Saymadan Saymak

Bir tanımla başlayalım. Eğer n bir doğal sayıysa, $n!$ diye yazılan sayı $1 \times 2 \times ... \times n$ sayısına eşittir. Yani, tanımı gereği,

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n$$

dir. $n!$, "n fortoriyel" diye okunur. Örneğin,

$$1! = 1$$
$$2! = 2$$
$$3! = 6$$
$$4! = 24$$
$$5! = 120$$
$$6! = 720$$
$$7! = 5040$$

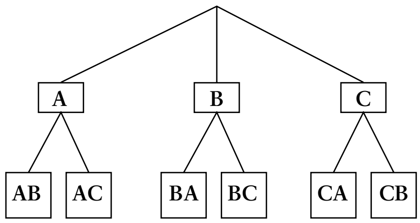
dir. $0! = 1$ olarak tanımlanır. Bu ilk bakışta pek doğal gelmeyen tanımın nedenini yazının ortalarında bulabilirsiniz.

Soru: Elimizde A, B ve C harfleri var ve bu harflerden iki değişik harfli (Türkçede ya da başka bir dilde anlamı olması gerekmez) sözcük üretmek istiyoruz. Kaç sözcük üretebiliriz?

Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri abece sırasına göre sıralayalım.

$$AB, AC, BC, BA, CA, CB.$$

Demek 6 sözcük üretebilirmişiz. Bu sözcüklerin oluşumunu şöyle de gösterebiliriz:



Önce ilk harfleri koyuyoruz: Sırasıyla A, B ve C. Sonra ikinci harfleri: eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçeneğimiz var, B ve C. Dolayısıyla A budağına iki dal ekliyoruz: B ve C dallarını. Her üç dal için bunu yaptığımızdan, bu 3 harfle toplam

$3 \times 2 = 6$ tane iki değişik harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

Şimdi bu soruyu genelleştirelim.

Birinci Soru. *Elimizde n değişik harf var*: $A_1, A_2, ..., A_n$ *harfleri. Bu n harften*, *r değişik harfli sözcükler üretmek istiyoruz* (*her harfi en çok bir kez kullanabiliriz.*) *Kaç sözcük üretebiliriz*?

Bu birinci soruya yanıt verebilmek için yukardaki gibi ters dönmüş bir ağaç yapalım. Bir sonraki sayfadaki şekilden izleyin. Ağacın en tepedeki ilk budağından aşağıya doğru n dal çıkar:

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

dalları. Bunlar sözcüklerin ilk harfleri. Bu dalların uçlarına $n - 1$ dal eklenir (ikinci harfler.) Örneğin A_1 dalına

$$A_2, ..., A_n$$

dalları eklenir. Bu yeni dallar sırasıyla, iki harfli

$$A_1A_2, ..., A_1A_n$$

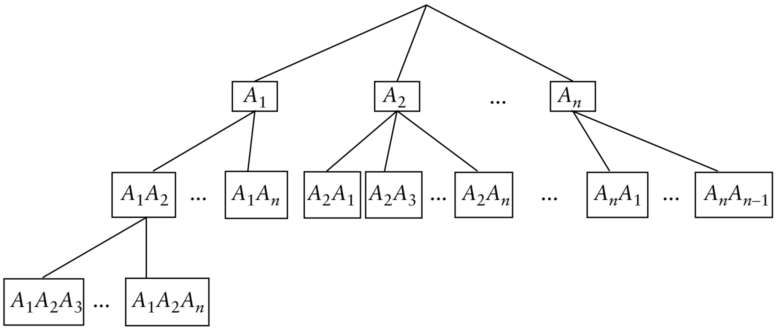
sözcüklerini oluştururlar. A_2 dalınaysa,

$$A_1, A_3, ..., A_n$$

dalları eklenir ve böylece bu dalların ucunda

$$A_2A_1,\ A_2A_3,\ ...,\ A_2A_n$$

sözcükleri oluşur. Şimdilik $n \times (n - 1)$ dal elde ettik. Demek ki iki harfli sözcük sayısı $n \times (n - 1)$ imiş. Ağacı sürdürelim.



