Yoksulun Şansı

Bu yazı girişe gereksinmiyor. Doğrudan, kanıtlayacağımız sonuca geçelim:

"Teorem." *Yoksulun zengine karşı şansı yoktur*.

Bu çok bilinen "teorem"i kanıtlayabilmek için her şeyden önce önermeyi matematikselleştirmeliyiz.

Zenginin - tanımı gereği - çok parası var. Yoksulunsa az parası var. Zenginle yoksul yazı-tura oynayacaklar. Yazı gelirse yoksul zenginden 1 lira alacak. Tura gelirse yoksul zengine 1 lira verecek. Oyun iki oyuncudan birinin parası bitene dek sürecek. Oyun daha önce sona eremez.

Bu kuralla oyun hiç bitmeyip sonsuza dek sürebilir. Örneğin yazı-tura atışlarını sırayla bir yoksul bir zengin kazanırsa oyun sonsuza dek sürer.

Bu oyun sonsuza dek sürebilir ama sonsuza dek sürme olasılığı sıfırdır. Bunu "Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar" başlıklı yazımızda (bkz. sayfa 131) kanıtlamıştık. Bu yazıda yukardaki yazı-tura oyununu kaç olasılıkla kimin kazandığını bulacağız. Önce yazı-tura atılan paranın hilesiz olduğunu varsayacağız; yazının sonunda hileli parayla oynanan yazı-tura oyunlarını irdeleyeceğiz.

İki oyuncudan birinin kesinlikle (yani 1 olasılıkla) kazanacağını biliyoruz. Bunu "Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar" başlıklı yazımızda kanıtlamıştık. Hangi oyuncunun kaç olasılıkla kazanacağını bulmak istiyoruz. Örneğin birinci oyuncunun 1, ikinci oyuncunun 100 lirası varsa, büyük bir olasılıkla ikinci oyuncu oyunu kazanır. Birinci oyuncunun kazanma olasılığı azdır, ama 0 değildir. Okurun, "yüzde 1 olasılıkla birinci, yüzde 99 olasılıkla ikinci oyuncu kazanır," dediğini duyar gibi oluyorum. Doğru değil. Yanıt yanlış ama okuru yanılgıya bilerek sürükledim. Bir başka örnek ele alalım.

Diyelim birinci oyuncunun 2, ikinci oyuncunun 3 lirası var. Birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı kaçtır? Bu kez okur 2/5 yanıtını verecek ve haklı çıkacaktır. Bir önceki örnekte, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/101'dir, ikinci oyuncununkiyse 100/101'dir.

Bu yazıda, oyuna birinci oyuncu n, ikinci oyuncu m lirayla başladığında, birinci oyuncunun oyunu $n/(n+m)$ olasılıkla kazanacağını kanıtlayacağız.

Teorem 1. *Hilesiz parayla oynanan yazı-tura oyununa birinci oyuncu n lirayla, ikinci oyuncu m lirayla başlarsa, birinci oyuncu oyunu $n/(n+m)$ olasılıkla kazanır.*

Teoremi bir an için kanıtlanmış varsayıp önemli bir sonucunu irdeleyelim. Teoreme göre, ikinci oyuncunun ne kadar çok parası varsa, birinci oyuncunun kazanma şansı o kadar azdır. Çünkü n sabit kalır ve m artarsa,$n/(n+m)$sayısı gittikçe küçülür. Zengin ne denli zenginse ya da yoksul ne denli yoksulsa, yoksulun kazanma olasılığı o denli azdır. Biraz abartalım, ve zenginin sonsuz parası olduğunu varsayalım. O zaman, yoksulun oyunun sonlu bir anında beş parasız kalma olasılığı 1 olacak. Yani yoksul yüzde yüz kaybedecek. Oyuna kaç parayla başlarsa başlasın... Çünkü m sonsuza gittiğinde $n/(n+m)$ sayısı sıfıra gider. Yoksul milyoner olarak oyuna başlasa bile, zenginin sonsuz parası varsa kesinlikle kaybeder. Dolayısıyla bu teoremden şu çıkar:

Birinci Teoremin Bir Sonucu. *Hilesiz parayla oynanan yazı-tura oyununda, birinci oyuncunun sonlu, ikinci oyuncunun sonsuz parası varsa, oyunu* 1 *olasılıkla* (*yani yüzde yüz*) *ikinci oyuncu kazanır.*

Şimdi teoremimizi kanıtlayalım. $s = n + m$ olsun. Yani s, iki oyuncunun toplam parası olsun.

