Sonsuz Toplamlar

Bir yazımda, kimbilir hangisinde,

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots$$

toplamının sonsuz olduğunu, yani

$$1/1$$
$$1/1 + 1/2$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$$
$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6$$
$$\ldots$$

dizisindeki sayıların her sayıyı belli bir süre sonra aştığını kanıtlamıştım.[1] Kanıtı oldukça basittir.

Bu tür sonsuz tane sayının toplamına matematikte **seri** denir. Daha doğrusu Batılılar seri derler, biz de aynı terminolojiyi kabul ederiz.

Yukardaki seriye ***harmonik seri*** adı verilir.

Aynı yazımda,

---

1 **Matematik ve Sonsuz** adlı kitabımın *Sonsuz Toplamlar* adlı yazısında kanıtlanmıştı bu.

$$1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + ...$$

serisinin (ben "toplamının" diyeceğim) sonlu olduğunu, hatta $\pi^2/6$'ya eşit olduğunu (kanıtlamadan, kanıtı pek kolay değildir) söylemiştim. Bu eşitlik İsviçreli büyük matematikçi Euler tarafından kanıtlamıştır.

Bundan da,

$$1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + ...$$

toplamının $\pi^2/6$'den daha küçük bir sayı olduğu anlaşılır (çünkü $1/n^3 \leq 1/n^2$.) Bu $\pi^2/6$'dan küçük sayının hangi sayı olduğu bilinmiyor. Nasıl bir sayı olduğu da pek bilinmiyor; tek bildiğimiz, bu sayının kesirli bir sayı olmadığı. Bu da oldukça yeni, 1990'ların başında kanıtlandı.

Öte yandan,

$$1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + ...$$

toplamının kaç olduğu biliniyor. Genel olarak, eğer n çift bir sayıysa,

$$1/1^n + 1/2^n + 1/3^n + 1/4^n + ...$$

toplamının π^2'yle kesirli bir sayının çarpımı olduğu biliniyor, ama eğer $n \geq 5$ tek bir sayıysa, bu toplam üzerine herhangi bir şey bilindiğini sanmıyorum.

Bir başka seri:

$$1/(1\times3) + 1/(5\times7) + 1/(9\times11) + 1/(13\times15) + ... = \pi/8$$

Nasıl, güzel değil mi? Böyle bir eşitliği ilk kez bulmak insana büyük bir haz vermeli.

Harmonik serideki gibi her sayının tersini toplayacağımıza, sadece asal sayıların terslerini toplayalım:

$$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17+....$$

Asal sayıların tüm sayılardaki yoğunluğu oldukça az olduğundan[2], bu toplamın sonlu bir sayı olma olasılığı yüksek, ama ne yazık ki sonlu değil, bu seri de sonsuz. Bu teorem de Euler'in.

---

2 Asal sayıların yoğunluğu 0'dır. Yani, tüm sayılar arasından rastgele bir sayı seçecek olursak, bu sayının asal olma olasılığı yoktur, bu sayı asal olamaz!

Seriler, matematikte başlı başına bir araştırma konusudur. Çok ilginçtir. Çok zordur. Yanıtlanmamış soru dolar taşar.

Biz biraz daha kolay bir seriyle ilgilenelim.

Harmonik seriye, yani

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots$$

toplamına geri dönelim. Bu toplamın sonsuz olduğunu söylemiştim.

Onluk sistemdeki yazılımında içinde 0 rakamı olan sayıların terslerinin toplamının, yani

$$1/10 + \ldots + 1/90 + 1/100 + 1/101 + \ldots + 1/109 + 1/110 + 1/120 + \ldots$$

toplamının sonsuz olduğunu kanıtlamak zor değil. Kanıtlayalım:

$$1/10 + \ldots + 1/90 + 1/100 + 1/101 + \ldots + 1/109 + 1/110 + 1/120 + \ldots$$

toplamından, son rakamı 0 olmayanları atarsak daha küçük bir toplam elde ederiz. Dolayısıyla,

$$1/10 + 1/20 + \ldots + 1/90 + 1/\ 100 + 1/110 + \ldots.$$

toplamının sonsuz olduğunu kanıtlarsak işimiz iş. Ama bu sayı, harmonik serinin onda biri, harmonik serinin de sonsuz olduğunu biliyoruz, demek ki

$$1/10 + \ldots + 1/90 + 1/100 + 1/101 + \ldots + 1/109 + 1/110 + 1/120 + \ldots$$

toplamı da sonsuzdur.

