Ders Notları

Üst Üçgensel Matrisler

Ali Nesin / *anesin@bilgi.edu.tr*

1. Lineer Cebir Tekrarı

V, bir K cismi üzerine $n > 0$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. V'nin K-vektör uzayı olarak andomorfizmaları, yani V'nin lineer (ya da doğrusal) fonksiyonları kümesi, bileşke ve (noktasal) toplama işlemleri altında bir halkadır. $\mathrm{End}_K(V)$ olarak yazılan bu halka $n > 1$ ise değişmeli değildir. Birim elemanı $1 = \mathrm{Id}_V$ özdeşlik fonksiyonudur.

Eğer V'nin bir

$$v_1, ..., v_n$$

tabanını seçersek, bu satırların okurunun çok iyi bilmesi gerektiği gibi, her andomorfizmayı bir ve bir tek $n \times n$ boyutlu matris olarak yazabiliriz. Böylece $\mathrm{End}_K(V)$ ile $n \times n$ boyutlu matrisler kümesi $M_{n\times n}(K)$ arasında birebir bir eşleme bulunur. Bu eşlemeye Θ diyelim:

$$\Theta : \mathrm{End}_K(V) \to M_{n\times n}(K)$$

Bu Θ eşlemesi yardımıyla $\mathrm{End}_K(V)$ halkasının yapısı $M_{n\times n}(K)$ kümesine taşınabilir: $A, B \in M_{n\times n}(K)$ için,

$$A + B = \Theta(\Theta^{-1}(A) + \Theta^{-1}(A)),$$
$$AB = \Theta(\Theta^{-1}(A)\Theta^{-1}(A))$$

tanımını yaparsak, $M_{n\times n}(K)$ kümesi de bir halka yapısına kavuşur ve Θ bu iki halka arasında bir halka izomorfizması olur. Bir başka deyişle, matris halkasının toplaması ve çarpması, andomorfizmaların toplamasını ve çarpmasını (yani bileşkelerini) matrislere yansıtacak biçimde tanımlanmıştır. (Yani matrislerin çarpımı durduk yerde tanımlandığı gibi tanımlanmamıştır; birçok matematik öğrencisi bu temel olguya ne yazık ki yabancıdır.) Bu yazıda bu olguya sık sık değineceğiz.

$\mathrm{End}_K(V)$ ayrıca n^2 boyutlu bir K-vektör uzayıdır da. (Böylece $\mathrm{End}_K(V)$ halkası bir K-cebiri olur.)

Eğer $i, j = 1, ..., n$ için,

$$\varphi_{ij}(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } k \neq i \text{ ise} \\ v_j & \text{eğer } k = i \text{ ise} \end{cases}$$

koşullarıyla tanımlanan φ_{ij} andomorfizmaları $\mathrm{End}_K(V)$ vektör uzayının bir tabanını oluştururlar. Bu andomorfizmalar, j'inci satır ve i'inci sütundaki girdisi 1, ama diğer tüm girdileri 0 olan matrislerdir.

Usta matematikçiler olabildiğince matrislerden kaçınırlar ve matris yerine andomorfizmalarla çalışırlar. Ancak kimi zaman, örneğin determinant ya da iz alınması gerektiğinde, matrisler kaçınılmaz olabilir. Bu durumda gözlerden ırak bir köşede matrislere başvurulur. Biz bu yazıda hiç determinantlara filan girmeyeceğiz, bu yüzden usta matematikçiler gibi yapıp olabildiğince andomorfizmalarla çalışacağız. Örneğin,

$$\varphi_{ij}\varphi_{k\ell} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \ell \neq i \text{ ise} \\ \varphi_{kj} & \text{eğer } \ell = i \text{ ise} \end{cases}$$

ve bunun sonucu olan

$$\varphi_{ij}^2 = \begin{cases} 0 & \text{eğer } i \neq j \text{ ise} \\ \varphi_{ij} & \text{eğer } i = j \text{ ise} \end{cases}$$

eşitlikleri bol bol kullanacağız.

