuştur.

11.1. Pozitif rasyonel sayılar kümesi

$$\mathbb{Q}^{>0} = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$$

ile gösterilir.

$$a * b = \tfrac{a}{b}$$

ikili işlemine göre $\mathbb{Q}^{>0}$ nın yarıgrup olmadığını gösterin.

11.2. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $(\mathbb{N}, +)$ monoid olmayan yarıgrup.

i. Her $2 \leq n \in \mathbb{N}$ için $X_n = \{m \in \mathbb{N} : n \leq m\}$, çarpma işlemine göre monoid olmayan bir yarıgrup olur.

ii. $(\omega, +)$ monoid[3].

iii. $(\mathbb{N}, .)$ monoid.

iv. $((0, 1], .)$ monoid.

11.3. X boş olmayan bir küme ve $0 \in X$ olsun. X üzerinde $*$ ikili işlemi $x * y = 0$ olarak tanımlansın. X tek elemanlı değilse $(X, *)$ cebirsel yapısının bir yarıgrup olduğunu ama monoid olmadığını gösterin.

11.4. Her $x, y \in X$ için $x * y = y * x$ eşitliğini sağlayan X yarıgrubuna **değişmeli** denir. X boş olmayan bir küme olmak üzere $(\wp(X), \cap)$ ve $(\wp(X), \cup)$ cebirsel yapılarının değişmeli yarıgrup olduğunu gösterin.

11.5. X sonsuz bir küme ve $\wp(X)_s$, X'in sonlu altkümelerinin altkümesi olsun. $(\wp(X)_s, \cap)$'nin değişmeli yarıgrup olduğunu gösterin. Buna karşılık, her $A \in \wp(X)_s$ için $1 \cap A = A$ olacak biçimde $1 \in \wp(X)$ yoktur.

11.6. X, en az iki elemanlı bir küme olmak üzere, S üzerinde

$$a *_1 b = a \text{ ve } a *_2 b = b$$

formülleriyle $*_1$ ve $*_2$ ikili işlemleri tanımlansın. $(X, *_1)$ ve $(X, *_2)$ cebirsel yapılarının birimi olmayan ve değişmeli olmayan yarıgrup olduğunu gösterin.

11.7. X, birimi e olan monoid olsun. a, b, c, $d \in X$ için $ab = ac$ ve $da = e$ ise $b = c$ olduğunu gösterin.

11.8. X, birimi e olan bir monoid olsun. $x \in X$ verilsin.

$$xa = ax = e \text{ ve } xb = bx = e$$

eşitliğini sağlayan a ve b elemanlarının eşit olduğunu gösterin.

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

eşitliğini sağlayan x^{-1} varsa x'e **tersinir** ve x^{-1} elemanına x'in **tersi** denir.

11.9. $(X_i, *_i, e_i)_{i \in I}$ monoidlerin bir ailesi olsun. $X = \prod_i X_i$, $e = (e_i) \in X$ ve X üzerinde,

$$(x_i) * (y_i) = (x_i * y_i)$$

ikili işlemi tanımlansın. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $(X, *, e)$ bir monoid.

ii. Her j için

$$P_j : X \to X_j,\ P_j(f) = f(j)$$

bir homomorfizma.

---

[3] $\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

iii. $\oplus_{i\in I} X_i = \{f \in \prod_i X_i : \{i : f(i) \neq e_i\}$ sonlu$\}$ olmak üzere $(\oplus_i X_i, *, e)$ bir monoid olur. Buna, monoid ailesinin **direkt toplamı** denir.

1. Her i için
$$q_i(x)(j) = \begin{cases} x & ; i = j \\ e_i & ; i \neq j \end{cases}$$
eşitliğiyle tanımlı $q_i : X_i \to X$ fonksiyonu izomorfizma. Yani, q_i birebir ve her $a, b \in X_i$ için $q_i(a *_i b) = q_i(a) * q_i(b)$ eşitliği sağlanır.

2. $\mathcal{A}$, her $i \in I$ için $q_i(X_i)$ kümesini kapsayan X'in alt monoidlerinin ailesi olsun.
$$\bigcap \mathcal{A} = \oplus X_i.$$

11.4 Grup

Her elemanı tersinir olan monoide grup denir. Daha açık ve klasik olarak yazalım.

Tanım 11.3 (Von Dyck [57])**.** Cebirsel aksiyomları aşağıda verilen cebirsel yapı $(G, .)$'ye **grup** denir.

i. Her x, y, $z \in G$ için $x(yz) = (xy)z$.

ii. Her $x \in G$ için $xe = ex = x$ eşitliğini sağlayan $e \in X$ var.

iii. Her $x \in G$ için $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ eşitliğini sağlayan $x^{-1} \in G$ var[4].

Bir grupta aşağıdakiler gerçekleşir.

a. $xy = xz$ ya da $yx = zx$ ise $y = z$ olur.

b. $xx = e$ olması için gerek ve yeter koşul $x = x^{-1}$.

c. $xx = x$ ise $x = e$.

d. $(x^{-1})^{-1} = x$.

e. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Bir yarıgrup X'de her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için x^n ifadesi tanımlanmıştı. Bir grupta bu gösterim her tam sayı n için genişletilebilir: Her $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 0$ ve $x \in X$ için
$$x^{-n} = (x^{-1})^n$$
olarak tanımlanır. Ayrıca,
$$x^0 = e.$$

[4]Grup tanımlama denemesi ilk olarak Cayley tarafından 1854'te yapılmış, mevcut tanıma yakın bir tanımlama 1882'de Heinrich Weber tarafından verilmiştir.

İki grup arasındaki benzerlik, aralarında tanımlı belirli koşulları sağlayan fonksiyonlarla belirlenir. G ve H iki grup olsun. Her $x, y \in G$ için,

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

eşitliğini sağlayan $f : G \to H$ fonksiyonuna ***grup homomorfizma*** denir. Bu homomorfizma için, e_G, G'nin ve e_H, H grubunun birimleriyse

i. $f(e_G) = e_H$,

ii. $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

eşitlikleri sağlanır. Bunun yanında şunlar da sağlanır.

iii. $f(G)$, H'dan indirgenen cebirsel işleme göre bir grup.

iv. $f(G) = \{e_H\}$ olması için gerek ve yeter koşul f'nin birebir olmasıdır.

İki grup arasında tanımlı birebir olan grup homomorfizmaya **grup izomorfizma**, aralarında örten grup izomorfizma olan iki gruba **izomorfik gruplar** denir.

Alıştırmalar

11.10. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{C}, +)$ cebirsel yapılarının grup olduğunu gösterin.

11.11. $(\mathbb{Z}, \times)$, $(\mathbb{Q}, \times)$, $(\mathbb{R}, \times)$ ve $(\mathbb{C}, \times)$ cebirsel yapılarının hiçbirinin grup olmadığını gösterin.

11.12. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ ve $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ cebirsel yapılarının grup olduğunu gösterin.

11.13. Bir $m \in \mathbb{N}$ verilsin. $\mathbb{Z}_m = \{n + m\mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlanır. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. Her $0 \leq k \leq m-1$ için $\overline{k} = k + m\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{k} : 0 \leq k \leq m-1\}.$$

ii. $card(\mathbb{Z}_m) = m$.

iii. $\overline{k_1} + \overline{k_2} = \overline{k_1 + k_2}$ eşitliğiyle tanımlı ikili işleme göre $(\mathbb{Z}_m, +)$ değişmeli grup.

iv. $\overline{k_1} \times \overline{k_2} = \overline{k_1 \times k_2}$ eşitliğiyle tanımlı ikili işleme göre $(\mathbb{Z}_m, \times)$ değişmeli monoid olur.

v. $(\mathbb{Z}_p \setminus \{\overline{0}\}, \times)$ monoidinin grup olması için gerek ve yeter koşul p'nin asal olmasıdır.

11.14. G, birimi e olan bir grup olsun. Her $a \in G$ verilsin. Her $n, m \in \omega$ için

$$f(n+m) = f(n)f(m)$$

eşitliğini sağlayan $f : \omega \to G$ fonksiyonunun olduğunu gösterin. Ayrıca,

$$u(n) = \begin{cases} f(n) & ; n > 0 \\ f(n)^{-1} & ; n < 0 \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyonun her $n, m \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq k \in \omega$ için

$$u(n+m) = u(n)u(m) \text{ ve } u(-k) = f_{a^{-1}}(k)$$

eşitliklerinin sağlandığını gösterin. Genelde $u(n) = a^n$ yazılır. Böylece,

$$\mathbb{Z} \times G \to G,\ (n, a) \to a^n$$

fonksiyonu tanımlanmış olur.

11.15. Bir G grubu, bir $a \in G$ için $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ oluyorsa G'ye **devirli** grup denir. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. Devirli grup sayılabilir.

ii. Her sayılabilir sonsuz devirli grup $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorfik.

iii. Her $m \in \mathbb{N}$ için $(\mathbb{Z}_m, +)$ sonlu devirli grup.

iv. Her m elemanlı devirli grup $\mathbb{Z}_m$ devirli grubuna izomorfik.

11.16. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ grubundan kendine tanımlı her grup homomorfizmanın sıfır ya da birim fonksiyon olduğunu gösterin.

11.17. $f : (\mathbb{Z}, +) \to (2\mathbb{Z}, +)$, $f(x) = 2x$ fonksiyonunun örten grup izomorfizma olduğunu gösterin.

11.18. $\mathbb{Q}^{>0}$, $\mathbb{Q}^*$, çarpma işlemine göre, sırasıyla, pozitif rasyonel sayılar, sıfırdan farklı rasyonel sayılar grubunu göstersin. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$, $f(x) = x^3$ grup izomorfizma ve $f(\mathbb{Q}^*) \neq \mathbb{Q}^*$.

ii. $f : \mathbb{Q}^{>0} \to \mathbb{Q}^{>0}$, $f(x) = x^3$ grup izomorfizma ve $f(\mathbb{Q}^{>0}) \neq \mathbb{Q}^{>0}$.

iii. $(\mathbb{R}, +)$ ve $(\mathbb{R}^{>0}, \times)$ guruplarının grup izomorfik olduklarını gösterin. ($f(x) = e^x$ fonksiyonuna bakın.)

11.19. Sıfırdan farklı bir $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ grup homomorfizma varsa, 1'i 1'e götüren bir başka grup homomorfizmanın var olduğunu gösterin. Ayrıca, $(\mathbb{Q}, +)$ ve $(\mathbb{Z}, +)$ gruplarının grup izomorfik olamayacaklarını gösterin.

11.20. $(\mathbb{Q} \setminus \{0, \}, .)$ grubundan $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ grubuna tanımlı birebir ve örten homomorfizma olmadığını iki farklı biçimde gösterin.

11.21. $(\mathbb{Q}, +)$ ve $(\mathbb{Q}^+, .)$ gruplarının grup izomorfik olmadıklarını gösterin.

11.22. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ ve $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ gruplarının izomorfik olmadıklarını gösterin.

11.23. Bir G monoidininin grup olması için gerek ve yeter koşulun her $a \in G$ için G'den G'ye tanımlı $x \to ax$ ve $x \to xa$ olarak tanımlanan fonksiyonların birebir ve örten olması olduğunu gösterin.

11.24. Bir G grubu için aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. G değişmeli.

ii. $f(x) = x^2$ eşitliğiyle tanımlı $f : G \to G$ fonksiyonu grup homomorfizma.

iii. $f(x) = x^{-1}$ eşitliğiyle tanımlı $f : G \to G$ fonksiyonu grup homomorfizma.

11.25. $G = (-1, 1)$ kümesinde

$$x * y = \tfrac{x+y}{1+xy}$$

eşitliğiyle tanımlı $*$ ikili işlemine göre, G'nin bir grup olduğunu gösterin. $(G, *)$ grubundan $(\mathbb{R}, +)$ grubuna tanımlı birebir ve örten grup homomorfizmanın olmadığını gösterin.

11.4.1 Kopya (İzomorfik) altgrup ve altgrup

Grup teoride yer alan temel kavramlardan ikisi altgrup ve kopya altgruptur:

i. G bir grup ve H, G'nin boş olmayan altkümesi olsun. Her $a, b \in H$ için $ab \in H$ ve $a^{-1} \in H$ oluyorsa, H'ya G'nin **altgrup**u denir. G'nin her altgrubu, G'den gelen ikili işleme göre bir grup olur.

ii. Bir G grubunun bir altgrubuna grup izomorfik olan H grubuna, G'nin **kopya altgrubu** (**izomorfik altgrubu**) denir.

Bu kavramlarla ilgili temel kavramları hızlıca verelim.

iii. Her altgrup bir kopya altgrup olmasına karşın, her kopya altgrubun altgrup olması gerekmez. Ama bu durum "önemli" değil; altgrup ile kopya altgrup, grup teoride aynı olarak görülebilir.

iv. Grubun biriminden oluşan küme o grubun altgrubudur. Ayrıca, her grup kendi kendisinin altgrubu olur. Kendisinden ve birimden başka altgrubu olmayan gruplara **basit grup** denir.

v. G ve H iki altgrup ve $f : G \to H$ bir homomorfizma ise e_H, G'nin birimi olmak üzere,

$$ker(f) = \{x \in G : f(x) = e_H\}$$

bir altgrup olur. Bu altgruba f'nin **çekirdeği** denir.

vi. Bir grubun verilen herhangi bir altkümesi için, altkümeyi kapsayan ve altkümeyi kapsayan her altgrup tarafından kapsanan bir altgrup vardır. Bu altgruba, verilen altküme tarafından üretilen altgrup denir. Sembollerle yazacak olursak, G bir grup ve $A \subseteq G$ verilsin. A tarafından üretilen altgrup,

$$\mathcal{A} = \{H : H, G'\text{nin altgrubu ve } A \subseteq H\}$$

olmak üzere $\bigcap \mathcal{A}$ olur. Ayrıca bu altgrup,

$$\{a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_k^{n_k} : a_i \in A, n_i \in \mathbb{Z}\}$$

olur.

vii. G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $a^n = e$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ varsa $k = \min\{n \in \mathbb{N} : a^n = e\}$ doğal sayısına a'nın **derecesi** denir. Bu durumda, $\{a\}$ tarafından üretilen altgurup $\{a^n : 1 \leq n \leq k\}$ olur.

viii. G bir grup ve $A_1, ..., A_n \subseteq G$ için genelde

$$A_1 ... A_n = \{a_1 ... a_n : a_i \in A_i\}$$

gösterimi kullanılır. G değişmeli ve A_i'ler altgrupsa, $A_1 ... A_n$ bir grup, üstelik $\bigcup_{i=1}^n A_i$ tarafından üretilen altgrup olur.

ix. Birbirlerinin kopya altgrubu olan grupların grup izomorfik olması gerekmez.

Alıştırmalar

11.26. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $(\mathbb{Z},+)$ grubunun her altgrubu devirlidir. Dolayısıyla, bir $n \in \mathbb{N}$ için $n\mathbb{Z}$ biçimindedir.

ii. $(\mathbb{Q},+)$ grubunun altgruplarını sınıflayın. (Bu sorunun yanıtı kolay değildir!)

i. $(\mathbb{R},+)$ grubunun her altgrubu $\mathbb{R}$'de ya yoğun[5] ya da bir $a \in \mathbb{R}$ için $a\mathbb{Z}$ formundadır.

11.27. Devirli bir grubun her altgrubunun devirli olduğunu gösterin.

11.28. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $(\mathbb{Q},+)$ grubunun sonlu altkümesi tarafından üretilen altgrup devirli.

ii. $(\mathbb{Q},+)$'nın $G = \{\frac{a}{2^n} : a, n \in \mathbb{Z}\}$ altgrubu devirli değil.

11.29. G değişmeli grup ve $f : G \to \mathbb{Z}$ örten grup homomorfizma ise en az bir $a \in G$ elemanı tarafından üretilen G'nin altgrubuyla $(\mathbb{Z},+)$ tamsayılar grubunun grup izomorfik olduğunu gösterin.

11.30. k, n_1,n_2,...,n_i doğal sayılarının en büyük ortak böleni olsun. $(\mathbb{Z},+)$ grubunda $\{n_1, ..., n_i\}$ kümesi tarafından üretilen altgrubun $k\mathbb{Z}$ olduğunu gösterin.

11.31. (Lagrange Teoremi) G sonlu bir grup ve H, G'nin bir altgrubu olsun. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. Her a, $b \in G$ için $aH = bH$ olması için gerek ve yeter koşul $b^{-1}a \in H$ olmasıdır.

ii. aH biçimindeki kümeler ayrık ya da birbirlerine eşittir.

iii. Her $a \in G$ için $|aH| = |H|$ olur.

iv. Her $a, b \in I$, $a \neq b$ için $aH \cap bH = \emptyset$ ve

$$\{aH : a \in G\} = \{aH : a \in I\}$$

olacak biçimde $I \subseteq G$ var.

v. $G = \bigcup_{a\in G} aH = \bigcup_{a\in I} aH$.

vi. $|G| = |I||H|$.

(Burada $|H|$, H'nin eleman sayısını gösteriyor. Yani, $card(H) = |H|$.)

11.32. Sonlu bir grubun her elemanının derecesinin grubun eleman sayısını böldüğünü gösterin.

11.33. Bir grubun değişmeli ve basit olması için gerek ve yeter koşulun grubun eleman sayısının asal olması olduğunu gösterin.

11.4.2 Grupların çarpımı

$\mathcal{G} = (G_i)_{i\in I}$ bir grup ailesi olsun.

i. "$\mathcal{G}$ bir grubun altgrup ailesi olur mu?" sorusunun yanıtı, genel olarak elbette olumsuzdur.

[5]Denk olarak, $\mathbb{R}$'nin her elemanı $\mathbb{Q}$'da bir dizinin limitidir.

ii. "$\mathcal{G}$ bir grubun kopya altgrup ailesi olur mu?" sorusunun yanıtı (Seçim Aksiyomu altında) evettir: $G = \prod_i G_i$,

$$fg(i) = f(i)g(i)$$

ikili işlemi altında bir grup olup, her $j \in I$ için,

$$q_i(x)(j) = \begin{cases} x & ; i = j \\ e_i & ; i \neq j \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon grup izomorfizmadır. Dolayısıyla, G_j, G'nin kopya altgrubu olur. G'ye $\mathcal{G}$ ailesinin **çarpım grubu** denir.

iii. G ve $\mathcal{G}$ grup ailesi yukarıda olduğu gibi tanımlansın. G'nin G_i'ler tarafında üretilen altgrubu,

$$\oplus_i G_i = \{f \in G : \{i \in I : f(i) \neq e_i\} \text{ sonlu } \}$$

olur. Bu altgruba ailenin **direkt toplamı** denir.

I kümesinin sonlu olması için gerek ve yeter koşulun $\prod_i G_i = \oplus_i G_i$ olduğu kolaylıkla gösterilir.

$G_1, ..., G_n$ grupları için, $G = G_1 \times G_2 ... \times G_n$ kümesi

$$(a_1, ..., a_n)(b_1, ..., b_n) = (a_1b_1, ..., a_nb_n)$$

ikili işlemine göre bir grup olup, her $1 \leq i \leq n$ için, G_i, G'nin kopya altgrubu olur. Ayrıca, G, $\{G_i : 1 \leq i \leq n\}$ ailesinin çarpım grubuna izomorfik olur.

Alıştırmalar

11.34. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$'yu toplama işlemine göre grup olarak ele alarak, aşağıdakilerin doğruluğunu, gösterin.

i. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\{(0,1),(1,0)\}$ kümesi tarafından üretilen altgrup.

ii. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ devirli grup değil.

iii. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ grupları izomorfik değil.

iv. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ grupları izomorfik değil.

11.35. $(G, +, e)$ değişmeli grup, A ve B, $A \cap B = \{e\}$ ve $A + B = G$ koşullarını sağlayan altgruplarsa G ve $A \times B$ çarpım grubunun grup izomorfik olduklarını gösterin. Bu genel durumu kullanarak, şunu gösterin: $f : G \to \mathbb{Z}$ bir grup homomorfizmaysa G ve $kerf \times \mathbb{Z}$ grupları grup izomorfiktir.

11.4.3 Bölüm grubu

Bir G grubunun **normal altgrubu** H, $x \in G$ için

$$xH = Hx$$

eşitliğini sağlayan altgrubudur[6].

Teorem 11.1. *Bir G grubunun bir altgrubu H için aşağıdakiler denktir.*

i. *H normal altgrup.*

ii. *Her $x \in G$ için $xHx^{-1} \subseteq H$*

iii. *Her $x \in G$ için $xHx^{-1} = H$.*

Değişmeli grubun her altgrubu normal altgruptur. Her grubun kendisi ve sadece birimden oluşan altgrupları normal altgruptur. $f : G \to H$ bir grup homomorfizma ise f'nin çekirdeği

$$ker f = \{x \in G : f(x) = e_H\}$$

G'nin bir normal altgrubudur. Biraz sonra kavram olarak normal altgrup ile bir grup homomorfizmanın çekirdeği arasında bir fark olmadığı gösterilecek.

G bir grup ve H, G'nin normal altgrubu olsun.

$$G/H = \{xH : x \in G\},$$

$$(xH)(yH) = (xy)H$$

eşitliğiyle tanımlı ikili işleme göre bir gruptur. Bu gruba, G'nin H'a göre **bölüm grubu** denir. $f(x) = xH$ formülüyle tanımlı $f : G \to G/H$ bir grup homomorfizma olup, $ker f = H$ olur. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 11.2. *G bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. Aşağıdakiler denk olur.*

i. *$H = ker f$ olacak biçimde bir grup homomorfizma $f : G \to G'$ var.*

ii. *H, G'nin normal altgrubudur.*

Yukarıda verilen teoremin sonucu olarak, bir grubun normal altgrubunu o grup üzerinde tanımlanan bir homomorfizmanın çekirdeği olarak görebiliriz. Diğer taraftan, G bir grup ve $f : G \to H$ bir grup homomorfizma ise

$$x \equiv y \Leftrightarrow xy^{-1} \in ker f$$

olarak tanımlanan $\equiv$, G üzerinde bir denklik ilişkisi tanımlar. Bu denklik ilişkisine göre, $x \in G$'nin denklik sınıfı

[6] $xH = \{xh : h \in H\}$ ve $Hx = \{hx : h \in H\}$.

$$[x] = xkerf$$

olur. Ayrıca,

$$G/\!\equiv\, = G/kerf$$

olur. Dolayısıyla, $G/\!\equiv$,

$$[x][y] = [xy]$$

eşitliğiyle tanımlı ikili işlemine göre bir grup olur ve

$$f(x) = [x]$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon grup homomorfizmadır. Bu gözlemden şöyle bir arayışa girilebilir: $\equiv$, G grubu üzerinde bir denklik ilişkisi olsun. $G/\!\equiv$ bir grup ve

$$f : G \to G/\!\equiv,\ f(x) = [x]$$

fonksiyonunun homomorfizma olacak biçimde ikili işlemi var mıdır? Bu sorunun yanıtı genel olarak evet olmayıp, evet olması için gerek ve yeter koşul her x, y, $z \in G$ için $x \equiv y$ olduğunda $xz \equiv yz$ ve $zx \equiv zy$ olmasıdır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Alıştırmalar

11.36. $f : G \to H$ grup homomorfizmaysa $G/kerf$ ve H gruplarının grup izomorfik olduğunu gösterin.

11.5 Halka

Tanım 11.4 (Noether [39])**.** Cebirsel aksiyomları

i. $(R, +, 0)$ değişmeli grup.

ii. $(R, .)$ yarıgrup.

iii. Her x, y, $z \in R$ için

$$x(y + z) = xy + xz \text{ ve } (x + y)z = xz + xz.$$

olan $(R, +, ., 0)$ cebirsel yapıya ***halka*** denir[7].

[7] Bu kavramın kurucularından biri Richard Dedekind'dir. "Halka" kelimesinin kullanımı Hilbert'in 1897'de yayınlanan makalesinden gelmektedir. Halka kavramı aksiyomlarla ilk olarak Adolf Fraenkel tarafından tanımlanmıştır.

"R bir halka olsun" denilince kastedilen $(R, +, ., 0)$ biçiminde bir dörtlüdür. Bu dörtlüde $+$ ve $.$ ikili işlemlerine halkanın sırasıyla **toplama** ve **çarpma**sı denir. $0 \in R$'ye **halkanın sıfırı** denir. Birden fazla halkanın aynı anda çalışılıyor olması durumunda halkanın cebirsel işlemleri ve sıfırı farklı sembollerle gösterilebilir; $(R, +_R, \times_R, 0_R)$ ya da $(R, \oplus, ., 0_R)$ gibi.

$(R, +, ., 0)$ halkası verilsin.

i. $(R, .)$ bir monoid ve 1 bu monoidin birimiyse halkaya **birimli** denir[8]. Yani, her $x \in X$ için $1x = x1 = x$ olacak biçimde $1 \in R$ varsa. Bu durumda halka $(R, +, ., 0, 1)$ ile gösterilebilir. $0 \neq 1$ olduğu varsayılacak.

ii. Her $x, y \in R$ için $xy = yx$ oluyorsa halkaya **değişmeli** denir.

iii. $(R, +, 0)$ grubunda $x \in R$'nin tersi $-x$ ile gösterilir. $x, y \in R$ için,

$$x + (-y) = x - y \text{ ve } (-x) + y = -x + y$$

yazılır.

iv. R, birimi 1 olan halka olsun. $x \in R$ verilsin.

$$ax = xa = 1 \text{ ve } bx = xb = 1$$

olacak biçimde $a, b \in R$ varsa $a = b$ olur. Bu eşitliği sağlayan $a \in R$'ye a'nın **tersi** denir ve x^{-1} ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 11.3. $(R, +, ., 0)$ *halkasında her* x, y, $z \in R$ *için aşağıdakiler gerçekleşir.*

i. $x + y = x + z$ *ise* $y = z$.

ii. $xy = xz$ *ya da* $yx = zx$ *ve* x *tersinir ise* $y = z$.

iii. $0x = x0 = 0$.

iv. $-(-x) = x$.

v. *Halka birimli ise* $(-1)x = x(-1) = -x$.

vi. $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.

G bir grup olmak üzere, her $n \in \mathbb{Z}$ ve $a \in G$ için $a^n \in G$ elemanı tanımlanmıştı.

[8]Halka tanımında tam bir standartlaşma yoktur. Bazı kaynaklarda halkanın tanımında birimli olması bir koşul değildir.

$$\mathbb{Z} \times G \to G,\ (n, a) \to a^n$$

kuralıyla f fonksiyonu tanımlanabilir. $(R, +, ., 0)$ bir halka olmak üzere, bunun toplama grubuna $((R, +, 0))$ göre, a^n yerine na yazarak,

$$\mathbb{Z} \times R \to R,\ (n, a) \to na$$

fonksiyonu tanımlanır. Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı kolaylıkla gösterilir: Her n, $m \in \mathbb{Z}$ ve x, $y \in R$ için,

i. $1x = x$

ii. $n(x + y) = nx + ny$.

iii. $(n + m)x = nx + mx$.

iv. $n(mx) = (nm)x$.

Halkaların, sağladıkları belli özelliklere göre temel sınıflandırmaları vardır. Bu yapılara detaylı olarak yer verilmeyecek olsa da genel bir bilgi edinilmesi açısından, temel düzeyde verilecek. Bir R halkası aşağıda verilen özelliklerine göre adlandırılır.

i. **Değişmeli**: Her x, $y \in R$ için $xy = yx$.

ii. **Sıfır böleni olmayan**: Sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı sıfırdan farklıdır.

iii. **Tamlık bölgesi**: Değişmeli ve sıfır böleni olmayan halka.

iv. **Bölüm halkası**: Sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi var.

v. **Cisim**: Değişmeli bölüm halkası.

Alıştırmalar

11.37. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$ sayı sistemlerinin standart toplama ve çarpma işlemlerine göre halka olduklarını görün.

11.38. $(G, +, 0)$ değişmeli grup olmak üzere, $xy = 0$ eşitliğiyle tanımlı işleme göre, $(G, +, ., 0)$ dörtlüsünün bir halka olduğunu gösterin.

11.39. X boş olmayan bir küme olsun. $R = \wp(X)$ için aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ ve } AB = A \cap B$$

eşitlikleriyle tanımlı cebirsel işlemelere göre değişmeli halka. Bu halkanın sıfırı $0 = \emptyset$ ve birimi $1 = X$. Bu halkada çarpmaya göre tersi olan tek eleman 1 olur.

11.40. $(R, +, ., 1, 0)$ bir halka ve X boş olmayan bir küme olmak üzere, X'den R'ye tanımlı fonksiyonlar kümesi R^X üzerinde, f, $g \in R^X$ için,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

ve

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

eşitlikleriyle tanımlı ikili işlemlere göre, $(R^X, +, ., 0, 1)$ yapısının bir halka olduğunu gösterin. Burada 0, $0(x) = 0$ ve $1(x) = 1$ olarak tanımlanır.

11.41. $(G, +, 0)$ değişmeli grubundan kendisine tanımlı grup homomorfizmaların kümesini A ile gösterelim. f, $g \in A$ için

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ ve } (fg)(x) = f(g(x))$$

eşitliğiyle tanımlı ikili işlemlere göre $(A, +, ., 0, 1)$ bir halka olur. Gösterin. Burada, $0 \in A$, $0(x) = 0$ eşitliğiyle ve $1 : G \to G$, $1(x) = x$ olarak tanımlanır.

11.42. R^X halkası problem 10.40 de olduğu gibi tanımlansın. a ve b, X'in iki farklı elemanı olsun. f_a, $f_b \in R^X$ fonksiyonları

$$f_a(a) = 1 \text{ ve } x \neq a \text{ için } f_a(x) = 0,$$

$$f_b(b) = 1 \text{ ve } x \neq b \text{ için } f_a(x) = 0,$$

formülleriyle tanımlansın. f_a ve f_b sıfırdan farklı olmalarına karşın, $f_a f_b = 0$ olduğunu gösterin.

11.43. (**Althalka**). $(R, +, ., 0)$ halkasının $H \subseteq R$ altkümesi her a, $b \in R$ için $a - b, ab \in H$ koşulunu sağlıyorsa H'ye R'nin **althalkası** denir. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. Bir halkanın kendisi, kendisinin althalkası olur. Halkanın sadece ve sadece sıfırdan oluşan altkümesi de althalkadır.

ii. $A \subset R$ altkümesi verilsin.

$$H = \{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{j=1}^m c_j : n, m \in \mathbb{N}, a_i, b_i, c_j \in A \cup (-A)\},$$

A'yı kapsayan bir althalkadır. Ayrıca, A kümesini kapsayan her halka H'yi de kapsar. Bu althalkaya A tarafından **üretilen halka** denir.

iii. $1 \in A$ ise A tarafından üretilen halka

$$H = \{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i b_i : n, m \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in A \cup (-A)\},$$

olur.

iv. Bir $x \in R$ için $\{x\}$ tarafından üretilen halka $\mathbb{Z}x$ olur.

11.44. (**Halka homomorfizma ve izomorfizma**). R ve S iki halka olsun. Her $a, b \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

eşitliğini sağlayan $f : R \to S$ fonksiyonuna **halka homomorfizma** denir. Birebir halka homomorfizmaya **halka izomorfizma** denir. Aralarında en az bir örten halka izomorfizma olan halkalara **izomorfik halkalar** denir. $f : R \to S$ halka homomorfizması için aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $f(0) = 0$.

ii. $f(R)$, S halkasının althalkası.

iii. $1 \in R$, R halkasının birimi ise $f(R)$, birimi $f(1)$ olan halkadır.

iv. $1 \in R$, R'nin birimi ve S halkasının sıfır böleni yoksa $f(1)$, S halkasının birimidir.

iv. f birebir örten ise f^{-1} halka homomorfizmadır.

11.45. (**Kopya althalka**) H ve R iki halka olsun. H, R'nin bir althalkasına halka izomorfik ise H'ye R'nin **kopya althalka**sı denir. Althalka ile ilgili soruları paralel olarak kopya althalka için sorun ve yanıtlayın. Althalka ile kopya althalka arasında fark yok!

11.46. İzomorfik iki halkadan birinin biriminin olması durumunda diğerinin de biriminin olmasını gerektiğini gösterin. Ayrıca, $f : R \to S$ örten halka izomorfizma ve $1 \in R$'nin birimi $f(1)$, S halkasının birimi olur.

11.47. $(\mathbb{R}, +, ., 0, 1)$ halkasından $(\mathbb{R}^2, +, ., 0, 1)$ halkasına (noktasal tanımlı cebirsel işlemlere göre) $f(r) = (r, 0)$ eşitliğiyle tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tanımlı fonksiyonun bir homomorfizma olmasına karşın, $f(1) \neq 1$ olduğunu gösterin.

11.48. R birimli halka, S, sıfır böleni olmayan bir halka olsun. $f : R \to S$ sıfırdan farklı halka homomorfizma ise $f(1)$'nin, S halkasının birimi olduğunu gösterin.

11.49. (**Birimli halkaya gömülebilme**) $(R, +, ., 0)$, birimi olma dışında kalan halka olma koşulunu sağlasın. $S = R \times \mathbb{Z}$ kümesi üzerinde,

$$(x, k) + (y, n) = (x + y, k + n) \text{ ve } (x, k)(y, n) = (xy + nx + ky, kn)$$

olarak tanımlanan ikili işlemlere göre, $0 = (0, 1)$, $1 = (0, 1)$ olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $(S, +, ., 0, 1)$ bir halkadır.

ii. $f(x) = (x, 0)$ eşitliğiyle tanımlı $f : R \to S$ fonksiyonu halka izomorfizmadır.

11.50. (**Halkaların çarpımı**). $(R_i, +_i, ._i, 0_i)_{i\in I}$ halkalar ailesi verilsin. $R = \prod_{i\in I} R_i$ kümesinde + ve . ikili işlemleri, f,$g \in R$ için,

$$(f + g)(i) = f(i) +_g (i) \text{ ve } (fg)(i) = f(i)._i g(i)$$

eşitliğiyle tanımlansın. $(R, +, ., 0)$'nin bir halka olduğunu gösterin. Burada, $0 \in R$, $0(i) = 0_i$ olarak tanımlanır. Bu halkanın birimli olması için gerek ve yeter koşulun, her $i \in R$ için R_i halkasının birimli olması olduğunu gösterin. Her $i \in I$ için 1_i, R_i'nin birimi ise R'nin birimi 1, $1(i) = 1_i$ olarak tanımlanır.

11.51. (**Ideal**) $(R, +, ., 0)$ bir halka ve A, R'nin bir althalkası olsun. Her $a \in A$ ve $r \in R$ için $ar, ra \in R$ oluyorsa, A'ya R'nin bir **ideali** denir. Aşağıdakilerin doğruluğunu gerçekleyin.

i. Halkanın kendisi ve sıfırı halkanın idealidir.

ii. Tam sayılar halkası, rasyonel sayılar halkasının bir althalkasıdır ama ideali değildir.

iii. Rasyonel sayılar halkası, reel sayılar halkasının bir althalkasıdır ama ideali değildir.

iv. A'nın $\mathbb{Z}$ halkasında ideal olması için gerek ve yeter koşul bir n doğal sayısı için $A = n\mathbb{Z}$ olmasıdır.

v. $f : R \to S$ halka homomorfizma ise $ker f$,R'nin bir idealidir.

vi. $f : R \to S$ halka homomorfizma ise $f(R)$ althalkasının, S'nin bir ideali olması gerekmez.

vii. A_1,... A_n, A, B, C, R halkasında ideal olsunlar.

  a. $A_1 + ... + A_n$ ve $A_1 ... A_n$ ideal.

  b. $(A + B) + C = A + (B + C)$ ve $(AB)C = A(BC)$.

  c. $B(A_1 + ... + A_n) = BA_1 + ... + BA_n$ ve $(A_1 + ... + A_n)B = A_1B + ... + A_nB$.

viii. Bazı halkaların idealleri çok azdır: Aşağıdakilerin denkliğini değişmeli ve birimli R halkası için gösterin.

  a. R cisim.

  b. R'nin idealleri sadece kendisi ve sıfırdır.

  c. R'den birimli bir halkaya tanımlı ve birimi birime götüren her halka homomorfizma birebir olur.

viii. R değişmeli halka için aşağıdakiler denk olur.

a. R'nin sıfırdan ve kendisinden farklı ideali yok.

b. R bir cisim ya da bir asal p sayısı için $p\mathbb{Z}$ (çarpması sıfır) olan halka izomorfik olur.

11.52. (**Bölüm halkası**). $(R, +, ., 0)$ bir halka ve A, R'nin bir **ideali**, yani $AR, RA \subseteq A$ özelliğini sağlayan R'nin althalkası olsun.

$$R/A = \{x + A : x \in R\}$$

olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $(x + A) + (y + A) = x + y + A$ ve $(x + A)(y + A) = xy + A$ eşitlikleriyle R/A'da ikili işlemler tanımlanır. Ayrıca, $0 = A$ olmak üzere $(R/A, +, ., 0)$ bir grup olur. Bu gruba R'nin A'ya göre **bölüm halkası** denir.

ii. R değişmeli ise R/A değişmelidir.

iii. R birimli ise R/A değişmelidir.

iv. $f : R \to R/A$ halka homomorfizmadır.

v. $f : R \to S$ halka homomorfizma ise $R/kerf$ ve $f(R)$ halka izomorfiktir.

11.6 Sıralı halka ve cisim

Sıralı halka ve cisim kavramı reel sayılar yapısının aksiyomlaştırılması üzerinden adım adım, aralarında David Hilbert, Otto Hölder ve Hans Hahn olan matematikçiler tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 11.5. $(F, +, ., 0, 1)$ bir halka ve $\leq$, F'de bir tam sıralama olsun.

i. $x, y \in F$ için $x \leq y$ ise her $z \in F$ için $x + z \leq y + z$

ii. $x, y \in F$ için $x \leq y$ ise her $0 \leq z \in F$ için $xz \leq y \times z$

koşulları sağlanıyorsa $(F, +, ., 0, 1, \leq)$ altılısına **sıralı halka** denir. Bu, sıralı halka ve $(F \setminus \{0\}, \times, 1)$ grup ise F'ye **sıralı cisim** denir.

Bir Sıralı halkanın $x \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan her elemanına **pozitif eleman** denir. Bir sıralı halka F'nin pozitif elemanların kümesi F^+ ile gösterilir. Sıfırdan kesin büyük elemanları kümesi P (gerekirse $F^{>0}$ ile gösterilir.) Yani, $F^{>0} = \{x \in F : x > 0\}$.

Bir F sıralı cismi için aşağıdakilerin gerçekleştiği kolaylıkla gösterilir.

i. $x < y$ olması için gerek ve yeter koşul $-y < -x$.

ii. Her $x \neq 0$ için $0 < x^2$.

iii. $0 < 1$.

iii. $0 < x$ olması için gerek ve yeter koşul $0 < x^{-1}$.

iv. $|.| : R \to R$ fonksiyonu, $|.|(x) = |x|$ yazılmak üzere,

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. $|x|$'e x'in **mutlak değeri** denir[9]. Her $x,\, y \in R$ için

$$|xy| = |x||y| \text{ ve } |x+y| \leq |x| + |y|$$

olur.

v. $0 < a \in F$ verilsin.

$$f_a(0) = 0,\ f_a(1) = a$$

ve her $n, m \in \omega$ için

$$f_a(n+m) = f_a(n) + f_a(m)$$

eşitliğini sağlayan $f_a : \omega \to F$ fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon $f_a(n) = na$ ile gösterilir. Her $0 < n$ için $0 < na$ olur.

