Bölünebilme

Bir tamsayının üçe ya da dokuza tam olarak bölünüp bölünmediğini anlamak için çok bilinen bir yöntem vardır: Sayıyı oluşturan rakamlar toplanır. Eğer bu toplam üçe (dokuza) bölünüyorsa, sayı da üçe (dokuza) bölünüyordur. Örneğin, 2571 üçe bölünür, çünkü 2 + 5 + 7 + 1, yani 15, üçe bölünür. Öte yandan 2571 dokuza bölünmez, çünkü 15 dokuza bölünmez. Bu yöntemle, bir sayı üçe ya da dokuza bölündüğünde kalan da bulunabilir. Örneğin 1994 üçe bölündüğünde kalan 2'dir, çünkü 1 + 9 + 9 + 4, yani 23, üçe bölündüğünde kalan 2'dir. Aynı yöntemle, 1994 dokuza bölündüğünde kalanın 5 olduğu anlaşılır.

Onbire bölünebilme yöntemi de -yukardaki yöntemler kadar olmasa bile- oldukça iyi bilinir. Bir tamsayının onbire tam bölünüp bölünmediğini anlamak için, şunlar yapılır: 1) Tamsayının birinci, üçüncü, beşinci... tek sayılı basamakları toplanır; 2) Sonra ikinci, dördüncü, altıncı... çift sayılı basamakları toplanır; 3) Bu iki toplamdan küçüğü büyüğünden çıkarılır; 4) Eğer çıkarma sonucu bulunan sayı onbire bölünüyorsa tamsayımız da onbire bölünüyor demektir.

Örneğin, 2.753.087 onbire bölünmez, çünkü 2 + 5 + 0 + 7 = 14, 7 + 3 + 8 = 18 ve aralarındaki fark 4'tür. Öte yandan, 2678430964 onbire bölünür, çünkü,

$$2 + 7 + 4 + 0 + 6 = 19,$$
$$6 + 8 + 3 + 9 + 4 = 30$$

ve aralarındaki fark 11'dir. Bu yöntemle kalan da bulunabilir, yazının sonunda umarım okur kalanın nasıl bulunabileceğini kendi kendine çıkaracaktır.

İşte bu yazının amacı yukardaki yöntemlerin neden başarılı olduklarını okura anlatmaktır.

Ayrıca bir sayının 7'ye ve 13'e bölünmesi için gerekli ve yeterli oldukça basit kuralları da vereceğiz.

Başlıyoruz!

Bundan böyle 7 sıfıra eşit olsun!

"7 sıfıra eşit değil ki," deyip karşı çıkabilirsiniz. Haklısınız, 7 sıfıra eşit değildir. Daha doğrusu **her zaman** eşit değildir. Ama kimi zaman 7 sıfıra eşittir. Bir örnekle bu savımı savunayım: Diyelim bugün pazar ve size şöyle bir soru soruldu: 145 gün sonra günlerden ne olacak? Her 7 gün sonra günler yinelendiğinden, 140 gün sonra gene pazar olacak, dolayısıyla 145 gün sonraki gün aslında 5 gün sonraki gün olacaktır. Yani 145 gün sonra günlerden cuma olacak.

Bu sorunun yanıtını bulmak için 7'yi sıfır yaptık (aşağıdaki hesapta, ancak 7 sıfıra eşitlendiğinde geçerli olan eşitlikleri $=_7$ olarak gösterdim):

$$145 = 140 + 5 = (7 \times 20) + 5 =_7 (0 \times 20) + 5 = 0 + 5 = 5.$$

Demek ki günleri hesaplamak için kullanılan aritmetikte 7 sıfıra eşitlenebiliyor.

