Ali Nesin

1956'da ...

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye. . .

Ali Nesin

Sezgisel Kümeler Kuramı

İçindekiler

Önsöz

Bu kitap bir dizinin ikinci kitabıdır. (Birincisi Önermeler Mantığı [N1] adlı kitaptır, ki o da zamanla genişletilecektir.) Dizinin amacı, matematiğin en temel kavramlarını, bazen biraz sezgisel olarak, özellikle matematiğe yeni başlayan genç okura sunmaktır. Lise matematik öğretmenlerine, üniversitede matematik ya da temel bilimlerde eğitim görmek isteyen liselilere ve üniversitede bir temel bilimler bölümünde okuyan gençlere (doğrusu çok) yararlı olacağını düşünüyorum.

Bu kitap kümeler kuramı üzerinedir ve dizinin birinci kitabından bağımsız okunabilir.

Kümeler kuramını çok daha soyut ve aksiyomatik olarak bir başka akademik kitabımızda sunacağız (Sayıların İnşası [N2] ve Aksiyomatik Kümeler Kuramı [N3]). Burada, kümeler kuramına (birazdan açıklanacak anlamda) sezgisel bir başlangıç yapmak istedik.

Her ne kadar gençler için yazılmışsa da, okurdan belli bir düşünsel ve matematiksel olgunluk bekleniyor. Bu kitapta özellikle pedagojik olmaya çalışılmadı. Matematiği sevdirme, okuru eğlendirme çabasına hele hiç girişilmedi. Bu kitap, belki genç fakat olgun ve ciddi okurlar için yazılmıştır. Matematiği sevdirmeye kalkışmadığı gibi matematikten hoşlanmayan birini matematikten daha da soğutabilir!

Kimi yerlerde tanım çokluğunun belli bir sıkıntı yarattığının ve bazı bölümlerin pek sevimli olmadığının bilincindeyim. En azından kitabın birinci bölümünde dişe dokunur bir sonuç yok, bu da her yazar için bir sıkıntı yaratır. Birinci bölüm daha çok matematikte pek sık karşılaşılan temel kavramlara açıklık getirmek amacıyla yazılmıştır. Kaçınılmaz kuruluğu ve tekdüzeliği örneklerle gidermek istedim, ama hiç yapay örnek vermedim. Verdiğim her örnek daha derin matematikte kullanılan, profesyonel matematikçilerin istisnasız hepsinin aşina oldukları örneklerdir. Akademik kariyer yapmak isteyen birinin görmezden gelebileceği türden örnekler yok bu kitapta.

Üstüne basarak söyleyeyim: İster tanım ister örnek olsun, bu kitapta matematiği öğrenmek isteyen birinin "bunu anlamasam da olur" diyebileceği tek bir satır yoktur. Uygulaması bu kitapta bulunmasa da, matematikle ilgilenen her okurun kısa zamanda karşısına çıkabilecek kavramları ve örnekleri ele aldık.

Bu dediğim, her okurun her satırı okur okumaz anlaması gerektiği anlamına gelmez. Böyle bir beklenti hiç gerçekçi olmaz. Bazı kavramların özümsenmesi birkaç yıl alabilir. Ama bir yerden de başlamak gerekiyor...

"Sezgisel kümeler kuramı" teriminin mantıkta ve matematikte daha teknik ve daha felsefi bir anlamı vardır. Kümeler kuramını İngilizcede "intuitionistic set theory" adıyla bilinen bakış açısıyla ele almıyor bu kitap. "Sezgisel kümeler kuramı" terimini, "neyin küme olup neyin olmadığı konusunda kılı kırk yarmıyoruz, bir kümeyi andırabilecek her şeyi (yani her topluluğu) küme olarak kabul ediyoruz" anlamında kullanıyoruz, yani İngilizcesiyle "naive set theory" anlamında. Bir de, bizi ve aklı başında her insanoğlunu ikna eden her akıl yürütmenin "kanıt" sayılmasını istiyoruz. Böyle bir esnekliğin matematikte çelişkiye yol açacağı bir yüzyıldan fazla bir zamandan beri biliniyor. (Kitapta da sözünü ettiğimiz Russell Paradoksu işte tam bu çelişkiyi konu ediyor.) Dolayısıyla bu kitapta birkaç pembe yalan vardır. Yalansız dolansız kümeler kuramı öğrenmek isteyen okur yakında çıkacak olan daha akademik kitaplarımı okumalıdır.

Öte yandan, rengi ne olursa olsun, yalanın da bir sınırı olmalıdır. Bu kitaptaki kümeler elma armut kümeleri değil, matematiksel nesnelerin kümeleri olacaktır. Ayrıca, okurun kafasının daha fazla karışmayacağını düşündüğümde, pembe yalanlara karşı okuru uyardım.

Kitabın matematiksel düzeyi okunan sayfa sayısıyla birlikte (kimi zaman orantısız olarak) artacak ya da tam tersine azalacaktır. Özellikle kitabın ikinci bölümünün sonlarına doğru seviye yükselecektir. Nitekim, kitabın ikinci bölümünde sonsuz kümelere odaklanacağız ve sonsuz kümelerin elemanlarını karşılaştırıp, hangisinde "daha fazla" eleman olduğuna karar vereceğiz.

Diğerlerinden daha zor bazı alıştırmalara bir yıldız (*) koydum. İlk okumada atlanabilecek bölüm ve altbölümlere de birer yıldız ekledim.

Ortaokul ve lise kitaplarında oldukça iyi işlendiğini düşündüğüm birkaç konuyu çabuk ya da hiç işlemeden geçiştirdim. Örneğin bir fonksiyonun grafiğinin matematiksel tanımını verdim (çünkü lise kitaplarında ya yoktur ya iyi anlatılmaz ya da öğrencinin kafasında yer etmez) ama liselerde yeterince örnek verildiğini düşünüp çok az fonksiyon grafiği örneği verdim.

Sonat Süer birkaç kez sabır ve inatla okuyarak kitaba her açıdan (matematiksel, pedagojik, yazımsal vs.) önemli katkılarda bulunmuştur. Ne yazık ki tüm haklı eleştirilerine boyun eğecek gücü kendimde bulamadım. Ama kendisine sonsuz minnettar olduğumu belirtmeliyim. Sonat Süer'e, kitabın ilk basımında bölümlerden birini yazan ama yeni basımda bölümü kaybolan Doğan Bilge'ye, uzunca bir alıştırmayı borçlu olduğum Andrei Ratiu'ya, birçok önemli düzeltmeler yapan Anıl Gezer ve Özlem Beyarslan'a ve kitabın mizanpajına büyük emeği geçen Aslı Can Korkmaz, Atay Eriş ve Kadir Abbas'a hepimiz adına çok teşekkür ederim.

Kitabı yazmak bana zor geldi, okuması kolay gelsin.

18 Kasım 2008 - 30 Mayıs 2009

İkinci Basıma Önsöz

Kitap neredeyse iki katına çıktı. Büyük ölçüde Sonat Süer'in farkına vardığı birçok eksiklik ve hata giderildi. Yeni bölümler eklendi. Kitabın ikinci kısmı tekrarlardan kurtuldu. Yani birinci basımı evinizin en görünmez köşesine yerleştirebilirsiniz.

İlk basım matematiğe meraklı liselilere yönelikken, ikinci basımda üniversite öğrencilerini de göz önünde tuttum.

Kimi bölümlerde en modern matematiğin en soyut konularına giriş yaptım. Bu bölümler çok soyut ve çok zor bulunursa atlanabilirler.

Her ne kadar kitabın konusu sezgisel kümeler kuramıysa da, aksiyomatik kümeler kuramıyla bir flört halini sürdürdüm. Sürekli baklayı ağzımdan çıkarmamı uman okur daha akademik düzeyde olan Aksiyomatik Kümeler Kuramı I: Sayıların İnşası [N2] ve Aksiyomatik Kümeler Kuramı II: Ordinaller ve Kardinaller [N3] kitaplarımın çıkmasını beklemeli.

28 Mayıs 2009

Üçüncü Basıma Önsöz

Seçim Aksiyomu'yla ilgili son derece çarpıcı bir "okuma parçası", kapanışla ilgili bir bölüm, sıralamalarla ilgili bir sayfa, öğrencilerime verdiğim iki sınavın kitaba uyarlanmış biçimini ve bu sınavların yanıtlarını ekledim. Bir de daha önceki basımlarda bulunan ve her sezgisel kümeler kitabında bulunması gereken yalanlara dayanamayıp, kitabın en sonuna kavramların tam matematiksel tanımını veren uzunca bir bölüm ekledim. Bunun dışında beceriksiz ifadeleri, ufak tefek yazım hatalarını düzelttim. Birkaç alıştırma ve örnek ekleyip bazılarının yerlerini değiştirdim.

Ortalama bir lise öğrencisinin kitapla zaten pek ilgilenmediğini farkedince, kitabın üniversite öğrencisinin de ilgi alanına girecek biçimde genişlemesinde bir sakınca görmedim.

Öte yandan, Matematik Köyü'nde verdiğim derslerde liselilerin denklik ilişkisi ve denklik sınıfları temsilcileri gibi biraz daha soyut bazı kavramları anlamakta ne derece zorlandıklarını görünce, kitaptaki örnek sayısını artırdım.

İlk okumada liselilerin atlayabileceği biraz daha zor bölümleri, altbölümleri ve alıştırmaları bir yıldızla (*) belirttim. Yıldızlı bölümleri atlamak kitabın devamını okuyup anlamaya engel olmayacaktır. En son bölümün yıldızlı ya da yıldızsız olmasının bir anlam ifade etmeyeceğini düşündüm ve bu seçeneği okura bıraktım.

Amacım, öğrencinin hocasız, tek başına okuyup anlayabileceği bir kitap yazmaktı. Kitabı tekrar okuyunca bunu bir ölçüde başardığımı görüyorum ama bazı bölümlerden pek memnun değilim doğrusu. Kitabın ne kadar sezgisel ne kadar aksiyomatik (dolayısıyla matematiksel) olması gerektiğine karar vermek kolay olmadı her zaman. Korkarım genç okur bazı yerlerde bir bilene danışmak zorunda kalacaktır. Çalıştım ama daha iyisini yazmak elimden gelmedi.

Ender olarak bazı alıştırmalar metinde öğretilenlerle ilgili olmayabilir ve okura zor gelebilir, ama sadece soruyu bilmenin büyük kazanç olacağını düşünüyorum.

Bu seviyede bir kümeler kuramı yazmanın beni bu kadar zorlayacağını düşünmemiştim doğrusu. Demek bazı konular yazılmaz sadece anlatılır! Kavramları matematiksel sırayla değil, pedagojik sırayla sunma gerekliliği beni tahmin edemeyeceğim kadar zorladı ve hatta üzdü. Lise kitapları yazarlarına kolaylıklar diliyorum...

İlk iki basımda söz verdiğim Aksiyomatik Kümeler Kuramı I: Sayıların İnşası ve Aksiyomatik Kümeler Kuramı II: Ordinaller ve Kardinaller kitaplarını ne yazık ki henüz çıkaramadım. Ama eli kulağındadır. Bir yıla kalmadan çıkacaklarını umuyorum.

Üçüncü basıma da değerli katkıları olan Sonat Süer'e bir kez daha teşekkür ederim.

27 Mayıs 2010

Kısım I

En Temel Kavramlar

1. Sezgisel Anlamda Küme

Bu ilk bölümde bir kümenin ne anlama geldiğini sezgisel olarak anlamaya çalışacağız. Bunu yaparken, doğal sayıları, hatta diğer sayıları da bildiğimizi varsayacağız, yoksa hiç matematiksel örnek veremeyiz. Doğal sayıları ve diğer sayıları matematiksel olarak Sayıların İnşası [N2] adlı bir başka kitabımızda inşa edeceğiz. Ama bu kitapta tanımlanan kavramlara matematiksel örnek verebilmek için en azından doğal sayılara ihtiyacımız olacak ve doğal sayıları hiç çekinmeden kullanacağız.

1.1 Küme ve Eleman Kavramları

Kümenin sezgisel anlamıyla başlayalım: Bir ***küme***, adına ***öğe*** ya da ***eleman*** dediğimiz bazı nesneleri ***içeren*** bir topluluktur. Örneğin, ülkeler bir küme oluşturur, bir ülkenin şehirleri bir küme oluşturur, bir şehrin okulları bir küme oluşturur, bir okulun sınıfları bir küme oluşturur, bir sınıfın öğrencileri bir küme oluşturur. Alışveriş listesi de (sıralı) bir küme olarak görülebilir.

Her ülke, ülkeler kümesinin bir elemanıdır. Ülkeler kümesini U harfiyle, Türkiye'yi de T harfiyle gösterirsek, T'nin U kümesinin bir elemanı olduğunu,

$$T \in U$$

yazılımıyla gösteririz. Eğer Ankara'yı A ile simgelersek, Ankara bir ülke olmadığından, A, U'nun bir elemanı değildir. Bunu da,

$$A \notin U$$

yazılımıyla gösteririz.

Matematiksel bir kümenin elemanları da matematiksel nesneler olmalıdır. Matematik yerine günlük hayattan alınan yukarıdaki örnekler matematiksel anlamda küme değildir; ne de olsa ülkeler kümesi zamanla değişir ama matematisel küme zamandan bağımsızdır.

Doğal sayılar kümesi matematiksel anlamda bir kümedir çünkü bu kümenin elemanları 0, 1, 2, 3 gibi sayılardır ve (çıkmayı bekleyen Aksiyomatik Kümeler Kuramı I: Sayıların İnşası [N2] adlı kitabımızda ayrıntılı biçimde göreceğimiz üzere) bunlar matematiksel nesnelerdir.

Doğal sayılar kümesi, $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir. Örneğin,

$$5 \in \mathbb{N},\ 6/2 \in \mathbb{N},\ 5/2 \notin \mathbb{N},\ -4 \notin \mathbb{N} \text{ ve } \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$$

ilişkileri (içindelikleri) doğrudur.

Eleman olarak sadece 2'yi, 3'ü, 5'i ve 7'yi içeren küme

$$\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$$

olarak yazılır. $\{2,\ 3,\ 4\}$ bir başka kümedir; bu son kümenin üç elemanı vardır: 2, 3 ve 4.

Bazen bir kümenin sonsuz sayıda elemanı olabilir, doğal sayılar kümesi örneğin sonsuz sayıda elemanı olan bir kümedir. O zaman

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

gibi bir yazılımın kullanıldığı olur. Üç nokta, daha sonra gelecek elemanların neler olduğu aklı başında herkes tarafından anlaşılacağı anlamına gelir. Bu yaklaşım pek matematiksel olmasa da matematikte çok sık kullanılır. Örneğin,

$$\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$$

olarak gösterilen kümenin elemanlarını herkes anlar, belli ki sözkonusu küme çift sayılar kümesidir.

$$\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \ldots\}$$

kümesinin hangi elemanları içerdiğini anlamayan bu kitabın kapağını hemen şu an kapatabilir!

Yukarıda kullandığımız "{" ve "}" simgelerine ***açan*** ve ***kapatan küme parantezi*** adı verilir. Küme parantezleri arasına aynı elemanı elli defa yazmak, o kümede o elemandan elli tane var anlamına gelmez! Bir elemandan bir kümede ancak tek bir tane olabilir... Örneğin,

$$\{a,\ a,\ a\}$$

kümesinin bir tek elemanı vardır, o da a'dır.

$\{a, b\}$ kümesinin en az bir, en fazla iki elemanı vardır; eğer $a = b$ ise bir, $a \neq b$ ise iki elemanı vardır.

$\{a,\ b\}$ ile $\{b,\ a\}$ yazılımları arasında matematiksel anlamda bir fark yoktur, ikisi de aynı kümeyi simgeler, çünkü her iki kümenin de aynı elemanları vardır: a ve b. Genel olarak, aynı elemanları olan iki kümenin birbirine eşit olduğu kabul edilir. Örneğin,

$$\{a,\ a,\ b\} = \{a,\ b\},$$
$$\{a,\ a,\ a\} = \{a,\ a\}.$$

Aynı elemanlara sahip iki kümenin birbirine eşit olduğu olgusunu, ya kanıtlanamayacak, doğru kabul edilmesi gereken bir önerme, yani bir ***aksiyom*** olarak kabul etmeliyiz ya da "küme eşitliği"nin bir tanımı olarak. Biz birincisini seçeceğiz:

Küme Eşitliği Aksiyomu: *Aynı elemanları olan iki küme birbirine eşittir.*

Not: Nasıl yukarıdaki önerme kanıtlanamayan bir önermeyse, aslında, "küme" kavramı ve "bir kümenin elemanı olmak" ilişkisi de matematiksel olarak tanımlanamayan ve tanımlanmadan kabul edilmesi gereken kavramlardır. Aksiyomatik kümeler kuramında amaç, matematiksel tüm kavramları, tanımlanmadan kabul edilen bu iki kavrama dayandırarak tanımlamak ve tüm teoremleri, kanıtlanmadan doğru kabul edilen önermelere, yani aksiyomlara dayandırarak kanıtlamaktır. Ama biz burada aksiyomatik değil, sezgisel kümeler kuramı yapıyoruz ve böyle bir uğraşa (çok) girmeyeceğiz. Okur, bu satırlar sanki hiç yazılmamış gibi kitabı okumaya devam edebilir.

Küme eşitliğine bir örnek daha verelim: Eğer

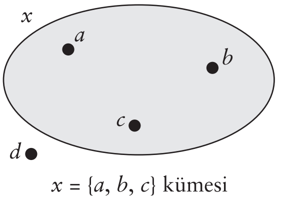
- A, 8'den küçük asal sayılar kümesi,
- B, $(x-2)(x-3)(x-5)(x-7)=0$ denkleminin çözüm kümesi ve
- $C = \{2, 3, 5, 7\}$

ise o zaman $A = B = C$ eşitlikleri geçerlidir, çünkü her üç kümenin de aynı elemanları vardır.

Kümeler soyut nesneler olduklarından kümelerin şekli şemali yoktur, ama insanoğlu resmi yazıdan daha kolay algıladığından, kümeler aşağıdaki şekildeki gibi yumurta ya da patates biçiminde bir şekille gösterilir. ("Mutluluğun resmini yapabilir misin Abidin?" misali.) Kümenin elemanları yumurtanın içine yazılır. Kümenin elemanı olmayan nesneler de yumurtanın dışında gösterilir. Aşağıdaki örnekte üç elemanlı

$$x = \{a, b, c\}$$

kümesi çizilmiş. $d \notin x$ olduğundan, d, yumurtanın dışında kalıyor.



$x = \{a, b, c\}$ kümesi

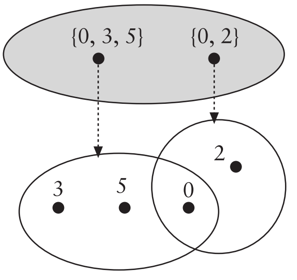
Kimi zaman bir kümenin elemanları da küme olabilirler. Örneğin

$$\{\{0, 3, 5\}, \{0, 2\}\}$$

kümesinin

$$\{0,\ 3,\ 5\} \text{ ve } \{0,\ 2\}$$

olmak üzere iki elemanı vardır ve her iki eleman da bir kümedir. Küme olan bu elemanların da elemanları vardır. Örneğin $\{0, 3, 5\}$ elemanının üç elemanı vardır: 0, 3 ve 5. (Sayıların birbirinden farklı olduğunu, örneğin $2 \neq 3$ eşitsizliğini varsayıyoruz! Bu olguyu Aksiyomatik Kümeler Kuramı I: Sayıların İnşası adlı kitabımızda sayıları matematiksel olarak tanımladıktan sonra kanıtlayacağız.) Bu kümeyi ve elemanlarını aşağıdaki şekildeki gibi gösterebiliriz.



En yukarıda, öğeleri {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri olan iki öğeli küme görülüyor. Bu kümeyi griye boyadık. Bu kümede {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri birer nokta olarak, yani birer öğe olarak gösterilmiş. Altta ise, {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri küme olarak gösterilmiş.

Kümenin elemanlarını kümenin çocukları olarak yorumlayacak olursak (ki böyle bir yorumlama matematiksel olarak anlamsızdır), kümenin elemanlarının elemanlarını kümenin torunları olarak düşünmek gerekir. Elbette bir kümenin elemanlarının elemanlarının elemanlarından da sözedebiliriz.

$\{0, 3, 5\}$ bir kümedir, ama bu küme yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir başka kümenin elemanı olabilir. Demek ki aynı nesne aynı anda hem küme hem de eleman olabiliyor. Aslında her küme bir başka kümenin elemanı olabilir, nitekim x kümesi örneğin $\{x\}$ kümesinin elemanıdır.

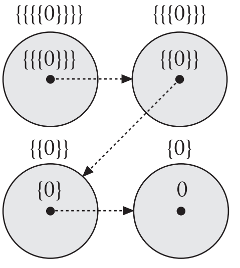
Bu gibi durumlarda aynı nesneyi -yukarıda yaptığımız gibi- aynı şekil üzerinde iki değişik biçimde resmetmekte yarar olabilir:

1. Eleman olarak, yani bir nokta olarak,
2. Küme olarak, yani yumurta biçiminde bir şekille.

Yukarıdaki örnekten çok daha karmaşık durumlar olabilir. Sözgelimi

$$\{\{\{\{0\}\}\}\}$$

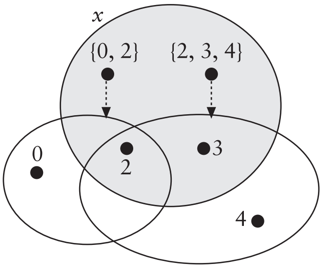
kümesinin tek bir elemanı vardır, o da $\{\{\{0\}\}\}$ kümesidir. $\{\{\{0\}\}\}$ kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da $\{\{0\}\}$ kümesidir. $\{\{0\}\}$ kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da $\{0\}$ kümesidir. $\{0\}$ kümesinin de bir tek elemanı vardır, o da 0'dır. Bu örneğimiz aşağıda resmedilmiştir.



Daha karmaşık durumlar olabilir. Şu örneği ele alalım:

$$x = \{\{0, 2\}, \{2, 3, 4\}, 2, 3\}$$

olsun. Bu kümeyi ve elemanlarını aşağıdaki şekilde resmettik.



Daha daha tuhaf durumlar olabilir. Sözgelimi öyle bir x kümesi olabilir ki x'in bir tek elemanı vardır ve bu eleman gene x'tir... Yani $x = \{x\}$ olabilir. O zaman

$$x \in x \in x \in \ldots$$

olur. Biz "olabilir" dedik diye olacak değil ama böyle bir durum gene de olabilir, olmaması için şimdilik görünürde bir neden yok, hayal etmesi oldukça zor bir durum olsa bile...

Şöyle bir durum da olabilir:

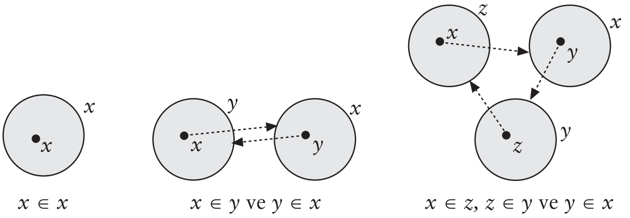
$$x = \{y\} \text{ ve } y = \{x\}.$$

O zaman $x \in y \in x \in y \in \ldots$ olur.

Ya da şöyle bir durum olabilir:

$$x = \{y\},\ y = \{z\} \text{ ve } z = \{x\}.$$

İşte bu üç durumun resimleri:



$x \in x$ $\quad$ $x \in y$ ve $y \in x$ $\quad$ $x \in z$, $z \in y$ ve $y \in x$

Yukarıdaki şekilde resmedilen durumlar, burada açıklaması imkânsız ve hatta gereksiz olan bir nedenden kümeler kuramında (***Temellendirme Aksiyomu*** adı verilen bir aksiyomla, bkz. sayfa 293, Aksiyom A8) yasaklanır. Ama şimdilik bu durumların olamayacağını düşünmemiz için bir neden yok, hatta olabileceğini düşünmek, sezgiyle matematiksel bilgiyi ayırdedebilmek açısından yararlı bile olabilir.

Eğer x bir kümeyse, eleman olarak sadece x'i içeren bir küme vardır. Bu küme $\{x\}$ olarak yazılır. x'in kaç elemanı olursa olsun, $\{x\}$ kümesinin tek bir elemanı vardır: x. Eğer x ve y iki farklı kümeyse $\{x,\ y\}$ kümesinin sadece iki elemanı vardır. Genel olarak, sonlu sayıda küme verilmişse, diyelim $x_1, \ldots, x_n$ kümeleri, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi tüm bu kümeleri eleman olarak içerir ve başka da eleman içermez.

Yukarıdaki paragrafta sözünü ettiğimiz olgu da aslında kümeler kuramının birer aksiyomudur ama burada sezgisel takılıyoruz. Aksiyom için bkz. sayfa 274, Aksiyom A5.

Alıştırmalar

1.1. $\{\{1,\ 2,\ \{1,\ \{2\}\}\}\}$ kümesinin kaç elemanı vardır?

1.2. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ise $AA = \{x \cdot y : x \in A,\ y \in A\}$ kümesini, yani A'daki sayıların gene A'daki sayılarla çarpılmasıyla elde edilen sayıları içeren ve başka da bir eleman içermeyen kümeyi bulun.

1.3. A kümesi yukarıdaki gibi olsun. $A + A$ kümesini tanımlayın ve elemanlarını bulun.

1.4. Eğer $\{\{x\},\ \{x,\ y\}\} = \{\{z\},\ \{z,\ t\}\}$ ise, $x = z$ ve $y = t$ eşitliklerini kanıtlayın.

1.5. Eğer $\{x,\ \{x,\ y\}\} = \{z,\ \{z,\ t\}\}$ ise, $x = z$ ve $y = t$ olmak zorunda mıdır?

1.6. Bir ders kitabında "sınıfımızın güzel kızları"nı eleman olarak içeren bir kümeden sözediliyordu. Neden böyle bir küme (ne matematikte, ne sosyolojide, ne de herhangi bir bilimsel dalda) olamaz?

1.7. $x \in x$ ilişkisini sağlayan bir x kümesinin varlığının kabul edilebilir olup olmadığı konusunda arkadaşlarınızla ve kendi kendinizle felsefi bir tartışmaya girin. Matematiksel olarak kimsenin haklı çıkamayacağını bilerek...

1.2 Sayı Kümeleri

Bu altbölümde ileride sık sık kullanacağımız ve matematikte çok bilinen birkaç sayı kümesi tanımlayacağız.

$\mathbb{N}$'nin doğal sayılar kümesi olduğunu söylemiştik. 0'ın da bir doğal sayı olduğunu varsayıyoruz. Yani,

$$\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}.$$

Bazı kitaplarda $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ tanımı kabul edilir ama biz öyle yapmayacağız.

En büyük doğal sayının olmadığına dikkatinizi çekeriz. "Sonsuz" diye bir sayının olmadığına da!

$\mathbb{Z}$, tamsayılar kümesini simgeler, yani $\mathbb{Z}$ kümesi doğal sayıları ve doğal sayıların eksilerini içerir:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

İki doğal sayının farkı bir doğal sayı olmayabilir ama iki tamsayının farkı bir tamsayıdır.

$\mathbb{Q}$, kesirli sayılar kümesini simgeleyecek, yani iki a ve b tamsayısı için a/b biçiminde yazılan sayıları içeren küme olacak. Burada b, 0 olmayan bir tamsayı olarak alınmalıdır. Örneğin

$$2/3 \in \mathbb{Q},$$

öte yandan

$$\pi,\ \pi/2,\ \pi/\sqrt{2},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

π'nin kesirli bir sayı olmadığının kanıtı kolay değildir; 1761'de Johann Heinrich Lambert tarafından kanıtlanmıştır. $\pi/\sqrt{2}$'nin bir kesirli sayı olmadığını da bu kitapta kanıtlayamayız. Ama $\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmadığının kanıtı çok kolaydır ve hemen hemen her popüler matematik kitabında bir kanıtı mevcuttur. Bunun bir kanıtını bölümün sonundaki ilk gri kutucukta bulabilirsiniz.

$\mathbb{R}$, gerçel (reel) sayılar kümesini simgeleyecek. Sezgisel olarak $\mathbb{R}$, tüm mesafelerden ve bu mesafelerin "eksilerinden" oluşan kümedir. Örneğin,

$$\pi, -\pi, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

olur. Daha fazla sayı kümesi örneği vermeden önce küme yazılımı hakkında bir anlaşma yapalım.

1.3 Küme Yazılımları

$\{x \in X : P(x)\}$ yazılımının anlamını,

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

örneğiyle anlatmaya çalışalım. Burada a ve b, sabitlenmiş iki gerçel sayıdır. Bu küme, $\mathbb{R}$'nin $a < x < b$ eşitsizliklerini sağlayan x elemanlarının kümesidir, yani birazdan tanımlayacağımız $(0, 1)$ aralığıdır. Açıklayıcı şekil aşağıda.

$$\{\boxed{x} \in \boxed{\mathbb{R}} : \boxed{a < x < b}\}$$

$\boxed{\mathbb{R}}$'nin $\boxed{a < x < b}$ özelliğini sağlayan $\boxed{x}$ elemanlarının kümesi

Bir başka örnek:

$$\{x \in \mathbb{N} : \text{ bir } y \in \mathbb{N} \text{ için } x = y^2 + 1\}$$

ile gösterilen küme, doğal sayıların karelerinin 1 fazlalarından oluşmuş kümedir, yani

$$\{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, \ldots\}$$

kümesidir.

Genel olarak, eğer X bir kümeyse,

$$\{x \in X : P(x)\}$$

ile gösterilen küme, X'in P özelliğini sağlayan x elemanlarının kümesi anlamına gelir.

Örneğin

$$\{n \in \mathbb{N} : n\text{'nin tek sayıda pozitif böleni var}\}$$

bir kümedir. Bu kümenin pozitif tamkarelerden oluştuğu sizi şaşırtabilir ama kanıtı çok zor değildir. Yani bu küme $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ kümesine eşittir.

Bir başka örnek:

$$\{x + y : x \in \mathbb{R},\ 0 < x < 1,\ y \in \mathbb{Z}\}$$

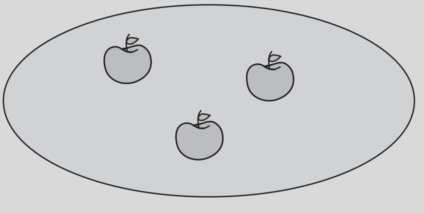
yazılımı, 0 ile 1 arasındaki belli bir x gerçel sayısı ve bir y tamsayısı için $x+y$ biçiminde yazılan sayılar kümesini simgeler. Bu küme, elemanları tamsayı olmayan gerçel sayılardan oluşan kümedir, yani $\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Z}\}$ kümesine eşittir.

Okur, alıştırma olarak, $\{5n + 9m : n, m \in \mathbb{N}\}$ kümesinin elemanlarının hangi sayılar olduğunu anlamaya çalışabilir. (Bu ilginç bir sorudur!)

$\{x^2 + y^2 + z^2 + t^2 : x, y, z, t \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\mathbb{N}$ kümesine eşit olduğu, yani her doğal sayının dört doğal sayının karesi olduğu, burada kanıtlayamayacağımız (yeri değil çünkü) önemli bir teoremdir (bkz. Matematik Dünyası dergisi, yıl 2011, sayı 1, sayfa 31-33).

İlkokul Kitaplarında Yaygın Bir İnanç

Birçok ilkokul matematik kitabında şu tip sorular görülür: "Aşağıdaki kümede kaç eleman vardır?



Doğru yanıt kitaba göre 3'tür. Oysa üç elma da tıpatıp aynı olduğundan doğru yanıt 1 olmalıdır.

1.4 Aralıklar

Eğer a ve b iki gerçel sayıysa, şu tanımları yapalım:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\
[a,\, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},\\
[a,\, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\},\\
(a,\, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\},\\
(a,\, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\},\\
[a,\, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\},\\
(-\infty,\, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\},\\
(-\infty,\, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\},\\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Bu kümelere ***aralık*** adı verilir. İlk dört aralığa ***sınırlı***, son beş aralığa ***sınırsız aralık*** adı verilir.

$[-\infty, -b]$ gibi "sonsuz" simgelerini eleman olarak içeren kümelerden sözetmediğimize dikkatinizi çekeriz. Ayrıca, kümelerin (aralıkların) adlarında ∞ ya da $-\infty$ gibi simgeleri belirse de, sağ taraftaki tanımda bu simgeler belirmemektedir. Yani burada sonsuzların tanımı yapılmamaktadır.

Eğer $a \ge b$ ise $(a,\, b)$, $[a,\, b)$, $(a,\, b]$ aralıkları ve eğer $a > b$ ise $[a,\, b]$ aralığı boşkümedir, yani bu kümelerin hiç elemanı yoktur. (Boşkümeyi bir sonraki bölümde tanımlayacağız!) Elbette $[a,\, a] = \{a\}$ olur. Bunlar dışındaki durumlarda aralıklar sonsuz sayıda eleman içerirler. Örneğin eğer $a < b$ ise,

$$\frac{a+b}{2} \in (a,\, b)$$

olur.

$$(a,\, b),\ (a,\, \infty),\ (-\infty,\, b) \text{ ve } (-\infty,\, \infty)$$

kümelerine ***açık aralık*** adı verilir.

$$[a,\, b],\ [a,\, \infty),\ (-\infty,\, b] \text{ ve } (-\infty,\, \infty)$$

kümelerine ise ***kapalı aralık*** adı verilir. Dikkat ederseniz, boşküme (b'yi a'dan küçük alın) ve $\mathbb{R}$ (yani $(-\infty,\, -\infty)$ aralığı) hem açık hem de kapalı aralıktırlar. Diğer aralıklara ***yarı açık*** veya ***yarı kapalı*** denir. ***Soldan açık sağdan kapalı*** gibi ifadeler de kullanılır. $\mathbb{R}^{\ge 0} = [0,\, \infty)$, $\mathbb{R}^{>0} = (0,\, \infty)$ gibi anlamları bariz yazılımları da kullanacağız.

$\mathbb{R}$'nin bir I altkümesinin bir aralık olması için şu koşul yeter ve gerektir:

($\star$) I'nın her x ve y elemanı için, eğer $x < z < y$ ise $z \in I$.

Okura bariz görüneceğini sandığımız bu olguyu bu seviyede kanıtlamamız zor. Bir başka kitaba...

Not: Bu bölümde sözünü ettiğimiz her kümeyi ve her sayıyı ileride yayımlanacak olan ve seviyesi biraz daha yüksek olan Aksiyomatik Kümeler Kuramı I: Sayıların İnşası [N2] adlı kitabımızda matematiksel olarak tanımlayacağız. Bu kitapta, okurun gerçel sayılara ve gerçel sayılarla yapılan toplama, çıkarma, çarpma, bölme gibi işlemlere aşina olduğunu varsayacağız. Bu temel kavramların varlığını kabul etmeseydik, örnek bulmakta zorlanırdık ve kitap oldukça anlaşılmaz olurdu. Aksiyomatik Kümeler Kuramı I: Sayıların İnşası adlı kitabımızda 0, 1, 2 gibi sayılar dahil, matematikte sözü edilen her nesnenin bir küme olarak tanımlandığını göreceğiz.

$\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ve $\urcorner$ Simgeleri

$\Leftrightarrow$ simgesi "ancak ve ancak" olarak okunabilir. Biraz daha açalım: Eğer A ve B matematiksel önermelerse,

$$A \Leftrightarrow B$$

tümcesi, A doğruysa B doğru ve B doğruysa A doğru demektir. Bu, Türkçede, "A ancak ve ancak B ise" olarak okunur. $\Rightarrow$ simgesiyse "ise" anlamına gelir. Yani eğer A ve B matematiksel tümcelerse,

$$A \Rightarrow B$$

tümcesi, A doğruysa B de doğrudur demektir. Bu, Türkçede, "A ise B" olarak okunur. Örneğin,

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ ve } (B \Rightarrow A)),\ ((A \Rightarrow B) \text{ ve } A) \Rightarrow B$$

tümceleri her A ve B önermesi için doğrudur. $A \Rightarrow B$ türünden bir ifadeyi kanıtlamak için, A'nın doğru olduğu varsayımıyla B kanıtlanabileceği gibi, B'nin yanlış olduğu varsayılıp A'nın da yanlış olması gerektiği kanıtlanabilir. Bir başka deyişle, eğer $\urcorner B$ yazılımı "B yanlış" demekse, $A \Rightarrow B$ ifadesiyle $\urcorner B \Rightarrow \urcorner A$ ifadesi mantıksal olarak eşdeğerdir, yani biri doğruysa diğeri de doğrudur. Demek ki,

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\urcorner B \Rightarrow \urcorner A)$$

Ayrıca "A ya da B" tipinde bir ifadeyi kanıtlamak için, A'nın yanlış olduğu varsayılıp B kanıtlanabilir. Yani A ya da B ifadesiyle $\urcorner B \Rightarrow A$ ifadesi mantıksal olarak eşdeğerdir. Bu konular için Önermeler Mantığı adlı kitabımıza [N1] başvurabilirsiniz.

$\sqrt{2}$ Kesirli Bir Sayı Değildir

$\sqrt{2}$ kesirli bir sayı olsaydı, a ve b doğal sayıları için a/b biçiminde yazılabilirdi. Gerekirse sadeleştirerek, a ve b'nin aralarında asal olduklarını varsayabiliriz. Dolayısıyla her ikisi birden çift sayı olamaz. $\sqrt{2} = a/b$ eşitliğinin karesini alarak $2b^2 = a^2$ elde ederiz. Demek ki a^2 çift bir sayı; dolayısıyla a da bir çift sayı olmak zorunda (tek bir sayının karesi tektir.) O zaman bir c tamsayısı için $a = 2c$ olarak yazılabilir. Buradan,

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

ve sadeleştirerek $b^2 = 2c^2$ eşitliğini elde ederiz.

Demek ki b de bir çift sayı. Ama daha önce a'nın da bir çift sayı olduğunu kanıtlamıştık... Bu da a ve b'nin birbirine asal olduklarıyla çelişir. Önermemiz kanıtlanmıştır.

2. Boşküme, Altküme ve Altkümeler Kümesi

2.1 Boşküme

Hiç elemanı olmayan bir kümeye ***boşküme*** denir. Boşkümenin bitanecik bile elemanı yoktur. Boşküme $\emptyset$ simgesiyle gösterilir. Demek ki, x ne olursa olsun, $x \notin \emptyset$.

Boşküme var mıdır ya da olmalı mıdır? Elbette olmalıdır! Örneğin her şeyi bilen insanlar kümesi boşkümedir, 2012 yılına kadar Türkiye'nin ya da ABD'nin cumhurbaşkanı olmuş kadınların kümesi boşkümedir. Boşkümeden bol ne var!

Sadece bir tane boşküme vardır! Bunu hemen kanıtlayabiliriz. Diyelim iki tane boşküme var, yani hiç elemanı olmayan iki tane küme var. Hiç elemanı olmayan bu iki kümeye x ve y diyelim. $x = y$ eşitliğini kanıtlayacağız. Kanıtlayalım. Diyelim, x ve y kümeleri birbirine eşit değil. O zaman ikisinden birinde diğerinde olmayan bir eleman olmalı, çünkü her ikisinin de aynı elemanları olsaydı, küme eşitliği aksiyomundan dolayı (sayfa 11), x ve y kümeleri birbirine eşit olurdu. Ama bu kümelerin hiç elemanı yok ki ikisinden birinde diğerinde olmayan bir eleman olsun!.. Demek ki bu iki küme birbirine eşitmiş...

Boşkümeden sadece bir tane olduğundan ona boşküme adını verme ve onu $\emptyset$ simgesiyle gösterme hakkını kendimizde buluyoruz. İki tane olsaydı örneğin, birini $\emptyset_1$, diğerini $\emptyset_2$ olarak göstermek zorunda kalırdık.

Şimdi birçok kişiye tuhaf gelebilecek bir teorem kanıtlayalım: Boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Kanıtın püf noktası boşkümenin hiç eleman içermemesidir. Tanımı gereği hiç eleman içermeyen boşkümenin her elemanı 1'e eşittir! Bunu kanıtlayalım. Diyelim ki savımız yanlış, yani boşkümenin her elemanı 1'e eşit değil... O zaman boşkümede 1'e eşit olmayan bir eleman vardır. Ama hani boşkümede hiç eleman yoktu? Hiç elemanı olmayan boşkümede 1'e eşit olmayan bir eleman olabilir mi? Elbette olamaz. Demek ki boşkümenin her elemanı 1'e eşittir!

Bu kanıtın bir benzeri, boşkümenin her elemanının 2'ye eşit olduğunu da kanıtlar. Yani boşkümenin her elemanı hem 1'e hem de 2'ye eşittir, hatta hatta π'ye ve $\sqrt{2}$'ye de eşittir... Neyse ki boşkümenin hiç elemanı yok... Olsaydı, $1 = 2$ gibi saçmasapan bir eşitlik kanıtlamış olacaktık!

Boşkümenin her elemanı istediğimiz tüm özellikleri sağlar. Boşkümenin her elemanı sarıdır, yeşildir, uzundur, aynı zamanda kısadır da. Hiç elemanı olmayan boşkümenin tüm elemanları tüm özellikleri ve eşitlikleri sağlarlar. Bunu boşkümenin hiç elemanı olmamasına borçluyuz.

Boşkümeyi boşlamayalım! En önemli bir iki kümeden biridir boşküme. Bir elemanlı çok küme vardır, ama sıfır elemanlı tek bir küme vardır: boşküme. Sadece bu özellik bile boşkümenin diğer kümelerden ayrılmasına, onun ayrıcalıklı kılınmasına yeter.

Henüz Doğmamış Eşekler Kümesi

Henüz doğmamış eşekler kümesi nasıl bir kümedir? Henüz doğmamış eşekler olduğundan, henüz doğmamış eşekler kümesi boş küme olamaz. Ama henüz doğmamış eşekler kümesinin bir tek elemanını gösteremezsiniz. Bundan da şu anlaşılıyor: Bir kümenin var olması için illa o kümenin bütün elemanlarını bilmemiz gerekmiyor. Bu, şuna benzer: İkinci Dünya Savaşı'nda ölen Fransa vatandaşlarının sayısı belli bir doğal sayıdır. Bu sayıyı tam olarak bilmememiz böyle bir sayının olmadığı anlamına gelmez.

Daha matematiksel bir örnek alalım. Dünyada hiçkimsenin yanıtını bilmediği evet/hayır yanıtlı bir soru olsun. Şimdi A kümesini, eğer yanıt evet'se $\{1\}$ kümesi olarak, yanıt hayır'sa $\{0\}$ kümesi olarak tanımlayalım. A kümesinde bir eleman (ya 0 elemanı ya da 1 elemanı) olduğunu biliyoruz ama hangi eleman olduğunu (henüz!) bilmiyoruz.

2.2 Altküme

Eğer x kümesinin tüm elemanları aynı zamanda y kümesinin elemanlarıysa, o zaman, tanım gereği, x kümesi y kümesinin bir ***altkümesidir***. Bunu $x \subseteq y$ olarak gösteririz. Dilersek y'ye x'in ***üstkümesi*** adını verebiliriz ama bu terim matematikte pek az kullanılır.

Örneğin $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Yani her doğal sayı bir tamsayı, her tamsayı bir kesirli sayı, her kesirli sayı bir gerçel sayıdır.

Başka örnekler verelim:

Çift doğal sayılar kümesi $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ doğal sayılar kümesinin bir altkümesidir.

$\{0, 2\}$ kümesi $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin bir altkümesidir.

$\{0, 2, 3\}$ kümesi de $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin bir altkümesidir.

x hangi küme olursa olsun, x, x'in bir altkümesidir, yani

$$x \subseteq x$$

ilişkisi her x kümesi için geçerlidir, çünkü x'in her elemanı x'in bir elemanıdır!

Eğer $x \subseteq y$ ise ve $x \neq y$ ise, x'e y'nin ***özaltkümesi*** denir ve bu $x \subset y$ olarak gösterilir. Örneğin, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$x \subset y$ ve $y \subset x$ önermelerinin her ikisi birden doğru olamaz. Nitekim, diyelim her ikisi birden doğru. O zaman y'de olan ama x'te olmayan bir z elemanı vardır. Öte yandan $y \subset x$ olduğundan y'nin bu z elemanı x'tedir de. Saçma!

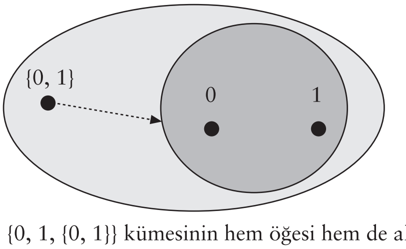
Eğer $x \subseteq y$ içindeliği doğru değilse, yani eğer x, y'nin bir altkümesi değilse, bu $x \nsubseteq y$ olarak yazılır. Okurun anlamını tahmin edeceğini umduğumuz $\not\subset$, $\supseteq$, $\supset$, $\not\supset$ gibi standart simgeler de kullanılır.

İki kümenin birbirine eşit olduğunu kanıtlamak için her birinin diğerinin altkümesi olduğunu kanıtlamak yeterlidir ve hatta gereklidir: x kümesinin y kümesine eşit olması için

$$(x \subseteq y) \text{ ve } (y \subseteq x)$$

ilişkileri yeter ve gerek koşullardır. Yani x'in y'ye eşit olduğunu kanıtlamak için, x'in y'nin bir altkümesi olduğunu ve y'nin x'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamak gerekir. Bu yüzden iki kümenin eşit olduklarının kanıtı genellikle iki ayrı paragrafta yapılır.

Bir kümenin altkümeleriyle o kümenin elemanlarını birbirine karıştırmamak gerekir. Örneğin (daha anlaşılır olmak için matematiksel olmayan bir örnek veriyoruz!) sesli harfle başlayan şehirlerimizden oluşan küme, Türkiye'nin şehirleri kümesinin bir altkümesidir ama bir elemanı değildir, çünkü sesli harfle başlayan şehirler kümesi bir şehir değildir. Bir sınıfın kız öğrencilerinden oluşan küme, bir sınıfın öğrencilerinden oluşan kümenin altkümesidir ama kesinlikle elemanı değildir, sınıfta bir tek kız olsa bile...



{0, 1} kümesi, {0, 1, {0, 1}} kümesinin hem öğesi hem de altkümesidir.

Ancak kimileyin, bir küme, bir başka kümenin hem elemanı hem de altkümesi olabilir. Örneğin, yukarıdaki resimde de gösterildiği üzere, $\{0, 1\}$ kümesi,

$$\{0, 1, \{0, 1\}\}$$

kümesinin hem bir elemanı hem de bir altkümesidir.

Boşküme her kümenin altkümesidir. Örneğin biraz önce boşkümenin her elemanının 1'e eşit olduğunu kanıtlayarak, aslında $\emptyset \subseteq \{1\}$ önermesini kanıtlamıştık. Aynı şekilde $\emptyset \subseteq \{2, \pi\}$ olur.

Boşkümenin her kümenin altkümesi olduğunu kanıtlayalım. x herhangi bir küme olsun. Boşkümenin x'in bir altkümesi olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Yani boşkümenin her elemanının x'in bir elemanı olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Diyelim ki bu doğru değil, yani diyelim ki boşkümede x'te olmayan bir eleman var. Ama hani boşkümede hiç eleman yoktu! Hiç elemanı olmayan boşkümede x'te olmayan bir eleman olabilir mi? Olamaz elbet. Demek ki boşkümenin her elemanı x'in bir elemanıymış, yani boşküme x'in bir altkümesiymiş... Kanıtımız bitmiştir!

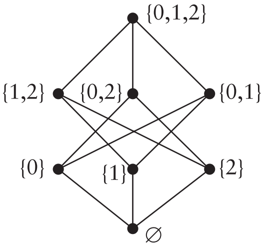
Boşküme, her kümenin altkümesi olan yegâne kümedir. Bu da boşkümeyi ayrıcalıklı kılan bir başka özelliktir.

Ama tabii ki her kümenin bir altkümesi olan boşküme her kümenin bir elemanı değildir. Örneğin boşküme boşkümenin bir elemanı değildir (ama bir altkümesidir).

$\{0, 1, 2\}$ kümesinin altkümelerini teker teker yazalım, tam sekiz tane var:

- 0 elemanı olanlar 1 tane: $\emptyset$.
- 1 elemanı olanlar 3 tane: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$.
- 2 elemanı olanlar 3 tane: $\{0,\ 1\}, \{0,\ 2\}, \{1,\ 2\}$.
- 3 elemanı olanlar 1 tane: $\{0,\ 1,\ 2\}$.

$\{0,\ 1,\ 2\}$ kümesinin altkümelerini aşağıdaki şekilde çizdik. Altkümeleri aşağıya, üstkümeleri yukarıya yazdık ve altküme ilişkisini bir çizgiyle belirttik. Ortaya hoş bir şekil (bir çizge) çıktı:



{0, 1, 2} kümesinin altkümeleri; küçükten büyüğe doğru...
Not: {0, 1} ile {1, 2}'nin yerini değiştirirseniz küpe benzeyen bir şekil ortaya çıkar.

Benzer şeyi dört elemanlı bir küme için yapabilirsiniz ama şekil biraz daha karmaşık olur elbette.

Sadece $\{0,\ 1,\ 2\}$ kümesinin değil, 3 elemanı olan her kümenin 8 tane altkümesi vardır.

Genel olarak, n elemanı olan bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. (Ama Altbölüm 2.6'da kanıtı verilecek.)

Örneğin 0 tane elemanı olan boşkümenin 2^0 tane, yani 1 tane altkümesi vardır, o altküme de boşkümedir. Tek elemanlı $\{\emptyset\}$ kümesinin 2 altkümesi vardır, $\emptyset$ ve $\{\emptyset\}$. İki elemanlı

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

kümesinin 4 altkümesi vardır: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ ve $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Alıştırmalar

2.1. $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin tüm altkümelerini (hiçbirini unutmadan, bulacağınız belli bir kurala uyarak) yazın.

2.2. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 3 elemanlı tüm altkümelerini (hiçbirini unutmadan, belli bir sırada) yazın.

2.3. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 3'ü içeren tüm altkümelerini (hiçbirini unutmadan, belli bir sırada) yazın.

2.4. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin kaç altkümesi vardır?

2.5. Sadece 5 tane altkümesi olan bir küme var mıdır?

2.6. n tane elemanı olan bir kümenin tam n tane $n-1$ elemanlı altkümesi olduğunu kanıtlayın.

2.7. n tane elemanı olan bir kümenin kaç tane $n-2$ elemanlı altkümesi vardır?

2.8. n tane elemanı olan bir kümenin k elemanlı altküme sayısıyla $n-k$ elemanlı altkümesi sayısının aynı olduğunu kanıtlayın.

2.3 Altkümeliğin Basit Özellikleri

Aşağıdaki özellikler "altküme olma" ilişkisinin sağladığı en temel özelliklerdir ve her birinin kanıtı çok kolaydır:

Yansıma : $x \subseteq x$.
Simetri : $x \subseteq y$ ve $y \subseteq x$ ise $x = y$.
Geçişlik : $x \subseteq y$ ve $y \subseteq z$ ise $x \subseteq z$.

$\subset$ ilişkisi için ise şu özellikler geçerlidir:
Yansımasızlık : $x \not\subset x$.
Geçişlik: $x \subset y$ ve $y \subset z$ ise $x \subset z$.

Not: Aslında simetri özelliği de $\subset$ ilişkisi için geçerlidir, yani $x \subset y$ ve $y \subset x$ ise $x = y$ olur. Nitekim

$$x \subset y \text{ ve } y \subset x$$

önermesi yanlış olduğundan

$$(x \subset y \text{ ve } y \subset x) \to x = y$$

önermesi doğrudur. (Mantıkta, eğer p önermesi yanlışsa, q önermesi doğru da yanlış da olsa, $p \to q$ önermesi doğrudur. Bkz. Önermeler Mantığı [N1].)

Elbette

$$x \in y \text{ ve } y \subseteq z \text{ ise } x \in z$$

olur. Son olarak, daha önce kanıtladığımız, her x kümesi için,

$$\emptyset \subseteq x$$

özelliğini anımsatalım.

2.4 Sayı Kümeleriyle Birkaç İşlem

Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ve r, $s \in \mathbb{R}$ ise, $X+r$, $X-r$ ve rX kümeleri şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} X + r &= \{x + r : x \in X\}, \\ X - r &= \{x - r : x \in X\}, \\ rX &= \{rx : x \in X\}. \end{aligned}$$

(Dikkat: Burada, örneğin birinci tanımda, bir kümeyle bir sayı toplanıyor.) Bu tanımlardan,

$$sX + r = \{sx + r : x \in X\}$$

ve

$$X - r = X + (-r)$$

eşitlikleri çıkar elbet.

Örneğin $2\mathbb{N}$, çift doğal sayılar kümesidir. $2\mathbb{N}+1$ de tek doğal sayılar kümesidir. $5\mathbb{N}$, 5'e bölünen doğal sayılar kümesidir. $5\mathbb{N}+3$, 5'e bölündüğünde kalanın 3 olduğu doğal sayılar kümesidir:

$$5\mathbb{N} + 3 = \{3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}.$$

Bunun gibi, $(1/2)\mathbb{Z}$ kümesi, $6/2$, $-7/2$ gibi paydasında 2 olan bir kesirli sayı olarak yazılan sayılar kümesidir.

$r+X$ ve Xs kümelerini benzer şekilde tanımlayıp, kolayca,

$$X + r = r + X \text{ ve } sX = Xs$$

eşitliklerine varabiliriz. Ayrıca $-X$ kümesi $(-1)X$ olarak tanımlanır. Kolaylıkla,

$$-X = \{-x : x \in X\} \text{ ve } -(-X) = X$$

eşitliklerinin geçerli olduğu görülür.

Eğer X, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ise,

$$\begin{aligned} X - Y &= \{x - y : x \in X \text{ ve } y \in Y\}, \\ X + Y &= \{x + y : x \in X \text{ ve } y \in Y\}, \\ XY &= \{xy : x \in X \text{ ve } y \in Y\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Ama dikkat $X + X$ ile $2X$ kümeleri genellikle eşit değillerdir. Örneğin $X = \{1, 2\}$ ise

$$X + X = \{2, 3, 4\}$$

olur ama

$$2X = \{2, 4\}$$

olur. Öte yandan $X = \{0\}$ ise $X + X = 2X$ olur. Eğer $X = \emptyset$ ise de $X + X = 2X = X$ olur! Hatta her Y sayı kümesi için

$$\emptyset + Y = \emptyset Y = \emptyset$$

eşitlikleri geçerlidir.

Örneğin eğer P asallardan oluşan kümeyse, $P+P$ kümesi, iki asalın toplamı olarak yazılabilen doğal sayılar kümesidir. İşte bu kümenin ilk birkaç elemanı: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28. Yeri gelmişken, 2'den büyük her çift doğal sayının iki asalın toplamı olarak yazılıp yazılmadığı sorusunun matematiğin yanıtlanamamış ünlü sorularından biri olduğunu söyleyelim. Her çift sayının iki asalın toplamı olarak yazılabildiği sanılır, ancak bugüne kadar kanıtlanmamıştır. Bu sanıya ***Goldbach Sanısı*** adı verilir.

Dikkat: XX kümesi

$$\{xy : x \in X \text{ ve } y \in X\}$$

kümesine eşittir,

$$\{x^2 : x \in X\}$$

kümesine eşit değildir.

$X - X$ kümesinin ancak X boşkümeyse boşküme olabileceğini dikkatinize sunarız, eğer X boşküme değilse, $X - X$ kümesi en azından 0 elemanını içerir; genel olarak, eğer X kümesi sonluysa $X - X$ kümesinin eleman sayısı X kümesinin eleman sayısından daha az olamaz.

Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi $X - X \subseteq X$ içindeliğini sağlıyorsa X'in ***çıkarma altında kapalı*** olduğu söylenir. $X + X \subseteq X$ ya da $XX \subseteq X$ oluyorsa X'in sırasıyla toplama ve çarpma altında kapalı olduğu söylenir. Örneğin $\mathbb{N}$, toplama ve çarpma altında kapalıdır ama çıkarma altında kapalı değildir. Tek tamsayılar kümesi çarpma altında kapalıdır ama toplama ve çıkarma altında kapalı değildir. Okur alıştırma olarak çıkarma altında kapalı olan kümelerin toplama altında da kapalı olduğunu kanıtlayabilir.

Alıştırmalar

2.9. $X = \emptyset$ ve $r \in \mathbb{R}$ ise $r\emptyset = \emptyset + r = \emptyset$ eşitliklerini kanıtlayın. $\emptyset + \emptyset = \emptyset$ ve $\emptyset\emptyset = \emptyset$ eşitliklerini kanıtlayın.

2.10. Hangi $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümeleri için $X + X = 2X$ olur? Her X sayı kümesi için $\emptyset + X = \emptyset X = \emptyset$ eşitliklerini kanıtlayın.

2.11. $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $Y = (1/2)(X + X)$ olsun. X'in Y'nin bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.

2.12. $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ilişkilerini kanıtlayın.

2.13. $5\mathbb{Z} + 8 = 5\mathbb{Z} + 3 = 5\mathbb{Z} + (-2)$ eşitliklerini kanıtlayın.

2.14. Şu eşitlikleri kanıtlayın: $5\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z} - 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$ ve $12\mathbb{Z} + 28\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$.

2.15. $5\mathbb{N} + 3\mathbb{N} = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$ eşitliğini kanıtlayın.

2.16. $5\mathbb{N} + 4\mathbb{N}$, $7\mathbb{N} + 5\mathbb{N}$, $19\mathbb{N} + 16\mathbb{N}$ kümelerinin belli bir sayıdan büyük tüm doğal sayıları içerdiğini gösterin.

2.17. Eğer $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ ise $\mathbb{Z} \subseteq (1/n)\mathbb{Z}$ ilişkisini kanıtlayın.

2.18. m ve n tamsayıları için, $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$ ilişkisinin geçerli olması için n'nin m'yi tam bölmesi gerektiğini kanıtlayın. Ne zaman $m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ eşitliği geçerlidir?

2.19. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ eşitliğini kanıtlayın. (Aralıklardan söz ediyoruz.)

2.20. $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gösterin. Bu eşitliğin doğru olması için a, b, c ve d sayılarının sağlaması gereken gerek ve yeter koşulları bulun.

2.21. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ise $t(rX + s) = trX + ts$ eşitliğini kanıtlayın.

2.22. $X \subseteq \mathbb{R}$ ise $2X \subseteq X + X$ ilişkisini kanıtlayın. $2X \subset X + X$ ilişkisini sağlayan bir $X \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi bulun.

2.23. X, $\mathbb{R}$'nin $X - X \subseteq X$ ilişkisini sağlayan bir altkümesi olsun.

2.24. $X + X \subseteq X$ ilişkisini kanıtlayın. İpucu:

$$x + y = x - ((x - x) - y).$$

2.25. $X = X - X = X + X$ eşitliklerini kanıtlayın. (İpucu: Eğer $X \neq \emptyset$ ise $0 \in X$ olur.)

2.26. $\mathbb{R}$'nin çıkarma altında kapalı olan ve 0'ı içeren altkümelerine ***toplamsal grup*** denir. Biz kısaca ***grup*** diyeceğiz. Örneğin her $r \in \mathbb{R}$ için, $r\mathbb{Z}$ve $r\mathbb{Q}$ grupturlar.
$X \subseteq \mathbb{Z}$ bir grup olsun. Bir ve sadece bir tek $n \in \mathbb{N}$ için $X = n\mathbb{Z}$ eşitliğini kanıtlayın.

2.27. Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın.

$$\frac{3}{5}\mathbb{Z} + \frac{7}{4}\mathbb{Z} + \frac{1}{20}\mathbb{Z}$$

Genel olarak, a, $b \in \mathbb{Q}$ için, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$ eşitliğinin bir $c \in \mathbb{Q}$ kesirli sayısı için sağlanacağını gösterin.

2.28. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin n elemanı varsa, $X - X$ kümesinin en az kaç elemanı olmalıdır, en fazla kaç elemanı olabilir? Her iki durum için örnek verin.

2.5 Altkümeler Kümesi

Herhangi bir x kümesinin tüm altkümelerini eleman olarak içeren ve x'in altkümelerinden başka hiçbir eleman içermeyen bir küme vardır. Bu kümeye x'in ***altkümeleri kümesi*** ya da x'in ***kuvvet kümesi*** adı verilir.

Notlar ve Örnekler

2.29. Eğer $x = \{0\}$ ise, x'in altkümelerinden oluşan küme, $\{\emptyset, \{0\}\}$ kümesidir.

2.30. Eğer $x = \{0, 1\}$ ise, x'in altkümelerinden oluşan küme, $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ kümesidir.

2.31. Eğer $x = \{0, 1, 2\}$ ise, x'in altkümelerinden oluşan küme,

$$\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, x\}$$

kümesidir.

Eğer x bir kümeyse, x'in altkümelerinden oluşan küme $\wp(x)$ olarak yazılır. İşte birkaç örnek:

$\wp(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
$\wp(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$
$\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\wp(\wp(\emptyset)) = \wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\wp(\wp(\wp(\emptyset))) = \wp(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Elbette, eğer x bir kümeyse, $\emptyset \in \wp(x)$ ve $x \in \wp(x)$ olur çünkü hem $\emptyset$ hem de x, x'in altkümeleridir.

Ayrıca, eğer $x \subseteq y$ ise o zaman $\wp(x) \subseteq \wp(y)$ olur, yani bir anlamda, bir kümenin ne kadar fazla elemanı varsa o kadar fazla altkümesi vardır. Bunun ters istikametlisi de doğrudur: Eğer $\wp(x) \subseteq \wp(y)$ ise o zaman $x \subseteq y$ olur; nitekim $x \in \wp(x) \subseteq \wp(y)$ olduğundan $x \in \wp(y)$ olur, yani x, y'nin bir altkümesidir.

2.6 Altkümeleri Sıralamak

Sonlu bir kümenin tüm altkümelerini sistematik bir biçimde, hiçbirini unutmadan ve hiçbirini iki kez yazmadan otomatik olarak sıralayabilmek önemlidir. Bunu yapmanın çeşitli yolları vardır. En kullanışlılarından birini gösterelim.

Sadece 0 ve 1'lerden oluşan sonlu ya da sonsuz dizilere 01-***dizisi*** diyeceğiz. Örneğin 011001 bir 01-dizisidir. Bir dizinin ***uzunluğu***, dizideki simge sayısıdır. Verdiğimiz örneğin uzunluğu 6'dır.

Diyelim bir x kümesinin 4 tane elemanı var. Bu elemanlara 0, 1, 2, 3 diyelim: $x = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Bu kümenin her altkümesini 4 uzunluğunda bir 01-dizisi olarak göstereceğiz. Örneğin 0101 dizisi x'in $\{0,\ 2\}$ altkümesini temsil edecek çünkü 0101 dizisinin -sağdan saymaya başlayarak- sadece 0'ıncı ve 2'nci terimleri 1'dir. Dizinin sağdan k'ıncı teriminin 1 ya da 0 olması, k sayısının altkümede olup olmadığını belirleyecek.

Bu yöntemle, $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ kümesinin altkümelerini "alfabetik" olarak "küçükten büyüğe doğru" sıralayabiliriz:

$$\begin{array}{lcl}
0000 & \leftrightarrow & \emptyset \\
0001 & \leftrightarrow & \{0\} \\
0010 & \leftrightarrow & \{1\} \\
0011 & \leftrightarrow & \{0,\ 1\} \\
0100 & \leftrightarrow & \{2\} \\
0101 & \leftrightarrow & \{0,\ 2\} \\
0110 & \leftrightarrow & \{1,\ 2\} \\
0111 & \leftrightarrow & \{0,\ 1,\ 2\} \\
1000 & \leftrightarrow & \{3\} \\
1001 & \leftrightarrow & \{0,\ 3\} \\
1010 & \leftrightarrow & \{1,\ 3\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 1011 & \leftrightarrow & \{0, 1, 3\} \\ 1100 & \leftrightarrow & \{2, 3\} \\ 1101 & \leftrightarrow & \{0, 2, 3\} \\ 1110 & \leftrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ 1111 & \leftrightarrow & \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

Bu sıralama yönteminden de belli ki, n elemanlı bir kümenin her altkümesini, n uzunluğundaki bir ve bir tek 01-dizisiyle simgeleyebiliriz. Açıklanan bu simgeleme işlemini deşifre de edebiliriz, yani n uzunluğundaki herhangi bir 01-dizisinin simgelediği altkümeyi de kolaylıkla bulabiliriz.

Sonuç: n uzunluğundaki her 01-dizisi bu simgeleme yöntemiyle n elemanlı bir kümenin tek bir altkümesine tekabül eder. Dolayısıyla n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır.

Öte yandan, her sonlu 01-dizisi, bir doğal sayının 2'lik tabanında yazılımını simgeler. Örneğin, 001101101 dizisi,

$$0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

sayısının, yani

$$2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109$$

sayısının 2'lik tabanda yazılımını temsil eder. Bu yöntemle,

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

kümesinin altkümelerini 0'dan 15'e kadar olan doğal sayılarla temsil edebiliriz:

$$\begin{array}{lclcl} 0 & \leftrightarrow & 0000 & \leftrightarrow & \emptyset \\ 1 & \leftrightarrow & 0001 & \leftrightarrow & \{0\} \\ 2 & \leftrightarrow & 0010 & \leftrightarrow & \{1\} \\ 3 & \leftrightarrow & 0011 & \leftrightarrow & \{0, 1\} \\ 4 & \leftrightarrow & 0100 & \leftrightarrow & \{2\} \\ 5 & \leftrightarrow & 0101 & \leftrightarrow & \{0, 2\} \\ 6 & \leftrightarrow & 0110 & \leftrightarrow & \{1, 2\} \\ 7 & \leftrightarrow & 0111 & \leftrightarrow & \{0, 1, 2\} \\ 8 & \leftrightarrow & 1000 & \leftrightarrow & \{3\} \\ 9 & \leftrightarrow & 1001 & \leftrightarrow & \{0, 3\} \\ 10 & \leftrightarrow & 1010 & \leftrightarrow & \{1, 3\} \\ 11 & \leftrightarrow & 1011 & \leftrightarrow & \{0, 1, 3\} \\ 12 & \leftrightarrow & 1100 & \leftrightarrow & \{2, 3\} \\ 13 & \leftrightarrow & 1101 & \leftrightarrow & \{0, 2, 3\} \\ 14 & \leftrightarrow & 1110 & \leftrightarrow & \{1, 2, 3\} \\ 15 & \leftrightarrow & 1111 & \leftrightarrow & \{0, 1, 2, 3\} \end{array}$$

Bu numaralandırma yönteminin hoş bir tarafı var: Örneğin, $\{0, 2, 3\}$ kümesi,

$$\{0, 1, 2, 3\}$$

kümesinin de

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

kümesinin de altkümesi olarak görülse de, numarası değişmez.

Açıkladığımız bu yöntemle $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu altkümelerini bir doğal sayıyla ve tek bir doğal sayıyla numaralandırabiliriz ve her doğal sayı $\mathbb{N}$'nin tek bir sonlu altkümesinin numarasıdır. Örneğin 2^n biçiminde yazılan her doğal sayı $\{n\}$ kümesinin numarasıdır. Sözgelimi 175'in $\mathbb{N}$'nin hangi altkümesinin numarası olduğunu bulmak için, önce 175'i 2'lik tabanda yazmalıyız. 175'i 2'lik tabanda yazmak için küçük bir hesap yapalım:

$$\begin{aligned}
175 &\to 1 \text{ (175 tek olduğundan)}\\
87 &\to 1 \text{ (87 tek olduğundan)}\\
43 &\to 1 \text{ (43 tek olduğundan)}\\
21 &\to 1 \text{ (21 tek olduğundan)}\\
10 &\to 0 \text{ (10 çift olduğundan)}\\
5 &\to 1 \text{ (5 tek olduğundan)}\\
2 &\to 0 \text{ (2 çift olduğundan)}\\
1 &\to 1 \text{ (1 tek olduğundan)}
\end{aligned}$$

(Sol sütunda, her sayı, bir üstteki sayının neredeyse yarısı... Anlamışsınızdır... Üstteki sayıyı 2'ye bölüp çıkan sayının tam kısmını bir alt satıra yazıyoruz.) Şimdi sağ sütundaki 0 ve 1 listesine bakarak 175'i 2'lik tabanda yazabiliriz:

$$175 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

Böylece 175 sayısının 2'lik tabanda 10101111 olarak yazıldığı ve doğal sayıların $\{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ altkümesinin numarası olduğu anlaşılır. Bunu yapmanın bir başka temiz yolu da şöyledir:

$$\begin{array}{r|l}
175 & 1\\
87 & 1\\
43 & 1\\
21 & 1\\
10 & 0\\
5 & 1\\
2 & 0\\
1 & 1\\
0 &
\end{array}$$

Her seferinde soldaki sütundaki sayı 2'ye bölünüyor, sağ tarafına kalan, altına da sonuç yazılıyor. 0 bulunduğunda prosedür sonlanıyor.

Böylece $\mathbb{N}$'nin her sonlu altkümesini bir ve bir tek doğal sayıyla kodlamış olduk ve her doğal sayı $\mathbb{N}$'nin bir ve bir tek sonlu altkümesinin kodu oldu. Bundan "doğal sayıların sonlu altküme sayısı"nın "doğal sayı sayısı" kadar olduğu sonucuna varabiliriz. Kümeler kuramının bu daha derin ve daha heyecanlı konularından kitabın ikinci kısmında sözedeceğiz.

Alıştırma 2.32. Yukarıda açıklanan yöntemle, doğal sayılar kümesinin k sayısıyla numaralandırılan sonlu altkümesine A_k diyelim. Eğer $A_k \subseteq A_m$ ise $k \leq m$ eşitsizliğini kanıtlayın. Ters istikamet doğru mudur, yani $k \leq m$ ise $A_k \subseteq A_m$ olur mu?

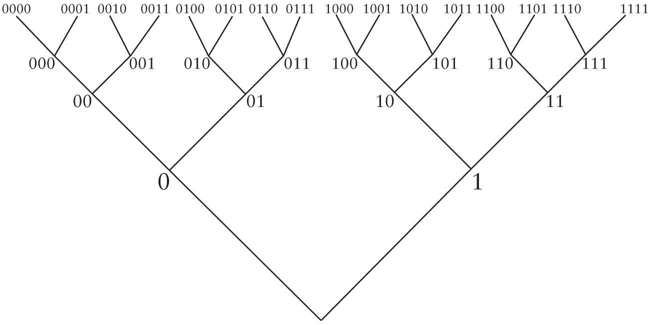
Yukarıda açıklanan yöntemle $\mathbb{N}$'nin sadece sonlu altkümelerini değil, tüm altkümelerini (bu sefer sonlu değil) sonsuz bir 01-dizisi olarak kodlayabiliriz. Örneğin, bu yöntemle, (en sağdan başlayıp sola doğru hiç durmaksızın giden)

$$\ldots 10101010101$$

dizisi çift sayılar kümesini simgeler. Asal sayılar kümesi,

$$\ldots 10001010001010001010l100$$

diye başlayan (ve sola doğru sonsuza kadar devam eden) diziyle simgelenir. Terimleri sadece 0 olan dizi boşkümeyi, terimleri sadece 1 olan dizi de $\mathbb{N}$'nin kendisini simgeler. Tek elemanlı kümeler, içinde sadece bir tane 1 olan 01-dizileriyle simgelenir. İçinde sonlu sayıda 1 olan 01-dizileri, yani belli bir terimden sonra hep 0 olan 01-dizileri sonlu altkümeleri simgelerler.



n uzunluğundaki her 01-dizisini de, yukarıdaki şekilde $n = 4$ için gösterildiği üzere, yüksekliği n olan "ikili bir ağacın" en üst noktalarıyla ya da -aynı şey- ağacın en dibinden en yüksek dalına giden bir yolla simgeleyebiliriz. Demek ki 4 elemanlı bir kümenin her altkümesini 4 yüksekliğindeki ikili bir ağacın dibinden başlayan ve tırmanabildiği kadar tırmanan bir yol olarak simgeleyebiliriz.

Doğal sayıların her altkümesini de sonsuz yükseklikteki ikili ağacın, en dibinden başlayan ve hiç durmadan tırmanan bir (ve tek bir) yolu olarak simgeleyebiliriz. Eğer k sayısı kümedeyse, k'inci kattan $(k+1)$'inci kata sağdan, k

sayısı kümede değilse soldan çıkarız. Örneğin bir sağ bir sol yapan sonsuz yol çift sayılar kümesini, bir sol bir sağ yapan yol tek sayılar kümesini, sürekli sola giden yol boşkümeyi, sürekli sağa giden yol doğal sayılar kümesinin kendisini simgeler.

Yapılanlar, "n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır" önermesinin bir nevi kanıtıdır, çünkü ne de olsa n katlı bir ikili ağaçta tam 2^n tane en aşağıdaki noktadan en tepeye çıkan yol vardır.

2.7 Kümenin Eleman Sayısı

Önce biraz sohbet: Aksiyomatik kümeler kuramında "sonlu küme" kavramının biçimsel bir tanımı vardır. Ama sezgisel kümeler kuramında böyle bir tanıma yer verilmez, ne de olsa bir kümenin sonlu olup olmadığının ne demek olduğu herkes tarafından sezgisel olarak bilinir! (Kitabın 17.7'nci altbölümünde sonlu kümenin biçimsel tanımını vereceğiz.) Hatta daha ileri seviyede kümeler kuramında sonsuz bir kümenin eleman sayısı da tanımlanabilir; ve iki sonsuz kümenin eleman sayısı birbirinden farklı olabilir. Bütün bunlardan Aksiyomatik Kümeler Kuramı II: Ordinaller ve Kardinaller adlı kitabımızda [N3] sözedeceğiz.

Sonlu bir A kümesinin eleman sayısı $|A|$ olarak gösterilir. Türkiye'de, $|A|$ yerine, başka bir ülkede görmediğim ve nereden geldiğini bilmediğim ve son derece pratik bulduğum $s(A)$ yazılımı yaygın biçimde kullanılıyor. Eğer A sonsuz bir kümeyse $|A| = \infty$ yazılabilir.

Eğer A ve B kümeleri sonluysa,

$$A \subseteq B \text{ ise } |A| \leq |B|$$

ve

$$A \subseteq B \text{ ve } |A| = |B| \text{ ise } A = B$$

önermeleri barizdir; birkaç sayfa önce de

$$|\wp(A)| = 2^{|A|}$$

eşitliğini kanıtlamıştık.

Alıştırmalar

2.33. $x \subseteq y \Leftrightarrow \wp(x) \subseteq \wp(y)$ ilişkisini kanıtlayın.

2.34. Beş elemanlı bir kümenin tüm altkümelerini (hiçbirini unutmadan ve her birini tek bir defa yazarak ve belli bir yöntem izleyerek) listeleyin.

2.35. $\wp(\{2, 8\})$ kümesinin elemanlarını bulun. A, $\{2, 8\}$ kümesinin altkümelerinin sayfa 29-32'de açıklanan biçimde bulunan numaraları olsun. $\wp(A)$ kümesinin elemanlarını bulun.

2.36. Metinde açıklanan yöntemle en dipten başlayarak sürekli iki sol bir sağ yapan sonsuz yol $\mathbb{N}$'nin hangi altkümesini temsil eder?

2.37. A bir küme olsun. Eğer a, $b \in A$ ise,

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\wp(A))$$

ilişkisini kanıtlayın.

2.38. Her x kümesi için, $\wp^0(x) = x$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\wp^{n+1}(x) = \wp(\wp^n(x))$$

olarak tanımlansın.

a. Her x kümesi için, $\{\{\emptyset, \{\{x\}\}\} \in \wp^n(x)$ ilişkisini sağlayan en küçük n'yi bulun.

b. Her x kümesi için, $\wp(x) \in \wp^n(x)$ ilişkisini sağlayan en küçük n'yi bulun.

c. m verilmiş bir doğal sayı olsun. Her x kümesi için, $\wp^m(x) \in \wp^n(x)$ ilişkisini sağlayan en küçük n'yi m cinsinden ve en büyük m'yi n cinsinden bulun.

d. m ve n verilmiş iki doğal sayı olsun. Eğer x, n elemanlı bir kümeyse, $\wp^m(x)$ kümesinin kaç elemanı vardır?

e. x bir küme ve n ve m birer doğal sayı olsun. Eğer

$$\wp^n(x) = \wp^m(x)$$

eşitliği doğruysa n ve m doğal sayısı hakkında ne söyleyebilirsiniz? Neden?

f. Her x kümesi ve her n doğal sayısı için,

$$\wp(\wp^n(x)) = \wp^n(\wp(x))$$

eşitliği doğru mudur? Ya $\wp^m(\wp^n(x)) = \wp^n(\wp^m(x))$ eşitliği her n ve m doğal sayısı için doğru mudur?

2.39. Sonsuz dizileri şu yöntemle küçükten büyüğe doğru sıralayalım: İki diziden hangisinin daha büyük olduğunu bulmak için, dizilerin ayrıştığı ilk terimler bulunur ve bu terimlerden hangisinin büyük olduğuna bakılır. Örneğin, bu sıralamaya göre,

$$x = \ldots 0100001001011101011000$$

diye başlayan dizi

$$y = \ldots 0100001001001111011000$$

diye başlayan diziden daha küçüktür. Bu durumda $x < y$ yazalım. En küçük dizi sabit 0 dizisi, en büyük dizi de sabit 1 dizisidir. Ayrıca, $\ldots 11111110$ dizisiyle $\ldots 0000001$ dizisi arasında başka dizi yoktur. $\ldots 11111110$ dizisi gibi kuyruğu sabit 1 dizisi olan dizilerin "hemen bir sonrası" olduğunu, ama diğer hiçbir dizinin "hemen bir sonrası" olmadığını kanıtlayın.

2.40. $\mathbb{Z}$'yi altküme olarak, $1/2$'yi eleman olarak içeren $\mathbb{R}$'nin çıkarma ve çarpma altında kapalı altkümelerinin en küçüğünü bulun.

2.41. Eğer a ya da c sayılarından en az biri 0 değilse,

$$(a\mathbb{Z} + b) \cap (c\mathbb{Z} + d)$$

kesişiminin boş olmaması için yeter ve gerek koşulun ebob(a, c) sayısının $d - b$ sayısını bölmesi olduğunu kanıtlayın. Eğer

$$v \in (a\mathbb{Z} + b) \cap (c\mathbb{Z} + d)$$

ve

$$u = \text{ekok}(a, c)$$

ise

$$(a\mathbb{Z} + b) \cap (c\mathbb{Z} + d) = u\mathbb{Z} + v$$

eşitliğini kanıtlayın.

3. Bileşim, Kesişim, Fark

Bu bölümde kümelerle yapılan üç önemli ve temel işlemden sözedeceğiz: bileşim, kesişim (arakesit) ve fark.

3.1 Bileşim

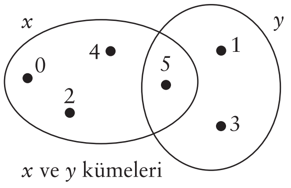
İki kümenin bileşimini almak çok kolaydır. Örneğin,

$$x = \{0, 2, 4, 5\} \text{ ve } y = \{1, 3, 5\}$$

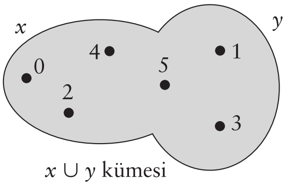
ise, bu iki kümenin bileşimi

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

kümesidir, yani iki kümenin en azından birinde olan elemanların kümesidir. x ve y kümelerinin bileşimi, en azından iki kümeden birinde olan elemanlardan oluşan kümedir ve bu küme $x \cup y$ olarak gösterilir. Bileşim kümesinde her iki kümede birden olan elemanlar da yer alır.



x ve y kümeleri



$x \cup y$ kümesi

İki kümenin bileşimini aşağıdaki gibi bir tabloda gösterebiliriz.

x	y	$x \cup y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Bu tabloyu açıklayalım. Rastgele bir eleman, x ve y kümelerine göre dört farklı yerde yer alabilir:

1. Bu eleman ne x'in ne de y'nin elemanı olabilir, ki o zaman $x \cup y$ kümesinde de olmaz. Bu durumu birinci satırda gösterdik. Eleman ne x ne y ne de $x \cup y$ kümesinde olduğu için o satıra üç tane 0 yazdık.

2. Eleman, x kümesinin elemanı değildir (0) ama y'nin elemanıdır (1), dolayısıyla $x \cup y$ kümesinin elemanıdır (1). Bu durum ikinci satırda 011 ile gösterilmiştir.

3. x'in bir elemanı değildir (0) ama y'nin bir elemanıdır (1), dolayısıyla $x \cup y$ bileşiminin de bir elemanıdır (1). Bu durum üçüncü satırda 011 ile gösterilmiştir.

4. Hem x'in hem de y'nin bir elemanıdır. Bu son durum da en son satırda 111 ile gösterilmiştir.

Son üç durumda eleman $x \cup y$ kümesinin bir elemanıdır ve bu yüzden o satırların $x \cup y$ sütununda 1 vardır, ama birinci durumda eleman $x \cup y$ kümesinin bir elemanı değildir ve bu yüzden $x \cup y$ sütununun birinci satırında 0 vardır.

Sonuç olarak, x ya da y sütunlarından en azından birinde 1 varsa, üçüncü sütunda 1 vardır, aksi halde 0 vardır.

Yukarıdaki gibi tablolar çok kullanışlıdır. Eğer eleman sütunun başında belirtilen kümedeyse hücreye 1 yazılır, aksi halde 0 yazılır. Yukarıdaki tablo bileşim işleminin tablosudur.

Okur, ilk alıştırma olarak, her $X,\ Y \subseteq \mathbb{R}$ altkümeleri için,

$$-(X \cup -X) = X \cup -X \text{ ve } -(X \cup Y) = -X \cup -Y$$

eşitliklerini kanıtlayabilir.

İleride sonsuz sayıda kümeyi de bileştireceğiz, ilk olarak sadece iki ya da sonlu sayıda kümenin bileşimiyle ilgilenelim.

Bileşimin aşağıdaki özelliklerini kanıtlamak kolaydır:

1. Değişme Özelliği : $x \cup y = y \cup x$.
2. Etkisiz Eleman : $x \cup \emptyset = x$.
3. Tekgüçlü İşlem : $x \cup x = x$.
4. Birleşme Özelliği : $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.
5. Yutulma : $x \subseteq x \cup y$.
6. Yutma : $x \subseteq y \Leftrightarrow x \cup y = y$.

İki yerine üç, hatta daha fazla kümenin bileşimini alabiliriz. Yukarıdaki dördüncü eşitlikte üç kümenin bileşimini aldık. x, y, z kümelerinin bileşimi (dördüncü özelliğe göre gereksiz olan parantezler atılarak), $x \cup y \cup z$ olarak yazılır.

Eğer x bir kümeyse, x kümesi $x \cup \{x\}$ kümesinin aynı zamanda hem bir elemanı hem de bir altkümesidir.

Sonsuz sayıda kümenin de bileşimi alınabilir. Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ için, $[0, n]$ kapalı aralıklarının bileşimini alabiliriz:

$$[0, 0] \cup [0, 1] \cup [0, 2] \cup [0, 3] \cup \ldots$$

Bu bileşim,

$$[0,0],\ [0,1],\ [0,2],\ [0,3], \ldots$$

aralıklarından birinde olan gerçel sayılardan, yani belli bir n doğal sayısı için, $[0,n]$ aralığının içine düşen gerçel sayılardan oluşur, bunlar da (Arşimet Özelliği'nden dolayı; bir sonraki sayfadaki gri kutucuğa bakınız) 0'dan büyükeşit gerçel sayılardır. 0'dan büyükeşit gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ olarak yazılır. Demek ki,

$$[0,0] \cup [0,1] \cup [0,2] \cup [0,3] \cup \ldots = \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

Yukarıdaki bileşimi daha kısa, daha anlaşılır ve daha fiyakalı bir biçimde,

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [0,n], \quad \bigcup_{n=0,1,2,\ldots} [0,n], \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n] \ \text{ ya da } \ \bigcup_{n} [0,n]$$

olarak gösterebiliriz. Burada bileşimi $n = 0$'dan başlattık; isteseydik bileşimi $n = 5$'ten de başlatabilirdik ve aynı kümeyi elde ederdik:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [0,n] = \bigcup_{n=5}^{\infty} [0,n].$$

(Neden?) Ama mesela

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [n,n^2] = \mathbb{R}$$

ama öte yandan

$$\bigcup_{n=5}^{\infty} [n,n^2] = [5,\ \infty)$$

olur.

Birazcık daha zor bir başka bileşim örneği verelim:

$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

Bu kümenin $[0,1)$ aralığına eşit olduğunu kanıtlayalım. Her $n = 1,2,3,4,\ldots$ pozitif doğal sayısı için, $0 \leq 1 - 1/n < 1$ olduğundan, $[0, 1-1/n] \subseteq [0,1)$ olur, demek ki $[0, 1-1/n]$ aralıklarının bileşimi de $[0,1)$ aralığının altkümesidir. Böylece

$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \subseteq [0,1)$$

içindeliğini kanıtlamış olduk. Şimdi,

$$[0,1) \subseteq \bigcup_{n=1,2,3,\ldots} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

içindeliğini kanıtlayalım. Sol taraftaki kümeden bir x sayısı alalım. Bu sayının sağ taraftaki kümede olduğunu göstereceğiz. Gösterelim: $x < 1$ olduğundan, $1 - x > 0$ olur. Madem ki $1 - x$ sayısı pozitif, Arşimet Özelliği'ne göre, bu sayıyı kendisiyle yeterince toplayarak her sayıyı, dolayısıyla 1'i de geçebiliriz. Demek ki

$$1 < n(1 - x)$$

eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır. Bundan da

$$0 \le x < 1 - \frac{1}{n},$$

yani

$$x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

çıkar. Sonuç: x sayısı eşitliğin sağ tarafındaki

$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

bileşimindedir. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Arşimet Özelliği

Arşimet Özelliği'ne göre, her pozitif gerçel sayıyı, bu sayı ne kadar küçük olursa olsun, kendisiyle yeterince defa toplayarak (yani o sayıyı yeterince büyük bir doğal sayıyla çarparak) verilmiş herhangi bir sayıyı geçebiliriz. Yani her $\epsilon > 0$ ve r gerçel sayısı için, $n\epsilon > r$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır. Örneğin, $\epsilon = 0{,}01$ ve $r = 200$ ise n'yi 20.000'den büyük herhangi bir sayı almak yeterli.

Arşimet Özelliği'nin bir sonucu: Her r gerçel sayısı için $n = n1 > r$ eşitsizliğini sağlayan bir n doğal sayısı vardır.

Bir başka sonuç: Her $\epsilon > 0$ gerçel sayısı için, öyle bir n doğal sayısı vardır ki $n\epsilon > 1$ olur.

Dolayısıyla eğer $x < 1$ ise $1 - x$ pozitif bir sayıdır ve belli bir n doğal sayısı için $1 < n(1 - x)$ eşitsizliği doğru olur.

[N2]'de kanıtlayacağımız Arşimet Özelliği'ne göre, verilmiş her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (0, n\epsilon) = \mathbb{R}^{>0}$$

olur.

Alıştırmalar

3.1. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}(-1+1/n, 0) = (-1,1)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.2. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}(-1+1/n, 1-1/n) = (-1,1)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.3. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}[-1+1/n, 1-1/n] = (-1,1)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.4. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}(-1+1/n, n) = (-1,\infty)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.5. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n^2) = \{0,\ 1\} \cup (2,\infty)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.6. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}[0, 1-1/n^2] = [0,1)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.7. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}[0, 1-1/n] = [0,1)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.8. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}[1/n, 1-1/n^2] = (0,1)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.9. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, n^2)$ bileşimini daha basit bir biçimde ifade edin.

3.10. $a_n = 1/2 + 1/2^2 + \cdots + 1/2^n$ olsun. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}(1/n, a_n)$ bileşimini bulun.

3.2 Göstergeçler ve Göstergeç Kümeleri

Bu altbölümdeki meramımızı bir örnekle anlatmaya çalışalım.

$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$$

yazılımında en altta bulunan $1, 2, 3, \ldots$ sayılarına ***indeks*** ya da ***göstergeç*** denir. Bu yazılım şu anlama gelmektedir:

$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}\left[0, 1-\frac{1}{n}\right] = \left[0, 1-\frac{1}{1}\right] \cup \left[0, 1-\frac{1}{2}\right] \cup \left[0, 1-\frac{1}{3}\right] \cup \ldots$$

Bu yazılımda ***göstergeç kümesi*** pozitif doğal sayılardır.

Bu sonsuz bileşim şöyle de yazılabilir:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0, 1-\frac{1}{n}\right].$$

Bu yazılımlarda açık açık söylenmese de, n göstergeçlerinin 1'den başlayarak tüm doğal sayıları dolaştığı ve pozitif bir n doğal sayısı için, $[0, 1-1/n]$ biçiminde yazılan tüm kapalı aralıkların bileşiminin alındığı varsayılır.

Herhangi bir küme göstergeç kümesi olabilir. Örneğin,

$$\bigcup_{r\in\mathbb{R}}[r, r^2]$$

bileşiminde göstergeç kümesi gerçel sayılar kümesidir, çünkü -tanım gereği- bu kümenin elemanları, bir r gerçel sayısı için $r \le x \le x^2$ eşitsizliklerini sağlayan x sayılarından oluşur. Öte yandan,

$$\bigcup_{r\in\mathbb{R}^{>0}}[r, r^2] = (0,\infty)$$

olur.

Göstergeç kümesi kavramına biraz daha eğileceğiz bu altbölümde. Biçimsel (yani matematiğin özüne dokunmayan) ama önemli bir konudur.

Genel olarak, eğer $(X_i)_{i\in I}$ bir "küme ailesi"yse (yani her $i \in I$ için X_i bir kümeyse ve elemanları sadece bu X_i'lerden oluşan bir küme varsa[1]),

$$\bigcup_{i\in I} X_i,$$

ya da daha sade olarak

$$\bigcup_i X_i$$

yazılımı, X_i kümelerinin bileşimini simgeler, yani X_i'lerin en az birinde olan elemanların kümesini simgeler:

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x : \text{ en az bir } i \in I \text{ için } x \in X_i\}$$

ya da

$$x \in \bigcup_{i\in I} X_i \Leftrightarrow \text{ en az bir } i \in I \text{ için } x \in X_i.$$

Bazen göstergeç kümesinde çift simge kullanılabilir. Örneğin,

$$\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} \left[\frac{n^2 - nm + m^2}{1+n^4}, \frac{n^2 + nm + m^2}{1+m^6}\right].$$

Biraz alıştırma yaparak yazılımla aşinalık sağlayalım.

