Olasılık Hesapları (II)

Bir önceki yazıdaki örneklerde olay sayısı sonluydu. Örneğin, iki zarla 21 olay vardı. Şimdi olay sayımızı sonsuz yapacağız.

Kolay bir soruyla başlayalım: [0, 1] aralığında rastgele seçilen bir gerçel (reel) sayının, 1/2'den büyük olma olasılığı kaçtır? Yanıt 1/2'dir. Çünkü, [0, 1] aralığındaki sayıların "yarısı" 1/2'den büyük, öbür "yarısı" ise 1/2'den küçüktür.

Kolay bir soru daha: [0, 1] aralığında seçilen bir sayının 1/6'yla 3/7 arasında olma olasılığı kaçtır? Yanıt 3/7 – 1/6 = 11/42'dir.

Buraya dek şaşılası bir şey yok.

Peki, [0, 1] aralığında seçilen bir sayının 1/2'ye eşit olma olasılığı kaçtır? Sıfırdır! Önsezi zorlanıyor biraz burda. Çünkü 1/2 sayısı var ve bana, "bal gibi 1/2'yi seçebilirim" diyebilirsiniz. Ben de size, "madem öyle, bahse girelim" diyebilirim. Bahse girmek istemezsiniz elbet. Çünkü kazanma olasılığınız sıfırdır! Olay sayısı sonsuzsa ve her olayın gerçekleşme olasılığı aynıysa, o zaman, tek bir olayın olasılığı sıfırdır. Şöyle açıklanabilir bu: Diyelim 1/2'yi seçme olasılığı 0,0001. O zaman, herhangi bir sayıyı seçme olasılığı da 0,0001'dir ve dolayısıyla aşağıdaki

1/10.000, 2/10.000, 3/10.000, ..., 10.000/10.000

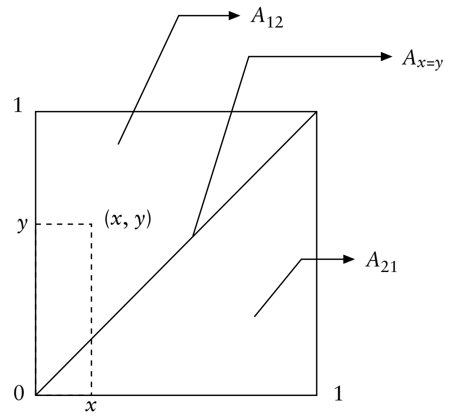
onbin sayıdan birini seçme olasılığını bulmak için 0,0001'i on bin kez toplarız ve 1 buluruz, yani %100 olasılık! Olacak şey değil! Demek ki 1/2 sayısını seçme olasılığı sıfır olmalıdır.

Bu dediğimiz, salt 1/2 için değil, her sayı için geçerlidir. [0, 1] aralığında, önceden belirlenen bir sayıyı seçme olasılığı sıfırdır. Gerçekle çatışmıyor bu. Eğer dilerseniz 1/2'yi seçebilirsiniz elbet. Ama ancak isterseniz!.. Rastgele bir sayı seçtiğinizde 1/2'yi seçemezseniz.

Kesinlikle bir sayı seçeceksiniz. Ondan kuşku yok. Ama seçtiğiniz bu sayıyı önceden bilebilme olasılığınız 0'dır!

Şimdi iki sayı seçeceğiz. Sayıları sırayla seçeceğiz, yani birinci sayıyla ikinci sayı arasında ayrım yapacağız. Soru şu: [0, 1] aralığında rastgele ve sırayla iki sayı seçersek, ikinci sayının, birinci sayıdan büyük olma olasılığı kaçtır?

Birinci sayıya x diyelim, ikinci sayıya y. Rastgele (ama sırayla) iki sayı seçmek demek, $[0, 1] \times [0, 1]$, yani $[0, 1]^2$ karesinde rastgele bir (x, y) noktası seçmek demektir.



Yukardaki resimde $[0, 1]^2$ karesi üç olay bölgesine ayrılmış:

$$A_{12} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\}$$
$$A_{21} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x > y\}$$

bölgeleri ve çaprazdaki çizgi, yani,

$$A_{x=y} = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$$

çizgisi. Resimden de anlaşıldığı üzere, $[0, 1]^2$ karesindeki rastgele bir noktanın A_{12} bölgesinde olma olasılığı 1/2'dir. A_{21} bölgesinde olma olasılığı da 1/2'dir. $A_{x=y}$ bölgesinde olma olasılığıysa sıfırdır.

