Aristo'nun Çatışkısı

Yarıçapı r olan bir çemberin çevresinin $2\pi r$, alanının da πr^2 olduğunu ilkokul öğrencileri bile bilirler. Daha doğrusu bilmeleri gerekir. Öyle söylenmiştir. Öğretmen,

– r yarıçaplı bir çemberin çevresi $2\pi r$, alanı da πr^2'dir, demiştir.

Öğrenciler de,

– Başüstüne örtmenim! demişlerdir.

Ne iyi öğretmen! Ne iyi öğrenciler!

Öğretmen söylüyor, öğrenci inanıyor.

Nerden belli öğretmenin yalan söylemediği? Nerden belli kitapların yalan yazmadığı? Niye öğretmenlere ve kitaplara inanılır? Oysa konu matematik olunca öz babana bile güvenmeyeceksin.

Sanki yukardan, "çemberin çevresi $2\pi r$, alanı πr^2'dir," diye bir vahiy inmiş...

Bilgi, kutsal kitaplarda yazılıymış gibi sunulmamalı. Özellikle matematik... Matematik, sanıldığı gibi bir bilgiler toplamı değildir. Matematik, neyin neden doğru olduğunu anlama sanatıdır. Yani kanıtsız matematik olmaz.

Sorgulama ve kuşku duyma alışkanlıkları aşılanmıyor öğrenciye. Bu alışkanlık matematik dersinde de aşılanmazsa hiçbir derste aşılanmaz. Eğer öğrenciler anlayabilecek yaşta ve düzeydeyse, formüllerin neden doğru olduğu anlatılmalı, değillerse, en azından bu formüllerin bir kanıtı olduğu, bu kanıtı büyüdükleri zaman anlayabilecekleri söylenmeli. Eğer formüllerin neden doğru olduğunu öğretmen de bilmiyorsa, bunu öğrencilere açık açık söylemeli,

– Kusura bakmayın çocuklar, demeli örneğin, bu formüllerin neden doğru olduğunu ben de bilmiyorum. Bir bilene sormalı.

Öğretmenler her şeyi bilemezler ki.

Bir gün bir öğrencim, dersdışı sohbet sırasında, derslerimde en sevdiği şeyin, öğrencilerin sorularına kimi zaman hemen yanıt vermeyip, sanki yanıtı bilmiyormuşum gibi bir süre düşünüyormuş numarası yapmam olduğunu söylemişti. Şaşırdım. Oysa hiç öyle numaralar yapmam. Başka numaralarım vardır ama bu tür numaralarım yoktur. Sorulan sorunun yanıtını hemen bilemeyebilirim, düşünmem gerekebilir. Sorulan sorunun yanıtını hiç bulamadığım da olur. Kaç kez başıma gelmiştir. Hocaların her şeyi bildiğini sanan ve bu düşünceye alıştırılan öğrenciler numara yaptığımı sanmışlar. Doğrusunu anlattım öğrencime elbet.

Fransa'da matematik öğrencisiyken bir ara Sorbonne'un felsefe bölümüne, üçüncü sınıfa yazıldım. Hocalar çok kötüydü. Ders boyunca ayağa kalkmazlar, karatahtayı hiç kullanmazlar, kürsüden tekdüze bir sesle notlarını okurlardı. Alışamadım. Çok sıkıldım. Nerde benim ders boyunca oturmayan, heyecanlarını saklayamayan, matematiğin güzelliğini paylaşmak için canla başla çalışan matematik hocalarım! Üstelik Sorbonne'un hocaları, felsefe değil, felsefe tarihi okutuyorlardı. Hatta felsefe tarihi bile değil, filozoflardan şatafatlı sözlerle sözediyorlar, daha çok edebiyat yapıyorlardı: "Ey karanlıkların düşmanı! Ey hiç evlenmemiş bâkir adam! Doğumu olan 22 Nisan 1724'ten ölümü olan 12 Şubat 1804'e dek hiç terketmediği Königsberg kasabasının o görkemli gotik katedralinin önünden her gün aynı saatte geçen ve kasabalıların bu sayede saatlerini ayarlamalarını sağlayan ey dakik adam! Ey Immanuel Kant!..” Çok abartmıyorum... Dersler, içeriği olmayan boş sözlerle geçiyordu. Bıraktım dersleri. Sartre’ı ve varoluşçuluğu anlatan bir hocanın dersi dışında... O hoca çok ünlüydü. Tıklım tıklım dolan koca bir amfide verirdi derslerini. Yaşlı başlı insanlar da gelirdi derse. Birçok öğrenci hocanın dersini teybe kaydederdi, belli ki hocanın dediklerinden hiçbir şey kaçırmak istemiyorlardı. Hiç oturmazdı hoca, hep karatahtanın önündeydi. Çok da güzel konuşurdu. Bir gün, derse girer girmez,

– Sorusu olan var mı? diye sordu.