Alıştırmalar

3.11. $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^{>0}} \left[r, r^2 - r\right] = [2, \infty)$ eşitliğini gösterin.

3.12. $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^{>0}} \left[r, 2r^2 - r\right]$ bileşimini daha basit bir biçimde ifade edin.

3.13. $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^{>0}} \left[3r, 2r^2 - 5r\right]$ bileşimini daha basit bir biçimde ifade edin.

3.14. $\bigcup_{r\in\mathbb{R}^{>0}} \left[r^2 - r, r^2\right]$ bileşimini daha basit bir biçimde ifade edin.

3.15. $\bigcup \emptyset = \emptyset$ eşitliğini biliyoruz. $\bigcup A = A$ eşitliğini sağlayan başka kümeler bulabilir misiniz? İpucu: Bu eşitliği sağlayan sonsuz tane sonlu küme vardır.

3.16. $\bigcup(A \cup B) = (\bigcup A) \cup (\bigcup B)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.17. Eğer $A \subseteq B$ ise $\bigcup A \subseteq \bigcup B$ içindeliğini kanıtlayın. $\bigcup A \subseteq \bigcup B$ ise $A \subseteq B$ olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

3.18. Bir B kümesinin çift sayıda elemanı olan altkümelerinin bileşimi neye eşittir?

3.19. $\wp(x) \cup \wp(y) \subseteq \wp(x \cup y)$ içindeliğini kanıtlayın. Eşitliğin sadece ve sadece $x \subseteq y$ ya da $y \subseteq x$ ise doğru olduğunu kanıtlayın.

3.20. $\bigcup_{B\subset A} B$ kümesinin eğer $|A| \neq 1$ ise A'ya, aksi halde boşkümeye eşit olduğunu kanıtlayın. ($|A| = 0$ durumu özel dikkat gerektirir.)

[1] Aslında küme ailesi kavramının tanımı tam olarak böyle değildir ama burada tanımı böyle almakta bir sakınca yok.

3.21. Aşağıdaki bileşimlerin neye eşit olduklarını bulun.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, n+1],\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n+1],\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n+1),\quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n-1, n+1],$$
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, n^2],\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n^2),\quad \bigcup_{r\in\mathbb{R}}(0, r),\quad \bigcup_{r\in\mathbb{R}}(0, r^2),$$
$$\bigcup_{r\in\mathbb{R}}(0, r],\quad \bigcup_{p>0, p \text{ asal}} p\,\mathbb{N},$$

3.22. Eğer X, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ise, şu eşitlikleri kanıtlayın:

$$X+Y = \bigcup_{y\in Y}(X+y) = \bigcup_{x\in X}(x+Y).$$

$$XY = \bigcup_{y\in Y} Xy = \bigcup_{x\in X} xY.$$

3.23. $\bigcup_{X\in\wp(A)} X = A$ eşitliğini kanıtlayın.

3.24. Aşağıdaki bileşimleri bulun:

$$\bigcup_{r\in[0,\infty)}\left[r, r^2\right),\quad \bigcup_{r\in(0,\infty)}(r, r^2),\quad \bigcup_{r\in(0,\infty)}[r, r^2],\quad \bigcup_{r\in\mathbb{R}}[r, r^2],$$
$$\bigcup_{r\in\mathbb{R}}[r^2, r^4],\quad \bigcup_{r\in\mathbb{R}}(r^2, r^4],\quad \bigcup_{r\in\mathbb{R}}[r^2, r^4),\quad \bigcup_{r\in\mathbb{R}}(r^2, r^4),$$
$$\bigcup_{r\in\mathbb{R}, r\neq 0}[r^2, r^4],\quad \bigcup_{r\in(1,\infty)}[r, r^2),\quad \bigcup_{r\in(1,\infty)}(1/r, r),\quad \bigcup_{r\in(0,\infty)}[1/r, r],$$
$$\bigcup_{r\in(0,\infty)}[r, 1/r)\,,\quad \bigcup_{r\in(0,1)}[1/r, r]\,,\quad \bigcup_{r\in(0,1)}[r^2, r],\quad \bigcup_{r\in(0,1)}[r, r^2),$$
$$\bigcup_{r\in(1,3)}[r, 2r),\quad \bigcup_{r\in(0,1/10)}\left[r^2, 1/r\right).$$

3.25. A ve B birer küme olsun. Eğer $a \in A$ ve $b \in B$ ise,

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\wp(A \cup B))$$

olduğunu kanıtlayın.

3.26. A ve B birer küme olsun.

$$\{\{\{a\},\ \{a,\ b\}\} : a \in A \text{ ve } b \in B\} \in \wp(\wp(\wp(A \cup B)))$$

içindeliğini kanıtlayın.

3.27. A ve B birer küme olsun. Ne zaman $\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$ olur?

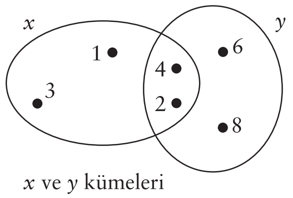
3.28. Arşimet Özelliği'ni kullanarak boş olmayan her aralıkta bir kesirli sayı olduğunu kanıtlayın. (Bir gerçel sayının 10 ya da başka bir tabanında açılımını da kullanabilirsiniz.)

3.3 Kesişim

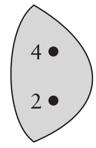
İki kümenin kesişimini (ya da arakesitini) almak iki kümenin bileşimini almak kadar kolaydır. Örneğin,

$$x = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \text{ ve } y = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

ise, bu iki kümenin kesişimi $\{2, 4\}$ kümesidir, yani iki kümenin ortak elemanlarından oluşan kümedir. Resmi aşağıda:



x ve y kümeleri



x ∩ y kümesi

İki kümenin kesişimi ya da arakesiti her iki kümede birden olan elemanların kümesidir. x ve y kümelerinin kesişimi

$$x \cap y$$

olarak yazılır.

Aynen bileşim gibi, kesişimi de bir tabloyla gösterebiliriz:

x	y	$x \cap y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Yukarıdaki tabloda dört satır var ve her satır bir elemanın x ve y kümesinde olup olmadığını gösteriyor, örneğin en son satırda, eleman x ve y kümelerindeyse (ilk iki 1 sayısı) o zaman eleman $x \cap y$ kümesindedir (üçüncü 1 sayısı) diyor. Üçüncü satır ise elemanın x'te ise (1) ise ama y'de değilse (0), o zaman eleman $x \cap y$'de değildir (en sondaki 0) diyor.

Pek sık kullanılan şu tanımları yapalım:

$$\mathbb{Q}^{\geq 0} = \mathbb{R}^{\geq 0} \cap \mathbb{Q},$$
$$\mathbb{Q}^{>0} = \mathbb{R}^{>0} \cap \mathbb{Q}.$$

Birincisi, 0'dan büyükeşit kesirli sayılar kümesidir. İkincisi de 0'dan büyük kesirli sayılar kümesi.

Kesişimin aşağıdaki özelliklerini kanıtlamak kolaydır:

1. **Değişme Özelliği :** $x \cap y = y \cap x$.
2. **Etkisiz Eleman :** $x \cap \emptyset = \emptyset$.
3. **Tekgüçlü İşlem :** $x \cap x = x$.
4. **Birleşme Özelliği :** $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.
5. **Yutulma :** $x \cap y \subseteq x$.
6. **Yutma :** $x \subseteq y \Leftrightarrow x \cap y = x$.

Aynen bileşimde olduğu gibi, ikiden fazla kümenin de kesişimi alınabilir. Hatta sonsuz sayıda kümenin de kesişimi alınabilir. Sonlu ya da sonsuz sayıda kümenin kesişimi, kesişimi alınan tüm kümelerin istisnasız hepsinin **ortak** elemanlarından oluşur. Örneğin, $[0,\infty)$, $[1,\infty)$, $[2,\infty)$, ... aralıklarının kesişimi alınabilir. Bu kesişim,

$$[0,\infty)\cap[1,\infty)\cap[2,\infty)\cap\ldots$$

olarak yazılabileceği gibi,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,\infty)$$

olarak da yazılabilir. Bu sonsuz kesişimin boşküme olduğu belli, çünkü bu kesişimde olacak bir gerçel sayı, her doğal sayıdan daha büyük olmak zorunda, ki böyle bir gerçel sayı yoktur.

Birkaç örnek daha verelim:

$$\bigcap_{r\in(1,\infty)}(1,r)=\emptyset,\quad \bigcap_{r\in(1,\infty)}[1,r)=\{1\},\quad \bigcap_{r\in(5,\infty)}(1,r)=(1,5],$$
$$\bigcap_{r\in(5,\infty)}[1,r)=[1,5],\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(n,\infty)=\emptyset,\quad \bigcap_{p\text{ asal}}p\mathbb{Z}=\{0\},$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}2^n\mathbb{Z}=\{0\},\quad \bigcap_{r>0}(-r,r)=\{0\},\quad \bigcap_{n=1,2,\ldots}(0,1/n)=\emptyset,$$
$$\bigcap_{n=1,2,\ldots}(-1/n,1/n)=\{0\},\quad \bigcap_{n=1,2,\ldots}(1-1/n,1+1/n)=\{1\},$$
$$\bigcap_{n=1,2,\ldots}(2-1/n,3+1/n)=[2,3].$$

Eğer A, her bir elemanı bir küme olan bir kümeyse,

$$\bigcap_{X\in A}X,$$

A'nın elemanlarının ortak elemanlarından oluşan kümeyi simgeler. Örneğin,

$$\bigcap_{x\in\{a\}}x=a,\quad \bigcap_{x\in\{a,b\}}x=a\cap b,\quad \bigcap_{x\in\{a,b,c\}}x=a\cap b\cap c,\quad \bigcap_{X\in\wp(A)}X=\emptyset.$$

Ama dikkat: $\bigcap_{X\in A}X$ kümesinden sözedebilmemiz için A'nın boşküme olmaması gerekir. A boşküme olduğunda, $\bigcap_{X\in A}X$ tanımı problematiktir ve bunun nedeni 16'ncı bölümde konu edilecektir (bkz. Alıştırma 16.3).

$\bigcap_{X\in A}X$ kümesi, aynen bileşimde olduğu gibi

$$\bigcap A$$

olarak da yazılabilir. $\bigcap A$, A'nın elemanlarının ortak (hepsinde birden olan) elemanlarının kümesidir. Örnek:

$$\bigcap\{A,B,C\}=A\cap B\cap C.$$

Eğer A ve B kümelerinin kesişimi boşkümeyse A ve B'nin ayrık kümeler oldukları söylenir. Bu durumda, kimileyin $A \cup B$ yerine

$$A \sqcup B$$

yazılır (ki A ve B'nin ayrık oldukları bir bakışta anlaşılsın). Örneğin çift tamsayılar kümesiyle tek tamsayılar kümesi ayrık kümelerdir:

$$\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \sqcup (2\mathbb{Z} + 1).$$

Eğer A, B ve C kümeleri sonluysa,

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$

ve

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

eşitliklerini kanıtlamak pek zor olmasa gerek. İleride Bölüm 9.2'de bu formülleri 2 ve 3 kümeden n kümeye genelleştireceğiz.

Alıştırmalar

3.29. İki aralığın kesişiminin yine bir aralık olduğunu gösterin. İki açık (kapalı) aralığın kesişiminin yine bir açık (kapalı) aralık olduğunu gösterin.

3.30. $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.31. Eğer $A \subseteq B$ ise $\bigcap B \subseteq \bigcap A$ içindeliğini kanıtlayın.

3.32. Her biri aralıkların bileşimi olan iki kümenin kesişiminin gene bir aralıklar bileşimi olduğunu gösterin.

3.33. Aşağıdaki kesişimleri bulun:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (n, n^2), \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-n, n), \qquad \bigcap_{n=1,2,3,\ldots} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\bigcap_{n=1,2,3,\ldots} \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \bigcap_{n=2,3,4\ldots} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \bigcap_{r\in\mathbb{R}} (0, r^2),$$

$$\bigcap_{0<r<1} (r, r^2), \qquad \bigcap_{0<r<1} \left(r, \frac{1}{r}\right), \qquad \bigcap_{0<r<1} \left(r, \frac{1}{r^2}\right),$$

$$\bigcap_{0<r<1} \left[r, \frac{1}{r}\right], \qquad \bigcap_{0<r<1} [r, 1 + r], \qquad \bigcap_{0\le r\le 1} [r, r^2].$$

3.34. Aşağıda tanımlanan A kümeleri için, $\bigcap A$ kümesini bulun.

$$A = \{x \in \wp(\mathbb{N}) : 1 \in x, 2 \notin x\}.$$
$$A = \{x \in \wp(\mathbb{N}) : \text{ öyle bir } n > 5 \text{ var ki, her } m > n \text{ için, } m \notin x\}.$$
$$A = \{x \in \wp(\mathbb{N}) : \text{ öyle bir } n > 5 \text{ var ki, her } m > n \text{ için, } m \in x\}.$$
$$A = \{x \in \wp(\wp(\mathbb{N})) : \text{ her } n \text{ için } n\mathbb{N} \in x\}.$$

3.35. Aşağıdaki kümelerin elemanlarını bulun:

a. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[n, n^2\right]$
b. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}\left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$
c. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$
d. $\bigcup_{n=1,2,3,\ldots}\left(n, n^2\right)$
e. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots}\left[0, \frac{1}{n}\right)$
f. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots}\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$
g. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots}\left[\frac{-1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$

3.36. $a_n = 1/2 + 1/2^2 + \cdots + 1/2^n$ olsun. $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots}[a_n, 1)$ ve $\bigcap_{n=1,2,3,\ldots}(a_n, 1]$ kesişimlerini bulun.

3.37. X bir küme olsun. A ve B, X'in iki altkümesi ise,

$$U(A, B) = \{Y \subseteq X : A \subseteq Y \text{ ve } B \cap Y = \emptyset\}$$

tanımını yapalım. X'in hangi A ve B altkümeleri için $U(A, B)$ boşküme olur? X'in hangi A ve B altkümeleri için $X \in U(A, B)$ olur? Eğer $Y \subseteq X$ ise, X'in hangi A ve B altkümeleri için $Y \in U(A, B)$ olur? X'in A, A_1, B, B_1 altkümeleri için,

$$U(A, B) \cap U(A_1, B_1) = U(A \cup A_1, B \cup B_1)$$

eşitliğini kanıtlayın.

3.4 Dağılma Özelliği

Kesişimle bileşim arasında, adına ***dağılma özelliği*** denen önemli ilişkiler vardır:

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) \text{ ve } x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z).$$

Yani bileşim kesişim üzerine ve kesişim de bileşim üzerine dağılır. İkincisini okura bırakıp birincisini kanıtlayalım: Eşitliğin sol tarafındaki $x\cup(y\cap z)$ kümesinin her elemanının eşitliğin sağ tarafındaki $(x\cup y)\cap(x\cup z)$ kümesinde, ve sağ taraftaki kümenin her elemanının sol taraftaki kümede olduğunu kanıtlamak gerekiyor.

($\subseteq$): Önce sol taraftaki $x \cup (y \cap z)$ kümesinden bir a elemanı alalım. Bu a elemanının sağ taraftaki kümede, yani hem $x \cup y$ hem de $x \cup z$ kümesinde olduğunu kanıtlamak istiyoruz. a elemanı $x \cup (y \cap z)$ kümesinde olduğuna göre ya x kümesindedir ya da $y \cap z$ kümesinde. Birinci şıkta, a elemanı hem $x \cup y$ hem de $x \cup z$ kümesinde olur ve kanıt tamamlanır. İkinci şıkta, a elemanı hem y hem de z kümesindedir, demek ki hem $x \cup y$ hem de $x \cup z$ kümesindedir.

($\supseteq$): Şimdi de sağ taraftaki $(x \cup y) \cap (x \cup z)$ kümesinden bir a elemanı alalım. Demek ki a, hem $x \cup y$ kümesinde hem de $x \cup z$ kümesinde. Eğer a, x'teyse, o zaman a elbette eşitliğin sağ tarafındaki $x \cup (y \cap z)$ kümesindedir. Eğer a, x'te değilse, o zaman a hem y hem de z kümesinde olmak zorundadır, demek ki a, $y \cap z$ kümesindedir, demek ki a, eşitliğin sol tarafındaki $x \cup (y \cap z)$ kümesindedir. $\square$

Aynı kanıtı $x \cup (y \cap z)$ ve $(x \cup y) \cap (x \cup z)$ kümelerinin tablosunu çıkararak da bulabiliriz. Rastgele bir eleman alırız. Bu eleman x, y ve z'nin elemanı olup olmamasına göre 8 farklı durum vardır; dolayısıyla 8 satırlık bir tablo çizmeliyiz. Eğer her iki kümenin de tabloları aynıysa, kümeler eşit demektir. Tabloları çizelim. Önce $x \cup (y \cap z)$ kümesinin tablosu:

x	y	z	$y \cap z$	$x \cup (y \cap z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Sonra $(x \cup y) \cap (x \cup z)$ kümesinin tablosu:

x	y	z	$x \cup y$	$x \cup z$	$(x \cup y) \cap (x \cup z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	10	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Son sütunlarda aynı değerleri gördüğümüzden, iki küme eşit demektir.

$x \cap y \cup z$ gibi bir yazılım anlamsızdır, çünkü iki farklı anlama gelebilir ve karışıklığa yol açabilir; parantezleri eksiktir.

$$x \cap (y \cup z) \text{ ve } (x \cap y) \cup z$$

yazılımları arasında elbette bir fark vardır ve parantezsiz yazılımla bu fark yok olur ve karışıklığa neden olur.

Dağılma özelliği daha fazla küme için de doğrudur. Mesela

$$x \cap \bigcup_{j \in J} y_j = \bigcup_{j \in J} (x \cap y_j)$$

olur. Bunun da kanıtı aynen yukarıdaki sözel kanıt gibidir. Aynı şekilde

$$x_1 \cap x_2 \cap \bigcup_{j \in J} y_j = \bigcup_{j \in J} (x_1 \cap x_2 \cap y_j)$$

olur. Sol taraftaki x'lerin sayısını istediğimiz kadar artırabiliriz, sonsuz bile yapabiliriz:

$$\left(\bigcup_{i\in I} x_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} y_j\right) = \bigcup_{i\in I,\, j\in J} (x_i \cap y_j).$$

Bu son eşitliği kanıtlayalım, pek bariz değil çünkü. Sol taraftaki kesişimden bir a elemanı alalım. Demek ki a, hem $\bigcup_{i\in I} x_i$ hem de $\bigcup_{j\in J} y_j$ kümesinde. Dolayısıyla $a \in x_i$ ve $a \in y_j$ içindeliklerini sağlayan $i \in I$ ve $j \in J$ göstergeçleri vardır. Demek ki $a \in x_i \cap x_j$ olur. Bundan da elemanın sağ taraftaki bileşimde olduğu anlaşılır. Şimdi sağ taraftaki bileşimden bir a elemanı alalım. Demek ki $a \in x_i \cap y_j$ içindeliğini sağlayan $i \in I$ ve $j \in J$ göstergeçleri vardır. Buradan, $a \in \bigcup_{i\in I} x_i$ ve $a \in \bigcup_{j\in J} y_j$ çıkar. Bu da a'nın eşitliğin sol tarafındaki kümede olduğunu gösterir.

Yukarıda kanıtladığımız ifadeyi şöyle de ifade edebiliriz: X ve Y, elemanları küme olan iki küme olsun.

$$Z = \{x \cap y : x \in X,\, y \in Y\}$$

tanımını yapalım. O zaman

$$\left(\bigcup X\right) \cap \left(\bigcup Y\right) = \bigcup Z$$

olur.

Tabii benzer eşitlikler kesişimle bileşim değiş tokuş edildiğinde de geçerlidir.

Alıştırmalar

3.38. Hangi koşulda $x \cap (y \cup z) \subseteq (x \cap y) \cup z$ olur?

3.39. Hangi koşulda $(x \cap y) \cup z \subseteq x \cap (y \cup z)$ olur?

3.40. Hangi koşulda $(x \cap y) \cup z = x \cap (y \cup z)$ olur?

3.41. Kanıtlayın: $x \cap y = \emptyset \Leftrightarrow \wp(x) \cap \wp(y) = \{\emptyset\}$.

3.42. $\wp(x) \cap \wp(y) = \wp(x \cap y)$ eşitliğini ve

$$\wp(x) \cup \wp(y) = \wp(z) \Leftrightarrow (x \subseteq y = z \text{ veya } y \subseteq x = z)$$

önermesini kanıtlayın.

3.43. Kanıtlayın: $\bigcap_{X\in\wp(A)} X = \emptyset$.

3.44. Eğer $A \neq \emptyset$ ise $\bigcap_{\emptyset\neq X\in\wp(A)} X$ kümesi neye eşittir?

3.45. Her i için $A_i \subseteq B_i$ ise, $\bigcap_i A_i \subseteq \bigcap_i B_i$ ve $\bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i B_i$ içindeliklerini kanıtlayın.

3.46. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın. (Kesişimlerde göstergeç kümeleri boşkümeden farklı olmalı.)

a. $x \cap \left(\bigcup_{i\in I} y_i\right) = \bigcup_{i\in I}(x \cap y_i)$.

b. $x \cup \left(\bigcap_{i\in I} y_i\right) = \bigcup_{i\in I}(x \cup y_i)$.

c. $x \cap \left(\bigcap_{i\in I} y_i\right) = \bigcap_{i\in I}(x \cap y_i)$.

d. $x \cup \left(\bigcup_{i\in I} y_i\right) = \bigcup_{i\in I}(x \cup y_i)$.

e. $\left(\bigcap_{i\in I} x_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} y_j\right) = \bigcap_{i\in I, j\in J}(x_i \cup y_j)$.

f. $\bigcup_{i\in I}\{i\} = I$.

3.5 Kümelerin Farkı

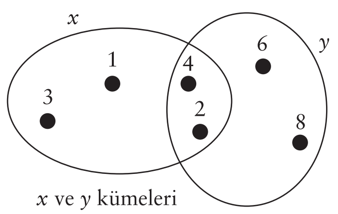
Eğer x ve y verilmiş iki kümeyse, x'te olup da y'de olmayan elemanlardan oluşan küme $x \setminus y$ olarak yazılır ve "x fark y" olarak okunur. Demek ki tanım gereği,

$$x \setminus y = \{z \in x : z \notin y\}$$

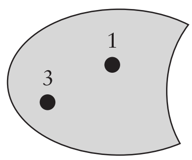
olur. Hemen bir örnek verelim:

$$x = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \text{ ve } y = \{2,\ 4,\ 6, 8\}$$

ise $x \setminus y = \{1, 3\}$ kümesidir. Bunun resmi aşağıda.



x ve y kümeleri



$x \setminus y$

Başka örnekler:

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, negatif tamsayılar kümesidir.

$\mathbb{N} \setminus \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$, tamkare olmayan doğal sayılar kümesidir.

$\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$, tek doğal sayılar kümesidir. Ama $\mathbb{Q} \setminus 2\mathbb{Q} = \emptyset$ ve $\mathbb{R} \setminus 2\mathbb{R} = \emptyset$ olur.

$\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$, 3'e tam bölünmeyen doğal sayılar kümesidir.

$\mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \setminus 14\mathbb{N})$ kümesi ya tek ya da 14'e tam bölünen doğal sayılardan oluşur, yani $(2\mathbb{N} + 1) \cup 14\mathbb{N}$ kümesidir.

$(\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}) \setminus (3\mathbb{N} + 2)$, 3'e bölündüğünde kalanın 1 olduğu doğal sayılar kümesidir, yani $3\mathbb{N} + 1$ kümesidir.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ***irrasyonel sayılar*** kümesidir.

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ olur.

Biraz daha düşündürücü üç örnek sunalım:

$$\mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N} \cup 5\mathbb{N} \cup 7\mathbb{N} \cup 11\mathbb{N} \cup 13\mathbb{N} \cup \ldots) = \{1\},$$
$$\bigcap_{p \text{ asal}} (\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}) = \{1, -1\},$$
$$\bigcup_{p \text{ asal}} p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}.$$

Küme çıkarmasının tablosu şöyle:

x	y	$x \setminus y$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Kanıtlaması kolay birkaç özellik: Her x, y ve z kümesi için

$$\begin{aligned}
&x \setminus \emptyset = x\\
&x \setminus y \subseteq x\\
&x \setminus x = \emptyset\\
&x \setminus y = \emptyset \Leftrightarrow x \subseteq y\\
&(x \setminus y) \cap y = \emptyset\\
&(x \setminus y) \sqcup y = x \cup y\\
&(x \setminus y) \setminus z = x \setminus (y \cup z)\\
&x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z)\\
&(x \setminus y) \cup (y \setminus x) = (x \cup y) \setminus (x \cap y)
\end{aligned}$$

olur. Bunların kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırmalar

3.47. Yukarıdaki eşitlikleri kanıtlayın.

3.48. A, B, C kümeleri için, $(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cap C$ içindeliğini kanıtlayın. Eşitlik olmak zorunda mıdır?

3.49. $\bigcap_{X \in \wp(A) \setminus \emptyset} X$ kümesi hangi A kümeleri için boşküme olmaz?

3.50. $X \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $X_n = X \setminus \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tanımını yapalım. $\bigcap X_n = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın. $\bigcup_{n \geq 1} X_n$ kümesini bulun. Genel olarak bir $k \geq 1$ doğal sayısı için $\bigcup_{n \geq k} X_n$ kümesini bulun.

3.51. $X \setminus \bigcup_{i \in I} Y_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus Y_i)$ ve $X \setminus \bigcap_{i \in I} Y_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus Y_i)$ eşitliklerini kanıtlayın.

3.52. Her $n \in \mathbb{N}$ için bir X_n kümesi verilmiş olsun.

$$X'_n = \bigcap_{m \geq n} X_m$$

tanımını yapalım. X'_n, her $m \geq n$ için X_m'de olan elemanlardan oluşur. $X'_n \subseteq X'_{n+1}$ önermesini kanıtlayın. $X = \bigcup_n X'_n$ olsun. X kümesinin, "belli bir aşamadan sonra" **tüm** X_m'lerde olan elemanlardan oluştuğunu kanıtlayın.
Eğer $X_n = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.
Eğer $X_n = \mathbb{N} \setminus \{n, n+1, \ldots, n^2\}$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.
Eğer her n için $X_{n+1} \subseteq X_n$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.
Eğer her n için $X_n \subseteq X_{n+1}$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.

3.53. Her n doğal sayısı için bir X_n kümesi verilmiş olsun.

$$X'_n = \bigcup_{m \geq n} X_n$$

olsun. X'_n, bir $m \geq n$ için X_n'de olan elemanlardan oluşur. $X_{n+1} \subseteq X_n$ önermesini kanıtlayın. $X = \bigcap_n X'_n$ olsun. X kümesinin, sonsuz sayıda n doğal sayısı için X_n kümesinde olan elemanlardan oluştuğunu kanıtlayın.
Eğer $X_n = \mathbb{N} \setminus \{n\}$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.
Eğer $X_n = \mathbb{N} \setminus \{n, n+1, \ldots, n^2\}$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.
Eğer $X_n = \{n, n+1, \ldots, n^2\}$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.
Eğer her n için $X_{n+1} \subseteq X_n$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.
Eğer her n için $X_n \subseteq X_{n+1}$ ise X'_n ve X kümelerini bulun.

3.6 Tümleyen

Eğer A diye bir küme önceden verilmişse, kimileyin, A'nın bir x altkümesi için, $A \setminus x$ yerine x^c yazılır. x^c kümesine x'in (A'daki) ***tümleyeni*** adı verilir. Tümleyenin tablosu şöyle:

x	x^c
0	1
1	0

Örneğin eğer $A = \mathbb{N}$ ve $p \in \mathbb{N}$ ise, $(p\mathbb{N})^c$, p sayısına tam bölünmeyen doğal sayılar kümesidir. 1 dışında her doğal sayı bir asala bölündüğünden,

$$\bigcup_{p\,\text{asal}} (p\mathbb{N})^c = \{1\}$$

olur.

O zaman A'nın her x ve y altkümeleri için şu özellikler geçerlidir:

$$(x^c)^c = x,$$
$$(x \cap y)^c = x^c \cup y^c,$$
$$(x \cup y)^c = x^c \cap y^c.$$

Son ikisine ***De Morgan özelliği*** denir. Tabii x^c'nin anlamı A'ya göre değişir; bu yüzden bu yazılımı kullanırken dikkatli olmak gerekir. Bazen x^c yerine x' kullanıldığı da olur.

Eğer $(A_i)_{i\in I}$ bir A kümesinin altkümelerinden oluşan bir ailesiyse, o zaman,

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c,$$
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

eşitlikleri geçerlidir. Kanıtlar gene okura bırakılmıştır.

3.7 Kümelerle İşlemler

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri üzerine toplama, çıkarma, çarpma gibi işlemlere aşinayız. Toplama, çıkarma, çarpmanın her biri ikili bir işlemdir, çünkü bu işlemlerin yapılabilmesi için iki sayıya ihtiyaç vardır. Ama mesela "kare alma" işlemi birli bir işlemdir, çünkü tek bir sayının karesi alınır. Karekök alma, $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesi üzerine ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ya da $\mathbb{R}$ üzerine değil) birli bir işlemdir.

A bir küme olsun. Kesişim, bileşim ve fark, $\wp(A)$ üzerine ikili işlem örnekleridir, yani x, $y \in \wp(A)$ ise,

$$x \cap y,\ x \cup y,\ x \setminus y$$

kümeleri de $\wp(A)$ kümesinin elemanlarıdır. Yukarıda gördüğümüz tümleme ise $\wp(A)$ üzerine "birli bir işlem"dir, çünkü tek bir kümenin tümleyeni alınır. Biraz ileride 3.59'uncu alıştırmada $\wp(A)$ kümesi üzerine $x\Delta y$ diye (simetrik fark adı verilen) bir başka ikili işlem tanımlayacağız.

Notlar ve Örnekler

3.54. $\wp^{<\infty}(A)$, elemanları A'nın sonlu altkümelerinden oluşan küme olsun. Kesişim, bileşim ve fark, $\wp^{<\infty}(A)$ üzerine birer işlemdir ama eğer A sonsuzsa, tümleme $\wp^{<\infty}(A)$ kümesi üzerine bir işlem değildir, çünkü o zaman sonlu bir kümenin A'daki tümleyeni sonsuzdur, dolayısıyla $\wp^{<\infty}(A)$ kümesinde değildir.

A bir küme olsun. $\star$, $\wp(A)$ üzerine herhangi bir ikili işlem olsun. $\mathcal{A} \subseteq \wp(A)$ olsun. Eğer her X, $Y \in \mathcal{A}$ için $X \star Y \in \mathcal{A}$ ise, o zaman $\mathcal{A}$'nın $\star$ işlemi altında kapalı olduğu söylenir.

3.55. Eğer $X \subseteq A$ ise

$$\{X\},\ \{\emptyset,\ X\} \text{ ve } \{\emptyset,\ X,\ A\}$$

kümeleri kesişim ve bileşim altında kapalıdır. $\{\emptyset,\ X\}$ kümesi fark alma işlemi altında da kapalıdır, ama diğerleri genellikle değildir. Ama

$$\{\emptyset,\ X,\ X^c,\ A\}$$

kümesi tümleme, kesişim, bileşim ve fark alma işlemleri altında kapalıdır.

3.56. Eğer X, $Y \subseteq A$ ise,
$\{X \cap Y,\ X,\ Y\}$ kümesi kesişim işlemi altında,
$\{X,\ Y,\ X \cup Y\}$ kümesi bileşim işlemi altında,
$\{X,\ Y,\ X \cap Y,\ X \cup Y\}$ kümesi hem kesişim hem de bileşim işlemi altında kapalıdır.

3.57. A, bir r gerçel sayısı için $\mathbb{R}$'nin (r, ∞) aralığını içeren altkümelerinden oluşsun. A, bileşim ve kesişim işlemleri altında kapalıdır. (Ama sonsuz sayıda kümenin kesişimi A'da olmayabilir.)

3.58. A, bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $\mathbb{R}$'nin $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığını içeren altkümelerinden oluşsun. A kümesi bileşim ve kesişim işlemleri altında kapalıdır.

Alıştırmalar

3.59. x ve y kümeleri için,

$$x \Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

olarak tanımlansın. $x \Delta y$ kümesine x ve y'nin ***simetrik farkı*** adı verilir. Simetrik farkın tablosunun aşağıdaki gibi olduğunu gösterin.

x	y	$x \,\Delta\, y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a. $x \,\Delta\, y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$ eşitliğini gösterin.

b. Eğer x, $y \subseteq A$ ise $x \,\Delta\, y = (x \cap y^c) \cup (x^c \cap y)$ eşitliğini kanıtlayın.

c. Her x, y, z kümesi için aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:
- **Birleşme Özelliği:** $(x \,\Delta\, y) \,\Delta\, z = x \,\Delta\, (y \,\Delta\, z)$. (İpucu: Tablo yapmanızı öneririz, aksi halde kanıt içinden çıkılmayacak kadar karmaşık gelebilir.)
- **Etkisiz Elemanın Varlığı:** $x \,\Delta\, \emptyset = x = \emptyset \,\Delta\, x$.
- **İnvolütif İşlem:** $x \,\Delta\, x = \emptyset$.
- **Değişme Özelliği:** $x \,\Delta\, y = y \,\Delta\, x$.
- **Dağılma Özelliği:** $x \cap (y \,\Delta\, z) = (x \cap y) \,\Delta\, (x \cap z)$.

d. Hangi koşulda $x \,\Delta\, y = x$ olur?

e. Hangi koşulda $x \,\Delta\, y = x \cup y$ olur?

f. Hangi koşulda $x \,\Delta y \subseteq x$ olur?

3.60. A bir küme olsun. A, A'nın tümleyeni sonlu olan altkümelerinin kümesi olsun. A'nın bileşim ve kesişim işlemleri altında kapalı olduklarını gösterin.

3.61. A bir küme olsun. I bir göstergeç kümesi olsun. Her $i \in I$ için $A_i \subseteq \wp(A)$, kesişim (bileşim) altında kapalı olsun. $\bigcap_{i \in I} A_i$ kümesinin kesişim (bileşim) altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

3.62. A herhangi bir küme olsun. X, $Y \subseteq A$ olsun. $\wp(A)$'nın X'i ve Y'yi içeren ve bileşim, kesişim, fark ve tümleme işlemleri altında kapalı en küçük altkümesinin en fazla kaç elemanlı olması gerektiğini bulun. Bu alıştırmayı iki altkümeden n kümeye genelleştirin.

3.63. X bir küme olsun. $\bullet$, $\wp(X)$ üzerine herhangi bir ikili işlem olsun.

a. σ ve σ', $\wp(X)$'in $\bullet$ işlemi altında kapalı iki altkümesi olsun. $\sigma \cap \sigma'$ kümesinin de $\bullet$ işlemi altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

b. $\emptyset \neq \sum \subseteq \wp(X)$ altkümesi şu özelliği sağlasın: Eğer $\sigma \in \sum$ ise, σ kümesi $\bullet$ işlemi altında kapalıdır. $\bigcap \sum$ kümesinin de (yani $\sum$'daki kümelerin kesişiminin de) $\bullet$ işlemi altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

3.64. X bir küme olsun. Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kümeleri X'in birbirinden ayrık ve boş olmayan altkümeleriyse ve hepsinin bileşimi X ise,

$$\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k\}$$

kümesine X'in ***parçalanışı*** adı verilir. Bu durumda,

$$X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k = \bigsqcup_{i=1,\ldots,k} A_i$$

yazılır. $k = 1$ için boş olmayan her kümenin tek bir parçalanışı vardır.

a. X, n elemanlı bir küme olsun. $k = 2$ için, X'in kaç parçalanışı vardır?

b. X, n elemanlı bir küme olsun. $k = 3$ için, X'in kaç parçalanışı vardır?

3.65. Eğer X sonlu bir kümeyse, $|X|$, X'in eleman sayısını simgelesin. $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ sonlu küme olsunlar. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

a. $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

b. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

c. Yukarıdaki soruları $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$ için genelleştirin. (Kitabın 9.2'nci altbölümünde ve sayfa 247'deki "Final Sınavı"nın birinci kısmında yanıtı iki değişik yöntemle buluyoruz.)

3.66. Her n, $m \in \mathbb{N}$ için öyle $A_{n,m} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulun ki,

$$\bigcup_n \left(\bigcap_m A_{n,m} \right) \neq \bigcap_m \left(\bigcup_n A_{n,m} \right)$$

olsun.

3.67. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (2^n \mathbb{Z} + (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}))$ kümesinin elemanlarını bulun.

3.68. $p > 2$ bir doğal sayı olsun.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(p^n \mathbb{Z} + \left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} \right) \right)$$

kümesinin elemanlarını (ya da elemanını) bulun. (Varsa tabii!)

3.8 Limsup ve Liminf*

Bu bölümdeki bilgiler bu kitapta esaslı bir biçimde kullanılmayacaktır, dolayısıyla ilk okumada atlanabilir.

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir küme dizisi olsun. Bu dizinin $\limsup$ ve $\liminf$'ini şöyle tanımlayalım:

$$a \in \limsup A_n \Leftrightarrow \text{her } m \text{ için öyle bir } n > m \text{ var ki } a \in A_n.$$
$$a \in \liminf A_n \Leftrightarrow \text{öyle bir } m \text{ var ki her } n > m \text{ için } a \in A_m.$$

Alıştırmalar

3.69. $\limsup A_n$ kümesinin, sonsuz sayıda n göstergeci için A_n'de bulunan elemanlardan oluştuğunu kanıtlayın.

3.70. $\liminf A_n$ kümesinin, sonlu tane n dışında tüm A_n kümelerinde bulunan elemanlardan oluştuğunu kanıtlayın.

3.71. $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$ içindeliğini kanıtlayın.

3.72. $\liminf A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.73. $\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ eşitliğini kanıtlayın.

3.74. $\limsup A_n$ ve $\liminf A_n$ kümelerinin dizinin ilk 1 milyon teriminden (mesela!) bağımsız olduklarını kanıtlayın.

3.75. Aşağıdaki kümeleri karşılaştırın. Hangileri hangilerinin altkümesidir ve eşitlik sağlanır mı?

a. $\limsup(A_n \cup B_n)$ ve $\limsup A_n \cup \limsup B_n$.
b. $\limsup(A_n \cap B_n)$ ve $\limsup A_n \cap \limsup B_n$.
c. $\liminf(A_n \cup B_n)$ ve $\liminf A_n \cup \liminf B_n$.
d. $\liminf(A_n \cap B_n)$ ve $\liminf A_n \cap \liminf B_n$.

3.76. $\liminf(A_n^c) = (\limsup A_n)^c$. Not: Burada tümleyen işlemi, tüm A_n'leri içeren herhangi bir kümede hesaplanmalıdır.

3.77. Eğer $\liminf A_n = \limsup A_n$ ise, $\lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$ tanımını yapalım.

a. Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi artansa (yani her n için $A_n \subseteq A_{n+1}$ ise)
$$\lim A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
eşitliğini kanıtlayın.

b. Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi azalansa (yani her n için $A_n \supseteq A_{n+1}$ ise)
$$\lim A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
eşitliğini kanıtlayın.

3.78. Aşağıdaki dizilerin lim sup, lim inf ve limitini (eğer varsa) hesaplayın:

a. Her n için $A_n = \{z \in \mathbb{N} : n < z \leq 2n\}$.
b. Eğer n çiftse $A_n = [0, n]$, eğer n tekse $A_n = [-1/n, 0]$.

3.79. Bir okulun 100 öğrencisi var. Bu öğrenciler 1'den 100'e kadar doğal sayılarla numaralandırılmışlar. Okulda 100 tane de dolap var. Dolaplar da 1'den 100'e kadar numaralandırılmışlar. Dolaplar başlangıçta kapalı. Öğrenciler teker dolapların bulunduğu odaya giriyorlar ve her biri kendi numarasının bir katı olan dolapları açıksa kapatıyor, kapalıysa açıyor. Örneğin 3 numaralı öğrenci 3, 6, 9, ..., 99 numaralı dolaplara müdahale ediyor, bu dolaplar açıksa kapatıyor, kapalıysa açıyor. Tüm öğrenciler bu dolap açıp kapama işlemini yaptıktan sonra, odada hangi dolaplar açık kalır?

3.80. Bir okuldaki öğrenciler doğal sayılarla numaralandırılmışlar. (Ne kadar doğal sayı varsa o kadar öğrenci var! Yani sonsuz sayıda öğrenci var.) Okulda aynı zamanda doğal sayılarla numaralandırılmış dolaplar var. Dolaplar başlangıçta kapalı. Öğrenciler dolapların bulunduğu odaya teker teker girip bir önceki sorudaki işlemi yapıyorlar. Öğrencilerin odaya 1, 2, 3, ... sırasıyla girdiklerini varsayalım. Bir önceki soruyu yapmışsanız, bu işlem bittikten sonra sadece tamkare numaralı dolapların açık kaldığını biliyorsunuzdur. A_n, n'inci öğrenci odaya girdikten hemen sonra açık olan dolapların numaralarından oluşan küme olsun. Pozitif doğal sayı kümesine $\mathbb{S}$ diyelim. $A_0 = \emptyset$ elbette (henüz hiç öğrenci girmemiş, tüm dolaplar kapalı). Ayrıca $A_1 = \mathbb{S}$ ve $A_2 = 2\mathbb{S} + 1$. Genel olarak, her $n \in \mathbb{S}$ için
$$A_n = [A_{n-1} \cap (n\mathbb{S})^c] \sqcup [A_{n-1}^c \cap n\mathbb{S}]$$
eşitliğini gösterin. $\liminf A_n$ kümesinin $\mathbb{S}$'deki tamkarelerden oluştuğunu gösterin.

3.81. Sonsuz Sayıda Topla Bir Fantezi (sayfa 183) adlı okuma parçasını okuyup burada anlatılanla bağlantısını kurun.

3.9 Kümenin Kapanışı ve İçi*

Daha ileri seviyede matematikte sık sık kullanılan çok temel bir kavramı tanıtacağız bu altbölümde. Ama kitabın ileri aşamasında kullanmayacağımızdan, ilk okumada bu altbölüm atlanabilir.

X bir küme olsun. X'in bazı altkümelerine "***kapalı altküme***" diyelim. X'in hangi altkümelerinin "kapalı" olduklarını bilmiyoruz belki ama "kapalı" diye nitelendirdiğimiz altkümelerin şu iki özelliği sağladıklarını varsayalım:

K1. X her zaman kapalı bir altkümedir.

K2. Sonlu ya da sonsuz sayıda kapalı altkümenin kesişimi gene kapalıdır, yani kapalılık özelliği (sonlu ya da sonsuz) kesişim altında kapalıdır.

Notlar ve Örnekler

3.82. Kapalı aralıklara "kapalı" diyelim. K1 ve K2 özelliklerinin doğrulandığını kanıtlayın. (Kapalı aralıkların kesişiminin gene kapalı bir aralık olduğu çok kolay olmayabilir.)

3.83. Uç noktaları kesirli sayı ya da $\pm\infty$ olan kapalı aralıklara "kapalı" diyelim. K2 özelliğinin doğru olmadığını gösterin.

3.84. X, herhangi bir küme olsun.

a. Sadece X kapalı olsun.

b. Sadece X ve $\emptyset$ kapalı olsun.

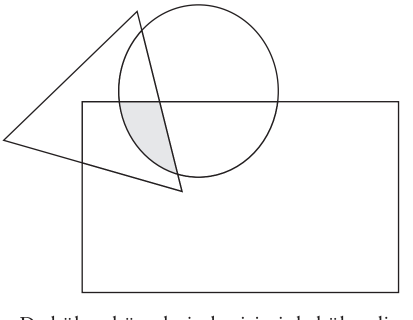
c. Her altküme kapalı olsun.

d. A ve B, X'in herhangi iki altkümesi olsun. Sadece $A \cap B$, A, B ve X altkümeleri kapalı olsun.

e. Sadece X ve X'in sonlu altkümeleri kapalı olsun.

Her bir örnekte K1 ve K2 özellikleri sağlanır.

3.85. X, bildiğimiz düzlem olsun. $A \subseteq X$ olsun. Eğer A'nın her P ve Q noktaları için PQ doğru parçası A'nın bir altkümesiyse, A'ya kapalı ya da matematiksel adıyla ***dışbükey*** adını verelim. X kapalı bir altkümedir elbette. Ayrıca eğer $(A_i)_{i\in I}$ bir dışbükey kümeler ailesiyse, o zaman bu ailenin kesişimi olan $\bigcap_{i\in I} A_i$ kümesi de dışbükeydir. Bunu bir sonraki şekilde gösterdik.



Dışbükey kümelerin kesişimi dışbükeydir.

Demek ki düzlemin dışbükey altkümeleri de K1 ve K2 özelliklerini sağlıyorlar.

3.86. X herhangi bir küme ve A, X'in bir altkümesi olsun. X'in A'yı içeren altkümelerine "kapalı" diyelim. O zaman K1 ve K2 özellikleri sağlanır. Bir başka örnek: Sadece X kümesi ve A'nın altkümeleri kapalı olsun; bunlar da K1 ve K2 özelliklerini sağlarlar.

En önemli örneği vermeden önce bir uyarı: Fonksiyonun tanımını bilmeyenler aşağıdaki örneği şimdilik atlasınlar, bir sonraki bölümü okuduktan sonra geri dönsünler.

3.87. X herhangi bir küme, $f : X \times X \to X$ herhangi bir işlem ya da fonksiyon olsun. Örneğin $X = \mathbb{R}$ ve f, toplama, çıkarma, çarpma gibi işlemler olabilir. Eğer X'in bir A altkümesi,

$$a, b \in A \Rightarrow f(a, b) \in A$$

özelliğini sağlıyorsa A'ya f işlemi altında kapalı altküme diyelim. K1 ve K2 özellikleri bu kümeler için sağlanır.

Not 1. Örnek 3.85'i birden fazla fonksiyona ve herhangi bir n doğal sayısı için (7.5'üncü bölümde tanımlanan) X^n kartezyen çarpımından X'e giden fonksiyonlara genelleştirebiliriz.

Not 2. Sadece K2'yi sağlayan altkümelere X'i de eklersek hem K1'i hem de K2'yi sağlayan bir altküme ailesi bulmuş oluruz.

Not 3. Aslında kapalı kümelerin yukarıdaki iki özellik dışında, genellikle, bir de şu iki özelliği sağlamaları istenir:
K3. $\emptyset$ kapalıdır.
K4. İki (ya da sonlu sayıda) kapalı kümenin bileşimi yine kapalıdır.
Ama biz verdiğimiz ilk iki özellikle idare etmeye çalışacağız.

Örneklerden de görüldüğü üzere, kesişim altında kapalı küme ailelerine matematikte çok sık rastlanır. Bu tür kümeler için, aşağıdaki teoremde tanımlayacağımız "kapanış" adı verilen çok önemli bir kavram vardır. (Teoremin önermesi kanıtından daha uzun olduğuna göre bayağı önemli bir kavram olmalı!)

Teorem 3.1. *X bir küme olsun. X'in bazı altkümelerine "kapalı altküme" diyelim ve "kapalı" olarak nitelendirdiğimiz altkümeler üzerine şu varsayımları yapalım:*
K1. *X kapalı bir altkümedir.*
K2. *Sonlu ya da sonsuz sayıda kapalı altkümenin kesişimi gene kapalıdır.*
$A \subseteq X$ ise, A'yı altküme olarak içeren en küçük bir kapalı altküme vardır. Yani öyle bir $\overline{A} \subseteq X$ vardır ki,
i. *$A \subseteq \overline{A}$,*
ii. *$\overline{A}$ kapalıdır,*
iii. *C kapalıysa ve $A \subseteq C$ ise $\overline{A} \subseteq C$ olur.*
Ayrıca $\overline{A}$, A'yı içeren tüm kapalı altkümelerin kesişimidir.

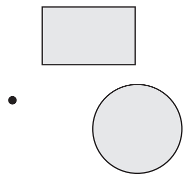
Kanıt: K1 özelliğinden dolayı A'yı içeren kapalı bir küme vardır. $\overline{A}$, A'yı içeren tüm kapalı altkümelerin kesişimi olsun. $\overline{A}$ elbette A'yı içerir. Ayrıca K2 özelliğinden dolayı $\overline{A}$ kapalıdır. Böylece i ve ii kanıtlanmış oldu. iii, $\overline{A}$ kümesinin tanımını doğrudan bir sonucudur. □

Yukarıda tanımlanan $\overline{A}$ kümesine A'nın ***kapanışı*** adı verilir. Bazen $\overline{A}$ yerine, yazması daha kolay ve daha pratik olduğundan, $\mathrm{cl}(A)$ olarak yazılır.

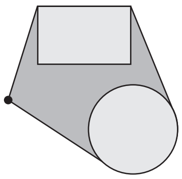
A'nın kapanışı, elbette, hangi kümelerin "kapalı" olarak nitelendirildiğine göre değişir.

Teoremi hemen uygulayabiliriz:

Sonuç 3.2. *Eğer A düzlemin herhangi bir altkümesiyse, düzlemin A'yı içeren en küçük bir $\overline{A}$ dışbükey altkümesi vardır.* (*Bu altkümeye A'nın* ***dışbükey zarfı*** *denir.*)



A kümesi, bir dikdörtgen, bir daire ve bir noktadan oluşuyor.



A kümesinin dışbükey zarfı.

Önsav 3.3 (Kapanışın Özellikleri)**.** *Teorem 3.1'deki tanımlarla şu özellikler geçerlidir:*
i. *$A \subseteq B$ ise $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ olur.*
ii. *A'nın kapalı olması için $A = \overline{A}$ eşitliği gerek ve yeter koşuldur.*
iii. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
iv. $\mathrm{cl}\left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq \bigcap_i \overline{A_i}$ *olur ama eşitlik doğru olmayabilir.*
v. $\bigcup_i \overline{A_i} \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_i A_i\right)$ *olur ama eşitlik doğru olmayabilir.*
vi. *Eğer iki kapalı kümenin bileşimi gene kapalıysa, o zaman,*

$$\mathrm{cl}(A \cup B) = \overline{A} \cup \overline{B}$$

olur.

Kanıt: i. $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$ olduğundan, $A \subseteq \overline{B}$ olur. $\overline{B}$ kapalı bir altküme olduğundan, A'nın kapanışı $\overline{B}$ kümesinin altkümesidir.
ii. Eğer A kapalıysa, A elbette A'yı içeren en küçük kapalı altkümedir. Öte yandan $\overline{A}$ kapalı olduğundan, $A = \overline{A}$ ise A kapalıdır.
iii. $\overline{A}$ kapalı bir küme olduğundan, bir önceki kalemde, A yerine $\overline{A}$ almak yeterli.
iv. Her i için $A_i \subseteq \overline{A_i}$ olduğundan, $\bigcap_i A_i \subseteq \bigcap_i \overline{A_i}$ olur. Ayrıca, her i için $\overline{A_i}$ kapalı olduğundan, $\cap_i \overline{A_i}$ de kapalı bir kümedir. Son iki tümceden $\mathrm{cl}\left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq \bigcap_i \overline{A_i}$ çıkar.

Eşitliğin doğru olmayabileceğini gösterelim. X, en az iki elemanı olan bir küme olsun ve sadece $\emptyset$ ve X altkümeleri kapalı olsun. Her $x \in X$ için,

$$A_x = X \setminus \{x\}$$

olsun. O zaman her x için $\mathrm{cl}(A_x) = X$ ve $\bigcap_x \mathrm{cl}(A_x) = X$ olur. Ama o zaman, $\mathrm{cl}\left(\bigcap_x A_x\right) = \mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset \neq X$ olur.

v. Her i göstergeci için geçerli olan $A_i \subseteq \bigcup_i A_i \subseteq \operatorname{cl}(\bigcup_i A_i)$ içindeliğinden ve $\operatorname{cl}(\bigcup_i A_i)$ kümesinin kapalı oluşundan,

$$\overline{A_i} \subseteq \operatorname{cl}\left(\bigcup_i A_i\right)$$

çıkar. Bundan da istenen sonuç elde edilir.

Eşitliğin doğru olmayabileceğini gösterelim. X, en az üç elemanı olan bir küme olsun. $a, b \in X$ iki değişik eleman olsun. X'in kapalı kümeleri $\emptyset$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ ve X olsun. O zaman $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$ ve $\operatorname{cl}(A \cup B) = X \neq \overline{A} \cup \overline{B}$ olur.
vi. Bir önceki kaleme göre, $A \subseteq \overline{A}$ ve $B \subseteq \overline{B}$ olduğundan, $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ olur. İki kapalı kümenin bileşiminin kapalı olduğunu varsaydığımızdan, bundan $\operatorname{cl}(A \cup B) \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ çıkar. □

Açık Kümeler ve Bir Kümenin İçi. Kapanışın bir de "düal" kavramı vardır.

X bir küme olsun. X'in bazı altkümelerine "açık altküme" diyelim. X'in hangi altkümelerinin "açık" olduklarını bilmiyoruz ama "açık" diye nitelendirdiğimiz altkümeler üzerine şu varsayımları yapalım:
A1. $\emptyset$ açık bir altkümedir.
A2. Sonlu ya da sonsuz sayıda açık altkümenin bileşimi gene açıktır, yani açıklık (sonlu ya da sonsuz) bileşim altında kapalıdır.

Not: Aslında genellikle açık kümelerin yukarıdaki iki özellik dışında genellikle bir de şu iki özelliği sağlamaları istenir:
A3. X açıktır.
A4. İki (ya da sonlu sayıda) açık kümenin kesişimi yine açıktır.
Ama biz verdiğimiz iki özellikle idare etmeye çalışacağız.

Örnek 3.88. Eğer X'in "kapalı altküme" olarak adlandırılan bazı altkümeleri K1 ve K2 özelliğini sağlıyorsa, bu kapalı altkümelerin X'te tümleyenleri A1 ve A2 özelliklerini sağlar. Bunun tersi de doğrudur: Eğer X'in bir altküme ailesi A1 ve A2 özelliklerini sağlıyorsa, o zaman bu altkümelerin tümleyeni K1 ve K2 özelliklerini sağlar. Aynı şey, A1-A4 ve K1-K4 özelliklerini sağlayan altkümeler için de geçerlidir.

Dolayısıyla kapalı kümeler için kanıtlanan her önermenin açık kümeler için bir muadili vardır. Teorem 3.1'in muadili aşağıda.

Teorem 3.4. *X bir küme olsun. X'in bazı altkümelerine "açık altküme" diyelim. "Açık" olarak nitelendirdiğimiz altkümeler üzerine şu varsayımları yapalım:*
A1. *$\emptyset$ açık bir altkümedir.*
A2. *Sonlu ya da sonsuz sayıda açık altkümenin bileşimi gene açıktır.*
$A \subseteq X$ ise, A'nın en büyük açık altkümesi vardır. Yani öyle bir $A^\circ \subseteq X$ vardır ki,

i. *$A^\circ \subseteq A$,*
ii. *A° açıktır,*
iii. *B açıksa ve $B \subseteq A$ ise $B \subseteq A^\circ$ olur.*
Ayrıca A°, A'nın tüm açık altkümelerinin bileşimidir.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

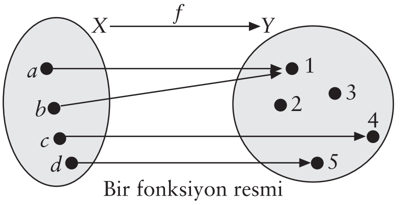
A° kümesine A'nın ***içi*** adı verilir. A'nın içi bazen $\mathrm{int}A$ olarak da yazıldığı olur.

4. Fonksiyon

4.1 Tanım

Fonksiyon kavramının matematiğin en önemli kavramlarından biri olduğunu söylemek fonksiyon kavramına büyük haksızlık olur. Fonksiyon kavramı, matematiğin en önemli kavramlarından biri değil, matematiğin en önemli kavramıdır. Küme kavramı hariç, o da belki... Bilimin b'sinin girdiği her yerde fonksiyona rastlanır.

Herhalde aşağıdakine benzer şekilleri eğitim hayatınız boyunca sık sık görmüşsünüzdür.



Bir fonksiyon resmi

Soldaki yumurta bir kümedir. Sağdaki domates de... İçindeki noktalar kümelerin elemanlarıdır. Soldaki yumurtanın her elemanı sağdaki domatesin bir elemanına bir okla "gönderilmiştir".

Burada, X kümesinden Y kümesine giden bir f fonksiyonu şekledilmiştir. Sol taraftaki X kümesinin dört elemanı vardır: a, b, c ve d. Çoğu zaman açıkça söylenmez ama bu elemanların birbirinden değişik oldukları varsayılır. Sağ taraftaki kümeninse beş elemanı vardır: 1, 2, 3, 4, 5.

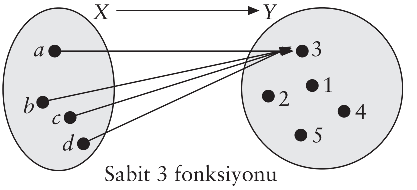
f, sol taraftaki kümenin her elemanını sağ taraftaki kümenin bir elemanına gönderen bir "kural"dır. Örneğin X kümesinin a ve b elemanları, f kuralı gereğince, Y'nin 1 elemanına giderler. Bu,

$$f(a) = f(b) = 1$$

olarak gösterilir. Aynı biçimde, $f(c) = 4$ ve $f(d) = 5$ yazılır.

Y'nin 2 ve 3 elemanlarına X'ten hiçbir eleman gitmiyor. Bu hiç sorun edilmez. X'ten Y'ye giden bir fonksiyon Y'nin her elemanına dokunmak zorunda değildir.

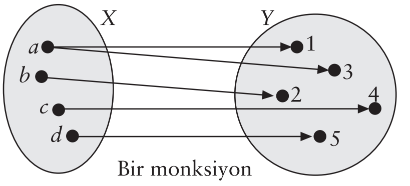
Bu ilk örnekte de olduğu gibi, X'in iki ayrı elemanı (a ve b elemanları) Y'nin aynı elemanına (1 elemanına) gidebilir. Hatta X kümesinin bütün elemanları Y kümesinin aynı elemanına gidebilir. Bu tür fonksiyonlara ***sabit fonksiyon*** denir.



Sabit 3 fonksiyonu

X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyonda önemli olan, X'in her elemanının, tanımlanan kural gereğince, Y'nin tek bir elemanına gönderilmesidir.

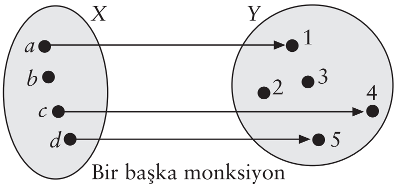
Örneğin aşağıdaki şekildeki kural bir fonksiyon tanımlamaz. Çünkü burada X kümesinin a elemanı Y kümesinin iki ayrı elemanına (1'e ve 3'e) gönderilmekte. Fonksiyonun tanımı bunu yasaklar.



Bir monksiyon

Dileyen, yukarıdaki şekildeki "şey"e başka bir ad bulabilir, örneğin "çok değerli fonksiyon" ya da "monksiyon" gibi. Ama bu "şey" kesinlikle bir fonksiyon değildir.

Aşağıdaki şekildeki şey de bir fonksiyon değildir. Çünkü bu kez X kümesinin b elemanı Y'nin hiçbir elemanına gönderilmemiş. Fonksiyonun tanımı bunu da yasaklar. X'ten Y'ye giden bir fonksiyon X'in her elemanını Y'nin bir (ve bir tek) elemanına göndermeli.



Bir başka monksiyon

Bir X kümesinden bir Y kümesine giden bir f fonksiyonu,

$$f : X \longrightarrow Y$$

olarak ve eğer f fonksiyonu X kümesinin x elemanını Y kümesinin y elemanına gönderiyorsa bu,

$$f(x) = y,\ fx = y \text{ ya da } f : x \mapsto y$$

olarak gösterilir. $f(x) = y$ ise y elemanına x'in ***f-görüntüsü***, ***f-imgesi*** ya da ***f altında değeri*** denir. (Trafiği de ters olan İngiltere ve bazı ülkelerin matematikçileri bazen $fx = y$ yerine $xf = y$ yazarlar. Bu yazılım aslında daha pratiktir, ama alışkanlıklarımızdan kolay kolay kurtulamıyoruz ne yazık ki.)

X kümesine f fonksiyonunun ***tanım kümesi*** ya da ***kalkış kümesi***, Y kümesine de ***değer kümesi*** ya da ***varış kümesi*** adı verilir.

Örneğin, $f(x) = x^2$ kuralı, tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyondur. Elbette $f(-2) = f(2) = 4$ olur.

Ama aynı $f(x) = x^2$ kuralı bize $\mathbb{Z}$ kümesinden gene $\mathbb{Z}$ kümesine giden bir başka fonksiyon verir. Ve hatta aynı kural bize $\mathbb{Z}$ kümesinden doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'ye giden bir başka fonksiyon verir. Ve hatta aynı kural bize $\mathbb{R}$ kümesinden gene $\mathbb{R}$ kümesine giden bir başka fonksiyon verir. Ve hatta aynı kural bize $\mathbb{R}$ kümesinden negatif olmayan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesine giden bir başka fonksiyon verir...

Bir başka deyişle, fonksiyon kavramının tanımının içinde (fonksiyonun kuralından başka) bir de fonksiyonun tanım ve değer kümeleri vardır. Kural değişmese de, tanım ve değer kümeleri değiştiğinde fonksiyonun da değiştiği kabul edilir. Yani bir fonksiyon sadece bir kural değildir, fonksiyon tanımının içinde fonksiyonun kuralı vardır, doğru, ama aynı zamanda tanım ve değer kümeleri de vardır.

Bir ***fonksiyonu***,

1. Tanım (kalkış) kümesi,
2. Değer (varış) kümesi,
3. Tanım kümesinin her elemanı için değer kümesinin tek bir elemanını veren bir "kural"

gibi bir üçlü olarak tanımlayabiliriz. Ama ağız alışkanlığıyla ve kolaylık olsun diye, kimi zaman sadece kural söylenir, tanım ve değer kümelerinin söylenmeden bilindikleri varsayılır.

Özetle, X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyon, X kümesinin her elemanını Y kümesinden tek bir elemana götüren bir kuraldır.

X kümesinden Y kümesine giden fonksiyonlardan oluşan küme $\mathrm{Fonk}(X, Y)$ ya da Y^X olarak yazılır. Bazı kitaplarda ${}^XY$ olarak yazıldığı da olur.

Notlar ve Örnekler

4.1. $\sqrt{x}$ sayısı, yani x'in karekökü, $y^2 = x$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan yegâne y gerçel sayısı olarak tanımlanır. Yani,

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x \text{ ve } y \geq 0.$$

Tanımdan dolayı $\sqrt{x}$ diye bir sayının olması için $x \geq 0$ olmalıdır.

$f(x) = \sqrt{x}$ kuralı, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlamaz, çünkü negatif gerçel sayıların karekökü yoktur (ya da $\mathbb{R}$'de değildir bu karekök.) X'ten Y'ye giden bir fonksiyon, X'teki her elemanı Y'deki bir elemana göndermeli.

Öte yandan, aynı kural, negatif olmayan gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}^{\geq 0}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon tanımlar.

4.2. Yukarıdakine benzer bir nedenden, $f(x) = 1/x$ kuralı, gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'den gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlamaz (0'ın görüntüsü yok.) Öte yandan $f(x) = 1/x$ kuralı, $\mathbb{R}^{>0}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine ($\mathbb{R}^{>0}$ kümesine de) giden bir fonksiyon tanımlar. Aynı kural, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden bir başka fonksiyon tanımlar.

4.3. $f(x) = \pm x$ kuralı da $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon tanımlamaz, çünkü $f(x)$ tek bir değer olmalı. X'ten Y'ye giden bir fonksiyon, X kümesindeki her elemanı Y kümesinden tek bir elemana göndermeli.

4.4. Öte yandan, $f(x) = \{x, -x\}$ kuralı $\mathbb{R}$ kümesinden $\mathbb{R}$'nin (en fazla iki elemanlı) altkümeler kümesine (ya da $\wp(\mathbb{R})$ kümesine) giden bir fonksiyon tanımlar.

4.5. **Tamkısım.** Eğer x bir gerçel sayıysa, $n \leq x < n + 1$ eşitsizliğini sağlayan bir ve sadece bir tane n tamsayısı vardır. Bu n tamsayısı $[x]$ ya da $\lfloor x \rfloor$ olarak yazılır ve bu tamsayıya x'in ***tamkısmı*** adı verilir. Örneğin,

$$[2{,}3] = 2,\ [0{,}25] = 0,\ [-4{,}5] = -5,\ [6] = 6,\ [-4] = -4.$$

Tamkısım, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye ya da $\mathbb{R}$'dan $\mathbb{Z}$'ye giden bir fonksiyon olarak görülebilir.

4.6. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = x^2 + x - 3$ kuralıyla tanımlanmış olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
&f(0) = 0^2 + 0 - 3 = -3,\\
&f(1) = (1)^2 + 1 - 3 = -1,\\
&f(-1) = (-1)^2 + (-1) - 3 = -3,\\
&f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1,\\
&f(\pi) = \pi^2 + \pi - 3,\\
&f(1/2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{9}{4},\\
&f(y) = y^2 + y - 3, f(z) = z^2 + z - 3,\\
&f(t) = t^2 + t - 3,\\
&f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) - 3 = x^2 + 3x - 1,\\
&f(x+y) = (x+y)^2 + (x+y) - 3 = x^2 + y^2 + 2xy + x + y - 3
\end{aligned}$$

olur.

4.7. Herhangi bir kümeden bir elemanlı bir kümeye giden tek bir fonksiyon vardır: Sabit fonksiyon.

4.8. **Boşfonksiyon.** Boş olmayan bir kümeden boşkümeye giden bir fonksiyon yoktur. Ama boşkümeden bir başka kümeye giden tek bir fonksiyon vardır: Boşfonksiyon. Ama bu son dediğimize fazla takılmayın.

4.9. n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç fonksiyon vardır?

Eğer $n = 0$ ise tek bir fonksiyon vardır, bunu bir önceki maddede gördük: Boşfonksiyon.

Eğer $n = 1$ ise, yani tanım kümesinin tek bir elemanı varsa, fonksiyon sayısı m'dir; çünkü tanım kümesinin tek elemanını m elemanlı değer kümesinin herhangi bir elemanına götürebiliriz.

Eğer $n = 2$ ise, tanım kümesinin iki elemanını, değer kümesini m elemanından herhangi ikisine götürebiliriz; tanım kümesinin "birinci" elemanı için m, ikinci elemanı için de m seçeneğimiz var; böylece toplam m^2 fonksiyon elde ederiz.

Genel olarak, $n > 0$ elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye toplam m^n tane fonksiyon vardır. Eğer $0^0 = 1$ varsayımını yaparsak (ki çok sık yapılır bu varsayım), o zaman m^n yanıtı tanım ve değer kümeleri boşkümeyken de geçerlidir.

4.10. **max ve min Fonksiyonları.** $\wp$, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan sonlu altkümelerinden oluşan küme olsun. $\max : \wp \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$\max(X) = X\text{'in en büyük elemanı}$$

olarak tanımlansın.

$$\min(X) = X\text{'in en küçük elemanı}$$

kuralı bize bir başka fonksiyon verir.

$$\begin{aligned}
&|X| = 1 \Leftrightarrow \max(X) = \min(X),\\
&X \subseteq Y \Rightarrow \min(X) \geq \min(Y)\\
&X \subseteq Y \Rightarrow \max(X) \leq \max(Y)\\
&\max(-X) = -\min(X)\\
&\min(-X) = -\max(X)\\
&\max(X+Y) = \max(X) + \max(Y)
\end{aligned}$$

gibi özellikler geçerlidir. Eğer X sonlu değilse, $\max X$ gibi bir değer olmayabilir, mesela $X = (0,1)$ ise ya da $X = \mathbb{N}$ ise, X'in maksimal elemanı yoktur. (Birinci örnekte, yani $X = (0,1)$ örneğinde, 1, X'in elemanı değildir, dolayısıyla X'in en büyük elemanı değildir. Bu durumda 1'e X'in "en küçük üstsınırı" denir.)

4.11. **Mutlak Değer Fonksiyonu.** Eğer x bir gerçel sayıysa, $\max\{x, -x\}$ sayısı, x'in mutlak değeri olarak tanımlanır ve bu fonksiyon $f(x)$ yerine $|x|$ olarak yazılır:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Örneğin $|-5| = |5| = 5$ ve $|0| = 0$.

4.12. **Fonksiyonların Mutlak Değeri.** X bir küme ve $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu şöyle tanımlanır: Her $x \in X$ için,

$$|f|(x) = |f(x)|.$$

Yani $|f|$ fonksiyonu f'nin aldığı değerlerin mutlak değerini alır.

4.13. $\wp(\mathbb{N})^* = \wp(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ olsun. $f : \wp(\mathbb{N})^* \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu, $f(X) = \min(X)$ kuralıyla tanımlansın. Bu bir fonksiyondur, çünkü boş olmayan her doğal sayı kümesinin bir (ve bir tane) en küçük elemanı vardır. Eğer P asal sayılar kümesiyse $f(P) = 2$ olur. Bunun gibi,

$$f(P+P) = f(PP) = 4,\ f(\mathbb{N}) = 0,\ f(3\mathbb{N}+8) = 8$$

olur.

4.14. Bir önceki alıştırmada yaptığımızı min yerine max ile yapamayız elbet, çünkü $\mathbb{N}$'nin altkümelerinin en büyük elemanı olmayabilir.

Alıştırmalar

4.15. $\wp(\mathbb{Z})^* = \wp(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\}$ olsun. Öyle bir $f : \wp(\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu bulun ki her $x \in \wp(\mathbb{Z})^*$ için $f(x) \in x$ olsun (bkz. Örnek 4.13).

4.16. $\wp(\mathbb{Q})^* = \wp(\mathbb{Q}) \setminus \{\emptyset\}$ olsun. Öyle bir $f : \wp(\mathbb{Q})^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu bulun ki her $x \in \wp(\mathbb{Q})^*$ için $f(x) \in x$ olsun. (İpucu: Soruyu önce $\mathbb{Q}$ yerine $\mathbb{Q}^{>0}$ kümesi için çözün.)

4.17. X, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan sınırlı ya da sınırsız, açık ya da kapalı tüm aralıklarından oluşan küme olsun. Öyle bir $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bulun ki her $x \in X$ için $f(x) \in x$ olsun.

Fonksiyonların Eşitliği. Aynı tanım ve değer kümeleri olan iki fonksiyon, tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinin aynı elemanına gönderiyorsa, o zaman o iki fonksiyon birbirine eşittir. Yani $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : X' \longrightarrow Y'$ fonksiyonlarının eşit olması için, tanım gereği, $X = X'$, $Y = Y'$ ver her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ eşitlikleri geçerli olmalı.

Notlar ve Örnekler

4.18. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $a(x) = \sqrt{(x^2)}$ kuralıyla verilmiş fonksiyonuyla $b(x) = |x|$ fonksiyonları birbirine eşittir.

4.19. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ ve $k : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonları

$$f(x) = g(x) = h(x) = k(x) = x^2$$

kuralıyla verilmiş olsun. Bunlar dört farklı fonksiyon tanımlarlar, hiçbiri bir diğerine eşit değildir.

4.20. İki elemanlı $\{0, 1\}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonla gene $\{0, 1\}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $g(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon birbirine eşittir.

4.21. Bir X kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine giden bir f fonksiyonu alalım. $f^2 : X \longrightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonu $f^2(x) = f(x)^2$ olarak tanımlansın. $f^2 = f$ olur.

Alıştırmalar

4.22. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ kuralıyla tanımlanmış olsun. O zaman, $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\pi)$, $f(1/2)$, $f(y)$, $f(z)$, $f(x + 1)$ ve $f(x + y)$ değerlerini hesaplayın.

4.23. Matematiğin dışına çıkalım kısa bir süreliğine. Her insanı (biyolojik) annesine götüren bir fonksiyonun varlığından söz edebiliriz, ama her insanı amcasına ya da kardeşine götüren bir fonksiyondan söz edemeyiz. Neden?

4.24. Bir x gerçel sayısı için,

$$f(x) = \frac{\sqrt{(1-x)(3+x)}}{x}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun en büyük tanım kümesi nedir?

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x)(3+x)}}$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun en büyük tanım kümesi nedir? $h(x) = x/x$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun en büyük tanım kümesi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesidir ve bu fonksiyon tanım kümesi içinde hep 1 değerini alır.

$$k(x) = \frac{\sqrt{(1-x)(3+x)}}{\sqrt{(1-x)(3+x)}}$$

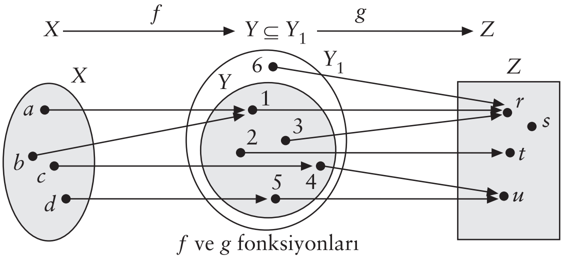
kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun en büyük tanım kümesi nedir?

Son Söz: Tamamen biçimsel ve matematiksel olmak istiyorsak, "fonksiyon" kavramını tanımlamadan önce iki kümenin kartezyen çarpımını tanımlamamız gerekiyordu. Ama burada sezgisel kümeler kuramı yapıyoruz. Dolayısıyla "fonksiyon" kavramının sezgisel (yani pek matematiksel olmayan) bir tanımını verdik. "Fonksiyon" kavramının tam matematiksel tanımını kitabın sonundaki eklerde, Altbölüm 17.5'te vereceğiz.

4.2 Fonksiyonların Bileşkesi

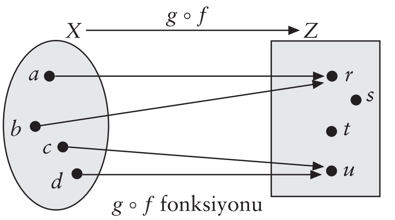
Soyut matematikte, kümelerden sonra en temel ve en önemli konu fonksiyonlardır. Fonksiyonların da en temel özelliğinden bu altbölümde söz edeceğiz.

f, X kümesinden Y kümesine giden bir fonksiyon olsun. g de, Y'yi altküme olarak içeren bir Y_1 kümesinden Z kümesine giden bir fonksiyon olsun. Örneğin aşağıdaki şekildeki gibi.



f ve g fonksiyonları

Bu iki fonksiyonun "bileşke"sini alıp X'ten Z'ye giden bir fonksiyon elde edebiliriz. Bunu şöyle yaparız: X'ten herhangi bir eleman alalım, diyelim a'yı aldık. Bu elemana f fonksiyonunu uygulayıp Y'de gittiği yeri bulalım; örneğimizde 1'i buluruz. Şimdi Y'nin 1 elemanına g fonksiyonunu uygulayıp Z'den bir eleman bulalım, örneğimizde r'yi buluruz. Bu bize yeni bir fonksiyon verir. Bu yeni fonksiyon, X'in a elemanını Z'nin r elemanına gönderir. Bu fonksiyonun bir resmini aşağıda çizdik.



$g \circ f$ fonksiyonu

f ve g fonksiyonlarını kullanarak elde ettiğimiz bu yeni fonksiyona f ve g'nin ***bileşkesi*** adı verilir ve bu yeni fonksiyon

$$g \circ f$$

olarak yazılır. (gof diye okuyabilirsiniz! Sıralamaya da dikkat!) Yukarıda da gördüğümüz gibi,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = r.$$

Benzer şekilde,

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(1) = r,$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(4) = u,$$
$$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(5) = u$$

olur.

$g \circ f$ bileşkesinden söz edebilmek için f fonksiyonunun değer kümesinin g fonksiyonunun tanım kümesinin altkümesi olması gerektiğine dikkatinizi çekerim. Tanım ve değer kümeleri aynı olan fonksiyonların (yani bir X kümesinden gene aynı X kümesine giden fonksiyonların) hiç düşünmeden istediğimiz gibi bileşkelerini alabiliriz.

Bileşkenin biçimsel tanımını verelim:

f, X kümesinden Y kümesine, g de Y'yi altküme olarak içeren bir Y_1 kümesinden Z kümesine giden birer fonksiyon olsunlar. $g \circ f$ olarak simgelenen f ile g fonksiyonlarının ***bileşkesi***, X kümesinden Y kümesine giden ve her $x \in X$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyondur.

Eğer $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow X$ iki fonksiyon ise (tanım ve değer kümelerine dikkat), hem $f \circ g$ hem de $g \circ f$ fonksiyonlarından sözedebiliriz. $f \circ g$ fonksiyonu Y'den Y'ye, $g \circ f$ fonksiyonu ise X'ten X'e gider. Bunun sık sık uygulandığı durum, X'in Y'ye eşit olduğu özel durumdur; bu durumda $f \circ f$ fonksiyonundan da sözedebiliriz.

Notlar ve Örnekler

4.25. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu
$$f(x) = x^2$$
kuralıyla, $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ise
$$g(x) = x - 5$$
kuralıyla tanımlansın. O zaman, her $x \in \mathbb{R}$ için,
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 5$$
olur.
Bu örnekte g ve f'nin de bileşkelerini alıp $f \circ g$ fonksiyonundan söz edebiliriz: Her $x \in \mathbb{R}$ için,
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 5) = (x - 5)^2.$$
Görüldüğü gibi $g \circ f \neq f \circ g$ olur. (Zaten $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri farklıdır, ama bunun da ötesinde iki fonksiyon aynı sayıları ayrı sayılara götürürler.)
Öte yandan $f \circ g$ ile $g \circ f$ fonksiyonları bazen bazı elemanlarda aynı değerleri alabilirler. Mesela örneğimizde $x = 5$'te her iki fonksiyon da 0 değerini alır. Ama genellikle tanım ve değer kümeleri farklı olduğu gibi, farklı değerleri alan elemanları da vardır. İki fonksiyonun farklı olması için tek bir elemanda farklı değerleri almaları yeterlidir.

4.26. $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu $f(x) = \sqrt{x}$ olarak, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da $g(x) = x - 5$ olarak tanımlansın. O zaman, her $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için,
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 5$$
olur. Bu örnekte $f \circ g$ diye bir fonksiyondan sözedemeyiz, çünkü g'nin değer kümesi negatif sayıları içeriyor ama f negatif sayılarda tanımlanmıyor.

Alıştırmalar

4.27. $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x) = |x-1|$ ve $g(x) = |x|$ kurallarıyla tanımlansınlar. $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonlarını bulun.

4.28. X bir küme ve $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu her $x \in X$ için $f(x) = x$ kuralıyla tanımlansın. Her $g : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için $g \circ f = g$ ve her $h : Y \longrightarrow X$ fonksiyonu için $f \circ h = h$ eşitliğini kanıtlayın.

4.29. $p \in \mathbb{Q}$ ise $f_p : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^{>0}$ için $f(x) = x^p$ kuralıyla tanımlansın. $f_p \circ f_q = f_{pq}$ eşitliğini gösterin. Dolayısıyla $f_p \circ f_q = f_q \circ f_p$ olur.

4.30. Sabit fonksiyon ya da özdeşlik fonksiyonu olmayan ve $f \circ f = f$ eşitliğini sağlayan bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu bulun.

4.3 Bileşkenin Birleşme Özelliği

Üç fonksiyonumuz olsun:

$$f : X \longrightarrow Y,\ g : Y_1 \longrightarrow Z \text{ ve } h : Z_1 \longrightarrow T.$$

Ayrıca $Y \subseteq Y_1$ ve $Z \subseteq Z_1$ varsayımlarını yapalım. Bu üç fonksiyonla ilk bakışta farklı gibi görünen iki işlem yapabiliriz:
1. $g \circ f : X \longrightarrow Z$ ve $h : Z_1 \longrightarrow T$ fonksiyonlarının bileşkesini alıp

$$h \circ (g \circ f) : X \longrightarrow T$$

fonksiyonuna bakabiliriz.
2. $f : X \longrightarrow Y$ ve $h \circ g : Y_1 \longrightarrow T$ fonksiyonlarının bileşkesini alıp

$$(h \circ g) \circ f : X \longrightarrow T$$

fonksiyonuna bakabiliriz.

Böylece elde edilen $h \circ (g \circ f)$ ve $(h \circ g) \circ f$ fonksiyonları birbirine eşittir. Bunu kanıtlayalım.

Her ikisi de X'ten T'ye giden

$$h \circ (g \circ f) \text{ ve } (h \circ g) \circ f$$

fonksiyonlarının aldıkları değerleri hesaplayalım, bakalım eşitler mi? $x \in X$ olsun. Bileşkenin tanımını ikişer kez uygulayarak hesaplayalım:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))),$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Demek ki, her $x \in X$ için,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

oluyor. Dolayısıyla

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

olur.

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliğine fonksiyonların ***birleşme özelliği*** denir.

Bu demektir ki ikiden fazla fonksiyonun bileşkesi alınırken (kümeleri kesiştirdiğimizde ya da bileşimini aldığımızda olduğu gibi) parantez kullanmak gereksizdir; sıra gözettikten sonra, bileşkelerini almak için fonksiyonları dilediğimiz gibi gruplandırabiliriz. Bu nedenle $h \circ (g \circ f)$ ya da $(h \circ g) \circ f$ yazmak yerine, parantezleri atıp $h \circ g \circ f$ yazarız. Tabii bunu üçten fazla fonksiyon için de yapabiliriz.

Eğer $f : X \longrightarrow X$ ise f'nin kendisiyle bileşimini alabiliriz, örneğin $f \circ f$ ve $f \circ f \circ f$ (parantezsiz) fonksiyonlarından sözedebiliriz. Bu fonksiyonlar sırasıyla f^2 ve f^3 olarak yazılırlar. Ama bunları fonksiyonların karesini ve küpünü alma işlemleriyle karıştırmamak lazım. Örneğin $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = 2x - 1$$

formülüyle verilmişse,

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x-1) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$$

olur. Ama $f(x)$ fonksiyonunun karesi $x \mapsto (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ kuralıyla verilmiştir.

Genel tanım şöyledir: $f^0 = \mathrm{Id}_X$ ve her $n \geq 0$ için

$$f^{n+1} = f \circ f^n.$$

(Tümevarımla tanım, bkz. [N4].) Bu aynen şu demektir:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\,\text{tane}}.$$

Elbette

$$f^1 = f^{0+1} = f \circ f^0 = f \circ \mathrm{Id}_X = f$$

olur.

Alıştırmalar

4.31. Öyle bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu bulun ki f sabit bir fonksiyon olmasın ama f^2 sabit bir fonksiyon olsun.

4.32. Öyle bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu bulun ki f ve f^2 sabit fonksiyonlar olmasın ama f^3 sabit bir fonksiyon olsun.

4.33. Öyle bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu bulun ki $f(\mathbb{N})$ sonsuz olsun ama $f^2(\mathbb{N})$ sonlu olsun.

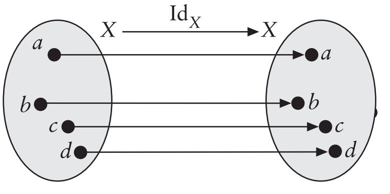
4.34. Öyle bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eşleşmesi bulun ki, hiçbir $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x$ olmasın ve hiçbir pozitif n doğal sayısı için $f^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ olmasın.

4.35. Öyle $f,\ g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eşlemeleri bulun ki, $f \circ f = g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ olsun ama hiçbir pozitif n doğal sayısı için ve hiçbir $x \in \mathbb{N}$ için $(f \circ g)^n(x) = x$ olmasın.

4.36. (Tümevarımla kanıtı bilenler için; bilmeyenler [N4]'e başvurabilirler.) Her $n,\ m \in \mathbb{N}$ için $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ ve $(f^n)^m = f^{nm}$ eşitliklerini kanıtlayın. Demek ki $f^n \circ f^m = f^m \circ f^n$ olur.

4.4 Özdeşlik Fonksiyonu

X herhangi bir küme olsun. X'ten X'e giden çok özel bir fonksiyon tanımlayacağız şimdi, ***özdeşlik*** ya da ***birim fonksiyonu***. Özdeşlik fonksiyonu, X'in her elemanını gene kendisine gönderir, yani aslında hiçbir şey yapmaz! X'ten X'e giden bu fonksiyon Id_X, I_X ya da kısaca (eğer X'in ne olduğu konunun gelişinden belliyse) I olarak gösterilir. Id, "özdeşlik" anlamına gelen İngilizce *identity*'nin ya da Fransızca *identité*'nin Id'idir.



Demek ki, her $x \in X$ için, $\mathrm{Id}_X(x) = x$.

Özdeşlik fonksiyonlarının şu özelliği vardır: Eğer $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyonsa, o zaman,

$$f \circ \mathrm{Id}_X = f \text{ ve } \mathrm{Id}_Y \circ f = f$$

olur. Dolayısıyla her $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu için,

$$f \circ \mathrm{Id}_X = f = \mathrm{Id}_X \circ f$$

olur. Bu yüzden özdeşlik fonksiyonuna, fonksiyonların bileşke işlemi için etkisiz elemanı denir.

Tek elemanlı bir kümenin kendisine giden tek bir fonksiyonu vardır: özdeşlik fonksiyonu!

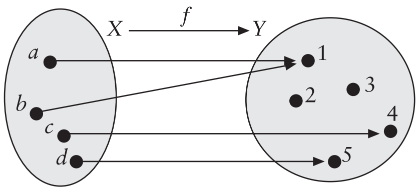
Bir incelik: Eğer $X \subseteq Y$ ise, $f(x) = x$ eşitliğiyle tanımlanan $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu, ancak $X = Y$ ise özdeşlik fonksiyonudur. Aksi halde f'ye "X'i Y'ye ***gömme fonksiyonu***" adı verilir.

4.5 Fonksiyon Çeşitleri

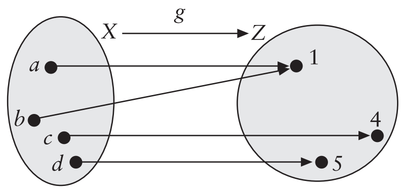
Bu bölümde bazı özel fonksiyon tiplerini tanıtacağız: Örten, birebir ve (adına eşleme denilen) hem örten hem de birebir olan fonksiyonlar. Konu çok çok temel olduğu gibi, bu fonksiyonları ikinci kısımda sonsuz kümelerin elemanlarını "saymakta" da kullanacağız.

4.5.1 Örten Fonksiyonlar

Aşağıda şekledilen örneğe bakalım. Bu örnekte X'ten hiçbir eleman Y'nin 2 ve 3 elemanına gitmemiş.



Şimdi 2 ve 3 elemanlarını Y'den atıp yeni bir g fonksiyonu tanımlayalım. (Değer kümesi değiştiğinden, değer kümesi artık Y değil, değer kümesine Z diyelim. Fonksiyona da artık f değil g diyelim. Resmi aşağıda.) Bu sefer, değer kümesi Z'nin her elemanına X'ten bir eleman ulaşıyor. Bu özelliği olan bir fonksiyona ***örten fonksiyon*** denir.



Eğer

her $z \in Z$ için, $g(x) = z$ eşitliğini sağlayan bir $x \in X$ varsa

o zaman $g : X \longrightarrow Z$ fonksiyonuna örten denir.

Örneğin $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon örten değildir, çünkü karesi -1 olan bir gerçel sayı yoktur. Ama $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesine giden ve gene $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon örtendir.

Tamkısım fonksiyonunu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon olarak görürsek örten olmaz, ama $\mathbb{R}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden bir fonksiyon olarak görürsek örten olur.

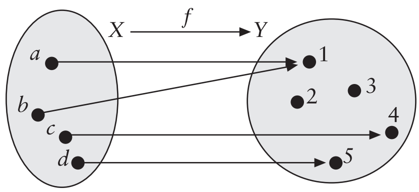
n elemanlı bir kümeden bir Y kümesine giden örten bir fonksiyonun olması için, Y'nin en fazla n elemanı olmalıdır elbet.

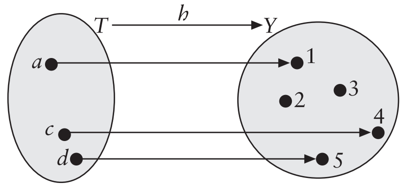
4.5.2 Birebir Fonksiyonlar

Gene birinci örneğimizden hareket edelim. Resmini bir kez daha aşağıya çizdiğimiz o örnekte X'in a ve b elemanları Y'nin aynı elemanına (1'e) gidiyorlar. X kümesinden a ya da b'den birini atarsak böyle bir "sorun"la karşılaşmayız. Diyelim b'yi attık. Elde ettiğimiz fonksiyona h diyelim. X kümesi değiştiğinden, tanım kümesi artık X değil, tanım kümesine T diyelim. Şimdi artık h fonksiyonu altında tanım kümesi olan T'nin her elemanı değer kümesi olan Y'nin bir başka elemanına gider. Yani $h : T \longrightarrow Y$ fonksiyonu,

$$\textit{her } t_1,\, t_2 \in T \textit{ için, eğer } h(t_1) = h(t_2) \textit{ eşitliği doğruysa,}$$
$$\textit{o zaman } t_1 = t_2 \textit{ eşitliği doğrudur}$$

özelliğini sağlar. Bu özelliği sağlayan fonksiyonlara ***birebir fonksiyon*** denir.





Örneğin $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon birebir değildir. Çünkü örneğin -3 ve 3 aynı elemana (9'a) giderler. Öte yandan $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden ve gene $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon birebirdir.

Bir X kümesinden n elemanlı bir kümeye giden birebir bir fonksiyon olması için, X'in en fazla n elemanı olabilir elbet.

Gömme fonksiyonları her zaman birebirdir.

Notlar ve Örnekler

4.37. A herhangi bir küme olsun. $f(a) = \{a\}$ kuralıyla verilmiş $f : A \longrightarrow \wp(A)$ fonksiyonu birebirdir ama örten değildir. Öte yandan eğer A, A'nın 1 elemanlı altkümelerinden oluşan kümeyse, gene $f(a) = \{a\}$ kuralıyla verilmiş $f : A \longrightarrow A$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

4.38. X herhangi bir küme olsun. $\wp(X)$'ten $\wp(X)$'e giden $f(A) = A^c$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon birebirdir.

4.39. X herhangi bir küme ve $a \in X$ olsun. $\wp(X)$'ten $\wp(X)$'e giden $f(A) = A \setminus \{a\}$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon birebir değildir çünkü $f(\{a\}) = f(\emptyset) = \emptyset$ olur.

