Hilbert'in Programı ve Gödel'in Teoremleri

Matematikçi bir arkadaşımın eşi güle güle anlattı. Beş yaşındaki oğluna babasının bahçede ne yaptığını sormuş. Çocuk bahçeye çıkıp bir de bakmış ki, baba, bir ağacın altına uzanmış, ağzında bir ot, gökyüzüne dalgın dalgın bakıyor. Çocuk eve dönüp annesine,

– Anne, demiş, babam bahçede matematik çalışıyor.

Matematikçi arkadaşımı iyi tanıdığımdan, gerçekten bahçede çalıştığını, yani düşündüğünü, bir teoremin peşinde olduğunu biliyorum.

Bütün gün dalga geçebilmek matematikçinin en tatlı düşüdür. Matematikçi ne zaman dalga geçmeye hak kazanır? Kanıtlanacak teorem, yanıtlanmamış soru kalmadığında, daha doğrusu tüm matematiksel sorular bilgisayarlar tarafından yanıtlanabildiğinde. İşte matematikçinin düşü budur. Matematiksel bir dilde sorulacak bir sorunuz mu var, verin bilgisayara, bekleyin, sonlu bir zaman sonra bilgisayar sorunuzun yanıtını size sunsun... Bu "sonlu zaman" bilgisayarın gücüne göre değişebilir, ama burada bizi ilgilendirmiyor bu sonlu zamanın ne denli sonlu olduğu. İster beş dakika, ister beş yüzyıl olsun. Sonlu zaman olsun da... Öyle bir yöntem (buna bilgisayar yazılımı da diyebilirsiniz) bulmalı ki, hiç düşünmeye gerek kalmadan sorulan matematiksel bir soru bu yöntemle çözülsün. Sor sorunu, uygula yöntemini, al yanıtını...

Bu düş gerçekleşebilir mi? İşte bu yazının konularından biri de bu.

"Bertrand Russsell'ın Paradoksu" başlıklı yazıda matematikte bulunan bir çelişkiden sözetmiştim. Bu çelişkiyi Bertrand Russell gidermiştir. Çelişki giderilmesine giderilmiştir ama, matematikçilerde bir de kuşku yaratmıştır: Matematikte başka çelişki var mıdır? Matematikte çelişki olmadığından nasıl emin olabiliriz? Bu soruyu matematikçilerin sormaları çok doğal. Yaşamlarını adadıkları uğraş alanı çelişkiliyse beş para etmez. Matematik, doğanın ve doğaya hükmeden yasaların anlaşılmasını sağlamalıdır. Matematiğin bu görevini hiçbir matematikçi yadsımaz. Oysa "1 = 2" önermesinin kanıtlanması bu amacın biraz uzağında olduğumuzu göstermez mi?

Matematikte çelişkinin olup olmadığının bilinmemesi rahatsız edici bir durum. Şimdiye dek başını birazcık kaldırma yürekliliğini gösterebilen çelişkilerin yokedilmesi rahatlamamız için yeterli bir neden değil. Her an kıyıda köşede bekleyen bir başka çelişkiyle karşılaşabiliriz. Daha da kötüsü olabilir, ayrımsamadan bir çelişkiyi bir teoremin kanıtında kullanabiliriz. Ve çelişkinin yardımıyla kanıtlanan o teorem, günün birinde -farzı mahal- çok hızlı uçakların yapımında kullanılabilir ve kullanılan teorem yanlış olduğundan, uçak yerinden kımıldamayabilir, hatta belki de -belli mi olur?- kalkar da duramaz. Demek istediğim, iş ciddi, hafife almaya gelmez.

