Olasılık Hesapları (I)

Olasılık hesaplarına günlük yaşamımızda sık sık gereksiniriz. Örneğin tavla ya da kâğıt oyunları oynarken. İki kapıya üstüste birkaç kez gele atmayan tavlacı görmedim hiç. Şanssızlık deriz. Elbet, dört kez gele atan üç kez gele atandan daha şanssızdır. Bu yazının amaçlarından biri de "daha şanssız" sözcüğüne matematiksel anlam kazandırmak olacak. Bir sonraki yazıda sonsuz olayların olasılığından sözedeceğiz.

Boş bir zamanınızda, evinizdeki tavlanın zarlarından birini 6000 kez atın. Gelen zarları bir kâğıda yazın. Aşağı yukarı bin kez yek (1), bin kez dü (2), bin kez se (3), ... gelmeli, yani her yüzün gelme olasılığı aşağı yukarı aynı olmalı. Eğer yalnızca 500 kez penç (5) gelmişse zarınız hileli demektir. Aslında her zar hilelidir. Bir yüzü biraz daha ağır, daha eğik, daha aşınmış ya da daha kaygan olabilir. Her zarın zaafı olduğu, yakınlık duyduğu bir sayı vardır. Tavlaya oturmadan önce zarların zaafını iyi bilmek gerekir. Ki ona göre oynayasınız! Tavlanın da deplasmanı vardır!

Tavlamın zarlarından birini 400 kez attım. İşte elde ettiğim sonuçlar:

	1	2	3	4	5	6
İlk 100 atış	17	16	13	25	13	16
İlk 200 atış	38	31	31	41	28	31
İlk 300 atış	54	59	42	59	39	47
İlk 400 atış	70	76	59	77	58	60

Sanki zarımın cehara (4'e) bir zaafı varmış gibi görünüyor.

Bu sonuçları 1 üzerine yazalım, yani ortalamalarını alalım. Örneğin 400 atışta 77 kez cehar geldiğini belirten yere 77/400, yani 0,1925 yazalım. Şu sonuçları buluruz:

	1	2	3	4	5	6
İlk 100 atış	**0,17**	0,16	0,13	**0,25**	0,13	0,16
İlk 200 atış	**0,19**	0,155	0,155	**0,205**	0,14	0,155
İlk 300 atış	**0,18**	**0,196**	0,14	**0,197**	0,13	0,157
İlk 400 atış	**0,175**	**0,19**	0,1475	**0,1925**	0,145	0,15

Ortalamanın üstündeki sonuçları siyah puntolu harflerle yazdım. Ortalamanın kaç olması gerekiyordu? Zarlar hilesizse ortalamanın 1/6, yani 0,1666... olması gerekir, çünkü bir zarda 6 yüz vardır. Ceharların ortalaması hep yüksek çıkmış, ama bu ortalama gittikçe azalıyor ve beklenen 1/6 ortalamasına yaklaşıyor. 6 bin kez zar attığımda, kimbilir, belki de beklenen ortalamaya daha çok yaklaşacak. Yukardaki sonuçlar zarımın tam zaafını göstermeyebilirler. Yeterince zar atmadım. Ama son sonuçların doğru olduğunu varsayacak olursam, 100 atışta ortalama 19 kez cehar (4) ve 14 kez penç (5) geldiği sonucunu çıkarırım. Ona göre tavla oynamalıyım (ikinci zarla da aynı deneyi yapmalıyım elbet.)

Elimize bir zar alalım. Altı yüzlü ve hilesiz bir zar... Öyle bir zarın olduğunu varsayalım. Her yüzün gelme olasılığı aynıdır: yek (1) gelme olasılığı, dü (2) gelme olasılığından fazla değildir. Zarın altı yüzü olduğundan ve her sayının gelme olasılığı aynı olduğundan, örneğin yek gelme olasılığına 1/6 demek en doğrusudur. Eğer $i = 1, ..., 6$ ise, $o(i)$, i sayısının gelme olasılığı olsun. Sezgilerimize dayanarak yazalım:

$o(1) = 1/6 = 0,16666....$
$o(2) = 1/6$
$o(3) = 1/6$
$o(4) = 1/6$
$o(5) = 1/6$
$o(6) = 1/6.$

Zar hilesiz olduğundan, $o(7) = 0$ da yazabilirdik!

Tüm olasılıkların toplamının 1 olduğuna dikkatinizi çekerim. Günlük yaşamda olasılıklar 100 üzerine hesaplanır, ama matematikte en büyük olasılık 1'dir. Günlük yaşamda kullanılan %75'in matematikçesi 0,75 ya da 3/4'tür.

