Sevdiğim Birkaç Soru

Matematikte öyle sorular vardır ki, yanıtı bulmak önce çok zor gibi gelebilir, sonradan -saatler, günler, aylar, hatta kimi zaman yıllar sonra- yanıtın çok basit olduğu anlaşılır. Bir benzetme yaparak, matematiği andıran bir örnek vereyim.

Bir tren İstanbul'dan Ankara'ya doğru saatte 100 km.'yle gidiyor. İkinci bir tren Ankara'dan İstanbul'a doğru saatte 150 km.'yle gidiyor. İkinci tren birinci trenden 1 saat sonra kalktığına göre, iki tren karşılaştıklarında hangisi İstanbul'a daha yakındır?

Bu soruyu yanıtlamak için hesaba kitaba gerek yok. İki tren karşılaştıklarında, her ikisinin de hem Ankara'ya hem İstanbul'a hem de Adana'ya uzaklıkları aynıdır!

John Von Neumann 20'nci yüzyılın birinci yarısında yaşamış ve matematiğin hemen hemen her dalına katkısı olmuş büyük bir matematikçidir. Bilgisayarı bulanlardan biridir. Kümeler kuramına çok önemli katkıları olmuştur. Ayrıca oyunlar kuramının temellerini atmıştır. Von Neumann'ın daha birsürü katkısı vardır matematiğe.

Von Neumann'a bir dostu şu soruyu sormuş: İki tren aynı ray üzerinde birbirine doğru hareket ederler. Bu iki tren arasında bir sinek vardır. Sinek trenlerden birine dokununca, yön değiştirip öbür trene doğru gider. Bir süre sonra öbür trene çarpar elbet ve o zaman gene yön değiştirip birinci trene doğru gider. Sinek böylece iki tren arasında yol alır. İki tren çarpışınca sinek ezilir. Trenlerin arasında başlangıçta 100 km. olduğuna göre ve trenler aynı anda hareket ettiklerine göre ve trenlerden biri saatte 5 öbürü saatte 15 km. gittiğine göre ve sinek saatte 25 km.'yle uçtuğuna göre, sinek ne zaman ezilir?

Bu sorunun yanıtını bulmak için oldukça karmaşık sonsuz bir dizi toplanabilir, ki çoğunluk bu yöntemi seçer. Oysa yanıt daha kolay bir yöntemle bulunabilir. Trenler saatte 5 + 15, yani 20 km.'yle birbirlerine yaklaşmaktadır. Aralarında başlangıçta 100 km. olduğuna göre, iki tren 100/20, yani 5 saat sonra çarpışır. Dolayısıyla sinek 5 saat sonra ezilir.

Von Neumann bir iki dakika kadar düşündükten sonra,

– 5 saat sonra, yanıtını vermiş.

Soruyu soran dostu, Von Neumann'ın yanıtı çok çabuk bulmasından kuşkulanıp,

– Sen bu soruyu biliyordun, demiş.

Von Neumann şaşırmış.

– Niye öyle diyorsun, demiş, oldukça kolay bir soru, sonsuz diziyi toplamak yeterli...

Bu yazıda matematikten birkaç güzel kanıt örneği vereceğim.

Birinci Soru. Bir doğal sayıyı çeşitli biçimlerde doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz. Örneğin, 3:

3
2 + 1
1 + 2
1 + 1 + 1

olarak yazılabilir. Ya da 4:

4
3 + 1
1 + 3

2 + 2
2 + 1 + 1
1 + 2 + 1
1 + 1 + 2
1 + 1 + 1 + 1

olarak yazılabilir. Görüldüğü gibi 3'ü dört değişik biçimde, 4'ü sekiz değişik biçimde yazabiliyoruz.

Herhangi bir *n* doğal sayısı doğal sayıların toplamı olarak kaç türlü yazılabilir?

Birinci Sorunun Yanıtı: Doğru yanıtı bulmak pek zor değil. Biraz denemeyle *n* sayısının 2^{n-1} biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazılacağı anlaşılır.

Yanıtın neden doğru yanıt olduğunu açıklamak için önce bir örnek alalım. 6'yı kaç biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazabileceğimize bakalım. 6'yı altı tane 1'le, yani

111111

olarak gösterelim. Şimdi 6 = 4 + 2 eşitliğini

1111|11

olarak, 6 = 3 + 1 + 2 eşitliğini

111|1|11

olarak gösterebiliriz. Demek ki 6'yı doğal sayıların toplamı olarak yazmak demek, altı tane 1 arasına çubuk yerleştirmek demektir. Altı tane 1 arasına kaç biçimde çubuk yerleştirebiliriz? Çubuk yerleştirebileceğimiz 5 yerimiz var. Bu 5 yerin herbirine çubuk koyabiliriz ya da koymayabiliriz. Demek ki her yer için 2 olasılığımız var: çubuk koymak ya da koymamak. Dolayısıyla 5 yer için $2^5 = 32$ olasılığımız var. Sonuç olarak, 6'yı 32 değişik biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz.