Bu tanımlama altında,

$$f_a(1) = 1a = a$$

$$f_a(2) = 2a = a + a$$

$$f_a(3) = 3a = a + a + a$$

Sıralı cismin doğal sayıları, tamsayıları ve rasyonel sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

vi. $f_1(\omega)$ kümesine F'nin **doğal sayıları** denir ve F_ω ile gösterilir.

vii. $0 < a$ için

$$g_a(n) = \begin{cases} na & ; n \geq 0 \\ (-n)a & ; n < 0 \end{cases}$$

eşitliğiyle $g_a : \mathbb{Z} \to F$ fonksiyonu tanımlansın. Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$g_a(n+m) = g_a(n) + g_a(m)$$

olur.

[9]Mutlak değer sembolü “$|.|$”, 1841'de Weierstrass tarafından kullanılmaya başlanmıştır.

viii. $g_1(\mathbb{Z})$ kümesine F'nin **tam sayılar kümesi** denir ve $F_{\mathbb{Z}}$ ile gösterilir.

ix. $g_1 : \mathbb{Z} \to F$ halka izomorfizmadır. Kolaylık açısından, $n \in \mathbb{Z}$ için, $n1 \in F$ elemanı sadece n ile gösterilebilir. Bu durumda $n^{-1} \in F$, $(n1)^{-1}$ anlamında kullanılacak.

x. F'nin $F_{\mathbb{Q}} = \{f_1(m)f_1(n)^{-1} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ alt kümesine F'nin **rasyonel sayılar kümesi** denir.

Aşağıdaki iki teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 11.4. *F bir sıralı cisim ise $F_{\mathbb{Z}}$, F'nin althalkası ve $F_{\mathbb{Q}}$, F'nin althalkası olur.*

Teorem 11.5. *F ve H iki sıralı cisim olsun.*

i. *$F_{\mathbb{Z}}$ ve $H_{\mathbb{Z}}$ izomorfik halkadır.*

ii. *$F_{\mathbb{Q}}$ ve $H_{\mathbb{Q}}$ izomorfik halkadır*

Yukarıda yapılanlara rağmen, en az bir sıralı halkanın ya da cismin olduğunu bilmiyoruz. Biliyor olsaydık, sıralı cisimlerin tam sayılar halkaları halka izomorfik olduklarından onlara, bu cismin tamasayıları demek yerine, Tam Sayılar Halkası denilebilirdi. Benzer durum Rasyonel Sayılar Cismi için de yapılabilir. O halde öncelikle, sıralı bir cismin var olduğu gösterilmeli. Böyle bir cisim doğal sayılar sistemi üzerinden inşa edilecek. Bu sistem hepimizin de yakından tanıdığı rasyonel sayılar sistemi olacak. Bu sistemin de belirli anlamlarda yetersizliği olacak. Bu yetersizliğin giderilmesiyle reel sayılar sistemi elde edilecek.

11.7 Arşimedyan Özelliği

F sıralı cisim ve $A \subseteq F$ olsun. $x < y$ eşitsizliğini sağlayan her x, $y \in F$ için $x < a < y$ olacak biçimde $a \in A$ varsa, A'ya F'de **yoğun** denir. F'nin kendisi kendisinde yoğun olur. Daha genel bir durum için bir tanımlama yapmak gerekiyor.

Tanım 11.6 (Otto Stolz-1880)**.** F bir sıralı cisim olmak üzere her $x \in F$ için $x < n(= n1)$ olacak biçimde $n \in \omega$ varsa, F'ye **Arşimedyan** denir[10].

Arşimedyan özelliği denk ifadelerle, farklı biçimlerde de tanımlanabilir. Bir sıralı cisim F'nin Arşimedyan olması için her $x, y \in F$, $y > 0$ için $x \leq ny$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ olması gerektiği kolaylıkla gösterilebilir.

Elbette Arşimedyan olmayan sıralı cisimler inşa edilebilir ama şimdilik amacımız o değil.

[10] Arşimedyan özelliği Euclid's Elements V, tanım 4'te "Magnitudes are said to have a ratio to one another which can, when multiplied, exceed one another" olarak ifade edilmiştir.

Teorem 11.6. *Bir sıralı cismin Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul cismin rasyonel sayılar cisminde yoğun olmasıdır*[11].

Kanıt: F sıralı cisim ve $x < y$ olacak biçimde $x, y \in F$ verilsin. Önce, $0 < x$ olduğunu varsayalım. $0 < (y - x)$ olmasından dolayı $0 < (y - x)^{-1}$ ve F Arşimedyan olduğundan,

$$0 < (y - x)^{-1} < m$$

olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ var. Buradan

$$1 < m(y - x) = my - mx$$

elde edilir. F'nin Arşimedyan özelliği tekrar kullanılarak

$$(n - 1) \leq mx < n$$

olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ bulunur. Buradan

$$mx < n = (n - 1) + 1 < (n - 1) + (my - mx) \leq mx + my - mx = my$$

elde edilir. Eşitsizliğin m'nin tersi ile çarpılmasıyla

$$x < nm^{-1} < y$$

elde edilir.

$x < 0$ ise $0 < -x < k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Buradan $0 < k + x < k + y$ elde edilir. Yukarıdaki durum uygulanarak, $0 < k + x < d < k + y$ olacak biçimde $d \in F_{\mathbb{Q}}$ seçilebilir. Buradan da $x < d - k < y$ olur. $d - k \in F_{\mathbb{Q}}$ olduğundan istenilen elde edilir.

$x = 0$ ise $0 < y$ ve dolayısıyla, $0 < y^{-1}$ olur. Archimedyan özelliğinden $y^{-1} < m$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ seçelim. Buradan da $x = 0 < m^{-1} < y$ olur. Elbette $m^{-1} \in F_{\mathbb{Q}}$.

Kanıtın kalan kısmı okura bırakılmıştır. Kanıt tamamlanır. □

Arşimedeyan özelliği sıralı gruplara genellenebilir. Bu konuya Bölüm 17'de tekrar değinilerek, bir sıralı halkanın Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşulun, reel sayılar cisminin bir kopya alt halkası olması gerektiği kanıtlanacak.

Alıştırmalar

11.53. ([29]) Aşağıdaki kavramları açıklamadan okurun bildiğini varsayalım. F bir sıralı cisim olmak üzere aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin.

i. F, Arşimedyan.
ii. Her $r \in F$, $|r| < 1$ için (r^n) dizisi sıfıra yakınsar.
iii. Her $k \in \mathbb{N}$ için $(\frac{1}{k+1})^n$ dizisi sıfıra yakınsar.
iv. En az bir $k \in \mathbb{N}$ için $(\frac{1}{k+1})^n$ dizisi sıfıra yakınsar.
v. Her $r \in F$, $|r| < 1$ için $\sum_n r^n$ serisi yakınsak.

[11] Bir sıralı cismin Arşimedyan olmasına denk olan 42 özelliğin listesi [19]'de verilmiştir.

11.8 Tam Sıralı Cisim

Tanım 11.7. Üstten sınırlı her alt kümesinin en küçük üst sınırı olan sıralı cisme **tam sıralı cisim** denir.

Sıralı cisim örneği vermeden onun bazı özellikleri verilmişti. Benzer biçimde, her ne kadar henüz tam sıralı cisim örneği biliyor olmasak da (aslında var, reel sayılar sistemi $\mathbb{R}$ ama henüz inşa edilmedi!), bütün tam sıralı cisimlerin halka izomorfik olduğu söyleyenebilir. Dolayısıyla, reel sayılar sistemi inşa edildikten sonra onun tam sıralı cisim ve tek olduğu söylenecek[12].

F ve H iki sıralı cisim, 1_F, F'nin ve 1_H, H'nin birim elemanı olmak üzere, $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ için, $(m1_F)(n1_F)^{-1} \in F_\mathbb{Q}$ ve $(m1_H)(n1_H)^{-1} \in H_\mathbb{Q}$ elemanlarınının ikisi de bir karmaşa olmadığı sürece aynı sembolle gösterilecek.

Okur, tam sıralı cismin Arşimedyan olduğunu kolaylıkla gösterebilir. Aşağıdaki teorem esas olarak [28]'de verilmiştir.

Teorem 11.7 (Hölder-1901)**.** *Bütün tam sıralı cisimler sıra halka izomorfik olur.*

Kanıt: (Farklı ve belki de daha kolay kanıtlar, alıştırmalar kısmında verilen aşamalar takip edilerek verilebilir.)

F ve H iki sıralı cisim olsun. Birimlerini de sırasıyla 1_F ve 1_H ile gösterelim.

$$r((m1_F)(n1_F)^{-1}) = (m1_H)(n1_H)^{-1}$$

eşitliğiyle tanımlı $r : F_\mathbb{Q} \to H_\mathbb{Q}$ sıra halka izomorfizmasını $p \to \overline{p}$ ile gösterelim. $\pi : F \to H$ fonksiyonu

$$\pi(x) = \sup\{\overline{q} : q < x\}$$

eşitliğiyle tanımlansın. Bu fonksiyonun sıra halka izomorfik olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. Bunun için aşağıdaki adımları takip edebiliriz:

i. Her $q \in F_\mathbb{Q}$ için $\pi(q) = \overline{q}$: $q \in F_\mathbb{Q}$ verilsin. $\pi(q) \leq \overline{q}$ olduğu, $p \to \overline{p}$ dönüşümünün sıra izomorfizma ve $\overline{q}$'nın $\{\overline{p} : p < q\}$ kümesinin üst sınırı olmasından dolayı açık. $\pi(q) \neq \overline{q}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\pi(q) < \overline{q}$ olur. $F_\mathbb{Q}$, F'de yoğun olduğundan $\pi(q) < \overline{p} < \overline{q}$ olacak biçimde $p \in F_\mathbb{Q}$ seçelim. Buradan $q < p$ ve buradan da $\overline{q} \leq \pi(p)$ elde edilir. Bu çelişki.

ii. π sıra izomorfik: $x < y$ olsun. $x < p < q < y$ olacak biçimde $p, q \in F_\mathbb{Q}$ seçelim. π'nin artan olması ve (i) kullanılarak,

$$\pi(x) \leq \overline{p} < \overline{q} \leq \pi(y)$$

[12] Tam sıralı cismin standart inşa yöntemlerinin dışında, farklı bir yöntemle yapılan inşa [4]'de bulunabilir.

elde edilir. Dolayısıyla, $\pi(x) < \pi(y)$. Şimdi $\pi(x) < \pi(y)$ olduğunu varsayalım. Diyelim ki $x < y$ değil. Bu durumda $y \leq x$ olur. Buradan da $\pi(y) \leq \pi(x)$ elde edilir. Bu bir çelişki olup, istenilen elde edilir.

iii. $x \in F$ ve $p \in F_{\mathbb{Q}}$ verilsin. $\pi(x+p) = \pi(x) + \pi(p)$ olur:

$$\sup\{\overline{p} + \overline{q} : q < x\} \leq \pi(x) + \overline{p} = \pi(x) + \pi(p)$$

olduğu açık. Bu eşitsizliğin kesin eşitsizlik olduğunu varsayalım. $H_{\mathbb{Q}}$'nın H'da yoğun olmasından dolayı

$$\sup\{\overline{p} + \overline{q} : q < x\} < \overline{r} < \pi(x) + \overline{p}$$

olacak biçimde $r \in F_{\mathbb{Q}}$ seçelim. Buradan

$$\overline{r} - \overline{p} < \sup\{\overline{q} : q < x\}$$

olur. Dolayısıyla, $r - p < x$ elde edilir. Buradan da

$$\overline{r} = \overline{r-p} + \overline{p} < \sup\{\overline{q} + \overline{p} : q < x\} < \overline{r}$$

elde edilir. Bu çelişki $\pi(x+p) = \pi(x) + \pi(p)$ eşitliğini verir.

iv. $x, y \in F$ verilsin. $\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y)$: $p \in F_{\mathbb{Q}}$ ve $p < y$ verilsin.

$$\pi(x) + \overline{p} = \pi(x) + \pi(p) = \pi(x+p) \leq \pi(x+y)$$

eşitsizliği üzerinden p'lere göre supremum alınırsa,

$$\pi(x) + \pi(y) \leq \pi(x+y)$$

olur.

$$\pi(x) + \pi(y) < \pi(x+y)$$

olduğunu varsayalım. Yine $H_{\mathbb{Q}}$'nın H'da yoğunluğunu kullanarak,

$$\pi(y) < \overline{r} < \pi(x+y) - \pi(x)$$

olacak biçimde $r \in F_{\mathbb{Q}}$ seçebiliriz. Eşitsizliğin birinci kısmından $y < r$ olur. Buradan da

$$\overline{r} < \pi(x+y) - \pi(x) < \pi(x+r) - \pi(x) = \pi(x) + \pi(r) - \pi(x) = \overline{r}$$

çelişkisi elde edilir. Kanıt biter.

v. $0 < x \in F$ ve $0 < p \in F_{\mathbb{Q}}$ verilsin. $\pi(x)\pi(p) = \sup\{\overline{pq} : q < x\}$:

$$\sup\{\overline{pq} : q < x\} \leq \pi(x)\pi(p).$$

olduğu açık. Eşitsizliğin eşitlik olmayacağını varsayalım. Yine $H_{\mathbb{Q}}$'nın H'da yoğun olmasından

$$\sup\{\overline{pq} : q < x\} < \overline{r} < \pi(x)\pi(p)$$

olacak biçimde $r \in F_{\mathbb{Q}}$ seçebiliriz. Buradan

$$\overline{rp}^{-1} < \pi(x)$$

olur. Bu $rp^{-1} < x$ olduğunu söyler. Buradan da

$$\overline{r} = \overline{rp^{-1}}\,\overline{p} < \sup\{\overline{pq} : q < x\} < \overline{r}$$

çelişkisi oluşur. O halde $\pi(xp) = \pi(x)\pi(p)$.

$0 < x, y \in F$ verilsin. $q \in F_{\mathbb{Q}}$ ve $q < y$ olsun.

$$\pi(x)\overline{q} = \pi(x)\pi(q) = \pi(xq) < \pi(xy)$$

eşitsizliğinden

$$\overline{q} < \pi(xy)(\pi(x))^{-1}$$

elde edilir. q üzerinden supremum alarak

$$\pi(y) \leq \pi(xy)(\pi(x))^{-1}$$

olur. Bu eşitsizliğin eşitlik olmadığını varsayalım. Yine yoğunluğu kullanarak,

$$\pi(y) < \overline{r} < \pi(xy)(\pi(x))^{-1}$$

olacak biçimde $r \in F_{\mathbb{Q}}$ var. Dolayısıyla, $y < r$ olur. Buradan da

$$\overline{r} < \pi(xy)\pi(x)^{-1} < \pi(xr)\pi(x)^{-1} = \pi(x)\overline{r}\pi(x)^{-1} = \overline{r}$$

çelişkisi oluşur. O halde $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ olur. Genel durum ise

$$\pi(-x) = -\pi(x)$$

olduğu kullanılarak, istenilen elde edilir.

vi. π'nin örten olduğunun kanıtı okura bırakılmıştır.

Aşağıda alıştırmalarda geçen (p_n) ve (q_n) dizilerinin verilen tam sıralı cismin rasyonel sayılar cisminde olduğu varsayılacak. $p_n \uparrow x$'in anlamı (p_n) dizisinin artıyor ve supremumunun x olması anlamında olacak.

Alıştırmalar

11.54. F tam sıralı cisim olsun. aşağıdakileri kanıtlayın.

i. Her $x \in F$ için $p_n \uparrow x$ olacak biçimde (p_n) dizisi var.

ii. $x, y \in F$ ve (p_n) ve $p_n \uparrow x$ ve $q_n \uparrow y$ dizileri verilsin. $p_n + q_n \uparrow x + y$ olur.

iii. $x \in F^+$ ve $0 \leq p_n \uparrow x$ olacak biçimde diziyse $p_n^2 \uparrow x^2$.

11.55. F ve H iki tam sıralı cisim olsun. $\pi : F^+ \to H^+$ fonksiyonu

$$\pi(x) = \sup\{\overline{p} : p < x\}$$

eşitliğiyle tanımlansın. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. Her $p \in F_{\mathbb{Q}}^+$ için $\pi(p) = \overline{p}$.

ii. $x \in F^+$, $p_n \uparrow x$ ise $\pi(p_n) \uparrow \pi(x)$.

iii. $\pi(F_{\mathbb{Q}}^+) = H_{\mathbb{Q}}^+$.

iv. Her $x, y \in F^+$ için

$$\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y) \text{ ve } \pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$$

v. π fonksiyonu F'ye $\pi(-x) = -\pi(x)$ olarak genişlesin. π örten sıra cisim izomorfik.

11.56. F sıralı cisim olsun. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $x, y \in F$ ve $p \in F_{\mathbb{Q}}$ ve $p < x + y$ ise

$$p_1 < x,\ p_2 < y \text{ ve } p = p_1 + p_2$$

olacak biçimde $p_1, p_2 \in F_{\mathbb{Q}}$ var.

ii. $x, y \in F$, $p \in F_{\mathbb{Q}}$, $0 < x, y, p$ ve $p < xy$ ise

$$p_1 < x,\ p_2 < y \text{ ve } p = p_1 p_2$$

olacak biçimde $0 < p_1, p_2 \in F_{\mathbb{Q}}$ var.

iii. $x, y \in F$ verilsin. $\{p \in F_{\mathbb{Q}} : p < x\} \subseteq \{p \in F_{\mathbb{Q}} : p < y\}$ ise $x \leq y$.

iv. $p, q \in F_{\mathbb{Q}}$, $x, y \in F$, $|x| \leq p$ ve $|y| \leq q$ ise $|xy| \leq pq$.

11.57. F, H iki sıralı cisim olsun. $\pi : F \to H$ bir fonksiyon ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $\pi(n1_F) = n1_H$ olsun. Aşağıdakiler denk olur.

i. $x < y$ ise $\pi(x) < \pi(y)$.

ii. $\pi(x) < \pi(y)$ ise $x < y$.

Ayrıca, bu koşullardan biri sağlanıyorsa π halka izomorfizma olur. Bunun uygulanmasıyla, iki tam sıralı cismin sıra halka izomorfik olduğunu göstermek için, sıra izomorfik olduklarını göstermek yeterlidir.

12. Tam Sayılar Sistemi

Bu bölümde tam sayılar ve tam sayılar halkası farklı biçimlerde inşa edilecek. Bunlardan bazıları tam sayılar sistemini kolaylıkla inşa etmesine karşın, kullanılan yöntem diğer cebirsel yapıların inşasında pek kullanışlı olmayabilir; tek kullanımlık yöntem gibi. Buna karşın, tam sayılar sistemini inşa eden yöntemlerden bazıları göreceli olarak daha karmaşık olsa da kullanılan yöntem farklı cebirsel yapıların inşalarında kullanılabilir. Bu inşa yöntemlerden biri, Grothendick inşası olarak adlandırılmakla birlikte, matematik halkı arasında "standart inşa" olarak da bilinir.

Tam sayılar sistemini tanımlayan anahtar sözcüklerinden biri negatif sayılardır. Negatif sayıları anlama süreciyle ilgili olarak bazı bilgilere bir sonraki altbölümde yer verilecek.

F değişmeli ve birimli sıralı halka ise,

$$01_F = 0$$

ve her $n, m \in \omega$ için

$$(n+m)1_F = n1_F + m1_F$$

eşitliğini sağlayan birebir

$$n \to n1_F$$

fonksiyonu, recursion teoremi kullanılarak tanımlanabilir. Ayrıca,

$$(nm)1_F = (n1_F)(m1_F)$$

eşitliğinin sağlandığı tümevarımla kolaylıkla gösterilebilir. Bu fonksiyonun görüntü kümesi

$$\omega_F = \{n1_F : n \in \omega\})$$

ile gösterilmek üzere

$$-\omega_F = \{-(n1) : n \in \omega\}$$

olarak tanımlanan küme ω_F kümesinden ayrık olup,

$$\mathbb{Z}_F = \omega_F \cup (-\omega_F),$$

F'nin bir althalkası olur. G bir başka sıralı ve birimli halka ise $\mathbb{Z}_F$ ve $\mathbb{Z}_G$ halkaları izomorfiktir. Dolayısıyla, birimli ve sıralı bir F halkası için $n1_F$ elemanının n ile gösterilmesi sıkıntı yaratmaz. Bütün bunların, birimli ve sıralı halkanın var olduğu varsayımıyla yapıldığı unutulmamalı.

12.1 Negatif Sayıların Kısa Tarihi

Evladım, bir zamanlar negatif sayıların beş kuruş değeri yoktu, sonradan değerlendi!

Günümüzde bilinmeyeni x olan

$$4x + 20 = 4$$

denklemine hiç kimse "saçma" demez. Ama yaklaşık 1800 yıl önce, Diophantus, Aritmetik kitabında, bu eşitliği sağlayan pozitif sayı x olamayacağından, bu denkleme saçma diyerek, bu tür denklemleri yok sayıyordu. Bu yok sayma o denklemi yok etmediği gibi, negatif sayı kavramının işaretini veriyordu.

Negatif sayılar Çin'in klasik temel kitaplarından olan, Öklid'in Elemanları olarak adlandırılan, **Dokuz Bölümde Matematik Sanatı**[1] adlı eserde bazı denklem sistemlerinin çözümü için kullanılmıştır. Bu açıdan, negatif sayıların Çin'de doğduğu kuvvetli bir ihtimal olarak iddia edilir. Kim bilir, negatif sayılar belki de Mars'ta doğmuştur.

Matematik tarihçileri 16. yüzyıla kadar negatif sayılarla Çin, Arap ve Hintlilerin ilgilendiği yazar. Yedinci yüzyılda, alacak pozitif sayılarla ve borçlar negatif sayılarla gösteriliyordu. Böyle bir kullanım son derece doğal ihtiyaç olduğundan, bu tür kullanımlar muhtemelen bu tarihten önce de vardı. Aynı yüzyılda, Hintli matematikçi Brahmagupta, a, b, c pozitif sayıları için,

$$ax^2 + bx = c,\ ax^2 = bx + c,\ ax^2 + c = bx$$

biçiminde verilen denklemleri quadrik denklem ($ax^2 + bx + c = 0$ formundaki denklemler) olarak ifade etmek için negatif sayıları kullandı. Bunu yaparken,

[1] Bu eser, Çince'de "Chiu-chang Suan-shu", İngilizce'de "The Nine Chapters on the Mathematical Art" olarak adlandırılır. Bu eser MS. 2. Yüzyılda, Çin aritmetiği üzerine yazılmış olup, yazarı ve yazım tarihi tam olarak bilinmemektedir. MÖ. 213'de Ch Hanedanı'nı imparatoru Shih Hoang-ti'nin emriyle bütün kitapların yakılmış olmasını nedeniyle bu eser de büyük olasılıkla yakılmıştır. İmparatorun ölümünden sonra, Chang T'sang(???-152), bulduğu bazı bilgilerle içeriği Chiu-chang Suan-shu olan Chiu-chang adlı eseri yazmaştır. Yaklaşık bir yüzyıl sonra, bu eser Ching Ch'ou-ch'ang tarafından tekrar düzenlenmiştir. Dokuz Bölümde Matematik Sanatı eserinde, π sayısı 3 olarak alınmış olup, bir üçgenin, ikizkenar yamuğun ve dairenin alan formüllerini içermektedir.

Brahmagupta, pozitif sayılar arasındaki işlem kurallarını negatif sayılara genelledi.

Dokuzuncu Yüzyılın Ortadoğusunda Araplar, Hintli matematikçilerden dolayı negatif sayıları biliyor olmalarına karşın, bu sayıları kullanmadılar. Örneğin, El Harizmi, Cebir kitabında (Al-jabr wa'l-muqabala) adlı kitabında negatif sayılara yer vermedi. İranlı matematikçi Abu-Wafa(940-998), negatif sayıları "borç" olarak anlamlandırarark, "üç alacak, beş borç olma durumunda iki borç" kalmasını, "üçün beşten çıkartılması" olarak değerlendirerek, bunu daha da genelledi. Abu-Wafa'nın aritmetiği ilgili bir makale [47]. Al-Samawal(1130-1180), negatif sayıları dikkate alarak cebir yapıyor ve şunları söylüyordu: 1. Boşluktan pozitif sayı çıkartılırsa, kalan o miktarda negatif sayı olur. 2. Boşluktan negatif sayı çıkartılırsa kalan o miktarda pozitif sayı olur. 3. Negatif sayının pozitif sayıyla çarpımı negatif, negatif sayıyla çarpımı pozitif sayı olur. Aslında bunun benzerleri Brahmagupta'nın çalışmalarında da yer alıyordu. Örneğin, borç ve alacağın "çarpımı" borç olarak değerlendiriliyordu. Brahmagupta'nın çalışmalarına kadar negatif sayı Hindistan'da gündemdeyoktu.

12. Yüzyılda, Hindistan'da Bhaskara quadrik denklemlerin negatif köklerini uygunsuz, yetersiz olarak görüp, dikkate almıyordu. İtalya'da 13. yüzyılın temel eserlerinden olan Fibonacci'nin Liber Abaci'si bazı matematik tarihçilerine göre negatif sayıları içermekte, bazılarına göre içermemekte. Fransız matematikçi Nicolas Chuquet (1445-1488), $-\frac{12}{x^2}$ ifadesini $-12x^{-2}$ ile göstermiştir. Buna karşın, negatif sayıları Chuquet, "saçma" olarak değerlendirmiştir.

16. yüzyıla kadar, genel olarak Arapların, Çinlilerin, Hintlilerin gündeminde yer alan negatif sayılar, bu yüzyıldan sonra Avrupa'nın gündeminde de yer almaya başlıyor. İngiliz matematikçi Thomas Harriot (1560-1621), bir denklemin negatif kökünü kabul etmese de denklemin bir tarafında negatif sayının yer almasını kabul etmiştir. İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano (1501-1576), 1545'de yayınlanan **Ars Magna** adlı, Latince yazılmış cebir kitabında, denklemlerin çözümünde negatif sayılara yer vermiştir. Söz konusu kitapta pozitif sayılar *numeri ueri* ve negatif sayılar *numeri ficti* olarak adlandırılıyordu. Kitapta negatif sayı işareti olarak m kullanılıyordu. Örneğin, -2 sayısı $m:2$ olarak gösteriliyordu. Buna karşın, quadratik denklemlerin ifadesinde negatif katsayılar kullanılmıyordu. Bazı matematik tarihcilerine göre, Cardano, negatif sayılara anlam katmak için epey mücadele verdi. Hollandalı matematikçi Simon Stevin(1548-1620), Cardano'nun bir ilerisi olarak, denklemlerin katsayılarının negatif olmasına izin verdiği gibi denklemlerin negatif köklerini kabul edip, onlarla işlem yapıyordu. Alman matematikçi Michael Stifel(1487-1567), denklemlerin katsayılarının negatif olmasına izin verirken, negatif kökleri yok sayıyordu. Stifel ayrıca, üstel sayılarda negatif sayıları kullanmıştır. Tycho Brahe, negatif sayılara olumsuz bakmış ve negatif sayıları göstermek için eksi işareti $-$ kullanmıştır. Fransız matematikçi François Viete

(1540-1603) negatif sayılarla ilgili hiçbir bilgi vermedi. Buradan çıkarılacak sonuç 16. yüzyılda, negatif sayıların ne anlama geldiğinin tam anlaşılamamış olduğudur.

17. ve 18. yüzyılda negatif sayıların hali vakti nasıldı? Fransız matematikçi Rene Descartes(1596-1650) negatif sayıları kısmen kabul ediyor ama denklemin negatif olan köklerini kabul etmiyordu. Buna karşın negatif köklü bir denklemi pozitif kökü olan denkleme dönüştürerek, dolaylı yollardan negatif kökü kabul etmiş oluyordu. Fransız matematikçi Blaise Pascal(1623-1662), "sıfırdan dört çıkmaz" diyordu. Sonsuz işaretini "∞" sembolüyle ilk olarak gösteren Ingiliz matematikçi John Wallis(1616-1703), negatif sayılar için, "sıfırdan küçük olmayan, sonsuzdan büyük sayılar" diyordu. Fransız teolog ve matematikçi Antoine Arnauld(1612-1694), negatif sayıların kabul edilmesi durumunda

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

olması üzerinden değerlendirme yaparak, *küçük olan nasıl büyük ve büyük olan nasıl küçük olabilir?* diyordu. Alman matematikçi Leibniz(1646-1716), Arnauld'un ortaya koyduğu değerlendirmenin yerinde olduğunu ifade etmekle birlikte, oranların eşit olması nedeniyle, işlem yapılabileceğini düşünüyordu. İskoç matematikçi Colin Maclaurin(1698-1746), 1748 yılında yayınlanan *Cebirin bir incelemesi*(*A Treatise of Algebra*) adlı eserinde, pozitif ve negatif sayılarla aynı düzeyde işlem yaptı. Sıklıkla kullanılan soldan sağa ve sağdan sola çizilen sayı doğru gösterimi Maclaurin tarafından verilmiştir. İsveç matematikçi Leonhard Euler(1707-1783), 1771 yılında yayınlanan *Vollstandige Anleitung zur Algebra* (*Complete Introduction to Algebra*) adlı eserinde pozitif ve negatif miktarlar üzerinde işlemleri tartıştı. Bir borç örneği üzerinden hareket ederek, günümüzde geçerli olan, bir pozitif sayının negatif katının negatif olduğu sonucuna ulaştı; bu sonuca 10. yüzyıla Al-Samawal tarafından da ulaşılmıştı.

İngiliz matematikçi George Peacock(1791-1858), 1830'da yayınlanan *Treatise on Algebra* adlı eserinde, negatif sayılar üzerindeki tartışmalı durumu aritmetiksel cebir ve sembolik cebir ayrımı üzerinden anlamayı denedi. Örneğin, aritmetiksel cebirde $a - b$'nin ifadesi $a < b$ olduğunda kullanılabilirken, sembolik cebirde, kullanılan sembollerin yorumlanması gerekmeyeceği üzerinden hareketle, $a - b$ ifadesinin sembolik cebirde yorumlanması gerekmediği avantajını kullanarak, $-b$ifadesinin sembolik cebirde yer almasını sağlıyordu. Bu anlamda Peacock, sembolik cebirde bir a (pozitif) sayısının negatifini $-a$ olarak tanımlamıştır.

12.2 Birimli Tam Sıralı Halkanın Varlığı

Elemanları sadece ve sadece $n \in \omega$ için $\{n\}$ kümelerinden oluşan bir küme vardır. Bu kümeyi $-\omega$ ile gösterelim. Yani

$$-\omega = \{\{n\} : n \in \omega \setminus \{0\}\}$$

olsun. ω ve $-\omega$ kümelerinin ayrık olduğu açık. Bu iki kümenin bileşimi F ile gösterilsin. Her $n, m \in \omega$ için

$$n + k = m \text{ ya da } m = n + k$$

olacak biçimde tek bir tane $k \in \omega$ olduğundan, $\{(m, n) : m, n \in \omega, m \leq n\}$ kümesinde ω'ya tanımlı ve $m \leq n$ için

$$n = m + k(m, n)$$

eşitliğini sağlayan k fonksiyonu vardır. F üzerinde, $n, m \in \omega$ olmak üzere

$$a \oplus b = \begin{cases} n + m & ; a = n, b = m \\ \{k(m, n)\} & ; a = n \in \omega, b = \{m\}, m \geq n \\ k(n, m) & ; a = n \in \omega, b = \{m\}, n \geq m \end{cases}$$

ve

$$a \otimes b = \begin{cases} nm & ; a = n, b = m \\ \{nm\} & ; a = n \in \omega, b = \{m\} \\ \{nm\} & ; a = \{n\} \in \omega, b = m \\ nm & ; a = \{n\} \in \omega, b = \{m\} \end{cases}$$

cebirsel işlemleri altında $(F, \oplus, \otimes, 1)$ birimli değişmeli halka olur. Ayrıca, n ve m doğal sayıları göstermek üzere,

$$R = \{(n, m) : n \leq m\} \cup \{(\{n\}, m) : n \neq 0\} \cup \{(\{m\}, \{n\}) : n \leq m\}$$

kümesi,

$$a \leq b \iff (a, b) \in R$$

olarak tanımlanan sıralamaya göre $(F, \oplus, \otimes, 1, \leq)$ birimli sıralı halka olur.

Aşağıdaki alıştırmalarda yer alan F'yi, yukarıda tanımlanan F halkası olarak alın.

Alıştırmalar

12.1. $\bigcup F = \omega$ olduğunu gösterin.

12.2. F kümesinin bir seçim fonksiyonunun olduğunu gösterin.

12.3. F'nin sayılabilir sonsuz olduğunu gösterin.

12.4. $x \in F$ verilsin. $x < 0$ ise $card(x) = 1$ ve $x > 0$ ise $card(x) = x$ olduğunu gösterin.

12.3 Tam Sayılar Sisteminin Standart İnşası

Okurun düzlemi ve düzlemde iki noktadan geçen doğrunun ne demek olduğunu bildiğini varsayalım. Her $0 < n \in \omega$ için $(n, 0)$ ve $(2n, n)$ noktalarından geçen doğruyu l_n^+ ve $(0, n)$ ve $(n, 2n)$ noktalarından geçen doğru denklemini l_n^- ile gösterelim. Ayrıca, $(0, 0)$ noktasından geçen ve eğimi 1 olan doğru denklemi l_0 ile gösterilsin. Bu doğruların ikişer ikişer ayrık oldukları kolaylıkla gösterilir. Her $n \in \omega$ için

$$n^+ = l_n \cap (\omega \times \omega)$$

ve

$$n^- = {l_n}^- \cap (\omega \times \omega)$$

ile gösterilsin. Her $n, m \in \omega$ için n^+ ve n^- kümelerinin ayrık olmasının yanında $n \neq m$ için

$$n^+ \cap m^+ = \emptyset$$

ve

$$n^+ \cap m^- = \emptyset$$

olur.

$$\omega \times \omega = (\textstyle\bigcup_n n^+) \cup (\bigcup_n n^-)$$

olmasından dolayı $\omega \times \omega$ kümesi üzerinde iki noktanın denk olması bir $k \in \omega$ için k^+ ya da k^- kümelerinin elemanları olarak tanımlanırsa, bir denklik bağıntısı tanımlanmış olur. Bu denklik bağıntısına göre, noktanın denklik sınıflarının kümesi üzerinde belirli koşulları sağlayan halka aranan tam sayılar sistemi olacaktır.

Burada bahsi geçen denklik bağıntısıyla aşağıda verilen denklik bağıntısı çakışır. Kanıt okura bırakılmıştır.

Teorem 12.1. *$\omega \times \omega$ kümesinde*

$$(a, b) \equiv (x, y) \Longleftrightarrow a + y = b + x$$

olarak tanımlanan $\equiv$ bir denklik bağıntıdır.

Her $n, m \in \omega$ için (m, n) noktasının denklik sınıfını $[(m, n)]$ ile gösterelim. Yani,

$$[(m, n)] = \{(a, b) \in \omega \times \omega : m + b = n + a\}$$

olur. Ayrıca, yukarıda girişteki notasyonlarla ifade edilecek olunursa,

$$[(m,n)] = k^+ \text{ ya da } [(m,n)] = k^-$$

olacak biçimde $k \in \omega$ var. Yani,

$$[(m,n)] = [(k,0)] \text{ ya da } [(m,n)] = [(0,k)]$$

olacak biçimde tek bir tane $k \in \omega$ var. Bu $k \in \omega$, $k(m,n)$ ile gösterecek olursak, $\omega \times \omega$'dan ω'ya $(m,n) \to k(m,n)$ fonksiyonu tanımlanmış olur. Elbette

$$m = k(m,n) + n \text{ ya da } n = k(m,n) + m$$

eşitliği sağlanır. Genelde

$$\mathbb{Z} = \{[(m,n)] : m,n \in \omega\}$$

gösterimi kullanılır. $\mathbb{Z}^2$ bir küme olup bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemleri şöyle tanımlansın:

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$$

$$[(a,b)] \times [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)].$$

Ayrıca, $\omega \times \omega$'da

$$[(m,n)] \leq [(x,y)] \Longleftrightarrow y+m \leq x+n$$

olarak tanımlanan $\leq$, $\mathbb{Z}$'de bir tam sıralama olur.

Aşağıdaki iki teorem kolaylıkla kanıtlanabilir.

Teorem 12.2. $1 = [(1,0)]$ *ve* $0 = [(0,0)]$ *olmak üzere,* $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes, 0, 1, \leq)$ *sıralı halkadır.*

Teorem 12.3. *F bir önceki alt bölümde tanımlı sıralı halka olsun. $F \to \mathbb{Z}$'ye her $n \in \omega$ için*

$$\pi(n) = [(n,0)] \text{ ve } \pi(\{n\}) = [(0,n)]$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyon örten ve sıra halka izomorfiktir. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}_F$ ve $\mathbb{Z}$ sıralı halkaları sıra halka izomorfik olur.

$[(0,0)] \leq [(m,n)]$ biçimindeki $[(m,n)] \in \mathbb{Z}$ elemana $\mathbb{Z}$'nin pozitif elemanları denir. Elemanları pozitif olan küme $\mathbb{Z}^+$ ile gösterilir. Benzer biçimde

$$\mathbb{Z}^- = \{[(m,n)] \in \mathbb{Z} : [(m,n)] \leq [(0,0)]\}$$

ile gösterilsin.

[2] Bu notasyon Almanca sayı anlamına gelen Zahlen kelimesinin ilk harfinden kaynaklı olup, ilk olarak Nicolas tarafından kullanılmaya başlanmıştır.

$$\mathbb{Z}^+ = \{[(n, 0)] : n \in \omega\}$$

ve

$$\mathbb{Z}^- = \{[(0, n)] : n \in \omega\}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yaygın olarak, her $n \in \omega$ için

$$n = [(n, 0)]$$

ve

$$-n = [(0, n)]$$

gösterimleri kullanılır. (Elbette bu gösterimde kullanılan eşitlik sembolü, küme teorik anlamda değil, sadece bir gösterim.) $n > 0$ için $-n$'ye **negatif sayı** denir.

Yukarıda tam sayılar halkasını tanımlayan inşa, **Grothendick inşası**nın özel bir halidir. $\mathbb{Z}$, Grothendick grup kavramının en basit örneğidir. Grothendick inşa ve Grothendick grup kavramları bu kitabın konusu olmadığından bu bilgi verilmeyecek.

Alıştırmalar

12.5. $card(\mathbb{Z}) = card(\omega)$ olduğunu farklı biçimlerde gösterin.

12.6. Her $x \in \mathbb{Z}$ için $card(x) = card(\omega)$ olduğunu gösterin.

12.7. $A \subset \mathbb{Z}$ alttan sınırlı ise A'nın minumumun olduğunu gösterin. Benzer biçimde üstten sınırlı ise maksimumun olduğunu gösterin.

12.8. $f : \wp(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu, A alttan sınırlıysa $f(A) = \min A$, üstten sınırlıysa $f(A) = \max A$, her ikisi de değilse $f(A) = \min A \cap \mathbb{Z}^+$ olarak tanımlansın. f'nin seçim fonksiyonu olduğunu gösterin.

12.9. $0 \in \omega$, $\mathbb{Z}$'de $0_{\mathbb{Z}} = [(0, 0)]$ ile temsil ediliyor. Boşküme olan 0'in $\mathbb{Z}$'de $card(0_{\mathbb{Z}}) = card(\omega)$ olacak şekilde $0_{\mathbb{Z}}$ ile temsil edilmesi şaşırtıcı mı? Neden?

12.10. $\bigcup \mathbb{Z} = \omega \times \omega$ olduğunu gösterin.

