Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar

"Tavla Üzerine Bir Soru" adlı yazıda kuramsal olarak sonsuz bir oyun olan tavlanın gerçekte, yani uygulamada, sonsuz olup olmadığı sorusunu sorduk. Bu yazıda kuramsal olarak sonsuz, ancak uygulamada sonlu olan, yani oynandığında her zaman (yüzde yüz olasılıkla) biten bir oyundan söz edeceğim.

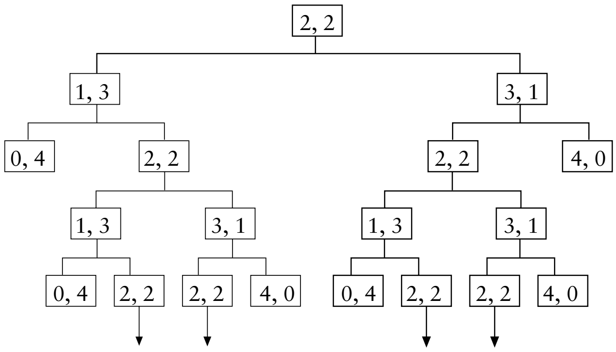
Oyunumuz iki kişi arasında oynanıyor. Yazı-tura atılıyor. Yazı gelirse birinci oyuncu ikinciden 1 lira alıyor, tura gelirse ikinci oyuncu birinciden 1 lira alıyor. Oyunculardan birinin parası bittiğinde oyun da bitiyor.

Eğer iki oyuncunun da oyuna başlarken ikişer lirası varsa ve sürekli bir yazı bir tura gelirse, oyun sonsuza dek sürer; çünkü bu yazı-tura atışlarıyla oyunculardan birinin parası bitmez.

Öte yandan bu oyunu ne zaman oynasanız oyun biter! Hatta oldukça çabuk biter, iki dakika bile sürmez. Neden? İki dakika boyunca bir yazı bir tura gelme olasılığı çok zayıftır da ondan. Bu yazıda bunu kanıtlayacağız. Kuramsal olarak sonsuza dek sürebilen bu oyun, uygulamada sonsuza dek süremez. Çünkü, bu oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı öyle küçük, öyle küçüktür ki... sıfıra eşittir.

Bu olguyu kanıtlamadan önce biraz eğleneceğiz. Eğlence, matematiğin önemli öğelerinden biridir, savsaklamaya gelmez. Yeterince eğlendikten sonra bu olgunun matematiksel kanıtını vereceğiz.

Oyunu daha iyi anlamak için oyunun “ağacını” bulalım. Oyun (2, 2) durumu ile başlıyor. Yani başlangıçta her iki oyuncunun da ikişer lirası var. Diyelim biz birinci oyuncuyuz ve yazı gelince kazanıyoruz. Ağacın tepesine (2, 2) yazalım. Para atıldı. İki olasılık var: Ya tura gelecek ve kaybedeceğiz ya da yazı gelecek ve kazanacağız. Kaybedersek oyunun yeni durumu (1, 3) olacak, yani bizim 1 liramız, öbür oyuncununsa 3 lirası olacak. Bu (1, 3) durumunu ağacın soluna yazalım. Kazanırsak (3, 1) durumuna erişeceğiz. Bunu da ağacın sağına yazalım. Ağaç sağlı sollu kök salar. Soluna kaybettiğimizde, sağınaysa kazandığımızda erişeceğimiz durumu yazarız. (3, 1)’den sonra gene iki durum ortaya çıkabilir: (2, 2) ve (4, 0) durumları. (2, 2)’yi sola, (4, 0)’ı sağa yazalım. (4, 0) durumunda oyun biter ve ağaç kök salmaz. (2, 2) durumundaysa oyun sürer. İşte oyunun ilk dört aşamasını gösteren ağaç:



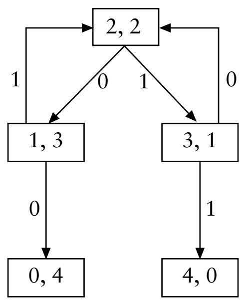
Oyun ancak (4, 0) ve (0, 4) durumlarından birine geldiğinde biter, öbür durumlarda sürer. Bu yüzden dördüncü aşamadaki (2, 2) durumlarında ağaç kök salmayı sürdürür.

Bu ağaç sonsuz bir ağaçtır. Köklerden bazıları bitse bile, köklerin kökü kurumaz. Ağaç sonsuzdur çünkü oyun sonsuzdur. Örneğin, (2, 2), (1, 3), (2, 2), (1, 3), ... diye durmadan sonsuza dek uzayıp giden bir kök vardır.

