Ali Nesin

1956'da ...

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye...

Ali Nesin

Sayma

(ya da Kombinasyon Hesapları)

İçindekiler

Önsöz

Bu kitap, liselilere ve üniversitelilere yönelik bir dizi kitabın üçüncüsüdür ama ilk ikisinden oldukça bağımsızdır. Birinci ve üçüncü kısım tamamen liselilere yöneliktir. İkinci kısımda seviye biraz artmaktadır ama lise seviyesini aşmamaktadır. Teori ilk iki kısımda yapılmakta, üçüncü kısımda birkaç uygulama verilmektedir. Bu son bölümdeki konulardan öğrenciler birbirlerine seminerler verebilirler.

Konumuz sayma; bildiğimiz, çocukluğumuzdan beri yaptığımız bir iş. Ama elemanları teker teker saymak yerine elemanların oluşturduğu kümeyi tek bir hamlede saymaya çalışacağız. Birkaç sayma sorusu örneği vereyim: 25 sopayı kaç farklı biçimde 3 farklı renge boyayabiliriz? n doğru, düzlemde en fazla kaç noktada kesişir? İçinde 001 barındırmayan 2008 uzunluğunda kaç tane 0 ve 1'den oluşan dizi vardır? Sayısal lotoda (49/6, yani 49 sayıdan 6'sını seçiyoruz) en az 4 tutturmayı garantilemek için en az kaç sütun (ve hangi sayıları) oynamalıyız? İşte bu kitapta bu tür sorularla ilgileneceğiz.

Günlük yaşamdan kaynaklanan, dolayısıyla problemi anlamak için neredeyse okuma yazma bilmenin bile gerekmediği, ama yanıtı bugüne dek bulunamayan birçok sayma sorusu vardır. Yukarıdaki örnek sorulardan sonuncusu da yanıtı -bildiğim kadarıyla- bilinmeyen sorulardan biridir.

Her ne kadar çocukluğumuzdan beri sayıyor olsak da, saymak çok zor bir konudur. Teorisi az gelişmiştir. Bilinen birkaç standart sayma yöntemi olsa da, benim şahsi görüşüme göre konu kendi başına matematiksel bir dal olmaktan uzaktır, çünkü, genel olarak, karşımıza çıkan bir sayma problemiyle nasıl başa çıkılacağını problemle karşılaşır karşılaşmaz kestirebilmek oldukça güçtür.

Dolayısıyla saymanın derinine inilmiş bir konu olduğunu söyleyemeyiz. Derinine inilemese de konunun yüzeyi çok geniştir ve sadece bu yüzeyde dolaşmak baş döndürücü bir maceradır.

Benim üniversite yıllarımda bu konuda dersler okutulmazdı, kitaplar da yazılmamıştı, yazılmışsa da çok popüler değildi; liselerde daha çok olasılık adı altında biraz okutulurdu. Büyük ölçüde bilgisayarların gelişmesiyle sayma konusu bugün büyük önem kazandı. Artık bu ve genel olarak "sonlu" ya da "ayrık matematik" olarak adlandırılan benzer konularda birçok üniversitede dersler veriliyor, her biri diğerinden ilginç birçok kitap yayımlanıyor; en azından Batı dünyasında.

Bu kitapta sayma konusuna sadece bir giriş yapacağız. Daha ileri seviyede sayma tekniklerini **Sonlu Matematik** adlı, şu anda hazırlanmakta olan biraz daha akademik bir kitapta göreceğiz.

Çoğu kitabın aksine, bu kitap ortalara doğru giderek kolaylaşır (sonra tekrar zorlaşır). İlk bölümlerde bazı yerleri anlayamayan okur okumaya devam etsin. Anlayacağı ve hoşuna gidecek şeyler öğreneceğini sanıyorum. Alıştırmalar da illa kolaydan zora doğru sıralanmamıştır. Ayrıca alıştırmaların zorluğu metnin zorluğuyla doğru orantılı değildir. Alıştırmaların okura zor gelmesi illa okurun konuyu iyi anlamadığı anlamına gelmeyebilir. Sayma konusunu matematiğin diğer konularından ayıran işte bu özelliktir: Teorisi kolaydır ama pratiği zor, hatta çoğu zaman imkânsızdır. Değme matematikçi bile bazı sorularda, üstelik yanıtı kolay olan sorularda çuvallayabilir, çünkü probleme doğru yaklaşım bariz olamayabilir.

Teorik olmayan, öğrenilenleri pekiştirmeye yarayan (ve eğlenceli olduğunu düşündüğüm) yazıları kitabın sonunda "Okuma Parçaları" adı altında bulacaksınız. Kolaydan zora doğru giden bu yazıları kitabın herhangi bir aşamasında okuyabilirsiniz, örneğin teoriden yorulduğunuzda.

Matematik Dünyası dergisine yazdıkları birer yazıyı buraya almama izin veren Hayri Ardal, Başak Ay, Selin Enüst Çalışkan, Şermin Çam ve Mustafa Özdemir meslektaşlarıma, birer yazıda paslaştığımız Haluk Oral ve Andrei Ratiu meslektaşlarıma ve kitabın mizanpajında büyük emeği geçen Aslı Can Korkmaz'a ve Atay Eriş'e, her basımda yeni düzeltmeler bulan Ali Törün'e, dördüncü basımın düzeltmelerini yapan Onur Kara'ya ve hâlâ daha inatla kopmayan boynuma -hepimiz adına- çok teşekkür ederim.

Eski öğrencim, yeni meslektaşım Sonat Süer'e özel bir paragraf ayırmam gerekiyor. Çok dar bir zamanda, o kadar işi arasında kitabı birkaç kez baştan aşağı okudu ve çok önemli düzeltmeler yaptı, çok değerli önerilerde bulundu. Daha fazla zamanı olsaydı yapabileceği düzeltmeleri düşünmek bile korkutucu! Sonat'a da hepimiz adına çok teşekkür ederim.

Ali Nesin
Şubat-Haziran 2009
ve Ağustos 2014

Kısım I

Temel Yöntemler

1. Güvercin Yuvası İlkesi

Haluk Oral ile birlikte yazılmıştır.

Bir sihirbaz sahnede yaptığı numarayla küçük dilinizi yutturabilir ama nasıl yaptığını öğrendiğinizde numaranın bütün havası kaybolur. Numaranın gerçekten sihirbazlık olmadığını anlarsınız! Bu bir düşkırıklığı yaratır. Onun için sihirbazlar numaralarını nasıl yaptıklarını açıklamazlar.

Matematikte de ilk bakışta zor görünen bazı problemlerin çözümü çok basit olabilir, çözüm şaşırtıcı derecede basit bir matematiksel ilkeye dayanabilir. Matematikçilerin sırlarını paylaşmaması (en azından günümüzde) söz konusu olmadığından bu ilkelerden birini açıklayacağız: ***Çekmece İlkesi***, namı diğer ***Güvercin Yuvası İlkesi***.

İlke gerçekten çok basit. Ama önce sihirbazlık numaramızı yapalım:

İleride dünyaca ünlü matematikçi olacak olan küçük Gauss, babasıyla ormanda gezerken babasına sormuş:

– Bu ormanda yaprak sayısı birbirine eşit iki ağacın olması için herhangi bir koşul söyleyebilir misin?

Baba Gauss böyle bir koşul düşünemeyince yanıtı küçük Karl vermiş:

– Eğer ormandaki ağaç sayısı, bu ormanda en çok yaprağı olan ağacın yaprak sayısından en az iki fazlaysa, en az iki ağacın yaprak sayısı aynıdır...

Bu öykü büyük bir olasılıkla uydurmadır. Ama küçük Gauss'un büyüdüğünde dünyanın gelmiş geçmiş en büyük matematikçisi olacağı gerçektir.

Gauss'un yanıtı karışık gibi görünebilir ilk bakışta. Ama çok kolay olduğunu şu açıklamayı okuyunca fark edeceksiniz: Güvercin beslediğinizi düşünün, her akşam da güvercinler yuvalarına girsinler. Eğer güvercin sayısı güvercin yuvası sayısından fazlaysa, örneğin 4 yuva ve 5 güvercin varsa, o zaman en az bir yuvada birden fazla güvercin olacaktır. İlkeye Güvercin Yuvası adı verilmesinin nedeni bu açıklamadır.

Bu ilke değişik ama denk ifadelerle de verilebilir. Örneğin,

1. Güvercin sayısı yuva sayısından fazlaysa, en az bir yuvada birden fazla güvercin olur.

2. Belli sayıda güvercin aynı sayıda yuvaya yerleştirildiğinde, yuvalardan birinin boş kalması için gerek ve yeter koşul, en az bir yuvada 1'den fazla güvercin olmasıdır.

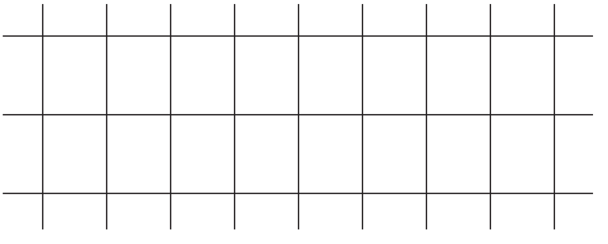
3. Eğer belli sayıda güvercin belli sayıda yuvaya, hiçbir yuvaya 1'den fazla güvercin koyulmadan yerleştirilebiliyorsa, o zaman güvercin sayısı yuva sayısından küçükeşittir.

4. İki sonlu küme arasında birebir eşleme olması için gerek ve yeter koşul, bu iki kümenin eleman sayısının eşit olmasıdır.

Ormana ve ağaçlara dönelim. Ne demişti Gauss? Ormandaki ağaç sayısı en fazla yaprağı olan ağacın yaprak sayısından en az iki fazlaysa... Ormanda 6 ağaç olsun ve her ağaç en fazla 4 yapraklı olsun. İlk beş ağacın yaprak sayıları 0, 1, 2, 3, 4 olabilir belki ama sonuncu ağacın yaprak sayısı bu sayılardan birine eşit olmak zorunda kalacaktır.

Şimdi örnek problemler ve bu problemlerin bu ilkeyle çözümlerini verelim.

Örnek 1.1. *Bir düzlemin bütün noktaları iki renge boyanırsa, dört köşesi de aynı renkte olan bir dikdörtgen mutlaka vardır.*



Çözüm: Yukarıdaki şekildeki gibi üç yatay ve dokuz dikey doğru çizelim. Üç nokta iki renge $2^3 = 8$ değişik şekilde boyanabileceğinden (renklere 0 ve 1 dersek, işte o boyamalar: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111), 9 dikey doğrunun en az ikisi aynı biçimde renklendirilmiş olmalıdır. Üç noktadan en az ikisi aynı renk olacağından aranan dikdörtgeni buluruz.

Alıştırmalar

1.2. İki yerine üç renk olsaydı da aynı sonucu elde edeceğimizi gösterin.

1.3. Renk sayısı sonlu olduğunda da aynı sonucu elde edeceğimizi kanıtlayın.

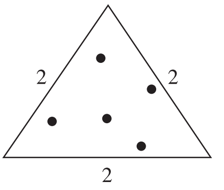
1.4. Üç boyutlu uzayın her noktası iki farklı renge boyanıyor. Sekiz köşesi de aynı renge boyanmış bir dik dikdörtgenler prizması olduğunu kanıtlayın.

1.5. Bir düzlemin her noktası iki farklı renge boyanıyor. Üç köşesi de aynı renge boyanmış eşkenar bir üçgen var mıdır?

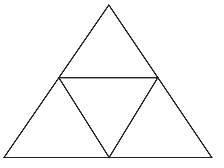
1.6. Verilmiş üç tamsayıdan ikisinin toplamı mutlaka çifttir. Nitekim sayıların ya ikisi çifttir ya da ikisi tektir, bunların toplamı da çift bir sayıdır. Verilmiş beş tamsayıdan üçünün toplamının 3'e bölündüğünü kanıtlayın. Verilmiş en az kaç tamsayının dördünün toplamı mutlaka 4'e bölünür? Soruları çoğaltabilirsiniz.

1.7. Bir okulda 510 çocuk var. Her çocuğun en az 10 bilyesi var. Ama hiçbir çocuğun 30'dan fazla bilyesi yok. En az 25 çocuğun aynı sayıda bilyesi olduğunu gösterin.

Örnek 1.8. *Kenar uzunluğu* 2 *birim olan bir eşkenar üçgenin içinde alınan beş noktadan en az ikisi arasındaki uzaklığın* 1*'den küçükeşit olduğunu gösteriniz.*



Çözüm: Üçgenin üç kenarının orta noktalarını birleştirelim. Böylece üçgeni kenar uzunlukları 1 olan dört eşkenar üçgene ayırmış oluruz. Bu üçgenin içinde beş nokta alırsak en az ikisi aynı küçük üçgenden olmak zorundadır. Aynı küçük üçgendeki noktalar arasındaki mesafe de 1'den küçük olacaktır elbette.



Alıştırmalar

1.9. Kenar uzunluğu 2 birim olan eşkenar bir üçgenin içine herhangi ikisi arasındaki mesafe 1'den büyük olacak biçimde dört nokta yerleştirilebileceğini kanıtlayın.

1.10. Kenar uzunluğu $2,01$ birim olan eşkenar bir üçgenin içine herhangi ikisi arasındaki mesafe 1'den büyük olacak biçimde 6 nokta yerleştirebileceğinizi gösterin. Aynı şeyi 7 nokta ile yapabilir misiniz?

1.11. Her kenarı 3 birim olan bir eşkenar üçgenin içine aralarındaki mesafe en az 1 olacak biçimde en fazla kaç nokta yerleştirebilirsiniz? Aynı soruyu her kenarı k birim olan bir eşkenar üçgen için yanıtlayın. (Burada k bir doğal sayı.)

1.12. Her kenarı 2 birim uzunluğunda olan bir düzgün dörtyüzlünün içine, birbirine uzaklığı 1'den büyük olacak biçimde en fazla kaç nokta yerleştirilebilir?

Polinom

$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ biçiminde yazılan bir ifadeye ***polinom*** denir. a_0, a_1, $\ldots$, a_n sayıları bu polinomun ***katsayılarıdır***. Örneğin,

$$-2 + 3x^2 + 7x^3,$$

katsayıları tamsayı olan bir polinomdur. $\pi + \sqrt{2}x$ katsayıları gerçel sayılar olan bir polinomdur. Ama $\sqrt{x}$ ya da $x^{1/3}$ bir polinom değildir. $1/x$ de bir polinom değildir.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

gibi sonsuz ifadeler de polinom değildirler.

Örnek 1.13. *$f(x)$, katsayıları tamsayı olan bir polinom (tanım için yukarıdaki gri kutucuğa bakınız) olsun. Eğer $f(x) = 2$ eşitliğini sağlayan üç tamsayı varsa, $f(x) = 3$ eşitliğini sağlayan bir tamsayı olmadığını kanıtlayın.*

Çözüm: Önce, p ve q sayıları ne olursa olsun, $p - q$ sayısının

$$f(p) - f(q)$$

sayısını böldüğünü gözlemleyin (bkz. Alıştırma 1.14). Şimdi

$$f(a) = f(b) = f(c) = 2$$

ve $f(d) = 3$ olsun. Bu durumda,

$$(d-a)|(f(d) - f(a)) = 3 - 2 = 1$$
$$(d-b)|(f(d) - f(b)) = 3 - 2 = 1$$
$$(d-c)|(f(d) - f(c)) = 3 - 2 = 1$$

olduğundan[1] (**ipucu:** n bir doğal sayıysa, $p - q$ sayısı $p^n - q^n$ sayısını böler, bkz. Alıştırma 1.14), $d-a$, $d-b$ ve $d-c$ sayıları 1'e ya da -1'e eşit olmalıdır. Güvercin yuvası ilkesine göre bu üç sayıdan en az ikisi birbirine eşit olmalı. (Burada Güvercin Yuvası İlkesi'nin kullanımını biraz abarttık, farkındayız!) Bundan da a, b ve c sayılarından en az ikisinin eşit olması gerektiği çıkar. Böylece kanıtımız tamamlanmıştır. □

Alıştırmalar

1.14. Her $n \geq 2$ için,

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \cdots + y^{n-1})$$

eşitliğini kanıtlayın. Buradan, her p ve q tamsayıları için, $p - q$ sayısının $p^n - q^n$ sayısını böldüğünü, dolayısıyla katsayıları tamsayı olan her f polinomu için $p - q$ sayısının $f(p) - f(q)$ sayısını böldüğünü kanıtlayın. (Polinomun tanımı için bir önceki sayfadaki gri kareye bakın.)

1.15. $f(x)$, katsayıları tamsayı olan bir polinom olsun. Eğer $f(x) = 3$ eşitliğini sağlayan beş farklı tamsayı varsa, $f(x) = 5$ eşitliğini sağlayan bir tamsayı olmadığını kanıtlayın.

1.16. Örnek 1.13'ü ve Alıştırma 1.15'i nasıl genelleştirebilirsiniz?

Örnekler

1.17. *$n + 1$ tane tamsayı arasında farkları n'ye tam olarak bölünen en az iki sayı vardır.*

Yanıt: Bir tamsayı n'ye bölündüğünde kalan sayı 0, 1, 2, ..., $n - 2$ veya $n - 1$ olabilir. Demek ki kalan bu n sayıdan biri olmalıdır. O halde elimizdeki $n + 1$ tamsayının en az ikisi n'ye bölündüğünde aynı kalanı bırakır, dolayısıyla bu sayıların farkları n'ye bölünür.

1.18. *Bir düzlem üzerindeki 25 noktanın herhangi üçü arasındaki minimum uzaklık 1'den az olsun, yani seçilmiş herhangi üçünün en az ikisinin arasındaki mesafe ≤ 1 olsun. Bu noktaların en az 13'ünü içine alan 1 yarıçaplı bir çemberin varlığını gösterin.*

Yanıt: Düzlem üzerindeki 25 noktadan herhangi birine A adını verelim ve A merkezli 1 yarıçaplı ilk çemberimizi çizelim. Bütün noktalar bu çemberin içindeyse soru çözülmüştür, değilse bu çemberin dışındaki bir noktaya B adını verelim ve B merkezli 1 yarıçaplı ikinci çemberimizi çizelim. Her nokta ya ilk çemberin ya da ikinci çemberin içinde olacağından, çemberlerin biri 25 noktanın en az 13'ünü içerecektir.

[1] $u|v$ ifadesi "u sayısı v sayısını böler," yani $v \in u\mathbb{Z}$ anlamına gelmektedir.

Alıştırma 1.19. Bir düzlem üzerindeki 40 noktanın herhangi dördü arasındaki minimum uzaklık 1'den az olsun. Bu noktaların en az 14'ünü içine alan 1 yarıçaplı bir çemberin varlığını gösterin.

Örnekler

1.20. *n ve k pozitif iki tamsayı olsun. k'ya bölündüğünde aynı kalanı veren n'nin en az iki değişik kuvveti olduğunu gösteriniz.*

Yanıt: n^1, n^2, ..., n^k, n^{k+1} sayılarını (toplam $k+1$ tane) k'ya böldüğümüzde elde edeceğimiz kalanlar 0, 1, ..., $k-1$ kümesinde olacağından en az iki kalan aynı olmak zorundadır.

1.21. *7'nin 0001 ile biten bir kuvveti olduğunu gösteriniz.*

Yanıt: Yukarıdaki örneğe göre, 10000'e bölündüğünde aynı kalanı veren 7'nin iki ayrı kuvveti vardır. Bunlar 7^n ve 7^m olsun. Diyelim $n > m$. Bu durumda, 10000,

$$7^n - 7^m = 7^m(7^{n-m} - 1)$$

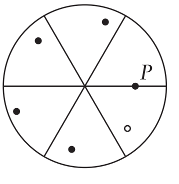
sayısını böler. Ama 10000 ve 7^m aralarında asal, demek ki 10000,

$$7^{n-m} - 1$$

sayısını böler. O halde 7^{n-m}, 10000'e bölündüğünde 1 kalanını verir yani $7^{n-m}/10000$ sayısı 0001 ile biter.

1.22. *Yarıçapı 1 olan bir çemberin içinde alınan altı noktadan en az ikisi arasındaki uzaklığın 1'den küçükeşit olacağını gösteriniz.*

Yanıt: Çemberi altı yarıçap aracılığıyla altı eşit parçaya bölelim. Bu yarıçaplardan biri verilen altı noktadan biri olan P'den geçsin. Geriye kalan beş noktanın ikisi aynı parçaya girerse çözüm biter. Girmezse en az bir diğer noktanın P'yi içeren yarıçapla ayrılmış iki parçadan birinde olması gerekir ki bu durumda da soru çözülmüş olur.



1.23. *Otuz günde her gün en az bir hap içmek koşuluyla toplam 45 hap içen bir hastanın, içtiği hap sayısının toplam 14 olduğu ardışık bir günler dizisi olduğunu gösterin.*

Yanıt: Hastanın ilk günden i'inci günün sonuna kadar aldığı hap sayısını a_i ile gösterelim. Demek ki $(a_i)_i$ artan bir dizi. Şimdi,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{30}\} \text{ ve } B = \{a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14\}$$

kümelerine bakalım. A'daki elemanların herhangi ikisinin aynı olamayacağı açık. Dolayısıyla B'deki elemanlar da aynı olamaz. Şimdi A'nın ve B'nin elemanlarını yan yana yazalım:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$$

Bu tamsayıların en büyüğü ancak 59 olabilir. Halbuki yukarıda 60 sayı var. Öyleyse en az ikisi eşit olmak zorundadır. Buradan $a_i = a_j + 14$ koşulunun en az bir i, j çifti için sağlandığı çıkar. Demek ki

$$a_i - a_j = 14.$$

Dolayısıyla i, j'den büyük olmak zorunda ve $j+1$'inci günden i'ince güne kadar içilen hap sayısı 14 olmalı.

Alıştırma 1.24. 365 günde her gün en az bir hap içmek koşuluyla toplam 500 hap içen bir hastanın, içtiği hap sayısının toplam 231 olduğu ardışık bir günler dizisi olduğunu gösterin.

Örnekler

1.25. *İlk* 100 *pozitif tamsayıdan hangi* 51 *tanesini seçerseniz seçin, bu sayılardan biri diğerini bölmek zorundadır... Seçim ne olursa olsun... Bunu kanıtlayın.*

Kanıt: Her x sayısı, bir u tek sayısı ve bir n sayısı için

$$x = 2^n \times u$$

biçiminde yazılır. Buradaki u, x'i bölen en büyük tek doğal sayıdır. Örneğin,

$$\begin{aligned} 48 &= 2^4 \times 3, \\ 64 &= 2^6 \times 1, \\ 29 &= 2^0 \times 29, \\ 100 &= 2^2 \times 25. \end{aligned}$$

Eğer sayımız (yani x) en fazla 100 ise, u en fazla 99 olabilir, çünkü u sayısı 1, 3, 5, 7, ..., 99 tek sayılarından biri olmalıdır. Burada da 50 tane sayı var. Demek ki seçilen 51 sayıdan en az ikisinin u'su aynı olmalıdır, yani seçilen sayılardan ikisi, aynı u (tek) sayısı için, $2^n u$ ve $2^m u$ biçiminde yazılır. Dolayısıyla biri öbürünü böler. (Eğer $n < m$ ise, $2^n \times u$ sayısı $2^m \times u$ sayısını böler.)