12.11. $f : \mathbb{Z} \to \bigcup \mathbb{Z}$, $f([(n, 0)]) = (n, 0)$, $f([(0, n)]) = (0, n)$ eşitliğiyle tanımlı fonksiyonun seçim fonksiyonu olduğunu gösterin.

12.12. $\mathbb{Z}$ halkasında $xy = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $x = 0$ ya da $y = 0$ olması olduğunu gösterin.

12.13. $\mathbb{Z}$ halkasında $xy = 1$ olması için gerek ve yeter koşulun

$$x = 1, y = 1 \text{ ya da } x = -1, y = -1$$

olması gerektiğini gösterin.

12.14. $\mathbb{Z}$ halkasında birimin iki eşit parçaya ayrılayamacağını, yani

$$x + x (= 2 \times x) = 1$$

olacak biçimde $x \in \mathbb{Z}$ olamayacağını gösterin.

12.4 Tamlık Bölgesi Sıralı Halka ve Tam Sayılar Sistemi

Birimli, değişmeli ve sıfır böleni olmayan (yani $ab = 0$ ise $a = 0$ ya da $b = 0$ özelliğinin sağlanması) halkaya tamlık bölgesi denir. Tam Sayılar Halkasının sıralı tamlık bölgesi olmasının yanında, elemanları sıfırdan kesin büyük olan altkümesi iyi sıralıdır. Aslında bu özellikleri sağlayan halka, tam sayılar halkasına sıra halka izomorfiktir. Bu altbölümde bu kanıtlanacak.

Teorem 12.4. *A sıralı bir halka ve $P = \{x \in A : x > 0\}$ olsun. Aşağıdakiler denktir.*

i. *A, sıralı tamlık bölgesi ve P iyi sıralı.*

ii. *A ve $\mathbb{Z}$ halkaları sıra halka izomorfik.*

Kanıt: $ii \implies i$: Kolaylıkla gösterilir.
$i \implies ii$: Bunun için aşağıdaki gözlemleri takip edelim.

i. Her $x \neq 0$ için $x^2 \in P$: Bu varsayımla $x \in P$ ya da $-x \in P$ olur. $x \in P$ olma durumunda P çarpma işlemi altında kapalı olduğundan, $x^2 \in P$ olur. Diğer durum için de aynı nedenlerden $x^2 = (-x)^2 \in P$ olur.

ii. e, A'nın birimi olmak üzere $e \neq 0$ ve $e \in P$: $e \neq 0$ ve $e = e^2 \in P$ olmasından dolayı istenilen açık.

iv. $e = \min A$: e, P'nin minumumu olmasın. $0 < m < e$ olacak biçimde $m \in P$ seçilebilir. Ayrıca,

$$0 = 0m < m^2 < me$$

elde edilir. Bu, m'nin P'nin minumumu olmasıyla çelişir.

v. $P = \{ne : 0 < n \in \omega\}$: ($n \in \omega$, $x \in A$ için nx'in ne anlama geldiğini biliyoruz.)

$$\{ne : 0 < n \in \omega\} \subseteq P$$

olduğu açık.

$$L = P \setminus \{ne : 0 < n \in \omega\}$$

diyelim. L'nin boşkümeden farklı olduğunu varsayalım. P iyi sıralı oldu˘-gundan, $l = \min L$ var. $l \neq e = 1e$ olmasından $e < l$ olur. Buradan

$$0 < l - e < l$$

olur. l'nin özelliğinden dolayı

$$l - e \in \{ne : 0 < n \in \omega\}$$

olur. $l - e = ne$ olacak biçimde $0 < n \in \omega$ seçilebilir. Böylece,

$$l = e + ne = (n + 1)e$$

olur. Bu bir çelişkidir. O halde $L = \emptyset$ olmak zorunda. İstenilen elde edilir.

v. $A = \{ne : n \in \mathbb{Z}\}$: Açık.

A tamlık bölgesi olduğundan, $m, n \in \mathbb{Z}$ için $me = ne$ ise $m = n$ olduğu açıktır. Buradan, $f(ne) = n$ eşitliğiyle birebir ve örten $f : A \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz. f'nin sıra halka izomorfizma olduğu da açık.

Alıştırmalar

12.15. Tam sayılar grubu'nun altgruplarının bir $n \in \omega$ için $n\mathbb{Z}$ formunda olduğunu gösterin.

12.16. Tam sayılar grubu'nun sıfırdan farklı altgruplarının ikişer ikişer sıra grup izomorfik olduklarını gösterin. Aynı durum Tam Sayılar Halkası için de doğrudur.

12.17. $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ verilsin. $\mathbb{Z}$ tam sayılar grubu'nun $n\mathbb{Z}$ altgrubuna göre bölüm grubu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$'nin n elemanlı olduğunu gösterin:

12.18. $0 < n \in \omega$ verilsin. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $0 \leq r < n$ doğal sayısı için $-r + n\mathbb{Z} = k + n\mathbb{Z}$ eşitliğini sağlayan $0 \leq k < n$ doğal sayısı k var.

ii. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $m + n\mathbb{Z} = k + n\mathbb{Z}$ olacak biçimde $0 \leq k < n$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}$ var.

iii. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{k + n\mathbb{Z} : k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k < n\}$.

12.19. $n \in \omega$ verilsin. Her $0 \leq k < n$ için $[k] = k + n\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\mathbb{Z}_n = \{[k] : 0 \leq k < n\}$$

gösterimi kullanılır. $n > 1$ için $(\mathbb{Z}_p, +, \times, [0], [1])$ bir halkadır. $\mathbb{Z}_p$ için aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

i. Tamlık bölgesi.

ii. Cisim.

iii. n asal.

iv. $(Z_p, +)$ grubunun altgrupları sadece ve sadece kendisi ve sıfır altgrubudur.

12.5 Tam Sayılar Sisteminin Aksiyomatik İnşası

Doğal sayılar sistemi'ni tanımlayan ve Peano Aksiyomları olarak adlandırılan aksiyomlara benzer aksiyomlar topluluğu tam sayılar sistemini de inşa edebilir. Bu altbölümde bu aksiyomlar tanımlanacak ve bunlar üzerine yapılacak inşadan bahsedilecek. Bu yönlü inşa [35]'dan alınmıştır.

Bahsi geçen aksiyomatik yapıyla inşa edilecek "(farklı) tam sayılar kümesi" doğal sayılar sistemi'nin varlığı altında Tam Sayılar Halkası'na sıra halka izomorfik olmasına karşın, doğal sayılar sistemi'ni kullanmadan oluşacak karşılığı, toplamaya göre devirli sonsuz sıralı halka olacak. Bu durumda, bu halkanın sonlu olmamasına karşın, sayılabilir sonsuz olduğu söylenemeyecek. Çünkü, sayılabilir sonsuzluk kavramı doğal sayılar kümesi üzerinden tanımlanan bir kavramdır. Diğer taraftan bu inşa üzerinden doğal sayılar sistemine denk olacak yapı tanımlanabilecek.

Üzerine inşası yapılacak küme elbette boşküme olmamalı. Bu, aksiyomlardan biri olacak. Tam sayılardan alınan her sayının "bir önceki" ve "bir sonraki" tam sayısı vardır. $x \in \mathbb{Z}$ sayısının bir sonrakini $s^+(x)$ ve bir öncekini $s^-(x)$ ile gösterecek olursak, s^+ ve s^-, $\mathbb{Z}$'den kendisine tanımlı birebir ve örten fonksiyonlar olacaktır. Aslında s^-, s^+ fonksiyonunun ters fonksiyonudur. Bu, aksiyomlardan bir diğeridir. Bir başka aksiyom, Peano aksiyomlarında tümevarıma karşılık gelen aksiyom olacak. Görüldüğü gibi son derece doğal olan bu aksiyomları, daha formel bir biçimde, tanımla verelim.

Tanım 12.1. Aşağıda verilen aksiyom topluluğuna Z kümesi için **Tam Sayılar Aksiyomu** denir.

i. Z boş olmayan bir küme.

ii. $t : Z \to Z$ birebir ve örten bir fonksiyon.

iii. Boş olmayan $M \subseteq Z$ kümesi

$$x \in M \Longleftrightarrow t(x) \in M$$

koşulunu sağlıyorsa $M = Z$.

iv. Boş kümeden farklı, $Q \subseteq Z$ ve $t(Q) \subseteq Q$ olacak biçimde Q kümesi var.

Yukarıda belirtilen aksiyomların sağlandığı yapıda birkaç gözlem yapalım.

a. t fonksiyonunun ters fonksiyonu t^{-1} ile gösterilsin. Her $x \in Z$ için $t^{-1}(x)$ elemanına x'in **öncülü** denir. $t(t^{-1}(x)) = t^{-1}(t(x)) = x$ olur.

b. Aksiyom (iii) şuna denktir: Boş olmayan bir $M \subseteq Z$ için $t(M) \subseteq M$ ve $t^{-1}(M) \subseteq M$ ise $M = Z$ olur.

c. Z tek elemanlı olamaz: Olduğunu varsayalım. Yani, Z tek elemanlı bir küme olsun. Bu durumda, Z'nin kendisine eşit olmayan her altkümesi boşküme olur. Bu, Aksiyom (iv) ile çelişir.

d. Her $x \in Z$ için $t(x) \neq x$: $x \in Z$ ve $t(x) = x$ olduğunu varsayalım. $M = \{x\}$ diyelim. Bu durumda, $x \in M$ olması için gerek ve yeter koşul $t(x) \in M$ olur. Aksiyom (iii) gereği $M = Z$ olur. Bu, Z'nin bir elemanlı olmaması nedeniyle, çelişki oluşturur.

e. $x \in Q$, $t^{-1}(x) \notin Q$ olacak biçimde en az bir $x \in Z$ var: Aksiyom (iii) gereği $Q \neq Z$ olduğundan " her $x \in Z$ için $x \in Q \Longleftrightarrow t(x) \in Q$" önermesi doğru değildir. Ayrıca, Aksiyom (iv) gereği $t(Q) \subseteq Q$ olacağından, istenilen elde edilir. Burada $x = 1$ ve $0 = t^{-1}(1)$ olarak sabitlensin. Buradan $t(0) = 1$ elde edilir.

Teorem 12.5. *Aşağıdaki koşulları sağlayan* $\oplus, \otimes : Z \times Z \to Z$ *fonksiyonları vardır.*

i. $\oplus(x, 0) = x$ *ve her* $x, y \in Z$ *için* $\oplus(x, t(y)) = t(\oplus(x, y))$.

ii. $\otimes(x, 0) = 0$ *ve her* $x, y \in Z$ *için* $\otimes(x, t(y)) = t(\otimes(x, y), x)$.

Kanıt: Verilecek kanıt, Teorem 5.5'nin kanıtıyla hemen hemen örtüşür. Aşağıdaki kanıtın detayları okura bırakıldı.
i. $\mathcal{A} \subseteq \wp((Z\times Z)\times Z)$, elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan $A \subseteq ((Z\times Z)\times Z)$ kümelerinden oluşsun.

a. $((x, 0), x) \in A$.

b. $((x, y), z) \in A$ ise $((x, t(y)), t(z)) \in A$.

$(Z \times Z) \times Z \in \mathcal{A}$ olduğundan, $\mathcal{A}$ boş olmayan bir küme olur. Ayrıca, $G = \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ olduğu açık. G, $Z \times Z$'den Z'ye tanımlı bir fonksiyonun grafiğidir. Grafiği G olan fonksiyon $\oplus$, istenilen koşulları sağlar.
ii. $\mathcal{M} \subseteq \wp((Z \times Z) \times Z)$, elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan $M \subseteq ((Z \times Z) \times Z)$ kümelerinden oluşsun.

a. $((x, 0), 0) \in M$.

b. $((x, y), z) \in M$ ise $((x, k(y)), \oplus(z, x)) \in M$.

$(Z \times Z) \times Z \in \mathcal{M}$ olduğundan $\mathcal{A}$ boş olmayan bir küme olur. Ayrıca, $H = \bigcap \mathcal{M} \in \mathcal{A}$ olduğu açık. G, $Z \times Z$'den Z'ye tanımlı bir fonksiyondur. Grafiği G olan fonksiyon $\otimes$, istenilen koşulları sağlar.
Kanıt tamamlanır. $\square$

Her x, $y \in Z$ için

$$\oplus(x,y) = x + y$$

ve

$$\otimes(x,y) = x \times y$$

yazalım. Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakılmıştır.

Teorem 12.6. *Her $x, y, z \in Z$ için aşağıdakiler gerçekleşir.*

a. $x + y = y + x$.

b. $x \times y = y \times x$ *ve* $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Teorem 12.7. *Her $x \in Z$ için $y + x = 0$ olacak biçimde tek bir tane $y \in Z$ var.*

Kanıt: $x \in Z$ verilsin. $y_1 + x = y_2 + x = 0$ ise $y_1 = y_2$ olduğu kolaylıkla gösterilir.

$x = 0$ için $x + x = 0$ olduğundan $y = x$ seçebiliriz. Dolayısıyla,

$$M = \{x \in Z : y + x = 0 \text{ olacak biçimde } y \in Z \text{ var }\}$$

kümesi boş olmayan bir kümedir. $x \in M$ verilsin. $y + x = 0$ olacak biçimde $y \in Z$ seçelim.

$$\begin{array}{rcl} t^{-1}(y) + t(x) & = & t((t^{-1}(y) + x)) \\ & = & t(x + t^{-1}(y)) \\ & = & x + t(t^{-1}(y)) \\ & = & x + y \\ & = & 0 \end{array}$$

olduğundan $t(x) \in M$ olur. Benzer biçimde

$$\begin{array}{rcl} t(y) + t^{-1}(x) & = & (t^{-1}(x) + t(y) \\ & = & t(t^{-1}(x) + y) \\ & = & t(y + t^{-1}(x)) \\ & = & y + t(t^{-1}(x)) \\ & = & y + x \\ & = & 0 \end{array}$$

olacağından $t^{-1}(x) \in M$ olur. Aksiyom (iii) gereği $M = Z$ elde edilir. □

$x \in Z$ için $y + x = 0$ olan $y \in Z$, $-x$ ile gösterilir. Yapılan tanımlamalar altında her $x \in X$ için

$$t(x) = x + 1 \text{ ve } t^{-1}(x) = x - 1 (= x + (-1))$$

olur.

Teorem 12.8. $(Z, +, 0)$, $\{1\}$ *tarafından üretilen gruptur.*

Kanıt: M, bu grubun $\{1\}$ tarafından üretilen altgrubu olsun. $m \in M$ verilsin. $t(m) = m+1 \in M$ olur. Yani, $t(M) \subseteq M$. Aynı zamanda, $-1 \in M$ olduğundan $t^{-1}(m) = m - 1 \in M$, yani $t^{-1}(M) \subseteq M$ olur. Aksiyom (iii) gereği $M = Z$ olur. □

Teorem 12.9. $(Z, +, \times, 0, 1)$ *değişmeli halkadır.*

Kanıt: Okura bırakıldı.

Dikkat edilirse, yukarıda verilen teoremlerde doğal sayılar sistemi kullanılmadı. Kullanılmış olsaydı, Z devirli grup olduğundan ve sonlu olmadığından (neden?), sayılabilir sonsuz olduğu söylenebilirdi. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için $n1 > 0$ ve $n(-1) < 0$ yazarak, $(Z, +, \times, 0, 1, \leq)$ sıralı tamlık bölgesi olduğundan ve $P = \{n1 : n > 0\}$ iyi sıralı olacağından, Teorem 11.4 gereği Z, Tam Sayılar Halkası'na sıra halka izomorfik olurdu.

$\mathcal{P}$, elemanları aşağıdaki koşulları sağlayan $M \subset X$ kümelerden oluşsun.

i. $1 \in M$.

ii. $t(M) \subseteq M$.

iii. $0 \in M$.

Aksiyom (iv) gereği $\mathcal{M}$ boşkümeden farklıdır. Ayrıca, $P = \bigcap \mathcal{P} \in \mathcal{P}$ olur.

Teorem 12.10. $-p = \{x \in Z : -x \in P$ *olmak üzere,* p, $-P$, $\{0\}$ *kümeleri ayrık ve bileşimleri* Z *olur.*

Kanıt: $M = P \cup (-P) \cup \{0\}$ diyelim. $0 \in M$ olduğundan, M boş kümeden farklıdır. Ayrıca, $t(M) \subseteq M$ ve $t^{-1}(M) \subseteq M$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Bu,

$$x \in P \Longleftrightarrow t(x) \in P$$

önermesine denktir. Aksiyom (iii) gereği $M = P$ olur.

Her $x, y \in P$ için $x + y, xy \in P$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Ayrıca, P üzerinde

$$x < y \Longleftrightarrow y - x \in P,$$

olarak tanımlanan sıralama bir tam sıralama olup, her $x, y, z \in Z$ için

i. $x < y$ ise $x + z < y + z$,

ii. $x < y$ ve $z > 0$ ise $xz < yz$

sağlanır. Sonuç olarak:

Teorem 12.11. $(Z, +, \times, 0, 1, \leq)$ *sıralı tamlık bölgesi ve* $P = \{x \in Z : x > 0\}$ *iyi sıralıdır.*

Alıştırmalar

12.20. $P \subset Z$ yukarıda olduğu gibi tanımlansın. $(P, s|_P, 1)$ üçlüsünün Peano aksiyomlarını sağladığını gösterin.

12.6 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Kümesi Sayılabilir

İki sayılabilir kümenin kartezyen çarpımının sayılabilir olduğu Bölüm 9.3.2'de gösterildi. $\mathbb{Z}$ sayılabilir bir küme olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sayılabilir bir küme olur. [34]'de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesinin sayılabilir olduğu hiçbir açıklama yapılmadan sadece resimsel olarak gösterildi. [34]'de verilen şekil takip edilerek, ω'dan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'ye tanımlı birebir ve örten fonksiyon bu altbölümde verilecek.

Her $n \in \omega$ için
$I_n^- = \{(i, n) : -n < i < n\}$
$I_n^+ = \{(i, -n) : -n < i < n + 1\}$
$J_n^- = \{(-n, i) : -n < i < n\}$
$J_n^+ = \{(n, i) : -(n - 1) < i < n\}$
$K = \{(n, n) : n \in \omega\} \cup \{(n, -n) : n \in \omega\} \cup \{(-n, -n) : n \in \omega\} \cup \{(n + 1, -n)\}$

olarak tanımlansın. Bu kümeler ikişer ikişer ayrık kümeler olup, bileşimleri tam sayılar kümesine eşittir. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ fonksiyonu, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$f(i, n) = (i - 1, n) \ ((i, n) \in I_n^-)$$

$$f(i, -n) = (i - 1, -n) \ ((i, -n) \in J_n^-)$$

$$f(i, -n) = (i + 1, -n) \ ((i, -n) \in I_n^+)$$

$$f(n, i) = (n, i + 1) \ ((n, i) \in J_n^+)$$

$$f(n, n) = (n - 1, n) \ (n \in \mathbb{N})$$

$$f(-n, n) = (-n, n - 1) \ (n \in \mathbb{N})$$

$$f(-n, -n) = (-n + 1, -n) \ (n \in \mathbb{N})$$

$$f(n + 1, -n) = (n + 1, -n + 1) \ (n \in \mathbb{N})$$

eşitliğiyle tanımlansın. f'nin birebir ve örten olduğu kolaylıkla gösterilir. Recursion teoremi kullanılarak $g(0) = (0, 0)$ eşitliğini sağlayan birebir ve örten $g : \omega \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonun her $n \in \omega$ için

$$g(n) = f^n((0, 0))$$

eşitliğini sağlar. Bunun sağlanması, g fonksiyonunu kendimize çok daha yakın hissettirir.

13. Rasyonel Sayı Sistemi

Rasyonel sayıların ateşi bir zamanlar o kadar çok yükseltilmişti ki, rasyonel sayılar tanrı ilan edilmişti; meğerse tanrı değil, sadece kendisiymiş!

Tanrının yarattığı doğal sayılar ve onun kümesinin neyi eksik? Daha doğrusu ne aranıyor ve aranan orada bulunamıyor mu? Doğal sayılar hoş beş, biri diğerine eklenebiliyor, sayılabiliyor, çarpılabiliyor ama gel gör ki biri diğerinden çıkartılamıyor. Örneğin,

$$x + 1 = 0$$

denklemi çözülemiyor. Diğer taraftan, bu sayıların öyle bir duruşu var ki resmen "birimizi diğerimizden çıkartamıyorsan da çıkartabildiğini hayal et" diyerek, kendilerine "öküzün trene baktığı gibi" bakılmamasını öğütlüyor. Sonuçta o hayaller öyle bir gerçekleşti ki aranan bulundu. Yapılaşıp saygıdeğer, yetişkin biri haline geldi. O yapının bir hayal ürünü olduğunu özellikle yeni nesil tahmin bile edemez; sen ve ben kadar gerçekse o da o kadar gerçek işte: O yapı, tam sayılar sistemidir. Resmi de $\mathbb{Z}$ dir.

Yukarı paragrafta iki doğal sayının, doğal sayılar sistemi ω'da çıkartılamıyor olmasının verdiği huzursuzluk, bir üst sistem olan $\mathbb{Z}$'de giderilmişti. ω, bir eksikliği daha içeriyor, iki doğal sayı birbirlerine her zaman bölünemiyor. Örneğin, bu sistemde 1, 2'ye bölünemiyor. Bir elmanın iki elma parçasına ayrılabildiğini görüp de 1'in 2'ye bölünememesini, iki sayı parçasına ayrılamamasını bir eksiklik olarak görmemek mümkün mü? Bu eksiklik $\mathbb{Z}$ sisteminde de devam ediyor. Örneğin, -1, 2'ye bölünemiyor. Bahsedilen bu eksiklikler yine hayal gücüyle, rasyonel sayılar sistemi olarak adlandırılan sistemde giderilecek. Bu sistemin resmi $\mathbb{Q}$[1]. Bu bölümde rasyonel sayılar sistemi farklı biçimlerde inşa edilecek.

[1] Bu sembol İtalyanca'da bölüm anlamına gelen "quoziente" kelimesinin ilk harfinden gelmektedir.

13.1 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ ve $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$'yı Anlamak

$\mathbb{Z}$'de $2 \times a = 1$ olacak biçimde bir denklem yoktur. Yani, $2 \times a = 1$ olacak biçimde bir a tamsayısı yok. Ama bu, $\mathbb{Z}$'nin althalka izomorfik olduğu bir halka F'de $2 \times a = 1$ ifadesinin bir denklem olmayacağı anlamına gelmez; belki de böyle bir F halkası var. Benzer durum $3 \times b = 1$ ifadesi için de geçerlidir. Diğer taraftan, $\mathbb{Z}$'nin althalka izomorfik oldukları F ve G halkaları için, $2 \times x = 1$, F'de ve $3 \times y = 1$, G'de iki denklem ise,

$$2 \times x = 1 \text{ ve } 3 \times y = 1,$$

F ve G'nin althalka izomorfik oldukları bir H halkasında birer denklem olurlar. Bu özellikte bir H halkasının olduğu kolaylıkla gösterilebilir. O halde, H halkasında $x + y$'nin bir anlamı olmalı. Biraz çalışarak,

$$6 \times (x+y) = 6 \times x + 6 \times y = 3 \times 2 \times x + 2 \times 3 \times y = 3 \times 1 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$$

elde edilir. O halde H halkasında $2 \times x = 1$ eşitliğini sağlayan x, $\frac{1}{2}$ ve $3 \times y = 1$ eşitliğini sağlayan y, $\frac{1}{3}$ ile gösterilirse

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

yazılmasına kimse itiraz edemez. Yukarıdaki yaklaşım sonucu olarak,

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

eşitliğine de kimse itiraz edemez.

Alıştırmalar

13.1. $\frac{7}{3} + \frac{2}{5} = \frac{41}{15}$ olabileceğine ilişkin birşeyler söyleyin.

13.2. $\frac{7}{3} + \frac{2}{5} = \frac{41}{15}$ olamayacağına ilişkin birşeyler söyleyin.

13.3. $\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$ olduğunu söyleten nedir?

13.4. "Fizik bir elmayı iki elma parçasına bölebilir ama 1'i 2'ye bölemez. Matematik ise bir elmayı iki elma parçasına bölemez iken 1'i 2'ye bölebilir" ifadesinde anlatılmak istenen ne olabilir?

13.2 Rasyonel Sayılar Cismi

Verilen bir halkanın, bazı özellikleri sağlayan bir altkümesinin her elemanının tersinir olduğu, "en küçük" üst halka tanımlancak. Bunun bir özel sonucu olarak Rasyonel sayılar Cismi tanımlanabilir. Bu cisim tam sayılar halkasını alt halka izomorfik gören "en küçük cisim" olacak.

Bir halkanın bir altkümesinin her elemanının tersinir olduğu bir üst halka aranıyorsa altkümenin aşağıdaki özellikleri sağladığı varsayılabilir:

i. Sıfırı içermez ve birimi içerir.

ii. Hiçbir elemanı sıfır bölen değil.

ii. Çarpımsal kapalı.

R değişmeli ve birimli halka ve $A \subset R$, çarpımsal kapalı, $0 \notin A$, $1 \in A$ ve her elemanı tersinir olsun. Yani, $a \in A$, $b \in R$ için $ab = 0$ ise $b = 0$ olsun. Aranan şey, her $a \in A$ için

$$\overline{a}x = \overline{1}$$

denkleminin çözümü olduğu R'nin bir en küçük üsthalkası. Burada $\overline{r}$, $r \in R$'nin üst halkadaki görüntüsü. Her $a \in A$ elemanını üst halkada $\overline{a}x = \overline{1}$ denklemiyle de temsil edilebilir. 1'i dikkate alarak, bu denklem $(a, 1)$ ikilisini temsil edebilir. Bu denklemde 1 yerine, keyfi $r \in R$ alarak,

$$\overline{a}x = \overline{r}$$

denklemi (a, r) ikilisiyle temsil edilsin. Bu denklemin çözüm kümesi

$$C_{(r,a)} = \{x \in R_A : \overline{a}x = \overline{r}\}$$

boşkümeden farklıdır. Gerçekten

$$\overline{a}^{-1}\overline{r} \in C_{(r,a)}.$$

Bu çözüm kümesi kullanılarak, $R \times A$ kümesi üzerinde

$$(r, a) \equiv (r^{'}, a^{'}) \Longleftrightarrow C_{(r,a)} = C_{(r^{'},a^{'})}$$

ifadesiyle $\equiv$ denklik ilişkisi tanımlanabilir. Yazılanları daha tanıdık hale getirmek için, (r, a) ikilisinin denklik sınıfını $\frac{r}{a}$ ile gösterelim. Yani,

$$\tfrac{r}{a} = [(r, a)]$$

Bu durumda,

$$\tfrac{r}{a} = \tfrac{s}{b} \Longleftrightarrow rb = sa$$

olur. Yukarıdaki yaklaşım kullanarak aranan en küçük üsthalka, aşağıdaki teoremde ifade edilebilir.

Teorem 13.1. *R değişmeli ve birimli halka ve $A \subset R$, çarpma işlemi altında kapalı, 0'ı içermeyen 1'i içeren ve hiçbir elemanı sıfır bölen olmayan altküme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan birimli ve değişmeli halka R_A var.*

i. *R, R_A'ya althalka izomorfik.*

ii. *A'nın her elemanı R_A'da tersinir.*

iii. *R, F'ye althalka izomorfik ve A'nın her elemanı F'de tersinirse R_A, F'ye althalka izomorfik olur.*

Kanıt: Her $r \in R$ ve $a \in A$ için

$$\tfrac{r}{a} = \{(s, b) : s \in R, b \in A, as = br\}$$

olmak üzere,

$$R_A = \{\tfrac{r}{a} : r \in R, a \in A\}$$

kümesini tanımlayalım. R_A,

$$\tfrac{r}{a} + \tfrac{s}{b} = \tfrac{rb+sa}{ab}$$

ve

$$\tfrac{r}{a} \times \tfrac{s}{b} = \tfrac{rs}{ab}$$

ikili işlemlere ve $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$ olmak üzere, $(R_A, +, \times, 0, 1)$ değişmeli ve birimli halka olur. Ayrıca,

$$f : R \to R_A,\ f(r) = \tfrac{r}{1}$$

halka izomorfizma olduğu kolaylıkla gösterilir. $g : R \to F$ bir halka izomorfizma ve her $a \in A$ için $g(a)$, F'de tersinir olsun.

$$h : R_A \to H,\ h(\tfrac{r}{a}) = g(r)g(a)^{-1}$$

fonksiyonunun bir halka izomorfizma olduğu kolaylıkla gösterilir. Böylece R_A aranan özellikte bir halkadır. □

R, sıfır böleni olmayan birimli ve değişmeli halka ise yukarıdaki gösterimler altında, $R_{R\setminus\{0\}}$ bir cisim olur. Özel olarak $\mathbb{Z}$ halkasının sıfır böleni olmadığından, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ bir cisim olur.

Tanım 13.1. Yukarıki teoremde yer alan $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ cismine **rasyonel sayılar cismi** ya da **rasyonel sayılar sistemi** denir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

$\mathbb{Q}$'nın sıfırı genel olarak 0 ya da $0_{\mathbb{Q}}$ ve birimi 1 ya da $1_{\mathbb{Q}}$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\tfrac{r}{a} < \tfrac{s}{b} \Longleftrightarrow 0 < (as - rb)ab$$

sıralamasına göre $(\mathbb{Q}, +, \times, 0, 1, \leq)$ bir sıralı cisim olur. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$'ya sıra althalka izomorfiktir.

Alıştırmalar

13.5. Düzlemde $y = 2x$ doğrusunun grafiğinin $\omega \times (\omega \setminus \{0\})$ kümesiyle arakesitinin $\frac{1}{2}$ olduğunu gösterin.

13.6. Her $x \in \mathbb{Q}$ için $card(x) = card(\omega)$ olduğunu gösterin.

13.7. Doğal sayılar kümesiyle rasyonel sayılar kümesinin arakesitinin boşküme olduğunu gösterin! (Ne! Bizi bu zamana kandırdılar mı?)

13.8. $\mathbb{Q}$'de karesinin ikiye eşit olan rasyonel sayı olmadığını gösterin.

13.9. $\mathbb{Q}$'nın her elemanının sayılabilir sonsuz olduğunu gösterin.

13.10. Sadece ve sadece 2^n ve $\frac{1}{2^n}$ elemanları tersinir olan $\mathbb{Z}$'nin bir üsthalkasının olduğunu gösterin.

13.11. Her rasyonel sayıdan büyük bir tamsayı olduğunu gösterin.

13.12. İki rasyonel sayı arasında kalan bir başka rasyonel sayı olduğunu gösterin.

13.3 Doğal Sayılardan Rasyonel Sayılara

Sayılar sisteminin klasik inşalarında, sırasıyla önce doğal sayı sistemi, sonra tam sayı sistemi ve oradan da rasyonel sayı sistemi inşa edilir. Rasyonel sayı sistemi, tam sayı sistemi atlanarak da inşa edilebilir.

$R = (\omega \setminus \{0\}) \times \omega \times \omega$ kümesinde

$$(m, n, k) \equiv (a, b, c) \iff ak + mb = mc + an$$

olarak tanımlanan $\equiv$, bir denklik ilişkidir. Bu denklik ilişkisine göre $(m, n, k) \in R$ noktasının denklik sınıfını $[m, n, n]$ ile göstermek üzere

$$\mathbb{Q}' = \{[m, n, k] : (m, n, k) \in R\}$$

olarak tanımlansın. $\mathbb{Q}'$'da toplama ve çarpma ikili işlemleri

$$[m, n, k] + [a, b, c] = [ma, na + mb, ak + mc]$$

$$[m, n, k] \times [a, b, c] = [ma, kc + nb, nc + kb]$$

olarak tanımlansın. Ayrıca

$$[m, n, k] < [a, b, c] \iff mb + an < mc + ak$$

sıralama tanımlansın. Yukarıdaki tanımlamalar altında, aşağıdaki teorem verilebilir. Kanıt okura bırakıldı.

Teorem 13.2. *Aşağıdakiler geçerlidir.*

i. $(\mathbb{Q}', +, \times, 0, 1, <)$*, $\mathbb{Q}$'ya sıra halka izomorfik olan sıralı cisim.*

ii. $\mathbb{Z}' = \{[m, n, k] \in R : m = 1\}$*, $\mathbb{Q}'$'nin althalkası ve $\mathbb{Z}$'ye sıra halka izomorfik.*

iii. *$\omega' = \{[m,n,k] \in R : m = 1, n = 0\}$, $\mathbb{Q}'$'nın altyarıgrubu ve ω ile yarıgrup sıra yarıgrup izomorfik olur.*

Yukarıdaki teoremde $\mathbb{Q}'$'nın birimi ve sıfırının

$$1 = [1,0,1]$$

$$0 = [1,0,0]$$

olduğu açık. Toplamaya göre bir elemanın tersinin

$$-[m,n,k] = [m,k,n]$$

olduğu da kolaylıkla gösterilir. Bir elemanın çarpmaya göre tersi, $0 < [m,n,k]$ ise $k > n$ ve dolayısıyla, $k = n + p$ olacak biçimde tek bir tane $p \in \omega$ var. Bu durumda,

$$[m,n,k]^{-1} = [p,0,m]$$

olur. $[m,n,k] < 0$ ise $k < n$ ve dolayısıyla, $n = k + p$ olacak biçimde $p \in \omega$ var. $[m,n,k] < 0$ ise

$$[m,n,k]^{-1} = -[m,k,n]^{-1}$$

olur.

Yukarıda yapılan ayarlamaların arka planındaki fikir, $[m,n,k]$'ya karşılık gelen

$$mx + n = k$$

denklemi ve bu denklemin çözümü olan

$$x = \tfrac{k-n}{m}$$

ifadesidir.

14. Karekök 2 Krizi: Hem Var Hem de Olmayan Sayı

Tanrıyı kim rahmetli etti?

"Yunanistan açıklarında fırtınalı bir gün. Tarih MÖ. 520 civarı. Geminin arka tarafından bir adam açık denize atılıyor ve gemi uzaklaşıyor. Bu adamın adı Hippasus. Suçu mu? Dünyanın en tehlikeli matematiksel oranını keşfetmesi..." Bu, matematik tarihinde yaşanan ilk büyük krizdi.

Milattan önce "sayıların babası" olarak bilinen Pisagor ve ona inanan Pisagorcular evrenin, evrende hiçbir biçimde gözükmeyen tam sayılar ve onların oranları tarafından yaratıldığına ve bunlar dışında bir sayının olmadığına inanıyordu. Yani tanrısı sayılar olan bir dindi inanılan. Bu inanca göre, olmayan ama geometrik bir biçimde olan bir sayının var olduğunu Hippasus keşfetmişti. Bu keşfin bedeli ödül değil Hippasus'un canının alınması oluyordu. Hippasus'un keşfettiği sayı karekök iki olarak bilinen ve $\sqrt{2}$ ile gösterilen sayıdır[1]. Bu sayı bir rasyonel sayı olmasa da bir rasyonel sayının karesidir.

Geometrik olarak bakıldığında, karesi 2 olan bir sayının varlığı dik kenar uzunlukları bir birim olan dik üçgenin varlığı kadar doğal. Bu sayı, o üçgenin dik olmayan kenarının uzunluğu. Pisagorculara göre bütün sayılar rasyonel olduğundan karesi iki olan sayı da rasyoneldir!

Her ne kadar kaynaklarda karekök iki sayısının rasyonel olamayacağının kanıtının ilk olarak Yunan matematikcileri tarafından verildiği yer alıyor olsa da [7], karekök ikinin rasyonel olmadığına ilişkin kanıtın iki Babil geometri tabletinde yer aldığını söylenmektedir.

Karekök iki bir rasyonel sayı olmasa da o sayıya giden rasyonel sayılarla inşa edilen bir yol var. Bu yolun adıdır karekök iki. Bu yol matematik tarihinin en önemli birkaç krizlerinden olan karekök iki krizinin çözümüdür.

[1] $\surd$ sembolü ilk kez 1525'de Christoff Rudolff'in kitabında karekök anlamında kullanmıştır. Descartes 1637'de bu sembole yatay çizgi eklemiştir.

14.1 Karekök 2 Yok

"Bir matematikçi karanlık bir odada, orada bulunmayan bir kara kediyi arayan kör bir insandır" diyen Charles Darwin'e karşı yanıt bir sonraki kısımda.

Daha doğrusu karekök iki rasyonel sayı olamaz. Yani,

$$q^2 = 2$$

olacak biçimde rasyonel sayı yok. Olduğunu varsayalım.

$$q = \frac{m}{n}$$

olacak biçimde aralarında asal m ve n doğal sayıları vardır. Yani, m ve n'yi bölen 1'den büyük doğal sayı olmasın. Bu eşitlikten

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

ve dolayısıyla,

$$m^2 = 2n^2$$

olur. m^2 bir çift sayı ve karesi çift olan sayının kendisi çift olacağından m bir çift sayı ve dolayısıyla,

$$m = 2k$$

olacak biçimde k doğal sayısı vardır. $m^2 = 2n^2$ eşitliğinde $m = 2k$ yazarak

$$4k^2 = 2n^2$$

ve buradan da

$$2k^2 = n^2$$

elde edilir. Benzer nedenlerden n de bir çift sayı olup

$$m = 2p$$

olacak biçimde p doğal sayısı vardır. Elde edilenler 2'nin m ve n'nin ortak böleni olduğunu söyler. Bu çelişki olup, istenileni kanıtlar.

Karesi 2 olan bir rasyonel sayının olamayacağına ilişkin onlarca farklı kanıt olduğu gibi günümüzde de yeni kanıtlar verilmeye devam edilmekte. Son kanıtlardan biri [55]. Diğer farklı kanıtlar [8]'de bulunabilir. Genel olarak bir asal sayının karesi rasyonel sayı olamaz: p, karesi rasyonel olan bir asal sayı olsun. $p^2 = \frac{m}{n}$ olacak biçimde m, n doğal sayıları seçilsin. Euclid algoritması kullanılarak,

$$1 = mx + ny$$

olacak biçimde, aralarında asal m,n doğal sayıları bulunabilir. Buradan

$$\sqrt{p}nx = mx = 1 - ny$$

eşitliği ve buradan da

$$pn^2x^2 = 1 - 2ny + n^2y^2$$

eşitliği elde edilir. Basit bir düzenlemeyle

$$n(pnx^2 + 2y - ny) = 1$$

eşitliğinden $n = 1$ ve dolayısıyla $p = m^2$ olur. Bu, p'nin asal sayı olmasıyla çelişir.

Alıştırmalar

14.1. Yukarıda verilen yaklaşımı kullanarak verilen $m, n \in \mathbb{N}$ için aşağıdakilerin denkliğini gösterin.

i. $\sqrt[m]{n}$ rasyonel sayı. Yani, $q^m = n$ olacak biçimde q rasyonel sayı var.

ii. $n = k^m$ olacak biçimde k doğal sayı k var.

Bunun bir kanıtı [6]'de bulunabilir.

14.2 Karekök 2 Var

Bir matematikçi karanlık bir odada bulunmayan bir kara kediyi bulabilen kör bir insandır.

Yukarıda karekök iki yok derken "şaka" yaptık. Karekök iki var. Bunu göstermek için Pisagor Teoremi'ne ihtiyacımız var.

Teorem 14.1. *Bir dik üçgenin dik kenarlarının karelerinin toplamı diğer kenar uzunluğunun karesine eşittir.*

Bu teoremin kanıtı, MÖ 300 yıllarında yazılmış, 13 kitaptan oluşan *Öklidin Elemanları* (Eucleides' Stoikheia) kitaplarının ilkinin bitiminde, 46. Önermenin sonunda, kuşku kalmayacak şekilde verildi. 1940'da yayınlanan, Elisha Scott Loomis'in *Pisagor Önermeleri* adlı kitabında, farklı kişler tarafından geliştirilen 371 kanıta yer verilmiştir. Aslında, bu Teorem bu kitaptan yüzlerce yıl öncesinden Mısırlılar, Çinliler, Hintliler ve elbette Pisagorcular olmak üzere, herkesçe biliniyordu. Yaklaşık 2500 yıldır herkesin bildiği kanıtı burada tekrar vermek okuyucuya saygısızlık olur.

