Flavio'nun Sorusu

Geçenlerde Portekiz'deydim. Matematikçi olduğumu öğrenen liseli bir genç, adı Flavio, kolay anlaşılan, çözümü için pek fazla matematik bilgisi gerekmeyen ilginç matematik soruları sordu bana. Tam bu köşede sorulacak türden sorular... Kimi soru için üç ay boyunca düsünmüş ve sonunda çözümü bulmuş. Hoşuma gitti. Her zaman dediğim gibi, okullarımızda verilen alışkanlığın tam tersine, önemli olan yanıtı bulmak değil, düşünmektir. O genç, sorunun yanıtını bulamayabilirdi, ama inatla üç ay aynı soru üzerinde çalışabilmek başlıbaşına bir erdemdir, hatta bence üniversiteye girmekten daha da önemlidir.

İşte o gencin sorularından biri:

Bin öğrencili bir yatılı okulda her öğrenciye 1'den 1000'e kadar numaralanmış dolaplar verilmiş. Ancak çilingirin yaptığı bir hata sonucu, dolaplardan birinin kilidi döndüğünde (yani dolap açıldığında ya da kapandığında), o dolabın numarasının katı olan dolapların da kilidi dönüyormuş (yani açıksa kapanıyor, kapalıysa açılıyormuş.) Örneğin 8 numaralı dolap açıldığında ya da kapandığında, 16 numaralı dolap açıksa kapanıyor, kapalıysa açılıyormuş. 24, 32, 40, ... numaralı dolaplar da aynı akibete uğruyormuş.

Dolapların hepsi başlangıçta kapalıymış. Ögrenciler sırayla okula girmişler ve dolaplarının kilitlerini birer kez döndürmüşler. Önce bir numaralı dolabın sahibi öğrenci girmiş ve dolabını açmış. Bütün dolaplar açılmış elbet. Sonra iki numaralı dolabın sahibi öğrenci girmiş, açık dolabını kapatmış ve böylece çift numaralı dolaplar kapanmış. Sonra üç numaralı dolabın sahibi gelmiş, açık dolabını kapatmış ve böylece kapalı olan 6 açılmış, açık olan 9 kapanmış, kapalı olan 12 açılmış...

Soru şu: 1000 öğrenci de dolaplarının kilitlerini sırayla döndürdüklerinde, hangi dolaplar açık kalır?

Önemli olan her dolabın kaç defa açılıp kapandığı. Eğer dolap tek sayıda açılıp kapanıyorsa, açık kalacaktır, yoksa kapalı kalacaktır. Bir dolap kaç defa açılıp kapanır? Kaç sayıya bölünüyorsa o kadar açılıp kapanır. Örneğin, 20 numaralı dolap,

$$1, 2, 4, 5, 10, 20$$

numaralı öğrenciler tarafından açılıp kapanır, yani tam altı kez, demek ki 20 numaralı dolap sonunda kapalı kalacaktır. Öte yandan 36 numaralı dolap,

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

numaralı öğrenciler tarafından açılıp kapanır, yani tam dokuz kez, demek ki 36 numaralı dolap sonunda açık kalacaktır.

Dolayısıyla herhangi bir n doğal sayısının kaç doğal sayıya bölündüğünü bulmalıyız.

Doğal sayımızı asallarına ayıralım:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_r^{a_r}$$

Buradaki $p_1, p_2, \dots, p_r$ sayıları birbirinden değişik n'yi bölen tüm asallardır. Şimdi n'yi bölen sayıları bulalım. n'yi bölen her sayı, $0 \le b_1 \le a_1$, $0 \le b_2 \le a_2$, ..., $0 \le b_r \le a_r$ eşitsizliklerini sağlayan $b_1, \dots, b_r$ tamsayıları için,

$$p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \dots p_r^{b_r}$$

biçiminde yazılır. Herbir b_i için $a_i + 1$ seçimimiz var. Demek ki n'nin

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1)$$

tane böleni var. Bu sayı çiftse n sayılı dolap kapalı kalacaktır, tekse açık kalacaktır. Bu sayının çift olması için yeterli ve gerekli koşul $a_i + 1$ sayılarından birinin çift olmasıdır, yani a_i sayılarından birinin tek olmasıdır. Öte yandan yukardaki sayının tek olması için yeterli ve gerekli koşul, $a_i + 1$ sayılarından herbirinin tek olması, yani herbir a_i sayısının çift olmasıdır. Her a_i'nin çift olması da a'nın bir tamsayının karesi olması demektir. Neden? Çünkü her a_i çiftse, a_i sayısını $2c_i$ olarak yazabiliriz. O zaman da,

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_r^{a_r} = p_1^{2c_1} p_2^{2c_2} p_3^{2c_3} \ldots p_r^{2c_r}$$
$$= (p_1^{c_1} p_2^{c_2} p_3^{c_3} \ldots p_r^{c_r})^2$$

eşitliği geçerlidir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer n bir tamsayının karesiyse, a_i'lerin herbiri çift olmak zorundadır.

Sonuç olarak, 1, 4, 9, 16, 25, 36 gibi bir tamkare olan dolaplar açık kalacak, tamkare olmayanlar kapalı kalacaklardır.