Yukarda elde ettiğimiz her $n \times (n - 1)$ dala şimdi $n - 2$ dal daha ekleyebiliriz. Örneğin, A_1A_2 dalına,

$$A_3,\ ...,\ A_n$$

dallarını ekleyebiliriz. Bu yeni dalların herbirinin ucuna 3 harfli sözcükler yazılır. Böylece $n \times (n - 1) \times (n - 2)$ tane üç harfli sözcük elde ederiz. Bu yöntemi sürdürerek, $A_1, ..., A_n$ harflerinden

$$n \times (n - 1) \times ... \times (n - (r - 1))$$

tane r değişik harfli sözcük yazacağımızı görürüz. Bu sayı da

$$n!/(n - r)!$$

sayısına eşittir (sadeleştirince eşitlik hemen çıkar.) İlk teoremimizi kanıtladık:

Teorem 1. *Eğer $r \leq n$ iki doğal sayıysa, $A_1, ..., A_n$ harflerini en çok bir kez kullanarak $n!/(n - r)!$ tane r harfli sözcük yazılır.*

Eğer, yukardaki teoremde r'yi n alırsak, $n!$ buluruz.

Biraz alıştırma yapalım:

1. SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane üç harfli sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi uygulayarak

$$5!/(5 - 3)! = 5!/2! = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

sözcük buluruz. Başka bir soru: SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane beş harfli sözcük yazılır? Yine yukardaki teoremi uygulayalım: $5!/(5-5)! = 5!/0!$ ve $0! = 1$ eşitliklerini kullanarak, $5! = 120$ tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

2. MELEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç tane (beş harfli elbet) sözcük yazabiliriz? Yukardaki teoremi doğrudan uygulayamayız, çünkü iki tane E harfi var. Önce iki E'yi ayıralım ve ME_1LE_2K "sözcüğünün" tüm harflerini kullanarak kaç tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi bulalım. Bu sorunun yanıtı yukardaki gibi $5! = 120$'dir. Bu 120 sözcüğün yarısında E_1 harfi E_2 harfinden önce gelir; öbür yarısındaysa E_2 harfi E_1 harfinden önce gelir. Demek ki MELEK sözcüğünün harflerinden $120/2 = 60$ sözcük yazabiliriz.

3. Yukardaki alıştırmaya benzeyen, ama biraz daha zor olan bir alıştırma daha: KELEBEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç sözcük yazabiliriz? Yukardaki yöntemi kullanalım ve önce $K_1E_1LE_2BE_3K_2$ sözcüğünü ele alalım. Bu sözcükten 7! sözcük üretebiliriz. Şimdi, $K_1 = K_2$ ve $E_1 = E_2 = E_3$ yapalım. Birinci eşitlik için 2'ye böleriz, ikinci eşitlik içinse $3! = 6$'ya. Demek ki KELEBEK sözcüğünün harflerinin yerini değiştirerek $7!/(2 \times 6) = 420$ sözcük yazabiliriz.

4. Bir maymunun önünde 7 tane harf var: B, E, E, E, K, K, L harfleri. Maymun bu harfleri rastgele sıraya diziyor. Maymunun KELEBEK sözcüğünü yazma olasılığı kaçtır? 1/420'dir, yani 0,0024'ten biraz daha az[1].

---

1 Biraz konumuzun dışına çıkalım: Bir maymun daktilonun başına geçse ve rastgele tuşlara bassa... Ve bunu hiç durmamacasına sonsuza değin yapsa... Sonlu bir zaman sonra Shakespeare'in Hamlet'ini olduğu gibi baştan sona yazma olasılığı kaçtır? 1'dir, yani yüzde yüzdür! Bu ilginç ve beklenmedik sonuç, "Shakespeare Maymun muydu?" başlıklı yazımızda kanıtlanmıştır. (Bkz. sayfa 139.)