Pisagor teoremini dik kenar uzunlukları bir birim olan dik üçgene uygulayarak ve diğer kenar uzunluğunu a ile göstererek,

$$2 = 1^2 + 1^2 = a^2$$

elde edilir. O halde dik kenar uzunlukları bir birim olan üçgen varsa karekök iki de var.

Şaka bir yana, görüldüğü gibi ya geometri, ya da Pisagor dini bizi kandırıyor ya da yanılıtıyor. Her ne olursa olsun, bu var yok problemi yine rasyonel sayı sisteminde çözülecek.

14.2.1 Pisagor ve Okulu

İyonya, Antik Çağda İzmir ve Aydın illerinin sahil şeridine verilen addır. Bu bölgede MÖ 1200-745 yılında yaşamış olan uygarlığın da adıdır. MÖ 1200-MÖ100 döneminde bu bölgede yaşayan halka *İyonlar* denir. Matematikçi Tales (MÖ 624-546) ve Pisagor (MÖ 570-495), tarihçi Herodot (MÖ 484-425), tıpçı Hipokrat (MÖ 460-370) İyonya topraklarında doğdular.

Pisagor, antik Efes açıklarında bir Ege adası olan Sisam'da (Kuşadası'nın Dilek Yarımadasına oldukça yakın bir yer) doğan ve MÖ 570-495 yılları arasında yaşamış İyonyalı filozof ve matematikçidir. Pisagor'un ilk yılları oldukça gizemli olup, geleneksel rivayetlere göre Milet'e gitmek üzere Sisam'dan ayrılmış, orada Thales'in öğrencisi olmuştur. Daha sonra Finike'ye giderek MÖ 525 yılına kadar bu ülkede öğrencilik yapmıştır. Cambyses'in ordusunu Babil'e kadar takip etmiş, burada aritmetik, müzik ve diğer zihinsel konularda araştırmalarda bulunmuştur. Takiben, Akdeniz'de bir süre daha seyahat ettikten sonra, Sisam'ın despot biri olan Polykrates tarafından yönetiliyor olması nedeniyle, Sisam'da yaşamak yerine, o sıralar bir Yunan kolonisi olan günümüz İtalya'sının güney sahilinde bulunan Croton'da kentin en zengin adamı ve yöneticisi olan Milo'nun himayesine girdi.

Pisagor'un Croton'da yaşadığı dönemde, Croton, tabiri caizse, "tarikatların cirit attığı", rezille vezirin birbirine karıştığı, farklılıklarını giyimlerine, kuşamlarına, yemeklerine yansıtan topluluklardan oluşuyordu. Pisagor bu durumun etkisinde kalarak bir okul kurmak istedi. Milo Pisagor'un bir okul kurması için yer sağladı ve Pisagor burada "Pisagor Kardeşliği" adında 600 kişilik bir matematik okulu kurdu. Bu okulun üyelerine **Pisagorcular** deniliyordu. Bu okula katılan herkes varlığını ortak bir fona devretmek zorundaydı. Okuldan ayrılacak birine ise verdiğinin iki katı verilir ve adına da bir mezar taşı dikilirdi. Okula başvuru yapan, parlak öğrenciler kabul edilirdi. Okula üye olan her Pisagorcu öğenilen bilgilerin okul dışına çıkartılmaması konusunda ant içmek zorundaydı. Bu kurala uymamanın cezasıysa ölümdü.

Pisagor Kardeşliği evrenin sadece ve sadece sayılarla (tam sayılar ve rasyonel sayılarla) açıklanabileceğine inanıyordu. Bu topluluk kısa sürede, kenar uzunluğu bir birim olan karenin köşegen uzunluğunun, ellerindeki sayılarla ölçülemeyeceğini anladılar. Bu, topluluk için bir şoktu. Bunun tarikat içerisinde bir sır olarak kalması gerekirken, bu sırrı açıklayan Hippasus (bazı rivayetlere göre, bu sonucu bulan Pisagorcu) öldürüldü. Bu, geometri ile aritmetik arasında yaşanan ilk ölümcül kavga olarak da değerlendirilebilir.

Okula başvurusu kabul edilmeyen Kyton adlı bir aday Pisagor'dan intikamını 20 yıl sonra alacaktı: Croton halkı, buluşları hep kendilerine saklayan bu gruptan rahatsız olmasının yanında toprakların seçkin Pisagorculara verileceğinden endişe duyarak ayaklandı. Kyton kitlelerin başına geçti ve okul kuşatıldı. Milo, bu kuşatmadan kaçmasına karşın Pisagor ve birçok öğrencisi öldürüldü. Kimi tarihçilere göre Pisagor da bu kuşatmadan kaçmayı başardı ve Metapontium kentinde 100 yaşına kadar yaşadı.

Okulun dağılması sonrası sağ kalan okul öğrencileri okulun buluşlarını yaymaya başladılar. Bu buluşlardan biri, bugün matematik dünyasının en ünlü teoremi olarak bilinen **Pisagor Teoremi**dir.

Pisagor, okulunda uyguladığı yönetim modelini Croton kenti için de önermişti. Temel yönetim anlayışlarından biri, *Yöneticiler yurttaşların oylarıyla değil, atama yoluyla seçilmelidir.* Pisagor'un yönetim anlayışı, Platon'a esin kaynağı olmuş ve bu, "Devlet" adlı eserinde bahsedilmiştir.

Pisagor'un, okulun öğrencilerinden olan Mila'nın kızı Theano ile evlendiğini de söyleyelim.

14.3 "$\sqrt{2}$ Krizi" ve Krizi Aşma Girişimi

Karesi 2 olan bir rasyonel sayı hayal ediyoruz ama yok. Bu hayali sayı rasyonel sayılar sistemi içerisine uygun bir operasyonla yerleştirilerek, sistemin yapısına ve işlevine herhangi bir zarar vermeden yeni bir sisteme genişletilebilecek.

Bu hayali sayı $\sqrt{2}$ ile gösterilsin. Bu sayının karesinin 2 olması nedeniyle $\mathbb{Q}$'daki sıralama düzenindeki yeri,

$$1^2 < 2 = \sqrt{2}^2 < 4$$

biçiminde olmalı. Bunu yapmakla, hayali sayının karesinin 2 olmasının ötesinde, yerinin 1 ve 2 arasında olması gerektiği, en azından sezgisel olarak, anlaşılıyor. Bu gözlem hayali sayının konumunun daha hassas anlaşılmasının yolunu açar: 1 ve 2 sayılarının orta noktasına x_1 diyelim. x_1 bir rasyonel sayı olduğundan, $\sqrt{2}$'ye eşit olamaz ama $\sqrt{2}$, $(1, x_1)$ ve $(x_1, 2)$ aralıklarından birinin arasında olur. Sonuç olarak, aralığın ne olduğundan bağımsız olarak $|x_1 - \sqrt{2}|$ de bir hayalet olsa da bu hayalet, $\frac{1}{2}$ sayısından küçük olacaktır, yani

$$|x_1 - \sqrt{2}| < \tfrac{1}{2}$$

olur. Benzer yaklaşımı $(1, 2)$ aralığı yerine $\sqrt{2}$'yi içeren aralığa (bu aralık $(1, x_1)$ ya da $(x_1, 2)$) uygulayarak,

$$|x_2 - \sqrt{2}| < \tfrac{1}{2^2} \text{ ve } |x_1 - \sqrt{2}| < \tfrac{1}{2^2}$$

olacak biçimde x_2 rasyonel sayısı elde edilir. Bu yaklaşım devam ettirilerek, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|x_n - \sqrt{2}| < \tfrac{1}{2^n},\ |x_{n+1} - x_n| < \tfrac{1}{2^{n+1}}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir x_n rasyonel sayısı elde edilir ve dolayısıyla, sezgisel olarak, bir rasyonel sayılar (x_n) dizisi var. Elde edilen bu dizinin hayali sayıyla olan içiçeliği rahatsızlık vermiş olabilir. Bu rahatsızlık bir nebze de olsa

$$|x_{n+1}^2 - 2| < \tfrac{1}{2^{n+1}}4$$

eşitsizliğiyle giderilebilir. Böylece elde edilen (x_n) dizisi şu özellikleriyle ele alınabilir:

i. Karesi 2'ye yakınsıyor.

ii. Herhangi bir noktaya yakınsamıyor.

ii. Her $\epsilon > 0$ rasyonel sayısı için

$$n, m \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$$

olacak biçimde n_0 doğal sayısı var.

Bu özellikteki dizi, krizi çözecek. Bu diziye $\sqrt{2}$-Cauchy diyelim. Böylece, aşağıdaki teorem kanıtlanır.

Teorem 14.2. *En az bir $\sqrt{2}$-Cauchy dizisi var.*

Bir yönüyle korku salan o hayali sayıyı tanımlayabiliriz.

Tanım 14.1. $\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : f, \sqrt{2} - \text{dizisi}\}$ kümesine karekök 2 denir.

Karekök iki $\sqrt{2}$ ile gösterilir. **Alıştırmalar**

14.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq f(n) < f(n+1)$ ve $f(n)^2 \leq 2$ koşullarını sağlayan $f \in \sqrt{2}$ olduğunu gösterin.

14.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq f(n+1) < f(n)$ ve $f(n)^2 \geq 2$ koşullarını sağlayan $f \in \sqrt{2}$ olduğunu gösterin.

14.4 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ Cismi

Amacın rasyonel sayılar cismini, karesi 2 olan bir elemanı içeren bir üst cisme genişletmek olduğu sıklıkla vurgulandı. $q \in \mathbb{Q}$ ve $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ verilsin. Her $\epsilon > 0$ için,

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |f(n) - q| < \epsilon$$

olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, f dizisi q'ya **yakınsar** denir. f dizisinin p'ye yakınsaması $f \to p$ ile gösterilir. q'ya yakınsayan dizilerin topluluğu bir kümedir. Bu küme $[q]$ ile gösterilsin. Yani,

$$[q] = \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : f \to p\}.$$

Her $p, q \in \mathbb{Q}$ için $[p] = [q]$ ya da $[p] \cap [q] = \emptyset$ olur. Her $f, g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ için, $f + g, fg \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$,

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n) \text{ ve } (fg)(n) = f(n)g(n)$$

eşitliğiyle tanımlansın.

$$f \to p, g \to q \Longrightarrow f + g \to p + q \text{ ve } fg \to pq$$

olduğu kolaylıkla gösterilir.

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{([p], [q]) : p, q \in \mathbb{Q}\}$$

olmak üzere, bu küme üzerinde $+$ ve $\times$ ikili işlemleri

$$([a], [b]) + ([x], [y]) = ([a + x], [b + x])$$

ve

$$([a], [b]) \times ([x], [y]) = ([ax + 2by], [ay + bx])$$

eşitliğiyle tanımlansın. Ayrıca, $0 = ([0], [0])$ olmak üzere, $0 \leq ([a], [b])$ olması aşağıdaki koşullardan birinin gerçekleşmesi olarak tanımlansın.

i. $0 \leq a, b$,

ii. $a \leq 0 \leq b, a^2 \leq 2b^2$,

iii. $b \leq 0 \leq a, 2b^2 \leq a^2$.

Bu tanımlamanın iyi tanımlı olduğu kolaylıkla gösterilir. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,

$$([a], [b]) \leq ([x], [y]) \Longleftrightarrow ([x - a], [y - b])$$

sıralamasına göre tam sıralı küme olur.

Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere ve sıralamaya göre aşağıdaki teoremin kanıtı kolaylıkla verilir.

Teorem 14.3. $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times, 0, 1, <)$ *tam sıralı bir cisimdir. Ayrıca,*

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ f(r) = ([r], [0])$$

bir halka izomorfizma olur.

Genel olarak,

$$([a], [b]) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

elamanını

$$a + b\sqrt{2}$$

ile olarak göstermek karışıklık yaratmaz. $b \neq 0$ olmak üzere $a + b\sqrt{2}$ elemanın $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$'deki tersi

$$a + b\sqrt{2}^{-1} = \tfrac{a}{a^2-2b^2} + \tfrac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

olur.

Alıştırmalar

14.4. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ cismine benzer biçimde, p asal sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ cismini tanımlayın.

14.5. p ve q iki asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ve $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ cisimlerinin izomorfik olmaları için gerek ve yeter koşulun $p = q$ olması olduğunu gösterin.

-

15. Cantor Reel Sayılar Sistemi

Rasyonel sayılar sistemi çok "güzel sistem" olmasına karşın eksik olan yanı tam olmamasıdır. Yani, üstten sınırlı her altkümenin supremumu olması gerekmez. Örneğin,

$$\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$$

kümesinin supremumu yok. "Bu kümenin supremumunun olmaması neden bir eksiklik olsun, önemi nedir?" diye sorulabilir. Bu sorunun önemi ve yanıtı $\mathbb{Q}$'da

$$x^2 = 2$$

denkleminin çözümünün olmamasına indirgenerek gözlemlenebilir. Yani, bu denklemin çözümü ne kadar önemliyse o supremumunun olması da o kadar önemli. Bu "önemlilik" üzerinden, eksikliğin anlamı kendini daha iyi belli eder. Bu bölümde bahis konusu olan eksiklik kontrollü bir biçimde, yani gereksiz bir büyümeye izin vermeden, "bir üst cisme" çıkılarak giderilecek. Oluşturulacak sistemde, her $0 < r \in \mathbb{Q}$ ve $0 < n \in \omega$ için

$$x^n = a$$

denklemi çözülebilecek. Elbette, inşa edilecek sistemin de eksiklikleri olacak, ama o eksiklikler bu kitabın fazlaca konusu olmayacak.

Tam sıralı cismin en fazla bir tane olabileceği Teorem 10.17'de kanıtlanmıştı. Yani, verilen iki tam sıralı cisim, sıra halka izomorfiktir. Bu bölümde, tam sıralı cismin varlığı kanıtlanacak. Bu varlık birçok farklı yöntemle inşa edilebilir. Bu konuda detaylı bir çalışma [58]'de bulunabilir. Bu kitapta daha çok aşağıda isimleri verilen üç farklı inşa yönteminden bahsedilecek.

i. Cauchy dizileriyle.

ii. Dedekind kesitleriyle.

iii. Eğim fonksiyonlarıyla.

Bu yöntemlerden ilk ikisi oldukça yaygın olarak bilinmekle birlikte sonuncu daha az bilinmektedir. Bu bölümde, Cauchy dizileri yöntemiyle olan inşa verilecek. Diğer bir bölümde, diğer inşa yöntemlerinin bazıları detaylarıyla verilecekken, bazılarından da kısaca bahsedilecektir.

Tam sıralı cismin inşasından hemen sonra, uygulanmasıyla birçok problemin çözülmesinde kolaylık sağlayacak olan Bolzone-Weirstrass Teoremi verilecektir. Bu teoremin uygulanmasıyla birlikte, yakınsama kavramının önemi daha net olarak anlaşılacak ve dolayısıyla süreklilik kavramının yolu açılacaktır. Ancak, bu konu, bu kitabın kapsamında olmayacak.

15.1 Rasyonel Sayı Dizisi

Daha önceki bölümlerde dizi kavramından zaman zaman bahsedilmişti. Tanım kümesi ω olan her fonksiyona dizi denir. Bu bölümde daha çok, rasyonel sayı değerli ya da ilişkili dizilerlen bahsedilerek, onlar üzerinden bazı cebirsel yapılar tanımlanacak.

ω'dan $\mathbb{Q}$'ya tanımlı her fonksiyona **rasyonel sayı değerli dizi** (ya da kısaca dizi) denir. İki dizinin toplamı ve çarpımı noktasal olarak tanımlanır. Yani, f ve g rasyonel değerli iki diziyse, $f+g$ ve fg dizileri

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) \text{ ve } (fg)(n) = f(n)g(n)$$

kuralıyla tanımlanır. Dizilerin kümesi $\mathcal{D}$, tanımlanan bu ikili işlemlere göre bir halka olur. Bu halkanın sıfırı,

$$f(n) = 0$$

kuralıyla tanımlı dizidir. Ayrıca, f dizisinin toplama fonksiyonuna göre tersi

$$(-f)(n) = -f(n)$$

kuralıyla tanımlanan $-f$ dizisidir. Bir $p \in \mathbb{Q}$ için,

$$f(n) = p$$

kuralıyla tanımlı diziye **sabit dizi** denir ve genel olarak (p) ile gösterilir. Rasyonel sayılar halkası,

$$r \to (r)$$

olarak tanımlanan izomorfizmanın varlığı nedeniyle, $\mathcal{D}$'ye althalka izomorfik olur.

Sağlayacağı bazı yarar ve kolaylıklar açısından çoğu zaman dizinin tanım kümesi olarak $\mathbb{N}$ alınır ama bu standart bir durum değildir. Hatta bir $n \in \omega$ için $\omega \setminus \{i \in \omega : 0 \leq i \leq n\})$ alınabilir. f bir dizi ve her n için $f(n) = x_n$ ise f dizisi (x_n) ile gösterilebilir. Bir f dizisi için aşağıdaki standart tanımlamaları yapalım:

i. **Artan dizi**: Her n için $f(n) \leq f(n+1)$. Bu durumda, $f \uparrow$ yazılabilir. Her n için $f(n) < f(n+1)$ olma durumunda, **kesin artan** denir.

ii. **Azalan dizi**: Her n için $f(n+1) \leq f(n)$. Bu durumda $f \downarrow$ yazılabilir. Her n için $f(n+1) < f(n)$ olma durumunda **kesin azalan** denir.

iii. **monoton dizi**: Azalan ya da artan diziye **monoton** dizi denir.

iv. **Altdizi**: $g : \omega \to \omega$ kesin artan dizi ise $f \circ g$ dizisine f'nin altdizisi denir.

v. **Üstten sınırlı**: $f(\omega)$ üstten sınırlı. Yani her $n \in \omega$ için $f(n) \leq k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Q}$ var.

vi. **Alttan sınırlı**: $f(\omega)$ alttan sınırlı. Yani her $n \in \omega$ için $f(n) \geq k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Q}$ var.

vii. **Cauchy dizisi**: Her $\epsilon > 0$ rasyonel sayısı için $\{(n,m) : |x_n - x_m| > \epsilon\}$ kümesi sonlu.

viii. **Yakınsak dizi**: Her $\epsilon > 0$ rasyonel sayısı için $\{n : |x_n - p| > \epsilon\}$ kümesi sonlu olacak biçimde $p \in \mathbb{Q}$ varsa f'ye p noktasına yakınsar denir. Bu durumda $f \to p$ yazılabilir.

Teorem 15.1. *Her dizinin monoton alt dizisi var.*

Kanıt: f, rasyonel değerli dizi olsun. Aşağıdakilerden biri gerçekleşir:

i. Her $n \in \omega$ için $A_n = \{k \in \omega : f(n) \leq f(k)\}$ sonsuz.

ii. Her $n \in \omega$ için $A_n = \{k \in \omega : f(n) \geq f(k)\}$ sonsuz.

iii. En az bir $n, m \in \omega$ için $\{k \in \omega : f(n) \leq f(k)\}$ ve $\{k \in \omega : f(m) \geq f(k)\}$ kümeleri sonlu.

(i)'nin gerçekleşmesi durumunda, f'nin kesin artan altdizisi, (ii)'nin gerçekleşmesi durumunda f'nin kesin azalan dizisi ve (iii)'nin gerçekleşmesi durumunda f'nin sabit altdizisinin varlığı kolayca gösterilebilir. □

Rasyonel Sayılar Cismi Arşimedyan olduğundan, bir $x \in \mathbb{Q}$ elemanı her $\epsilon > 0$ rasyonel sayısı için $|x| < \epsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, $x = 0$ olur. Bu özellik kullanılarak $f \to p$ ve $f \to q$ ise $p = q$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Ayrıca,

$$f \to p \text{ ve } f \to q \text{ ise } f + g \to p + q \text{ ve } fg \to pq$$

olduğu da kolaylıkla gösterilebilir.

Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir ve her Cauchy dizisi sınırlıdır. Ayrıca;

i. Sınırlı diziler halkası $\mathcal{D}$'nin althalkası,

ii. Cauchy diziler halkası sınırlı diziler halkasının althalkası,

iii. Yakınsak diziler halkası Cauchy diziler halkasının althalkası

olur.

$f(n) - g(n) \to 0$ koşulunu sağlayan f ve g dizilerine **denk diziler** denir ve $f \equiv g$ ile gösterilir. $\equiv$ ilişkisi diziler halkasında bir denklik ilişkisidir. Yani, her f, g ve h dizileri için aşağıdakiler sağlanır.

i. $f \equiv g$.

ii. $f \equiv g$ ise $g \equiv f$.

i. $f \equiv g$ ve $g \equiv h$ ise $f \equiv h$.

f dizisine denk olan dizilerin kümesine, bu dizinin denklik sınıfı denir ve $[f]$ ile gösterilir. Yani,

$$[f] = \{g \in \mathcal{D} : f \equiv g\}$$

Dizilerin denklik sınıflarının topluluğu bir kümedir. Bu kümeyi $[\mathcal{D}]$ ile gösterelim. $[\mathcal{D}]$, toplama ve çarpma işlemleri

$$[f+g] = [f] + [g] \text{ ve } [fg] = [f][g]$$

olan bir halkadır. Ayrıca,

$$\mathcal{D} \to [\mathcal{D}],\ f \to [f]$$

bir halka homomorfizma olur.

Yakınsak dizilerin kümesi $\mathcal{C}$ ile gösterilsin. $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$'nin bir althalkası olduğu ifade edilidi.

$$[\mathcal{C}] = \{[f] : f \in \mathcal{C}\}$$

olarak gösterilsin. $[\mathcal{C}]$ hem de çok tanıdık bir cisimdir.

Teorem 15.2. *$\mathbb{Q}$ ve $[\mathcal{C}]$ halkaları halka izomorfik.*

Kanıt: $f(p+q) = f(p) + f(q)$ ve $f(pq) = f(p)f(q)$ olarak tanımlanan $f : \mathbb{Q} \to [\mathcal{C}]$ fonksiyonu halka izomorfizmadır. □

Hani, $\mathbb{Q}$ cismini işimizi görecek kadar bir üstcisme göndereceğimizi söylemiştik ya, onun yerine, yukarıdaki teorem gereği $[\mathcal{C}]$'yi üstcisme genişletmek yeterli olacak.

Alıştırmalar

15.1. Cauchy dizisi olup yakınsamayan dizi örneği verin.

15.2. Sınırlı olup Cauchy dizisi olmayan dizi örneği verin.

15.3. Her dizi $f : \omega \to \mathbb{Q}$ için $\bigcup_{g \in [f]} g(\omega) = \mathbb{Q}$ olduğunu gösterin.

15.4. (**Sonsuzun ayak sesleri**) Alttan sınırlı ve üstten sınırsız bir $f : \omega \to \mathbb{Q}$ için $[f]$ kümesine **sonsuz reel sayı** denilmesine hangi gerekçeyle karşı çıkılabilir?

15.2 Reel Sayılar Sistemi

$\mathbb{Q}$ ve $[\mathcal{C}]$ sıralı cisimlerinin, sıra cisim izomorfik olmasınından elde edilen avantajla, $\mathbb{Q}$ sıralı cismi gerekli büyüklükte bir üst cisme genişleterek, aranan tam sıralı cisim inşa edilmiş olunacak.

Bir Cauchy dizisine denk her dizi bir Cauchy dizisi olur. Yani f ve g, $f(n) - g(n) \to 0$ özelliğinde iki dizi ve bu dizilerden biri Cauchy ise diğeri de Cauchy olur. Cauchy dizilerinin kümesini $\mathcal{R}$ ve elemanları Cauchy dizilerinin denklik sınıfları olan küme $\mathbb{R}$ ile gösterilsin. Yani,

$$\mathbb{R} = \{[f] : f \in \mathcal{R}\}.$$

Tanım 15.1. $\mathbb{R}$'nin her elemanına **reel sayı** denir. $\mathbb{R}$'ye reel sayılar kümesi denir.

$f \in \mathcal{D}$ artan ve üstten sınırlı ise $[f] \in \mathbb{R}$ olur. Benzer biçimde, f alttan sınırlı ve azalan ise $[f] \in \mathbb{R}$ olur.

$\mathbb{R}$ için aşağıdaki gözlemleri yapalım.

i. $f \in \mathcal{R}$ ve g, f'nin bir altdizisi ise $[g] = [f]$ olur.

ii. $f \in \mathcal{R}$ ve $[f] \neq [0]$ ise f, 0'ya yakınsamaz. Dolayısıyla, en az bir $\epsilon > 0$ için,

$$\{n : f(n) > \epsilon\} \text{ ve } \{n : f(n) < -\epsilon\}$$

kümelerinden biri sonsuz, diğeri sonludur. Böylece,

$$(\text{her } n \text{ için } g(n) > \epsilon) \text{ ya da } (\text{her } n \text{ için } g(n) < -\epsilon)$$

olacak biçimde f'nin alt dizisi var. Dolayısıyla, $[f] = [g]$ olacağından, $[f] > [0]$ olmasını

$$\text{“}[f] < [-\epsilon] \text{ ya da } [f] > [\epsilon]\text{”}$$

üzerinden tanımlayan bir sıralamanın ayak izleri oluşur.

iii. $[f] = [g] \in \mathbb{R}$ ise her $n \in \omega$ için

$$f(n) < p < q < g(n)$$

olacak biçimde rasyonel sayı $p, q \in \mathbb{Q}$ yoktur.

iv. $0 \neq [f] \in \mathbb{R}$ elemanının çarpma işlemine göre tersi var: $[0] < [f]$ ((ii) anlamında) olduğunu varsayalım. Ayrıca, her $n \in \omega$ için $0 < p < f(n)$ olacak biçimde $p \in \mathbb{Q}$ olduğunu varsayalbiliriz.

$$g : \omega \to \mathbb{Q},\ g(n) = \tfrac{1}{f(n)}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyonun Cauchy dizisi olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani, $[g] \in \mathbb{R}$ olur. Ayrıca, $[f][g] = [1]$ olduğu açık.

v. $(\mathbb{R}.+, \times, 0, 1, \leq)$ sıralı cisim. Buradaki sıralama,

$$\text{her } n \in \omega \text{ için } f^{'}(n) + \epsilon < g^{'}(n)$$

olacak biçimde $f^{'} \in [f]$, $g^{'} \in [g]$ varsa, $[f] < [g]$ yazarak tanımlanır.

Bundan böyle, $\mathbb{R}$'nin elemanları $[f]$ biçimde değil, geleneklere uygun biçimde x, y, z gibi sembollerle gösterilecek. Benzer biçimde, $p \in \mathbb{Q}$ için bir yanlış anlaşılma olmadığı sürece $[(p)] \in \mathbb{R}$, p ile gösterilebilecek. $\mathbb{Q}$, $\mathcal{R}$'nin althalkası olmasa da althalka izomorfik olduğundan $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ olarak görmemiz bir sorun yaratmayacak. Sorun olabilecek durumlarda konuya tam da olması gerektiği gibi yaklaşılacaktır.

Aşağıdaki teoremin kanıtı $\mathbb{R}$'nin sıralamasından hemen kanıtlanabilir.

Teorem 15.3. *Her* $0 < x \in \mathbb{R}$ *için* $\frac{1}{m} < x < n$ *olacak biçimde* $m, n \in \omega$ *var.*

Teorem 15.4. $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$*'de yoğun. Yani* $x, y \in \mathbb{R}$ *ise* $x < p < y$ *olacak biçimde* $p \in \mathbb{Q}$ *var.*

Kanıt: Önce $0 < x$ olduğunu varsayalım. $y - x > 0$ olduğunda, bir önceki teorem gereği,

$$\tfrac{1}{n} < y - x$$

olacak biçimde n doğal sayısı bulunur. Ayrıca,

$$\{m \in \mathbb{N} : \tfrac{m}{n} < x\}$$

kümesi üstten sınırlı olduğundan m, bu kümenin en büyük elemanı olmak üzere,

$$\tfrac{m}{n} < x < \tfrac{m+1}{n}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$x < \frac{m+1}{n} < y$$

elde edilir. x ve y'nin diğer olası durumları için de istenen eşitsizlik benzer biçimde gösterilebilir. □

Tam sıralı cismin varlığı şimdi verilebilir.

Teorem 15.5. $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, \leq)$ *tam sıralı cisim olur.*

Kanıt: $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, \leq)$ yapısının sıralı cisim olduğu zaten söylendi. Üstten sınırlı her $A \subset \mathbb{R}$ alkümesinin en küçük üst sınırının varlığını göstermek kanıtı tamamlar. $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan üstten sınırlı olsun. A'nın bir üstsınırı doğal sayı k seçilebilir.

$$S = \{q \in \mathbb{Q} : q < k \text{ ve } q < a \text{ olacak biçimde } a \in A \text{ var }\}$$

kümesi tanımlansın. A sayılabilir sonsuz olduğundan, birebir ve örten bir $f : \omega \to S$ fonksiyonu var.

$$g : \omega \to S,\ g(n) = \sup\{f(i) : 0 \leq i \leq n\}$$

olarak tanımlansın. f fonksiyonu kesin artan. Ayrıca, A, $f(\omega)$ ve $g(\omega)$ kümelerinin üst sınır kümeleri eşittir. g artan ve üstten sınırlı olduğundan bir Cauchy dizisi ve dolayısıyla, $x = [g] \in \mathbb{R}$ olur. x'in A kümesinin supremumu olduğu kolaylıkla gösterilir. □

Yukarıda verilen teoremin kanıtı kaynaklarda daha standart biçimde verilir[1]: $A \subset \mathbb{R}$ boş olmayan üstten sınırlı altküme olsun. $f(0) \in A$ ve $g(0) \in \mathbb{R}$, A'nın üstsınırı olsun. $g(0) \in A$ kanıt biter. Değilse

$$\frac{f(0)+g(0)}{2}$$

sayısını ele alalım. Bu sayı A'nın bir üstsınırı değilse,

$$f(1) = \frac{f(0)+g(0)}{2} \text{ ve } g(1) = g(0)$$

ve üstsınırsa,

$$g(1) = \frac{f(0)+g(0)}{2} \text{ ve } f(1) = f(0)$$

olarak tanımlansın. Bu yaklaşımla, her $m, n \in \omega$ için

i. $g(m+1) - f(m+1) = \frac{f(m)-g(m)}{2}$,

ii. A'da $f(m)$'den büyükeşit bir eleman var,

[1] Örneğin, Matematik Dünyası Dergisi, 2007, II

iii. $g(m)$, A'nın bir üst sınırıdır,

iv. Her m, n için $f(m) \leq g(n)$

koşullarını sağlayan artan f dizisi ve azalan g dizisi var. Bu iki dizinin limiti aynı olup, bu limit A'nın en küçük üst sınırı olur.

Böylece tam sıralı cismin varlığı gösterilmiş olundu. Üstelik tek bir tane. O halde bir özel isim almayı haketti.

Tanım 15.2. $(\mathbb{R}, +, \times, 0, 1, \leq)$ tam sıralı cismine **Reel sayılar sistemi** denir.

Tam sıralı cismin önemli özelliklerinden biri Arşimedyan olmasıdır:

Teorem 15.6. $\mathbb{R}$ **Arşimedyan**. *Yani,* $0 \leq x$ *ve her* $0 < y \in \mathbb{R}$ *için* $x \leq y$ *ise* $x = 0$ *olur.*

Kanıt: Olmadığını varsayalım. $0 < x$ olduğundan $0 < x^{-1}$ ve dolayısıyla, $x^{-1} < m$ olacak biçimde $0 < m \in \omega$ elde edilir. Ayrıca, $\frac{1}{m} < x$ olur. Varsayım gereği, her $0 < n \in \omega$ için $x < \frac{1}{n}$ olur. Buradan $\frac{1}{m} < x < \frac{1}{m}$ çelişkisi olur. □

Bunun bir sonucu olarak, $x, y \geq 0$ ve her n için $nx \leq y$ ise $x = 0$ olur.

$\mathbb{Q}$'nın $\mathbb{R}$'de yoğun olduğu Teorem 14.4'de kanıtlandı. Daha fazlası da var.

Teorem 15.7. *Her reel sayı kesin artan bir dizinin görüntü kümesinin supremumudur. Benzer biçimde, kesin azalan bir dizinin görüntü kümesinin infimumudur.*

Kanıt: $x \in \mathbb{R}$ verilsin. $y < x$ olacak biçimde $y \in \mathbb{R}$ seçelim. Elemanları x ve y arasında kalan rasyonel sayıların kümesini Q ile gösterelim. Yani

$$Q = (x, y) \cap \mathbb{Q}$$

olsun. Q sayılabilir kümenin sonlu olmayan bir altkümesi olduğundan, Teorem 9.17 gereği Q sayılabilir sonsuz küme olur. $f : \omega \to Q$ birebir ve örten fonksiyon olsun.

$$g : \omega \to Q,\ g(n) = \sup\{f(i) : 0 \leq i \leq n\}$$

eşitliğiyle tanımlansın. g fonksiyonu kesin artan ve $x = \sup g(\omega)$ olur. Benzer biçimde, teoremin ikinci kısmı kanıtlanır. □

Alıştırmalar

15.5. Reel Sayılar Cismi bölüm halkası olarak da verilebilir. Aşağıdakilerin doğrululeğunu gösterin.

i. $c(\mathbb{Q})$, sıfıra yakınsak diziler, $\mathcal{R}$ sıralı halkasının idealidir.

ii. $\mathcal{R}/c(\mathbb{Q})$ bölüm halkası bir cisimdir. Bu cisim $\mathbb{R}$ cismine eştir.

15.3 $x \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $r \in \mathbb{Q}$ için x^r

Sırasıyla aşağıdaki üstel tanımlamalar daha önceki bölümlerde bir şekilde yapıldı:

i. $u_\omega : \omega \times \omega \to \omega$, $u_\omega(n, m) = n^m$.

ii. $u_\mathbb{Z} : \mathbb{Z} \times \omega \to \mathbb{Z}$, $u_\mathbb{Z}(n, m) = n^m$.

iii. $u_\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $u_\mathbb{Q}(r, n) = r^n$.

Burada $u_\mathbb{Q}$, $u_\mathbb{Z}$'nın ve $u_\mathbb{Z}$, u_ω'nın bir genişlemesidir. Bu altbölümde, $u_\mathbb{Q}$'nin bir genişlemesi olan

iv. $u_{\mathbb{R}^{>0}} : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $u_{\mathbb{R}^{>0}}(x, r) = x^r$

üstel fonksiyonu tanımlanacak. Bu tanımlama sonrası bir sonraki altbölümde, $a > 0$ reel sayısı ve $n \in \omega$ için

$$x^n = a$$

denkleminin $\mathbb{R}^+$'da çözümünün varlığı ve tek olduğu gösterilecek.

$x \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $n \in \mathbb{N}$ verilsin.

$$S = \{a : 0 \leq a \in \mathbb{R} : a^n < x\}$$

olarak tanımlanan küme boşkümeden farklı ve üstten sınırlır. Reel sayılar sisteminin tam olması nedeniyle, S'nin en küçük üst sınırı var. Bunun özel bir adı da var.

Tanım 15.3. $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ve $0 < n \in \mathbb{N}$ verilsin. a'nın $\frac{1}{n}$'inci kuvveti, $n \geq 1$ ise

$$a^{\frac{1}{n}} = \sup\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^n < a\}$$

ve

$$a^{\frac{1}{-n}} = \sup\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^n < \tfrac{1}{a}\}$$

olarak tanımlanır ve gösterilir.

Bu tanımlama gereği, her $0 < a$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$

olur.

$0 < a < b$ iki reel sayı ve $n \in \mathbb{N}$ ise

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^n < a\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^n < b\}$$

olacağından,

$$a^{\frac{1}{n}} \leq b^{\frac{1}{n}}$$

olur. Ayrıca, $1 < a$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $1^n < a$ olacağından,

$$1 \in \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^n < a\}$$

ve dolayısıyla,

$$1 \leq a^{\frac{1}{n}}$$

olur. Benzer biçimde, $a < 1$ için,

$$a^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Son iki eşitsizliğin kullanılmasıyla,

$$1^{\frac{1}{n}} = 1$$

elde edilir.

$0 < a$ reel sayı ve $0 < p \in \mathbb{Q}$ verilsin. $m, m^{'}, n, n^{'} \in \omega$,

$$p = \frac{m}{n} = \frac{m^{'}}{n^{'}}$$

biçiminde olsun. Her $s, t \in\in \mathbb{N}$ için

$$S_{s,t} = \{z : 0 < z \in \mathbb{R}, z^t < a^t\}$$

olmak üzere,

$$S_{n,m} = S_{nm^{'},mm^{'}} = S_{mn^{'},mm^{'}} = S_{n^{'},m^{'}}$$

olmasından,

$$(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{m^{'}})^{\frac{1}{n^{'}}}$$

olur. Bu, bir $0 < p \in \mathbb{Q}$ ve $0 < a$ reel sayı için "a^p" sayısının nasıl olması gerektiğinin sinyalini verir.

Tanım 15.4. $a > 0$ reel sayısı ve $m, n \in \mathbb{N}$ için $p = \frac{m}{n}$ olmak üzere, a'nın **p'ninci kuvveti**

$$a^p = (a^m)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda verilen tanımlama rasyonel sayılar için, $n \in \mathbb{N}$ için

$$a^{-n} = (a^n)^{-1} \text{ ve } a^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{a}^{\frac{1}{p}}$$

olması dikkate alınarak, $m \in \omega$, $n \in \mathbb{N}$ için,

i. $u(m, -n, a) = u(m, n, \frac{1}{a})$

ii. $u(-m, n, a) = u(m, n, \frac{1}{a})$

iii. $u(-m, -n, a) = u(m, n, a)$

olarak tanımlansın. $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ ise

$$u(m, n, a) = u(m', n', a)$$

olur. Bu gözlem sonucu olarak, şu tanımlama yapılabilir.

Tanım 15.5. $0 < a \in \mathbb{R}$ verilsin. $p = \frac{m}{n}$ rasyonel sayısı için a'nın p'ninci kuvveti

$$a^p = u(m, n, a)$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımlama üzerinden, aşağıdaki fonksiyon tanımlanabilir. Teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 15.8. $\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^{>0}$, $(r, p) \to r^p$ *kuralıyla tanımlı fonksiyon birebir ve örten olur. Ayrıca, aşağıdakiler sağlanır.*

i. *Bu fonksiyon*

$$\mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{>0},\ (r, n) \to r^n$$

kuralıyla tanımlı fonksiyonun genişletilmişidir.

Her $0 < x, y \in \mathbb{R}$ *ve* $p, q \in \mathbb{Q}$ *için,*

ii. $1^p = 1$, $x^0 = 1$ *ve* $x^1 = 1$.

iii. $x^{p+q} = x^p x^q$.

iv. $(xy)^p = x^p y^p$.

v. $(x^p)^q = x^{pq}$.

vi. $0 < p$ *ve* $x < y$ *ise* $x^p < y^p$.

vii. $p < 0$ *ve* $x < y$ *ise* $y^p < x^p$.

viii. $p < q$ *ve* $1 < x$ *ise* $x^p < x^q$.

Alıştırmalar

15.6. $\mathbb{R}$'nin boş olmayan ve alttan sınırlı her altkümesinin infimumunun olduğunu gösterin.