4.40. $\mathbb{P}$, asal doğal sayılar kümesi olsun. X, $\mathbb{P}$'nin sonlu altkümelerinden oluşan küme olsun. Örneğin $\{2,\, 7,\, 11\} \in X$. Şimdi, $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu

$$f(A) = \ A\text{'nın elemanlarının çarpımı}$$

olarak tanımlansın. Örneğin $f(\{2,\, 7,\, 11\}) = 154$. Tanım gereği $f(\emptyset) = 1$ olur. Bu fonksiyon birebirdir. Ama

$$g(A) = A\text{'nın elemanlarının toplamı}$$

fonksiyonu (ki o zaman tanım gereği $g(\emptyset) = 0$ olurdu) birebir değildir, çünkü mesela $g(\{3,\, 13\}) = g(\{5,\, 11\}) = 16$ olur.

4.5.3 Eşlemeler

Önce şu dört örneğe bakalım:

1. $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ne örtendir ne de birebir.
2. $g(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu örtendir ama birebir değildir.
3. $h(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş $h : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birebirdir ama örten değildir.
4. $k(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş $k : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu hem birebir hem de örtendir.

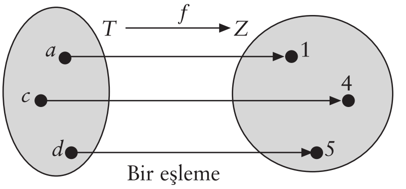
Hem örten hem de birebir olan bir fonksiyona ***eşleme*** ya da ***bijeksiyon*** denir. Demek ki dördüncü örnek bir eşleme, diğer üçü değil.

Bir kümeden gene kendisine giden eşlemelere ***eşleşme*** diyebiliriz. Id_X bir eşleşmedir.

Aralarında eşleme olan iki sonlu kümenin eleman sayısı eşit olmak zorundadır.

Ayrıca n elemanlı bir kümenin tam $n!$ tane eşleşmesi vardır. ($0! = 1$ olarak tanımlanır ve 0 elemanlı bir kümenin gerçekten de tek bir eşleşmesi vardır: ***boşeşleşme!***)

Aşağıda üç elemanlı iki küme arasında bir eşleme görüyorsunuz.



Bir eşleme

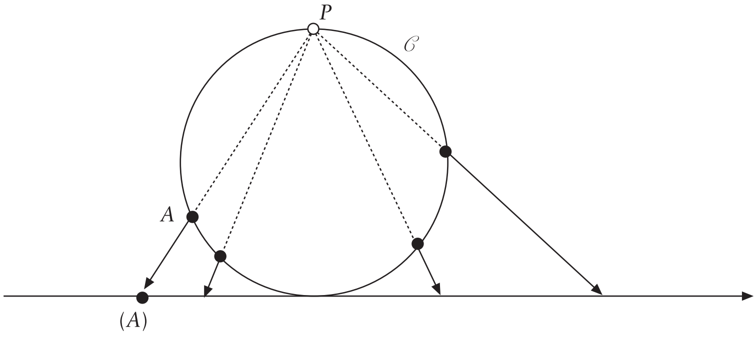
Üç elemanlı iki küme arasında tam 6 tane (aslında $3!$ tane) eşleme vardır; neden? Genel olarak, n elemanlı iki küme arasında tam $n!$ tane eşleme vardır.

Aralarında eşleme olan kümelere ***eşlenik*** denir. Sonlu eşlenik kümelerin aynı sayıda elemanları vardır. Mesela iki elinizin parmaklarını birebir eşleyebiliyorsanız her iki elinizde de aynı sayıda parmak var demektir, parmaklarınızı ayrı ayrı saymanıza gerek yok!

Not: Sonsuz bile olsalar, eşlenik kümeler sanki aynı sayıda elemanları varmış gibi algılanabilir. Eğer X'ten Y'ye giden birebir bir fonksiyon varsa, bunu, "X'in eleman sayısı en fazla Y kadar olabilir" olarak algılayabiliriz. Bu basit fikir matematikte devrim niteliği taşıyan bir fikirdir ve Cantor'a aittir. Kitabın ikinci kısmında bu konuyu irdeleyeceğiz. Mesela bu anlamda $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{N}$'den daha fazla elemanı olduğunu, ama $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $2\mathbb{N}$ gibi kümelerin (şaşırtıcı biçimde) bu anlamda aynı sayıda elemanı olduğunu kanıtlayacağız.

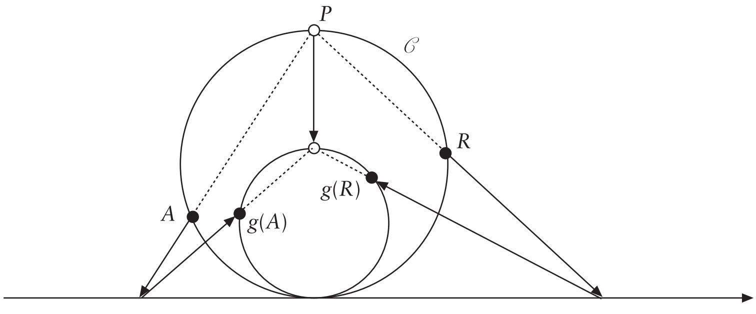
Notlar ve Örnekler

4.41. Bir $\mathcal{C}$ çemberinden bir P noktası alalım. $\mathcal{C} \setminus \{P\}$ ile $\mathbb{R}$ arasında (geometrik ve hatta cebirsel) bir eşleme vardır. İşte böyle bir eşlemenin resmi (resimde $P = (0,1)$ alınmıştır):

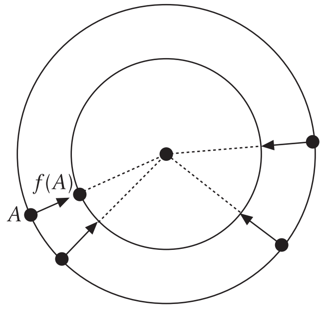


Basit bir hesapla, resimdeki eşlemenin çemberin $(x, y) \neq (0,1)$ noktasını $\frac{x}{1-y} \in \mathbb{R}$ sayısına göndereceği görülebilir.

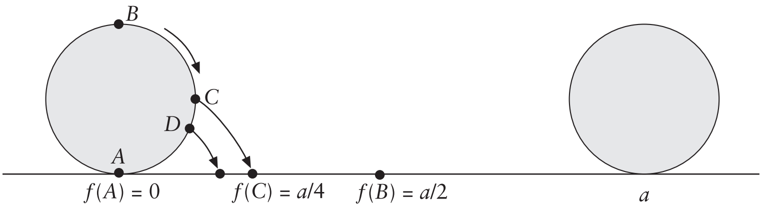
4.42. Önceki örnekten herhangi iki çemberin $\mathbb{R}$'ye, dolayısıyla birbirine eşlenik olduğu çıkar. İşte öyle bir eşleşmenin resmi:



İki çember arasında çok daha basit bir eşleme bulabiliriz. İki çemberi eşmerkezi konuma getirelim. Eşmerkezden çıkan ışınlar, çemberlerin noktalarını eşlemekte kullanılabilir. Resim aşağıda.



4.43. Çevresi a uzunluğunda olan bir çemberle $[0, a)$ aralığı eşleniktir. Bunu görmek için çemberi bir doğrunun üstüne koyun ve çembere patinaj yaptırmadan doğrunun üstünde döndürün. Resim aşağıda:



Alıştırmalar

4.44. $\{0, 1\}$ kümesinden kendisine giden 4 fonksiyon vardır. Bu dört fonksiyonu bulun. Bunlardan hangileri eşleşmedir? Bu fonksiyonların birbirleriyle ikişer ikişer bileşkelerini alın. 4×4'lük bir tabloda bu bileşkeleri gösterin.

4.45. $\{1, 2, 3\}$ kümesinin tüm eşleşmelerini bulun (tam 6 tane) ve bu eşleşmelerin ikişer ikişer bileşkelerini alın. 6×6'lık bir tabloda bu bileşkeleri gösterin.

4.46. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 5x + 3$ kuralıyla tanımlanmış olsun. f'nin bir eşleme olduğunu gösterin. $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{Q}$ alırsak ne olur?

4.47. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, verilmiş a ve b gerçel sayıları için, $f(x) = x^2 + ax + b$ kuralıyla tanımlanmış olsun. f'nin hiçbir a ve b için birebir (ya da örten) olamayacağını gösterin.

4.48. $\mathbb{N}$'nin "$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$" özelliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.49. $\mathbb{Z}$'nin "$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$" özelliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.50. X bir küme olsun. Eğer $a \in X$ ise, s_a, hep a değerini alan sabit fonksiyon olsun. $f : X \longrightarrow X$ hangi fonksiyon olursa olsun

$$s_a \circ f = s_a \text{ ve } f \circ s_a = s_{f(a)}$$

eşitliklerini gösterin. Buradaki s_a fonksiyonunun tanım kümesi ne olabilir?

4.51. Boşkümeden boşkümeye giden tek bir fonksiyon olduğunu ve bu fonksiyonun bir eşleme olduğunu kanıtlayın!

4.52. n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden m^n tane fonksiyon olduğunu gösterin.

4.53. X ile Y kümeleri arasında bir eşleme varsa, $\wp(X)$ ile $\wp(Y)$ kümeleri arasında da bir eşleme olduğunu gösterin.

4.54. n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç tane birebir fonksiyon vardır?

4.55. Aşağıda, iki fonksiyonun bileşkesinden söz edildiğinde, bu fonksiyonların bileşkesinin alınabileceği, yani birinin değer kümesinin diğerinin tanım kümesinin içinde olduğu varsayılmaktadır.

a. İki örten fonksiyonun bileşkesinin örten olduğunu kanıtlayın.

b. İki birebir fonksiyonun bileşkesinin birebir olduğunu kanıtlayın.

c. İki eşlemenin bileşkesinin eşleme olduğunu kanıtlayın.

d. $f \circ g$ örtense f'nin de örten olduğunu kanıtlayın. g de örten olmak zorunda mı?

e. $f \circ g$ birebirse g'nin de birebir olduğunu kanıtlayın. f de birebir olmak zorunda mı?

4.56. $A \cap B = \emptyset$ ve $C \cap D = \emptyset$ olsun. A ile C arasında ve B ile D arasında birer eşleme olsun. $A \cup B$ ile $C \cup D$ arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın. Kesişimler boş değilse aynı sonuç doğru mudur?

4.57. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin $f \circ f = \text{Id}$ eşitliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.58. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin $f \circ f \circ f = \text{Id}$ eşitliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.59. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin $f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f = \text{Id}$ eşitliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.60. $\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin $f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$ eşitliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.61. $\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin belli bir g eşleşmesi için $g \circ g = f$ eşitliğinin sağlandığı tüm f eşleşmelerini bulun.

4.62. Tamsayılar kümesinin "$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$" özelliğini sağlayan tüm eşleşmelerini bulun. Aynı şeyi doğal sayılar kümesi için yapın.

4.63. Tamsayılar (ya da doğal sayılar) kümesinden kendisine giden ve her x ve y için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ özelliğini sağlayan tüm fonksiyonları bulun.

4.64. Her x ve y için $f(xy) = f(x)f(y)$ özelliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonlarını bulun.

4.65. x ve y iki doğal sayı olsun. Eğer bir z doğal sayısı için $x = yz$ oluyorsa o zaman y'nin x'i böldüğü söylenir ve bu, $y|x$ olarak yazılır. Örneğin 0, 0'ı böler ve 0 sadece 0'ı böler. Her sayı 0'ı böler. Her x ve y için

$$x|y \Leftrightarrow f(x)|f(y)$$

özelliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eşleşmelerini bulun.

4.66. $\wp^{=2}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$'nin 2 elemanlı altkümelerinden oluşan küme olsun. $\wp^{=2}(\mathbb{N})$'den $\mathbb{N}$'ye giden birebir bir fonksiyon bulun. Aynı alıştırmayı 2 yerine her $n > 0$ tamsayısı için yapın.

4.67. $\wp^{<\infty}(\mathbb{N})$, elemanları $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümelerinden oluşan küme olsun. Mesela $\emptyset$ ve $\{3, 7, 9\}$ kümeleri $\wp^{<\infty}(\mathbb{N})$ kümesinin elemanlarıdır ama $2\mathbb{N}$ değildir. $\wp^{<\infty}(\mathbb{N})$ kümesinden $\mathbb{N}$'ye giden birebir bir fonksiyon bulun.

4.68. $f \circ f$ fonksiyonundan söz edilebiliyorsa, f'nin tanım ve değer kümeleri hakkında ne diyebilirsiniz? $f \circ f$ bir eşlemeyse f de bir eşleme olmak zorunda mıdır?

4.69. Öyle bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eşleşmesi bulun ki, hiçbir $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x$ olmasın ve hiçbir pozitif n doğal sayısı için $f^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ olmasın.

4.70. Öyle f, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eşlemeleri bulun ki,

$$f \circ f = g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$$

olsun ama hiçbir pozitif n doğal sayısı için ve hiçbir $x \in \mathbb{N}$ için

$$(f \circ g)^n(x) = x$$

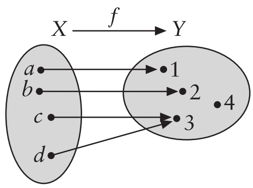
olmasın.

4.6 Eşlemelerin Tersi

$f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f, X'in elemanlarını Y'nin elemanlarına götürüyor. Şimdi, bunun tam tersini yapmak istiyoruz, Y'nin bir elemanını X'e ve aynen geldiği yere geri göndermek istiyoruz. Örneğin $f(a) = b$ ise, b'yi a'ya geri göndermek istiyoruz ve bunu bir fonksiyonla yapmak istiyoruz.

İki sorun çıkabilir:

1. Y'deki bir elemana f dokunmayabilir. O zaman dokunulmayan bu elemanı geri gönderecek yer yoktur. Ama eğer f örtense o zaman bu sorun ortadan kalkar.



4'ün geri dönecek yeri yok. 3 ise c'ye mi yoksa d'ye mi geri dönmesi gerektiğini bilemiyor.

2. Y'nin bir elemanına X'in birden çok elemanı dokunabilir. O zaman Y'nin bu elemanını kendisine dokunan elemanlardan hangi birine geri göndereceğiz? Aralarından seçim yapmak gerekebilir. Zor iş! Ama eğer f birebirse böyle bir sorunla karşılaşmayız.

Eğer f hem birebir hem de örtense, yani f bir eşlemeyse, Y'nin her elemanına X'in bir ve sadece bir tek elemanı dokunur. O zaman f fonksiyonunun tersini tanımlayabiliriz:

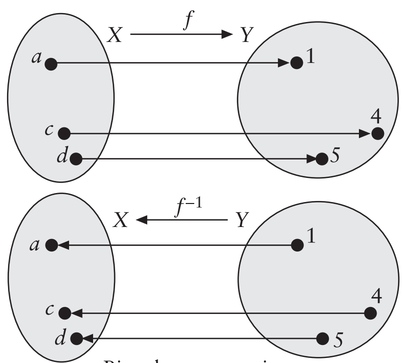
$f : X \longrightarrow Y$ bir eşleme olsun. $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: Her $y \in Y$ ve $x \in X$ için

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

f^{-1} fonksiyonuna f ***eşlemesinin tersi*** adı verilir.

Bir $y \in Y$ elemanının f^{-1} fonksiyonu altında nereye gittiğini bulmak için, X'in hangi elemanının f altında y'ye gittiği bulunur: Eğer $f(x) = y$ ise $f^{-1}(y) = x$ olur. Bir anlamda, f^{-1}, f'nin bozduğunu düzeltir; sözgelimi, f, 1'i 5'e yollamışsa, f^{-1}, 5'i 1'e geri yollar.

Böylece tanımlanan f^{-1}, gerçekten bir fonksiyondur, çünkü her $y \in Y$ için, $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan bir ve sadece bir tane $x \in X$ vardır: f örten olduğundan bu eşitliği sağlayan en az bir tane $x \in X$ vardır ve f birebir olduğundan en fazla bir tane $x \in X$ vardır.



Bir eşleme ve tersi

f^{-1} fonksiyonu da bir eşlemedir. Örten olduğunun kanıtı: $x \in X$ olsun; o zaman f^{-1} fonksiyonu Y'nin $f(x)$ elemanını x'e götürür. Birebir olduğunun kanıtı: Eğer y, $y_1 \in Y$ için $f^{-1}(y) = f^{-1}(y_1) = x$ olursa, o zaman, f^{-1}

fonksiyonunun tanımı gereği, hem $f(x) = y$ hem de $f(x) = y_1$ olur, dolayısıyla $y = y_1$ olur.

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır elbette:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X \text{ ve } f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y .$$

Ayrıca, eğer $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ ve $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ eşitliklerini sağlayan bir $g : Y \longrightarrow X$ fonksiyonu varsa, o zaman f bir eşleme olmak zorundadır (bkz. Alıştırma 4.55) ve g, f^{-1} fonksiyonuna eşittir. (Neden?) Demek ki

$$g = f^{-1} \Leftrightarrow (g \circ f = \mathrm{Id}_X \text{ ve } f \circ g = \mathrm{Id}_Y).$$

Yukarıdaki eşdeğerliği f^{-1} fonksiyonunun bir başka tanımı olarak da görebiliriz.

Bu son yaptığımızdan da f'nin tersi g ise, g'nin tersinin de f olduğu çıkar. Nitekim sağ taraftaki koşullar f ve g için simetriktirler: Yani f ve g için sağlanıyorlarsa, g ve f için de sağlanırlar. Dolayısıyla

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

eşitliği bulunur çünkü "f'nin tersi g ise, g'nin tersi de f'dir" önermesi aynen $(f^{-1})^{-1} = f$ eşitliği demektir.

Geçmişte, eğer $f : X \longrightarrow X$ bir fonksiyonsa ve $n \in \mathbb{N}$ iken f^n fonksiyonunu tanımlamıştık (bkz. sayfa 70). Eğer $f : X \longrightarrow X$ bir eşleşmeyse, f^n fonksiyonunu negatif tamsayılar için de tanımlayabiliriz: $n \in \mathbb{N}$ için

$$f^{-n} = (f^{-1})^n$$

olsun. Böylece her $n \in \mathbb{Z}$ için f^n eşleşmesi tanımlanmıştır. Alıştırma 4.36'yı genelleyip, her $n, m \in \mathbb{Z}$ için $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ ve $(f^n)^m = f^{nm}$ eşitliklerini kanıtlamak, biraz meşakkatli olsa da çok zor değildir. İleride bu eşitlikleri kullanmayacağımızdan kanıtı vermiyoruz.

Notlar ve Örnekler

4.71. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 3x + 4$ kuralıyla tanımlansın. f bir eşlemedir. f'nin tersini bulmak için,

$$y = 3x + 4$$

denkleminden x'i y cinsinden bulmak yeterlidir:

$$x = \frac{y-4}{3}.$$

Demek ki f'nin tersi,

$$g(y) = \frac{y-4}{3}$$

kuralıyla tanımlanmış $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Tabii, fonksiyonu, alışık olduğumuz üzere,

$$g(x) = \frac{x-4}{3}$$

olarak yazmada bir sorun olmaz.

4.72. $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış olsun. f bir eşleşmedir ve $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ olur.

4.73. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(x) = x + 1$ kuralıyla tanımlanmış olsun. f bir eşleşmedir ve $f^{-1}(x) = x - 1$ olur. Öte yandan $g(x) = x + 1$ kuralıyla tanımlanmış $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu birebirdir ama örten değildir, dolayısıyla eşleme değildir.

4.74. Örnek 4.41'de verilen eşlemenin tersinin formülünü bulun.

Bileşkeyle Fonksiyonun Tersini Alma İşlemleri Arasındaki İlişki: İki eşlemenin bileşkesinin tersiyle, eşlemelerin terslerinin bileşkesi arasında yakın bir ilişki vardır. Karmaşık gelebilecek bu cümleyi açıklayalım:

$$f : X \longrightarrow Y \text{ ve } g : Y \longrightarrow Z$$

birer eşleme olsunlar. O zaman $g \circ f : X \longrightarrow Z$ fonksiyonu da bir eşlemedir. Dolayısıyla

$$f^{-1},\ g^{-1} \text{ ve } (g \circ f)^{-1}$$

fonksiyonlarından söz edebiliriz. Sorumuz şu: Bu üç fonksiyon arasında nasıl bir ilişki vardır? Yanıt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Bunu kanıtlayalım. Ters fonksiyon tanımına göre,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_Z \text{ ve } (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_X$$

eşitliklerini kanıtlamamız gerekiyor. Bileşkenin birleşme özelliği sayesinde her iki eşitlik de kolaylıkla kanıtlanır:

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_Y \circ g^{-1} \\ &= (g \circ \mathrm{Id}_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_Z\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y \circ f \\ &= (f^{-1} \circ \mathrm{Id}_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X\,.\end{aligned}$$

Bunun gibi

$$(h \circ g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$$

eşitliği ve benzerleri geçerlidir.

Bu arada,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

eşitliğinde g ve f'nin yer değiştirdiklerini gözlemleyelim, yani $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ eşitliği değil, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ eşitliği geçerlidir. Hatta tanım kümeleri uygun değilse, $g^{-1} \circ f^{-1}$ ifadesi anlamlı bile değildir. Ama tabii tanım kümeleri uygunsa ve şans eseri $f \circ g = g \circ f$ oluyorsa, $g^{-1} \circ f^{-1}$ ile $f^{-1} \circ g^{-1}$ arasında bir fark yoktur.

Alıştırmalar

4.75. $\{1, 2, 3\}$ kümesinin 6 eşleşmesinin herbirinin tersini bulun.

4.76. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin $f^{-1} = f$ eşitliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.77. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin $f^{-1} = f \circ f$ eşitliğini sağlayan tüm f eşleşmelerini bulun.

4.78. a. $f(x) = 1/x$ kuralıyla tanımlanmış, $f : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ fonksiyonunun tersini bulun.

b. $f(x) = -x$ kuralıyla tanımlanmış, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tersini bulun.

c. $f(x) = -1/x$ kuralıyla tanımlanmış, $f : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^{<0}$ fonksiyonunun tersini bulun.

d. $a \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x) = a - x$ kuralıyla tanımlanmış, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tersini bulun.

4.79. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 7x - 5$ kuralıyla tanımlanmış olsun. f'nin bir eşleme olduğunu gösterin ve f'nin tersini bulun.

4.80. $p < q$ iki kesirli sayı olsun. $f : (0, 1) \longrightarrow (p, q)$ fonksiyonu $f(x) = x(q-p)+p$ formülüyle tanımlanmış olsun. f'nin bir eşleme olduğunu gösterin.

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbb{Q}$$

eşdeğerliğini gösterin. $1/\sqrt{2}$ sayısı kesirli bir sayı olmadığından (bkz. sayfa 19) bundan $f(1/\sqrt{2})$ sayısının kesirli olmadığı çıkar. Dolayısıyla herhangi iki farklı kesirli sayı arasında kesirli olmayan (yani irrasyonel) bir sayı vardır.

4.81. f, g, h birer eşleme olsunlar ve $h \circ g \circ f$ bileşkesinin alınabileceğini varsayalım. $(h \circ g \circ f)^{-1}$ fonksiyonunu h^{-1}, g^{-1} ve f^{-1} cinsinden yazın.

4.82. A herhangi bir küme olsun. $X = \wp(A)$ olsun. $f : X \longrightarrow X$ fonksiyonu

$$f(x) = x^c = A \setminus x$$

olarak tanımlansın. $f \circ f = \mathrm{Id}_X$ eşitliğini kanıtlayın. f'nin tersini bulun.

4.83. $f \circ g$ bir eşlemeyse f ya da g bir eşleme olmak zorunda mıdır?

4.84. $f \circ f$ bir eşlemeyse f bir eşleme olmak zorunda mıdır?

4.85. A herhangi bir küme olsun. $X = \mathrm{Sym}\, A$, A'nın eşleşmelerinden oluşan küme olsun. Kanıtlayın: $f \mapsto f^{-1}$ kuralıyla verilmiş fonksiyon X'in bir eşlemesidir ve kendi kendisinin tersidir.

4.86. X ve Y birer küme olsun. $f, g : X \longrightarrow Y$ iki eşleme olsun. Bir ve bir tane $h : Y \longrightarrow Y$ eşlemesi için $h \circ f = g$ eşitliğini kanıtlayın

4.87. X ve Y birer küme olsun. $f, g : X \longrightarrow Y$ iki eşleme olsun. Bir ve bir tane $h : X \longrightarrow X$ eşlemesi için $f = g \circ h$ eşitliğini kanıtlayın

4.88. Eğer $X \approx Y$ ise $\wp(X) \approx \wp(Y)$ olduğunu kanıtlayın.

4.89. Eğer $X \approx Y$ ve $A \approx B$ ise $X^A \approx Y^B$ olduğunu kanıtlayın.

4.90. $\mathbb{R}$ kümesinde olmayan bir eleman alalım ve bu elemana ∞ diyelim.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

olsun. $ad - bc \neq 0$ eşitsizliğini sağlayan dört a, b, c, d gerçel sayısı için $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinden $\overline{\mathbb{R}}$ kümesine giden şu fonksiyonu tanımlayalım:

$$f_{a,b,c,d}(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{cx+d} & \text{eğer } x \neq \frac{-c}{d} \text{ ve } x \neq \infty \text{ ise} \\ \frac{a}{c} & \text{eğer } x = \infty \text{ ise} \\ \infty & \text{eğer } x = \frac{-c}{d} \text{ ise} \end{cases}$$

a. $\{f_{a,b,c,d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc \neq 0\}$ fonksiyonlar kümesinin bileşke ve ters alma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Özdeşlik fonksiyonunun bu kümede olduğunu kanıtlayın.

b. $f_{a,b,c,d}$ fonksiyonunun eşleşme olduğunu kanıtlayın.

c. Eğer u, v, w $\overline{\mathbb{R}}$ üç değişik elemansa ve u', v', $w' \in \overline{\mathbb{R}}$ üç değişik elemansa o zaman

$$f_{a,b,c,d}(u) = u',$$
$$f_{a,b,c,d}(v) = v',$$
$$f_{a,b,c,d}(w) = w'$$

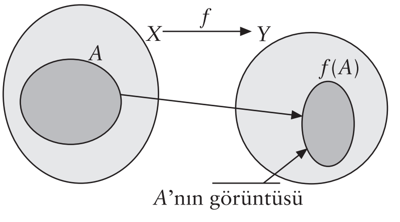
eşitliklerini sağlayan a, b, c, d gerçel sayıları olduğunu kanıtlayın.

4.7 Görüntü Kümesi

$f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer A, X'in bir altkümesiyse, $f(A)$ kümesini şöyle tanımlayalım:

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

$f(A)$, Y kümesinin bir altkümesidir elbette. $f(A)$ kümesine A'nın (f altında) ***görüntüsü*** ya da ***imgesi*** adı verilir.



Örneğin, eğer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmişse,

$$\begin{aligned}
&f(\{5\}) = \{25\},\\
&f(\{-3,\ 5\}) = \{9,\ 25\},\\
&f(\{-5,\ 5\}) = \{25\},\\
&f((-1, 1)) = [0, 1),\\
&f([-1, 1)) = [0, 1],\\
&f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\geq 0},\\
&f(\mathbb{R}^{>0}) = \mathbb{R}^{>0},\\
&f([-3, \infty)) = \mathbb{R}^{\geq 0},\\
&f([3, \infty)) = [9, \infty),\\
&f(\emptyset) = \emptyset,\\
&f(\mathbb{Z}) = f(\mathbb{N}) = \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots\}.
\end{aligned}$$

Her f fonksiyonu için $f(\emptyset) = \emptyset$ olur. Eğer $f(A) = \emptyset$ ise, $A = \emptyset$ olmak zorundadır, çünkü ne de olsa, A'da bir eleman olsaydı $f(A)$'da da bir eleman olmak zorunda olurdu.

Böylece, $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu sayesinde, X'in herhangi bir A altkümesini Y'nin $f(A)$ altkümesine gönderen $\wp(X)$'ten $\wp(Y)$'ye giden bir fonksiyon tanımlanır. Karışıklığa neden olmayacaksa, $\wp(X)$'ten $\wp(Y)$'ye giden bu yeni fonksiyon da f olarak yazılır, oysa $\tilde{f}$ gibi biraz farklı bir biçimde yazılması daha doğru olurdu.

Nitekim bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonundan elde edilen $\wp(X)$'ten $\wp(Y)$'ye giden bu fonksiyonun f ile aynı şekilde yazılması X'in bir elemanının aynı zamanda X'in altkümesi olduğu zaman gerçek bir sorun yaratır. O zaman $f(A)$ iki farklı anlama gelebilir. Örneğin,

$$X = \{0, 1, \{0, 1\}\} \text{ ve } Y = \{a, b, c\}$$

olsun. Ve X'ten Y'ye giden fonksiyonu şu kurallarla tanımlayalım:

$$f(0) = a,\ f(1) = b \text{ ve } f(\{0, 1\}) = c.$$

O zaman $\{0, 1\}$ eleman olarak algılandığında, $f(\{0, 1\}) = c$ olur ama $\{0, 1\}$ altküme olarak algılandığında,

$$f(\{0, 1\}) = \{f(0), f(1)\} = \{a, b\}$$

olur! Okurun bu iki fonksiyonu karıştırmayacağını ve karıştırma olasılığı varsa ikincisi için $\tilde{f}$ gibi biraz değişik bir simge bulmasını öneririz, o zaman

$$f(\{0, 1\}) = c \text{ ve } \tilde{f}(\{0, 1\}) = \{a, b\}$$

olur ve herhangi bir karışıklığa yer kalmaz. Biz $\tilde{f}$ yazılımına başvuracağız.

Tanımlanan bu fonksiyona f'nin ***görüntü fonksiyonu*** adını verelim.

Alıştırmalar

4.91. $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve A, A_1 ve A_2, X'in altkümeleri olsun.

a. $A_1 \subseteq A_2$ ise, $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ ilişkisini kanıtlayın.

b. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ eşitliğini kanıtlayın.

c. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ ilişkisini kanıtlayın. Eşitliğin her zaman doğru olmadığını gösterin. Eğer f birebirse eşitliğin doğru olduğunu gösterin.

d. $f(A^c)$ ile $f(A)^c$ arasında genel olarak herhangi bir içindelik ilişkisinin olmadığını gösterin.
Eğer f birebirse, $f(A^c) \subseteq f(A)^c$ ilişkisini kanıtlayın.
Eğer f örtense $f(A)^c \subseteq f(A^c)$ ilişkisini kanıtlayın.
Eğer f birebir ve örtense, $f(A^c) = f(A)^c$ eşitliğini kanıtlayın.

e. f'nin örten olması için $f(X) = Y$ eşitliğinin yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

4.92. Yukarıdakilere eşdeğer önermeleri X'in (iki altkümesi yerine) sonsuz sayıda altkümesi için kanıtlayın.

4.93. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(x) = x - x^2$ denklemiyle ve $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = x/(1+x^2)$ denklemiyle tanımlanmış olsun. $(g \circ f)(3)$ sayısını hesaplayın.

$$\{x : (g \circ f)(x) \geq 0\}$$

kümesini bulun.

4.94. $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Z \longrightarrow X$ iki fonksiyon olsun.

$$\tilde{f} : \wp(X) \longrightarrow \wp(Y) \text{ ve } \tilde{g} : \wp(Z) \longrightarrow \wp(X)$$

bu altbölümde tanımlanan fonksiyonlar olsun. $\widetilde{(f \circ g)}$ fonksiyonu da $\wp(Z)$'den $\wp(Y)$'ye giden fonksiyon olsun. $\widetilde{(f \circ g)} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$ eşitliğini kanıtlayın.

4.95. f örtense $\tilde{f}$ de örtendir. Kanıtlayın. $\tilde{f}$ örtense f örten midir?

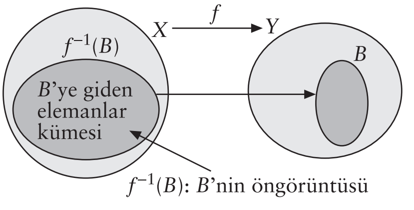
4.96. f ve $\tilde{f}$ fonksiyonlarının birebirliği arasında bir ilişki var mıdır?

4.8 Önimge

$f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $B \subseteq Y$ verilmiş olsun. X'in $f^{-1}(B)$ altkümesini şöyle tanımlayalım:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

$f^{-1}(B)$ kümesi, X'in f fonksiyonu altında B'ye giden elemanlarından oluşur. $f^{-1}(B)$ kümesine B'nin ***öngörüntüsü*** ya da ***önimgesi*** adı verilir.



$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^2$ fonksiyonu örneğini alalım:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(\{25\}) = \{-5,\, 5\},\\
&f^{-1}(\{0, 25\}) = \{-5,\, 0,\, 5\},\\
&f^{-1}(\{-2,\, 4\}) = \{-2,\, 2\},\\
&f^{-1}(\{3\}) = \{-\sqrt{3},\, \sqrt{3}\},\\
&f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset,\\
&f^{-1}([-1, 0]) = \{0\},\\
&f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1],\\
&f^{-1}([-1, 4)) = (-2, 2),\\
&f^{-1}([0, 1]) = f^{-1}((-\infty, 1]) = [-1, 1],\\
&f^{-1}((0, 1)) = (-1, 1) \setminus \{0\},\\
&f^{-1}((0, \infty)) = \mathbb{R} \setminus \{0\},\\
&f^{-1}((1, \infty)) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).
\end{aligned}$$

Böylece $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonundan hareketle, $\wp(Y)$'den $\wp(X)$'e giden bir fonksiyon tanımladık. Bu fonksiyon da ne yazık ki f^{-1} olarak yazılır ve kimileyin "f eşlemesinin tersi" anlamına gelen f^{-1} ile karıştırılabilir. Örneğin eğer f bir eşlemeyse ve Y'nin bir altkümesi aynı zamanda Y'nin bir elemanıysa... Karıştırmayın lütfen! Karıştırma ihtimali varsa $\wp(Y)$'den $\wp(X)$'e giden fonksiyonu f^{-1} olarak değil de $f^{\sim 1}$ olarak yazın. Biz de bazen (en azından önümüzdeki birkaç satır boyunca) öyle yapacağız.

$(f^{\sim 1})^{\sim 1} = f$ eşitliği kesinlikle geçerli değildir. Nitekim eğer $f : X \longrightarrow Y$ ise, $(f^{\sim 1})^{\sim 1}$ fonksiyonu $\wp(\wp(X))$'ten $\wp(\wp(Y))$'ye gider, yani tanım ve değer kümeleri bile farklıdır!

Tanımlanan bu fonksiyona f'nin ***öngörüntü fonksiyonu*** adını verelim.

Eğer $y \in Y$ ise, $f^{\sim 1}(\{y\})$ yerine kimileyin daha pratik olan $f^{-1}(y)$ ya da $f^{\sim 1}(y)$ yazalım.

Alıştırmalar

4.97. $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve B, B_1 ve B_2, Y'nin altkümeleri olsun.

a. $B_1 \subseteq B_2$ ise, $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ ilişkisini kanıtlayın.

b. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ eşitliğini kanıtlayın. Sonsuz sayıda bileşim için de eşitliğin geçerli olduğunu kanıtlayın.

c. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ eşitliğini kanıtlayın. Sonsuz sayıda kesişim için de eşitliğin geçerli olduğunu kanıtlayın.

d. $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ eşitliğini kanıtlayın.

e. $f^{-1}(Y) = X$ eşitliğini kanıtlayın.

f. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ içindeliğini kanıtlayın. Eşitliğin geçerli olmayabileceğini gösteren bir örnek verin. Eğer f örtense eşitliğin geçerli olduğunu kanıtlayın. Eğer f örten değilse eşitliğin geçerli olmadığı bir $B \subseteq Y$ altkümesi bulun.

g. $A \subseteq X$ ise $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ içindeliğini kanıtlayın. Eşitliğin geçerli olmayabileceğini gösteren bir örnek verin. Eğer f birebirse eşitliğin geçerli olduğunu kanıtlayın.

4.98. Bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu ve A, $B \subseteq X$ ve C, $D \subseteq Y$ için

$$f(A \Delta B) \text{ ve } f(A) \Delta f(B)$$

ve

$$f^{-1}(C \Delta D) \text{ ve } f^{-1}(C) \Delta f^{-1}(D)$$

kümeleri arasında nasıl bir ilişki vardır? f'nin birebir, örten ve eşleme olduğu durumları da çözümleyin.

4.99. $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Z \longrightarrow X$ olsun. $(f \circ g)^{\sim 1} = g^{\sim 1} \circ f^{\sim 1}$ eşitliğini kanıtlayın.

4.100. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = 3x - 5$ olarak tanımlansın. f'nin bir eşleşme olduğunu gösterin. f^{-1} fonksiyonunun tanımını bulun. $(-2, 3)$ aralığının imgesini ve önimgesini bulun.

4.101. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x) = x^2 + 3x - 5$ olarak tanımlansın. $f(\mathbb{R})$ kümesini bulun. $(-7, 5]$ aralığının önimgesini bulun. $\mathbb{Q}$'nün imgesinin $\mathbb{Q}$'nün bir altkümesi olduğunu kanıtlayın. $\mathbb{Q}$'nün önimgesinin $\mathbb{Q}$'nün bir altkümesi olmadığını kanıtlayın.

4.102. f ve f^{-1} fonksiyonları arasında örtenlik ve birebirlik açısından nasıl bir ilişki vardır? Örneğin biri örtense diğeri de örten midir?

4.9 Fonksiyonların Kısıtlanması

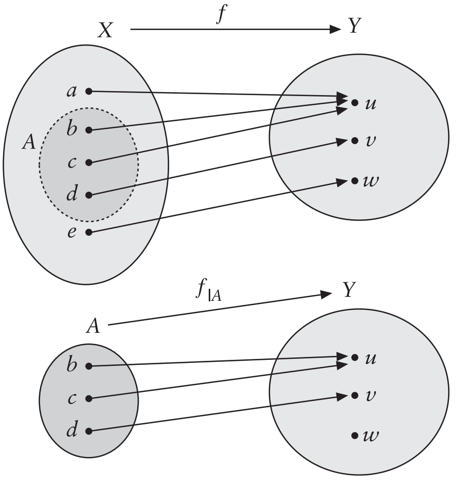
$f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. A, X'in bir altkümesi olsun. f'nin sadece A'da aldığı değerlerle ilgileniyorsak, o zaman f'yi A'ya kısıtlayabiliriz, yani f yerine, her $x \in A$ için,

$$g(x) = f(x)$$

eşitliğiyle tanımlanan

$$g : A \longrightarrow Y$$

fonksiyonunu ele alabiliriz. Tanımladığımız bu g fonksiyonu $f_{|A}$ olarak yazılır. $f_{|A}$ fonksiyonu f'nin A'ya ***kısıtlanışı*** olarak okunur. Bunun bir resmini aşağıya çizdik.



Örneğin, $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir değildir ama $f_{|\mathbb{R}_{\geq 0}} : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birebirdir.

Eğer $B \subseteq A \subseteq X$ ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyonsa, $(f_{|A})_{|B} = f_{|B}$ eşitliği geçerlidir. Elbette.

Alıştırmalar

4.103. $(f \circ g)_{|A} = f \circ (g_{|A})$ eşitliğini kanıtlayın. ($f \circ g$ bileşkesinin alınabileceğini varsayıyoruz elbette.)

4.104. f birebirse $f_{|A}$ da birebirdir; kanıtlayın. Ama f örtense, $f_{|A}$ örten olmayabilir; gösterin.

4.105. $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\tilde{f} : \wp(X) \longrightarrow \wp(Y)$, f'nin görüntü fonksiyonu olsun. $A \subseteq X$ olsun. $\wp(A)$'dan $\wp(Y)$'ye giden $(f_{|A})^{\sim}$ fonksiyonunu $\tilde{f}$ fonksiyonu cinsinden ifade edebilir misiniz?

4.106. $f : X \longrightarrow Y$ ve $B \subseteq Y$ olsun.

$$(f^{\sim 1})_{|\wp(B)} : \wp(B) \longrightarrow \wp(X)$$

fonksiyonunu $\tilde{f}$ fonksiyonu cinsinden ifade edebilir misiniz?

4.10 Fonksiyonların Bileşimi

Çift tamsayıları 0'a, tek tamsayıları 1'e götüren f fonksiyonuna bakalım. Örneğin,

$$f(4) = f(-6) = f(0) = 0,\ f(3) = f(-5) = f(1) = 1.$$

Bu fonksiyonun tanımını şöyle de verebilirdik:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ 1 & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

Buna benzer fonksiyon tanımları matematikte sık sık yapılır. Mesela

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{eğer } x \in \mathbb{Q} \text{ ise} \\ x+2 & \text{eğer } x \notin \mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu kesirli sayıların karesini alır ama kesirli olmayan sayılara 2 ekler. Bu yöntemle tanımlanan fonksiyon örneklerini kolaylıkla çoğaltabiliriz. İşte bir tane daha:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{eğer} & x < -2 & \text{ise} \\ x+2 & \text{eğer} & -2 \le x < 5 & \text{ise} \\ 4x^3 - x & \text{eğer} & 5 \le x & \text{ise} \end{cases}$$

Genel yöntem şöyle: A ve B iki ayrık küme ve $f : A \longrightarrow X$ ve $g : B \longrightarrow Y$ iki fonksiyon olsun. O zaman $A \cup B$'den $X \cup Y$'ye giden ve A'da f'ye eşit olan, B'de ise g'ye eşit olan bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Bu fonksiyonu

$$f \cup g$$

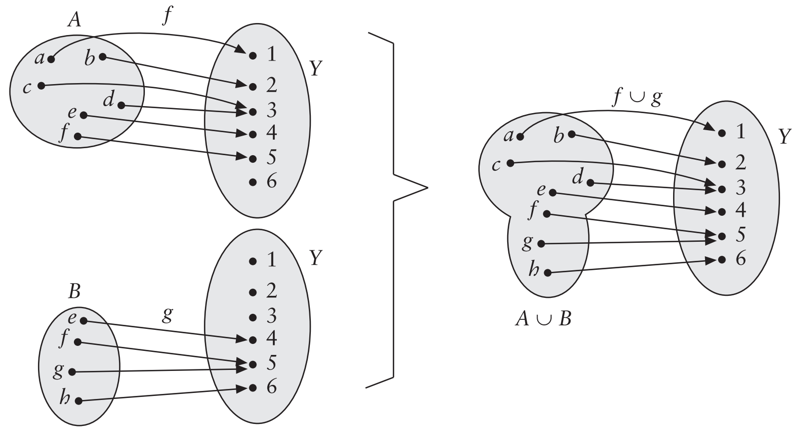
ile gösterirsek, tanımı şöyle yazarız:

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{eğer } x \in A \text{ ise} \\ g(x) & \text{eğer } x \in B \text{ ise} \end{cases}$$

$f \cup g$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının ***bileşimi*** adı verilir. Bazen de $f \cup g$ fonksiyonuna ***parçalı tanımlanmış fonksiyon*** ya da ***koşullu tanımlanmış fonksiyon*** adı verilir.

Ya $A \cap B$ boşküme değilse? O zaman da $f \cup g$ fonksiyonunu aynen yukarıdaki gibi tanımlayabiliriz, yeter ki $A \cap B$ kesişiminde f ve g aynı değerleri alsınlar, yani her $x \in A \cap B$ için $f(x) = g(x)$ olsun, yani $f_{|A\cap B} = g_{|A\cap B}$ olsun.

Çoğu zaman uygulamada $X = Y$ olur. Zaten X ve Y yerine her zaman $X \cup Y$ kümesini alabiliriz. Bundan sonra değer kümesi hep aynı olacak. Bu durumun resmi aşağıda.



Bu dediğimizi iki kümeden n tane kümeye genelleştirebiliriz.

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$$

kümeler olsun. Her $i = 1, \ldots, n$ için, $f_i : A_i \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca bir de, her $i,\ j = 1, \ldots, n$ ve her $x \in A_i \cap A_j$ için $f_i(x) = f_j(x)$ eşitliğini varsayalım. O zaman bu n tane fonksiyonun bileşimini alabiliriz. Fonksiyonların bileşimi

$$f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n$$

olarak yazılır ve $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinden Y kümesine gider. Tanım şöyledir: $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ ise, o zaman x, A_i kümelerinden birindedir; eğer $x \in A_i$ ise,

$$(f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n)(x) = f_i(x)$$

olarak tanımlanır. Burada önemli olan nokta, x, farklı A_i kümelerinde de olsa,

$$(f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n)(x) = f_i(x)$$

formülünün hep aynı değeri vermesidir.

Bu yaptığımızı sonsuz sayıda fonksiyona da genelleştirebiliriz. Y bir küme olsun. F, değerlerini Y kümesinde alan bir fonksiyonlar kümesi olsun, yani F'nin her elemanı, bir kümeden Y'ye giden bir fonksiyon olsun. Ayrıca F'deki her

$$f : A \longrightarrow Y \text{ ve } g : B \longrightarrow Y$$

fonksiyonları için $A \cap B$ kesişiminde f ve g aynı değerleri alsın. O zaman F'deki fonksiyonların bileşimini alıp yeni bir $\bigcup F$ fonksiyonu tanımlayabiliriz. Bu yeni fonksiyonun tanım kümesi F'deki fonksiyonların tanım kümelerinin bileşimidir. Değer kümesi ise Y'dir.

Fonksiyonların bileşimini fonksiyonları yapıştırmak olarak düşünebilirsiniz. Tabii fonksiyonların yapışabileceğinden, yani kesişimlerde aynı değerleri aldıklarından emin olmak lazım.

Alıştırmalar

4.107. A ile C kümeleri arasında ve B ile D kümeleri arasında birer eşleme varsa ve $A \cap B = C \cap D = \emptyset$ ise, $A \cup B$ ve $C \cup D$ kümeleri arasında da bir eşleme olduğunu gösterin.

4.108. F bir eşlemeler kümesi olsun. F'deki fonksiyonların tanım kümelerinin ayrık olduklarını varsayalım. Aynı varsayımı değer kümeleri için de yapalım. A, F'deki fonksiyonların tanım kümelerinin bileşimi, B de F'deki fonksiyonların değer kümelerinin bileşimi olsun. A ile B kümeleri arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın.

4.109. $f : A \cup B \longrightarrow X$ bir fonksiyon olsun. $f_{|A} \cup f_{|B} = f$ eşitliğini kanıtlayın.

4.110. A ve B iki ayrık küme ve $g : A \longrightarrow X$ ve $g : B \longrightarrow X$ iki fonksiyon olsun. $(g \cup h)_{|A} = g$ ve $(g \cup h)_{|B} = h$ eşitliğini kanıtlayın.

4.11 İki Önemli Sonuç

Özellikle sonsuz kümeler kısmında önemli olacak iki teorem kanıtlayacağız.

Teorem 4.1. *X herhangi bir küme olsun. X'in altkümeler kümesi $\wp(X)$ ile, X'ten $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi arasında bir eşleme vardır.*

Kanıt: X'ten $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi 2^X olarak gösterilir.

Eğer $A \subseteq X$ ise, $f_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ şu fonksiyon olsun:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ ise} \\ 0 & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

$f(A) = f_A$ olarak tanımlanmış olan $f : \wp(X) \longrightarrow 2^X$ fonksiyonu bir eşlemedir. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. □

Yukarıdaki kanıt, aslında Bölüm 2.6'daki fikrin genelleşmiş halidir.

Eğer X sonsuzsa, $\wp(X)$ ile, X'ten $\{0, 1, 2\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi arasında da bir eşleme vardır ama bunun kanıtı bu kitaba sığmayacak kadar zordur.

Teorem 4.1'in kanıtında tanımlanan f_A fonksiyonu A kümesinin ***karakteristik fonksiyonu*** olarak adlandırılır. Literatürde, genellikle, f_A yerine χ_A yazılır.

Aşağıdaki teorem hem ilginç hem de önemlidir. X sonluyken teorem çok basit elbette, çünkü eğer X'in n elemanı varsa $\wp(X)$'in 2^n tane elemanı var ve $n < 2^n$'dir. Ama eğer X sonsuzsa, aşağıdaki teorem, bir anlamda, $\wp(X)$'in X'ten "daha çok" elemanı olduğunu söylüyor.

Teorem 4.2 (Cantor)**.** *X'ten $\wp(X)$'e giden örten bir fonksiyon yoktur.*

Kanıt: Teoremin yanlış olduğunu varsayalım. $f : X \longrightarrow \wp(X)$, örten bir fonksiyon olsun.

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

olsun. $A \in \wp(X)$ ve f örten olduğundan, X'in bir a elemanı için $f(a) = A$ olur. Şimdi,

$$a \in A \Leftrightarrow a \notin f(a) \Leftrightarrow a \notin A$$

olur. Çelişki. Demek ki f örten olamaz. □

Alıştırmalar

4.111. f, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin

$$f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3,\ f(4) = 4,\ f(5) = 5$$

olarak tanımlanan eşlemesi olsun. Aynı kümenin $f \circ g = g \circ f$ eşitliğini sağlayan tüm eşleşmelerini bulun. (Toplam 12 tane vardır.)

4.112. Yukarıdaki alıştırmayı

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1,\ f(4) = 5,\ f(5) = 4$$

olarak tanımlanan f eşlemesi için yapın.

4.113. $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin $f^3 = \mathrm{Id}$ eşitliğini sağlayan tüm eşleşmelerini bulun.

4.114. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin $f^3 = \mathrm{Id}$ eşitliğini sağlayan kaç eşleşmesi vardır?

4.115. $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ kümesi arasında bir eşleme bulun.

4.116. $\wp(\mathbb{N})$ ile $\wp(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ arasında bir eşleme bulun.

4.117. X bir küme, $a \in X$ ve $Y = X \setminus \{a\}$ olsun. $k \geq 1$, bir doğal sayı olsun.

a. X'in a'yı içeren k elemanlı altkümeler kümesiyle, Y'nin $k-1$ elemanlı altkümeler kümesi arasında bir eşleme bulun. Bu eşlemenin tersini yazın.

b. X'in a'yı içermeyen k elemanlı altkümeler kümesiyle, Y'nin k elemanlı altkümeler kümesi arasında bir eşleme bulun. Bu eşlemenin tersini yazın.

4.118. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin eşleşmeleri $\mathrm{Sym}\, 5$ olarak yazılır. f, 4.111'uncu alıştırmadaki eşleme olsun. $\{g^{-1} \circ f \circ g : g \in \mathrm{Sym}\, 5\}$ kümesinin elemanlarını bulun.

4.119. X ve Y herhangi iki kümeyse, $\mathrm{Fonk}(X, Y)$ ya da Y^X, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini temsil eder. Eğer $|X| = n$ ise (yani X'in eleman sayısı n ise) ve $|Y| = m$ ise

$$|\,\mathrm{Fonk}(X, Y)| = m^n$$

olduğunu kanıtlayın. Bu durumda X'ten Y'ye giden kaç tane birebir fonksiyon vardır? Kaç tane örten fonksiyon vardır? (Bu zor; ama [N4]'te bu sayıyı buluyoruz.)

4.120. X bir küme olsun. X'in eşleşmeleri kümesi $\mathrm{Sym}\, X$ olarak yazılır. $f \in \mathrm{Sym}\, X$ olsun.

$$C(f) = \{g \in \mathrm{Sym}\, X : f \circ g = g \circ f\}$$

olarak tanımlansın.

a. $\mathrm{Id}_X \in C(f)$ önermesini kanıtlayın.

b. $g, h \in C(f)$ ise $g \circ h \in C(f)$ olduğunu kanıtlayın.

c. $g \in C(f)$ ise $g^{-1} \in C(f)$ olduğunu kanıtlayın.

4.121. X'ten X'e giden bir f fonksiyonu, pozitif bir n doğal sayısı için $f^n = \mathrm{Id}_X$ eşitliğini sağlıyorsa (burada, f^n, n tane f'nin bileşkesi alınıyor anlamına geliyor), f'nin bir eşleme olduğunu kanıtlayın. f'nin tersini f ve bileşkeleri cinsinden bulun. $f^n = \mathrm{Id}_X$ ise, her $g : Y \longrightarrow X$ eşlemesi için, $(g^{-1} \circ f \circ g)^n = \mathrm{Id}_X$ eşitliğini kanıtlayın.

4.122. A, B ve Y üç küme olsun. A ve B'nin ayrık olduklarını varsayalım. $f : A \longrightarrow Y$ ve $g : B \longrightarrow Y$ birebir iki fonksiyon olsun. $f \cup g$ fonksiyonunun birebir olması için $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ eşitliğinin gerek ve yeter koşul olduğunu gösterin.

4.123. A, B ve Y üç küme olsun. $f : A \longrightarrow Y$ ve $g : B \longrightarrow Y$ iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun $A \cap B$'ye kısıtlamalarının eşit olduklarını varsayalım. $f \cup g$ fonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter bir koşul bulun.

4.124. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ eşitliğini sağlayan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eşleşmelerine ***izometri*** denir. İzometrilerin kümesini $\operatorname{Izom} \mathbb{R}$ olarak gösterelim. $g \circ h$ yerine gh yazacağız.

a. $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}} \in \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ önermesini kanıtlayın.

b. g, $h \in \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ ise $gh \in \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayın.

c. $g \in \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ ise $g^{-1} \in \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayın.

d. $a \in \mathbb{R}$ için, $t_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_a(x) = x + a$ olarak tanımlansın. t_a öteleme olarak bilinir. $t_a \in \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayın.

e. $t_0 = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}, t_a t_b = t_{a+b}, t_a^{-1} = t_{-a}$ eşitliklerini kanıtlayın.

f. $T = \{t_a : a \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\mathbb{R}$ ile T arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın.

g. $\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varepsilon(x) = -x$ olarak tanımlansın. $\varepsilon \in \operatorname{Izom}(\mathbb{R})$ olduğunu kanıtlayın. (ε, 0 merkezli ***simetridir***.)

h. $T\varepsilon = \{t\varepsilon : t \in T\}$ olsun. $T \cap T\varepsilon = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın.

i. $T \cup T\varepsilon \subseteq \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ ilişkisini kanıtlayın.

j. $T \cup T\varepsilon = \operatorname{Izom} \mathbb{R}$ eşitliğini kanıtlayın.

k. a ve b, iki farklı gerçel sayı ve $A = \{a, b\}$ olsun. Eğer f ve g, $\mathbb{R}$'nin iki izometrisi ve $f_{|A} = g_{|A}$ ise $f = g$ eşitliğini kanıtlayın.

4.125. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ eşitliğini sağlayan $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının eşleşme olmak zorunda olduklarını kanıtlayın. (Aynı şey $\mathbb{Z}$ için de geçerlidir ama $\mathbb{N}$ için geçerli değildir.)

4.126. X bir küme $f : X \longrightarrow X$ herhangi bir fonksiyon olsun. Şunu kanıtlayın: Öyle bir $Z \subseteq X$ vardır ki
a. $f(Z) = Z$ olur,
b. $f_{|Z} : Z \longrightarrow Z$ bir eşlemedir ve
c. Z, X'in bu iki özelliğini sağlayan en büyük altkümesidir.
Böyle bir Z'nin biricik olduğunu kanıtlayın.

4.12 Dizilerin Matematiksel Tanımı*

Kitabın en başından beri dizilerden, özellikle 01-dizilerinden söz ettik ama dizilerin tam matematiksel tanımını vermedik. Bu bölümde dizinin matematiksel tanımını vereceğiz.

Herhangi bir dizi alalım. Diyelim asal sayı dizisini aldık:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$$

Bu dizi aslında bir fonksiyondur, $\mathbb{N}$'den asal sayılar kümesini altküme olarak içeren bir kümeye giden, 0'da 2, 1'de 3, 2'de 5, 3'te 7, 4'te 11 vs. değerini alan fonksiyondur, yani diziye x adını verirsek, x, tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan ve

$$x(0) = 2,\ x(1) = 3,\ x(2) = 5,\ x(3) = 7,\ x(4) = 11,\ \ldots$$

değerlerini alan bir fonksiyondur.

Bir 01-dizisi de, $\mathbb{N}$'den $\{0, 1\}$ kümesine giden bir fonksiyondur. Örneğin,

$$1010010001011001\ldots$$

dizisi, tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan ve

$$x(0) = 1,\ x(1) = 0,\ x(2) = 1,\ x(3) = 0,\ x(4) = 0,\ \ldots$$

değerlerini alan bir fonksiyondur. (Birinci bölümde ele alınan 01-dizileri, yukarıdaki gibi sağa doğru değil, sola doğru ilerliyordu ama bu görsel ve şekilsel farkın hiçbir öneminin olmadığı belli.)

Dizinin en genel tanımını verelim şimdi. A, herhangi bir küme olsun. Bir ***A-dizisi***, $\mathbb{N}$'den A'ya giden bir fonksiyondur. Eğer

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

böyle bir fonksiyonsa, x'in n doğal sayısında aldığı değeri $x(n)$ yerine x_n olarak gösterelim. Bir fonksiyon (neredeyse) aldığı değerler tarafından belirlendiğinden, x fonksiyonu da

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

değerleri tarafından belirlenir. Dolayısıyla x fonksiyonu yerine

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

yazmanın pek bir sakıncası olamaz.

x_n'ye x'in n'inci ***terimi*** adı verilir.

A-dizilerinden oluşan kümeyi $D(A)$ olarak gösterelim:

$$D(A) = \mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, A) = A^{\mathbb{N}}$$

Eğer A'nın ne olduğu barizse, $D(A)$ yerine sadece D yazabiliriz.

01-dizileri kümesi demek ki $\{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}$ kümesine (yani $\mathbb{N}$'den $\{0,\ 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesine) eşittir.

Bir dizinin terimleri doğal sayılarla numaralandırılmış olmalı. n uzunluğunda sonlu bir dizi, $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\}$ kümesinden bir A kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Dizileri bir fonksiyon olarak tanımlamanın ardında matematiği kümeler kuramına indirgemek kaygısı yatar sadece. Eğer bir fonksiyonu da bir küme olarak tanımlarsak o zaman amacımıza tam olarak ulaşmış olacağız. Bunu, 17'nci bölümde ayrıntılara girmeden kısaca yapacağız.

4.13 Küme Ailesi*

Geçmişte birkaç kez küme ailesi kavramını kullandık, örneğin "$(X_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi olsun" gibi cümleler kurduk ve bir küme ailesinin bileşimini, kesişimini filan aldık. Ama bu kavramı matematiksel olarak tanımlamadık. Bu kısa altbölümde bu eksiğimizi gidereceğiz.

X, elemanları küme olan bir küme olsun. (X kümesini X_i kümelerini eleman olarak içeren bir küme olarak düşünün.)

I bir başka küme olsun.

I'dan X'e giden bir f fonksiyonuna ***küme ailesi*** adı verilir. Eğer $i \in I$ için $f(i) = X_i$ tanımını yaparsak, f'yi $(X_i)_{i\in I}$ olarak göstermekte pek bir sakınca yoktur:

$$f = (X_i)_{i\in I},$$

çünkü ne de olsa bir fonksiyon, değerleri ve tanım kümesi tarafından aşağı yukarı belirlenir. Tek eksik, sağ taraftaki yazılımda değer kümesi X'in anlaşılamaması. Ama eğer f'yi örten alırsak bu eksik de tanımlanır. Zaten küme ailesinin kullanımında f'nin örten olup olmadığı hiçbir zaman sorun olmaz, yani dileyen okur X yerine $f(I)$ alarak f fonksiyonunun örten olduğunu varsayabilir.

X'i elemanları küme olan bir küme olarak alacağımıza, elemanları fonksiyonlar olan bir küme olarak alırsak, ***fonksiyon ailesi*** kavramını tanımlamış oluruz. Örneğin, her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$f_x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu

$$f_x(n) = x^n$$

kuralıyla tanımlanmışsa,

$$f(x) = f_x$$

kuralıyla tanımlanmış

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$$

fonksiyonu $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon ailesidir. Bu aileyi

$$(f_x)_{x\in\mathbb{R}}$$

olarak ya da daha anlaşılır biçimde,

$$(f_x : n \mapsto x^n)_{x\in\mathbb{R}}$$

olarak gösterebiliriz.

Sonuç olarak, "aile" denen şey, konuşmada bir tür kolaylık sağlayan bir söylem biçimidir, ardında derin bir matematik yoktur.

5. Gerçel Sayılarda Değer Alan Fonksiyonlar

Değerlerini gerçel sayılarda alan fonksiyonların matematikte özel bir yeri vardır. Ne de olsa modern dünyada başarı dahil her şey sayılarla değerlendiriliyor. Bu önemli konuya bir bölüm ayırmak gerekiyor.

5.1 Fonksiyonlarda İşlemler

$\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ kümesini, yani bir X kümesinden gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar kümesini ele alalım. $\mathbb{R}$ üzerine tanımlanmış olan toplama, çıkarma, çarpma gibi işlemleri kullanarak, $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ üzerine benzer işlemler tanımlayabiliriz.

Örnek olarak toplama işlemini ele alalım ve $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ üzerine, adına gene toplama diyeceğimiz bir işlem tanımlayalım X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon alalım. Bu fonksiyonlara f ve g adlarını verelim. Gene X'ten $\mathbb{R}$'ye giden ve $f+g$ olarak göstereceğimiz bir fonksiyon tanımlayacağız ve bunu olabilecek en doğal biçimde yapacağız. $f+g$ fonksiyonunu tanımlamak için, bu fonksiyonun X'in herhangi bir x elemanında aldığı değeri tanımlamak yeterlidir. Bu tanımı şöyle yapacağız: $f+g$ fonksiyonunun x'teki değeri, f ve g fonksiyonlarının x'te aldıkları değerlerin toplamı olacak, yani,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

olacak. Böylece tanımlanmış $f+g$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının ***noktasal toplamları*** ya da daha basit olarak ***toplamları*** adı verilir.

Örneğin $X = \mathbb{R}$ ise (ya da X, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir altkümesiyse) ve f ve g fonksiyonları,

$$f(x) = x^2 + 3$$

ve

$$g(x) = 5x^2 + 2x - 3$$

kurallarıyla tanımlanmışlarsa, o zaman, her $x \in X$ için,

$$(f+g)(x) = 6x^2 + 2x$$

olur.

Sabit 0 fonksiyonu s_0, $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ kümesi üzerinde tanımlanmış olan bu toplama işleminin ***etkisiz elemanı***dır, yani her $f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ için

$$f + s_0 = s_0 + f = f$$

olur.

$f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ için, $-f$ fonksiyonunu

$$(-f)(x) = -f(x)$$

olarak tanımlarsak,

$$f + (-f) = (-f) + f = s_0$$

olur.

s_0 yerine çok sık olarak 0 yazılır. Tabii o zaman bu 0 fonksiyonuyla $\mathbb{R}$'nin bir elemanı olan 0'ı karıştırmamak gerekir. 0 fonksiyonuna da ***sıfır fonksiyonu*** adı verilir. Dolayısıyla $0(x) = 0$ yazılımı sizi şaşırtmasın; bu $s_0(x) = 0$ demektir. Bu yazılımla, daha alışık olduğumuz,

$$\begin{aligned} f + 0 &= 0 + f = f, \\ f + (-f) &= (-f) + f = 0 \end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Kanıt tekniğine bir alıştırma olarak, her f, g, $h \in \text{Fonk}(X, -\mathbb{R})$ için,

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

eşitliğini kanıtlayalım. Bunu kanıtlamak için, her iki tarafı da X'in herhangi bir x elemanında değerlendirip sonuçların aynı çıktığını kontrol etmek yeterli. $x \in X$ olsun. Hesaplayalım:

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g+h)(x) \\ &= (f + (g+h))(x). \end{aligned}$$

(Birinci ve ikinci eşitlikler fonksiyon toplamanın tanımı, üçüncü eşitlik gerçel sayılarda geçerli olan birleşme özelliği, dördüncü ve beşinci özellikler gene fonksiyon toplamanın tanımı.) Demek ki

$$(f+g)+h \text{ ve } f+(g+h)$$

fonksiyonları X'in her elemanında aynı değeri alıyorlar, yani bu iki fonksiyon birbirine eşit.

Aşağıdaki alıştırmalarda okurdan fonksiyonlardaki toplama işleminin başka özelliklerini kanıtlamasını isteyeceğiz.

Alıştırmalar

5.1. Her f, $g \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ için, $f + g = g + f$ eşitliğini kanıtlayın.

5.2. Her f, $g \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ için, $-(f+g) = (-f) + (-g)$ eşitliğini kanıtlayın. (Bu fonksiyon, aynen sayılarla olduğu gibi, $-f - g$ olarak yazılır.)

5.3. $f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ olsun. Eğer $f + f = 0$ ise $f = 0$ eşitliğini kanıtlayın. (Bu fonksiyon, aynen sayılarla olduğu gibi, $2f$ olarak yazılır.)

Fonksiyonları çarpabiliriz de: Her f, $g \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ için, $f \cdot g$ ya da kısaca $fg \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ fonksiyonu,

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

olarak tanımlansın. (Burada x, X'in herhangi bir elemanıdır elbet.)

Örneğin $X = \mathbb{R}$ ise (ya da $\mathbb{R}$'nin herhangi bir altkümesi ise) ve f ve g fonksiyonları, $f(x) = x^2 + 3$ ve $g(x) = 5x^2 + 2x - 3$ kurallarıyla tanımlanmışlarsa, o zaman, her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$(fg)(x) = (x^2 + 3)(5x^2 + 2x - 3)$$

olur.

Sabit 1 değeri alan s_1 fonksiyonu yerine 1 yazılır. Tabii bu 1 fonksiyonuyla $\mathbb{R}$'nin bir elemanı olan 1'i karıştırmamak gerekir.

f ve g fonksiyonlarının bileşkesi de kimi zaman $f \circ g$ yerine fg olarak yazılır. Bu durumda bileşkeyle çarpımın karıştırılmaması gerekir. Eğer bir karışıklık sözkonusu olabilecekse, fonksiyonların bileşkesi $f \circ g$ olarak, çarpımı da $f \cdot g$ olarak yazılmalı.

En büyük karışıklık f^2 yazılımında başgösterir. Bu yazılım aynı anda hem $f \circ f$ hem de $f \cdot f$ anlamına gelir. Örneğin $f(x) = x$ ise, birinci anlamda $f^2(x) = x$, ikinci anlamda $f^2(x) = x^2$ olur. Bu iki yazılımı birbirinden ayırdetmek gerekiyorsa birincisi için $f^{(2)}$ yazılımı kullanılabilir.

5.2 Karakteristik Fonksiyon

Eğer X herhangi bir kümeyse ve $A \subseteq X$ ise,

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ ise} \\ 0 & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanan $f_A : X \to \{0, 1\}$ fonksiyonuna, A'nın ***karakteristik fonksiyonu*** denir. Elbette

$$f_A = f_B \Leftrightarrow A = B$$

eşdeğerliği geçerlidir; zaten karakteristik fonksiyonunun varoluş nedeni bu eşitliktir.

f_A fonksiyonunun tanımında f_A yazılımında gösterilmeyen bir X vardır. Eğer karışıklığa yol açacaksa f_A yerine f_A^X yazılabilir.

f_A sadece 0 ve 1 değerleri aldığından,

$$f_A^2 = f_A \cdot f_A = f_A$$

olur; bu da karakteristik fonksiyonlarla hesapları kolaylaştırır. Bazen

$$(f_A - f_B)^2 = |f_A - f_B|$$

eşitliği de işe yarayabilir.

Aşağıdaki eşitlikleri dikkatinize sunarız:

$$\begin{aligned}
f_\emptyset &= 0 \text{ (sabit sıfır fonksiyonu)},\\
f_X &= 1 \text{ (sabit bir fonksiyonu)},\\
f_{A\cap B} &= f_A f_B,\\
f_{A\cup B} &= f_A + f_B - f_A f_B,\\
f_{A^c} &= 1 - f_A,\\
f_{A\setminus B} &= f_A - f_A f_B,\\
f_{A\Delta B} &= f_A + f_B - 2f_A f_B = (f_A^2 + f_B^2 - 2f_A f_B)\\
&= (f_A - f_B)^2 = |f_A - f_B|.
\end{aligned}$$

$f_{A\cap B} = f_A f_B$ ve $f_{A^c} = 1 - f_A$ eşitlikleri biliniyorsa, diğer fonksiyonları bulmak zor değildir. Mesela

$$\begin{aligned}
f_{A\cup B} &= f_{(A^c\cap B^c)^c}\\
&= 1 - f_{A^c\cap B^c}\\
&= 1 - f_{A^c} f_{B^c}\\
&= 1 - (1 - f_A)(1 - f_B)\\
&= 1 - (1 - f_A - f_B + f_A f_B)\\
&= f_A + f_B - f_A f_B
\end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
f_{A\setminus B} &= f_{A\cap B^c}\\
&= f_A f_{B^c}\\
&= f_A(1 - f_B)\\
&= f_A - f_A f_B
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f_{A\Delta B} &= f_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}\\
&= f_{(A\cup B)} - f_{(A\cup B)} f_{A\cap B}\\
&= f_{(A\cup B)}(1 - f_{A\cap B})\\
&= (f_A + f_B - f_A f_B)(1 - f_A f_B)\\
&= f_A + f_B - f_A f_B - (f_A + f_B - f_A f_B) f_A f_B)\\
&= f_A + f_B - f_A f_B - (f_A^2 f_B + f_A f_B^2 - f_A^2 f_B^2)\\
&= f_A + f_B - f_A f_B - (f_A f_B + f_A f_B - f_A f_B)\\
&= f_A + f_B - f_A f_B - f_A f_B\\
&= f_A + f_B - 2f_A f_B
\end{aligned}$$

olur.

Bu yöntemle $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ eşitliğini cebirsel yolla (ve kolaylıkla) kanıtlayabiliriz. Bunun için,

$$f_{(A\Delta B)\Delta C} = f_{A\Delta(B\Delta C)}$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli. Her birini ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} f_{(A\Delta B)\Delta C} &= f_{A\Delta B} + f_C - 2f_{A\Delta B}f_C \\ &= (f_A + f_B - 2f_Af_B) + f_C - 2(f_A + f_B - 2f_Af_B)f_C \\ &= f_A + f_B + f_C - 2f_Af_B - 2f_Af_C - 2f_Bf_C + 4f_Af_Bf_C \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_{A\Delta(B\Delta C)} &= f_A + f_{B\Delta C} - 2f_Af_{B\Delta C} \\ &= f_A + (f_B + f_C - 2f_Bf_C) - 2f_A(f_B + f_C - 2f_Bf_C) \\ &= f_A + f_B + f_C - 2f_Af_B - 2f_Af_C - 2f_Bf_C + 4f_Af_Bf_C \end{aligned}$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Eğer $r \in \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonsa, $rf : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu da doğal bir biçimde şöyle tanımlayabiliriz: $x \in X$ için,

$$(rf)(x) = r \cdot f(x).$$

Eğer s_r, sabit r değeri alan fonksiyonsa, $rf = s_rf$ olur.

Alıştırmalar

5.4. Her f, g, $h \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} &(fg)h = f(gh), \\ &f(g+h) = fg + fh, \\ &fg = gf, \\ &f1 = 1f = f, f0 = 0f = 0 \end{aligned}$$

eşitliklerini kanıtlayın.

5.5. Öyle f, $g \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ bulun ki $fg = 0$ olsun. Böyle f ve g olması için X'in en az iki elemanı olması gerektiğini kanıtlayın.

5.6. X bir küme olsun. $A \subseteq X$ için, f_A, A'nın karakteristik fonksiyonu olsun.

a. $f_A^2 = f_A$ eşitliğini kanıtlayın.

b. $f_{A\setminus B}$ fonksiyonunu f_A ve f_B cinsinden yazın.

5.7. f, $g \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ olsun. Eğer her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ oluyorsa, $f \leq g$ yazalım.

a. Her f, g, $h \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ için şu önermeleri kanıtlayın:

$$\begin{aligned} &f \leq f, \\ &f \leq g \text{ ve } g \leq f \text{ ise } f = g, \\ &f \leq g \text{ ve } g \leq h \text{ ise } f \leq h, \\ &f \leq g \text{ ve } 0 \leq h \text{ ise } fh \leq gh. \end{aligned}$$

b. $f \le g$ ve $g \le f$ önermelerinin yanlış olduğu f ve g fonksiyonları bulun. (X'te en az iki eleman olmalı.)

5.8. Öyle $f,\ g \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ fonksiyonları bulun ki $f \le g$ olsun ama hiçbir $n \in \mathbb{N}$ için $g \le nf$ olmasın. Böyle f ve g fonksiyonlarının olması için X'in sonsuz olması gerektiğini gösterin.

5.9. $f(r) = s_r (=$ sabit r fonksiyonu) kuralıyla tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$$

fonksiyonunun birebir olduğunu kanıtlayın. Ayrıca her $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ için

$$f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) \text{ ve } f(r_1 r_2) = f(r_1)f(r_2)$$

eşitliklerini kanıtlayın.

5.10. X herhangi bir küme olsun. $f : X \to \mathbb{R}$, bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$|f(x)| \le M$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir M sayısı varsa f'ye ***sınırlı fonksiyon*** denir. Sınırlı fonksiyonlar kümesi $\ell^\infty(X)$ olarak simgelenir. $\ell^\infty(X)$ kümesinin toplama, çarpma ve sabit bir sayıyla çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Hangi $f \in \ell^\infty(X)$ için $1/f$ fonksiyonu vardır ve $\ell^\infty(X)$ kümesindedir?

5.3 Polinomiyal Fonksiyonlar

Eğer X, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir kümesiyse, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden

$$f(x) = 3x^4 - 7x^2 + (\sqrt{2})x - \pi$$

gibi bir kuralla tanımlanmış fonksiyonlara ***polinomiyal fonksiyonlar*** denir. Bu tür fonksiyonların tanımında x'in sadece doğal sayı kuvvetleri belirir, yani $x^{1/2}$, x^{-1} gibi ifadeler belirmezler, ya da belirirlerse sadeleşirler. Ayrıca,

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

gibi kesirli tanımlar da genellikle polinomiyal bir fonksiyon tanımlamaz. Ve polinomlarda sonlu sayıda x^i gibi terimler belirir. Genel olarak, polinomiyal bir f fonksiyonu,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

gibi bir ifadeyle tanımlanır. Böyle bir ifadede $a_i x^i$'ler, i'lere göre, küçükten büyüğe doğru sıralandığı varsayılır.

Polinomiyal bir fonksiyonun tanım kümesinin $\mathbb{R}$ olmaması için görünürde hiçbir neden yoktur.

Sabit fonksiyonlar polinomiyal fonksiyonlardır.

Özdeşlik fonksiyonu polinomiyal bir fonksiyondur, çünkü $f(x) = x$ ifadesiyle tanımlanır.

Polinomiyal fonksiyonların toplamı ve çarpımı da polinomiyal fonksiyonlardır. Ayrıca bileşke mümkün olduğunda, polinomiyal fonksiyonların bileşkesi de polinomiyal fonksiyondur.

Dikkat: Bu dikkat, polinomun tanımını bilenlere. Bir polinomla polinomiyal bir fonksiyon aynı nesne değildir. Bir polinom "anlamsız bir ifadedir" ama her polinom, polinomiyal bir fonksiyon tanımlar. Örneğin,

$$f(X) = 3X^4 - 7X^2 + (\sqrt{}2)X - \pi$$

polinomu, bölümün girişinde örnek olarak verdiğimiz polinomiyal fonksiyonu tanımlar. Eğer X sonsuzsa, iki değişik polinom iki değişik polinomiyal fonksiyon tanımlar ama eğer X sonluysa bu doğru değildir. Örneğin $X = \{0, 1\}$ ise,

$$f(X) = X$$

polinomuyla

$$f(X)^2 = X^2$$

polinomu aynı fonksiyonu tanımlarlar. Burada, teorik düzeyde bazen önemli olabilecek ince bir ayrıntı sözkonusudur.

Alıştırmalar

5.11. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir kümeyse, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden her fonksiyonun polinomiyal olduğunu kanıtlayın. Bir başka deyişle, $f : X \to \mathbb{R}$ ise öyle bir p polinomu bulun ki, her $x \in X$ için $f(x) = p(x)$ olsun.

5.12. a. Eğer $f(x) = ax^4 + bx^2 - 7$ ise ve $f(-2) = 21$ ise $f(2)$ kaçtır?

b. Eğer $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx - 7$ ise ve $f(-2) = 21$ ise $f(2)$ kaçtır?

5.13. Eğer her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ için,

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$$

ise, her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ için, $f(x) = 1 - 1/x$ eşitliğini kanıtlayın.

5.14. f, katsayıları $\mathbb{N}$'den seçilmiş herhangi bir polinom olsun. Şunu kanıtlayın: Öyle a ve b doğal sayıları vardır ki, $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri f'yi belirler. (İpucu: $a = 1$ $b = f(a) + 1$ olabilir.)

6. Seçim Fonksiyonları ve Seçim Aksiyomu

Sonsuz sayıda ayakkabı çifti var ve biri sizden bu sonsuz sayıda ayakkabı çiftinden her birinden bir örnek getirmenizi istiyor... Her çiftten sol ayakkabıyı seçebilirsiniz örneğin. Ya da hep sağ ayakkabıyı... Yani iki ayakkabıdan birini seçmek için bir kural bulabilirsiniz.

Ama diyelim sonsuz sayıda ayakkabı çifti degil de, sonsuz sayıda çorap çifti var. Her çiftten birini seçeceksiniz. Çorapların sağı solu belli olmadığından bu sefer belli bir kural bulamazsınız. Çorapların biri sağda biri solda olsa, ya da biri üstte biri altta olsa, ya da biri yırtık biri sağlam olsa, o zaman kuralı koymak kolay. Sorun, sonsuz sayıda çorap çifti olduğunda ve çiftleri oluşturan çorap teklerinden birini diğerinden ayırdedemediğimizde.

Örneğin, $X = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots\}$ ise, X'in her elemanındaki en büyük sayıyı (2, 4, 6, ... sayılarını yani) seçebiliriz.

Eğer $X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \ldots\}$ ise, 1, X'in her elemanında olduğundan, hep 1'i seçebiliriz.

Soruyu daha matematiksel olarak şöyle ifade edelim. Elimizde bir X kümesi var. Bu kümenin elemanları da küme, ve hiçbiri boş değil. X'in her elemanından bir örnek (bir numune, bir eşantiyon) seçeceğiz. Bir başka deyişle, tanım kümesi X olan öyle bir f fonksiyonu bulacağız ki, her $x \in X$ için, $f(x) \in x$ olacak. Böyle bir fonksiyona ***seçim fonksiyonu*** denir.

Sorumuz şu: Boş olmayan kümelerden oluşan her kümenin bir seçim fonksiyonu var mıdır?

Önce örneklerle sorunun zorluk derecesini ölçeceğiz. Sonra da sorunun özüne inip yanıtı vereceğiz.

Kolay Örnekler. Eğer X, boş olmayan kümelerden oluşan sonlu bir kümeyse, o zaman X'in bir seçim fonksiyonunu bulmak çok basittir: X'in her elemanından belli bir eleman seçin, olsun bitsin! Sorun X sonsuz olunca...

Eğer X'in elemanlarının ortak bir elemanı varsa, o zaman da kolay, hep o elemanı seçelim. Örneğin yukarıdaki örneklerden birinde, 1, X'in bütün elemanlarının ortak elemanıydı ve biz hep 1'i seçmiştik.

Eğer X'in her elemanında, a ve b diye adlandıracağımız iki elemandan biri varsa, o zaman da kolay: X'in bir x elemanını alalım. Eğer $a \in x$ ise a'yı seçelim. Eğer $a \notin x$ ise, o zaman x'ten b'yi seçelim.

Giderek Zorlaşan Örnekler. $\wp(A)^*$, A'nın boş olmayan altkümelerinden oluşan küme olsun. Yani $\wp(A)^* = \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$ olsun. Aşağıdaki örneklerde, çeşitli A'lar için $\wp(A)^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulmaya çalışacağız.

Notlar ve Örnekler

6.1. $\wp(\mathbb{N})^*$ **kümesinin seçim fonksiyonu.** Boş olmayan her doğal sayı kümesinden bir eleman seçebiliriz; örneğin kümenin en küçük elemanını seçebiliriz. Sözgelimi, bu yöntemle, $\{1, 5, 8\}$ kümesinden 1'i, çift sayılar kümesinden 0'ı, asal sayılar kümesinden 2'yi seçeriz.

6.2. $\wp(\mathbb{Z})^*$ **kümesinin seçim fonksiyonu.** Boş olmayan her tamsayı kümesinden de belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz. Örneğin şu yöntemi deneyelim: $\emptyset \neq x \subseteq \mathbb{Z}$ olsun; eğer x'in en büyük elemanı varsa o en büyük elemanı, yoksa $x \cap \mathbb{N}$ kümesinin en küçük elemanını seçelim. Böylece boş olmayan her tamsayı kümesinden bir eleman seçmiş olduk.

6.3. $\wp(\mathbb{Q}^{\geq 0})^*$ **kümesinin seçim fonksiyonu.** Boş olmayan bir pozitif kesirli sayılar kümesinden bir sayı nasıl seçeriz? Kümeye x diyelim. Şu kümeyi tanımlayalım:

$$A(x) = \{a + b : a/b \in x\}.$$

(Buradaki a/b yazılımında a ve b doğal sayılardır.)
Boş olmayan bir doğal sayı kümesi olduğundan, $A(x)$'in en küçük elemanı vardır. Bu elemana n diyelim. Şimdi,

$$\{a/b \in x : a + b = n\}$$

kümesine bakalım. Bu, sonlu bir kesirli sayılar kümesidir, dolayısıyla bir en küçük elemanı vardır. İşte x'ten bu elemanı seçelim.
Burada yapılan şudur: 0'dan büyükeşit sayıları,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5},$$
$$\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, \frac{8}{1}, \ldots$$

biçiminde sıraya dizelim. (a/b sayılarını önce $a+b$ toplamına göre sıralıyoruz, ardından, önce payı küçük olanları, sonra payı büyük olanları sonra yazıyoruz.) Sonra bu sıralamaya göre x'in en küçük elemanını seçelim. Örneğin,

$$x = \{a^2/b \in \mathbb{Q}^{\geq 0} : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\}$$

ise,

$$A(x) = \{a^2 + b : a \text{ asal ve } a^2 + b^2 \text{ sayısı 4'e ve 5'e bölünmez}\}$$

kümesidir. $A(x)$ kümesinin en küçük elemanı 7'dir ($a = 2$, $b = 3$.) Dolayısıyla yukarıda açıkladığımız yöntemle x'ten $2/3$'ü seçeriz. Bu seçim fonksiyonu bir sonraki örnekte gerekecek, ona bir ad verelim: f. Örneğin, yukarıdaki örnekte, $f(x) = 2/3$ olur.

6.4. $\wp(\mathbb{Q})^*$ **kümesinin seçim fonksiyonu.** Boş olmayan kesirli sayı kümelerinden de birer eleman seçebiliriz. $x \subseteq \mathbb{Q}$ boş olmayan bir küme olsun. Eğer $x \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boş değilse, yukarıdaki yöntemi kullanalım ve $f(X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim. Eğer $X \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ boşkümeyse, $(-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0}$ kümesi boş değildir, o zaman da X'ten $-f((-X) \cap \mathbb{Q}^{\geq 0})$ elemanını seçelim.

6.5. **Aralıklar kümesinin seçim fonksiyonu.** Gerçel sayılar kümesinin

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b),$$
$$(-\infty, a], (-\infty, a), [a, \infty), (a, \infty), (-\infty, -\infty)$$

gibi altkümelerine ***aralık*** adı verilir. Gerçel sayıların boş olmayan aralıklarından da belli bir yöntemle bir eleman seçebiliriz.

$$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$$

aralıklarından "orta noktayı", yani $(a + b)/2$ noktasını, $(-\infty, -a]$ ve $(-\infty, a)$ aralıklarından $a - 1$ noktasını, $[a, \infty)$ ve (a, ∞) aralıklarından $a + 1$ noktasını ve $(-\infty, \infty)$ aralığından 0 noktasını (gene orta noktayı!) seçelim.

Bu aşamadan sonra bölüm zorlaşacak. Sonuçları zorunlu olarak kanıtsız sunacağız. Okur bundan sonra yazılanları genel kültür mahiyetinde algılamalı ve bu bakış açısıyla okumalı.

6.6. $\wp(\mathbb{R})^*$ **kümesinin seçim fonksiyonu.** İşte en civcivli soruya geldik. Yukarıdaki örneklerde kimileyin kolayca kimileyin zorlanarak, her seferinde bir seçim fonksiyonu bulduk. Ama bu kez işler hiç kolay değil.
Hemen söyleyelim: $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonunu bulamazsınız. İstediğiniz kadar deneyin... Sadece siz değil, kimse bulamaz!
Bu kümenin seçim fonksiyonu yok demiyorum. Var da demiyorum...
Seçim fonksiyonu yoksa elbet bulamazsınız. Ama varsa da bulamazsınız!
Bu kümenin bir seçim fonksiyonunun olduğu ancak şu aksiyomla (belitle) kanıtlanabilir:

Seçim Aksiyomu (C). *Elemanları boş olmayan kümeler olan her kümenin bir seçim fonksiyonu vardır.*

Sohbet: Bu aksiyom kullanılarak $\wp(\mathbb{R})^*$ kümesinin bir seçim fonksiyonu olduğu kanıtlanabilir (elbet!), ama o seçim fonksiyonunun kuralı bulunamaz! Yani açık açık seçim fonksiyonunu yazamazsınız. Bir başka deyişle, varlığı (yukarıdaki aksiyom tarafından) kanıtlanan bir seçim fonksiyonunun kuralı açık açık bulunamaz. Bu kanıtlanmıştır ama bu kanıtı burada aktarmamız sözkonusu bile olamaz.

Kurt Gödel ve Paul Cohen, Seçim Aksiyomu'nun kümeler kuramının diğer aksiyomlarından bağımsız olduğunu kanıtlamışlardır. Şöyle açıklayalım:

Kümeler kuramının Seçim Aksiyomu dışındaki kabul edilen diğer aksiyomlarına ZF diyelim (17.11'inci bölümdeki A1-A9 aksiyomları). ZF'den daha ileri seviyede bir kitabımızda ayrıntıyla söz edeceğiz. (Z, Zermelo'nun Z'si, F de Fraenkel'in F'sidir.) ZF'nin çelişkisiz olduğunun (gene ZF'nin aksiyomları kullanılarak) kanıtlanamayacağını Kurt Gödel kanıtlamıştır (1931).

Gödel (1940) ve Cohen (1963) ayrıca şunu kanıtlamışlardır:

Eğer ZF çelişkisizse, hem $(ZF + C)$ *hem de* $(ZF + \neg C)$ *çelişkisizdir.*

($\neg C$, Seçim Aksiyomu'nun doğru olmadığını söyler. Bir aksiyom sisteminin çelişkisiz olması demek, o aksiyom sisteminde $0 = 1$ eşitliğinin ya da $\emptyset \neq \emptyset$ gibi bir saçmalığın kanıtlanamayacağı demektir.)

Bir başka deyişle, eğer ZF çelişkisizse, ZF kümeler kuramına ister C'yi, istersek de C'nin değillemesini ekleyebiliriz ve çelişkisiz iki ayrı teori elde ederiz. Matematikçilerin çoğu C'yi kabul etmekten yana olmuşlar ve bugün artık C aksiyomu kabul edilmiştir. Bu yüzden, bugün kabul edilen ve kullanılan kümeler kuramı aksiyomlarına ZFC denir.

Seçim Aksiyomu'nun Kullanımı. Seçim Aksiyomu'ndan çok "doğal" sonuçlar çıkabildiği gibi, hiç doğal görünmeyen sonuçlar da çıkar. Her ikisinden de birer örnek verelim.

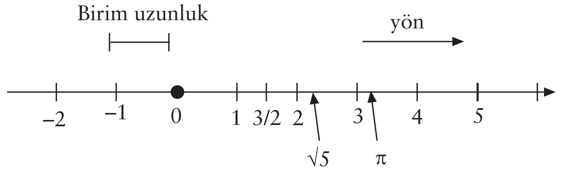
"Doğal" Bir Sonuç. X sonsuz bir küme olsun. $\mathbb{N}$'den X'e birebir bir fonksiyon bulabilir miyiz? Seçim Aksiyomu olmadan böyle bir kümenin varlığı kanıtlanamaz.

"Doğal Olmayan" Bir Sonuç. 1 yarıçaplı bir küre alalım. Şimdi çok şaşırtıcı bir şey söyleyeceğim. Bu küreyi öyle beş parçaya bölebilirim ki ve bu beş parçayı döndürerek ve öteleyerek, yani hacim ve alan değiştirmeyen dönüşümlerden geçirerek öyle toparlayabilirim ki, parçaların ikisinden yarıçapı 1 olan bir küme, geri kalan üç parçadan yarı çapı gene 1 olan bir küme elde edebilirim. Bu saçmasapan görünen teorem ancak Seçim Aksiyomu'yla (daha doğrusu onun birazcık hafifletilmiş bir versiyonuyla) kanıtlanabilir. Matematikte buna **Banach-Tarski Paradoksu** denir (ama aslında bir paradoks değildir, sadece şaşırtıcıdır, paradoksu andırır.)

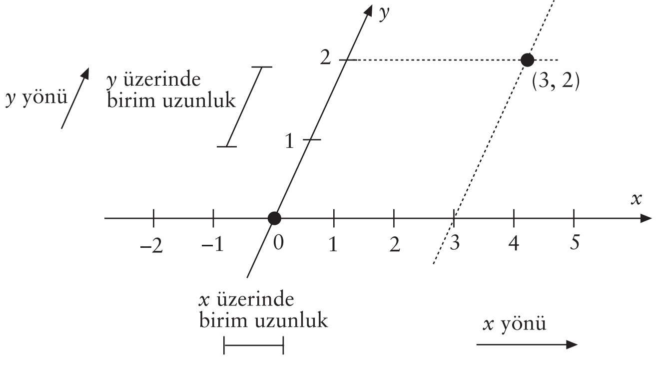
Sayfa 169'daki okuma parçasında Seçim Aksiyomu'nun çok şaşırtıcı bir sonucunu okuyacaksınız.

7. Kartezyen Çarpım

Bir doğru üstünde bir nokta (başlangıç noktası) seçersek ve sabit bir birim uzunluk ve sabit bir yön (sağa ya da sola) kabul edersek, o zaman doğru üstündeki her noktayı bir sayı olarak görebiliriz.



Doğru üstünde seçilen nokta ve seçilen birim uzunluk ve yön rastgeledir, ama bunlar seçildikten sonra doğrunun her noktası bir ve sadece bir tek noktaya tekabül eder, yani doğruyla gerçel sayılar arasında bir eşleme vardır.



