

Mükemmel Karma

52'lik iskambil kâğıdı destesini şu yöntemle karmak istiyorum: Desteyi tam ortadan (26–26) ikiye ayıralım. Destenin üst yarısı sol elimizde, alt yarısı sağ elimizde olsun... Sonra, bilinen fiyakalı yöntemle, alttan başlamak üzere, bir kâğıt sağ desteden, bir kâğıt sol desteden olmak üzere sırayla kâğıtları karalım. Önce sağ desteden başlayacağız, bu önemli. Yani en üstteki ve en alttaki kâğıtlar yerinde kalacaklar, üstten 27. kâğıt karmadan sonra üstten ikinci kâğıt olacak, üstten ikinci kâğıt üstten üçüncü kâğıt olacak, üstten 28. kâğıt üstten dördüncü olacak, üstten üçüncü kâğıt üstten beşinci kâğıt olacak...

Bu işlemi kaç kez tekrarlırsak kâğıtlar eski yerlerine gelirler?

Bakalım kâğıtlar birinci karmada ne oluyorlar?

Kâğıtlara, başlangıçtaki sıralarına göre 1, 2, ... , 52 adlarını verelim. Kâğıtlar başlangıçta şu durumda:

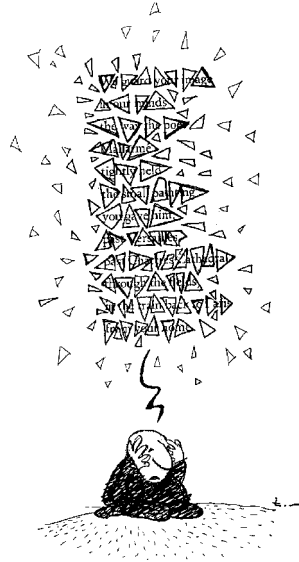
1
2
⋮
25
26
⋮
51
52

Üstteki ilk 26 kâğıdı sol elimize, son 26 kâğıdı sağ elimize alalım:

1	27
2	28
⋮	⋮
25	51
26	52

Şimdi kâğıtları dediğimiz gibi karalım. Kâğıtlar şu sırayı alırlar:

1
27
2
28
⋮
25
51
26
52



Altındaki dizelgenin sol sütununda kâğıtların karmadan önceki sırası görülüyor, sağ sütunundaysa karmadan sonraki sırası.

1	1	27	14
2	27	28	40
3	2	29	15
4	28	30	41
5	3	31	16
6	29	32	42
7	4	33	17
8	30	34	43
9	5	35	18
10	31	36	44
11	6	37	19
12	32	38	45
13	7	39	20
14	33	40	46
15	8	41	21
16	34	42	47
17	9	43	22
18	35	44	48
19	10	45	23
20	36	46	49
21	11	47	24
22	37	48	50
23	12	49	25
24	38	50	51
25	13	51	26
26	39	52	52

Örneğin (en üstteki) birinci kâğıt karmadan sonra yine birinci kâğıt, dolayısıyla soldaki 1'in yanına yine 1 yazdık. En dipteki 52. kâğıt da yer değiştirmede. Örneğin 36. kâğıt 44. kâğıt oluyor.

Biraz düşününce, başlangıçta $2n + 1$ inci sıradaki kâğıdın, karmadan sonra $n + 1$ inci sıraya, $2n$ inci sıradaki kâğıdınsa $26 + n$ inci sıraya gittiği görülüyor. Bu formülle, her kâğıdın birinci karmadan sonra nereye gittiği kolaylıkla anlaşılır.

Birinci ve sonuncu kâğıt yer değiştirmiyorlar. İkinci kâğıda bakalım. İkinci kâğıt 27. kâğıt olmuş (yukardaki dizelgeye bakın.) Bir sonraki karmada 27. kâğıt 14. kâğıt olacak. Daha sonra 14. kâğıt 33. kâğıt olacak. Sonra 33. kâğıt 17. kâğıt olacak. Daha sonra 17. kâğıt 9. kâğıt olacak. Ardından 9. kâğıt 5. kâğıt oluyor. Sonra 5. kâğıt 3. oluyor. Ve nihayet 3. kâğıt 2. kâğıt oluyor, yani ilk geldiği yere, başa dönüyor:

$$2 \rightarrow 27 \rightarrow 14 \rightarrow 33 \rightarrow 17 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2$$

Demek ki 2. kâğıt tam 8 karmadan sonra yerine dönüyor. İkinci kâğıdın yolculuğunu

$$(2, 27, 14, 33, 17, 9, 5, 3)$$

olarak gösterelim.

