

# Matematik ve Özgürlük

**H**areketlerimizde ve aldığımız kararlarda gerçekten özgür müyüz? Yoksa ayırımına varmadığımız bir gücün, örneğin birtakım alışkanlıkların etkisi altında mıyız? Birkaç örnek verdikten sonra konuya matematiksel (ve biraz da kaçınılmaz olarak felsefi) yönden eğileceğim.

**Dört İstek.** Konuya girmeden önce sizden birkaç isteğim olacak:

1. Ayağa kalkın ve el bileğinizi tutun.
2. El tırnaklarınıza bakın.
3. Ayağa kalkıp topuğunuza bakın.
4. Eşinizle, nişanlınızla, sözlünüzle, karşı cinsten sevdiğiniz biriyle elele tutuşup biraz yürüyün.

Şimdi size ne yaptığınızı söyleyeceğim:

1. Sol bileğinizi tuttunuz.
2. Eğer erkekseniz, tırnaklarınıza bakmak için parmaklarınızı avcunuzun içine kıvırdınız. Eğer kadınsanız, parmaklarınızı yayıp elinizin sırtına baktınız.
3. Eğer erkekseniz topuğunuza bakmak için öne eğildiniz. Eğer kadınsanız topuğunuzu arkadan kaldırıp arkaya doğru eğildiniz.

4. Eğer erkekseniz sevdiğinizin elini 6nden kavramışsınızdır, yani elinizin sırtı y6r6d6đ6n6z y6ne bakar. Eğer kadınsanız, avcunuz y6r6d6đ6n6z y6ne bakar ve erkek avcunuzu 6nden kavramıştır.

B6y6k bir olasılıkla tahminlerim doğru 6ıkmıştır. Bu tahminlerim sizi şaşırtmamış olabilir. 6rneğin, insanlar genellikle sağak olduklarından, sol bileklerini tuttuklarını anlamışsınızdır. Amacım kimseyi şaşırtmak değildi zaten. Amacım, rasgele gibi gelebilecek se6imlerin kimileyin bir kurala uyduklarını g6stermekti.

Yıllar 6nce erkeklerin sigarayı ağızlarının solunda, kadınlarsa sağında tuttuklarını duymıştum. G6zlemlerim de bu y6ndeydi.

Uygulamada hi6bir işe yarayacağına inanmadığım bu g6zlemlerden sonra uygulamaya ge6irilebilecek bir 6rnek vereyim.

**T6keticiler Psikolojisi.** Yıllar 6nce Amerika’da t6keticiler psikolojisiyle ilgili bir gazete yazısı okumuştum. Birbirine hemen hemen eşdeğer olan iki t6keticiler maddesini ele almış araştırmacılar. 6rneğin *The New York Times* ve *The Washington Post* gibi iki ciddi gazete, *Time* ve *Newsweek* gibi iki haftalık haber dergisi, *Pepsi Cola* ve *Coca Cola* gibi iki gazlı i6it, *Playboy* ve *Penthouse* gibi iki aylık “erkek dergisi”... Birbirine 6ok benzeyen bu iki 6r6n6 bir d6kk6nda, ortalık bir yerde sergilemişler. Ancak iki 6r6nden birinden y6zlerce, 6b6r6ndense on yirmi tane kadar, yani az sayıda sergilemişler. 6r6nler satıldıķa yerine yenilerini koymuşlar. G6n sonunda, 6ok sayıda sergilenen 6r6n6n daha 6ok satılmış olduğu saptanmış.

Amerika i6in ge6erli olan bu g6zlem bir başka 6lke i6in ge6erli olmayabilir. 6rneğin, T6rkiye’de bunun tam tersi olabilir, “kalmayacak” korkusuyla insanlar az sergilenen 6r6n6n daha 6ok alabilirler. Hatta deneyin sonucu, şehirde şehire, yaş grubundan yaş grubuna g6re bile değişebilir. Gene de, bu deney-

den, aynı ortamda yetişmiş ve aynı ortamda yaşayan insanların davranışlarının ve kararlarının birbirine benzediği ortaya çıkıyor. Zaten böyle benzeşme olmasaydı toplumbilim ya da toplum psikolojisi gibi bilim dalları olmazdı sanırım.