(Bu dediklerimizin doğruluğu bayağı tartışmalıdır aslında: Fiziksel bir doğruyla sayılar arasında bir eşleme olduğu hiç de bariz değildir. Ayrıca böyle bir önermenin matematiksel olarak kanıtlanması mümkün değildir çünkü önermenin kendisi matematiksel değildir, sorun felsefi bir sorundur. Konumuz bu değil ama...)

Benzer şeyi düzlemde yapmak için birbirini kesen iki farklı doğru seçmek ve her iki doğru üstünde yukarıdaki gibi seçimler yapmak gerekir. Böylece düzlemdeki her noktayı

$$(x,\, y)$$

gibi bir sayı çiftiyle gösterebiliriz ve düzlemin her noktası bir ve sadece bir tek sayı çiftine ve her sayı çifti de düzlemin bir ve sadece bir tek noktasına tekabül eder. Bir önceki sayfadaki şekil her şeyi söylüyor.

Benzer biçimde, içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayda da ortak bir noktada kesişen ama aynı düzlemde yer almayan üç doğru ve bu doğrular üstünde birim uzunluklar ve yönler seçilirse, uzayın her noktası (x, y, z) sayı üçlüsüyle gösterilebilir.

İşte bu bölümde $(x,\ y)$ ve $(x,\ y,\ z)$ gibi nesnelerin matematiksel tanımını vereceğiz.

(x, y) sayı ikilisinin bizi ilgilendiren tek özelliği vardır, o da şu: Eğer $(x, y) = (z, t)$ ise $x = z$ ve $y = t$ olmak zorundadır. İkilinin ***karakteristik özelliği*** denilen bu özellik dışında (x, y) çiftinin matematiksel olarak hiçbir özelliği bizi ilgilendirmez. Dolayısıyla (x, y) çiftini matematiksel olarak tanımlamak için bu özelliği sağlayan matematiksel bir nesne bulmak yeterlidir.

7.1 İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Birinci Tanım: x ve y iki eleman (ya da iki küme) olsun.

$$\{\{x\},\ \{x,\ y\}\}$$

kümesini ele alalım. Bu kümelerin şu özelliği vardır:

Önsav 7.1. *Eğer $\{\{x\},\ \{x,\ y\}\} = \{\{z\},\ \{z,\ t\}\}$ ise o zaman $x = z$ ve $y = t$ olur.*

Kanıt: $\{\{x\},\ \{x,\ y\}\} = \{\{z\},\ \{z,\ t\}\}$ eşitliğini varsayalım. Önce $x \neq y$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x\}$ kümesinin bir, $\{x,\ y\}$ kümesinin ise iki elemanı vardır. Demek ki bu kümeler birbirine eşit olamazlar; dolayısıyla eşitliğin solundaki

$$\{\{x\},\ \{x,\ y\}\}$$

kümesinin iki elemanı vardır. Demek ki eşitliğin sağındaki

$$\{\{z\},\ \{z,\ t\}\}$$

kümesinde de iki eleman olmak zorundadır, yani $\{z\} \neq \{z,\ t\}$, yani $z \neq t$ olmalıdır. Her iki kümede de ikişer eleman olduğunu ve bu elemanların birinin bir elemanlı, diğerinin ise iki elemanlı bir küme olduğunu kanıtladık. Eşitliğin sol tarafındaki

$$\{\{x\},\ \{x,\ y\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{x\}$ kümesi, eşitliğin sağ tarafındaki

$$\{\{z\},\ \{z,\ t\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{z\}$ kümesine eşit olmalı: $\{x\} = \{z\}$, yani $x = z$. Aynı nedenden $\{x, y\} = \{z, t\}$ olmalı. $x = z$ olduğundan

$$\{y\} = \{x, y\} \setminus \{x\} = \{z, t\} \setminus \{z\} = \{t\}$$

olur ve bundan da $y = t$ çıkar.

Eğer $x = y$ ise, o zaman

$$\{\{x\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$$

olur, dolayısıyla sağ taraftaki $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ kümesinin (aynen sol taraftaki küme gibi) tek elemanı vardır ve bu eleman $\{x\}$ elemanıdır: $\{z\} = \{z, t\} = \{x\}$. Buradan da $x = z = t$ çıkar. □

Bu önsav sayesinde (x, y) ***çiftini*** ya da ***ikilisini*** $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi olarak tanımlayabiliriz. Öyle yapalım; tanım gereği

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

olsun. Şimdi de $X \times Y$ kümesini $x \in X$ ve $y \in Y$ için, (x, y) biçiminde yazılan elemanlar kümesi olarak tanımlayabiliriz:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\}.$$

Not 1. $X \times Y$ kümesine, ünlü Fransız matematikçisi ve filozofu Descartes'a (dekart diye okunur) atfen, X ve Y kümelerinin ***kartezyen çarpımı*** denir. Ama yukarıda verdiğimiz

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

tanımı Polonyalı matematikçi Kuratowski'nindir. Önsav 7.1'i doğrulayan başka kümeler de oluşturabilirsek, o zaman kartezyen çarpımın başka tanımlarını da verebiliriz. Örneğin,

$$\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

kümesi de bu özelliği sağlar. Dolayısıyla

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

tanımını da yapabilirdik.

Farklı tanımlar yapmak mümkündür, ama en kabul edileni verdiğimiz Kuratowski'nin tanımıdır. Bu konuda bkz. aşağıdaki 7.9 ve 7.10'uncu alıştırmalar.

Not 2. (x, y) ikilisinin tanımında Önsav 7.1'in esas alınması önemli bir felsefi olguya işaret eder: Matematiksel kavramların nasıl tanımlandıkları ya da ne oldukları hiç önemli değildir, önemli olan özellikleridir. Yani matematikte asolan nesne değil özelliktir. Bu dediğimiz sadece ikili kavramı için değil, nokta, doğru, sayı gibi tüm matematiksel kavramlar için de geçerlidir. Bu da matematiğin üst seviyede zihinsel bir uğraş olduğunu gösterir.

Alıştırmalar

7.1. X ve Y birer küme olsun. $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. $\{x\}$ ve $\{x, y\}$ kümelerinin $X \cup Y$ kümesinin birer altkümesi olduğunu kanıtlayın.

7.2. $\{x\}$ ve $\{x, y\}$ kümelerinin $\wp(X \cup Y)$ kümesinin birer elemanı olduğunu kanıtlayın.

7.3. $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesinin $\wp(X \cup Y)$ kümesinin bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.

7.4. $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesinin $\wp(\wp(X \cup Y))$ kümesinin bir elemanı olduğunu kanıtlayın.

7.5. $X \times Y$ kümesinin $\wp(\wp(X \cup Y))$ kümesinin bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.

7.6. $X \times Y$ kümesinin $\wp(\wp(\wp(X \cup Y)))$ kümesinin bir elemanı olduğunu kanıtlayın.

7.7. $\cup(x, y) = \{x, y\}$ ve $\cap(x, y) = \{x\}$ eşitliklerini kanıtlayın.

7.8. $\cup \cap (x, y) = \cap \cap (x, y) = x$ eşitliklerini kanıtlayın.

7.9. $\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\} = \{\{\{z\}, \emptyset\}, \{t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın.

7.10. $\{\{\emptyset, x\}, \{\{\emptyset\}, y\}\} = \{\{\emptyset, z\}, \{\{\emptyset\}, t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın.

Şimdi de üç kümenin kartezyen çarpımını tanımlayalım. Bunun için iki seçeneğimiz var: X, Y, Z kümelerinin kartezyen çarpımı $(X \times Y) \times Z$ ya da $X \times (Y \times Z)$ olarak tanımlanabilir, seçim sizin! Tabii (x, y, z) elemanı da aynı biçimde $((x, y), z)$ ya da $(x, (y, z))$ olarak tanımlanmalı. Her iki tanım da işimizi görür, hangi tanımın kabul edildiği hiç önemli değildir, çünkü her iki durumda da aşağıdaki önerme doğru olur:

Önsav 7.2. *Eğer $(x, y, z) = (x', y', z')$ ise o zaman $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ olur.*

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Okurun bu önsavla tatmin olmadığını varsayıp bir de şu kolay sonucu yazalım:

Önsav 7.3. *Eğer X, Y ve Z üç kümeyse, $(X \times Y) \times Z$ ile $X \times Y) \times Z$ kümeleri arasında,*

$$((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$$

formülüyle verilmiş bir eşleme vardır.

Kanıt: Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Dolayısıyla $(X \times Y) \times Z$ ile $X \times Y) \times Z$ kümeleri arasında kümeler kuramı açısından önemli bir fark yoktur, bu kümelere sanki eşitlermiş gibi davranılabilir.

Dört kümenin kartezyen çarpımının tanımı için ise çok daha fazla seçenek vardır:

$$\begin{aligned}
&(X \times Y) \times (Z \times T),\\
&X \times (Y \times (Z \times T)),\\
&X \times ((Y \times Z) \times T),\\
&((X \times Y) \times Z) \times T,\\
&X \times (Y \times Z) \times T.
\end{aligned}$$

Bu tanım yöntemiyle, dört kümenin kartezyen çarpımını tanımlamak için bunlardan birini seçmek zorundayız.

Önsav 7.4. *X, Y, Z ve T dört küme olsun. O zaman,*

$$(X \times Y) \cap (Z \times T) = (X \cap Z) \times (Y \cap T)$$

olur.

Kanıt: Eğer $\alpha \in (X \times Y) \cap (Z \times T)$ ise, o zaman $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z, t \in T$ için,

$$\alpha = (x, y) = (z, t)$$

olur. Önsav 7.1'e göre de $x = z \in X \cap Z$ ve $y = t \in Y \cap T$ olur. Demek ki

$$\alpha = (x, y) \in (X \cap Z) \times (Y \cap T)$$

olur. Böylece

$$(X \times Y) \cap (Z \times T) \subseteq (X \cap Z) \times (Y \cap T)$$

içindeliği kanıtlanmış oldu.

$$(X \cap Z) \times (Y \cap T) \subseteq (X \times Y) \cap (Z \times T)$$

içindeliğini okura alıştırma olarak bırakıyoruz. □

Yukarıdaki önsav birçok lise matematik kitabının yazdığının tersine,

$$(X \times Y) \times Z \text{ ve } X \times (Y \times Z)$$

kümelerinin eşit olmadıklarını gösteriyor. Nitekim bu iki kümenin kesişimi

$$((X \times Y) \cap X) \times (Z \cap (Y \times Z))$$

kümesidir. Aynı şekilde, $X \times Y$ ve $Y \times X$ kümeleri de genellikle eşit değildirler; eşitlik ancak $X = Y$ ise sağlanır.

İkinci Tanım. Kartezyen çarpım bir başka türlü de tanımlanabilir. Birçok nedenden tercih edilmesi gereken ikinci tanım şöyle:

$$X \times Y$$

kümesi, $\{0, 1\}$ kümesinden $X \cup Y$ kümesine giden ve 0'da aldığı değerin X'te, 1'de aldığı değerin Y'de olduğu fonksiyonlar kümesidir. Daha biçimsel olarak ifade edelim:

$$X \times Y = \{f \in \text{Fonk}(\{0, 1\}, X \cup Y) : f(0) \in X, f(1) \in Y\}.$$

Bu tanımda (x,y) çiftini tanımlamadan $X \times Y$ kartezyen çarpımını tanımladığımız önemli ve derin bir gözlemdir. Örneğin [N2]'de doğal sayıları teker teker tanımlamak gibi sonsuz bir uğraşa girişmek yerine doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'yi tek bir hamlede tanımlayacağız.

Bu ikinci tanım yöntemini hafifçe değiştirerek ikiden fazla, hatta sonsuz sayıda kümenin kartezyen çarpımını tanımlayabiliriz. Bunu birkaç sayfa ileride yapacağız. Ama her şeyin en doğrusunu 17'nci bölümde göstereceğiz.

Alıştırmalar

7.11. Birinci tanımdaki $X \times Y$ kümesini bu alıştırmalık $X \times_1 Y$ olarak yazalım. İkinci tanımdaki $X \times Y$ kümesini de $X \times_2 Y$ olarak. $X \times_1 Y$ ile $X \times_2 Y$ kümeleri arasında bir eşleme olduğunu gösterin. (Bu da, bu iki tanım arasında pek bir fark yok anlamına gelir. İleride ikinci tanımı birinci tanıma yeğleyeceğiz.)

7.12. A kümesi boşsa $A \times B$ kümesinin de boş olduğunu kanıtlayın.

7.13. Eğer A ve B sırasıyla X ve Y kümelerinin altkümesiyse, $A \times B$'nin $X \times Y$'nin altkümesi olduğunu kanıtlayın. Eğer $|X| = n$ ve $|Y| = m$ ise $X \times Y$'nin $A \times B$ biçiminde yazılan kaç altkümesi vardır?

7.14. Eğer A ve B sırasıyla X ve Y kümelerinin altkümesiyse,

$$(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$$

eşitliğini kanıtlayın. Buradaki tümleme işlemleri, sırasıyla, $X \times Y$'de, X'te ve Y'de alınmıştır.

7.15. X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $X \times Y = Y \times X$ eşitliğinin geçerli olması için $X = Y$ eşitliğinin gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayın. Kümelerden biri boş ise ne olur?

7.16. X ile X_1 ve Y ile Y_1 kümeleri arasında eşleme varsa $X \times Y$ ile $X_1 \times Y_1$ kümeleri arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın.

7.17. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımında şu kümeleri gösterin:

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x > 0 \text{ ve } y \geq 0\}$.

b. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x > y\}$.

c. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq y\}$.

d. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq y\}$.

e. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -1 \leq x < 1 \text{ ve } 2 \leq y \leq 3\}$.

f. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 3y + 2\}$.

g. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 3y + 2\} \cap \{(x,y) : 2x + 1 < y\}$.

h. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$.

i. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y^2\}$.

j. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -1 \leq x < 1 \text{ ve } x < y^2\}$.

k. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq y^2\}$.

l. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq y^2 + y - 2\}$.

m. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$.

n. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

o. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 1\}$.

p. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x-2)^2 + (y-1)^2 < 1\}$.

q. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy = 1\}$.

r. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y \leq x^2\}$.

7.18. **[Kümeleri Ayrıştırmak].** X, herhangi bir kümeler kümesi olsun. X'in elemanları, illa ayrık olmak zorunda olmayan kümelerden oluşur. Şimdi şu kümeye bakalım:

$$Y = \{x \times \{x\} : x \in X\}.$$

Y'nin elemanlarının gene kümeler olduğunu, Y'nin elemanlarının ayrık kümeler olduğunu ve her $x \in X$ için

$$f(x) = x \times \{x\}$$

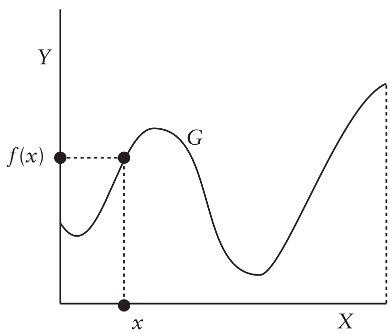
kuralıyla tanımlanmış f fonksiyonunun X ve Y arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın.

7.2 Bir Fonksiyonun Grafiği

Eğer $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilmişse, f fonksiyonunun ***grafiği***,

$$\{(x, f(x)) : x \in X\}$$

kümesi olarak tanımlanır. Grafik elbette $X \times Y$ kümesinin bir altkümesidir.



$f : X \to Y$ fonksiyonunun grafiği

$X \times Y$ kümesinin bir G altkümesinin X'ten Y'ye giden bir fonksiyonun grafiği olması için, G'nin şu özelliği sağlaması gerekmektedir: *Her $x \in X$ elemanı için, $(x, y) \in G$ ilişkisini sağlayan bir ve sadece bir tane $y \in Y$ elemanı vardır.*

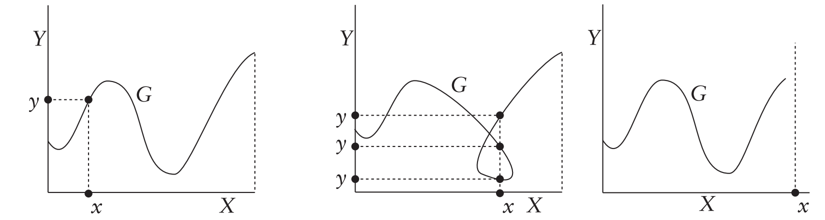
Bu özelliği sağlayan G kümesinin hangi fonksiyonun grafiği olduğu çok belli: Her $x \in X$ için $f(x)$'i, Y'nin,

$$(x, y) \in G$$

ilişkisini sağlayan biricik y elemanı olarak tanımlayalım, yani fonksiyonun kuralını

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

olarak tanımlayalım. G, işte bu f fonksiyonunun grafiğidir.



G bir fonksiyonunun grafiğidir. Birden çok *y* var. Hiç *y* yok.
Bu *G*'ler bir fonksiyonunun grafiği değildir.

Demek ki X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesiyle, $X \times Y$ kümesinin yukarıda italik yazılmış özelliği sağlayan altkümeleri arasında bir eşleme vardır.

Fonksiyon grafiği örnekleri için standart bir matematik kitabına bakın.

Not: Eğer $f : X \times Y \longrightarrow Z$ bir fonksiyonsa, f'nin (x, y)'deki değeri $f((x, y))$ değil, daha kısa bir biçimde, $f(x, y)$ olarak yazılır.

Alıştırmalar

7.19. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$'ye giden birebir bir fonksiyon tanımlayın.

7.20. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesinden $\mathbb{N}$'ye giden birebir bir fonksiyon tanımlayın.

7.21. $\{(x + y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin bir fonksiyonun grafiği olmadığını gösterin.

7.22. $\{(x + y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin bir fonksiyonun grafiği olmadığını kanıtlayın.

7.23. $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin bir fonksiyonun grafiği olmadığını kanıtlayın.

7.24. X bir küme olsun. $A \subseteq X$ için, f_A, A'nın karakteristik fonksiyonu olsun. $f_{A\times B}$ fonksiyonunu bulun. $f_{A\cap B} = f_{A\times B}$ eşitliği doğru mudur?

7.25. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x, y) = xy$ kuralıyla tanımlanmış olsun. Birçok $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(a)$ kümelerini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'de gösterin.

7.26. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f(x, y) = x + y$ kuralıyla tanımlanmış olsun. Birçok $a \in \mathbb{R}$ için, $f^{-1}(a)$ kümelerini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'de gösterin.

7.27. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu, $f(x, y) = x^2 + y^2$ kuralıyla tanımlanmış olsun. f örten midir? $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ kümesinin çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın.

7.28. A, B, C üç küme olsun. $(A^B)^C$ ile $A^{B\times C}$ kümeleri arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın. (Y^X, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini simgeler.)

7.29. $f(x) = ||x| - 1|$ olsun. f, $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, ... fonksiyonlarının grafiklerini çizin.

7.3 İzdüşüm Fonksiyonları

X ve Y iki küme olsun. $X \times Y$'den X'e giden

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x$$

kuralıyla tanımlanan fonksiyona ***birinci izdüşüm*** adı verilir. ***İkinci izdüşüm***,

$$\mathrm{pr}_2(x, y) = y$$

kuralıyla tanımlanır ve $X \times Y$'den Y'ye gider. Her iki fonksiyon da örtendir elbette, ama iki istisnayla:

1. Eğer $X = \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ ise pr_2 örten değildir,
2. Eğer $Y = \emptyset$ ve $X \neq \emptyset$ ise pr_1 örten değildir.

Her x ve y için,

$$(x, y) = (\mathrm{pr}_1(x, y), \mathrm{pr}_2(x, y))$$

eşitliği bariz. Dolayısıyla her $\alpha \in X \times Y$ için,

$$\alpha = (\mathrm{pr}_1(\alpha), \mathrm{pr}_2(\alpha))$$

eşitliği geçerlidir.

Bazen pr_1 yerine π_1 yazıldığı da olur.

Bu izdüşümleri iki kümenin kartezyen çarpımından n tane kümenin kartezyen çarpımına genelleştirmek işten bile değildir: Her $i = 1, \ldots, n$ için,

$$\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \longrightarrow X_i$$

fonksiyonu

$$\mathrm{pr}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$$

olarak tanımlanır.

Elbette her $\alpha \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ için,

$$\alpha = (\mathrm{pr}_1(\alpha), \mathrm{pr}_2(\alpha), \ldots, \mathrm{pr}_n(\alpha))$$

olur.

Eğer $A \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ ise, izdüşüm fonksiyonlarını A'ya kısıtlayabiliriz, yani

$$\mathrm{pr}_{i|A} : A \longrightarrow X_i$$

fonksiyonunu ele alabiliriz. Yazılımı kalabalıklaştırmamak için, eğer bir karışıklığa yol açmayacağından eminsek, $\mathrm{pr}_{i|A}$ yerine pr_i yazmakta bir sakınca yok, tam tersine yarar vardır.

7.4 Fonksiyonların Aritmetiği*

Konuya başlamadan önce X ve Y birer kümeyse, X^Y yazılımının Y kümesinden X kümesine giden fonksiyonlar kümesi olduğunu okura anımsatalım. (Bazı kitaplarda X^Y yerine ${}^Y X$ yazılır.) Yani, tanım gereği,

$$X^Y = \mathrm{Fonk}(Y, X)$$

olur. Bu bölümde X^Y yazılımının rastgele olmadığını, belli bir aritmetiğe haklı olarak işaret ettiğini göreceğiz. Kanıtladığımız sonuçlar bu aritmetikten çok daha derin ve temel olacaklar.

7.4.1 $X^A \times X^B \simeq X^{A \sqcup B}$

Sayılarda $x^{a+b} = x^a x^b$ iyi bilinen bir eşitliktir. Bu altbölümde bu eşitliği sayılardan fonksiyonlara genelleştireceğiz. Ama önce, eğer A ve B birer kümeyse, $A \times B$ ve $A+B$ yazılımına bir anlam vermeliyiz, yoksa altbölümün başlığı anlamsız olur.). Çarpma kolay, $A \times B$ yazılımı, daha önce de olduğu gibi, A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı anlamına gelecek. Kümelerin toplamasını sadece ayrık kümeler için tanımlayacağız. Eğer A ve B iki ayrık kümeyse, $A+B$, $A \cup B$ anlamına gelecek[1]. Bazen $A+B$ yazılımı, $A \Delta B$ (simetrik fark) olarak tanımlanır, ama bu altbölümde $A \cup B$ anlamına gelecek; ama zaten kümeler ayrıksa $A \Delta B = A \cup B$ olur!

Teorem 7.5. *Eğer X bir küme ve A ve B iki ayrık kümeyse, $X^{A \cup B}$ kümesiyle $X^A \times X^B$ kümesi arasında (doğal) bir eşleme vardır.*

Kanıt: $g \in X^A$ ve $h \in X^B$ olsun. Demek ki,

$$g : A \longrightarrow X \text{ ve } h : B \longrightarrow X$$

birer fonksiyon. Altbölüm 4.10'da açıklandığı üzere, $g \cup h : A \cup B \longrightarrow X$ fonksiyonunu

$$(g \cup h)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{eğer } x \in A \text{ ise} \\ h(x) & \text{eğer } x \in B \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayabiliriz. Böylece,

$$\varphi(g, h) = g \cup h$$

formülüyle

$$\varphi : X^A \times X^B \longrightarrow X^{A \cup B}$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

Bu fonksiyonun bir eşleme olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla fonksiyonun tersini bulalım. $f \in X^{A \cup B}$ için

$$\psi(f) = (f_{|A}, f_{|B})$$

formülü, bize bir

$$\psi : X^{A \cup B} \longrightarrow X^A \times X^B$$

fonksiyonu tanımlar. ϕ ile ψ'nin birbirinin tersi fonksiyonlar olduğunu göstereceğiz. Aslında bunun bariz olması gerekir, ama biz gene de teoremin kanıtını ayrıntılı bir biçimde yazalım. (Yazabilmek ve yazmak önemlidir.) Bu amaçla, $\varphi \circ \psi$ fonksiyonunun $X^{A \cup B}$ kümesi üzerine özdeşlik (birim) fonksiyonu olduğunu ve $\psi \circ \varphi$ fonksiyonunun $X^A \times X^B$ kümesi üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlayacağız. Birincisinden başlayalım.

[1]Hatırlanacağı üzere, eğer A ve B ayrık kümelerse, bazen $A \cup B$ yerine $A \sqcup B$ yazıyoruz.

Rastgele bir $f \in X^{A \cup B}$ alalım. Amacımız

$$(\varphi \circ \psi)(f) = f$$

eşitliğini, yani

$$\varphi(\psi(f)) = f$$

eşitliğini kanıtlamak. ψ'nin tanımından dolayı,

$$\varphi(f_{|A}, f_{|B}) = f$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. φ'nin tanımından dolayı,

$$f_{|A} \cup f_{|B} = f$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. Ama fonksiyonların bileşiminin tanımından dolayı bu bariz (bkz. Alıştırma 4.109).

Şimdi rastgele $g \in X^A$ ve $h \in X^B$ alalım. Amacımız

$$(\psi \circ \varphi)(g, h) = (g, h)$$

eşitliğini, yani

$$\psi(\varphi(g, h)) = (g, h)$$

eşitliğini kanıtlamak. ψ'nin tanımından dolayı,

$$\psi(g \cup h) = (g, h)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. ψ'nin tanımından dolayı,

$$((g \cup h)_{|A}, (g \cup h)_{|B}) = (g, h)$$

eşitliğini yani

$$(g \cup h)_{|A} = g \text{ ve } (g \cup h)_{|B} = h$$

eşitliklerini kanıtlamalıyız. Ama fonksiyonların bileşiminin tanımından dolayı bu bariz (bkz. Alıştırma 4.110). □

Yukarıdaki teoremde bulunan eşlemenin çok doğal olduğuna dikkatinizi çekeriz. İki küme arasında birçok eşleme olabilir, ama doğal eşlemeler pek enderdir.

7.4.2 $(X^A)^B \simeq X^{A\times B}$

Sayılarda $(x^a)^b = x^{ab}$ iyi bilinen bir eşitliktir. Bu altbölümde bu eşitliği sayılardan fonksiyonlara genelleştireceğiz.

Teorem 7.6. *X, A ve B üç küme olsun. $(X^A)^B$ ile $X^{A\times B}$ kümeleri eşleniktir.*

Kanıt: $f \in (X^A)^B$ olsun. Demek ki $f : B \longrightarrow X^A$ bir fonksiyondur. Dolayısıyla her $b \in B$ için $f(b) \in X^A$ olur, bir başka deyişle $f(b) : A \longrightarrow X$ bir fonksiyondur. Bundan böyle $f(b)$ yerine, gösterim kolaylığı olması açısından, f_b yazalım:

$$f(b) = f_b. \tag{1}$$

Demek ki her $a \in A$ için $f_b(a) \in X$ olur. Şimdi

$$\varphi(f)(a, b) = f_b(a) \tag{2}$$

kuralı bize bir

$$\varphi(f) : A \times B \longrightarrow X$$

fonksiyonu verir, yani $\varphi(f) \in X^{A\times B}$ olur. Buradan da bir

$$\varphi : (X^A)^B \longrightarrow X^{A\times B}$$

fonksiyonu elde ederiz. Bu φ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla bir sonraki paragrafta φ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulacağız.

$g \in X^{A\times B}$ rastgele bir eleman olsun. Demek ki $g : A \times B \longrightarrow X$ bir fonksiyondur. Eğer $b \in B$ ise,

$$g(\ \ , b)(a) = g(a, b)$$

kuralı bize bir

$$g(\ \ , b) : A \longrightarrow X$$

fonksiyonu verir. Demek ki $g(\ \ , b) \in X^A$. Bu fonksiyonu g^b olarak yazalım:

$$g^b = g(\ \ , b) \in X^A.$$

Elbette

$$g^b(a) = g(a, b). \tag{3}$$

Buradan,

$$\psi(g)(b) = g^b \tag{4}$$

kuralıyla bir
$$\psi(g) : B \longrightarrow X^A$$
fonksiyonu elde ederiz. Demek ki $\psi(g) \in (X^A)^B$ ve böylece
$$\psi : X^{A\times B} \longrightarrow (X^A)^B$$
fonksiyonunu elde ettik.

Bu ψ fonksiyonunun önceki paragrafta tanımlanan φ fonksiyonunun tersi olduğunu savlıyoruz. $\varphi \circ \psi$ fonksiyonunun $X^{A\times B}$ kümesi üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu ve $\psi \circ \varphi$ fonksiyonunun $(X^A)^B$ kümesi üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlamalıyız. Eşitlikleri teker teker ele alalım.

Önce $\varphi \circ \psi$ fonksiyonunun $X^{A\times B}$ kümesi üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlayalım. Bu amaçla rastgele bir $g \in X^{A\times B}$ elemanı alalım. Amacımız
$$(\varphi \circ \psi)(g) = g$$
eşitliğini, yani
$$\varphi(\psi(g)) = g$$
eşitliğini kanıtlamak. Bu da her $a \in A$ ve $b \in B$ için
$$\varphi(\psi(g))(a, b) = g(a, b)$$
eşitliğini kanıtlamak demek. Rastgele $a \in A$ ve $b \in B$ seçelim ve tanımlarımıza uyarak hesap yapalım. (2)'den dolayı,
$$\psi(g)_b(a) = g(a, b)$$
eşitliğini kanıtlamalıyız. (1)'den dolayı da,
$$(\psi(g)(b))(a) = g(a, b)$$
eşitliğini kanıtlamamız gerektiğini anlarız. (4)'ten dolayı, kanıtlamamız gereken bu eşitlik
$$g^b(a) = g(a, b)$$
eşitliğine bürünür, ki bunun da doğru olduğu (3)'ten bellidir. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

Şimdi de $\psi \circ \varphi$ fonksiyonunun $(X^A)^B$ kümesi üzerine özdeşlik fonksiyonu olduğunu kanıtlayalım. Bu amaçla rastgele bir $f \in (X^A)^B$ elemanı alalım. Amacımız
$$(\psi \circ \varphi)(f) = f$$
eşitliğini, yani
$$\psi(\varphi(f)) = f$$

eşitliğini kanıtlamak. Yani her $b \in B$ için

$$\psi(\varphi(f))(b) = f(b)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. (4)'ten dolayı, bu eşitlik,

$$\varphi(f)^b = f(b)$$

demektir. Bu son eşitliğin doğru olması için de, (1)'den dolayı

$$\varphi(f)^b = f_b$$

doğru olmalı, yani her $a \in A$ için,

$$\varphi(f)^b(a) = f_b(a)$$

doğru olmalı. (3)'ten dolayı, bu son eşitlik,

$$\varphi(f)(a, b) = f_b(a)$$

demektir. Ama bu da aynen (1) eşitliğidir. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Teorem 7.5'te de olduğu gibi, bu teoremin kanıtında da bulunan eşlemenin çok doğal olduğuna dikkatinizi çekeriz. İki küme arasında birçok eşleme olabilir ama doğal eşlemeler pek enderdir.

7.4.3 $X^A \times Y^A \simeq (X \times Y)^A$

A, X ve Y birer küme olsun. Eğer,

$$f_1 : A \longrightarrow X \text{ ve } f_2 : A \longrightarrow Y$$

iki fonksiyonsa, o zaman A'nın bir a elemanını, $X \times Y$ kartezyen çarpımının

$$(f_1(a), f_2(a))$$

elemanına götüren bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Bu fonksiyonu

$$f_1 \times f_2$$

olarak yazmak doğaldır:

$$(f_1 \times f_2)(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Ve doğal olarak $f_1 \times f_2$ fonksiyonuna f_1 ve f_2 fonksiyonlarının kartezyen çarpımı adı verilir.

Dikkat ederseniz

$$\mathrm{pr}_1 \circ (f_1 \times f_2) = f_1 \text{ ve } \mathrm{pr}_2 \circ (f_1 \times f_2) = f_2$$

eşitlikleri doğrudur.

Bu söylediklerimizin tersi de doğrudur, yani bir A kümesinden $X \times Y$ kartezyen çarpımına giden her fonksiyon, uygun

$$f_1 : A \longrightarrow X \text{ ve } f_2 : A \longrightarrow Y$$

fonksiyonları için

$$f_1 \times f_2$$

biçiminde yazılır. Bunu açıklayalım:

$$f : A \longrightarrow X \times Y$$

herhangi bir fonksiyon olsun. A'dan herhangi bir a elemanı alalım. O zaman $f(a)$, $X \times Y$ kümesinin bir elemanıdır, diyelim

$$f(a) = (x, y) \in X \times Y.$$

Eğer x yerine $f_1(a)$, y yerine $f_2(a)$ yazarsak, bu eşitlik,

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$

biçimine bürünür. Şimdi, a elemanını $f_1(a)$'ya götüren

$$f_1 : A \longrightarrow X$$

fonksiyonundan ve a elemanını $f_2(a)$'ya götüren

$$f_2 : A \longrightarrow Y$$

fonksiyonundan sözedebiliriz. Gene dikkat ederseniz, f_1 ve f_2 fonksiyonlarını,

$$f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f$$

ve

$$f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$$

olarak tanımlayabilirdik.

Bütün bu yaptıklarımızdan şu sonuç çıkar:

Teorem 7.7. *A, X ve Y üç küme olsun. O zaman,*

$$\varphi(f) = (\mathrm{pr}_1 \circ f,\ \mathrm{pr}_2 \circ f)$$

kuralıyla tanımlanan fonksiyon, $\mathrm{Fonk}(A, X \times Y)$ *kümesinden*

$$\mathrm{Fonk}(A, X) \times \mathrm{Fonk}(A, Y)$$

kümesine giden bir eşlemedir. Bu eşlemenin tersi

$$\psi(f_1, f_2) = f_1 \times f_2$$

formülüyle tanımlanan

$$\psi : \mathrm{Fonk}(A, X) \times \mathrm{Fonk}(A, Y) \longrightarrow \mathrm{Fonk}(A, X \times Y)$$

fonksiyonudur. Bir başka deyişle $X^A \times Y^A$ kümesiyle $(X \times Y)^A$ kümesi eşleniktir. □

Bu yaptıklarımızı ultramodern dilde (matematikçesiyle "kategori teorisi" dilinde açıklayalım. Anlatacaklarımızı aşağıdaki şekilde resimlemeye çalıştık. ($\exists!$, "bir ve bir tane var" demektir.)

$$\begin{tikzcd}
& ?Z \arrow[dl, "?p_1"'] \arrow[dr, "?p_2"] & \\
X & & Y \\
& \forall A \arrow[ul, "\forall f_1"] \arrow[ur, "\forall f_2"'] \arrow[uu, dashed, "\exists! f"] &
\end{tikzcd}$$

X ve Y herhangi iki küme olsun. Yukarıdaki şekilden takip edin. Öyle bir Z kümesi ve

$$p_1 : Z \longrightarrow X \text{ ve } p_2 : Z \longrightarrow Y$$

fonksiyonları var mıdır ki şu "evrensel özellik" doğru olsun?

A hangi küme ve $f_1 : A \longrightarrow X$ ve $f_2 : A \longrightarrow Y$ hangi fonksiyonlar olursa olsun, öyle bir ve bir tane $f : A \longrightarrow Z$ fonksiyonu vardır ki, $p_1 \circ f = f_1$ ve $p_2 \circ f = f_2$ olur.

$$\begin{tikzcd}
& X \times Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
X & & Y \\
& \forall A \arrow[ul, "\forall f_1"] \arrow[ur, "\forall f_2"'] \arrow[uu, dashed, "\exists! f"] &
\end{tikzcd}$$

Biraz önce böyle bir Z kümesinin ve

$$p_1 : Z \longrightarrow X \text{ ve } p_2 : Z \longrightarrow Y$$

fonksiyonlarının varlığını kanıtladık: $Z = X \times Y$ ve p_1 ve p_2 yerine pr_1 ve pr_2 izdüşüm fonksiyonlarını alalım. İstediğimiz özellik sağlanır.

Ciddi bir matematik eğitiminden geçecek her öğrenci, 1940'ların ilk yarısında Samuel Eilenberg ve Saunders Mac Lane tarafından temelleri atılan ***kategori teorisini*** günün birinde öğrenmek zorunda kalacaktır. Bu altbölüm, kategori teorisiyle bir ilk karşılaşma olarak kabul edilebilir.

Aşağıdaki teoremin kanıtından da anlaşılacağı üzere, evrensel özellikteki "bir ve bir tane" sözleri önemlidir.

Teorem 7.8. *X ve Y iki küme olsun. (Z, p_1, p_2) ve (T, r_1, r_2) üçlüleri yukarıdaki evrensel özelliği sağlasınlar. O zaman, Z ve T kümeleri arasında bir eşleme vardır. Ayrıca,*

$$p_1 \circ f = r_1 \textit{ ve } p_2 \circ f = r_2$$

eşitliklerini sağlayan bir ve bir tane $f : T \longrightarrow Z$ eşlemesi vardır. Bir başka deyişle, bu evrensel özelliği sağlayan tüm (T, r_1, r_2) üçlüleri, bir ve bir tane $f : T \longrightarrow X \times Y$ eşlemesi için

$$(T, \mathrm{pr}_1 \circ f, \mathrm{pr}_2 \circ f)$$

biçiminde yazılan üçlülerdir.

Kanıt: (Z, p_1, p_2) üçlüsü evrensel özelliği sağladığından (bkz. aşağıdaki şekil), öyle bir

$$f : T \longrightarrow Z$$

fonksiyonu vardır ki,

$$p_1 \circ f = r_1 \text{ ve } p_2 \circ f = r_2$$

olur. (T, r_1, r_2) üçlüsü de evrensel özelliği sağladığından, öyle bir

$$g : Z \longrightarrow T$$

fonksiyonu vardır ki,

$$r_1 \circ g = p_1 \text{ ve } r_2 \circ g = p_2$$

olur.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y \\
& T \arrow[ul, "r_1"] \arrow[ur, "r_2"'] \arrow[uu, dashed, "f"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, dashed, "g"'] & \\
X & & Y \\
& T \arrow[ul, "r_1"] \arrow[ur, "r_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Şimdi $g \circ f : T \longrightarrow T$ fonksiyonunun şu özelliğine bakalım.

$$r_1 \circ (g \circ f) = (r_1 \circ g) \circ f = p_1 \circ f = r_1$$

ve

$$r_2 \circ (g \circ f) = (r_2 \circ g) \circ f = p_2 \circ f = r_2.$$

Yani

$$r_1 \circ (g \circ f) = r_1 \text{ ve } r_2 \circ (g \circ f) = r_2.$$

Öte yandan $\mathrm{Id}_T : T \longrightarrow T$ özdeşlik fonksiyonu da benzer eşitliği sağlar:

$$r_1 \circ \mathrm{Id}_T = r_1 \text{ ve } r_2 \circ \mathrm{Id}_T = r_2.$$

Ama (T, r_1, r_2) üçlüsü yukarıdaki evrensel özelliği sağladığından

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\ X & & Y \\ & T \arrow[ul, "r_1"] \arrow[ur, "r_2"'] \arrow[uu, dotted, "f \circ g"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\ X & & Y \\ & T \arrow[ul, "r_1"] \arrow[ur, "r_2"'] \arrow[uu, dotted, "\mathrm{Id}_X"] & \end{tikzcd}$$

(bir ve bir tane sözlerinin önemi burada kendini belli ediyor)

$$g \circ f = \mathrm{Id}_T$$

olmalı. Aynı nedenden,

$$f \circ g = \mathrm{Id}_Z$$

olmalı. Demek f ve g, birbirlerinin tersi olan eşlemelerdir. Son önermeyi kanıtlamak için, yukarıda yaptıklarımızda

$$(Z,\ p_1,\ p_2) = (X \times Y,\ \mathrm{pr}_1,\ \mathrm{pr}_2)$$

alın. □

Yukarıda yapılan, iki kümenin kartezyen çarpımı içindi. Aynı şeyi sonsuz sayıda küme için de yapabiliriz:

$(X_i)_{i \in I}$ bir küme ailesi olsun. Aşağıdaki şekilden takip edin. Öyle bir X kümesi ve

$$p_i : X \longrightarrow X_i$$

fonksiyonları var mıdır ki şu "evrensel özellik" doğru olsun?

*A rastgele bir küme ve her $i \in I$ için $f_i : A \longrightarrow X_i$ rastgele fonksiyonlar olsun, o zaman öyle **bir ve bir tane** $f : A \longrightarrow X$ fonksiyonu vardır ki, her $i \in I$ için*

$$p_i \circ f = f_i$$

olur.

$$\begin{tikzcd}
?X \arrow[d, "?p_i"'] \\
X_i \\
\forall A \arrow[u, "\forall f_i"] \arrow[uu, bend right=60, dotted, "\exists! f"']
\end{tikzcd}$$

Tahmin edileceği üzere, $\prod_{i\in I} X_i$ ve pr_i izdüşüm fonksiyonları bu evrensel özelliği sağlarlar. Ayrıca bir önceki teoremin belirttiği anlamda, $(X_i)_{i\in I}$ küme ailesi verildiğinde, $\prod_{i\in I} X_i$ ve pr_i izdüşüm fonksiyonları bu evrensel özelliği sağlayan biricik nesnelerdir. Bütün bunları okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırma 7.30. Yukarıdaki evrensel özellikte, okları (yani fonksiyonları) ters çevirirsek, çarpım kavramının kankası olan "eşçarpım" ya da "çarpımdaş" kavramını buluruz. Soru şu: $(X_j)_{j\in J}$ bir küme ailesi olsun. Öyle bir X kümesi ve her $j \in J$ için $i_j : X_j \longrightarrow X$ fonksiyonları var mıdır ki şu "evrensel" özellik doğru olsun?

*A herhangi bir küme ve her $j \in J$ için $f_j : X_j \longrightarrow A$ herhangi bir fonksiyon olsun. O zaman öyle **bir ve bir tane** $f : X \longrightarrow A$ fonksiyonu vardır ki, her $j \in J$ için $f \circ i_j = f_j$ olur.*

$X = \bigcup_{j\in J} (X_j \times \{j\})$ bileşiminin ve $i_j(x) = (x, j)$ kuralıyla verilmiş $i_j : X_j \longrightarrow X$ fonksiyonlarının bu özelliği sağladığını kanıtlayın. Bu kavram için Teorem 7.8'e benzer bir sonuç kanıtlayın.

7.5 Çok Sayıda Kümenin Kartezyen Çarpımı*

İki kümenin kartezyen çarpımı alınabildiği gibi ikiden fazla sayıda, hatta sonsuz sayıda kümenin de kartezyen çarpımı alınabilir. Ama bunu yapmak için Kuratowski'nin kartezyen çarpımı tanımını değil, sayfa 111'de verdiğimiz ikinci tanımı kullanacağız, daha doğrusu o tanımdan esinleneceğiz.

I bir göstergeç kümesi ve her $i \in I$ için X_i bir küme olsun. Daha matematiksel bir ifadeyle, X, tanım kümesi I olan, değer kümesi ise bir kümeler kümesi olan bir fonksiyon olsun. Her $i \in I$ için, $X(i)$ yerine X_i yazalım. (Bu yazılım sadece bir gelenektir, matematiksel bir gerçek yoktur arkada.)

I göstergeç kümesi sonlu ya da sonsuz olabilir.

Tüm bu X_i kümelerinin kartezyen çarpımını tanımlamak istiyoruz. (Eski tanımı unutun!) Tanım son derece basit:

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i : \text{ her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i \right\}.$$

Yani $\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımı özel bir fonksiyonlar kümesidir.

Eğer $f \in \prod_{i\in I} X_i$ ise, $f(i)$ yerine f_i yazmak da bir gelenektir. Tanım ve değer kümeleri sabitlenmiş her fonksiyon, değerleri tarafından belirlendiğinden, kartezyen çarpımın bu elemanını $(f_i)_{i\in I}$ olarak yazabiliriz. $\prod_{i\in I} X_i$

çarpımının bir elemanını, mesela, u ile gösterirsek, hemen hemen her zaman

$$u = (u_i)_{i \in I} \text{ ya da } u = (u_i)_i$$

yazacağız. Bu yazılımda u_i'nin X_i'nin bir elemanı olduğu söylenmeden anlaşılmalıdır.

Burada önemli nokta (ve aslında tek önemli nokta),

$$(f_i)_{i \in I} = (g_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \text{ her } i \in I \text{ için } f_i = g_i$$

önermesinin doğruluğudur.

Eğer tüm X_i'ler bir X kümesine eşitse, $\prod_{i \in I} X_i$ ya da $\prod_{i \in I} X$ yerine, daha sade olan X^I yazılımı tercih edilebilir.

Eğer dilersek, bu aşamada, Kuratowski'nin kartezyen çarpım tanımını unutup, bu tanımı kabul edebiliriz. Eğer $I = \{0, 1\}$ ise iki kümenin, eğer $I = \{0, 1, 2\}$ ise üç kümenin kartezyen çarpımı elde edilir. Bu tanımın şu avantajı vardır: $(A \times B) \times C$ ile $A \times (B \times C)$ kümeleri arasında özünde bir fark olmadığını kanıtlamak zorunda kalmayız (bkz. Önsav 7.2 ya da Önsav 7.3).

Eğer $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ gibi bir kümeyse, $\prod_{i \in I} X_i$ yerine

$$\prod_{i=0,1,2,\ldots,n} X_i \text{ ya da } \prod_{i=0}^{n} X_i,$$

hatta daha da açık biçimde

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

yazılır ve bu son yazılım tercih edilir. Eğer $X = X_1 = \cdots = X_n$ ise X^n yazılımı tercih edilir. Eğer $I = \mathbb{N}$ ise $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ yerine

$$\prod_{i=0,1,2,\ldots} X_i$$

ya da

$$\prod_{i=0}^{\infty} X_i$$

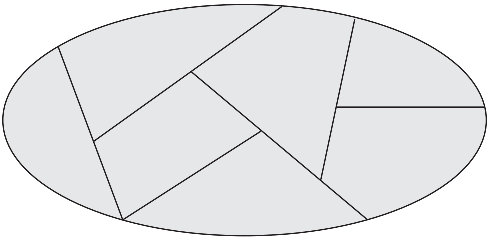
ya da

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots$$

yazıldığı da olur.

8. Denklik İlişkisi

Bir denklik ilişkisi, özünde, bir kümeyi ayrık, yani kesişmeyen parçalara bölmekten başka bir şey değildir. Matematiksel tanımın ardındaki öz budur.



7 ayrık parçaya ayrılmış bir küme

Her denklik ilişkisi kümenin bir parçalanmasına neden olur ve her parçalanma bir denklik ilişkisinden kaynaklanır.

Örneğin, hermafrodit gibi istisnaları saymazsak, insanlar kümesini kadınlar ve erkekler olarak ikiye ayırmak, "aynı cinsiyetten olmak" denklik ilişkisinden kaynaklanan bir parçalanmadır.

Çifte vatandaşlığın olmadığını varsayarsak, insanları Türk, Faslı, Nepalli diye vatandaşlıklarına göre ayırmak, insanlar kümesi üzerine tanımlanan "aynı ülkenin vatandaşı olmak" denklik ilişkisinden kaynaklanan bir parçalanmadır.

Bir okuldaki sınıflar öğrencileri ayrık parçalara böler. "Aynı sınıfta olmak" bir denklik ilişkisidir. Doğum tarihleri, boy, kilo gibi unsurlar da insanları farklı sınıflara bölerler, bunlar da bir denklik ilişkisinden kaynaklanırlar.

Bu bölümde esas olarak "denklik ilişkisi"ni konu edeceğiz. Denklik ilişkisi kadar önemli olan sıralamalardan ve diğer ikili ilişkilerden sadece kısaca sözedeceğiz. Bir kümeyi ***sıralamak***, kümenin elemanları arasından bir biçimde bir "büyüklük-küçüklük" ilişkisi tanımlamak demektir. Matematiksel tanımlar yakında gelecek. Önce genel olarak bir kümenin elemanları arasındaki ilişkilerden sözedeceğiz ve çeşitli ilişki örnekleri vereceğiz.

Okuyacağınız konu matematiğin en önemli ve belki de en az anlaşılan temel konularından biridir. Meraklı öğrenci için, bu ve bundan sonraki bölümü on defa okumak kesinlikle zaman kaybı değildir.

8.1 İlişki Tanımı ve Türleri

X herhangi bir küme ve bu X kümesi üzerine bir "ikili ilişki" verilmiş olsun, yani X'in herhangi iki elemanı arasında, öyle ya da böyle, ama bir biçimde tanımlanmış bir "ilişki" ya olsun ya da olmasın. (Matematiksel tanım birazdan gelecek.) Eğer X'in x ve y elemanları arasında ilişki varsa, bu altbölümde bunu

$$xRy$$

olarak gösterelim, yoksa

$$\neg\, xRy$$

olarak gösterelim. R ilişkisi $=$, $<$, $\leq$, $\subset$, $\subseteq$ gibi çok daha fazla aşina olduğumuz bir ilişki olabileceği gibi, bugüne kadar görmediğimiz türden bir ilişki de olabilir.

Hayattan birkaç örnek verelim. "A, B'nin babasıdır" insanlar arasında ikili bir ilişkidir. "A, B'den daha gençtir" bir başka ikili ilişkidir. "A ile B tanışırlar" bir başka ikili ilişkidir. "A, B'nin altkümesidir" ve "A, B'nin elemanıdır" ilişkileri de matematiksel ilişkilerdir.

Matematiksel bir başka ilişki: "A ile B arasındaki mesafe en fazla 1 metredir" düzlemin noktaları arasında bir ilişkidir.

"A noktası B ile C noktaları arasındadır" üçlü bir ilişkidir. "A yeşildir" birli bir ilişkidir. Bu ve sonraki bölümlerde sadece ikili ilişkileri ele alacağız.

İkili ilişkinin matematiksel tanımı şöyledir:

Tanım ve Yazılım: *Bir X kümesi üzerine bir **ikili ilişki** $X \times X$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir. Eğer altkümeyi R olarak gösterirsek, x, $y \in X$ için, $(x, y) \in R$ yerine xRy yazılır.*

Eğer her $x \in X$ için, xRx ise, R ikili ilişkisine ***yansımalı ilişki*** denir.

Örneğin "aynı yaşta olmak", "aynı ülkenin yurttaşı olmak", "aynı ana ve babadan doğmak" yansımalı ilişkilerdir. Ama "x, y'nin babasıdır" ilişkisi yansımalı değildir, çünkü kimse kendisinin babası olamaz! Sayılarda bilinen $\leq$ sıralaması yansımalı bir ilişkidir ama $<$ sıralaması yansımalı değildir. Bir kümenin altkümelerinde, $\subseteq$ ilişkisi (altküme olma ilişkisi) yansımalıdır ama $\subset$ ilişkisi (özaltküme olma ilişkisi) yansımalı değildir.

Eğer her x, $y \in X$ için, xRy olduğunda mutlaka yRx de oluyorsa, R ikili ilişkisine ***simetrik ilişki*** denir.

Eğer her x, $y \in X$ için, xRy ve xRy olduğunda mutlaka $x = y$ oluyorsa, ilişkiye ***antisimetrik*** denir.

Sayılarda $\leq$ ve $<$ ilişkileri simetrik değillerdir, tam tersine antisimetriktirler. ($<$ ilişkisi neden antisimetriktir? Bu bir mantık sorusudur!).

"Aynı anababadan kardeş olmak" simetrik bir ilişkidir ama bir insanın kendi kendisinin kardeşi olmadığını varsayarsak bu ilişki yansımalı değildir.

Öte yandan "aynı anne ve aynı babası olmak" yansımalı bir ilişkidir. "Uzaklık 10 km'den azdır" ilişkisi bildiğimiz düzlemde ya da yeryüzünde hem yansımalı hem de simetrik bir ilişkidir. "Paralel olmak" ilişkisi doğrular üzerine hem simetrik hem de yansımalı bir ilişkidir (bir doğrunun kendisine paralel olduğu varsayılır genellikle ve biz de öyle yapıyoruz.) "Ayrık olmak" ilişkisi kümeler üzerine simetrik ama yansımalı olmayan bir ilişkidir.

Eğer her x, y, $z \in X$ için, xRy ve yRz olduğunda mutlaka xRz de oluyorsa, R ikili ilişkisine ***geçişli*** ya da ***geçişkenli ilişki*** denir. "Aynı anababaya sahip olmak" geçişli bir ilişkidir. Sayılar üzerine $<$ ve $\leq$ ilişkileri geçişlidir. Bir kümenin altkümelerinde $\subseteq$ ve $\subset$ ilişkileri geçişlidir. "Uzaklık 10 km'den azdır" ilişkisi dünya üzerinde geçişli bir ilişki değildir.

İkili ilişkileri, yansımalı, simetrik ya da geçişli olup olmamalarına göre $2^3 = 8$ değişik sınıfa ayırabiliriz. Bunlardan her birinden birer örnek verelim.

Notlar ve Örnekler

8.1. "x, y'nin babasıdır" ilişkisi ne yansımalı, ne simetrik ne de geçişli bir ilişkidir. Tamsayılar üzerine tanımlanmış $0 < x - y < 2$ ilişkisi de ne yansımalı ne simetrik ne de geçişli bir ilişkidir.

8.2. Sayılar üzerine $<$ ilişkisi ne yansımalı ne de simetriktir ama geçişlidir.

8.3. Tamsayılar üzerinde tanımlanmış olan "$x + y \geq 0$" ilişkisi ne yansımalı ne de geçişlidir. Çünkü örneğin, -2 ve 3 ilişkidedir, 3 ve -1 de ilişkidedir ama -2 ve -1 ilişkide değildir. Öte yandan bu ilişki simetriktir.

8.4. Simetrik ve geçişli olan bir $\equiv$ ilişkisi ele alalım. Eğer x'in ilişkide olduğu bir y elemanı varsa, yani $x \equiv y$ ise, o zaman simetriden dolayı $y \equiv x$ olur. Dolayısıyla geçişlikten dolayı $x \equiv x$ olur. Demek ki ilişkinin yansımalı olmaması için hiçbir elemanla ilişkide olmayan en az bir eleman olmalıdır. Bir sayı kümesi üzerine "$x \neq 0$ ve $y \neq 0$" ilişkisini alalım. Bu ilişkide 0'a eşit olmayan tüm sayılar birbirleriyle ilişkidedir ama 0, kendisi da dahil olmak üzere hiçbir sayıyla ilişkide değildir.

8.5. Tamsayılar üzerinde "$x - y \leq 1$" formülüyle tanımlanmış ikili ilişki yansımalıdır ama ne simetriktir ne de geçişli.

8.6. Bir sayı kümesi üzerinde bildiğimiz $\leq$ ilişkisi yansımalı ve geçişlidir ama kümede en az iki sayı varsa simetrik değildir.

8.7. Bir sayı kümesi üzerine $|x - y| \leq 1$ ilişkisi yansımalı ve simetriktir ama çoğu zaman (küme yeterince büyükse) geçişli değildir.

8.8. **Denklik ilişkisi.** Yansımalı, simetrik ve geçişli ilişkilere denklik ilişkisi denir. Yani bir X kümesi üzerine tanımlanmış ikili bir R ilişkisinin denklik ilişkisi olması için, her x, y, $z \in X$ için,

$$\begin{array}{ll} \text{(Y)} & xRx, \\ \text{(S)} & xRy \text{ ise } yRx, \\ \text{(G)} & (xRy \text{ ve } yRz) \text{ ise } xRz \end{array}$$

koşulları doğru olmalıdır. Bu yazıda denklik ilişkilerine birçok örnek vereceğiz. İşte biri: Herhangi bir sayı kümesi üzerinde "$x - y \in \mathbb{Z}$" ilişkisi bir denklik ilişkisidir. "$x - y \in \mathbb{Q}$" ilişkisi de bir (başka) denklik ilişkisidir.

Daha genel olarak, eğer A, 0'ı içeren ve çıkarma altında kapalı herhangi bir sayı kümesiyse, "$x - y \in A$" ilişkisi bir denklik ilişkisidir. (Neden?)

8.9. **1000. Sıralama.** Çok önemli bir konuyu iki sayfaya sığdırıyoruz ama bu kitapta da pek ihtiyacımız olmayacak. (Aksiyomatik Kümeler Kuramı adlı kitabımızda sıralamalardan çok daha ayrıntılı bir biçimde sözedeceğiz.)

Yansımalı (Y), antisimetrik (AS) ve geçişli (G) bir ilişkiye ***sıralama*** ya da ***yarısıralama*** denir. Bir sıralama genel olarak $\leq$ simgesiyle, bazen de $\subseteq$, $\leqq$, $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, $\sqsubseteq$ gibi bir simgeyle gösterilir. Sayılardaki bildiğimiz sıralama tipik bir sıralama örneğidir. Ama $\subseteq$ ilişkisi de bir kümenin altkümeleri kümesi üzerine bir sıralamadır. Bir X kümesi üzerine bir sıralamayı $\leq$ simgesiyle gösterirsek, her x, y, $z \in X$ için,

$$\begin{array}{ll} (Y) & x \leq x, \\ (AS) & x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y, \\ (G) & x \leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z \end{array}$$

özellikleri geçerlidir. Eğer bir de ayrıca her x, $y \in X$ için,

$$(T) \quad \text{ya } x \leq y \text{ ya da } y \leq x$$

oluyorsa, $\leq$ sıralamasına ***tamsıralama*** adı verilir. Bir başka deyişle, bir sıralama kümenin herhangi iki elemanını kıyaslayabiliyorsa, yani kümenin herhangi iki elemanından biri diğeriyle ilişkide oluyorsa, o zaman o sıralamaya tamsıralama denir. Sayılar üzerine bildiğimiz sıralama tamsıralamadır ama $\subseteq$ ilişkisi, en az iki elemanı olan bir kümenin altkümeleri kümesi üzerine bir tamsıralama değildir çünkü böyle bir kümenin birbirinin altkümesi olmayan altkümeleri vardır.

Bir X kümesi üzerine, her x, y, $z \in X$ için,

$$\begin{array}{ll} (Y) & \neg(x < x), \\ (G) & x < y \text{ ve } y < z \text{ ise } x < z \end{array}$$

özellikleri sağlayan bir $<$ ilişkisine ***mutlak sıralama*** adı verilir. Eğer ilişki ayrıca

$$(T') \quad \text{ya } x < y \text{ ya } x = y \text{ ya da } y < x$$

özelliğini sağlyorsa, o zaman ilişkiye ***mutlak tamsıralama*** adı verilir.

Bir (tam)sıralamadan bir mutlak (tam)sıralamaya ya da tam tersine bir mutlak (tam)-sıralamadan bir (tam)sıralamaya geçmek kolaydır. Eğer $\leq$ bir (tam)sıralamaysa,

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ ve } x \neq y$$

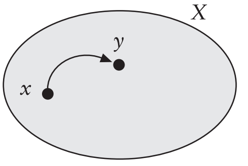
tanımı bir mutlak (tam)sıralama verir. Eğer $<$ bir mutlak (tam)sıralamaysa,

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ ya da } x = y$$

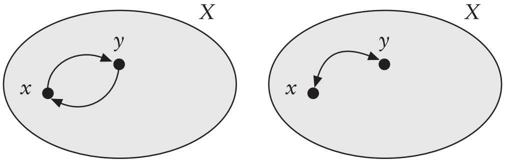
tanımı bir (tam)sıralama verir. Ayrıca yukarıdaki işlemleri peşisıra iki kez yaparsak, başladığımız ilk ilişkiyi buluruz. Bütün bunların kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

8.2 Çizgeyle Gösterim*

X kümesi üzerine tanımlanmış ve (R yerine) $\equiv$ simgesiyle göstereceğimiz herhangi bir ikili ilişki ele alalım. Eğer $x \equiv y$ ise, aşağıdaki şekildeki gibi, x'ten y'ye giden bir ok çizelim ve bunu X'te ilişki içinde olan her x ve y elemanı için yapalım. Elde edilen şekil ***yönlendirilmiş*** bir ***çizgedir*** (bkz. [Ne]).

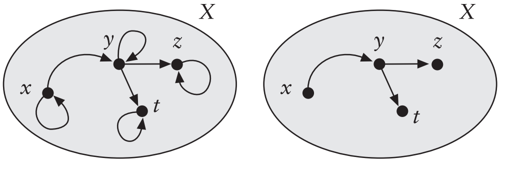


Eğer hem $x \equiv y$ hem de $y \equiv x$ ise bunu aşağıdaki iki şekildeki gibi de gösterebiliriz. Sağdaki daha pratik elbet.



Ama daha da pratiği, bu durumda, x ve y arasındaki bağlantıya hiç ok koymamaktır, çünkü iki nokta arasında bağlantı varsa ama bağlantıda hiç ok yoksa aslında bağlantının her iki tarafına da ok çıkıldığını anlayabiliriz. Demek ki simetrik bir ilişkiden oksuz "basit bir çizge" elde ederiz.

Eğer ilişki yansımalıysa, o zaman her nokta kendisiyle bağlantılı olmalı. Eğer ilişkinin yansımalı olduğunu zaten biliyorsak, bu bağlantıları özellikle göstermeye gerek yok. Yani aşağıdaki soldaki şekil olarak gösterilmesi gereken yansımalı ilişkiyi sağdaki gibi daha basit olarak gösterebiliriz, gereksiz kalabalığa gerek yok.



Eğer ilişki simetrik ve geçişliyse, o zaman bir x noktasının bağlandığı tüm noktalar birbirleriyle de bağlanmış olmalı. Nitekim eğer y ve z noktaları x'e bağlanmışsa, yani

$$x \equiv y \text{ ve } x \equiv z$$

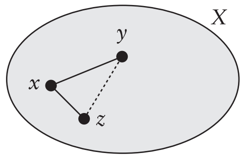
ise, o zaman simetriden dolayı

$$y \equiv x \text{ ve } x \equiv z$$

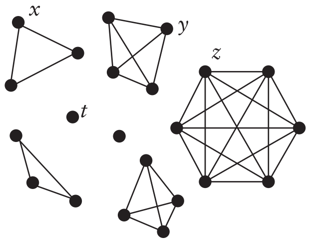
olur; dolayısıyla geçişlikten dolayı,

$$y \equiv z$$

olur.



Demek ki simetrik ve geçişli bir ikili ilişkinin çizgesi, aşağıdaki şekildeki gibi, her biri birbirine bağlanmış nokta gruplarından oluşur. Değişik nokta grupları arasında hiçbir bağlantı yoktur. (Eğer bir de ayrıca ilişki yansımalıysa, ilişkimiz denklik ilişkisidir.)



Yukarıda çizgesi çizilen denklik ilişkisinde, x'in ilişkide olduğu 3, y'nin ilişkide olduğu 4, z'nin ilişkide olduğu 6 eleman vardır. Ve t sadece kendisiyle ilişkidedir.

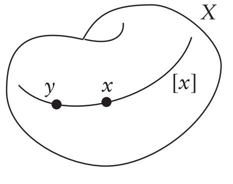
Denklik ilişkileri $\equiv$ simgesinden başka, $\approx$, $\cong$, $\simeq$, $\sim$, $\approx$ gibi eşitliği andıran başka simgelerle de gösterilebilir. Hatta eğer aynı paragrafta birden çok denklik ilişkisinden sözediliyorsa, bu denklik ilişkilerini değişik simgelerle göstermek karışıklığı engelleyebilir.

8.3 Denklik Sınıfları

Gördüğümüz gibi bir denklik ilişkisi, üzerinde tanımlanmış olduğu kümeyi kesişmeyen, yani ayrık parçalara ayırır. Her parça, her biri her biriyle ilişkide olan noktalardan oluşur. Eğer $x \in X$ ise, X'in x'le ilişkide olan elemanları bu parçalardan birini oluşturur.

$$[x] = \{y \in X : x \equiv y\}$$

olarak tanımlanmış olsun. $[x]$, X'in bir altkümesidir elbet. $[x]$'e x'in sınıfı ya da x'in ***denklik sınıfı*** adı verilir. Denklik ilişkisi



yansımalı olduğundan, her x kendi sınıfındadır, yani $x \in [x]$. Yukarıdaki şekilde (hayalî) bir denklik sınıfı resmettik.

Bu söylediklerimizi biçimsel olarak kanıtlayalım.

Teorem 8.1. *X kümesi üzerine bir $\equiv$ denklik ilişkisi verilmiş olsun. O zaman iki denklik sınıfı ya eşittir ya da ayrık, yani her $x, y \in X$ için, ya $[x] = [y]$ ya da $[x] \cap [y] = \emptyset$ olur. Ayrıca, $[x] = [y]$ eşitliği için yeter ve gerek koşul $x \equiv y$ denkliğidir.*

Kanıt: Teoremin ilk önermesini kanıtlamak için, $[x]\cap[y] \neq \emptyset$ varsayımını yapıp $[x] = [y]$ eşitliğini kanıtlayalım. Durum x ve y açısından simetrik olduğundan, $[x] \subseteq [y]$ önermesini kanıtlamak yeterli.

$$z \in [x] \cap [y]$$

olsun. Demek ki

$$x \equiv z \text{ ve } y \equiv z.$$

Simetriden dolayı,

$$x \equiv z \text{ ve } z \equiv y.$$

Şimdi $t \in [x]$ olsun. Demek ki $x \equiv t$. Simetriden dolayı, $t \equiv x$. Yukarıdaki birinci denklikten ve geçişlikten dolayı $t \equiv z$. İkinci denklikten ve geçişlikten dolayı $t \equiv y$. Simetriden dolayı $y \equiv t$. Demek ki $t \in [y]$.

Şimdi ikinci paragrafı kanıtlayalım. Eğer $[x] = [y]$ ise,

$$y \in [y] = [x],$$

yani $y \in [x]$, yani $x \equiv y$. Eğer $x \equiv y$ ise

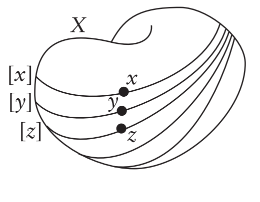
$$y \in [y] \cap [x];$$

demek ki

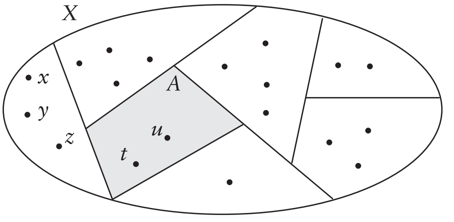
$$[x] \cap [y] \neq \emptyset$$

ve ilk kısımdan $[x] = [y]$ çıkar. □

Bir Kümenin Parçalanışı. Demek ki X üzerine tanımlanmış bir denklik ilişkisi X'i birbirinden ayrık altkümelere (denklik sınıflarına) ayırır. Bunun temsilî bir resmini aşağıda çizdik.



Bir kümenin hiçbiri boş olmayan ayrık altkümelere ayrılmasına kümenin ***parçalanışı*** adı verilir. Her denklik ilişkisi yukarıdaki şekildeki gibi bir parçalanışa yol açtığı gibi, her parçalanış da bir denklik ilişkisinden kaynaklanır. Nitekim, eğer X kümesi, yukarıdaki ya da aşağıdaki şekildeki gibi birbirinden ayrık altkümelere bölünmüşse, X'in aynı parçada bulunan elemanlarına "denk" diyelim. Böylece tanımlanan ikili ilişki bir denklik ilişkisidir ve her denklik sınıfı parçalanışın altkümelerinden (parçalarından) biridir.



7 ayrık parçaya ayrılmış bir küme. Bu parçalanışın doğurduğu denklik ilişkisinde $x \equiv y$, $t \equiv u$, $x \equiv x$, $x \not\equiv u$. Ayrıca, örneğin, $[t] = [u] = \{u, t\} = A$.

Yani gerçekte X üzerine tanımlanmış bir denklik ilişkisiyle X'in bir parçalanışı arasında hiçbir ayrım yoktur. Birinden diğeri elde edilir. Bir denklik ilişkisini her iki türlü de görebilmenin sonsuz yararları vardır.

Şimdi her biri matematikte önemli bir yer tutan denklik ilişkisi örnekleri vereceğiz.

Notlar ve Örnekler

8.10. **Modüler Aritmetik.** Bu örnek önemli olduğundan biraz genişçe ele alacağız. Okur herhalde lisede "modüler aritmetiği", örneğin "modülo 6" sayılarını görmüştür. Örneğin

$$17 \equiv 5 \bmod 6$$

yazılır. Bu, "6 sayısı $17 - 2$ sayısını tam böler" anlamına gelir. Bu altbölümde, modüler aritmetiğin kuramsal altyapısını göreceğiz. Modülo 6 sayılarını genellikle liselerde söylendiği gibi

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

sayıları olarak değil, bir denklik ilişkisi için

$$[0],\ [1],\ [2],\ [3],\ [4],\ [5]$$

denklik sınıfları olarak tanımlayacağız.

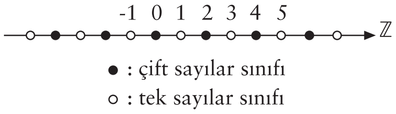
$\mathbb{Z}$ kümesi üzerine $\equiv$ ikili ilişkisi, her x, $y \in \mathbb{Z}$ için,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \text{ çift sayıdır}$$

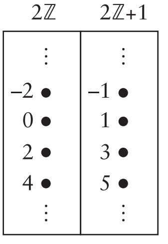
olarak tanımlansın. Bu bir denklik ilişkisidir. Sadece iki sınıf vardır: çift sayılar ve tek sayılar:

$$[0] = [2] = [-2] = [4] = 2\mathbb{Z},$$
$$[1] = [3] = [-3] = [5] = 2\mathbb{Z} + 1.$$

Görüldüğü gibi denklik sınıfları gerçekten de ayrıklar, Teorem 8.1 yalan söylememiş. İşte sınıfların resmi:



Eğer $\mathbb{Z}$'yi illa bir doğru üstünde göstermek gibi bir takıntımız yoksa, ki olmamalı çünkü bu örnekte sıralamanın hiçbir rolü yok, o zaman şekli aşağıdaki gibi de çizebiliriz.



Dikkat edilirse, tanımı

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in 2\mathbb{Z}$$

olarak da verebilirdik. Eğer yukarıdaki tanımda 2 yerine bir başka n tamsayısı alırsak gene bir denklik ilişkisi elde ederiz:

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}.$$

$n\mathbb{Z} = (-n)\mathbb{Z}$ olduğundan, tanımda n'yi doğal sayı almanın bir mahsuru yoktur, hatta tam tersine pratik yararı vardır. Biz de öyle yapıp $n \geq 0$ varsayımını yapacağız.
Burada iki özel durumu özellikle ayrı ele almak gerekiyor: $n = 0$ ve $n = 1$ durumları.
Eğer $n = 0$ ise tanım,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x = y$$

tanımına eşdeğer, yani denklik ilişkisi eşitlikten başka bir şey söylemiyor. Bu durumda her eleman sadece ve sadece kendisine denktir. Zaten

$$x \equiv y \Leftrightarrow x = y$$

tanımı her küme üzerinde bir denklik ilişkisi verir. Bu denklik ilişkisinde her sınıf tek bir elemandan oluşur, yani $[x] = \{x\}$'tir.
Eğer $n = 1$ ise tanım,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

tanımı haline dönüşüyor. Burada x ve y zaten $\mathbb{Z}$'de olduklarından, bu durumda herhangi iki eleman birbirine denk oluyor: Her x, y için $x \equiv y$. Her x'in her y'ye denk olduğu denklik ilişkisini de her kümede tanımlayabiliriz. Her eleman her elemana denk olduğundan, bu denklik ilişkisinde tek bir denklik sınıfı vardır: tüm küme.
Son iki denklik ilişkisi, yani her elemanın sadece kendisine denk olduğu ($n = 0$ durumu) ve her elemanın her elemana denk olduğu ($n = 1$ durumu) denklik ilişkileri pek ilginç değil. Daha ilginç denklik ilişkilerinin peşine düşelim.
$n = 2$ durumunu biraz önce irdelemiştik. Bu durumda sadece iki sınıf vardır: tek sayılar sınıfı ve çift sayılar sınıfı.
$n = 3$ durumuna geçelim. Bu durumda, örneğin,

$$0 \equiv 3 \equiv 6 \equiv -3,$$
$$1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv -2,$$
$$2 \equiv 5 \equiv 8 \equiv -1$$

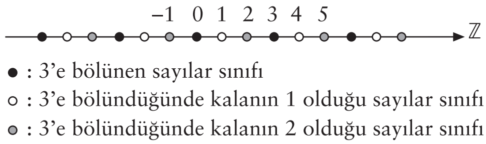
olur. Topu topu üç sınıf var:

$$[0] = 3\mathbb{Z},$$
$$[1] = 3\mathbb{Z} + 1,$$
$$[2] = 3\mathbb{Z} + 2.$$

Örneğin,

$$[0] = [3] = [6] = [-3] = 3\mathbb{Z},$$
$$[1] = [4] = [7] = [-2] = 3\mathbb{Z} + 1,$$
$$[2] = [5] = [8] = [-1] = 3\mathbb{Z} + 2.$$

Sınıfların bir de toplu resmini yapalım:



Eğer sıralamayı kale almazsak resmi aşağıdaki gibi de çizebiliriz:

$3\mathbb{Z}$	$3\mathbb{Z}+1$	$3\mathbb{Z}+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-3 ●	-2 ●	-1 ●
0 ●	1 ●	2 ●
3 ●	4 ●	5 ●
6 ●	7 ●	8 ●
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Umarım aşağıdaki eşitlikler barizdir:

$$[0] = 3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} + 3 = 3\mathbb{Z} - 3 = 3\mathbb{Z} + 27 = [27],$$
$$[1] = 3\mathbb{Z} + 1 = 3\mathbb{Z} + 4 = 3\mathbb{Z} - 5 = [-5] = [4],$$
$$[2] = 3\mathbb{Z} + 2 = 3\mathbb{Z} + 11 = 3\mathbb{Z} - 1 = [-1] = [11].$$

En genel durumu ele alalım: n herhangi bir pozitif doğal sayı olsun. Bu genel durumda, ilişkimiz,

$$\begin{aligned} x \equiv y &\Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}. \\ &\Leftrightarrow x - y, n\text{'ye bölünür} \\ &\Leftrightarrow x \text{ ve } y, n\text{'ye bölündüğünde kalanlar eşittir} \end{aligned}$$

der. Okur bu durumda,

$$x \equiv y \bmod n$$

yazıldığını daha önce görmüş olabilir (görmemişse de önemli değil); sınıflar da çoğu zaman $[x]$ olarak değil, $\overline{x}$ olarak gösterilir.

Toplam n tane sınıf vardır:

$$\overline{0} = n\mathbb{Z},$$
$$\overline{1} = n\mathbb{Z} + 1,$$
$$\ldots$$
$$\overline{i} = n\mathbb{Z} + i,$$
$$\ldots$$
$$\overline{n-1} = n\mathbb{Z} + (n-1).$$

Genel bir sınıfı daha açık gösterelim:

$$\bar{i} = n\mathbb{Z} + i = \{\ldots,\ -2n+i,\ -n+i,\ i,\ n+i,\ 2n+i,\ \ldots\}.$$

Bu denklik ilişkisinin sınıflarının kümesi matematikte $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olarak gösterilir. Örneğin $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2}\}$.

8.11. $X = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ olsun.

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

olarak tanımlanan ikili ilişki bir denklik ilişkisidir. Her sınıf, aralarındaki farkın bir tamsayı olduğu sayılardan oluşur. Örneğin,

$$\mathbb{Z} + \frac{1}{2} = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{-3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{-5}{2},\ \ldots\right\}$$

bir denklik sınıfıdır, bu kümedeki herhangi iki sayı birbirine denktir. Bu sınıf, örneğin 1/2'nin sınıfıdır.

Genel olarak, eğer $x \in X$ ise, x'in denklik sınıfı,

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in X : x \equiv y\} = \{y \in X : x - y \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{y \in X : y - x \in \mathbb{Z}\} = \{y \in X : y \in x + \mathbb{Z}\} = x + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

olur.

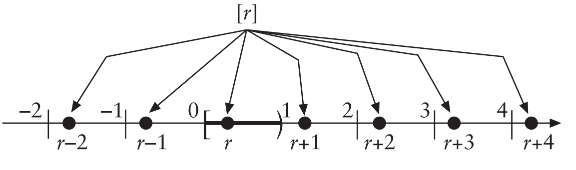
Bu denklik ilişkisinde her x sayısı, $[0, 1)$ kümesinin

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

sayısına denktir. (Burada $\lfloor x \rfloor$, x'in tamkısmını, x'ten küçükeşit en büyük tamsayıyı göstermektedir.) Ayrıca eğer $x,\ y \in [0, 1)$ ise,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x = y$$

olur. Demek ki X'in her elemanı $[0, 1)$ kümesinden bir ve sadece bir tek elemana denktir. Bir başka deyişle her denklik sınıfı, bir ve sadece bir tek $r \in [0, 1)$ için $[r] = r + \mathbb{Z}$ denklik sınıfına eşittir. (Eğer $X = \mathbb{Q}$ ise, r'yi kesirli almak lazım.) Denklik sınıflarını aşağıdaki resimde gösterdik.



8.12. $X = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ olsun.

$$x \equiv y \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

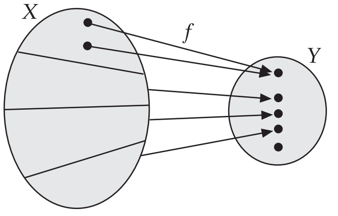
olarak tanımlanan ikili ilişki bir denklik ilişkisidir. Bu denklik ilişkisinde her eleman sadece ve sadece kendisiyle ve eksisiyle denktir: $[x] = \{x, -x\}$.

Sadece 0'ın sınıfında tek bir eleman vardır, diğer her sınıfta biri pozitif biri negatif olmak üzere ikişer eleman vardır. Ayrıca her eleman mutlak değerine denktir.

8.13. En önemli denklik ilişkisi örneğine geldik. X ve Y herhangi iki küme ve $f : X \longrightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. X üzerine

$$x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

olarak tanımlanmış ikili ilişki bir denklik ilişkisidir. Denklik sınıfları $f(X)$'in elemanlarının önimgeleridir, resimleri aşağıda.



Her denklik sınıfındaki elemanların f-imgeleri aynıdır. Dolayısıyla her denklik sınıfını $f(X)$ kümesinin bir elemanıyla kodlayabiliriz: $f(X)$ kümesinde ne kadar eleman varsa, o kadar denklik sınıfı vardır.
(Bir önceki örnek de bu örneğin özel bir halidir: $Y = \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ alın.)

8.14. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerine, $\equiv$ denklik ilişkisini

$$(x, y) \equiv (z, t) \Leftrightarrow x + y = z + t$$

olarak tanımlayalım. Bu aslında, bir önceki örneğin özel bir halidir: $Y = \mathbb{R}$ ve $f(x, y) = x + y$ olsun. Bir (a, b) noktasının sınıfı,

$$\{(x, y) : x + y = a + b\}$$

kümesidir, yani

$$y = -x + (a + b)$$

denklemiyle verilmiş (-1 eğimli ve $(0, a + b)$ noktasından geçen) doğrudur. Bu arada,

$$(a, b) \equiv (0, a + b) \equiv (a + b, 0)$$

denkliklerini dikkatlerinize sunarız. $x = 0$ doğrusu (örneğin) her denklik sınıfını tek bir noktada keser.

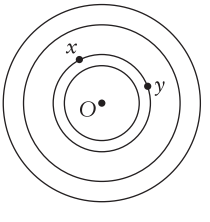
8.15. Örnek 8.13'te tanımlanan denklik ilişkisinin bir başka özel halini ele alacağız. $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ olsun ve $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

eşitliğiyle tanımlansın. $f(x, y)$, düzlemin (x, y) noktasının $(0, 0)$ merkezine olan uzaklığının karesidir. Dolayısıyla

$$(x, y) \equiv (z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t)$$

olarak tanımlanan denklik ilişkisi, birbirine denk noktaların, düzlemin merkezi olarak kabul edilen $O(0, 0)$ noktasına uzaklıklarının eşit olduklarını, yani $(0, 0)$ merkezli aynı çemberin üstünde olduklarını söylüyor.



Burada denklik sınıfları O merkezli çemberlerdir. $(0, 0)$ dışında her noktanın sınıfının sonsuz sayıda elemanı vardır.

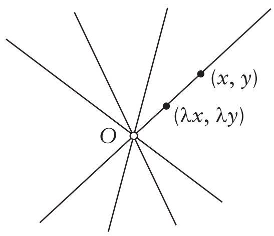
8.16. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ olsun. $\equiv$ ilişkisini

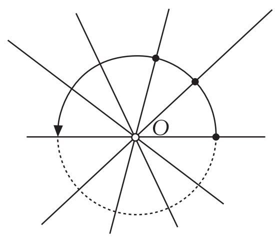
$$(x, y) \equiv (z, t) \Leftrightarrow \text{ Bir } \lambda \neq 0 \text{ için } x = \lambda y \text{ ve } z = \lambda t$$

olarak tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir ve her sınıf $O(0,0)$ noktasından geçen ama bu noktası çıkarılmış bir doğrudur; nitekim bir (a, b) noktasının sınıfı,

$$\{(\lambda a, \lambda b) : \lambda \neq 0\}$$

kümesidir, yani $(0,0)$ ve (a, b) noktalarından geçen doğrudan $(0,0)$ noktası çıkarılarak elde edilen kümedir. Demek ki iki farklı noktanın birbirine denk olmaları için, bu iki noktadan geçen doğrunun $O(0,0)$ noktasından geçmesi gerek ve yeter koşuldur. $O(0,0)$ merkezli, (örneğin) 1 yarıçaplı çemberin "yarısı", örneğin "üst yarısı" (üstte, sağdaki şekilde kesiksiz görünen küme) her sınıftan bir ve sadece bir tek eleman barındırır. Resim aşağıda.

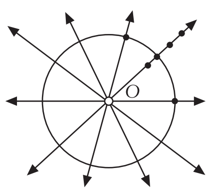




8.17. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ olsun ve $\equiv$ ilişkisini

$$(x, y) \equiv (z, t) \Leftrightarrow \text{ Bir } \lambda > 0 \text{ için } x = \lambda z \text{ ve } y = \lambda t$$

olarak tanımlayalım. Bu da bir denklik ilişkisidir ve her sınıf $O(0,0)$ noktasından çıkan ama bu noktayı içermeyen bir ışındır. O merkezli (örneğin) 1 yarıçaplı çember her sınıftan bir ve sadece bir tek eleman barındırır. Sınıfların resmi aşağıda.

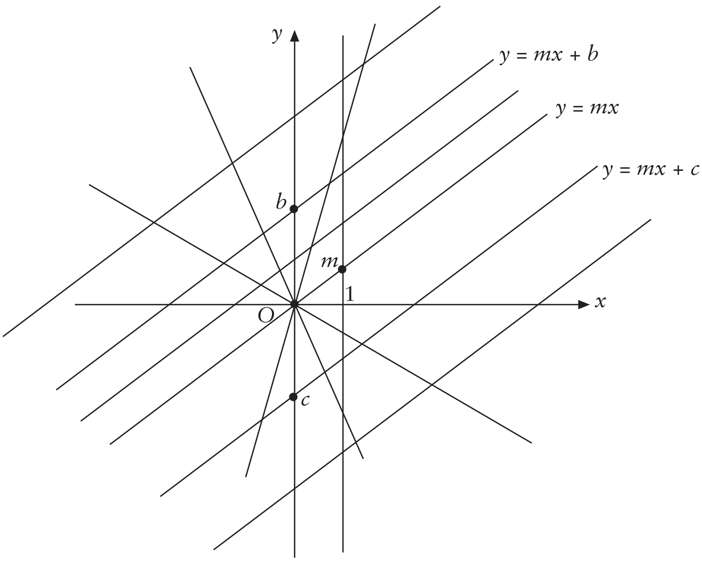


Bir önceki örnekte birbirine denk olan $(5,3)$ noktasıyla $(-5,-3)$ noktası artık birbirine denk değildir, öte yandan $(5,3)$ noktasıyla $(5\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ noktası birbirine denktir.

8.18. X, bildiğimiz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ düzleminin doğrular kümesi olsun ve $\equiv$ ilişkisini

$$k \equiv \ell \Leftrightarrow k \text{ ve } \ell \text{ paralelse}$$

olarak tanımlayalım. Her sınıf birbirine paralel doğrulardan oluşur ve her sınıf $O(0,0)$ noktasından geçen bir ve sadece bir tek doğru içerir. Ayrıca her sınıf içerdiği doğruların eğimi (bir gerçel sayı ya da sonsuz) tarafından kodlanır. Yani bu denklik ilişkisinin sınıflar kümesiyle $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ kümesi arasında birebir bir ilişki vardır. Sınıfların resmi aşağıda.



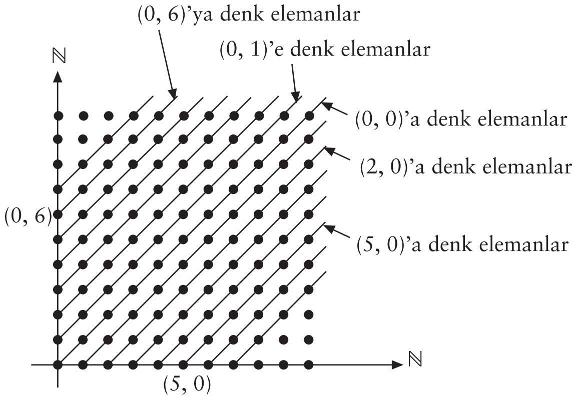
8.19. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinde

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

ilişkisini tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir (okura alıştırma). Her sınıf aşağıdaki resimdeki gibi çapraz doğrunun üstündeki noktalardan oluşur. Her denklik sınıfının

$$(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$$

kümesinde bir ve sadece bir tek temsilcisi vardır (okura alıştırma).



Eğer, bu denklik ilişkisini yukarıdaki gibi değil de,

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow a - b = c - d$$

olarak tanımlamış olsaydık, bunun Alıştırma 7.13'ün özel bir hali olduğunu hemen görürdük.

8.20. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinde

$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow 3(a - c) = 2(b - d)$$

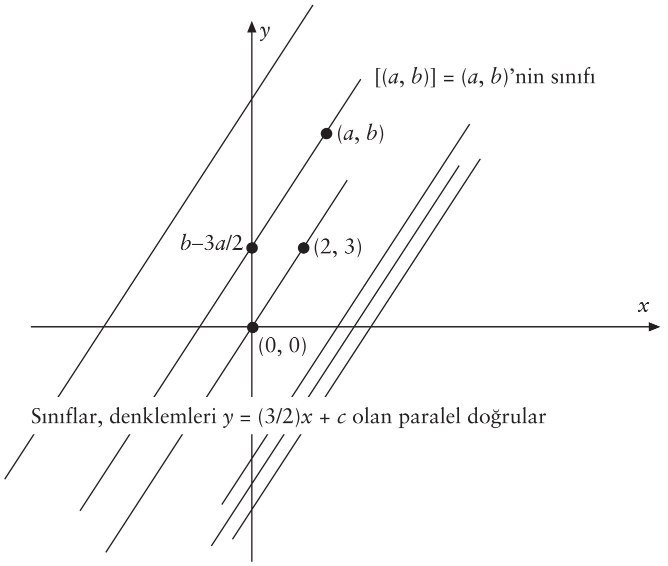
ilişkisini tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir. (Neden?) Bu denklik ilişkisine göre, bir (a, b) elemanının sınıfı,

$$\begin{aligned}[(a,b)] &= \{(x,y) : (a,b) \equiv (x,y)\}\\ &= \{(x,y) : 3(a-x) = 2(b-y)\}\\ &= \{(x,y) : 2y - 3x = 2b - 3a\}\\ &= \{(x,y) : y = (3/2)x + (b - 3a/2)\}\end{aligned}$$

olur, yani

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)x + \left(b - \frac{3a}{2}\right)$$

denklemiyle verilen doğrudur. Bu doğrular birbirine paraleldir, çünkü her birinin eğimi 3/2'dir. Resim aşağıda.



Denklik sınıflarına paralel olmayan her doğru, örneğin $x = 0$ doğrusu, her sınıftan tek bir eleman içerir: $[a, b]$ sınıfından $(b - 3a/2, 0)$ noktasını içerir.
Bu örneğin de Örnek 8.13'ün özel bir hali olduğuna dikkat edin.

8.21. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinde

$$(a, b, c) \equiv (a', b', c') \Leftrightarrow a + b + c = a' + b' + c'$$

ikili ilişkisini tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir (gene Örnek 8.13'ün özel bir hali). Her sınıf, $(0, 0, x)$ biçiminde yazılan bir noktanın sınıfıdır:

$$(a, b, c) \equiv (0, 0, a + b + c).$$

Ayrıca $(a, b, c) \equiv (0, 0, x)$ ise $x = a + b + c$ olmak zorundadır. Sınıfların resimlerini çizmeyi okura bırakıyoruz. (Her biri üç boyutlu uzayda bir düzlem olacak.)
Benzer örneği $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi için de verebiliriz:

$$(a, b, c, d) \equiv (a', b', c', d') \Leftrightarrow a + b + c + d = a' + b' + c' + d'$$

olarak tanımlansın. Bu sefer, dört boyutta olduğumuzdan, sınıfları çizemeyiz ama hiç olmazsa, her (a, b, c, d) için,

$$(a, b, c, d) \equiv (0, 0, 0, x)$$

denkliğini sağlayan bir ve bir tek $x \in \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayabiliriz. Kolayca görülebileceği üzere, bu x sayısı sadece ve sadece $a+b+c+d$ sayısı olabilir.

8.22. X, bir A kümesinden bir B kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun, yani $X = \text{Fonk}(A, B)$ olsun. U, A'nın bir altkümesi olsun. X üzerine $\equiv$ ilişkisini, her f, $g \in X$ için,

$$f \equiv g \Leftrightarrow \text{ Her } u \in U \text{ için } f(u) = g(u),$$

yani

$$f \equiv g \Leftrightarrow f_{|U} = g_{|U}$$

kuralıyla tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir. $b \in B$, sabit bir eleman olsun. T, A'dan B'ye giden ve U dışında hep bu b değerini alan fonksiyonlar kümesi olsun. X'in her denklik sınıfı T kümesiyle tek bir elemanda kesişir. Nitekim, eğer $f \in X$ ise, $Tf \in X$ fonksiyonu, herhangi bir $a \in A$ için,

$$a \in U \text{ ise } (Tf)(a) = f(a),$$
$$a \notin U \text{ ise } (Tf)(a) = b$$

olarak tanımlansın. O zaman $[f] \cap T = \{Tf\}$ olur.

Bir benzetme yapmak gerekirse, T altkümesinde, her sınıftan tek bir temsilci vardır. Bir sonraki bölümde "sınıflardan birer temsilci" bulmaya çok daha fazla odaklanacağız.