Oyunun sonsuz olduğunu göstermek için illa sonsuz bir ağaç yapmaya gerek yoktu. Sonlu bir şemayla da bu sonsuz oyunun gidişini gösterebiliriz. Bu şemayı çizelim. Oyunda beş durum var:

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)

durumları. Bu beş durumu birer kare içine alalım. Bir durumdan öbür duruma nasıl geçildiğini bir okla gösterelim. Eğer bir durumdan öbür duruma kazanarak geçebiliyorsak, okun kenarına 1 koyalım. Kaybederek geçebiliyorsak 0 koyalım. Örneğin, (1, 3) durumundan (2, 2) durumuna kazanarak geçebildiğimizden, (1, 3) durumundan (2, 2) durumuna giden oka 1 adını veririz. İşte bu oyunun şeması:



(0, 4) ve (4, 0) durumlarında oyun bittiğinden, bu iki durumdan ok çıkmaz.

Bu şemaya bakarak oyunun sonsuz olduğunu nasıl anlarız? Eğer bir kısır döngü (yani bir daire) varsa oyun sonsuz demektir. (2, 2) durumundan başlayarak ve okları izleyerek ya (4, 0) ya da (0, 4) durumlarına gelmek zorunda değilsek oyun bitmez. Örneğin (2, 2)'yle (1, 3)'e gidip gelen bir kısır döngü vardır. Bunun gibi (2, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), ... döngüsü de döner durur. Demek bu oyun sonsuz bir oyun.

İlk çizdiğimiz ağaca geri dönelim. Ağaca alıcı bir gözle baktığımızda oyunun birinci ve üçüncü yazı-tura atışlarından sonra bitmediği anlaşılıyor. Biraz düşününürsek, oyunun tek sayılı yazı-tura atışlarından sonra bitmeyeceğini görürüz (örneğin tümevarımla.) Oyun 2, 4, 6 gibi çift sayılı atışlardan sonra bitebilir ancak.

Oyunun ikinci yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım[1]. Ağacın ikinci kuşak köklerine bakalım. Dört dal var. Her birinin olasılığı 1/4'tür, çünkü ikinci kuşaktaki (0, 4), (2, 2), (2, 2) ve (4, 0) durumlarına ancak sırasıyla TT (tura tura), TY (tura yazı), YT, YY atıldığında erişebiliriz. Bu dört durumdan ikisinde oyun bitiyor, ikisinde bitmiyor. Dolayısıyla, ikinci yazı-tura atışında oyunun bitme olasılığı 1/4+1/4, yani 1/2'dir.

Şimdi oyunun en fazla dördüncü yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım. Ağaca bakarak, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında nasıl bitebileeğini buluruz:

TT, TYTT, TYYY, YTTT, YTYY, YY

atıldığında oyun biter. Bu 6 yazı-tura atışının (olayın) olasılıkları sırasıyla şöyle:

1/4, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4.

Dolayısıyla, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında bitme olasılığı bu sayıların toplamıdır, yani 3/4'tür.

Oyunun en fazla altı yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplayalım. Yukardaki ağacı sürdürecek olursak, altıncı aşamada 4 tane (0, 4) ve 4 tane (4, 0) olduğunu görürüz. Oyunu sona erdirecek bu 8 kökten herbirine ulaşma olasılığı $1/2^6$, yani 1/64. Dolayısıyla oyunu bitiren bu 8 kök uçlarından birine ulaşma olasılığımız 8/64, yani 1/8. Bu olasılığı bir önceki paragrafta bulduğumuz 3/4 olasılığına ekleyecek olursak oyunun altı ve daha az yazı-tura atışında bitme olasılığını buluruz. De-

1 Paranın hileli olmadığını varsayıyoruz. Yani yazı gelme olasılığı 1/2, tura gelme olasılığı 1/2.

mek ki, oyunun en fazla altı yazı-tura atışında bitme olasılığı 3/4 + 1/8 = 7/8'dir.

İkinci, dördüncü ve altıncı yazı-tura atışlarından önce oyunun sona erme olasılıklarının sırasıyla

$$1/2, 3/4, 7/8$$

olduğunu bulduk. Okur, oyunun en fazla sekiz yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplarsa 15/16 bulacaktır.

Bu kadar eğlence yeter, artık matematik yapalım.

Bir oyuncuda A lira, öbür oyuncuda B lira olsun. Oyunun hangi aşamasında olursak olalım, üstüste $A + B$ kez yazı atıldığında, oyunculardan birinin parası biter, hatta daha önce de bitebilir. Demek ki, eğer 1 olasılıkla üstüste $A + B$ kez yazı atacağımızı kanıtlarsak, bütün yazı-tura oyunlarının 1 olasılıkla sonlu bir zamanda biteceğini kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla şu teoremi kanıtlamalıyız:

Teorem. $n > 0$ *herhangi bir tamsayı olsun. Sonsuz kez yazı-tura atıldığında üstüste* n *kez tura gelme olasılığı* 1'*dir*, *yani yüzde yüzdür*.