Daha genel sonuç şu: 1, 2, ..., $2n$ sayıları arasından $n+1$ tanesini seçersek, bu seçilmiş sayılardan biri bir diğerini böler. Kanıt aynı.

Bu arada, $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ sayılarından hiçbiri bir diğerini bölmediğinden, birbirini bölmeyen n tane sayı seçebileceğimize dikkatinizi çekerim.

1.26. *$n > 0$ herhangi bir doğal sayı olsun ve rastgele n tane tamsayı seçin. Bu sayıların hepsi birbirinden farklı olmayabilir. Bu n sayıdan birkaçının toplamının n'ye bölündüğünü kanıtlayın. Örneğin $n = 5$ ise ve* 2, 4, 9, 9, 17 *sayılarını seçmişsek,* $2+9+9$ *toplamı* 5*'e bölünür* (*ya da* $9+9+17$).

Kanıt: Sayılarımıza $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adını verelim. Aşağıdaki $n+1$ sayıyı ele alalım:

$$\begin{gathered} 0 \\ a_1 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{gathered}$$

Bu $n+1$ sayının herbiri n'ye bölündüğünde, kalan 0'la $n-1$ arasında bir sayıdır. 0'la $n-1$ arasındaysa yalnızca n tane sayı vardır. n, $n+1$'den küçük olduğundan (şansa bak!), güvercin yuvası ilkesine göre, yukarıdaki $n+1$ sayıdan ikisi n'ye bölündüğünde kalanları eşittir. Bu iki sayıdan küçüğünü büyüğünden çıkarırsak, elde ettiğimiz sayı n'ye tam olarak bölünür (ve en başta seçtiğimiz n sayıdan birkaçının toplamıdır.)

Daha Derin Uygulamalar

Güvercin Yuvası İlkesi'nin yukarıdaki uygulamaları pek ciddi ya da derin bulunmayabilir. Bu ilkeyi kullanarak ciddi bir sonuç kanıtlayalım şimdi.

Teorem 1.1. [Bézout Teoremi]. *a ve b aralarında asal iki pozitif doğal sayıysa*

$$ax - by = 1$$

eşitliğini sağlayan x ve y tamsayıları vardır.

Kanıt: a, $2a$, ..., $(b-1)a$ sayılarını ele alalım. Burada tam $b-1$ tane sayı var. Bu $b-1$ tane sayıyı b'ye böldüğümüzde elde ettiğimiz kalanlara bakalım. Bu kalanlar, 0'dan büyükeşit ama b'den küçük sayılardır ve bunlardan en fazla b tane vardır. Öte yandan a ile b aralarında asal olduklarından, kalan hiçbir zaman 0 olamaz. Demek ki kalanlar 1'den büyükeşit ama b'den küçük olabilirler ve bunlardan da en fazla $b-1$ tane var. Bir an için kalanın hiçbir zaman 1 olamayacağını varsayalım. O zaman, kalanlar 2'den büyükeşit ama b'den küçük sayı olabilirler ve bunlardan da en fazla $b-2$ tane var. Demek ki

$$a,\ 2a,\ \ldots,\ (b-1)a$$

sayılarının ikisi b'ye bölündüğünde kalanları birbirine eşit olmak zorunda. Bu iki sayı ia ve ja olsun. O zaman,

$$(j-i)a = ja - ia$$

sayısı b'ye bölünür. Ama b ile a aralarında asal olduklarından, bundan, b'nin $j-i$'yi böldüğü çıkar. Öte yandan $j-i$ sayısı $-b$'den büyük ve b'den küçük ve 0 değil. Bu bir çelişkidir. Demek ki kalanlardan biri 1'dir; yani bir $x = 1, 2, \ldots, b-1$ sayısı için $ax-1$ sayısı b'ye bölünür; yani bir y tamsayısı için $ax - 1 = by$ olur. □

İlk bakışta anlaşılmasa da, güvercin yuvası ilkesini kullanarak yukarıdaki kadar temel, önemli ve güçlü bir sonuç kanıtlayacağız şimdi. Sonucumuz, herhangi bir gerçel sayıya kesirli sayılarla dilediğimiz kadar yakınsayabileceğimizi söyleyecek.

Teorem 1.2. *a, kesirli olmayan bir gerçel sayı olsun. O zaman,*

$$|a - p/q| < 1/q^2$$

eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda p/q kesirli sayısı vardır. (*Buradaki p ve q birer tamsayıdır.*)

Kanıt: Eğer $x \geq 0$ bir gerçel sayıysa, $[x]$, x'in tamkısmını,

$$\{x\} = x - [x]$$

de x'in virgülden sonraki kısmını temsil etsin. Elbette

$$\{x\} \in [0, 1)$$

olur.

a kesirli olmadığından, $a \neq 0$. Eğer a ve p/q sayıları istenen eşitsizliği sağlıyorsa, $-a$ ve $-p/q$ sayıları da aynı eşitsizliği sağladığından, gerekirse a yerine $-a$ alarak a'nın pozitif olduğunu varsayabiliriz. Bundan böyle $a > 0$ olsun.

k, herhangi pozitif bir tamsayı olsun. 0, a, $2a$, $3a$, ..., ka sayılarının virgülden sonraki kısımlarına bakalım; bunlar, $[0, 1)$ aralığının,

$$\{0\}, \{a\}, \{2a\}, \ldots, \{ka\}$$

sayılarıdır ve bunlardan tam $k+1$ tane vardır. $[0, 1)$ aralığını

$$\left[0, \frac{1}{k}\right), \left[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right), \left[\frac{2}{k}, \frac{3}{k}\right), \ldots, \left[\frac{k-1}{k}, 1\right)$$

aralıklarına bölebiliriz. Bu aralıklardan da k tane vardır. Güvercin yuvası ilkesine göre, öyle $0 \leq i < j \leq k$ vardır ki,

$$\{ia\} \text{ ve } \{ja\}$$

sayılarının ikisi birden yukarıdaki k aralıktan birinin içine düşer. Aralığın uzunluğu $1/k$ olduğundan,

$$(j-i)a - ([ja] - [ia]) = (ja - [ja]) - (ia - [ia]) = \{ja\} - \{ia\} \leq \frac{1}{k}$$

olur. Eğer

$$q = j - i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ ve } p = [ja] - [ia] \in \mathbb{Z}$$

tanımlarını yaparsak,

$$0 \leq \{ja\} - \{ia\} = qa - p \leq \frac{1}{k}$$

olur. Ama $0 \leq i, j \leq k$ olduğundan, $q = |j-i| < k$ olur. Demek ki,

$$0 < qa - p \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{q}$$

olur. Bundan da,

$$0 < a - \frac{p}{q} \leq \frac{1}{q^2}$$

çıkar. Teorem kanıtlanmıştır. □

Eğer a gerçel sayısı verilmişse, teoremdeki eşitsizliği sağlayan sonsuz sayıda p ve q sayıları olduğundan, q'yü dilediğimiz kadar büyük seçebiliriz, bu da a ile p/q arasındaki mesafeyi dilediğimiz kadar küçültebileceğimizi gösterir. Örneğin, kesirli bir sayı olmadığı bilinen π (kanıtı zor) ya da $\sqrt{2}$ (kanıtı kolay) sayısına kesirli sayılarla milyarda 1 kadar yaklaşabiliriz.

Güvercin Yuvası İlkesi'nin Güçlü Bir Yorumu

Oldukça kolay iki problemle başlayalım.

Örnekler

1.27. *Bir meyve sepetine elmalar, armutlar ve muzlar koyacağız. Sepete en az kaç meyve koymalıyız ki sepette ya en az 12 elma, ya en az 9 armut, ya da en az 7 muz olsun?*
Yanıt: Eğer sepete 11 elma, 8 armut, 6 muz koyarsak, istediğimiz olmaz. Demek ki yanıt,
$$(12-1)+(9-1)+(7-1)=11+8+6=25$$
sayısından fazla olmalı. 26 yetiyor! Eğer sepete 26 meyve koyarsak, sepette ya en az 12 elma, ya en az 9 armut, ya da en az 7 muz olur.

1.28. *Bir miktar bilye Ali, Burak, Canan ve Demet arasında rastgele paylaştırılıyor. Ali 5, Burak 4, Canan 8, Demet ise 11 bilyeyle mutlu oluyor. En az bir çocuğun mutlu olacağından emin olmamız için en az kaç bilye olmalıdır?*
Yanıt: Eğer Ali'ye 4, Burak'a 3, Canan'a 7, Demet'e 10 bilye düşerse hiçbiri memnun olmaz. Demek ki yanıtımız,
$$(5-1)+(4-1)+(8-1)+(11-1)=4+3+7+10=24$$
sayısından büyük olmalı. Bu sayıdan bir fazla olursa, yani 25 bilyeyi paylaştırırsak, içlerinden en az biri (ama belki daha da fazlası) memnun olacaktır.

Yukarıdaki çözümlerdeki ilkeyi şöyle ifade edebiliriz:

Genel Güvercin Yuvası İlkesi 2. k_1, k_2, $\ldots$, k_n *pozitif doğal sayılar olsun. Eğer*
$$k_1+k_2+\cdots+k_n-n+1$$
tane ya da daha fazla nesneyi n *farklı kutuya yerleştirirsek, o zaman ya birinci kutuda* k_1 *tane nesne olur, ya ikinci kutuda* k_2 *tane nesne olur, ..., ya da* n*'inci kutuda* k_n *tane nesne olur.*
Kanıt: Aksi halde kutulara yerleştirilen nesne sayısı en fazla
$$(k_1-1)+(k_2-1)+\cdots+(k_n-1),$$
yani
$$k_1+k_2+\cdots+k_n-n$$
olabilir. Ama nesne sayımız bundan en az 1 fazla... □

Alıştırma olarak, Örnek 1.27'nin Genel Güvercin Yuvası İlkesi'ne nasıl uydurulacağını bulun.

Alıştırmalar

1.29. Sekiz tamsayı seçiliyor. Bu sekiz sayı arasında, farkları 7'ye bölünen iki değişik sayı olduğunu kanıtlayın.

1.30. Farkları 1997'ye bölünen 3'ün iki farklı kuvveti olduğunu kanıtlayın.

1.31. Bir tiyatro grubu, bir sezonda 7 oyun oynuyor. Grubun beş kadın oyuncusunun herbiri en az üç oyunda oynadığına göre, oyunlardan birinde en az üç kadının oynadığını kanıtlayın.

1.32. Spordan zerre kadar anlamayan öğretmen bir sınıfın öğrencilerini basketbol, voleybol ve futbol takımının oyuncusu olarak rastgele belirliyor. Takımlardan en az birinin yeterince oyuncusu olması için sınıf kaç kişi olmalıdır? Not: Basketbolda 5, voleybolda 6, futbolda 11 oyuncu gerekir.

1.33. 1 ile 10 arasında 6 sayı seçilmiş. Bu seçilmiş sayılardan en az ikisinin toplamının tek olacağını kanıtlayın.

1.34. 9 kişi yanyana dizilmiş 12 iskemleye oturursa, yanyana olan üç iskemlenin mutlaka kapılmış olacağını kanıtlayın.

1.35. $\{1, 2, \ldots, 11\}$ kümesinden yedi değişik sayı seçilirse, bunlardan ikisinin toplamının 12 edeceğini kanıtlayın. **İpucu:** Sayılar güvercinleri, $\{1, 11\}$, $\{2, 10\}$ gibi toplamı 12 eden sayı çiftlerinden oluşan kümeler de güvercin yuvalarını temsil etsin. Bu alıştırmayı genelleştirin.

1.36. Birim dairenin içinde hangi dört nokta seçilirse seçilsin, en az ikisinin birbirine olan uzaklığının $\sqrt{2}$'den küçük olacağını kanıtlayın.

1.37. $\{1, 2, \ldots, 20\}$ kümesinden 11 sayı seçilirse en az ikisi arasındaki farkın 2 olacağını kanıtlayın. Ayrıca en az ikisi arasındaki farkın 1 olacağını da kanıtlayın. Bu alıştırmayı genelleştirin.

1.38. $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ kümesinden $n + 1$ sayı seçilirse en az ikisinin birbirine asal olacağını kanıtlayın.

1.39. En az iki kişiden oluşan herhangi bir toplulukta aynı sayıda insan tanıyan en az iki kişi olduğunu kanıtlayın.

1.40. 100'den küçükeşit 16 doğal sayı seçiliyor. Bunların arasında öyle dört farklı a, b, c, d sayısı vardır ki, $a + b = c + d$ olur. Kanıtlayın.

1.41. Eğer X sonlu bir sayı kümesiyse, $t(X)$, X'in sayılarının toplamını simgelesin. Örneğin, $X = \{2, 4, 5\}$ ise $t(X) = 2 + 4 + 5 = 11$ olur. $t(\emptyset) = 0$ varsayımı yapılır.

1.42. $\{1, 2, \ldots, 9\}$ kümesinden en fazla 3 elemanı olan 26 tane altküme seçiliyor. Bu 26 altküme arasında $t(X) = t(Y)$ eşitliğini sağlayan farklı X ve Y altkümelerinin olduğunu kanıtlayın.

1.43. $\{1, 2, \ldots, 10\}$ kümesinden kaç altküme seçersek bu altkümeler arasında mutlaka $t(X) = t(Y)$ eşitliğini sağlayan farklı X ve Y altkümeleri bulacağımıza emin olabiliriz?

1.44. $\{1, 2, \ldots, 10\}$ kümesinden en az üç, en fazla beş elemanlı kaç altküme seçersek bu altkümeler arasından $t(X) = t(Y) = t(Z)$ eşitliğini sağlayan üç değişik altkümenin olacağından emin olabiliriz?

1.45. $1 \leq x \leq 100$ eşitsizliğini sağlayan 55 tamsayı seçiliyor. Bu 55 sayı arasında, aralarındaki fark 9 olan en az iki, aralarındaki fark 10 olan en az iki, aralarındaki fark 12 olan en az iki, aralarındaki fark 13 olan en az iki sayı olduğunu kanıtlayın. Bu aralıktan, aralarındaki fark 11 olmayan 55 sayı bulun.

1.46. f, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin bir eşlemesi olsun. Eğer n tekse,

$$(1 - f(1))(2 - f(2)) \cdots (n - f(n))$$

sayısının çift olduğunu kanıtlayın.

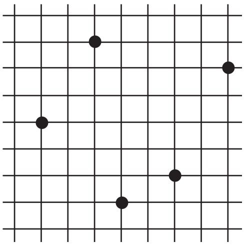
1.47. 1, 2, …, 10 sayıları rastgele bir çembere yazılıyor. Toplamı en az 17 olan yanyana üç sayının varlığını kanıtlayın. **İpucu:** Aksi halde

$$3 \times (1 + 2 + \ldots + 10) \leq 10 \times 16$$

olurdu.

1.48. 1, 2, ..., 9 sayılarını yanyana üç sayının toplamı en fazla 16 olacak biçimde bir çembere dizebilir misiniz?

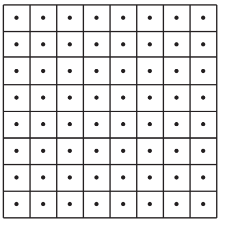
1.49. Aşağıdaki ızgaranın tamnoktalarından (yani düğüm noktalarından) rastgele beşi seçiliyor. Bu noktalar arasında, orta noktası da bir tamnokta olan iki nokta olduğunu kanıtlayın.



1.50. Bir çokyüzlüde en az iki yüzün aynı sayıda kenarı olması gerektiğini kanıtlayın.

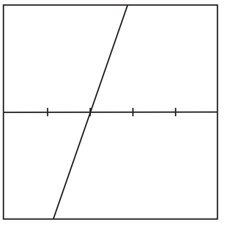
1.51. 8×8 boyutlu bir satranç tahtasının karelerinin orta noktaları işaretleniyor. Satranç tahtasını hiçbiri bu noktalardan geçmeyen 13 doğruyla öyle kesebilir misiniz ki, ayrılan her parçada işaretlenen en fazla tek bir nokta kalsın?

İpucu: Kenardaki 28 karenin merkezlerini birleştiren 28-gen bu 13 doğruyla en fazla 26 kez kesilebilir.



1.52. Birim kareyi 9 doğruyla kesiyoruz. Her doğrunun kareyi 2 : 3 oranında dörtgenlere böldüğünü bildiğimize göre, doğrulardan üçünün tek bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

İpucu: Doğrular ancak karşılıklı kenarları kesebilirler. Her doğru orta doğruyu 2 : 3 oranında bölmeli.



1.53. Bir çemberin tüm noktaları 2 farklı renge boyanıyor. Boyama şekli ne olursa olsun, köşeleri aynı renge boyanmış ikizkenar bir üçgen olacağını kanıtlayın.

1.54. Sonlu bir kümenin altkümelerinin yarısından fazlası seçiliyor. Seçilmiş bu altkümelerden birinin seçilmiş bir başka altkümenin altkümesi olacağını kanıtlayın.

1.55. Sonlu bir kümenin altkümelerinin yarısından fazlası seçiliyor. Seçilmiş bu altkümelerden birinin seçilmiş bir başka altkümenin tümleyeni olacağını kanıtlayın.

1.56. a ve b iki pozitif doğal sayı olsun. Eğer

$$\{1, 2, \ldots, a+b\}$$

sayılarının yarısından fazlası seçilmişse, bu seçilmiş sayılardan ikisinin arasındaki farkın a ya da b olacağını kanıtlayın.
İpucu: Aşağıdaki şekil.

1	2	3	...	b	b+1	b+2	b+3	...	$b+a$
a+1	a+2	a+3	...	$a+b$	1	2	3	...	a

1.57. 1000 tane tamsayı verilmişse, bu 1000 sayıdan ikisinin ya toplamının ya da farkının 1997'ye bölündüğünü kanıtlayın.
İpucu: Verilen sayılar 1997'ye bölündüğünde kalanların ikisi

$$\{0\},\ \{1,\ 1996\},\ \{2,\ 1995\},\ \ldots,\ \{998,\ 999\}$$

kümelerinden birinde olmak zorunda.

1.58. Bir satranç ustasının yarışmaya hazırlanmak için 11 haftası var. Bu 11 hafta boyunca her gün en az bir oyun oynuyor. Ama yorulmamak için de bir hafta içinde (yani 7 gün boyunca peşpeşe) 12 oyundan fazla oynamıyor. Ustanın üstüste tam 21 oyun oynadığı günler silsilesi olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** a_k, ilk k gün oynadığı toplam oyun sayısı olsun. O zaman

$$1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{77} \leq 132$$

olur. 154 terimi olan

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{77},\ a_1 + 21,\ a_2 + 21,\ \ldots,\ a_{77} + 21$$

dizisine gözatın.

1.59. Bir sınıfta çeşitli kulüpler var. Her kulübe sınıfın öğrencilerinin yarısından fazlası üye. En az bir öğrencinin kulüplerin yarısından fazlasına üye olduğunu kanıtlayın.

1.60. A bir doğal sayı olsun. A, $2A$, $3A$, ..., $9A$ sayılarını altalta sağdan hizalayarak yazın. En solda boşluk belirdiyse, o boşlukları 0 ile doldurun. Her sütunda ya bir 0 ya da bir 9 olduğunu kanıtlayın.

1.61. **[Uluslarası Matematik Olimpiyatı].** 21 kız, 21 erkek öğrenci bir sınava giriyorlar. Her öğrenci en fazla 6 soruyu doğru yanıtlıyor. Her kız ve her erkek öğrencinin doğru yanıt verdiği ortak bir soru var. En az üç kız öğrencinin ve en az üç erkek öğrencinin doğru yanıtladığı bir soru olduğunu kanıtlayın.

1.62. Her birinin 45 üyesi olan 2009 kulüp var. Bu kulüplerin herhangi ikisinin ortak tek bir üyesi var. Her kulübe üye olan birinin varlığını kanıtlayın. **İpucu:** Önce, her kulübe üye olan birinin olmadığını varsayıp, her kişinin en fazla 45 kulübe üye olabileceğini kanıtlayın. Sonra, bir kulübün üyelerinin üye olabileceği maksimum kulüp sayısını hesaplayın.

El Sıkışma Sorusu

Eşimle bir yemeğe gittik. Yemekte dört çift daha vardı. Önce el sıkışıldı. Herkes sadece tanıdığı kişilerin elini sıktı. Kimse kendisinin elini sıkmadı. Kimse kendi eşinin elini sıkmadı. Kimse bir başkasının elini iki kez sıkmadı. El sıkışma faslı bittikten sonra herkese kaç kez el sıkıştığını sordum. Herkesin cevabı farklı oldu. Karım kaç kişinin elini sıkmıştır?

Kaybedenlerin Lotosu

"Kaybedenlerin Lotosu", 1'den 36'ya kadar olan sayıların 6'sı seçilerek oynanıyor, yani bir kolonluk oyun 6 sayıdan oluşuyor. Loto İdaresi "kaybeden" 6 sayıyı açıklıyor. Bu "kaybeden" sayılardan birini bile tutturamayan büyük ikramiyeyi kazanıyor!

Kaybedenlerin Lotosu'nda 9 kolonluk bir oyunla büyük ikramiyeyi kazanmayı garantileyebiliriz. İşte o kolonlar:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\\
K_2 &= \{4, 5, 6, 7, 8, 9\},\\
K_3 &= \{1, 2, 3, 7, 8, 9\},\\
K_4 &= \{10, 11, 12, 13, 14, 15\},\\
K_5 &= \{16, 17, 18, 19, 20, 21\},\\
K_6 &= \{22, 23, 24, 25, 26, 27\},\\
K_7 &= \{25, 26, 27, 28, 29, 30\},\\
K_8 &= \{22, 23, 24, 28, 29, 30\},\\
K_9 &= \{31, 32, 33, 34, 35, 36\}.
\end{aligned}$$

Kanıt: $A = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5$ ve $B = K_6 \cup K_7 \cup K_8$ olsun. T de loto idaresinin açıkladığı kaybeden 6 sayıdan oluşan küme olsun. Eğer $|T \cap A| \leq 3$ ise, o zaman kolayca görüleceği üzere K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 kolonlarından en az biri büyük ikramiyeyi kazanır. Eğer $|T \cap B| \leq 1$ ise, o zaman gene kolayca görüleceği üzere K_6, K_7, K_8 kolonlarından biri büyük ikramiyeyi kazanır. Bundan böyle $|T \cap A| \geq 4$ ve $|T \cap B| \geq 2$ varsayımını yapalım. A ve B ayrık kümeler olduğundan, bu varsayımdan $T \subseteq A \cup B$ çıkar; dolayısıyla K_9 kazanan kolondur. Kanıtımız bitmiştir.