Yine de dikkatli olmak gerekiyor. Günleri hesaplamakta bile olsa her 7 sıfıra eşit değildir. Bir örnekle bu noktaya açıklık getireyim: Diyelim bugün günlerden pazar ve 256 gün sonraki günü bulmak istiyoruz. $256 = (7 \times 36) + 4$ olduğundan 256 gün sonra günlerden perşembe olur. Peki aşağıdaki hesaba ne dersiniz?

$$256 = 2^8 = 2^{7+1} =_7 2^{0+1} = 2.$$

Bu kez değişik bir yanıt bulduk. Bir yerde bir yanlış yaptık, ama nerde? İkinci hesabımız yanlış. Çünkü ikinci hesabımızda tepede bulunan 8, günleri değil ikileri saymakta kullanılıyor: 2^8 demekle 2 sayısının kendisiyle sekiz kez çarpılacağı söyleniyor. Yani buradaki sekizin görevi başka. Ama günleri saymakta kullanılan 7'leri hiç çekinmeden sıfırlayabiliriz.

Kimi zaman da 2'yi sıfıra eşitlemek işimize gelebilir. Örneğin, masanın üstünde duran bir paranın tura yüzü görünüyorsa ve bu parayı 145 kez çevirirsek, üste yazı yüzü gelir. Neden? Çünkü, her iki kez çevirdiğimizde, yine tura gözükecek, sanki parayı hiç çevirmemişiz gibi...

Kimi zaman 24'ü sıfıra eşitlemekte yarar vardır. Kimi zamansa 12'yi, 60'ı... Okur örnek bulmakta zorluk çekmeyecektir.

Diyelim, bu paragrafta 6'nın sıfır olduğuna karar verdik. Bunun sonuçlarını irdelemeye çalışalım. Eğer $6 =_6 0$ ise,

$$7 = 6 + 1 =_6 0 + 1 = 1.$$

Bunun gibi $8 =_6 2$ ve $9 =_6 3$. Peki –4 kaçtır? Hesaplayalım:

$$-4 = 0 - 4 =_6 6 - 4 = 2.$$

Demek –4, 2'ye eşitmiş. Şimdi de –124'ü hesaplayalım:

$$\begin{aligned} -124 = -120 - 4 \quad &= -(20 \times 6) - 4 =_6 -(20 \times 0) - 4 \\ &= 0 - 4 =_6 6 - 4 = 2. \end{aligned}$$

Kolayca anlaşılacağı gibi 6 sıfıra eşit olunca, her tamsayı,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesinin sayılarından birine eşittir. "İyi, güzel, ama ne işe yarar?" diyebilirsiniz. Kimi zaman 6'yı sıfırlamak yararlıdır gerçekten. Örneğin, bir tamsayı altıya bölündüğünde kalanı bulmak istiyorsak hiç çekinmeden 6'yı sıfırlayabiliriz; çünkü 6 altıya bölündüğünde kalan sıfırdır. Örneğin $(17 \times 26) + 25$ altıya bölündüğünde kalanı bulmak istiyorsak, şöyle bir hesap yapabiliriz:

$$(17 \times 26) + 25 =_6 (5 \times 2) + 1 = 11 =_6 5,$$

ve bu sayı altıya bölündüğünde kalanın 5 olduğunu anlarız.

Yukarda yazdıklarımızın kanıtı oldukça kolaydır. Yavaş yavaş kanıtlayalım. Önce tanımdan başlayalım. n sıfır olmayan bir doğal sayı olsun. Bundan böyle eğer a ve b tamsayılarsa, $a =_n b$ terimi, "$a - b$ sayısı n sayısına tam bölünür" anlamına, ya da başka bir deyişle, "a ve b sayıları n'ye bölündüğünde kalanları eşittir" anlamına gelir.

Örneğin, $1 =_6 7 =_6 13 =_6 -5$.

Birinci tanımımızı kullanarak $=_n$ kavramı üzerine birkaç olgu kanıtlayalım:

Olgu 1. $a =_n a$

Kanıt: $a - a$, yani 0, elbette n'ye tam bölünür.

Olgu 2. *Eğer* $a =_n b$ *ise*, $b =_n a$*'dır.*

Kanıt: Eğer $a - b$ sayısı n'ye bölünüyorsa, $b - a$ sayısı da n'ye bölünür.

Olgu 3. *Eğer* $a =_n b$ *ve* $b =_n c$ *ise*, $a =_n c$*'dir.*

Kanıt: Eğer $a - b$ ve $b - c$ sayıları n'ye bölünüyorsa, $a - c$ sayısı da n'ye bölünür, çünkü $a - c = (a - b) + (b - c)$ dir.