**En Çok Tutulan Sayılar.** Çocukların oynadıkları bir oyun vardır. İki çocuktan biri, örneğin, 1’le 100 arasında bir sayı tutar. Öbür çocuk, “50’den büyük mü”, “68’le 83 arasında mı” gibi sorular sorarak tutulan sayıyı bulmaya çalışır. Sonra, roller değişir, bu kez öbür çocuk 1’le 100 arasında bir sayı tutar. Tutulan sayıyı en çabuk bulan çocuk oyunu kazanır.

Bu oyunun stratejisi oldukça açıktır: sayılar ortadan ikiye bölünür. Örneğin ilk soru “50’den büyük mü” olabilir. Eğer yanıt evetse, ikinci soru “75’ten büyük mü” olabilir... Bu yöntemle, tutulan sayı en çok 7 soruda bulunur.

Ama diyelim ki çocuklardan biri öbür çocuğun yüzde 90 olasılıkla 40’la 60 arasında bir sayı tuttuğunu biliyor. O zaman ilk sorusu “40’la 60 arasında mı” olursa, oyunu kazanma olasılığı artar.

Yıllar önce, bir dersimde, hangi sayının yüzde kaç olasılıkla tutulduğu bilindiğinde bu oyunun en iyi stratejisinin nasıl bulunduğunu anlatacaktım. Derse biraz tat vermek için sınıfa bir şapkayla girdim. Öğrencilerden küçük bir kâğıda 1’le 10 arasında bir sayı yazıp şapkaya atmalarını istedim. Anlatacağım konuyu daha önce bilmediklerinden bu isteğime bir anlam veremediler ama yerine getirdiler. Yüz elli dolayında öğrenci vardı sınıfta. Her sayının seçilme olasılığı 1/10 olduğundan, her sayı aşağı yukarı 15 kez seçilmeliydi. Bunu öğrencilerime anlat-



tım. Kimse karşı çıkmadı, herkes aynı düşüncedeydi.

– Ama, diye ekledim, göreceğiz ki, en çok 7 seçilecek!

Şapkayı bir masaya boşalttık. Bir öğrenci seçilen sayıları teker teker okudu. Ben de bu sayıları karatahtaya yazdım. Tahmin ettiğim gibi öğrencilerin (aklımda yanlış kalmadıysa) aşağı yukarı yüzde otuzu 7’yi seçmişti. Yüzde ondan çok daha büyük bir yüzde...

Hangi sayının hangi sıklıkta seçildiğini gözlemledikten sonra 1’le 10 arasında tutulan bir sayıyı bulma oyununun en iyi stratejisini bulduk.

Bir başka ülkede başka sonuç bulunabilir. Ama sanırım aynı ortamda, benzer koşullarda yetişmiş insanlar kimi sayıları öbür sayılara yeğleyeceklerdir.

Diyelim size benzeyen insanlar arasında (aynı yaş grubundan, benzer eğitimden geçmiş, aynı cinsiyetten insanlar arasında) bir anket yapılıyor. Bu insanlardan 8 ve 9 rakamlarından birini seçmeleri isteniyor. Diyelim bu insanların yüzde 80’i 9’u seçti. Bundan sizin de büyük bir olasılıkla 9’u seçeceğiniz çıkmaz mı?

İnsanlara sorulan soru, “kendinizi pencereden atacak mısınız” olsa, elbet çoğunluk “hayır” yanıtını verir. Ama insanlardan istenen iki sayıdan birini seçmeleri. İnsanların bir sayıyı öbürüne yeğlemeleri için görünürde bir neden yok. Ama sayılardan biri öbürüne yeğleniyor. Bu durumda özgür olduğumuz söylenebilir mi?

**Newcomb’un Oyunu.** 1960’da Amerikalı fizikçi William Newcomb şu oyunu ortaya atar: Önünüzde içini göremediğiniz iki kapalı kutu duruyor. Birinci kutuda 1 lira var. İkinci kutu ya boş ya da içinde 100 lira var. İki seçeneğiniz var:

1) Her iki kutuyu birden açabilirsiniz ve kutularda bulduğunuz paralar (ya 1 ya da 101 lira) sizin olur.

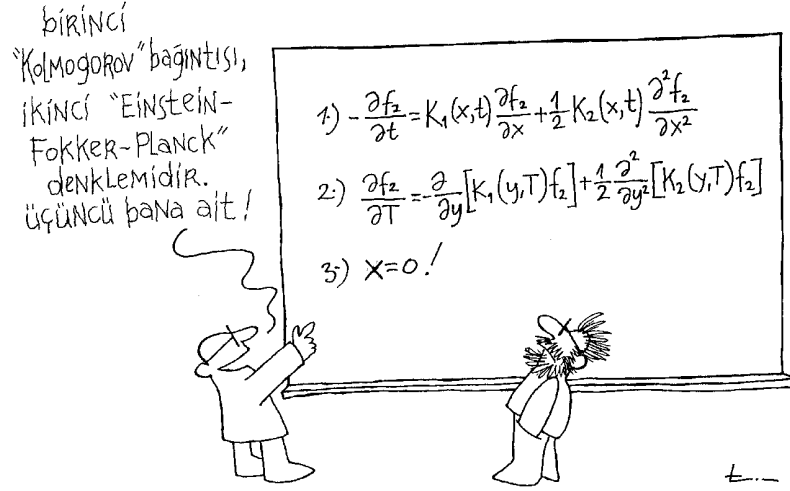
2) Salt ikinci kutuyu açabilirsiniz. Kutuda para varsa (100 lira) parayı cebinize atarsınız. Yoksa hava alırsınız.

Hangi seçeneği seçmelisiniz? İki kutuyu birden mi, yoksa salt ikinci kutuyu mu açmalısınız?

İki kutuyu birden açmalısınız elbet. Bunun hiçbir zararı olmadığı gibi yararı da vardır. İkinci kutuda para olsa da olmasa da, her iki kutuyu birden açarak, ikinci kutunun içindeki paradan başka, birinci kutudaki 1 lirayı da kazanırsınız. Geçerli bir neden olmadan 1 lirayı reddetmek doğru olmaz. Bunun pıntilikle bir ilgisi yok. Mantıkla ilgisi var.

Ama Newcomb'un oyunu bu kadarla kalmıyor. Newcomb bize bir bilgi daha veriyor. **Bir gün önce**, geleceği yüzde doksan doğrulukta görebilen olağanüstü yetili bir varlık, hangi seçeneği seçeceğinizi öngörüyor. Salt ikinci kutuyu açacağınızı öngörmüşse ikinci kutuya 100 lira koyuyor. Her iki kutuyu birden açacağınızı öngörmüşse, ikinci kutuyu boş bırakıyor. Bu bilgiyle hangi seçeneği seçmelisiniz? Her iki kutuyu birden mi açmalısınız, yoksa salt ikinci kutuyu mu?

Geleceği görebilen olağanüstü varlık Tanrı olabilir. İlla mükemmel bir Tanrı olması da gerekmez, yüzde 10 hata yapabilen bir Tanrı da olabilir. Ya da sizi çok iyi tanıyan biri olabilir, örneğin, anneniz, babanız, eşiniz, bir psikolog... Bu varlık, si-



zin böyle bir oyunda ne seçeceğinizi yüzde 90, yüzde 60, yüzde 51 olasılıkla öngörebilir.

Varlık'ın yüzde 90 doğru öngördüğünü varsayalım.

Bir an için, her iki kutuyu birden açtığımızı düşünelim. Varlık her iki kutuyu birden açacağını öngörmüşse, yalnızca 100 lira kazanırız. Ama Varlık öngörüsünde yanılmışsa, o zaman 101 lira kazanırız.

Salt ikinci kutuyu açtığımızı varsayalım şimdi de. Varlık salt ikinci kutuyu açacağını öngörmüşse 100 lira kazanırız. Varlık öngörüsünde yanılmışsa, yani her iki kutuyu birden açacağını sanmışsa, hiç para kazanamayız.

Bunu Varlık'la oynadığımız bir oyun olarak görebiliriz. Oyunumuz iki hamlelik bir oyun. İlk hamleyi Varlık yapıyor. İkinci (ve son) hamleyi de biz. Oyunu bir şemayla gösterelim:

	Varlık iki kutuyu birden açacağını öngörüyor	Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağını öngörüyor
İki kutuyu birden açıyoruz	100 TL	101 TL
Yalnız ikinci kutuyu açıyoruz	0 TL	100 TL

Bu oyunu nasıl oynarsınız? Varlık hamlesini yaptı. Sıra sizde... İki kutuyu birden mi açmalısınız, yoksa salt ikinci kutuyu mu?<sup>1</sup>

**Birinci Yanıt.** “İki kutuyu birden açarsam, Varlık bunu büyük bir olasılıkla öngörmüş olacak, dolayısıyla yalnızca 1 lira kazanacağım. Ama yalnızca ikinci kutuyu açarsam, Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağını yüzde doksan olasılıkla öngörmüş olacağından büyük bir olasılıkla 100 lira kazanacağım. Demek ki yalnızca ikinci kutuyu açmalıyım.”

1 Hangi stratejiyi seçeceğimizi yazı-tura atarak karar versek ne olur? Kaynakça [12]'de problemi sunarken, Varlık yazı-tura atacağını öngörürse, ikinci kutuyu boş bırakacağını söylüyor.

**İkinci Yanıt.** “Varlık öngörüsünü dün yaptı. Bugün alacağım karar ne bu öngörüü ne de kutudaki paraları değiştirecek. Dolayısıyla istediğim kararı almakta özgürüm. Her iki kutuyu birden açarak (varsa elbet), ikinci kutudaki paradan başka birinci kutudaki 1 lirayı da cebime indiririm. Yukardaki oyun şeması da iki kutuyu almanın daha doğru olduğunu söylüyor zaten: birinci sıradaki sayılar ikinci sıradaki sayılardan daha büyük. İkinci kutuda para olsa da olmasa da, her iki kutuyu birden açarak daha çok para kazanırım.”

**Hangi Yanıt Doğru?** Filozoflar ve matematikçiler hangi yanıtın doğru olduğu konusunda anlaşamıyorlar. Her iki yanıt da savunulabilir.

**Beklenti.** Birinci yanıt “beklenti” ilkesine dayanıyor. Varlık’ın yüzde doksan doğru öngördüğünü varsayarak, her iki hamlemizin de beklentisini hesaplayalım. Önce her iki kutuyu da açtığımız duruma bakalım:

%90	olasılıkla Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor ve	1 lira kazanıyoruz
%10	olasılıkla Varlık yalnızca ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor ve	101 lira kazanıyoruz.

Beklentimiz bu durumda

$$(90/100) \times 1 + (10/100) \times 101 = 11$$

lıradır. şimdi yalnızca ikinci kutuyu açtığımız duruma bakalım:

%10	olasılıkla Varlık iki kutuyu birden açacağımızı öngörüyor ve	0 lira kazanıyoruz
%90	olasılıkla Varlık salt ikinci kutuyu açacağımızı öngörüyor ve	100 lira kazanıyoruz

Beklentimiz bu durumda

$$(10/100) \times 0 + (90/100) \times 100 = 90$$

liradır. İkinci beklenti birincisinden daha fazla olduğundan, ikinci seçeneği seçmeliyiz, yani salt ikinci kutuyu açmalıyız. Demek ki birinci yanıt doğrudur.

Varlık'ın doğru öngörme oranı, yüzde 90 gibi yüksek bir sayı olacağına yüzde 51 bile olsa, salt ikinci kutuyu açmanın beklentisi, her iki kutuyu da açma beklentisinden daha yüksek çıkar. Demek ki, Varlık'ın doğru öngörme oranı yüzde 50'den biraz yüksek bile olsa (yüzde  $100 \times 101/201 \approx 50,0248756$ 'den büyükse), beklenti yöntemi salt ikinci kutuyu açmamız gerektiğini söylüyor.