15.7. Her $0 < \epsilon < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(1-\epsilon)^n \leq 1 \leq (1+\epsilon)^n$$

olduğunu gözlemleyerek,

$$(1-\epsilon)^{\frac{1}{n}} \leq 1 \leq (1+\epsilon)^{\frac{1}{n}}$$

olduğunu gösterin.

15.8. $1 \leq a \in \mathbb{R}$ ise $(a^{\frac{1}{n}})$ dizisinin azalan ve infimumunun 1 olduğunu gösterin. Ayrıca,

$$\inf a^{\frac{1}{n}} = 1$$

olduğunu gösterin. Benzer biçimde, $0 < a \leq 1$ ise $(a^{\frac{1}{n}})$ dizisinin artan ve

$$\sup a^{\frac{1}{n}} = 1$$

olduğunu gösterin.

15.9. $0 < n < m$ doğalsayıları için

$$m^{-\frac{1}{n}} < n^{-\frac{1}{m}}$$

olduğunu gösterin.

15.4 $x^n = a$ Denkleminin Çözümü

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x^n = a$ denkleminin $\mathbb{R}^+$ çözümü olup, bu çözüm tektir. Bu çözüm $a^{\frac{1}{n}}$ olarak gösterilir. Bunu göstermek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç var.

Teorem 15.9. *$a \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 2$ doğal sayısı verilsin. Aşağıdakiler gerçekleşir. $0 < a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \omega$ verilsin. $a^n < b$ ise $(a+\epsilon)^n < b$ olacak biçimde $\epsilon > 0$ vardır.*

Kanıt: $a^n + K < b$ eşitsizliğini sağlayan $K > 0$ reel sayısı seçilebilir.

$$\epsilon = \min\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{K}{2n(a+1)^{n-1}}\}$$

olsun. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x^n - y^n = (x-y)\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i$$

eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir. Bu eşitlikte $x = a + \epsilon$ ve $y = a$ alınarak

$$(a+\epsilon)^n - a^n \leq \epsilon(n(a+1)^n)$$

ve buradan da

$$(a+\epsilon)^n < a^n + \epsilon n(a+1)^n < a^n + K < b$$

elde edilir. $\square$

Teorem 15.10. *$a \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 2$ doğal sayısı verilsin. Aşağıdakiler gerçekleşir.*

i. *$a \geq 0$ ve n çiftse $x^n = a$ olacak biçimde tek bir tane $x \geq 0$ reel sayı var.*

ii. *$a \in \mathbb{R}$ ve n tekse $x^n = a$ olacak biçimde tek bir tane $b \in \mathbb{R}$var.*

Kanıt: $a = 0$ ise $x = 0$ alınabilir. Dolayısıyla, $a \neq 0$ olduğunu varsayalım.

Ayrıca, $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^n = y^n$ eşitliği sağlansın. Bunlardan birinin sıfır olması durumunda diğerinin sıfır olacağı açık. Diğer durumda,

$$0 = x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + x^{n-(n-1)}y^{n-2} + y^{n-1})$$

eşitliğinde yer alan ikinci çarpan sıfırdan farklı olacağından, birinci çarpan sıfır, yani $x - y = 0$ olur. Dolayısıyla, $x = y$ elde edilir. Yani denklemin çözümü varsa tek olmak zorunda.

Şimdi (i) için çözümün varlığını gösterelim.

$$S = \{r \in \mathbb{R}^+ : r^n < a\}$$

kümesi tanımlansın. S, boş olmayan ve üstten sınırlı. (Neden?)

$$s = \sup S$$

diyelim. Yani $s = a^{\frac{1}{n}}$.

$$s^n = a$$

olduğunu göstermek kanıtı tamamlayacak. $s^n \neq a$ olduğunu varsayalım. $s^n < a$ ise yukarıdaki teorem kullanılarak

$$(s + \epsilon)^n < a$$

olacak biçimde $\epsilon > 0$ var. Dolayısıyla, $s + \epsilon \in S$ olur. Bu, $s = \sup S$ olmasıyla çelişir. Bu durumda, yine varsayım gereği

$$a < s^n$$

olur. Buradan

$$(\tfrac{1}{s})^n < \tfrac{1}{a}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe yukarıdaki teorem uygulanarak,

$$(\tfrac{1+s\epsilon}{s})^n = (\tfrac{1}{s} + \epsilon)^n < \tfrac{1}{a}$$

olacak biçimde $\epsilon > 0$ elde edilir.

$$\tfrac{s}{1+s\epsilon} < s = \sup A$$

olduğundan,

$$\frac{s}{1+s\epsilon} < x < s = \sup A$$

eşitsizliğini sağlayan $x \in S$ vardır. Buradan da

$$a < (\frac{s}{1+s\epsilon})^n < x^n \leq a$$

çelişkisi oluşur.

(ii)'nin kanıtı benzer biçimde verilir. Kanıt tamamlanır. □

15.5 Reel Değerli diziler ve Yakınsaklık

Tanım 15.6. $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $|.|(x)$ yerine $|x|$ yazılarak,

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu fonksiyona **mutlak değer fonksiyonu** denir.

Mutlak değer fonksiyonu her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kolaylıkla gösterilir.

i. $|x| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$

ii. $|x| = |-x|$.

i. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Rasyonel sayı değerli diziler için tanımlanan Cauchy dizi ve yakınsaklık kavramı reel değerli fonksiyonlar için genellenebilir. f, reel değerli dizi olsun. Yani $f : \omega \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Ayrıca, $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için

i. "$n, m \geq n_0 \Longrightarrow |f(n) - f(m)| < \epsilon$" olacak biçimde, $n_0 \in \omega$ varsa f'ye **Cauchy dizisi** denir.

ii. "$n \geq n_0 \Longrightarrow |f(n) - x| < \epsilon$" olacak biçimde $n_0 \in \omega$ varsa f' x noktasına **yakınsıyor** denir. Bu durumda, $f \to x$ yazılır. Burada x'e f'nin **limiti** denir.

$f \to x$ ve $f \to y$ ise $x = y$ olduğu kolaylıkla gösterilir.

Teorem 15.11. *$a \in \mathbb{R}^{>0}$, rasyonel sayı değerli f dizisi ve $r \in \mathbb{Q}$ verilsin. $f \to r$ ise $a^{f(n)} \to a^r$ olur.*

Kanıt: $r = 0$ için kanıtlanacak. Genel durumuysa $f(n) - r \to 0$ olmasından elde edilir. $x^{f(n)} \not\to 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, f'nin her n için

$$\epsilon < |a^{g(n)} - 1|$$

olacak biçimde g altdizisi ve $\epsilon > 0$ var.

$$(\text{Her } n \text{ için } \epsilon < a^{g(n)} - 1) \text{ ya da } (\text{Her } n \text{ için } < a^{g(n)} - 1 < -\epsilon)$$

olduğunu varsayabiliriz. Birinci durumun gerçekleşmesi halinde her n için

$$\epsilon + 1 < a^{g(n)}$$

olur. Buradan

$$(\epsilon + 1)^{\frac{1}{g(n)}} < a$$

olur. Gerekirse g'nin altdizisine geçerek her n için $g(n) < \frac{1}{n}$ olduğu varsayılabilir. Dolayısıyla, her n için

$$n\epsilon \leq (\epsilon + 1)^n < a$$

olur. Bu çelişkidir. Benzer çelişki her n için

$$a^{g(n)} - 1 < -\epsilon$$

olma durumunda da elde edilebilir. Demek ki $a^{r_n} \to 1$ olmak zorunda. Kanıt tamamlanır. $\square$

Bu teorem daha teknik olarak şöyle ifade edilebilir. $a > 0$ reel sayısı verilsin.

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(r) = a^r$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon süreklidir.

Reel değerli Cauchy dizilerinin kümesi $cauchy(\mathbb{R})$ ve reel değerli yakınsak dizilerin kümesin c ile gösterilsin.

$$c \subseteq cauchy(\mathbb{R})$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Ayrıca, Teorem 14.14'de

$$c = cauchy(\mathbb{R})$$

olduğu gösterilecek. c ve $cauchy(\mathbb{R})$, noktasal olarak tanımlanan cebirsel işlemlere göre halka olur.

Alıştırmalar

15.10. f, reel değerli bir dizi ve $f \not\to x$ ise her $n \in \omega$ için $\epsilon < |f(n) - x|$ olacak biçimde f'nin altdizisi ve $\epsilon > 0$ olduğunu gösterin.

15.11. Yakınsak bir altdizisi bulunan her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu gösterin. (Gerçi her Cauchy dizisi yakınsaktır ya!)

15.12. Azalan ve alttan sınırlı her reel dizinin yakınsak olduğunu gösterin. Benzer biçimde, artan ve üstten sınırlı her reel dizinin yakınsak olduğunu gösterin.

15.13. Her $x \in \mathbb{R}^{>0}$ için $x^{\frac{1}{n}} \to 1$ olduğunu gösterin

15.6 Bolzano-Weierstrass Teoremi

Klasik analizin en önemli teoremlerinden biri 1817'de Bolzano tarafından ve bundan 50 yıl sonra Weierstrass tarafından ikinci kez kanıtlanan ve günümüzde Bolzano-Weierstrass Teoremi olarak bilinen teoremdir. Bolzano'nun bu teoremi Ara Değer Teoremi olarak bilinen teoremi kanıtlamak için bir Lemma olarak vermesine karşın, Weierstrass bu teoremin farklı önemli noktalarına işaret ederek, tekrar ve farklı biçimde kanıtlamıştır.

Bolzano-Weierstrass Teoremi kullanılarak her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu gösterilebilecek.

Bolzano-Weirstrass Teoremi değişik ama birbirlerine denk olan ifadelelerle verilebilir. Bu altbölümde, bu teorem ifade edilip farklı kanıtları verilecek. Okur kanıtları takip ederek teoremin arkasındaki fikri kolaylıkla görebilir.

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b$ için $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ kümesi geleneksel olarak $[a, b]$ ile gösterilir. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ biçiminde yazılan altkümeye **sınırlı kapalı aralık** denir. $I = [a, b]$ kümesinin sol eşit aralığı

$$I_0 = [a, \tfrac{b-a}{2}]$$

ve sağ eşit aralığı

$$I_1 = [\tfrac{b-a}{2}, b]$$

olarak tanımlansın ve gösterilsin. I aralığının uzunluğu

$$s(I) = b - a$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 15.12 (Nested Aralık Teoremi)**.** *(I_n) kapalı sınırlı aralıkların bir dizisi ve her n için $I_{n+1} \subseteq I_n$ ise $\bigcap I_n$ boş olmayan bir kümedir. Ayrıca, $s(I_n) \to 0$ ise bu aralık tek elemanlı bir küme olur.*

Bolzano-Weierstrass Teoremi farklı denk biçimlerde ifade edilir. Bunlardan biri şöyle:

Teorem 15.13 (Bolzano-Weierstrass Teoremi)**.** *Sınırlı her dizinin yakınsak bir altdizisi var.*

Kanıt: f, reel değerli sınırlı dizi olsun. Amaç açısından, $f(\omega) \subset [0, 1]$ olduğunu varsayabiliriz. f dizisinin yakınsak altdizisinin, her birisi kolay olarak nitelendirebilecek farklı kanıtları var. Bu kanıtların bazıları aşağıda verilecek.
Birinci kanıt. A kümesi sonluysa en az bir $k \in \omega$ için,

$$N = \{n \in \omega : f(n) = f(k)\}$$

kümesi sonsuz olur. $n_1 \in N$ seçilsin. N sonsuz olduğundan,

$$n_2 = \min N \setminus \{i : 0 \leq i \leq n_1\}$$

kuralıyla $n_2 \in N$ seçilsin. N'de

$$n_1 < ... < n_p$$

olacak biçimde $n_1, ..., n_p \in N$ seçilsin.

$$n_{p+1} = \min N \setminus \{i : 0 \leq i \leq n_p\}$$

yazarak n_{p+1} seçilebilir. Böylece tümevarımla, kesin artan $g : \omega \to N \subseteq \omega$ dizisi tanımlanır. $h = f \circ g$, f'nin bir altdizisi ve her n için $h(n) = f(k)$ olur. A'nın sonsuz olduğunu varsayalım. İki sonlu kümenin bileşimi sonlu olacağından, $A \cap I_0$ ya da $A \cap I_1$ kümelerinden en az biri sonsuz olmak zorunda. $A \cap I_0$ sonsuz ise $J^1 = I_0$ diyelim ve

$$n_1 = \min\{n \in \omega : f(n) \in A \cap J^1\}$$

olarak seçelim. $A \cap I_0$ sonluysa $J^1 = I_1$ diyelim ve $n_1 \in \omega$'yı

$$n_1 = \min\{n \in \omega : f(n) \in A \cap J^1\}$$

olarak tanımlayalım. Sonuç olarak, $J^1 \subset I$ ve $n_1 \in \omega$ seçildi. $s(J^1) = \frac{1}{2}$. Benzer biçimde, $J_0^1 \cap A$ sonsuz ise $J^2 = J_0^1$ diyelim ve

$$n_2 = \min(\{n \in \omega : f(n) \in A \cap J^2\} \setminus \{i : 0 \leq i \leq n_1\})$$

doğal sayısı seçilsin. $J_0^1 \cap A$ sonluysa $J^2 = J_1^1$ diyelim ve

$$n_2 = \min(\{n \in \omega : f(n) \in A \cap J^2\} \setminus \{i : 0 \leq i \leq n_1\})$$

doğal sayısı seçilsin.

$$s(J^2) = \frac{1}{2^2},\ J_2 \subset J_1 \subset I,\ n_1 < n_2$$

olur. Bu yöntem devam ettirilerek, aşağıdaki özellikte (J_n) aralıklar dizisi ve f'nin altdizisi g'nin var olduğu gösterilir.

i. J^1, I kümesinin sol ya da sağ eşit aralığı.

ii. Her $n > 1$ için J^n, J^{n-1} aralığının sol ya da sağ eşit aralığı. Dolayısıyla, $J^n \subseteq J^{n-1}$.

iii. $s(J^n) = \frac{1}{2^n}$.

iv. $f(k) = x_{n_k} \in J^k$.

1. Her n için $J_n = [a(n), b(n)]$ olacak biçimde artan a ve azalan b dizileri var ve her $n, m \in \omega$ için $a(n) \leq b(m)$ olur.

Nested Aralık Teoremi gereği $I_\infty = \bigcap J_n$ tek elemanlı bir kümedir. Bu nokta x ile gösterilsin. Her $a(n) \leq x \leq b(n)$ ve $a \to x$ ve $b \to x$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Ayrıca, her k için $a(k) \leq g(k) \leq b(k)$ olmasından $g \to x$ olur. Kanıt tamamlanır. □

İkinci kanıt. Her $x \in [0,1]$ için $A_x = [0,x] \cap f(\omega)$ diyelim.

$$B = \{x \in [a,b] : A_x \text{ sonlu } \}$$

diyelim. $a \in B$ olduğundan, B boş olmayan bir küme ve üstten sınırlı olduğundan, B'nin supremumu var. $s = \sup B$ diyelim. $a \leq s \leq b$ olduğundan, $s \in B$ $s < 1$ olur. Her $k \in \omega$ için $(s, s + \frac{1}{k}) \cap f(\omega)$ sonsuz olur. ($s < s + \frac{1}{k} < 1$ olduğu varsayılabilir.)

$$n_1 = \min\{n : f(n) \in (s, s + \tfrac{1}{1}) \cap f(\omega)$$

seçilebilir. $f(n_1) \in (s, s + \frac{1}{1})$ olur. $f(n_k) \in (s, s + \frac{1}{k})$ seçilsin ve $n_1 < ... < n_k$ olduğunu varsayalım. $(s, s + \frac{1}{k+1}) \cap f(\omega)$ sonsuz olduğundan

$$n_1 = \min\{n : f(n) \in (s, s + \tfrac{1}{k+1}) \cap f(\omega) \setminus \{i : 0 \leq i \leq n_k\}$$

seçilebilir. Böylece $k \to n_k$ kesin artan fonksiyonu tanımlanır. Ve dolayısıyla, $g(k) = f(n_k)$ kuralıyla f'nin altdizisi g tanımlanır. $g \to s$ olduğu açık. $s = b$ olma durumunda da her k için $(s - \frac{1}{k}, 1] \cap f(\omega)$ kümesi sonsuz olacağından, $g \to s$ olacak biçimde f'nin g altdizisinin varlığı benzer biçimde gösterilir. İkinci kanıt tamamlanır.

Üçüncü kanıt. Sınırlı ve monoton her dizinin limiti var. Teorem 14.1 gereği her dizinin monoton bir altdizisi olduğundan, istenilen hemen elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Bolzano-Weierstrass Teoremi'nin bir denk ifadesi $\mathbb{R}$'nin sınırlı sonsuz her altkümesinin limit noktası olduğunu söyler. Yani, $X \subset \mathbb{R}$ sınırlı ve sonsuz ise her $\epsilon > 0$ için $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap X$ kümesi sonsuz olacak biçimde $x \in \mathbb{R}$ vardır: X kümesinin limit noktasının olmadığını varsayalım. $A \subset X$ boşkümeden farklı olsun. $u = \inf A$ diyelim. $u \in A$ olmak zorunda, diğer türlü u, X'in bir limit noktası ve dolayısıyla, A'nın limit noktası olur ki bu çelişkidir. Benzer biçimde, $v = \sup A$ olmak üzere $v \in A$ olmak zorunda. $\mathbb{R}$'deki doğal sıralamaya ve ters sıralamaya göre X iyi sıralı kümedir. Teorem 9.32 gereği X sonludur. Bu, X kümesinin sonsuz olmasıyla çelişir. Bu kanıt [21]'den alınmıştır.

Reel sayılar sistemi'nin önemli özelliklerinden biri her Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır.

Teorem 15.14. *Reel değerli bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul Cauchy olmasıdır.*

Kanıt: Yakınsak dizinin Cauchy olduğunu atalarımız bile gösterebilirdi. f, reel değerli Cauchy dizisi olsun. Her Cauchy dizisi sınırlı olduğundan, Bolzano-Weierstrass Teoremi gereği, f'nin yakınsak altdizisi g var. g'nin yakınsadığı noktaya f'nin de yakınsadığı kolaylıkla gösterilir. □

15.6.1 Reel Sayılar Kümesi'nin Seçim Fonksiyonu

$f : \omega \to \mathbb{Q}$ bir Cauchy dizisi verilsin. $x = [f]$ diyelim.

$$A_x = \{g \in \mathbb{Q}^\omega : g, \text{ en az bir } h \in x \text{ dizisinin bir altdizisi } \}$$

kümesini tanımlayalım. $A = \cup_{g \in A_x} g(\omega)$ olmak üzere, B_x, A kümesinin üstsınırlarının kümesi olsun. C_x ise, B_x kümesinin altsınırlarının kümesi olsun. B_x sayılabilir sonsuz küme olduğundan, birebir ve örten $f_x : \omega \to B_x$ fonksiyonu var. $h_x : \omega \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu,

$$h_x(n) = \sup\{f_x(i) : 0 \leq i \leq n\}$$

kuralıyla tanımlansın. $h_x \in x$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Ayrıca,

$$\pi : \mathbb{R} \to \bigcup_{x \in \mathbb{R}} x,\ \pi(x) = h_x$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon $\mathbb{R}$'nin seçim fonksiyonudur.

15.7 $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 < x$ için x^y

$0 < x \in \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{Q}$ için x^r reel sayısı tanımlanmıştı. Bu altbölümde, bu kavram $r \in \mathbb{Q}$ yerine $r \in \mathbb{R}$ alınarak genellenebilecek.

Teorem 15.15. *$a \in \mathbb{R}^{>0}$ verilsin. (r_n), $\mathbb{Q}$ Cauchy dizisi ise (a^{r_n}), $\mathbb{R}$ Cauchy dizisi ve yakınsaktır.*

Kanıt: (a^{r_n}) dizisinin Cauchy olmadığını varsayalım. Bu durumda, her $k \in \omega$ için

$$\epsilon < |a^{r_{n_{2k}}} - a^{r_{n_{2k-1}}}|$$

olacak biçimde $(a^{r_{n_{2k}}})$ altdizi ve $\epsilon > 0$ olur. Gerekirse bir altdiziye tekrar geçerek, her k için

$$(\text{Her } k \text{ için } \epsilon < a^{r_{n_{2k}}} - a^{r_{n_{2k-1}}} \text{ ya da } (\text{Her } k \text{ için } < a^{r_{n_{2k}}} - a^{r_{n_{2k-1}}} < -\epsilon)$$

olduğu varsayılabilir. Birinci durumun gerçekleşmesi durumunda

$$\epsilon + a^{r_{n_{2k-1}}} < a^{r_{n_{2k}}}$$

olur. Son eşitsizlik $a^{-r_{n_{2k-1}}}$ ile çarpılarak, $m > 0$, (a^{r_n}) dizisinin bir altsınırı olmak üzere,

$$\epsilon m + 1 \leq \epsilon a^{-r_{n_{2k-1}}} + 1 \leq a^{r_{n_{2k}} - r_{n_{2k}}}$$

elde edilir.

$$r_{n_{2k}} - r_{n_{2k}} \to 0$$

olduğundan,

$$a^{r_{n_{2k}} - r_{n_{2k}}} \to 1$$

ve buradan da

$$\epsilon m + 1 \leq 1$$

çelişkisi oluşur.

$$(\text{Her } k \text{ için} < a^{r_{n_{2k}}} - a^{r_{n_{2k-1}}} < -\epsilon)$$

olması durumunda da aynı çelişki elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Teorem 15.16. *$x \in \mathbb{R}^{>0}$ verilsin. (a_n) ve (b_n) $\mathbb{Q}$ değerli iki denk Cauchy dizisiyse (x^{a_n}) ve(x^{b_n}) Cauchy dizileri aynı noktaya yakınsar.*

Kanıt: Yukarıdaki teorem gereği (x^{a_n}) dizisi $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi ve $\mathbb{R}$ tam olduğundan, bir A noktasına yakınsar. Benzer biçimde, (x^{a_n}) dizisi bir B noktasına yakınsar.$a_n - b_n \to 0$ olduğundan,

$$1 \longleftarrow x^{a_n - b_n} = x^{a_n} x^{-b_n} \to AB^{-1}$$

ve buradan $AB^{-1} = 1$ ve dolayısıyla, $A = B$ elde edilir. Kanıt biter. □

Böylece

$$u_{\mathbb{R}^{>0}} : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0},\ u_{\mathbb{R}^{>0}}(x, [f]) = \lim x^{f(n)}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, bir $r \in \mathbb{Q}$ için

$$x^{[(r)]} = x^r$$

olur.

Teorem 15.17. *Teorem 14.6'da yer alan $(ii) - (viii)$'de $p, q \in \mathbb{Q}$ alınarak elde edilen sonuçlar, $p, q \in \mathbb{R}$ alınarak da elde edilebilir.*

Alıştırmalar

15.14. $p = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ diyelim. p'nin rasyonel ya da irrasyonel sayı olup olmadığı bilinmeksizin, p'yi kullanarak a^b rasyonel olacak şekilde a ve b irrasyonel sayıların olduğunu gösterin.

15.15. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $2^x = 9$ denkleminin çözümü var ve bu çözüm irrasyonel sayıdır.

ii. b, $2^x = 9$ denkleminin çözümü b ve $a = \sqrt{2}$ olmak üzere a^b sayısının rasyonel sayı olduğunu gösterin.

15.8 ∞ ve $-\infty$

Arama sonsuzu uzaklarda
Herşey kendisine sonsuz
Sen sana ait olmadığından
Sana olan sonsuz sensin.

Başlıkta geçen "∞" sembolünün sonsuzu gösterdiğini bilmeyen yoktur. Bir kümenin sonsuz olmasıyla,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

limitinin sonsuz olmasının arasındaki farkı da bilmeyen hemen hemen yoktur. Bir küme için farklı farklı sonsuzluklar sözkonusu ve bu sonsuzluklar farklı sembollerle gösterilmesine karşın, diğer durumun gösterimi için "∞" sembolü kullanılır. Bugün sonsuzluk için kullanılan ∞ sembolünü Romalıların, "çok büyük" bir sayı olması nedeniyle, 1000 sayısını göstermek için kullandığı oluyordu. Bir zamanlar, eşitlik sembolünü göstermek için, Robert Recorde yatay çizgileri, Xylander dikey çizgileri ve Descartes ise sonsuzluk sembolünü kullanıyordu. 1655 yılında John Wallis, *Arithmetica İnfinitorum* adlı eserinde sonsuzluğu belirtmek için ∞ sembolünü kullandı. Bazılarına göre, Wallis, bu sembolü, Yunan alfabesinin son harfi olan ω'dan türetti. Bir diğer görüş ise, bu sembolün Roma rakamlarında 1000 sayısın göstern sembolden evrildiğidir. Bu kullanımın 1713 yılında James Bernoulli'nin Ars Conjectandi adlı eserinde yer almasıyla yerini sağlamlaştırdı.

Bu altbölümün başlığı Genişletilmiş Reel Sayılar Sistemi olması gerekirken, dikkat çekmesi açısından ∞ adı verildi. "Korkunç" olarak algılanan sonsuz, yapılacak tanımlama sonrası daha doğal hale dönüşüp, nerdeyse "sen, ben" gibi yakın biri olacak.

Reel sayılar sistemi'ne ait olmayan ve genellikle ∞ ve $-\infty$ ile gösterilen iki kümenin $\mathbb{R}$'ye eklenmesiyle elde edilen

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

kümeye, üzerinde tanımlanan bazı ikili işlemler ve sıralamaya göre **Genişletilmiş Reel Sayılar Sistemi** denir.

$\mathbb{R}$'de tanımlı ikili işlemler $\mathbb{R}^*$'ye aşağıdaki gibi genişletilebilir.

i. $x + \infty = \infty + x = \infty$,

ii. $x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty$

iii. $0 < x$ ise $x\infty = \infty x = \infty$ ve $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$

iv. $0 > x$ ise $x\infty = \infty x = -\infty$ ve $x(-\infty) = (-\infty)x = \infty$

v. $\infty + \infty = \infty$ ve $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

vi. $\infty\infty = (-\infty)(-\infty) = \infty$ ve $(-\infty)\infty = \infty(-\infty) = -\infty$

olarak tanımlanır. $\mathbb{R}$'de tanımlı sıralama her $x \in \mathbb{R}$ için,

vii. $-\infty < \infty$, $-\infty < x$, $x < \infty$

olarak genişletilir. Aşağıda yapılan tanımlama sonrasında, bu özelliklerin bazıları bir aksiyom olarak değil, bir sonuç olarak verilebilir.

Genel olarak klasik kitaplarda, ∞ ve $-\infty$, $\mathbb{R}$'ye ait olmayan eleman olarak verilmesine karşın, bu elemanlar reel sayıların tanımına uygun bir şekilde tanımlanarak standartlaştırılabilir.

Tanım 15.7. Alttan sınırlı ve üstten sınırsız rasyonel değerli diziler kümesine **reel sonsuz** denir. Reel sonsuz küme ∞ ile gösterilir. Yani,

$$\infty = \{f \in \mathbb{Q}^\omega : f, \text{ alttan sınırlı ve üstten sınırsız}\}.$$

Alttan sınırsız ve üstten sınırlı rasyonel değerli diziler kümesine **reel eksi sonsuz** denir. Reel eksi sonsuz küme $-\infty$ ile gösterilir. Yani,

$$-\infty = \{f \in \mathbb{Q}^\omega : f, \text{ alttan sınırsız ve üstten sınırlı}\}$$

olur.

Aşağıdaki tanımlamada iki dizi arasındaki cebirsel işlemlerin noktasal olarak tanımlandığı ve her $x \in \mathbb{R}$ için $x \subset \mathbb{Q}^\omega$ olduğu dikkate alınarak, her $x \in \mathbb{R}$ için

i. $x + \infty = \{g + h : g \in x, h \in \infty\}$,

ii. $\infty + x = \{g + h : g \in \infty, h \in x\}$,

iii. $x + (-\infty) = \{g + h : g \in x, h \in -\infty\}$,

iv. $-\infty + x = \{g + h : g \in -\infty, h \in x\}$

olarak tanımlanır. Benzer biçimde, $\mathbb{R}$'de tanımlı çarpma işlemi aşağıdaki gibi genişletilir.

v. $x\infty = \{gh : g \in x, h \in \infty\}$,

vi. $\infty x = \{gh : g \in \infty, h \in x\}$,

vii. $x(-\infty) = \{gh : g \in x, h \in -\infty\}$,

viii. $-\infty x = \{gh : g \in -\infty, h \in x\}$

olarak tanımlanır. Ayrıca,

ix. $\infty + \infty = \{f + g : f, g \in \infty\}$ ve $-\infty + (-\infty) = \{f + g : f, g \in -\infty\}$

x. $\infty\infty = \{fg : f, g \in \infty\}$ ve $(-\infty)(-\infty) = \{fg : f, g \in -\infty\}$

olarak tanımlayalım. $x \in \mathbb{R}$ verilsin.

$$x + \infty = \infty + x = \infty \text{ ve } x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty,$$

ve $x > 0$ için

$$x\infty = \infty x = \infty,\ x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty,$$

$x < 0$ için

$$x\infty = \infty x = -\infty,\ x(-\infty) = (-\infty)x = \infty$$

olur.

$$\infty\infty = (-\infty)(-\infty) = \infty,\ \infty - \infty = -\infty\infty = -\infty,$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Özel olarak,

$$0\infty = \infty 0 = 0(-\infty) = (-\infty)0 = 0$$

olarak tanımlanır. Genel olarak, $x + (-\infty)$ yerine $x - \infty$ gösterimi kullanılır. Benzer şekilde, makul gösterimler herhangi bir açıklama yapılmadan da gösterilebilir.

Dikkat edilirse, yukarıda yapılan uygun tanımlamalar üzerinden,

$$\infty + (-\infty) \text{ ve } -\infty + \infty$$

ifadesinin tanımlanması zor!

Alıştırmalar

15.16. $(-\infty) \cap (\infty) = \emptyset$ olduğunu gösterin.

15.17. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x \cap \infty = \emptyset$ ve $x \cap -\infty = \emptyset$ olduğunu gösterin.

15.18. $R = \mathbb{Q}^\omega$'yi noktasal cebirsel işlemler ve noktasal olarak tanımlı sıralamaya göre sıralı halka alalım. ∞ ve $-\infty$

i. $\infty = \{f \in R : f \geq 0\}$,

ii. $-\infty = \{f \in R : f \leq 0\}$

olarak tanımlansaydı, beklenenler karşılanabilir miydi?

15.19. $0 < x$ için x^∞, $x^{-\infty}$ ve ∞^∞, $-\infty^\infty$, $\infty^{-\infty}$, $-\infty^{-\infty}$, ifadelerinin tanımlanmaması nasıl bir eksiklik oluşturabilir? Örneğin, 1^∞, 0^∞ tanımlanmasa ne kaybedilir?

15.9 $\mathbb{R}$ Sayılamaz Sonsuz

Bu altbölümde $\mathbb{R}$'nin sayılamaz sonsuz olduğu gösterilecek.

$A \subset \mathbb{N}$ verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n = A \cap \{1, 2, ..., n\}$$

olmak üzere, verilen bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ s(n) = \textstyle\sum_{k \in A_n} f(k)$$

fonksiyonu tanımlansın. $s(\mathbb{N})$ üstten sınırlıysa her zaman olduğu gibi,

$$\sup s(\mathbb{N}) = \textstyle\sum_{n \in A} f(n)$$

yazılır. Aşağıda verilen teorem ve kanıtında bu ve benzeri gösterimler kullanılacak. Teoremde yer alan χ_A, A'nın karakteristik fonksiyonunu gösterir.

Teorem 15.18. *$card(\wp(\mathbb{N})) \leq card(\mathbb{R})$.*

Kanıt: $\pi : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\pi(\emptyset) = 0$ olmak üzere,

$$\pi(A) = \textstyle\sum_{n \in A} \frac{\chi_A(a)}{10^n}$$

eşitliğiyle tanımlansın. π'nin birebir olduğunu göstermek kanıtı tamamlar. Her $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = A \cap \{1, 2, ..., n\}$ yazalım. Ayrıca, $A_0 = \emptyset$ diyelim. $\pi(A) = \pi(B)$ olsun. $A = B$ olduğu gösterilecek. Bunun için her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = B_n$ olduğunu göstermek yeterli. En az bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \neq B_n$ olduğunu varsayalım.

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} : A_n \neq B_n\}$$

olsun. Bu durumda $A_{k-1} = B_{k-1}$ olur. Dolayısıyla,

$$\pi(A_{k-1}) = \pi(B_{k-1}).$$

$k \in A \setminus B$ ya da $k \in B \setminus A$ olur. $k \in A \setminus B$ olması durumunda,

$$\pi(A) = \pi(A_{k-1}) + \tfrac{1}{10^k} + \pi(A \setminus A_k)$$

$$\pi(B) = \pi(B_{k-1}) + \pi(B \setminus B_k)$$

olur. Bu elde edilenlerin birleşmesiyle,

$$\tfrac{1}{10^k} \leq \tfrac{1}{10^k} + \pi(A \setminus A_k) = \pi(A \setminus B_k) \leq \textstyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9.10^k}$$

elde edilir. Bu, çelişkidir. Benzer çelişki $k \in A \setminus B$ olma durumunda da elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Bu teoremin bir sonucu olarak rasyonel olmayan reel sayılar kümesine bir isim vermek bir zorunluluk oluşturur.

Tanım 15.8. Rasyonel olmayan her reel sayıya **irrasyonel sayı** denir.

İrrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir. Yani $\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ olur. $\mathbb{R}$ sayılamaz sonsusuz ve $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz olduğundan $\mathbb{Q}'$ sayılamaz sonsuz olur.

15.10 Reel Sayıların p-Tabanına Göre Açılım Dizileri

Bir önceki altbölümde,

$$card(\wp(\mathbb{N})) \leq card(\mathbb{R})$$

eşitsizliği kolaylıkla gösterilmişti. Bir sonraki altbölümde, bu eşitsizliğin eşitlikle değiştirilebileceği gösterilecek. Bunun olabileceğine ilişkin ilk sinyal

$$\wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R},\ A \to x = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n) 2^{-n}$$

kuralıyla tanımlı fonksiyondan gelebilir. Ancak, bu fonksiyon örten olmasına karşın, birebir olmayabilir. Diğer taraftan, biraz çabayla, birebirliği bozan elemanların kümesi üzerinde dikkatli çalışıldığında, bu olumsuz durumun amaca ulaşmaya engel olamayacağı anlaşılacaktır.

$x \in (0, 1)$ ve $p \geq 2$ doğal sayısı için

$$x = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) p^{-n}$$

eşitliğini sağlayan en az bir $f : \mathbb{N} \to \omega$ dizinin varlığı gösterilecek. Bu diziye x'in **p-tabanına göre açılım dizisi** denir. Ayrıca, açılım dizisinin en fazla iki tane olduğu da gösterilecek. Açılım dizilerinin terimi 0'dan büyük, eşit ve p'den küçük olur.

Açılım dizileri kendi başına matematikte bir çalışma alanı oluşturmasına karşın, bunun bir uygulaması olarak

$$card(\mathbb{R}) = card(\wp(\omega))$$

olduğu bir sonraki alt bölümde gösterilecek.

Açılım dizilerinin inşa sürecinin temel fikri şöyle:

$$[0, \tfrac{1}{p}),\ [\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}), \ldots,\ [\tfrac{p-1}{p}, \tfrac{p}{p})$$

kümeleri ayrık ve bileşimleri $[0, 1)$ kümesine eşit olduğundan,

$$x \in [\tfrac{k_1}{p}, \tfrac{k_1+1}{p})$$

olacak biçimde $0 \leq k_1 < p$ doğal sayısı vardır ve tektir.

$$0 \leq x - \tfrac{k_1}{p} < \tfrac{1}{p}$$

eşitsizliği de sağlanır. Benzer işlem $[\frac{k_1}{p}, \frac{k_1+1}{p})$ aralığına uygulanarak, yani bu aralık soldan kapalı ve sağdan açık p eşit ayrık aralığa bölünerek,

$$x \in [\tfrac{k_2}{p^2}, \tfrac{k_2+1}{p^2})$$

olacak biçimde $0 \leq k_2 < p$ doğal sayısı elde edilir ve

$$0 \leq x - (\tfrac{k_1}{p} + \tfrac{k_2}{p^2}) \leq \tfrac{1}{p^2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu şelilde devam ederek, her n için

$$0 \leq x - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{p^i} \leq \frac{1}{p^n}$$

eşitsizliğini sağlayan (k_i) dizisi elde edilir. Bu özellikteki dizinin tek olması yanında, diğer önemli belirleyici özelliklerin biri $0 \leq k_i < p$ olmasıdır. Benzer biçimde, x'i içeren

$$(\tfrac{m_1}{p}, \tfrac{m_1+1}{p}]$$

biçimdeki aralıklar üzerinden yapılan işlemlerle (m_n) dizisi de x'in p-tabanına göre açılım dizisi olacak.

Bu yaklaşımla elde edilen dizileri tanımlaştıralım.

Tanım 15.9. $p \geq 2$ doğal sayısı $x \in (0, 1)$ verilsin.

i. (k_n), her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\tfrac{k_n}{p^n} \leq x < \tfrac{k_n+1}{p^n}$$

eşitsizliğini sağlayan dizi olmak üzere,

$$l(x)(1) = k_1 \text{ ve } l(x)(n) = k_{n+1} - pk_n \ (n \geq 2)$$

kuralıyla tanımlı $l(x) : \mathbb{N} \to \omega$ dizisine x**'in** p**-tabanına göre sol açılım dizisi** denir.

i. (m_n), her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\tfrac{m_n}{p^n} < x \leq \tfrac{m_n+1}{p^n}$$

eşitsizliğini sağlayan dizi olmak üzere,

$$r(x)(1) = m_1 \text{ ve } r(x)(n) = m_{n+1} - pm_n \ (n \geq 2)$$

kuralıyla tanımlı $r(x) : \mathbb{N} \to \omega$ dizisine x'in p**-tabanına göre sağ açılım dizisi** denir.

$x \in (0,1)$ elemanının p tabanına göre sağ ve sol açılım dizileri, p tabanına göre açılım dizileri olur. Bu diziler eşit olabilir. Aslında her açılım dizisi bu dizilerden biridir.

