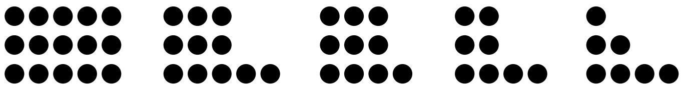
# Kimin Kazandığı Bilinen Ama Nasıl Kazandığı Bilinmeyen Bir Oyun

Oyunumuz iki kişi arasında ve $n \times m$ boyutlu bir dikdörtgenin içindeki ***tamnokta***larla oynanıyor. Örneğin, $5 \times 3$ boyutlu bir oyun, aşağıdaki şeklin en solundan başlar. Oyuncular sırayla bir nokta seçerler ve seçtikleri noktayla o noktanın kuzeyiyle doğusu arasında kalan noktalar silinir. Örneğin, $5 \times 3$ boyutlu oyunda, birinci oyuncu (4, 2) noktasını seçerse, oyun bir sonraki duruma dönüşür.



Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu en sağdaki (5, 1) noktasını seçerse, o nokta oyundan silinir ve oyun üçüncü duruma dönüşür. Sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu (3, 2) noktasını seçerse, oyun dördüncü duruma dönüşür. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncunun (2, 3) noktasını seçtiğini varsayalım. O zaman oyun, yukarda gösterilen son duruma dönüşür. Sıra birinci oyuncuda...

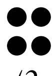
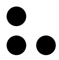
Oyun böyle sürer. Oyunda hiç nokta bırakmayan oyuncu oyunu kaybeder.

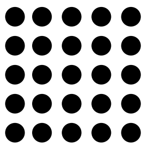
Elbet (1, 1) noktasını seçen oyuncu oyunu kaybeder. Bu yüzden, kamikaze yapmak istemeyen bir oyuncu (1, 1) noktasını zorunlu olmadıkça seçmez.

1 × 1'lik oyunu, yani ● oyununu, birinci oyuncu kaybeder. Çünkü ilk hamlesini yapar yapmaz oyunda hiç nokta kalmaz.

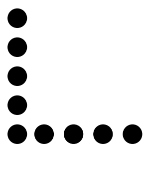
Eğer $n > 1$ ise, $n \times 1$'lik oyunu, yani ●●● ... ●● oyununu birinci oyuncu kazanır: (2, 1) noktasını seçer ve ikinci oyuncuya tek noktalı bir oyun bırakır; ikinci oyuncu son noktayı seçmek zorunda olduğundan oyunu kaybeder.

Eğer $n > 1$ ise, $1 \times n$'lik oyunu da birinci oyuncu kazanır: (1, 2) noktasını seçer ve ikinci oyuncuya bir noktalık bir oyun bırakır.

2 × 2'lik oyunu, yani  oyununu da birinci oyuncu kazanır. Oyunu kazanmak için (2, 2) noktasını seçer ve oyunu  durumuna dönüştürür. Bu durumda ikinci oyuncu ne oynarsa oynasın, birinci oyuncu kazanacak hamleyi bulur. Birinci oyuncu (2, 2) noktasından başka bir nokta seçerse oyunu kaybeder. Yani, birinci oyuncu 2 × 2 oyunlarını ancak iyi oynarsa kazanır.

**Birinci Soru.** Eğer $n > 1$ ise, $n \times n$'lik oyunları birinci oyuncu kazanır. Bu oyunları kazanmak için birinci oyuncu nasıl oynamalıdır? Örneğin, 5 × 5'lik oyunu, yani  oyununu birinci oyuncu (iyi oynayarak) kazanır. Bu kare oyunları birinci oyuncu nasıl oynarsa kazanır? Bir başka deyişle, kare oyunlarda birinci oyuncunun ***kazanan bir stratejisi*** vardır, bu stratejiyi bulun.

**Birinci Sorunun Yanıtı.** Birinci oyuncu (2, 2) noktasını seçer kazanmak için. Böylece oyun simetrik bir oyuna dönüşür. Örneğin, birinci oyuncu, ilk hamlesinde, yukardaki 5 × 5'lik oyunu yandaki oyuna dönüştürür.