2. Grup Teorisi Tekrarı

G bir grup olsun. $a, b \in G$ için,

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$$

ve $A, B \leq G$ için,

$$[A, B] = \langle [a, b] : a \in A, b \in B \rangle$$

tanımlarını yapalım. Şu özellikler bariz olmalı:

$$B \leq C \text{ ise } [A, B] \leq [A, C],$$
$$[A, B] = [B, A],$$
$$A, B \lhd G \text{ ise } [A, B] \lhd G.$$

(İkinci özellik $[a, b]^{-1} = [b, a]$ eşitliğinden çıkar.)

Her n doğal sayısı için,

$$G^n \text{ ve } G^{(n)}$$

altgruplarını tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$G^0 = G^{(0)} = G$$

ve her $n \geq 0$ doğal sayısı için,

$$G^{n+1} = [G, G^n]$$

ve

$$G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}].$$

Şu özelliklerin kanıtları kolaydır:

$$G^1 = G^{(1)},$$
$$G^{n+1} \leq G^n \lhd G,$$
$$G^{(n+1)} \leq G^{(n)} \lhd G,$$
$$G^{(n)} \leq G^n,$$
$$H \leq G \text{ ise } H^n \leq G^n$$
$$H \leq G \text{ ise } H^{(n)} \leq G^{(n)}$$

Bütün bu özelliklerin kanıtı kolaydır.

G^1 yerine genellikle G' yazılır ve bu altgruba G'nin ***türevi*** adı verilir.

Eğer bir n doğal sayısı için $G^n = 1$ ise, G'ye ***nilpotant*** ya da ***sıfırkuvvetli*** adı verilir. Eğer ayrıca $G^{n-1} \neq 1$ ise G'nin ***sıfırkuvvet derecesinin*** n olduğu söylenir.

Eğer bir n doğal sayısı için $G^{(n)} = 1$ ise, G'ye ***çözünür grup*** (*solvable*) adı verilir. Eğer ayrıca $G^{(n-1)} \neq 1$ ise G'nin ***çözünürlük derecesinin*** n olduğu söylenir. Kolayca görüleceği üzere, G'nin çözünürlük derecesinin n olması için yeter ve gerek koşul, $G^{(n-i)}$'nin çözünürlük derecesinin i olmasıdır.

Bir grup (n'inci dereceden) sıfırkuvvetliyse, elbette (en fazla n'inci dereceden) çözünürdür. Ama bunun tersi doğru değildir; örnek: Sym 3. Bu grup çözünürdür ama sıfırkuvvetli değildir.

Liste halinde sıraladığımız özelliklerden son ikisinden, (n'inci dereceden) sıfırkuvvetli ya da çözünür bir grubun altgruplarının da (en fazla n'inci dereceden) sıfırgüçlü ya da çözünür olduğu anlaşılır.

Problem. Problemi matrislerle ifade edelim.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

tipinde yazılan, $n \times n$ boyutlu tersinir matrisler kümesine B diyelim. (Böyle bir matrisin tersinir olması demek çaprazda hiç 0 olmaması demektir.) Bu matrisler kümesi bir gruptur. Armand Borel onuruna bu gruba ***Borel altgrubu*** adı verilir. Bu yazıda kanıtlayacağımız üzere, Borel altgrubu çözünürdür. Sorumuz şu: B grubu kaçıncı dereceden çözünürdür? (Yanıt: $[\log_2 (n-1)] + 2$'inci dereceden çözünürdür.) Sıfırkuvvetli midir? (Yanıt: Eğer $K \neq \mathbb{F}_2$ ise hayır.)

İkinci Problem.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

türünden yazılan $n \times n$ boyutlu matrisler kümesine U diyelim. Bu matrisler kümesi de bir gruptur, B'nin bir altgrubudur. Eğer $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ise $B = U$ olur ama aksi halde $U < B$'dir. İlerde $B' = U$ eşitliğini kanıtlayacağız. Bu gruba ***maksimal tekkuvvetli*** (unipotent) ***altgrup*** adı verilir. (Kanıtlayacağımız üzere) B çözünür olduğundan U da çözünürdür. U sadece çözünür değil, aynı zamanda sıfırkuvvetlidir. U kaçıncı dereceden çözünürdür? (Yanıt: $[\log_2 (n-1)] + 1$). Ve kaçıncı dereceden sıfırkuvvetlidir? (Yanıt: $n - 1$).

