Böyle de Oyun Olur mu?

Bu yazıdaki oyun bir küme bilyeyle ve iki oyuncu arasında oynanıyor. İki oyuncunun önüne bir küme bilye konuyor. Birinci oyuncu bu kümeyi ikiye ayırmak zorunda. İstediği gibi ayırabilir. Böylece oyunda iki bilye kümesi olur. Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu bu iki bilye kümesinden birini ikiye ayırır. Oyun böylece sürer. Tek bilyelik kümeler ikiye ayrılamaz elbet. Ayıracak kümesi kalmayan, yani hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybeder.

Diyelim oyuna 5 bilyelik bir kümeyle başlandı. Birinci oyuncu bu kümeyi 2 bilyelik ve 3 bilyelik olarak iki kümeye ayırabilir. Bu durumu (2,3) olarak gösterelim. Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu 2 bilyelik kümeyi ikiye ayırıp oyunu (1, 1, 3) durumuna sokabilir. Sıra birinci oyuncuda. Birinci oyuncunun pek seçeneği yok; üç bilyelik kümeyi ikiye ayırıp oyunu (1, 1, 1, 2) durumuna sokacak. İkinci oyuncu da 2 bilyelik kümeyi ikiye ayırıp oyunu (1, 1, 1, 1, 1) durumuna sokacak. Birinci oyuncuya hamle kalmadı. Demek ki birinci oyuncu oyunu kaybetti.

Bu oyunu kim ve nasıl oynayarak kazanır? İki oyuncudan birini kazandıran iyi bir strateji var mı?

Diyelim a tane bilyemiz var. Oyun en çok kaç hamle sürebilir? Oyun nasıl oynanırsa oynansın, oyunun $a - 1$ hamle süreceğini savlıyorum. Yani oyun, nasıl oynanırsa oynansın, toplam bilye sayısından bir eksik hamlede biter. Savımı hemen kanıtlayayım.

Birinci Kanıt: Savımı tümevarımla kanıtlayacağım; bilye sayısı, yani a üzerine tümevarımla[1]... Önce $a = 1$ olsun. Yani 1 bilyelik bir kümemizin olduğunu varsayalım. Birinci oyuncu daha oyuna başlayamadan kaybeder. Demek ki bu oyun 0 hamle, yani $a - 1$ hamle sürer. Eğer $a = 1$ ise, oyunun $a - 1$ hamle süreceğini kanıtladık.

Şimdi $a > 1$ olsun. Tümevarım varsayımımıza göre, a'dan az bilyesi olan oyunlar, nasıl oynanırlarsa oynansınlar, bilye sayısından bir eksik hamle sürerler. Birinci oyuncu ilk hamlesini yaptı. a bilyelik kümeyi iki kümeye ayırdı. Diyelim birinci kümede b tane, ikinci kümede c tane bilye bıraktı. Demek ki oyun (a) oyunundan (b,c) oyununa dönüştü. $b + c = a$ elbet, bilye sayımız değişmedi... Şimdi önümüzde iki oyun var. Biri b bilyelik, öbürü c bilyelik. b ve c sayıları a'dan küçük olduklarından -tümevarım varsayımımıza göre- b kümelik oyun $b - 1$ hamle, c kümelik oyunsa $c - 1$ hamle sürer. Oyunu a oyunundan (b, c) oyununa dönüştüren ilk hamle zaten yapılmıştı. Demek ki toplam $1 + (b - 1) + (c - 1)$ hamlede oyun bitecek. Bu toplamı hesaplamak oldukça kolay:

$$1 + (b - 1) + (c - 1) = b + c - 1 = a - 1,$$

çünkü $b + c = a$. Demek ki b ve c ne olurlarsa olsunlar, oyun $a - 1$ hamlede bitecek. Bizim de kanıtlamak istediğimiz buydu.

İkinci Kanıt: a bilyeyi yanyana dizelim. İkiye ayıracağımız yere bir çubuk yerleştirelim. İkinci oyuncu da öyle yapsın. Çubuk konacak $a - 1$ yer vardır! Kanıt bitmiştir. □

---

1 "Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış" yazısında (sayfa 63) açıklanmıştır tümevarımla kanıt yöntemi.

Dolayısıyla, a bilyelik oyunu, eğer a çiftse birinci oyuncu, tekse ikinci oyuncu kazanır. Oyuncular nasıl oynarlarsa oynasınlar... Düşünmelerine gerek yok. Ama düşünmelerine gerek olmadığını bulmak için düşünmek zorunda kaldık! Bayılırım bu tür oyunlara...

Bu oyuna biraz tuz biber ekleyelim, yeni bir kural getirelim: Oyuncular bilyeleri tam ortadan ikiye ayıramasınlar. Örneğin 12 bilyelik bir bilye kumesi iki tane altılık kümeye dönüştürülemesin. Bu yeni oyun çok daha ilginç. Eğer $n = 1, 2, 4, 7, 10, 20, 23, 26$ ise, ikinci oyuncunun kazanan stratejisini olduğunu arkadaşlarımla hesapladık. Eğer $n < 28$ ise ve n yukardaki sayılardan birine eşit değilse, birinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır. Bundan başka bu oyun üzerine pek bir şey bilmiyorum.