Bu ilk hamlesinden sonra, birinci oyuncu ikinci oyuncunun hamlelerinin simetriğini (bakışığını) oynar. İkinci oyuncu (3, 1) noktasını seçerse, birinci oyuncu (1, 3) hamlesini seçer. Birinci oyuncu bu stratejisini sürdürürse oyunu kaybedemez, yani kazanır.

**İkinci Soru.** $n \times 2$'lik oyunları da birinci oyuncu iyi oynayarak kazanır. Birinci oyuncu bu oyunları kazanmak için nasıl oynamalıdır?Örneğin, $8 \times 2$'lik oyunu, yani

●●●●●●●●<br>●●●●●●●●

oyununu birinci oyuncu (iyi oynarsa) kazanır. Birinci oyuncu bu ve bunun gibi $n \times 2$'lik oyunları kazanmak için nasıl oynamalıdır?

**İkinci Sorunun Yanıtı.** Birinci oyuncu, kazanmak için, her hamlesinden sonra birinci sıradaki nokta sayısının ikinci sıradaki nokta sayısından bir fazla olmasını sağlamalıdır. Örneğin, yukardaki oyunda birinci oyuncu (8, 2) noktasını seçip

●●●●●●●<br>●●●●●●●●

oyununu ikinci oyuncuya sunmalıdır. İkinci oyuncu ne oynarsa oynasın, birinci oyuncu oyunu yukardaki oyuna benzeyen bir oyuna dönüştürebilir. Örneğin, ikinci oyuncunun (6, 2) noktasını seçtiğini varsayalım. O zaman birinci oyuncuya

●●●●●<br>●●●●●●●●

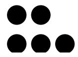
oyunu kalır. Birinci oyuncu bu durumda (7, 1) noktasını seçmelidir, ki ikinci sırada birinci sıradan bir fazla nokta kalsın. Şimdi ikinci oyuncuya

●●●●●<br>●●●●●●

oyunu kalır. Bu durumda ikinci oyuncunun (4, 1) noktasını seçtiğini varsayalım. O zaman oyun

●●●<br>●●●

oyununa dönüşür. Birinci oyuncu bu durumda (3, 2) noktasını seçmelidir ve ikinci oyuncuya

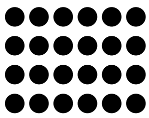


oyununu bırakmalıdır. Oyun böylece sürer gider ve birinci oyuncu oyunu kaybedemez, yani kazanır.

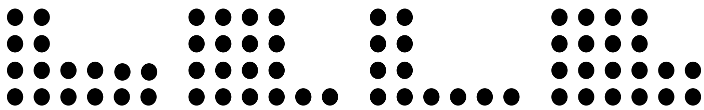
**Üçüncü Soru.** 1 × 1'lik oyun dışında, her $n \times m$'lik oyunu birinci oyuncunun kazandığını kanıtlayın.

**Üçüncü Sorunun Yanıtı.** Dikkat edilirse, birinci oyuncunun **nasıl** oynayıp da kazanacağını sormadım. Bu soruyu sona sakladım. Birinci oyuncunun nasıl oynayıp da kazanacağını ben de bilmiyorum. Ancak birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi olduğunu biliyorum. Stratejiyi bilmiyorum ama stratejinin varlığını biliyorum...

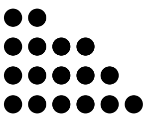
Herhangi bir $n \times m$'lik oyunu ele alalım. Örneğin, $n = 6$ ve $m = 4$ olabilir. Yani soldaki oyunu ele almış olabiliriz. Birinci oyuncuya Ahmet, ikinci oyuncuya Birol diyelim. Ahmet'in ya-



pabileceği bütün hamleleri ve bu hamlelerden sonra oyunun dönüşeceği bütün oyunları ele alalım. Yani tek bir hamle sonra bu oyunun dönüşebileceği oyunları ele alalım. Bu oyunlara $X$-oyunları diyelim. Örneğin, $n = 6$, $m = 4$ ise,



oyunları $X$-oyunlarıdır. Öte yandan, aşağıda soldaki oyun bir $X$-oyunu değildir.