Daha da zor bir soru soralım. [0, 1] aralığından üç sayı seçelim: x, y, z. Birinci sayı x, ikinci sayı y ve üçüncü sayı z. Şimdi, $x < y < z$ olayının gerçekleşme olasılığı kaçtır? Bu üç sayıyı, $[0, 1]^3$ küpünde[1] bir nokta olarak görebiliriz. Yukardaki gibi bir resim çizmeye çalışabilirsiniz. Ben denedim beceremedim. Üç boyutta görebilmek kolay değil, çizebilmek daha zor. Ama şöyle akıl yürütebiliriz: $[0, 1]^3$ küpünü şu bölgelere ayıralım:

$$A_{123} = \{(x, y, z): x < y < z\}$$
$$A_{132} = \{(x, y, z): x < z < y\}$$
$$A_{213} = \{(x, y, z): y < x < z\}$$
$$A_{231} = \{(x, y, z): y < z < x\}$$
$$A_{312} = \{(x, y, z): z < x < y\}$$
$$A_{321} = \{(x, y, z): z < y < x\}.$$

Birinci bölgenin hacmini bulmak istiyoruz. Bu altı bölgenin hacimleri birbirine eşittir (hiçbirinin hacminin öbüründen büyük olması için bir neden yok.) $[0, 1]^3$ küpünden geriye kalan bölgeler, yukardaki bölgelerin "duvarlarıdır" ve hacimleri sıfırdır. Demek ki, bu altı bölgenin hacimlerinin toplamı $[0, 1]^3$ küpünün hacmine, yani 1'e eşittir. Ve bundan da her bölgenin hacminin 1/6 olduğu çıkar. Ne bulduk? [0, 1] aralığından rastgele üç sayı seçersek, ikinci sayının birinci sayıdan ve üçüncü sayının ikinci sayıdan büyük olma olayının olasılığının 1/6 olduğunu bulduk.

Şimdi [0, 1] aralığından dört sayı seçtiğimizde, birinci sayının ikinci sayıdan, ikinci sayının üçüncü sayıdan ve üçüncü sayının dördüncü sayıdan küçük olma olayının olasılığını hesaplayacağız. Dört boyutta olduğumuzdan, istesek de resim çizeme-

---

1 Geometrik olarak, $[0,1]^3$, her kenarı 1 uzunluğunda olan üç boyutlu küptür. Başka bir yazış biçimiyle, $[0,1]^3$, $\{(x, y, z): 0 \le x, y, z \le 1\}$ kümesidir.

yiz artık. Ama yine de yukardaki gibi düşünebiliriz.

$$A_{1234} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}$$

kümesi olsun. Bunun gibi, örneğin,

$$A_{3142} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : x_3 < x_1 < x_4 < x_2\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu kümelerin hepsinin "hacimleri" aynı[2]. Kaç tane bu tür küme var? Teker teker sıralayıp 24 tane olduğunu bulabiliriz kolaylıkla: A_{1234}, A_{1243}, A_{1324}, A_{1342}, ... Geriye kalan kümeler, bu kümelerin "duvarları" olduklarından hacimleri sıfırdır. Demek ki bulmak istediğimiz olasılık 1/24'dir.

Şimdi en genel soruyu soralım: [0, 1] aralığından n tane rastgele ve sırayla sayı seçiyoruz: $x_1, x_2, ..., x_n$. Bu dizinin artan bir dizi olma olasılığı, yani $x_1 < x_2 < ... < x_n$ olayının olasılığı kaçtır? Yukardaki gibi akıl yürüteceğiz.

$$A_{1,2,...,n} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0, 1]^n : x_1 < x_2 < ... < x_n\}$$

kümesinin hacmini arıyoruz.