Teorem 15.19. *$x \in (0,1)$ ve $p \geq 2$ doğal sayısı verilsin. x'in iki farklı p-tabanına göre açılım dizisinin olması için gerek ve yeter koşul $x = \frac{m}{pn}$ ve $m < p^n$ özelliğinde $m, n \in \mathbb{N}$ doğal sayıların olmasıdır.*

Kanıt: f ve g, x'in iki farklı p tabanına göre açılım dizisi olsun. Varsayım gereği, $\{k \in \mathbb{N} : f(k) \neq g(k)\}$ kümesi boşkümeden farklı. Bu kümenin minimumuna n diyelim. $f(n) \neq g(n)$ olur. $f(n) < g(n)$ olduğunu varsayabiliriz. Her $k < n$ için $f(k) = g(k)$ olması da kullanılarak,

$$\begin{aligned}
0 &= x - x \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} g(n)p^{-k} - \sum_{k=1}^{\infty} f(n)p^{-k} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} (g(k) - f(k))p^{-k} \\
&= p^{-n}(g(n) - f(n)) + p^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}(g(n+k) - f(n+k))p^{-k} \\
&\geq p^{-n} + p^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}(g(n+k) - f(n+k))p^{-k} \\
&= p^{-n} + p^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}(0 - (p-1))p^{-k} \\
&= p^{-n} - p^{-n}(p-1)\sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} \\
&= p^{-n} - p^{-n}(p-1)\frac{1}{p-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten gelecek eşitsizliklerin yanında 4 ve 5. satırları kullanılarak

$$g(n) = f(n) + 1,$$

elde edilir. 5 ve 6. satırlar kullanılarak

$$p^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}(g(n+k) - f(n+k))p^{-k} = p^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}(0 - (p-1))p^{-k}$$

ve buradan da

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty}(g(n+k))p^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty}(f(n+k) - (p-1))p^{-k} \leq 0$$

elde edilir. $0 \leq g(n+k)$ ve $f(n+k) - (p-1) \leq 0$ olması dikkate alınarak, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$g(n+k) = 0 \text{ ve } f(n+k) = p - 1$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$x = \sum_{k=1}^{n} g(k)p^{-n}$$

olup, bu reel sayı mp^{-n} formundadır. Gerektirmenin diğer tarafı kolaylıkla gösterilir. Kanıt tamamlanır. $\square$

Bir $x \in (0,1)$ sayısının p sağ açılım dizisi tektir. Benzer biçimde, p sol açılım dizisi de tektir. Bu gözlem kullanılarak, her $x \in (0,1)$ için $l(x)$, x'in p-sol açılım dizisini ve $r(x)$, x'in p sağ açılım dizisi olmak üzere,

$$l, r : (0,1) \to \{0, 1, ..., p-1\}^{\mathbb{N}}$$

fonksiyonları tanımlanır. Bu fonksiyonlara sırasıyla p sol ve p sağ fonksiyonlar denilebilir. $l \neq r$ olur. Burada, $l(x)$ ve $r(x)$, verilen bir $p \geq 2$ doğal sayısına bağlı olduğuna dikkat edilmeli.

Alıştırmalar

15.20. $x \in (0,1)$, $x = \sum_{i=1}^{m-1} k_i 2^{-i} + 2^{-m}$ olsun. Bu durumda, $p = 2$ için,

$$l(x)(n) = \begin{cases} k_n & ; 1 \leq n \leq m-1 \\ 1 & ; n = m \\ 0 & ; n > m \end{cases}$$

ve

$$r(x)(n) = \begin{cases} k_n & ; 1 \leq n \leq m-1 \\ 0 & ; n = m \\ 1 & ; n > m \end{cases}$$

olduğunu gösterin.

15.21. $p \geq 2$ doğal sayısı verilsin. $D = \{x \in (0,1) : l(x) \neq r(x)\}$ olmak üzere

i. $D = \{x \in (0,1) : \exists m \in \mathbb{N}, x = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{k_i}{2^i} + \frac{1}{2^m}, k_i \in \{0,1\}\}$

ii. $D = \{mp^{-n} : m, n \in \mathbb{N}, m < p^n\}$

olduğunu gösterin.

15.22. $A \subseteq \mathbb{N}$ boşkümeden ve $\mathbb{N}$'den farklı küme $x = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n) 2^{-n}$ diyelim. $0 < x < 1$ olduğu açık. x'in iki farklı 2-açılım dizisinin olması için gerek ve yeter koşulun A'nın sonlu olması gerektiğini gösterin.

15.11 $card(\wp(\omega)) = card(\mathbb{R})$

Altbölüm 14.9'da $card(\wp(\omega)) \leq card(\mathbb{R})$ olduğu gösterilmişti. Bu altbölümde bunların eşit olduğu gösterilecek.

Teorem 15.20. *$f : (0,1) \to \wp(\mathbb{N})$ fonksiyonu, $p = 2$ için,*

$$f(x) = l(x)^{-1}(1)$$

kuralıyla tanımlansın. Aşağıdakiler gerçekleşir.

i. *f birebir.*

ii. *$\wp(\mathbb{N}) \setminus f((0,1))$ kümesi sayılabilir sonsuz.*

Kanıt: *i.* $x, y \in (0,1)$ olmak üzere $f(x) = f(y)$ olsun. buradan $l(x)^{-1}(1) = l(x)^{-1}(1)$ olur. $l(x)(n) = 1$ olması için gerek ve yeter koşulun $l(y)(n) = 1$ olması olduğundan $x = y$ olur. İstenilen gösterilmiş olur.
ii. $g : \wp(\mathbb{N}) \setminus f((0,1)) \to (0,1)$ fonksiyonu

$$g(A) = \sum_n \chi_A(n) 2^{-n}$$

kuralıyla tanımlansın. g fonksiyonu birebirdir. Gerçekten,

$$A, B \in \wp(\mathbb{N}) \setminus f((0,1))$$

verilsin ve $g(A) = g(B)$ olduğunu varsayalım.

$$x = \sum_n \chi_A(n) 2^{-n} = \sum_n \chi_B(n) 2^{-n}$$

olur. Yani, χ_A ve χ_B, x'in 2 tabanına göre açılım dizileridir. $A, B \notin f((0,1))$ olduğundan $\chi_A \neq l(x)$ ve dolayısıyla, $\chi_A = r(x)$ olur. Benzer biçimde, $\chi_B \neq l(y)$ ve dolayısıyla, $\chi_B = r(y)$ elde edilir. $x = y$ olmasından da $\chi_A = \chi_B$ elde edilir. Buradan da $A = B$ olur.

Şimdi, $D = \{x \in (0,1) : l(x) \neq r(x)\}$ olmak üzere $g(\wp(\mathbb{N}) \setminus f((0,1))) = D$ olduğunu gösterelim. $x \in D$ verilsin. $r(x) \neq l(x)$ olur. $A = r(x)^{-1}(1)$ diyelim. $A \in \wp(\mathbb{N}) \setminus f((0,1))$ ve $g(A) = x$ olur.

Kanıt tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki ara teoreme ihtiyaç var.

Teorem 15.21. *A, sayılabilir sonsuz altkümesi olan bir küme ve $f : A \to B$ birebir fonksiyon olsun. $B \setminus f(A)$ en fazla sayılabilir sonsuz küme ise*

$$card(A) = card(B)$$

olur.

Kanıt: S, A'nın sayılabilir sonsuz altkümesi olsun. $S = \{a_1, a_2, ...\}$ diyelim. $C = B \setminus f(A)$ kümesi için iki durum sözkonusu:

Birinci durum: $C = \{b_1, ..., b_n\}$ sonlu: $g : A \to B$ fonksiyonu,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin S \\ b_i & ; x = a_i (1 \leq i \leq n) \\ f(a_i) & ; x = a_{i+n} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlansın. g fonksiyonu birebir ve örten.
İkinci durum: $C = \{b_1, b_2, ...\}$ sayılabilir sonsuz: $g : A \to B$ fonksiyonu, her n için

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin S \\ f(a_n) & ; x = a_{2n+1} \\ b_n & ; x = a_{2n} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlansın. g fonksiyonu birebir ve örten. Sonuç olarak, istenilen gösterilmiş olur.

Şimdi temel sonuçlardan birini verebiliriz.

Teorem 15.22. *$card(\mathbb{R}) = card(\wp(\omega))$.*

Kanıt: Aşağıdakilerin birleştirilmesiyle, istenilen elde edilir.

i. Teorem 14.20 ve 14.21 kullanılarak $card((0,1)) = card(\wp(\mathbb{N}))$.

ii. $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ kuralıyla tanımlı $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyon birebir ve örten olduğundan, $card(\mathbb{R}) = card((-1,1))$.

iii. $card((0,1)) = card((-1,1))$.

iv. $card(\omega) = card(\mathbb{N})$ olmasından $card(\wp(\omega)) = card(\wp(\mathbb{N}))$ olur.

$2 = \{0,1\}$ olduğu üzerinden,

$$\wp(\omega) \to 2^\omega,\ A \to \chi_A$$

kuralıyla tanımlı fonksiyonun birebir ve örten olduğu açık. Dolayısıyla,

$$card(\mathbb{R}) = card(2^\omega)$$

olur. $\pi : 2^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega$ fonksiyonu

$$\pi(f,g)(n) = \begin{cases} f(n) & ; n \text{ tek sayı} \\ g(n) & ; n \text{ çift sayı} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlansın. π'nin birebir ve örten olduğu kolaylıkla gösterilir. Dolayısıyla,

$$card(\mathbb{R}) = card(2^\omega) = card(2^\omega \times 2^\omega) = card(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

elde edilir. Daha genel olarak, aşağıdaki teorem verilebilir. Kanıt tümevarımla kolaylıkla verilebilir.

Teorem 15.23. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $card(\mathbb{R}) = card(\mathbb{R}^n)$ olur.*

16. Dedekind Reel Sayılar Sistemi

Reel sayılar sistemi'nin inşası denilince akla gelen iki klasik yöntemden biri, bir önceki bölümde Cantor tarafından, Cauchy dizisi terimiyle verilen yöntem ve bir diğeri de Dedekind kesitlerle verilen yöntemdir. Richard Dedekind 1858'de yazdığı ve 1872'de yayınlatmış olduğu *continuity and irrational numbers* adlı eserinde [17][1], reel sayılar sisteminin, bugün *Dedekind kesit* olarak adlandırılan terimle bir inşasını vermiştir. Esas olarak [17], reel sayıların inşasını vermeye yönelik değil, irrasyonel sayıların yerini yurdunu belirlemeye yönelik bir çalışmadır. Dedekind'e ait bu yöntemin verilmesinden bugüne yaklaşık 150 yıl geçmesine karşın, bu yöntem hem dün verilmiş gibi tazeliğini korumakta, hem de yıllara dayalı tercübesiyle matematiğe güç ve estetik katmaya devam etmektedir. Dedekind tarafından verilen bu inşa, bu bölümde detaylarıyla verilecek.

16.1 Reel sayıların Dedekind Kesitlerle İnşası

Rasyonel sayılar kümesine tanımlı her Cauchy dizisinin artan bir altdizisi olduğundan, Cauchy dizileri yöntemiyle elde edilen her reel sayı, artan ve üstten sınırlı rasyonel sayı değerli bir dizinin denklik sınıfı olduğunu aklımızda tutarak başlayalım. $f \in \mathbb{Q}^\omega$ dizisi kesin artan ve üstten sınırlı dizi olsun.

$$A_f = \{p \in \mathbb{Q} : p < f(n) \text{ olacak biçimde } \quad n \in \omega \text{ var }\}$$

kümesi tanımlansın. Ayrıca, $g : \omega \to \mathbb{Q}$ dizisi artan, üstten sınırlı ve f'ye denk ise $A_f = A_g$ olur. Böylece

$$\mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q}),\ x = [f] \to A_f$$

fonksiyonu tanımlanabilir. Bu gözlem, A_f kümesi üzerinden, $\mathbb{Q}$'nın aşağıdaki özellikleri sağlayan altkümelerin öneminin sinyalini verebilir. $A = A_f$ yazarak,

i. $A \neq \emptyset$, $A \neq \omega$.

[1] Dedekind'in bu çalışması [16]'te ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

ii. A üstten sınırlı.

iii. A'nın her elemanı $\mathbb{Q} \setminus A$ kümesinin bir altsınırı ve $\mathbb{Q} \setminus A$'nın her elemanı A'nın bir üst sınırı.

iv. Her $p \in A$ ve $q \in \mathbb{Q} \setminus A$ için $p < q$.

koşullarının sağlandığı kolaylıkla gösterilir. Bu koşullar üzerinden, Dedekind kesit kavramı tanımlanır.

Tanım 16.1. $\mathbb{Q}$'nın yukarıda verilen dört koşulu sağlayan her altkümesine bir **Dedekind kesit** denir.

Dedekind kesitlerin kümesi $\mathbb{R}_D$ ile gösterilecek. $\mathbb{R}_D$'nin her elemanına **Dedekind reel sayı** denir[2]. Her rasyonel sayı bir Dedekind reel sayı ile eşleştirilebilir. Gerçekten, her $p \in \mathbb{Q}$ için

$$p_D = \{q \in \mathbb{Q} : q < p\}$$

olmak üzere $\mathbb{Q}$'dan $\mathbb{R}_D$'ye $p \to p_D$ kuralıyla tanımlı fonksiyon birebir olup, bu fonksiyon sıralamayı da korur, yani, $\mathbb{Q}$'da $p < q$ olması için gerek ve yeter koşul $p_D \subset q_D$ olmasıdır.

Alıştırmalar

16.1. $p \in \mathbb{Q}$ verilsin. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $\{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$ kümesi Dedekind kesit.

ii. $\{p \in \mathbb{Q} : p \leq q\}$ Dedekind kesit değil.

16.2. $p \in \mathbb{Q}$ verilsin. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $\{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2\}$ dedekind kesit değil.

ii. $\{p \in \mathbb{Q} : 0 \leq p, p^2 < 2\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$ Dedekind kesit.

16.3. $f : \omega \to \mathbb{Q}$ kesin artan ve üstten sınırlı dizi olsun.

$$D = \bigcup_{n \in \omega} \{p \in \mathbb{Q} : p < f(n)\}$$

kümesinin Dedekind kesit olduğunu gösterin.

16.4. $f : \omega \to \mathbb{Q}$, $f(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n!}$ olarak tanımlansın.

$$e = \cup_{n \in \omega} \{p \in \mathbb{Q} : p < f(n)\}$$

kümesinin Dedekind kesit olduğunu gösterin. Burada kullanılan e sembolü tesadüfen kullanılmadı, bu e, evet o meşhur e!

16.5. π sayısını bir Dedekind kesit olarak tanımlamayın.

16.6. Her Dedekind kesitin sayılabilir sonsuz olduğunu gösterin.

16.7. X ve Y iki Dedekind kesit ve $X \subset Y$ olsun. Her $p \in \mathbb{Q}$ için $X \neq p_D$ ise en az bir $p \in \mathbb{Q}$ için

$$X \subset p_D \subset Y$$

olduğunu gösterin.

---

[2]Dolayısıyla, Dedekind kesitle Dedekind reel sayı aynı.

16.2 $\mathbb{R}_D$ Sıralı Grup

Esas olarak $\mathbb{R}_D$'nin tam sıralı bir cisim olduğu gösterilecek. Öncelikle sıralı grup olduğunu gösterilim.

$A, B \subseteq \mathbb{Q}$ için A ve B'nin noktasal toplamı

$$A + B = \{a + b : a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 16.1. *İki Dedekind kesitin noktasal toplamı bir Dedekind kesit olur.*

Kanıt: A ve B iki Dedekind kesit olsun. $A+B$ kümesinin boş kümeden farklı ve üstten sınırlı olduğu açık. $x \in A+B$ verilsin. $x = a+b$ olacak biçimde $a \in A$, $b \in B$ seçilebilir. A ve B'nin Dedekind kesit olmaları nedeniyle $a < a' \in A$ ve $b < b' \in B$ olacak biçimde a' ve b' elemanları bulunabilir. $x' = a' + b' \in A + B$ olur ve $x < x'$ sağlanır. $x \in A + B$ ve $y \in \mathbb{Q} \setminus (A + B)$ verilsin. $y \leq x$ olduğunu varsayalım. $x = a + b$ olacak biçimde $a \in A$, $b \in B$ elemanlar seçelim. $y - a \leq b$ olacağından $y - a \in B$ olur. Buradan da $y = a + (y - x) \in A + B$ olur ki bu çelişkidir. O halde $x < y$ olur. $A + B$ için Dedekind kesit olma koşullarının sağlanmış olduğu gösterilmiş olunur. □

Her $p \in \mathbb{Q}$ için $\{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$ kümesi p_D ile gösterilmişti. Özel olarak 0_D'ye **sıfır Dedekind kesit** denir.

Teorem 16.2. *Her Dedekind kesit A için*

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : -x - r \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ olacak biçimde } 0 < r \in \mathbb{Q} \text{ var }\}$$

bir Dedekind kesit olur.

Kanıt: B'nin boşkümeden ve rasyonel sayılar kümesinden farklı olduğu açık. $x \in B$, $y \in \mathbb{Q}$ ve $y < x$ olsun. $-x - r \notin B$ olacak biçimde $r > 0$ rasyonel sayı seçelim. $-x - r < -y - r$ olduğundan $-y - x \in B$ olur. Böylece $y \in B$ elde edilir. Yine $x \in B$ verilsin. $-x - r \notin B$ olacak biçimde $r > 0$ rasyonel sayısı seçelim.

$$x < x + \tfrac{r}{2} \text{ ve } -(x + \tfrac{r}{2}) - \tfrac{r}{2} = -x - r \notin B$$

olduğundan $y = x + \frac{r}{2} \in B$ ve $x < y$ sağlanır. Böylece B bir Dedekind kesittir.
□

Teorem 16.3. *Her Dedekind kesitin en az bir başka Dedekind kesitle noktasal toplamı sıfır Dedekind kesitine eşittir.*

Kanıt: A, Dedekind kesit olsun.

$$B = \{-q \in \mathbb{Q} : q > p \text{ olacak biçimde } p \in \mathbb{Q} \setminus A \text{ var } \}$$

diyelim. Okur, B'nin bir önceki teoremin ifadesinde yer alan B'ye eşit olduğunu kolaylıkla gösterebilir. B'nin Dedekind kesit olduğu kolaylıkla gösterilir. $A + B = 0_D$ olduğunu gösterelim. $p \in A$, ve $r \in B$ verilsin. q, $\mathbb{Q} \setminus A$ kümesinin en az bir elemanından büyük rasayonel sayı olmak üzere $r = -q$ yazılabilir. $p - q = p + r \in A + B$ ve $q \notin A$ olur. A'nın Dedekind kesit olması nedeniyle $p < q$ olur. Dolayısıyla, $p + r < 0$, yani $p + r \in 0_D$ olur. Dolayısıyla,

$$A + B \subseteq 0_D$$

olur. $u \in 0_D$ verilsin. $v = -\frac{1}{2}u > 0$ olur. $\mathbb{N}$'nin $\mathbb{Q}$'da Arşimedyan olması ve A'nın en az bir elamanınından küçük ya da eşit olan her rasyonel sayının A'nın bir elemanı olduğu dikkate alınarak

$$nv \in A \text{ ve } (n+1)v \notin A$$

olacak biçimde $0 \leq n$ tamsayısı bulunabilir. $p = -(n+2)v$ olmak üzere $-p > (n+1)v$ olmasından dolayı $p = -(-p) \in B$ olur. Buradan

$$u = nv - nv - 2v = nv + p \in A + B$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$0_D \subseteq A + B$$

olduğu da gösterilmiş olur. Sonuç olarak

$$B + A = A + B = 0_D$$

elde edilir. □

A Dedekind kesiti için $A + B = 0_D$ yapan B kesiti, her şeyiyle vurgulamak ve titiz yazım gereği $-_D A$ ile gösterilebilir. Ancak, bu tür yazım titizliği sıkıcı ve yorucu olabilir. Bu nedenle yazım kolaylığı açısından $-_D A$ yerine $-A$ yazabiliriz[3].

Teorem 16.4. *A ve B Dedekind kesitleri için aşağıdakilerden sadece ve sadece biri gerçekleşir.*

$$A \subset B,\ B \subset A,\ A = B.$$

[3]Daha genel olarak $\{-a : a \in A\}$ kümesi de $-A$ ile gösterilebilir, okur bu durumun farkında olmalı.

Kanıt: . $A \neq B$ olsun. $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olduğunu varsayalım. $a \in A \setminus B$ ve $b \in B \setminus A$ seçelim. $a < b$ ise $a \in B$ ve $b < a$ ise $b \in A$ elde edilir. Bu çelişkidir. Dolayısıyla, $A \neq B$ ise $A \subset B$ ya da $B \subset A$ olur. Kanıt tamamlanır. $\square$

$\mathbb{R}_D$'de

$$A + B = A + B$$

kuralıyla tanımlı cebirsel işlem ve

$$A \leq_D B \iff A = B \text{ ya da } A \subset B$$

kuralıyla tanımlı sıralama bir tam sıralamadır. Yine kolaylık açısından $\leq_D$ yerine $\leq$ yazılabilecek.

Teorem 16.5. $(\mathbb{R}_D, +, 0, \leq)$ *dörtlüsü sıralı değişmeli gruptur.*

p rasyonel sayısına karşılık gelen Dedekind kesit p_D. sadece p ile gösterilebilir. Bu konuda p'nin ne zaman rasyonel sayıyı ne zaman p'ye karşılık gelen Dedekind kesiti temsil ettiğini anlama konusunda okurun yeterli donanımda olduğu varsayılacak. Yani, p rasyonel sayısına karşılık gelen p_D Dedekind kesiti de p ile gösterilebilir. A Dedekind kesitinin toplamaya göre tersi olan Dedekind kesit $-_D A$, $-A$ ile gösterilebilir.

$0 < x \in \mathbb{R}_D$ ise x'e **Dedekind pozitif** denir. Elemanları Dedekind pozitif olan küme $\mathbb{R}_D^{>0}$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\mathbb{R}_D^{+} = \mathbb{R}_D^{>0} \cup \{0\}$$

gösterimi kullanılır.

Teorem 16.6. *Toplama işlemine göre ve doğal sıralamaya göre rasyonel sayılar grubu $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}_A$'nın bir altgrubuna sıra ve grup izomorfiktir.*

Kanıt: $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_D$ fonksiyonu

$$f(p) = \{q \in \mathbb{Q} : q < p\}$$

kuralıyla tanımlansın. f birebir grup homomorfizma ve sıra izomorfizma olduğu kolaylıkla gösterilir. $\square$

Alıştırmalar

16.8. A bir Dedekind kesit ise $(-(\mathbb{Q} \setminus A)) \setminus \{\min(\mathbb{Q} \setminus A)$ kümesinin Dedekind kesit olduğunu gösterin.

16.9. A Dedekind kesit olsun. $\mathbb{Q} \setminus A$ kümesinin minumunun olması için gerek ve yeter koşulun bir $p \in \mathbb{Q}$ için $A = p_D$ biçiminde olması gerektiğini gösterin.

16.3 $\mathbb{R}_D$ Sıralı Halka

$\mathbb{R}_D$'nin bir tam sıralı cisim olduğu gösterilecek. Çarpma işlemi önce $\mathbb{R}_D^+$ elemanları üzerinde tanımlanıp sonra $\mathbb{R}_D$'ya genişletilecek. Gerekli aksiyomların sağlandığı teorem olarak ifade edilecek. Önce mutlak değer fonksiyonu tanımlanacak.

Tanım 16.2. Her $x \in \mathbb{R}_D$ için $|.|(x) = |x|$ olarak gösterilmek üzere,

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

kuralıyla tanımlananan fonksiyona **mutlak değer fonksiyonu** denir.

Her $x \in \mathbb{R}_D$ için

$$|x| = x \cup (-x)$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Her $x \in \mathbb{R}_D$ için $|x| \in \mathbb{R}_D^+$ olur.

Aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 16.7. *A ve B iki pozitif Dedekind kesit ise*

$$\{r : r \leq pq \text{ olacak biçimde } 0 < p \in A, 0 < q \in B \text{ var }\}$$

kümesi bir Dedekind kesittir. Ayıca bu küme $\{q \in \mathbb{Q} : q < 0\} \cup (A \cap \mathbb{Q}^+)(B \cap \mathbb{Q}^+)$ *kümesine eşit olur.*

Teoremde geçen küme $A \times B$ ile gösterilecek. Ancak, gerektiği zaman $A \times_D B$ ile de gösterilebilir. Pozitif Dedekind kesitler için tanımlanan Dedekind çarpım Dedekind mutlak değer fonksiyonu terimiyle aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 16.3. A ve B iki Dedekind kesit olsun.

$$A \times B = \begin{cases} -(A \times |B|) & ; A > 0, B < 0 \\ -(|A| \times B) & ; A < 0, B > 0 \\ |A| \times |B| & ; A < 0, B < 0 \\ 0 & ; A = 0, \text{ya da} B = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan Dedekind kesite, A ve B'nin **Dedekind çarpması** denir.

Teorem 16.8. *Dedekind çarpım değişmelidir. Yani A ve B Dedekind kesitleri için* $A \times B = B \times A$ *olur.*

Ayrıca, her A, B Dedekind kesitleri için

$$A \times (-B) = (-A) \times B = -(A \times B)$$

eşitliği tanımdan hemen elde edilir.

Teorem 16.9. *Dedekind kesit 1_D, Dedekind çarpmaya göre birimdir. Yani her sıfırdan farklı her Dedekind kesit A için $A \times 1 = 1 \times A = A$ olur.*

Kanıt: A Dedekind kesit olsun. Önce $0 < A$ olduğunu varsayalım. $p \in A \times 1_D$ verilsin. $p \leq qr$ olacak biçimde $0 < q \in A$ ve $0 < r \in 1_D$ elemanları seçelim. $r < 1$ olmak zorunda. Dolayısıyla, $qr < q$. Yani, $qr \in A$ ve buradan da $p \in A$ olur. $A \times 1_D \subseteq A$ gösterilmiş olur.

Şimdi $p \in A$ verilsin. $p \leq 0$ olsun. $0 < A$ olduğundan $0 < q \in A$ olacak biçimde q seçebiliriz. $\frac{1}{2} \in 1_D$ ve $p \leq q\frac{1}{2}$ olacağından $p \in A \times 1_D$ olur. $0 < p$ ise $p < q \in A$ olacak biçimde q seçebiliriz. Buradan $\frac{p}{q} < 1$ ve dolayısıyla, $u = \frac{p}{q} \in 1_D$ ve $p = qu \in A \times 1_D$ elde edilir. Böylece $A \subseteq A \times 1_D$ elde edilir. Dolayısıyla, $A \times 1_D = 1_D \times A = A$.

$A < 0$ durumu yukarıdaki gözlem $0 < -A$ için uygulanarak,

$$-(A \times 1_D) = (-A) \times 1_D = 1_D \times (-A) = -(1_D \times A)$$

eşitliğinden istenen elde edilir. □

Dedekind çarpmaya göre sıfırdan farklı her Dedekind kesitin çarpımsal tersinin olduğunu göstermek için aşağıdaki ara teoreme ihtiyaç var. Kanıt okura bırakıldı.

Teorem 16.10. *A pozitif Dedekind kesit ise*

$$B = \{p \in \mathbb{Q} : 0 < p, \exists r \in \mathbb{Q} \setminus A, p > \tfrac{1}{r}\} \cup 0_D \cup \{0\}$$

kümesi bir Dedekind kesit olur.

Teorem 16.11. *Sıfırdan farklı her Dedekind kesitin, Dedekind çarpmaya göre tersi var ve tektir. Yani, A sıfırdan farklı Dedekind kesit ise*

$$A \times B = B \times A = 1_D$$

olacak biçimde tek bir tane $B \in \mathbb{R}_D$ var:

Kanıt: $A > 0$ için kanıt verilirse $A < 0$ olma durumunda $-A > 0$ olacağından $(-A) \times B = B \times (-A) = 1_D$ olacak biçimde B Dedekind kesiti var ve dolayısıyla,

$$A \times (-B) = (-B) \times A = 1_D$$

elde edilirek negatif Dedekind kesit içinde çarpımsal tersinin olduğu gösterilmiş olur. Tek olduğunun gösterilmesi okura bırakıldı.

Böylece $0 < A$ olduğunu varsayabiliriz. B Dedkind kesiti bir önceki teoremin ifadesindeki gibi tanımlansın. $x \in A \times B$ verilsin. $x \leq 0$ ise $x \in 1_D$.

$0 < x$ olsun. $x \leq ab$ olacak biçimde $0 < a \in A$ ve $0 < b \in B$ seçelim. $\frac{1}{b} \notin A$ olur. Böylece $a < \frac{1}{b}$ ve buradan $ab < 1$ ve buradan da $x \in 1_D$ olur. Şimdi $1_D \subseteq AB$ olduğunu gösterelim. $x \in 1_D$ verilsin. $x \leq 0$ ise, A ve B Dedekind kesitlerinin her ikisi de pozitif rasyonel sayı bulundurduklarından $x \in A \times B$ olur. $0 < x < 1$ olma durumunda, her $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ için

$$x < 1 - \tfrac{1}{m+1} = \tfrac{m}{m+1}$$

eşitsizliğini sağlayan $n \in \mathbb{N}$ seçelim.

$$0 < r \in A \text{ ve } 0 < q < \tfrac{r}{n}$$

olacak biçimde rasyonel sayı r ve q seçebiliriz. Ayrıca, $\mathbb{Q}$'nın Arşimedyan olması nedeniyle

$$mq \in A \text{ ve } (m+1)q \notin A$$

olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ seçilebilir. $m \leq n$ olur.

$$\tfrac{x}{mq} < \tfrac{m}{m+1}\tfrac{1}{mq} = \tfrac{1}{(m+1)q}$$

eşitsizliğinden

$$\tfrac{x}{mq} \in B$$

olduğu görülür. Böylece

$$x = (mq)\tfrac{x}{mq} \in A \times B$$

elde edilir. Sonuç olarak $A \times B = 1_D$ olduğu gösterilmiş olur. Tekliğin gösterilmesi okura bırakıldı. □

Her zaman olduğu gibi sıfırdan farklı bir A Dedekind kesitin, Dedekind çarpmaya göre tersi A^{-1} ile gösterilir.

Teorem 16.12. *Dedekind toplama ve çarpmaya göre çarpmanın toplama üzerine dağılımı gerçekleşir. Yani, A, B ve C Dedekind kesitleri için*

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

olur.

Kanıt: Kanıt $A > 0$ için verilirse $A < 0$ olma durumunda $0 < -A$ olma durumu ve her $D \in \mathbb{R}_D$ için

$$-A \times D = -(A \times D) = A \times (-D)$$

eştliği dikkate alınarak yeterli kanıt verilebilir. Dolayısıyla, $A > 0$ alabiliriz. Ayrıca, A,B ve C kümelerinin en az birinin 0_D olması durumunda da istenen açık. $B + C = 0_D$ olduğunda da istenen açık. Dolayısıyla, $A > 0$, $B, C \neq 0_D$ ve $B + C \neq 0$ olduğu varsayabilir. Diğer durumlar için:

1. durum: Önce $0 < B, C$ olduğunu varsayalım. $a \in B \times (B + C)$ verilsin. $a \leq pq$ olacak biçimde $0 < p \in B$ ve $0 < q \in B + C$ seçebiliriz. Ayrıca, $0 < r \in B$ ve $0 < s \in C$ olcak biçimde $q = r + s$ yazılabilir.

$$a \leq pq = p(r + s) = pr + ps \in (A \times B) + (A \times C)$$

olacağından $a \in (A \times B) + (A \times C)$ olur. Böylece

$$A \times (B + C) \subseteq (A \times B) + (A \times C)$$

olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi $a \in A \times B + A \times C$ verilsin. $a \geq 0$ için $a \in A \times (B + C)$ olduğ açık. Diğer durumda

$$a = pr + qs$$

eşitliğini sağlayan $0 < p, q \in x$, $0 < r \in y$ ve $0 < s \in z$ rasyonel sayıları bulabiliriz. p ve q karşılaştırılabilir olduğundan $p \leq q$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda

$$a = pr + qs \leq qr + qs = q(r + s) \in A \times (B + C)$$

eşitsizliğinden $a \in A \times (B + C)$ elde edilir. Böylece

$$A \times B + A \times C \subseteq A \times (B + C).$$

gösterilmiş ve sonuç olarak sıfırdan büyük elemanlar için eşitlik gösterilmiş olur.

2. Durum: $B < 0 < C$ ve $0 < B + C$: Bu durumda

$$C = (B + C) \oplus (-B) > 0_D$$

ve buradan

$$A \times C = A \times (B + C) + (-(A \times B))$$

ve buradan da istenen eşitlik elde edilir.

3. Durum: $B < 0 < C$ ve $B + C < 0_D$: Bu durumda

$$-B = C + (-(B + C))$$

eşitliği kullanılarak istenilen eşitlik elde edilir. □

Aşağıdaki iki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 16.13. *Dedekind kesit A, B ve C için $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ olur.*

Teorem 16.14. *A ve B iki Dedekind kesit olsun. Her Dedekind kesit $C > 0$ için $A \times C < B \times C$ olur.*

Yukarıdaki teoremler kullanılarak bölümün amacı olan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 16.15 (Dedekind-1872)**.** $(\mathbb{R}_D, +, \times, 0, 1, \leq)$ *bir sıralı cisimdir.*

Kanıt: Sıralı cisim olduğu yukarıda parça parça verilen teoremlerle zaten kanıtlandı.

$A \subset \mathbb{R}_D$ altkümesi üstten sınırlı olsun. $r = \cup A$ diyelim. $r \subset \mathbb{Q}$ bir Dedekind kesit olur. A ve her elemanı boşkümeden farklı olduğundan $r \neq \emptyset$ olur. Her $a \in A$ için $a \leq x$ olacak biçimde $x \in \mathbb{R}_D$ seçelim. Yani, $a \subseteq x$ ve dolayısıyla, $r \subseteq x$ olur. Ayrıca,

$$r \subset x + 1,\ q \in x + 1 \text{ ve } q \notin r$$

olacak biçimde q olduğundan $r \neq \omega$ olur. $p < q$ iki rasyonel sayı ve $q \in r$ ise en az bir $a \in r$ için $q \in a$ olur. a'nın bir Dedekind kesit olması nedeniyle $p \in a$ ve dolayısıyla, $q \in r$ elde edilir. $p \in r$ ve $q \notin \mathbb{R}_D \setminus r$ olsun. $p \nleq q$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $q < p$ olur. $p \in a \in r$ olacak biçimde a seçelim. a Dedekind kesit olacağından $q \in a$ ve dolayısıyla, $q \in r$ olur ki, bu çelişkidir. $p \in r$ verilsin. $p \in a \in r$ olacak biçimde $a \in A$ seçelim. a Dedekind kesit olduğundan $p < q \in a$ olacak biçimde q var, Dolayısıyla, $q \in r$ olur. Böylece r, Dedekind kesit olma koşullarını sağlamış olur. Şimdi, A'nın supremumunun r olduğunu gösterelim. x, A'nın bir üst sınırı olsun. Bu durumda her $a \in A$ için $a \leq x$ olacağından $r \subseteq x$ ve dolayısıyla, $r \leq x$ olur. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

16.10. Her $x, y, z \in \mathbb{R}_D$ için aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

i. $|x| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0_D$.

ii. $|x| = |-x|$.

iii. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

16.11. $0 < x \in \mathbb{R}_D$ verilsin.

$$x^{-1} = \{\tfrac{1}{p} : \exists r \in \mathbb{Q} \setminus x, r < p\}$$

olduğunu gösterin.

16.12. $f : \omega \to \mathbb{Q}$ kesin artan, Cauchy ve $f^2 \to 2$ olsun. $r = \bigcup_n f(n)_D$ diyelim. $r \times_D r = 2$ olduğunu gösterin.

16.13. ([53]) $\mathbb{R}_D$'yi sıralı cisim olarak ele alarak aşağıdaki koşulların denk olduklarını gösterin.

i. (**kesit aksiyomu**) Boşkümeden farklı ve bileşimleri $\mathbb{R}_D$ olan A ve B kümeleri her $a \in A$ ve $b \in B$ için $a < b$ koşulunu sağlıyorsa her $a \in A$ ve $b \in B$ için $a \leq c \leq b$ koşulunu sağlayan $c \in \mathbb{R}_D$ var.

ii. (**Tarski aksiyomu**) Boşkümeden farklı $\mathbb{R}_D$'nin A ve B kümeleri her $a \in A$ ve $b \in B$ için $a < b$ koşulunu sağlıyorsa her $a \in A$ ve $b \in B$ için $a \leq c \leq b$ koşulunu sağlayan $c \in \mathbb{R}_D$ var.

iii. $\mathbb{R}_D$'nin boşkümeden farklı ve üstten sınırlı her altkümesinin supremumum var.

16.14. A Dedekind kesit olsun. Her $\epsilon > 0$ rasyonel sayı için $b - a < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan $a \in A$, $b \in \mathbb{Q} \setminus A$ olacak biçimde a ve b rasyonel sayılarının olduğunu gösterin.

17. A'campo Reel sayılar Sistemi

Reel sayılar sistemi Cauchy dizileriyle ve Dedekind kesit kavramıyla, rasyonel sayı sistemi üzerinden verildi. Bu inşalar yaklaşık yüzelli yıldır biliniyor. Bu altbölümde oldukca taze bir başka inşadan bahsedilecek; bu inşanın diğerlerinden temel farkı, rasyonel sayı sistemini atlayarak doğrudan tam sayıların toplama grubu üzerinden inşa edilmesidir. Bu yaklaşımın arkasındaki temel fikrin neler olabileceğine ilişkin iki temel makale, Street [50] ve A'Cambo [1] olup, bu makaleler incelenerek yaklaşımın izleri ve gelişmeleri takipedilebilir. [50]'e göre bu yaklaşım, esas olarak Steve Schanuel'in yayınlanmamış ama paylaşılmış fikirlerinden temellenmektedir. Yine, [50]'de Peter Johnstone'nın bu yaklaşımının Richard Lewiss tarafından da önerildiği ifade edilmekte. [1]'de [50]'ye referans verilmemiş olması, bu makalelerin aynı yaklaşımları bağımsız olarak verdiğinin belirtisi olmalı. [1]'de verilen yaklaşımın temel kaynağının Henri Poincare'nin [44] makalesinden geldigi ifade edilmekte. Bu altbölümde [18] ve [2]'dan detaylıca yararlanılmıştır.

17.1 Eğim ve $\mathbb{R}_A$

Tam sayılar halkasından kendine tanımlı fonksiyonların kümesi $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, noktasal cebirsel ve noktasal sıralamaya göre sıralı halka olarak ele alınacak. Her $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ için

$$A(f) = \{f(n+m) - f(n) - f(m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

ve

$$a(f) = \sup(\{|x| : x \in A(f)\} \cup \{1\})$$

gösterimi kullanılacak.

Tanım 17.1. $A(f)$ kümesi sonlu olan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyona **eğim** denir. [1].

Elbette Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunun bir eğim olması için gerek ve yeter koşul, her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$|f(n+m) - f(n) - f(m)| \leq s$$

eşitsizliğini sağlayan $s \in \mathbb{N}$ olmasıdır. Eğimlerin kümesi $\mathcal{A}$ ile gösterilecek. Aşağıdaki teoremin kanıtı açık.

Teorem 17.1. *$\mathcal{A}$, toplmaya göre $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ grubunun bir altgrubudur.*

Eğimlerin kümesini tam sıralı cisim yapısına evriltmek için $\mathcal{A}$'da bir denklik ililşkisi tanımlamak gerekecek.

Teorem 17.2. *$\mathcal{A}$'da*

$$f \equiv g \Longleftrightarrow (f-g)(\mathbb{Z}) \text{ sonlu}$$

olarak tanımlanan $\equiv$ bir denklik bağıntıdır.

$f, g \in \mathcal{A}$ olmak üzere $f \equiv g$ ise f ve g **denk eğimler** denir ve $f \equiv g$ ile gösterilir. $f \in \mathcal{A}$'ya denk olan eğimlerin kümesi, yani f'nin denklik sınıfı genelde olduğu gibi $[f]$ ile gösterilecek. Ayrıca, elemanları sadece ve sadece eğimlerin denklik sınıflarından oluşan küme $\mathbb{R}_A$ ile gösterilecek. Yani,

$$\mathbb{R}_A = \{[f] : f \in \mathcal{A}\}.$$

$x \in \mathbb{R}_A$ için, $x = [f]$ ise, f'ye x'in **temsili** denir. $\mathbb{R}_A$'nın elemanlarına daha bir özel isim verilmeli. (Neden?)

Tanım 17.2. $\mathbb{R}_A$'nin her elemanına **A'campo reel sayı** denir[2].

Bu bölümün amacı uygun cebirsel işlemler ve sıralama altında $\mathbb{R}_A$'nin tam sıralı cisim olduğunu göstermek. Bunun için uygun bir toplama işlemi,

$$\mathbb{R}_A \times \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}_A,\ ([f],[g]) \to [f]+[g] = [f+g]$$

kuralıyla tanımlanan fonksiyon olacak.

Teorem 17.3. *Yukarıda tanımlanan toplama işlemine göre $\mathbb{R}_A$, değişmeli bir gruptur.*

---

[1] Bu tanım ingilizce "slope" olarak [1]'de verildi. [18]'de "quasi-homomorfism" olarak isimlendiriliyor. Bazı makalelerde "almost homomorfizm" ya da "near homomorfism" olarak adlandırılmakta. Bu kavram [1] üzerinden yaygınlaşmaya başlamış olduğundan [1]'de kullanılan terminoloji takip edilmiştir.

[2] Bu isimlendirme konusunda Street[50] makalesi dikkate alındığında bir tedirginlik yaşıyorum. Bu isimlendirmenin **Street-A'campo reel sayı** olması daha doğru olabilir!

Bu grup, grup teorisi terminolojisinde bir $\mathcal{A}$'nın bir bölüm grubudur. Elbette bu grubun sıfırı sabit, sıfır eğiminin denklik sınıfıdır.

Alıştırmalar

17.1. $f(\mathbb{Z})$ sonlu olan her $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonun eğim olduğunu gösterin. Bu fonksiyonun denklik sınıfına çok özel bir isim verilecek, tahmin edin!

17.2. $a, b \in \mathbb{Z}$ verilsin. $f_{a,b}(n) = an + b$ kuralıyla tanımlı $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunun bir eğim olduğunu gösterin. $f_{1,0}$ fonksiyonunun denklik sınıfına da özel bir isim verilecek, sizi biraz meraklandıracağım.

17.3. Her eğim f için $-f(0) \in A(f)$ olduğunu gösterin.

17.4. $f(n) = n^2$ kuralıyla tanımlı fonksiyonun eğim olmadığını gösterin.

17.5. İki eğimin noktasal çarpımının eğim olması gerekmediğine ilişkin örnek verin.

17.6. $f(n) = |n|$ kuralıyla tanımlı $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonun eğim olmadığını gösterin.

17.7. a ve b tam sayılar olmak üzere $f(n) = n^2 + an + b$ kuralıyla tanımlı fonksiyonun eğim olmadığını gösterin.

17.8. f bir eğim olsun. Verilen her $n_1, n_2, ..., n_k$ tamsayıları için

$$f(\sum_{i=1}^{k} n_i) = \sum_{i=1}^{k} f(n_i) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

eşitliğini sağlayan δ_i tamsayıların olduğunu gösterin.

17.9. f bir eğim olsun. Her $n, k \in \mathbb{Z}$ ve $k > 0$ için

$$|f(n+k) - f(n)| \le k(|f(1)| + a(f))$$

olduğunu gösterin.

17.10. f bir eğim olsun. $|f(a)| > a(f)$ ise her $n, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ için

$$|f(n+ka) - f(n)| \ge k$$

olduğunu gösterin. Ayrıca, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|f(ka) - f(0)| \ge k$$

olduğunu gösterin.

17.11. f bir eğim ve $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu verilsin. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $|f(n) - g(n)| \le k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ varsa g'nin bir eğim olduğunu gösterin.

17.2 Tek Eğim

A'campo reel sayılardan oluşan yapıyı anlamak için denklik üzerinden eğimleri daha rafine ederek anlamak kolay olabilir. Bunlardan ilki:

Tanım 17.3. Her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = -f(-x)$ eştliğini sağlayan f eğimine tek eğim denir.

Teorem 17.4. *Her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = -f(-x)$ eşitliğini sağlayan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.*

i. *f bir tek eğim.*

ii. *$\{f(n+m) - f(n) - f(m) : n, m \in \omega\}$ kümesi sonlu.*

Her eğimin bir eğime denk olması rahatlama sağlatacak.

Teorem 17.5. *Her eğim bir tek eğime denk olur.*

Kanıt: f bir eğim olsun.

$$g(n) = \begin{cases} f(n) & ; n > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -f(-n) & ; n < 0 \end{cases}$$

kuralıyla tanımlı fonksiyon tek eğim olup, f'ye denk olduğu kolaylıkla gösterilir. □

Böylece $\mathbb{R}_A = \{[f] : f \text{ tek ve eğim}\}$ olur.

Teorem 17.6. *Bir eğimin görüntü kümesinin sonsuz olması için gerek ve yeter koşul doğal sayılar kümesinin görüntü kümesinin sonlu olmasıdır.*

Kanıt: f eğim olsun. f tek ise istenen açık. Değilse $f \equiv g$ olacak biçimde tek eğim g seçelim. $f(\omega)$ kümesi sonlu olsun. Bu durumda $g(\omega)$ sonlu ve dolayısıyla, $g(\mathbb{Z})$ kümesi sonludur. $f(\mathbb{Z}) \subset g(\mathbb{Z}) + A$ olacak biçimde sonlu $A \subset \mathbb{Z}$ kümesi bulunabileceğinden $f(\mathbb{Z})$ sonlu olur. □

Alıştırmalar

17.12. Elemanları tek eğim olan kümenin, $\mathcal{A}$'nın bir altgrubu olduğunu gösterin.

17.13. ($\mathbb{R}_A$ **grubunun sıfırı**) Tamsayılar kümesinden kendisine tanımlı görüntü kümesi sonlu olan her fonksiyon bir eğim, yani, $f(\mathbb{Z})$ sonlu olan her $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonun bir eğim ve bu tür fonksiyonların birbirlerine denk olduklarını gösterin. Ayrıca, $0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sıfır sabit fonksiyonunu göstermek üzere,

$$0_{\mathbb{R}_A} = [0] = \{f \in \mathcal{R} : f(\mathbb{Z}) \text{ sonlu } \}$$

olduğunu gösterin.

17.3 İki Eğimin Bileşkesi

İki eğimin noktasal çarpımının bir eğim olması gerekmeyeceğinden $\mathcal{R}$, noktasal çarpma işlemine göre bir halka olamaz. Ama sorun, çarpma işlemi, eğimlerin bileşkesi olarak tanımlanarak giderilebilicek.

Teorem 17.7. *İki eğimin bileşkesi bir eğim olur. Ayrıca, iki tek eğimin bileşkesi tek eğim olur.*

Kanıt: f ve g eğimleri verilsin. Verilen $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$f \circ g(n) + f \circ g(m) = f(g(n)) + f(g(m)) + u,$$

$$g(n+m) = f(n) + f(m) - v$$

olacak biçimde $u \in A(f)$ ve $v \in A(g)$ seçilebilir. Ayrıca,

$$f(g(n) + g(m) - v) = f(g(n) + g(m)) + f(-v) - u^{'},$$

olacak biçimde $u^{'} \in A(f)$ var. Bu gözlemlerin birleştirilmesiyle

$$\{f \circ g(n+m) - f \circ g(n) - f \circ g(m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \subseteq A(f) - f(-A(g)) - A(f)$$

kapsaması elde edilir. Sağ tarafın sonlu olmasından $f \circ g$'nin bir eğim olduğu gösterilmiş olur. Teoremin ikinci kısmının kanıtı açık. □

f ve g iki eğim ise $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları eğim olmalarına karşın birbirlerine eşit olmayabilir. Ama bunlar birbirlerine denk ve dolayısıyla, denklik sınıfları eşit. Bunu göstermek için aşağıdaki iki teoreme ihtiyaç var. İlkinin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 17.8. *f tek eğim olsun. $n, x \in \mathbb{Z}$ için*

$$|nf(x) - xf(n)| \leq (|x| + |n|)a(f)$$

ve

$$|f(n)| \leq |n|(|f(1)| + a(f))$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 17.9. *f, g, h eğilmeri verilsin. $f \equiv g$ ise $h+f \equiv h+g$ ve $h \circ f \equiv h \circ g$ olur.*

Kanıt: Birinci eşitlik açık. $B = (f - g)(\mathbb{Z})$ diyelim. Varsayım gereği B sonlu. $n \in \mathbb{Z}$ verilsin. $f(n) = g(n) + a$ olacak biçimde $a \in A$ seçelim.

$$h \circ f(n) = h(f(n)) = h(g(n) + a) = h \circ g(n) + f(a) + b$$

olacak biçimde $b \in A(h)$ elde edilir. Sonuç olarak $(h \circ f - h \circ g)(\mathbb{Z}) \subset f(B) + A(h)$ elde edilir. $f(B) + A(h)$ sonlu olduğundan istenilen kanıt tamamlanır. □

Yukarıdaki teoremin uygulanmasıyla teorem şöyle genellenebilir: f, g, h, p eğilmeri verilsin. $f \equiv h$ ve $g \equiv p$

i. $f + g \equiv h + p$.

ii. $f \circ g \equiv h \circ p$.

Teorem 17.10. *İki eğimin bileşkesi denktir.*

Kanıt: Her eğimin bir tek eğime denk olması nedeniyle, yukarıda verilen teoremi dikkate alarak, kanıtı tek eğimler için vermek yeterlidir. f ve g iki tek eğim olsun. $f \circ g$ ve $g \circ f$ eğimlerinin denk oldukları gösterilecek.

Her $n, x, y \in \mathbb{Z}$ için bir önceki teorem kullanılarak

$$|nf(x) - xf(n)| \leq (|x| + |n|)a(f),$$

$$|ng(y) - yg(n)| \leq (|y| + |n|)a(g),$$

eşitsizlikleri elde edilir. $x = g(n)$ ve $y = f(n)$ alınarak

$$|nf(g(n)) - g(n)f(n)| \leq (|g(n)| + |n|)a(f),$$

$$|ng(f(n)) - f(n)g(n)| \leq (|f(n)| + |n|)a(g),$$

olur. Buradan

$$|nf(g(n)) - ng(f(n))| \leq (|g(n)| + |n|)a(f) + (|f(n)| + |n|)a(g),$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe iki önceki teoremde yer alan $|f(n)|$ ile ilgili eşitsizlik uygulanarak elde edilen eşitsizliğin $|n|$'ye bölünerek elde edilen eşitsizlikten istenilen elde edilmiş olunur. $\square$

17.4 $\mathbb{R}_A$ Halka

$(\mathbb{R}, +)$'nın değişmeli grup olduğu gösterilmişti. Bu gurubun sıfır elemanı $0_{\mathbb{R}_A}$, sıfır sabit fonksiyonunun denklik sınıfıdır. Bir başka değişle

$$0_{\mathbb{R}_A} = \{f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} : f(\mathbb{Z}) \text{ sonlu } \}.$$

Üstelik $\mathbb{R}_A$'nin

$$x \times y = [f] \times [g] = [f \circ g]$$

kuralıyla tanımlı çarpma işlemine göre değişmeli birimli halka olduğu gösterilecek. Her $x, y \in \mathbb{R}_A$ için,

$$x \times y = y \times x$$

olduğunu not edelim.

Tanımlanacak halkanın birimi, $i(n) = n$ kuralıyla tanımlı $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksyonun denklik sınıfı olacak ve $1_{\mathbb{R}_A}$ ile gösterilecek.

$$1_{\mathbb{R}_A} = \{f \in \mathcal{R} : \{f(n) - n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ sonlu } \}$$

olur. Çoğu kez olduğu gibi bir karışıklık olmadıkca $0_{\mathbb{R}_A} = 0$ ve $1_{\mathbb{R}_A} = 1$ yazılacak.

Teorem 17.11. *Her $f, g, h \in \mathcal{R}$ için,*

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

olur. Ayrıca, her $x, y, z \in \mathbb{R}_A$ için,

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z.$$

Kanıt: $x = [f]$, $y = [g]$ ve $z = [h]$ olacak biçimde f, g, h eğimlerini alalım.

$$f \circ (g + h) \equiv (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f \equiv g \circ g + f \circ h$$

olduğundan

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

elde edilir. □

Her $f, g, h \in \mathcal{R}$ için $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h)$ olmasını da dikkate alarak şu teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 17.12. $(\mathbb{R}_A, +, \times, 0, 1)$ *değişmeli halkadır.*

17.5 İyi Ayarlanmış Eğim

Her A'campo reel sayısının çok daha rafine edilmiş bir eğimle temsil edilebilir olduğu gösterilecek.

Tanım 17.4. $A(f) \subseteq \{-1, 0, 1\}$ kapsamasını sağlayan tek eğim f'ye **iyi ayarlanmış eğim** denir.

Her eğim bir iyi ayarlanmış eğime denk olur. Bunu göstermek için birkaç ara tanım ve ara teoreme ihtiyaç var. $p, q \in \mathbb{Z}$ ve $q \neq 0$ olamak üzere Öklid bölüm algoritması

$$p = aq + r,\ 0 \leq r < |q|$$

olacak biçimde $a, r \in \mathbb{Z}$ olduğunu biliyoruz. a'ya p'nin q'ya Öklid bölümü denir. Benzer biçimde optimal Öklid bölümü tanımlanır.

Teorem 17.13. *p ve q, $q \neq 0$ olmak üzere iki tam sayı olsun.*

$$2p - |q| \leq 2qr > 2p + |q|$$

olacak biçimde tek bir tane tamsayı r var.

Teoremde yer alan r'ye p'nin q'ya bölünmesiyle elde edilen **optimal Öklid bölümü** denir ve $d(p,q)$ ile gösterilecektir[3].

Teorem 17.14. *$a,b,c,q \in \mathbb{Z}$, $q<0$ olsun. $|a-b-c| \leq q$ ise*

$$|d(a,3q) - d(b,3q) - d(c,3q)| \leq 1$$

olur.

Kanıt: Tanım ve üçgen eşitsizliğinden hemen elde edilir. □

Teorem 17.15. *f tek eğim ise $s = a(f)$ olmak üzere,*

$$\overline{f}(n) = d(f(3sn), 3s)$$

kuralıyla tanımlı $\overline{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ iyi ayarlanmış eğimdir.

Kanıt: Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\overline{f}(-n) = -\overline{f}(n)$ olduğu açık. Ayrıca, $s = a(f)$ olmak üzere her $n,m \in \mathbb{Z}$ için

$$|f(3sn+3sm) - f(3sn) - f(3sm)| \leq s$$

eşitsizliğine bir önceki teorem uygulanarak

$$|\overline{f}(n+m) - \overline{f}(n) - \overline{f}(m)| \leq s$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\overline{f}$'nin iyi ayarlı eğim olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 17.16. *Her eğim iyi ayarlanmış bir eğime denk olur.*

Kanıt: Her eğim tek eğime denk olduğundan, kanıt tek eğim için verilebilir. f bir eğim olsun. Her $n,m \in \mathbb{Z}$ için

$$-s \leq f(n+m) - f(n) - f(m) \leq s$$

olacak biçimde $0 < s \in \mathbb{N}$ seçelim. $n \in \mathbb{Z}$ verilsin. Tümevarımla her $t \in \mathbb{N}$ için,

$$-s(t-1) \leq f(tn) - tf(n) \leq s(t-1)$$

eşisizliği elde edilir. Bu eşisizlikte $t = 3s$ alınarak

$$-s3s \leq -s(3s-1) \leq f(3sn) - 3sf(n) \leq s(3s-1) \leq s3s$$

olur. Buradan

$$-s \leq \tfrac{f(3sn)}{3s} - f(n) \leq s$$

eşitsizliği elde edilir. $\overline{f}$ bir önceki teoremde olduğu gibi tanımlanan fonksiyon olmak üzere,

[3] $d(p,q)$, $p:q$ olarak da gösteriliyor.

$$|\overline{f}(n) - \tfrac{f(3sn)}{3s}| \leq \tfrac{1}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Son iki eşitsizlik kullanılarak,

$$|\overline{f}(n) - f(n)| \leq s + \tfrac{1}{2}$$

olur. Bu, $\overline{f}$'nin bir önceki teoremden iyi ayarlı bir eğim olduğu biliniyor olmasından dolayı, f ve $\overline{f}$'nin denk eğimler olduğunu söyler. Kanıt tamamlanır. □

Alıştırmalar

17.14. f ve g iki eğim ise

$$A(f \circ g) \subseteq A(f) + A(g) + f(A(f))$$

olduğunu gösterin. Ayrıca, f ve g iyi ayarlanmış ise

$$A(f \circ g) \subseteq \{-2, -1, 0, 1, 2\} + \{-f(1), f(1)\}$$

olduğunu gösterin.

17.6 $\mathbb{R}_A$'da Tam Sıralama

$\mathbb{R}_A$'nın bir sıralı halka olduğu gösterilecek. Bunun için bir sıralama tanımlamaya ihtiyaç var.

Tanım 17.5. $f \in \mathcal{A}$ ve sıfıra denk olmasın. $\{f(n) : n \in \mathbb{N}, f(n) \leq 0\}$ kümesi sonluysa f'ye **pozitif** denir ve $f > 0$ yazılır.

Bir pozif eğime denk her eğimin pozitif olduğu kolaylıkla gösterilir. Bunun sonucu olarak $f > 0$ ve $-f > 0$ olacak biçimde bir f eğimi olamaz. Bir eğimin pozitif olduğunu, birçok okurun aşina olduğu limit kavramı üzerinden okumak yerinde olabilir.

Tanım 17.6. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu verilsin. Verilen her doğal sayı C'ya karşılık her $p > N$ için $f(p) > C$ olacak biçimde doğal sayı N varsa

$$\lim_{p\to\infty} f(p) = \infty$$

yazılır. Verilen her doğal sayı C'ya karşılık her $p > N$ için $f(p) < -C$ olacak biçimde doğal sayı N varsa

$$\lim_{p\to\infty} f(p) = -\infty.$$

yazılır.

Bir eğimin pozitif olması aşağıdaki teoremle karakterize edilebilir.

Teorem 17.17. *Bir f bir eğimi için aşağıdakiler denktir.*

a. $\{f(n) : n \in \mathbb{N}, f(n) > 0\}$ *sonsuz.*

b. *Verilen her $d > 0$ doğal sayısına karşılık her doğal sayı m için*

$$f(mx) > (m+1)d$$

eşitsizliğini sağlayan $x > 0$ doğal sayısı var.

c. $\lim_{p\to\infty} f(p) = \infty$.

d. $f > 0$.

Kanıt: $a \Rightarrow b$: $d > 0$ doğal sayısı verilsin. $c = a(f) + 1$ diyelim. $e = c + d$ olsun. Varsayım gereği $f(x) > 2e$ olacak biçimde $x > 0$ doğal sayı var. $f(1x) > (1+1)e$ olur. $m \in \mathbb{N}$ için $f(mx) > (m+1)e$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{array}{rcl} f((m+1)x) & = & f(mx) + f(x) + [f(mx+x) - f(mx) - f(x)] \\ & > & f(mx) + f(x) - e \\ & > & (m+1)e + 2e - e \\ & = & (m+2)e \end{array}$$

olur. Tümevarımla Her $m \in \mathbb{N}$ için $f(mx) \geq (m+1)e$ olduğu gösterilmiş olur.
$b \Rightarrow a$: Açık.
$b \Rightarrow c$: $d = a(f) + 1$ diyelim. Her m doğal sayısı için $f(mx) > (m+1)d$ olacak biçimde $x > 0$ pozitif doğal sayı seçelim. Verilen her p tamsayısı için

$$p = dx + r,\ 0 \leq r < x$$

olacak biçimde tek bir tane d ve r tamsayıları olduğundan

$$g(p) = f(dx)$$

kuralıyla $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu tanımlanabilir.Her $0 \leq r < M$ için $|f(r)| < e$ olacak biçimde e doğal sayısını seçelim.

$$\begin{array}{rcl} |(f-g)(p) & = & |(f-g)(dx+r)| \\ & = & |f(dx+r) - g(dx+r)| \\ & = & |f(dx) + f(r) + [f(dx+r) - f(dx) - f(r)] - f(dx)| \\ & = & |f(r) + [f(dx+r) - f(dx) - f(r)]| \\ & < & e + d \end{array}$$

ifadesinden $(f-g)(\mathbb{N})$'nin sonlu olduğu gösterilebilir.

$c > 0$ verilsin. $(n+1)d > B + C$ olacak biçimde $n > 0$ doğal sayı seçelim. $N = nM$. $p > N$ diyelim. $p = dM + r$, $0 \leq r < M$ olacak biçimde d ve r doğal sayıları bulunabilir. $d \geq n$ ve

$$g(p) = f(dM) > (d+1)D \geq (n+1)D > B + C$$

elde edilir. Buradan da $f(p) > g(p) - B > C$ elde edilir. İstenilen kanıtlandı. $c \Rightarrow d$ ve $d \Rightarrow e$ olduğu okurca kolaylıkla gösterilir.
Kanıt tamamlanır. □

Aşağıdaki iki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 17.18. *f bir eğim olsun. Aşağıdaki durumlardan sadece ve sadece birinin gerçekleştiği yukarıdaki gözlem sonucu hemen kanıtlanır.*

a. *f sıfır eğimine denk.*

b. $f > 0$.

c. $-f > 0$.

Böylece verilen $x \in \mathbb{R}_A$ için $x = [f]$ ve g, f'de denk eğim ise $f > 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $g > 0$ olması gerektiği kolaylıkla gösterilir. Bu gözlem üzerinden $\mathbb{R}$'da,

$$x \leq y \Longleftrightarrow x = y \text{ ya da } 0 < g - f \;\; (x = [f],\, y = [g])$$

olarak tanımlanan $\leq$, bir tam sıralamadır.

Alıştırmalar

17.15. Bir eğimin pozitif olması farklı biçimlerde de karakterize edilebilir. Aşağıdakilerin denk olduğunu gösterin.

a. $f > 0$

b. $k \in \mathbb{N}$ için $a(f) < f(kx) < f((k+1)x)$ olacak biçimde $x \in \mathbb{N}$ var.

c. En az bir $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) > a(f)$.

d. Her $k \in \mathbb{N}$ için $f(ka) > k$ eşitsizliğini sağlayan $a \in \mathbb{N}$ var.

17.16. f bir eğim olsun. f'nın sıfıra denk ya da $0 < f$ olması için gerek ve yeter koşulun her $n \in \mathbb{N}$ için $a \leq f(n)$ olacak biçimde $a \in \mathbb{Z}$ olması gerektiğini gösterin.

17.17. $0 < f$ bir eğim ise her $n \in \mathbb{N}$ için $g(n) \geq 0$ olacak biçimde f'ye denk g eğimin olduğunu gösterin.

17.18. f bir eğim ve $f(0) = 0$ olsun. $f(m) > a(f)$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ varsa her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) \geq -k$ olduğunu gösterin.

17.7 $\mathbb{R}_A$ Sıralı Halka

Aşağıdaki gözlemleri yapalım.

i. f ve g iki denk eğim ve $0 < f$ ise $0 < g$ olur: Her $n \in \mathbb{N}$ için $|f(n) - g(n)| \leq k$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ seçelim. $n \in \mathbb{N}$ verilsin.

$$g(n) = (g(n) - f(n)) + f(n) \leq -k + f(n)$$

olur. $\lim_{p\to\infty} f(p) = \infty$ olmasından $\lim_{p\to\infty} g(p) = \infty$ olur. Böylece $g > 0$ olur.

ii. f ve g iki eğim ve $f < g$ ise her eğim h için $f + h < g + h$ olur:

iii. f, g, h eğimleri verilsin. $f < g$ ve $0 < h$ ise $f \circ h < g \circ h$ olur: $\lim_{p\to\infty}(g - f)(p) = \infty$ ve $\lim_{p\to\infty} h(p) = \infty$ olduğundan

$$\lim_{p\to\infty}(g \circ h - f \circ h)(p) = \lim_{p\to\infty}(g - h)(h(p)) = \infty$$

olur. Dolayısıyla, $f \circ h < g \circ g$ olur.

Sonuç olarak, aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 17.19. $(\mathbb{R}_A, +, \times, 0, 1, \leq)$ *bir sıralı halka olur.*

17.8 $\mathbb{R}_A$ Sıralı Cisim

Aşağıdaki gözlemleri yapalım:

i. f sıfır eğim değilse her $u \in \mathbb{Z}$ için

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : f(n) = u\}$$

kümesi sonludur: $f > 0$ olduğunu varsayalım. f tek ise $\lim_{p\to\infty} f(p) = \infty$ olacağından $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = u\}$ sonlu küme olur. Benzer biçimde

$$\{n \in \mathbb{Z} : n < 0, f(n) = u\} = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = -u\}$$

kümesi de sonludur. Böylece A kümesi sonludur. Genel olarak f'ye denk olan tek eğim g alalım. $n \in A$ verilsin.

$$f(n) = (f(n) - g(n)) + g(n)$$

eşitliğinden $B = (g - f)(\mathbb{N})$ olmak üzere

$$g(n) \in f(n) + B = u + B$$

olur. Dolayısıyla,

$$A \subset \cup_{b\in B}\{n \in \mathbb{Z} : g(n) = u + b\}$$

elde edilir. Kapsamanın sağ tarafındaki bileşenlerin her biri, g tek olduğu için sonlu ve B sonlu olduğundan sağ taraf sonlu ve dolayısıyla, A kümesi olur. $f < 0$ ise yukarıda yapılan işlem $0 < -f$ için uygulanarak istenilen elde edilir.

ii. f, sıfır eğim olmayan bir eğim olsun. $A \subset \mathbb{Z}$ kümesinin sonsuz olması için gerek ve yeter koşul $f(A)$ kümesinin sonsuz olmasıdır.

Teorem 17.20. $(\mathbb{R}_A, +, \times, 0, 1, \leq)$ *sıralı cisim.*

Kanıt: $0 \neq x$ için $xx^{-1} = 1_R$ olacak biçimde $x^{-1} \in \mathbb{R}_A$ olduğu gösterilecek. $0 < x \in \mathbb{R}_A$ verilsin. $0 < f$ ve $x = [f]$ olacak biçimde iyi ayarlanmış eğim f seçilebilir. $f > 0$ olması nedeniyle her $p \in \omega$ için $\{n \in \omega : f(n) \geq p\}$ kümesi boşkümeden farklıdır. Dolayısıyla,

$$h(p) = \min\{n \in \omega : f(n) \geq p\}$$

kuralıyla $h : \omega \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyon $\mathbb{Z}$'ye $p < 0$ tamsayısı için $g(p) = -h(-p)$ olacak biçimde $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$'ye genişler. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$f(g(m)) \geq m$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, verilen $m \in \omega$ için, $g(m) = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $m = 0$ olması gerektiği g'nin tanımından hemen elde edilir. g'nin bir eğim olduğunu gösterip, sonra

$$x[g] = 1_{\mathbb{R}_A}$$

olduğu gösterilerek kanıt tamamlanacak. g fonksiyonu çift olduğundan g'nin bir eğim olduğunu göstermek için

$$\{g(m+n) - f(m) - f(n) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

kümesinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. $m, n \in \mathbb{N}$ verilsin.

$$p = g(m),\ q = g(n) \text{ ve } r = g(m+n)$$

diyelim.

$$f(p) \geq m > f(p-1)$$

$$g(q) \geq m > g(q-1)$$

$$g(r) \geq m + n > g(r-1)$$

eşitsizlikleri kullanılarak

$$f(r-1) - f(p) - f(q) < (m+n) - m - n < f(r) - f(p-1) - f(q-1)$$

eşitsizliği, yani

$$f(r-1) - f(p) - f(q) < 0 < f(r) - f(p-1) - f(q-1)$$

olur. Buradan

$$f(r-p-q) - (f(r) - f(p-1) - f(q-1)) < f(r-p-q) < \\ f(r-p-q) - (f(r-1) - f(p) - f(q))$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı için

$$f(r-p-q) - (f(r-1) - f(p) - f(q)) = f(1) + a + b + c$$

olacak biçimde $a, b, c \in A(f)$ vardır. Benzer biçimde

$$f(r-p-q) - (f(r) - f(p-1) - f(q-1)) = f(-2) + a^{'} + b^{'} + c^{'}$$

olacak biçimde $a^{'}, b^{'}, c^{'} \in A(f)$ vardır. $A(f)$'nin sonlu olması nedeniyle sonuç olarak,

$$f(\{g(m+n) - f(m) - f(n) : m, n \in \mathbb{N}\})$$

kümesinin sonlu olduğu gösterilmiş olur. f'nin tek olması nedeniyle

$$f(\{|g(m+n) - f(m) - f(n)| : m, n \in \mathbb{N}\})$$

kümesi sonludur. Teorem 16.4 gereği $\{|g(m+n) - f(m) - f(n)| : m, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi sonludur. g'nin tek olması nedeniyle de

$$\{g(m+n) - f(m) - f(n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi sonlu olur. Böylece g bir eğimdir.

$\mathbb{R}_A$'nın birimi, $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $i(n) = n$ olmak üzere $1_{\mathbb{R}_A} = [i]$ ile gösterilsin. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$|f(g(m)) - f(g(m) - 1)| \leq |f(1)| + a(f) = M$$

olduğundan

$$f((g(m)) - C \leq f(g(m) - 1) < m \leq f(g(m))$$

elde edilir. Buradan da

$$|f \circ g(m) - i(m)| = |f(g(m)) - m| \leq M$$

olur. Sonuç olarak $f \circ g$ ve 1 eğimleri denk ve dolayısıyla,

$$x[g] = [f][g] = [f \circ g] = [i] = 1_{\mathbb{R}_A}$$

elde edilir. $\mathbb{R}_A$'nın değişmeli olmasından ayrıca, $[g] \times x = 1_{\mathbb{R}_A}$ elde edilir. Kanıt biter $\square$

17.9 $\mathbb{R}_A$ Tam Sıralı Cisim

$\mathbb{R}_A$'nın bir sıralı cisim olduğu gösterildi. Bu cismin üstten sınırlı her altkümesinin en küçük üst sınırının olduğu gösterilecek, yani bu bölümün nihahi amacı gösterilmiş olunacak. Bunun için ara teoremlere ihtiyaç var.

Teorem 17.21. *$m, n > 0$ ve c tamsayıları verilsin.*

$$|d(c, nm) - d(c, n(n+m)) - d(c, m(n+m))| \leq 1$$

olur.

Kanıt:

$$\tfrac{c}{mn} - \tfrac{c}{n(m+n)} - \tfrac{c}{m(m+n)} = 0$$

ve

$$|d(c, nm) - \tfrac{c}{mn}| \leq \tfrac{1}{2}$$

$$|d(c, n(n+m) - \tfrac{c}{n(n+m)}| \leq \tfrac{1}{2}$$

$$|d(c, m(n+m) - \tfrac{c}{m(n+m)}| \leq \tfrac{1}{2}$$

eşitsizlikleri üzerinden uygulanacak üçgen eşitsizliğinden istenilen elde edilir.□

İyi ayarlanmış iki eğim arasındaki sıralamayla ilgili aşağıdaki teoremin kanıtı okura bırakıldı.

Teorem 17.22. *f ve g iki iyi ayarlanmış eğim olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir.*

a. *$f < g$ ise her $n \in \omega$ için $f(n) < 2 + g(n)$.*

b. *$f < g$ olması için gerek ve yeter koşul $f(n) < g(n) + 2$ olacak biçimde $n \in \omega$ olmasıdır.*

Teorem 17.23. *$\mathcal{A}$'nın üstten sınırlı her altkümesinin "supremumu" var.*

Kanıt: $\Delta \subseteq \mathcal{A}$ kümesi boş olmayan bir küme ve U, her $\delta \in \Delta$ için

$$\delta < U \text{ ya da } \delta \equiv U$$

ifadesini sağlayan bir eğim olsun. Δ'nın elemanlarını ve U'yu iyi ayarlanmış eğim almak genelliği bozmaz (Neden?). Ayrıca, $\delta \equiv U$ olacak biçimde δ varsa, U, Δ'nın "supremumu" olur. Her $\delta \in \Delta$ için $\delta < U$ olduğunu varsayalım. Teorem 16.22 gereği her $n \in \omega$ için

$$\delta(n) < U(n) + 2$$

olur. Dolayısıyla, her $n \in \omega$ için $U(n)+2$,

$$\Delta_n = \{\delta(n) : \delta \in \Delta\}$$

kümesinin bir üst sınırı olup,

$$\delta_n(n) = \max\{\delta(n) : \delta \in \Delta\}$$

olacak biçimde $\delta_n \in \Delta$ seçebiliriz. (Bu seçim, Seçim Aksiyomunu kullanmadan yapılabilir!) $\mu : \omega \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu

$$\mu(n) = \delta_n(n)$$

eşitliğiyle tanımlansın. $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu ise

$$\sigma(n) = \begin{cases} \mu(n) & ; n \geq 0 \\ -\mu(-n) & ; n < 0 \end{cases}$$

kuralıyla tanımlansın.

σ **bir eğim**: $q, p, N \in \mathbb{N}$ verilsin ve $q = pN$ olsun.

$$|\delta_q(q) - N\delta_q(p)| \leq N-1$$

eşitsizliği sağlanır. (Neden?) Buradan

$$\delta_q(p) \leq \tfrac{N-1}{N} + \tfrac{\delta_q(q)}{N}$$

eşitsizliğinden

$$\begin{array}{rcl} |d(\delta_q(q), N) - \delta_q(p)| & \leq & |d(\delta_q(q), N) - \frac{\delta_q(q)}{N} - \frac{N-1}{N}| \\ & \leq & |d(\delta_q(q), N) - \frac{\delta_q(q)}{N}| + |\frac{N-1}{N}| \quad , \\ & \leq & \frac{1}{2} + 1 \end{array}$$

Buradan da

$$|d(\delta_q(q), N) - \delta_q(p)| = 0 \text{ ya da } |d(\delta_q(q), N) - \delta_q(p)| = 1.$$

Bu gözlem sonucu olarak her $u, v \in \mathbb{N}$ için

$$|\delta_u(u) - d(\delta_{uv}(uv), v)| \leq 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten her $n, m \in \omega$ için

$$|\delta_n(n) - d(\delta_{nm(n+m)}(nm(n+m), m(n+m))| \leq 1$$

$$|\delta_m(m) - d(\delta_{nm(n+m)}(nm(n+m), n(n+m))| \leq 1$$

$$|\delta_{n+m}(n+m) - d(\delta_{nm(n+m)}(nm(n+m), mn)| \leq 1$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$c = \sigma(nm(n+m))$$

alalım. Buradan

$$|\sigma(n+m) - \sigma(n) - \sigma(m) - d(c, nm) + d(c, n(n+m)) + d(c, m(n+m))| \leq$$

$$|\sigma(n+m) - d(c, nm)| + |\sigma(n) - d(c, m(n+m))| + |\sigma(m) - d(c, n(n+m))| \leq 3$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 21'in uygulanmasıyla

$$|\sigma(n+m) - \sigma(n) - \sigma(m)| \leq |d(c, nm) - d(c, n(n+m)) - d(c, m(n+m))| \leq 4$$

elde edilir. Böylece, σ'nın bir eğim olduğu gösterilmiş olur.

σ, Δ'nın bir üst sınırıdır: Her $\delta \in \Delta$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\delta(n) \leq \sigma(n)$ olduğu tanımdan. $\delta \in \Delta$ verilsin. $\sigma < \delta$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, Teorem 16.22 gereği

$$\delta(n) > \sigma(n) + 2$$

olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ var. Buradan

$$\delta(n) > \sigma(n) + 2 > \delta_n(n) \geq \delta(n)$$

çelişkisi elde edilir. Böylece σ, Δ kümesinin bir üst sınırı olur.

σ, Δ'nın "supremumu": σ'yı iyi ayarlanmış eğim olarak alabiliriz. σ'nın, Δ'nın supremumu olmadığını varsayalım. Bu durumda $f < \sigma$ olacak biçimde Δ'nın üst sınırı iyi ayarlanmış f bulunabilir. Dolayısıyla, $0 < \sigma - f$, yani

$$\{(\sigma - f)(n) : n \in \omega, (\sigma - f)(n) > 0\}$$

kümesi sonsuz olacağından,

$$(\sigma - f)(n) > 2$$

olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ bulunabilir. $\sigma(n) = \delta_n(n)$ olduğundan, $\delta = \delta_n$ alınark

$$\delta(n) > f(n) + 2$$

elde edilir. Teorem 16.22 gereği $\delta > f$ olur. Bu, f'nin Δ'nın bir üst sınır olmasıyla çelişir.
Kanıt tamamlanır. □

Teorem 17.24. $(\mathbb{R}_A, +, \times, 0, 1, \leq)$ *tam sıralı cisim.*

Kanıt: $R \subset \mathbb{R}_A$ üstten sınırlı olsun.

$$\Delta = \cup_{x \in R}\{f \in \mathcal{A} : [f] = x\}$$

olarak tanımlanan küme, $\mathcal{A}$'nın üstten sınırlı altkümesidir. Teorem 16.23 gereği, bu kümenin supremumu var, bu supremumu f_∞ ile gösterelim. $x_\infty = [f_\infty]$ olmak üzere,

$$x_\infty = \sup R$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. □

Alıştırmalar

17.19. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $f_n(k) = kn$ kuralıyla tanımlı $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyon bir eğim olup, bu eğimlerin denklik sınıflarının kümesini $\mathbb{Z}_A$ ile gösterelim. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

a. $\mathbb{Z}_A$, $\mathbb{R}_A$'nın alt halkasıdır.

b. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_A$, $n \to [f_n]$ bir örten halka ve sıra izomorfizmadır.

17.20. Verilen $r = \frac{p}{q}$ rasyonel sayısı için,

$$g(n) = \min\{k \geq 0 : qk \geq pn\}$$

kuralıyla tanımlı $g : \omega \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu tanımlansın. g fonksiyonu $\mathbb{Z}$'ye $n \in \omega$ için, $f(n) = g(n)$ ve $n < 0$ tamsayısı için $f(n) = -g(-n)$ olarak $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyona genişletilsin. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

a. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(-n) = -f(n)$.

b. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $|qf(n) - pn| \leq q$.

c. Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için $|f(n+m) - f(n) - f(m)| \leq 3$ ve dolayısıyla, f bir tek eğim.

d. aaf_q ve f_p bir önceki problemde olduğu gibi sırasıyla q ve p'yi $\mathbb{R}_A$'da temsil eden eğimler olmak üzere $f_q \times f \equiv f_p$ olur. Bu eğim f'yi $f_{p,q}$ ile gösterelim.

e. $p, p^{'}, q, q^{'}$, $\frac{p}{q} = \frac{p^{'}}{q'}$ olacak biçimde tamsayılar ise $f_{p,q} = f_{p^{'},q'}$ olduğunu gösterin.

17.21. $\mathbb{Q}_A = \{[f_r] : r \in \mathbb{Q}$ olarak tanımlansın. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

a. $\mathbb{Q}_A$, $\mathbb{R}_A$'nın alt cismidir.

b. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_A$, $r \to [f_q]$ bir örten halka ve sıra izomorfizmadır.

17.22. ([24]) f bir eğim olsun. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösterin.

a. Her $a \in \mathbb{Z}$ için $|f(na) - nf(a)| \leq (n-1)a(f) \leq na(f)$.

b. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $|mf(n) - nf(m)| \leq (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})C$.

c. $(\frac{f(n)}{n})$ bir Cauchy dizisi.

d. $(\frac{f(n)}{n})$ Cauchy dizisinin $\mathbb{R}$'de ki denklik sınıfı $c(f)$ ile gösterilsin. $C : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $C(f) = c(f)$ ile gösterilsin. Her $f, g \in \mathcal{A}$ için,

$$C(f+g) = C(f) + C(g) \text{ ve } C(f \circ g) = C(f)C(g).$$

e. $r \in \mathbb{R}$ verilsin.

i. $f_r(n) = [rn]$ kuralıyla tanımlı fonksiyon $f_r : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bir eğim.

ii. $C(f_r) = r$.

f. $\overline{C} : \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}$, $\overline{C}([f]) = C(f)$ fonksiyonu örten halka ve sıra izomorfizma.