$p_s(n)$ sayısı, birinci oyuncunun n, ikinci oyuncunun $s - n$ lirası olduğunda, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı olsun.

Örneğin, $p_s(0) = 0$. Çünkü birinci oyuncunun hiç parası yoksa, zaten oyunu kaybetmiştir ve kazanma olasılığı yoktur.

Öte yandan, $p_s(s) = 1$. Çünkü, birinci oyuncunun s lirası varsa, ikinci oyuncunun hiç parası kalmamıştır ve oyunu birinci oyuncu kazanmıştır.

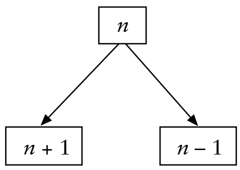
Teorem 1, $p_s(n)$ sayısının n/s olduğunu söylüyor.Demek ki,

$$p_s(n) = n/s \tag{1}$$

eşitliğini kanıtlamalıyız.

$p_s(n)$ sayıları birbirinden bağımsız değillerdir. Aralarında bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi bulalım.

$0 < n < s$ olsun. Birinci oyuncunun n lirası var. İlk yazı-tura atışında oyun iki yoldan birini alabilir: Birinci oyuncu ya kazanacaktır ya kaybedecektir. Kazanırsa $n + 1$ lirası olacaktır, kaybederse de $n - 1$ lirası.



Her iki durumun da olasılığı 1/2'dir. Demek ki k lirayla oyuna başlayan birinci oyuncunun cebinde ilk oyundan sonra yarım olasılıkla $k - 1$ lirası, yarım olasılıkla da $k + 1$ lirası olacaktır. Bu son iki durumda birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı, sırasıyla, $p_s(k-1)$ ve $p_s(k+1)$'dir. Yani, $0 < k < s$ ise,

$$p_s(k) = p_s(k-1)/2 + p_s(k+1)/2$$

dir. Bunu şöyle de yazabiliriz: $0 < k < s$ için,

$$p_s(k+1) = 2p_s(k) - p_s(k-1) \qquad (2)$$

Şimdi bir önsav kanıtlayalım:

Önsav. *Eğer* $0 < k \leq s$ *ise*, $p_s(k) = kp_s(1)$.

Önsavın Kanıtı: Önsavı k üzerine tümevarımla kanıtlayacağız[1].

Eğer $k = 1$ ise, kanıtlanacak eşitlik $p_s(1) = p_s(1)$ olur ve bu durumda önsavın doğruluğu apaçık.

Şimdi eşitliği $k = 2$ için kanıtlayalım. $p_s(2) = 2p_s(1)$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. (2) eşitliğinden,

$$p_s(2) =^{(2)} 2p_s(1) - p_s(0)$$

elde ederiz. Ama $p_s(0) = 0$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki, $p_s(2) = 2p_s(1)$ ve bu durumda da önsavımız kanıtlanmıştır.

Şimdi $k \geq 3$ olsun. Önsavın $k - 1$ ve k için doğru olduğunu varsayıp $k + 1$ için kanıtlayalım. Bu varsayımlardan ve (2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p_s(k+1) &=^{(2)} 2p_s(k) - p_s(k-1) \\ &=^{\text{varsayım}} 2kp_s(1) - (k-1)p_s(1) = (k + 1)p_s(1) \end{aligned}$$

çıkar. Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Yukardaki önsavda $k = s$ alalım: $1 = p_s(s) = sp_s(1)$ buluruz, yani $p_s(1) = 1/s$. Önsavı bir kez daha $k = n$ için uygularsak, bu eşitlikten $p_s(n) = np_s(1) = n/s$ çıkar. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

---

1 Tümevarımla kanıt yöntemi "*Sonsuz İniş Sonsuz Çıkış*" yazısında açıklanmıştır. (Bkz. sayfa 63.)

Hileli Paranın Öyküsü. Yazının süreğinde paranın hileli olduğunu varsayacağız[2].

Yazı gelme olasılığına y diyelim. Birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın. Tura gelme olasılığı t olsun. $y + t = 1$ eşitliği geçerli elbet. Toplam paraya gene s diyeceğiz. $p_s(n)$, birinci oyuncunun (yani yazı geldiğinde kazanan oyuncunun) n lirası varken öbür oyuncunun bütün parasını ütme olasılığı olsun.

Eğer $y = 0$ ise, yani para hiç yazı gelmeyecekçesine hileliyse, oyunu ikinci oyuncu kazanır elbet.

Eğer $y = 1$ ise, oyunu birinci oyuncu kazanır.

Ayrıca $y = 1/2 = t$ şıkkını yukarda irdelemiştik.