Sekiz kolonun büyük ikramiyeyi kazandırmayı garantilemeye yetmediğini kanıtlayabilir misiniz?

Kaynakça:
Alexander Bogomolny, http://cut-the-knot.org

2. Tümevarımla Kanıt ve Tanım

Çoğumuzun matematikle ilgisi aritmetikle başlamıştır. Kimimiz

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

eşitliğinden, kimimiz

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

eşitliğinden, kimimiz de,

$$\begin{array}{lll} 1 & = 1 & = 1^2 \\ 1+3 & = 4 & = 2^2 \\ 1+3+5 & = 9 & = 3^2 \\ 1+3+5+7 & = 16 & = 4^2 \end{array}$$

eşitliklerinden büyülenmişizdir. Aritmetikte her yaşa, her zevke göre büyü vardır.

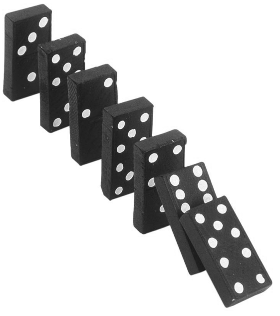
Yukarıdaki eşitlikler rastlantısal değildir: İlk n tek sayının toplamı her zaman bir karedir:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

dir. Bu eşitlik, sayılar kuramında ***tümevarım*** adı verilen bir yöntemle kanıtlanabilir.

Matematikte ve sayılar kuramında çok sık kullanılan bu yöntemde, n doğal sayısıyla ilgili kanıtlanmak istenen bir önerme, eşitlik, teorem, sav, önsav, her neyse, önce (diyelim) 1 sayısı için kanıtlanır. Sonra, önermenin 1'den büyükeşit bir n doğal sayısı için geçerli olduğu **varsayılarak**, önerme bir sonraki sayı olan $n+1$ sayısı için kanıtlanır. Yani önermenin n için doğru olduğu **varsayılır** ve aynı önerme $n+1$ için kanıtlanır. Yani n için doğru **ise**, önermenin $n+1$ için de doğru olduğu kanıtlanır. Böylece, önermenin tüm sayılar için geçerli olduğu anlaşılır. Çünkü, önerme 1 için doğrudur, 1 için doğru olduğundan 2 için de doğrudur, 2 için doğru olduğundan 3 için de doğrudur...

Önermenin $n = 1$ için kanıtlanmasına ***başlangıç adımı*** denir. Daha sonra, önermenin n için doğru olduğunu varsayıp (***tümevarım varsayımı***), $n+1$ için kanıtlanmasına ***tümevarım adımı*** denir.



Tümevarımla kanıt çoğu zaman yanyana dizilen dominoların birincisini devirerek tüm dominoların yıkılmasına benzetilir. (Bkz. resim!) Dominolar da peşpeşe sıraya dizildiğinde, n'inci domino devrildiğinde $n+1$'inci dominoyu yıktığından, ilk domino yıkıldığında tüm dominolar teker teker yıkılır.

Nasıl ilk dört dominoya dokunmayıp beşinci dominoyu yıktığımızda beşinci dominodan daha sonra gelen tüm dominolar yıkılıyorsa, tümevarımın başlangıç adımı $n = 5$ için yapılırsa, o zaman tümevarım adımı önermeyi 5 ve daha büyük sayılar için kanıtlar.

Tümevarımla kanıta örnek olarak yukarıdaki eşitliği kanıtlayalım.

Teorem 2.1. *Her n doğal sayısı için, ilk n tek sayının toplamı n^2'dir.*

Kanıt: İlk n tek sayının toplamına $T(n)$ adı verelim. Yani,

$$T(n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$

olsun. $T(n) = n^2$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Yani tümevarımla kanıtlamak istediğimiz önerme $T(n) = n^2$ eşitliği.

Başlangıç Adımı. Önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin doğru olup olmadığına bakalım. $T(1)$, 1'den 1'e kadar olan tek sayıların toplamıdır. Demek ki $T(1) = 1$ ve $T(1) = 1^2$ eşitlikleri geçerli. $T(n) = n^2$ eşitliğinin $n = 1$ için doğru olduğunu -kanıtladık demeye dilim varmıyor- gösterdik.

Tümevarım Adımı. Şimdi, $T(n) = n^2$ eşitliğini doğru varsayıp,

$$T(n+1) = (n+1)^2$$

eşitliğini kanıtlayalım. $T(n+1)$ sayısı ilk $n+1$ tek sayının toplamı, yani 1'den $2n-1$'e kadar olan tek sayıların toplamı. İlk n tek sayının toplamı $T(n)$'dir. Varsayımımıza göre bu $T(n)$ sayısı n^2'ye eşit. Bir sonraki $n+1$'inci tek sayı $2n+1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} T(n+1) &= \text{İlk } n+1 \text{ tek sayının toplamı} \\ &= (\text{İlk } n \text{ tek sayının toplamı}) + (n+1\text{'inci tek sayı}) \\ &= T(n) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \end{aligned}$$

ve

$$T(n+1) = (n+1)^2$$

olur.

Demek ki $T(n) = n^2$ eşitliği doğruysa, $T(n+1) = (n+1)^2$ eşitliği de doğrudur. Daha önce $T(1) = 1^2$ eşitliğinin de doğru olduğunu kanıtlamıştık.

Böylece her n sayısı için $T(n) = n^2$ eşitliği kanıtlanmış oldu. □

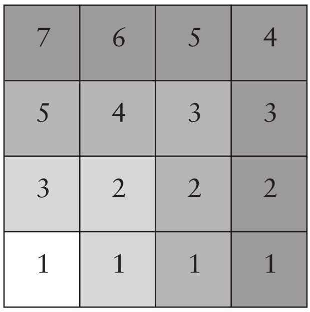
Gereksiz Bir Not. Aslında $T(0) = 0$ eşitliği de doğrudur. Nitekim, $T(0)$, ilk sıfır tek doğal sayının toplamıdır; yani boşkümenin elemanlarının toplamıdır ve matematikte boşkümenin elemanlarının toplamının 0 olduğu varsayımı yapılır. (Boşkümenin elemanlarının çarpımının da 1 olduğu varsayımı yapılır.)

Tümevarımla kanıtın sevimsiz yanı, kanıtlanan önermenin neden doğru olduğunun pek iyi anlaşılamamasıdır. Önsezi kaybolmakta, mekanik bir kanıt verilmektedir.

Ne demek istediğimi gene bir örnekle anlatayım. Yukarıdaki

$$T(n) = n^2$$

eşitliğinin neden doğru olduğunu başka türlü göstereyim. Bir kenarı n uzunluğunda olan bir kare alalım. Bu karenin alanı n^2'dir. Kareyi n^2 tane küçük kareye bölelim. Şimdi kareleri şöyle sayalım. (Aşağıdaki şekle bakın.)



Sol alt köşede 1 kare var. Bu kareye 3 kare dokunur: biri sağından, biri tepesinden, öbürü de sağ üst köşesinden (yani çaprazından.) Bu yeni kareye 5 yeni kare dokunur: ikisi sağından, ikisi tepesinden, biri de çaprazından. Sonra 7 yeni kare... 1, 3, 5, 7, ... Bunların toplamı küçük karelerin sayısına, yani n^2'ye eşit. Görüldüğü gibi ilk n tek sayının toplamı n^2'dir. Yukarıdaki önermenin neden doğru olduğu birden gün gibi ortaya çıktı. Ama matematiksel değil kanıtımız. Görme duyusuna dayanıyor.

Tümevarımla kanıta birkaç örnek daha verelim. Aşağıdaki teoremi iki farklı yöntemle kanıtlayacağız.

Teorem 2.2. *n elemanlı bir kümenin altküme sayısı 2^n'dir.*

Kanıta başlamadan önce okurun birkaç deney yapmasında yarar vardır. Örneğin, dört elemanlı $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin teoreme göre 2^4, yani 16 altkümesi olmalı. Okur bunları teker teker bulmalı, 0 elemanı olan boşkümeyi unutmadan...

Teorem 2.2'nin Birinci Kanıtı: X, n elemanlı bir küme olsun. X'in altküme sayısını hesaplayacağız. X'in bir altkümesi, her küme gibi, elbette elemanları tarafından belirlenir. Demek ki X'in bir altkümesini belirlemek için X'in hangi elemanlarının o altkümede olduğunu, hangilerinin olmadığını söylememiz gerekiyor, yani X'in her elemanı için "evet, bu eleman o altkümede" ya da "hayır, bu eleman o altkümede değil" diye iki karardan birini vermemiz gerekiyor. X'in bir altkümesini belirlemek için X'in n elemanının her biri için bu "evet altkümede" ya da "hayır altkümede değil" kararlarından birini vereceğiz.

Örneğin $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ise ve

0	için	"evet"	kararı
1	için	"hayır"	kararı
2	için	"evet"	kararı
3	için	"evet"	kararı
4	için	"evet"	kararı
5	için	"hayır"	kararı

vermişsek, X'in $\{0, 2, 3, 4\}$ altkümesini elde ederiz.

X'in bir altkümesini belirlemek için, n kez **iki** karardan birini vereceğiz. Demek ki X'in altküme sayısı

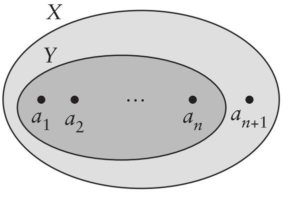
$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 \ (n \text{ defa})$$

olur, yani 2^n'dir. □

Teorem 2.2'nin İkinci Kanıtı: Teoremi bu sefer n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. (Aslında yukarıdaki kanıtta da tümevarımla akıl yürütme var ama bu akıl yürütmeyi maharetle gizledik.)

Başlangıç Adımı. Eğer $n = 0$ ise, yani kümenin hiç elemanı yoksa, yani küme boşkümeyse, o zaman, kümenin sadece 1 tane altkümesi vardır, o da boşkümedir. $2^n = 2^0 = 1$ olduğundan bu durumda teoremimiz kanıtlanmıştır.

Tümevarım Adımı. Şimdi teoremin n elemanı olan kümeler için kanıtlandığını varsayıp (tümevarım varsayımı), teoremi $n+1$ elemanı olan kümeler için kanıtlayalım.



$n+1$ elemanlı kümemize X diyelim. Kümenin elemanları

$$a_1, \ \ldots, \ a_{n+1}$$

olsun:

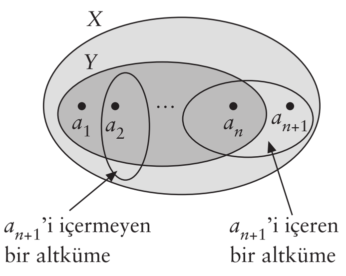
$$X = \{a_1,\ \ldots,\ a_{n+1}\}.$$

Ayrıca

$$Y = \{a_1,\ \ldots,\ a_n\}$$

olsun. Tümevarım varsayımı Y'nin 2^n tane altkümesi olduğunu söylüyor.

X'in iki türlü altkümesi vardır: a_{n+1}'i içerenler ve içermeyenler. a_{n+1}'i içermeyenler aynı zamanda Y'nin de altkümesi olduklarından, tümevarım varsayımına göre, bu tür altkümelerden 2^n tane olduğunu biliyoruz. a_{n+1}'i içermeyen bu 2^n altkümeye a_{n+1}'i de eklersek tam tamına X'in a_{n+1}'i içeren altkümelerini elde ederiz, ne bir fazla ne bir eksik...



Demek ki X'in, a_{n+1} elemanını içermeyen 2^n tane ve a_{n+1} elemanını içeren gene 2^n tane altkümesi vardır. Yani X'in toplam

$$2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

tane altkümesi vardır. □

Bu kitapta daha çok tümevarımla kanıt örneği göreceğiz.

Tümevarımla sadece kanıt yapılmaz, tanım da yapılabilir. İşte bir örnek:

Örnekler

2.1. $a_0 = 1$ ve $n \geq 0$ için, $a_{n+1} = 2a_n$ olsun. "$a_{n+1} = 2a_n$" formülüne biraz daha dikkatle bakalım. Bu formül, a_{n+1} sayısının a_n sayısının iki katı olduğunu söylüyor. Örneğin, $a_n = 5$ ise, $a_{n+1} = 10$ olur. Örneğimizde $a_0 = 1$. Demek ki, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$... Dizimizi

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$$

olarak yazabiliriz.

$a_n = 2^n$ eşitliğini kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Bunun için tümevarım yöntemi kullanılır. Eşitliği önce $n = 0$ için kanıtlayalım: $2^0 = 1 = a_0$. Kanıtladık.

Şimdi, $a_n = 2^n$ eşitliğini varsayıp $a_{n+1} = 2^{n+1}$ eşitliğini kanıtlayalım:

$$a_{n+1} = 2a_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Kanıtımız bitmiştir!

Dikkat ederseniz a_0'ı 1 yerine başka bir değer olarak tanımlasaydık, aynı diziyi bulmazdık. Örneğin, $a_0 = 0$ olsaydı, o zaman her n için $a_n = 0$ bulurduk. $a_0 = 3$ olsaydı, o zaman her n için $a_n = 3 \cdot 2^n$ bulurduk. Genel olarak, $a_n = a_0 \cdot 2^n$ bulunur.

Verdiğimiz $a_{n+1} = 2a_n$ tanımı bir ***tümevarımla tanım*** örneğidir. Dizinin bir terimini bulmak için o terimden önceki terimi bilmek yeterlidir. Tabii bu yöntemin bir işe yaraması için dizinin ilk teriminin bilinmesi gerekmektedir.

Bu örnek biraz fazla kolaydı. Biraz daha zor bir örnek verelim.

2.2. $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ için, $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ olsun. Örneğin bu formülde $n = 1$ alıp $a_0 = a_1 = 1$ bilgilerini kullanırsak,

$$a_2 = a_{1+1} = a_1 + 2a_0 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

buluruz. $a_1 = 1$ ve $a_2 = 3$ bilgisini kullanarak a_3'ü bulabiliriz:

$$a_3 = a_{2+1} = a_2 + 2a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5.$$

Ardından a_4'ü bulabiliriz:

$$a_4 = a_{3+1} = a_3 + 2a_2 = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$$

Sonra, $a_3 = 5$ ve $a_4 = 11$ bilgilerini kullanarak

$$a_6 = a_5 + 2a_4 = 11 + 2 \cdot 5 = 21$$

buluruz. Böylece,

$$1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \ldots$$

diye başlayıp sonsuza dek hiç durmadan devam eden bir dizi buluruz.

Bu tanım da bir tümevarımla tanım örneğidir. Dizinin bir terimini bulmak için o terimden önceki iki terimi bilmek yeterlidir. Tabii bu yöntemin bir işe yaraması için dizinin ilk iki teriminin bilinmesi gerekmektedir. Dizinin ilk iki terimi değişirse, dizi de değişir. Yukarıdaki dizinin n'inci terimini tahmin edemeyebilirsiniz. Sizin yerinize biz tahmin edelim:

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Bu formülü nasıl tahmin ettiğimizi haklı olarak merak edebilirsiniz; bunu başka kitaplarımızda öğreneceğiz[1].

Bu sefer başlangıç adımı bir değil iki: Formülün doğruluğunu önce $n = 0$ ve $n = 1$ için kanıtlamalıyız, ki bu kanıtlar oldukça basit, sağ taraftaki terimi hesaplamak yeterli.

Önce $n = 0$ için hesaplayalım:

$$\frac{2^{0+1} + (-1)^0}{3} = \frac{2+1}{3} = 1 = a_0.$$

Şimdi $n = 1$ için hesaplayalım:

$$\frac{2^{1+1} + (-1)^1}{3} = \frac{2^2 - 1}{3} = 1 = a_1.$$

Başlangıç adımları tamamlandı. Şimdi tümevarım adımına saldıralım:

$$a_{n-1} = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3}$$

[1] Formül, lineer cebirle ya da üreteç foksiyonları kullanılarak bulunabilir.

ve

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

varsayımlarını yapıp (bunlar kanıtlamak istediğimiz formülün $n-1$ ve n için yazılmış halleridir)

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}$$

eşitliğini kanıtlayalım. (Bu son formül, kanıtlamak istediğimiz formülün $n+1$ için aldığı biçimdir.) Kanıta başlayıp bitiriyoruz):

$$\begin{aligned}
a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} &= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} + 2\frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} + \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} + 2^{n+1} + (-1)^n + 2(-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} + 2^{n+1} + (-1)(-1)^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2 \cdot 2^{n+1} + (-1+2)(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n-1}}{3} \\
&= \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}.
\end{aligned}$$

2.3. Tümevarımla tanımlanan diziler arasında en ünlüsü ***Fibonacci dizisidir***. Fibonacci dizisi şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1, \\
f_1 &= 1, \\
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1).
\end{aligned}$$

f_n'nin de kapalı bir formülü bulunabilir ama bu sefer tahmin etmesi çok daha güçtür.

2.4. Elinize "bilimsel" olarak nitelendirilen bir hesap makinası alın. Çok bilimsel olmasına gerek yok, en azından karekök işareti olsun yeter. Herhangi bir pozitif sayı seçin ve sürekli karekök işaretine basın... Ne gözlemliyorsunuz? Aynı deneyi başka sayılarla yapın. Eğer ilk seçtiğiniz sayı 2 ise,

$$a_0 = 2$$

olsun ve her $n \geq 0$ için,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$$

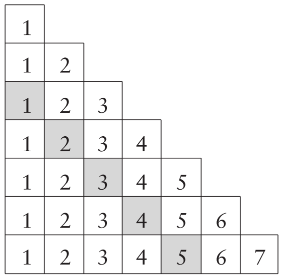
olsun. Karekök tuşuna her basışınızda karşınıza bu formülle tanımlanmış dizinin bir terimi çıkacaktır; daha doğrusu o terime oldukça yakın bir kesirli sayı çıkacaktır.

2.5. Her n pozitif doğal sayısı için,

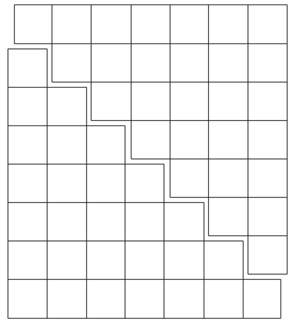
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliği geçerlidir.

Okur bu önermeyi tümevarımla kanıtlayabilir (bkz. Alıştırma 2.15). Biz, görsel bir "kanıtı"nı vereceğiz:



1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 tane kare (çapraz sayın; örneğin griye boyanmışlardan 5 tane var.)



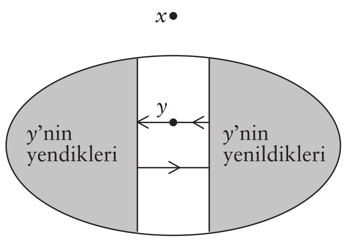
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 tane karesi olan iki grup. Birini ters çevirip diğerinin tepesine ekledik. Böylece 7 × 8'lik bir dikdörtgen elde ettik.

$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 7 \times 8$ eşitliğinin görsel kanıtı

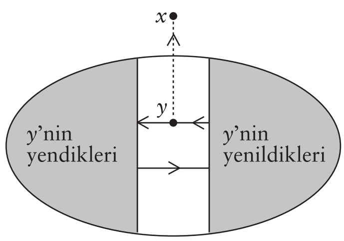
Yukarıda "kanıt"ı tırnak içinde yazdık, çünkü bu tür görsel kanıtlar, her ne kadar çok ikna edici olsalar da, tam anlamıyla matematiksel anlamda kanıt sayılmazlar.

2.6. *Herkesin herkesle maç yaptığı bir tenis turnuvasında, turnuvadan sonra her oyuncu yendiklerini ve yendiklerinin yendiklerini listeliyor. En az bir oyuncunun kendisi hariç herkesi listelediğini kanıtlayın.*

Kanıt: Turnuvaya katılan kişi sayısına n diyelim ve önermeyi n üzerine tümevarımla kanıtlayalım. $n = 1$ ise hiç maç yapılamayacağından önerme elbette doğru. Önermenin n için doğru olduğunu varsayıp önermeyi $n+1$ kişi için kanıtlayalım. $n+1$ kişi arasından bir x kişisi seçelim ve geri kalan n kişi arasında yapılan maçlara bakalım. Tümevarım varsayımına göre, bu geri kalan n kişiden en az biri, diyelim y kişisi, bu kişilerin aralarında yaptığı maçlarda $n-1$ kişiyi listelemiştir. (Demek ki bu $n-1$ kişi arasından y'nin yenildiği her kişi y'nin yendiği birisine yenilmiştir; bu dediğimiz, kanıtın son paragrafında önemli olacak.) Şimdilik resim şöyle:

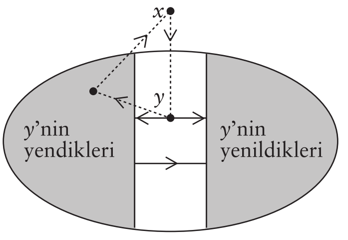


Şimdi... Eğer y, x'i yenmişse, y kişisi, x ile birlikte, toplam n kişiyi listeler ve istediğimiz gerçekleşir.

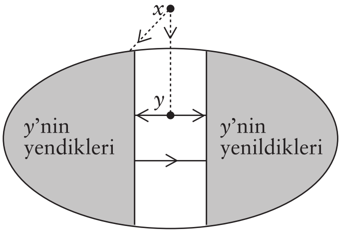


Bundan böyle x'in y'yi yendiğini varsayalım. Demek ki x, y'yi listeler. Bu bir.

İkincisi: Eğer x kişisi y'nin yendiklerinden birine yenilmişse gene y kişisi n kişiyi listeler ve istediğimiz gerçekleşir.



Bundan böyle bir de ayrıca x'in y'nin yendiklerini yendiğini varsayalım.



Demek ki x, y'nin yendiklerini de listeler. Ayrıca x kişisi y'nin yenildiklerini de listeler çünkü bunlar, y'nin (dolayısıyla x'in de) yendiği kişilerden birine yenilmişlerdir (bkz. yukarıdaki paragraf); böylece x kendi dışında herkesi listelemiş olur. □

İkinci Kanıt (Haluk Oral): İstenenden daha fazlasını kanıtlayacağız: *En fazla kişiyi yenen oyuncunun listesinde herkes vardır.* Diyelim önerme yanlış. En fazla kişiyi yenen oyuncuya A diyelim. H, A'nın listesinde olmasın. Demek ki H hem A'yı hem de A'nın yendiklerini yenmiştir. Demek ki H, A'dan daha fazla kişiyi yenmiştir. Çelişki. □

Alıştırmalar

2.7. $a_0 = 1$ ve $a_1 = 7$ olsun. Her $n \geq 1$ için, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$ olsun. a_2, a_3 ve a_4 terimlerini hesaplayın. Her $n \geq 0$ için,

$$a_n = 2 \cdot 3^n - (-1)^n$$

eşitliğini kanıtlayın.