Bu yazıda bu problemleri ve daha fazlasını çözeceğiz. Ancak bu problemleri gruplarda ya da matrislerle çalışarak çözmek hiç kolay değildir. Problemi gruplardan halkalara indirgeyeceğiz ve matrisler yerine andomorfizmalarla çalışacağız. Her şey şaşırtıcı biçimde kolay olacak.

3. Halkalar, Cebirler ve İdealler

V, K, n, $v_1, \ldots, v_n$, Θ, yazının girişindeki gibi olsunlar. Her $i = 1, \ldots, n$ için,

$$V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

olsun ve, yazılımda kolaylık olması açısından, her $i \le 0$ için $V_i = 0$ varsayımını yapalım. Demek ki,

$$0 = V_0 < V_1 < \ldots < V_i < V_{i+1} < \ldots < V_{n-1} < V_{n-1} = V.$$

Dikkat ederseniz, B grubunun elemanları her V_i altuzayını yine kendisine götürür ve bu özelliği olan her tersinir andomorfizma B'dedir; yani bir $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ için,

$$\varphi \in B \Leftrightarrow \forall i\ \varphi(V_i) = V_i$$

olur. Bu olguyu alabildiğine sömüreceğiz. Şimdilik dikkat edilmesi gereken canalıcı nokta şu: Yukardaki önermede $\varphi(V_i) = V_i$ eşitliği yerine $\varphi(V_i) \le V_i$ yazarsak, B grubu yerine $\mathrm{End}_K(V)$ halkasının bir althalkasını elde ederiz ve halkalar gruplardan çok daha basit yapılardır.

Bu fikirden yola çıkarak bir tanım yapalım:

$$I_k = \{\varphi \in \mathrm{End}_K(V) : \forall i\ \varphi(V_i) \subseteq V_{i-k}\}$$

olsun.

I_0, $\mathrm{End}_K(V)$'nin bir althalkasıdır. (Bu althalka $\mathrm{End}_K(V)$ halkasının birim elemanını 1'i içerir ve $n > 0$ ise değişmeli değildir.) Bundan böyle I_0 yerine S yazalım. $B = S^*$ (= S'nin tersinir elemanlar grubu) eşitliğine dikkatinizi çekeriz.

$1 + I_1 = U$ eşitliğini de gözden kaçırmayalım. Hatta bu yazının anafikrinin bu eşitlikte saklı olduğunu söyleyebiliriz.

Ama $k > 0$ için I_k bir halka değildir çünkü $\mathrm{End}_K(V)$'nin birim elemanını (özdeşlik fonksiyonunu) içermezler, öte yandan kolayca görüleceği gibi bunlar S'nin (hem sağ hem sol) idealleridirler.

$1 \le k \le n - 1$ doğal sayıları için şu özellikler bariz olmalı:

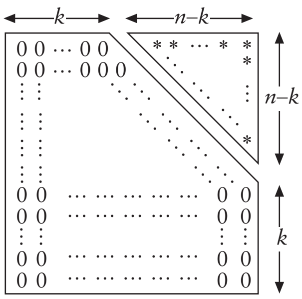
$$I_{k+1} < I_k \lhd S,$$
$$I_n = 0,$$
$$I_k I_\ell \le I_{k+\ell},$$
$$I_k{}^n = 0.$$

(Bir halkada, halkanın I ve J idealleri için, IJ, $x \in I$ ve $y \in J$ için xy ve yx türünden yazılan elemanlarla gerilen ideal anlamına gelmektedir. I^n ise $I...I$ (n defa) anlamına gelmektedir.)

S halkası, Θ izomorfizması altında, ***üst üçgensel***, yani

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılan matrisler kümesine, I_k idealleri ise



biçiminde yazılan matrisler kümesine tekabül eder.

I_k idealleri aynı zamanda birer vektör uzaylarıdır. Boyutu,

$$1 + 2 + \cdots + (n-k) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

dir. Kolayca görüleceği üzere, $(\varphi_{ij})_{i-j \ge k}$ andomorfizmaları I_k vektör uzayının bir tabanını oluştururlar.