Hilesiz zarlarla çift sayı atma olasılığını bulalım, yani, 2, 4, 6 sayılarından birinin gelme olasılığını. Her sayının gelme olasılığı 1/6 olduğundan, çift sayı gelme olasılığı,

$$o(2) + o(4) + o(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

dir. Ve elbet tek sayı gelme olasılığı da, çift sayı gelme olasılığı gibi, 1/2'dir.

Olasılık kuramcıları, yukardaki soruda karşımıza çıkan,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

kümesine **olaylar kümesi** derler. Örneğin, "yek" bir olaydır ve yek olayının (gerçekleşme) olasılığı 1/6'dır.

Şimdi işleri biraz zorlaştıracağız ve iki (hilesiz) zar atacağız. İlk önce iki zarı birbirinden ayıralım: Zarlardan birine birinci zar, öbürüne ikinci zar diyelim (dilerseniz zarları iki ayrı renge boyayın.) Her iki zarın da altışar yüzü olduğundan, otuz altı "olay" var:

1–1	1–2	1–3	1–4	1–5	1–6
2–1	2–2	2–3	2–4	2–5	2–6
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5	3–6
4–1	4–2	4–3	4–4	4–5	4–6
5–1	5–2	5–3	5–4	5–5	5–6
6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	6–6

Dikkat ettiyseniz, 1–2 ve 2–1 zarlarını (olaylarını) ayrı yazdım, yani iki ayrı olay olarak gösterdim. Çünkü iki zarı birbirinden ayırıyorum: Birinci zar yeki, ikinci zar düyü gösteriyorsa, gelen zara 1–2 diyorum; tam tersiyse 2–1. Zarlar hilesiz olduğundan her olayın olasılığı aynıdır. Dolayısıyla, $o(i–j)$ sayısı, $i–j$ olayının (zarının) olasılığıysa,

$$o(i–j) = 1/36$$

dır. Örneğin,

$$o(1–1) = o(1–2) = o(2–1) = o(3–4) = 1/36.$$

Bunu şöyle de gösterebiliriz. Zar atacağımıza, yukardaki tabloya rastgele bir taş atalım. 36 hücre olduğundan ve bir hücrenin öbür hücreye göre bir özelliği olmadığından, taşın, örneğin 3–4 hücresine düşme olasılığı 1/36'dır.

Ama tavlada zarlar birbirinden ayırt edilmez. Biz de ayırt etmeyelim. O zaman 1-2 ve 2-1 olaylarını bir olay olarak algılayıp (1, 2) olarak gösterelim. Olayları yukardaki gibi sıralayalım (üstteki tabloyu ikiye katlayarak):

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
		(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
			(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
				(5, 5)	(5, 6)
					(6, 6)

Toplam 21 olayımız var. Ama bu kez her olayın olasılığı aynı değil. Örneğin (1, 2) olayının olasılığı

$$1/36 + 1/36 = 2/36,$$

çünkü (1, 2) zarı için ya 1-2 ya da 2-1 gerekli. (1,2) olayının olasılığı şöyle bulunur:

$$o(1, 2) = o(1\text{-}2) + o(2\text{-}1) = 1/36 + 1/36 = 2/36.$$

Öte yandan, (1, 1) zarının gelme olasılığı 1/36'dır. Demek ki, eğer $i \neq j$ ise, $o(i, j) = 2/36$'dır ve $o(i, i) = 1/36$'dır. (Özellikle 2/36 yerine 1/18 yazmıyoruz, ilerde kolaylık olacak.)

Alıştırma olarak, çeşitli olasılıklar hesaplayalım.

İki kapıya gele atma olasılığı. Bu kapıların 1 ve 2 kapıları olduğunu varsayalım. Demek ki (1, 1), (1, 2) ya da (2, 2) atma olasılığını hesaplayacağız. Bu da,

$$o(1, 1) + o(1, 2) + o(2, 2) = 1/36 + 2/36 + 1/36 = 4/36 = 1/9$$

dur. İki kez iki kapıya gele atma olasılığıysa $1/9 \times 1/9 = 1/81$'dir. Yedi kez iki kapıya gele atma olasılığıysa $(1/9)^7 = 1/9^7$ dir. (Aşağı yukarı, piyangoda en büyük ikramiye çıkma olasılığına eşit!)

Yek atma olasılığı = $o(1, 1) + o(1, 2) + ... + o(1, 6) = 1/36 + (5 \times 2/36) = 11/36$. Demek ki, yek atma olasılığı 1/3'ten biraz daha az.