2.8. **Kendi alıştırmanı kendin yap!** a_0 ve a_1'i ve tümevarımla a_n'yi öyle tanımla ki, her $n \geq 0$ için

$$a_n = 2 \cdot 3^n + 2^n$$

olsun.

2.9. Sonlu bir kümenin altkümelerinin yarısından fazlası seçiliyor. Seçilmiş bu altkümelerden birinin seçilmiş bir başka altkümenin altkümesi olacağını tümevarımla kanıtlayın.

2.10. $\{1, 2, \ldots, 100\}$ kümesinden 10 elemanlı bir altküme seçiliyor. 10 elemanlı bu altkümenin, elemanlarının toplamının eşit olduğu ve boşküme olmayan iki ayrık altkümesinin olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Önce ayrık olmayan iki altküme bulun.

2.11. Bir turnuvada her takım her takımla tek bir maç yapmak zorunda. Turnuvanın herhangi bir anında aynı sayıda maç yapmış en az iki takımın olacağını kanıtlayın.

2.12. Her k doğal sayısı için $10^k > k$ eşitsizliğini kanıtlayın.

2.13. $x > -1$ herhangi bir sayıysa ve n herhangi bir doğal sayıysa, $(1+x)^n \geq 1+nx$ eşitsizliğini kanıtlayın.

2.14. Eğer $0 < x < 1$ ise ve $n > 0$ bir doğal sayıysa,

$$(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)x^2}{2}$$

eşitsizliğini n üzerinden tümevarımla kanıtlayın.

2.15. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2,$$
$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)}{30}.$$

(Bkz. Örnek 2.30.)

2.16. p, $1/2$ ile 1 arasında bir sayı olsun. $x_1 = 1 - p$ ve her $n \geq 1$ doğal sayısı için $x_{n+1} = (1-p) + px_n^2$ olsun. Her n için,

$$x_n \leq \frac{1-p}{p}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

2.17. Aşağıdaki "teorem"in "kanıt"ında ne hata vardır?

Teorem. *Düzlemde hiçbiri bir diğerine paralel olmayan $n \geq 2$ tane doğru alalım. Bu doğrular tek bir noktada kesişir.*

Kanıt: Teoremin $n = 2$ için doğru olduğu bariz. Şimdi $n \geq 2$ olsun ve $n+1$ tane doğru alalım. Bu doğrulara $d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}$ diyelim. Tümevarım varsayımına göre $d_1, d_2, \ldots, d_n$ bir A noktasında kesişir. Aynı nedenden, $d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}$ de bir B noktasında kesişir. Ama bu A ve B noktaları hem d_2'de hem de d_n'de. Demek ki $\{A\} = d_2 \cap d_n = \{B\}$! ve $A = B$. □

2.18. Aşağıdaki "teorem"in "kanıt"ında ne hata vardır?

Teorem. *En büyük sayı 1'dir.*

Kanıt: En büyük sayı elbette 1'den küçük olamaz, yoksa o zaman 1, en büyük sayıdan daha büyük olurdu. Demek en büyük sayı 1'den büyükeşit olmak zorundadır. En büyük sayıya x diyelim. x'in 1'den büyük olduğunu varsayalım. O zaman $x^2 > x$ olur. Ama o zaman da x^2, en büyük sayı olan x'ten daha büyük olur. Çelişki. Demek ki $x = 1$ olmak zorundadır. □

2.19. **[Fibonacci Dizisi].** $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ için, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ olsun. Fibonacci dizisi denilen bu dizi şöyle devam eder: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

1. Her k için f_{3k} sayısının çift olduğunu kanıtlayın.
2. Her k için f_{4k} sayısının 3'e bölündüğünü kanıtlayın.
3. Daha genel olarak eğer r, n'yi bölüyorsa, f_r sayısının f_n sayısını böldüğünü kanıtlayın.
4. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1, \quad \sum_{i=0}^{n-1} f_{2t+1} = f_{2n}, \quad \sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1,$$
$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}, \quad f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = f_n(f_{n+1} + f_{n-1}).$$

($\sum$ simgesinin tanımı için bkz. [N1, Bölüm 10].)

2.20. Her $i = 1, 2, \ldots, n-1$ için,

$$\frac{1}{i(n-i)} \le \frac{1}{n-1}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

2.21. Her $n > 1$ tamsayısı için,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} \le 1$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

2.22. Her $n \ge 1$ doğal sayısı için,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \le 2 - \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini kanıtlayın.

2.23. Her $n \ge 1$ tamsayısı için,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \le 3$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Hangi a sayıları için,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} \le a$$

eşitsizliğini kanıtlayabilirsiniz?

2.24. **[1981 Uluslararası Matematik Olimpiyatı, Soru 6].** f, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden ve her $x, y \in \mathbb{N}$ için şu özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun:
a) $f(0, y) = y + 1$,
b) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$,
c) $f(x+y, y+1) = f(x, f(x+1, y))$.
$f(4, 1981)$ sayısını bulunuz.
İpucu: $f(x, y) = f_x(y)$ olarak yazarak, f'yi, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden bir $(f_x)_x$ fonksiyon dizisi/ailesi olarak algılayın. Şimdi sırayla f_0'ı, f_1'i, f_2'yi, f_3'ü ve f_4'ü hesaplayın.

2.25. **Liselerarası bir yarışmadan.**

$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}$$

olsun. $P_n(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x sayılarını bulun. **İpucu:** n üzerine tümevarımla,

$$P_n(X) = \frac{1}{n!}(X+1)(X+2)\cdots(X+n)$$

eşitliğini kanıtlayın.

2.26. Amacımız,

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \le 3$$

eşitsizliğini kanıtlamak. Bu eşitsizliği doğrudan tümevarımla kanıtlamaya çalışırsanız başaramayacağınızı göreceksiniz. Bu eşitsizlik yerine, daha güçlü bir eşitsizlik olan,

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) < 3 - \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın.

2.27. Amacımız,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leq\frac{5}{2}$$

eşitsizliğini kanıtlamak. Bu eşitsizliği doğrudan tümevarımla kanıtlamaya çalışırsanız başaramayacağınızı göreceksiniz. Bu eşitsizlik yerine, daha güçlü bir eşitsizlik olan,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leq\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

eşitsizliğini tümevarımla kanıtlayın.

2.28. **Liselerarası bir yarışmadan.** $2^{2^n}-1$ sayısının en az n tane farklı asala bölündüğünü kanıtlayın.

2.29. **Liselerarası bir yarışmadan.** x_1, x_2, x_3, ..., $x_n, \ldots$ sayı dizisini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1,\\
x_{2n} &= 1+x_n,\\
x_{2n+1} &= \frac{1}{x_{2n}}.
\end{aligned}$$

Her pozitif kesirli sayının bir ve bir tane n için x_n'ye eşit olduğunu kanıtlayın.
İpucu: Kesirli sayı birbirine asal a ve b sayıları için a/b biçiminde yazılsın. $a+b$ üzerine tümevarım yapın. a/b'nin 1'den büyük ya da küçük oluşuna göre iki farklı şıkkı ele alın.

Örnek 2.30. Bir önermeyi tümevarımla kanıtlayabilmek için, önce önermeyi bulmak gerekir. Örneğin,

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

eşitliğini kanıtlayabilmek için önce bu formülü tahmin etmek gerekir. Bu örnekte bu formülü bulmanın bir yolunu göstereceğiz.

$$f_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k=\sum_{i=1}^{n}i^k$$

olsun. Önce $f_1(n)$'yi bulalım. Bunun için $f_2(n)$'nin değişim hızını (bir anlamda "türevi"ni) hesaplayalım:

$$f_2(n+1)-f_2(n)=(n+1)^2.$$

Aynı $f_2(n+1)-f_2(n)$ ifadesini başka türlü hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
f_2(n+1)-f_2(n) &= \sum_{i=1}^{n+1}i^2-\sum_{i=1}^{n}i^2 = 1+\sum_{i=2}^{n+1}i^2-\sum_{i=1}^{n}i^2\\
&= 1+\sum_{j=1}^{n}(j+1)^2-\sum_{i=1}^{n}i^2 = 1+\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2-\sum_{i=1}^{n}i^2\\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}\left((i+1)^2-i^2\right) = 1+\sum_{i=1}^{n}(2i+1)\\
&= 1+\sum_{i=1}^{n}2i+\sum_{i=1}^{n}1 = 1+2\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1\\
&= 1+2f_1(n)+n.
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$1 + 2f_1(n) + n = (n+1)^2;$$

bundan da

$$f_1(n) = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

çıkar.

Şimdi $f_2(n)$ için formülü bulalım:

$$f_3(n+1) - f_3(n) = (n+1)^3.$$

Aynı $f_3(n+1) - f_3(n)$ ifadesini başka türlü hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
f_3(n+1) - f_3(n) &= \sum_{i=1}^{n+1} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} (j+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + \sum_{i=1}^{n} (i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^3 - i^3\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(3i^2 + 3i + 1\right) \\
&= 1 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 1 + 3f_2(n) + 3f_1(n) + n.
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$1 + 3f_2(n) + 3f_1(n) + n = (n+1)^2$$

ve buradan da $f_2(n)$ için formülü buluruz. $f_k(n)$'yi bulmanın genel yöntemini ileride Örnek 5.1'de göreceğiz.

Alıştırmalar

2.31. Bir önceki örnekteki yöntemle $f_3(n)$, $f_4(n)$, $f_5(n)$ için formüller bulun.

2.32. Yukarıdaki yöntemi kullanarak, $k+1$'inci dereceden bir $p_k \in \mathbb{Q}[X]$ polinomu için, her n için,

$$f_k(n) = p_k(n)$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlayın.

2.33. Yukarıdaki p_k polinomunun tüm katsayılarının $\mathbb{Z}$'de olamayacağını kanıtlayın. (Ama her n doğal sayısı için $p_k(n) \in \mathbb{Z}$ olur!)

2.34. Her $k \in \mathbb{N}$ için, $(k+1)!p_k(X)$ polinomunun katsayılarının $\mathbb{Z}$'de olduğunu kanıtlayın.

2.35. $f(X) = f_0 + f_1X + f_2X^2 + \cdots + f_dX^d$, derecesi d olan bir polinom olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f_0p_0(n) + f_1p_1(n) + f_2p_2(n) + \cdots + f_dp_d(n)$$

eşitliğini kanıtlayın. (p_k polinomları önceki alıştırmalarda tanımlanmıştı.)

$$p(X) = f_0p_0(X) + f_1p_1(X) + f_2p_2(X) + \cdots + f_dp_d(X)$$

olsun. $p(X)$ polinomunun derecesinin $d+1$ olduğunu kanıtlayın. Her n doğal sayısı için,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = p(n)$$

eşitliğinin farkına varın.

3. Kombinasyon Hesapları

Faktoriyel. İlk n pozitif doğal sayının toplamı için bir formül vardır:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bunu Alıştırma 2.15 olarak sormuştuk; ayrıca Örnek 2.4'te de görsel bir "kanıtı"nı sunmuştuk. Kanıtı oldukça basittir, n üzerine tümevarım yapmak yeterlidir. Peki... Ya ilk n pozitif doğal sayının çarpımı nedir? Yani $1 \times 2 \times \cdots \times n$ sayısı nasıl hesaplanır?

Yanıt, "ilk n sayının çarpımı ilk n sayının çarpımıdır" da olabilir! Ama bizim amacımız, aynen toplama için yaptığımız gibi, kapalı, yani "..." (üç nokta) kullanmayan bir formül bulmak.

İlk n pozitif doğal sayının çarpımı için yukarıda toplam için gösterdiğimiz gibi cebirsel bir kapalı formül yoktur! Ama matematikte ilk n pozitif doğal sayının çarpımına çok gereksinilir ve bu yüzden kapalı bir formülün olmaması rahatsız edicidir. Madem öyle biz de ilk n pozitif doğal sayının çarpımı için bir simge icat edelim. Bundan böyle ilk n pozitif doğal sayının çarpımını $n!$ olarak yazalım. (Eğer ilk n doğal sayının toplamı için bir formülümüz olmasaydı, onun için de bir simge icat etmek zorunda kalırdık.) Yani,

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

olsun. Böylece ilk n doğal sayının çarpımı için kapalı bir formül elde ettik, tepeden inme bir yöntemle olsa da! Örneğin,

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120$$

olur. $0! = 1$ olarak tanımlanır.

$n!$ sayısı "n ***faktoriyel***" olarak okunur.

Daha matematiksel olarak $n!$ sayısı tümevarımla şöyle tanımlanır:

$$0! = 1$$

ve her $n \geq 0$ için

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Uzunca Bir Not: 0! sayısını, ilk sıfır pozitif sayının çarpımı olarak tanımladık (n! ifadesinin tanımına bakın), dolayısıyla bu sayının neden 1'e eşit olarak tanımlandığını okur sorgulayabilir. El cevap: İşimize geldiğinden... 0! sayısını 1 olarak tanımlamak işimize geldiğinden bu tanımı yaptık. 0! sayısını 1 olarak tanımlamasaydık ya da hiç tanımlamasaydık, teoremleri ve formülleri yazmakta zorlanacaktık, karşımıza hep özel durumlar çıkacaktı ya da formüllerimiz ve önermelerimiz uzayacaktı. Ayrıca 0! sayısının 1 olarak tanımlanması uygulamayla uyum içindedir. Nitekim sayma konusuna biraz eğilen biri, 0! sayısının eğer illa tanımlanması gerekiyorsa, 1 olarak tanımlanmasının en sağlıklı çözüm olduğunu hemen anlar.

$0! = 1$ eşitliğini kanıtladığını iddia eden her kanıtta mutlaka ince bir hata vardır. Örneğin şu "kanıt"a bakalım:

$$\frac{n!}{n(n-1)\cdots(k+1)} = k! \tag{1}$$

eşitliğinde $k = 0$ alırsak,

$$\frac{n!}{n(n-1)\cdots(0+1)} = 0!$$

buluruz, ama sol taraf $n!/n!$ olduğundan 1'e eşittir, demek ki $0! = 1$ olur...

Bu kanıt yanlıştır çünkü (1) eşitliğinin $k = 0$ iken geçerli olduğu kanıtlanmamıştır ve $0! = 1$ eşitliği bilinmeden de kanıtlanamaz.

Sonuç olarak, $0! = 1$ eşitliği bir anlaşmanın ya da tanımın sonucudur, kanıtlanamaz. Daha genel olarak, matematikte "Hiç tane sayının birbiriyle toplamı 0'dır (toplamanın etkisiz elemanı), hiç tane sayının birbiriyle çarpımı 1'dir (çarpmanın etkisiz elemanı)" anlaşması yapılır. Bu anlaşma kabul edilecek olursa 0! elbette 1'e eşit olmalıdır.

Benzer bir anlaşma 0^0 için de ama çok daha şaşırtıcı bir biçimde geçerlidir. Cebirde, aritmetikte, kombinasyon hesaplarında genellikle $0^0 = 1$ eşitliği kabul edilir çünkü öyle olması işimize gelir. Ama analizde bu eşitliği kabul etmek hiç işimize gelmez, analizde 0^0'ı başka bir sayı olarak kabul etmek de işimize gelmez, dolayısıyla analizde 0^0 ifadesi tanımsız olarak bırakılır.

"Tanımsız" demek "tanımlanamaz" demek değildir, "tanımlanmamış" demektir. Örneğin eğer isteseydik 0/0'ı 5 olarak tanımlayabilirdik, ama istemiyoruz, çünkü 0/0'ı herhangi bir sayı olarak tanımlamak hiçbir işe yaramaz, tam tersine her şeyi zorlaştırır.

Uzunca notun sonu.

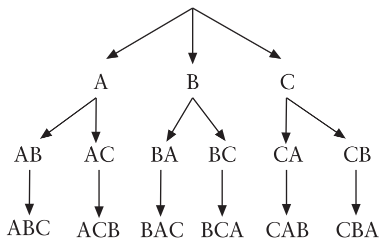
Faktoriyel yazılımını kullanarak birkaç hesap yapalım.

Harflerden Sözcük Üretmek. *Elimizde A, B ve C harfleri var ve bu harflerden üçünü kullanarak (Türkçede ya da başka bir dilde anlamı olması gerekmez) üç harfli sözcük üretmek istiyoruz. Kaç sözcük üretebiliriz?*

Yanıt: Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri -alfabe sırasına göre- sıralayalım:

$$ABC,\ ACB,\ BCA,\ BAC,\ CAB,\ CBA.$$

Demek 6 sözcük üretebilirmişiz. Bu sözcüklerin oluşumunu aşağıdaki şekildeki gibi de gösterebiliriz. Önce ilk harfleri koyuyoruz: sırasıyla A, B ve C; sonra da ikinci ve üçüncü harfleri:



Eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçeneğimiz var: B ve C. Dolayısıyla A budağından B ve C dallarını sallandırıyoruz. Bu son dalların her birinden sonra birer dal daha çıkacaktır. Örneğin soldan birinci dal olan AB dalının sonuna C gelecektir. Her üç dal için bunu yaptığımızdan, bu 3 harfle toplam

$$3 \times 2 = 6$$

tane iki değişik harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz. Teoriye geçmeden önce daha fazla örnek verelim.

Soru 1. *A, B, C ve D harflerinin herbirini birer kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız kaç sözcük yazabiliriz?*

Yanıt: Sözcükleri gene teker teker sıralayabiliriz. Yukarıdaki gibi alfabetik sıraya dizmenin sonsuz yararları vardır. En tepeden birinci harfi simgeleyen 4 dal çıkar, sonra bu dalların herbirinden ikinci harfi simgeleyen 3'er dal çıkar (etti mi 12), sonra bu 12 dalın her birinden 2'şer dal çıkar (24 etti), ve en sona da bir dal... Yanıt 24'tür. □

Soru 2. *$A_1, A_2, \ldots, A_n$ birbirinden farklı harfler olsun. Bu harflerin herbirini birer kez kullanarak kaç sözcük yazabiliriz?*

Yanıt: Yukarıda 3 için 6, 4 için 24 yanıtını bulduk. Okur belki de

$$6 = 1 \times 2 \times 3 = 3! \text{ ve } 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$$

eşitliklerinin farkına varmıştır.

Sorumuzun yanıtı $n!$'dir. Ama neden? Çünkü birinci harf için n seçeneğimiz var; birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye $n-1$ seçenek kalıyor; ikinci harfi de seçtikten sonra geriye $n-2$ seçenek kalıyor... Böylece n,

$n-1$, $n-2$ ve derken, en son harf için de 1 seçenek kalıyor. Demek ki toplam sözcük sayısı

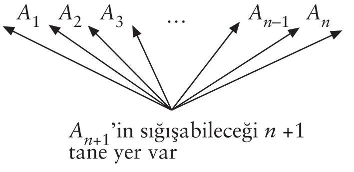
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

olur, yani $n!$'dir. □

Yukarıdaki sorunun tümevarımla kanıt yöntemini kullanan bir başka yanıtını verelim. Bir harfle $1! = 1$ sözcük yazılabileceği belli. n harfle $n!$ tane sözcük yazılabileceğini varsayalım. $n+1$'inci harfi bu $n!$ sözcüğün harflerinin arasına (ya da en başına, ya da en sonuna) yerleştirip $n+1$ harfli bir sözcük yaratabiliriz. n harfli bir sözcükte $n+1$'inci harfi koyacağımız tam $n+1$ tane yer var. Demek ki, $n+1$ harfli

$$(n+1) \times n! = (n+1)!$$

tane sözcük var.



Not: Eğer $n = 0$ ise, $0!$ sayısı 1 olarak tanımlandığından, yukarıda bulduğumuz yanıt $n = 0$ için de geçerlidir, yani 0 harfle tek bir sözcük yazılabilir, o da hiç harfi olmayan ***boşsözcük***tür. Harfsiz olan boşsözcüğü harfleriyle yazamayacağımızdan, boşsözcük harfsiz olarak $\langle\ \rangle$ biçiminde yazılır. Bu dediğimizi bir kabul olarak da addedebilirsiniz, ardında derin bir matematiksel gerçek aramayın, pek yoktur.

Soru 3. *A, B, C, D, E, F harflerini en fazla bir kez kullanarak anlamlı ya da anlamsız dört harfli kaç sözcük yazabiliriz?*

Yanıt: Eğer yeterince sabrımız varsa sözcükleri teker teker alfabetik sıraya dizebiliriz, ancak matematikle daha çabuk bulunabilir sözcük sayısı, ne de olsa sözcüklerin kendisi değil, sözcüklerin sayısı isteniyor sadece. Birinci harf için 6 seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye 5 seçenek kalıyor. İlk iki harfi seçtikten sonra geriye 4 seçenek kalıyor. İlk üç harfi seçtikten sonra geriye dördüncü harf olarak 3 seçenek kalıyor. Demek ki doğru yanıt $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$'tır. □

Soru 4. *A_1, A_2, $\ldots$, A_n birbirinden farklı harfler olsun. $0 \leq k \leq n$ olsun. Bu harflerin herbirini en fazla bir kez kullanarak k harfli kaç sözcük yazabiliriz?*

Yanıt: $k = 0$ ise, o zaman sadece boşsözcük vardır, yani 0 harfli tek bir sözcük yazabiliriz. Şimdi $k \geq 1$ olsun. Birinci harf için n seçeneğimiz var. Birinci harfi seçtikten sonra ikinci harf için geriye $n-1$ seçenek kalıyor. İlk iki harfi seçtikten sonra geriye $n-2$ seçenek kalıyor. İlk üç harfi seçtikten sonra dördüncü harf için geriye $n-3$ seçenek kalıyor. Bu böylecene k'ye kadar devam eder. En sonuncu k'inci harf için geriye $n-(k-1)$ tane, yani $n-k+1$ tane seçenek kalıyor. Demek ki, toplam

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1)$$

seçenek var. Bu sayı da

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

sayısına eşittir. Demek ki n değişik harften

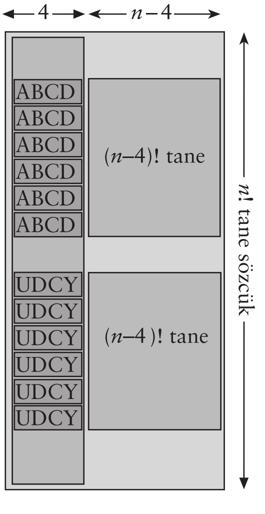
$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

tane k harfli sözcük yazabiliriz. Bu formülün $k=0$ için de geçerli olduğunu dikkatinize sunarız. □

Aynı soruyu bir başka türlü yanıtlayalım. n harfle tüm sözcükleri bir liste halinde altalta yazalım. Aşağıdaki şekilde düşüncemizi resmetmeye çalıştık. Listemizde tam $n!$ sözcük olduğunu biliyoruz. Şimdi bu sözcüklerin en solundaki k harften oluşan sözcüklere bakalım. Elbette k harfli her sözcük bu listenin en solunda yer alacaktır, hatta her biri 1'den fazla kez belirecektir. Her biri kaç kez belirecektir? Kullanılmayan $n-k$ harf, sözcüğün sağında kaç değişik biçimde beliriyorsa o kadar kez belirecektir. Kullanılmayan $n-k$ harf, sözcüğün sağında $(n-k)!$ defa belirdiğinden, yanıt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

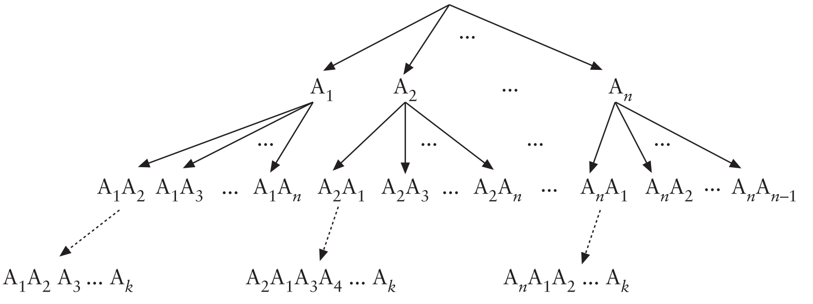
olur. □



Bir önceki soruda olduğu gibi $n = 6$, $k = 4$ ise, daha önce bulduğumuz

$$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

yanıtını buluruz.