4. Gruplar

$k \ge 1$ için $U_k = 1 + I_k$ olsun. $U = U_1 = 1 + I_1$ ve $U_n = 1$ olur. $x, y \in I_k$ için,

$$(1 + x)(1 + y) = 1 + (x + y + xy) \in 1 + I_k = U_k$$

olduğundan, U_k çarpma altında kapalıdır. Ayrıca, her $x \in I_k$ için, $x^n = 0$ olduğundan,

$$(1+x)(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}) = 1 - x^n = 1$$

olur; demek ki, $1+x$ tersinirdir ve tersi

$$1 + (-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}) \in 1 + I_k = U_k$$

dir. Bütün bunlardan U_k'nın U'nun bir altgrubu olduğu çıkar. Hatta, $I_k \lhd S$ ve her $x \in I_k$ ve $b \in B \subseteq S$ için,

$$b^{-1}(1 + x)b = 1 + b^{-1}xb \in 1 + I_k$$

olduğundan, $U_k \lhd B$ olur. Ayrıca

$$B > U_1 > \cdots > U_k > U_{k+1} > ... > U_{n-1} > U_n = 1$$

olur.

Yukarda yapılanlar, U_k gruplarıyla I_k idealleri arasında çok özel bir ilişki olabileceğini gösteriyor. Bundan azami ölçüde yararlanacağız.

5. Hesaplar ve Sonuçlar

Sav 1. $[U_k, U_\ell] \le U_{k+\ell}$.

Kanıt: S halkasında hesaplayalım. $x \in I_k$ ve $y \in I_\ell$ için,

$$\begin{aligned}[1 + x, 1 + y] &= (1 + x)^{-1}(1 + y)^{-1}(1 + x)(1 + y)\\ &= (1-x+x^2-\cdots)(1-y+y^2-\cdots)(1+x)(1+y)\\ &= (1-(x+y)+(x^2+xy+y^2)-\cdots)(1+x+y+xy)\end{aligned}$$

olur. Bu çarpımın terimlerini derece derece hesaplayalım. (x ve y'nin dereceleri 1 olsun ve bu terimler çarpıldıkça dereceler toplansın.)

Sabit terim 1'dir.

Birinci dereceden terim: $(x+y)-(x+y) = 0$'dır.

İkinci dereceden terim ise

$$xy-(x+y)^2 + (x^2+xy+y^2) = xy-yx$$

dir.

Geri kalan terimleri $S/I_{k+\ell+1}$ halkasında hesaplayalım, yani x^n ve y^n dışında, x^2y, xyx, yx^2, yxy gibi içinde hem x hem de y beliren en az üçüncü dereceden terimleri sıfırlayalım ya da yok sayalım.

Üçüncü dereceden terim modülo $I_{k+\ell+1}$:

$$-(x^3+y^3)+(x^2+xy+y^2)(x+y)-(x+y)xy \equiv 0.$$

Dördüncü dereceden terim modülo $I_{k+\ell+1}$:

$$-(x^4+y^4)+(x^3+y^3)(x+y)-(x^2+y^2)xy \equiv 0.$$

Kolayca görüleceği üzere, modülo $I_{k+\ell+1}$, üç ve daha büyük dereceli tüm çarpımlar 0'a eşit olurlar olurlar. Demek ki,

$$\begin{aligned}[1 + x, 1 + y] &\in 1 + xy-yx + I_{k+\ell+1}\\ &\le 1 + I_{k+\ell} = U_{k+\ell}.\end{aligned}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Yukardaki kanıtta, söz verdiğimizden daha kuvvetli bir sav kanıtladık. O savı yazalım:

Sav 2. *$x \in I_k$ ve $y \in I_\ell$ için,*

$$[1+x, 1+y] \in 1 + xy-yx + I_{k+\ell+1} \le 1 + I_{k+\ell}. \quad \square$$

Bir cebirde ya da halkada, $xy-yx$ elemanı yerine $[x, y]$ yazılır. Demek ki,

$$[1 + x, 1 + y] \in 1 + [x, y] + I_{k+\ell+1}.$$

Bu arada $[x, y]$'nin çifte doğrusal (bilinear), yani hem x'e hem de y'ye göre doğrusal olduğunu farkedelim, ilerde gerekecek.