Olgu 4. *Eğer* $a =_n x$ *ve* $b =_n y$ *ise*, $a + b =_n x + y$*'dir.*

Kanıt: Eğer $a - x$ ve $b - y$ sayıları n'ye bölünüyorsa,

$$(a + b) - (x + y)$$

sayısı da n'ye bölünür, çünkü

$$(a + b) - (x + y) = (a - x) + (b - y)$$

dir.

Olgu 5. *Eğer* $a =_n x$ *ve* $b =_n y$ *ise*, $ab =_n xy$*'dir.*

Kanıt: $ab - xy = a(b - y) + y(a - x)$ olduğundan ve $a - x$ ve $b - y$ sayıları n'ye bölündüğünden, $ab - xy$ sayısı da n'ye bölünür.

Olgu 6. *Eğer* $a =_n x$ *ise ve* $m > 0$ *bir tamsayıysa* $a^m =_n x^m$.

Kanıt: Olgu 5'i kullanılarak m üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Kanıtlayalım.

Eğer $m = 1$ ise sorun yok: Olgumuzun varsayımına göre

$$a =_n x.$$

Şimdi bu olgunun m için geçerli olduğunu varsayalım (tümevarım varsayımı) ve $m + 1$ için kanıtlayalım. Yani tümevarım varsayımımıza göre,

$$a^m =_n x^m$$

eşitliğini biliyoruz;

$$a^{m+1} =_n x^{m+1}$$

eşitliğini kanıtlamaya çalışacağız. Şimdi $a^m =_n x^m$ (tümevarım varsayımı) ve $x =_n a$ (olgumuzun varsayımı) eşitliklerinden ve Olgu 5'ten,

$$a^{m+1} = a^m a =_n x^m x = x^{m+1}$$

eşitliği çıkar. Olgumuz kanıtlanmıştır.

Bu olguları kullanarak birkaç alıştırma yapalım:

Alıştırma 1. 17^{25} sekize bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $17^{25} =_8 1^{25} = 1$ olduğundan kalan 1'dir.

Alıştırma 2. 17^{25} dokuza bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $17^{25} =_9 (-1)^{25} = -1 =_9 8$ olduğundan, yanıt 8'dir.

Alıştırma 3. 17^{25} yediye bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: Bu kez çözüm biraz daha zor. Önce $17 =_7 3$ olduğundan, $17^{25} =_7 3^{25}$ eşitliğini buluruz. Demek 3^{25}'i hesaplamalıyız. Şimdi de, $3^3 = 27 =_7 -1$ eşitliğinden, $3^6 = (3^3)^2 =_7 (-1)^2 = 1$ eşitliği çıkar. Demek ki $3^{25} = 3^{(6 \times 4) + 1} = (3^6)^4 \times 3 =_4 1^4 \times 3 = 3$ ve dolayısıyla yanıt 3'tür.

Alıştırma 4. m herhangi bir doğal sayı olsun. 10^m üçe ya da dokuza bölündüğünde kaç kalır?

Yanıt: $10 =_3 1$ ve $10 =_9 1$ olduğundan, 10^m sayısı üçe ya da dokuza bölündüğünde 1 kalır.

Üçe ve Dokuza Bölünme. Şimdi bir sayının üçe ve dokuza bölünebilme yönteminin neden başarılı olduğunu anlayabiliriz. Herhangi bir sayı alalım. Diyelim 58.246.309. Ve şimdilik n, 3 ya da 9 olsun. Dördüncü alıştırmayı gözönünde bulundurarak hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} 58.246.309 &= 5\cdot10^7 + 8\cdot10^6 + 2\cdot10^5 + 4\cdot10^4 + 6\cdot10^3 \\ &\qquad + 3\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 9 \\ &=_n 5\cdot1^7 + 8\cdot1^6 + 2\cdot1^5 + 4\cdot1^4 + 6\cdot1^3 + 3\cdot1^2 \\ &\qquad + 0\cdot1^1 + 9 \\ &= 5 + 8 + 2 + 4 + 6 + 3 + 0 + 9 = 37. \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, 58.246.309 sayısının üçe ya da dokuza bölündüğünde kalanı, 37 sayısının aynı sayıya bölündüğünde kalanına eşit.