Bu soruyu daha şematik bir biçimde yanıtlamak için yukarıdaki gibi ters dönmüş bir ağaç yapabiliriz. Ağacın ilk budağından aşağıya doğru n dal çıkar:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$$

dalları. Bunlar sözcüklerin ilk harfleri. Bu dalların uçlarına $n-1$ dal eklenir (ikinci harfler.) Örneğin A_1 dalına

$$A_2,\ \ldots,\ A_n$$

dalları eklenir. Bu yeni dallar,

$$A_1A_2,\ \ldots,\ A_1A_n$$

sözcüklerini oluştururlar. A_2 dalınaysa,

$$A_1,\ A_3,\ \ldots,\ A_n$$

dalları eklenir ve,

$$A_2A_1,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_2A_n$$

sözcüklerini oluştururlar. Böylece $n \times (n-1)$ dal elde etmiş oluruz. Demek ki iki harfli sözcük sayısı $n \times (n-1)$ imiş. Ağacı sürdürelim. Yukarıda elde ettiğimiz her $n \times (n-1)$ dala şimdi $n-2$ dal daha ekleyebiliriz. Örneğin A_1A_2 dalına,

$$A_3,\ \ldots,\ A_n$$

dallarını ekleyebiliriz. Bu yeni dalların herbirinin ucuna 3 harfli sözcükler yazılır. Böylece

$$n \times (n-1) \times (n-2)$$

tane üç harfli sözcük elde ederiz. Bu yöntemi sürdürerek, $A_1, \ldots, A_n$ harflerinden

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1))$$

tane k değişik harfli sözcük yazacağımızı görürüz. Bu sayı da

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

sayısına eşittir (sadeleştirince eşitlik hemen çıkar.) İlk teoremimizi iki değişik biçimde kanıtladık:

Teorem 3.1. *Eğer $k \le n$ iki doğal sayıysa, birbirinden farklı n harfin her biri en çok bir kez kullanılarak*

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

tane k harfli sözcük yazılabilir. □

Eğer yukarıdaki teoremde k'yi n alırsak, $n!$ buluruz: Birbirinden farklı $A_1, \ldots, A_n$ harflerinin herbirini bir kez kullanarak, bildiğimiz üzere n uzunluğunda $n!$ tane sözcük yazılır.

Örnekler

3.1. *SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane üç harfli sözcük yazabiliriz?*
Yukarıdaki teoremi uygulayarak

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

sözcük buluruz. Başka soru: *SELİM'in harfleriyle kaç tane beş harfli sözcük yazılır?* Yine yukarıdaki teoremi uygulayalım:

$$\frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

buluruz. (Böylece 0! sayısını 1 olarak tanımlamanın nasıl işimize yaradığını da görmüş oluruz.)

3.2. *MELEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç tane (beş harfli elbet) sözcük yazabiliriz?*
Yukarıdaki teoremi doğrudan uygulayamayız, çünkü iki tane E harfi var. Önce iki E'yi ayrıştıralım ve $\mathrm{ME_1LE_2K}$ "sözcüğünün" tüm harflerini kullanarak kaç tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi bulalım. Bu sorunun yanıtı yukarıdaki gibi $5! = 120$'dir. Bu 120 sözcüğün yarısında $\mathrm{E_1}$ harfi $\mathrm{E_2}$ harfinden önce gelir; öbür yarısındaysa $\mathrm{E_2}$ harfi $\mathrm{E_1}$ harfinden önce gelir. Demek ki MELEK sözcüğünün harflerinden $120/2 = 60$ sözcük yazabiliriz.

3.3. Yukarıdaki örneğe benzeyen, ama biraz daha zor olan bir örnek daha: *KELEBEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç sözcük yazabiliriz?*
Yukarıdaki yöntemi kullanalım ve önce

$$\mathrm{K_1E_1LE_2BE_3K_2}$$

sözcüğünü ele alalım. Yedi harfli bu sözcükten 7! sözcük üretebiliriz. Şimdi,

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 \text{ ve } \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_3$$

yapalım. Birinci eşitlik için 2'ye böleriz, ikinci eşitlik içinse 3!'e, yani 6'ya, çünkü E_1, E_2, E_3 harfleri 3! farklı sırada bir sözcükte belirebilirler. Demek ki KELEBEK sözcüğünün harflerinin yerini değiştirerek

$$7!/(2! \times 3!) = 420$$

sözcük yazabiliriz.

Soru 5. *Elimizde n tane elemanı olan bir A kümesi var:*

$$A = \{a_1,\ \ldots,\ a_n\}.$$

$k \leq n$, bir doğal sayı olsun. A kümesinin kaç tane k elemanlı altkümesi vardır?
Yanıt: Hesaplamak istediğimiz sayıyı

$$\binom{n}{k}$$

olarak yazalım. Bu sayıya "n'de k", "n seç k", "n'nin k'lısı" ya da "n'nin k'lı kombinasyonu" adı verilir. Bu tür sayılara ***binom katsayıları*** denir.

Örnek 3.4. Hemen $\binom{5}{3}$ sayısını hesaplayalım, yani Soru 5'te $n = 5$ ve $k = 3$ alalım. $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ kümesinin 3 elemanlı bütün altkümelerini bulalım.

$$\begin{gathered}
\{a_1,\ a_2,\ a_3\}\\
\{a_1,\ a_2,\ a_4\}\\
\{a_1,\ a_2,\ a_5\}\\
\{a_1,\ a_3,\ a_4\}\\
\{a_1,\ a_3,\ a_5\}\\
\{a_1,\ a_4,\ a_5\}\\
\{a_2,\ a_3,\ a_4\}\\
\{a_2,\ a_3,\ a_5\}\\
\{a_2,\ a_4,\ a_5\}\\
\{a_3,\ a_4,\ a_5\}
\end{gathered}$$

Toplam 10 tane 3 elemanlı altküme var. Demek ki $\binom{5}{3} = 10$ imiş.

Sözcük bulmakla bu sorudaki altküme bulmak arasında önemli bir ayrım var: $a_1a_2a_3$ ve $a_1a_3a_2$ sözcüklerini ayrı ayrı sayıyorduk; oysa bu sorumuzda sözcüklere değil de harflerden oluşan kümelere bakıyoruz. Hem $a_1a_2a_3$, hem de $a_1a_3a_2$ sözcüklerinin harflerinden $\{a_1, a_2, a_3\}$ kümesi oluşur. Bunun gibi,

$$a_1a_2a_3,\ a_1a_3a_2,\ a_2a_1a_3,\ a_2a_3a_1,\ a_3a_1a_2,\ a_3a_2a_1$$

sözcüklerinin herbiri

$$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$$

kümesini oluştururlar. Yani **sıralı** harf dizilerine değil, **sırasız** harf kümelerine bakıyoruz. Aşağıdaki şekil soruyu nasıl çözeceğime dair ipucu verecektir.

$a_1a_2a_3$	$a_1a_2a_4$	$a_1a_2a_5$	$a_1a_3a_4$	$a_1a_3a_5$	$a_1a_4a_5$	$a_2a_3a_4$	$a_2a_3a_5$	$a_2a_4a_5$	$a_2a_4a_5$
$a_1a_3a_2$	$a_1a_4a_2$	$a_1a_5a_2$	$a_1a_4a_3$	$a_1a_5a_3$	$a_1a_5a_4$	$a_2a_4a_3$	$a_2a_5a_3$	$a_2a_5a_4$	$a_3a_5a_4$
$a_2a_1a_3$	$a_2a_1a_4$	$a_2a_1a_5$	$a_3a_1a_4$	$a_3a_1a_5$	$a_4a_1a_5$	$a_3a_2a_4$	$a_3a_2a_5$	$a_4a_2a_5$	$a_4a_3a_5$
$a_2a_3a_1$	$a_2a_4a_1$	$a_2a_5a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_3a_5a_1$	$a_4a_5a_1$	$a_3a_4a_2$	$a_3a_5a_2$	$a_4a_5a_2$	$a_4a_5a_3$
$a_3a_1a_2$	$a_4a_1a_2$	$a_5a_1a_2$	$a_4a_1a_3$	$a_5a_1a_3$	$a_5a_1a_4$	$a_4a_2a_3$	$a_5a_2a_3$	$a_5a_2a_4$	$a_5a_3a_4$
$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$	$a_5a_2a_1$	$a_4a_3a_1$	$a_5a_3a_1$	$a_5a_4a_1$	$a_4a_3a_2$	$a_5a_3a_2$	$a_5a_4a_2$	$a_5a_4a_3$
$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_1, a_2, a_4\}$	$\{a_1, a_2, a_5\}$	$\{a_1, a_3, a_4\}$	$\{a_1, a_3, a_5\}$	$\{a_1, a_4, a_5\}$	$\{a_2, a_3, a_4\}$	$\{a_2, a_3, a_5\}$	$\{a_2, a_4, a_5\}$	$\{a_3, a_4, a_5\}$

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 harfleriyle yazılmış üç harfli sözcükler, toplam $5!/(5-3)! = 60$ tane.
Bu sözcükleri içerdikleri harflere göre her biri $3! = 6$ sözcük içeren gruplara ayırıyoruz.
Her grup a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 harflerinin üçünden oluşmuş altı elemanlık bir kümeye eş düşüyor.

Soruyu yanıtlamak için bu örnekten yararlanacağız. Birinci teoreme göre, k farklı harfli sözcük sayısı

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

sayısına eşittir. Bu k farklı harfle yazılmış

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

tane sözcükten birçoğu aynı kümenin harflerinden oluşurlar. Kaç tanesinin aynı kümenin harflerinden oluştuğunu bulalım. (Bu aşamada yukarıdaki şekle bakın.) Yine birinci teoreme göre k harfle yazılan $k!$ sözcük olduğuna göre,

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

sözcükten her $k!$ tanesi aynı kümenin harflerinden oluşur. Demek ki, k elemanlı altküme sayısını bulmak için

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

sayısını $k!$ sayısına bölmeliyiz:

$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Bulduğumuz bu sonucu daha sonra sık sık kullanacağız; bir köşeye yazalım:

Teorem 3.2. *n elemanlı bir kümenin, k elemanlı altküme sayısı*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dir. Bu, aynı zamanda n eleman arasından kaç farklı biçimde k elemanın seçilebileceğinin de sayısıdır.

Birazdan kanıtlayacağımız bu teoremin ikinci tümcesi,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sayısına neden "n seç k" ya da "n'nin k'lı kombinasyonu" dendiğini de söylüyor.

Teoremin pek sık ifade edilmeyen ama önemli ve hatta şaşırtıcı bir sonucu:

Sonuç 3.3. *Her n doğal sayısı ve her $k = 0, 1, \ldots, n$ için $k!(n-k)!$ sayısı $n!$ sayısını böler.* □

Örnekler

3.5. *Rakamları soldan sağa doğru kesin artan 5 haneli kaç doğal sayı vardır?*
Çözüm: En soldaki rakam 0 olamaz, dolayısıyla sayılar 1'den 9'a kadar olan 9 rakamdan oluşurlar. Bu 9 rakamdan 5'ini seçip küçükten büyüğe sıraya dizersek, sorudaki tüm sayıları buluruz. Sonuç $\binom{9}{5} = 126$ çıkar.

3.6. 18 takımlık bir futbol liginde her takım her takımla maç yaparsa, toplam

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \frac{18!}{2!16!} = \frac{18 \times 17}{2} = 9 \times 17 = 153$$

maç yapılmış olur, çünkü 18 takımdan oluşan bir kümenin tam bu kadar iki elemanlı altkümesi vardır. Her takım her takımla iki maç yaparsa, maç sayısı bunun iki katı olur elbette.

3.7. İçinde 12 farklı renk bulunan bir boya kalemi kutusundan,

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 9 \times 8 = 792$$

farklı biçimde beş kalem seçilebilir.

3.8. 60 kişilik bir sınıftan tam,

$$\binom{60}{11}$$

tane farklı ve kesişmeyen futbol takımı çıkar. (Bir futbol takımı 11 kişiden oluşur.)

3.9. 60 kişilik bir sınıftan tam,

$$\binom{60}{11} \times \binom{60-11}{6} \times \binom{60-11-6}{5} = \frac{60!}{11!49!} \times \frac{49!}{6!43!} \times \frac{43!}{5!38!} = \frac{60!}{11!6!5!38!}$$

tane farklı futbol, voleybol ve basketbol takımları çıkar. (Bir voleybol takımı 6, bir basketbol takımı 5 kişiden oluşur - yedekleri saymıyoruz.)

3.10. A harfini k defa, B harfini $n-k$ defa kullanarak n harfli tam

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

tane sözcük yazabiliriz. Nitekim, n harfin gelebileceği yerleri adam asmaca oyununda olduğu gibi yatay çizgilerle gösterelim ve bu yerleri 1'den n'ye kadar numaralandıralım.

$$\underset{1}{\rule{1cm}{0.4pt}}\ \underset{2}{\rule{1cm}{0.4pt}}\ \underset{3}{\rule{1cm}{0.4pt}}\ \ \cdots\ \ \underset{n-1}{\rule{1cm}{0.4pt}}\ \underset{n}{\rule{1cm}{0.4pt}}$$

Bu n tane yerden, A'nın gelebileceği k tanesini seçeceğiz (geri kalan yerlere B gelecek). Bu seçimi kaç değişik biçimde yapabiliriz? Bu, n elemanlı $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden (kümenin elemanları yerlerin numaraları) k elemanlı bir altküme seçmeye benzer. Teorem 3.2'ye göre bunun

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

değişik biçimde yapılabileceğini biliyoruz.

Teorem 3.2'nin İkinci Kanıtı: n elemanlı kümenin elemanlarını harf olarak algılayalım. Bu harflerin her birini tam bir kez kullanarak tam $n!$ tane sözcük yazabiliriz. Bu $n!$ tane sözcüğü bir liste halinde altalta yazalım. Listedeki her sözcüğün ilk k harfi, k elemanlı bir altkümenin elemanlarını oluşturur. k elemanlı her altkümenin elemanlarının tümü listedeki en az bir sözcüğün ilk k harfini oluşturur elbette. Hatta listedeki 1'den fazla sözcüğün ilk k harfi aynı kümeyi oluşturur. Listedeki kaç sözcüğün ilk k harfi aynı k harften oluşur? Verilmiş k tane harfi $k!$ değişik biçimde sıraya sokabiliriz. Geri kalan $n-k$ harfi de $(n-k)!$ değişik biçimde sıraya sokabiliriz. Demek ki $k!(n-k)!$ tane sözcüğün ilk k harfi aynıdır. Toplam $n!$ tane sözcük olduğundan,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

buluruz. □

Sonuç 3.4. [Simetri Özelliği]. *Her $0 \leq k \leq n$ doğal sayısı için,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

eşitliği geçerlidir.

Birinci Kanıt: Sol taraftaki sayı, n elemanlı bir kümeden kaç farklı biçimde k eleman seçilebileceğini söylüyor. Sağ taraftaki sayı da, n elemanlı bir kümeden kaç farklı biçimde $n-k$ eleman seçilebileceğini söylüyor. Ama k eleman seçmekle, seçmeyeceğimiz geri kalan $n-k$ elemanı seçmek aynı şey... Biri belirlendi mi diğeri de belirlenir. Demek ki iki sayı birbirine eşit.

Daha biçimsel olarak bu kanıtı şöyle ifade edebiliriz: X, n elemanlı bir küme olsun. Her $0 \leq k \leq n$ için,

$$X_k = \{A \subseteq X : |A| = k\}$$

olsun. O zaman

$$A \mapsto A^c = X \setminus A$$

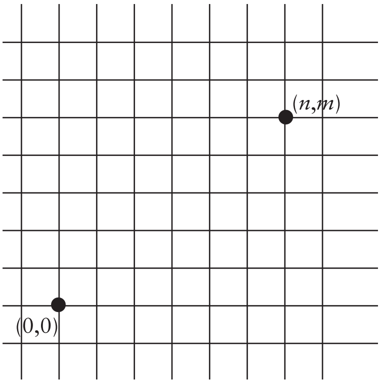
kuralıyla tanımlanmış fonksiyon, X_k ile X_{n-k} kümeleri arasında bir eşlemedir, dolayısıyla istediğimiz eşitlik geçerlidir.

İkinci Kanıt: Daha cebirsel ve daha kısa bir kanıt aşağıda:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Örnekler

3.11. **Izgarada En Kısa Yol Sayısı.** *Aşağıdaki ızgaranın üstünden giderek ve hep doğuya ya da kuzeye giderek* (0, 0) *noktasından* (n, m) *noktasına kaç farklı biçimde gidebilirsiniz?*



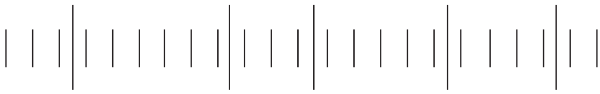
Yanıt: Sorunun, (0, 0) noktasından (n, m) noktasına giden ve ızgaradan şaşmayan en kısa yol sayısını sorduğuna dikkatinizi çekeriz. Toplam $n + m$ hareket yapmamız lazım. Bunlardan m tanesi kuzeye, geri kalan n tanesi doğuya olmalı. Demek ki $n+m$ hareketten m tane kuzey hareketi seçmeliyiz. Dolayısıyla yanıt,

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

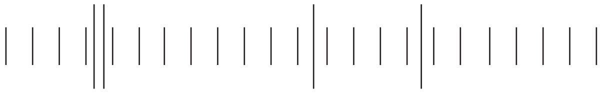
olur. □

3.12. **Zarda Olay Sayısı 1.** Bir zar üstünde 1'den 6'ya kadar 6 sayı vardır. Dolayısıyla tek bir zar attığınızda, 6 olaydan biriyle karşılaşırsınız: ya 1 gelir, ya 2 gelir, ..., ya da 6 gelir.
İki zar atarsanız, eğer zarlar arasında bir fark gözetemiyorsanız, olay sayısı $6 \times 6 = 36$'ya çıkmaz, çünkü $1-2$ ile $2-1$ arasında bir ayrım yapılamaz. (Ama zarlardan biri kırmızı, diğeri mavi olsaydı, böyle bir ayrım yapılabilirdi.) Dolayısıyla iki farksız zarda olay sayısı 36'dan daha azdır. Sayarsanız, bu durumda olay sayısının 21 olduğunu bulursunuz: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66.
Üç farksız zarda olayları saymak daha zor, toplam 56 olay bulunuyor. Şimdi bu zarları saymanın kolay bir yolunu bulacağız. □

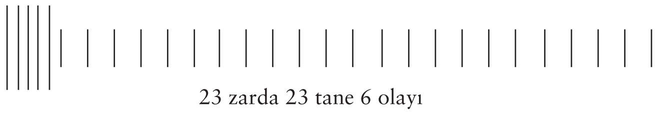
3.13. **Zarda Olay Sayısı 2.** *Birbirinden farkı olmayan n zar attığınızda kaç olay vardır?*
Yanıt: n tane küçük çubuk alıp yanyana dizelim. Aşağıdaki şekilden izleyin. Bu n küçük çubuk arasına (ya da çubukların en başına ya da en sonuna) 5 tane büyük çubuk yerleştirelim.



23 zarda 3 tane 1, 6 tane 2, 3 tane 3, 5 tane 4, 4 tane 5 ve 2 tane 6 olayı



23 zarda 4 tane 1, 0 tane 2, 8 tane 3, 4 tane 4, 7 tane 5 ve 0 tane 6 olayı



23 zarda 23 tane 6 olayı

En soldan başlayarak, birinci büyük çubuğun solunda kalan küçük çubuk sayısı bize n zarda kaç tane 1 geldiğini söylesin. Birinci büyük çubukla ikinci büyük çubuk arasında kalan küçük çubuk sayısı da n zarda kaç tane 2 geldiğini söylesin. İkinci büyük çubukla üçüncü büyük çubuk arasında kalan küçük çubuk sayısı da n zarda kaç tane 3 geldiğini söylesin... Ve son olarak beşinci büyük çubuğun sağındaki küçük çubuk sayısı n zarda kaç tane 6 geldiğini söylesin.

n küçük çubuğun 5 büyük çubukla her ayrımı bize n zarda bir olay verir. Ve n zarda gelebilecek her olay bize n küçük çubuğun 5 büyük çubukla bir ayrımını verir.

Demek ki n tane küçük çubukla 5 tane büyük çubuğu kaç değişik biçimde dizebileceğimizi bulmalıyız. Küçük çubuklara A, büyük çubuklara B dersek, n tane A ve 5 tane B ile $n+5$ harflik kaç değişik sözcük yazabileceğimizi bulmalıyız. Harfler için $n+5$ tane yerimiz var ve bunlardan 5'i B harfine ayrılacak. Böyle bir seçimi,

$$\binom{n+5}{5}$$

farklı biçimde yapabileceğimizi biliyoruz. Yanıtı bulduk.