Şimdi I_1'in $(\varphi_{ij})_{i>j}$ taban elemanları için,

$$[\varphi_{ij}, \varphi_{k\ell}] = \varphi_{ij}\varphi_{k\ell} - \varphi_{k\ell}\varphi_{ij}$$

elemanını φ'ler cinsinden hesaplayalım. Amacımız için, $i > j$ ve $k > \ell$ varsayımlarını yapabiliriz. Önce şunu gözlemleyelim,

$$\varphi_{ij}\varphi_{k\ell} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \ell \neq i \text{ ise} \\ \varphi_{ki} & \text{eğer } \ell = i \text{ ise} \end{cases}$$

Demek ki,

- $\ell \neq i$ ve $j \neq k$ ise,

$$[\varphi_{ij}, \varphi_{k\ell}] = \varphi_{ij}\varphi_{k\ell} - \varphi_{k\ell}\varphi_{ij} = 0$$

olur.

- $\ell = i$ ise, $k > \ell = i > j$ ve

$$[\varphi_{ij}, \varphi_{k\ell}] = [\varphi_{ij}, \varphi_{ki}] = \varphi_{ij}\varphi_{ki} - \varphi_{ki}\varphi_{ij} = \varphi_{ij}\varphi_{ki} = \varphi_{kj}$$

olur.

- $j = k$ ise, $i > j = k > \ell$ ve

$$[\varphi_{ij}, \varphi_{k\ell}] = [\varphi_{ij}, \varphi_{j\ell}] = \varphi_{ij}\varphi_{j\ell} - \varphi_{j\ell}\varphi_{ij} = -\varphi_{j\ell}\varphi_{ij} = -\varphi_{i\ell}$$

olur.

Sav 3. $[I_a, I_b] = I_{a+b}$. *Hatta her* $\varphi_{kj} \in I_{a+b}$ *için, öyle bir i vardır ki,*

$$\varphi_{ij} \in I_a,\ \varphi_{ki} \in I_b \text{ ve } \varphi_{kj} = [\varphi_{ij}, \varphi_{ki}]$$

olur.

Kanıt: $[I_a, I_b] \leq I_{a+b}$ içindeliği bariz. I_{a+b} vektör uzayının taban vektörlerinden birini alalım; diyelim, $k - j \geq a + b$ için φ_{kj} andomorfizmasını aldık. Demek ki,

$$k - b \geq j + a.$$

Dolayısıyla,

$$k - b \geq i \geq j + a$$

eşitsizliğini sağlayan bir i seçebiliriz. O zaman,

$$\varphi_{kj} = [\varphi_{ij}, \varphi_{ki}] \in [I_a, I_b]$$

olur çünkü $i - j \geq a$ ve $k - i \geq b$. Bu da istediğimiz eşitliği verir. □

Sav 4. $[U_a, U_b] = U_{a+b}$.

Kanıt: $[U_a, U_b] \leq U_{a+b}$ eşitsizliğini Sav 1'de kanıtladık. Şimdi diğer içindeliği gösterelim.

$$J = \{z \in I_{a+b} : 1 + z \in [U_a, U_b] + I_{a+b+1}\}$$

olsun. İlk olarak $J = I_{a+b}$ eşitliğini kanıtlayacağız. Önce bir sav:

Sav 5. *J toplama altında kapalıdır.*

Kanıt: $x, y \in J$ olsun. $\alpha, \beta \in [U_a, U_b]$ ve $r, s \in I_{a+b+1}$ için,

$$1 + x = \alpha + r,$$
$$1 + y = \beta + s$$

olarak yazalım. Demek ki,

$$\begin{aligned} 1 + (x + y) + xy &= (1 + x)(1 + y) \\ &= (\alpha + r)(\beta + s) \\ &= \alpha\beta + (r\beta + \alpha s + rs) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ama $[U_a, U_b]$ bir altgrup ve I_{a+b+1} bir ideal olduğundan, en sağdaki eleman $[U_a, U_b] + I_{a+b+1}$ kümesinin bir elemanı olur. Bir başka deyişle $x + y \in J$ olur. Yani J toplama altında kapalıdır.