Davıd Hilbert

1 Hilbert'in yaşam öyküsü için Kaynakça [45]'e başvurabilirsiniz.

David Hilbert[1] (1862–1943) bu sorunu ciddiye alıp bir çare aranmasını isteyen ilk matematikçidir. Hilbert, adıyla anılan bir program yapar. Bu programa göre matematik biçimselleştirilmelidir. Örneğin belitler açık seçik bir kâğıda yazılmalıdır, ki herkes neyin belit olup neyin olmadığını bilebilsin. Yalnız belitler değil, kanıtlama yöntemleri de belirtilmelidir. Yani matematiksel bir kanıtın ne olduğu, nasıl yapıldığı bilinmelidir. Çıkarım kuralları teker teker yazılmalıdır bir kâğıda, ki hangi önermenin hangi önermeden çıkarılabileceğini bilelim, ki her aklına esen "işte bir teorem kanıtladım" diye ortaya çıkamasın. Yani, bir bakıma, matematik dünyası disiplin altına alınmalıdır. Bu kolay. Matematik biçimselleştirilebilir. Çıkarım kuralları kâğıt üstüne dökülebilir. Bunda bir sorun yok. Hilbert'in başka istekleri de vardır. Örneğin, hangi teoremin kanıtlanıp kanıtlanmadığı konusunda matematikçiler kavga etmesinler ister. Hangi kanıtın doğru, hangi kanıtın yanlış olduğu sorusuna kolaylıkla karar verilebilsin. Bu istek de -kuramsal olarak en azından- karşılanır. Yeterli zamanımızın olduğunu varsayarsak, her matematiksel kanıt biçimselleştirilebilir, bu biçimselleştirilmiş kanıt bir bilgisayara verilebilir, ve bilgisayar sonlu bir zamanda kanıtın doğru ya da yanlış olduğunu bize söyler. Uygulamada zaman sorunumuz varsa da, kuramsal olarak bir sorun yok. Hilbert bu isteklerle yetinmez. Asıl amacı matematikçileri çelişki korkusundan kurtarmak değil miydi? Bir iki ricası daha vardır. Geliştirilen bu matematik dizgesinde (sisteminde) matematiğin çelişkisiz olduğu kanıtlanmalıdır.

Matematiğin çelişkisiz olduğu kanıtlanacak... Emirle, ricayla, yalvarıp yakarmakla teorem kanıtlanmıyor ki. Bu zorlu bir teorem.

1930'da Kurt Gödel bir teorem kanıtlar. Hatta iki teorem kanıtlar. Bu teoremler pek Hilbert'in istediği, umduğu teoremler değildir. Ama matematikte her zaman umulan bulunmuyor.

Gödel'in kanıtladığı teoremlerden biri şu teoremdir:

Teorem 1. *Matematiğin çelişkisiz olduğu kanıtlanamaz.*

Teorem, "matematiğin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamadım, denedim yapamadım" demiyor. "Kanıtlanamaz" diyor. Yani boşu boşuna kimse denememeli. Kanıtlanamaz! Matematiğin çelişkisiz olduğunu anlamak olanaksızdır. Öte yandan matematiğin çelişkili olduğu kanıtlanabilir. Nasıl kanıtlanır? Bir çelişki bulunursa kanıtlanır! Şimdilik böyle bir çelişki bulunamamıştır. Bulunabileceğini de sanmıyorum. Daha önceki yazımda da söylediğim gibi, çelişki bulunduğunda dünyanın -ya da matematiğin- sonu gelmez. Matematikte bir iki küçük değişiklikle çelişki giderilir. Bu kanımda yalnız değilim. Matematikçilerin büyük çoğunluğu benim gibi düşünür.

Hilbert'in isteklerinden biri de, her α önermesi için, ya α'nın ya da $\neg\alpha$'nın kanıtlanabilmesi olabilirdi. Hilbert şöyle düşünmüş olabilir: Bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır; doğruysa kanıtlanmalı, yanlışsa o önermenin olumsuzu kanıtlanmalı. Örneğin, her doğal sayı dört tamsayının karelerinin toplamına eşitse, bu önerme kanıtlanmalı; eşit değilse, hiç bir dört tamsayının karelerinin toplamı olmayan bir doğal sayının varlığı kanıtlanmalı.

Yukarda Gödel'in ikinci bir teorem kanıtladığını söylemiştim. Gödel'in ikinci teoremi Hilbert'in bu olası isteğine de olumsuz yanıt verir. Gödel, tüm matematikle ilgileneceğine aritmetikle ilgilenir. Yani doğal sayılar ve toplama ve çarpma işlemleriyle. Doğal sayılar, toplama ve çarpmayla ilgili her önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanabilir mi? Gödel'in yanıtı şöyle: Hayır! Yani,

Teorem 2. *Doğal sayılarla, toplamayla ve çarpmayla ilgili öyle bir önerme vardır ki, aritmetik kuramının kabul edilen be-*

litleriyle ne bu önerme ne de bu önermenin olumsuzu kanıtlanabilir[2].

