Bir Tavla Sorusu

Bir tavla maçı 5'te biter. Yani 5 oyun kazanan ilk oyuncu tavla maçını kazanır. Kimi tavlacılar maçın 5-4 bitmesine razı olmazlar, aradaki farkın en az 2 olmasını isterler, 6-4, 7-5, 8-6 gibi... Maçın skorunda en az iki fark olması kimin işine gelir? Zayıf oyuncunun mu yoksa güçlü oyuncunun mu? İlginç bir soru. En azından ben ilginç buldum.

Şöyle bir akıl yürütme yapabiliriz. Aradaki farkın en az 2 değil de en az 100 olmasını istediğimizi düşünelim. Elbette o zaman güçlü oyuncunun kazanma şansı artacaktır. Dolayısıyla aradaki farkın en az 2 olması kuralı güçlü oyuncunun maçı kazanma olasılığını artıracaktır.

Bu şimdilik yalnızca bir tahmin. Bakalım matematiksel hesaplar ne sonuç verecek?

Tavlacılarımıza A ve B diyelim. A, B'den daha iyi bir tavlacı olsun, örneğin A'nın bir oyunu kazanma olasılığı 2/3 olsun. Beraberlik olamayacağından,[1] B'nin bir oyunu kazanma olasılığı da 1/3 elbette.

---

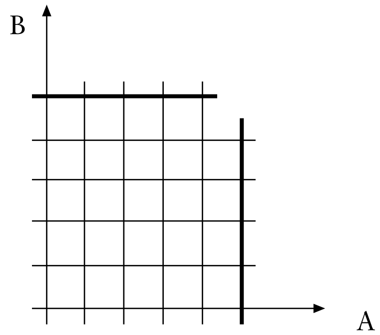
1 Doğrusunu söylemek gerekirse, her tavla oyununun sonlu bir zaman içinde yüzde yüz olasılıkla biteceğinin kanıtını bilmiyorum. Sanırım biter. Bu yazıda, her tavla oyununun sonlu bir zaman içinde yüzde yüz olasılıkla biteceğini varsayalım.

Soruyu biraz basitleştirelim: Mars olmadığını varsayalım.

Birinci Soru: Beşte biten bir tavla maçını A'nın (iyi oyuncunun) kazanma olasılığı kaçtır?[2]

İkinci Soru: "En az iki puan fark" kuralıyla oynanan tavla maçını A'nın kazanma olasılığı kaçtır?[3]

Birinci Sorunun Yanıtı. Oyunun alacağı durumu aşağıdaki ızgarada gösterebiliriz.



Sol alt köşeden, yani (0, 0) noktasından başlayarak, A'nın kazandığı her oyun için bir sağa, B'nin kazandığı her oyun için bir yukarı gidelim. Sağdaki (dikey) kalın çizgiye erişildiğinde maçı A kazanır, yukardaki (yatay) çizgiye erişildiğinde maçı B kazanır. Sağa bir adım gitme olasılığımız 2/3, yukarı bir adım çıkma olasılığımızsa 1/3'tür. Sağdaki yatay çizgiye ulaşma olasılığını hesaplayacağız.

Maç bir türlü 5-0 bitebilir: Her oyunu A'nın kazanması gerekmektedir, yani hep (tam 5 kez) sağa gitmeliyiz. Dolayısıyla maçın 5-0 bitme olasılığı $(2/3)^5$ dir.

---

2 Mars olmadığını varsayalım, yani kazanan hep 1 puan alsın, kaybeden de 0 puan.

3 "En az iki puan fark" kuralıyla oynanan tavla maçı ilk bakışta sonsuza dek uzayabilirmiş gibi görünse de siz görünüşe aldanmayın. Bu kuralla oynanan bir tavla maçının sonsuza dek uzama olasılığı sıfırdır.

Maç kaç türlü 5-1 bitebilir? B'nin bir tek oyun kazanması gerekiyor. B, beş ayrı zamanda oyun kazanabilir. Yani, yukardaki şekilde 1 adım yukarı, 5 adım sağa gitmeliyiz, yukarı atılacak adımı beş ayrı zamanda yapabiliriz. (Son adım sağa yapılmalı.) Bir başka deyişle, (0, 0) noktasından (5, 1) noktasına 5 değişik biçimde gidebiliriz. Dolayısıyla maçın 5-1 bitme olasılığı $5 \times (1/3) \times (2/3)^5$ tir.

Maç $\binom{6}{2}$ türlü 5-2 skoruyla bitebilir. Neden? Çünkü en son oyunu A kazanmalı ve bu en son oyunu saymazsak, oynanan 5+2, yani yedi oyunun ilk altısından ikisini B kazanmalı. Dolayısıyla maçın 5-2 bitme olasılığı

$$\binom{6}{2} \times (1/3)^2 \times (2/3)^5$$

dir.

Maç, $\binom{7}{3}$ türlü 5-3 bitebilir, çünkü oynanan 5+3, yani sekiz oyunun ilk yedisinde B üç oyun kazanmalı. Dolayısıyla maçın 5-3 bitme olasılığı

$$\binom{7}{3} \times (1/3)^3 \times (2/3)^5$$

dir.

Bunun gibi maçın 5-4 bitme olasılığı,

$$\binom{8}{4} \times (1/3)^4 \times (2/3)^5$$

dir.

Şimdi artık maçı A'nın kazanma olasılığını hesaplayabiliriz. Bu beş sayıyı toplayalım:

$$(2/3)^5 + 5(1/3)(2/3)^5 + \binom{6}{2}(1/3)^2(2/3)^5$$

$$+\binom{7}{3}(1/3)^3(2/3)^5 + \binom{8}{4}(1/3)^4 \times (2/3)^5$$

$$= (2/3)^5[1 + 5(1/3) + \binom{6}{2}(1/3)^2 + \binom{7}{3}(1/3)^3 + \binom{8}{4}(1/3)^4]$$

$$= (2/3)^5[1 + \frac{5}{3} + \frac{15}{9} + \frac{35}{27} + \frac{70}{81}]$$

$$= (2/3)^5 \times \frac{526}{81} = 0{,}85515419...$$

İkinci Sorunun Yanıtı. Maçın 5-0, 5-1, 5-2 ve 5-3 skoruyla bitme olasılıklarını yukarda hesaplamıştık. Şimdi, maçın, $n \geq 4$ için, $(n+2)$-n sonucuyla A'nın lehine bitme olasılığını hesaplayalım. Toplam $2n + 2$ oyun oynanıyor ve son iki oyunu A kazanıyor. Geri kalan $2n$ oyunun n tanesini B kazanmalı.

Örneğin eğer maç 6-4 bitmişse, son iki oyunu A kazanmış olmalı. Yani maç ancak 4-4 olduktan sonra 6-4 bitebilir. Maç, $\binom{8}{4}$ değişik biçimde 4-4 skoruna ulaşabilir.

Dolayısıyla maçın 6-4 bitme olasılığı

$$\binom{8}{4}(1/3)^4(2/3)^6$$

dır.

Maçın 7-5 bitme olasılığını hesaplayalım. Maçın 7-5 bitebilmesi için son iki oyunu A almalı, yani skor bir ara 5-5 olmalı. Skorun 5-5 olabilmesi için de skorun daha önce 4-4 olması gerekir. Skor 4-4 olduktan sonra, 5-5 skoruna iki değişik biçimde ulaşılır: Ya ilk oyunu A, ikinci oyunu B kazanır ya da ilk oyunu B ikinci oyunu A kazanır. Yani maçın 7-5 bitme olasılığı,

$$\binom{8}{4} \times 2 \times (1/3)^5 \times (2/3)^7$$

dır.

Genel olarak maçın (n+2)-n skoruyla bitme olasılığını hesaplayalım. Maçın bu skorla bitmesi için, son iki oyunu A almış olmalı, yani skor bir ara n-n olmuş olmalı. Ama skor daha önce de (n–1)-(n–1) olmuş olmalı... Hatta oyun ilk önce 4-4 olmuş olmalı. Bir eşitlikten bir sonraki eşitliğe 2 değişik biçimde ulaşılır. Yani 4-4'ten n-n skoruna 2^{n-4} değişik biçimde ulaşılır. Demek ki maçın (n+2)-n skoruyla bitme olasılığı,

$$\binom{8}{4} \times 2^{n-4} \times (1/3)^n \times (2/3)^{n+2}$$

dır.

Bu sayıları toplarsak, maçı A'nın kazanma olasılığını bulmuş oluruz. Toplayalım.

$$(2/3)^5 + 5(1/3)(2/3)^5 + \binom{6}{2}(1/3)^2(2/3)^5 + \binom{7}{3}(1/3)^3(2/3)^5$$

sayısıyla,

$$\sum_{n=4}^{\infty} \binom{8}{4} 2^{n-4} (1/3)^n (2/3)^{n+2}$$

sayısını toplayacağız.

İkinci sonsuz toplamı toplayalım:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \binom{8}{4} 2^{n-4} (1/3)^n (2/3)^{n+2} = \binom{8}{4} 2^{-4} (2/3)^2 \sum_{n=4}^{\infty} 2^n (1/3)^n (2/3)^n$$

$$= \binom{8}{4} 2^{-4} (2/3)^2 \sum_{n=4}^{\infty} (4/9)^n = \binom{8}{4} 2^{-4} (2/3)^2 (4/9)^4 \sum_{n=0}^{\infty} (4/9)^n$$

$$= \binom{8}{4} 2^{-4} (2/3)^2 (4/9)^4 \frac{1}{1-4/9} = 0,136564548...$$

Birinci toplamın 0,7413504039... olduğu kolaylıkla bulunur. Demek ki olasılık

0,7413504039... + 0,136564548... = 0,87791495....

dir. Demek ki "aradaki farkın en az 2 olma" kuralı, güçlü oyuncunun kazanma şansını yüzde iki kadar artırıyor. Pek o kadar fazla değil, ilk tahminimden daha az.