8.23. X, $\mathbb{R}$'den bir Y kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun. Yani

$$X = \text{Fonk}(\mathbb{R}, Y)$$

olsun. $a \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı olsun. Eğer f, $g \in X$ olsun. Eğer a'yı içeren bir I açık aralığında f ve g birbirine eşitse, yani her $x \in I$ için $f(x) = g(x)$ eşitliğini sağlayan ve a'yı içeren bir I açık aralığı varsa, yani $f_{|I} = g_{|I}$ eşitliğini sağlayan ve a'yı içeren bir I açık aralığı varsa, o zaman f'nin g'ye denk olduğunu söyleyelim. Bu ilişki X üzerine bir denklik ilişkisidir. (Lütfen kanıtlayın.) Bir f fonksiyonunun denklik sınıfına f'nin ***a'daki tohumu*** adı verilir.

Yukarıdaki a'yı bir anlamda sonsuz da yapabiliriz. Şöyle yaparız: f, $g \in X$ olsun. Eğer

$$x > r \Rightarrow f(x) = g(x)$$

önermesini doğrulayan bir $r \in \mathbb{R}$ varsa, o zaman f ve g fonksiyonlarına denk diyelim. Bu bir denklik ilişkisidir. Her denklik ilişkisine ***∞'da bir tohum*** adı verilir.

8.24. Bir önceki örneği dizilere uygulayabiliriz. (Altbölüm 4.12'de dizilerin aslında tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan fonksiyonlar olduğunu görmüştük.) x ve y, sırasıyla,

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

ve

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$$

dizileri olsun. Eğer,

$$n > N \Rightarrow x_n = y_n$$

önermesini doğrulayan bir N göstergeç sayısı varsa (yani sonsuzdaki tohumları eşitse), o zaman x ve y dizilerine denk diyelim. Bu bir denklik ilişkisidir. Bu denklik ilişkisini $\equiv$ ile gösterelim.

Bu örnek Seçim Aksiyomu ve Bir Oyun yazısında kullanılacak.

Şimdi bu örneği hafifçe değiştirelim. Bu sefer dizilerin denk olması için şu yeni koşulu getirelim: Eğer iki tane n ve m göstergeci için

$$\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } x_{n+k} = y_{m+k}$$

önermesi doğrulanıyorsa, o zaman x ve y dizilerine denk diyelim. Bu bir denklik ilişkisidir. Bu denklik ilişkisini de $\approx$ simgesiyle gösterelim. Örneğin,

$$01010101\ldots$$

dizisi $\equiv$ ilişkisi için 10101010 dizisine denk değildir ama $\approx$ ilişkisi için denktir.

Her x ve y dizisi için, $x \equiv y$ ise $x \approx y$ olduğu bariz olmalı. Yani x'in $\equiv$ ilişkisi için denklik sınıfı, x'in $\approx$ ilişkisi için denklik sınıfının altkümesidir. (Ama hemen hemen hiçbir zaman bu denklik sınıfları birbirine eşit değildir. Tam ne zaman eşit olduklarını bulmayı okura bırakıyoruz.)

8.25. A, herhangi bir küme olsun. $X = \wp(A)$ olsun, yani A'nın altkümelerinden oluşan küme olsun. $B, C \subseteq A$ için, eğer B ile C arasında bir eşleme varsa $B \approx C$ yazalım. $\approx$ ilişkisi X üzerine bir denklik ilişkisidir. Bu denklik ilişkisinde boşküme sadece kendisine denktir. A'nın n elemanlı bir altkümesi n elemanlı tüm altkümelerine denktir ve başka hiçbir kümeye denk değildir.

Ama dikkat: Eğer $A = \mathbb{N}$ ise, $A \approx 2\mathbb{N}$ olur. Kitabın ikinci kısmında $\mathbb{N}$'nin her sonsuz altkümesinin $\mathbb{N}$'ye denk olduğunu ve bundan çok daha fazlasını kanıtlayacağız.

8.26. A herhangi bir küme olsun. $X = \wp(A)$, A'nın altkümeler kümesi olsun. Eğer X'in iki elemanının (yani A'nın iki altkümesinin) simetrik farkı sonluysa, bu iki elemana denk diyelim. Bir başka deyişle $\equiv$ ikili ilişkisini şöyle tanımlayalım: Her x, $y \in X$ için

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \Delta y \text{ sonlu.}$$

Bu ikili ilişki X üzerine bir denklik ilişkisidir. (Kanıtlayın.) Boşkümenin denklik sınıfı A'nın sonlu altkümelerinden oluşan kümedir. A'ya denk olan elemanlar, A'da tümleyeni sonlu olan kümelerdir.

Yeterince örnek verdiğimizi düşünüyoruz. Şimdi denklik ilişkisiyle ilintili çok çok önemli bir kavramı tanıtalım: Bölüm kümesi.

8.4 Bölüm Kümesi

$\equiv$ ikili ilişkisi X kümesi üzerine bir denklik ilişkisi olsun. Her $x \in X$ için, x'in denklik sınıfını, X'in x'e denk elemanlar kümesi olarak tanımlamıştık ve bu kümeyi $[x]$ olarak göstermiştik:

$$[x] = \{y \in X : x \equiv y\}.$$

Her $[x]$ sınıfı, X'in bir altkümesidir. Elemanları bu denklik sınıflarından oluşan kümeyi ele alalım. Bu sınıfların kümesi

$$X/\equiv$$

olarak yazılır. İşte biçimsel tanım:

$$X/\equiv \; = \{[x] : x \in X\}.$$

$X/\equiv$ kümesinin elemanları X'in altkümeleri olduğundan, tanımlanan $X/\equiv$ kümesi X'in altkümelerinin kümesi olan $\wp(X)$'in bir altkümesidir:

$$X/\equiv \; \subseteq \wp(X)$$

ve $X/\equiv$ kümesi X'in ayrık altkümelerinden (denklik sınıflarından) oluşur.

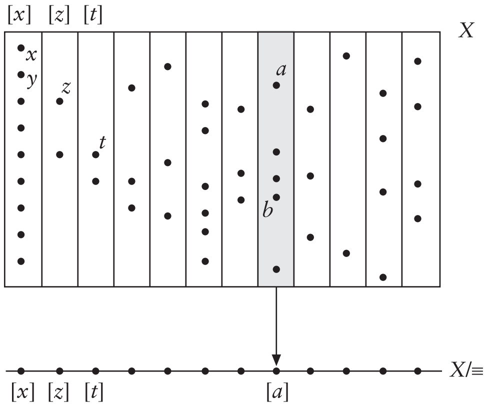
Örneğin, $X = \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise ve $\equiv$ ikili ilişkisi

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}.$$

olarak tanımlanmışsa (Örnek 8.10), o zaman,

$$X/\!\equiv\; = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

olur.



Yukarıdaki resimde X kümesi ve denklik sınıfları (bunlar X'in ayrık altkümeleri elbette) görülüyor. Birbirine denk olan elemanları bir sütun halinde gösterdik. $X/\!\equiv$ kümesini ise resmin alt tarafında bir doğru olarak tasvir ettik. Her $x \in X$ için, x'in denklik sınıfı olan ve X'in bir altkümesi olan $[x]$, resmin en altında bir doğru biçiminde resmedilen $X/\!\equiv$ kümesinin bir elemanı. Birbirine denk olan elemanların denklik sınıfları aynıdır. Örneğin, yukarıdaki resimde,

$$[x] = [y] \text{ ve } [a] = [b]$$

ama $[z] \neq [t]$, hatta bilindiği üzere $[z] \cap [t] = \emptyset$.

$X/\!\equiv$ kümesine (X'in $\equiv$ denklik ilişkisine göre) *bölüm kümesi* adı verilir.

X'ten $X/\!\equiv$ kümesine giden "doğal" bir fonksiyon görüyoruz: X'in her x elemanını $X/\!\equiv$ kümesinin $[x]$ elemanına götürüyor bu fonksiyon. Bu fonksiyona ***doğal izdüşüm*** adı verilir ve doğal izdüşüm fonksiyonu çoğu zaman p ya da π simgelerinden biriyle simgelenir. Eğer π ile simgeleyecek olursak,

$$\pi : X \longrightarrow X/\!\equiv$$

fonksiyonu,

$$\pi(x) = [x]$$

kuralıyla tanımlanmıştır.

Doğal izdüşüm elbette örten bir fonksiyondur.

Doğal izdüşüm matematiğin en temel kavramlarından biridir, sık sık karşımıza çıkar, adı üstünde "doğal".

8.5 Esas Teorem

Bu kitapta uygulamasını görmeyeceksek de, aşağıdaki teorem matematikte çok sık kullanılır ve matematiğin en soyut kavramlarından biri olduğunu söylemek yalan olmaz. Kabaca söylemek gerekirse, bu teorem sayesinde, birebir olmayan bir fonksiyon, hafif bir değişiklikle birebir yapılabilir.

Bir örnekle başlayalım. $f(x) = x^2$ kuralıyla verilmiş $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir değildir, çünkü f fonksiyonu x ile $-x$ arasında ayrım yapamaz. $\mathbb{R}$ üzerine şu denklik ilişkisini alalım:

$$x \equiv y \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Dikkat ederseniz $x \equiv y$ ise $f(x) = f(y)$ olur. Demek ki aslında

$$f([x]) = f(x)$$

tanımını yapabiliriz, çünkü ne de olsa $f(x)$'in değeri x'e göre değişse de, biraz daha dikkatli bakınca, aslında x'in denklik sınıfına göre değiştiği görülüyor. Bu olgu sayesinde f'nin tanım kümesini $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}/\equiv$ kümesine değiştirebiliriz. Ama bu yeni fonksiyonu gene f olarak göstermek doğru değil. Bu yeni fonksiyonu $\overline{f}$ olarak yazmak bir gelenek haline gelmiştir:

$$\overline{f} : \mathbb{R}/\equiv \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $\alpha \in \mathbb{R}/\equiv$ ve her $x \in \alpha$ için,

$$\overline{f}(\alpha) = f(x) = x^2$$

olarak tanımlanmıştır. İşin püf noktası şu: f birebir değildir ama $\overline{f}$ birebirdir.

Teorem 8.2. *$f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\equiv$, X üzerine bir denklik ilişkisi olsun. $\pi : X \longrightarrow X/\equiv$ doğal izdüşüm olsun. Şu varsayımı yapalım: Her x_1, $x_2 \in X$ için,*

$$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

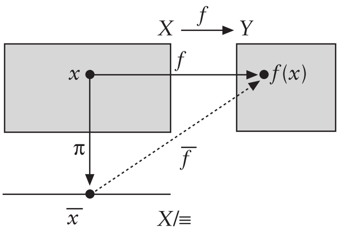
O zaman $\overline{f} \circ \pi = f$ eşitliğini sağlayan bir ve sadece bir tane $\overline{f} : X/\equiv \longrightarrow Y$ fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon

$$\overline{f}([x]) = f(x)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\overline{f}$ fonksiyonunun birebir olması için yeter ve gerek koşul, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

koşuludur. $\overline{f}$ fonksiyonunun örten olması için yeter ve gerek koşul f fonksiyonunun örten olmasıdır.



Kanıt: Eğer $\overline{f} \circ \pi = f$ eşitliğini sağlayan bir

$$\overline{f} : X/{\equiv} \longrightarrow Y$$

fonksiyonu varsa, o zaman her $x \in X$ için,

$$\overline{f}([x]) = \overline{f}(\pi(x)) = (\overline{f} \circ \pi)(x) = f(x)$$

eşitliği sağlanmak zorunda. Dolayısıyla $\overline{f}$ fonksiyonu, eğer varsa, ancak bir tane olmak zorundadır ve tanımı

$$\overline{f}\,([x]) = f(x)$$

eşitliği tarafından verilmek zorundadır. Bunun gerçekten geçerli bir tanım olduğunu kanıtlamak için şunu kanıtlamalıyız: Eğer $[x_1] = [x_2]$ ise $f(x_1) = f(x_2)$. Bu da varsayımın ta kendisi.

Teoremin ikinci kısmını alıştırma olarak bırakıyoruz. □

Aşağıda önemli bir örnek vereceğiz. Şimdilik son derece basit bir örnek verelim. Devam etmeden önce Örnek 8.13'ü tekrar okuyun. X ve Y herhangi iki küme ve $f : X \longrightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. X üzerine

$$x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

olarak tanımlanmış ikili ilişkiyi ele alalım. Bunun bir denklik ilişkisi olduğunu biliyoruz.

$$\overline{f}\,([x]) = f(x)$$

kuralıyla tanımlanmış olan ve $X/{\equiv}$ kümesinden $f(Y)$'ye giden $\overline{f}$ fonksiyonu bir eşlemedir. Bu fonksiyon aynen yukarıdaki teoremde elde edilmiş fonksiyondur.

Örnek 8.27. n ve m iki pozitif doğal sayı olsun. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kümesinin elemanlarını, $x \in \mathbb{Z}$ için, sırasıyla $[x]$ ve (x) olarak yazalım.

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

kümesine giden fonksiyon,

$$f(x) = ([x], (x))$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. Şimdi p, hem n'ye hem de m'ye bölünen (yani n ve m'nin en küçük ortak katına bölünen) herhangi bir pozitif doğal sayı olsun. $\mathbb{Z}$ kümesi üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini

$$x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow p,\ x_1 - x_2 \text{ sayısını böler}$$

olarak tanımlayalım. Teoremi yukarıda açıkladığımız duruma uygulamaya çalışalım. Önce teoremin koşulunun doğruluğunu kontrol edelim: Her $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ için, gerçekten de, kolayca görüleceği üzere,

$$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

koşulu sağlanır. Demek ki teoreme göre, $\mathbb{Z}/ = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kümesinden $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kümesine giden, ve eğer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kümesinin elemanlarını, $x \in \mathbb{Z}$ için, $\overline{x}$ olarak yazarsak,

$$\overline{f}\,(\overline{x}) = ([x], (x))$$

kuralıyla verilmiş bir $\overline{f}$ fonksiyonu vardır. Somut n ve m sayıları için, $\overline{f}$ fonksiyonunu yazmayı okura bırakıyoruz.

Alıştırmalar

8.28. Yukarıdaki paragrafta bulunan $\overline{f} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ fonksiyonunu $n = 6$, $m = 21$ ve $p = 420$ sayıları için bulun. (420 büyük gelebilir, ama en azından $\overline{f}$ fonksiyonunun ne örten ne de birebir olduğunu anlayana kadar fonksiyonla oynayın.)

8.29. Yukarıdaki paragrafta bulunan $\overline{f} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ fonksiyonunun birebir olması için p'nin n ve m sayılarının okek'i olmasının gerek ve yeterli koşul olduğunu kanıtlayın.

8.30. Yukarıdaki paragrafta bulunan $\overline{f} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ fonksiyonunun örten olması için gerek ve yeterli koşulun n ve m'nin birbirine asal olmaları olduğunu kanıtlayın.

8.31. Yukarıdaki paragrafta bulunan $\overline{f} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ fonksiyonunun eşleme olması için yeter ve gerek koşulun n ve m'nin birbirine asal olmaları ve $p = nm$ eşitliği olduğunu kanıtlayın.

8.32. Teorem 8.2'deki

$$\text{“}x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\text{”}$$

koşulunu

$$\text{“}x_1 \equiv x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)\text{”}$$

koşuluyla değiştirirsek, Teorem 8.2'de bulunan $\overline{f} : X/\equiv \longrightarrow Y$ fonksiyonunun birebir olacağını kanıtlayın.

8.33. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olsun. $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Teorem 8.2'de $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ve $f(x) = [x + a]$ alalım. $\equiv$ denklik ilişkisi şöyle verilsin:

$$x \equiv y \Leftrightarrow n, x - y\text{'yi bölüyorsa.}$$

a. Teorem 8.2'deki “$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$” koşulunun sağlandığını gösterin.

b. Elbette $X/\equiv\, = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ olur. Teorem 8.2'deki $\overline{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ fonksiyonunun $\overline{f}([x]) = [x + a]$ kuralıyla tanımlandığını gösterin.

8.34. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ olsun. $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Teorem 8.2'de $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ve $f(x) = [xa]$ alalım. $\equiv$ denklik ilişkisi şöyle verilsin:

$$x \equiv y \Leftrightarrow n,\ x - y\text{'yi bölüyorsa.}$$

a. Teorem 8.2'deki “$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$” koşulunun sağlandığını gösterin.

b. Elbette $X/\equiv\,= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$'dir. Teorem 8.2'deki $\overline{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ fonksiyonunun $\overline{f}\,([x]) = [xa]$ kuralıyla tanımlandığını gösterin.

8.35. Teorem 8.2'de $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ve $f(x) = [x]$ alalım. $\equiv$ denklik ilişkisi şöyle verilsin:

$$x \equiv y \Leftrightarrow 24,\ x - y\text{'yi bölüyorsa.}$$

a. Teorem 8.2'deki “$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$” koşulunun sağlandığını gösterin.

b. Elbette $X/\equiv\ = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$'dir. Bu kümenin elemanlarını, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$'nin elemanlarıyla karışmasınlar diye $\overline{x}$ olarak gösterelim. Teorem 8.2'deki $\overline{f}$ fonksiyonunun $\overline{f}(\overline{x}) = [x]$ olduğunu gösterin.

8.36. Teorem 8.2'de $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ ve $f(x) = [6x]$ alalım. $\equiv$ denklik ilişkisi şöyle verilsin:

$$x \equiv y \Leftrightarrow 4,\ x - y\text{'yi bölüyorsa.}$$

a. Teorem 8.2'deki "$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$" koşulunun sağlandığını gösterin.
b. Elbette $X/\equiv\, = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$'dir. Bu kümenin elemanlarını, $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$'nin elemanlarıyla karışmasınlar diye $\overline{x}$ olarak gösterelim. Teorem 8.2'deki $\overline{f}$ fonksiyonunun $\overline{f}(\overline{x}) = [6x]$ olduğunu gösterin.

8.37. Teorem 8.2'de

$$X = \mathbb{Z},\ Y = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \text{ ve } f(x) = ([x], \{x\})$$

olarak alalım. Buradaki $[x]$ ve $\{x\}$, x'in sırasıyla $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$'deki imgeleridir. $\equiv$ denklik ilişkisi şöyle verilsin:

$$x \equiv y \Leftrightarrow 210,\ x - y\text{'yi bölüyorsa.}$$

a. Teorem 8.2'deki "$x_1 \equiv x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$" koşulunun sağlandığını gösterin.
b. Elbette $X/\equiv\, = \mathbb{Z}/210\mathbb{Z}$'dir. Bu kümenin elemanlarını, $\overline{x}$ olarak gösterelim. Teorem 8.2'deki $\overline{f}$ fonksiyonunun

$$\overline{f}\,(\overline{x}) = ([x], \{x\})$$

olduğunu gösterin. $\overline{f}$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösterin.

Denklik İlişkilerinin Çarpımı*. X ve Y iki küme olsun. Bu kümeler üzerinde, sırasıyla $\equiv$ ve $\cong$ simgeleriyle göstereceğimiz iki denklik ilişkisi ele alalım. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu $\approx$ ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$$(x, y) \approx (x_1, y_1) \Leftrightarrow x \equiv x_1 \text{ ve } y \cong y_1.$$

Kolayca kanıtlanabilecği üzere, $\approx$ ikili ilişkisi $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine bir denklik ilişkisidir. Ve $(X \times Y)/\approx$ denklik sınıfları kümesiyle $X/\equiv\ \times Y/\cong$ kartezyen çarpımı arasında doğal bir eşleme vardır. Nitekim, karışıklığa neden olmayacağını umarak, eğer tüm sınıfları köşeli parantezler içinde yazarsak,

$$\overline{f}\,([x, y]) = ([x], [y])$$

kuralıyla tanımlanmış,

$$\overline{f} : (X \times Y)/\approx\ \longrightarrow X/\equiv \times\, Y/\cong$$

fonksiyonu iki küme arasında bir eşlemedir. Bu fonksiyon, aynen Teorem 8.2'de elde edilen fonksiyondur: Nitekim, teoremi

$$f((x, y)) = ([x], [y])$$

kuralıyla tanımlanmış

$$f : X \times Y \longrightarrow (X/\equiv) \times (Y/\cong)$$

örten fonksiyonuna uygulamak yeterlidir.

8.6 Denklik İlişkisi Temsilcileri

Şehirler arasındaki "aynı ülkede olma" denklik ilişkisine bakalım. Her denklik sınıfı, bir ülkenin şehirlerinden oluşur. Her denklik sınıfından bir temsilci seçmek istersek, başkent herhalde en doğal seçim olur.

İnsanlar arasında tanımlanan "aynı anne ve babadan doğmuş olmak" denklik ilişkisinin denklik sınıflarından birer temsilci seçmek istersek, her sınıftan, yani her kardeş kümesinden en büyük kardeşi seçebiliriz. Ya da istersek, en küçük kardeşi seçebiliriz.

Sayıları, negatif, pozitif ve 0 diye üç gruba ayıracak olursak, -1'i negatif sayıların temsilcisi, 1'i pozitif sayıların temsilcisi olarak seçebiliriz. Tek başına bir sınıf oluşturan 0 için de zorunlu olarak 0'ı seçeriz.

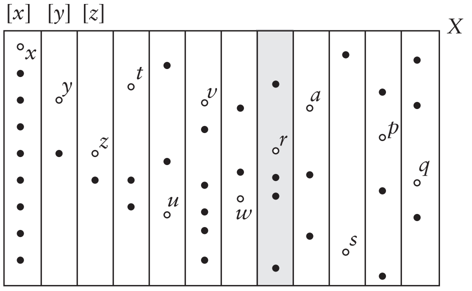
Bu bölümde, bir denklik ilişkisinin denklik sınıflarından temsilciler seçeceğiz. Örneklerimiz yukarıdakilerden daha matematiksel olacak elbette.

X bir küme ve $\equiv$, X üzerine bir denklik ilişkisi olsun. X'in bu denklik ilişkisine göre her sınıfından bir ve sadece bir tane eleman (sınıfın bir temsilcisini) seçmek istiyoruz ve bu temsilcileri olabildiğince güzel bir biçimde seçmek istiyoruz. Burada "güzel"den ne kastettiğimiz pek belli olmayacak, X'e ve X üzerine tanımlanan denklik ilişkisine göre değişecek.

Eğer X kümesi üzerine bir denklik ilişkisi verilmişse, amaç öyle bir $T \subseteq X$ altkümesi bulmak ki, her $x \in X$ için

$$|[x] \cap T| = 1$$

olsun. Bu T kümesi, her sınıftan tek bir eleman barındıracak, yani sınıfların "temsilcileri"nden oluşacak.



Bu örnekte, soldan sağa doğru, her sınıftan şu elemanlar seçilmiş: $x, y, z, t, u, v, w, r, a, s, p, q$.

Yukarıdaki resimdeki örnekte,

$$T = \{x,\ y,\ z,\ t,\ u,\ v,\ w,\ a,\ s,\ p,\ q\}$$

kümesi bir temsilciler kümesidir.

Bu bölümde sadece örnekler vereceğiz. Böylece denklik ilişkisinin de daha iyi kavranacağını umuyoruz.

Notlar ve Örnekler

8.38. Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ üzerine,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \text{ çift sayıdır}$$

olarak tanımlanan denklik ilişkisine bakalım. Sadece iki sınıf var: çift sayılar ve tek sayılar. Demek ki temsilci olarak bir çift, bir de tek sayı seçeceğiz. İşte bir örnek: $\{24, -7\}$. Çift sayılar arasından temsilci olarak 24 seçilmiş, tek sayılar arasından da -7. Doğrusu bu temsilci seçimlerine pek güzel denemez, doğal hiç denemez. Bu durumda en güzel ve en doğru seçim (her ne demekse!) 0 ve 1 seçimleridir: Çift sayıların temsilcisi 0 olsun, tek sayıların da 1.

Bu yaptığımızı genelleştirelim. n bir doğal sayı olsun ve $\equiv$ denklik ilişkisini

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$$

olarak tanımlayalım. Toplam n tane sınıf vardır.

$$\begin{aligned}
&[0] = n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} + 0,\\
&[1] = n\mathbb{Z} + 1,\\
&\quad \ldots\\
&[i] = n\mathbb{Z} + i,\\
&\quad \ldots\\
&[n-1] = n\mathbb{Z} + (n-1).
\end{aligned}$$

Her sınıftan bir temsilci seçeceğiz. Her sınıfta,

$$0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

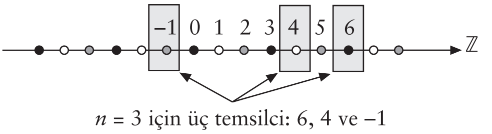
elemanlarından biri ve yalnızca biri vardır. İşte biz de temsilciler olarak bu elemanları seçelim. Örneğin, $n = 5$ ise, temsilci olarak,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

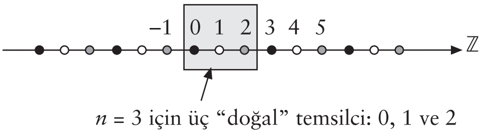
elemanlarını seçelim.

$$5,\ -4,\ 7,\ 13,\ -16$$

elemanlarını da seçebilirdik, ama herhalde $0, 1, 2, 3, 4$ seçimlerinin daha doğal ve daha güzel olduğu konusunda kimsenin kuşkusu yoktur. $n = 3$ için resim aşağıda.



n = 3 için üç temsilci: 6, 4 ve –1



n = 3 için üç "doğal" temsilci: 0, 1 ve 2

Bu örnekte, temsilciler kümesi olarak

$$T = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

kümesini seçmeyi yeğliyoruz.

8.39. $\mathbb{R}$ üzerine,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

olarak tanımlanan denklik ilişkisini alalım. Bu denklik ilişkisinde her x elemanı $[0,1)$ aralığının $x - \lfloor x \rfloor$ elemanına denktir ve x bu aralıktan bir başka elemana denk olamaz. Demek ki $\mathbb{R}$'nin her elemanı $[0,1)$ kümesinden bir ve sadece bir tek elemana denktir. Temsilci olarak $[0,1)$ aralığındaki sayıları alalım. Örneğin, bu seçimle, $\pi - 3$, π'nin sınıfının temsilcisidir.
Temsilcileri $[3,4)$ ya da $(0,1]$ aralığının ya da çok daha egzotik olan

$$[3,\ 3{,}2] \cup (4{,}2,\ 5)$$

kümesinin elemanları olarak da seçebilirdik ama bu seçimler $[0,\ 1)$ aralığı kadar doğal ve güzel olmazlardı.

8.40. $\mathbb{R}$ üzerine,

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

olarak tanımlanan denklik ilişkisinin her sınıfından bir eleman seçmek hiç kolay değildir, hatta bir bakış açısına göre mümkün de değildir. Bu durumda yukarıdaki örneklerde olduğu gibi doğal seçimler yoktur. Bu örnekte her sınıftan bir temsilci seçmek için Seçim Aksiyomu'na ihtiyacımız vardır (bkz. sayfa 105). Bu bölümde genellikle temsilci seçmenin elle ya da kalem kâğıtla mümkün olduğu örneklerden sözedeceğiz.

8.41. $X = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ olsun.

$$x \equiv y \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

olarak tanımlanan denklik ilişkisi için, en doğal temsilciler negatif olmayan sayılardır. $\{-5,\ 5\}$ sınıfından 5'i seçelim. Sonuç olarak, temsilciler kümesi adayımız

$$T = \{x \in X : x \geq 0\}$$

kümesi.

8.42. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

eşitliğiyle tanımlansın ve

$$(x,y) \equiv (z,t) \Leftrightarrow f(x,y) = f(z,t)$$

olsun. Bu bir denklik ilişkisidir. Burada denklik sınıfları $O(0,0)$ merkezli çemberlerdir. Demek ki her çemberden temsilci olarak bir nokta seçmeliyiz. Değişik seçimler olabilir. Örneğin, $(0,0)$ noktasından hareket eden bir ışının noktalarını seçebiliriz, mesela

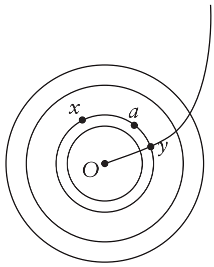
$$\{(x,0) : x \geq 0\}$$

ışını seçilebilir, ya da

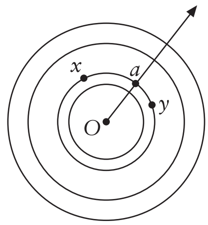
$$\{(x,-x) : x \geq 0\}$$

ışınını seçebiliriz. Şu yarı parabol de her çemberden bir nokta içerir:

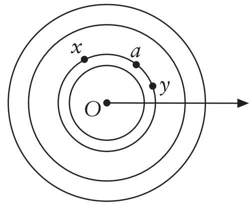
$$\{(x,x^2) : x \geq 0\}.$$



Temsilciler bir eğrinin üstünden seçilmiş.



Temsilciler bir yarı doğru üstünden seçilmiş. *x*'in sınıfından temsilci olarak *a* seçilmiş.

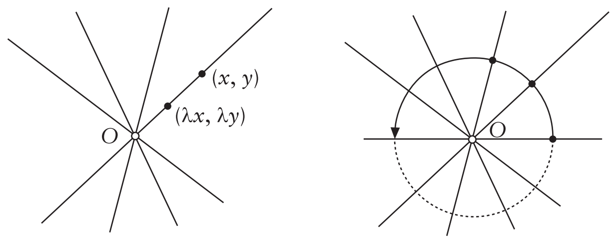


Temsilciler yatay ve sağa giden yarı doğru üstünden seçilmiş. En güzel seçim!

8.43. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ olsun. $\equiv$ ilişkisini

$$(x, y) \equiv (z, t) \Leftrightarrow \text{ Bir } \lambda \neq 0 \text{ için } x = \lambda y \text{ ve } z = \lambda t$$

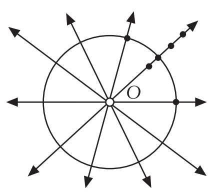
olarak tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir ve her sınıf $O(0,0)$ noktasından geçen ama bu noktası çıkarılmış bir doğrudur. O merkezli (örneğin) 1 yarıçaplı çemberin "yarısı", örneğin aşağıdaki şekilde görülen "üst yarısı", her sınıftan bir ve sadece bir tek eleman barındırır. Dikkat, $(1,0)$ ve $(-1,0)$ noktalarından sadece birini seçmelisiniz.



8.44. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0, 0\}$ olsun ve $\equiv$ ilişkisini

$$(x, y) \equiv (z, t) \Leftrightarrow \text{ Bir } \lambda > 0 \text{ için } x = \lambda z \text{ ve } y = \lambda t$$

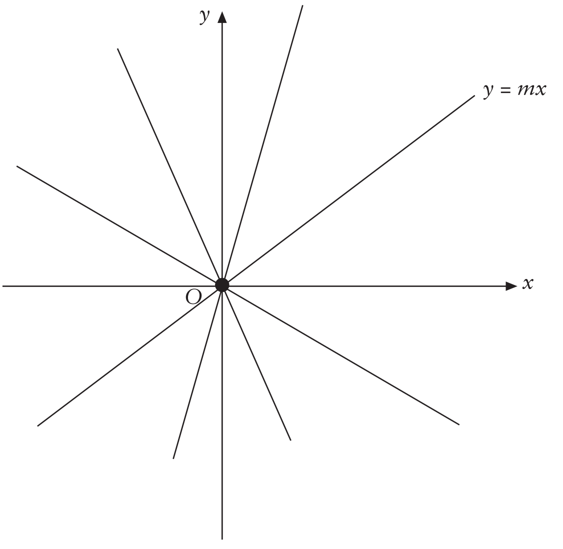
olarak tanımlayalım. Bu da bir denklik ilişkisidir ve her sınıf $O(0,0)$ noktasından çıkan ama bu noktayı içermeyen bir ışındır. O merkezli (örneğin) 1 yarıçaplı çember her sınıftan bir ve sadece bir tek eleman barındırır.



Eğer yukarıdaki iki örnekte $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsaydı, o zaman tek başına bir sınıf oluşturan $(0,0)$ noktasını da temsilci olarak daha önce seçilen temsilcilere eklememiz gerekecekti.

8.45. X, bildiğimiz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Öklid düzleminin doğrularından oluşan küme olsun ve $\equiv$ ilişkisini

$$k \equiv \ell \Leftrightarrow k \text{ ve } \ell \text{ paralelse}$$



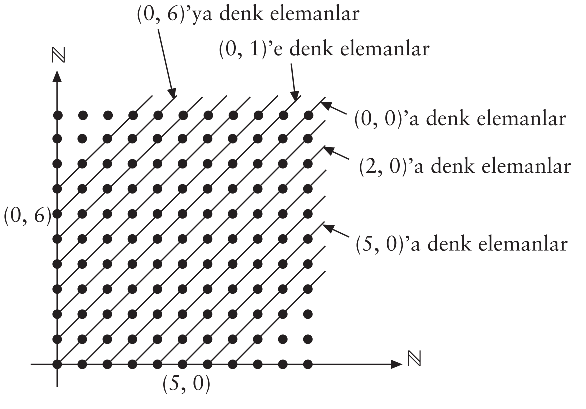
olarak tanımlayalım. (Her doğrunun kendisine paralel olduğu varsayılıyor.) Bu bir denklik ilişkisidir. Her sınıf birbirine (ya da belli bir doğruya) paralel doğrulardan oluşur. Her sınıf, $O(0,0)$ noktasından geçen bir ve sadece bir tek doğru içerir. Sonuç olarak, temsilciler kümesini O'dan geçen doğrular olarak seçebiliriz. Eğer isteseydik, temsilciler olarak, verilmiş bir çembere, çemberin üst tarafından teğet doğruları da seçebilirdik ama bunlar ilk temsilcilerimiz kadar şık olmazdı.

Bu örnekte her sınıf içerdiği doğruların eğimi tarafından (bir gerçel sayı ya da sonsuz) kodlanır.

8.46. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinde ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yerine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesini de alabilirdik),

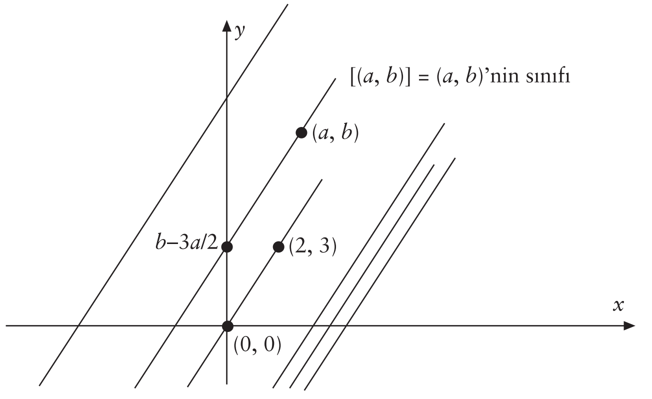
$$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a+d = c+b$$

ilişkisini tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir. Her sınıf aşağıdaki resimdeki gibi çapraz doğruların üstündeki noktalardan oluşur. Her denklik sınıfının $\mathbb{N} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{N}$ kümesinde bir ve sadece bir tek temsilcisi vardır.



Bu örnekte her sınıf bir tamsayı tarafından kodlanır: (a,b) noktasının sınıfı $a-b$ tarafından kodlanır. Nitekim bu sayı sınıftan seçilen seçilen (a,b) noktasından bağımsızdır, yani (a,b) ve (c,d) aynı sınıftalarsa, $a-b = c-d$ olur.

8.47. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinde
$$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow 3(a - c) = 2(b - d)$$
ilişkisini tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir. Bir (a, b) elemanının sınıfı, geçen bölümde Örnek 8.20'de gördüğümüz gibi
$$y = (3/2)x + (b - 3a/2)$$
denklemiyle verilen doğrudur. Denklik sınıfları birbirine paralel doğrulardır, nitekim her birinin eğimi 3/2'dir. Aşağıdaki resimde denklik sınıflarını resmettik. Denklik sınıflarına paralel olmayan her doğru, yani eğimi 3/2 olmayan her doğru örneğin $x = 0$ doğrusu her sınıftan tek bir eleman içerir: $[(a, b)]$ sınıfından $(b - 3a/2, 0)$ noktasını içerir. Dolayısıyla eğimi 3/2 olmayan doğruların her biri her sınıftan bir ve sadece bir tane temsilci içerir. Bu örnekte ne yazık ki doğal bir seçim yok. Temsilcileri en azından bir doğru oluşturacak biçimde seçebiliyoruz. Örnek 8.40'la karşılaştırınca buna da şükür diyelim.



Sınıflar, denklemleri $y = (3/2)x + c$ olan paralel doğrular

8.48. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinde
$$(a, b, c) \equiv (a', b', c') \Leftrightarrow a + b + c = a' + b' + c'$$
ikili ilişkisini tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir (gene Örnek 8.41'in özel bir hali). Her sınıf, $(0, 0, z)$ biçiminde yazılan bir noktanın sınıfıdır:
$$(a, b, c) \equiv (0, 0, a + b + c).$$
Ayrıca $(a, b, c) \equiv (0, 0, z)$ ise $x = a + b + c$ olmak zorundadır. Sınıfların resimlerini çizmeyi okura bırakıyoruz. (Her biri üç boyutlu uzayda bir düzlem olacak.) Dolayısıyla temsilciler kümesini $T = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ olarak seçebiliriz.
Benzer örneği $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi için de verebiliriz:
$$(a, b, c, d) \equiv (a', b', c', d') \Leftrightarrow a + b + c + d = a' + b' + c' + d'$$
olarak tanımlansın. Bu sefer, dört boyutta olduğumuzdan, sınıfları çizemeyiz ama hiç olmazsa, her (a, b, c, d) için,
$$(a, b, c, d) \equiv (0, 0, 0, t)$$
denkliğini sağlayan bir ve bir tek $t \in \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayabiliriz. Kolayca görülebileceği üzere, bu t sayısı sadece ve sadece $a + b + c + d$ sayısı olabilir.

8.49. X, bir A kümesinden bir B kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun, yani $X = \text{Fonk}(A, B)$ olsun. a, A'nın bir elemanı olsun. X üzerine $\equiv$ ilişkisini, her f, $g \in X$ için,

$$f \equiv g \Leftrightarrow f(a) = g(a)$$

kuralıyla tanımlayalım. Bu bir denklik ilişkisidir. (Örnek 8.22'de $U = \{a\}$ alırsak aynı örneği buluruz ama burada orada bulduğumuzdan başka temsilciler bulacağız.) S, A'dan B'ye giden sabit fonksiyonlar kümesi olsun. Bir $b \in B$ için, sabit b değerini alan fonksiyonu s_b olarak tanımlayalım: Her $x \in A$ için $s_b(x) = b$. Her $f \in X$ için $f \equiv s_{f(a)}$ olur. Ayrıca eğer $f \equiv s_b$ ise, $b = f(a)$ olmak zorunda. Bir başka deyişle, her denklik sınıfı S kümesiyle tek bir elemanda kesişir, yani S bir temsilciler kümesidir.

8.50. X, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun, yani $X = \text{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olsun. $\mathbb{R}$'den iki farklı eleman seçelim, kolaylık olsun diye diyelim 0 ve 1'i seçtik. Her f, $g \in X$ için şu tanımı yapalım:

$$f \equiv g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(1) = g(1).$$

Bu, X kümesi üzerine bir denklik ilişkisi tanımlar. (Bir önceki bölümün Örnek 8.22'de $U = \{0, 1\}$ alırsak aynı örneği buluruz ama burada orada bulduğumuzdan başka temsilciler bulacağız.) T kümesi, m ve b gerçel sayıları için,

$$f(x) = mx + b$$

formülüyle verilmiş fonksiyonlar kümesi olsun. O zaman T bir temsilciler kümesidir. Bunun doğruluğunu kontrol etmeyi okura bırakıyoruz.

8.51. $X = \wp(\mathbb{N})$ olsun, yani $\mathbb{N}$'nin altkümelerinden oluşan küme olsun. B, $C \in X$ için, eğer B ile C arasında bir eşleme varsa $B \approx C$ yazalım. $\approx$ ilişkisi X üzerine bir denklik ilişkisidir. Bu denklik ilişkisinde boşküme sadece kendisine denktir. $\mathbb{N}$'nin n elemanlı bir altkümesi n elemanlı tüm altkümelerine denktir ve başka hiçbir kümeye denk değildir.

$\mathbb{N}$'nin her altkümesi ya sonludur ya da sonsuzdur! Eğer B, $\mathbb{N}$'nin sonlu bir altkümesiyse ve n tane elemanı varsa o zaman,

$$B \approx \{0, 1, \ldots, n - 1\}$$

olur. Sağ taraftaki $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$ kümesine A_n diyelim. Bu arada $A_0 = \emptyset$ eşitliğine dikkatinizi çekerim.

Kitabın ikinci kısmında, $\mathbb{N}$'nin her sonsuz altkümesinin $\mathbb{N}$'ye denk olduğunu kanıtlayacağız. Demek ki, her $A \in X$ ya bir n doğal sayısı için A_n'ye ya da $\mathbb{N}$'ye denk. Bir başka deyişle,

$$T = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}\}$$

kümesi her sınıftan bir ve sadece bir tane temsilci içerir.

Aynı T, $\wp(\mathbb{Q})$ için de (aynı denklik ilişkisi için) her sınıftan bir ve sadece bir tane temsilci içerir. Bunu da kitabın ikinci bölümünde göreceğiz.

$\wp(\mathbb{R})$ kümesi ve $\approx$ ilişkisi için bir temsilciler kümesi bulmaya çalışmak çok daha problematiktir. $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında bir eşlemenin olmadığını kanıtlamak pek o kadar zor değildir, bkz. Teorem 12.3. Akla belki ilk gelebilecek olan

$$T_1 = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$$

kümesinin her sınıftan bir temsilci barındırıp barındırmadığı, matematiğin bugün kabul edilen aksiyomlarıyla kanıtlanamayacak önermelerden biridir. T_1'in $\wp(\mathbb{R})$'nin her sınıfından bir eleman barındırması varsayımı ***Süreklilik Hipotezi*** olarak bilinir ve dediğimiz gibi kanıtlanamaz bir önermedir. Kitabın ikinci kısmında bu konu üzerine biraz daha fazla bilgi bulacaksınız.

Alıştırmalar

8.52. $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $x \in X$ olsun. Eğer 2^n, x'i bölüyorsa ama 2^{n+1}, x'i bölmüyorsa, $u(x) = n$ yazalım. Her $x, y \in X$ için şu tanımı yapalım:

$$x \equiv y \Leftrightarrow u(x) = u(y).$$

Bu denklik ilişkisi için bir temsilciler kümesi bulun.

8.53. $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve $x \in X$ olsun. Eğer x'i bölen asal sayı sayısını $\pi(x)$ olarak gösterelim. Her x, $y \in X$ için şu tanımı yapalım:

$$x \equiv y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y).$$

Bu denklik ilişkisi için bir temsilciler kümesi bulun.

8.54. $X = \text{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve n pozitif bir doğal sayı olsun. $\mathbb{R}$'den n farklı eleman seçelim, diyelim $a_1, \ldots, a_n$ elemanlarını seçtik. Her f, $g \in X$ için şu tanımı yapalım:

$$f \equiv g \Leftrightarrow \text{ Her } i = 1, \ldots, n \text{ için } f(a_i) = g(a_i).$$

Bu, X kümesi üzerine bir denklik ilişkisi tanımlar. T, en fazla $n-1$'inci dereceden polinomiyal fonksiyonlar kümesi olsun. T'nin bir temsilciler kümesi olduğunu kanıtlayın.

8.55. $X = \text{Fonk}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olsun. Her f, $g \in X$ için şu tanımı yapalım:

$$f \equiv g \Leftrightarrow \exists c \forall x\, (f(x) = g(x) + c).$$

Bu, X kümesi üzerine bir denklik ilişkisi tanımlar. Y, 0'da 0 değerini alan fonksiyonlar kümesi olsun. Y'nin bir temsilciler kümesi olduğunu gösterin.

9. Ekler

Bu eklerde önceki bölümlerde uygun bir yer bulamadığımız üç ayrı ve birbirinden bağımsız konuya yer vereceğiz. İlk ikisi çok temeldir ve önemlidir. Seçim aksiyomuyla ilgili olan üçüncü ek de temeldir ancak bambaşka bir seviyede temeldir, ama temellikten öte had safhada ilginçtir; özellikle matematiğin "gerçek"le ilişkisini irdelememize yardımcı olacağını düşünüyorum.

9.1 Toplamı Yazmanın Şık Bir Yolu

1, 2, 3, ..., n doğal sayılarının toplamı doğal olarak

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

olarak yazılır. Aynı toplamı daha tıkız biçimde

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

yazmak çok işe yarar, her şeyden önce yer ve zaman kazandırır, ama bunun da ötesinde hesapları daha kolay yapmamızı sağlar.

Eğer 1, 2, 3, ..., n doğal sayılarının karelerini toplayacak olursak, o zaman

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

yerine,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

yazarız. Bir başka örnek:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$$

toplamı yerine

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$$

yazarız. Birkaç örnek daha verelim:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1}.$$

Sanırım anlaşılmıştır: Eğer $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ bir sayı dizisiyse, o zaman

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

yerine

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

yazılır. Bu toplam şöyle okunabilir: "i, 1'den n'ye kadar seyrettikçe a_i'lerin toplamı". Buradaki i'ye ***göstergeç*** ya da ***indeks*** denir.

$\sum$ işareti, Yunan alfabesinin, adına "sigma" denilen büyük S harfidir; S harfi de Latince kökenli dillerde toplama demek olan *sum*, *somme* gibi kelimelerin başharfidir.

Toplamaya 1'den başlamak zorunda değiliz, başka bir sayıdan da başlayabiliriz. Mesela:

$$\sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Toplamın belli bir m sayısından başladığını göstermek için,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

yazılır. Eğer $m \leq n$ ise, bu toplamın anlamı belli:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Eğer $n = m$ ise,

$$\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m$$

olur elbette. Eğer $m > n$ ise, o zaman toplanacak sayı yoktur ve bu durumda toplamın 0 olduğu kabul edilir. Yani boşkümenin elemanlarının toplamı 0'dır, tanım gereği öyledir! Örnek:

$$\sum_{i=7}^{2} \frac{1}{i} = 0.$$

Söylemeye gerek var mı bilmiyorum ama, tepedeki n sayısı da belirli bir sayı olabilir:

$$\sum_{i=3}^{7} \frac{1}{i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}.$$

Toplamaya negatif bir sayıdan da başlanabilir. Örnek:

$$\sum_{i=-2}^{3} \frac{1}{i^2+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}.$$

Yalnız toplanan şeylerin tanımlı olduklarına dikkat etmek gerekir. Mesela $1/i$'leri 0'dan başlayarak toplayamayız. Başka örnekler:

$$\sum_{i=-2}^{7} \frac{1}{i},\ \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i-3},\ \sum_{i=1}^{7} \frac{i}{i^2-9}$$

toplamları anlamsızdır.

Bu arada,

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

toplamının m ve n sayılarına göre ve elbette a_i sayılarına göre değiştiğini ama bu toplamda aslında i diye bir sayı olmadığına dikkatinizi çekerim. i yerine herhangi başka bir simge de yazabilirdik:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Kimi zaman m ve n yerine daha karmaşık terimler belirebilir. Örneğin,

$$\sum_{i=3m+1}^{2n-3} \frac{1}{i} = \frac{1}{3m+1} + \frac{1}{3m+2} + \cdots + \frac{1}{2n-3}$$

Tabii eğer $3m+1 > 2n-3$ ise, toplam gene 0 olur.

Bazen göstergeci değiştirmek gerekebilir. Örneğin,

$$\sum_{i=3}^{97} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{j=0}^{94} \frac{1}{(j+3)(j+4)}$$

(Her iki toplamın da aynı toplam olduğundan emin olun.) Yukarıdaki göstergeç değişikliğini yapmanın en temiz yolu soldaki eşitlikte

$$j = i - 3$$

almaktır. Bu durumda, i, 3'ten 97'ye kadar giderken, j, $3 - 3$'ten $97 - 3$'e, yani 0'dan 94'e gider. Toplamın içindeki terimin ne olduğunu görmek için de i yerine $j + 3$ yazmak yeterlidir.

i'den j'ye dönüşen göstergeci, tekrardan i'ye dönüştürmek çok kolaydır:

$$\sum_{i=3}^{97} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{j=0}^{94} \frac{1}{(j+3)(j+4)} = \sum_{i=0}^{94} \frac{1}{(1+3)(i+4)}.$$

Bir toplamı elbette parçalara ayırabiliriz. Örneğin,

$$\sum_{i=3}^{97} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=3}^{43} \frac{1}{i(i+1)} + \sum_{i=44}^{97} \frac{1}{i(i+1)}.$$

Bunun en sık görülen örneği şudur:

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}.$$

Şu tür parçalamalara da arada bir rastlanabilir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{[n/2]} a_i + \sum_{i=[n/2]+1}^{n} a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]} a_i + \sum_{i=[\sqrt{n}]+1}^{n} a_i.$$

Burada $[x]$, x sayısının tamkısmı demektir.)

Aşağıdaki türden toplamlar da önemlidir:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Okur tahmin etmiştir ama anlamını yazalım gene de:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Bu toplamlar verilen x sayısına göre değişir elbette. Bu arada

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

eşitliğine dikkatinizi çekeriz, çünkü her $i = 1, 2, \ldots, n$ için 1 sayıları toplanmaktadır, yani toplamda n tane 1 sayısı toplanmaktadır. Bunun gibi

$$\sum_{i=1}^{n} 3 = 3n$$

olur.

$$\sum_{i=m}^{n} (-1)^i$$

toplamı m ve n'ye göre 0, 1 ya da -1 olur.

Kimi zaman sonlu bir A sayı kümesi verilmiştir ve A 'daki sayılar toplanmak istenir. Bu toplam,

$$\sum_{a \in A} a$$

olarak yazılır. Örneğin, $A = \{1, 3, 7, 11, 15\}$ ise,

$$\sum_{a \in A} a = 1 + 3 + 7 + 11 + 15 = 37$$

olur. Ya da

$$\sum_{a \in A} a^2 = 1^2 + 3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2.$$

Daha genel olarak, eğer A herhangi bir sonlu kümeyse ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonsa,

$$\sum_{a \in A} f(a)$$

yazılımının ne anlama geldiği belli. Bu arada eğer f sabit olarak u değerini alan bir fonksiyonsa,

$$\sum_{a \in A} f(a) = u|A|$$

eşitliğini dikkatlerinize sunarız. Yeri gelmişken, pek sık karşılaşılan,

$$\sum_{a \in A} 1 = |A|$$

eşitliğini de yazalım. Burada, A'nın her a elemanı için bir 1 toplanıyordur ve sonuç A'nın eleman sayısı çıkar elbette.

Eğer A ve B ayrık kümelerse,

$$\sum_{x\in A\cup B} x = \sum_{x\in A} x + \sum_{x\in B} x$$

olur. Eğer A ve B kümeleri ayrık değillerse,

$$\sum_{x\in A\cup B} x = \sum_{x\in A} x + \sum_{x\in B} x - \sum_{x\in A\cap B} x$$

olur. Bu arada,

$$\sum_{x\in\emptyset} x = 0$$

eşitliğini bir defa daha anımsatırız.

Bu yazılımın şu varyasyonları da vardır:

$$\sum_{p \text{ asal ve } < 17} \frac{1}{p}.$$

Bunun anlamı belli:

$$\sum_{p<17 \text{ ve asal}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}.$$

Toplama için yaptığımızı çarpma için de yapabiliriz. Çarpma için $\sum$ yerine $\prod$ simgesi (büyük harf pi, yani Yunan alfabesindeki p harfi, çarpım anlamına gelen *product* ya da *produit*'nin p'si) kullanılır. Bir örnek vermekle yetinelim:

$$\prod_{i=1}^{7} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.$$

Kimi zaman toplamı sonsuza kadar götürmek isteyebiliriz. Örneğin,

$$0{,}101010101010\ldots$$

sayısını,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{1.000} + \frac{1}{100.000} + \frac{1}{10.000.000} + \cdots$$

ya da

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \cdots$$

ya da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n+1}}$$

olarak yazabiliriz. Sonlu sonuç veren bu sonsuz toplamlardan başka kitaplarda sözedeceğiz. Okur şimdilik bu tür toplamları dudaklarında muzip bir tebessümle kabul etsin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

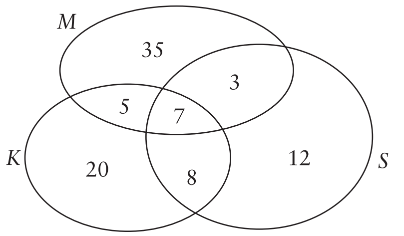
gibi, umulmadık ve kanıtlanması için oldukça yüksek seviyede matematik gerektiren eşitlikler umarız okuru heyecanlandırır.

9.2 Bileşim Kümesinin Eleman Sayısı

Herkesin nefret ettiği türden bir problemle başlayalım. Bir toplulukta 50 kişi maviyi, 40 kişi kırmızıyı, 30 kişi sarıyı, 12 kişi hem maviyi hem kırmızıyı, 10 kişi hem maviyi hem sarıyı, 15 kişi hem kırmızıyı hem sarıyı, 7 kişi hem maviyi hem kırmızıyı hem de sarıyı seviyor. (Mavi seven 50 kişi başka renkler de sevebilir.) Bu toplulukta mavi, kırmızı ya da sarı renklerinden en az birini seven kaç kişi vardır?

Tam bir ahret sorusu!

Biraz düşününce durumun aşağıdaki gibi olması gerektiği ve toplam $35 + 20 + 12 + 3 + 5 + 8 + 7 = 90$ kişinin bu üç renkten en az birini sevdiği anlaşılır.



Aynı yanıtı hiç düşünmeden, sadece verilere bakarak, şu şekilde de bulabileceğimiz sizi şaşırtabilir:

$$(50 + 40 + 30) - (12 + 10 + 15) + 7 = 90.$$

Bu yazıda ikinci yöntemin neden doğru yanıtı verdiğini göreceğiz, yani M, K, S kümelerinin bileşiminin eleman sayısını, bu kümelerin eleman sayısından ve ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayısından ve üçünün birden kesişiminin eleman sayısından,

$$\begin{aligned}|M \cup K \cup S| &= |M| + |K| + |S| \\ &\quad - (|M \cap K| + |K \cap S| + |S \cap M|) + |M \cap K \cap S|\end{aligned}$$

formülüyle elde edilebileceğini göreceğiz.

Bunu sadece M, K, S diye adlandırdığımız üç kümeyle değil,

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n$$

diye adlandıracağımız herhangi n tane sonlu kümeyle de yapabiliriz: Bu kümelerin her birinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca üçer üçer kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca dörder dörder kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse ve böylece mümkün olan tüm kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, o zaman,

$$T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$$

bileşiminin eleman sayısını bulabiliriz.

Kanıtlayacağımız formülü $n = 3$ için yukarıda yazdık. $n = 2$ için yanıt oldukça basit:

$$|T_1 \cup T_2| = |T_1| + |T_2| - |T1 \cap T_2|.$$

Son olarak, $n = 4$ için yazalım:

$$T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$$

bileşiminin eleman sayısı

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$$

kümelerinin eleman sayılarının toplamı, eksi,

$$T_1 \cap T_2,\ T_1 \cap T_3,\ T_1 \cap T_4,\ T_2 \cap T_3,\ T_2 \cap T_4,\ T_3 \cap T_4$$

kümelerinin eleman sayısının toplamı, artı,

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3,\ T_1 \cap T_2 \cap T_4,\ T_1 \cap T_3 \cap T_4,\ T_2 \cap T_3 \cap T_4$$

kümelerinin eleman sayısının toplamı, eksi,

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4$$

kümesinin eleman sayısı olarak bulunur. Eğer, örneğin,

$$T_1 \cap T_2 \cap T_4$$

yerine $T_{1,2,4}$ yazarsak, formülü, $n = 4$ için

$$\begin{aligned}|T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4| &= |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4| \\ &\quad - (|T_{1,2}| + |T_{1,3}| + |T_{1,4}| + |T_{2,3}| + |T_{2,4}| + |T_{3,4}|) \\ &\quad + (|T_{1,2,3}| + |T_{1,2,4}| + |T_{1,3,4}| + |T_{2,3,4}|) - T_{1,2,3,4}\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

Sanırım $n = 5$ için formülün ne olacağı tahmin edilmiştir. Konumumuzu belirleyelim ve formülü en ekonomik biçimde yazabilmek için bir tanım verelim. n tane sonlu küme alalım. Bu kümelere

$$T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n$$

adını verelim. Ayrıca, $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, n\}$ için,

$$T_{i_1,\ldots,i_j} = T_{i_1} \cap T_{i_2} \cap \ldots \cap T_{i_j}$$

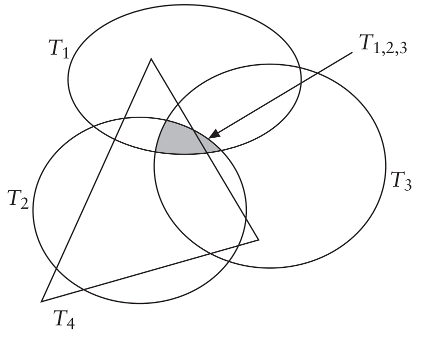
tanımını yapalım. Elbette, örneğin,

$$\begin{aligned}
&T_{1,1} = T_1,\\
&T_{1,1,2} = T_{1,2} = T_{2,1},\\
&T_{1,4,2} = T_{4,1,2} = T_{2,4,1} = T_{1,2,4}
\end{aligned}$$

olur. Bundan böyle $T_{i_1,\ldots,i_j}$ yazılımını, sadece

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_j \le n$$

eşitsizliklerini sağlayan $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_j$ göstergeçleri için kullanacağız.



Şimdi, kanıtlayacağımız formülü matematiksel olarak yazabiliriz:

Teorem 9.1. [İçindelik-Dışındalık Teoremi]. *Yukarıdaki yazılımla,*

$$\left|\bigcup_i T_i\right| = \sum_i |T_i| - \sum_{i_1<i_2} |T_{i_1,i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |T_{i_1,i_2,i_3}| - \cdots$$

yani,

$$\left|\bigcup_{i=1}^n T_i\right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \left|T_{i_1,\ldots,i_j}\right| \right)$$

olur.

Kanıt: Önce biraz düşünelim.

$$\sum_{i=1}^{n} |T_i|$$

toplamında birçok elemanı birkaç kez sayıyoruz: Bu toplamda her eleman kaç tane T_i'nin içindeyse, o kadar kez sayılıyor. Örneğin bir eleman T_1, T_2, T_4 kümelerindeyse ve diğerlerinde değilse, o zaman bu eleman toplamda tam üç kez sayılıyor. Açıkça görülmese de kanıtımızda bizi yönlendiren fikir budur.

Herhangi bir t elemanı ve $i = 1, \ldots, n$ için

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in T_i \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } t \notin T_i \text{ ise} \end{cases}$$

tanımını yapalım. O zaman, biraz düşününce kolaylıkla görülebileceği üzere, her $t \in T$ için,

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - t_i) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } t \in \bigcup_{i=1}^{n} T_i \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olur. Demek ki, her $t \in T$ için,

$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - t_i) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in \bigcup_{i=1}^{n} T_i \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve dolayısıyla,

$$(1) \qquad \sum_{t}\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - t_i)\right) = \left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right|$$

bulunur. Şimdi soldaki ifadedeki çarpımı açalım.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n}(1 - t_i) &= (1 - t_1)(1 - t_2)\cdots(1 - t_n) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, j \ge 0} (-1)^j t_{i_1} \cdots t_{i_j} \end{aligned}$$

buluruz. (İkinci eşitlik göründüğü kadar zor değildir. $j = 0$ olduğunda, $t_{i_1} \cdots t_{i_j}$ çarpımının 1 olduğunu varsayıyoruz.) Bundan,

$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - t_i) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, j > 0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \cdots t_{i_j}$$

çıkar. ($j = 0$ için elde edilen 1 sadeleşti.) Demek ki, (1) formülünün solundaki

$$\sum_t \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - t_i)\right)$$

ifadesi

$$\sum_t \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, j>0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \cdots t_{i_j}$$

ifadesine eşit. Şimdi bu son ifadeyle oynayalım. Önce,

$$\begin{aligned}
&\sum_t \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, j>0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \cdots t_{i_j} \\
&\quad = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, j>0} \sum_t (-1)^{j+1} t_{i_1} \cdots t_{i_j} \\
&\quad = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, j>0} \left((-1)^{j+1} \sum_t t_{i_1} \cdots t_{i_j}\right)
\end{aligned}$$

eşitliğini görelim. Hesaplara kısa bir ara verip en sağdaki toplamın ne olduğuna bakalım. t_i'lerin tanımından hemen,

$$t_{i_1} \cdots t_{i_j} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in T_{i_1} \cap \ldots \cap T_{i_j} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

eşitliği çıkar. Demek ki,

$$\sum_t t_{i_1} \cdots t_{i_j} = \left|T_{i_1} \cap \ldots \cap T_{i_j}\right|$$

olur. Başladığımız hesaba devam edelim.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n, j>0} (-1)^{j+1} \left|T_{i_1} \cap \ldots \cap T_{i_j}\right| \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} \left|T_{i_1, \ldots, i_j}\right| \right).
\end{aligned}$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Belki biraz acılı bir kanıt oldu ama bir sonraki [N4]'te teoremi kullanarak çok ilginç eşitlikler kanıtlayıp çektiğimiz acıya değdiğini göstereceğiz. Ayrıca $\sum$ simgesiyle biraz el alışkanlığı kazanmış olduk.

Bu olgunun bir başka (belki biraz daha kolay) kanıtını sayfa 247'deki "Kümeler Kuramı Final Sınavı"nın birinci kısmında bulabilirsiniz. Sınavın düzeltilmiş şekli kitabın sonlarında.

9.3 Seçim Aksiyomu ve Bir Oyun

Önce kolay oyundan başlayalım. Asıl oyun ve şaşırtıcı sonuç sonra gelecek.

Padişah 100 kişiyi idama mahkûm etmiş. Ama o kadar da insafsız değilmiş; mahkûmlara son bir şans daha vermek istemiş:

– Yarın, sabahın köründe hepinizi sıraya dizeceğim, demiş. Hepinizin kafasına siyah ya da beyaz bir şapka giydireceğim. Herkes önündekilerin hepsinin şapkasını görecek ama arkasındakilerin şapkasını göremeyecek. Kimse kendi şapkasını da göremeyecek elbette. En arkadan, yani kendi şapkası dışında herkesin şapkasını görenden başlayarak herkese teker teker şapkasının rengini soracağım. Doğru tahmin edeni affedeceğim, yanlış tahmin edeni idam edeceğim. Herkes arkasındakilerin tahminini duyacak. Bu işin altından en az zaiyatla nasıl kalkacağınızı düşünün bütün gece...

Mahkûmlar hücrede kara kara düşünmüşler. Biri,

– Padişahımız hiç olmazsa şapkaların yüzde kaç olasılıkla beyaz, yüzde kaç olasılıkla siyah olacağını söyleseydi, demiş. Böylece hepimiz olasılığı en yüksek olan rengi söyler ve büyük olasılıkla yarımız ve belki de daha da fazlamız kurtulurdu...

– Acaba bizden önce tahminde bulunan arkadaşların akıbetini bilebilecek miyiz? diye sormuş biri.

– Bilinmez ki demiş bir başkası... Padişah bu!

Mahkûmlar iç çekmişler. Biri,

– Rastgele bir renk söylersek, şapkaların dağılımı nasıl olursa olsun ortalama elli kişi kurtulur, demiş.

– Tabii eğer çok şanssız bir günümüzde değilsek, diye eklemiş bir başkası.

İçlerinden en akıllılarından biri şöyle bir öneride bulunmuş:

– En arkadaki hemen önündekinin şapkasının rengini söylesin. Böylece kendisi kurtulamasa bile onun önündeki kurtulur. Üçüncü arkadaş da hemen önündekinin şapkasının rengini söylesin. Beşinci arkadaş da hemen önündekinin şapkasının rengini söylesin. Böyle devam edelim. Tek sıradaki arkadaşlar hemen önlerindeki arkadaşın şapkasının rengini söylesin. Böylece en azından yarımız yüzde yüz kesinlikle kurtulur. Eğer şapkaların siyah ya da beyaz olma olasılığı yüzde elliyse, geri kalan 50 kişinin de yüzde ellisi, yani 25'i kurtulur. Böylece aşağı yukarı 75'imiz kurtulmuş olur.

Bir öncekinden daha iyi olan bu öneri sevinçle karşılanmış doğal olarak. Bir başkası,

– Benim daha iyi bir önerim var, demiş. 1'inci, 4'üncü, 7'nci, 10'uncu gibi $3n+1$'inci sıradakiler, hemen önlerindeki iki şapka aynı renkteyse beyaz desinler, ayrı renkteyse siyah desinler. Böylelikle önlerindeki iki kişi kesinlikle kurtulur. Mesela birinci beyaz derse, ikinci önündekinin rengini söyler, üçüncü de ikincinin söylediği rengi söyler. Ama eğer birinci siyah derse, ikinci önündekinin tersi rengi söyler, üçüncü de ikincinin söylediğinin tersini söyler...

– Böylece, demiş bir başkası sevinçle, 66 kişi kesin kurtulur. Geri kalan 34 kişinin de yarısı kurtulur, yani toplam $66 + 17 = 83$ kişi kurtulur...

– Bu yöntem 75 kişiden daha fazla kişi kurtarıyor, demiş aritmetikte dahi geçinen biri. Peki daha iyi bir yöntem var mı?

O zamana kadar sessiz kalan en akıllı mahkûm birden yerinden fırlayarak,

– Buldum! diye haykırmış, belki bir kişinin idam edileceği, ama geri kalan herkesin kurtulacağı bir strateji buldum.

Diğerleri pek inanmamışlar ama ne yapsınlar, umut umuttur. En akıllı mahkûm devam etmiş:

– En arkadaki mahkûm gördüğü tüm beyaz şapkaları sayar. Eğer tek sayıda beyaz şapka görüyorsa beyaz der, çift sayıda beyaz şapka görüyorsa da siyah der...

– Eee? demiş diğerleri.

– E'si şu ki, böylece hepimiz en arkadakinin önündeki beyaz şapka sayısının tek ya da çift sayı olduğunu biliriz. Diyelim birinci mahkûm önünde tek sayıda şapka saydı ve beyaz dedi. İkinci mahkûm da önündeki şapka sayısını saysın. Eğer çift sayıda beyaz şapka görüyorsa, şapkası beyaz demektir, tek sayıda şapka görüyorsa, şapkası siyah demektir...

Belli belirsiz bir mırıltı yükselmiş.

– Ya peki diğerleri, diye sormuş biri merakla.

– Diyelim ikinci mahkûm beyaz dedi ve tabii ki kurtuldu. Böylece üçüncü mahkûm, kendisinin ve önündekilerin beyaz şapka sayısının çift olduğunu anlar, çünkü arkasındakinin şapkası beyazmış. Eğer üçüncü mahkûmun önünde tek sayıda beyaz şapka sayıyorsa, kafasında beyaz şapka var demektir, aksi halde siyah şapka olmalı. Böylece o da doğru tahminde bulunarak kurtulur. Bu mantıkla devam edersek en arkadaki ilk tahmini yapan arkadaş dışında herkes kurtulur. En arkadaki ilk tahmini yapan da şansı varsa kurtulur...

– Bu yöntemle 99,5 kişi kurtulur demiş aritmetik uzmanı.

Birinci hikâyemiz burada bitiyor. Bu çözüm bile oldukça şaşırtıcı ama daha da şaşırtıcı sonuçlara hazırlanın.

Bir başka padişah, ilk hikâyedekinden daha acımasız bir padişah, 100 kişiyi değil sonsuz kişiyi idama mahkûm etmiş. Her mahkûmun da bir numarası varmış: $0, 1, 2, \ldots$ Ne kadar doğal sayı. o kadar mahkûm...

Padişah,

– Yarın, sabahın köründe hepinizi sıraya dizeceğim, demiş. En arkada 0 numara, sonra 1 numara, sonra 2 numara vs. Hepinizin kafasına ya siyah ya da beyaz renkli bir şapka giydireceğim. Herkes önündekilerin şapkasını görecek ama arkasındakilerin şapkasını göremeyecek. Kimse kendi şapkasını da göremeyecek elbette. En arkadan, yani herkesi görenden başlayarak herkese şapkasının rengini soracağım. Doğru tahmin ederse affedeceğim, yanlış tahmin ederse idam edeceğim. Herkes daha önce tahminde bulunmuş kişilerin tahminini duyacak, akıbetini de bilecek. Bu işin altından en az zaiyatla nasıl kalkacağınızı düşünün bütün gece...

O sırada biri hapşırmış. Padişah bu saygısızlığa kızmış.

– Kimse daha önce yapılmış tahminleri duyamayacak...

Bir başkası tıksırmış. Padişah gene köpürmüş:

– Kimse arkadakilerin akıbetini bilemeyecek...

Mahkûmlar hücrelerine çekilip düşünmeye başlamışlar. Durum zor! Hatta imkânsız gibi. Tahmin sırası kendilerine geldiğinde, kendi sıra numaraları dışında ellerinde hiçbir ipucu olmayacak.

Uzunca bir süreden sonra biri, ortaya atılıp,

– Sonlu sayıda arkadaş dışında herkesi kurtaracak bir yöntem buldum! diye haykırmış.

İnanılması güç ama gerçek... Sonlu sayıda mahkûm dışında herkesin kurtulacağı bir yöntem vardır.

Tabii Seçim Aksiyomu'na inanıyorsanız... Ki bu devirde Seçim Aksiyomu'na hemen hemen herkes inanır.

Yöntemi açıklamak için önce biraz "oyun"un matematiksel analizini yapalım.

Önce siyah şapka yerine 0, beyaz şapka yerine 1 diyelim. Böylece padişahın mahkûmların kafalarına şapkaları geçiriş biçimini bir 01-dizisiyle gösterebiliriz. Eğer padişah herkese siyah şapka giydirirse, o zaman

$$000000000000000\ldots$$

dizisi elde edilir. Eğer padişah 0'ıncı mahkûma siyah, sonrakilere bir beyaz, bir siyah şapka giydirirse, dizi

$$01010101010101\ldots$$

dizisi olur. Her mahkûm şapkalaması bir 01-dizisi verir, her 01-dizisi de bir mahkûm şapkalamasına tekabül eder. Bundan böyle 01-dizisi yerine sadece "dizi" diyeceğiz.

Belli bir aşamadan sonra eşit olan dizilere denk diziler diyelim. Yani sonlu sayıdaki ilk birkaç terim dışındaki tüm terimlerin eşit olduğu dizilere denk diyelim. Örneğin,

$$x = 00110101010101010101\ldots$$

dizisiyle

$$y = 01101101010001010101\ldots$$

dizisi denktirler, çünkü her ikisinde de aynı aşamada 01 sayı dizisi sonsuza dek tekrar eder, ya da şöyle söyleyelim: İlk 12 terim dışında iki dizi birbirine eşittir. Örneğin bir zaman sonra (ne kadar zaman sonra olduğu önemli değil) hep 0 olan diziler birbirine denktir. Bir başka örnek, bir zaman sonra 011 diye tekrar eden

$$\begin{gathered}011011011011011011011\ldots\\ 111011011011011011011\ldots\\ 001011011011011011011\ldots\\ 101011011011011011011\ldots\\ 110011011011011011011\ldots\end{gathered}$$

dizileri birbirlerine denktirler. Ama

$$01010101010101\ldots \text{ ve } 10101010101010\ldots$$

dizileri birbirine denk değildir, çünkü her ne kadar birinin ilk terimini sildiğinizde diğer diziyi elde etsek de bu dizilerin n'inci terimleri hep birbirinden farklı. İki dizinin denk olması için belli bir aşamadan sonra dizilerin n'inci terimleri hep birbirlerine eşit olmalı.

x ve y dizilerinin birbirlerine denk olduklarını

$$x \equiv y$$

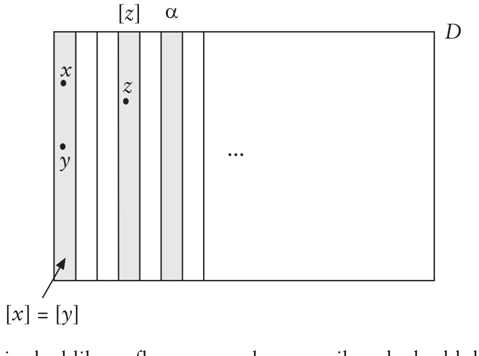
yazılımıyla gösterelim. Şu özelliklerin doğru oldukları bariz:

$$\begin{aligned}&x \equiv x,\\ &x \equiv y \text{ ise } y \equiv x,\\ &x \equiv y \text{ ve } y \equiv z \text{ ise } x \equiv z.\end{aligned}$$

Bir başka deyişle, $\equiv$ ilişkisi 01-dizileri kümesi üzerine bir "denklik ilişkisi"dir. 01-dizileri kümesini D simgesiyle gösterelim. Bir x dizisi için,

$$[x] = \{y \in D : x \equiv y\}$$

olsun. x'e denk elemanlardan oluşan bu kümeye x'in sınıfı adı verildiğini biliyoruz.



D kümesinin denklik sınıflarına parçalanışı. x ile y denk olduklarından aynı sınıftalar ve sınıfları birbirine eşit. $[z]$ bir başka sınıf. α da bir sınıf; α, içinde bulunan her elemanın sınıfı. Eğer $t \in \alpha$ ise, $\alpha = [t]$ olur.

İki sınıf ya birbirine eşittir ya da birbirinden ayrıktır, yani her $x, y \in D$ için

$$\text{ya } [x] = [y] \text{ ya da } [x] \cap [y] = \emptyset$$

olur, ve birinci şık ancak ve ancak $x \equiv y$ ise doğru olabilir, aksi halde ikinci şık doğrudur. (Yukarıdaki şekle bakın.) Bu, $\equiv$ ilişkisinin denklik ilişkisi olmasının, yani yukarıda sıraladığımız üç özelliğin doğrudan bir sonucudur. Bütün bunları 8'inci bölümde gördük.

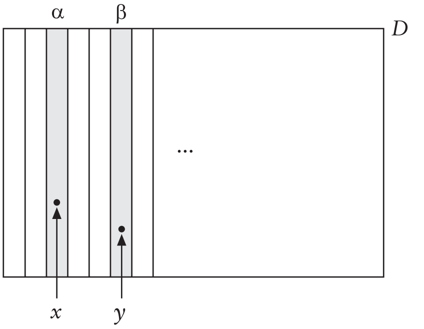
İdam günü arifesi, mahkûmlar her sınıftan (iki değil!) bir temsilci seçerler. Mahkûmların α sınıfından seçtikleri temsilciye x diyelim:

$$x \in \alpha.$$

x, tüm mahkûmların hemfikir oldukları, α sınıfından seçilmiş herhangi bir dizidir. Elbette,

$$\alpha = [x]$$

olur, ne de olsa x dizisi α sınıfından seçilmiş.



Her sınıftan bir temsilci seçiliyor.

Mahkûmlar tüm α sınıflarından seçtikleri dizileri bir gece önce sular seller gibi ezberlesinler.

Dikkat: Sonsuz sayıda sınıf ve her dizide sonsuz sayıda terim var. Ezberlenecek bayağı bir şey var yani.

Kaçınılmaz saat gelir çatar. Ertesi sabah mahkûmlar sıraya dizilirler. Padişah şapkaları mahkûmların kafasına geçirir ve böylece bir 01-dizisi belirler. Diyelim padişah

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

dizisini belirledi. Padişahın belirlediği bu diziye a adını verelim.

Her bir mahkûm önündeki mahkûmların şapkasına bakarak padişahın şapkalarla belirlediği dizinin sınıfını anlar, ne de olsa her biri padişahın belirlediği a dizisinin kuyruğunu görüyordur. Diyelim, padişah şapkalama yöntemiyle α sınıfını belirlemiş, yani

$$[a] = \alpha$$

imiş. Mahkûmlar α sınıfını bildikleri gibi, bir gece önceki çalışmaları sayesinde α sınıfından seçtikleri x dizisini de bilirler. Elbette

$$[x] = \alpha$$

olur. Demek ki

$$[a] = \alpha = [x]$$

olur, yani a ile x dizisi denktirler, yani padişahın belirlediği a dizisiyle x dizisi ilk birkaç, diyelim 1 milyon terimi dışında aynıdır. a ve x dizilerine sırasıyla

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

ve

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

diyelim. İlk (diyelim) 1 milyon terim dışında, bu iki dizi birbirinin aynısı. Eğer n, 1 milyondan büyükse, n'inci mahkûm a_n tahmininde bulunursa kurtulacak...

Sıranın en sonundaki mahkûm (ilk tahminde bulunan yani) x_0 tahmininde bulunur. Bir sonraki x_1 tahmininde bulunur. Mahkûmlar sırayla

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

tahminlerinde bulunurlar ve böyle ilk 1 milyon mahkûm dışında herkes kurtulur. İlk 1 milyon mahkûm da ancak şansları yaver giderse kurtulurlar...

Seçim Aksiyomu'nu kullandığımızı anlamışsınızdır. Her sınıftan bir dizi seçmek, Seçim Aksiyomu kullanılmadan yapılamaz; dolayısıyla aslında her sınıftan bir dizi gerçekten, yani uygulamada seçilemez.

Her ne kadar sonlu sayıda mahkûm dışında herkesi kurtaracak bir stratejinin varlığını kanıtlamışsak da, böyle bir stratejinin bulunabileceğini söyleyemeyiz!

Final Sınavı I

Birinci Kısım[1]**.**

1. $I \subseteq \mathbb{R}$, n elemanlı bir küme olsun.

$$\{(i_1, i_2, i_3) \in I^3 : i_1 < i_2 < i_3\}$$

kümesinin eleman sayısını bulun. Eğer 3 yerine rastgele bir $k = 1, \ldots, n$ alırsak sonuç ne olur?

2. Herhangi bir $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sayısı için şu eşitliği gösterin:

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s} = 1.$$

3. $A_1, \ldots, A_n$ kümeler olsun. x, bu kümelerin tam s tanesinde bulunan bir eleman olsun. x'in

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

sayısına olan katkısını hesaplayın, yani eğer $B_i = A_i \setminus \{x\}$ ise

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k} |B_i \cap B_j \cap B_k|\,.$$

sayısını hesaplayın.

4. Yukarıdaki verilerle, x'in

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots\,.$$

sayısına katkısını hesaplayın.

5. Yukarıdakilerden, $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$ sayısının

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın. [İçindelik-Dışındalık Teoremi]

[1]Soruların yanıtları kitabın en sonundadır. Bu sınavın bir versiyonu 2009-2010 akademik yılının birinci döneminde İstanbul Bilgi Üniversitesi birinci sınıf Matematik Bölümü öğrencilerine verilmiştir.

6. $|A_1 \cap \ldots \cap A_n|$ sayısının

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots .$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Bir önceki sonucu $A_1, \ldots, A_n$ kümelerinin tümleyenlerine uygulayın.

İkinci Kısım. A ve B kümeleri için,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

olsun. $A\Delta B$ kümesine A ve B'nin ***simetrik farkı*** denir.

1. Δ işleminin birleşme ve değişme özellikleri olduğunu ve $\cap$ işleminin Δ üzerine dağıldığını kanıtlayın.

2. $n \geq 2$ ise $A_1 \Delta \ldots \Delta A_n$ kümesinin tek sayıda A_i'lere ait olan elemanlardan oluştuğunu kanıtlayın.

3 $\sum_{i=1}^{s} (-1)^{i-1} 2^{i-1} \binom{s}{i}$ sayısının eğer çiftse 0, tekse 1 olduğunu kanıtlayın.

4. Son iki sorudan, $|A_1 \Delta \ldots \Delta A_n|$ sayısının

$$\sum_i |A_i| - 2 \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 2^2 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

Üçüncü Kısım. Sabit bir X kümesinin A ve B altkümeleri için

$$A \downarrow B = (A \cup B)^c$$

olsun. $\cup$, $\cap$, $\setminus$ işlemlerinin herbirinin sadece $\downarrow$ işlemi kullanılarak ifade edilebileceğini kanıtlayın.

Dördüncü Kısım. Eğer $(X_i)_{i \in I}$ bir kümeler ailesiyse, bu ailenin $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımının

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : \text{ her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i \right\}$$

olarak tanımlandığını anımsatalım.
Bir $(J_i)_{i \in I}$ göstergeçler ailesi ve bir $(A_{i,j})_{i \in I, j \in J_i}$ ailesi için,

1. Aşağıdakilerden birini kanıtlayın:

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcap_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\bigcup_{i\in I} A_{i,f(i)}\right),$$

$$\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}\right).$$

2. Aşağıdakilerden birini kanıtlayın:

$$\prod_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\prod_{i\in I} A_{i,f(i)}\right),$$

$$\prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcap_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\prod_{i\in I} A_{i,f(i)}\right).$$

Beşinci Kısım. $(A_n)_n$ ve $(B_n)_n$ iki küme dizisi olsun. Aşağıdaki önermelerin eşdeğer olduklarını kanıtlayın:

a. Her n ve m için, $A_n \cap B_m$ sonludur.

b. Her n için $A_n \setminus A$ ve $B_n \setminus B$ kümelerinin sonlu olduğu ayrık A ve B kümeleri vardır.

Altıncı Kısım. $(A_i)_{i\in I}$ ve $(B_i)_{i\in I}$ kümeler ailesi için aşağıdaki denklem sistemlerinin (olduğunda) çözümlerini bulun. Çözümün biricikliğini tartışın.

a. $A_i \cap X = B_i \quad (i \in I)$.

b. $A_i \cup X = B_i \quad (i \in I)$.

c. $A_i \setminus X = B_i \quad (i \in I)$.

d. $X \setminus A_i = B_i \quad (i \in I)$.

Kısım II

Sonsuz Kümelerin Elemanlarını Saymak

10. Sonsuzluğa Giriş

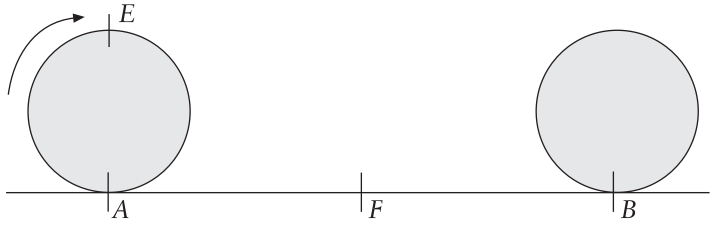
Kitabın bu ikinci kısmında sonsuz kümelerle ilgileneceğiz, hatta sonsuz kümelerin elemanlarını (bir anlamda) sayacağız. Kuramsal (ve son derece ilginç) matematiğe başlamadan önce, sonsuzlukla ilgili bir iki açıklama yapmamız, sonsuzluğun tehlikelerine karşı okuru uyarmamız gerekiyor.

Bu bölümde sonsuzlukla ilgili üç yazı bulacaksınız. Amaç okuru sonsuzluğa ısındırmak, sonsuzluğun yaratacağı sorunlarla haşır neşir olup bu sorunların nereden kaynaklandığını ve nasıl çözüleceğini görmek. Daha sonraki bölümlerde sonsuzluğu daha matematiksel olarak irdeleyeceğiz. Sonsuzluğu çok daha derinlemesine (ve aksiyomatik olarak) algılamak için bkz. [N2, N3].

10.1 Aristo'nun Tekerlek Paradoksu

Sonsuz kümelerin elemanını saymanın ne demek olduğunu irdelemeye çok eskilerden kalan bir "paradoks"la başlayalım, Aristo'dan kalma, yani aşağı yukarı 2350 yıllık.

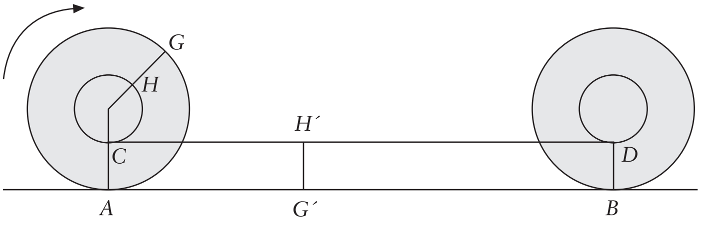
Aşağıdaki şeklin solundaki daire bir tekerlektir. Bu tekerlek yere A noktasından değmektedir. Tekerleğimiz sağa doğru tam bir tur atarak ve kaymadan (yani patinaj yapmadan) yuvarlansın. Şimdi tekerlek sağdadır ve yere B noktasından değmektedir. AB doğru parçasının uzunluğu tekerleğin (çemberin) çevresine eşittir elbette.



Çemberin her noktası bir zaman sonra AB doğru parçasının bir noktasına değecektir. Örneğin çemberin tepe noktası olan E noktası, AB yolunun tam ortası olan F noktasına değecektir. Bir başka deyişle çemberin noktalarıyla AB doğru parçasının noktaları arasında bir eşleme vardır.

Buraya değin bir sorun yok. Sorunlar ileride belirecek.

Şimdi, tekerleğin içine tebeşirle küçük bir çember çizelim ve tekerlek yuvarlandıkça bu küçük çemberin izleyeceği yola bakalım.



Tekerlek tam bir tur yaptığında C noktası D noktasına gelecektir, çünkü A ve C noktalarından geçen yarıçap, bir tur sonra B ve D noktalarından geçen yarıçap olacaktır.

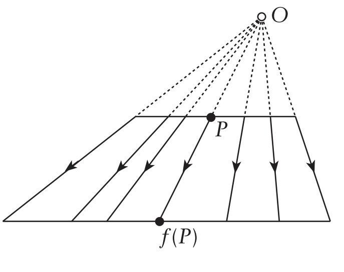
Küçük çemberin her noktası, tekerlek yuvarlandıkça, CD doğrusunun bir ve sadece bir tek noktasına değecektir. Örneğin yukarıdaki şekilde görülen H noktası, CD doğrusuna H' noktasından değecektir, çünkü H ve G noktalarından geçen yarıçap, yol boyunca bir ara, H' ve G' noktalarından geçen yarıçap olacaktır.

Demek ki CD doğru parçasının uzunluğu küçük çemberin çevresine eşittir, çünkü küçük çemberin her noktası CD doğru parçasının bir ve sadece bir tek noktasına eş düşmektedir. Ama CD'nin uzunluğu AB'nin uzunluğuna eşit ve AB'nin uzunluğu büyük çemberin uzunluğuna eşit. Demek ki küçük çemberin çevresiyle büyük çemberin çevresi birbirine eşittir!

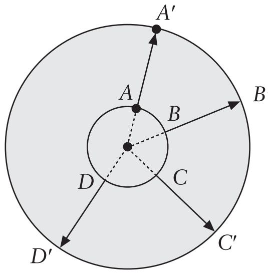
Bu bir paradokstur. Küçük çemberin çevresi büyük çemberin çevresine eşit olmamalı... Matematikte paradoks olmaması gerektiğine göre yanlış nerede?

Yanıtı vereyim. Yanlış şu tümcede: Demek ki CD doğru parçasının uzunluğu küçük çemberin çevresine eşittir, çünkü küçük çemberin her noktası CD doğru parçasının bir ve sadece bir tek noktasına eş düşmektedir.

Örneğin aşağıdaki şekildeki yatay doğru parçalarının uzunlukları birbirine eşit değildir ama noktaları arasında bir eşleme vardır. Şekildeki yöntemle kısa doğru parçasıyla büyük doğru parçasının noktaları arasında bir eşleme olduğu görülür.



Yukarıdaki çemberlerin noktaları arasında da bariz bir eşleme vardır. İşte o eşleme:



10.2 Sonsuz Sayıda Topla Bir Fantezi

Ayşe bomboş bir odada. Odanın kapısı ve penceresi açık. Murat odanın hemen dışında, kapının önünde. Murat'ın önünde $1, 2, 3, 4, \ldots$ diye sayılandırılmış sonsuz tane top var. Saat 12'ye 1 dakika kala, Murat 1 ve 2 sayılı topları Ayşe'nin bulunduğu odaya atıyor. Ayşe hiç zaman kaybetmeden 1 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor. Saat 12'ye 1/2 dakika kala, Murat 3 ve 4 sayılı topları Ayşe'ye atıyor. Ayşe gene hiç zaman kaybetmeden 2 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor. Saat 12'ye 1/3 dakika kala, Murat 5 ve 6 sayılı topları odaya atıyor. Ayşe bu sırada 3 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor. Saat 12'ye 1/4 dakika kala Murat 7 ve 8 sayılı topları Ayşe'ye atıyor. Ayşe de 4 sayılı topu pencereden bahçeye atıyor.

Bu böyle hep devam ediyor.

Ayşe'yle Murat gittikçe hızlanıyorlar, gittikçe daha hızlı top atıyorlar. Murat'ın önündeki toplar ikişer ikişer azalıyor, pencereden bahçeye atılan toplar ise birer birer çoğalıyor...

Ayşe'nin odasındaki toplar da birer birer çoğalıyorlar elbet...

12'ye 1/1 var Murat 1 ve 2'yi Ayşe'ye atıyor Ayşe 1'i pencereden atıyor
12'ye 1/2 var Murat 3 ve 4'ü Ayşe'ye atıyor Ayşe 2'yi pencereden atıyor
12'ye 1/3 var Murat 5 ve 6'yı Ayşe'ye atıyor Ayşe 3'ü pencereden atıyor
12'ye 1/4 var Murat 7 ve 8'i Ayşe'ye atıyor Ayşe 4'ü pencereden atıyor
12'ye 1/5 var Murat 9 ve 10'u Ayşe'ye atıyor Ayşe 5'i pencereden atıyor

...

12'ye $1/n$ var Murat $2n-1$ ve $2n$'yi Ayşe'ye atıyor Ayşe n'yi pencereden atıyor

...

Soru: *Saat tam 12'de odada kaç top vardır?*

Murat'ın ve Ayşe'nin topları gittikçe artan bir hızla atıp atamayacakları sorusuyla ilgilenmeyelim. Fiziksel engelleri ortadan kaldırıp, soruyu soyut düzeyde algılayalım.

Birinci Yanıt: Saat 12'de odada sonsuz tane top vardır. Çünkü Murat odaya hep iki top atmaktadır ve Ayşe odadan yalnızca bir top dışarı atmaktadır.

Dolayısıyla odadaki top sayısı her hamleden sonra 1 artmaktadır. Bu yüzden, saat 12'de odada sonsuz tane top olur.

İkinci Yanıt: Saat 12'de odada hiç top yoktur. Çünkü Ayşe her topu bir zaman sonra pencereden bahçeye atacaktır. Öyle değil mi? Saat 12'ye $1/n$ kala, Ayşe n numaralı topu pencereden bahçeye fırlatacaktır. Dolayısıyla her top bir zaman sonra odadan çıkacaktır ve saat 12'de odada hiç top kalamaz.