Eğer $n=1$ ise, olması gerektiği gibi

$$\binom{1+5}{5} = \binom{6}{5} = 6$$

buluruz. Eğer $n=2$ ise yanıt 21 çıkmalı; öyle de oluyor:

$$\binom{2+5}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$$

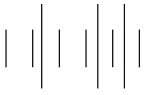
Dikkat: Eğer $n > 1$ ise bu olayların her birinin gelme olasılığı aynı değildir. Örneğin iki zarda 1-1 gelme olasılığı 1/36'dır ama 1-2 gelme olasılığı 1/18'dir. □

3.14. **Denklem Çözümü Sayısı 1.** *x_i doğal sayı olmak üzere,*

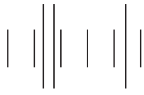
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

denkleminin kaç farklı (x_1, x_2, x_3, x_4) çözümü vardır?

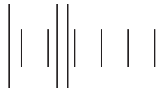
Yanıt: 6 sayısını altı adet küçük çubukla temsil edelim. Bu altı küçük çubuğu üç büyük çubukla dört parçaya bölelim. Her bölünme denklemin ayrı bir (x_1, x_2, x_3, x_4) çözümünü verir. Örneğin,



2 + 2 + 1 + 1 = 6



2 + 0 + 3 + 1 = 6



0 + 2 + 0 + 4 = 6

0 + 0 + 6 + 0 = 6

Birinci büyük çubuğun solundaki küçük çubuk sayısı x_1, ilk iki büyük çubuk arasındaki küçük çubuk sayısı x_2, ikinciyle üçüncü çubuk arasındaki küçük çubuk sayısı x_3 ve son büyük çubuğun sağındaki küçük çubuk sayısı x_4 sayısını verir. Her çözüm böyle bir bölünmeye yol açtığı gibi, her bölünme de bir çözüme yol açar.
Demek ki problem aslında, 6 küçük ve 3 büyük çubuğun kaç farklı biçimde yerleştirileceği sorusu. Küçük çubuklara K harfi dersek, büyük çubuklara B harfi dersek, problem 6 tane K ve 3 tane B harfiyle 9 harflik kaç değişik sözcük yazabileceğimiz sorusuna dönüşür. Bu problemi biraz önce çözmüştük. Yanıt:

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

olur. □

3.15. **Denklem Çözümü Sayısı 2.** Daha genel olarak,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

denkleminin doğal sayılarda

$$\binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

tane farklı $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ çözümü vardır.

3.16. **Denklem Çözümü Sayısı 3.** *x_i pozitif doğal sayı olmak üzere,*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

denkleminin kaç farklı çözümü vardır?

Yanıt: Yukarıdaki problemden farklı olarak, bu sefer x_i'ler 0 olamazlar, yani $x_i \geq 1$ olmak zorunda. Çözmemiz istenen denklemi

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 2$$

olarak yazalım ve $y_i = x_i - 1$ tanımını yapalım. Demek ki, $y_i \geq 0$ ve

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2.$$

Bu son eşitliği sağlayan (y_1, y_2, y_3, y_4) doğal sayı dörtlülerinin sayısını bulmalıyız. Bir önceki soruya göre bunlardan,

$$\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

tane vardır. Okur 10 çözümü teker teker sıralayabilir.
Daha genel olarak, aynı akıl yürütmeyle,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

denkleminin pozitif doğal sayılarda

$$\binom{n-1}{n-m}$$

tane farklı $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ çözümü olduğunu buluruz. □

3.17. *Rakamları soldan sağa doğru gidildikçe hiç azalmayan* 100 *haneli kaç doğal sayı vardır?*
Yanıt: Sayının içinde 0 olamaz. Dolayısıyla sayı 1'den 9'a kadar olan 9 rakamdan oluşmalı. Sayının içinde bulunan i rakamı sayısına k_i dersek,

$$k_1 + \cdots + k_9 = 100$$

eder ve bu seçimle istenen şekilde tek bir sayı yazabiliriz. Demek ki yanıt, daha önceki örneklerde olduğu gibi

$$\binom{108}{8}$$

olur. □

3.18. *Yukarıda yapılanlardan yararlanarak, her* $1 \leq m \leq n$ *için*

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{m}{0}\binom{n-1}{m-1} + \binom{m}{1}\binom{n-1}{m-2} + \cdots + \binom{m}{m-1}\binom{n-1}{0}$$

eşitliğini kanıtlayın.
Kanıt: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ denkleminin doğal sayılarda kaç tane farklı

$$(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m)$$

çözümü olduğunu iki farklı biçimde sayacağız.
Birinci Sayım: Örnek 3.14'teki soruya verdiğimiz yanıttan (ve Sonuç 3.4'ten) dolayı çözüm sayısının kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solundaki kadar olduğunu biliyoruz.
İkinci Sayım: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ denkleminin bazı çözümlerinde bazı x_i'ler 0'a eşit olabilirler. Bir $0 \leq k \leq n$ sayısı için, tam k tane x_i'nin 0'a eşit olduğu çözümleri sayalım. Önce m tane x_i arasından 0'a eşit olacak olan k tane x_i terimini seçelim. Bu seçimi

$$\binom{m}{k}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Her bir seçim için,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \text{ ve } x_i \geq 0$$

sisteminin çözüm sayısı,

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-k} = n \text{ ve } y_i \geq 1$$

sisteminin çözüm sayısına eşittir ve Örnek 3.15'ten ve Sonuç 3.4'ten dolayı bunlardan

$$\binom{n-1}{n-(m-k)} = \binom{n-1}{n-m+k} = \binom{n-1}{m-k-1}$$

tane olduğunu biliyoruz. Demek ki

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \text{ ve } x_i \geq 0$$

sisteminin tam k tane x_i'nin 0'a eşit olduğu toplam çözüm sayısı tam

$$\binom{m}{k} = \binom{n-1}{m-k-1}$$

kadardır. Şimdi bunları $k = 0$'dan $k = m - 1$'e kadar toplarsak,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \text{ ve } x_i \geq 0$$

sisteminin toplam çözüm sayısını ikinci bir defa bulmuş oluruz. Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitliğin sağ tarafındaki ifadedir. □

3.19. **[Çoklu Küme]** Bir kümede bir eleman en fazla bir kez belirir. Örneğin $\{1,1,2,2,2\}$ kümesi aslında $\{1,2\}$ kümesidir. Ama bazen bir kümede bir elemanın birden fazla kez belirmesini isteyebiliriz. Yukarıdaki örneklerin her birinde aslında bu yapılıyordu. Örneğin 7 zar attığımızda gelen zarlar 1, 1, 3, 4, 4, 4, 6 olabilir; burada 1 iki kez, 4 ise üç kez beliriyor. İçimizden bu zar olayını $\{1,1,3,4,4,4,6\}$ olarak yazmak geçebilir ama bu doğru değil tabii. Bu yüzden bu olayı yazmak için $\langle 1,1,3,4,4,4,6\rangle$ gibi bir başka yazılım kullanmalıyız. Bu tür nesnelere ***çoklu küme*** denir. Bu çoklu kümenin "eleman sayısı" 7'dir.

n elemanlı bir kümenin k elemanlı çoklu altküme sayısını hesaplayalım. Tabii k ve n doğal sayılar olmalı, ama k, n'den büyük ya da küçük olabilir. Yukarıdaki örneklerdeki gibi düşünelim. n elemanlı kümenin elemanlarını 1'den n'ye kadar olan sayılarla gösterebiliriz. Şimdi k tane noktayı soldan sağa doğru dizelim ve bu noktaların arasına $n-1$ tane paravan koyalım. Her türlü nokta-paravan düzenlemesi bize k elemanlı bir çoklu altküme verir; nitekim birinci paravanın solunda kalan nokta sayısı kümemizden seçilen 1 sayısı olsun, birinci paravanla ikinci paravan arasında kalan nokta sayısı kümemizden seçilen 2 sayısı olsun, bu böyle devam etsin ve en sağdaki (yani $n-1$'inci) paravanın sağında kalan nokta sayısını kümemizden seçilen n sayısı olarak algılayalım. Demek ki k nokta arasına kaç farklı biçimde $n-1$ paravan yerleştirebileceğimizi hesaplamalıyız. Sıralanmış nokta ve paravanları "nesne" olarak görelim. Toplam $k+n-1$ tane nesnemiz var. Bunlar arasından hangilerinin paravan olacağına karar vermeliyiz. $k+n-1$ tane nesne arasından paravan olacak $n-1$ tane ya da nokta olacak k tanesini seçmeliyiz. Bunu

$$\binom{k+n-1}{k}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Demek ki n elemanlı bir kümenin k elemanlı çoklu altküme sayısı

$$\binom{k+n-1}{k}$$

tanedir.

3.20. **[Çoklu Kümeleri Sıralamak]** n elemanlı bir kümenin k elemanlı bir çoklu altkümesini alalım:

$$\langle a_1,\dots,a_1,a_2,\dots,a_2,\dots,a_n,\dots,a_n\rangle.$$

Burada a_1'den k_1 tane, a_2'den k_2 tane, ..., a_n'den k_n tane olsun. Tabii $k_i \geq 0$ ve $k_1+\cdots+k_n = k$. Bu çoklu kümeden kaç farklı dizi elde edebiliriz?

Çoklu kümenin elemanlarının hepsi farklı olsaydı, yani birkaç defa beliren a_i ler arasında bir fark gözetseydik (mesela her birini ayrı bir renge boyasaydık), yani çoklu küme yukarıdaki gibi değil de,

$$\langle a_{1,1},\dots,a_{1,k_1},a_{2,1},\dots,a_{2,k_2},\dots,a_{n,1},\dots,a_{n,k_n}\rangle$$

olsaydı, o zaman bu çoklu kümeyi $k!$ farklı biçimde sıraya dizebilirdik. Ama bu $k!$ dizilişin birçoğu orijinal yazılımımızda aynı dizilişi veriyor. k_1 tane 1 olduğundan,

Teorem 3.2'nin Üçüncü Kanıtı: Aynı teoremi n üzerinden tümevarımla da kanıtlayabiliriz. n doğal sayısı verilmiş olsun. Ve $k = 0, 1, \dots, n$ olsun. Önce $n = 0$ için kanıtlayalım teoremi. $n = 0$ ise $k = 0$ olmalı. 0 elemanlı bir kümenin 0 elemanlı tek bir altkümesi vardır, o da boşkümedir.

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$$

olduğundan, teorem $n = 0$ için doğru.

Şimdi teoremin n için doğru olduğunu varsayıp teoremi $n+1$ için kanıtlayalım. X, $n+1$ elemanlı bir küme olsun. $k = 0, 1, \ldots, n+1$ olsun.

Eğer $k = n+1$ ise, X'in $n+1$ elemanlı bir tek altkümesi olduğundan yanıt 1'dir. Öte yandan, $\binom{n+1}{n+1} = 1$ olduğundan, teorem, $k = n+1$ için doğru.

Bundan böyle $1 \leq k \leq n$ eşitsizliklerini varsayacağız. $a \in X$, sabit bir eleman olsun.

$$Y = X \setminus \{a\}$$

olsun. Y'nin n elemanı vardır elbette.

X'in (k elemanlı ya da değil) **iki** türlü altkümesi vardır: a'yı içerenler ve içermeyenler. Her altküme iki türden **sadece** birindendir.

Birinci Türden Altküme Sayısı: X'in a'yı içermeyen k elemanlı bir Z altkümesi aynı zamanda Y'nin k elemanlı bir altkümesidir (bkz. aşağıdaki şekil). Ve Y'nin k elemanlı her altkümesi X'in de a'yı içermeyen k elemanlı bir altkümesidir. Bir başka deyişle, X'in a'yı içermeyen k elemanlı altkümeler kümesi, yani

$$\{Z \subseteq X : |Z| = k \text{ ve } a \notin Z\}$$

kümesiyle, Y'nin k elemanlı altkümeler kümesi

$$\{Z \subseteq Y : |Z| = k\}$$

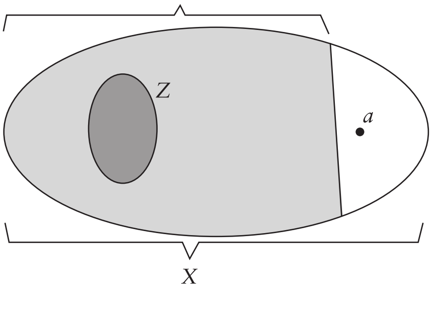
arasında bir eşleme vardır. (Bu eşleme bir kümenin Z elemanını diğer kümenin Z elemanına götürür.) Ama tümevarım varsayımına göre ikinci kümenin

$$\binom{n}{k}$$

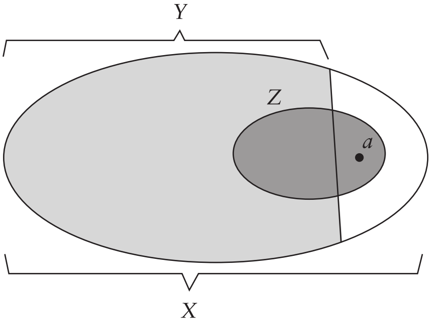
tane elemanı vardır. Demek ki birinci kümenin de o kadar elemanı vardır, yani X'in a'yı içermeyen

$$\binom{n}{k}$$

tane (ikinci kümedeki eleman sayısı kadar) altkümesi vardır.



İkinci Türden Altküme Sayısı: X'in a'yı içeren k elemanlı altkümelerinden a'yı atarsak, geriye Y'nin $k-1$ elemanlı altkümeleri kalır. Ve Y'nin $k-1$ elemanlı altkümelerine a'yı eklersek X'in a'yı içeren k elemanlı altkümelerini buluruz.



Bir başka deyişle, X'in a'yı içeren k elemanlı altkümelerinin kümesi, yani

$$\{Z \subseteq X : |Z| = k \text{ ve } a \in Z\}$$

kümesiyle Y'nin $k-1$ elemanlı altkümelerinin kümesi

$$\{Z \subseteq Y : |Z| = k-1\}$$

arasında bir eşleme vardır. (Bu eşleme birinci kümenin Z elemanını diğer kümenin $Z \setminus \{a\}$ elemanına götürür. Ya da ikinci kümenin Z elemanını birinci kümenin $Z \cup \{a\}$ elemanına götürür.) Ama tümevarım varsayımına göre ikinci kümenin

$$\binom{n}{k-1}$$

tane elemanı vardır. Demek ki birinci kümenin de bu kadar elemanı vardır, yani X'in k elemanlı ve a'yı içeren altküme sayısı tam

$$\binom{n}{k-1}$$

kadardır.

Birinci ve ikinci türden altküme sayısını toplarsak, X'in k elemanlı

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

tane altkümesi olduğunu görürüz. Demek ki teoremin kanıtlanması için,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

eşitliğinin kanıtlanması gerekmektedir. Bu da oldukça basit bir cebirsel işlemdir:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!((n-k+1)+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Yukarıda bulunan eşitlik önemli. Altını çizelim:

Teorem 3.5 (Pascal Özdeşliği)**.** *Her $0 < k \leq n$ tamsayısı için*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

olur. □

Alıştırmalar

3.21. n farklı nesne kaç farklı biçimde sıraya dizilebilir?

3.22. n kişi kaç farklı biçimde yuvarlak bir masaya oturabilir?

3.23. İkisi aynı diğerleri farklı n nesne kaç farklı biçimde sıraya dizilebilir?

3.24. Üçü aynı (!) diğerleri farklı n kişi kaç farklı biçimde yuvarlak bir masaya oturtulabilir?

3.25. Üç tane 1 ve dört tane 2'yle yedi haneli kaç sayı yazılabilir? a tane 1 ve b tane 2'yle $a+b$ haneli kaç sayı yazılabilir?

3.26. a tane 1, b tane 2 ve c tane 3'le $a+b+c$ haneli kaç sayı yazılabilir?

3.27. 10 erkek ve 14 kız öğrenci olan bir sınıftan, 5 erkek ve 3 kız öğrenciden oluşan kaç takım oluşturulabilir?

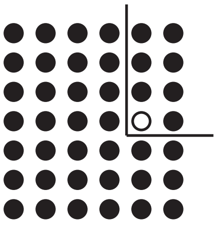
3.28. $k_1+\cdots+k_r \leq n$ olsun. n tane farklı nesnenin k_1 tanesini 1 rengine, k_2 tanesini 2 rengine, ..., k_r tanesini r rengine boyamak istiyoruz. Bunu kaç farklı biçimde yapabiliriz?

3.29. Her $0 \leq k < n$ tamsayısı için

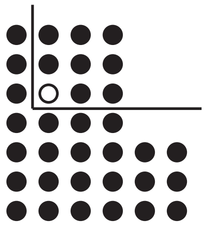
$$\binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} = \frac{n+2}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}$$

eşitliğini kanıtlayın.

3.30. $n \times m$ boyutlu bir ızgarada iki oyuncu arasında oynanan şu oyunu ele alalım. Her oyuncu sırayla noktalardan birini seçer ve bu noktayla o noktanın kuzeydoğusundaki



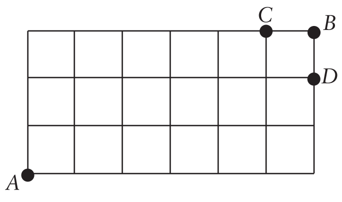
İlk hamlede, gösterilen beyaz nokta seçilmişse, o nokta ve o noktanın kuzeydoğusu oyundan silinir.



İkinci hamlede, gösterilen beyaz nokta seçilmişse, o nokta ve o noktanın kuzeydoğusu oyundan silinir.

tüm noktalar oyundan kaybolur. Son noktayı silen bu oyunu kaybeder. Bu oyunda kaç farklı pozisyon vardır?

3.31. **a.** Aşağıdaki ızgarada A noktasından B noktasına kaç farklı şekilde 9 hamlede gidilebilir?
b. Aşağıdaki ızgarada A noktasından C noktasına kaç farklı şekilde 8 hamlede gidilebilir?



c. Yukarıdaki ızgarada A noktasından D noktasına kaç farklı şekilde 8 hamlede gidilebilir?
d. Yukarıdaki iki soruyu genelleştirerek,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

eşitliğini bir kez daha kanıtlayın. (Aynı kümeyi iki farklı biçimde sayma problemidir bu. Bir sonraki bölümde bu konuya odaklanacağız.)

3.32. 11 elemanlı bir kümenin 4 elemanlı 10 altkümesi seçiliyor. Bu kümelerden ikisinin kesişiminin en az 2 elemanlı olması gerektiğini kanıtlayın. **İpucu:** 11 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı altküme sayısını hesaplayın. Sonra 4 elemanlı 10 altkümenin en fazla kaç 2 elemanlı altkümesi olacağını bulun.

Bir Probleme Zihni Sinir Çözümü

Soru. $\{1, 2, \ldots, 28\}$ kümesinden 14 sayı seçiliyor. Bu 14 sayı arasında öyle birbirinden farklı a, b, c, d sayıları vardır ki, $a + b = c + d$ olur. Kanıtlayın.

Kanıt: Kümenin elemanlarını aşağıdaki gibi 4×7 boyutlu bir satranç tahtasına yerleştirelim. Bir dikdörtgenin köşelerini oluşturacak biçimde dört sayı seçerseniz (mesela 9, 12, 19, 16 ya da 4, 6, 25, 27), iki çaprazdaki sayıların toplamı eşit olur (mesela $9+19 = 12+16$ ya da $4+27 = 6+25$). Demek ki 4×7 boyutlu bir satranç tahtasından seçilen 14 karenin (yatay ya da dikey) bir dikdörtgenin dört köşesini oluşturduğunu kanıtlamamız lazım.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

En az iki ayrı sütundan üçer sayı seçmişsek sorun yok, bu durumda bir dikdörtgen elde edilir. Tek bir sütundan üç sayı seçtiğimizi varsayalım. O zaman üç sütundan ikişer sayı seçebiliriz ve geri kalan üç sütundan sadece 1 sayı seçebiliriz, yani toplam

$$3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 12$$

sayı seçebiliriz. Son olarak her sütundan iki sayı seçtiğimizi varsayalım. 4 hane barındıran her sütunda 2 sayıyı

$$\binom{4}{2} = 6$$

değişik coğrafi konumda seçebiliriz. Oysa 7 sütun var. Demek ki iki sütundan seçilen sayıların coğrafi konumları aynı olmak zorunda. Bu da bize bir dikdörtgen verir.

4. İki Farklı Biçimde Sayma

Bu bölümde, bir kümeyi iki farklı biçimde sayarak geçen bölümde tanımlanan n'nin k'lı kombinasyon sayılarıyla ilgili ilginç eşitlikler bulacağız. Kanıtlayacağımız eşitliklerin, analiz, tümevarım ya da basit cebir kullanan ve burada verdiklerimizden değişik kanıtları olabilir. Biz, aynı kümeyi iki farklı biçimde sayma yöntemini kullanacağız.

Sonuç 4.1. *Her n doğal sayısı için,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Kanıt: Teorem 2.2'ye göre, n elemanlı bir kümenin altküme sayısı 2^n'dir; bu da eşitliğin sağındaki sayı. Bu altküme sayısını bir de 0 elemanlı altkümelerin, 1 elemanlı altkümelerin, 2 elemanlı altkümelerin, ..., n elemanlı altkümelerin sayısının toplamı olarak hesaplayabiliriz (bkz. Teorem 3.2). Bu da sol taraftaki toplam. □

Sonuç 4.2. *Her $1 \le k \le n$ doğal sayısı için,*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}.$$

Birinci Kanıt: n öğrencili bir sınıftan k elemanlı bir takımın ve bu takım oyuncuları arasından bir kaptanın kaç farklı biçimde seçilebileceğini üç farklı yöntemle hesaplayalım.
Birinci Sayım: Önce k elemanlı takımı seçelim; bu seçimi

$$\binom{n}{k}$$

farklı biçimde yapabiliriz; sonra takımın kaptanını bu k eleman arasından seçelim. Eşitliğin sol tarafındaki sayıyı buluruz.
İkinci Sayım: Önce n öğrenci arasından takım kaptanını seçelim. Bu seçimi n farklı biçimde yapabiliriz. Sonra, sınıfta geri kalan $n-1$ öğrenci arasında

takımın geri kalan $k-1$ elemanını belirleyelim. Bunu da

$$\binom{n-1}{k-1}$$

farklı biçimde seçebiliriz. Böylece eşitliğin ortasındaki sayıyı buluruz.
Üçüncü Sayım: Önce takımın, takım kaptan olmayacak $k-1$ elemanını seçelim; bu seçimi,

$$\binom{n}{k-1}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Sonra, sınıfın geri kalan $n-(k-1)$, yani $n-k+1$ öğrencisi arasından takım kaptanını seçelim. Eşitliğin sağındaki sayıyı buluruz.