Onbire Bölünme. Şimdi de onbire bölünebilme kuralına bakalım. $10 =_{11} -1$ olduğundan,

$$10^n =_{11} \begin{cases} 1 & n \text{ çiftse} \\ -1 & n \text{ tekse} \end{cases}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} 58.246.309 &= 5\cdot10^7 + 8\cdot10^6 + 2\cdot10^5 + 4\cdot10^4 + 6\cdot10^3 \\ &\qquad + 3\cdot10^2 + 0\cdot10^1 + 9 \\ &=_{11} -5 + 8 - 2 + 4 - 6 + 3 - 0 + 9 = 11 \\ &=_{11} 0. \end{aligned}$$

Demek ki 58.246.309 onbire tam bölünür.

Şimdi, bir sayının yediye ve onüçe bölünebilme kurallarını bulalım. Önce herkesin bildiği ikiye bölünebilme kuralından başlayalım. Yavaş yavaş yediye ve onüçe geleceğiz.

İkiye Bölünme. Bir sayının ikiye (tam olarak) bölünüp bölünmediğini anlamak çok kolaydır. Eğer sayının son rakamı ikiye bölünüyorsa, yani sayı 0, 2, 4, 6, 8 rakamlarından biriyle bitiyorsa, o zaman o sayı ikiye bölünür. Örneğin 121 ikiye bölünmez, öte yandan 124 ikiye bölünür.

İlkokul çocuklarının bile bildiği bu kuralı kanıtlayalım. Herhangi bir x sayısı ele alalım. x'in ikiye bölünüp bölünmediğini anlamak istiyoruz. Tek basamaklı (yani 10'dan küçük) öyle bir b sayısı vardır ki, belli bir a sayısı için, x'i $10a + b$ biçiminde yazabiliriz, yani $x = 10a + b$ eşitliği geçerlidir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 25 &= 2 \times 10 + 5 \quad &(a = 2,\ b = 5) \\ 256 &= 25 \times 10 + 6 \quad &(a = 25,\ b = 6) \\ 2561 &= 256 \times 10 + 1 \quad &(a = 256,\ b = 1). \end{aligned}$$

$x = 10a + b$ olduğundan ve 10 ikiye bölündüğünden, x'in ikiye bölünmesi için yeterli ve gerekli koşul b'nin ikiye bölünmesidir, yani b'nin 0, 2, 4, 6, 8 sayılarından biri olmasıdır. Ve b elbette x'in son rakamıdır...

Beşe Bölünme. Bir sayının beşe bölünmesi için son rakamının ya 0 ya 5 olması gerekir. Bunu da herkes bilir.

Bu kuralın da kanıtı yukardaki gibidir: Sayımızı $10a + b$ olarak yazalım. Burda b, tek basamaklı (yani 10'dan küçük) bir sayıdır. 10 beşe bölündüğünden, sayımızın beşe bölünmesi için b'nin de beşe bölünmesi gerekmektedir, yani b ya 0 yada 5 olmalıdır.

Dörde Bölünme. Bir sayının dörde bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son iki basamağına bakılır. Eğer son iki basamağı oluşturan sayı dörde bölünüyorsa, o zaman sayımız da dörde bölünür. Örneğin 34.527.672 sayısı dörde bölünür, çünkü 72 dörde bölünür.

