Gödel'in Bir Başka Teoremi

Kuramla uygulama uyumlu bir yaşam içinde midir? Kuramsal olarak kanıtlanmış bir önerme, uygulamada da geçerli midir, gerçekten doğru mudur? Örneğin, 1,4 < √2 önermesinin bir kanıtı varsa (ki var), bu önerme gerçekten doğru mudur? Yani evdeki hesap çarşıya hep uyar mı? Daha matematiksel bir deyişle, bir matematik kuramında kanıtlanan bir teorem, o kuramın evrenlerinde de geçerli midir?

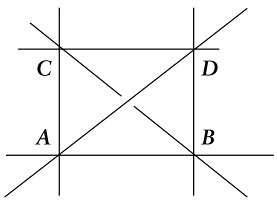

Kurt Gödel

Okur, okumaya başladığı yazının ilginç olmasını diler. Yazar da okurun yazıyı ilginç bulmasını ister. Dolayısıyla, yukardaki sorunun yanıtının "hayır" olması hem okurun hem de yazarın işine gelir. Ne yazık ki yanıt EVET'tir. Gene de okurdan yazıyı okumasını sürdürmesini diliyoruz, çünkü sonlara doğru okurun hoşuna gideceğini umduğumuz bir teorem sunacağız.

Yukarda, matematiksel bir kuramdan ve bu kuramın evrenlerinden sözettik. Sorumuzun ve yanıtının anlam kazanabilmeleri için bu iki kavramın açıklanması gerekiyor.

Her matematik kuramının bir belitler (yani aksiyomlar) kümesi vardır. Örneğin, belitlerden biri, "herhangi bir doğruya herhangi bir noktadan bir koşut[1] (paralel) geçer," olabilir. Bir başkası, "En az dört tane nokta vardır," olabilir.

Her matematik kuramının evrenleri vardır. Bir kuramın evreni her şeyden önce bir kümedir. Bu kümede, kuramda (yani belitlerde) adı geçen nesneler tanımlanır. Ve o kuramın belitlerinin geçerli olması istenir. Yukardaki iki belitten oluşan kuramın evrenlerinde, önce nokta ve doğru kavramları tanımlanır; ve bu tanımlar öyle yapılır ki her noktadan her doğruya gerçekten bir koşut geçer, ve gerçekten o evrende en az dört tane nokta vardır. Örneğin, ortaokuldan bildiğimiz iki boyutlu Öklid uzayı bu iki belitten oluşan kuramın bir evrenidir. Bu kuramın bir başka evrenini daha bulalım. Bu evrende yalnızca 4 tane noktamız olsun: *A*, *B*, *C* ve *D* noktaları. 6 tane doğrumuz olacak. Bu doğrulara *AB*, *CD*, *AC*, *BD*, *AD* ve *BC* adını verelim. Son olarak, hangi noktanın hangi doğrunun üstünde olduğunu söyleyelim: *AB* doğrusunun yalnızca iki noktası vardır, *A* ve *B* noktaları; *BC* doğrusunun yalnızca iki noktası vardır, *B* ve *C* noktaları, vb. Evrenimizi açıkladık. Bu evrenin aşağıda bir de resmini çizelim:

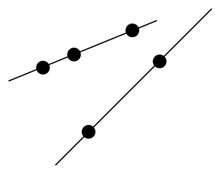


Bu evrende kuramımızın belitleri gerçekten doğrudur. Örneğin, *C* noktasından *AB* doğrusuna bir koşut geçer: *CD* doğrusu. *A* noktasından *CB* doğrusuna bir koşut geçer: *AD* doğru-

1 Bu yazıda, ortak noktaları olmayan (yani kesişmeyen) iki doğruya koşut doğrular diyoruz. Ayrıca bir doğrunun kendisine koşut olduğunu da varsayıyoruz.

su. Her ne kadar, resimde *AD* doğrusuyla *CB* doğrusu kesişiyor gibi gözüküyorlarsa da, aslında kesişmezler, çünkü evrenimizde yalnızca dört nokta vardır, ve resimde kesiştikleri nokta evrenimizde değildir.

Yukardaki iki belitten oluşan kuramın başka evrenleri de vardır. Bu kuramın beş noktalı ve iki doğrulu bir evren örneği daha verelim:



Elbet matematikte önemi olan kuramlar ve evrenler çok daha karmaşıktırlar. Burada basit örnekler vererek kavramların kolayca anlaşılmalarını sağlamak istedim.

Gördüğümüz gibi bir kuramın birçok evreni olabiliyor.

Bir kuramda çalışan matematikçi, belitleri doğru olarak kabul eder ve o belitlerden yola çıkarak teoremler kanıtlar. Örneğin, 2 + 2 = 4 eşitliği aritmetik kuramının; "Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir," önermesi bildiğimiz Öklid (düzlem) geometrisinin teoremleridir.

Şimdi yukarda sorduğumuz soruyu bir kez daha soralım. Bir matematik kuramında kanıtlanmış bir teorem, o kuramın evrenlerinde doğru mudur? Yanıtı daha önce vermiştik. Evet! Örneğin 2 + 2 = 4 aritmetik kuramının bir teoremi olduğundan, aritmetik kuramının her evreninde bu eşitlik geçerlidir.

Bundan da şu çıkar: Bir önerme, bir kuramın bir evreninde yanlışsa, o kuramda o önermenin kanıtı olamaz. Çünkü kanıtı olsaydı, o önerme her evrende doğru olurdu. Örneğin, yukardaki 5 noktalı evrende her iki noktadan bir doğru geçmiyor. Demek ki, o iki belitten oluşan kuramda "Her iki noktadan bir doğru geçer" önermesi bir teorem değildir. Bu önermenin karşıönermesi de, yani, "Hiçbir doğrunun üstünden geçmediği iki nokta vardır", önermesi de bir teorem değildir. Çünkü, dört noktalı evrende bu karşı önerme yanlıştır.

Şimdi yazının ilginç bölümüne geldik. Yukardaki soruyu tersyüz edelim. Bir kuramın bütün evrenlerinde geçerli olan matematiksel bir önerme, o kuramda kanıtlanabilir mi, yani bir teorem midir? Daha felsefi bir dille, her zaman doğru olan kanıtlanabilir mi? Bu soru gerçekten ilginç ve önemli bir sorudur. Kanıtlama yöntemlerimiz, yani matematik, gerçeklerin kâğıt üstünde gösterilmesine yeterli midir? Yoksa daha güçlü bir matematiğe mi gereksiniyoruz?

Yanıtı vermeden önce bu sorunun uygulamada pek işimize yaramayacağı olgusuna parmak basalım. Genellikle bir kuramın sonsuz tane evreni vardır. Bu sonsuz tane evrenin her birine teker teker bakamayacağımızdan, bir önermenin her evrende doğru olup olmadığını anlayamayız. Uygulama alanı bulunmasa bile bu sorunun ve yanıtının kuramsal matematik ve düşünce ve matematik tarihinde yeri çok önemlidir.

Bu ikinci sorunun da yanıtı evet'tir. Kurt Gödel 1930 yılları cıvarında bu soruyu 'evet' olarak yanıtladığında yüzyılımızın en önemli teoremlerinden birini kanıtladığının bilincindeydi. Gödel'in bu teoremi ***matematiksel mantık*** denilen konunun en önemli teoremlerinden biridir.