Bu üç sayı aynı kümenin eleman sayısı olduğundan, istediğimiz kanıtlanmıştır.
İkinci Kanıt: Basit bir işlemden sadeleşmeler sayesinde eşitlik bulunabilir. Okura bırakıyoruz. □

"n'nin k'lı kombinasyonu" kavramını n ya da k negatif olduğunda ya da $k>n$ olduğunda 0 olarak genişletelim. Yani $n<0$ ya da $k<0$ ya da $k>n$ olduğunda,

$$\binom{n}{k}=0$$

olsun. Bu oldukça doğal bir tanımdır. Nitekim, örneğin, $k>n$ olduğunda, n değişik nesne arasında k tane nesne seçemeyiz, başka bir deyişle bu seçimi 0 değişik biçimde yapabiliriz. Doğallığının ötesinde, bu tanımı kabul edersek, bir önceki bölümdeki ve yukarıdaki sonuçların hepsi tüm n ve k sayıları için geçerli olur, sonuçların ifadesinde "$1 \le k \le n$" filan gibi kalabalık yaratan varsayımlar yapmak zorunda kalmayız.

Aşağıdaki sonuçlar da bu genişletilmiş tanımlar için geçerlidir.

Sonuç 4.3. *Her k, n ve m doğal sayısı için,*

$$\binom{n+m}{k}=\binom{n}{k}\binom{m}{0}+\binom{n}{k-1}\binom{m}{1}+\binom{n}{k-2}\binom{m}{2}+\cdots+\binom{n}{0}\binom{m}{k}.$$

Kanıt: n kadın ve m erkek arasından k kişi seçeceğiz. Mümkün olan tüm seçimleri iki farklı biçimde sayalım.
Birinci Sayım: n kadın ve m erkek arasından k kişi seçmek demek $n+m$ insan arasından k kişi seçmek demektir. Bunu yapmanın da elbette eşitliğin solundaki sayı kadar yolu vardır.
İkinci Sayım: $0 \le i \le k$ olsun ve seçeceğimiz k kişi arasından i kişi kadın olsun. n kadın arasından i kadını,

$$\binom{n}{i}$$

farklı biçimde seçebiliriz. Geri kalan $k-i$ kişiyi m erkek arasından seçeceğiz; bu seçimi de,

$$\binom{m}{k-i}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Demek ki n kadın ve m erkek arasından i kadın ve $k-i$ erkek,

$$\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

farklı biçimde seçilebilir. Bunları toplarsak, istediğimiz sonucu buluruz. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Kanıtladığımız eşitliğin, $k > n$ ya da $k > m$ için de geçerli olduğunu dikkatinize sunarız.

Bulduğumuz eşitliği daha tıkız bir biçimde, şöyle de yazabiliriz:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k-i}\binom{m}{i}.$$

Hatta, son yaptığımız tanım genişlemesinden dolayı,

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \binom{n}{k-i}\binom{m}{i}$$

olarak da yazabiliriz. (Bizi ilgilendirmeyen terimler 0'a eşit...)

Sonuç 4.4. *Her n doğal sayısı için,*

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

Kanıt: Bir önceki sonuçta $n = m = k$ alalım. Sonuç 3.4'ten dolayı,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

buluruz.

Sonuç 4.5. *Her n ve k doğal sayısı için,*

$$\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}.$$

Kanıt: Bir sınıfta n tane çocuk olsun ve öğretmen bu n çocuğun k tanesinin (!) yüzlerini kırmızıya ya da maviye boyamak istesin. Öğretmen bunu kaç farklı biçimde yapabilir?

Birinci Sayım: Öğretmen, n çocuktan k tanesini,

$$\binom{n}{k}$$

farklı biçimde seçebilir. Öğretmen, ayrıca, seçtiği k çocuğun yüzlerini ya kırmızı ya da mavi renge boyayacak. Bu k çocuğun bir altkümesini seçsin ve bu altkümedeki çocukların yüzlerini kırmızıya, geri kalanları maviye boyasın. Demek ki öğretmen k çocuğun yüzünü k elemanlı bir kümenin altküme sayısı kadar farklı biçimde iki renge boyayabilir, bu sayı da 2^k'dır. Demek ki öğretmen, n öğrenciden k'sının yüzünü toplam

$$2^k\binom{n}{k}$$

farklı biçimde boyayabilir. Bu, eşitliğin sağındaki sayı.

İkinci Sayım: $0 \leq i \leq k$ olsun ve öğretmen i çocuğun yüzünü kırmızıya, $k-i$ çocuğun yüzünü maviye boyasın. Önce yüzünü kırmızıya boyayacağı i çocuğu seçsin. Öğretmen bu seçimi

$$\binom{n}{i}$$

farklı biçimde yapabilir. Sonra, geriye kalan $n-i$ çocuk arasından, yüzünü maviye boyayacağı $k-i$ çocuğu seçsin. Bu seçimi de,

$$\binom{n-i}{k-i}$$

farklı biçimde yapabilir. Demek ki, öğretmen, i çocuğun yüzünü kırmızıya, $k-i$ çocuğun yüzünü maviye

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$

farklı biçimde boyayabilir. Eğer i'yi 0'dan k'ya kadar alıp toplamı yaparsak eşitliğin solundaki sayıyı buluruz. □

Sonuç 4.6. *Her n doğal sayısı için,*

$$n^2\binom{2n-2}{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}^2.$$

Kanıt: n tane kadın ve n tane erkekten oluşan bir gruptan aynı sayıda elemandan oluşan bir kadın ve bir erkek takımı seçmek, ayrıca her takıma birer kaptan atamak isteyelim. Bunu kaç farklı biçimde yapabiliriz?

Birinci Sayım: $0 \leq k \leq n$ olsun ve her birinde k eleman bulunan bir kadın ve bir erkek takım seçelim. Toplam n kadın olduğundan,

$$\binom{n}{k}$$

farklı biçimde k elemandan oluşan kadın takımı seçilebilir. k elemanlı erkek takım sayısı da aynıdır elbette. Dolayısıyla takımları

$$\binom{n}{k}^2$$

farklı biçimde seçebiliriz. Daha bitmedi ama; bir de her takıma birer kaptan seçmeliyiz. k kadından her biri ve k erkekten her biri kaptan olabileceğinden, her biri k elemandan oluşan kaptanlı kadın ve erkek takımı sayısı,

$$k^2\binom{n}{k}^2$$

sayısına eşittir. Bu sayıları $k = 0, 1, \ldots, n$ için toplarsak, kanıtlamak istediğimiz eşitliğin sağındaki sayıyı buluruz.

Not: 0 elemanlı tek bir takım vardır: Boşkümeden oluşan takım, ya da boştakım! Ama 0 elemanlı ve kaptanlı takım sayısı 0'dır; nitekim hemen yukarıdaki formülde $k = 0$ alırsak, 0 buluruz.

İkinci Sayım: Gene $0 \leq k \leq n$ eşitsizliğini sağlayan bir k seçelim ve gene her biri kaptanlı ve her biri k elemandan oluşan kadın ve erkek takımlarını sayalım; Ama bu sefer önce bir kadın ve bir erkek kaptan seçelim. Kaptanları n^2 farklı biçimde seçebiliriz. Geri kalan $n-1$ kadından kadın takımının geri kalan $k-1$ elemanını seçeceğiz. Aynı şeyi erkekler için de yapacağız. Demek ki

$$n^2\binom{n-1}{k-1}^2$$

farklı biçimde her biri kaptanlı ve her biri k elemandan oluşan kadın ve erkek takımları seçebiliriz. Bunu $k = 1, 2, \ldots, n$ için toplarsak ($k = 0$ şıkkına ihtiyacımız yok!), toplam,

$$n^2\left(\binom{n-1}{0}^2+\binom{n-1}{1}^2+\binom{n-1}{2}^2+\cdots+\binom{n-1}{n-1}^2\right)$$

buluruz. Sonuç 4.4'ten dolayı büyük parantez,

$$\binom{2(n-1)}{n-1}$$

sayısına eşittir. Demek ki bu sayımda

$$n^2\binom{2n-2}{n-1}$$

bulduk; kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solundaki sayı. □

Sonuç 4.7. *Her $0 \le r \le n$ doğal sayıları için,*

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}$$

olur.

Kanıt: Sadece 0 ve 1'lerden oluşan ve içinde tam $r+1$ tane 1 olan $n+1$ uzunluğundaki dizileri (yani 01-dizilerini) iki farklı biçimde sayalım. Birinci sayım bariz: $n+1$ tane yerimiz var, 1'leri koyacak $r+1$ tane yer seçiyoruz (gerisi 0 olacak). Bunlardan elbette $\binom{n+1}{r+1}$ tane vardır. İkinci sayıma geçelim. $r+1$ tane 1'in sonuncusu $r+1$, $r+2$, ..., $n+1$'inci yerlerden birinde olabilir, daha önce olamaz. Son 1'in j'inci yerde olduğunu varsayalım. j'inci yerdeki bu son 1'den önce $j-1$ tane yer vardır ve bunların r tanesi 1 olacaktır. Demek ki sonuncu 1'in j'inci yerde olduğu $\binom{j-1}{r}$ tane 01-dizisi vardır. Dolayısıyla ikinci sayımda

$$\sum_{j=r+1}^{n+1}\binom{j-1}{r},$$

ya da $k = j-1$ tanımıyla,

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{j}{r}$$

tane içinde tam $r+1$ tane 1 olan $n+1$ uzunluğunda 01-dizisi buluruz. İstediğimiz sonuç kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

4.1. Biri büyük biri küçük iki disk, merkezden çıkan doğru parçalarıyla herbiri diğerine eşit 200 parçaya ayrılıyor. Küçük diskin her sektörü rastgele bir biçimde ya maviye ya da kırmızıya boyanıyor. Büyük diskin rastgele seçilen 100 sektörü kırmızıya, geri kalan 100 parçası maviye boyanıyor. Sonra, iki disk merkezleri ve parçalar üstüste gelecek biçimde yerleştiriliyor. Diskleri, aynı renge boyanmış en az 100 parça üstüste binecek biçimde yerleştirebileceğimizi kanıtlayın. **İpucu:** Büyük diski sabitleyin. Küçük diski 200 farklı biçimde yerleştirebiliriz ve büyük diskin her parçası toplamda tam 100 defa aynı renkli bir parçayla üstüste gelir... Kanıtlayın.

4.2. **[Newton Özdeşliği].** Sonuç 4.2'yi genelleştirin:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

a. Önce cebir kullanarak. **b.** Sonra, n kişilik bir meclisten k kişilik bir komite ve r kişilik bir altkomitenin kaç değişik biçimde seçilebileceğini iki farklı biçimde hesaplayarak.

4.3. n erkek ve n kadından oluşan $2n$ kişilik bir topluluktan kaç değişik biçimde n kişi seçilebileceği sorusu üzerinde düşünerek

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

eşitliğini bir kez daha kanıtlayın.

4.4. $n > 0$ bir tamsayı ise

$$\binom{3n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{n}{k}$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.5. Bir hastanenin bekleme odasında n tane yanyana dizilmiş iskemle vardır. Odaya k tane bulaşıcı hastalıklı hasta gelir. Bu hastalar, hiçbiri yanyana gelmeyecek biçimde kaç farklı şekilde oturabilirler?

4.6. Şu eşitliği gösterin:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

(Tümevarımla, ya da n kişilik bir meclisten başkanlı bir komitenin kaç farklı biçimde seçilebileceğini hesaplayarak.)

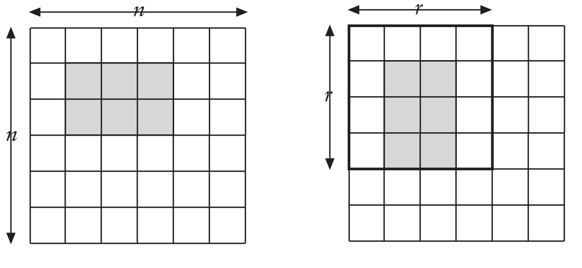
4.7. Kanıtlayın:

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

4.8. n kişilik bir meclisten bir başkanlı ve bir başkan yardımcılı en az iki kişilik bir komite seçilecek. Bu seçimin kaç türlü yapılabileceğini iki farklı biçimde hesaplayarak bir eşitlik elde edin.

4.9. **a.** n doğru düzlemde en çok kaç noktada kesişebilir?
b. Düzlemde k tane farklı δ_i yönü verilmiş olsun. Her $1 \leq i \leq k$ için, δ_i yönünde m_i tane farklı doğru verilmiş olsun. Bu doğrular en fazla kaç noktada kesişirler?

4.10. **a.** $n \times n$ boyutlu bir ızgaranın içine (toplam n^2 tane kare var), yatay ya da dikey ve en az 1 kare içeren kaç dikdörtgen sığar?
b. $n \times n$ boyutlu bir ızgaranın sol üst köşesindeki $r \times r$ boyutlu bölgenin içine, bir kenarı bölgenin tabanına ya da sağ sınırına değecek biçimde (aşağıdaki ikinci şekilde bir örnek var) r^3 tane dikdörtgen çizilebileceğini kanıtlayın.



c. Bu iki sonucu kullanarak,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

eşitliğini kanıtlayın.

d. Bu $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ dikdörtgenin kaçı karedir?

4.11. Üç boyutlu uzayda, yatay, dikey ya da derinlemesine birer birimlik adımlarla (6, 5, 3) noktasına giden en kısa (yani 14 birimlik) kaç yol vardır?

4.12. $n \times n$ boyutlu bir ızgaranın içine, köşeler ızgaranın kesişme noktalarına gelmek üzere, kaç tane kare çizilebilir? (Karelerin kenarları yatay olmak zorunda değil.)

4.13. Bir çembere n nokta yerleştiriliyor. Bu n nokta birbirlerine doğru parçalarıyla birleştiriliyor. Eğer bu doğru parçalarından herhangi üçü çemberin içinde tek bir noktada kesişmiyorsa,

a. Bu doğrular çemberin içinde kaç noktada kesişirler?

b. Doğrular çemberi kaç küçük bölgeye ayırırlar?

4.14. Aşağıdaki toplamı bulun:

$$\frac{\binom{11}{0}}{1} + \frac{\binom{11}{1}}{2} + \frac{\binom{11}{2}}{3} + \cdots + \frac{\binom{11}{11}}{12}$$

4.15. Kanıtlayın:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

4.16. $(f_n)_n$, Fibonacci dizisi olsun; yani $f_0 = f_1 = 1$ ve her $n \geq 0$ için

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

olsun.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = f_{n+1}$$

eşitliğini kanıtlayın. **Not:** Eğer $n < k$ ise, n'nin k'lı kombinasyonu 0 olarak tanımlanmıştır.

4.17. Kanıtlayın:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}.$$

4.18. k ve n, $k+3 \leq n$ eşitsizliğini sağlayan iki doğal sayı olsun.

$$\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$$

sayılarının aritmetiksel bir dizinin dört ardışık terimi olamayacaklarını kanıtlayın.

4.19. Bir X kümesinin ***parçalanışı***, özünde, X'i birbirinden ayrık boş olmayan kümelere ayırmaktır. Örneğin $X = \{0, 1, 2\}$ ise, X'in şu beş parçalanışı vardır:

$$\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}, \{\{0\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{0, 2\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{0, 1, 2\}\}.$$

n elemanlı bir kümenin parçalanış sayısına n'inci ***Bell sayısı*** denir. Bu sayı B_n olarak simgelenir. Örneğin, yukarıda görüldüğü üzere, $B_3 = 5$'tir. $B_0 = 1$ kabul edilir.

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

eşitliğini kanıtlayın. Buradan B_4 ve B_5'i bulun.

4.20. Hesaplayın:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2.$$

4.21. Bir kümenin çift sayıda altküme sayısının, tek sayıda altküme sayısına eşit olduğunu kanıtlayın. Bundan,

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2m+1}=4^n$$

eşitliğini çıkarın.

4.22. Eleman sayısının 4'e bölünen bir kümenin, eleman sayısı 4'e bölünen kaç tane altkümesi vardır?

4.23. $k > 0$, bir doğal sayı olsun. Her $N > 0$ doğal sayısı için,

$$N=\binom{N_k}{k}+\binom{N_{k-1}}{k-1}+\cdots+\binom{N_2}{2}+\binom{N_1}{1}$$

eşitliğini ve $0 \leq N_1 < N_2 < \cdots < N_k$ eşitsizliklerini sağlayan bir ve bir tane

$$(N_1, N_2, \ldots, N_k)$$

k'lısı olduğunu kanıtlayın.

4.24. [**Fibonacci Sayıları**]. n bir doğal sayı olsun. $n-1$ sayısı, 1 ve 2'lerin toplamı olarak f_n değişik biçimde yazılsın. Örneğin,

$$\begin{aligned}5 &= 1+1+1+1+1 = 1+1+1+2 = 1+1+2+1\\ &= 1+2+1+1 = 2+1+1+1\\ &= 1+2+2 = 2+1+2 = 2+2+1\end{aligned}$$

olduğundan, $f_6 = 8$'dir. $f_0 = 0$'dır çünkü -1 sayısını 1 ve 2'nin toplamları olacak biçimde yazamayız. Öte yandan $f_1 = 1$'dir çünkü 0 sayısı 1 ve 2'lerin toplamı olarak bir biçimde yazılır! Nitekim 0 sayısı hiç tane 1 ve hiç tane 2'nin toplamıdır! Dileyen okur bu yazdıklarımızı kale almaz ve $f_0 = 1$ ile $f_1 = 1$ eşitliklerini tanım olarak kabul edebilir. Ama $f_2 = 1$, $f_3 = 2$ eşitliklerinin doğruluğunu kontrol etmek kolaydır.

a. Toplanan 1 ve 2'lerin en başındaki sayının 1 ya da 2 olduğu durumları ele alarak, $n \geq 2$ için

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

eşitliğini kanıtlayın. Demek ki bu sayılar daha önce de gördüğümüz Fibonacci sayıları.

b. En az bir adet 2 kullanarak, $n+1$'in kaç farklı biçimde 1 ve 2'lerin toplamı olarak yazılacağını iki farklı biçimde hesaplayarak,

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

eşitliğini kanıtlayın. **İpucu:** Eşitliğin sağındaki ifadenin nasıl elde edildiği belli olmalı. Soldaki ifade için

$$1+1+\cdots+1+2$$

biçiminde başlayan toplamları teker teker sayıp toplayın.

c. En az bir adet 2 kullanarak, kaç farklı biçimde 1 ve 2'leri toplayarak $n+1$'den küçükeşit bir sayı elde edilebileceğini iki farklı biçimde hesaplayarak ve yukarıdaki eşitliği kullanarak, ya da yukarıdaki eşitlikleri $n = 0$'dan başlayarak toplayarak,

$$\sum_{i=0}^{n} if_i = nf_{n+2} - f_{n+3} + 2$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.25. (Bir olimpiyat sorusu.) 1'den n^2'ye kadar olan tamsayılar aşağıdaki gibi $n \times n$ boyutlu bir tabloya yazılıyor. Bu tablodan her sıradan ve her sütundan bir tane olmak üzere rastgele n sayı seçiliyor. Bu sayıların toplamının

$$\frac{n(n^2+1)}{2}$$

olduğunu kanıtlayın.

1	2	...	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n^2-n+1	n^2-n+2	...	n^2

4.26. (Bir olimpiyat sorusu.) Bir dizi doğal sayı veriliyor. Bu dizinin şu özelliği var: Ardışık 7 terimin toplamı negatif ama ardışık 11 terimin toplamı pozitif. Dizinin en fazla 77 terimi olacağını kanıtlayın. Dizinin ilk 17 terimini yandaki tablodaki gibi dizerek dizide en fazla 16 terim olabileceğini kanıtlayın. Bu özelliği sağlayan 16 uzunlukta bir sayı dizisi bulun.

x_1	x_2	x_3	...	x_9	x_{10}	x_{11}
x_2	x_3	x_4	...	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_3	x_4	x_5	...	x_{11}	x_{12}	x_{13}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_7	x_8	x_9	...	x_{15}	x_{16}	x_{17}

4.27. n kişiden oluşan bir topluluk olsun. Şunları biliyoruz:
a) Her kişi topluluktan tam k kişi tanıyor.
b) Tanışan her iki kişi ortak ℓ kişi tanıyor.
c) Tanışmayan her iki kişi ortak m kişi tanıyor.

$$m(n-k) - k(k-\ell) + k - m = 0$$

eşitliğini kanıtlayın. **İpucu:** a sabit bir kişi olsun. $\{(a, x, y) : a$ ve x tanışıyorlar, x ve y tanışıyorlar ama a ve y tanışmıyorlar$\}$ kümesini iki farklı biçimde sayın.

4.28. (Bir olimpiyat sorusu) $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n = m$ pozitif doğal sayılar olsunlar. b_k, k'dan büyükeşit terimlerin sayısı olsun.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$$

eşitliğini kanıtlayın. **İpucu:** Şu özelliği olan $n \times m$ boyhutlu bir sayı tablosu çizin: i'inci sıranın ilk a_i terimi 1 olsun, geri kalan $m - a_i$ terimi 0 olsun. Sıraları ve sütunları toplayın.

4.29. **İzdüşüm Geometrisi.** Bir ***düzlem geometrisi***, adlarına ***nokta*** ve ***doğru*** denilen iki tür nesnesi olan ve ancak bir noktayla bir doğru arasında olabilecek ve adına "üstündelik" ilişkisi denilen ikili bir ilişkinin olduğu bir yapıdır. (Eğer bir P noktası bir m doğrusunun "üstündeyse" bu genellikle PIm olarak yazılır.) Bir düzlem geometrisinde, ayrıca, hiçbir noktanın bir doğru olmadığı varsayılır. Aşina olduğumuz geometrik terimlerin bu soyut kapsamda da tahmin edilen tanımları vardır; biz de bu terimleri bu alıştırmada özgürce kullanacağız.

Bir düzlem geometrisinin bir ***izdüşüm geometrisi*** olması için şu üç koşul gereklidir:

P1. Herhangi iki farklı noktadan **tek** bir doğru geçer.

P2. Herhangi iki farklı doğru bir noktada kesişir.

P3. Herhangi üçü doğrusal olmayan dört tane nokta vardır.

π bir düzlem geometrisi olsun.

a. π'nin herhangi iki doğrusunun tek bir noktada kesiştiğini kanıtlayın.

b. π'nin herhangi iki doğrusunun noktaları arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın.

c. Herhangi bir noktadan geçen doğrular kümesiyle herhangi bir doğrunun noktaları arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın.

d. Her doğru üstünde en az üç tane nokta olduğunu kanıtlayın.

e. Bir doğru üstünde tam n tane nokta varsa düzlemde n^2+n+1 tane doğru ve n^2+n+1 tane nokta olduğunu kanıtlayın.

f. Bir doğru üstünde tam üç tane noktanın olduğu bir izdüşüm geometrisi inşa edin.