Herhangi bir *n* doğal sayısı için yanıt yukardaki tartışmadan anlaşılmıştır. *n*'yi 2^{n-1} biçimde doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz. Neden? Yukardaki gibi *n*'yi *n* tane 1'le gösterelim. Her iki 1'in arasına bir çubuk yerleştireceğiz ya da yerleştirmeyeceğiz. Her yer için 2 seçeneğimiz var: Çubuk koymak ya da koymamak. $n - 1$ tane yerimiz olduğundan ve her yere çubuk yerleştirip yerleştirmemekte özgür olduğumuzdan, toplam 2^{n-1} seçeneğimiz vardır.

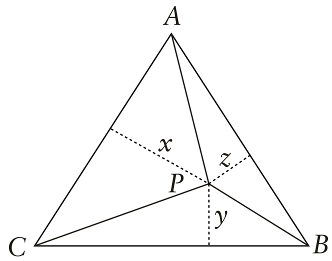
İkinci Soru. *Ardışık 2n pozitif doğal sayı arasından n + 1 tanesi seçiliyor.*[1] *Seçim ne olursa olsun, bu n + 1 sayıdan en az ikisinin ortak böleninin* 1 *olduğunu kanıtlayın.*

İkinci Sorunun Kanıtı. Ardışık $2n$ sayıdan $n + 1$ tanesi seçildiğinde, bu $n + 1$ sayıdan en az ikisi ardışık olmak zorundadır, yani biri a öbürü $a + 1$ olmalıdır. Bu iki sayının ortak böleni 1'dir.

Üçüncü Soru. *Eşkenar bir üçgenin içindeki her noktanın üç kenara olan uzaklıklarının toplamının hep aynı olduğunu kanıtlayın*[2].

Üçüncü Sorunun Kanıtı: Eşkenar üçgenimize ABC diyelim. Üçgenimizin kenarları a uzunluğunda, yüksekliği de h uzunluğunda olsun. Demek ki üçgenimizin alanı $ah/2$'dir.

Üçgenimizin içinden herhangi bir P noktası alalım. P'nin kenarlara olan uzaklıklarına x, y, z diyelim. P'yle A, B ve C kö-



şeleri arasındaki üç doğruyu çizersek, üçgenimizi üç küçük üçgene bölmüş oluruz: APC, CPB ve BPA üçgenlerine. Bu üçgenlerin alanları $ax/2$, $ay/2$, $az/2$'dir. Demek ki bu üç sayının top-

1 8, 9, 10 gibi ardarda gelen sayılara ardışık sayılar denir.
2 Bu sonuca Viviani Teoremi denir. Viviani İtalyandır ve 1622-1703 yılları arasında yaşamıştır.

lamı ABC üçgeninin alanı, yani $ah/2$ olmalı:

$$ax/2 + ay/2 + az/2 = ah/2.$$

Sadeleştirirsek $x + y + z = h$ buluruz. Demek ki, P noktasının kenarlara olan uzaklıklarının toplamı h'dir. Bu sayı P'den bağımsızdır.

Dördüncü Soru. Her doğal sayının dört doğal sayının karelerinin toplamı olduğu bilinen bir teoremdir. Örneğin,

$$\begin{aligned}
0 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\\
1 &= 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\\
2 &= 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2\\
3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2\\
4 &= 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2\\
5 &= 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2\\
6 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2\\
7 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2\\
8 &= 2^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2\\
9 &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2\\
10 &= 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2.
\end{aligned}$$

Bunun gibi, 63, $5^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2$ olarak yazılabilir. Bu teoremi doğru kabul ederek (ki doğru), *her pozitif kesirli sayının dört kesirli sayının karelerinin toplamı olduğunu kanıtlayın.*

Dördüncü Sorunun Kanıtı. k pozitif ve kesirli bir sayı olsun. İki a ve b doğal sayısı için, $k = a/b$ eşitliği doğrudur. ab bir doğal sayıdır, dolayısıyla, ab dört doğal sayının karelerinin toplamıdır, diyelim x, y, z ve t tamsayılarının karelerinin toplamı:

$$ab = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Şimdi k'nin dört kesirli sayının karesi olduğunu kanıtlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
k = \frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2} = \frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{b^2} &= \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{t^2}{b^2}\\
&= \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 + \left(\frac{t}{b}\right)^2
\end{aligned}$$

Beşinci Soru. Şu sonsuz diziyi ele alalım:

$$-1/2,\ 1/4,\ -1/8,\ 1/16,\ -1/32,\ 1/64,\ -1/128,\ \ldots$$

Bu dizi bir büyür, bir küçülür. Eğer bu diziden negatif sayıları çıkarırsak geriye küçülen bir dizi kalır. Bir başka deyişle,

$$1/4,\ 1/16,\ 1/64,\ 1/256$$

dizisi ilk dizinin durmadan küçülen bir altdizisidir.