Neden bu böyledir? Yani neden bu kural geçerlidir? Kanıtlayalım. Tamsayımıza x diyelim. x'in dörde bölünüp bölünmediğini anlamak istiyorum. En fazla iki basamaklı (yani 100'den küçük) öyle bir b sayısı vardır ki, belli bir a sayısı için, $x = 100a + b$ eşitliği geçerlidir. Örneğin,

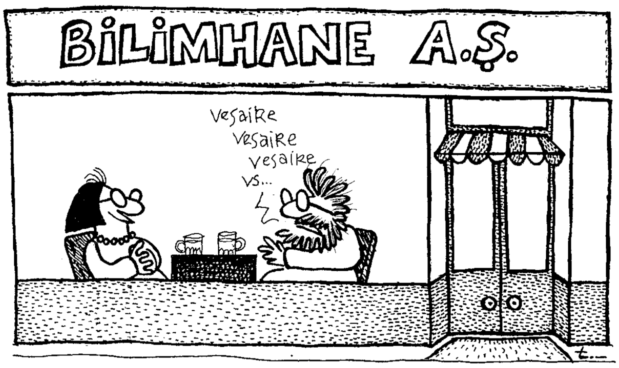
$$\begin{array}{rl} 26 = 100 \times 0 + 26 & (a = 0, b = 26) \\ 548 = 100 \times 5 + 48 & (a = 5, b = 48) \\ 5400 = 100 \times 54 + 0 & (a = 54, b = 0) \\ 42543 = 100 \times 425 + 43 & (a = 425, b = 43) \end{array}$$

100 dörde bölündüğünden ve $x = 100a + b$ olduğundan, x'in dörde bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşul, b'nin dörde bölünmesidir. Ve elbette b sayısı, x'in son iki basamağındaki rakamlardan oluşur. Yukardaki örneklerden yalnızca ikincisi ve üçüncüsü (yani 548 ve 5400) dörde bölünür.

Sekize ve Onaltıya Bölünme. Bir sayının sekize bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son üç rakamına bakılır. Eğer son üç rakamın oluşturduğu sayı sekize bölünüyorsa, sayı da sekize bölünür. Örneğin 34.527.712 sayısı sekize bölünür, çünkü 712 sekize bölünür.

Bu kuralın neden geçerli olduğunu okur anlamıştır sanırım: 1000'in sekize tam olarak bölünmesinden kaynaklanır.

Bir sayının onaltıya bölünüp bölünmediğini anlamak için o sayının son dört rakamına bakılır. Eğer son dört rakamın oluş-



turduğu sayı onaltıya bölünüyorsa, sayı da onaltıya bölünür. Örneğin 34.521.632 sayısı onaltıya bölünür, çünkü 1632 onaltıya bölünür.

Yediye ve Onüçe Bölünme. Yediye ve onüçe bölünme kuralları biraz daha az bilinir. Şimdi bu kuralları göreceğiz.

Aslında yediye ve onüçe bölünebilme kuralları aynıdır. Bir örnekle açıklayayım. 581.976.024 sayısını ele alalım. Bu sayı yediye/onüçe bölünür mü?

Bu soruyu yanıtlamak için aşağıdaki işlemi yapalım: 581 – 976 + 024. Eğer çıkan sonuç yediye/onüçe bölünüyorsa, 581.976.024 sayısı da yediye/onüçe bölünür. İşlemi yapalım: 581 – 976 + 024 = –371. Bulduğumuz –371 sayısı yediye bölünür (sonuç –53 çıkar) ama onüçe bölünmez. Demek ki, 581.976.024 sayısı yediye bölünür ama onüçe bölünmez.

Yediye ve onüçe bölünme kuralının neden doğru olduklarını gösterelim.

Nedenin püf noktası $10^3 + 1 = 7 \times 13 \times 11$ eşitliğindedir.

Bundan da

$$10^3 = 1000 =_7 -1$$
$$10^3 = 1000 =_{13} -1$$

çıkar. Demek ki

$$10^{3n} =_7 (-1)^n$$
$$10^{3n} =_{13} (-1)^n$$

Artık 581.976.024 sayısının neden yediye bölündüğünü anlayabiliriz: (m, 7 ya da 13'e eşit olsun.)

$$\begin{aligned} 581.976.024 &= (581 \times 10^9) + (976 \times 10^6) + (24 \times 10^3) \\ &=_m -581 + 976 - 24 = -371. \end{aligned}$$

Demek ki, 581.976.024'ün yediye/onüçe bölünmesi için, –371'in yani 371'in yediye/onüçe bölünmesi gerekir.