Cehar atma olasılığı. Yukardaki gibi hesaplanır ve 11/36 bulunur.

Dört hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığı. Dört hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığını hesaplayacağız. Dört hane ilerdeki pulu kırmak için ya cehar (4) atmak gerekir ya da (1, 1), (1, 3) ve (2, 2) zarlarından birini (arada kapı olmadığını varsayıyoruz.) Demek ki dört hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığı,

$$\begin{aligned} o(4) + o(1, 1) + o(1, 3) + o(2, 2) &= 11/36 + 1/36 + 2/36 + 1/36 \\ &= 15/36 \end{aligned}$$

dır.

Altı ve sekiz hane ilerdeki iki puldan en az birini kırma olasılığı. Altı hane ilerdeki pulu kırmak için ya zarlardan biri 6 gelmeli ya da (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3) zarlarından birini atmalı. Sekiz hane ilerdeki pulu kırmak içinse (2, 2), (2, 6), (3, 5), (4, 4) zarlarından birini atmalı. Dolayısıyla olasılık

$$\begin{aligned} & o(6) + o(1,5) + o(2,2) + o(2,4) + o(3,3) + o(3,5) + o(4,4) \\ &= 11/36 + 2/36 + 1/36 + 2/36 + 1/36 + 2/36 + 1/36 \\ &= 20/36 = 5/9 \end{aligned}$$

dur, yüzde elliden biraz fazla.

***n* hane ilerdeki bir pulu kırma olasılığı.** Eğer n = 13 ya da 14 ise, bu olasılık sıfırdır elbet. Ama n = 15 ise pulu dübeşle, yani (5, 5)'le kırabiliriz. Bunun da olasılığı 1/36'dır. Okur bu olasılıkları şimdiye değin öğrendikleriyle hesaplayabilir. Bu olasılıkları bir tabloda gösterelim:

n = uzaklık	Kırma olasılığı
1	11/36
2	12/36
3	14/36
4	15/36
5	15/36
6	17/36
7	6/36
8	6/36
9	5/36
10	3/36
11	2/36
12	3/36
15	1/36
16	1/36
18	1/36
20	1/36
24	1/36

Üç zara geçmeden önce, tavlanın sınırlı bir oyun olduğunu belirteyim. Yazdıklarımdan tavlanın yüksek düzeyde matematik bilgisi gerektirdiğini sandığım sanılmasın. Ama tavlacıyım diye geçinen olasılık kuramının temelini bilmelidir.

Şimdi üç zar alalım elimize. Yine ilk önce zarlardan herbirini öbürlerinden ayırt edelim: birinci zar, ikinci zar ve üçüncü zar. $6^3 = 216$ olay var ve her olayın olasılığı aynı olduğundan, her zarın gelme olasılığı 1/216'dır. Örneğin,

$$o(1\text{-}2\text{-}5) = o(1\text{-}5\text{-}2) = o(2\text{-}1\text{-}5) = o(2\text{-}5\text{-}1)$$

$= o(5\text{-}1\text{-}2) = o(5\text{-}2\text{-}1) = 1/216$

dır. Ancak zarları birbirinden ayırt etmemek en doğal olanı. Biz de etmeyelim. Olay sayımız azaldı, çünkü şimdi, örneğin 1-2-5 ve 5-1-2 olayları arasında bir ayrım yapmıyoruz[1]. Bu zara (1, 2, 5) adını verelim. Kolayca görüleceği gibi,

$o(1, 2, 5) = o(1\text{-}2\text{-}5) + o(1\text{-}5\text{-}2) + o(2\text{-}1\text{-}5) + o(2\text{-}5\text{-}1) + o(5\text{-}1\text{-}2) + o(5\text{-}2\text{-}1) = 6/216 = 1/36.$

Bunun gibi, $o(3, 4, 6)$ da 1/36'ya eşittir. Ama

$o(2, 2, 5) = o(2\text{-}2\text{-}5) + o(2\text{-}5\text{-}2) + o(5\text{-}2\text{-}2) = 3/216 = 1/72,$

ve

$$o(2, 2, 2) = o(2\text{-}2\text{-}2) = 1/216$$

dır.

Alıştırma olarak, üç zarla toplam 10 atma olasılığını hesaplayalım:

$o(1,3,6) + o(1,4,5) + o(2,2,6) + o(2,3,5) + o(2,4,4) + o(3,3,4) = 27/216 = 1/8 = 0{,}125.$

1 Üç zarda olay sayımız 56'dır. Genel olarak, *n* zarda olay sayısı kaçtır?