Bu teorem, tura gelince kazananın oyunu kazanacağı anlamına gelmez. Üstüste $A + B$ kez tura gelecektir (1 olasılıkla.) Orası kesin. Üstüste $A + B$ kez de yazı gelecektir. O da kesin. Ama hangi oyuncu daha önce kaybedecektir? Orası kesin değil. Şansa bağlı[2].

Teoremin Kanıtı: Ardarda n kez yazı-tura atıldığında hep tura gelme olasılığı $1/2^n$ dir. Dolayısıyla n yazı-tura atışının hepsinin birden tura olmama olasılığı $1 - 1/2^n$ dir. Bu sayıya α diyelim:

---

2 "Yoksulun Şansı" adlı yazıda (sayfa 143) hangi oyuncunun kaç olasılıkla oyunu kazanacağını bulacağız.

$\alpha = 1 - 1/2^n$.

$0 \leq \alpha < 1$ eşitsizlikleri birazdan önem kazanacak, aklımızın bir köşesinde tutalım.

Şimdi $2n$ kez yazı-tura atalım. $2n$ yazı-tura atışında n kez üstüste tura gelme olasılığına β_2 diyelim. β_2 sayısını bulmak kolay olmayabilir, ama bu sayının $1 - \alpha^2$'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz. $2n$ atışta nasıl üstüste n kez tura gelebilir? Çeşitli biçimlerde gelebilir. Örneğin ilk n atış salt tura olabilir, ya da son n atış salt tura olabilir. Ne birinci n atışın, ne de ikinci n atışın salt tura olmama olasılığı α^2'dir. Demek ki ya birinci n ya da ikinci n atışta salt tura gelme olasılığı $1 - \alpha^2$'dir. Dolayısıyla $2n$ atışta n kez üstüste tura gelme olasılığı en az $1 - \alpha^2$'dir. Yani,

$$1 < \alpha^2 \leq \beta_2 \leq 1$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Yukardaki akıl yürütmeyi $3n$, $4n$ ve genel olarak kn atış için yapabiliriz. Şöyle yaparız: $k > 0$ bir doğal sayı olsun ve kn kez yazı-tura atalım. β_k, kn atışta üstüste en az n kez tura gelme olasılığı olsun.

$$1 < \alpha^k \leq \beta_k \leq 1 \qquad (1)$$

eşitsizliklerini kanıtlamak istiyoruz. $\beta_k \leq 1$ εşitsizliği elbette doğru. Birinci eşitsizliğe bakalım. Ne ilk n atışın, ne ikinci n atışın, ... ne de k'inci n atışın salt tura olma olasılığı a^k'dir. Dolayısıyla bu kn atıştan birinde (ya birinci, ya ikinci, ... ya da $k$inci n atışlardan birinde) salt tura gelme olasılığı $1 - a^k$'dir. Demek ki kn atışta üstüste n kez tura gelme olasılığı $1 - a^k$ sayısından fazladır.

Yani $1 < \alpha^k \leq \beta_k$ eşitsizliği geçerlidir. (1)'i kanıtladık.

$0 < \alpha < 1$ eşitsizliklerinden dolayı, k sonsuza gittiğinde α^k sayısı sıfıra yakınsar[3] ve $1 - \alpha^k$ sayısı bire yakınsar:

$$\lim_{k \to \infty} (1 - \alpha^k) = 1.$$

(1) eşitliğinde k'yi sonsuza götürürsek,

$$1 = \lim_{k \to \infty} (1 - \alpha^k) \leq \lim_{k \to \infty} \beta_k \leq 1$$

elde ederiz ki, bu da, k sonsuza gittiğinde, b_k sayılarının 1'e yakınsadığını gösterir. Demek ki atış sayımız yükseldikçe n kez ardarda tura atma olasılığımız 1'e yakınsıyor. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Yukardaki kanıtta atılan paranın hilesiz olduğunu pek kullanmadık. Para hileli bile olsa, tura gelme olasılığı sıfır değilse, her n için, sonsuz yazı-tura atışında üstüste n kez tura gelme olasılığı 1'dir. Bunun kanıtı da aynen yukardaki teoremin kanıtı gibidir.

3 Bu olgu, kitabın "Yakınsamak" adlı yazısında kanıtlanmıştır. (Bkz. s.83.)