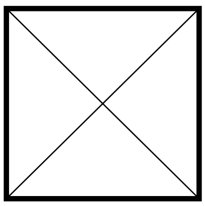
Çokgenler Üzerine Bir Soru

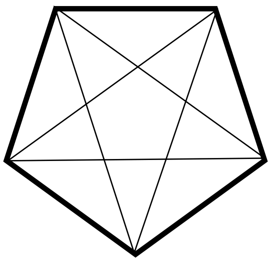
Sayı saymak, özel yetenek değilse de, çalışmak isteyen bir uğraştır. Sanıldığı kadar kolay değildir. Bunun bir bilimi vardır.

Bugün köşegenlerin çokgenleri en fazla kaç parçaya ayırdığını sayacağız.

Bir dörtgenin köşegenleri dörtgeni dört parçaya ayırırlar:

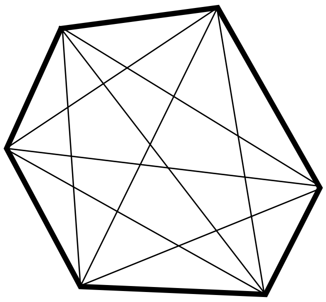


Bir beşgenin köşegenleri beşgeni kaç parçaya ayırırlar? Çizerek hesaplayalım:

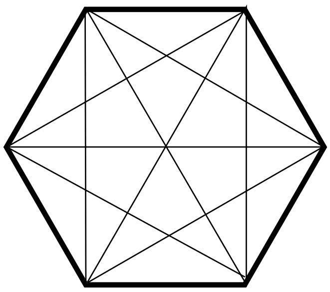


Sayarsak, beşgenin 11 parçaya ayrıldığını görürüz.

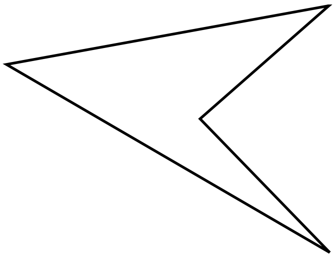
Ya bir altıgen kaç parçaya ayrılır? Gene bir şekil çizelim:



Ve sayalım. Altıgen 25 parçaya ayrılmış. Ancak bu kez dikkat etmek gerekiyor, eğer köşegenlerin üçü aynı noktadan geçerse, parça sayımız azalır. Örneğin altıgenimiz düzgün altıgense bu başımıza gelir ve parça sayısı 25'ten 24'e düşer:



Aslında dörtgende de dikkat etmek gerekir. Örneğin eğer dörtgenimiz, içbükey değilse, yani dörtgenimiz aşağıdaki biçimdeyse, köşegenler kesişmezler ve yanıtımız değişik olur.



Dolayısıyla n-genlerimizi içbükey almak zorundayız.

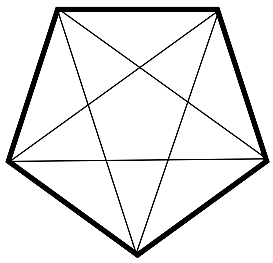
n kenarlı içbükey bir çokgenin hiçbir üç köşegeni bir noktada kesişmiyorsa, köşegenler çokgeni kaç parçaya ayırırlar? Yanıt küçük sayılar için şöyle:

n = 3 için 1
n = 4 için 4
n = 5 için 11
n = 6 için 25.

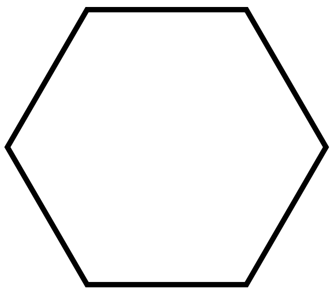
Genel yanıt nedir?

Bulalım.

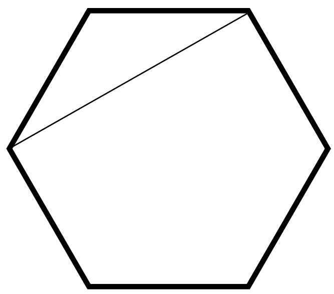
Bölgelere ayrılmış çokgenin **içindeki** köşegenlerin kesişim noktalarına **içnokta** adını verelim. Örneğin, aşağıdaki şekilde 5 içnokta vardır. Her köşegen 2 içnokta içerir.



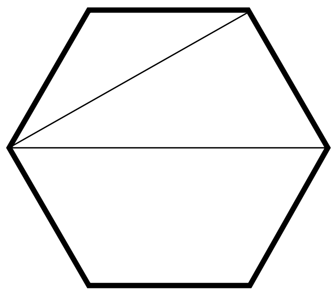
Başlangıçta bir tek bölgemiz var:



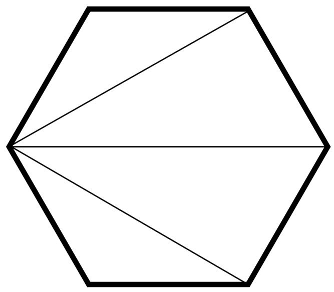
Köşegenleri teker teker çizelim. Birinci köşegenimiz bir bölge daha ekler:



Bu köşegenin üstünde şimdilik hiç içnokta olmadığına dikkatinizi çekerim. Bir sonraki köşegen de bölge sayısını bir artıracaktır ve bu köşegenin de üstünde hiç içnokta olmayacaktır:



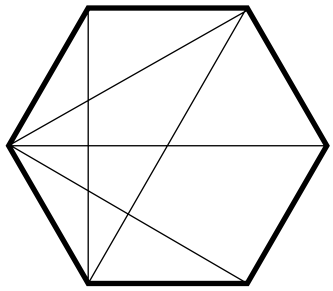
Bu köşeden çıkacağımız her köşegen, bölge sayısını bir artırır:



İkinci köşeye gelelim ve ikinci köşeden ilk köşegenimizi çıkalım:

Bu köşegenin üstünde üç içnokta var ve bölge sayımızı dört artıyor.

Bir sonraki köşegenin üstünde (şimdilik) iki içnokta olacak ve bölge sayımızı üç artıracak:



Çekilen her köşegen, bölge sayısını, çekildiği anda üstünde bulunan içnokta sayısının bir fazlası kadar artıracaktır.

Ayrıca, çokgenin her içnoktası bu yöntemle yalnızca bir kez sayılacaktır.

Demek ki, bölge sayısı,

1 + (içnokta sayısı) + (köşegen sayısı)

sayısına eşittir.

İçnokta sayısı $\binom{n}{4}$'e eşittir. Çünkü, çokgenin dışındaki her dört nokta tam bir tane içnokta verir.

Köşegen sayısı $\binom{n}{2} - n$ sayısına eşittir, çünkü doğru sayısı $\binom{n}{2}$'ye eşittir ve bunlardan n tanesi çokgenin kenarlarıdır.

Demek ki bölge sayımız,

$$1+\binom{n}{4}+\binom{n}{2}-n$$

sayısına eşittir. Eğer n = 4 ise,

$$1+\binom{4}{4}+\binom{4}{2}-4=1+1+6-4=4$$

bölge buluruz. Eğer n = 7 ise,

$$1+\binom{7}{4}+\binom{7}{2}-7=1+35+21-7=50$$

bölge buluruz.