Tuhaf Bir Eşitlik

Önemsiz ama ilginç bir eşitlikten söz edeceğim bu yazımda. Aşağıdaki eşitliklere göz atın:

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$$

Bu eşitliklere benzeyen,

$$a + b + c + d = a \times b \times c \times d$$

eşitliğini sağlayan a, b, c, d tamsayıları var mı? Genel olarak,

$$a_1 + \ldots + a_n = a_1 \times \ldots \times a_n \tag{1}$$

denkleminin tamsayılarda çözümü hakkında ne söyleyebiliriz?

Bu tür soruları pek sevmem doğrusu. Bana biraz fazla "bedava" soru gibi gelir, yani soru sormak için soru sormak...

Neyse...

Bu tür eşitliklerin hepsini bulabiliriz. Bulacağız da...

İki örnek daha vereyim:

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \times 1 \times 2 \times 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 4$$

Çok daha genel bir örnek vereyim. Herhangi iki pozitif doğal sayı alalım: a ve b. Şimdi $a \times b$ ve $a + b$ sayılarını bulalım. Aradaki farkı alalım, diyelim

$$i = (a \times b) - (a + b).$$

Şimdi, i tane 1'i ve a'yı ve b'yi toplayıp çarpalım:

$$1 \times \ldots \times 1 \times a \times b = a \times b = i + a + b = 1 + .. + 1 + a + b$$
eşitliği geçerlidir.

Örneğin, $a = 2$, $b = 3$ ise, (ki o zaman $i = 1$'dir) yukarda verdiğimiz,

$$1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$$

örneğini buluruz.

Eğer $a = 2$, $b = 4$ ise,

$$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \times 1 \times 2 \times 4$$

örneğini buluruz.

Eğer $a = 2$, $b = 2$ ise, (ki o zaman $i = 0$'dır) yukarda verdiğimiz,

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

örneğini buluruz.

Yukardaki yöntemi a, b ve c tamsayılarına da uygulayabiliriz.

$$i = (a \times b \times c) - (a + b + c)$$

olsun. i tane 1'i, a'yı, b'yi ve c'yi çarpın ve toplayın, aynı sayıyı bulursunuz:

$$\begin{aligned} 1 \times \ldots \times 1 \times a \times b \times c = a \times b \times c &= i + a + b + c \\ &= 1 + \ldots + 1 + a + b + c. \end{aligned}$$

Aynı yöntemi herhangi n sayıya uygulayabiliriz.

Bütün çözümler yukardaki yöntemle bulunur. Bunu kanıtlayalım.

Diyelim $a_1, \ldots, a_n$ sayıları $a_1 \times \ldots \times a_n = a_1 + \ldots + a_n$ eşitliğini sağlıyorlar.

Bu sayıların küçükten büyüğe doğru sıralandığını varsayabiliriz, yani

$$1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \qquad (2)$$

eşitsizliklerini varsayalım. (1) ve (2)'yi kullanarak,

$$a_1 \times \ldots \times a_n = a_1 + \ldots + a_n \leq na_n$$

eşitsizliğini elde ederiz. En sol ve en sağdaki a_n'leri sadeleştirirsek,

$$a_1 \times \ldots \times a_{n-1} \leq n \qquad (3)$$

eşitsizliği çıkar. Sol tarafta $n - 1$ tane sayı var ve herbiri en az 1.

Birinci Şık. Diyelim $a_1 \neq 1$. O zaman (3)'ün solundaki sayılar en az 2 olduğundan, (3)'ten

$$2^{n-1} \leq n$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu eşitsizlikten de $n = 1$ ya da $n = 2$ çıkar (Neden?)

Eğer $n = 1$ ise, diyecek lafımız kalmaz. Bir sayının kendi kendisiyle toplamı ve çarpımı elbette aynıdır! Eğer $n = 2$ ise, (3) eşitsizliği "$a_1 \leq 2$" yani $a_1 = 2$ demektedir. Dolayısıyla,

$$2 + a_2 = a_1 + a_2 = a_1 \times a_2 = 2a_2,$$

ve $a_2 = 2$. Bu, verdiğimiz ilk örnekti.

İkinci Şık. Şimdi diyelim $a_1 = ... = a_i = 1$ ve $a_{i+1} \neq 1$. O zaman,

$$a_{i+1} \times ... \times a_n = a_1 \times ... \times a_n = a_1 + ... + a_n = i + a_{i+1} + ... + a_n$$

ve

$$i = (a_{i+1} \times ... \times a_n) - (a_{i+1} + ... + a_n).$$

Böylece bütün çözümlerin yönetimizle bulunmuş olduğunu kanıtladık.