Asıl Soru: Yanıtlarımız birbirleriyle çelişiyor. Hangi yanıt doğru? Hangi yanıt yanlış? Yoksa her iki yanıt da mı yanlış? Öyleyse doğru yanıt nedir? Ve neden? Her iki yanıt da doğru gibi gözüküyor. Ama her ikisi de doğru olamaz elbet. Daha doğrusu, eğer çelişkisiz bir dünyada yaşıyorsak her iki yanıt da doğru olmamalı. Biraz düşünelim.

Asıl Sorunun Yanıtı: Birinci yanıtta odadaki top sayısı gözönünde bulunduruluyor. Odadaki top sayısı hep bir arttığından, saat 12'de odadaki top sayısının sonsuz olacağı öne sürülüyor.

İkinci yanıttaysa toplar teker teker göz önüne alınıyor. Her top bir zaman sonra odadan dışarı atılacağından, saat 12'de odada hiç top kalamaz deniliyor.

Doğru yanıt ikincisi. Birazdan ikinci yanıtın neden doğru olduğunu açıklayacağız. (Bir paradoksu çözmek için yanıtlardan birinin neden doğru olduğunu açıklamak yetmez, diğerinin neden yanlış olduğunu açıklamak gerekir.) Önce birinci yanıtın gerekçesinin neden geçerli olmadığını anlatmaya çalışalım: Odadaki top sayısının durmadan arttığı doğru. Bundan hiç kuşkumuz yok. Ancak bu olgu tek başına saat 12'de odada sonsuz tane top olduğunu kanıtlamaz! Odadaki top sayısı her an artabilir ve gene de saat 12'de odada hiç top kalmayabilir! Zaten burda olan da bu: Odadaki top sayısı artıyor ve saat 12'de odada hiç top kalmıyor.

Top sayısının artmasıyla sonsuzda odada sonsuz tane top bulunması arasındaki ilişki sanıldığı kadar güçlü değil, hatta önsezilerimize ters düşecek kadar zayıf!

İkinci yanıtın neden doğru olduğunu daha iyi anlamak için her an odada bulunan topları yazalım:

Saat	Odadaki toplar	Odadaki top sayısı
12'ye $1/1$ kaladan hemen sonra	2	1
12'ye $1/2$ kaladan hemen sonra	$3, 4$	2
12'ye $1/3$ kaladan hemen sonra	$4, 5, 6$	3
12'ye $1/4$ kaladan hemen sonra	$5, 6, 7, 8$	4
12'ye $1/5$ kaladan hemen sonra	$6, 7, 8, 9, 10$	5
12'ye $1/6$ kaladan hemen sonra	$7, 8, 9, 10, 11, 12$	6
...	...	...
12'ye $1/n$ kaladan hemen sonra	$n+1, n+2, \ldots, 2n$	n
...	...	...

Odadaki topları küme olarak gösterelim. 12'ye $1/n$ kaladan hemen sonra odada bulunan topların kümesine A_n diyelim. Demek ki,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{2\}\\
A_2 &= \{3,\ 4\}\\
A_3 &= \{4,\ 5,\ 6\}\\
A_4 &= \{5,\ 6,\ 7,\ 8\}\\
A_5 &= \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}\\
A_6 &= \{7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}\\
&\dots\\
A_n &= \{n+1,\ n+2,\ \dots,\ 2n\}\\
&\dots
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli. Bu kümeler dizisinin sonsuzda ne olduğunu bulmak istiyoruz.

A_1 kümesi $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \dots\}$ kümesinin bir altkümesidir.
A_2 kümesi $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \dots\}$ kümesinin bir altkümesidir.
A_3 kümesi $\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \dots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

Genel olarak A_n kümesi $\{n+1,\ n+2,\ n+3,\ \dots\}$ kümesinin bir altkümesidir.

B_n, n'den büyük tamsayılar kümesini simgelesin. Yani

$$B_n = \{n+1,\ n+2,\ n+3,\ \dots\}$$

olsun. Demek ki,

$$\begin{aligned}
A_1 &\subseteq B_1\\
A_2 &\subseteq B_2\\
A_3 &\subseteq B_3\\
A_4 &\subseteq B_4\\
A_5 &\subseteq B_5\\
&\dots\\
A_n &\subseteq B_n\\
&\dots
\end{aligned}$$

tümceleri geçerli. A_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek için, B_n kümelerinin sonsuzda boş olduğunu göstermek yeterlidir. Ama B_n kümesi n'den büyük sayıları içerdiğinden, her sayı bir zaman sonra B_n'lerden birinin dışında kalır. (Özetle B_n kümelerinin kesişimi boşkümedir.) Örneğin, 1995, B_{1995}'te değildir, B_{1996}'da da değildir; genel olarak, $n \geq 1995$ ise, 1995, B_n'de değildir. Bu dediğimiz yalnız 1995 için değil, her sayı için geçerli. Demek ki

B_n kümeleri sonsuzda boşküme olurlar. Dolayısıyla A_n kümeleri de sonsuzda boşküme olurlar.

A_n kümelerinin elemanlarını şöyle yazarsak belki her şey daha net görünür:

$$\begin{array}{lccccccccc}
A_1: & 2 & & & & & & & & \\
A_2: & & 3 & 4 & & & & & & \\
A_3: & & & 4 & 5 & 6 & & & & \\
A_4: & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & & \\
A_5: & & & & & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
 & & & \ldots & & & & & &
\end{array}$$

Evet, top sayısı artıyor ama sondan iki artıp baştan bir eksiliyor ve topların sayısı artsa da her top bir zaman sonra pencereden dışarı atılıyor.

Burada yaptığımız ikinci yanıtın kanıtını açıklamaktan başka bir şey değil. İkinci yanıtın kanıtı doğrudur, yani ikinci yanıt doğrudur.

10.3 Hilbert Oteli

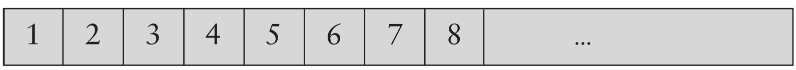
Bir otel işletiyorsunuz. Otelinizin sonsuz sayıda odası var. Her otelde olduğu gibi, her odanın da bir numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

En sonuncu oda yok elbette...

Sonsuz numaralı oda da yok... Her odanın numarası sonlu.

Sadece oda sayısı sonsuz.

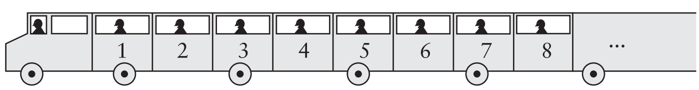
Bu nasıl olur diye sormayın, aynen aşağıdaki gibi olur...



Sonsuz odalı otel (Hilbert Oteli)

Birinci Gün. Şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz sayıda müşteri... Müşterilerin adları 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Her müşteriye bir oda veriyorsunuz. 1 numaralı müşteriye 1 numaralı odayı, 2 numaralı müşteriye 2 numaralı odayı, 3 numaralı müşteriye 3 numaralı odayı... Böylece hiç boş oda kalmıyor. Zengin olacaksınız!



Sonsuz müşterili otobüs

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire bir müşteri daha çıkageliyor. Daha daha zengin olmak istiyorsunuz. Bu müşteriye bir oda nasıl bulursunuz?

Yanıt: Daha önce odalara yerleşmiş müşterileri birer oda kaydırırsınız. 1 numaralı müşteri 2 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 3 numaralı odaya, 3 numaralı müşteri 4 numaralı odaya geçer, herkes birer kayar ve böylece boşalan 1 numaralı odaya yeni gelen müşteriyi koyarsınız...

"En son müşteri nereye gidecek?" demeyin, çünkü en son müşteri yok. Nasıl en son oda yoksa, en son müşteri de yok.

İkinci Gün. Otel boşaldı. Ama gene şanslı bir gününüzdesiniz, gene bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz sayıda... Adları

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6, \ldots$$

Hepsine birer oda veriyorsunuz. a_1'i 1 numaralı odaya, a_2'yi 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire... Birdenbire bir otobüs dolusu müşteri daha çıkageliyor... Bu otobüste de sonsuz sayıda müşteri var. Adları

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ \ldots$$

Ama odalarınızı doldurmuşsunuz... Bir müşteri gelse, ne yapacağınızı biliyorsunuz ama sonsuz sayıda yeni müşteri geldi. Bu yeni müşterileri nasıl yerleştirirsiniz?

Yanıt: Birinci otobüsün müşterilerini çift sayılı odalara yerleştirirsiniz: a_1'i 2'ye, a_2'yi 4'e, a_3'ü 6'ya, a_4'ü 8'e, genel olarak a_n'yi $2n$ numaralı odaya... Böylece tek sayılı odalar boşalır, onlara da ikinci otobüsün müşterilerini yerleştirirsiniz: b_1'i 1'e, b_2'yi 3'e, b_3'ü 5'e, b_4'ü 7'ye, genel olarak b_n'yi $2n-1$ numaralı odaya yerleştirirsiniz...

Üçüncü Gün. Otel boşaldı. Gene çok, ama çok şanslı bir gününüzdesiniz, sonsuz sayıda otobüs geliyor, her birinde sonsuz tane yolcu var... Her otobüsün bir numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Her otobüste de sonsuz sayıda müşteri var...

Birinci otobüsün müşterilerinin adları:

$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ \ldots$$

İkinci otobüsün müşterilerinin adları:

$$(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ \ldots$$

Üçüncü otobüsün müşterilerinin adları:

$$(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ \ldots$$

Bu böyle devam ediyor. Müşterileri odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Yanıt: Birinci otobüsün müşterilerini 2, 4, 8, 16, 32, 64 gibi 2'nin kuvvetleri olan odalara yerleştirirsiniz.

İkinci otobüsün müşterilerini 3, 9, 27, 81, 243 gibi 3'ün kuvvetleri olan odalara yerleştirirsiniz.

Üçüncü otobüsün müşterilerini 5, 25, 125, 625 gibi 5'in (4'ün değil!) kuvvetleri olan odalara yerleştirirsiniz.

Dördüncü otobüsün müşterilerini 7'nin kuvvetleri olan odalara yerleştirirsiniz.

Beşinci otobüsün müşterilerini 11'in kuvvetleri olan odalara yerleştirirsiniz.

	1	2	3	4	$\cdots$
1	2	3	5	7	$\cdots$
2	4	9	25	49	$\cdots$
3	8	27	125	343	$\cdots$
4	16	81	625	2401	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Genel olarak, n'inci otobüsün müşterilerini n'inci asalın güçleri olan odalara yerleştirirsiniz. Yukarıdaki şekildeki gibi. (Sütunlar otobüslerin, satırlar da müşterilerin numaralarını gösteriyor.)

Bu yöntemle her müşteri bir odaya yerleştiği gibi, geriye sonsuz sayıda boş oda kalır. Örneğin, 6, 10, 12, 14, 15, 18 gibi bir asalın kuvveti olmayan sayılarla numaralanmış odalar boş kalır.

Bir Başka Çözüm. Son problemi bir başka türlü de çözebiliriz. (n, m) sayılı müşteriyi, yani n'inci otobüsün m'inci müşterisini

$$2^{n-1}(2m-1)$$

numaralı odaya yerleştirelim... Böylelikle hepsine bir oda düşer. Aşağıdaki şekildeki gibi, otobüsleri sıralarla, müşterileri sütunlarla gösterelim, satırlarla sütunların kesişimine de oda numarasını yazalım.

	1	2	3	4	$\cdots$
1	1	3	5	7	$\cdots$
2	2	6	10	14	$\cdots$
3	4	12	20	28	$\cdots$
4	8	24	40	56	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Bu yöntemle her oda dolar, örneğin 912 numaralı odaya $(5, 29)$ sayılı müşteri yerleştirilir, çünkü,

$$912 = 16 \times 57 = 2^{5-1} \times (2 \times 29 - 1)$$

olur.

Eğer, belki bir otobüs daha gelir umuduyla geriye sonsuz tane oda bırakmak istiyorsanız, o zaman tek sayılı odaları hiç kullanmayıp, (n, m) sayılı müşteriyi, yani n'inci otobüsün m'inci müşterisini

$$2^n(2m-1)$$

numaralı odaya yerleştirin...

Bir Başka Çözüm Daha: Müşterileri otele aşağıdaki şekildeki gibi yerleştirelim. Örneğin üçüncü sütunla ikinci sıranın kesişimi, üçüncü otobüsün ikinci yolcusunu simgelesin. Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere bu yolcu 9 numaralı odada yatacak. Böylece bütün yolcular otelin bütün odalarını meşgul etmiş olacaklar.

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	6	10	15	21
2	2	5	9	14	20	
3	4	8	13	19		
4	7	12	18			
5	11	17				
6	16					

Soru: Bu yerleştirmenin bir formülünü bulabilir misiniz? Örneğin, $(23, 45)$ sayılı müşterinin hangi odaya yerleşeceğini teker teker saymadan bulabileceğiniz bir formül yazabilir misiniz?

Dördüncü Gün. Otel boşaldı. Sonsuz sayıda müşterisi olan bir otobüs geldi. Ama bu sefer otobüs hem öne doğru hem de arkaya doğru sonsuz. Her yolcunun bir sıra numarası var:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ne kadar tamsayı varsa o kadar yolcu var. Bu kadar çok yolcuyu

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

gibi pozitif doğal sayılarla numaralandırılmış odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Oldukça kolay bu soru. Aslında iki otobüs gelmiş gibi davranabilirsiniz: Birinci otobüsün yolcuları

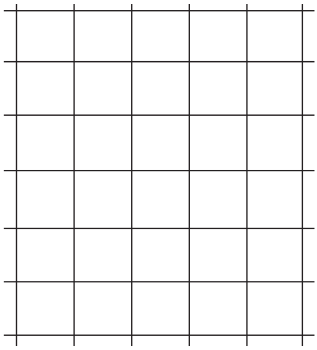
$$-1, -2, -3, -4, \ldots$$

İkinci otobüsüyolcuları da

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Yani ilk otobüsün yolcularını negatif sayılı odalara yerleştirin, ikinci otobüsün yolcularını da negatif olmayan sayılı otobüse...

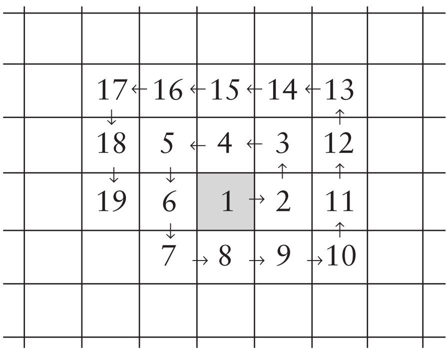
Beşinci Gün. Otel boşaldı. Sonsuz sayıda müşterisi olan bir otobüs geldi. Ama bu sefer otobüs hem öne doğru hem de arkaya doğru, hem de hem sağa hem de sola doğru sonsuz. Aşağıdaki gibi yani.



Sağa sola aşağı ve yukarı (dört bir yana) sonsuz otobüs.

Şoför de bir yerde oturuyor. (Tepedeki aynalar ve elektronik aygıtlar sayesinde yolu görebiliyor. Yolcular da otobüsün tepesinden nazikçe fırlatılarak indiriliyorlar...)

Bu kadar yolcuyu otele nasıl sığdıracaksınız? Bu aynen üçüncü günün sorusu. Ama biz yeni bir çözüm üretelim. Şoförü 1 numaralı odaya alalım ve diğer yolcuları teker teker, şoförün etrafında bir spiral gibi dönerek oturtalım.



Altıncı Gün. Otel gene boşaldı. Sonsuz sayıda müşterisi olan bir otobüs geldi. Her zamanki gibi... Ama bu sefer müşterilerin adları Üçbölübeş, yedibölüdört gibi pozitif kesirli sayılar. Bazıları Üçbölübeş'e Altıbölüon diyorlarmış ama nüfus kâğıdında adı Üçbölübeş'miş. Beşbölübir'e de herkes kısaca Beş dermiş ama nüfus kâğıdındaki adı Beşbölübir'miş. Pozitif kesirli sayıları taşıyan otobüsün yolcularını pozitif tamsayılarla numaralandırılmış odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Çok kolay... Nüfus kâğıdında adı n/m olan müşteriyi (demek ki n ve m'nin ortak bölenleri yok), üçüncü günde (n, m) adlı müşteriyi yerleştirdiğimiz

$$2^{n-1}(2m-1)$$

numaralı odaya yerleştirelim.

Yedinci Gün. Otel boşaldı. Sonsuz sayıda müşterisi olan bir otobüs geldi. Bu sefer müşterilerin adları kesirli sayılar. Tüm kesirli sayıları taşıyan otobüsün yolcularını pozitif tamsayılarla numaralandırılmış odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Çok kolay. Pozitif kesirli sayıları çift sayılı odalara şöyle yerleştirelim: n/m adlı (n ve m birbirine asal) müşteriyi

$$2^n(2m-1)$$

numaralı odaya yerleştirelim. Negatif kesirli sayıları 1'den büyük tek sayılı odalara yerleştirelim, yani n/m adlı müşteriyi (n ve $m > 0$ ve gene aralarında asallar),

$$2^n(2m-1)+1$$

numaralı odaya yerleştirelim. 1 numaralı oda boş kaldı. O odaya da henüz yerleştirmediğimiz 0 adlı müşteriyi yerleştirelim.

11. Sayılabilir Sonsuzluk

Altıdan yukarı sayamayan aritmetiği zayıf bir kabile, reis olarak en fazla büyükbaş hayvanı olan kişiyi seçermiş. Hayvanları nasıl sayarlardı diye merak ediyor insan. Ama kimin daha fazla hayvanı olduğunu bulmak için saymaya gerek yoktur ki! Hayvanları karşılaştırmak yeterlidir. İki adayın hayvanları yanyana iki ağıla konur, sonra ağıllardan hayvanlar birer birer çıkarılır. Ağılı ilk boşalan seçimi kaybeder...

Eğer ağıllar aynı anda boşalırsa, adayların aynı sayıda hayvanı var demektir. Bu durumda kabilenin reis seçmek için hangi yönteme başvurduğu antropoloji kitaplarında yazmıyor.

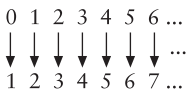
Yukarıdaki yöntem hayvan sayısı sonlu olduğunda bir işe yarar da, hayvan sayısı sonsuz olduğunda tuhaf sonuçlar verebilir. Örneğin diyelim her iki adayın da doğal sayılar kadar hayvanı var. Her ikisi de hayvanlarını 0, 1, 2, 3 diye numaralandırmışlar. Biz, her iki adayın da aynı sayıda hayvanı olduğunu biliyoruz ama onlar bilmiyorlar. Yukarıdaki yöntemi uyguladıklarını düşünelim. Birinci aday hayvanlarını numaralarına göre 0, 1, 2, 3, ... sırasıyla çıkarsın. İkinci aday açıkgöz olsun. İkinci aday, 0 numaralı hayvanı bir kenarda tutup, hayvanlarını 1, 2, 3, 4 sırasıyla çıkarsın. Böylece birinci adayın n numaralı hayvanı ikinci adayın $n+1$ numaralı hayvanıyla eşleşir. Birinci adayın bütün hayvanları ağıldan çıktığında, ikinci adayın ağılında sakladığı 0 numaralı hayvan kalır. Böylece seçimi bir hayvan farkıyla ikinci aday kazanır!

Eğer iki kümenin elemanlarını hiçbirini unutmadan birbirleriyle eşleyebiliyorsak, bu iki kümenin "aynı sayıda elemanları var" diyelim. "Kümenin eleman sayısı" kavramını daha akademik olan bir başka kitabımızda tanımlayacağız. Şimdilik sadece "aynı sayıda elemanları olmak" kavramını tanımlıyoruz.

Dikkat: İki kümenin sonsuz sayıda elemanı olması demek, bu iki küme arasında bir eşleme var demektir. Bu eşleme ya açık açık bulunmalı ya da eşlemenin varlığı bir biçimde kanıtlanmalı. (Matematikte bazen bir nesnenin varlığı o nesne açık açık bulunmadan da kanıtlanabilir.)

Birinci kümeyi delikanlılar kümesi olarak, ikinci kümeyi de gençkızlar kümesi olarak algılayıp, herkesi ama herkesi evlendirebiliyorsak, o zaman delikanlı ve gençkız sayısının aynı olduğunu söyleyeceğiz, yani iki kümenin de "aynı sayıda elemanı var" diyeceğiz.

Burada "***aynı sayıda elemanı var***" sözleri, "aynı", "sayıda", "elemanı" ve "var" sözcükleri yanyana gelmiş gibi algılanmamalı, tek bir "aynısayıdaelemanlarıvar" sözcüğü olarak algılanmalı. Bir yanlış anlamaya mahal vermemek için "aynı sayıda elemanı var" yerine iki kümenin birbirine ***denk*** ya da ***eşlenik*** ya da aynı ***kuvvette*** oldukları söylenir.

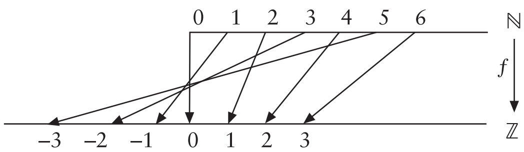


Bir önceki sayfadaki gri alanda, n doğal sayısını $n+1$ pozitif doğal sayısıyla eşleştirerek, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesiyle $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ pozitif doğal sayılar kümesinin eşlenik olduklarını gördük. Bu eşlemenin resmi üstte.

$\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ kümeleri de birbirine eşleniktir elbet, bunu görmek için n sayısıyla $n + 2$ sayısını eşleştirmek yeterli.

Eğer her n doğal sayısını $2n$ doğal sayısıyla eşleştirirsek, $\mathbb{N}$ ile $2\mathbb{N}$ kümelerinin eşlenik olduklarını görürüz.

Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ de eşleniktir: Pozitif tamsayıları tek doğal sayılarla, pozitif olmayan tamsayıları da çift doğal sayılarla eşleyelim. İşte bu eşlemenin resmi:



Fonksiyonu formüle dökmek istiyorsak şunu elde ederiz:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{eğer } n \text{ çiftse} \\ -(n+1)/2 & \text{eğer } n \text{ tekse} \end{cases}$$

11.1 Kümeler Arasında Eşleniklik İlişkisi

X kümesinden Y kümesine giden bir eşleme varsa, bunu

$$X \approx Y$$

olarak gösterelim. Bu ilişkiyi, X ve Y kümelerinin "eleman sayısı aynı" olarak yorumlayabiliriz. Eğer X ve Y kümeleri sonluysa, denk olup olmadıklarını anlamak için kümelerin elemanlarını saymak yeterli, ama X sonsuzsa yepyeni bir kavram bulmuş oluruz.

Kümeler arasındaki bu $\approx$ ilişkisinin üç önemli özelliği vardır:

• Her X kümesi için $\mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$ bir eşlemedir. Demek ki

$$X \approx X.$$

Yani $\approx$ ilişkisi yansımalıdır.

• Eğer $f : X \longrightarrow Y$ bir eşlemeyse, $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ de bir eşlemedir. Demek ki

$$\text{eğer } X \approx Y \text{ ise } Y \approx X.$$

Yani $\approx$ ilişkisi simetriktir.

• Eğer $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ birer eşlemeyse, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ bir eşlemedir. Demek ki

$$\text{eğer } X \approx Y \text{ ve } Y \approx Z \text{ ise, } X \approx Z$$

olur. Yani $\approx$ ilişkisi geçişlidir.

Dolayısıyla $\approx$ ilişkisi, elemanları küme olan bir küme üzerine (örneğin $\wp(A)$ gibi bir küme üzerine) bir denklik ilişkisidir.

Aralarında eşleme olan kümelere bundan böyle ***eşlenik*** diyelim.

Bu bölümün devamında ve daha sonraki bölümlerde ummadığımız kümelerin birbiriyle eşlenik olduklarını göreceğiz.

11.2 ℕ'nin Eşlenik Olduğu Birkaç Küme

İlk kez duyulduğunda inanması biraz zor olabilir ama $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesiyle $\mathbb{N}$ kümesi arasında bir eşleme vardır. Altbölüm 10.3'te de şaşırtıcı olan buydu zaten. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesiyle $\mathbb{N}$ kümesi arasındaki bir eşlemenin resmi aşağıda. Resmi çizilen eşlemede $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin örneğin $(5, 3)$ elemanı $\mathbb{N}$ kümesinin 39 elemanına gidiyor.

8	44	53								
7	35	43	52							
6	27	34	42	51						
5	20	26	33	41	50					
4	14	19	25	32	40	49				
3	9	13	18	24	31	39	48			
2	5	8	12	17	23	30	38	47		
1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	
0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri arasında bir başka eşleşme bulalım. Herhangi pozitif bir x doğal sayısı, tek bir biçimde 2'nin bir kuvvetiyle tek bir doğal sayının çarpımı olarak yazılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 24 &= 2^3 \times 3, \\ 224 &= 2^5 \times 7, \\ 139 &= 2^0 \times 139, \\ 128 &= 2^7 \times 1. \end{aligned}$$

Yani her x pozitif doğal sayısı için

$$x = 2^n(2m+1)$$

eşitliğini sağlayan bir ve sadece bir tane (n, m) doğal sayı çifti vardır. Bu bize $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesiyle $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ kümesi arasında

$$f(n, m) = 2^n(2m+1)$$

kuralıyla tanımlanan bir eşleme verir. Dolayısıyla,

$$g(n, m) = 2^n(2m+1) - 1$$

kuralıyla tanımlanmış $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}$ arasında bir eşlemedir. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}$ arasında çok eşleme vardır. Örneğin eğer f bunlardan biriyse ve g, $\mathbb{N}$'nin bir eşlemesiyse, $g \circ f$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ile $\mathbb{N}$ arasında bir başka eşlemedir.

$\mathbb{N}$'nin Eşlenik Olduğu Başka Altkümeler. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ ilişkisinden,

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$$

ilişkileri çıkar (bkz. Alıştırma 7.16). Bunu kolaylıkla genelleştirebiliriz:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}.$$

Gene bir önceki bölümde, çaktırmadan da olsa,

$$\mathbb{N} \approx 2\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{0\} \approx \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

ilişkilerini göstermeye çalıştık. Bu eşlemeleri ve başkalarını açık biçimde yazalım:

$\mathbb{N}$ ile $2\mathbb{N}$ arasında bir eşleme: $f(n) = 2n$.
$\mathbb{N}$ ile $2\mathbb{N} + 1$ arasında bir eşleme: $f(n) = 2n + 1$.
$\mathbb{N}$ ile tamkare tamsayılar kümesi arasında bir eşleme: $f(n) = n^2$.
$\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ arasında bir eşleme: $f(n) = n + 1$.
$\mathbb{N}$ ile $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ arasında bir eşleme: $f(n) = n + 2$.

ℕ'nin Altkümeleri. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ise, A ya sonludur ya da $A \approx \mathbb{N}$ olur. Bunun kanıtı oldukça kolay: Eğer A sonsuzsa, $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ fonksiyonu,

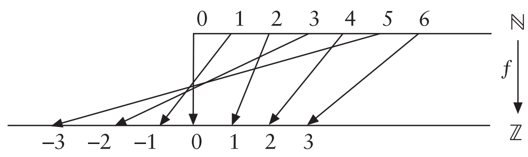
$$f(n) = A\text{'nın } (n+1)\text{'inci elemanı}$$

olarak tanımlansın. f bir eşlemedir. Örneğin asal sayılar kümesiyle doğal sayılar kümesi arasında bir eşleme vardır: 0'ı 2'ye, 1'i 3'e, 2'yi 5'e, 3'ü 7'ye, 4'ü 11'e, 5'i 13'e, 6'yı 17'ye vs. gönderebiliriz.

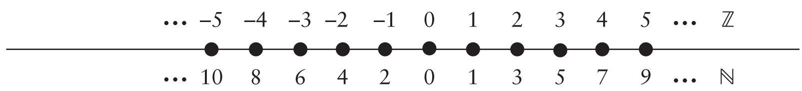
ℕ ve ℤ Arasında Eşleme. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonunu,

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ çiftse} \\ (-n-1)/2 & n \text{ tekse} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlayalım. Yukarıda tanımlanan bu f fonksiyonu ℕ ile ℤ kümeleri arasında bir eşlemedir, şekli de aşağıdadır.



İşte ℕ ile ℤ arasında bir başka eşleme:



Bir X kümesiyle ℕ arasında bir eşleme bulmanın, X kümesinin elemanlarını 0'ıncı, 1'inci, 2'nci diye doğal sayılarla sonsuza kadar numaralandırmaktan, yani X'in elemanlarını teker teker belli bir sırada saymaktan başka bir şey olmadığına dikkatinizi çekerim.

ℕ ve $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ Arasında Eşleme. Şimdi $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ile ℕ kümeleri arasında bir eşleme bulalım, yani negatif olmayan kesirli sayıları doğal sayılarla numaralandıralım.

Birinci Yöntem. $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ kümesinden ℕ kümesine giden fonksiyonu aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi tanımlayalım.

$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{1}$	$\cdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	$\cdots$

İki kümeyi nasıl eşleştirdiğimizi gösterelim: a/b kesirli sayılarını önce $a+b$ toplamının büyüklüğüne göre diziyoruz (önce toplamı 1 olanlar, sonra 2 olanlar vs.); sonra, küçük a'dan büyük a'ya gidiyoruz. Tabii daha önce dizdiğimiz sayıları aradan çıkarıyoruz. Örneğin,

$$a+b=8$$

olduğu kesirli a/b sayılarını şöyle diziyoruz:

$$\frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}.$$

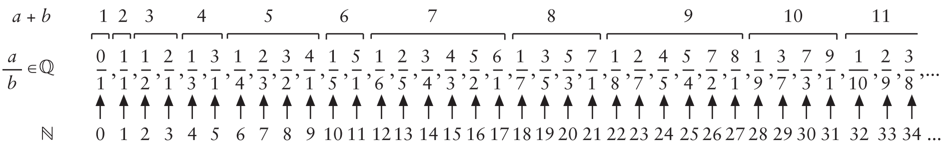
(0/8, 2/6, 4/4 ve 6/2 daha önce dizilmişti.) Daha sonra şu kesirli sayılar geliyor:

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{7}{2}, \frac{8}{1}.$$

Ardından

$$\frac{1}{9}, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, \frac{9}{1}$$

sayıları geliyor. İşte resim:



Bu yöntemle, örneğin, 52/47 kesirli sayısının hangi doğal sayıyla eşleştirildiğini bulmak pek kolay değildir.

Farey'in Yöntemi. Çok tuhaf gelebilecek bir başka eşleştirme daha vardır. İlkokulda sık sık yapılan

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

hatasını değerlendirir bu yöntem. 0/1 ve 1/0 "sayı"larından başlayalım (Sayı olmayan 1/0 "sayısını" umursamayın şimdilik):

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{0}.$$

Bu iki "sayı"nın ortasına, "toplam"ları olan

$$\frac{0}{1}+\frac{1}{0}=\frac{0+1}{1+0}=\frac{1}{1}$$

sayısını yazalım:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}.$$

İki yeni aralığımız var şimdi: $[0/1, 1/1]$ ve $[1/1, 1/0]$ aralıkları. Bu aralıkların ortalarına uçların "toplam"larını, yani,

$$\frac{0}{1}+\frac{1}{1}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2} \text{ ve } \frac{1}{1}+\frac{1}{0}=\frac{1+1}{1+0}=\frac{2}{1}$$

sayılarını yazalım:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}.$$

Bu beş sayı dört yeni aralık belirliyor. Bu dört aralığın ortalarına aralıkların uçlarının "toplam"larını yazalım:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0}.$$

Bunu böylece sürdürelim. Bir sonraki aşamada

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{0}$$

sayıları belirir.

Böyle devam ederek her kesirli sayıyı yalnız bir kez ve sadeleşmiş biçimde yazarız... Bunun bildiğimiz kanıtı uzun ama oldukça kolaydır. Bu yüzden kanıtını vermeyeceğiz. Alıştırma olarak bırakıyoruz!

Şimdi, kesirli sayıları Farey'in yukarıdaki açıkladığım yöntemiyle, beliriş sırasına göre sayın. Yalnız 1/0'ı atlamayı unutmayın, öyle bir sayı yoktur!

Jeolog Farey hakkında daha fazla bilgiyi şu adreste bulabilirsiniz: `http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Farey.html`

Üçüncü Yöntem. $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ kümesinin elemanlarını şöyle de numaralandırabiliriz. Önce 0 kesirli sayısını 0 ile numaralandıralım ve sonra pozitif kesirli sayıları pozitif doğal sayılarla aşağıdaki şekildeki gibi numaralandıralım. Aşağıdaki şeklin solunda tüm pozitif kesirli sayılar var. Sadeleşmiş halleriyle yazılmışlar.

ℚ

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	...
1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	...
1/3	2/3	4/3	5/3	7/3	8/3	10/3	...
1/4	3/4	5/4	7/4	9/4	11/4	13/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	6/5	7/5	8/5	...
1/6	5/6	7/6	11/6	13/6	17/6	19/6	...
1/7	...	...	...	...	...	...	

ℕ

1	2	4	7	11	16	22	...
3	5	8	12	17	23	...	
6	9	13	18	24	...		
10	14	19	25	...			
15	20	26	...				
21	27	...					
28	...						

Birinci sıraya paydasında 1 olanlar, ikinci sıraya paydasında 2 olanlar ve n'inci sıraya paydasında n olanlar yazılmış... Böylece hem sağa doğru sonsuz giden hem de aşağıya doğru sonsuz inen bir tablo elde ederiz.

Aynı tabloyu pozitif kesirli sayılar yerine, 1, 2, 3, 4 gibi pozitif doğal sayılarla da doldurabiliriz. Sağdaki tabloda bunun bir yöntemi veriliyor: Doğal sayıları sağdan sola giden ve yukarıdan aşağıya inen çaprazları izleyerek yerlerine koyabiliriz. Bir kesirli doğal sayı, bulunduğu yerdeki doğal sayıyla numaralansın. Örneğin, 7/4'ün numarası 25 olsun, 20 doğal sayısı 2/5 kesirli sayısını numaralandırsın.

$\mathbb{Q}$ **ve** $\mathbb{N}$ **Arasında Eşleme.** Yukarıda $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ ve $\mathbb{N}$ arasında birkaç eşleme bulduk. Demek ki,

$$\mathbb{Q}^{\geq 0} \approx \mathbb{N} \approx 2\mathbb{N}$$

olur. Öte yandan,

$$\mathbb{Q}^{<0} \approx \mathbb{Q}^{>0} = \mathbb{Q}^{\geq 0} \setminus \{0\} \approx \mathbb{N} \setminus \{0\} \approx \mathbb{N} \approx 2\mathbb{N} + 1.$$

Dolayısıyla,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{<0} \sqcup \mathbb{Q}^{\geq 0} \approx 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N} + 1) = \mathbb{N}$$

olur. (Buradaki $\sqcup$ simgesi "bileşim" anlamına gelir, ancak, ayrıca, bileşimi alınan kümelerin ayrık olduklarına dikkati çeker.) Demek ki kesirli sayılarla doğal sayılar arasında bir eşleme var.

Bu yaptıklarımızın birkaç sonucunu çıkaralım.

Tabii ki $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ ilişkisi de doğru.

Ayrıca, eğer A, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}$ kümesinin sonsuz bir altkümesiyse, o zaman $A \approx \mathbb{N}$ olur, çünkü $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$ olduğundan, A, $\mathbb{N}$'nin sonsuz bir kümesiyle eşleniktir. (Ayrıca bkz. Teorem 11.3.)

11.3 Sayılabilir Sonsuzlukta Kümeler

Bir kümeyle $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme olması, o kümenin sonsuz olduğunu, ama elemanlarının bir biçimde doğal sayılarla sayılabileceğini gösterir (demek ki o kadar da sonsuz değilmiş küme!) Bu yüzden $\mathbb{N}$ ile arasında eşleme olan kümelere ***sayılabilir sonsuzlukta kümeler*** denir. Yukarıda şu sonuçları kanıtladık:

Teorem 11.1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ *ve* $\mathbb{Q}$ *kümeleri birbirlerine eşleniktir, yani bu kümelerin her biri sayılabilir sonsuzluktadır.* □

İleride gereksineceğimiz bir başka teorem daha:

Teorem 11.2. *Sonlu uzunluktaki* 01*-dizilerinin kümesi sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: Sonlu 01-dizilerini önce uzunluklarına göre, sonra büyüklüklerine göre (yani alfabe sırasına göre) sıralayabiliriz:

Uzunluk	Dizi	Numarası
0 uzunlukta:	$\langle\rangle$	0
1 uzunlukta:	0	1
	1	2
2 uzunlukta:	00	3
	01	4
	10	5
	11	6
3 uzunlukta:	000	7
	001	8
	010	9
	011	10
	100	11
	101	12
	110	13
	111	14

Bu numaralandırmayı böylece devam ettirebiliriz. Her sonlu dizinin numarasını bulmanın oldukça kolay bir formülü var. Eğer dizi

$$d_{n-1} \dots d_1 d_0$$

ise, numarası,

$$d_0 + d_1 2 + d_2 2^2 + \cdots + d_{n-1} 2^{n-1} + 2^n - 1$$

olur. Demek ki sonlu 01-dizileri kümesinden doğal sayılara giden bir fonksiyon elde ettik. Bu fonksiyonun tersi de var: x bir doğal sayı olsun. $x + 1$'i 2'lik tabanda yazalım: Bir n doğal sayısı ve her biri 0 ya da 1'e eşit olan $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$ sayıları için

$$x + 1 = d_0 + d_1 2 + d_2 2^2 + \cdots + d_{n-1} 2^{n-1} + 2^n.$$

Görüldüğü gibi x sayısı $d_{n-1} \dots d_1 d_0$ dizisinin numarasıdır. Demek ki,

$$f(d_{n-1} \dots d_1 d_0) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i 2^i + 2^n - 1$$

formülü sonlu uzunlukta 01-dizileri kümesiyle $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme verir. □

Bu bölümü şu kolay ama yararlı teoremle bitirelim:

Teorem 11.3. *Sayılabilir sonsuzluktaki bir kümenin bir altkümesi ya sonludur ya da sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: Sayılabilir sonsuzluktaki kümenin $\mathbb{N}$ olduğunu varsayabiliriz. Sonuç şimdi sayfa 197'de kanıtlanan sonuçlardan çıkar. $\square$

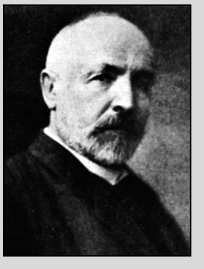
Sonsuz olan ama sayılabilir sonsuzlukta olmayan kümelere sayılamaz sonsuzlukta kümeler denir. Sayılamaz sonsuzluktaki kümeler bir sonraki bölümün konusu olacak. Şimdilik, yukarıdaki teoremin bir sonucuyla yetinelim.

Sonuç 11.4. *$A \subseteq B$ olsun. Eğer A sayılamaz sonsuzluktaysa B de sayılamaz sonsuzluktadır.*

Kanıt: B'nin sonsuz olduğu belli. Eğer B sayılabilir sonsuzlukta olsaydı, yukarıdaki teoreme göre A da sayılabilir sonsuzlukta olacaktı. $\square$

Georg Cantor (1845 - 1918)

Halk arasında "modern matematik" olarak bilinen kümeler kuramı 19'uncu yüzyılın sonlarına doğru birdenbire ve çok büyük bir hızla gelişti. Örneğin, analizin ve geometrinin değişimi uzun yıllarda hatta birkaç yüzyılda gerçekleşmiştir. Oysa kümeler kuramı birkaç yıl içinde olağanüstü atılımlarda bulunmuştur. Bu gelişme büyük ölçüde Georg Cantor sayesinde olmuştur.



Cantor 1845'te Rusya'da Petersburg'da zengin bir tüccarın oğlu olarak dünyaya gelmiştir. 1856'da ailesiyle birlikte Almanya'ya göç etmiştir. Üç kardeşin en büyüğüdür. Üç kardeşin üçüne de annelerinden sanatçı duyarlılığı geçmiş ve müziğe, resme ve felsefeye ilgi duymuşlardır. Cantor özellikle felsefe ve teolojiyle yakından ilgilenmiştir.

Cantor genç yaşından itibaren matematiğe ilgi duyup matematik okumak istemiş, ancak pragmatik bir adam olan babası oğlunun mühendis olmasında ısrar etmiştir. Neyse ki oğul Cantor sonunda istediğini elde etmiştir. 1863'te Berlin Üniversitesi'nde matematik, fizik ve felsefe okumuştur. Bitirme tezini sayılar kuramı üzerine yazmıştır; tezi Gauss'un yarım bıraktığı $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ denkleminin çözümleri üzerinedir.

1872'de Dedekind'le (1831-1916) tanışmasıyla Cantor'un yaşamında büyük değişimler olur. İki matematikçi uzun yıllar boyunca mektuplaşırlar. Mektuplarının birçoğu günümüze kadar korunmuştur. Anlaşılan o ki, Dedekind'in soyut düşünme biçiminden Cantor çok etkilenmiştir. Belki de kümeler kuramını biraz da Dedekind'e borçluyuz.

Sayılar kuramından sonra, Heine'nin etkisiyle trigonometrik sonsuz toplamlarla ilgilenen Cantor, buradan doğal olarak nokta-küme topolojisine el atmış, topolojiden de sonsuz sayılara ve kümeler kuramına sıçramıştır.

Cantor'dan önce "sonsuzluk" kavramı matematikte sadece "sonlu"nun karşıtı olarak bilinirdi, oysa "sonlu"nun bile tam matematiksel bir tanımı yoktu. Cantor sonsuzluk kavramına gerçek boyutunu kazandırmıştır: Sonsuzlukları derecelendirmiş, onları bir nevi sayı olarak görmemizi sağlamıştır. Doğal sayıların ($\mathbb{N}$) sonsuzluğunun kesirli sayıların ($\mathbb{Q}$) sonsuzluğuna eşit olduğunu, gerçel sayıların ($\mathbb{R}$) sonsuzluğunun doğal sayıların sonsuzluğundan büyük olduğunu ve $\mathbb{R}^n$ kümesinin sonsuzluğunun $\mathbb{R}$ kümesinin sonsuzluğuna eşit olduğunu kanıtlamıştır.

Ancak Cantor'un matematiksel düşünceleri matematik dünyasında genel kabul görmemiş, çetin kavgalara neden olmuş, daha da kötüsü, zaten psikolojik dengesi zayıf olan Cantor'un sık sık hastanelerde yatmasına ve çalışamamasına neden olmuştur. Geleceği öngörme konusunda olağanüstü bir yeteneğe sahip olan çağdaşı Hilbert, büyük bir özgüvenle "Cantor'un bize sunduğu cennetten kimse bizi kovamaz" demiş ve haklı çıkmıştır.

12. Sayılamaz Sonsuzluk

Sayılabilir sonsuzlukta olmayan sonsuz kümelere ***sayılamaz sonsuzlukta küme*** denir. Sayılamaz sonsuzlukta kümeler var mıdır? Evet. $\wp(\mathbb{N})$ sayılamaz sonsuzluktadır. Bu, Teorem 4.2'nin doğrudan bir sonucudur: Eğer $\wp(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme olsaydı, $\mathbb{N}$'den $\wp(\mathbb{N})$'ye giden örten bir fonksiyon olurdu.

Bu sonucu genelleştirmek pek o kadar zor değil.

Teorem 12.1. *$\wp(\mathbb{N})$ sayılamaz sonsuzluktadır. Daha genel olarak, eğer X sonsuz bir kümeyse, $\wp(X)$ sayılamaz sonsuzluktadır. Dolayısıyla X'ten en az iki elemanlı bir kümeye giden sayılamaz sonsuzlukta fonksiyon vardır.*

Kanıt: X'in sonsuz ama $\wp(X)$'in sayılabilir olduğunu varsayalım. $x \mapsto \{x\}$ fonksiyonu X'ten $\wp(X)$'e giden birebir bir fonksiyon olduğundan, Teorem 11.3'ten kolaylıkla X'in sayılabilir olduğunu anlarız. Demek ki hem X hem de $\wp(X)$ sayılabilir sonsuzlukta. Ama bu durumda $X \approx \mathbb{N} \approx \wp(X)$, yani $X \approx \wp(X)$ olur, ki bu da Teorem 4.2'yle çelişir.

Teorem 4.1'e göre $\wp(X)$'in eleman sayısı X'ten $\{0, 1\}$ kümesine ya da iki elemanlı herhangi bir kümeye giden fonksiyon sayısı kadardır. Demek ki X'ten en az iki elemanlı bir kümeye sayılamaz sayıda fonksiyon vardır (bkz. Sonuç 11.4). □

Birazdan $\mathbb{R}$'nin birden fazla elemanı olan her aralığının ($\mathbb{R}$ de bu aralıklara dahil!) sayılamaz sonsuzlukta olduğunu kanıtlayacağız. Sayılamaz sonsuzlukta başka kümeler de göreceğiz.

12.1 Aralıklar

Gerçel sayılar kümesinden bir (a, b) aralığı alalım. $a < b$ olsun ki aralık boş olmasın. Bu aralıkla $(0, 1)$ aralığı arasında bir eşleme vardır. Örneğin,

$$f(x) = (b - a)x + a$$

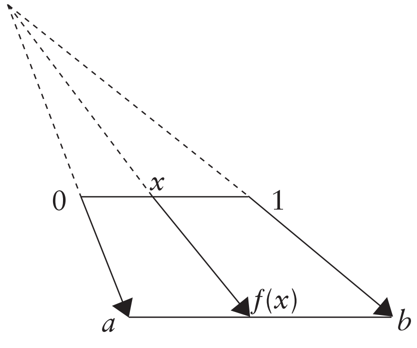
kuralıyla tanımlanmış

$$f : (0, 1) \longrightarrow (a, b)$$

fonksiyonu bu iki aralık arasında bir eşlemedir.

Dikkat: "İki kümenin de eleman sayısı sonsuz, demek ki eleman sayıları aynı, dolayısıyla aralarında bir eşleme vardır" cümlesinde herhangi bir mantık kırıntısı yoktur! Hele, "Her iki kümenin de eleman sayısı aynı, demek ki aralarında bir eşleme vardır" cümlesi külliyen yanlıştır. Bildiğimiz gibi $\mathbb{N}$ de $\wp(\mathbb{N})$ de sonsuzdur ama aralarında eşleme yoktur. Bu kitapta bir kümenin eleman sayısını tanımlamadık. Tanımlamayacağız da. Kümenin eleman sayısı kavramı [N3]'te tanımlanacak.

Bu iki aralık arasında bir eşlemenin varlığı aşağıdaki şekilden de anlaşılır.



f eşlemesini şöyle elde ettik: Önce $(0,1)$ aralığını $b-a$ ile çarparak $(0, b-a)$ aralığı yapıyoruz, sonra $(0, b-a)$ aralığına a ekleyerek bulmak istediğimiz (a,b) aralığını elde ediyoruz:

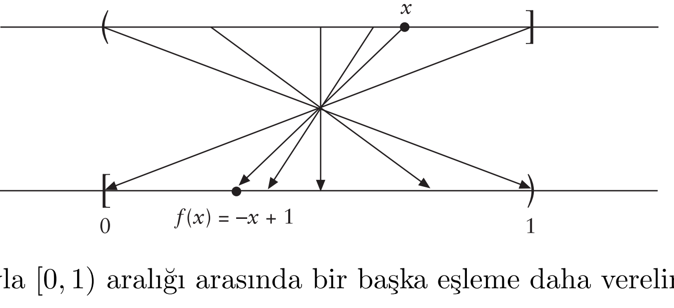
$$x \mapsto (b-a)x \mapsto (b-a)x + a.$$

Aynı yöntemle, $[0,1]$ ve $[a,b]$ gibi kapalı ve sınırlı aralıklar arasında da bir eşleme olduğu anlaşılır; $a < b$ koşuluyla elbette.

Peki, $(0,1]$ aralığıyla $[0,1)$ aralığı arasında bir eşleme var mı? Var elbet! İşte bunlardan biri:

$$f(x) = -x + 1.$$

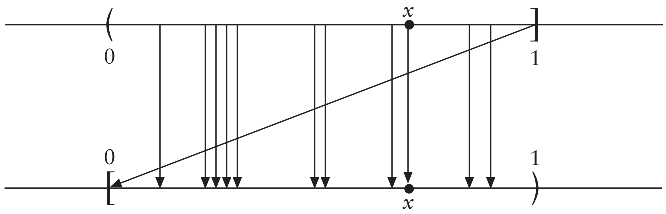
Şekli de aşağıda.



$(0,1]$ aralığıyla $[0,1)$ aralığı arasında bir başka eşleme daha verelim:

$$(0,1] \approx (0,1) \sqcup \{1\} \approx (0,1) \sqcup \{0\} = [0,1).$$

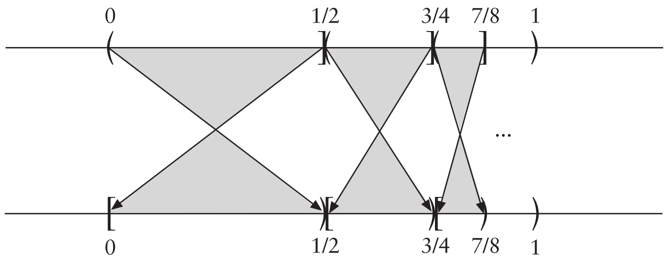
Bunun da resmini şöyle çizebiliriz:



Sadece $(0, 1]$ aralığının 1 elemanıyla $[0, 1)$ aralığının 0 elemanı yer değiştiriyor, diğerleri sabit kalıyor.

Demek yarı açık sınırlı aralıklar arasında da bir eşleme var, yeter ki boşküme olmasınlar.

Daha zor bir soru: $(0, 1)$ açık aralığıyla $(0, 1]$ yarı açık aralığı arasında bir eşleme var mıdır? Evet! İnanması belki biraz güç ama var. İşte o eşlemelerden birinin resmi:



Bu eşlemeyi daha biçimsel olarak şöyle gösterebiliriz:

$$\begin{aligned}(0,1) &= (0,1/2] \cup (1/2,3,4] \cup (3/4,7/8] \cup \ldots \\ &\approx [0,1/2) \cup [1/2,3/4) \cup [3/4,7/8) \cup \ldots = [0,1).\end{aligned}$$

Ya da daha tıkız bir biçimde şöyle gösterebiliriz:

$$(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{n-1}-1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^{n+1}} \right] \approx \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^{n+1}} \right) = (0,1).$$

(İkinci eşleme sonsuz tane eşleme bir araya konularak elde edilmiştir; bkz. Alıştırma 4.108.)

$(0, 1)$ açık aralığıyla $(0, 1]$ yarı açık aralığı arasında yukarıdakine benzeyen bir başka eşleme:

$$(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \approx \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) = (0,1).$$

Bundan da $(0,1) \approx [0,1]$ sonucu çıkar; şöyle çıkar:

$$(0,1) \approx (0,1] = (0,1) \sqcup \{1\} \approx (0,1) \sqcup \{0\} \approx (0,1] \sqcup \{0\} = [0,1].$$

Demek ki açık, kapalı, yarı açık ya da yarı kapalı ve birden fazla (yani sonsuz sayıda) elemanı olan tüm sınırlı aralıklar eşleniktirler.

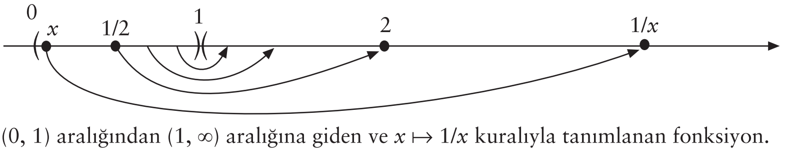
Yukarıda bulduklarımızdan yararlanıp, $(0,1)\cup(1,2)$ ile $(0,1)$ kümeleri arasında da eşleme olduğunu gösterebiliriz:

$$(0,1) \cup (1,2) \approx (0,1] \cup (1,2) = (0,2) \approx (0,1].$$

Peki $(0,1)$ ile $(0,\infty)$ aralıkları eşlenik midirler? Daha neler! Ama evet, eşleniktirler. Böyle bir eşleme bulmak için $x \mapsto 1/x$ fonksiyonunun $(0,1)$ ile $(1,\infty)$ arasında bir eşleme olduğunu gözlemlemek (bkz. aşağıdaki şekil) ve bu eşlemeden 1 çıkarmak yeterli:

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

kuralıyla tanımlanan f fonksiyonu $(0,1)$ ile $(0,\infty)$ aralıkları arasında bir eşlemedir.



(0, 1) aralığından (1, ∞) aralığına giden ve $x \mapsto 1/x$ kuralıyla tanımlanan fonksiyon.

$(0,1)$ ile $(0,\infty)$ aralıkları arasında bir eşleme olduğuna göre $[0,1)$ ile $[0,\infty)$ aralıkları da eşleniktirler:

$$[0,1) = \{0\} \cup (0,1) \approx \{0\} \cup (0,\infty) = [0,\infty).$$

Ayrıca $x \mapsto -x$ kuralıyla tanımlanmış olan fonksiyon $(0,\infty)$ aralığıyla $(-\infty,0)$ aralığı arasında bir eşleme olduğundan,

$$[0,1] \approx [0,1) \approx (0,1) \approx (0,\infty) \approx (-\infty,0)$$

gibi eşleniklikler de elde ederiz.

Ya $(0,1)$ aralığıyla $\mathbb{R}$ arasında bir eşleme var mı? O da var:

$$(0,1) \approx (-1,1) = (-1,0) \sqcup \{0\} \sqcup (0,1) \approx (-\infty,0) \sqcup \{0\} \sqcup (0,\infty) = \mathbb{R}.$$

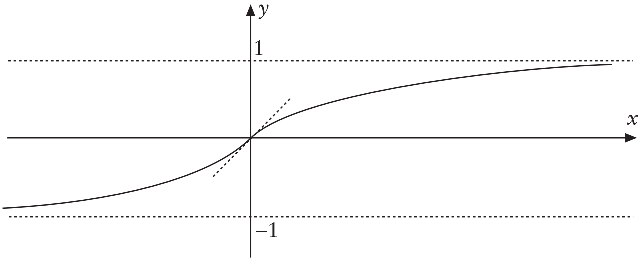
$(0,1)$ aralığıyla $\mathbb{R}$ arasında daha cebirsel eşlemeler de bulunabilir. İşte bunlardan biri:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$'den $(-1, 1)$ aralığına giden bir eşlemedir. Grafiği aşağıda. Bu eşlemeyi 2'ye bölüp çıkana $1/2$ eklersek, $(0, 1)$ aralığıyla $\mathbb{R}$ arasında cebirsel bir g eşlemesi elde ederiz. Formülü şöyle:

$$g(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{1+|x|} + \frac{1}{2}.$$

Biraz temel trigonometri bilen okur, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığıyla $\mathbb{R}$ arasında bir eşleme verdiğini de biliyordur.



$f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ fonksiyonunun grafiği

Demek ki 1'den fazla eleman içeren tüm aralıklar arasında bir eşleme var.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ile $\mathbb{R}$ arasında da bir eşleme bulabiliriz:

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1) \approx \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında da bir eşleme bulmak bu aşamada zor değil:

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \sqcup \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1) \approx (-\infty, 0) \sqcup \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Şu ana kadar kanıtladığımız sonuçları özet halinde yazalım, ileride referans vermek gerekecek:

Teorem 12.2. *Gerçel sayıların birden fazla eleman içeren (kapalı, açık, yarı kapalı, sınırlı ya da sınırsız) tüm aralıkları ve bu aralıkların sonlu bileşimleri birbirine dolayısıyla $\mathbb{R}$'ye eşleniktir. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ kümeleri de $\mathbb{R}$'ye eşleniktir.* □

Alıştırmalar

12.1. $(0, 1) \sqcup (2, 3)$ ile $(0, 1)$ kümeleri arasında bir eşleme bulun.

12.2. $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ eşlenikliklerini kanıtlayın.

12.3. $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eşlenikliğini kanıtlayın.

12.4. $\mathbb{R}^{>0} \approx \mathbb{R}^{\geq 0} \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eşlenikliklerini kanıtlayın.

12.5. $[0, 1]$ aralığının kesirli sayılarından oluşan kümenin sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlayın.

12.2 $\mathbb{R}$ Sayılamaz Sonsuzluktadır

$\mathbb{R}$ sayılamaz sonsuzluktadır. Bunu kanıtlamak için, Teorem 12.2'ye göre, $(0,1)$ aralığının sayılamayan sonsuzlukta olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Diyelim, $(0,1)$ aralığıyla $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme var. Bundan bir çelişki elde edeceğiz. Varlığını varsaydığımız eşlemeye $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$ adını verelim.

Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise, $f(n)$ gerçel sayısını onluk sistemde yazalım:

$$f(n) = 0{,}a_{n,0}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots$$

Buradaki $a_{n,k}$ sayıları 0'la 9 arasında bir tamsayıdır, $f(n)$'nin ondalık rakamları bunlar. Yalnız bunu yaparken $a_{n,k}$ sayılarının bir zaman sonra hep 9 olmamalarına dikkat edelim, örneğin, 0,314 sayısını 0,3140000... olarak yazalım, 0,31399999... olarak değil...

Şimdi b_n sayısı $a_{n,n}$ sayısından farklı ve 0 ile 8 arasında herhangi bir rakam olsun. Örneğin, b_n sayısını şöyle tanımlayabiliriz:

$$b_n = \begin{cases} 2 & a_{n,n} \neq 2 \text{ ise} \\ 1 & a_{n,n} = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Demek ki $b_n \neq a_{n,n}$. (Bu önemli ve aslında b_n hakkında sadece bu önemli!) Şimdi

$$0{,}b_0b_1b_2b_3b_4\ldots$$

sayısına bakalım. Bu sayı kesinlikle $(0,1)$ aralığındadır. Demek ki, f örten olduğundan belli bir $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = 0{,}b_0b_1b_2b_3b_4\ldots$ eşitliği doğru olmalı. Dolayısıyla, $a_{n,n} = b_n$ olmalı. Ama bu yanlış. Bir çelişki elde ettik. Demek ki $\mathbb{N}$ kümesiyle $(0,1)$ aralığı arasında bir eşleme yokmuş, yani $\mathbb{R}$ sayılamaz sonsuzlukta bir kümeymiş. (Soru: Bu kanıt neden $\mathbb{Q}$ kümesinin de sayılamaz sonsuzlukta olduğunu gösteremiyor?)

Cantor'un çapraz yöntemi adıyla bilinen yukarıdaki kanıt matematikte çok ünlüdür ve bu fikir (özellikle kümeler kuramında) başka kanıtlarda da kullanılır.

Teorem 12.3. *$\mathbb{R}$ kümesi sayılamaz sonsuzluktadır. Dolayısıyla gerçel sayıların en az 2 elemanı olan (kapalı, açık, yarı kapalı, sınırlı ya da sınırsız) tüm aralıkları ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ kümesi sayılamaz sonsuzluktadır.* □

Bu önemli teoremin bir başka kanıtını daha verelim:

Teorem 12.3'ün İkinci Kanıtı: $\mathbb{N}$'nin her altkümesini $\mathbb{R}$'nin bir ve sadece bir tek sayısına götüren bir fonksiyon bulacağız. $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $f_A : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ fonksiyonu,

$$f_A(n) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } n \notin A \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } n \in A \text{ ise} \end{cases}$$

koşullarıyla tanımlanmış olsun. (f_A, A'nın karakteristik fonksiyonudur.) Şimdi, $f(A)$ gerçel sayısını,

$$f(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f_A(n)}{10^{n+1}}$$

olarak tanımlayalım. Mesela A asallardan oluşan kümeyse,

$$f(A) = 0{,}01101010001010001010001000001010000010001 0\ldots$$

sayısıdır. Eğer A tek sayılardan oluşan kümeyse,

$$f(A) = 0{,}010101010\ldots$$

sayısıdır. Eğer A ve B, $\mathbb{N}$'nin birbirinden farklı iki altkümesiyse, $f(A)$'nın $f(B)$'den farklı olduğunun bariz kanıtını okura bırakıyoruz. Demek ki f, $\wp(\mathbb{N})$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden birebir (ama örten olmayan) bir fonksiyondur. Teorem 12.1'e göre $\wp(\mathbb{N})$ sayılamaz sonsuzlukta olduğundan, f'nin imgesi olan $\mathbb{R}$'nin $f(\wp(\mathbb{N}))$ altkümesi de sayılamaz sonsuzluktadır. Dolayısıyla $\mathbb{R}$ de sayılamaz sonsuzluktadır (Sonuç 11.4). □

İleride $\wp(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{R}$'nin eşlenik olduklarını kanıtlayacağız.

Alıştırma 12.6. Eğer bir $I \subset \mathbb{Q}$ altkümesinin şu özelliği varsa:

$$\text{Her } x \in I \text{ ve } y \in \mathbb{Q} \text{ için, eğer } y < x \text{ ise } y \in I \text{ olur;}$$

o zaman bu kümeye $\mathbb{Q}$'nün bir ***kesiti*** adı verilir. $\mathbb{Q}$'nün kesitlerinden oluşan kümenin sayılamaz sonsuzlukta olduğunu kanıtlayın. ($\mathbb{R}$ ile kesitler kümesi arasında bir eşleme bulabilirsiniz. Bunun için, $\mathbb{R}$'nin üstten sınırlı her altkümesinin en küçük bir üstsınırının olduğunu bilmek gerekir.)

12.3 $\wp(\mathbb{N})$ ile 01-Dizileri Arasında Bir Eşleme

Bunu daha önce anlatmıştık ama tekrarlamakta yarar var. Sadece 0 ve 1'lerden oluşan sonsuz bir diziye 01-dizisi adı verilir. Örneğin,

$$0110001101101000110101101111 00\ldots$$

dizisi bir 01-dizisidir.

Bu paragrafta bu dizilerin kümesiyle doğal sayıların altkümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})$ arasında bir eşleme bulacağız. Bunu yapmak gayet basit. Örneğin yukarıdaki dizi,

$$\{1, 2, 6, 7, 9, 10, 12, 16, 17, 19, 21, 22, 24, \ldots\}$$

doğal sayı kümesine tekabül eder.

Kural şöyle: Dizinin n'inci terimi 1 ise n'yi altkümeye koyarız, yoksa koymayız. Bu kurala göre, asal sayılar kümesi

$$0011010100010100010100010000010100000100 01\ldots$$

diye başlayan 01-dizisine tekabül eder. $\mathbb{N}$'nin çift sayılar kümesiyse,

$$10101010101010101010\ldots$$

diye başlayan ve 10'ların sürekli tekrarlandığı diziye tekabül eder.

Eğer $X \subseteq \mathbb{N}$ kümesine tekabül eden diziyi biliyorsak, X'in tümleyeninin dizisini de rahatlıkla bulabiliriz: 0'ları 1 yapmak, 1'leri de 0 yapmak yeterlidir.

Eğer X ve Y'ye tekabül eden dizileri biliyorsak, bu dizilerin terim terim çarpımı, $X \cap Y$'ye tekabül eden diziyi verir. $X \cup Y$'ye tekabül eden diziyi bulmayı okura bırakıyoruz.

01-dizilerinden oluşan kümeyi $\mathcal{D}$ olarak gösterelim. Aşağıdaki sonucu kanıtladık:

Teorem 12.4. *$\wp(\mathbb{N})$ kümesiyle 01-dizileri kümesi $\mathcal{D}$ eşleniktir. Dolayısıyla $\mathcal{D}$ sayılamaz sonsuzluktadır.* □

Buradan $\mathbb{R}$'nin sayılamaz sonsuzlukta olduğunu bir kez daha kanıtlayabiliriz: Her 01-dizisi $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ için, onluk tabanda

$$0{,}a_0a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$$

olarak yazılan gerçel sayıyı tanımlayalım. Böylece her 01-dizisi bize ayrı bir gerçel sayı verir. Teorem 12.4'ten dolayı $\mathbb{R}$ sayılamaz sonsuzlukta olmak zorundadır.

Yukarıda $\mathcal{D}$ olarak simgelediğimiz 01-dizilerinden oluşan küme aslında $2^{\mathbb{N}}$ olarak gösterilir, çünkü bir 01-dizisi, $\mathbb{N}$ kümesinden 2 elemanlı bir küme olan $\{0, 1\}$ kümesine giden bir fonksiyondur aslında.

Genel olarak, eğer X bir kümeyse, 2^X, X'ten $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesini temsil eder. Aynen yukarıda yaptığımız gibi altkümelerin karakteristik fonksiyonlarını kullanarak, 2^X ile $\wp(X)$ arasında bir eşleme olduğu kolaylıkla gösterilebilir, nitekim her $f \in 2^X$ fonksiyonu,

$$Y(f) = \{x \in X : f(x) = 1\}$$

kuralıyla 2^X'ten $\wp(X)$'e giden bir Y eşlemesi tanımlar.

12.4 $\mathcal{D}$ ile $\mathbb{R}$ Arasında Bir Eşleme

Başlıktaki gibi bir eşleme bulmak için, $[0, 1) \approx \mathbb{R}$ olduğundan, $[0, 1)$ aralığıyla 01-dizileri kümesi $\mathcal{D}$ arasında bir eşleme bulmak yeterli.

$[0, 1)$ aralığından herhangi bir x sayısı alalım. Bu x sayısından hareketle, adına $d(x)$ diyeceğimiz bir dizi bulacağız.

Eğer $x < 1/2$ ise bulacağımız $d(x)$ dizisinin ilk terimi 0 olsun, yoksa 1 olsun.

Gelelim dizinin ikinci terimine. Eğer ilk terim 0 ise, yani eğer $0 \leq x < 1/2$ ise, o zaman x'in $1/4$'ten küçük olup olmadığına bakalım: Eğer $x \leq 1/4$ ise dizinin ikinci terimi de 0 olsun, yoksa dizinin ikinci terimi 1 olsun. Öte yandan, eğer dizinin ilk terimi 1 ise, yani eğer $1/2 \leq x < 1$ ise, o zaman x'in $3/4$'ten küçük olup olmadığına bakalım: Eğer $x \leq 3/4$ ise dizinin ikinci terimi de 0 olsun, yoksa dizinin ikinci terimi 1 olsun.

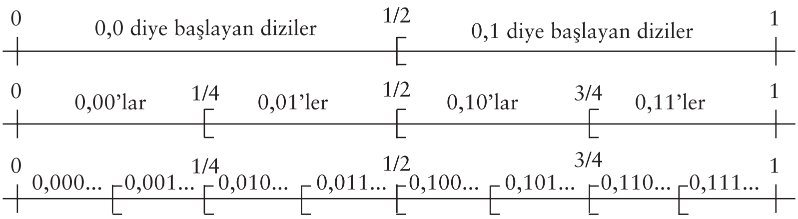
Üçüncü terimi bulmak için dizinin ilk iki terimine bakacağız. Diyelim dizinin ilk iki terimi 10, yani diyelim $1/2 \leq x < 3/4$. Bu durumda $[1/2, 3/4)$ aralığını tam ortadan ikiye bölelim:

$$[1/2, 5/8) \text{ ve } [5/8, 3/4)$$

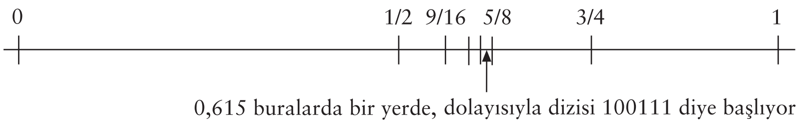
aralıklarını elde ederiz. (1/2'yle 3/4'ün tam ortasındaki 5/8'i sağ aralığa dahil ediyoruz.) Eğer $x \in [1/2, 5/8)$ ise, dizinin üçüncü terimi 0 olsun, yoksa 1 olsun.

Bunu böyle devam ettirelim. Her seferinde x'in içine düştüğü aralığı ikiye bölelim ve x'in sağdaki ya da soldaki aralığın içine düşüp düşmediğine göre bir sonraki terimin 0 ya da 1 olduğuna karar verelim.

Örneğin, eğer $x = 0{,}615$ ise, $d(x)$ dizisi 100111010 diye başlar (ve bir biçimde devam eder).



Bu yöntemle her $x \in [0, 1)$ sayısı için, $d(x)$ adını verdiğimiz bir 01-dizisi bulunur.



$d(0) = 00000\ldots$ olur, yani sabit 0 dizisidir.

$d(1/2) = 1000000\ldots$ olur, yani ilk terimi 1, daha sonraki terimleri hep 0'dır.

$d(5/8) = 10100000\ldots$ olur, yani ilk üç terimi 101, daha sonraki terimleri hep 0'dır.

Paydasında 2^n türünden bir sayı olmayan sayıların dizisini bulmak kolay değildir, ama her sayının mutlaka böyle bir dizisi vardır.

Örneğin, $d(1/3) = 01010101010\ldots$ diye hep 01 olarak tekrarlanan dizidir. (Neden?)

Her x'in böylece bir ve sadece bir tek dizisi bulunur. Aslında bulunan dizi x sayısının ikilik tabanda açılımının katsayılarıdır; yani eğer,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i 2^i$$

ise, o zaman,

$$d(x) = d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$$

olur. Yalnız dikkat, eğer bir a doğal sayısı için, $x = a/2^n$ biçiminde yazılıyorsa, o zaman x'in ikilik tabanda iki değişik açılımı vardır. Örneğin,

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2^2} + 0\cdot\frac{1}{2^3} + 0\cdot\frac{1}{2^4} + 0\cdot\frac{1}{2^5} + 0\cdot\frac{1}{2^6} + \cdots \\ &= 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2^2} + 1\cdot\frac{1}{2^3} + 1\cdot\frac{1}{2^4} + 1\cdot\frac{1}{2^5} + 1\cdot\frac{1}{2^6} + \cdots\end{aligned}$$

olur. Ama diğer sayılar ikilik tabanda tek bir biçimde yazılırlar. (Bu, onluk tabanda, 0,2459999... sayısının 0,246 sayısına eşit olmasına benzer.) Biz $x = a/2^n$ biçiminde yazılan sayıların sonuna 1111... değil, 0000... koyuyoruz, yani birinci açılımı kullanıyoruz.

Böylece $[0,1)$ aralığından $\mathcal{D}$ kümesine giden birebir bir fonksiyon bulmuş olduk. Ancak bu fonksiyon örten değildir. Bu yöntemle bulduğumuz dizilerin kuyruğu hiç sürekli 1 olmaz. Bunun nedenini yukarıda gördük. Ama eğer bir 01-dizisinin kuyruğu sürekli 1 değilse, bu dizi mutlaka $[0,1)$ aralığından bir sayının dizisidir.

Kuyruğu hep 1 ile devam eden ama sabit 1 dizisi olmayan diziler kümesine $\mathcal{D}_1$ adını verelim. Yukarıdaki yöntem bize $[0,1)$ aralığıyla $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$ kümesi arasında bir eşleme verir. Demek ki $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$ kümesi sayılamaz sonsuzlukta. Bundan, $\mathcal{D}$ kümesinin de sayılamaz sonsuzlukta olduğu çıkar ama biz daha fazlasını istiyoruz: $\mathcal{D}$ ile $[0,1)$ aralığı arasında bir eşleme istiyoruz.

$\mathcal{D}_1$ kümesiyle sonlu uzunluktaki ama boşdizi olmayan 01-dizileri kümesi arasında bir eşleme vardır. Nitekim, boşdizi olmayan herhangi sonlu uzunluktaki bir 01-dizisinin sonuna 01111... eklersek $\mathcal{D}_1$ kümesinden bir eleman buluruz. Bu bize boşdizi olmayan sonlu 01-dizileri kümesinden $\mathcal{D}_1$ kümesine bir eşleme verir. Öte yandan Teorem 11.2'ye göre sonlu uzunluktaki 01-dizileri kümesi sayılabilir sonsuzluktadır. Demek ki $\mathcal{D}_1$ kümesi sayılabilir sonsuzluktadır ve Teorem 12.2'den dolayı,

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1) \sqcup \mathcal{D}_1 \approx [0,1) \sqcup \mathcal{D}_1 \approx (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \sqcup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$$

eşlenikliğini elde ederiz.

Teorem 12.5. *01-dizileri kümesi $\mathcal{D}$ ile $\mathbb{R}$ eşleniktir.* □

Bu teorem ve Teorem 12.4 bize şu sonucu verir:

Sonuç 12.6. $\mathbb{R} \approx \mathcal{D} \approx \wp(\mathbb{N})$. □

12.5 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\approx\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\approx\mathbb{R}$

Bu paragrafta $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R}$ kümelerinin eşlenik olduklarını kanıtlayacağız. Hatta $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$ kümesiyle, yani $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ kümesiyle $\mathbb{R}$ kümesinin eşlenik olduklarını kanıtlayacağız. Önce birincisinden başlayalım.

$\mathbb{R}^2$ (yani $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$) kümesiyle $\mathbb{R}$ arasında da bir eşleme vardır. Cantor kanıtlamıştır bunu, zorlanarak da olsa. Birazdan biz de kanıtlayacağız. İlk altbölümde kanıtladığımız $[0,1]\approx\mathbb{R}$ ilişkisinden dolayı, bunu kanıtlamak için, $[0,1]$ aralığıyla $[0,1]\times[0,1]$ karesi arasında bir eşleme bulmak yeterlidir. Meraklı okur, onluk tabanda

$$0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9\ldots$$

olarak yazılan $(0,1]$ aralığındaki bir sayıyı $[0,1]\times[0,1]$ karesinin

$$(0{,}a_1a_3a_5a_7a_9\ldots,\ 0{,}a_2a_4a_6a_8a_{10}\ldots)$$

çiftine götüren fonksiyonun neredeyse (ama tam değil) istenen türden eşleme olduğunu kontrol edebilir. Birazdan tam matematiksel kanıtı vereceğiz.

Önceki teoreme göre $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ ile $\mathcal{D}$ kümelerinin eşlenik olduklarını kanıtlamak yeterli.

$(x,y)\in\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ olsun. Bu iki x ve y dizisinden tek bir dizi elde edeceğiz.

$$x=(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots)\text{ ve } y=(y_0,y_1,y_2,y_3,y_4,\ldots)$$

olsun. Bu iki diziyi mükemmel bir biçimde karıp,

$$f(x,y)=(x_0,y_0,x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,x_4,y_4,\ldots)$$

dizisini bulalım. f fonksiyonu, kolayca görüleceği üzere $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ ile $\mathcal{D}$ kümeleri arasında bir eşlemedir.

Şaşırtıcı bir teorem daha kanıtladık.

Teorem 12.7. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *ile* $\mathbb{R}$ *kümeleri eşleniktir.* □

Yani düzlemle doğrunun aynı sayıda noktası vardır. Ve elbette $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R}$ kümeleri de eşleniktir. Kartezyen çarpımı sonlu kalması koşuluyla istediğimiz kadar büyültebiliriz, eşleniklik bozulmaz. Şimdi eşlenikliğin, kartezyen çarpımı sayılabilir sonsuzlukta alırsak da bozulmayacağını kanıtlayalım.

Teorem 12.8. $\mathbb{R}\approx\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

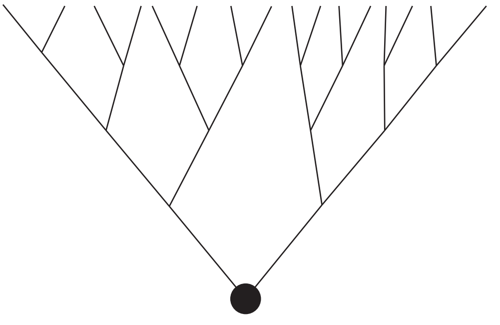
Kanıt: Sonuç 12.6'da $\mathbb{R}\approx\mathcal{D}\approx\wp(\mathbb{N})$ eşlenikliklerini kanıtladık. Sayfa 92'deki tanımdan dolayı, $\mathcal{D}=\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$ eşitliği doğrudur. Böylece Teorem 7.6'dan ve Alıştırma 4.89'dan dolayı,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\approx\left(\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\approx\{0,\,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\approx\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}\approx\mathbb{R}$$

olur. □

12.6 Tam İkili Ağaç

Aşağıdaki şekildeki gibi her noktadan ikiye ayrılan, ama şeklin aksine sonsuza kadar uzayan bir ağaca ***tam ikili ağaç*** diyelim. En alttan başlayarak sonsuza kadar sağ-sol zikzaklar çizerek uzanan bir yola da ***dal*** diyelim.



Teorem 12.9. *Tam ikili ağacın sayılamaz sonsuzlukta dalı vardır. Daha açık olarak söyleyelim: Tam ikili ağacın dallarından oluşan* $\mathcal{T}$ *kümesiyle* 01*-dizileri kümesi* $\mathcal{D}$ *arasında bir eşleme vardır.*

Kanıt: Herhangi bir dalın aldığı yolu bir 01-dizisiyle tarif edelim. En alttan başlayarak, dizinin n'inci terimi, yol n'inci adımda sola sapıyorsa 0, sağa sapıyorsa 1 olsun. Örneğin 01010101 . . . dizisi önce sola, sonra sağa, daha sonra tekrar sola ve tekrar sağa sapan ve sürekli bir sol bir sağ yaparak sonsuza kadar uzanan yol olsun. Böylece her dal bir ve sadece bir tek 01-dizisi verir. Ayrıca her 01-dizisi bir dalın aldığı yolu tarif eder. Teorem 12.4'e göre sayılamaz sonsuzlukta dal vardır. □

12.7 Bölümün Özeti

Bu bölümde bu aşamaya kadar sayılamaz sonsuzlukta birçok küme örneği verdik ve herbirinin birbiriyle eşlenik olduğunu kanıtladık. Ama verdiğimiz örneklerle eşlenik olmayan başka sayılamaz sonsuzlukta kümeler de vardır. Örneğin Teorem 4.2'ye göre $\wp(\mathbb{R})$ bunlardan biridir.

Bu aşamaya kadar kanıtladıklarımızı özet olarak yazalım:

Teorem 12.10. *Aşağıdaki kümeler* $\mathbb{R}$ *ile eşleniktir.*
a. $\mathbb{R}$*'nin kendisiyle sonlu sayıda kartezyen çarpımı,*
b. *Doğal sayılar kümesi* $\mathbb{N}$*'nin altkümelerinin kümesi* $\wp(\mathbb{N})$*,*
c. 01*-dizileri kümesi* $\mathcal{D}$*,*
d. *Tam ikili ağacın sonsuz dallarından oluşan* $\mathcal{T}$ *kümesi,*
e. *Gerçel sayıların* 1*'den fazla eleman içeren her türlü aralığı, yani* $a < b$ *için,* (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ *aralıkları.*
Ayrıca bu kümelerin hiçbiri doğal sayılarla eşlenik değildir. □

Bir sonraki altbölümde hem matematiksel hem de felsefi açıdan çok derin bir soru soracağız.

12.8 Süreklilik Hipotezi

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ sayılabilir sonsuzluktadır. Öte yandan, $\mathbb{R}$'nin sayılamaz sonsuzlukta olduğunu gördük. Demek ki $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{R}$ arasında bir eşleme yok. $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}$'ye giden birebir bir fonksiyon olduğundan, bir anlamda $\mathbb{R}$'de $\mathbb{N}$'den daha fazla eleman olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi sorumuzu soralım: Eğer $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$ ise, X'le $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{R}$ arasında mutlaka bir eşleme var mıdır?

Süreklilik Hipotezi böyle bir eşlemenin mutlaka olduğunu söyler. Süreklilik Hipotezi doğru mudur?

Bilinemez! Bilinmiyor değil, bilinemez! Bu sorduğumuz sorunun olumlu ya da olumsuz bir yanıtı bugün matematikte kabul edilen aksiyomlarla kanıtlanamaz[1]. Bunu Kurt Gödel'in 1930'larda ve Paul Cohen'in 1960'larda kanıtladığı teoremlerden biliyoruz.

Bölüm Üstüne Notlar:

1. Süreklilik Hipotezi sorusunu ilk Cantor sormuştur. Hilbert 1900'de Paris'teki konferansta matematikçilere sorduğu meşhur 23 soru arasına bu soruyu da almıştır, hatta bu soruyu listesinin ilk sorusu yapmıştır.

2. Bu yazıdaki fikirler Cantor'a aittir. Ruh hastalığından dolayı yaşamı acı içinde geçen Cantor'un değerini ne yazık ki çağının birçok matematikçisi anlayamamıştı. Büyük matematikçi Hilbert anlayanlardandı. Hilbert'le birlikte o çağın en büyük matematikçisi olan Poincaré ise anlaşılmaz bir biçimde bu tür soruları değersiz bulanlardandı.

---

[1] Bugün kabul edilen aksiyomlar sistemine ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice) adı verilir. ZFC'nin aksiyomlarından Süreklilik Hipotezi'nin doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanamaz.

13. Sayılabilir ve Sayılamaz Sonsuzluklar

$\mathbb{N}$'ye eşlenik olan bir kümeye sayılabilir sonsuz küme dendiğini söylemiştik. Sonlu ya da sayılabilir sonsuzluktaki kümelere sayılabilir denir. Bu bölümde, geçen bölümlerde yaptıklarımızı ve biraz daha fazlasını, daha kuramsal ve daha genel olarak yapacağız.

Eğer A sayılabilir sonsuzlukta bir kümeyse, A'nın her elemanına bir ve sadece bir tek doğal sayı eşlendiğinden ve her doğal sayı A'nın bir elemanıyla eşlendiğinden, n doğal sayısıyla eşlenen A'nın elemanını a_n ile gösterirsek, A'nın elemanlarını,

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ \ldots$$

diye teker teker sıralayabiliriz. Burada, $i \neq j$ ise $a_i \neq a_j$ olur, yani A'nın her elemanını bir ve sadece bir tek defa sayıyoruz. i'yi a_i'nin numarası olarak da düşünebiliriz.

Demek ki bir kümenin sayılabilir sonsuzlukta olması, kümenin elemanlarını doğal sayılarla (her doğal sayıyı ve her birini sadece bir kez kullanarak) teker teker sayabilmek demektir.

İlk teoremimiz pek şaşırtıcı değil, zaten daha önce de kanıtlamıştık (Teorem 11.3). Ama bu sefer biraz daha dikkatli kanıtlayacağız.

Teorem 13.1. *$\mathbb{N}$'nin her sonsuz altkümesi sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: A, $\mathbb{N}$'nin sonsuz bir altkümesi olsun. A'nın her elemanını bir doğal sayıyla eşleyeceğiz, yani A'nın elemanlarını doğal sayılarla sayacağız. Saymaya A'nın en küçük elemanından başlayıp bir sonraki elemanıyla devam edeceğiz.

A boş olmayan bir doğal sayı kümesi olduğundan, A'nın en küçük elemanı vardır. (Bu, pek o kadar da bariz değildir. Bir kanıtı vardır. Daha akademik kitaplarımızda kanıtlayacağız.) Bu elemanı 0'la eşleyelim ve adına a_0 diyelim. Şimdi aynı şeyi $A \setminus \{a_0\}$ kümesiyle yapalım. A sonsuz olduğundan, $A \setminus \{a_0\}$ kümesi boşküme olamaz. Bu kümenin en küçük elemanına a_1 diyelim ve bu elemanı 1'le eşleyelim. Bunu böylece sürdürebiliriz. Diyelim, A'nın en küçük n elemanını bulduk ve bunlara $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}$ adını verdik ve bu elemanları

$0, 1, \ldots, n-1$ doğal sayılarıyla eşleştirdik. Bir sonraki adımda

$$A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$$

kümesinin en küçük elemanını alabiliriz, çünkü A sonlu olmadığından, bu küme boş olamaz. Bu elemana a_n diyelim. Bu yöntemle A'nın her elemanı sayılabilir mi? Elbette! Sonuç olarak A, doğal sayıların bir altkümesi; önünde sonunda A'nın her elemanı bir zaman sonra sayılacak. Böylece A'nın her elemanı bir ve sadece bir tek doğal sayıyla eşlenir. □

Demek ki asal sayılar kümesi, çift sayılar kümesi, tek sayılar kümesi, 2006 ve 2006'dan büyük doğal sayılar kümesi sayılabilir sonsuzlukta kümelerdir.

Bu teoremden, bir kümenin sayılabilir sonsuzlukta olması için kümenin elemanlarını numaralandırırken illa tüm doğal sayıları kullanmak gerekmediği çıkar. Yeter ki kümemiz sonsuz olsun ve bazı doğal sayılarla numaralandırılmış olsun, yani her elemana, bir ve sadece bir tek doğal sayı iliştirilmiş olsun. Şimdi bu sonucu resmen kanıtlayalım:

Sonuç 13.2. *Elemanları doğal sayılarla numaralanmış sonsuz bir küme sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: Sonsuz kümemize A diyelim. A'nın elemanlarının numaralarının kümesine de B diyelim. Demek ki $A \approx B$. Ama B sonsuz bir doğal sayı kümesi. Bir önceki teoreme göre $B \approx \mathbb{N}$ olmalı. Dolayısıyla $A \approx \mathbb{N}$ olur. □

Bu sonucu kullanarak ilginç bir şey kanıtlayabiliriz. $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümelerinden oluşan küme $\wp^{<\omega}(\mathbb{N})$ olarak gösterilir. Örneğin,

$$\{1, 2, 36, 65\} \in \wp^{<\omega}(\mathbb{N}),$$

ama çift doğal sayılar kümesi $2\mathbb{N}$ ya da asal sayılar kümesi, $\wp^{<\omega}(\mathbb{N})$'nin bir elemanı değildir.

Sonuç 13.3. *Doğal sayılar kümesinin sonlu altkümelerinden oluşan $\wp^{<\omega}(\mathbb{N})$ kümesi sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: Her n doğal sayısı için, p_n, $n+1$'inci asal olsun:

$$p_0 = 2,\ p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ p_3 = 7,\ p_4 = 11,\ \ldots$$

Ve $X \subseteq \mathbb{N}$ herhangi sonlu bir doğal sayı kümesi olsun. X'in elemanları

$$a(0), a(1), \ldots, a(n-1)$$

olsun. Şimdi X'e,

$$p_{a(0)} \cdots p_{a(n-1)}$$

numarasını verelim. Örneğin $\{2, 4, 7\}$'nin numarası $5 \cdot 11 \cdot 19$'dur. Boşkümenin numarası 1'dir. (Hiç tane sayının çarpımının 1 olduğu kabul edilir.) Böylece her sonlu doğal sayı kümesi bir doğal sayıyla numaralanmış (kodlanmış) olur. Sonuç 13.2'ye göre sayılabilir sonsuzlukta sonlu doğal sayı kümesi vardır. □

Bir sonraki sonucumuz, sayılabilir sonsuzluktaki kümelerin bir anlamda en küçük sonsuz kümeler olarak görülebileceğini söylüyor.

Sonuç 13.4. *Sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin sonsuz bir altkümesi de sayılabilir sonsuzluktadır. Dolayısıyla sayılamaz sonsuzlukta altkümesi olan bir küme sayılamaz sonsuzluktadır.*

Kanıt: A sayılabilir sonsuzlukta bir küme olsun. B, A'nın sonsuz bir altkümesi olsun. A'nın elemanlarını doğal sayılarla numaralandıralım. B'nin elemanlarının numaraları $\mathbb{N}$'nin sonsuz bir M altkümesini oluşturur. Demek ki M, B'nin elemanlarını numaralandıran sonsuz bir doğal sayı kümesidir. Sonuç 13.2'ye göre B sayılabilir sonsuzluktadır.

Aynı sonucu, Teorem 13.1'i kullanarak, $B \approx M \approx \mathbb{N}$ denklikleriyle de kanıtlayabilirdik. □

Şimdi, sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin sayılabilir sonsuz kalması için kümeye neler ekleyebileceğimizi görelim.

Teorem 13.5. *Sayılabilir sonsuzlukta bir kümeye sonlu bir küme eklenirse gene sayılabilir sonsuzlukta bir küme elde edilir.*

Kanıt: A sayılabilir sonsuzlukta, B de m elemanlı bir küme olsun. $A \cup B$ kümesinin sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlayacağız. Önce B'nin, daha sonra A'nın elemanlarını doğal sayılarla sayacağız. (Tersini yapmaya kalkarsanız, A tüm doğal sayıları meşgul ettiğinden B'nin elemanlarını sayacak doğal sayı kalmaz.)

B yerine $B \setminus A$ kümesini alarak, A ile B'nin ayrık kümeler olduklarını varsayabiliriz, çünkü

$$A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$$

ve $B \setminus A$, B'nin bir altkümesi olduğundan, B'den daha da sonlu bir kümedir. Şimdi, A'nın elemanlarını

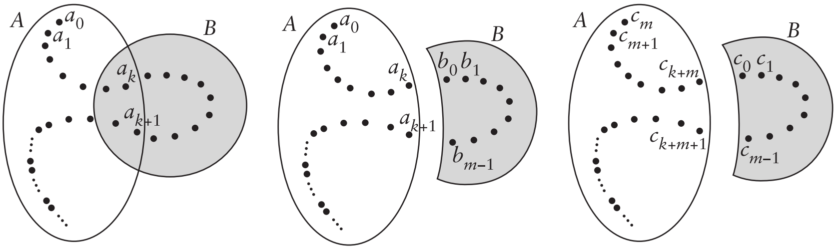
$$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

olarak sıraya dizelim. (Aşağıdaki şekilden takip edin.) B'nin elemanlarını da

$$b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$$

olarak sıralayalım. Yukarıdaki varsayıma göre hiçbir a_i bir b_j'ye eşit değil.

Şimdi $A \cup B$ kümesinin elemanlarını B'nin elemanlarından başlayarak sayacağız:



$$\begin{array}{lcl} c_0 & = & b_0, \\ c_1 & = & b_1, \\ & \dots & \\ c_{m-1} & = & b_{m-1}, \\ c_m & = & a_0, \\ c_{m+1} & = & a_1, \\ & \dots & \\ c_{m+n} & = & a_n, \\ & \dots & \end{array}$$

olsun. Böylece, $A \cup B$ kümesinin elemanlarını

$$c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_k,\ \dots$$

diye doğal sayılarla saymış olduk. □

Bu teoremden daha güçlü bir teorem kanıtlayabiliriz:

Teorem 13.6. *Sayılabilir sonsuzlukta bir kümeye sayılabilir bir küme eklenirse gene sayılabilir sonsuzlukta bir küme elde edilir. Dolayısıyla her biri sayılabilir sonsuzluktaki sonlu tane kümenin bileşimi de sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: A ve B sayılabilir sonsuzlukta iki küme olsun. $A \cup B$ kümesinin sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlayacağız. A'nın elemanlarını çift sayılarla, B'nin elemanlarını tek sayılarla sayacağız.