Aynı sonucu bir başka türlü de bulabiliriz. B, E, E, E, K, K, L harfleri arasından,

- K'yı seçme olasılığımız 2/7'dir,
- geri kalan 6 harften (B, E, E, E, K, L) E'yi seçme olasılığımız 3/6'dır,
- geri kalan 5 harften (B, E, E, K, L) L'yi seçme olasılığımız 1/5'tir,
- geri kalan 4 harften (B, E, E, K) E'yi seçme olasılığımız 2/4'tür,
- geri kalan 3 harften (B, E, K) B'yi seçme olasılığımız 1/3'tür,
- geri kalan 2 harften (E, K) E'yi seçme olasılığımız 1/2'dir,
- geri kalan 1 harften (K) K'yi seçme olasılığımız 1'dir.

Bu sayıları çarparsak, yukardaki sonucu 1/420'yi buluruz.

Şimdi yeni bir soru soralım.

İkinci Soru. Elimizde n öğesi olan bir A kümesi var:

$$A = \{A_1, ..., A_n\}.$$

$r \leq n$, bir doğal sayı olsun. A kümesinin kaç tane r öğeli altkümesi vardır?

Bu sayıyı hesaplayacağız. Hesaplamak istediğimiz sayıyı

$$\binom{n}{r}$$

olarak yazalım. Bu sayıya "n'de r" ya da "n seç r" adı verilir.

Örnek: $n = 5$ ve $r = 3$ olsun. $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kümesinin 3 öğeli bütün altkümelerini bulalım:

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$
$$\{A_1, A_2, A_4\}$$
$$\{A_1, A_2, A_5\}$$
$$\{A_1, A_3, A_4\}$$
$$\{A_1, A_3, A_5\}$$

$$\{A_1, A_4, A_3\}$$
$$\{A_2, A_3, A_4\}$$
$$\{A_2, A_3, A_5\}$$
$$\{A_2, A_4, A_5\}$$
$$\{A_3, A_4, A_5\}$$

Toplam 10 tane 3 öğeli altküme var. Demek ki:

$$\binom{5}{3} = 10$$

imiş.

Birinci soruyla arada şu ayrım var: Birinci soruda $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerini ayrı ayrı sayıyorduk; oysa bu sorumuzda sözcüklere değil de harflerden oluşan kümelere bakıyoruz. Hem $A_1A_2A_3$, hem de $A_1A_3A_2$ sözcüklerinin harflerinden $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi oluşur. Bunun gibi,

$$A_1A_2A_3$$
$$A_1A_3A_2$$
$$A_2A_1A_3$$
$$A_2A_3A_1$$
$$A_3A_1A_2$$
$$A_3A_2A_1$$

sözcüklerinin herbiri $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesini oluştururlar.

İkinci soruyu yanıtlamak için yukardaki örnekten yararlanacağız. Birinci teoremimize göre, r değişik harfli sözcük sayısı $n!/(n - r)!$ dir. Bu $n!/(n - r)!$ sözcükten birçoğu aynı kümenin harflerinden oluşurlar. Kaç tanesinin aynı kümenin harflerinden oluştuğunu bulalım. Yine birinci teoreme göre r harfle yazılan r! sözcük olduğuna göre, $n!/(n - r)!$ sözcükten her $r!$ tanesi aynı kümenin harflerinden oluşur. Demek ki, r öğeli altküme sayısını bulmak için $n!/(n - r)!$ sayısını $r!$ sayısına bölmeliyiz:

$$\frac{n!(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Bulduğumuz bu sonucu daha sonra kullanacağız; bir köşeye yazalım:

Teorem 2. *n öğeli bir kümenin, r öğeli altküme sayısı*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

dir.

Bu teoremin kanıtının r = 3 ve n = 5 için bir resmini yapalım: