

Eşkenar Üçgen Sorusu

Matematiksel araştırma yapmak çok kolaydır. Çünkü matematikte araştırma yapmak için kendi kendine bir soru sormak ve bu soru üzerinde düşünmek yeterlidir.

Araştırma yapmak, soruya yanıt vermek demek değildir. Araştırma yapmak, soru üzerinde düşünmek, sorunun derinliğini, zorluğunu anlamak, o soruya benzer sorular sormak demektir. Sorulan soruya yanıt verilirse de fena olmaz elbet, ama ille de yanıt vermek gerekmez.

Aşağıda soracağım soruyu bir ilkokul öğrencisinin kendi kendine soramaması için bir neden göremiyorum; soruyu yanıtlayamaması için bir neden görebiliyorum ama soramaması için bir neden göremiyorum.

Ben ilkokuldayken bu tür soruları sorabilir miydim kendi kendime? Hayır! Bugün düşünüyorum da, ilkokuldayken bu tür soruları kendi kendime neden soramadığımı bulamıyorum. Neyim eksikti? Belki de soru sormak öğretilmemiştii bana. Oysa soru sormasını öğrenmek eğitimin en önemli ögesidir. Ne yazık ki öğrenciler okullarda soru sormayı değil yanıt vermeyi öğreniyorlar.

Çocukları bu tür soruları sorabilecek biçimde eğitebildiğimiz gün, yeryüzünün tüm ikincil sorunlarının ya çözüleceğine ya da ortadan kaybolacağına inanıyorum.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \\ z^2 + t^2 \\ (x - z)^2 + (y - t)^2 \end{aligned}$$

Üçgenimiz eşkenar olduğundan,

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2 \quad (1)$$

ve

$$x^2 + y^2 = (x - z)^2 + (y - t)^2 \quad (2)$$

eşitlikleri geçerlidir. İkinci eşitliği açıp sadeleştirsek,

$$z^2 + t^2 = 2xz + 2yt \quad (3)$$

eşitliğini buluruz. (3) eşitliğinin sağ tarafındaki sayı bir çift sayıdır, demek ki sol tarafındaki de çifttir. Dolayısıyla z ve t sayıları aynı çiftlikte olmalı, yani biri çiftse öbürü de çift olmalı, biri tekse öbürü de tek olmalı. (Yoksa sol taraftaki $z^2 + t^2$ bir çift sayı olamaz.)

Aynı şey x ve y sayıları için de geçerlidir elbet¹: Ya her ikisi birden çifttir ya da her ikisi birden tek.

Bir an için z ve t 'nin çift olduklarını varsayalım. O zaman x ve y tek olmak zorundalar. Demek ki x , y , z ve t sayılarını şöyle yazabiliriz:

$$x = 2x_1 + 1$$

$$y = 2y_1 + 1$$

$$z = 2z_1$$

$$t = 2t_1$$

(Burada x_1 , y_1 , z_1 , t_1 tamsayılarıdır.) Bu eşitlikleri (1)'e taşıyalım:

$$(4x_1^2 + 4x_1 + 1) + (4y_1^2 + 4y_1 + 1) = 4z_1^2 + 4t_1^2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu son eşitliğin sol tarafındaki sayı dörde bölündüğünde geriye 2 kalır, öte yandan sağ taraftaki sayı dörde bölündüğünde geriye 0 kalır. Bu bir çelişkidir. Demek ki varsayımımız yanlışmış, yani z ve t çift olamazlar, tek olmak zorundalar.

1 (x, y) ile (z, t) arasında bir ayırım yapmadık. (z, t) için kanıtladığımız her şeyi (x, y) için de kanıtlayabiliriz.

Aynen z ve t için yaptığımız gibi, x ve y 'nin de tek olduklarını kanıtlayabiliriz. Demek ki x , y , z ve t sayıları tek sayılar. O zaman, bu dört sayıyı,

$$x = 2x_1 + 1$$

$$y = 2y_1 + 1$$

$$z = 2z_1 + 1$$

$$t = 2t_1 + 1$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitlikleri (3)'e yerleştirelim ve hesaplayalım:

$$(4z_1^2 + 4z_1 + 1) + (4t_1^2 + 4t_1 + 1) = 2(2x_1 + 1)(2z_1 + 1) + 2(2y_1 + 1)(2t_1 + 1).$$

Eşitliğin solundaki sayı dörde bölündüğünde 2 kalır, ama sağdaki sayı dörde tam olarak bölünür. Gene bir çelişki elde ettik. Demek ki öyle bir üçgen yokmuş.

Şimdi araştırma yapmak istiyorsanız, bu sorudan esinlenerek kendi kendinize sorular sorup yanıtlamaya çalışabilirsiniz. Soracağınız sorular yukarıda sorduğum soru kadar kolay olmayabilir, hatta belki de matematikte bugüne dek yanıtlanmamış bir soruyu kendinize sorabilirsiniz ayrıma varmadan, daha iyi! Zor sorularla uğraşmak, kolay sorularla uğraşmaktan daha eğlenceli, yani aslında daha kolaydır!