Peki, onluk sistemdeki yazımında içinde 0 rakamı olmayan sayıları toplarsak ne olur? Yani,

$$1/1 + \ldots + 1/9 + 1/11 + \ldots + 1/19 + 1/21 + \ldots + 1/29 + 1/31 + \ldots + 1/99 + 1/111 + \ldots + 1/119 + 1/121 + \ldots + 1/129 + \ldots$$

toplamı sonlu mudur, sonsuz mu?

Sonludur. Kanıtlayalım.

Yukardaki toplama *S* diyelim. *S*'yi bulmak istiyoruz. *S* sonlu bir sayı da olabilir, sonsuz da...

Önce bir tanım yapalım: $\alpha = 1/1 + \ldots + 1/9$.

Şimdi dizideki 11, 12, ..., 19, 21, ... , 29, ... , 99, 111, 112 gibi en az iki basamaklı sayıların son basamaklarını atıp yerine 0 koyalım. Böylece, 11, ... , 19 sayıları 10 olur; 21, ..., 29 sayıları 20 olur; 111, ..., 119 sayıları 110 olur... Bu işlemle, ilk serideki 9 değişik sayı aynı sayıya dönüşür ve elde ettiğimiz yeni dizi eski diziden daha büyük olur:

$S = (1/1 + \ldots + 1/9) + (1/11 + \ldots + 1/19) + (1/21 + \ldots + 1/29) + 1/31 + \ldots + 1/99\ (1/111 + \ldots + 1/119) + (1/121 + \ldots + 1/129) + \ldots < \alpha + (1/10 + \ldots + 1/10) + (1/20 + \ldots + 1/20) + 1/30 + \ldots + 1/90 + (1/110 + \ldots + 1/110) + (1/120 + \ldots + 1/120) + \ldots = \alpha + 9\times1/10 + 9\times1/20 + 9\times1/30 + \ldots + 9\times1/90 + 9\times1/110 + 9\times1/120 + \ldots = \alpha + 9/10(1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/9 + 1/11 + 1/12 + \ldots) = \alpha + 9S/10.$

Demek ki $S < \alpha + 9S/10$ eşitsizliğini bulduk. Bundan da $S < 10\alpha$ çıkar. Demek ki S sonlu bir sayıymış...

Yukardaki kanıt pek doğru değil. Çünkü bir üstteki paragrafta S'nin değerini bulmak için, S'nin sonlu olduğunu (söylemeden) varsaydık: S'den $9S/10$'u çıkardık. Eğer S sonsuzsa böyle bir işlem yapamayız elbet.

Ama en azından, S sonluysa, S'nin en fazla 10α olduğunu kanıtladık. Şimdi S'nin sonlu olduğunu kanıtlayalım.

Şu tanımları yapalım:

$S_1 = 1/1 + \ldots + 1/9$

$S_2 = 1/1 + \ldots + 1/99$ (paydadaki sayılarda hiç sıfır yok)

$S_3 = 1/1 + \ldots + 1/999$ (paydadaki sayılarda hiç sıfır yok)

$S_4 = 1/1 + \ldots + 1/9999$ (paydadaki sayılarda hiç sıfır yok)

....

Sonlu olduğunu kanıtlamak istediğimiz S sayısı bu sayıların limitidir:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Biz her S_n sayısının 10α'dan küçük olduğunu kanıtlayacağız, Böylece S sayısının da 10α'dan küçük olduğu anlaşılmış olacak.

Bunu n üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. S_1, α'ya eşit olduğundan, 10α'dan küçüktür elbet. Şimdi S_n'in 10α'dan küçük olduğunu varsayıp, S_{n+1}'in 10α'dan küçük olduğunu kanıtlayalım. Yukarda yaptıklarımızı burada da yapacak olursa,

$$S_{n+1} < \alpha + \frac{9S_n}{10}$$

buluruz. "Tümevarım varsayımı" olan $S_n < 10\alpha$ eşitsizliğini de kullanarak,

$$S_{n+1} < \alpha + \frac{9S_n}{10} < \alpha + 9\alpha = 10\alpha$$

buluruz. Demek ki $S \leq 10\alpha$. Böylece kanıtımız tamamlanmış oldu.

Demek ki bu toplam sonluymuş ve 10α'dan küçükmüş. Kaç olduğunu bilmiyorum. Acaba bilen var mı? Sanmam...

Beni bu güzel soruyla tanıştıran Özlem Beyarslan'a sonsuz teşekkürler.