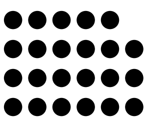
Ahmet'in $n \times m$'lik oyunda $nm$ tane değişik hamlesi olduğundan, $nm$ tane $X$-oyunu vardır. Ahmet, Birol'a bu $X$-oyunlarından birini bırakacaktır. Ve Birol önüne konan bu $X$-oyununun birinci oyuncusu olacaktır. Ahmet'se, bu $X$-oyununun ikinci oyuncusu olacaktır.

Eğer $X$-oyunlarından birini ikinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$'lik oyunu bu $X$-oyununa dönüştürerek $n \times m$'lik oyunu kazanır. Çünkü Ahmet, bu $X$-oyununun ikinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Öte yandan, eğer $X$-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$'lik oyunu kaybeder. Çünkü Ahmet ne oynarsa oynasın, Birol'a bir $X$-oyunu sunacaktır ve Birol bu $X$-oyununun birinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Şimdi, yukardaki $n \times m$'lik oyunu Ahmet'in iyi oynayarak kazanabileceğini kanıtlayabiliriz. Bir an için bunun doğru olmadığını varsayalım. Yani, bir an için, Ahmet'in bu oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybedeceğini varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. Daha açık olalım: Ahmet'in bu oyunu kazandığını kanıtlayacağız! Yani, Ahmet'in $n \times m$'lik oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybettiğini varsayıp, bu oyunu kazanacağını kanıtlayacağız! Böylece Ahmet'in oyunu kazanacak biçimde oynayabileceği kanıtlanmış olacak.

Varsayımımıza göre $n \times m$'lik oyunu Ahmet kaybediyor. Demek ki $X$-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanır. Şimdi, Ahmet en üst ve en sağdaki noktayı seçsin. Yani dikdörtgenden en köşedeki noktayı silsin. Örneğin $n = 6$, $m = 4$ ise, Birol'a soldaki $X$-oyunu kalır. Şimdi sıra Birol'da. Bu $X$-oyununda Birol **ne oynarsa oynasın**, Ahmet'e gene bir $X$-oyunu bırakmak zorundadır! Öyle değil mi? Yukardaki şekle biraz bakınca, Birol'un her hamlesinin oyunu gene bir başka $X$-oyununa dönüştürdüğü anlaşılır. Demek ki Ahmet'in önüne bir $X$-oyunu gelecektir ve Ahmet, önüne gelen bu yeni $X$-oyununun birinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır! İstediğimizi kanıtladık.



Kanıtımızı şöyle özetleyebiliriz:

1) **Çelişki elde edilecek varsayım:** $n \times m$'lik oyunu Ahmet ne oynarsa oynasın kaybediyor.

2) Demek ki bütün $X$-oyunlarını birinci oyuncu kazanıyor.

3) Ahmet, ilk hamlesinde ($n$, $m$) noktasını seçsin.

4) Birol, önüne gelen bu oyunu bir $X$-oyununa dönüştürmek zorundadır.

5) Şimdi Ahmet bu $X$-oyununun birinci oyuncusu olacaktır ve (2)'ye göre kazanacaktır.

6) Demek ki Ahmet, $n \times m$'lik oyunu kazanır. Varsayımımızla çeliştik. Sonuç: Varsayım yanlıştır ve $n \times m$'lik oyunu Ahmet kazanır.

**Dördüncü Soru.** Eğer $nm > 1$ ise, $n \times m$'lik oyunlarını birinci oyuncunun kazandığını biliyoruz. Birinci oyuncu bu oyunları kazanmak için nasıl oynamalıdır?

**Dördüncü Sorunun Yanıtı.** Bilmiyorum.

Öte yandan, belli bir $n \times m$'lik oyunun stratejisi bulunabilir. Örneğin, $5 \times 7$, $8 \times 4$ gibi oyunların stratejisi biraz zaman alsa da bulunabilir. Ama genel olarak $n \times m$'lik oyunların stratejisini bilmiyorum. Kimsenin bildiğini de sanmıyorum.

**Beşinci Soru.** Oyuna bir öncekiş sayfadaki son şekille başlarsak kim kazanır? Bunu da bilmiyorum...