Bu tür kümelerden kaç tane olduğunu bulmalıyız. Başka bir deyişle 1,2, ..., n sayılarını kaç türlü dizebiliriz?

$$n! = 1 \times 2 \times ... \times (n–1) \times n$$

türlü dizebiliriz, çünkü bu n sayıyı n! türlü yanyana koyabiliriz[3]. Bundan da şu sonuç çıkar: [0, 1] aralığından rastgele seçilen x_1, ..., x_n sayılarının artan bir dizi olma olasılığı 1/n! dir.

Örneğin n = 2, 3, 4 ise daha önce hesapladığımız 1/2, 1/6, 1/24 olasılıklarını buluruz. n = 5 için, 1/5! = 1/120 = 0,008333... olasılığını buluruz. n = 6 içinse, 1/6! = 1/720 ≈ 0,0014 olasılığını. Dikkat ederseniz, n büyüdükçe olasılık azalıyor.

---

2 Dört boyutta hacim, entegral hesaplarıyla bulunur, ama şu anda önsezi yeterli. Kenar uzunluğu birim olan n boyutlu bir kübün hacminin 1 olduğu bir belittir (aksiyomdur.)

3 Bunu tümevarımla da kanıtlayabiliriz. İlk önce, ilk n – 1 sayıyı dizelim. Tümevarım varsayımına göre, 1, 2, ..., n–1 sayılarını (n – 1)! türlü dizebiliriz. Bu dizilerden herhangi birini alalım. Şimdi n sayısını, araya bir yere koyacağız. En başa, ortaya bir yere ya da en sona, yani toplam n değişik yere koyabiliriz. Demek ki 1, 2, ..., n sayılarını (n – 1)! × n = n! türlü dizebiliriz.

Birinci Soru. [0, 1] aralığında rastgele seçilen bir sonsuz sayı dizisinin artan bir dizi olma olasılığı kaçtır?

n herhangi bir doğal sayıysa, [0, 1] aralığında rastgele seçilen n sayının artan bir dizi olma olasılığının $1/n!$ olduğunu gördük. Bu olasılıklar, yani $1/n!$ sayıları, *n* arttıkça küçülüyorlar, gittikçe sıfıra yakınsıyorlar[4]. Matematikte buna, "$1/n!$ sayıları, *n* sonsuza gittiğinde sıfıra yakınsar" ya da "$1/n!$ sayılarının limiti sıfırdır" denir. Biçimsel olarak bunu,

$$\lim_{n \to \infty} 1/n! = 0$$

olarak yazarız. Demek ki *n* ne denli büyükse, [0, 1] aralığında rastgele ve sırayla seçilen n sayının artan bir dizi olma olasılığı o denli küçük, o denli sıfıra yakındır. *n* sonsuza gittiğinde de, olasılık 0 olur. Dolayısıyla birinci sorunun yanıtı 0'dır.

İkinci Soru. [0, 1] aralığında seçilen artan bir dizinin 1'e yakınsama[5] olasılığı kaçtır?

Soru, bir dizinin artan dizi olması ve 1'e yakınsama olasılığı değil, artan dizilerden kaçta kaçının bire yakınsadığı. Yani koşullu olasılık... Dizinin artan dizi olduğunu önceden biliyoruz. Olaylar kümemiz artan diziler kümesi. Bu artan dizilerden kaçta kaçının 1'e yakınsadığını bulmak istiyoruz.

Her artan dizi 1'e yakınsamaz, kimi de 1/2'ye yakınsar. Örneğin,

$$0,\ 1/4,\ 3/8,\ 7/16,\ 15/32,\ 31/64,\ \ldots,\ (2^{n-1}-1)/2^n,\ \ldots$$

---

4 "Yakınsamak" başlıklı yazıda (sayfa 83) "yakınsama"nın ne demek olduğu anlatılmış ve $1/n!$ sayılarının sıfıra yakınsadığı kanıtlanmıştı.

5 Yani gittikçe daha çok 1'e yaklaşma, "sonsuzda 1 olma" olasılığı. 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, ... böyle bir dizidir. Bu dizi 1'den küçük her sayıyı bir süre sonra aşar, ama 1'i hiç aşamaz.

dizisi artan bir dizidir ve 1/2'ye yakınsar. 1'e yakınsayan herhangi bir dizinin her terimini 1/2'yle çarparsak 1/2'ye yakınsayan bir sayı buluruz.