İlk kez böyle bir soru soruyordu. O gün dersini mi hazırlamamıştı ne?

Oldukça uzun bir sessizlikten sonra bir delikanlı çekine çekine parmak kaldırdı.

– Mösyö, dedi, Sartre’ın Imaginaire adlı yapıtının bilmemkaçıncı sayfasında anlamını anlamadığım ve hiçbir sözlükte bulamadığım şöyle bir sözcük var, ne demektir bu sözcük?

Öğrenci sözcüğün geçtiği tümceyi de okudu.

Hoca soruyu sorana baktı, baktı, baktı... Sonra karatahta önünde bir aşağı bir yukarı dolaşmaya başladı. Sınıftan çıt çıkmıyordu. Yarım saate yakın dolandı durdu ve sonra,

– Önce, dedi, Imaginaire’in Sartre’ın düşüncesindeki yerini saptayalım...

Başladı Imaginaire’den sözetmeye... Uzun uzun... Daha önce ben bu adamın ne dediğini aşağı yukarı anlardım, ne oldu birdenbire böyle? Dersin bitmesine beş dakika kala,

– Evet, dedi, başka sorusu olan var mı?

Kimsenin sorusu yoktu. Ders bitmişti.

Sorbonne'da tanıdığım hocalardan bir bu hocaya saygım vardı, o hocaya da saygım kalmamıştı artık. Oysa, "O sözcüğü ne yazık ki ben de bilmiyorum," deseydi, "Eğer bulabilirsem gelecek ders anlatırım," deseydi, saygım bin kat artardı[1].

Dediğim gibi öğretmen bilmediğini açık açık söyleyebilmelidir. Öğretmen her şeyi bilemez. Yalnızca bunu öğrenmek bir öğrenci için büyük bir kazançtır.

Bir öğrencim anlattı. Lisedeyken üniversite sınavlarına hazırlanmak için özel matematik kursuna gidiyormuş. Hocası matematikte sözümona yeni bir formül bulmuş. Formülü karatahtaya yazdıktan sonra, öğrencilere dönüp,

– Aman haa, demiş, bu formül bu sınıftan dışarı çıkmasın. Kimselere çıtlatmayın, aramızda kalsın...

Sanki insanlığı yokedecek korkunç bir silah bulmuş!

Öğrencilerden biri parmak kaldırıp,

– Hocam, demiş, bunun bir kanıtı var mıdır?

Hoca kıpkırmızı kesilmiş, çok kızmış, küplere binmiş.

– Kanıt da ne demek! diye kükremiş. İnanmayan çıksın ortaya formülün yanlış olduğunu göstersin! Hadi bakalım, hodri meydan!

Öğrencilerde çıt yok. Soran sorduğuna bin pişman.

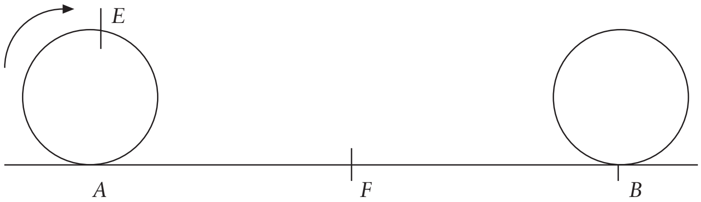
Çok gevezelik yaptık, çembere geri dönelim. Bir sonraki yazıda, r yarıçaplı bir çemberin çevresinin neden $2\pi r$, alanının neden πr^2 olduğunu anlatacağım. Bu yazının konusu bu değil. Bu yazının konusu çemberler üzerine bir çatışkı (bir paradoks.) Hem de çok eski bir çatışkı, taaa Aristo'dan kalma, yani aşağı yukarı 2350 yıllık.

Aşağıdaki şeklin solundaki daire bir tekerlektir. Bu tekerlek yere A noktasından değmektedir. Tekerleğimiz sağa doğru tam

---

1 Sözünü ettiğim hoca ünlü bir filozoftur. Ölmüş. Ama gene de adını vermeyi doğru bulmuyorum.

bir tur atarak ve kaymadan (yani patinaj yapmadan) yuvarlansın. Şimdi tekerlek sağdadır ve yere *B* noktasından değmektedir. *AB* doğru parçasının uzunluğu tekerleğin (çemberin) çevresine eşittir elbette.

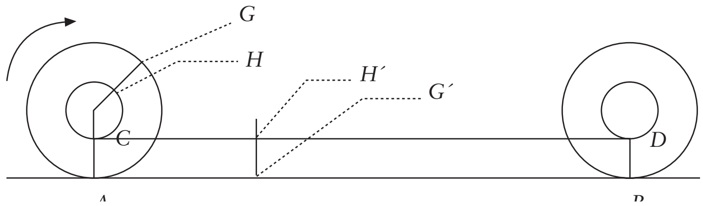


Çemberin her noktası bir zaman sonra *AB* doğru parçasının bir noktasına değecektir. Örneğin çemberin tepe noktası olan *E* noktası, *AB* yolunun tam ortası olan *F* noktasına değecektir. Bir başka deyişle çemberin noktalarıyla *AB* doğru parçasının noktaları arasında birebir bir eşleşme vardır.

Buraya değin bir sorun yok.

Şimdi, tekerleğin içine tebeşirle küçük bir çember çizelim.

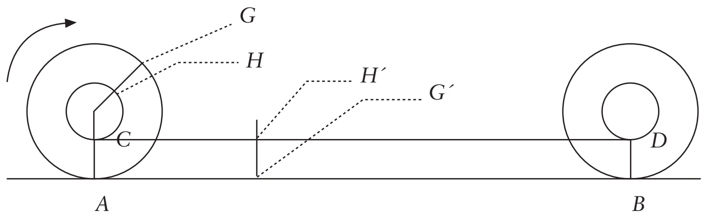
Tekerlek yuvarlandıkça bu küçük çemberin izleyeceği yola bakalım.



Tekerlek tam bir tur yaptığında *C* noktası *D* noktasına gelecektir, çünkü *A* ve *C* noktalarından geçen yarıçap, bir tur sonra *B* ve *D* noktalarından geçen yarıçap olacaktır.

Küçük çemberin her noktası, tekerlek yuvarlandıkça, *CD* doğrusunun bir ve bir tek noktasına değecektir. Örneğin aşağıdaki şekilde görülen *H* noktası, *CD* doğrusuna *H′* noktasından değecektir, çünkü *H* ve *G* noktalarından geçen yarıçap, yol boyunca bir ara, *H′* ve *G′* noktalarından geçen yarıçap olacaktır.

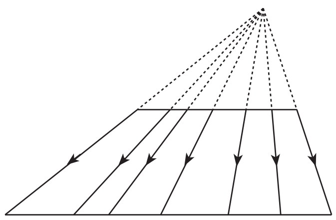
Demek ki *CD* doğru parçasının uzunluğu küçük çemberin çevresine eşittir, çünkü küçük çemberin her noktası *CD* doğru parçasının bir ve bir tek noktasına eş düşmektedir. Ama *CD*'nin uzunluğu *AB*'nin uzunluğuna eşit ve *AB*'nin uzunluğu büyük çemberin uzunluğuna eşit. Demek ki küçük çemberin çevresiyle büyük çemberin çevresi birbirine eşittir!



Bu bir çatışkıdır (paradokstur.) Küçük çemberin çevresi büyük çemberin çevresine eşit olmamalı...

Yanlış nerede?

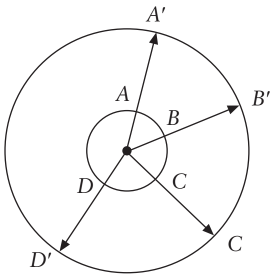
Yanıtı vereyim. Yanlış şu tümcede: *Demek ki CD doğru parçasının uzunluğu küçük çemberin çevresine eşittir, çünkü küçük çemberin her noktası CD doğru parçasının bir ve bir tek noktasına eş düşmektedir*.



Çemberle *CD* doğrusunun noktalarının birebir eşlenmesi, ikisinin uzunluğunun aynı olması anlamına gelmez. Örneğin yanda koyu çizilmiş iki doğru parçasının uzunlukları birbirine eşit değildir ama noktaları arasında birebir bir eşleşme vardır. Şekildeki yöntemle kısa doğru parçasıyla büyük doğru parçasının noktaları arasında bir eşleşme olduğu görülür.

Yukardaki çemberlerin noktaları arasında da bariz bir eşleme vardır. İşte o eşleme:

Aynı şekilde, yandaki iki çemberin noktaları arasında da birebir bir eşleşme vardır, ama uzunlukları ayrıdır.



Noktaların eşleşmesinin uzunluklarının eşit olduğu anlamına gelmediğini ilk dile getiren ve böylece Arşimet paradoksunu da ilk çözen on dokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında yaşamış olan Alman matematikçi Cantor'dur[2].

2 Kaynakça: [1, 2, 3].