Önce B yerine $B \setminus A$ kümesini alabileceğimizi gösterelim. Elbette

$$A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$$

olur. Eğer $B \setminus A$ sonluysa sonuç bir önceki teoremden çıkar. Bundan böyle $B \setminus A$'nın sonsuz olduğunu varsayalım. O zaman, Sonuç 13.4'e göre $B \setminus A$ sayılabilir sonsuzluktadır ve varsayımlarımız A ve B için olduğu gibi, A ve $B \setminus A$ için de geçerlidir. Dolayısıyla B yerine $B \setminus A$ alıp A ve B'nin ayrık kümeler olduklarını varsayabiliriz.

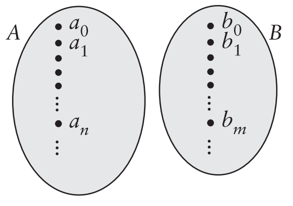
A'nın elemanlarını

$$a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

olarak, B'nin elemanlarını da

$$b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots$$

olarak sıraya dizelim. A ve B ayrık olduklarından, hiçbir a_i bir b_j'ye eşit değildir.



Şimdi $A \cup B$ kümesinin elemanlarını sayalım:

$$\begin{array}{lcl} c_0 & = & a_0, \\ c_1 & = & b_0, \\ c_2 & = & a_1, \\ c_3 & = & b_1, \\ c_3 & = & a_2, \\ c_4 & = & b_2, \\ & \ldots & \\ c_{2n} & = & a_n, \\ c_{2n+1} & = & b_n, \\ & \ldots & \end{array}$$

Böylece, $A \cup B$ kümesinin elemanlarını $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ diye doğal sayılarla saymış olduk. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Aşağıdaki sonucu ve hatta âlâlarını geçen bölümde kanıtlamıştık.

Sonuç 13.7. *Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$ ve $-\mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ olduğundan, bu, Teorem 13.6'nın bir sonucudur. □

Sonuç 13.8. *A kümesi sayılamaz sonsuzluktaysa, B kümesi sayılabilir sonsuzluktaysa $A \setminus B$ kümesi de sayılamaz sonsuzluktadır.*

Kanıt: B sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, Sonuç 13.4'e göre, $A \cap B$ kümesi sayılabilir bir kümedir. Eğer $A \setminus B$ kümesi de sayılabilir olsaydı, o zaman, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ eşitliğinden dolayı, Teorem 13.6'ya göre A da sayılabilir olurdu. Çelişki. □

Teorem 13.9. *Sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin bir fonksiyon altında imgesi sayılabilirdir (yani ya sonludur ya da sayılabilir sonsuzluktadır). Dolayısıyla $\mathbb{N}$'den X kümesine örten bir fonksiyon varsa X sayılabilirdir.*

Kanıt: Sayılabilir sonsuzluktaki kümemizi elbette $\mathbb{N}$ alabiliriz.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

bir fonksiyon olsun. X yerine $f(X)$ alarak f'nin örten olduğunu varsayabiliriz. X'ten $\mathbb{N}$'ye giden bir eşleme tanımlayacağız. Her $x \in X$ için, $f^{-1}(x)$, $\mathbb{N}$'nin boş olmayan bir altkümesidir, dolayısıyla en küçük bir elemanı vardır. Bu elemana

$$\min f^{-1}(x)$$

diyelim. Şimdi, $g : X \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu,

$$g(x) = \min f^{-1}(x)$$

formülüyle tanımlansın, yani $g(x)$, $f^{-1}(x)$ kümesinin en küçük elemanı olsun. g'nin birebir olduğunu kanıtlamak zor değil. Demek ki $X \approx g(X)$. Ama $g(X)$, $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi olduğundan, Teorem 13.1'e göre ya sonludur ya da sayılamaz sonsuzlukta, dolayısıyla X ya sonludur ya da sayılamaz sonsuzluktadır. □

Teorem 13.6'dan da güçlüsü var:

Teorem 13.10. *X, elemanları sayılabilir sonsuzlukta kümeler olan sayılabilir sonsuzlukta bir küme olsun. O zaman $\bigcup X$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır.*

Bu teorem Seçim Aksiyomu olmadan kanıtlanamaz. Teoremin yanlış ama oldukça ikna edici ve 19'uncu yüzyılda yaşasaydık matematiksel bir kanıt olarak kabul edilebilecek bir kanıtını verelim.

Teorem 13.10'un Yanlış Kanıtı: X sayılabilir sonsuzlukta olduğundan $\mathbb{N}$'den X'e giden bir f eşlemesi vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için, $f(i)$ sayılabilir bir küme olduğundan, $\mathbb{N}$'den $f(i)$ kümesine giden bir g_i eşlemesi vardır. Demek ki,

$$X = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

ve

$$\begin{aligned} f(0) &= \{g_0(0), g_0(1), g_0(2), g_0(3), \ldots\}, \\ f(1) &= \{g_1(0), g_1(1), g_1(2), g_1(3), \ldots\}, \\ f(2) &= \{g_2(0), g_2(1), g_2(2), g_2(3), \ldots\}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Şimdi $\mathbb{N}$'den $\bigcup X$ kümesine giden örten bir h fonksiyonu tanımlayacağız. $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $\ldots$, $p_k = k+1$'inci asal olsun.

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup X$$

fonksiyonu şu kuralla tanımlansın:

$$h(x) = \begin{cases} g_k(n) & \text{eğer } x = p_k^n \text{ biçimindeyse} \\ g_0(0) & \text{yoksa} \end{cases}$$

h örtendir. Teorem 13.9'a göre $\bigcup X$ sayılabilir sonsuzluktadır. Yanlış kanıtımız tamamlanmıştır.

Teorem 13.10'un bir başka (yanlış) kanıtı daha: Sayılabilir sonsuzlukta olduğunu bildiğimiz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\cup X$ kümesine giden ve

$$h(k, n) = g_k(n)$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon örtendir. Dolayısıyla, Teorem 13.9'a göre $\bigcup X$ kümesi sayılabilir sonsuzluktadır. □

Teorem 13.10'un kanıtında sorun, her i doğal sayısı için $\mathbb{N}$'den $f(i)$ kümesine giden bir g_i eşlemesi seçmede. Böyle bir seçim yapmanın bedava olmadığının anlaşılması, kanımızca, uygarlığımızın ve insan bilincinin en ince, en derin, en yüce ve en felsefi keşiflerindendir. Bu inceliklere [N3]'te değineceğiz. Öte yandan, her i doğal sayısı için, "belli bir kurala uyarak", $\mathbb{N}$'den $f(i)$ kümesine giden bir g_i eşlemesi seçebilirsek o zaman yukarıdaki kanıt en titiz matematikçinin nezdinde bile geçerli olur. Bunu Teorem 13.11'in kanıtında yapacağız.

Bu aşamada, elemanlarının her biri 2 elemanlı bir küme olan sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin bileşiminin de sayılabilir sonsuzlukta olduğunu tam matematiksel olarak (yukarıda yaptığımız gibi hileye başvurmadan) kanıtlayamayız. Tabii bazı özel durumlarda bu kanıtlanabilir ama bu sonucu en genel haliyle kanıtlamak için Seçim Aksiyomu'na (bkz. sayfa 105) ihtiyaç vardır.

Aslında sezgisel kümeler kuramıyla aksiyomatik kümeler kuramı arasındaki ayrım tam da burada yatar. Sezgisel kümeler kuramında, Teorem 13.10'un verdiğimiz kanıtı yeterince ikna edici bulunduğu için kabul edilir ama aksiyomatik kümeler kuramı daha titizdir (ve haklı olarak daha titizdir, yoksa hiç beklenmedik yerlerden çelişkiler çıkabilir).

Öte yandan şunu kanıtlayabiliriz:

Teorem 13.11. *X, her elemanı $\mathbb{R}$'nin sonlu bir altkümesi olan bir küme olsun. Eğer X sayılabilir sonsuzluktaysa o zaman $\cup X$ kümesi sayılabilirdir.*

Kanıt: Boşkümenin X'in bir elemanı olmadığını varsayabiliriz. X sayılabilir sonsuzlukta olduğundan $\mathbb{N}$'den X'e giden bir f eşlemesi vardır. Demek ki her n doğal sayısı için, $f(n)$, $\mathbb{R}$'nin sonlu bir altkümesi. $f(n)$'nin elemanlarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım. Bu elemanlara

$$f(n, 0) < \ldots < f(n, k_n - 1)$$

diyelim. Demek ki,

$$f(n) = \{f(n,0) < \ldots < f(n, k_n - 1)\}$$

Buradaki k_n, $f(n)$'nin eleman sayısıdır. Şimdi $g, \mathbb{N}\times\mathbb{N}$'den $\cup X$ kümesine giden ve

$$g(n,i) = \begin{cases} f(n,i) & \text{eğer } i \le k_n \text{ ise} \\ f(n,0) & \text{eğer } i > k_n \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanan fonksiyon olsun. g örten bir fonksiyondur. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesi sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, Teorem 13.9'a göre $\bigcup X$ kümesi de sayılabilirdir. □

Teorem 13.12. *Eğer A ve B sayılabilir sonsuzluktaysa $A\times B$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: $A\times B$ kümesi, $b \in B$ için, sayılabilir sonsuzluktaki $A\times\{b\}$ kümelerinin bileşimidir. Teorem 13.10'dan $A\times B$'nin sayılabilir sonsuzlukta olduğu çıkar. Ama Teorem 13.10'un kanıtı yanlış olduğundan bu teoremi kullanmak caiz değil. Teorem 13.10'u kullanmadan kanıtlayalım. $A\times B$ yerine $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlayabiliriz. Ama bunu Teorem 11.1'den biliyoruz. □

Sonuç 13.13. *Negatif olmayan kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}^{\ge 0}$ ve kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzluktadırlar.*

Kanıt: Teorem 13.12'den dolayı $\mathbb{N}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ kümesi sayılabilir sonsuzluktadır. Şimdi

$$f : \mathbb{N}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\}) \longrightarrow \mathbb{Q}^{\ge 0}$$

fonksiyonu $f(a,b) = a/b$ kuralıyla tanımlansın. f örtendir. Teorem 13.9 sayesinde $\mathbb{Q}^{\ge 0}$ sayılabilir sonsuzluktadır. Demek ki $-\mathbb{Q}^{\ge 0}$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{\ge 0} \cup (-\mathbb{Q}^{\ge 0})$ olduğundan, Teorem 13.6 sayesinde $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzluktadır. □

Eğer A bir kümeyse, elemanları A'nın sonlu altkümeleri olan küme $\wp^{<\omega}(A)$ olarak gösterilir.

Sonuç 13.14. *Sayılabilir sonsuzluktaki bir kümenin sonlu altkümelerinden oluşan küme sayılabilir sonsuzluktadır. Yani eğer A kümesi sayılabilir sonsuzluktaysa, $\wp^{<\omega}(A)$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: A sayılabilir sonsuzlukta herhangi bir küme olsun. A ile $\mathbb{N}$ arasında bir eşleme vardır. Bu eşleme, $\wp^{<\omega}(A)$ ile $\wp^{<\omega}(\mathbb{N})$ arasında bir eşleme verir. Nitekim, eğer $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ bir eşlemeyse,

$$f(\{n_1, \ldots, n_k\}) = \{f(n_1), \ldots, f(n_k)\}$$

kuralıyla tanımlanmış $f : \wp^{<\omega}(\mathbb{N}) \longrightarrow \wp^{<\omega}(A)$ fonksiyonu bir eşlemedir. Sonuç, Sonuç 13.3'ten ve Teorem 13.9'dan çıkar. □

Demek ki X sayılabilir sonsuzluktaysa $X \approx \wp^{<\omega}(X)$. Aynı eşleniklik X herhangi sonsuz bir kümeyse de geçerlidir. Bunu da [N3]'te kanıtlayacağız.

Alıştırmalar

13.1. Eğer X sayılabilir sonsuzluktaysa $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ kümesinin de sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlayın. Burada X^n, $X \times \ldots \times X$ (n defa) anlamına gelmektedir.

13.2. X sayılabilir sonsuzlukta bir küme olsun. Belli bir sayıda sonra hep sabit değeri alan $\mathbb{N}$'den X'e giden fonksiyonlar kümesinin sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlayın.

İmkânsız Görünen Bir Soru

Soru: *X sayılabilir sonsuzlukta bir küme olsun. Öyle sayılamaz bir*

$$U \subseteq \wp(X)$$

kümesi bulun ki, her A, $B \in U$ için ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$ olsun.

Yanıt: X'in $\mathbb{Q}$ olduğunu varsayabiliriz. Her $r \in \mathbb{R}$ için,

$$A_r = (-\infty, r) \cap \mathbb{Q}$$

ve

$$U = \{A_r : r \in \mathbb{R}\}$$

tanımını yapalım. O zaman $r < s$ için $A_r \subset A_s$ olur. Dolayısıyla,

$$U = \{A_r : r \in \mathbb{R}^{>0}\}$$

kümesi işimizi görür.

14. Uygulamalar*

Bu bölümde daha önce yaptıklarımızın bazı uygulamalarını vereceğiz. Kimi okur, sözkonusu uygulamaları bu aşamada anlamayabilir. Pek o kadar önemli değil. Şöyle bir okumakla yetinebilir.

14.1 Biraz Cebir

Sonuç 14.1. *Katsayıları $\mathbb{Q}$'da ya da $\mathbb{Z}$'de olan polinom kümeleri, yani $\mathbb{Q}[X]$ ve $\mathbb{Z}[X]$ sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: Sonucu $\mathbb{Q}$ için kanıtlarsak, Teorem 11.3'ten ya da Teorem 13.1'den sonucun $\mathbb{Z}$ için de geçerli olduğu çıkar. Bir $p \in \mathbb{Q}[X]$ polinomu, $p_i \in \mathbb{Q}$ sayıları için,

$$p_0 + p_1X + p_2X^2 + \cdots + p_nX^n$$

biçiminde yazılan sonlu bir ifadedir. Bu polinomu, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$ kümesinin

$$f(p) = \{(p_i, i) : p_i \neq 0\}$$

altkümesiyle kodlayabiliriz. f, $\mathbb{Q}[X]$ ile $\wp^{<\omega}((\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N})$ kümesi arasında bir eşlemedir. Sonuç 13.13 ve 13.4'e göre, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sayılabilir sonsuzluktadır. Teorem 13.12'ye göre $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$ sayılabilir sonsuzluktadır. Sonuç 13.14'e göre, $\wp^{<\omega}((\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N})$kümesi sayılabilir sonsuzluktadır. Demek ki $\mathbb{Q}[X]$ de sayılabilir sonsuzluktadır. □

Eğer bir $r \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı, katsayıları $\mathbb{Q}$ kümesinde olan bir $p(X) \neq 0$ polinomunun köküyse, yani hepsi birden 0 olmayan sonlu tane

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$$

kesirli sayısı için,

$$p_0 + p_1r + p_2r^2 + \cdots + p_nr^n = 0$$

eşitliği sağlanabiliyorsa, r'ye cebirsel sayı denir. Her kesirli sayı cebirseldir; nitekim, eğer $q \in \mathbb{Q}$ ise, q, $X - q \in \mathbb{Q}[X]$ polinomunun köküdür. $\sqrt{2}$ de cebirseldir, çünkü $\sqrt{2}$, $X^2 - 2$ polinomunun köküdür. Öte yandan π ve e sabitleri cebirsel değildirler. Cebirsel sayıların toplamı ve çarpımı da cebirseldir. Ama bu sonuçları bu kitapta kanıtlayamayız, zaten bu sonuçlara ihtiyacımız olmayacak. Okur gene de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}, 2^{1/3}+\sqrt{2}$ gibi sayıların cebirsel olduklarını alıştırma olarak kanıtlamak isteyebilir.

Sonuç 14.2 (Cantor)**.** *Sayılabilir sonsuzlukta gerçel cebirsel sayı vardır.*

Kanıt: Her $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ için,

$$A_f = \{a \in \mathbb{R} : f(a) = 0\}$$

olsun. Sonuç 14.1'den dolayı $\mathbb{Q}[X]$ sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, Teorem 13.9'a göre, $\{A_f : f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}\}$ kümesi sayılabilir sonsuzluktadır. Ayrıca her A_f'nin eleman sayısı sonludur, en fazla f'nin derecesi kadar elemanı vardır (bkz. herhangi bir cebir kitabı). Cebirsel sayılar kümesi bu A_f'lerin bileşimidir elbet. Sonuç, Teorem 13.11'den çıkar. □

Cebirsel olmayan sayılara ***aşkın*** ya da ***transandantal*** denir.

Sonuç 14.3 (Cantor)**.** *Aşkın sayılar sayılamaz sonsuzluktadır. Dolayısıyla en az bir aşkın sayı vardır.*

Kanıt: $\mathbb{R}$, cebirsel sayılar kümesiyle aşkın sayılar kümesinin bileşimidir. Sonuç 14.2'ye göre cebirsel sayılar kümesi sayılabilir sonsuzluktadır. Aşkın sayılar kümesi sayılabilir olsaydı, o zaman Teorem 13.6'ya göre, $\mathbb{R}$ de sayılabilir sonsuzlukta olurdu ki, bu da Teorem 12.10'la çelişirdi. □

Biraz daha derin bir matematikle,

$$0{,}1001000100001000001000000 1\ldots$$

sayısının aşkın sayı olduğu kanutlanabilir. Bunu Liouville adında ünlü bir matematikçi kanıtlamıştır.

Bir sonraki sonucu açıklamadan önce, $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ (kartezyen çarpım) ve $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ (kısıtlı kartezyen ya da direkt çarpım) kümelerini tanımlayalım. Birincisini Altbölüm 7.5'te tanımlamıştık.

$\mathbb{N}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden her f fonksiyonunu,

$$(f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots)$$

olarak gösterebiliriz. Bu gösterimle verilen bir fonksiyona fonksiyon yerine ***dizi*** denir (bkz. Altbölüm 4.12), çünkü gerçekten bir "dizi" sözkonusu. Örneğin,

$$(0,\ 1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ \ldots)$$

bir dizidir, bu dizi aslında $f(n) = n/(n+1)$ kuralıyla verilmiş fonksiyondur. π sayısından esinlenerek yarattığımız

$$(3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}141,\ 3{,}1415,\ 3{,}14159,\ \ldots)$$

dizisi (yani fonksiyonu) giderek daha fazla π'ye yaklaşır.

$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesi, terimleri kesirli sayı olan diziler kümesi olarak tanımlanır. Demek ki $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesi aslında $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ kümesidir, yani $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden fonksiyonlar kümesidir. "Dizi" ve "fonksiyon" sözcükleri psikolojik olarak değişik nesneleri çağrıştırdığından bu ayrımı yapma gereksinimi duyuyoruz, yoksa $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesiyle $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ kümesi arasında matematiksel olarak hiçbir ayrım yoktur.

Bir dizi, genellikle,

$$(f(0),\, f(1),\, f(2),\, f(3),\, \ldots)$$

yerine

$$(f_0,\, f_1,\, f_2,\, f_3,\, \ldots)$$

olarak gösterilir. Bu son yazılım da, $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olarak ya da daha kısaca $(f_i)_i$ olarak daha tıkız bir biçimde yazılır. Örneğin,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_n$$

dizisi, yukarıda örnek olarak verdiğimiz

$$\left(0,\, \frac{1}{2},\, \frac{2}{3},\, \frac{3}{4},\, \frac{4}{5},\, \ldots\right)$$

dizisidir. Bu dizi de aslında

$$f(n) = \frac{n}{n+1}$$

kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonudur.

Bir 01-dizisi de aslında $\mathbb{N}$'den $\{0, 1\}$ kümesine giden bir fonksiyondur, dolayısıyla 01-dizilerinden oluşan küme $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ kümesinden başka bir şey değildir. Bazı kitaplarda bu küme $2^{\mathbb{N}}$ olarak yazılır.

$\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesi ise, sadece sonlu tane 0'a eşit olmayan terimi olan kesirli sayılar dizilerinin kümesidir. Yukarıda verdiğimiz dizi örneklerinin hiçbiri $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesinde değiller. Öte yandan,

$$\left(0,\, \frac{1}{2},\, \frac{2}{3},\, 0,\, \frac{4}{5},\, 0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots\right)$$

dizisi $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesindedir. Yani aslında $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesi, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{Q}$'ya giden ve belli bir sayıdan büyük sayılarda hep 0 değeri alan fonksiyonlar kümesidir.

$\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ kümesi de aynen $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesi gibi tanımlanır: 0'dan değişik sonlu tane terimi olan tamsayı dizileri kümesidir.

Sonuç 14.4. *$\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ ve $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ kümeleri sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: $(a_i)_i \in \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ olsun. Eğer $i > n$ için $a_i = 0$ ise, bu diziden,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

polinomunu elde ederiz. Bu kural bize, $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}[X]$ arasında bir eşleme verir. Sonuç 14.1'e göre, $\mathbb{Q}[X]$ kümesi sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır. $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$'nin sayılabilir sonsuzlukta olduğu bundan ve Sonuç 13.4'ten çıkar. □

Sonuç 14.5. *$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ ve $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ sayılamaz sonsuzluktadırlar.*

Kanıt: Teorem 12.10'a göre, 01-dizileri kümesi $\mathcal{D}$ sayılamaz sonsuzlukta olduğundan, Sonuç 14.4'e göre $\mathcal{D}$'nin altkümesi olduğu her küme sayılamaz sonsuzluktadır. □

14.2 Biraz Analiz

Teorem 14.6. *Gerçel sayılar kümesinin, uzunluklarının toplamı* 1 *olan ve bileşimleri her kesirli sayıyı içeren açık aralıkları vardır.*

Kanıt: Kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$'nün sayılabilir sonsuzlukta olduğunu biliyoruz. Demek ki kesirli sayıları

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$

diye numaralandırabiliriz. Her n doğal sayısı için, uzunluğu $1/2^{n+1}$ olan

$$(q_n - 1/2^{n+2}, q_n + 1/2^{n+2})$$

açık aralığını alalım. Bu aralıklar tüm kesirli sayıları içerirler elbet ve uzunluklarının toplamı $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1$'dir. □

Aynı sonuç, kesirli sayılar yerine cebirsel sayılar için de doğrudur elbet. Ayrıca aralıkları daha da kısaltarak aralıkların toplam uzunluğunu (0'dan büyük olmak koşuluyla elbet) dilediğimiz kadar küçültebiliriz.

Soru. Kesirli bir sayı olmayan π'yi bu aralıkların dışında tutabilir misiniz?

14.3 Biraz Bilgisayar Bilimi

Şimdi de bilgisayarcıları ilgilendirecek birkaç sonuç verelim.

Bir ***alfabe***, herhangi bir kümedir. Alfabenin elemanlarına ***harf*** denir. Örneğin alfabe $\{a, b\}$ ise, "baba", bu alfabenin harfleriyle yazılmış 4 uzunluğunda bir sözcüktür. "baaabbbaabba" ise 12 uzunluğunda bir ***sözcük***tür. Matematiksel olarak bir sözcük, terimleri alfabenin harflerinden oluşan sonlu bir dizidir. Sözcüklere bir de ayrıca, alfabe ne olursa olsun, 0 uzunluğunda olan (yani hiç harfle yazılan) $\langle\,\rangle$ sözcüğü eklenir. $\langle\,\rangle$ sözcüğüne ***boşsözcük*** adı verilir.

Sonuç 14.7. *Sayılabilir sonsuzlukta ya da sonlu ama boşküme olmayan bir alfabeyle yazılan sonlu uzunluktaki sözcük sayısı sayılabilir sonsuzluktadır.*

Kanıt: Gerekirse alfabe değiştirerek, alfabenin $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ kümesinin bir altkümesi olduğunu varsayabiliriz. Sözcüğün sonuna sonsuz tane 0 ekleyerek, her sözcüğü

$$\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

kümesinin bir elemanı olarak görebiliriz. Sonuç 14.5'e göre $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ kümesi sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, Sonuç 13.4'e göre, sonlu uzunluktaki sözcük sayısı da sayılabilir sonsuzluktadır. □

Sonuç 14.8. *Sayılabilir sonsuzlukta bilgisayar programı vardır.*

Kanıt: Bir bilgisayar programı sonlu bir alfabeyle (örneğin klavyenin tuşlarıyla) yazılmak zorundadır. Ayrıca program sonlu uzunlukta olmalıdır. Dolayısıyla her program sonlu bir alfabeyle yazılmış sonlu uzunlukta bir sözcük olarak görülebilir. □

A, bir doğal sayılar kümesi olsun. Eğer A'nın karakteristik fonksiyonu, yani

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ ise} \\ 0 & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

kuralıyla tanımlanan $f_A : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonunun değerleri bir bilgisayar programı tarafından hesaplanabiliyorsa, o zaman A'ya ***hesaplanabilir küme*** (İngilizcesi *recursive*) diyelim, yoksa ***hesaplanamaz*** diyelim. Sonlu kümelerin hepsi hesaplanabilen kümelerdir. Somut bir hesaplanamaz küme bulmak pek kolay değildir ama çok vardır!

Sonuç 14.9. *Hesaplanamaz bir küme vardır, hatta sayılamaz sonsuzlukta hesaplanamaz küme vardır.*

Kanıt: Doğal sayıların altküme sayısı sayılamaz sonsuzluktadır. Öte yandan Sonuç 14.7'ye göre hesaplanabilir altküme sayısı ancak sayılabilir sonsuzlukta olabilir. Demek ki hesaplanamaz altküme sayısı sayılamaz sonsuzluktadır. □

14.4 Biraz Mantık

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin,

$$\{x \in \mathbb{N} : \forall t\, \exists u\, \forall y\, \exists z\, (x^3t^2 + yxztu - zu^2 = 8)\}$$

gibi bir formülle ifade edilebilen altkümelerine ***tanımlanabilir altküme*** denir. Örnekteki

$$\forall t\, \exists u\, \forall y\, \exists z\, (x^3t^2 + yxztu - zu^2 = 8)$$

koşulunda, t, u, y, z elemanlarının da $\mathbb{N}$'de oldukları (açıkça söylenmeden) varsayılır. Formüllerde,

$$\forall,\ \exists,\ \wedge,\ \vee,\ \urcorner,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (,\ ),\ =,\ \neq,\ +,\ -,\ \times,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x,\ y,\ z,\ t,\ u,\ v,\ \ldots$$

simgeleri kullanılabilir[1] ve her formül sonlu uzunlukta olmalıdır.

Tanımlanabilir kümeleri bir formülle tanımlanabilen kümeler olarak algılayabiliriz. Teorem 14.6'ya göre formül sayısı sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, şu sonucu elde ederiz:

Sonuç 14.10. *$\mathbb{N}$'nin tanımlanabilir altküme sayısı da sayılabilir sonsuzluktadır.* □

Sonuç 14.11. *$\mathbb{N}$'nin tanımlanamaz bir altkümesi vardır, hatta sayılamaz sonsuzlukta tanımlanamaz altkümesi vardır.* □

Eğer bir

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

tamsayı dizisi, bir k için, ilk k eleman tarafından tümevarımsal olarak bir formülle belirleniyorsa, diziye tümevarımsal diyelim. Burada "bir formülle belirlenmekten" ne kastettiğimizi de söylememiz lazım. Tanımı ne olursa olsun, bir formülde

$$+,\ -,\ \times,\ \div,\ \surd,\ (,\ ),\ 0,\ 1$$

gibi sayılabilir sayıda simge kullanabilelim ve her formülün uzunluğu sonlu olsun. Örneğin,

$$a_{n+2} = 2a_n + 3a_{n+1}$$

tümevarımsal bir dizidir, çünkü bu formül, dizinin ilk iki terimi verildiğinde dizinin diğer terimlerini belirler: Örneğin

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

ise, dizi,

$$0,\ 1,\ 3,\ 11,\ 39,\ 159,\ \ldots$$

olarak devam eder.

Sonuç 14.12. *Tümevarımsal olmayan bir dizi vardır.*

Kanıt: Dizi sayısı sayılamaz sonsuzlukta, ancak formül sayısı ve belirlenmesi gereken ilk k terim sayılabilir sonsuzluktadır. Dolayısıyla tümevarımsal olmayan bir dizi vardır. □

[1] x, y, z değişken simgelerinden sayılabilir sonsuzlukta vardır, bunlar yerine x, $x|$, $x||$, $x|||$ vs. kullanılarak sonsuz sayıda değişken yerine x ve $|$ simgeleriyle yetinebiliriz.

Bir başka ilginç sonuç: Dilimiz, sonlu sayıda ya da diyelim en fazla sayılabilir sonsuzlukta harf ya da simgeden oluşur. Ayrıca tanımlarımız sonlu uzunluktadır. Demek ki Sonuç 14.7'ye göre en fazla sayılabilir sonsuzlukta tanım yapabiliriz. Örneğin $\sin(\pi/\sqrt{2})^3$ bir sayıyı tanımlar (ve adlandırır.) Demek ki adı konmamış ve tanımlanmamış en az bir gerçel sayı vardır. Her saniye sonlu sayıda tanım yapabileceğimizi varsayarsak, hiçbir zaman adı konmayacak ve hiçbir zaman tanımlanmayacak en az bir gerçel sayı vardır.

14.5 Bir Parça da Topoloji

Önsav 14.13. *Eğer $(A_i)_{i\in I}, \mathbb{R}$'nin bir açık aralıklar ailesiyse,*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j$$

eşitliğini sağlayan sayılabilir bir $J \subseteq I$ göstergeç altkümesi vardır.

Kanıt: $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ olsun. $A \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ olduğundan, $A \cap \mathbb{Q}$ sayılabilir bir kümedir. Bu kümeden her $q \in A \cap \mathbb{Q}$ için, $q \in A_{i(q)}$ ilişkisini sağlayan bir $i(q) \in I$ seçelim.

$$J = \{i(q) : q \in A \cap \mathbb{Q}\}$$

olsun. $A \cap \mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan J de sayılabilir bir kümedir.

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j$$

eşitliğini kanıtlamayı okura bırakıyoruz. □

Biraz daha emekle daha iyisini yapabiliriz:

Teorem 14.14. *Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'de herhangi bir açık aralıklar kümesinin bileşimi, sayılabilir sayıda ayrık açık aralığın bileşimine eşittir.*

Kanıt: Bileşimi alınan açık aralıklar kümesi $\mathcal{I}$ olsun. Bileşime de U diyelim: $U = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$.

U'nun a ve b elemanları için, $[a,b] \cup [b,a]$ kümesi U'nun altkümesiyse, a ve b elemanlarına denk diyelim ve bunu $a \equiv b$ yazarak gösterelim. $[a,b] \cup [b,a]$ kümesinin ya $[a,b]$ ya da $[b,a]$ aralığına eşit olduğuna dikkatinizi çekerim.

Bu, U üzerine bir denklik ilişkisidir, yani U'nun her a, b, c elemanı için,

$$a \equiv a,$$
$$a \equiv b \text{ ise } b \equiv a,$$
$$a \equiv b \text{ ve } b \equiv c \text{ ise } a \equiv c$$

önermeleri doğrudur. Bunlardan ilk ikisi çok bariz, sonuncusunun kanıtı da kolaydır. Şimdi, her $a \in U$ için,

$$I_a = \{b \in U : a \equiv b\}$$

kümesinin bir açık aralık olduğunu kanıtlayacağız. I_a kümesinin a'nın denklik sınıfı olduğunu, dolayısıyla bu kümelerin herhangi ikisinin birbirinden ayrık ya da birbirine eşit olduklarını biliyoruz.

Önce bu kümenin bir aralık olduğunu kanıtlayalım, yani her b, $c \in I_a$ için eğer $b < d < c$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa, d'nin de I_a'da olduğunu kanıtlayalım (bkz. sayfa 17'de ($\star$) ile işaretlenen cümle.) b ve c sayıları I_a'da olduklarından,

$$a \equiv b \text{ ve } a \equiv c.$$

Demek ki

$$b \equiv a \text{ ve } a \equiv c.$$

Dolayısıyla

$$b \equiv c \text{ ve } [b, c] \subseteq U.$$

Bundan

$$[d, c] \subseteq U$$

çıkar, çünkü d sayısı b ile c arasındadır; yani

$$d \equiv c.$$

Ama $a \equiv c$ denkliğini biliyoruz. Bu ikisinden,

$$a \equiv d$$

denkliği bulunur. Demek ki $d \in I_a$ olur ve I_a bir aralıktır.

Şimdi I_a kümesinin bir açık aralık olduğunu kanıtlayalım. Diyelim,

$$I_a = [b, c)$$

biçiminde bir aralık ve $b < c$ eşitsizliği geçerli.

$$b \in I_a \subseteq U$$

olduğundan, bir $I \in \mathcal{I}$ aralığı için $b \in I$'dır. I bir açık aralık olduğundan, I'da b'den küçük bir d elemanı vardır. Demek ki

$$[d, b] \subseteq I \subseteq U$$

ve dolayısıyla,

$$[d, (b + c)/2] = [d, b] \cup [b, (b + c)/2] \subseteq [d, b] \cup [b, c) \subseteq U.$$

Demek ki

$$d \equiv b \equiv a,$$

dolayısıyla

$$d \equiv a,$$

yani

$$d \in I_a = [b, c).$$

Ama

$$d < b,$$

bir çelişki. Demek ki I_a, açık bir aralıkmış.

$a \in I_a$ olduğundan, U kümesi, $a \in U$ göstergeçli I_a açık aralıklarının bileşimidir. Geriye I_a açık aralıklarının sayılabilir olduğunu kanıtlamak kaldı. Her I_a açık aralığı kesirli bir sayı içerir, çünkü kesirli sayılar $\mathbb{R}$'de yoğundurlar, yani $\mathbb{R}$'nin boşküme olmayan her açık aralığında en az bir kesirli sayı bulunur (Alıştırma 3.28). Eğer $q \in I_a$ bir kesirli sayıysa, o zaman $q \in I_a \cap I_q$ ve dolayısıyla $I_a \cap I_q \neq \emptyset$ ve $I_a = I_q$ olur. Demek ki U kümesi, $q \in \mathbb{Q} \cap U$ kesirli sayıları için I_q açık aralıklarının bileşimidir. $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, $\mathbb{Q} \cap U$ kümesi de sayılabilir sonsuzluktadır. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Ama dikkat, bir açık aralıklar kümesinin bileşiminin tümleyeni (yani modern söylemle kapalı bir küme), sayılabilir sonsuzlukta kapalı aralığın bileşimi olmayabilir. Örneğin aşağıdaki alıştırmadaki Cantor kümesi böyle bir kümedir.

Örnek 14.1. [Cantor Kümesi]. $C_0 = [0, 1]$ olsun. $n \geq 1$ için şu tanımı yapalım:

$$C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right)$$

1. $C_1 = [0, 1/3] \sqcup [2/3, 1]$ ve

$$C_2 = [0, 1/9] \sqcup [2/9, 1/3] \sqcup [2/3, 7/9] \sqcup [8/9, 1]$$

eşitliklerini gösterin. C_3 ve C_4'ü bulun.
2. $C_{n+1} \subseteq C_n$ ilişkisini gösterin.
3. C_n'nin, her biri $1/3^n$ uzunlukta olan 2^n tane ayrık kapalı aralığın bileşimi olduğunu kanıtlayın. Dolayısıyla C_n'nin "uzunluğu" $(2/3)^n$'dir.

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

olsun. C'ye ***Cantor kümesi*** adı verilir.
4*. C'nin sayılamaz sonsuzlukta olduğunu kanıtlayın.
5*. Açık bir aralığın C'nin altkümesi olamayacağını kanıtlayın.

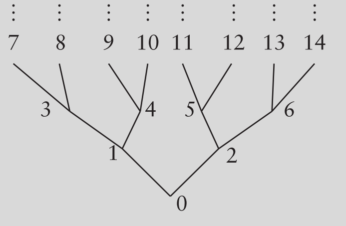
İmkânsız Gibi Görünen Bir Soruya Şaşırtıcı Bir Yanıt

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ sayılabilir sonsuzluktadır ama $\mathbb{N}$'nin altkümelerinin sayısı sayılamaz sonsuzluktadır. Bunu biliyoruz.

Soru: $\wp(\mathbb{N}), \mathbb{N}$*'nin altkümeleri kümesi olsun.* $\wp(\mathbb{N})$*'nin öyle sayılamaz sonsuzlukta altkümesi bulunabilir mi ki, bunlardan herhangi ikisi değişikse kesişimleri sonlu olsun?*

Eğer altkümelerin kesişimlerinin sonlu değil de boşküme olmasını istiyorsak elbette sadece sayılabilir tane bulabiliriz.

Kesişimin en fazla belli bir n kadar elemanı olmasını istersek de en fazla sayılabilir sonsuzlukta altküme bulabiliriz. (Neden?) Dolayısıyla seçilen altkümelerin kesişimlerinde bir üstsınır olmamalı.



Sorduğumuz sorunun yanıtı olumludur ve şaşırtıcı kolaylıkta bir çözümü vardır. Tam ikili bir ağaç çizelim. Şekildeki gibi. Bu ağacın noktalarını en alttan başlayarak ve yukarıya doğru çıkarak soldan sağa numaralandıralım.

Şimdi her sonsuz dal bir altkümeyi temsil etsin. Örneğin, en soldaki dal,

$$\{0, 1, 3, 7, 15, \ldots, 2^n - 1, \ldots\}$$

altkümesini temsil eder. En sağdaki dalın elemanları en soldaki dalın elemanlarının iki katıdır.

Sol-sağ-sol-sağ-... zikzak çizen dalın temsil ettiği kümenin elemanlarını bulabilir misiniz?

Görüldüğü gibi iki dalın temsil ettiği kümelerin kesişimi, bu dalların kesişimindeki sayı ve onun altındakilerdir, yani sonludur.

Böylece bulunan altküme sayısı, sonsuz dal sayısı kadardır; sonsuz dal sayısının da sayılamaz sonsuzlukta olduğunu biliyoruz!

15. Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi

Eğer A'dan B'ye giden birebir bir fonksiyon varsa, sezgimiz, A kümesinin eleman sayısının (ki daha "bir kümenin eleman sayısı" kavramının ne demek olduğunu bilmiyoruz), B kümesinin eleman sayısından küçük ya da eşit olması gerektiğini söylüyor.

Eğer sezgimiz bunu söylüyorsa, aynı sezgimiz, A'dan B'ye ve B'den A'ya giden birebir fonksiyonlar varsa, o zaman, A ve B'nin "aynı sayıda" elemanları olduğunu da söylemeli, yani A'yla B arasında bir eşleme olmalı.

Soru: *A'dan B'ye ve B'den A'ya giden birebir fonksiyonlar varsa, A'yla B arasında bir eşleme olmalı mı?*

Bu soruyu ilk soran, modern kümeler kuramını neredeyse tek başına bulan Rusya doğumlu ünlü Alman matematikçisi Georg Cantor'dur. Soruyu sormuş ve olumlu yanıtlamış ancak kanıtında Seçim Aksiyomu'nu (bkz. sayfa 105) kullanmıştır. Oysa daha sonra Alman matematikçiler Ernst Schröder (1841-1902) ve Felix Bernstein (1878-1956) soruyu Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan yanıtlamışlardır; daha doğrusu, Bernstein, doktora tezi olarak Schröder'in yanlış kanıtını düzeltmiştir.

Teorem 15.1. *A ve B iki küme olsun. Eğer A'dan B'ye giden ve B'den A'ya giden birebir fonksiyonlar varsa, o zaman A'yla B arasında bir eşleme vardır.*

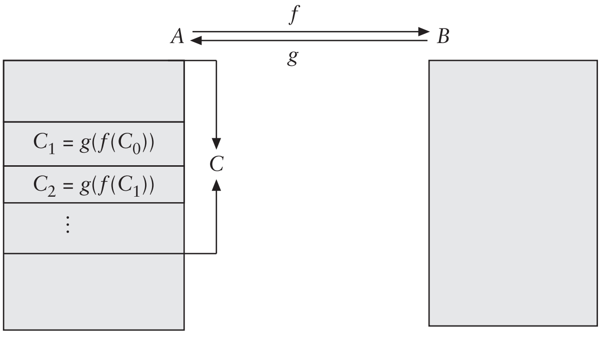
Kanıt: A'dan B'ye giden birebir fonksiyona f, B'den A'ya giden birebir fonksiyona g diyelim. A'nın C_n altkümelerini n üzerine tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$C_0 = A \setminus g(B)$$

ve her $n \geq 0$ için,

$$C_{n+1} = g(f(C_n)).$$

İşte resim:



Kolayca kanıtlanabileceği üzere C_i kümeleri ayrıktır.

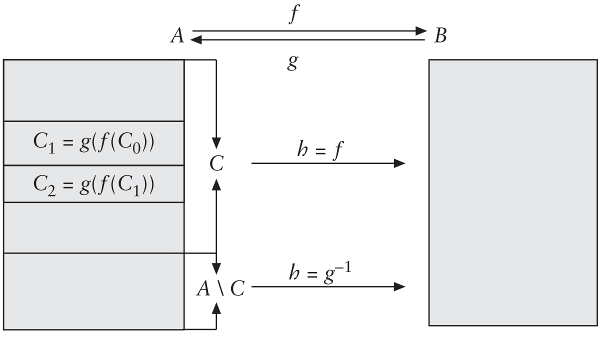
Şimdi,

$$C = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

olsun ve $h : A \longrightarrow B$ fonksiyonunu

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{eğer } a \in C \text{ ise} \\ g^{-1}(a) & \text{eğer } a \notin C \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.



Sav 1. *h iyi tanımlanmış bir fonksiyondur.*
Kanıt: Tek sorun, $a \notin C$ iken, $g^{-1}(a)$'nın olmaması ya da birden fazla elemanının olması. Eğer $a \notin C$ ise, o zaman her n doğal sayısı için, $a \notin C_n$. Demek ki, $a \notin C_0 = A \setminus g(B)$, yani $a \in g(B)$. Dolayısıyla $g(b) = a$ eşitliğini sağlayan bir $b \in B$ vardır. g birebir olduğundan, bu eşitliği sağlayan $b \in B$ biriciktir.

Sav 2. *h birebirdir.*
Kanıt: $h(a) = h(a')$ olsun. $a = a'$ eşitliğini kanıtlamalıyız. Eğer hem a hem de a' elemanları C'deyse, o zaman, h'nin tanımından dolayı,

$$f(a) = h(a) = h(a') = f(a')$$

olur ve f birebir olduğundan bundan $a = a'$ çıkar. Aynı şekilde, eğer a ve a' elemanları C'de değillerse, $a = a'$ bulunur. Şimdi $a \in C$ ve $a' \notin C$ olsun.

Bu durumda $a = a'$ olamayacağından, bir çelişki bulmalıyız. h'nin tanımından dolayı,

$$f(a) = h(a) = h(a') = g^{-1}(a')$$

olur. Demek ki $g(f(a)) = a' \notin C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Yani her n doğal sayısı için, $g(f(a)) \notin C_{n+1}$. Yani her n doğal sayısı için,

$$g(f(a)) \notin C_{n+1} = g(f(C_n)),$$

yani her $n \geq 0$ doğal sayısı için,

$$a \notin C_n,$$

yani $a \notin C$, çelişki!

Sav 3. *h örtendir, yani her $b \in B$ için $h(a) = b$ eşitliğini sağlayan bir $a \in A$ vardır.*
Kanıt: Eğer h'nin tanımına bakılacak olursa,

$$B = f(C) \cup g^{-1}(C^c)$$

eşitliğini kanıtlamalıyız. (Burada, C^c, C'nin A'da tümleyeni, yani $A \setminus C$ anlamına gelmektedir.) Bir $b \in B$ alalım. b, $g^{-1}(C^c)$ kümesinde olmasın. b'nin $f(C)$ kümesinde olduğunu göstermeliyiz.

$$b \notin g^{-1}(C^c) = g^{-1}(C)^c$$

olduğundan, $b \in g^{-1}(C)$, yani

$$g(b) \in C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Dolayısıyla bir n doğal sayısı için, $g(b) \in C_n$. Belli ki

$$g(b) \notin A \setminus g(B) = C_0.$$

Demek ki, $n > 0$. O zaman, $g(b) \in C_n = g(f(C_{n-1}))$ ve dolayısıyla

$$b \in f(C_{n-1}) \subseteq f(C).$$

Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi kanıtlanmıştır. □

Eğer X kümesinden Y kümesine giden birebir bir fonksiyon varsa bunu $X \ll Y$ olarak yazacağız. Örneğin $X \subseteq Y$ ise $X \ll Y$. Demek ki $(0,1) \ll \mathbb{R}$.

Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi'ne göre, $X \ll Y$ ve $Y \ll X$ ise, $X \approx Y$ olur, yani X'ten Y'ye giden bir eşleme vardır.

Alıştırmalar

15.1. $\mathbb{R}$'den $(0,1)$ aralığına giden birebir bir fonksiyon bularak $\mathbb{R} \approx (0,1)$ ilişkisini kanıtlayın.

15.2. Önceki bölümlerde kanıtlanan eşleniklik sonuçlarının Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi'yle çok daha kolay kanıtlandığını gösterin.

15.3. Aşağıdaki ilişkileri kanıtlayın. (Anımsatma: Y^X, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini simgeler.)

a. $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$.
b. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx \wp(\mathbb{N})$.
c. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$.
d. $\mathbb{N}^{\mathbb{R}} \approx \wp(\wp(\mathbb{N}))$.
e. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \approx \wp(\mathbb{R})$.
f. $\operatorname{Sym} \mathbb{N} \approx \mathbb{R}$.
g. $\operatorname{Sym} \mathbb{R} \approx \wp(\mathbb{R})$.
h. $\wp^{<\omega}(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$.

15.4. Elemanları, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(f(x)) = \sin x$ denklemini sağlayan f fonksiyonlarından oluşan küme sayılabilir midir?

Alıştırmalar

Aşağıdaki bazı sorular çok zor olabilir. [KT]'den alınan bu zor soruların bazılarını biz de yapamadık ama buraya koymakta bir beis görmedik! Bu soruların varlığını görmenin bile zenginleştirici olduğunu düşünüyoruz.

1. $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümelerinden $\mathbb{N}$'ye giden fonksiyonlar kümesinin, yani
$$\{f : X \longrightarrow \mathbb{N} : X \in \wp^{<\omega}(\mathbb{N})\}$$
kümesinin sayılabilir sonsuzlukta olduğunu gösterin. (Not: Anlaşılmıştır herhalde, $\wp^{<\omega}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümelerinden oluşan kümeyi temsil etmektedir.)

2. $(A_i)_{i\in I}$ bir doğal sayılar kümesi ailesi olsun (yani her $A_i \subseteq \mathbb{N}$).
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} A_j \text{ ve } \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in K} A_j$$
eşitliklerinin doğru olduğu, I'nın sayılabilir J ve K altkümeleri olduğunu kanıtlayın.

3. Elemanları $\mathbb{R}$'nin birbirinden ayrık açık aralıkları olan bir kümenin sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

4. $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $a \in A$ için,
$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A = \{a\}$$
eşitliğini sağlayan bir ϵ varsa (ϵ, a'ya göre değişebilir), A'ya ***ayrık küme*** denir. Örneğin, $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ayrık bir kümedir ama bu kümeye 0 elemanı ekleyerek elde edilen yeni küme değildir. Ayrık bir kümenin sayılabilir olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

5. $m > 0$ ve M iki doğal sayı olsun. $\mathcal{A} \subseteq \wp(\mathbb{N})$ şu özelliği sağlasın: Birbirinden farklı her $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ için, $|A_1 \cap \ldots \cap A_m| \leq M$. $\mathcal{A}$ kümesinin sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

6. $\mathcal{H}$, düzlemin şu özelliği olan bir çemberler kümesi olsun: $\mathcal{H}$'de, x ekseni üzerindeki her noktaya teğet bir çember vardır. $\mathcal{H}$'de, kesişen en az iki çember olduğunu kanıtlayın. Eğer özelliği, "$\mathcal{H}$'de, x ekseni üzerindeki her noktadan geçen en az bir çember vardır" olarak alırsak aynı sonuç doğru olmaz; nitekim $\mathcal{H}$'yi, $r > 1$ için, $(0, r)$ merkezli, $2r - 1$ yarıçaplı çemberler kümesi olarak seçebiliriz.

7. $\mathcal{C}$, düzlemin, kesişmeyen açık dairelerden (yani sınırını içermeyen dairelerden) oluşan bir kümesiyse, $\mathcal{C}$'nin dairelerinin sınırlarını belirleyen çemberlerin birbirine teğet olduğu noktaların sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

8. Düzlemde, uç noktalarının kesiştiği üç doğru parçasından oluşan şekillere Y-şekilleri diyelim. Kesişmeyen bir Y-şekilleri kümesinin sayılabilir olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

9. $\mathbb{N}$'nin öyle bir $\sigma \in \operatorname{Sym} \mathbb{N}$ eşleşmesini bulun ki her $n > 0$ ve her k doğal sayısı için $\sigma^n(k) \neq k$ olsun.

10. Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ sayılabilir bir kümeyse, $(x + A) \cap A = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir $x \in \mathbb{R}$ var mıdır?

11. Bir tavşan başlangıçta düzlemin bir (a, b) noktasında. Tavşan her dakika sabit bir (p, q) vektörü kadar zıplıyor, yani tavşan belli bir anda (n, m) noktasındaysa, bir sonraki dakikada $(n+p, m+q)$ noktasında. Sadece a, b, p ve q'nün tamsayı olduklarını biliyorsunuz ama ne olduklarını bilmiyorsunuz. Her saat başı bir noktaya kapan kurabilirsiniz. Tavşanı yakalayabileceğinizi kanıtlayın.

12. Bir $A \subseteq [0, 1]$ kümesi veriliyor. İki oyuncu teker teker ve sırayla birer rakam seçiyor. Diyelim birinci oyuncu $(a_n)_n$, ikinci oyuncu $(b_n)_n$ rakamlarını seçiyor. Eğer $0{,}a_0\, b_0\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2 \ldots \in A$ ise oyunu birinci oyuncu kazanıyor, yoksa ikinci oyuncu kazanıyor. Eğer A sayılabilir sonsuzluktaysa oyunu ikinci oyuncunun kazanacağını kanıtlayın.

13. İki oyuncu sırasıyla $\mathbb{R}$'de sayılamaz sonsuzlukta altkümeler seçiyorlar. Seçilen her küme bir öncekinin altkümesi olmak zorunda. Birinci oyuncunun hamleleri ne olursa olsun, ikinci oyuncu her zaman bu kümelerin kesişiminin boşküme olmasını sağlayabilir. Nasıl?

14. $A \subseteq [0, 1]$ sayılamaz olsun. A'nın sonlu toplamlarının her gerçel sayıyı aştığını kanıtlayın.

Not: İlginç soruların birçoğu, [KT]'den alınmıştır.

Final Sınavı II

Sorular[1]

1. $A_1, \ldots, A_n$, bir X kümesinin altkümeleri olsun.
1a. Sadece $\cap$, $\cup$ ve ^{c} işlemlerini kullanarak en fazla 2^{2^n} tane küme inşa edilebileceğini kanıtlayın. (Burada c, X'e göre tümleyen alınıyor anlamına gelmektedir.)
1b. Sadece $\cap$, $\cup$, $\setminus$ işlemlerini kullanarak en fazla 2^{2^n-1} tane küme inşa edilebileceğini kanıtlayın.

2. Düzlemdeki doğrular kümesi $\mathbb{R}$ ile eşlenik midir?

3a. İki 0'ın hiçbir zaman yanyana gelmediği 01-dizilerinin kümesi sayılabilir midir, yoksa sayılamaz olabilir mi?
3b. İki aynı rakamın hiçbir zaman yanyana gelmediği 012-dizileri kümesiyle 01-dizileri kümesi arasında bir eşleme var mıdır?

4. $\mathbb{R}^2$ düzlemi, yarıçapı 0'dan büyük olan ayrık dairelerle kaplanmıştır. Bu dairelerden oluşan küme sayılabilir olabilir mi?

5. X bir küme olsun.
5a. $(E_i)_{i\in I}$, X kümesi üzerine denklik ilişileri olsun. Demek ki her $E_i, X \times X$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir.

$$\bigcap_{i\in I} E_i \text{ ve } \bigcup_{i\in I} E_i$$

ikili ilişkilerinden hangisi bir denklik ilişkisidir?
5b. Şimdi her i, $j \in I$ için ya $E_i \subseteq E_j$ ya da $E_j \subseteq E_i$ içindeliğini varsayalım. Yukarıdaki soruyu yanıtlayın.

6. X bir küme ve $R \subseteq X \times X$, X üzerine ikili bir ilişki olsun.
6a. X üzerine R'yi içeren bir ve bir tane en küçük bir denklik ilişkisinin varlığını kanıtlayın.

---

[1] İstanbul Bilgi Üniversitesi'nde 2009-2010 ders yılında birinci sınıf Matematik Bölümü öğrencilerine verdiğim final sınavının bu kitaba uyarlanmışıdır. Yanıtlar kitabın sonundadır.

6b. $X = \mathbb{R}$ olsun. R ilişkisi "$xRy \Leftrightarrow |x - y| = 1$" olarak tanımlansın. Yukarıdaki soruda bulunan denklik ilişkisini betimleyin.

7. X bir küme olsun.
7a. R, X kümesi üzerine herhangi bir ikili ilişki olsun. Gene X üzerine tanımlanmış R'yi içeren en küçük bir ve bir tane yansımalı ve geçişli bir ikili ilişki olduğunu kanıtlayın.
7b. R, X kümesi üzerine yansımalı ve geçişli bir ikili ilişki olsun. X üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini x, $y \in X$ için,

$$x \equiv y \Leftrightarrow xRy \text{ ve } xRy$$

olarak tanımlayalım. $\equiv$ ikili ilişkisinin bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin. Ayrıca şunu gösterin: $X/\equiv$ üzerine öyle bir $\leq$ yarısıralaması vardır ki, her x, $y \in X$ için, xRy ise $[x] \leq [y]$ olur.

8. D, 01-dizilerinden oluşan küme olsun.
a. D üzerine $\equiv$ ikili ilişkisi

$$a \equiv b \Leftrightarrow \text{ öyle bir } N \text{ var ki her } n > N \text{ için } a_n = b_n$$

olarak tanımlanmış olsun. Bu elbette D üzerine bir denklik ilişkisidir. $D/\equiv$ kümesi sayılabilir mi yoksa sayılamaz sonsuzlukta mıdır?
b. D üzerine $\approx$ ikili ilişkisi şöyle tanımlanmış olsun:

$$a \approx b \Leftrightarrow \text{ öyle } n \text{ ve } m \text{ var ki, her } k \in \mathbb{N} \text{ için } a_{n+k} = b_{m+k}.$$

Bunun D üzerine bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın. $D/\approx$ kümesi sayılabilir mi yoksa sayılamaz sonsuzlukta mıdır?

9. X sayılabilir sonsuzlukta bir küme olsun. X'in öyle bir sayılamaz $(A_i)_{i \in I}$ altküme ailesi bulun ki her i, $j \in I$ göstergeci için ya $A_i \subseteq A_j$ ya da $A_j \subseteq A_i$ olsun.

Final Sınavı I, Yanıtlar

Birinci Kısım.
1. $I \subseteq \mathbb{R}$, *n elemanlı bir küme olsun.*

$$\{(i_1, i_2, i_3) \in I^3 : i_1 < i_2 < i_3\}$$

kümesinin eleman sayısını bulun. Eğer 3 yerine rastgele bir $k = 1, \ldots, n$ alırsak sonuç ne olur?
Yanıt: I'nın üç elemanlı altkümelerini küçükten büyüğe doğru sıraya dizersek küçükten büyüğe sıralanmış sıralı üçlüleri buluruz. Dolayısıyla kümenin,

$$\binom{n}{3}$$

tane elemanı vardır. 3 yerine rastgele bir ℓ alırsak, sonuç elbette

$$\binom{n}{\ell}$$

olur.

2. *Herhangi bir $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sayısı için şu eşitliği gösterin:*

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s} = 1.$$

Kanıt: $(1-1)^s = 0$ eşitliğinin solundaki ifadeyi binom açılımına göre açarsak ve birinci terim dışındakileri diğer tarafa atarsak, istediğimizi elde ederiz.

3. *$A_1, \ldots, A_n$ kümeler olsun. x, bu kümelerin tam s tanesinde bulunan bir eleman olsun. x'in*

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

sayısına olan katkısını hesaplayın, yani eğer

$$B_i = A_i \setminus \{x\}$$

ise
$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k} |B_i \cap B_j \cap B_k|$$
sayısını hesaplayın.

Yanıt: Eğer x elemanı A_i, A_j, A_k kümelerinden en az birinde değilse, o zaman elbette
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = |B_i \cap B_j \cap B_k|$$
olur ve bu durumun toplama bir katkısı olmaz. Öte yandan eğer x elemanı A_i, A_j, A_k kümelerinin hepsindeyse, o zaman
$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = |B_i \cap B_j \cap B_k| + 1$$
olur ve bu durumun katkısı 1 olur. Demek ki,
$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k} |B_i \cap B_j \cap B_k| = \binom{s}{3}$$
olur.

4. *Yukarıdaki verilerle*, x*'in*
$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$
sayısına katkısını hesaplayın.

Kanıt: Bir önceki soruyu 3'ten k'ya genelleştirerek, x'in katkısının
$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s},$$
yani 2'nci sorudan dolayı 1 olduğunu görürüz.

5. *Yukarıdakilerden*, $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$ *sayısının*
$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$
sayısına eşit olduğunu kanıtlayın. [İçindelik-Dışındalık Teoremi]

Kanıt: Bir önceki soruyu $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinin her elemanına teker teker uygularsak,
$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$
sayısının $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinin eleman sayısına eşit olduğunu görürüz.

6. $|A_1 \cap \ldots \cap A_n|$ *sayısının*

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots .$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Bir önceki sonucu $A_1, \ldots, A_n$ kümelerinin tümleyenlerine uygulayın.
Kanıt: Tümleyen $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinde alınsın. O zaman,

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = N$$

ise

$$|A_i^c \cup A_j^c \cup A_k^c| = N - |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

olur. Bu eşitliği üçer üçer seçilmiş kümelerden ℓ'şer ℓ'şer seçilmiş kümelere genelleştirmek işten bile değildir.

Şimdi bir önceki soruyu, $A_1, \ldots, A_n$ kümeleri yerine bunların tümleyenlerine uygularsak ve yukarıda bulduğumuz eşitliği gereken yerlere yerleştirirsek, ve 2'nci soruyu kullanarak karşımıza çıkan N'leri sadeleştirirsek, istediğimiz eşitliği buluruz. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

İkinci Kısım. *A ve B kümeleri için,*

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

olsun. $A\Delta B$ kümesine A ve B'nin ***simetrik farkı*** *denir.*
1. *Δ işleminin birleşme ve değişme özellikleri olduğunu ve $\cap$ işleminin Δ üzerine dağıldığını kanıtlayın.*
Kanıt: Δ'nın değişme özelliği olduğu belli, yani

$$A\Delta B = B\Delta A$$

olur. Δ'nın birleşme özelliği olduğunu kanıtlayalım. A, B ve C herhangi üç küme olsun.

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

eşitliğini kanıtlayacağız.

Aşağıdaki tablolarda bir $x \in A \cup B \cup C$ elemanı için, x'in içindeliğine göre önce 4 sonra 8 değişik durumu ele alıyoruz. Bir hücrede yazan "1", x, o sütunun en başında gösterilen kümenin elemanı demektir, "0" ise x o kümenin elemanı değil demektir. Önce $A\Delta B$'nin tablosunu yapalım:

A	B	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Şimdi de $(A\Delta B)\Delta C$ ve $A\Delta(B\Delta C)$ kümelerinin tablosunu yapalım:

A	B	C	$A\Delta B$	$(A\Delta B)\Delta C$	$B\Delta C$	$A\Delta(B\Delta C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Gri sütunlardaki sayılar aynı. Bu şu demektir:

$$x \in (A\Delta B)\Delta C \Leftrightarrow x \in A\Delta(B\Delta C).$$

Bir başka deyişle, $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Son olarak kesişimin simetrik farka dağıldığını, yani,

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

eşitliğini kanıtlayalım. Bunu da yukarıdaki tablo yöntemiyle kanıtlayacağız:

A	B	C	$B\Delta C$	$A\cap(B\Delta C)$	$A\cap B$	$A\cap C$	$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

2. *$n \geq 2$ ise $A_1\Delta \ldots \Delta A_n$ kümesinin tek sayıda A_i'lere ait olan elemanlardan oluştuğunu kanıtlayın.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla. $n = 2$ için yukarıdaki birinci tablodan her şey belli. İstediğimizin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. Bir elemanın $A_1\Delta \ldots \Delta A_n \Delta A_{n+1}$ kümesinde olması için,

$$A_1\Delta \ldots \Delta A_n \text{ ve } A_{n+1}$$

kümelerinden sadece birinde olmalıdır. Eğer eleman $A_1\Delta \ldots \Delta A_n$ kümesindeyse ama A_{n+1} kümesinde değilse, o zaman, tümevarım varsayımına göre eleman tek sayıda kümededir. Eğer eleman $A_1\Delta \ldots \Delta A_n$ kümesinde değilse ama A_{n+1} kümesindeyse, o zaman tümevarım varsayımına göre eleman ilk n kümenin çift sayıda tanesinin elemanıdır; buna bir de A_{n+1} kümesi eklenince, istediğimizi elde ederiz.

3. $\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i-1}2^{i-1}\binom{s}{i}$ *sayısının eğer s çiftse 0, tekse 1 olduğunu kanıtlayın.*
Kanıt: Sonuç kolaylıkla s'nin çiftliğine ya da tekliğine göre değişen $(1-2)^s = \pm 1$ eşitliğinden çıkar: Soldaki ifadenin binom açılımını yazıp, binom açılımının ilk terimi olan 1'i sağa geçirip 2'ye bölersek istediğimiz sonucu elde ederiz.

4. *Yukarıdaki iki sorudan,* $|A_1 \Delta \ldots \Delta A_n|$ *sayısının*

$$\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 2^2 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.
Kanıt: Birinci kısımdaki gibi düşüneceğiz. Bir x elemanının

$$A_1, \ldots, A_n$$

kümesinin tam s tanesinde olduğunu varsayalım. O zaman x'in yukarıdaki ifadeye katkısı,

$$\binom{s}{1} - 2\binom{s}{2} + 2^2\binom{s}{3} - \cdots$$

kadar olur. Demek ki, bir önceki soruya göre, eğer s çiftse x'in bu ifadeye katkısı yoktur, eğer s tekse, x'in bu ifadeye katkısı 1'dir. Bunu $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinin tüm elemanlarına uygularsak istediğimizi buluruz.

Üçüncü Kısım. *Sabit bir X kümesinin A ve B altkümeleri için*

$$A \downarrow B = (A \cup B)^c$$

olsun. $\cup$, $\cap$, $\setminus$ *işlemlerinin herbirinin sadece* $\downarrow$ *işlemi kullanılarak ifade edilebileceğini kanıtlayın.*
Kanıt: Tanımda $A = B$ alırsak,

$$A \downarrow A = (A \cup A)^c = A^c$$

buluruz. Demek ki,

$$\begin{aligned}(A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) &= (A \downarrow B)^c \\ &= (A \cup B)^{cc} = A \cup B\end{aligned}$$

olur. Bileşimden ve tümlemeden kesişim elde etmek kolaydır:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c.$$

Fark da kolay:

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Dördüncü Kısım. *Eğer* $(X_i)_{i\in I}$ *bir kümeler ailesiyse, bu ailenin* $\prod_{i\in I} X_i$ *kartezyen çarpımının*

$$\prod_{i\in I} X_i = \{f : I \to \cup_{i\in I} X_i : \text{ her } i \in I \text{ için } f(i) \in X_i\}$$

olarak tanımlandığını anımsatalım.

Bir $(J_i)_{i\in I}$ *göstergeçler ailesi ve bir* $(A_{i,j})_{i\in I, j\in J_i}$ *ailesi için*

1. *Aşağıdakilerden birini kanıtlayın:*

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcap_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\bigcup_{i\in I} A_{i,f(i)}\right),$$

$$\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}\right).$$

2. *Aşağıdakilerden birini kanıtlayın:*

$$\prod_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\prod_{i\in I} A_{i,f(i)}\right),$$

$$\prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcap_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\prod_{i\in I} A_{i,f(i)}\right).$$

Kanıt: (1) Birinci eşitliği kanıtlayalım.

x, soldaki bileşimden bir eleman olsun.

$$f \in \prod_{i\in I} J_i,$$

kartezyen çarpımın herhangi bir elemanı olsun. x, soldaki bileşimde olduğundan, öyle bir $i \in I$ vardır ki,

$$x \in \bigcap_{j\in J_i} A_{i,j}$$

olur. Demek ki öyle bir $i \in I$ var ki, her $j \in J_i$ için,

$$x \in A_{i,j}$$

olur. Dolayısıyla

$$x \in A_{i,f(i)}$$

olur. f rastgele olduğundan böylece soldan sağa içindelik kanıtlanmış olur.

Öte yandan, eğer x soldaki kümenin bir elemanı değilse, o zaman x, hiçbir $i \in I$ için,

$$\bigcap_{j \in J_i} A_{i,j}$$

kümesinin bir elemanı olamaz. Demek ki her $i \in I$ için, öyle bir $j \in J_i$ vardır ki x, $A_{i,j}$ kümesinin elemanı olamaz. Verilmiş bir $i \in I$ için,

$$x \notin A_{i,f(i)}$$

ilişkisini sağlayan bir $f(i) \in J_i$ seçelim. Böylece bir

$$f \in \prod_{i \in I} J_i$$

elemanı elde etmiş oluruz. (Burada Seçim Aksiyomu kullanılıyor!) Elbette

$$x \notin \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$$

olur. Dolayısıyla, x eşitliğin sağ tarafındaki kümede de değildir.

Böylece birinci eşitlik kanıtlanmış olur. İkinci eşitliğin kanıtı benzerdir ve okura bırakılmıştır.

(2) Birinci eşitliği kanıtlayalım.
g, eşitliğin solundaki kartezyen çarpımdan bir eleman olsun. Demek ki her $i \in I$ için,

$$g(i) \in \bigcup_{j \in J_i} A_{i,j}$$

olur. Yani, her $i \in I$ için,

$$g(i) \in A_{i,j}$$

ilişkisini sağlayan bir $j \in J_i$ vardır. Her $i \in I$ için,

$$g(i) \in A_{i,f(i)}$$

ilişkisini sağlayan bir $f(i) \in J_i$ seçelim. Böylece bir

$$f \in \prod_{i \in I} J_i$$

elemanı elde etmiş oluruz. (Burada Seçim Beliti kullanılıyor!) Elbette

$$g \in \prod_{i \in I} A_{i,f(i)}$$

olur. Böylece g'nin eşitliğin sağ tarafındaki kümede olduğu kanıtlanmış olur.

Sağ taraftaki kümenin sol taraftakinin bir altkümesi olduğu çok bariz, çünkü her $f \in \prod_{i\in I} J_i$ ve her $i \in I$ için,

$$A_{i,f(i)} \subseteq \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}$$

olur, ve dolayısıyla her $f \in \prod_{i\in I} J_i$ için

$$\prod_{i\in I} A_{i,f(i)} \subseteq \prod_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}\right)$$

olur.

Beşinci Kısım. $(A_n)_n$ *ve* $(B_n)_n$ *iki küme dizisi olsun. Aşağıdaki önermelerin eşdeğer olduklarını kanıtlayın*:
(a) *Her* n *ve* m *için*, $A_n \cap B_m$ *sonludur.*
(b) *Her* n *için* $A_n \setminus A$ *ve* $B_n \setminus B$ *kümelerinin sonlu olduğu ayrık* A *ve* B *kümeleri vardır.*
Kanıt: Önce (b) koşulunun doğru olduğunu varsayalım. A ve B kümeleri koşulu sağlasın. O zaman her n ve her m için, $A_n \setminus A$ ve $B_n \setminus B$ kümeleri sonlu olur.

$$A_n = (A_n \setminus A) \cup (A_n \cap A)$$

ve

$$B_m = (B_m \setminus B) \cup (B_n \cap B)$$

olduğundan ve $A \cap B$ boşküme olduğundan, $A_n \cap B_m$ sonlu olur.

Şimdi (a) koşulunu varsayalım.

$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty}\left(A_i \setminus \bigcup_{j\le i} B_j\right)$$

ve

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty}\left(B_i \setminus \bigcup_{j\le i} A_j\right)$$

olsun. Bu iki küme kesişmezler çünkü her n ve m için,

$$\left(A_n \setminus \bigcup_{i\le n} A_i\right) \cap \left(B_m \setminus \bigcup_{j\le m} A_j\right) = \emptyset$$

olur (çünkü ya $m \le n$ ya da $n \le m$ olur).

Şimdi $A_n \setminus A$ kümesinin sonlu olduğunu kanıtlayalım. Aşağıdaki hesaplarda X^c, $A_n \setminus X$ anlamına gelsin:

$$\begin{aligned}
A_n \setminus A &= A_n \setminus (A_n \cap A) = (A_n \cap A)^c \\
&= \left(A_n \cap \bigcup_{i=0}^{\infty} \left(A_i \setminus \bigcup_{j \le i} B_j \right) \right)^c \\
&= \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \left(A_n \cap \left(A_i \setminus \bigcup_{j \le i} B_j \right) \right) \right)^c \\
&= \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \left((A_n \cap A_i) \setminus \bigcup_{j \le i} B_j \right) \right)^c \\
&= \bigcap_{i=0}^{\infty} \left((A_n \cap A_i) \setminus \bigcup_{j \le i} B_j \right)^c \\
&\subseteq \left(A_n \setminus \bigcup_{j \le n} B_j \right)^c = A_n \cap \left(\bigcup_{j \le n} B_j \right) \\
&= \bigcup_{j \le n} (A_n \cap B_j).
\end{aligned}$$

Demek ki $A_n \setminus A$ kümesi sonlu. Aynı biçimde $B_n \setminus B$ kümesi de sonludur.

Altıncı Kısım. $(A_i)_{i \in I}$ *ve* $(B_i)_{i \in I}$ *kümeler ailesi için aşağıdaki denklem sistemlerinin (olduğunda) çözümlerini bulun. Çözümün biricikliğini tartışın.*

a. $A_i \cap X = B_i (i \in I)$

b. $A_i \cup X = B_i (i \in I)$

c. $A_i \setminus X = B_i (i \in I)$

d. $X \setminus A_i = B_i (i \in I)$

Çözümler: (a) sisteminin çözülebilmesi için her şeyden önce her B_i'nin A_i'nin bir altkümesi olması gerekiyor, aksi halde çözüm yoktur. Bundan böyle her $i \in I$ için $B_i \subseteq A_i$ içindeliğini varsayalım. Kolaylık olsun diye,

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

tanımını yapalım. Eğer X sistemin bir çözümüyse, o zaman, kolayca görüleceği üzere, $A \cap X$ de sistemin bir çözümüdür. Demek ki sistemin bir çözümü varsa, sistemin A'nın altkümesi olan bir çözümü vardır. Bundan böyle X, sistemin A'nın altkümesi olan bir çözümü olsun.

O zaman,

$$X = A \cap X = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap X = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap X) = \bigcup_{i\in I} B_i$$

olur. Demek ki sistemin A'nın altkümesi olan en fazla bir çözümü vardır, o da,

$$X = \bigcup_{i\in I} B_i$$

dir. Bakalım bu bir çözüm mü. Her $j \in I$ için,

$$B_j = A_j \cap X = A_j \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A_j \cap B_i)$$

olduğundan, her $i, j \in I$ için,

$$A_j \cap B_i \subseteq B_j$$

olmalı. Eğer bu koşul doğruysa, o zaman

$$A_j \cap X = A_j \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A_j \cap B_i) \subseteq B_j$$

olur. Ayrıca $A_j \cap B_j = B_j$ olduğundan eşitlik elde edilir.

Sonuç olarak, eğer her i, $j \in I$ için,

$$A_j \cap B_i \subseteq B_j$$

ve

$$B_i \subseteq A_i$$

içindelikleri doğruysa, sistemin A'nın altkümesi olan tek bir çözümü vardır. Bu çözüme X diyelim. Eğer Y, A'dan ayrık bir kümeyse, kolayca görülebileceği üzere $X \cup Y$ de sistemin bir çözümüdür.

Tümleyenler alınarak (c) sistemi (a) sistemine dönüştürülebilir.

(c) sistemine gelince... Z, tüm A_i ve B_i kümelerinin bileşimi olsun. $Y = Z \setminus X$ olsun. O zaman bu sistem,

$$A_i \cap Y = B_i (i \in I)$$

sistemine dönüşür, ki bu da (a) sorusuydu.

(d) sistemi: Z, yukarıdaki gibi olsun. O zaman

$$X \setminus A_i = (Z \setminus A_i) \cap X$$

olduğundan, bu sistem de birinci sisteme dönüşebilir.

Ayrıntıları okura bırakıyoruz. Ama en iyisi birinci sistemde yaptığımız gibi bağımsız ve ayrıntılı bir analiz yapmak.

Final Sınavı II, Yanıtlar

1. *$A_1, \ldots, A_n$, bir X kümesinin altkümeleri olsun.*
a. *Sadece $\cap$, $\cup$, ^{c} işlemlerini kullanarak en fazla 2^{2^n} tane küme inşa edilebileceğini kanıtlayın.* (*Burada c, X'e göre tümleyen alınıyor anlamına gelmektedir.*)
b. *Sadece $\cap$, $\cup$, $\setminus$ işlemlerini kullanarak en fazla 2^{2^n-1} tane küme inşa edilebileceğini kanıtlayın.*
Kanıt: **a.** $\varepsilon = \pm 1$ için

$$A_i^\epsilon = \begin{cases} A_i & \text{if } \epsilon = 1 \\ A_i^c & \text{if } \epsilon = -1 \end{cases}$$

olsun. n uzunluğundaki her $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ dizisi için

$$A_1^{\varepsilon_1} \cap \ldots \cap A_n^{\varepsilon_n},$$

kümesi $\cap$ ve c işlemleriyle inşa edilebilir. Bunlardan en fazla 2^n tane vardır ve her biri diğerlerinden ayrıktır. Bu kümeleri inşa edilebilir kümelerin bir nevi atomlarına benzetebiliriz: $\cap$, $\cup$, ^{c} işlemleriyle inşa edilen her küme bunlardan bazılarının bileşimidir. m ayrık kümeden, sadece bileşim işlemini kullanarak en fazla 2^m tane küme inşa edebiliriz. Demek ki 2^n tane atomik kümeden en fazla 2^{2^n} tane değişik bileşim alabiliriz. Eğer

$$X = \{0, 1, \ldots, n\}$$

ise ve $i = 0, 1, \ldots, n-1$ için

$$A_i = X \setminus \{i, n\}$$

tanımını yaparsak, üstsınır olan 2^{2^n} sayısını elde edebiliriz.
b. Bu durumda, $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinin dışına çıkamayız ve bir önceki şıkta elde ettiğimiz

$$X \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = A_1^{-1} \cap \ldots \cap A_n^{-1}$$

"atomik küme"yi bu sefer elde edemeyiz, ama bunların dışındaki tüm atomik kümeleri elde edebiliriz. Demek ki bu sefer en fazla $2^n - 1$ atomik küme var ve bunların bileşimleriyle en fazla 2^{2^n-1} tane küme elde edebiliriz.

2. *Düzlemdeki doğrular kümesi* $\mathbb{R}$ *ile eşlenik midir*?
Yanıt: Evet.
Kanıt: y eksenine paralel olmayan her doğrunun denklemi bir ve bir tek m ve b sayı çifti için $y = mx + b$ biçimindedir. y eksenine paralel olanlar ise bir ve bir tek a sayısı için $x = a$ biçimindedir. Demek ki doğrular kümesiyle

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \sqcup \mathbb{R}$$

kümesi eşleniktirler. Bu son küme de

$$((0,1) \times (0,1)) \sqcup (0,1)$$

kümesiyle eşleniktir. Bu son küme de

$$((0,1) \times (0,1)) \sqcup (\{0\} \times (0,1)) = [0,1) \times (0,1)$$

kümesiyle eşleniktir. Bu son kümenin $(0,1)$ aralığıyla ya da $\mathbb{R}$ ile eşlenik olduğunu biliyoruz.

3. a. *İki* 0'*ın hiçbir zaman yanyana gelmediği* 01-*dizilerinden oluşan küme sayılabilir midir*, *yoksa sayılamaz mıdır*?
b. *İki aynı rakamın hiçbir zaman yanyana gelmediği* 012-*dizileri kümesiyle* 01-*dizileri kümesi arasında bir eşleme var mıdır*?
a. Yanıt: Sayılamazdır.
Birinci Kanıt: İki 0'ın yanyana gelmediği her 01-dizisinde, 0'a eşit her terimden sonra illa bir 1 gelmeli. Demek ki 01'i tek bir harf görebiliriz. Bir başka deyişle, iki 0'ın yanyana gelmediği diziler aslında 01 ve 1 harfleriyle yazılmış dizilerdir. Dolayısıyla bunlardan sayılamaz sonsuzlukta vardır. Hatta bu tür dizilerin kümesi $\mathbb{R}$'yle eşleniktir.

İkinci Kanıt: Herhangi bir 01-dizisinde, her iki terimin arasına bir 1 koyarsak, içinde hiç 00 olmayan bir dizi elde ederiz. Bu işlem bize 01-dizileri kümesinden dizilerimizden oluşan kümeye giden birebir bir fonksiyon verir. Demek ki istediğimiz türden dizi "sayısı" 01-dizisi "sayısı"ndan daha az olamaz. Daha fazla da olamaz tabii ki, ne de olsa bu tür diziler bir 01-dizisidir!

b. Yanıt: Vardır.
Kanıt: Söylenen türden 012-dizilerinin kümesine A diyelim. Herhangi bir 01-dizisinin tüm terimlerinin arasına 2 eklersek, A kümesinden bir eleman bulunur ve bu "2 ekleme" fonksiyonu birebirdir. (Demek ki A kümesi sayılamaz sonsuzluktadır.) Her 012-dizisi, $[0,1]$ aralığından bir sayının 3 tabanında yazılmış şeklinin virgülden sonraki dizisi olarak görülebilir. 012-dizileri kümesinden $[0,1]$ aralığına giden bu fonksiyon birebir değildir ama bu fonksiyonu A'ya kısıtlarsak $(0,1)$ aralığına giden birebir bir fonksiyon elde ederiz. 01-dizileri

kümesiyle $(0,1)$ aralığı eşlenik olduğundan, Cantor-Bernstein-Schröder Teoremi'ne göre tüm bu kümeler eşleniktir.

4. $\mathbb{R}^2$ *düzlemi, yarıçapı* 0'*dan büyük olan ayrık dairelerle kaplanmıştır. Bu dairelerden oluşan küme sayılamaz olabilir mi*?

Kanıt: Her dairede her iki koordinatı da kesirli sayı olan bir nokta olduğundan, dairelerin "sayısı" kesirli sayı ikililerinin "sayısı"ndan fazla olamaz. Yani $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kartezyen çarpımından düzlemi örten dairelerin kümesine giden örten bir fonksiyon vardır. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, dairelerden oluşan küme de sayılabilir sonsuzluktadır.

5. *X bir küme olsun.*

a. *$(E_i)_{i\in I}$, X kümesi üzerine denklik ilişkileri olsun. Demek ki her E_i, $X \times X$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir.*

$$\bigcap_{i\in I} E_i \text{ ve } \bigcup_{i\in I} E_i$$

ikili ilişkilerinden hangisi bir denklik ilişkisidir?

b. *Şimdi her $i, j \in I$ için ya $E_i \subseteq E_j$ ya da $E_j \subseteq E_i$ içindeliğini varsayalım. Yukarıdaki soruyu yanıtlayın.*

Kanıt: a. $\bigcap_{i\in I} E_i$ bir denklik ilişkisidir çünkü, kolayca kanıtlanabileceği üzere, her $x, y, z \in X$ için,

i. $(x, x) \in \bigcap_{i\in I} E_i$.

ii. Eğer $(x, y) \in \bigcap_{i\in I} E_i$ ise $(y, x) \in \bigcap_{i\in I} E_i$.

iii. Eğer (x, y), $(y, z) \in \bigcap_{i\in I} E_i$ ise $(x, y) \in \bigcap_{i\in I} E_i$. olur. Öte yandan $\bigcup_{i\in I} E_i$ bir denklik ilişkisi olmayabilir. (i) ve (ii) özellikleri (yansıma ve simetri) her zaman doğrudur ama (iii) doğru olmayabilir. İşte bir örnek: $X = \{1, 2, 3\}$ olsun. E_1-sınıfları $\{1,2\}$ ve $\{3\}$ olsun, E_2-sınıfları $\{2, 3\}$ ve $\{1\}$ olsun. O zaman, $(1,2)$, $(2,3) \in E_1 \cup E_2$ olur ama

$$(1,3) \notin E_1 \cup E_2$$

olmaz.

b. Bu sefer her ikisi birden denklik ilişkisidir. Sadece $\bigcup_{i\in I} E_i$ ilişkisinin denklik ilişkisi olduğunu kanıtlamalıyız. Yansıma ve simetri bariz. Geçişliği kanıtlayalım. x, y, $z \in X$ elemanları, (x, y), $(y, z) \in \bigcup_{i\in I} E_i$ içindeliklerini sağlasın. O zaman i, $j \in I$ için $(x, y) \in E_i$ ve $(y, z) \in E_j$ olur. Durum i ve j açısından simetrik olduğu için $E_j \subseteq E_i$ varsayımını yapabiliriz. O zaman hem (x, y) hem de (y, z) çiftleri E_i'nin elemanıdırlar. E_i geçişli olduğundan, $(x, z) \in E_i \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i$ elde ederiz.

6. *X bir küme ve $R \subseteq X \times X$, X üzerine ikili bir ilişki olsun.*

a. *X üzerine R'yi içeren bir ve bir tane en küçük bir denklik ilişkisinin varlığını kanıtlayın.*

b. *$X = \mathbb{R}$ olsun ve R ilişkisi "$xRy \Leftrightarrow |x-y| = 1$" olarak tanımlansın. Yukarıdaki soruda bulunan denklik ilişkisini betimleyin.*

Kanıt: a. R'yi içeren tüm denklik ilişkilerini ele alalım. $X \times X$ bunlardan biridir mesela. 5a sorusuna göre R'yi içeren tüm denklik ilişkilerinin kesişimi bir denklik ilişkisidir ve elbette R'yi içerir. Demek ki R'yi içeren tüm denklik ilişkilerinin kesişimi, R'yi içeren en küçük denklik ilişkisidir.

b. "$xE_Ry \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$" olduğunu iddia ediyoruz. Bu tanımın bir denklik ilişkisi tanımladığı ve xRy ise xE_Ry olduğu, yani $R \subseteq E_R$ içindeliği çok bariz. Demek ki E_R, R'yi içeren bir denklik ilişkisidir. Şimdi E_R'nin E'yi içeren en küçük denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayalım. E, R'yi içeren herhangi bir denklik ilişkisi olsun, yani

$$xRy \text{ ise } xEy$$

önermesi her x ve y için sağlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$xR(x+1),\ (x+1)R(x+2),\ \ldots,\ (x+n-1)R(x+n)$$

olduğundan,

$$xE(x+1),\ (x+1)E(x+2),\ \ldots,\ (x+n-1)E(x+n)$$

olur. Demek ki

$$xE(x+n)$$

ve dolayısıyla

$$(x+n)Ex$$

olur. Sonuç: $x - y \in \mathbb{Z}$ ise, yani xE_Ry ise xEy olur. Bundan da $E_R \subseteq E$ çıkar. Demek ki R'yi içeren her denklik ilişkisi E_R'yi de içeriyor. Yani E_R, R'yi içeren en küçük denklik ilişkisidir.

7. *X bir küme olsun.*

a. *R, X üzerine herhangi bir ikili ilişki olsun. Gene X üzerine tanımlanmış R'yi içeren en küçük bir ve bir tane yansımalı ve geçişli bir ikili ilişki olduğunu kanıtlayın.*

b. *R, X üzerine yansımalı ve geçişlili bir ikili ilişki olsun. X üzerine $\equiv$ ikili ilişkisini $x, y \in X$ için,*

$$x \equiv y \Leftrightarrow xRy \text{ ve } xRy$$

olarak tanımlayalım. $\equiv$ ikili ilişkisinin bir denklik ilişkisi olduğunu gösterin. Ayrıca şunu gösterin: $X/\equiv$ üzerine öyle bir $\leq$ yarısıralaması vardır ki, her $x, y \in X$ için, xRy ise $[x] \leq [y]$ olur.

Kanıt: (a) R'ye, her $x \in X$ için (x, x) elemanlarını ekleyerek, R'nin yansımalı olduğunu varsayabiliriz. R'yi içeren her ikili ilişki yansımalıdır.

Kanıtın Devamı 1. Şimdi, R'yi içeren tüm geçişlili ikili ilişkilerin kesişimini alalım. Bu kesişim de geçişlilidir; doayısıyla R'yi içeren geçişlili ilişkilerin en küçüğü olmak zorundadır.
Kanıtın Devamı 2. Şu ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} xSy \Leftrightarrow\ & \text{öyle bir } n \text{ doğal sayısı ve } x_1, \ldots, x_n \in X \\ & \text{vardır ki } xRx_1,\ x_1Rx_2,\ \ldots,\ x_nRy \text{ olur.} \end{aligned}$$

Eğer $n = 0$ ise, bu koşul xRy demektir. Dolayısıyla $R \subseteq S$ olur. S'nin geçişli olduğu çok belli.
(b) R yansımalı olduğundan $\equiv$ ilişkisi de yansımalıdır. $\equiv$ ilişkisinin simetrik olduğu belli. R'nin geçişliğinden $\equiv$ ilişkisinin geçişliğini kanıtlamak da kolay. Demek ki $\equiv$ ilişkisi bir denklik ilişkisidir.

İkinci kısmı kanıtlayalım: Şu savı ortaya atıyoruz:

Sav: *xRy, $x \equiv x_1$ ve $y \equiv y_1$ ise x_1Ry_1 olur.*
Sav'ın Kanıtı: $x \equiv x_1$ ilişkisinden x_1Rx çıkar. Ayrıca xRy de doğru olduğundan, R ilişkisinin geçişliğinden, x_1Ry elde ederiz. Öte yandan $y \equiv y_1$ olduğundan, yRy_1 olur. Biraz önce elde ettiğimiz x_1Ry ilişkisiyle birlikte, bu bize x_1Ry_1 verir. Sav kanıtlandı.

Bu sav sayesinde

$$[x] \le [y] \Leftrightarrow xRy$$

tanımını yapmaya hakkımız olduğunu görürüz. Bu $\le$ ilişkisinin $X/\equiv$ üzerine bir sıralama olması için, her x, y, z için,

$$\begin{aligned} &[x] \le [x] \\ &[x] \le [y] \text{ ve } [y] \le [x] \text{ ise } [x] = [y] \\ &[x] \le [y] \text{ ve } [y] \le [z] \text{ ise } [x] \le [z] \end{aligned}$$

önermelerini kanıtlamalıyız. Birincisi R'nin yansımalı olmasından çıkar. İkincisi $\equiv$ ilişkisinin tanımının bir sonucudur. Üçüncüsü R ilişkisinin geçişlili olmasından çıkar.

8. *D, 01-dizilerinden oluşan küme olsun.*
a. *D üzerine $\equiv$ ikili ilişkisi*

$$a \equiv b \Leftrightarrow \textit{ öyle bir } N \textit{ var ki her } n > N \textit{ için } a_n = b_n$$

olarak tanımlanmış olsun. Bu elbette D üzerine bir denklik ilişkisidir. $D/\equiv$ kümesi sayılabilir mi yoksa sayılamaz sonsuzlukta mıdır?
b. *D üzerine $\approx$ ikili ilişkisi şöyle tanımlanmış olsun:*

$$a \approx b \Leftrightarrow \textit{ öyle } n \textit{ ve } m \textit{ var ki, her } k \in \mathbb{N} \textit{ için } a_{n+k} = b_{m+k}.$$

Bunun D üzerine bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın. $D/\approx$ kümesi sayılabilir mi yoksa sayılamaz sonsuzlukta mıdır?

Kanıt: (a) $\mathbb{R}$ ile eşlenik olduğundan, D'nin sayılamaz sonsuzlukta olduğunu biliyoruz. Her sınıfın sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlarsak, o zaman $D/\equiv$ kümesi de sayılamaz sonsuzlukta ($\mathbb{R}$ ile eşlenik) olmak zorunda olacak. $a = (a_n)_n$ herhangi bir 01-dizisi, n herhangi bir doğal sayı ve x, n uzunluğunda herhangi bir 01-dizisi olsun. O zaman

$$d(x, a) = x_0 x_1 \ldots x_{n-1} a_n a_{n+1} \ldots$$

dizisi a'ya denktir. Ve elbette a'ya denk her dizi de bir n doğal sayısı ve n uzunluğunda bir 01-dizisi x için $d(x, a)$ olarak yazılır. (Aslında birden çok n ve x vardır, ama bu önemli değil.) Demek ki sonlu 01-dizilerinden $[a]$ sınıfına giden örten bir fonksiyon vardır: Sonlu x dizisini $d(x, a)$ dizisine götüren fonksiyon. Sonlu 01-dizileri kümesi sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, $[a]$ sınıfı da sayılabilir sonsuzluktadır.

(b) $\approx$ ilişkisinin yansımalı ve simetrik olduğu belli. Geçişlikte biraz sorun var ama o da kolaylıkla kanıtlanabilir: $a \approx b$ ve $b \approx c$ olsun. n, m, p, q sayıları, her k için,

$$a_{n+k} = b_{m+k} \text{ ve } b_{p+k} = b_{q+k}.$$

eşitliklerini sağlasınlar. O zaman her k için,

$$a_{(n+p)+k} = a_{n+(p+k)} = b_{m+(p+k)} = b_{p+(m+k)} = b_{q+(m+k)} = b_{(q+m)+k}$$

olur. Dolayısıyla $a \approx c$ olur ve $\approx$ bir denklik ilişkisidir.

Bir defa daha her sınıfın sayılabilir sonsuzlukta olduğunu kanıtlayacağız. $a \in D$ olsun.

$$x = x_0 x_1 \ldots x_{m-1}$$

herhangi bir sonlu dizi olsun. n herhangi bir doğal sayı olsun. O zaman

$$e(x, n, a) = x_0 x_1 \ldots x_{m-1} a_n a_{n+1} \ldots$$

dizisi a'ya denktir çünkü

$$e(x, n, a)_m = a_n$$

olur. Ayrıca a'ya denk her dizi bir n doğal sayısı ve sonlu bir x dizisi için $e(x, n, a)$ biçiminde yazılır. Sonlu diziler ve doğal sayılar sayılabilir olduğu için, $[a]$ sınıfı da sayılabilirdir.