Sav 4'ün kanıtına devam edelim. $J = I_{a+b}$ eşitliğini kanıtlamak istediğimizi anımsayalım. Sav 2'de $x \in I_a$ ve $y \in I_b$ için,

$$[1 + x, 1 + y] \in 1 + [x, y] + I_{a+b+1}$$

içindeliğini kanıtladık. Demek ki her $\lambda \in K$ için,

$$[1 + \lambda x, 1 + y] \in 1 + \lambda[x, y] + I_{a+b+1}$$

olur. Bundan ve Sav 3'ten, her $\varphi_{kj} \in I_{a+b}$ taban elemanı ve her $\lambda \in K$ için,

$$[1 + x, 1 + y] \in 1 + \lambda\varphi_{kj} + I_{a+b+1}$$

içindeliğini sağlayan bir $x \in I_a$ ve bir $y \in I_b$ elemanlarının varlığı çıkar. Demek ki her $\varphi_{kj} \in I_{a+b}$ taban elemanı ve her $\lambda \in K$ için,

$$\lambda\varphi_{kj} \in J$$

olur. Sav 5'le birlikte bu son olgu $J = I_{a+b}$ eşitliğini verir. Demek ki

$$1 + I_{a+b} \leq [U_a, U_b] + I_{a+b+1}.$$

Mutlu sona yaklaştık:

$$\begin{aligned} U_{a+b} = 1 + I_{a+b} &\leq [U_a, U_b] + I_{a+b+1} \\ &= [U_a, U_b](1 + I_{a+b+1}) \\ &= [U_a, U_b]U_{a+b+1} \end{aligned}$$

(ikinci eşitlikte $\alpha + r = \alpha(1 + \alpha^{-1}r)$ eşitliğini kullandık), yani

$$U_{a+b} \leq [U_a, U_b]U_{a+b+1}$$

olur. Bu içindeliği a ve b yerine $a + 1$ ve b'ye uygularsak

$$\begin{aligned} U_{a+b} &\leq [U_a, U_b]U_{a+b+1} \\ &\leq [U_a, U_b][U_{a+1}, U_b]U_{a+b+2} \\ &= [U_a, U_b]U_{a+b+2}. \end{aligned}$$

Adım adım devam ederek,

$$U_{a+b} \leq [U_a, U_b]U_n = [U_a, U_b]$$

eşitliğine varırız. □

Teorem 1. U_i *sıfırkuvvetlidir ve sıfırkuvvet sınıfı n–i'dir. Dolayısıyla U, n – 1'inci dereceden sıfırkuvvetlidir.*

Kanıt: Sav 4'ten tümevarımla çıkar. □

Teorem 2. U_1*'in çözünürlük sınıfı* $\lceil \log_2 n \rceil$ *sayısıdır.*

Kanıt: Sav 4'ten tümevarımla,

$$U^{(k)} = U_{2^k}$$

eşitliği elde edilir. Demek ki $U^{(k)} = 1$ eşitliğini sağlayan en küçük k doğal sayısı, $2^k \geq n$ eşitliğini sağlayan en küçük k sayısıdır, yani

$$2^{k-1} < n \leq 2^k$$

eşitsizliklerini sağlayan biricik doğal sayısıdır. Bundan,

$$k - 1 < \log_2 n \leq k$$

çıkar. Demek ki, $k = \lceil \log_2 n \rceil$. □

6. Borel Altgrubu

T, B'nin çaprazdaki girdileri dışındaki girdileri 0 olan küme olsun. O zaman,

$$T \leq B,$$
$$B = TU,$$
$$T \cap U = 1$$

olur. Ayrıca

$$U \lhd B$$

olduğunu biliyoruz. Yukardaki dört olgu grup teorisinde $B = U \rtimes T$ olarak özetlenir. Bu durumda, alışık olmayanlara biraz uzun gelebilecek bir hesapla,

$$B' = U'[U, T]T'$$

eşitliğini kanıtlamak pek zor değildir. Ama bizim durumumuzda, $T \approx (K^*)^n$ ve değişmeli bir grup, yani $T' = 1$. Demek ki,

$$B' = U'[U, T]$$

olur. $[U, T] = U$ eşitliğini kanıtlayarak, $B' = U$ eşitliğine ulaşmış olacağız.