3. kâğıdın macerasını da çıkaralım:

$$(3, 2, 27, 14, 33, 17, 9, 5).$$

14. kâğıdın macerası:

$$(14, 33, 17, 9, 5, 3, 2, 27).$$

Macerasını bilmediğimiz bir sonraki kâğıt 4. sırada bulunuyor. O kâğıdın da macerası aynı yöntemle bulunur:

$$(4, 28, 40, 46, 49, 25, 13, 7).$$

Demek ki 4. sıradaki kâğıt da sekiz karma sonunda eski yerine geliyor. 28, 40, 46, 49, 25, 13 ve 7. sıradaki kâğıtlar da sekiz karma sonra eski yerlerine dönerler.

5. kâğıdın macerasını yukarda bulmuştuk. Macerasını bulmadığımız ilk kâğıt 6. kâğıt. Bakalım 6. kâğıda ne oluyor?

$$(6, 29, 15, 8, 30, 41, 21, 11).$$

Öbür kâğıtların macerası şöyle:

(10, 31, 16, 34, 43, 22, 37, 19)

(12, 32, 42, 47, 24, 38, 45, 23)

(18, 35)

(20, 36, 44, 48, 50, 51, 26, 39)

(52)

Her kâğıdın macerasını böylece bulmuş olduk. Her kâğıt ya birinci (1 ve 52), ya ikinci (18 ve 35), ya da sekizinci karmadan sonra eski yerine geliyor. Demek ki en fazla sekiz karmadan sonra her kâğıt eski yerine gelecektir.

Kâğıtların bu karmayla maceralarını şöyle yazabiliriz:

(1)(2, 27, 14, 33, 17, 9, 5, 3)

(4, 28, 40, 46, 49, 25, 13, 7)

(6, 29, 15, 8, 30, 41, 21, 11)

(10, 31, 16, 34, 43, 22, 37, 19)

(12, 32, 42, 47, 24, 38, 45, 23)(18, 35)

(20, 36, 44, 48, 50, 51, 26, 39)(52)

Ya önce sol desteden kâğıt alsaydık, yani ya 27. kâğıt birinci kâğıt olsaydı? O zaman destenin eski haline gelmesi için kaç kez karmalıyız?

Kâğıtları karmadan önceki halini biliyoruz:

1

2

⋮

25

26

27

28

⋮

51

52

Yine yukardaki gibi üstteki ilk 26 kâğıdı sol elimize, son 26 kâğıdı sağ elimize alalım:

1	27
2	28
$\vdots$	$\vdots$
25	51
26	52

Bu kez kâğıtları dediğimiz gibi biraz değişik karalım. Kâğıtlar bu kez şu sırayı alırlar:

27
1
28
2
 $\vdots$
51
25
52
26

Bu kez ne oluyor? Eğer $n \leq 26$ ise, n 'inci kâğıt $2n$ 'inci kâğıt oluyor. Eğer $n > 26$ ise, n 'inci kâğıt $2n - 53$ 'üncü kâğıt oluyor. Şimdi yukardaki gibi hesaplarsak, karmanın kâğıtlar üzerindeki etkisini hesaplayabiliriz:

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 11, 22, 44, 35, 17, 34, 15, 30, 7, 14, 28, 3, 6, 12, 24, 48, 43, 33, 13, 26, 52, 51, 49, 45, 37, 21, 42, 31, 9, 18, 36, 19, 38, 23, 46, 39, 25, 50, 47, 41, 29, 5, 10, 20, 40, 27)

Demek ki bu sefer tam 52 karma sonunda ilk başladığımız duruma geleceğiz.