9. *X sayılabilir sonsuzlukta bir küme olsun. X'in öyle bir sayılamaz $(A_i)_{i\in I}$ altküme ailesi bulun ki her i, $j \in I$ göstergeci için ya $A_i \subseteq A_j$ ya da $A_j \subseteq A_i$ olsun.*

Kanıt: X'in $\mathbb{Q}$ olduğunu varsayabiliriz. Her $r \in \mathbb{R}$ için $A_r = (r, \infty) \cap \mathbb{Q}$ olsun. $(A_r)_{r\in\mathbb{R}}$ istenen ailedir.

Kısım III

Kümeler Kuramı ve Aksiyomları

16. Bertrand Russell Paradoksu

1800'lerin sonunda ve 1900'lerin başında matematikte en önemli sorulardan biri, matematiğin çelişkili olup olmadığı sorusuydu. Frege ve Hilbert bu konuya ilgi duyan iki ünlü matematikçiydi. Matematikte çelişki olmadığı kanıtlanmalıydı. Bunun yapılabilmesi için de matematiğin sezgilerimizden bağımsız bir hale getirilip biçimselleştirilmesi ve aksiyomlaştırılması gerekiyordu.

Matematik, örneğin Öklid'in aksiyomlarında bulunan "bir doğru sonsuza kadar uzatılırsa" gibi sezgilere seslenen tümcelerden arınabilmeliydi ki çelişkinin olmadığı kanıtlanabilsin.

Alman mantıkçı ve matematikçi Frege 19'uncu yüzyılın sonlarına doğru en azından aritmetiği sağlam temellere oturtma uğraşına soyundu. Ama 1900'lerin başında Bertrand Russell kümeler kuramında bir paradoks, yani bir çelişki buldu. Daha önce de Burali-Forti paradoksu diye adlandırılan bir paradoks vardı ama nedense bu paradoks matematiği ve matematikçileri altüst etmemişti. Bertrand Russell'ın paradoksuyla birlikte, Frege'nin yıllarını verdiği matematiği biçimselleştirme uğraşı (sayı kavramını mantığa indirgeme uğraşı) büyük bir yenilgiye uğramışa benziyordu.

Bu bölümde açıklayacağımız Russell paradoksu bayağı bir gürültü kopardı. Bunun üzerine, kümeler kuramının (ve matematiğin) aksiyomatik bir hale getirilmesi gerektiği daha fazla belli oldu ve bu amaçla çelişkilerden ve paradokslardan muaf olduğu düşünülen, özellikle Russell Paradoksu'nu bertaraf eden, yani paradoks olmaktan çıkaran birçok teori geliştirildi. Bunlardan en kabul edileni ZFC adı verilen teoridir. Bu teoriden başka kitaplarımızda daha ayrıntılı olarak sözedeceğiz. Bir sonraki bölümde ZFC'nin aksiyomlarını bulabilirsiniz.

Matematik tarihinin kuşkusuz en heyecanlı zamanlarıydı. Bu kadar ilginç bir konuyu burada kesmekten üzüntü duyuyorum ama aksi halde bu kitap hiç bitmeyecek.

Bertrand Russell'ın paradoksunu açıklayayım.

Tüm kümeler kümesini alalım. Bu kümeye X adını verelim. X de bir küme olduğundan $X \in X$ olur elbette.

X'in bazı kümeleri kendi kendisinin elemanı olabilirler. Örneğin X, yukarıda gördüğümüz gibi, kendi kendisinin elemanı olan kümelerden biridir.

X'in bazı kümeleri de kendi kendisinin elemanı olmazlar. Örneğin doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, bir doğal sayı olmadığından, kendi kendisinin bir elemanı değildir.

Şimdi, kendi kendisinin elemanı olmayan kümelerden oluşan kümeyi alalım:

$$Y = \{x : x \notin x\}.$$

Tanımdan dolayı, bir x kümesinin Y'de olması için yeter ve gerek koşul x'in kendi kendisinin elemanı olmamasıdır. Daha matematiksel olarak, her x kümesi için,

$$x \in Y \Leftrightarrow x \notin x$$

önermesi geçerlidir. Bu önerme her x kümesi için geçerli olduğundan, özel olarak Y kümesi için de geçerlidir. Dolayısıyla, yukarıdaki önermede x yerine Y koyarsak doğru bir önerme elde ederiz:

$$Y \in Y \Leftrightarrow Y \notin Y.$$

Bu son önermenin ne dediğine bakalım: Y, Y'nin bir elemanıysa Y, Y'nin bir elemanı olamaz ve Y, Y'nin bir elemanı değilse, Y, Y'nin bir elemanı olur... Bu, bariz bir çelişkidir.

Bu sorunu çözmenin tek bir yolu vardır, o da Y'yi küme olmaktan men etmek! Nitekim, sorun nasıl çözülürse çözülsün, sonunda Y'yi bir biçimde küme olmaktan men ederek çözülür.

Sorun sadece Y'de değildir. Sorun aslında X'tedir. X bir kümeyse, Y'nin bir küme olmasını engellemek insafsızlık olur. Dolayısıyla Y'den önce X'in bir küme olmasını engellemek gerekmektedir.

Sorun sadece X'te de değildir. X'i bir küme olmaktan men etsek bile başka paradokslar bulunabilir. X gibi "çok çok fazla" elemanı olan toplulukların tümünü kümelik vasfından arındırmak gerekmektedir.

Bunun nasıl yapıldığını, daha doğrusu nasıl yapılmaya çalışıldığını bir sonraki bölümde özet olarak göreceğiz.

Alıştırmalar

16.1. $\bigcap_{X \in A} X$ kümesi, Altbölüm 3.3'te şöyle tanımlanmıştı:

$$x \in \bigcap_{X \in A} X \Leftrightarrow \text{ her } X \in A \text{ için}, x \in X.$$

Ama, "A boşküme olduğunda, $\bigcap_{X \in A} X$ tanımı problematiktir" diye de eklemiştik. Problemin kaynağını şimdi anlayabiliriz: Yukarıdaki tanıma göre, $\bigcap_{X \in \emptyset} X$ nesnesinin tüm kümeleri eleman olarak içermesi gerektiğini gösterin.

16.2. $\bigcap_{X\in A} X$ kümesini şöyle tanımlayalım:

$$\bigcap_{X\in A} X = \left\{ x \in \bigcup_{X\in A} X : \text{ her } X \in A \text{ için, } x \in X \right\}.$$

Eğer $A \neq \emptyset$ ise bir önceki tanımla bu tanımın aynı kavramı tanımladıklarını kanıtlayın. Ama eğer $A = \emptyset$ ise, bu yeni tanıma göre $\bigcap_{X\in\emptyset} X = \emptyset$ eşitliğinin elde edileceğini kanıtlayın. Öte yandan bu yeni tanımla,

$$A \subseteq B \Rightarrow \bigcap_{X\in B} X \subseteq \bigcap_{X\in A} X$$

önermesi $A = \emptyset \neq B$ iken yanlış oluyor.

16.3. Her x kümesi için,

$$\{z \in x : z \notin z\} \notin x$$

önermesini kanıtlayın.

17. ZFC Kümeler Kuramının Aksiyomları ve Tanımlar

Bu son bölümde kümeler kuramının aksiyomlarından yola çıkarak, doğal sayı, fonksiyon, ilişki, doğal sayılarda toplama, çarpma ve sıralama gibi matematiksel kavramların matematiksel tanımlarını vereceğiz. Böylece daha önceki bölümlerde işlenen sezgisel kümeler kuramıyla aksiyomatik kümeler kuramı arasındaki ayrım açık bir biçimde ortaya çıkacak ve genç okurla soyut matematik arasında bir bağ kurulacak... diye umuyoruz.

Kümeler kuramı birden çok değişik biçimde aksiyomlaştırılabilir. Bu aksiyom sistemlerinin en ünlüsü, en kabul göreni ve en kullanılanı burada açıklayacağımız ZFC adıyla bilinendir.

ZFC, Zermelo'nun Z'si, Fraenkel'in F'si ve Seçim Aksiyomu'nun "seçim"inin frenkçeleri olan "Choice" ya da "Choix" gibi sözcüklerin C'sidir.

ZFC dışındaki sistemlerin en bilineni Von Neumann, Gödel ve Bernays'in bulduğu ve kısaca GB olarak bilinen aksiyom sistemidir. Ama biz burada sadece ZFC'yi açıklamakla yetineceğiz.

Bu bölüm bir yandan basit, öte yandan derin olacak. Okur birkaç kez okumak zorunda kalabilir. Tüm kanıtları da vermeyeceğiz. Kanıtlar zor olduğundan değil, kitabı daha fazla uzatmamak için. Vermediğimiz kanıtlar [N3]'te kanıtlanacak.

ZFC, tanımlanmamış iki terimi, olduğu gibi tanımlanmadan kabul eder: "küme" ve "elemanı olmak". Küme bir nesne adıdır. "Elemanı olmak" ise iki küme arasındaki doğru ya da yanlış olabilecek bir ilişkidir. Eğer x kümesi y kümesinin elemanıysa bu $x \in y$ olarak yazılır. Aksi halde $x \notin y$ yazılır.

Dikkat: Kümenin ne demek olduğunu ve "elemanı olmanın" anlamını matematiksel olarak açıklamıyoruz; matematiksel açıklamaları yoktur. Pedagojik açıklamaları da metinde uzun uzadıya yaptık. "Küme"yi ve "elemanı olmak"ı tanımsız terimler olarak kabul edeceğiz. Her teori tanımsız terimler kabul etmek zorundadır, aksi halde teoriyi yazmaya başlayamayız bile!

Elemanlar da dahil olmak üzere tanımlayacağımız her şeyin bir küme olduğu dikkatli okurun gözünden kaçmayacaktır, dikkatsiz okurun da gözünden kaçmasın!

Amacımız, büyük ölçüde, aksiyomları kullanarak kümelerden oluşan toplulukların hangilerinin küme olduklarını belirlemek olacak. Bunu yaparken Bertrand Russell Paradoksu (bkz. Bölüm 16) gibi paradokslardan kaçınmak, paradoks yaratacak toplulukların küme olmalarını engellemek istiyoruz.

Aksiyomları teker teker sıralamaya başlamadan önce bir konuya daha parmak basmak gerekiyor. Matematiğin

$$\begin{aligned}&x = x,\\&x = y \to y = x\\&(\alpha \wedge \beta) \to \alpha\\&\alpha \vee \neg\alpha\\&(\varphi(x) \wedge x = y) \to \varphi(y)\end{aligned}$$

gibi (aslında herkesin bildiği ama pek az kimsenin biçimsel olarak bir yerde yazılı gördüğü) mantıksal aksiyomları da vardır. Bu bölümde bu aksiyomlardan değil, kümeler kuramının aksiyomlarından sözedeceğiz. ($\to$, $\wedge$ gibi simgelerin anlamları için [N1]'e bakmalısınız.)

17.1 Basit Aksiyomlar

ZFC'nin birinci aksiyomu, hiç eleman içermeyen bir kümenin varlığını söyleyecek.

A1. Boşküme Aksiyomu. *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Eğer simgesel bir dille yazacak olursak, bu aksiyom,

$$\exists x\, \forall y\, (y \notin x)$$

olarak yazılır ve "öyle bir x vardır ki, y ne olursa olsun, y, x'in bir elemanı değildir" biçiminde okunur.

Bu biçimsellikte, "$\exists x$" simge dizisi "öyle bir x kümesi var ki" olarak, "$\forall y$" simge dizisi "her y kümesi için" olarak okunur.

"$x \notin y$" yerine, daha biçimsel olmak için, "$\neg(x \in y)$" yazabilirdik, nitekim "$\neg$" simgesi, hemen ardından gelen önermenin yanlış olduğunu belirtir.

Şimdilik hiç elemanı olmayan bir kümenin varlığını biliyoruz. (Bu ilk aksiyomdan önce, herhangi bir kümenin olup olmadığını bile bilmiyorduk!) Zaten aksiyomlarımızın çoğu elemanlardan oluşan hangi toplulukların küme olduklarını söyleyecek. Amacımız, bir yandan yeni kümeler yaratırken, diğer yandan da bir önceki bölümde bir paradoksa yol açan "bütün kümeler topluluğu"nun ve daha başka paradokslara yol açan "çok büyük" toplulukların küme olmalarını engellemek.

İkinci aksiyomumuz, aynı elemanları olan iki kümenin birbirine eşit olduklarını söyleyecek:

A2. Küme Eşitliği Aksiyomu. *Aynı elemanları olan iki küme birbirlerine eşittir.*

Bu aksiyom simgesel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Bu aksiyomun ters istikametlisi olan

$$\forall x\, \forall y\, (x = y \rightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

önermesi de doğrudur ama bu önerme için bir aksiyoma ihtiyaç yok, çünkü bu önermenin doğruluğu matematiğin mantıksal aksiyomlarından çıkar: Eğer $x = y$ ise, o zaman x için doğru olan her şey y için de doğrudur.

Bu aksiyom sayesinde hiç elemanı olmayan tek bir küme olduğu kanıtlanabilir. (Kitabın birinci kısmında buna benzer kanıtlar verdik, tekrar etmiyoruz.)

Madem ki hiç elemanı olmayan tek bir küme var, o zaman bu kümeye bir ad verelim: ***boşküme***. Boşkümeyi $\emptyset$ simgesiyle göstereceğiz.

Boşkümenin hiçbir elemanı olmadığından, yani

$$\forall y\, (y \notin \emptyset)$$

olduğundan,

$$\emptyset \notin \emptyset$$

olur.

Bundan böyle formüllerimizde ve önermelerimizde $\emptyset$ simgesini bir kısaltma olarak kullanacağız. Eğer isteseydik bu simgeyi hiç kullanmadan da her şeyi ifade edebilirdik ama o zaman önermelerimiz anlaşılamayacak derecede uzun olurdu.

Benzer şekilde altküme simgesi olan $\subseteq$ simgesini de kullanacağız. $\subseteq$ simgesi şu anlama gelir:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z\, (z \in x \rightarrow z \in y)$$

Bu durumda, x'in y'nin altkümesi olduğu söylenir.

Birinci aksiyomla, hiç elemanı olmayan bir kümenin varlığını öğrenmiş olduk. İkinci aksiyom bize yeni bir küme vermiyor. Demek ki, kümeler evreninde şimdilik sadece tek bir kümenin varlığından emin olabiliriz: Boşküme! Başka kümeler olabilir ya da olmayabilir. Evrene göre değişir... (Masal gibi dinleyin...)

Bir sonraki aksiyom bir kümenin bazı altkümeleri olduğunu söyleyecek. Önce aksiyomu yazalım, daha sonra gereken açıklamaları yaparız.

A3. Tanımlı Altküme Aksiyomu. *x bir küme ve $\varphi(z)$, kümeler kuramının dilinde yazılmış bir özellik olsun. O zaman x'in $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanları bir küme oluştururlar.*

Bir iki örnekle bu aksiyomu açıklamaya çalışalım. Diyelim doğal sayılar kümesi diye bir kümenin varlığını biliyoruz. Ve diyelim çift sayı olma özelliğini kümeler kuramının dilinde ifade edebildik, yani öyle bir $\varphi(z)$ formülü bulduk ki, her z doğal sayısı için, $\varphi(z)$ formülünün doğru olması için yeter ve gerek koşul z'nin bir çift sayı olmasıdır. O zaman yukarıdaki aksiyoma göre, çift doğal sayılardan oluşan bir küme vardır.

Mesela Alıştırma 16.3'te, $\{z \in x : z \notin z\}$ kümesinden sözetmiştik. Bu küme bu aksiyomun yardımıyla, $\varphi(z)$ formülü "$z \notin z$" formülü olarak alınarak bulunmuştur.

"Kümeler kuramının dilinde ifade etme"nin ne demek olduğuna pek takılmayın şimdilik. Aşağı yukarı şu anlama gelir:

$$\exists,\ \forall,\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (,\ ),\ =,\ \in$$

ve x, y, z gibi değişkenleri kullanarak sonlu uzunlukta bir simgeler dizisiyle ifade edilebilmek anlamına gelir.

Bu aksiyomla varlığı söylenen küme, elbette, x kümesinin bir altkümesidir, ne de olsa elemanları x'in ($\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z) elemanlarından oluşuyor.

Ayrıca varlığı söylenen bu küme, Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre, biriciktir. Biricik olan bu kümeyi,

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

olarak yazarız.

Dikkat edilirse, $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan kümelerin bir küme oluşturduğunu söylemedik. Yani,

$$\{z : \varphi(z)\}$$

topluluğunun küme olduğunu söylemedik. Sadece x'in $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan elemanların bir küme oluşturduğunu söyledik. Yani yeni kümemizin elemanlarını x ile kısıtladık. Bu kısıtlama sayesinde Russell Paradoksu'nun engellenmiş olduğunu özellikle vurgulamak isteriz.

Tanımlı Küme Aksiyomu, biçimsel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))).$$

Yukarıdaki y kümesinin "x'in, $\varphi(z)$ formülü tarafından tanımlanmış altkümesi" olduğu söylenir.

Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan önce sadece boşkümenin varlığını biliyorduk, başka küme var mı yok mu bilmiyorduk. Tanımlı Altküme Aksiyomu ise sadece var olan kümelerin altkümelerini verir. Boşkümenin tek bir altkümesi olduğundan, o altküme de boşküme olduğundan, Tanımlı Altküme Aksiyomu bize şimdilik boşkümeden başka kümelerin de var olduğunu söylemiyor, ama ileride tanımlanmış kümelerden başka kümelerin varlığını bilmemize yardımcı olacak.

Şimdilik bu aksiyomu kullanarak, boş olmayan bir kümenin elemanlarının kesişiminin bir küme olduğunu gösterebiliriz:

Önsav 17.1. *x, boş olmayan bir küme olsun. Elemanları, x'in elemanlarının ortak elemanları olan bir küme vardır.*

Kanıt: Tanımlı Altküme Aksiyomu'nu x'in bir x_0 elemanına uygulayacağız. x boşküme olmadığından, x'in bir elemanı vardır. Bu elemanlardan birini seçelim ve seçtiğimiz bu elemana x_0 diyelim. $\varphi(z)$ özelliğimiz de

$$\forall t\,(t \in x \to z \in t)$$

olsun. $\varphi(z)$, z'nin, x'in tüm t elemanlarının elemanı olduğunu söylüyor, dolayısıyla $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan her z elemanı mecburen x_0 kümesinin de bir elemanıdır. Dolayısıyla, Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan dolayı küme olduğunu bildiğimiz

$$\{z \in x_0 : \varphi(z)\}$$

topluluğu, aslında x'in tüm elemanlarının ortak elemanıdır. □

Boş olmayan bir kümemiz olmadığından, bu önsavı şimdilik bir kümeye uygulayamayız ama ileride çok işimize yarayacak.

Yukarıdaki önsavda varlığı kanıtlanan kümeye x'in elemanlarının kesişimi adı verilir ve bu küme $\cap x$ olarak gösterilir.

Tanım gereği,

$$z \in \cap x \Leftrightarrow \text{ her } t \in x \text{ için } z \in t.$$

Ama x'in boşküme olmaması gerektiği hiçbir zaman unutulmamalı, zira yukarıdaki formülde $x = \emptyset$ alırsak ve $\cap\emptyset$'nin bir küme olduğunu varsayarsak, o zaman

$$z \in \cap\emptyset \Leftrightarrow \text{ her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi doğru olur ve sağdaki

$$\text{her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi her z için doğru olduğundan (boşkümenin her elemanı her özelliği sağlar, örneğin z'yi eleman olarak içerir, aksi halde boşkümede o özelliği sağlamayan bir eleman olurdu, bkz. Altbölüm 2.1), $\cap\emptyset$ tüm z kümelerini içerirdi, yani kümeler kümesi olurdu ki böyle bir kümenin olmaması gerektiğini Russell

Paradoksu'ndan dolayı biliyoruz (bkz. Bölüm 16). Nitekim kanıtımızda da x'in boşküme olmaması gerektiğini x'ten bir x_0 elemanı seçerek kullandık...

Alıştırma 17.1. x ve y birer kümeyse, $x \setminus y$'nin de bir küme olduğunu (bkz. Altbölüm 3.5), yani

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \Leftrightarrow (t \in x \wedge t \notin y))$$

önermesini kanıtlayın.

Bir sonraki aksiyomu okurken, her kümenin elemanlarının da birer küme olduklarını unutmayın.

A4. Bileşim Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının en azından birinde olan elemanlardan oluşan bir küme vardır.*

Bu aksiyomun biçimsel yazılımı şöyledir:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists t\, (t \in x \wedge z \in t)).$$

Bileşim Aksiyomu'nun var olduğunu söylediği bu küme biriciktir. Adına x'in elemanlarının bileşimi denir ve $\cup x$ (ya da $\bigcup x$) olarak gösterilir. Demek ki,

$$z \in \cup x \Leftrightarrow \exists t\, (t \in x \wedge z \in t).$$

Şimdilik elimizde sadece boşküme olduğundan, bu aksiyomu ancak boşkümeye uygulayabiliriz. x yerine $\emptyset$ alalım, bakalım ne elde edeceğiz. (Boşkümeden başka bir şey elde edememememiz gerekiyor, yoktan bir şey var edemeyiz.)

$$z \in \cup\emptyset \Leftrightarrow \exists t\, (t \in \emptyset \wedge z \in t).$$

Demek ki z'nin $\cup\emptyset$ kümesinde olması için, yeter ve gerek koşul, boşkümede z'yi içeren bir t elemanının olması! Ama bu mümkün olmadığından $\cup\emptyset$ kümesinin hiç elemanı olamaz, yani

$$\cup\emptyset = \emptyset$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdiye kadar 4 aksiyom yazdık, ama boşkümeden öteye gidemedik, boşkümeden başka bir kümenin olup olmadığını bile bilmiyoruz. Bir sonraki aksiyom, boşkümeden başka kümeler de var edecek.

Bir sonraki aksiyomun anafikri şu: Eğer x ve y birer kümeyse o zaman sadece ve sadece bu iki elemanı içeren bir $\{x, y\}$ kümesi vardır.

A5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. *Eğer x ve y birer kümeyse, o zaman sadece ve sadece x'i ve y'yi eleman olarak içeren bir küme vardır.*

Bu aksiyomun biçimsel hali şöyle:

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)).$$

Varolduğu söylenen bu küme $\{x, y\}$ olarak yazılır.

Dikkat: Aksiyomda x, y'den farklı olmak zorundadır demiyor. x, bal gibi de y'ye eşit olabilir. Bu durumda $\{x, y\}$ yerine daha sade olarak $\{x\}$ yazılır.

Bu aksiyomu, şimdilik yegâne kümemiz olan boşkümeye uygulayalım, yani yukarıdaki aksiyomda $x = y = \emptyset$ alalım. O zaman tek elemanlı $\{\emptyset\}$ kümesini buluruz.

Devam edelim, A5 aksiyomunda $x = \emptyset$ ve $y = \{\emptyset\}$ alırsak,

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

kümesini buluruz. Bu kümenin iki elemanı vardır, çünkü $\emptyset$ ve $\{\emptyset\}$ farklı kümelerdir, çünkü aynı elemanları yoktur, örneğin $\{\emptyset\}$ kümesinin $\emptyset$ elemanı diğer küme olan boşkümenin bir elemanı değildir. Devamla,

$$\begin{aligned}
&\{\{\emptyset\}\},\\
&\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}\\
&\{\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}$$

gibi kümeler de buluruz.

Bütün bu kümeler en fazla iki elemanlı. Ama A5 ile A4'ü birlikte kullanarak daha fazla elemanlı kümeler de bulabiliriz. Önce bir önsav:

Önsav 17.2. *Eğer x ve y iki kümeyse, $x \cup y$ de bir kümedir, yani ya x ya da y'nin (her ikisinin birden de olabilir) elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

Kanıt: A5'e göre $\{x, y\}$ bir kümedir. A4 ise bir kümenin elemanlarının bileşiminin bir küme olduğunu söylüyor, demek ki $\{x, y\}$ kümesinin elemanlarının bileşimi de bir kümedir. $\square$

Yukarıda varlığı söylenen kümeyi daha önce (A4'ten hemen sonra) $\cup\{x, y\}$ olarak yazdık ama bu küme daha ziyade $x \cup y$ olarak yazılır.

İki kümenin bileşimini alabiliyorsak, biraz daha sabırla, elbette sonlu sayıda kümenin de bileşimini alabiliriz. Bu arada

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$$

ya da

$$x \cup y = y \cup x$$

gibi kitapta daha önce kanıtladığımız eşitlikleri bir kez daha kanıtlamıyoruz. Burada amacımız ZFC aksiyomlarını verip ana teoremleri ortaya koymak.

Önsav 17.2 sayesinde örneğin üç elemanlı bir kümenin varlığını kanıtlayabiliriz.

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu biliyoruz.

$$\{\{\{\emptyset\}\}\}$$

topluluğunun da bir küme olduğunu biliyoruz. Önsav 17.2'yi kullanarak bu iki kümenin bileşimini alarak, üç elemanlı

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

kümesini buluruz.

Böyle giderek, istediğimiz çoklukta elemanı olan, ama hep sonlu sayıda elemanı olan kümeler bulabiliriz. A4 ve A5 aksiyomları bize sadece sonlu sayıda elemanı olan kümeler vadeder, sonsuz sayıda elemanı olan bir kümenin varlığını göstermek için başka aksiyomlara ihtiyacımız var.

Bu arada, sonsuz sayıda elemanı olan bir kümenin olmadığını söylemiyorum, sadece varsa da varlığını kanıtlayamayacağımızı söylüyorum.

Alıştırma 17.2. x ve y birer kümeyse, $x\Delta y$'nin de bir küme olduğunu kanıtlayın, yani

$$\forall x\, \forall y\, \exists z\, \forall t\, (t \in z \Leftrightarrow ((t \in x \wedge t \notin y) \vee (t \notin x \wedge t \in y)))$$

önermesini kanıtlayın. (Burada varlığı söylenen z, x ve y kümelerinin simetrik farkıdır.)

Ayşegül Saymaya Başlıyor! Şimdiye kadar verdiğimiz 5 aksiyomla matematiksel olarak doğal sayıları teker teker tanımlayabiliriz. ("5 aksiyom" yazarken kullandığımız 5 sayısı matematiksel 5 sayısı değildir, edebi 5 sayısıdır!)

Bundan böyle

$$0 = \emptyset$$

tanımını kabul ediyoruz ve 0'a "***sıfır***" adını veriyoruz. Demek ki 0 bir küme, hem de boşküme.

1 sayısını $\{\emptyset\}$, yani $\{0\}$ olarak tanımlıyoruz.

2 sayısını $\{0, 1\}$ olarak tanımlıyoruz.

3 sayısını $\{0, 1, 2\}$ olarak tanımlıyoruz.

4 sayısını $\{0, 1, 2, 3\}$ olarak tanımlıyoruz.

5 sayısını $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ olarak tanımlıyoruz.

Bu tanımlara bir de şu gözle bakalım:

$$\begin{aligned}
5 &= \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3\} \cup \{4\} = 4 \cup \{4\},\\
4 &= \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = 3 \cup \{3\},\\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\},\\
2 &= \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\},\\
1 &= \{0\} = \emptyset \cup \{0\} = 0 \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Görüldüğü üzere, her seferinde x'ten sonra gelen sayı, daha doğrusu x'ten hemen sonra tanımlanan sayı

$$x \cup \{x\}$$

olarak tanımlanmış. Örneğin, 6 sayısını da 5'ten sonra gelen sayı olarak tanımlayabiliriz:

$$6 = 5 \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Eğer x bir kümeyse,

$$S(x) = x \cup \{x\}$$

olarak tanımlansın. $S(x)$'in S'sini "sonra gelen"in ya da "bir sonraki"nin S'si olarak düşünebilirsiniz. $S(x)$ yerine daha basit olarak bazen Sx de yazdığımız olacak.

İleride, doğal sayıları ve toplamayı tanımladığımız zaman, her n doğal sayısı için $Sn = n + 1$ olduğunu göreceğiz. Daha doğrusu, toplamayı bu eşitlik doğru olacak biçimde tanımlayacağız.

Önsav 17.3. *Eğer x bir kümeyse, Sx de bir kümedir.*

Kanıt: f bir küme olduğuna göre, A5'e göre $\{x\}$ de bir kümedir. Gene A5'e göre $\{x, \{x\}\}$ de bir kümedir. A4'e göre $\{x, \{x\}\}$ kümesinin elemanlarının bileşimi, yani $x \cup \{x\}$ de, yani Sx de bir kümedir. □

Bu yöntemle, 200 sayısını da biraz sabırla tanımlayabiliriz. Ama tüm doğal sayıların hepsini içeren bir kümenin varlığını henüz gösteremeyiz. Yani verilmiş sonlu sayıda doğal sayıyı tanımlayabiliriz ama doğal sayılar kümesinin varlığını kanıtlayamayız, çünkü elimizdeki aksiyomlarla sonsuz bir kümenin varlığını gösteremeyiz. Bunun için ayrı bir aksiyoma gerek duyacağız. Ama önce basit bir aksiyom daha.

Okur şimdilik sayıların birer küme olarak tanımlandıklarını aklında tutsun.

A6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, elemanları x'in altkümelerinden oluşan bir küme vardır.*

Bu küme $\wp(x)$ olarak yazılır.

Biçimsel matematik dilinde bu aksiyom şunu söylemektedir:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Burada kısaltma olarak $\subseteq$ simgesini kullandık. Kısaltma kullanmadan bu aksiyom şöyle yazılır:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \forall t\, (t \in z \rightarrow t \in x)).$$

Kitabın ilk bölümlerinde altkümeler kümesi $\wp(x)$'ten uzun uzadıya bahsettiğimiz için, burada üstünde fazla durmayacağız.

Buraya kadar verdiklerimiz, kümeler kuramının en basit aksiyomlarıydı. Neredeyse ilkokul seviyesinde.

Bu aksiyomlarla sonsuz bir kümenin varlığı kanıtlanamaz. Çünkü sonlu kümelerden yola çıkarak aksiyomlarımızdan hiçbiri sonsuz bir küme yaratmamızı sağlamaz. Bunu görmek için akiyomlarımıza teker teker bakalım.

A1, 0 elemanlı bir kümenin varlığını söylüyor. Bu aksiyom sonsuz bir küme yaratamaz.

A2, zaten bir küme yaratmıyor.

A3, var olan bir x kümesinin bir altkümesini yaratıyor. Eğer x sonlu bir kümeyse, A3'ün yarattığı altküme de sonludur elbette.

A4, bir x kümesinin elemanlarının bileşimini alıyor. Eğer x'te sonlu sayıda eleman varsa ve x'in her elemanı sonlu bir kümeyse, elbette x'in elemanlarının bileşimi de sonludur. Nitekim eğer x'in en fazla n tane elemanı varsa ve x'in her elemanının en fazla x tane elemanı varsa, x'in elemanlarının bileşiminin en fazla nm tane elemanı olabilir.

A5, zaten en fazla 2 elemanlı kümeler yaratıyor.

A6 ise, verilen bir x kümesinden x'in altkümeler kümesini var ediyor. Ama eğer x'in n tane elemanı varsa, x'in 2^n tane altkümesi vardır, dolayısıyla bu aksiyom da sonsuz küme yaratmakta kullanılamaz.

17.2 Sonsuzluk ve Doğal Sayılar Kümesi

Demek ki sonsuz bir küme yaratmak için yeni bir aksiyoma ihtiyacımız var. İşte o aksiyom:

A7. Sonsuz Küme Aksiyomu. *$\emptyset$'nin elemanı olduğu ve her x elemanı için Sx'in de elemanı olduğu en az bir küme vardır.*

Bu aksiyom simgesel dilde şöyle yazılır:

$$\exists x\,(\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to Sy \in x)).$$

Burada Sy bir kısaltma olarak kullanılmıştır elbette. Sy'den kurtulmak için, yukarıdaki önermeyi önce şöyle yazalım:

$$\exists x\,(\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to \exists z\,(z = Sy \wedge z \in x))).$$

Sy'den tamamıyla kurtulmak için, $z = Sy$ yerine şu önermeyi koyalım:

$$\forall t\,(t \in z \leftrightarrow (t \in y \vee t = y)).$$

A7'nin yeni biçimsel hali (olabildiğince az parantezle!) şöyledir:

$$\exists x\,(\emptyset \in x \wedge \forall y\,(y \in x \to \exists z\,(\forall t\,(t \in z \leftrightarrow (t \in y \vee t = y)) \wedge z \in x))).$$

Bir de boşkümeden kurtulmak gerekiyor. Bunun için,

$$\emptyset \in x$$

yerine,

$$\exists u\,(\forall v\,\neg(v \in u) \wedge u \in x)$$

yazmamız gerekiyor. Bunu da yaparsak, o zaman A7, buraya almayacağımız anlaşılmaz bir biçime dönüşür, yani biçimsel matematik bu aşamada, ve hatta belki de daha önce, iflas eder, biz ölümlüler için anlaşılmaz olmaya başlar! Önermenin yazmadığımız bu son biçiminde, sadece matematiğin ve kümeler kuramının dilinin simgeleri vardır.

Görüldüğü gibi güzelim aksiyom pek ne dediği anlaşılmayan bir garabete dönüştü. Kısaltmalar, hatta gündelik dil işte bu yüzden sadece yararlı değil, ayrıca vazgeçilmezdir de.

Doğal sayılar kümesi -eğer varsa- A7'nin varlığını söylediği kümelerden biri olmalı. Çünkü A7'nin var olduğunu söylediği küme,

0'ı içerir.

0'i içerdiği için S0'ı da, yani

1'i de içerir.

1'i içerdiği için S1'i de, yani

2'yi de içerir.

Bunu böyle istediğimiz kadar uzatırız.

Dolayısıyla A7'nin var olduğunu söylediği küme tüm doğal sayıları eleman olarak içerir (her ne kadar tüm doğal sayıları değil de sadece ilk birkaç doğal sayıyı tanımladıysak da), daha doğrusu A7'nin var olduğunu söylediği küme, doğal sayılar olması gerektiğini düşündüğümüz kümeleri içerir.

Demek ki doğal sayılar kümesi -eğer varsa böyle bir küme- A7'nin varlığını söylediği kümenin bir altkümesi olmalı.

Hatta biraz düşününce, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ (eğer varsa tabii, yoksa söylenecek bir şey yok), A7'nin varlığını söylediği kümelerin en küçüğü olmalı, dahası, hepsinin kesişimi olmalı. Bunu şimdi bir teorem olarak kanıtlayabiliriz.

Önce bir tanım verelim. Boşkümeyi eleman olarak içeren, ve her x elemanı için, Sx'i de eleman olarak içeren kümelere ***tümevarımsal küme*** denir. Bu, pek yerinde bir adlandırma değil ama ne yapalım ki öyle adlandırılmış, kabul etmek zorundayız. Demek ki A7, en az bir tümevarımsal kümenin varlığını söylüyor.

Teorem 17.4. *Tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi bir kümedir ve en küçük tümevarımsal kümedir* (*yani tüm tümevarımsal kümelerin altkümesidir.*)

Kanıt: Kanıtın en zor yanı tüm tümevarımsal kümelerin kesişiminin bir küme olduğunu kanıtlamak. Bunu yaptıktan sonra kesişimin tümevarımsal bir küme olduğunu kanıtlamak zor değil.

Eğer tümevarımsal kümeler bir küme oluştursaydı, yani elemanları tüm tümevarımsal kümeler olan bir küme olsaydı, o zaman Önsav 17.1'e göre tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi bir küme olurdu ama ne yazık ki tüm tümevarımsal kümelerin elemanı olduğu bir küme yoktur. Bu zorluğu şöyle aşacağız:

A7'ye göre en az bir tümevarımsal küme vardır. x, bunlardan biri olsun. $y = \wp(x)$ olsun. A6'ya göre y bir kümedir.

$$z = \{t \in y : t \text{ tümevarımsal}\}$$

olsun. A3'e göre z bir kümedir. Nitekim $\varphi(t)$ önermesi

$$t \text{ tümevarımsal}$$

anlamına gelsin, yani $\varphi(t)$,

$$\emptyset \in t \wedge \forall y\,(y \in t \to Sy \in t)$$

olsun. $\varphi(t)$'nin kümeler kuramının dilinde yazılan bir özellik olduğunu bir iki sayfa önce gördük. Demek ki,

$$z = \{t \in y : \varphi(t)\}$$

topluluğu A3'e göre bir kümedir. z, elemanları x'in tümevarımsal altkümeleri olan bir küme. x, x'in tümevarımsal bir altkümesi olduğuna göre, $x \in z$, yani z boşküme değil. Önsav 17.1'e göre $\cap z$ bir kümedir. $\cap z$, elbette x'in tüm tümevarımsal altkümelerinin kesişimi.

$\cap z$ kümesinin istediğimiz küme olduğunu göstereceğiz.

Şimdi tümevarımsal kümelerin kesişiminin tümevarımsal olduğunu gösterelim. Böylece, $\cap z$ kümesinin tümevarımsal olduğunu göstermiş olacağız. A, tümevarımsal kümelerden oluşan herhangi bir küme olsun. $\cap A$ kümesinin tümevarımsal olduğunu göstereceğiz. Önce boşkümenin $\cap A$ kümesinin bir elemanı olduğunu gösterelim. Ama bu çok kolay: Boşküme A'nın her elemanının bir elemanı olduğundan (çünkü A'nın her elemanı tümevarımsaldır), boşküme A'nın tüm elemanlarının kesişiminde, yani $\cap A$ kümesindedir. Şimdi de $\cap A$ kümesinden bir b elemanı alalım. Demek ki b, A'nın her elemanının elemanı. Ama A'nın her elemanı tümevarımsal olduğundan, bundan, Sb'nin A'nın her elemanının elemanı olduğu çıkar. Yani $Sb \in \cap A$.

Böylece, $\cap z$ kümesinin de tümevarımsal olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi u herhangi bir tümevarımsal küme olsun.

$$\cap z \subseteq u$$

içindeliğini göstereceğiz.

A5'e göre $\{u, x\}$ bir kümedir. Önsav 17.1'e göre $u \cap x$ bir kümedir. Ayrıca, iki tümevarımsal kümenin kesişimi olduğundan, yukarıda kanıtladığımız üzere

$u \cap x$ tümevarımsal bir kümedir. Ama $u \cap x$ elbette x'in bir altkümesi. Demek ki $u \cap x$, x'in tümevarımsal bir altkümesi. Ama $\cap z$, x'in tüm tümevarımsal kümelerin kesişimi. Demek ki kesişimi alınan kümelerden biri de $u \cap x$. Bundan

$$\cap z \subseteq u \cap x$$

çıkar. $u \cap x \subseteq u$ olduğundan, bundan da

$$\cap z \subseteq u$$

çıkar. İstediğimizi kanıtladık, tümevarımsal bir küme olan $\cap z$ kümesi, tüm tümevarımsal kümelerin altkümesi; yani en küçük tümevarımsal küme. □

Teorem 17.4'teki kümeye bundan böyle $\mathbb{N}$ diyeceğiz. $\mathbb{N}$'nin elemanlarına ***doğal sayı*** adını vereceğiz. $\mathbb{N}$ de, doğal olarak, ***doğal sayılar kümesi*** olacak.

"Tümevarımla kanıt" ilkesinin bir teorem olduğunu gösterebiliriz:

Teorem 17.5 (Tümevarım İlkesi I)**.** *A bir küme olsun. Eğer $0 \in A$ ve her $x \in A$ için Sx de A'nın bir elemanıysa o zaman $\mathbb{N} \subseteq A$ olur.*

Sonuç 17.6 (Tümevarım İlkesi II)**.** *$\varphi(x)$ bir formül olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğruysa, o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n)$ doğru olur.*

Kanıtlar: Teorem 17.5 aynen $\mathbb{N}$'nin tanımından çıkar. Teorem 17.5'ten Sonuç 17.6'yı çıkarmak için, Teorem 17.5'te,

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \text{ doğru}\}$$

tanımını yapmak yeterli. □

Yakında $\mathbb{N}$ üzerine toplama ve çarpma işlemlerini ve sıralama ilişkisini ($\leq$) tanımlayacağız. Ama önce metinde sezgisel olarak tanımlanan bazı kavramları matematiksel olarak tanımlamamız lazım.

17.3 İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Tanımı aynen metinde yaptığımız gibi yapacağız, yalnız kartezyen çarpımın küme olduğuna dikkat edeceğiz.

Eğer x ve y iki kümeyse,

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

topluluğunun bir küme olduğu A5 kullanılarak kolaylıkla kanıtlanabilir. Bundan böyle bu kümeyi (x, y) olarak yazacağız:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

(x, y)'ye bir ***çift*** ya da ***ikili*** adı verilir.

Elbette, eğer x, y, z üç kümeyse, $((x,y),z)$ ya da $(x,(y,z))$ kümelerini de var edebiliriz.

Önsav 17.7. *$x = y$ ve $y = t$ eşitlikleri, $(x,y) = (z,t)$ eşitliği için yeter ve gerek koşuldur. Ayrıca*
i. *Eğer $x \in A$ ve $y \in B$ ise $(x,y) \in \wp(\wp(A \cup B))$ olur.*
ii. *Eğer $\alpha = (x,y)$ ise,*

$$x = \bigcap \bigcap \alpha \text{ ve } y = (\bigcup \bigcup \alpha \setminus \bigcap \bigcap \alpha) \cup (\bigcap \bigcup \alpha)$$

olur, yani α, x ve y'yi kümeler kuramının bir formülüyle tanımlar.

Bariz kanıtı okura bırakıyoruz, zaten metinde de kanıtlanmıştı. x'e (x,y) çiftinin ***birinci izdüşümü***, y'ye de ***ikinci izdüşümü*** denir.

$$\mathrm{pr}_1(x,y) = x \text{ ve } pr_2(x,y) = y$$

yazılır.

Bu önsav ışığında X ve Y kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımını tanımlayabiliriz: $X \times Y$ ***kartezyen çarpımı***

$$\{\alpha \in \wp(\wp(X \cup Y)) : \exists x\, \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge \alpha = (x,y))\}.$$

kümesi olarak tanımlanmıştır. Bunun bir küme olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. Kanıtta elbette A3'ü kullanmalısınız.

İleride kartezyen çarpımın tanımını değiştireceğiz. Fonksiyonları tanımlayabilmek için şimdilik bu geçici tanıma ihtiyacımız var.

Biraz ileride $(X \times Y) \times Z$ gibi kartezyen çarpımları da kullanacağız. Bazen bu kartezyen çarpımlarını parantezsiz biçimde,

$$X \times Y \times Z$$

olarak yazacağız. Elemanlarını da $((x,y),z)$ yerine (x,y,z) olarak yazacağız. Bu tür elemanlara ***üçlü*** diyeceğiz.

17.4 İkili İlişki ve Sıralama

X bir küme olsun. X üzerine ikili bir ***ilişki*** $X \times X$ kartezyen çarpımının bir R altkümesidir. $(x,y) \in R$ yerine çoğu zaman xRy yazılır.

R yerine, $\equiv$, $\approx$, $\leq$, $\subseteq$ gibi, bize daha fazla anlam ifade eden, sezgimize ve alışkanlıklarımıza daha fazla seslenen simgeler de kullanılır.

Çok bilinen üç tür ilişki vardır:

1. $R = X \times X$. Bu ilişkide, her eleman her elemanla ilişkidedir, dolayısıyla pek ilginç bir ilişki değildir.

2. $R = \emptyset$. Bu ilişkide, hiçbir eleman bir başka elemanla ilişkide değildir, dolayısıyla bu da pek ilginç bir ilişki değildir.

3. $R = \{(x, y) \in X : x = y\} = \{(x, x) : x \in X\}$. Bu ilişkide her eleman sadece kendisiyle ilişkidedir.

Eğer her $x \in X$ için xRx oluyorsa, R'ye ***yansımalı ilişki*** denir.

Eğer her x, $y \in X$ için, xRy olduğunda yRx oluyorsa, R'ye ***simetrik ilişki*** denir.

Eğer her x, y, $z \in X$ için, xRy ve yRz olduğunda xRz oluyorsa, R'ye ***geçişli*** ya da ***geçişkenli ilişki*** denir.

Eğer her x, $y \in X$ için, xRy ve yRx olduğunda $x = y$ oluyorsa, R'ye ***antisimetrik ilişki*** denir.

Yansımalı, simetrik ve geçişli ilişkilere ***denklik ilişkisi*** adı verilir. Metinde bu kavram üzerine uzun uzun durduk.

Yansımalı, antisimetrik ve geçişli ilişkilere ***sıralama*** ya da ***yarısıralama*** denir. Örneğin A bir kümeyse ve $X = \wp(A)$ ise, "$x \subseteq y$" ilişkisi bir sıralamadır.

Sıralamalar genellikle R yerine $\leq$ simgesiyle gösterilir, biz de öyle yapalım.

Eğer bir $\leq$ sıralamasında her $x, y \in X$ için, $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ilişkilerinden biri doğru oluyorsa, o zaman bu sıralamaya ***tamsıralama*** denir.

$\leq$ ikili ilişkisi X üzerine bir tamsıralama olsun. $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. Eğer A'da, her $x \in A$ için $a \leq x$ ilişkisini sağlayan bir a elemanı varsa, bu a elemanına ($\leq$ sıralaması için) A'nın ***en küçük elemanı*** adı verilir. Eğer X'in boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı varsa bu sıralamaya ***iyisıralama*** denir.

Doğal sayılar kümesi üzerine bildiğimiz $\leq$ sıralamasını kolaylıkla tanımlayabiliriz:

Teorem 17.8. *n, $m \in \mathbb{N}$ için, şu iki koşul birbirine denktir:*
a. *$n \in m$ ya da $n = m$.*
b. *$n \subseteq m$.*
Ve $\subseteq$ ilişkisi $\mathbb{N}$ üzerine bir iyisıralamadır.

Sıralama elbette $\subseteq$ olarak değil de, $\leq$ olarak yazılır. Eğer $n \leq m$ ve $n \neq m$ ise $n < m$ yazılır. Demek ki,

$$n < m \Leftrightarrow n \in m.$$

Dolayısıyla bu tanımla, her doğal sayının kendisinden küçük doğal sayılar kümesi olduğu çıkar.

Sonuç 17.9 (Tümevarım İlkesi III)**.** *$\varphi(x)$ bir formül olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için, her $i < n$ için $\varphi(i)$ doğru olduğunda $\varphi(n)$ de doğruysa, o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n)$ doğru olur.*

17.5 Fonksiyon

X ve Y birer küme olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımında bir ***grafik***, $X \times Y$'nin şu özelliğini sağlayan bir G altkümesidir:

Her $x \in X$ için, $(x, y) \in G$ içindeliğini
sağlayan bir ve bir tane $y \in Y$ vardır.

X'ten Y'ye giden bir ***fonksiyon***, $X \times Y$ kartezyen çarpımının bir G grafiği için (X, Y, G) biçiminde yazılan bir üçlüdür.

Eğer $f = (X, Y, G)$ bir fonksiyonsa, X'e f'nin ***tanım kümesi***, Y'ye f'nin ***değer kümesi***, G'ye de f'nin ***grafiği*** adı verilir. Eğer $x \in X$ için, $(x, y) \in G$ ise, bu y (verilmiş x için) biricik olduğundan,

$$f(x) = y$$

ya da

$$fx = y$$

yazabiliriz. y'ye f'nin x'te aldığı ***değer*** denir. Çoğu zaman bir $f = (X, Y, G)$ fonksiyonu, G'den hiç sözedilmeden,

$$f : X \longrightarrow Y$$

olarak gösterilir. Eğer $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan y'yi x cinsinden ifade eden bir kural bulabilirsek, o zaman G'yi bu kuralla belirleyebiliriz.

Eğer (X, Y, G) üçlüsü bir fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise, o zaman (X, Y_1, G) üçlüsü de bir fonskiyondur. Demek ki X ve G, Y'yi belirlemeye yetmiyor.

Öte yandan, G grafiği X'i belirler; yani eğer $((X, Y), G)$ ve

$$((X_1, Y_1), G)$$

birer fonksiyonsa, o zaman $X = X_1$ olmak zorundadır. (Neden?)

Birebir ve örten fonksiyonlar, eşleme ve eşleşmeler, özdeşlik fonksiyonları, fonksiyonların bileşkesi gibi kavramlar aynen metindeki gibi tanımlanırlar. Bir kez daha ayrıntılara girme gereğini duymuyoruz.

Örnek 17.3. X ve Y birer küme olsun.

$$G_1 = \{(\alpha, x) \in (X \times Y) \times X : \mathrm{pr}_1(\alpha) = x\}$$

olsun. O zaman $(X \times Y, X, G_1)$ örten bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, tahmin edileceği üzere,

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$$

olarak yazılır ve ***birinci izdüşüm fonksiyonu*** olarak bilinir. Benzer şekilde ***ikinci izdüşüm fonksiyonu***

$$\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$$

fonksiyonu da tanımlanabilir.

Önsav 17.10. *X ve Y birer küme olsun. X'ten Y'ye giden fonksiyonlar bir küme oluştururlar.*

Kanıt: Kanıtı okura bırakıyoruz. □

X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesi

$$\mathrm{Fonk}(X,Y),\ {}^{X}Y \text{ ya da } Y^X$$

olarak yazılır.

Birebir ve örten fonksiyonların ve eşleme ve eşleşmelerin tanımı kitapta daha önce tanımlandığı gibidir. Tekrar etmeyeceğiz.

17.6 Sonlu Kümeler

Eğer bir X kümesi bir doğal sayıyla eşlenikse, o zaman o kümeye ***sonlu küme*** adı verilir. Bir kümenin en çok bir doğal sayıyla eşlenik olduğu, sonlu kümelerin altkümelerinin, bileşimlerinin ve sonlu kartezyen çarpımlarının da sonlu olduğu, kanıtları oldukça kolay ama can sıkıcı olacak kadar uzun önermelerdir.

Bazen sonluluğun bir başka tanımı kabul edilir: Eğer X bir kümeyse ve bir $x \in X$ için $X \setminus \{x\}$ ile X kümeleri eşlenik değillerse X'e ***sonlu küme*** adı verilir.

Bu iki sonluluk kavramının eşdeğer olduğu hiç de bariz değildir ve kanıtı için Seçim Aksiyomu gerekir.

Sonlu olmayan kümelere de ***sonsuz küme*** adı verilir.

Birinci tanımın daha doğal olduğu bariz olmalı.

Bu altbölümü hiçbir şeyin sezgiye bırakılmadığını göstermek amacıyla yazdık. "Sonlu olmak" bile tanımlanır biçimsel matematikte.

17.7 Doğal Sayılarda Toplama ve Çarpma

Bu altbölümde yapacaklarımızın hepsini bir önceki teoremi kullanarak da yapabilirdik. Ama bu çabaya girişmeyeceğiz.

Toplama. İlk olarak doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ üzerine toplamayı tanımlayalım. Toplama, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir $+$ fonksiyonu olacak. Tabii, $+(n,m)$ yerine, alışık olduğumuz $n+m$ yazılımını kullanacağız.

Bir an için toplamanın tanımını bildiğimizi varsayarsak,

$$n+0=n$$

eşitliğinin sağlanması gerektiğini görürüz. Ayrıca, "artı 1" işleminin S tarafından tanımlanacağını, yani her n doğal sayısı için

$$Sn=n+1$$

eşitliğinin doğru olacağını düşünürsek, o zaman,

$$n + Sm = S(n + m)$$

eşitliğinin de doğru olması gerektiğini anlarız, çünkü ne de olsa, toplama matematiksel olarak nasıl tanımlanırsa tanımlansın,

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1$$

eşitliğinin doğru olması gerektiğini biliyoruz. Dolayısıyla toplamayı, her n doğal sayısı için,

$$n + 0 = n$$

ve

$$n + Sm = S(n + m)$$

eşitlikleri doğru olacak biçimde tanımlamalıyız.

Fonksiyonların grafikleriyle tanımlandığını biliyoruz. Dolayısıyla önce tanımlamak istediğimiz toplama fonksiyonunun grafiğini, yani

$$G_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = z\}$$

kümesini bir biçimde tanımlamalıyız ki toplamayı tanımlayabilelim!

Tanımlamak istediğimiz bu G_+ kümesinin şu iki özelliği olmalı:

1. Her $x \in \mathbb{N}$ için $(x, 0, x) \in G_+$ olmalı, çünkü $x + 0 = x$ eşitliğinin doğru olmasını istiyoruz.

2. Her x, y, $z \in \mathbb{N}$ için eğer $(x, y, z) \in G_+$ ise, o zaman, $(x, Sy, Sz) \in G_+$ olmalı, çünkü eğer $x + y = z$ ise,

$$x + Sy = x + (y + 1) = (x + y) + 1 = z + 1 = Sz$$

eşitliği doğru olmalı.

Ama $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bu iki özelliği sağlayan çok altkümesi var, mesela $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin kendisi bu iki özelliği sağlar. Biraz düşününce görülecektir ki, G_+ kümesi bu iki özellikleri sağlayan kümelerin en küçüğü olmalıdır.

G_+ kümesini tanımlamaya başlıyoruz. A, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesi olsun. Eğer A kümesi, her $(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için,

T1. $(x, 0, z) \in A$,
T2. $(x, y, z) \in A \to (x, Sy, Sz) \in A$

özelliklerini sağlıyorsa, A'ya ***toplamsal küme*** diyelim. Elbette $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi bir toplamsal kümedir. Demek ki en az bir toplamsal küme vardır.

Önsav 17.11. *Tüm toplamsal kümelerin kesişimi toplamsal bir kümedir; dolayısıyla bu kesişim en küçük toplamsal kümedir. Bu en küçük toplamsal küme bir grafiktir, yani* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*'den* $\mathbb{N}$*'ye giden bir fonksiyon tanımlar. Eğer bu fonksiyona* $+$ *dersek ve* $+(x, y)$ *yerine* $x + y$ *yazarsak,*

$$x + 0 = 0 \text{ ve } x + Sy = S(x + y)$$

olur.

Kanıt: Önsavın birinci ve sonuncu tümcelerinin kanıtı çok kolaydır. İkinci tümcesi ise tümevarımla kanıtlanır. Kanıt zor olmasa da uzundur. □

Buradan $Sx = x + 1$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$x + 1 = x + S0 = S(x + 0) = Sx.$$

Bu eşitlikle, tümevarım ilkesi alışageldiğimiz biçimine kavuşur.

Önsav 17.12. *Şu eşitlik doğrudur:* $2 + 2 = 4$.

Kanıt: $2 = S1$, $3 = S2$ ve $4 = S3$ tanımlarını anımsayıp hesaplayalım:

$$2 + 2 = 2 + S1 = S(2 + 1) = SS2 = S3 = 4.$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Dikkat: $x + 0 = 0$ eşitliği, $0 + x = x$ eşitliği demek değildir. Bu ikinci eşitliğin ayrıca kanıtlanması gerekir. Bunun gibi,

$$\begin{aligned} &x + y = y + x, \\ &x + (y + z) = (x + y) + z, \\ &x + y = x + z \to y = z \end{aligned}$$

gibi ilk ya da ortaokuldan beri "bildiğimiz" önermeleri tümevarımla kanıtlayabiliriz. Ayrıca

$$x + z = y \text{ eşitliğini sağlayan bir } z \in \mathbb{N} \text{ vardır}$$

önermesiyle $x \leq y$ önermesinin eşdeğer olduğu gene tümevarımla kanıtlanabilir. Bunun gibi toplamayla eşitsizliği harmanlayan,

$$x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z$$

önermesi de kanıtlanabilir. Bütün bunları [N3]'te biçimsel olarak yapacağız. Burada kısaca geçiyoruz.

Çarpma. Şimdi de çarpmayı tanımlayalım. Toplamı tanımlarken girdiğimiz kadar ayrıntıya girmeyeceğiz çünkü yöntemimiz aynı (ya da benzer diyelim) olacak.

A, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kartezyen çarpımının bir altkümesi olsun. Eğer A kümesi, her $(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üçlüsü için,

Ç1. $(x, 0, 0) \in A$,
Ç2. $(x, y, z) \in A \to (x, y+1, z+x) \in A$

özelliklerini sağlıyorsa, A'ya ***çarpımsal küme*** diyelim. Elbette $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin kendisi bir çarpımsal kümedir. Demek ki en az bir çarpımsal küme vardır.

Önsav 17.13. *Tüm çarpımsal kümelerin kesişimi çarpımsal bir kümedir; dolayısıyla bu kesişim en küçük çarpımsal kümedir. Bu en küçük çarpımsal küme bir grafiktir, yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir fonksiyon tanımlar. Eğer bu fonksiyona $\times$ dersek ve $\times(x, y)$ yerine xy yazarsak,*

$$x0 = 0 \textit{ ve } x(y+1) = xy + x$$

olur.

Kanıt: Kanıt okura bırakılmıştır. □

Kimi zaman xy yerine $x \times y$ ya da $x \cdot y$ yazılır.

Eğer $0 + x = x$ eşitliğini kanıtlamışsak, buradan $x \cdot 1 = x$ eşitliğini kanıtlayabiliriz:

$$x \cdot 1 = x \cdot S0 = x(0+1) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x.$$

Önsav 17.14. *Şu eşitlik doğrudur:* $2 \times 2 = 4$.

Kanıt: Doğrudan hesaplayalım:

$$2 \times 2 = 2 \times S1 = 2 \times (1+1) = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4.$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Çarpmanın ve toplamanın diğer basit özellikleri de tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. [N2]'de bütün bunlar ayrıntılı bir biçimde kanıtlanmıştır.

17.8 Peano Aritmetiği

Yukarıda yaptıklarımızı gözden geçirelim:

1. $\mathbb{N}$ diye bir küme tanımladık.
2. $\mathbb{N}$'nin 0 diye yazılan bir elemanı vardır.
3. Bu küme üstünde bir $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu tanımladık.

Böylece elde edilen $(\mathbb{N}, S, 0)$ "matematiksel yapısı" aşağıdaki teoremin ilk üç özelliğini sağlar. Ancak sadece PA1, PA2 ve PA3 özelliklerini kullanarak, kümeler kuramına hiç başvurmadan ve $\mathbb{N}$'nin dışına çıkmadan, $\mathbb{N}$'de toplamayı tanımlayamayız. Kümeler kuramının gücünü kullanarak,

4. $\mathbb{N}$'de $+$ ile simgelenen ikili bir işlem tanımladık.

Böylece elde edilen $(\mathbb{N}, S, +, 0)$ "matematiksel yapısı" aşağıdaki teoremin ilk dört özelliğini sağlar. Ancak sadece PA1, PA2, PA3 ve PA4 özelliklerini kullanarak, kümeler kuramına hiç başvurmadan ve $\mathbb{N}$'nin dışına çıkmadan $\mathbb{N}$'de çarpmayı tanımlayamayız. Kümeler kuramının gücünü kullanarak,

5. $\mathbb{N}$'de $\times$ ile simgelenen ikili bir işlem tanımladık.

Böylece elde edilen $(\mathbb{N}, S, +, 0, \times)$ "matematiksel yapısı" aşağıdaki teoremi sağlar.

Teorem 17.15 (Peano Aritmetiği)**. PA1.** *$0 \in \mathbb{N}$,*
PA2. *S, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden birebir bir fonksiyondur.*
PA3. *Eğer $m \in \mathbb{N}$ ise $Sn = m$ eşitliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ elemanı, ancak ve ancak $m \neq 0$ ise vardır.*
PA4. *$\varphi(x)$ bir "formül" olsun. Eğer $\varphi(0)$ doğruysa ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n)$ doğru olduğunda $\varphi(Sn)$ de doğru oluyorsa, o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n)$ doğru olur.*
PA5. *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $n + 0 = n$ ve $n + Sm = S(n + m)$.*
PA6. *Her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $n \times 0 = 0$ ve $n \times Sm = n \times m + n$.*

Kanıt: PA1 bariz. S'nin bir fonksiyon olduğunun kanıtı kolaydır. Birebir olduğunu kanıtlamak da zor değildir ama kanıt için "tümevarım ilkesi"ne başvurmak gerekir. PA3 de tümevarımla kanıtlanır. PA4 daha önce Sonuç 17.6 olarak kanıtlanmıştı. PA5 ve PA6 özellikleri de geçmişte kanıtlandı. Ayrıntıları [N2]'de yapacağız. □

PA4'teki "formül" terimi 0'ı, S'yi ve bu ikisinin dışında,

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \forall,\ \exists,\ (,\ ),\ =,\ \to,\ \leftrightarrow$$

mantıksal simgelerini ve x, y, z, a, b, n, m gibi değişkenleri kullanan formül anlamına gelir. Dikkat: Bu teoremdeki formüllerde kümeler kuramına ait olan $\in$ simgesi kullanılamaz.

Şimdi soru şu: Kümeler kuramını kullanmadan, sadece bir üstteki teoremdeki özellikleri aksiyom olarak kullanarak, $n!$ (faktoriyel) ya da n^m fonksiyonlarını tanımlayabilir miyiz? Toplama ve çarpma hakkında yazdıklarımızdan, yapamayacağımızı düşünebilirsiniz. Yanlış! Yukarıdaki teoremdeki yazılı olan

6 önermeyi aksiyom olarak kullanarak aritmetikte ihtiyacımız olan her fonksiyonu ve ilişkiyi bugüne kadar tanımlayabildik, bunlara $n!$ ve n^m fonksiyonları da dahildir tabii.

Eğer amacımız kümeler kuramı değil de doğal sayılarda aritmetik yapmak olsaydı, daha önce yapılan her şeyi unutup, yukarıdaki PA1, PA2, PA3, PA4, PA5, PA6 önermelerini aritmetiğin aksiyomları olarak kabul edip oradan devam edebilirdik. Bu önermelere ***Peano Aritmetiği*** adı verilir. [N2]'de bu konuya biraz daha etraflıca değineceğiz.

Mantıkçıya Not: Sanılanın tersine ilk dört aksiyom (kümeler kuramına başvurmadan ve birinci dereceden mantık kullanarak) aritmetiği geliştirmek için yeterli değildir. Ama toplama ve çarpmayı ve PA5 ve PA6 aksiyomlarını da kabul ederek, aritmetiğin gereken tüm fonksiyonlarının ve ilişkilerinin tanımlanabileceğine inanılıyor. Bugüne kadar bir aksilik çıkmadı!

17.9 Birkaç Kavram Daha

Küme Ailesi. "Küme ailesi" kavramının tek varoluş nedeni psikolojik nedenlerdir, yoksa bir fonksiyondan farkı yoktur. Psikolojik nedenler üzerinde fazla durmadan kavramı tanımlayalım. I bir küme olsun. $\mathcal{X}$ de bir küme olsun. I'dan $\mathcal{X}$'e giden bir fonksiyona bazen ***aile*** adı verilir.

X bir aile olsun, yani X, I kümesinden bir $\mathcal{X}$ kümesine giden bir fonksiyon olsun. Demek ki her $i \in I$ için $X(i) \in \mathcal{X}$. Gereksiz gibi görünecek belki ama $X(i)$ yerine X_i yazalım. Ardından X yerine

$$(X_i)_{i \in I}$$

yazalım. İşte bir "aile" matematikte $(X_i)_{i \in I}$ olarak gösterilir.

Ama aileyi böyle $(X_i)_{i \in I}$ olarak gösterince $\mathcal{X}$ kümesi ortadan kaybolmuş olur. Olsun... Bir ailede değer kümesi çok önemli değildir. (Önemli olsaydı, X fonksiyonunu $(X_i)_{i \in I}$ olarak değil, bir $X : I \to \mathcal{X}$ fonksiyonu olarak gösterirdik.) Nitekim bir $(X_i)_{i \in I}$ ailesinin verilmiş olması, I'dan X_i kümelerini eleman olarak içeren herhangi bir $\mathcal{X}$ kümesine giden ve her $i \in I$ için

$$X(i) = X_i$$

değerini alan bir X fonksiyonunun verildiği anlamına gelir.

Dizi. Dizi kavramının da tek varoluş nedeni psikolojiktir. Bir dizi doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den bir X kümesine giden bir fonksiyondur. Eğer x bir diziyse, yani

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

bir fonksiyonsa, $n \in \mathbb{N}$ için, $x(n)$ yerine x_n yazalım. Bir dizi, aynen bir aile gibi, $(x_n)_n$ olarak gösterilir. Ama bir diziyi böyle yazarsak değer kümesi X kaybolur. Eğer X'siz olmuyorsa, X illa gerekiyorsa, "dizi" yerine "X-dizisi"nden sözedilebilir.

Kartezyen Çarpım, Bir Daha. Daha önce tanımını verdiğimiz "iki kümenin kartezyen çarpımı" tanımını unutalım... Daha doğrusu, daha önce tanımladığımız "iki kümenin kartezyen çarpımı" kavramının adını değiştirelim, çünkü fonksiyon kavramını tanımlarken gereksindik o kavrama ve tamamen unutmaya hakkımız yok.

Bu paragrafta sadece iki değil, herhangi bir küme ailesinin kartezyen çarpımını tanımlayacağız.

$(X_i)_{i \in I}$ bir aile olsun. $\mathcal{X}$, tüm bu X_i'leri eleman olarak içeren bir küme olsun. (Yani $(X_i)_{i \in I}$ ailesi, aslında I'dan $\mathcal{X}$ kümesine giden $X(i) = X_i$ kuralıyla tanımlanmış bir fonksiyon, ama bunu böyle değil de bir "küme ailesi" olarak "görmek" ve "hissetmek" gerekir. Psikoloji burada devreye giriyor.) $\cup\mathcal{X}$ kümesi, her $i \in I$ için, X_i kümesini altküme olarak içerir.

$(X_i)_{i \in I}$ ailesinin ***kartezyen çarpımı***,

$$\prod_{i \in I} X_i = \{x \in \text{Fonk}(I, \cup\mathcal{X}) : \text{ her } i \in I \text{ için, } x(i) \in X_i\}$$

kümesi olarak tanımlanır.

Eğer n bir doğal sayıysa, $\prod_{i<n} X_i$ yerine

$$X_0 \times \ldots \times X_{n-1}$$

yazılır.

Eğer ayrıca $X_0 = \ldots = X_{n-1} = X$ ise

$$X_0 \times \ldots \times X_{n-1} = X \times \ldots \times X$$

yerine X^n yazılır. İzdüşüm fonksiyonları da tahmin edildiği gibi tanımlanırlar.

17.10 Son Aksiyomlar

Daha ileri seviyede matematikte kullanılan birkaç aksiyom daha vardır. Kitabımızı o aksiyomlarla bitirelim.

Bu altbölümde vereceğimiz ilk aksiyom, aslında standart matematikte hiç kullanılmayan, sadece kümeler kuramında (hayatı kolaylaştırmak için) gereken bir aksiyomdur.

A8. Temellendirme Aksiyomu. *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, x'in öyle bir y elemanı vardır ki $x \cap y = \emptyset$ olur.*

Bu aksiyom sayesinde $x \in x$ içindeliğini sağlayan topluluklar küme olmaktan men edilirler: Aksiyoma göre, $\{x\}$ kümesinin $\{x\} \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı olmalı; $y \in \{x\}$ olduğundan $y = x$ olmalı. Ama o zaman da

$$x \in \{x\} \cap x = \{x\} \cap y = \emptyset$$

olur; çelişki.

Alıştırmalar

17.4. $x \in y \in x$ içindeliklerini sağlayan x ve y kümelerinin olmadığını kanıtlayın. (Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmalısınız.)

17.5. $x \in y \in z \in x$ içindeliklerini sağlayan x, y ve z kümelerinin olmadığını kanıtlayın. (Temellendirme Aksiyomu'nu kullanmalısınız.)

A9. Yerleştirme Aksiyomu. *Eğer X bir kümeyse ve $\varphi(x, y)$ bir formülse ve her $x \in X$ için $\varphi(x, y)$ formülünün doğru olduğu bir ve bir tane y varsa, o zaman elemanları,*

$$\exists x(x \in X \wedge \varphi(x, y))$$

özelliğini sağlayan kümeler olan bir küme vardır, yani

$$\{y : \exists x(x \in X \wedge \varphi(x, y))\}$$

bir kümedir.

Bu aksiyom, A3'ün bir sonucu değildir çünkü küme olduğu söylenen topluluğun y elemanları bir kümeye kısıtlanmamışlardır.

A10. Seçim Aksiyomu. *X, elemanları boş olmayan kümeler olan bir kümeyse, öyle bir $f : X \to \cup X$ fonksiyonu vardır ki, her $x \in X$ için $f(x) \in x$ olur.*

İşte ZFC bu kadar. Yalnız dikkat, A3 tek bir aksiyom değildir, bir aksiyom şemasıdır, yani A3 aksiyom şemasıyla her $\varphi(x)$ formülü için ayrı bir aksiyom elde edilir. Aynı şey A9 için de geçerlidir; A9'da da her $\varphi(x, y)$ formülü için ayrı bir aksiyom verilmektedir. Ama A10 tek bir aksiyomdur. Bunun nedeni kümeler kuramı dilinin "her X kümesi için" yazmamıza izin vermesi $(\forall X)$, ancak "her φ formülü için" anlamına gelebilecek bir şey yazmamıza izin vermemesidir[1].

A1-A9 aksiyom ve aksiyom şemalarından oluşan teori, Zermelo-Fraenkel anlamında ZF olarak kısaltılır. Sonlu sayıda aksiyomla ZFC'ye eşdeğer bir aksiyom sistemi yaratılamayacağı bilinmektedir.

Bu kadar aksiyomla bir iki istisna dışında bilinen tüm matematiğin kurulabilmesi şaşırtıcıdır. Bu aksiyomlarla doğru olan her şeyin kanıtlanamaması

[1]Kümeler kuramının Gödel-Bernays aksiyom sistemi adı verilen bir başka aksiyom sistemi daha vardır ve bu aksiyom sisteminde sonlu sayıda aksiyom vardır.

şaşırtıcı olmayabilir belki ama bu imkânsızlığın kanıtlanabilmesi herhalde şaşırtıcıdır. Dahası, neyin aksiyom olup olmadığının anlaşılabildiği ve toplama ve çarpmasıyla doğal sayıları ifade edebilecek zenginlikte herhangi bir aksiyom sisteminde mutlaka doğru olan ama kanıtlanamayan bir önerme olacaktır. Bu ilginç olguyu Gödel'e borçluyuz.

17.11 ZFC Aksiyom Listesi

Aksiyomlarımızın bir listesiyle bitirelim:

A1. Boşküme Aksiyomu. *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*
A2. Küme Eşitliği Aksiyomu. *Aynı elemanları olan iki küme birbirlerine eşittir.*
A3. Tanımlı Altküme Aksiyom Şeması. *x bir küme ve $\varphi(z)$, kümeler kuramının dilinde yazılmış bir özellik olsun. O zaman x'in $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan z elemanları bir küme oluştururlar.*
A4. Bileşim Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, sadece ve sadece x'in elemanlarının en azından birinde olan elemanlardan oluşan bir küme vardır.*
A5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu. *Eğer x ve y birer kümeyse, o zaman sadece ve sadece x'i ve y'yi eleman olarak içeren bir küme vardır, yani $\{x, y\}$ topluluğu bir kümedir.*
A6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu. *Eğer x bir kümeyse, elemanları x'in altkümelerinden oluşan bir küme vardır.*
A7. Sonsuz Küme Aksiyomu. *$\emptyset$'nin elemanı olduğu ve her x elemanı için Sx'in de elemanı olduğu en az bir küme vardır.*
A8. Temellendirme Aksiyomu. *Eğer x boş olmayan bir kümeyse, x'in $x \cap y = \emptyset$ eşitliğini sağlayan bir y elemanı vardır.*
A9. Yerleştirme Aksiyom Şeması. *Eğer X bir kümeyse ve $\varphi(x, y)$ bir formülse ve her $x \in X$ için $\varphi(x, y)$ formülünün doğru olduğu bir ve bir tane y varsa, o zaman elemanları,*

$$\exists\, x(x \in X \wedge \varphi(x, y))$$

özelliğini sağlayan kümeler olan bir küme vardır, yani

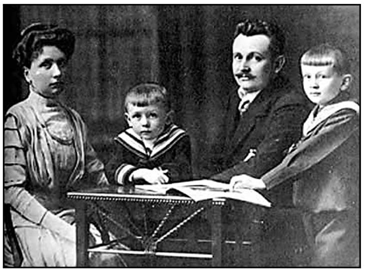
$$\{y : \exists\, x(x \in X \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğu bir kümedir.
A10. Seçim Aksiyomu. *X, elemanları boş olmayan kümeler olan bir kümeyse, öyle bir $f : X \to \cup X$ fonksiyonu vardır ki, her $x \in X$ için $f(x) \in x$ olur.*

Kurt Gödel (1906-1978)

Okuma Parçası

Avusturya-Macaristan İmparatorluğu'na bağlı Çekoslovakya doğumlu, Viyana'da eğitim görmüş, tarihin bahtsız cilveleri sonucu önce Çek, sonra Avusturyalı (1929), Alman işgali ardından istenci dışında Alman olan (1938) ve son olarak da 1948'de Amerikan vatandaşlığına geçmiş matematikçi ve mantıkçı. 20'nci yüzyılın en önemli mantıkçısı, hatta Aristo'dan bu yana tarihin en büyük mantıkçısı olarak bilinir.



Matematik ve mantık alanlarındaki teoremleriyle felsefeyi ve düşün dünyasını Einstein çapında etkilemiş kişilerden biridir.

Babası bir dokuma fabrikası sahibiydi. Akla ve mantığa öncelik verirdi. Annesi ise çocuk eğitiminin erken yaşta başlaması gerektiğine inananlardandı: Gödel 10 yaşındayken matematiği, dinleri ve dilleri öğreniyordu.

Amerika Öncesi

Doymak bilmeyen merakından dolayı çocukluğunda Niçin Bey adı verilmiştir. 6-7 yaşlarında romatizmal ateşten mustarip olmuş, neyse ki atlatmıştır. Alman okullarında okumuş, hayatı boyunca Çekçe öğrenmemiştir. Liseyi üstün başarıyla bitirdikten sonra, 18 yaşında kuramsal fizik okumak üzere Viyana Üniversitesi'ne gitmiş, ama Matematik Bölümü'ne geçmiştir. Tarihle ilgilenmiş, Goethe'nin renk kuramını, Newton eleştirisini ve Kant'ı okumuştur. Dogmatik bilimsel düşünceleriyle pek örtüşmese de "Viyana çevresi"ne dahil olmuştur. Bolonya'da Hilbert'in matematiksel mantık üzerine verdiği bir seminere gitmiş, ardından Hilbert'le Ackermann'ın 1928'de yayımladıkları Kuramsal Mantığın Temelleri kitabını okumuş, burada sorulan "matematiğin tamlığı" sorusunu bir yıl içinde olumlu yanıtlamış ve doktorasını almıştır.

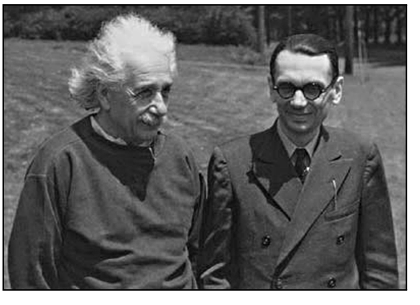
Doktorasını aldıktan sonra Amerika'ya yaptığı seyahatlerin ve yoğun çalışmanın Gödel'i depresyona sürüklediği söyleniyor ama depresyonun nedeni daha derin olmalı. Çalışmalarına bir süre ara verdikten sonra 1937'de Seçim Aksiyomu'nun (SA'nın) ve Süreklilik Hipotezi'nin (SH'nin) kümeler kuramının diğer aksiyomlarından (sırasıyla ZF ve ZFC'den) bağımsız olduğunu kanıtlamaya çalışır. İstediğini tam başaramasa da, bu önermelerin yanlışlığının kanıtlanamayacağını kanıtlar.

1938'de, ailesinin karşı çıkmasına karşın, kendisinden on yaş büyük, Viyana'da bir gece kulübünde dansözlük yapan ve daha önce evlenip boşanmış, üstüne üstlük bir de Katolik (Gödel'in ailesi katı Lüteriyendi, bir tür Protestan yani) olan Adele Nimbursky (kızlık adı Porkert) ile evlenmiştir. Çocukları olmamıştır.

Avrupa'dan Kaçış

Aynı yıl, Avusturya, Nazi Almanyası tarafından işgal edilince, doçentlik kaldırılır ve Gödel üniversiteye yeni baştan başvurmak zorunda kalır. Viyana çevresindeki yakın arkadaşlarının Yahudi olması Gödel'in aleyhine olur ve kötü sağlığına karşın askerlik yapmaya elverişli bulunur. Böylece üniversite yerine savaşa gitme tehlikesi belirir. Bir gece bir grup Nazi gencinin saldırısına uğrar, hırpalanır, gözlüğü kırılır, neyse ki Adele şemsiyesiyle gençleri dağıtmayı becerir! Gödel artık Avrupa'da kalmaması gerektiğini anlar.

Savaş başladığından Atlantik Okyanusu'nu geçerek Amerika'ya gitmek tehlikelidir. Transsiberya treniyle Avrupa'dan kaçarlar. Önce Japonya, sonra Pasifik'i aşarak San Fransisco'ya varırlar (4 Mart 1940). Trenle Amerika'yı Batı'dan Doğu'ya geçerler. Gödel, daha önce birkaç kez ziyaret ettiği Princeton İleri Araştırma Enstitüsü'nde çalışmaya başlar. SA'nın ve SH'nin tutarlılığı makalesini burada yayımlar.



Oscar Morgenstein'in objektifinden Einstein ile Gödel

Princeton'da kendisinden 27 yaş daha büyük olan ve 7 yıl önce Amerika'ya göç etmiş olan Einstein'la tanışmış ve yakın dostluk kurmuştur.

Tanrı'nın Varlığının Kanıtı

İlgi alanı matematikten felsefeye ve fiziğe kayar. Yaşamboyu hayran kalacağı Leibniz'i, ayrıca Kant ve Husserl'i okur. 1970'lerin başında, Leibniz'in Tanrı'nın ontolojik kanıtının bir çeşitlemesini sağda solda dostları arasında dağıtır. Ünlü mantıkçı Solovay, 1985'te yapılan ve yazarın da katıldığı küçük bir toplantıda, Gödel'den "*therefore G exists*" yani "demek ki G vardır" sözleriyle biten mektuplar aldığını söylemiştir. Buradaki G, tabii ki İngilizce Tanrı demek olan God'ın ilk harfidir, ancak G, ayrıca Gödel'in de ilk harfidir!

Yaşamı boyunca çok saygı duyulduğunu ve birçok ödülle onurlandırıldığını herhalde söylemeye gerek yoktur. 1951'de Einstein Ödülü'nü almıştır ve Julien Schwinger'la birlikte bu ödülü alan ilk kişidir.

Ölümü

Gödel çekingen ve içine kapanıktı. Eksantrik bir kişiliği vardı. Örneğin yaz ortasında kışlık giysilerle dolaşırdı. Buzdolabı gazıyla zehirlenebileceğine inanır, yaz kış demeden evinde kapı pencere açık otururdu. Hortlaklara inanırdı. Ayrıca sık sık hastalanan, sağlıksız biriydi, ancak doktorların tavsiyesine uymaz, hatta dediklerinin tam tersini uygulardı. 1940'larda kanamalı bir ülser geçirdi. Doktora gitmeyi reddettiğinden ölümle burun buruna geldi ve ancak acil kan nakliyle hayatı kurtarılabildi.

1955'te Einstein ölünce daha da içine kapandı. En yakınındakiyle bile telefonda konuşmayı tercih etti. Biriyle buluşması gerektiğinde yerini ve zamanını titizlikle belirler ve o saatte randevu yerinden çok uzakta bir yerde olurdu. 1975'te Ulusal Bilim Madalyası kendisine verildiğinde Washington'a gidip Başkan Gerald Ford'u görmeyi reddetti. Bazı güçlerin iyiliği gömdüğü gibi inançlara kapıldı.

Kötü insanların kendisini zehirleyeceklerine inandığı için, kendi yaptığı yemekleri bile yemez, sadece eşinin yaptığı yemekleri yerdi. 1977'de eşi Adele hastalık sonucu yemek yapamaz hale gelince, Gödel yemek yemeyi tümüyle reddetmiştir. Bir iğne bir iplik kalan Gödel Princeton Hastanesi'ne kaldırılır ve orada da yemeyi reddedince, iki hafta sonra yetersiz beslenmeden ve aşırı kilo kaybından, Türkçesiyle açlıktan ölür.

Gödel'in Matematiğe Katkıları

Bugünkü modern matematiksel mantığın Gödel'in eseri olduğu rahatlıkla söylenebilir. Çok genç bir yaşta, daha henüz 23'ündeyken, aritmetikte doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanamayan önermelerin mutlaka olmak zorunda olduğunu kanıtlamıştır (Birinci Eksiklik Teoremi, yayımlanması 1931). Gödel en çok bu teoremiyle bilinir. Biraz daha matematiksel olarak ifade edecek olursak, Eksiklik Teoremi şunu söyler: Doğal sayıları, toplamayı ve çarpmayı ifade edecek güçte olan ve neyin aksiyom olup olmadığı anlaşılabilen çelişkisiz bir sistemde, doğru olan ama sistem içinde kanıtlanamayan bir önerme olmak zorundadır.

Gödel böylece matematikte biçimciliği savunan Hilbert ve Russell gibilerinin düşüncelerine önemli bir darbe indirmiş olur.

Ayrıca bir kuramın (yani bir aksiyom sisteminin) her modelinde (yani sistemin aksiyomlarının doğru olduğu her evrende) doğru olan bir önermenin mutlaka matematiksel bir kanıtı olduğunu da kanıtlamıştır (1929, Tamlık Teoremi).

Gödel ayrıca, ZFC'nin Süreklilik Hipotezi'ni yanlışlayamayacağını kanıtlamıştır (1938, makalenin yayımlanması 1940). Bu makalesinde *inşa edilebilir evren* kavramını tanımlar. İnşa edilebilir evren, kümeler kuramının en basit kümeleriyle ve en basit işlemleriyle inşa edilebilen kümeler topluluğudur; kümeler kuramının en basit ve en küçük modelidir. Gödel hem SA'nın hem de SH'nin bu evrende doğru olduğunu kanıtlar, dolayısıyla bu iki önermenin yanlış olduğunu sırasıyla ZF ve ZFC kanıtlayamaz.

Asıl gürültü koparan 1931 Eksiklik Teoremi'nin temel fikri oldukça basittir. Gödel, "ben kanıtlanamam" diyen matematiksel bir tümce yazmayı başarır. Bu tümcenin kanıtı olsa, sistem çelişkili olurdu. Demek ki sistem çelişkisizse tümcenin kanıtı olamaz. Tümcenin kanıtı olmadığından, "ben kanıtlanamam" tümcesi doğrudur. Demek ki matematik çelişkisizse, "ben kanıtlanamam" tümcesi doğrudur ama kanıtlanamaz. Gödel bu tümceyi yazmak için doğal sayıları, toplamayı ve çarpmayı kullanmıştır; matematiksel tümceleri ve kanıtları doğal sayılarla kodlamıştır. Bu kodlamaya göre her tümcenin ve her kanıtın bir "Gödel sayısı" vardır.

Belki de bu aşamada, matematiğin dilinde, "ben yanlışım" ya da "bu tümce yanlıştır" diyen bir tümcenin yazılamayacağını belirtmemiz gerekiyor. Yoksa bu tümce ne doğru ne de yanlış olacağından, bir çelişki elde ederiz.

Gödel'in İkinci Eksiklik Teoremi birincisinden de felsefidir: Bu teoreme göre, doğal sayıları, toplamayı ve çarpmayı anlayacak güçte olan bir matematik sistemi hiçbir zaman kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamaz.

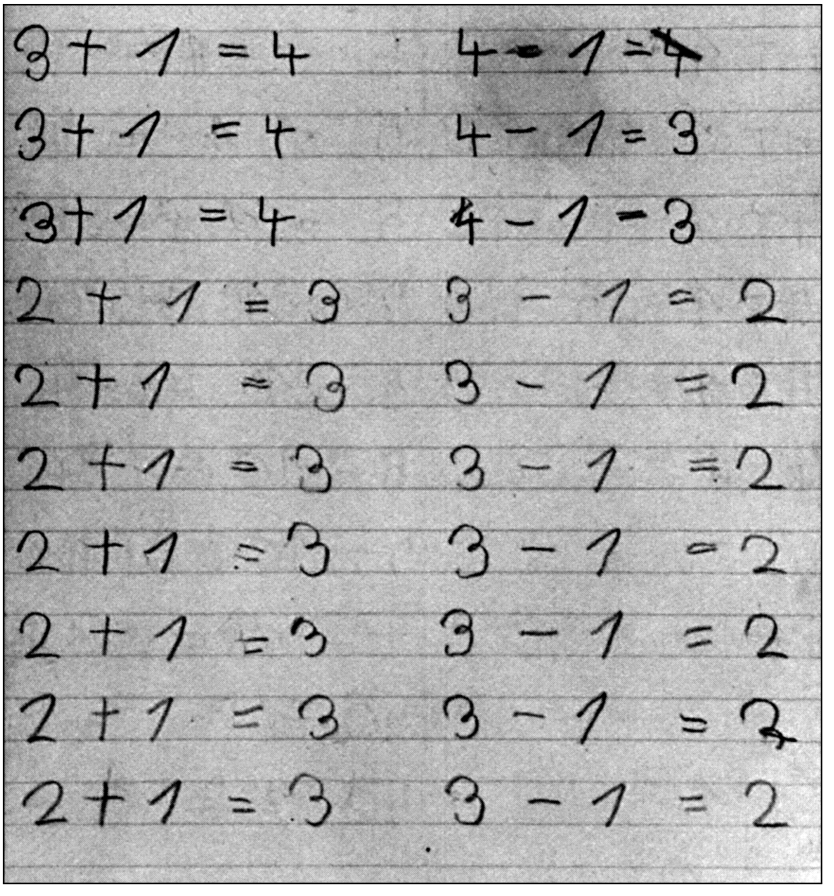
Bu teorem, matematiğin çelişkili ya da çelişkisiz olduğunu söylemiyor, sadece çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını söylüyor. (Matematiğin çelişkili olduğu -eğer matematik çelişkiliyse elbette- kanıtlanabilir; bunun için matematikte bir çelişki bulmak ya da $0 = 1$ eşitliğini kanıtlamak yeterlidir.)

Gödel'in bu teoremi öylesine bir sürprizdi ki, 1930'da Königsberg'de bu konuda ilk konuşmasını verdiğinde, kimse bu teoremin tam olarak ne anlama geldiğini anlayamamıştı. Hatta büyük mantıkçı Bertrand Russell bile şaşkına dönmüş, "Ne yani $2+2$'nin artık 4 değil de 4,001 olduğunu mu düşüneceğiz?" diyebilmiştir. Teoremin değerini ilk anlayan, konferansta da bulunan ünlü matematikçi John von Neumann'dır.

Gödel'in bu teoremi matematikçilerin kendi uğraş dallarına olan sonsuz güvenini kırmıştır doğal olarak. Ne de olsa bu teorem gerçeğe biçimsel olarak ve mantıkla ulaşılamayacağını kanıtlamıştır. Böylece, bir anlamda, neyin doğru neyin doğru olmadığı konusunda felsefeye söz düştüğünü göstererek, felsefeye düşünce dünyasında hatırı sayılır bir yer açmıştır.

Kaynakça

Bu makale için en çok Wikipedia'dan ve Jim Holt'un *What were Einstein and Gödel talking about?*" adlı (The New Yorker, 28 Şubat 2005) makalesinden yararlanılmıştır.



Gödel'in ilk aritmetik defteri, 1912-1913

Yunan Alfabesi

Küçük	**Büyük**	**Adı**	**Sesi/modern**
α	A	alfa	a
β	B	beta	b/v
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d/th
ε, ϵ	E	epsilon	e
ζ	Z	zeta	z
η	H	eta	e (uzun)
θ, ϑ	Θ	teta	th
ι	I	iota	i/y
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mü	m
ν	N	nü	n
ξ	Ξ	ksi	x, ks
o	O	omikron	o
π, ϖ	Π	pi	p
ρ	P	ro	r
σ, ς	Σ	sigma	s,z
τ	T	tau, to	t
υ	Υ	upsilon	ü
ϕ, φ	Φ	fi	p/f
χ	X	ki, khi	k
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	o (uzun)	

Kaynakça

[B] Paul Bernays, **Axiomatic Set Theory**, Dover Publications 1991.

[C] Krzysztof Ciesielski, **Set Theory for the Working Mathematician**, London Mathematical Society, Student Texts 39, 1997.

[D] Keith Devlin, **The Joy of Sets**, Springer Verlag 1993.

[Fe] Jose Ferreirós, **Labyrinth of Thought: A history of set theory and its role in modern mathematics**, Birkhäuser 2007 (1999).

[Fr] A. A. Fraenkel, **Abstract Set Theory**, Elsevier 1973.

[Hal] Paul Halmos, **Naive Set Theory**, Springer Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics 1974.

[Hau] Felix Hausdorff, **Set Theory**, AMS Chelsea Publishing 2005 (1937).

[Haz1] Michiel Hazewinkel (editör), **Axiomatic Set Theory**, Encyclopedia of Mathematics 2001.

[Haz2] Michiel Hazewinkel (editör), **Set Theory**, Encyclopedia of Mathematics 2001.

[Hr] Karel Hrbacek ve Thomas Jech, **Introduction to Set Theory**, Chapman & Hall 1999.

[Je] Thomas Jech, **Set Theory**, Stanford Encyclopedia of Philosophy 2002.

[Jo] Philip Johnson, **A History of Set Theory**, Prindle, Weber & Schmidt 1972.

[KT] Peter Komjath ve Vilmos Totik, **Problems and Theorems in Classical Set Theory**, Springer 2006.

[Ku] Kenneth Kunen, **Set Theory: An Introduction to Independence Proofs**, North-Holland 1980.

[Ma] Moshé Machover, **Set Theory, Logic and Their Limitations**, Cambridge University Press 1996.

[Mad] Penelope Maddy, **Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory**, Oxford University Press 1913 (1911).

[Mo] Yiannis Moschovakis, **Notes on Set theory** Springer Verlag, Undergraduate Texts in Mathematics 2005.

[N1] Ali Nesin, **Önermeler Mantığı**, dördüncü basım, Nesin Yayıncılık 2014.

[N2] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı I: Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: `http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2`.

[N3] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı II: Ordinaller ve Kardinaller**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: `http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2`.

[N4] Ali Nesin, **Sayma**, Nesin Yayıncılık 2014.

[P] Michael Potter, **Set Theory and Its Philosophy: A Critical Introduction**, Oxford University Press 2004.

[S] Patrick Suppes, **Axiomatic Set Theory**, Dover Publications 1972.

[T] Mary Tiles, **The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise**, Dover Publications 2004 (1989).

Simgeler Dizini

Dizin