**Üstünlük İlkesi.** İkinci yanıt üstünlük ilkesine dayanıyor: Oyunun şemasına bakalım. Bu şemada, birinci sıranın sayıları hemen alttaki sayılardan daha yüksek (daha **üstün**) olduğundan, her iki kutuyu birden açmalıyız. Her iki kutuyu açmak, yalnızca ikinci kutuyu açmaktan daha **üstün** bir stratejidir.

Bu stratejinin doğru olduğu şöyle de anlaşılabilir: Birinci kutu saydam olsun ve içindeki 100 bin lirayı görelim. İkinci kutunun arka tarafı saydam olsun. Kutuların arkasına güvendiğimiz bir arkadaşımızı koyalım. Eğer ikinci kutu boşsa, bu güvendiğimiz arkadaş birinci kutudaki 100.000 lirayı kazanmamızı istediğinden, her iki kutuyu birden açmamızı önerecektir. Eğer ikinci kutu boş değilse, bu arkadaş gene her iki kutuyu birden açmamızı isteyecektir, çünkü 100 milyon yerine 100 milyon 100 bin lira kazanmamızı isteyecektir.

Hatta hile yapıp kutuların içini gördüğümüzü varsayalım. İkinci kutunun içinde para olsa da olmasa da, daha çok para kazanmak için her iki kutuyu birden açmak isteriz. Hile yaparak iki kutuyu açmak gerektiğini anlamışsak, hile yapmadan da iki kutuyu birden açmak gerektiğini anlarız.

**Sonuç.** Dediğim gibi, hangi stratejinin doğru olduğu konusunda matematikçiler ve filozoflar anlayamıyorlar. Kimine gö-



re beklenti ilkesini uygulayıp iki kutuyu birden açmalıyız, kimi-ne göreyse üstünlük ilkesini uygulayıp ikinci kutuyu açmalıyız. Kimi de, bu soruya ne beklenti yönteminin ne de üstünlük ilkesinin uygulanabileceğini savunuyor.

Genellikle hareketlerinde özgür olduklarına inanan insanlar her iki kutuyu birden açmanın en iyi strateji olduğunu düşünüyorlar. Örneğin Jean-Paul Sartre sağ olsa ve Sartre'ın yaşam arkadaşı Simone de Beauvoire bu oyunu Sartre'a oynatsa, özgür olduğuna inanan ve yapıtlarında bunu durmadan savunan Sartre, biraz düşününce her iki kutuyu birden açmak isteyecektir. Simone de Beauvoire, Sartre'ı iyi tanıdığından, Sartre'ın bu stratejiyi seçeceğini öngörecektir ve ikinci kutuyu boş bırakacaktır! Dolayısıyla özgür olduğuna inananlar (ve Varlık'a bunu belli edenler!) Varlık tarafından cezalandırılacaklardır!

“Öyle bir Varlık olamaz” demek çelişkiyi çözmez. Çünkü, geleceği yüzde doksan görebilen bir Varlık olmasa bile, bizi çok iyi tanıyan ve bu oyunu nasıl oynayacağımızı en az yüzde 51 olasılıkla öngörebilen bir insan vardır elbette.

**Ben Ne Düşünüyorum?** Bu oyunu oynayana dek, hangi stratejiden yana olduğumdan pek emin değildim. Oyunu bir kez oynadım (bu yazıyı yazdıktan ve bu kitabın ikinci basımından çok daha sonra.) Ben “Tanrı” oldum ve çok yakın bir arkadaşım seçim yaptı. Tahmin ettiğim gibi arkadaşım her iki kutuyu birden açtı. Her iki kutuyu birden açması gerekirdi elbet!

Bu oyunu oynasam, her iki kutuyu birden açarım. Beni tanıyan bir Varlık, her iki kutuyu açacağımı öngörür ve ikinci kutuyu boş bulurum! Gene de sağım solum belli olmaz, son anda yalnızca ikinci kutuyu açmaya karar verebilirim. Ve beş kuruş para kazanamam!

**Kaynakça:** Newcomb'un sorusu üzerine daha geniş bilgi ve tartışma [1,2,3,5,6,10,12,13,17]'de bulunabilir.