17.9.1 Eğim olarak $\sqrt{2}$

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}_A$ tam sıralı cisimleri sıra ve halka izomorfik olduklarından $\mathbb{R}$, tanımlı $x^2 = 2$ denkleminin çözümü olduğundan, bu denklemin $\mathbb{R}_A$'da da çözümü var. Bu denklemin $\mathbb{R}_A$'da çözümünü vererek, $\mathbb{R}$'de $\sqrt{2}$ sayısının $\mathbb{R}_A$'daki karşılığı belirlenebilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f(n) = \min\{k \in \omega : 2n^2 \leq k^2\}$$

kuralıyla tek eğim $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n \leq f(n) \leq 2n,$$

$$2n^2 \leq f(n)^2,$$

$$(f(n) - 1)^2 \leq 2n^2$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bunların kullanımıyla

$$2n^2 \leq f(n)^2 \leq 2n^2 + 2f(n) - 1 \leq 2(n+1)^2$$

eşizliği elde edilir. Buradan da, $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$2f(n)f(m) \leq 2(n+1)(m+1)$$

olur.

$$x = (f(n) + f(m))^2 - f(n+m)^2$$

diyelim. Yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak Her $n, m \in \mathbb{N}$ için,

$$-4n - 4m - 2 = -2(n+m+1)^2 + 2n^2 + 2m^2 + 4nm \leq x$$

$$x \leq -2(n+m)^2 + 2(n+1)^2 + 2(m+1)^2 + 4(n+1)(m+1)(m+2) = 8m + 8n + 8$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan da

$$|x| \leq 8m + 8n + 8$$

elde edilir. Bu son eşitszilikte x'in değeri yazılarak ve

$$n + m + 1 \leq f(n+m) + f(n) + f(m)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$|f(n+m) - f(n) - f(m)| \leq 8$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, $f(-n) = -f(n)$ eşitliğinin de sağlanıyor olmasından, f'nin tek eğim olduğunu söyler. Şimdi $x = [f]$ diyelim. $x^2 = 2$, yani $f \circ \equiv f_2$ olduğunu göstereceğiz. (f_2, $f_2(n) = 2n$ kuralıyla tanımlı eğim.) $n \in \mathbb{N}$ verilsin.

$$4n^2 \leq f(n)^2 \leq f(f(n))^2 \leq 2(f(n)+1)^2 \leq 4n^2 + 8n + 2 \leq 4(n+1)^2$$

eşitsizliğinden

$$2n \leq f(f(n)) \leq 2n + 2$$

ve böylece

$$0 \leq (f \circ f - f_2)(n) \leq 2$$

olur. Yani, $(f \circ f - f_2)(\mathbb{N})$ kümesi sonludur. Böylece, f'nin $\mathbb{R}_A$'da $\sqrt{2}$'nin temsili olduğu gösterilmiş olur.

18. Arşimedyan Grup

Toplamsal reel sayılar grubu $(\mathbb{R}, +)$'da bir $0 < a$ için

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } n|x| \leq a$$

koşulunu sağlayan $x \in \mathbb{R}$ ancak sıfır olabilir. Bu özellik her sıralı grup için geçerli değildir. Örneğin, $R = \mathbb{R}^2$, noktasal olarak tanımlanan toplama işlemine göre ve

$$(x, y) < (a, b) \Longleftrightarrow x < a \text{ ya da } x = a \text{ ve } y < b$$

sıralamasına göre bir sıralı grup olmasına karşın, sıfırdan farklı ve bazı $0 < (a, b) \in R$ için,

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } n|x| \leq (a, b)$$

koşulunu sağlayan $x \in R$ vardır. Gerçekten de, her $n \in \mathbb{N}$

$$0 < n(0, 1) \leq (1, 0)$$

koşulu sağlanır. Bu gözlem sonucu olarak bir cebirsel yapıda "sonsuz küçük" eleman kavramının yolu açılır. Bu kavram genel olarak "Arşimedyan özelliği" olarak adlandırılan cebirsel yapı içerisinde incelenir.

Arşimedyan özelliği bir sıralama üzerinden tanımlanan kavram olup, halkalar için kısa bir şekilde Bölüm 10.6'da verilmişti. Bu kavram sıralı gruplar için, hatta belirli özellikleri bulunduran uygun bir sıralamayla donatılmış her cebirsel yapıya genellenebilir. Ancak bu kitapta, bu özellik önce gruplar için tanımlanıp, sonrasında Arşimedyan grupların reel sayılar grubunun kopya altgruplarıyla çakıştığı kanıtlanacak.

Tam sıralı cismin Arşimedyan olmasına karşın tersi doğru değil, örneğin rasyonel sayılar cismi $\mathbb{Q}$ tam sıralı olmamasına karşın, Arşimedyan cisimdir. Diğer taraftan rasyonel sayılar cismi, her Arşimedyan cismin kopya altcismidir. Her Arşimedyan cismin ise reel sayılar cisminin kopya altcismi olduğu kanıtlanacak. Sonuç olarak Arşimedyan cisimlerin yeri ve yurdunun $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ cisimleri arasında olduğu gösterilecek.

18.1 Reel Sayılar Cisminin Altgrupları

Reel sayılar cisminin sıfır olmayan her altgrubu, $\mathbb{R}$'de ya yoğun ya da $\mathbb{Z}$ grubuna gup izomorfiktir. $x \in \mathbb{R}$ noktasının $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin **yığılma noktası** olması, her $\epsilon > 0$ için A ile $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ kümelerinin arakesitinin x noktasından farlı en az eleman içermesidir. Bu, A'da terimleri birbirlerinden farklı en az dizinin x noktasına yakınsamasına denktir. A kümesinin $\mathbb{R}$'de yoğun olması, $\mathbb{R}$'nin her elemanının, A kümesinin bir yığılma noktası olmasıdır. Tam sayılar halkası reel sayılarda hiçbir yığılma noktası olmamasına karşın, her reel sayı rasyonel sayılar kümesinin bir yığılma noktasıdır.

Teorem 18.1. *Reel sayılar grubunun bir altgrubu için, sıfır noktasının bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşul, her reel sayının limit noktası olmasıdır. Bunlardan birinin gerçekleşmesi durumunda, altgrup reel sayılar grubunda yoğundur.*

Kanıt: A, reel sayılar grubunun bir altgrubu ve 0, A'nın bir yığılma noktası olsun. $0 < x \in \mathbb{R}$ veilsin. $\epsilon > 0$ olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in A$ olması için gerek ve yeter koşul $-x \in A$ olduğundan, varsayım gereği $0 < a < \frac{\epsilon}{3}$ olacak biçimde $a \in A$ var. Gerekirse $a < x - \epsilon$ olacak biçimde ayarlama yapılabilir. k, $na \leq x - \epsilon$ olan n doğal sayıların en büyüğü olsun.

$$(n+1)x, (n+2)x \in (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap A$$

olup, bunların en az biri x'den farklıdır. Dolayısıyla, $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ve A kümesinin arakesiti, x'den farklı bir eleman içerir. Bu, x noktasının A'nın limit noktası olduğunu gösterir. Bu durumda, ayrıca, A'nın $\mathbb{R}$'de yoğun olduğu açıktır. $\square$

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 18.2. *Reel sayılar cisminin sıfırdan farklı her altgrubu ya tamsayılar halkasına grup izomorfik ya da reel sayılar grubunda yoğundur.*

Kanıt: A, reel sayılar grubunun yoğun olmayan altgrubu olsun. Yukarıdaki teorem gereği, sıfır noktası A'nın bir limit noktası olamaz. Dolayısıyla, $A \cap (0, \infty)$ kümesinin infimumu, sıfır olamaz, yani

$$0 < a = \inf A \cap (0, \infty)$$

olur. Yine yukarıdaki teorem gereği, $\mathbb{R}$'nin hiçbir elemanı A'nın limit noktası olamayacağından, a noktası da olamaz ve dolayısıyla, $a \in A$ olmak zorundadır. Buradan

$$a\mathbb{Z} \subseteq A$$

olur. $0 < x \in A$ verilsin.

$$ka \leq x < (k+1)a$$

olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Buradan $0 \leq x - ka < a$ olur. $x \neq ka$ olsaydı, $0 < x - ka \in A$ olacağından $x - ka \in A \cap (0, \infty)$ olurdu, ve buradan da $a \leq x - ka$ ve $(k+1)a \leq x$ çeşkisi olurdu. O halde $x = ka \in A$ elde edilir. $x < 0$, $x \in A$ için $-x \in A$ ve dolayısıyla, $x \in A$ olur. Sonuç olarak, $A = a\mathbb{Z}$ elde edilir ki, bu $\mathbb{Z}$ grubuna grup izomorfiktir. □

Alıştırmalar

18.1. Sıfırdan farklı her $n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z}$ grubunun $\mathbb{Z}$ grubuna grup izomorfik olduğunu gösterin.

18.2. (Kronecker)α bir irrasyonel sayı olmak üzere $\mathbb{Z}[\alpha]$ grubunun $\mathbb{R}$'de yoğun olduğunu gösterin.

18.2 Arşimedyan Grup

Tanım 18.1. G grup ve $\leq$, G'de bir zincir sıralama olsun. Her $x, y, z \in G$ için

$$x \leq y \Longrightarrow xz \leq yz \text{ ve } zx \leq zy$$

koşulu sağlanıyorsa, G'ye **sıralı grup** denir.

G, cebirsel işlemi ".", sıralaması $\leq$ ve birimi e olan bir sıralı grup ise, bu grup $(G, ., e, \leq)$ ile gösterilebilir. e'den büyük olan X'in elemanına **pozitif**[1] denir.

$$G^+ = \{x \in G : x \geq e\}$$

yazılır. $P = G^+$ olmak üzere,

i. $PP \subset P$,

ii. $P \cap P^{-1} = \{e\}$,

iii. $P \cup P^{-1} = G$,

koşullarının sağlandığı kolaylıkla gösterilir[2].

Aslında G bir grup ve $P \subseteq G$ altkümesi yukarıdaki koşulları sağlıyorsa, P'ye **pozitif koni** denir. Bir grubun her pozitif konisi bir zincir sıralama tanımlar;

$$x \leq y \Longleftrightarrow yx^{-1}, x^{-1}y \in P$$

olarak tanımlanan ilişkiye göre, $(G, ., e, \leq)$'nın bir sıralı grup olduğu kolaylıkla gösterilir.

Bir tam sıralı cismin toplama işlemine göre her altgrubunun sıralı grup olduğu açık. Arşimedyan terimiyle aslında bunun tersi de doğru.

[1] Bazı kaynaklarda $e < x$ eşitsizliğini sağlayan $x \in G$'ye pozitif eleman denir.

[2] Burada, tahmin edileceği gibi, $PP = \{xy : x, y \in P\}$ ve $P^{-1} = \{x^{-1} : x \in P\}$.

Tanım 18.2. Bir sıralı grup G,

$$\text{"her } 0 < x, y \in G \text{ için } x < y^n \text{ olacak biçimde } n \in \mathbb{N}\text{" var}$$

koşulunu sağlıyorsa, G'ye **Arşimedyan grup** denir.

Arşimedeyan gruplar tam sıralı cismin kopya altgruplarından başka birşey değildir. Bu, Arşimedyan grupların "korkunç" olmadığını gösterir. Bunu göstermeden önce tam sayılar grubuna izomorfik olma koşullarını belirleyelim.

Teorem 18.3. *Sıralı bir grupun tam sayılar grubuna sıra ve grup izomorfik olması için gerek ve yeter koşul, Arşimedyan grup ve en küçük pozitif elemanının olmasıdır.*

Kanıt: G Arşimedayan grup, e, G'nin birimi olsun. $g = \min \mathrm{G}^+ \setminus \{e\}$ olsun. Her $x \in G$ için

$$e \leq x < g \text{ ise } x = e$$

sağlanır. G Arşimedyan olduğundan, verilen $0 < a \in G$ için,

$$g^n \leq a < g^{n+1}$$

özelliğini sağlayan tek bir tane $n \in \mathbb{N}$ var. Bu eşitsizlikteki terimlerin g^{-n} ile çarpılmasıyla

$$e \leq ag^{-n} < g$$

eşitsizliği, ve yukarıdaki gözlemin uygulanmasıyla da $ag^{-n} = e$ elde edilir. Yani,

$$a = g^n$$

olur. $a < 0$ ise $a^{-1} = g^n$ ve buradan da $a = g^{-n}$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ olacaktır. Böylece, her $0 < a \in G$ için $a = g^{f(a)}$ eşitliğini sağlayan,

$$G^+ \setminus \{e\} \to \mathbb{N},\ a \to f(a)$$

fonkiyonu tanımlanır.

$$\overline{f}(a) = \begin{cases} f(a) & ; e < a \\ 0 & ; a = e \\ -f(-a) & ; a < e \end{cases}$$

kuralıyla tanımlı $\overline{f} : G \to \mathbb{Z}$ örten, sıra ve grup izomorfizmadır. Kanıt tamamlanır. □

Arşimedyan grubun bir başka özelliği:

Teorem 18.4. *Arşimedyan grup değişmelidir.*

Kanıt: G Arşimedyan olsun. İki durum sözkonusu; $G^+ \setminus \{e\}$ kümesinin en küçük elemanı var ya da yok. Var ise, yukarıdaki teorem gereği, G, $\mathbb{Z}$'ye sıra ve grup izomorfik ve dolayısıyla, G değişmelidir. Olmadığı durumunda verilen her $e < x \in G$ için $e < y < x$ olacak biçimde $x \in G$ elemanı olacaktır. Üstelik, $x < y^2$ ise, $z = xy^{-1}$ olarak

$$e < z < x \text{ ve } z^2 \leq x$$

eşisizliği sağlanır. Böylece her $e < x$ için $e < z < x$ ve $z^2 \leq x$ olacak biçimde $z \in G$ bulunabilir.

$e < a, b \in G$ verilsin. $ab < ba$ olduğunu varsayalım.

$$x = aba^{-1}b^{-1}$$

diyelim. $e < x$ olduğundan yukarıda yapılan gözlemle, $e < z < x$ ve $z^2 \leq x$ olacak biçimde $z \in G$ seçilebilir. G Arşimedyan olduğundan

$$z^m \leq a < z^{m+1} \text{ ve } z^n \leq b < z^{n+1}$$

olacak biçimde tek bir tane $n, m \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Buradan,

$$z^{m+n} \leq ab < z^{m+n}z^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun kullanımıyla,

$$x = aba^{-1}b^{-1} \leq abz^{-m}z^{-n} < z^2$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $ba \leq ab$ olmak zorunda. Benzer biçimde $ab \leq ab$ ve dolayısıyla, $ab = ba$ elde edilir. Kanıt tamamlanır. □

Teorem 18.5 (Hölder [28])**.** *Bir grubun Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, reel sayılar cisminin toplama grubunun bir kopya sıra altgrubu olmasıdır.*

Kanıt: G Arşimedyan grup ve birimi 0 ile gösterilsin. $0 < e \in G$ verilsin. $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n > 0$ için,

$$U_a = \{\tfrac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, me \leq na\}$$

olarak tanımlayalım. $\frac{m}{n} \in U_a$ ve $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ olmak üzere, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ ise $\frac{p}{q} \in U_a$ olur.

Aşağıdaki gözlemleri yapalım.

i. $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, $n, q > 0$ olmak üzere, $\frac{m}{n} \in U_a$ ve $\frac{p}{q} \leq \frac{m}{n}$ olsun.

$$pn \leq qm \text{ ve } me \leq na$$

eşitsizlikleri kullanılarak,

$$(pn)e \leq (qm)e \leq (qn)a$$

eşitsizliğinden $\frac{p}{q} \in U_a$ olur.

ii. $U_a \neq \mathbb{Q}$: G, Arşimedyan olduğundan $a < me$ olacal biçimde, $m \in \mathbb{N}$ var. $m \notin U_a$. Böylece $U_a \setminus \{\sup U_a\}$ bir Dedekind kesit olur.

iii. Her $a, b \in G$ için $U_a + U_b \subseteq U_{a+b}$ olur. Dolayısıyla,

$$\sup U_a + \sup U_b \leq \sup U_{a+b}$$

olur.

iii. Her $a, b \in G$ için

$$(\mathbb{Q} \setminus U_a) + (\mathbb{Q} \setminus U_b) \subseteq \mathbb{Q} \setminus U_{a+b}$$

olur, dolayısıyla,

$$U_{a+b} \subseteq \mathbb{Q} \setminus ((\mathbb{Q} \setminus U_a) + (\mathbb{Q} \setminus U_b))$$

elde edilir. Her iki tarafın supremumu alınarak

$$\sup U_{a+b} \leq \sup(\mathbb{Q} \setminus ((\mathbb{Q} \setminus U_a) + (\mathbb{Q} \setminus U_b))) = \inf((\mathbb{Q} \setminus U_a) + (\mathbb{Q} \setminus U_b))$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\inf((\mathbb{Q} \setminus U_a) + (\mathbb{Q} \setminus U_b)) = \inf(\mathbb{Q} \setminus U_a) + \inf(\mathbb{Q} \setminus U_b) = \sup U_a + \sup U_b$$

olduğundan

$$\sup U_{a+b} = \sup U_a + \sup U_b$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$f(a) = \sup U_a$$

kuralıyla $f : G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon grup homomorfizma olup, $f(a) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a = 0$ olmasıdır. Gerçekten, $a > 0$ ise $e < ma$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ var ve dolayısıyla, $\frac{1}{m} \in U_a$ ve $0 < \frac{1}{m} \leq f(a)$ olacağından $f(a) \neq 0$. Benzer biçimde $a < 0$ ise $f(a) \neq 0$. Dolayısıyla da f grup izomorfizmadır. Ayrıca, $a \in G$ için $f(a) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a \geq 0$ olmasıdır. f, sıra ve grup izomorfizmadır. Sonuç olarak, G, $\mathbb{R}$'nin toplama işlemine göre kopya sıra altgrubudur.

Kanıt tamamlanır. □

Sonuç olarak Arşimedyan gruplar, $\mathbb{R}$ grubunun kopya altgrubundan başka birşey değil. $\mathbb{R}$'nin altgruplarının belirgin bir özelliği tam sayılar grubuna grup izomorfik ya da $\mathbb{R}$'de yoğun olmasıdır. $A \subset \mathbb{R}$'nin yoğun olması, her $\epsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için A ile $(x - \epsilon, x + \epsilon) \setminus \{x\}$ kümesinin arakesitinin boşkümeden farklı olmasıdır.

$x \in \mathbb{R}$ noktasının $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin **yığılma noktası** olması, terimleri birbirlerinden farklı $a_n \to x$ olacak biçimde A'da (a_n) dizisinin olmasıdır.

A'da terimleri birbirlerinden farklı ve $a_n \to 0$ olacak biçimde bir (a_n) dizisi varsa her $x \in \mathbb{R}$ için $b_n \to x$ olacak biçimde terimleri birbirlerinden farklı bir dizi var:

Alıştırmalar

18.3. (Sıralı grubun Arşimedyan olması gerekmez.) $G = \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, e^{x_2} y_1 + y_2)$$

olarak tanımlanan cebirsel işleme göre bir sıralı grup ama Arşimedyan olmadığını gösterin.

18.4. G bir grup, $\leq$, G'de bir kısmi sıralama olsun. Her $x, y, z \in G$ için

$$x \leq y \iff xz \leq yz \text{ ve } zx \leq zy$$

koşulu sağlanıyorsa, G'ye kısmi sıralı grup denir. G kısmı sıralı grup ve her $x, y \in G$ için

$$(\text{Her } n \in \mathbb{Z} \text{ için } x^n \leq y) \Rightarrow x = e$$

koşulu sağlanıyorsa G'ye Arşimedyan özelliğini sağlıyor denir. Bir kısmı sıralı küme için Arşimedyan özelliği ile

$$(\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x^n \leq y) \Rightarrow x \leq e$$

koşul arasındaki ilişkiyi belirleyin. Hangi koşullar altında bu iki koşul denk olur.

18.5. $(\mathbb{Q}, +)$ grubunun,

$$a \leq b \iff \tfrac{b}{a} \in \mathbb{Z}$$

sıralamasına göre kısmi sıralı grup ve Arşimedyan olduğunu gösterin.

18.6. Reel sayılar cisminin toplamsal her grubunun tamsayılar grubuna grup izomorfik ya da $\mathbb{R}$'de yoğun olduğunu gösterin.

18.7. Değişmeli sıralı bir G grubun, her $x, y \in H$ için $[x, y] \cap G \subseteq H$ koşulunu sağlayan H altgrubuna **konveks** denir. Bir sıralı değişmeli grubun Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşulun, G'nin konveks altgrupların sadece ve sadece G'nin kendisi ve birim grubu olması olduğunu gösterin.

18.3 Arşimedyan Halka ve Cisim

Toplamsal grubu Arşimedyan olan sıralı halkaya **Arşimedyan halka** denir. Yani, $(R, +, ., 0, 1, \leq)$ sıralı halka ve $(R, +, 0, \leq)$ grubu Arşimedyan ise, R'ye Arşimedyan denir. Bu tanım, Bölüm 10.7'de verilen tanımlamaya denktir. Yani bir sıralı halkanın Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, verilen her $x \in F$'ye karşılık $|x| \leq n$ olacak biçimde $n \in \mathbb{N}$ olmasıdır. Elbette burada $n \in \mathbb{N}$, $n1_R$'yi temsil etmekte olup, bu tanımlamada çarpma işlemi kullanılmamıştır. Buna karşın halkanın Arşimedyan olmasını belirleyen birçok özellik çarpma işlemi üzerinden verilebilir.

Bu altbölümde çarpma işlemi sıfırdan farklı olan her Arşimedyan halkanın, $\mathbb{R}$ cisminin sıra koruyan kopya althalkası olduğu gösterilecek. Bunu göstermeden önce 7'den 70'e herkesin bildiği bir sonucu teamüllere uygun bir biçimde gösterelim. Bir sıralı cismin Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşulun, rasyonel sayılar cisminin sıralı cisimde yoğun olmasıdır: F sıralı cisim verilsin. $\mathbb{Q}$ $(= F_{\mathbb{Q}})$, F de yoğun olsun. $0 < x \in F$ verilsin. $0 < \frac{m}{n} < x$ olacak biçimde $0 < m, n \in \mathbb{Z}$, $2 \leq n$ seçelim. Böylece $\{n \in \mathbb{Z} : 2 \leq n, m < nx\}$ kümesi boşkümeden farklıdır. k, bu kümenin minumumu olmak üzere,

$$x \leq (k-1)x \leq m$$

olacağından, F'nin Arşimedyan olduğu gösterilmiş olur. Şimdi, F'nin Arşimedyan olduğunu varsayalım. $x < y$ olacak biçimde $x, y \in F$ verilsin. $0 < y - x$ olduğundan varsayım gereği, $0 < \frac{1}{y-x} < n$ olacak biçimde $0 < n \in \mathbb{Z}$ var. Yine F'nin Arşimedyan özelliği kullanılarak, $m - 1 \leq nx \leq m$ olacak biçimde $0 < m \in \mathbb{Z}$ bulunabilir. Buradan $x < \frac{m}{n}$ olur. Ayrıca, $\frac{1}{y-x} < n$ olduğundan $1 < ny - nx$ elde edilir. Buradan da,

$$m = m - 1 + 1 \leq nx + 1 < ny$$

olması kullanılarak,

$$x < \tfrac{m}{n} < y$$

elde edilir.

Teorem 18.6. *A ve B, $\mathbb{R}$ cisminin iki toplamsal altgrubu olsun. $f : A \to B$ sırayı koruyan örten grup homomorfizma ise, her $a \in A$ için*

$$f(a) = ra$$

eşitliğini sağlayan $0 \leq r \in \mathbb{R}$ var.

Kanıt: f'nin birebir olduğu kolaylıkla gösterilir; bir $0 < a \in A$ için $f(a) = 0$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $f(na) = 0$ olur. $0 < x \in A$ verilsin. En az bir $n \in \mathbb{N}$ için, $x < na$ olacağından $0 \leq f(x) \leq f(na) = 0$ ve buradan da $f(x) = 0$ olur, ve dolayısıyla, $f = 0$ ve $A = B = \{0\}$ olur. Bu durumda $r = 0$ alınabilir.

$f \neq 0$ ise f bir izomorfizma olacaktır. $0 < x, y \in A$ verilsin.

$$\tfrac{f(x)}{f(y)} = \tfrac{x}{y}$$

olduğunu gösterelim. Değilse, örneğin

$$\frac{f(x)}{f(y)} < \frac{x}{y}$$

olsaydı,

$$\frac{f(x)}{f(y)} < \frac{m}{n} < \frac{x}{y}$$

olacak biçimde $m, n \in \mathbb{N}$ seçilebilir. Buradan

$$nf(x) < mf(y) \text{ ve } my < nx$$

eşitsizlikleri elde edilir. f, sıra koruyan olduğundan, ikinci eşitsizlikten, birinci eşitsizle çelişen $mf(x) \leq nf(y)$ eşitsizliği elde edilir. Benzer çelişki

$$\frac{f(x)}{f(y)} > \frac{x}{y}$$

varsayımı için de elde edilir.

$a > 0$ olmak üzere $r = \frac{f(a)}{a}$ diyelim. $f(a) = ra$ ve $a < 0$ için

$$f(a) = -f(-a) = -r(-a) = ra$$

olur. Kanıt tamamlanır. □

Teorem 18.7 (Pickert [43], Hion [27])**.** *Çarpma işlemi sıfırdan farklı her Arşimedyan halka, $\mathbb{R}$ cisminin bir kopya sıra althalkasıdır.*

Kanıt: $(R, +, ., 0, 1, \leq)$ Arşimedyan halka olsun. Teorem 17.5 gereği $(R, +, ., 0)$, $\mathbb{R}$ cisminin toplamsal grubunun kopya sıra altgrubudur. $f : R \to \mathbb{R}$ sıralamayı koruyan grup izomorfizma olsun. Her $0 < a \in R$ için $f(aR)$ ve $f(R)$, $\mathbb{R}$'nin toplamsal altgrupları olup,

$$\lambda_a : f(R) \to f(aR),\ f(x) \to f(ax)$$

sıra koruyan örten grup homomorfizmadır. Teorem 17.6 gereği

$$f(ax) = \lambda_a(f(x)) = s(a)f(x)$$

olacak biçimde tek bir tane $0 \leq s(a)$ var. Böylece $R^+ \to \mathbb{R}^+$'ya $a \to s(a)$ fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon $a \in R$, $a < 0$ için $s(x) = -s(-x)$ alarak R'den $\mathbb{R}$'ye genellenir. $f(x) \neq 0$ olacak biçimde $x \in R$ verilsin. Her $a, b \in R$ için

$$\begin{aligned} s(a+b)f(x) &= f((a+b)x) \\ &= f(ax) + f(bx) \\ &= s(a)f(x) + s(b)f(x) \\ &= (s(a) + s(b))f(x) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır, yani

$$s(a+b) = s(a) + s(b)$$

olur. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned} s(ab)f(x) &= f((ab)x) \\ &= f(a(bx)) \\ &= s(a)f(bx) \\ &= (s(a)(s(b)f(x)) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$s(ab) = s(a)s(b)$$

elde edilir. f'nin birebir ve sıra koruyan olduğu açık. Böylece R'nin $\mathbb{R}$ cisminin kopya sıra althalkası olduğu gösterilmiş olur.

Alıştırmalar

18.8. G bir grup, $\leq$, G'de bir kısmi sıralama olsun. Her $x, y, z \in G$ için

$$x \leq y \Longleftrightarrow xz \leq yz \text{ ve } zx \leq zy$$

koşulu sağlanıyorsa, G'ye kısmi sıralı grup denir. G kısmı sıralı grup ve her $x, y \in G$ için

$$(\text{Her } n \in \mathbb{Z} \text{ için } x^n \leq y) \Rightarrow x = e$$

koşulu sağlanıyorsa G'ye Arşimedyan özelliğini sağlıyor denir. Bir kısmı sıralı küme için Arşimedyan özelliği ile

$$(\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x^n \leq y) \Rightarrow x \leq e$$

koşulu arasındaki ilişkiyi belirleyin. Hangi koşullar altında bu iki koşul denk olur.

18.9. $(\mathbb{Q}, +)$ grubunun,

$$a \leq b \Longleftrightarrow \tfrac{b}{a} \in \mathbb{Z}$$

sıralamasına göre kısmi sıralı grup ve Arşimedyan olduğunu gösterin.

18.10. Bir sıralı cismin Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşulun $(\frac{1}{n})$ dizisinin yakınsak olması gerektiğini gösterin.

18.11. Bir sıralı cisim F'de bir dizinin Cauchy olması, verilen her $0\epsilon \in F$'ye karşılık, her $k \leq n, m$ için $|f(n) - f(m)| \leq \epsilon$ olack biçimde $k \in \mathbb{N}$ olmasıdır. Bir sıralı cismin Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşulun, artan ve üstten sınırlı her dizinin Cauchy olması gerektiğini gösterin.

Kaynakça

[1] N. A'Campo. A natural construction for the real numbers. *arXiv:math*, pages 2–10, 2013.

[2] R. Arthan. The eucdoxus real numbers. *https://arxiv.org/abs/math/0405454*, 1:1–14, 2004.

[3] L. Atkinson. Where do functions come from. *College Math. J.*, 33:107–112, 2002.

[4] B. Banaschewski. On proving the existence of complete ordered fields. *Amer. Math. Monthly*, 105:548–551, 1998.

[5] R.D. Barrow. *Pi in the Sky (Gokteki pi, ceviri)*. The Clarendon Press, 1992.

[6] R. Beigel. Irrationality without number theory. *Amer. Math. Monthly*, 98:332–335, 1991.

[7] A. Benjamin and E. Altschuler. Proof of the irrationality of the square root of two in babylonian geometry problem tablets. *arXiv:1603.06656*, 2016.

[8] A. Bogomolyn. Square root of 2 is irrational. *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.*

[9] W. Bussey. The orijin of the mathematical İnduction. *Amer. Math. Monthly*, 24:199–205, 1918.

[10] F. Cajori. Orijin of the name mathematical İnduction. *Amer. Math. Monthly*, 25:197–201, 1918.

[11] F. Cajori. *A History of Mathematical Notations 1*. Dower Publications, 1928.

[12] F. Cajori. *Matematik Tarihi (Çeviri)*. ODTÜ Yayıncılık, 2014.

[13] P. J. Campbell. The origin of "zorn's lemma". *Historia Math.*, 5:77–89, 1978.

[14] A Çevik. *Matematik Felsefesi ve Matematiksel Mantık.* Nesin Matematik Köyü, 1951.

[15] A. Cevik and Z. Ercan. Nedir bu "modern" matematik? *Bilim ve Gelecek*, 154, 2016.

[16] C. Crosby. An examination of richard dedekind's continuity and irrationa numbers. *Rose-Hulman Undergraduate Math Journal*, 17:134–145, 2016.

[17] R. Dedekind. *Stetigkeit und irrationale zahlen, braunschweig.* Vieweg, 1872.

[18] C. d'Elbee. On the complete ordered fields. *internette*, 12:1–49, 2003.

[19] T. Deveau and H. Teismann. 72+42: characterizations of the completeness and archimedean properties of ordered fields. *Real Anal. Exchange.*, 2:261–303, 2013.

[20] R. Dieter. Some definitions of the concept of function from joh. bernoulli to n. bourbaki. *Math. İntelligencer*, 6:72–77, 1984.

[21] K. Eidolon and G. Oman. A short proof of the bolzano-weierstrass theorem. *The College Mathematics Journal*, 4:288–289, 2017.

[22] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Levy. *Foundations of Set Theory.* North-Holland, 1973.

[23] D. S. Greenstein. On the number of subsets of a finite sets. *Math. Mag.*, 43:36–36, 1970.

[24] T. Grundhofer. Describing the real numbers in terms of integers. *Arch. Math.*, 85:79–81, 2005.

[25] J. G. Hardy. The cont'nuum and second number class. *Proc. London Math. Soc. Series 2*, 4:10–17, 1906.

[26] H. Herrlich. *Axiom of Choice.* Springer, 2006.

[27] Ya. V. Hion. Archimedean ordered rings. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.).*, 9:237–241, 1954.

[28] 0. Holder. Die axiome der quantitat und die lehre vom mass. *Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Cl.*, 51:1–64, 1901.

[29] D. Kantrowitz and M. Neumann. Another face of the archimedean property. *The College Mathematics Journal*, 2:139–141, 2018.

[30] R. Kaplan. *The nothing that is : a natural history of zero.* Oxford University Press, 2000.

[31] I Kleiner. *Excursions in the History of Mathematics (chapter:A Brief History of the Function Concept.* Birhauser, 2012.

[32] Ş. Koçak. *50 soruda matematik.* Bilim ve Gelecek Kitaplığı, 2011.

[33] J. Lewin. A simple proof of zorn's lemma. *The American Mathematical Monthly*, 4:353–354, 1991.

[34] D. Machale. Proof without wors:$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is a countable set. *Math. Mag.*, 77:55–55, 2004.

[35] A. Margaris. Successor axioms for the integesr. *Amer. Math. Monthly*, 68:441–444, 1961.

[36] J. Mazur. *Matematik Sembollerinin Kısa Tarihi.* Turkiye İş Bankası, 2014.

[37] G. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and İnfluence.* Springer, New York, 1992.

[38] A. Nesin. *Önermeler Mantığı.* TÜBA, 2010.

[39] E. Noether. Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83:24–66, 1921.

[40] G. Peano. Sull'integrabilita della equazioni diffrenziali di primo ordine. *Atti Acad. Sci. Torino.*, 21:677–685, 1886.

[41] G. Peano. Demonstration de l'integrabilite des equations differentielles ordinaires. *Math. Ann.*, 37:182–228, 1890.

[42] R Peter. *Rekursive Funktionen.* Akademischer Verlag, Budapest, 1951.

[43] G. Pickert. *Einfuhrung in die hohere Algebra.* Vandenhoeck and Ruprecht, 1951.

[44] H. Poincare. Sur les courbes definies par les equations differentielles. *J. de Math. Pures et Appl*, 1:167–244, 1885.

[45] J. E. Rubin. Finite sets. *Math. Mag.*, 46:183–192, 1973.

[46] B. Russell. *The Principle of Mathematics I.* Cambridge University Press, 1903.

[47] A. Saidan. The arithmatic of abu-wafa. *Isis*, 65:367–374, 1974.

[48] E. Schechter. *Handbook of Analysis and foundations.* Academic Press, 1997.

[49] J. A. Seguier. *Elements de la Thoorie des Groupes Abstraits.* Gauthier-Villars, 1904.

[50] R. Street. An efficient construction of real numbers. *Austral. Math. Soc. Gaz..*, 12:57–58, 1985.

[51] T. Tamura. On a monoid whose sobmonoids form a chain. *Tokushima Univ. Math*, 5:8–16, 1954.

[52] A. Tarski. Sur les ensenbles finis. *Fund. Math.*, 6:45–95, 1924.

[53] H. Teismann. Toward a more complete list of completeness axioms. *Amer. Math. Monthly*, 120:99–114, 2013.

[54] A. Törün. Karekök İki krizi. *Bilim ve Gelecek*, 1:70–71, 2018.

[55] S. Ustuzhanin. A novel way to prove the irrationality of square root of 2. *Amer. Math. Monthly*, 124:59–59, 2017.

[56] 0 Viirman. *The function concept and university mathematics teaching.* Karlstad University Studies, 2014.

[57] W. von Dyck. Gruppentheoretische studien. *Mathematische Annalen*, 20:1–44, 1882.

[58] I. Weiss. The real numbers-a survey of constructions. *Rocky Mountain J. Math.*, 45:737–762, 2015.

[59] J. D. Weston. A short proof of zorn's lemma. *Arch. Math. (Basel)*, 8:279–279, 1957.

[60] E. Zermelo. Untersuchungen Über die grundlagen der mengenlehre. i. *Math. Ann.*, 2:261–281, 1908.

[61] M. Zorn. A remark on method in transfinite algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 41:667–670, 1935.

Dizin

Zafer Ercan

5 Kasım 1965 yılında Sivas'ın Gemerek ilçesinin İnkışla köyünde doğdu. Sırasıyla, İnkışla İlköğretim Okulu (1976), Ankara İncirli Ortaokulu (1979), Ankara İncirli Lisesi (1982), Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü (1987), Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ) Matematik Bölümü (Y. Lisans, 1990), The Queen's University of Belfast (Doktora, 1993) okullarını bitirdi.

Lise son sınıfta iken din dersinin seçmeli olmasına karşın "zorunlu" olarak verilmesini kabul etmemesinden dolayı 5 günlük uzaklaştırma cezası aldı.

Matematik alanındaki çalışma konuları fonksiyonel analiz ve biraz da genel topolojidir. Bu alanlarda yazılmış akademik yayınlarının yanında Matematik Dünyası dergisinde yayınlanmış birçok eğitsel yayınları da vardır. "*Bomboş olmasına karşın bomboş durmayıp herşeyi dolduran kümeye boşküme denir*" ve "*Matematikte bir kümenin sonsuzu, o kümeye ait olmayan noktadır*" tanımlarının mucididir.

On yılı aşkın bir süre ODTÜ matematik bölümünde öğretim üyeliği yaptıktan sonra buradan "kovulmuştur" ve şu anda Abant İzzet Baysal Üniversitesi'nde öğretim üyeliği yapmaktadır. ODTÜ'de öğretim üyesiyken bir yazısında, "*işletme bölümleri pazarlama bölümleridir,*" ifadesinin yer alması nedeniyle hakkında; dönemin rektör yardımcısı işletme bölümünün daha sonra rektörlük yapacak bir öğretim üyesinin yönlendirmesiyle soruşturma açıldı. Savunmasında kendisine ceza verilmesi yerine bir zamanlar devletin vergi rekortmeni olan Matild Manukyan'a üniversitenin işletme fahri doktora ünvanı verilmesini önerdi.

Türkiye üniversitelerinde akademik kadro ihtiyacının liyakata göre değil, ilkel bir ağ üzerinden yapıldığını, yani akademik kadro atamalarında "ihaleye fesat karıştırma" yönteminin uygulanmakta olduğunu düşünmektedir. Bu doğrultuda, 1982 yılından itibaren gelmiş geçmiş en "dürüst" akademik ilanın 01.08.2013 tarihinde Rize'de yayımlanan bir üniversite ilanı olduğunu çeşitli ortamlarda gündeme getirdi.

Değer verdiği yazılarından birisi Matematik Dünyası dergisinin 2003-II sayısında yayınlanan "Taahhütname" başlıklı yazısıdır. Bu yazıda, bazı matematik problemlerinin çözümü için önerilen Bir Milyon Dolar Ödül anlayışını eleştirdi. Bu problemlerden biri olan ve Poincaré Sanısı olarak bilinen problemi çözen Grigori Perelman'ın bu ödülü, "*sirklerde sergilenecek hayvan değilim*" açıklamasıyla reddetmiş olmasından dolayı insanlık adına gurur duydu.

Matematik Köyü'nü yeniden doğan Köy Enstitüsü olarak değerlendirmekte. Bu nedenle, bu köyün yaşamasını bir anlamda insanlık onuru olarak görmektedir. Köy kurucusu Ali Nesin'e Nisan 2016'de yazdığı bir mektubu bu duyarlılık çerçevesinde "*Yaşasın Matematik Köyü. Kahrolsun Matematik Köyü Dershanesi*" sloganlarıyla bitirdi.

Komünisttir.