ε, sıfırdan büyük, ama küçük bir gerçel sayı olsun. [0, 1] aralığında (sırayla) seçilen n sayının herbirinin $1 - \varepsilon$'dan küçük olma ve artan bir dizi oluşturma olasılığı yukardaki gibi kolayca hesaplanır:

$$(1 - \varepsilon)^n/n!$$

dır bu olasılık. Burdaki $(1 - \varepsilon)^n$, n boyutlu ve her kenarı $1 - \varepsilon$ uzunluğunda olan küpün hacmidir. Sırayla seçilen n sayının artan dizi olma olasılığıysa, yukarda gördüğümüz gibi $1/n!$ dir. Demek ki, [0, 1] aralığında seçilen n sayıdan oluşan artan bir dizinin $[0, 1 - \varepsilon]$ aralığında olma olasılığı,

$$\frac{(1-\varepsilon)^n / n!}{1/n!} = (1-\varepsilon)^n$$

dır. Bu olasılığa $P_n(\varepsilon)$ diyelim: $P_n(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n$. $P_\infty(\varepsilon)$ sayısı, [0, 1] aralığında artan sonsuz bir dizinin $[0, 1 - \varepsilon]$ aralığında olma olasılığı olsun. $P_\infty(\varepsilon)$ olasılığını bulmak için $P_n(\varepsilon)$'daki n'yi sonsuza yaklaştırırız:

$$P_\infty(\varepsilon) = \lim_{n \to \infty} P_n(\varepsilon) = \lim_{n \to \infty} (1 - \varepsilon)^n = 0$$

çünkü $1 - \varepsilon$ sayısı 0'dan büyük ama 1'den küçüktür[6]. Demek ki artan sonsuz bir dizinin $[0, 1 - \varepsilon]$ aralığında olma olasılığı sıfırdır. Ve bu her $\varepsilon > 0$ için doğru... Bundan da artan sonsuz bir dizinin 1'e yakınsama olasılığının 1 olduğu çıkar. Şu teoremi kanıtladık:

Teorem. [0, 1] *aralığında rastgele seçilen sonsuz bir artan dizi* 1 *olasılıkla* (*yani* 100% *olasılıkla*) 1'*e yakınsar*.

Üçüncü Soru. $[0, 1]^2$ karesinde seçilen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinde eğer $x_n \leq x_{n+1}$ ve $y_n \leq y_{n+1}$ ise, bu diziye bir kuzeydoğu dizisi di-

6 Eğer r sayısı $0 \leq r < 1$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, n sonsuza gittiğinde, r^n sayıları sıfıra yakınsarlar. Bunu "Yakınsamak" başlıklı yazıda (s. 83) kanıtlamıştık.

yelim[7]. Sorumuz şu: $[0, 1]^2$ karesinde seçilen bir kuzeydoğu dizisinin karenin sınırına yakınsama olasılığı kaçtır?

$[0, 1]^2$ karesinde bir $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kuzeydoğu dizisi seçmek demek, $[0, 1]$ aralığında artan iki $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi seçmek demektir. Bu iki artan dizinin 1'e yakınsama olasılığı 1 olduğundan, yukardaki teoreme göre, $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kuzeydoğu dizisinin $(1, 1)$ noktasına yakınsama olasılığı da 1'dir. Güzel bir teorem kanıtladık:

Teorem. $[0, 1]^2$ *karesinde rastgele seçilen bir kuzeydoğu dizisi* 1 *olasılıkla* $(1, 1)$ *noktasına yakınsar*[8].

7 Yani her seçilen nokta, bir öncesinin kuzeydoğusunda olacak.

8 Bu teoremin daha da genel bir halini Doç. Dr. Nejat Anbarcı sordu. Nejat Anbarcı'nın genel sorusu şuydu: Düzlemde sınırlı (yani sonsuza dek gitmeyen) kapalı bir alan alalım. Örneğin bir dikdörtgenin, bir üçgenin, bir dairenin, bir elipsin içindeki alanları... Bu alanda rastgele seçilen bir kuzeydoğu dizisinin alanın sınırına yakınsama olasılığı kaçtır? Yanıtın 1 olduğunu Engin Mermut'la birlikte (Doç. Dr. Minik Can Ertem'in de yardımıyla) kanıtladık. Bu teorem o kanıtın önemli bir parçasıdır..