$U = 1 + U_1$ eşitliğini biliyoruz. Rastgele bir $t \in T$ alalım. O zaman $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K^*$ için,

$$t = \lambda_1\varphi_{11} + \cdots + \lambda_n\varphi_{nn}$$

olur. Elbette

$$t^{-1} = \lambda_1^{-1}\varphi_{11} + \cdots + \lambda_n^{-1}\varphi_{nn}$$

dir. Şimdi, $i > j$ için, $\varphi_{ij}^2 = 0$ olduğundan ve

$$\varphi_{kk}\varphi_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{eğer } j \neq k \text{ ise} \\ \varphi_{ik} & \text{eğer } j = k \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan, aşağıdaki gri kutuda yapılan hesaba göre,

$$[t, 1 + \varphi_{ij}] = 1 + (1 - \lambda_j^{-1}\lambda_i)\varphi_{ij}$$

olur. Demek ki her $i > j$ ve her $\lambda \in K \setminus \{1\}$ için

$$1 + \lambda\varphi_{ij} \in [T, U].$$

Eğer $K = \mathbb{F}_2$ ise bu bizi pek ileri götürmez, sadece zaten bildiğimiz $1 \in [T, U]$ ilişkisini verir. Ama $K \neq \mathbb{F}_2$ ise, $\alpha + \beta = 1$ eşitliğini sağlayan $\alpha, \beta \in K \setminus \{1\}$ elemanları bulabiliriz (neden) ve

$$1 + \varphi_{ij} = (1 + \alpha\varphi_{ij})(1 + \beta\varphi_{ij}) \in [T, U]$$

olur. Bundan böyle $K \neq \mathbb{F}_2$ olsun. Demek ki her $i > j$ ve her $\lambda \in K$ için

$$1 + \lambda\varphi_{ij} \in [T, U].$$

Bu aşamadan sonra Sav 4'teki gibi kanıtı devam ettirebiliriz:

$$J_a = \{z \in I_a : 1 + z \in [T, U] + I_{a+1}\}$$

olsun. J_a toplama altında kapalı ve her $i > j$ ve her $\lambda \in K$ için $\lambda\varphi_{ij}$ elemanlarını içerir. Demek ki $J_a = I_a$, ve

$$1 + I_a \leq [T, U] + I_{a+1}.$$

Aynı formülde a yerine $a + 1$'e koyarsak,

$$\begin{aligned} 1 + I_a &\leq [T, U] + I_{a+1} \\ &= [T, U](1 + I_{a+1}) \\ &= [T, U]U_{a+1} \\ &\leq [T, U]([T, U] + I_{a+2}) \\ &\leq [T, U] + I_{a+2} \end{aligned}$$

elde ederiz. $a = 1$'den başlayarak bunu defalarca uyguladığımızda,

$$U = 1 + I_1 \leq [T, U],$$

yani

$$U = [T, U]$$

elde ederiz. Bütün bunları ve sonuçlarını yazalım.

Teorem 3. *Eğer $K \neq \mathbb{F}_2$ ise, $B' = U = [T, U]$ olur; dolayısıyla B'nin çözünürlük sınıfı*

$$\lceil \log_2 n \rceil + 1$$

dir; ama B sıfırkuvvetli değildir. Eğer $K = \mathbb{F}_2$ ise, $B = U$ olur.

$$\begin{aligned}
[t, 1+\varphi_{ij}] &= t^{-1}(1+\varphi_{ij})^{-1}t(1+\varphi_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}\varphi_{kk}\right)(1-\varphi_{ij})\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_{kk}\right)(1+\varphi_{ij}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}\varphi_{kk} - \sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}\varphi_{kk}\varphi_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_{kk} + \sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_{kk}\varphi_{ij}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}\varphi_{kk} - \lambda_j^{-1}\varphi_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_{kk} + \lambda_j\varphi_{ij}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \varphi_{kk} - \lambda_j^{-1}\varphi_{ij}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\varphi_{kk}\right) + \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1}\varphi_{kk}\right)\lambda_j\varphi_{ij} - (\lambda_j^{-1}\varphi_{ij})(\lambda_j\varphi_{ij}) \\
&= \quad 1 \quad - \quad \lambda_j^{-1}\lambda_i\varphi_{ij} \quad + \quad \lambda_j^{-1}\lambda_j\varphi_{ij} \quad - \quad 0 = 1 + (1 - \lambda_j^{-1}\lambda_i)\varphi_{ij}.
\end{aligned}$$