Eşyapı Göndermeleri

Doğal sayılar kümesi, yani 0, 1, 2, 3 gibi tamsayıları içeren küme $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ... \}$$

$f(x) = 2x$ göndermesi (fonksiyonu, kuralı, adını siz koyun), bir doğal sayıyı bir başka doğal sayıya gönderir (2'yle çarpar). Örneğin,

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 2$$
$$f(2) = 4$$
$$f(5) = 10$$

dir.

Bu f göndermesinin şu özelliği vardır: x ve y hangi doğal sayı olurlarsa olsunlar,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

eşitliği doğrudur, çünkü,

$$f(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Birinci Soru: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

göndermelerini bulun.

Bu soru her matematik bölümünde, hatta kimi zaman birinci yılda, yanıtlanır. Biz de yanıtlayalım.

Teorem: *Eğer* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *göndermesi, her* x *ve* y *için*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

eşitliğini sağlıyorsa, öyle bir a *doğal sayısı vardır ki, her* x *için,* $f(x) = ax$ *eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: Her şeyden önce $f(0) = 0$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

eşitliklerinden, $f(0) = 0$ çıkar.

Şimdi $f(1)$'e a diyelim: $f(1) = a$. Dedik! Herhangi bir x doğal sayısı alalım. $f(x) = ax$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Kanıtlayalım:

Eğer $x = 0$ ise, $ax = a0 = 0 = f(0) = f(x)$ ve bu durumda $f(x) = ax$ eşitliği doğru.

Eğer $x = 1$ ise, $ax = a1 = a = f(1) = f(x)$ ve bu durumda $f(x) = ax$ eşitliği gene doğru.

Ya $x = 2$ ise? O zaman da doğru:

$$f(x) = f(2) = f(1+1) = f(1)+f(1) = a+a = 2a = a2 = ax.$$

Şimdi $x = 3$ olsun:

$$f(x) = f(3) = f(2+1) = f(2)+f(1) = a2+a = a3 = ax.$$

Eşitlik gene doğru.

Tümevarımla[1], $f(x) = ax$ eşitliğinin her zaman doğru olduğu kanıtlanabilir.

Bir başka "kanıt" da şöyle yapılabilir. x'i, x tane 1'in toplamı olarak yazalım:

$$x = 1 + 1 + \ldots + 1$$

ve bu eşitliğe f'yi uygulayalım:

$$f(x) = f(1 + 1 + \ldots + 1)$$

1 Bu kanıt yöntemi, **Matematik ve Oyun** adlı kitabımın *Sonsuz İniş, Sonsuz Çıkış* adlı yazımda açıklanmıştır.

Sağ taraftaki sayıyı hesaplayabiliriz:
$f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1) + f(1) + \ldots + f(1) = a + a + \ldots + a = ax$.

Dilediğimizi kanıtladık, demek ki $f(x) = ax$ imiş...

İkinci Soru: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ kümesi olsun. Her x ve y için, $f(xy) = f(x)\, f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ göndermelerini bulun.

Bu sorunun yanıtının da matematik bölümlerinde görülmesi gerekmektedir.

Her şeyden önce, $f(1) = f(1{\cdot}1) = f(1)f(1)$ eşitliliklerinden dolayı, $f(1) = 1$ olmalıdır.

Şimdi f'nin öbür sayılarda aldığı değerleri bulalım.

$f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğinden, $f(xyz) = f(x)f(y)f(z)$ eşitliği de çıkar. Hatta daha genel olarak,

$$f(x_1x_2 \ldots x_n) = f(x_1)f(x_2) \ldots f(x_n)$$

eşitliği doğrudur. Örneğin,

$$f(30) = f(2{\times}3{\times}5) = f(2)f(3)f(5)$$
$$f(60) = f(2{\times}2{\times}3{\times}5) = f(2)f(2)f(3)f(5)$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla, f göndermesinin asal sayılarda aldığı değerleri bilirsek, f'nin her sayıda aldığı değeri bulabiliriz. Yani,

$$f(2), f(3), f(5), f(7), f(11), f(13), \ldots$$

sayılarını bilmemiz gerekiyor.

f göndermesi asal sayılarda hangi değeri alabilir? Her değeri alabilir. Bu değerler üzerine herhangi bir koşul koymaya hakkımız yok. Örneğin, f göndermesi, bir asal sayıyı bir sonraki sayıya yolluyorsa, yani,

$$f(2) = 3$$
$$f(3) = 4$$
$$f(5) = 6$$
$$f(7) = 8$$
$$f(11) = 12$$
$$\ldots$$

ise,

$$f(60) = f(2\times2\times3\times5) = f(2)f(2)f(3)f(5) = 3\times3\times4\times6 = 216$$

dır.

Demek ki, her x ve y için, $f(xy) = f(x)f(y)$ eşitliğini sağlayan $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ göndermeleri, f'nin asallarda aldığı değerler tarafından belirleniyor. Bu göndermeler hakkında başka bir şey söyleyemeyiz. Daha matematiksel bir deyişle, bulmaya çalıştığımız göndermeler kümesiyle, asal sayılardan $\mathbb{N}^*$ kümesine giden göndermeler arasında birebir bir eşleşme vardır.

Üçüncü Soru: Her x ve y için, $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$ eşitliğini sağlayan tüm $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ göndermelerini bulalım.

Aşağıdaki eşitliğe gözatın:

$$f(x)^{f(y)f(z)} = (f(x)^{f(y)})^{f(z)} = f(x^y)^{f(z)} = f((x^y)^z) = f(x^{yz}) = f(x)^{f(yz)}$$

Eğer, bir x için $f(x) \neq 1$ ise, yukardaki eşitlikten, her y ve z için,

$$f(yz) = f(y)f(z)$$

çıkar. İkinci soruda bu göndermelerin asal sayılarda aldıkları değerler tarafından belirlendiğini kanıtlamıştık. (Ama bu son tümcenin hiç mi hiç önemi yok bizim için. Devam edelim.)

$$f(x)^{f(n)} = f(x^n) = f(xx\ldots x) = f(x)f(x)\ \ldots\ f(x) = f(x)^n.$$

Demek ki, $f(n) = n$.

Sonuç olarak, yukardaki koşulu sağlayan iki gönderme vardır:

1) Her n için $f(n) = 1$ ve

2) Her n için $f(n) = n$.

Dileyen okur, her x için $f(x^x) = f(x)^{f(x)}$ koşulunu sağlayan göndermelere bakabilir, ben bakmadım!