Şimdi, sonsuz herhangi bir

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

gerçel sayılar dizisi alalım. *Bu dizinin ya hiç azalmayan, ya da hiç artmayan sonsuz bir altdizisi olduğunu kanıtlayın.* Daha matematiksel bir deyişle, bu dizide öyle sonsuz tane a_{n_i} terimi olduğunu kanıtlayın ki, bu terimler, ya hep

$$n_i \le n_j \text{ ise } a_{n_i} \le a_{n_j}$$

koşulunu ya da hep

$$n_i \le n_j \text{ ise } a_{n_i} \ge a_{n_j}$$

koşulunu sağlasın.

Beşinci Sorunun Kanıtı: Eğer dizinin bir sayısı kendisinden sonra gelen hiçbir sayıdan daha küçük değilse, o sayıya ***güzel*** sayı diyelim. Bir başka deyişle, a_n sayısı,

$$m \ge n \text{ ise } a_m \le a_n$$

koşulunu sağlıyorsa, a_n'ye güzel sayı diyelim.

İki şıkkımız var: Ya sonsuz tane güzel sayı vardır ya da sonlu tane. Eğer sonsuz tane güzel sayı varsa, güzel sayılar dizisi hiç artmayan bir sonsuz dizidir. Eğer sonlu tane güzel sayı varsa, dizinin en son güzel sayısından sonra gelen sayılara bakalım. Bu sayılar güzel olamazlar. Demek ki bu sayıların herbirinden sonra daha büyük bir sayı bulabiliriz. Örneğin, a_n, dizinin en son güzel sayısı olsun. a_{n+1} bulacağımız altdizinin birinci sayısı olacak. a_{n+1} güzel olmadığından, a_{n+1}'den sonra daha büyük bir sayı vardır. Bu sayı altdizimizin ikinci sayısı olacak. İkinci sayımız da güzel olmadığından, ikinci sayımızdan sonra daha büyük bir sayı vardır. Bu sayı altdizimizin üçüncü sayısı olsun. Üçüncü sayımızdan sonra da bu sayıdan daha büyük bir sayı vardır... Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz ve durmadan artan sonsuz bir dizi elde ederiz.

Altıncı Soru. *n herhangi bir tamsayı olsun.*

$$(21n + 4)/(14n + 3)$$

kesirli sayısını ele alalım. n ne olursa olsun, bu kesirli sayının bu gösteriminin sadeleşmeyeceğini kanıtlayın[3].

Altıncı Sorunun Kanıtı: Aslında, $21n + 4$ ve $14n + 3$ sayılarının en büyük ortak böleninin 1 olduğunu, yani bu iki sayının birbirine asal olduğunu kanıtlamamız isteniyor. Kanıtlayalım...

p, bu iki sayıyı bölen bir doğal sayı olsun. p'nin 1'e eşit olduğunu kanıtlamalıyız.

$21n + 4$ sayısı p'ye bölünüyor. Demek ki, bir a tamsayısı için,

$$21n + 4 = ap$$

eşitliği geçerlidir. $14n + 3$ sayısı da p'ye bölünüyor. Demek ki, bir b tamsayısı için,

$$14n + 3 = bp$$

eşitliği geçerlidir. Bu denklemleri altalta yazalım:

$$21n + 4 = ap$$
$$14n + 3 = bp.$$

Şimdi birinci denklemi 2'yle, ikinci denklemi 3'le çarpalım:

$$42n + 8 = 2ap$$
$$42n + 9 = 3bp$$

denklemlerini elde ederiz. Birinci denklemi ikinciden çıkarırsak,

$$1 = 3bp - 2ap$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin sağındaki sayı $(3b - 2a)p$'ye eşit ve dolayısıyla p'ye bölünür. Demek ki denklemin solundaki sayı da p'ye bölünmeli. Yani 1, p'ye bölünmeli... Yani $p = 1$ olmalı!

Dilediğimizi kanıtladık.

---

3 Bu soru lise öğrencilerinin katıldığı 1959 Uluslararası Matematik Olimpiyatları'nda sorulmuştur.