Aritmetik kuramının belitleri nelerdir? Bu belitler bildiğimiz önermelerdir. Örneğin, belitlerden biri, her x, y, z için,

$$x(y + z) = xy + xz$$

der, bir başkası her x, y, z için,

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

der. Bunlar gibi herkesin bildiği önermelerdir aritmetik kuramının belitleri[3]. Gödel öyle bir α önermesi bulur ki bu belitlerden ne α ne de $\neg\alpha$ kanıtlanabilir. Çok önemli bir noktaya okurun dikkatini çekmek istiyorum. Ya α ya da $\neg\alpha$ önermesi doğal sayılarda doğrudur. Çünkü, bir önerme doğru değilse, o önermenin tersi, yani olumsuzu doğrudur. Ama "doğru olmak"la "kanıtlanmak" ayrı kavramlar. Gödel'in bulduğu en önemli olgu budur. Bir önerme doğru olabilir, ama kanıtlanamayabilir. Çünkü, doğru olarak kabul edilen belitler o önermenin kanıtlanması için yeterli olmayabilirler, zayıf kalabilirler.

Okurun aklına son derece ilginç bir düşünce gelebilir şu anda. Okur şöyle düşünebilir:

– Madem, diyebilir okur, ne α'yı ne de $\neg\alpha$'yı kanıtlayabiliyorum, ikisinden birini (örneğin hangisi doğal sayılarda doğruysa) belit olarak kabul edeyim, diyelim, α'yı eski belitlerimin arasına sokayım. Böylece daha zengin bir kuram elde ederim. Bu yeni kuramda ne kendisini ne de olumsuzunu kanıtlayamayacağım bir başka önerme bulunabilir mi?

Okurun kafasından geçenler Gödel'in de kafasından geçmiştir. Öyle bir β önermesi bulur ki, bu zengin kuramda da ne β ne de $\neg\beta$ kanıtlanabilir.

O zaman okur β'yı da eklemek isteyebilir belitlerine. Eklesin. Gödel boş durmaz. Bu kez ne kendisinin ne de tersinin ka-

2 Gödel'in bu teoremi, Kaynakça [46]'da kanıtlanmıştır.
3 Bu belitlerin arasında tümevarımla kanıtı olanaklı kılan bir belit ailesi vardır.

nıtlanamayacağı bir γ önermesi bulur. Gödel'le okur arasındaki bu oyun böylece sürer gider.

Bu oyundan sıkılan okurun aklına bu kez şu düşünce gelebilir:

– Doğal sayılarla, toplamayla ve çarpmayla ilgilenmiyor muyuz? İlgileniyoruz. Ve ne istiyoruz? Herhangi bir α önermesi için, ya α'nın ya da $\neg\alpha$'nın bir teorem olmasını istiyoruz. Güzel. Doğal sayılardan, toplamadan ve çarpmadan sözeden tüm önermelerden doğal sayılar kümesinde doğru olanlarını seçelim. Bu önermeleri belit olarak kabul edelim. Herhangi bir önerme ya doğru ya da yanlış olduğundan, her α önermesi için ya α ya da $\neg\alpha$ belittir; dolayısıyla ya α ya da $\neg\alpha$ bir teoremdir.[4]

Okurun bu güzel düşüncesi ne yazık ki bir işe yaramaz. Belitlerin bir işe yarayabilmesi için hangi önermenin belit, hangi önermenin belit olmadığını bilebilmeliyiz. Yani elimizde hangi önermenin belit olduğuna karar verebilecek bir algoritma (ya da bir bilgisayar yazılımı) olmalı. Öyle değil mi? Hangi önermenin belit olduğu bilinmeden, hangi önermenin teorem olduğu bilinebilir mi? Belitler de birer teorem değil midirler? Gödel işte burada da bir kez daha ortaya çıkar:

Teorem 3. *Toplama ve çarpmayla ilgili önermelerden hangilerinin doğal sayılarda doğru olduğuna karar verebilecek bir bilgisayar yazılımı yapılamaz.*

Gödel, bir kez daha, kesin olarak "yapılamaz" diyor. "Denemeye kalkışmayın," diyor "boşu boşuna yorulacaksınız."

Şimdi, yazının başında sözettiğim matematikçi düşüne geri dönelim. Matematikçi tembellik yapabilir mi? Teoremlerini bir bilgisayara kanıtlattırabilir mi? Neyin doğru, neyin yanlış olduğuna bir bilgisayarla karar verebilir mi? Üçüncü teoreme göre veremez. Toplama ve çarpma gibi başat ve basit kavramlarla ilgili sorular bile yanıtsız kalabilir.

4 Her belit bir teoremdir. Hem de bir satırlık kanıtı olan bir teorem!