Demek ki, bundan böyle $0 < y < 1$ ve $t \neq y$ eşitsizliklerini varsayabiliriz. Bu varsayımla oyunun sonsuza değin sürme olasılığının sıfır olduğunu biliyoruz. (Bkz. "Yüzde Yüz Sonlu Sonsuz Oyunlar", sayfa 131.)

Teorem 2. *Yazı gelme olasılığının y, tura gelme olasılığının t olduğunu varsayalım* ($t = 1 - y$). *Birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın ve oyuna n lirayla başlasın. İkinci oyuncunun $s - n$ lirası olsun. Ve $y \neq t$ olsun. Birinci oyuncunun yazı-tura oyununu kazanma olasılığı* $(y^s - y^{s-n}t^n)/(y^s - t^s)$ *dir.*

(2) formülünün bir benzerini bulalım önce. Birinci kanıttaki gibi bir akıl yürütmeyle,

$$p_s(n) = tp_s(n-1) + yp_s(n+1)$$

eşitliğini buluruz. Bundan da

$$p_s(n+1) = p_s(n)/y - tp_s(n-1)/y \qquad (3)$$

çıkar. Aynen birinci kanıttaki gibi yapacağız. $p_s(n)$ sayısını $p_s(1)$'i kullanarak bulacağız.

2 Soruyu bu genel biçimiyle soran ve yanıtlayan Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu'na teşekkür ederim.

Önsav. *Eğer* $0 < n \le s$ *ise*,

$$p_s(n) = \frac{y^n - t^n}{y^{n-1}(y-t)} p_s(1).$$

Önsavın Kanıtı:[3] n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için bir sorun yok. $n = 2$ için kanıtlayalım. (3) eşitliğinde $n = 1$ alırsak ve $p_s(0) = 0$, $y + t = 1$ eşitliklerini kullanırsak, önsavın $n = 2$ için doğru olduğunu buluruz. Şimdi formülün n ve $n - 1$ sayıları için doğru olduğunu varsayıp formülü $n + 1$ için kanıtlamak gerekiyor. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. (İpucu: (3) eşitliğini kullanın.)

Artık ikinci teoremi kanıtlayabiliriz. Yukardaki önsavda $n = s$ alırsak ve $p_s(s) = 1$ eşitliğini kullanırsak,

$$p_s(1) = \frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s - t^s}$$

buluruz. Bu eşitliği önsava uygulayarak,

$$p_s(n) = \frac{y^n - t^n}{y^{n-1}(y-t)} \frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s - t^s}$$

buluruz. Sadeleştirerek,

$$p_s(n) = \frac{y^s - y^{s-n}t^n}{y^s - t^s} \tag{4}$$

eşitliğini buluruz. İkinci teorem de kanıtlanmıştır.

Birinci oyuncuda n lira, ikinci oyuncuda sonsuz para varsa, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı nedir? Bu soruyu yanıtlayalım.

---

3 Bu formülü nasıl bulduğumuzu okur merak edebilir. Daha önceki önsavda $p_s(n) = np_s(1)$ eşitliğini tahmin etmek oldukça kolaydı. Bu önsavdaki formülü bulabilmek için biraz lineer cebir bilmek gerekebilir. Ama formül bulunduktan sonra kanıtlaması oldukça kolaydır.

Bu sorunun yanıtını bulmak için $\lim_{s\to\infty} p_s(n)$ sayısını bulmalıyız, yani (4) eşitliğindeki s sayısını sonsuza göndermeliyiz. Bu limitin hesaplanışı $y < t$ ya da $t < y$ olduğuna göre değişir, ama bulunan sonuç değişmez, her iki şıkta da sıfır bulunur:

İkinci Teoremin Bir Sonucu. *Yazı gelme olasılığı y olsun ve* $y < 1$ *olsun. Birinci oyuncu yazı gelince kazansın ve ikinci oyuncunun sonsuz parası olsun. Birinci oyuncu* 1 *olasılıkla* (*yani* %100 *olasılıkla*) *bütün parasını kaybedecektir.*

Örneğin %99 olasılıkla yazı bile gelse, eğer tura geldiğinde kazananın sonsuz parası, yazı geldiğinde kazananın sonlu parası varsa, oyunu önünde sonunda sonsuz parası olan kazanır.

Sonsuz için doğru olan büyük sayılar için de doğrudur aşağı yukarı: Para tek yanlı olmadıkça (yani $y < 1$ oldukça), zengin çok zenginse yazı-tura oyununu büyük bir olasılıkla kazanır.