5. Binom Katsayıları

$x+y$ ifadesinin kuvvetlerinin açılımlarına bakalım:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5
\end{aligned}$$

Bu çarpımları elle yapmak pek o kadar kolay değil, alınacak kuvvet büyüdükçe bayağı bir zaman alır. Daha doğrusu kolaydır ama çok zaman alır ve giderek hata yapma olasılığı artar. (Yüz basamaklı iki sayıyı çarpmak da kolaydır ama kimse yapmak istemez!) Bu bölümde yukarıdaki çarpımları daha kolay bulmaya yarayan bir yöntem bulmaya çalışacağız. Bakalım bulabilecek miyiz! Sözgelimi $(x+y)^{15}$ teriminin açılımını oldukça hızlı bir biçimde bulabilir miyiz?

Belli ki $(x+y)^{15}$ teriminin açılımında,

$$x^{15},\ x^{14}y,\ x^{13}y^2,\ \dots,\ x^6y^9,\ x^5y^{10},\ \dots,\ xy^{14}, y^{15}$$

monomları olacak, yani $i+j=15$ eşitliğini sağlayan i ve j doğal sayıları için

$$x^iy^j$$

biçiminde yazılan monomlar olacak, bu kolay, önemli olan bu monomların katsayılarını hesaplayabilmek. Anlaşılmıştır herhalde: x^iy^j biçiminde yazılan terimlere ***monom*** denir. Monomların önündeki sayıya da monomun ***katsayısı*** denir. Örneğin

$$x^3-3x^2y+3xy^2+y^3$$

teriminde x^2y'nin katsayısı -3, y^3'ün katsayısı 1, x^2'nin katsayısı 0'dır.

Katsayılar arasında bir ilişki gözümüze çarpar umuduyla, küçük n sayıları için $(x+y)^n$ ifadesinin yukarıda bulduğumuz açılımın katsayılarını altalta yazalım:

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	$\underline{56}$	$\underline{28}$	8	1	
1	9	36	84	126	126	$\underline{84}$	36	9	1

Adına ***Pascal üçgeni*** denilen bu üçgen nasıl oluşturuluyor? Dikkat ederseniz, üçgenin her sayısı bir üstündeki ve bir üstündekinin hemen solundaki sayıların toplamı. Örneğin, en alt satırdaki 84 sayısı bir üst satırdaki 56 ile 28'in toplamıdır. Bu da bize Teorem 3.5'teki Pascal Özdeşliği'ni anımsatmalı.

Bu üçgenin en son satırına bakarak $(x+y)^9$ teriminin açılımını uzun hesaplara girişmeden bulabiliriz:

$$\begin{aligned}(x+y)^9 = & \; x^9 + 9x^8y + 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 \\ & +126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9xy^8 + y^9.\end{aligned}$$

Şimdi monomların önündeki sayıların (katsayıların yani) neye eşit olduklarını bulalım. $(x+y)^n$ teriminin açılımında kaç tane x^iy^j monomunun belirdiğini hesaplamak istiyoruz. $(x+y)^n$ terimini açarken, $x+y$'yi kendisiyle n kez çarpıyoruz, yani

$$(x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)(x+y)$$

işlemini yapıyoruz. Kendimizi çarpımı yapıyormuş gibi düşleyelim. Çarpım işlemine giriştiğimizde, yaptığımız şey, yukarıdaki her parantezden x ve y'den birini seçmek ve seçtiklerimizi birbirleriyle çarpmak. Olası tüm seçimleri yaptığımızı da unutmayalım. Sözgelimi her parantezden x seçersek, bu x'leri çarparak x^n monomunu buluruz. Biri dışında her parantezden x seçersek, x'i $n-1$ kez, y'yi de bir kez seçmiş olur ve bu seçimlerimizi çarparak $x^{n-1}y$ monomunu buluruz. İkisi dışında her parantezden x seçersek $x^{n-2}y^2$ monomunu buluruz. Eğer x'i i kez seçersek, y'yi mecburen $n-i$ kez seçmiş olur ve çarpım olarak x^iy^{n-i} monomunu buluruz. Demek ki $(x+y)^n$ teriminin açılımda kaç tane x^iy^j monomu belirdiğini hesaplamak için n parantez arasından kaç farklı biçimde i tanesini seçebileceğimizi hesaplamamız gerekiyor. Toplam n parantez var ve bu n tane parantezden (x ve y arasından x'i seçeceğimiz) i tanesini seçeceğiz. n parantezden kaç farklı biçimde i tanesini seçebileceğimizi görmüştük: Böyle bir seçimi

$$\binom{n}{i}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Demek ki, $x^i y^j$ monomunun önündeki katsayı işte bu sayıdır. Sözgelimi,

$$(x+y)^6 = \binom{6}{6}x^6+\binom{6}{5}x^5y+\binom{6}{4}x^4y^2+\binom{6}{3}x^3y^3+\binom{6}{2}x^2y^4+\binom{6}{1}xy^5+\binom{6}{0}y^6$$

eşitliği, yani

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

eşitliği geçerlidir.

Daha genel olarak, $(x+y)^n$ ifadesini açarsak,

$$x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n-2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-i}x^{n-i}y^i + \cdots + y^n$$

ifadesini buluruz, yani,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} x^{n-i}y^i$$

eşitliği geçerlidir[1]. Eğer $n-i$ yerine i yazarsak, bu toplam, Sonuç 3.4'teki Simetri Özelliği'nden dolayı

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

biçimini alır. Böylece, $(x+y)^n$ teriminin açılımındaki monomların katsayılarını bulmuş olduk.

Yukarıdaki eşitlikten dolayı, "n seç i" sayılarına ***binom katsayıları*** adı da verilir.

Eğer x ve y'ye çeşitli değerler verirsek, binom katsayıları arasında ilginç eşitlikler buluruz. Örneğin $x = y = 1$ alırsak, Sonuç 4.1'de kanıtladığımız

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

eşitlik bulunur.

Eğer $x = -1$, $y = 1$ alırsak,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

[1] $\sum_{i=0}^{n} a_i$ ifadesi, a_0'dan a_n'ye kadar olan sayıların toplamını simgeler, yani $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Bu yazılım hakkında daha fazla bilgi için bkz. [N1].

buluruz, ki bu eşitlik de aynen, sonlu bir kümenin çift sayıda elemanı olan altküme sayısının, tek sayıda elemanı olan altküme sayısına eşit olduğunu söyler. (Neden?)

$x = 2$, $y = -3$ alınarak ortaya çıkacak tuhaf eşitlikleri bulmayı okura bırakıyoruz. Ayrıca y yerine $-y$ alarak,

$$(x-y)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

türden eşitlikler de bulunabilir.

Tabii $y = 1$ alıp x'i serbest de bırakabiliriz. Bu durumda

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği ve $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ eşitliğini kullanarak Sonuç 4.3'ü bir kez daha kanıtlayabiliriz:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k$$

eşitliğinden,

$$\sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j}\right) x^k = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi katsayıları eşitlersek,

$$\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$$

buluruz.

$(x+y+z)^n$ ya da $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ gibi ifadelerin açılımını Teorem 10.5'te göreceğiz.

Yukarıda kanıtladığımız

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

eşitliğini, n üzerine tümevarımla çok daha cebirsel bir biçimde kanıtlayabiliriz. $n = 0$ ise kanıt kolay. Yukarıdaki eşitliği varsayıp, aynı eşitliği $n+1$ için kanıtlayalım:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}\right)(x+y)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}\right)x+\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}\right)y\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{i+1}y^{n-i}\right)+\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i+1}\right)\\
&= \left(x^{n+1}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}x^{i+1}y^{n-i}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-(i-1)}+y^{n+1}\right)\\
&= \left(x^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^jy^{n-(j-1)}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^jy^{n-(j-1)}+y^{n+1}\right)\\
&= x^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)x^jy^{n+1-j}+y^{n+1}\\
&= x^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^jy^{n+1-j}+y^{n+1}\\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^jy^{n+1-j}\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^iy^{n+1-i}.
\end{aligned}
$$

(Sondan bir önceki eşitlikte Teorem 3.5'i kullandık.)

Asala Bölünme. Binom katsayılarının çok önemli bir başka özelliğine geçelim:

Teorem 5.1. *Eğer p bir asal ve $0 < i < p$ ise,*

$$\binom{p}{i}$$

sayısı p'ye bölünür.

Kanıt: Bunun için,

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$$

eşitliğine dikkatlice bakmak yeterli: i ve $p - i$ sayıları p'den küçük olduklarından, paydada, paydaki p'yi sadeleştirecek bir p bulunmaz. Dolayısıyla p, "p seç i" sayısını böler. □

Teoremin daha genel hali için bkz. Alıştırma 5.13. Şimdi sayılar kuramından (daha doğrusu aritmetikten) çok ünlü, önemli ve yararlı bir teorem kanıtlayalım.

Teorem 5.2 (Fermat'nın Küçük Teoremi)**.** *Eğer p bir asal ve a bir tamsayıysa $a^p - a$ sayısı p'ye bölünür.*

Kanıt: Önce $a \in \mathbb{N}$ iken kanıtlayalım. Eğer $a = 0$ ise hiçbir sorun yok. Teoremin a için kanıtlandığını varsayıp, teoremi $a + 1$ için kanıtlayalım.

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} a^i = 1 + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i + a^p$$

eşitliğini biliyoruz. Demek ki,

$$(a+1)^p - (a^p + 1) = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i.$$

Ama Teorem 5.1'e göre, bu son eşitliğin sağ tarafındaki binom katsayıları p'ye bölünür, dolayısıyla eşitliğin sol tarafı da p'ye bölünür. Ama,

$$(a+1)^p - (a+1) = ((a+1)^p - (a^p - 1)) + (a^p - a)$$

olduğundan ve sağ taraf p'ye bölünen iki sayının toplamı olduğundan, sol taraf da p'ye bölünür.

Şimdi $a < 0$ olsun. O zaman $-a > 0$ olur ve önceki paragraftan dolayı $(-a)^p - (-a)$ sayısı p'ye bölünür. Eğer p tek ise,

$$(-a)^p - (-a) = (-1)^p a^p + a = -a^p + a = -(a^p - a),$$

dolayısıyla $a^p - a$ sayısı da p'ye bölünür. Eğer p çiftse, yani $p = 2$ ise, o zaman $a^p - a = a^2 - a = a(a-1)$ olur ve ya a ya da $a - 1$ çift olduğundan, çarpımları da 2'ye bölünür. Teorem kanıtlanmıştır. □

Teorem 5.3 (Fermat'nın Küçük Teoremi)**.** *Eğer p bir asal ve a, p'ye asal bir tamsayıysa $a^{p-1} - 1$ sayısı p'ye bölünür.*

Kanıt: Teorem 5.2'ye göre p'nin $a^p - a$ sayısını yani $a(a^{p-1} - 1)$ sayısını böldüğünü biliyoruz. Ama p bir asal ve varsayıma göre a'yı bölmüyor. Demek ki a, $a^{p-1} - 1$ sayısını böler. □

Fermat'nın Küçük Teoremi'nin Bir Başka Kanıtı: Vereceğimiz kanıt hemen hemen hiçbir matematik bilgisi kullanmaz. Sadece bazı kümelerin elemanlarını saymak yetecek.

p bir asal sayı, a herhangi bir doğal sayı olsun. a tane farklı harf alalım, diyelim h_1, h_2, ..., h_a. Bu harflerle yazılmış p uzunluğundaki sözcükleri ele alalım. Bir harfi aynı sözcükte 1'den fazla kez kullanmaya iznimiz var. Bu sözcüklerden tam a^p tane vardır, çünkü ne de olsa harfler için p yerimiz var ve her yer için a tane harf seçeneğimiz var.

Bu sözcüklerden bazıları tek bir harf kullanırlar: $h_1h_1 \dots h_1$ gibi; bunlardan da tam a tane vardır. Bunları çıkaralım. Geriye

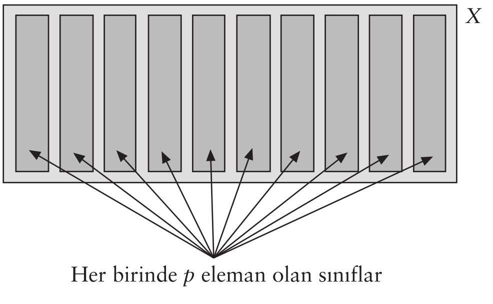
$$a^p - a$$

tane sözcük kalır. Bunlar, a tane harfin en az ikisini kullanan p uzunlukta sözcüklerdir. Bu sözcüklerin kümesine X diyelim.

Şimdi X kümesindeki sözcüklerin harflerini bir çemberin etrafına eşit aralıklarla dizelim. O zaman bazı sözcükler arasında fark kalmaz. Örneğin $p = 5$ ise,

KÜMES, ÜMESK, MESKÜ, ESKÜM, SKÜME

sözcükleri çember etrafına dizildiklerinde aynı sözcük gibi görünürler. Bu tür sözcüklere denk sözcükler diyelim. Her sözcük (kendisi de dahil olmak üzere) tam p tane sözcüğe denktir. Birbirine denk olan sözcükleri bir "sınıf"ta toplayalım. Böylece X kümesinin $a^p - a$ tane sözcüğünü her biri p eleman içeren sınıflara ayırmış oluruz. Dolayısıyla p, $a^p - a$ sayısını böler. □



X'in $a^p - a$ tane elemanı var ve her biri p elemanı olan ayrık sınıflara ayrılmış. Demek ki p, $a^p - a$'yı böler.

Örnekler

5.1. **Kuvvetlerin Toplamı.** Bu örnekte

$$f_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

için formül bulmanın bir yolunu bulacağız. Daha önce Örnek 2.30'da $k = 0, 1, 2, 3$ ve 4 için formülleri bulmuştuk. Burada o örnekteki yöntemi uygulayacağız. $k \geq 1$ olsun. Elbette

$$f_k(n+1) - f_k(n) = (n+1)^k$$

olur. Aynı $f_{k+1}(n+1) - f_{k+1}(n)$ ifadesini başka türlü hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(n+1) - f_{k+1}(n) &= \sum_{i=1}^{n+1} i^{k+1} - \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} = 1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^{k+1} - \sum_{i=1}^{n} i^{k+1}\\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} (j+1)^{k+1} - \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} (i+1)^{k+1} - \sum_{i=1}^{n} i^{k+1}\\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left((i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} i^j - i^{k+1}\right)\\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} i^j = 1 + \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{n} \binom{k+1}{j} i^j\\
&= 1 + \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} \sum_{i=1}^{n} i^j = 1 + \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} f_j(n).
\end{aligned}$$

Demek ki,

$$1 + \binom{k+1}{0} f_0(n) + \binom{k+1}{1} f_1(n) + \cdots + \binom{k+1}{k-1} f_{k-1}(n) + \binom{k+1}{k} f_k(n) = (n+1)^{k+1}$$

ve dolayısıyla,

$$(k+1) f_k(n) = (n+1)^{k+1} - 1 - \binom{k+1}{0} f_0(n) - \binom{k+1}{1} f_1(n) - \cdots - \binom{k+1}{k-1} f_{k-1}(n)$$

olur. Böylece, eğer

$$f_0(n),\ f_1(n),\ \ldots,\ f_{k-1}(n)$$

için formülleri biliyorsak, f_k için de formülü bulabileceğimiz çıkar. Örneğin,

$$f_0(n),\ f_1(n),\ f_2(n),\ f_3(n),\ f_4(n)$$

için formülleri daha önce bulduğumuzdan, yukarıda yapılanı uygulayarak $f_5(n)$ için formül bulabiliriz. □

5.2. *$f_k(n)$, $k+1$'inci dereceden katsayıları kesirli olan bir polinomdur.* Daha doğru bir deyişle (çünkü $f_k(n)$ bir polinom değil, bir sayıdır!) $k+1$'inci dereceden öyle bir $p_k(X)$ polinomu vardır ki, her n doğal sayısı için,

$$f_k(n) = p_k(n)$$

olur.

Kanıt: Bu dediğimiz hemen yukarıda yapılanlardan tümevarımla çıkar: $p_0(X) = X$ olsun ve $p_k(X)$ polinomunu,

$$p_k(X) = \frac{(X+1)^{k+1} - 1 - \binom{k+1}{0} p_0(X) - \binom{k+1}{1} p_1(X) - \cdots - \binom{k+1}{k-1} p_{k-1}(X)}{k+1}$$

olarak tanımlayalım. Bir önceki örnekten dolayı istediğimizi elde ederiz. □

5.3. $(k+1)!p_k(n)$ *polinomunun katsayıları tamsayıdır.*
Kanıt: Bir önceki örnekten tümevarımla çıkar. □

Dikkat: Aşağıdaki alıştırmalar kolaydan zora doğru sıralanmamış olabilir.

Alıştırmalar

5.4. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın.

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i} = 3^n, \quad \sum_{i=0}^{n} (-2)^i \binom{n}{i} = (-1)^n.$$

5.5. p bir asalsa p^2'nin

$$\binom{2p}{p} - 2$$

sayısını böldüğünü kanıtlayın.

5.6. Sonlu bir kümenin çift sayıda elemanı olan altküme sayısının, tek sayıda elemanı olan altküme sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

5.7. p bir asal sayı ve n bir doğal sayı olsun. Eğer x bir gerçel sayıysa, $[x]$, x'in tamkısmı olsun. Örneğin,

$$[8{,}12] = [25/3] = [8] = 8.$$

Eğer

$$a = [n/p] + [n/p^2] + \cdots$$

ise (toplam sonludur, en fazla n terim içerebilir) o zaman p^a'nın $n!$ sayısını böldüğünü ama p^{a+1}'in bölmediğini kanıtlayın.

5.8. $(1+x)^{2n}$ ifadesini açarak,

$$\binom{n}{2}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

eşitliğini (bir kez daha) kanıtlayın.

5.9. Bir çemberin üstünde 11 nokta alınıyor. Köşeleri bu 11 nokta arasından seçilen kaç dışbükey çokgen vardır?

5.10. Her $0 \le k < n$ tamsayısı için

$$\binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} = \frac{n+2}{n+1}\binom{n}{k}^{-1}$$

eşitliğini kanıtlayın.

5.11. Şu eşitsizlikleri kanıtlayın:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lceil (n-1)/2 \rceil} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Not: Burada, $\lceil x \rceil$ sayısı

$$\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$$

eşitsizliklerini sağlayan en küçük doğal sayıdır. $\lfloor x \rfloor$ ise,

$$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$$

eşitsizliklerini sağlayan en küçük doğal sayıdır, yani tamkısımdır.

5.12. $(X+Y+Z)^n$ polinomunda $X^iY^jZ^k$ teriminin katsayısını hesaplayın. (Burada, $i+j+k = n$.) Bkz Teorem 10.5.

5.13. Eğer p bir asalsa, $n > 0$ bir doğal sayıysa ve $0 < i < p^n$ ise, p'nin

$$\binom{p^n}{i}$$

sayısını böldüğünü kanıtlayın.

5.14. $n > 1$ bir tek tamsayı olsun.

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{(n-1)/2}$$

sayıları arasından tek olanlarının sayısının tek olduğunu kanıtlayın.

5.15. Kanıtlayın:

a. $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$,

b. $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$,

c. $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

n pozitif bir doğal sayı olmak üzere, her $1 \le k \le 2n-1$ sayısı için,

$$\binom{2^n}{k}$$

sayısının çift olduğunu ve yalnızca tek bir k için bu sayının 4'e bölünmediğini kanıtlayın.

5.16. p bir asal ve $n \ge 1$ bir doğal sayı olsun. p^n sayısının,

$$\binom{p^n}{p} - p^{n-1}$$

sayısını böldüğünü kanıtlayın.

5.17. $p > 3$ bir asal sayıysa

$$\binom{2p-1}{p-1} - 1$$

sayısının p^3'e bölündüğünü kanıtlayın.

6. Binom Açılımı Problemleri

Mustafa Özdemir

Bir önceki bölümde gördüğümüz üzere, binom açılımı, $(x+y)^n$ ifadesinin açılımıdır:

$$\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x+y, \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2, \\
(x+y)^3 &= x^2+3x^2y+3xy^2+y^3, \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^3 \\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \\
(x+y)^6 &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Bu açılımların katsayılarını aşağıdaki gibi dizelim:

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\cdots
\end{array}$$

Bu tabloya ***Pascal üçgeni*** denir.

İlk sütuna 0'ıncı sütun, ilk sıraya da 0'ıncı satır dersek, $0 \leq r \leq n$ için, n'inci satırla r'inci sütunda kesişen sayı,

$$\binom{n}{r}$$

olarak gösterilir. Bu sayıya, bir önceki bölümden bildiğimiz üzere ***binom katsayısı*** adı verilir ve cebirsel ifadesi şöyledir: Her $0 \leq r \leq n$ için,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Binom katsayılarının, n farklı nesne arasından r farklı nesnenin kaç farklı biçimde seçileceğinin sayısı olduğunu biliyoruz.

Yukarıdaki yazılım kullanılarak Pascal üçgeni şöyle de gösterilebilir:

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Pascal üçgenindeki her sayının, bir üstündekinin ve onun solundaki sayının toplamı olduğuna dikkatinizi çekeriz. Örneğin,

$$15 = 10 + 5 \text{ ve } 20 = 10 + 10.$$

Bu olgu aynen ***Pascal özdeşliği*** adıyla bilinen Teorem 3.5'tir. Dolayısıyla yukarıda gösterilen Pascal üçgenini devam ettirmenin en kestirme yolu, son satırdaki iki komşu sayıyı toplayıp bir sonraki satıra yazmaktır.

1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Böylece $(x+y)^9$ açılımını rahatlıkla yazabiliriz:

$$\begin{aligned}(x+y)^9 = x^9 &+ 9x^8y + 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 \\ &+126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9xy^8 + y^9.\end{aligned}$$

Katsayılar Pascal üçgeninin son satırında verilmiştir. Bir sonraki satırı da hesaplarsak, $(x+y)^{10}$ ifadesinin açılımını da kolaylıkla bulabiliriz.

Bölümün bundan sonrasında, binom katsayılarının bazı özelliklerini ve bu özelliklerin uygulamalarını vereceğiz. Özelliklerin bazılarının kolay kanıtlarını okura bırakacağız. Örneğin, şu eşitlik kolaylıkla kanıtlanabilir (Sonuç 4.2):

$$r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$$

Aşağıdaki özelliği kanıtlamak da kolaydır:

Simetri Özelliği [Sonuç 3.4]. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$. □

Örnekler

6.1. $\binom{101}{1} - \binom{101}{2} + \binom{101}{3} - \cdots + \binom{101}{99} - \binom{101}{100}$ *toplamını hesaplayınız.*
Çözüm: Simetri özelliğinden baştaki terimler sondakilerle sadeleşir ve sonuç 0 elde edilir. □

6.2. $T = \binom{100}{2} + \binom{101}{3} + \cdots + \binom{200}{102} = ?$
Çözüm: Her iki tarafa da

$$\binom{100}{1}$$

eklersek,

$$T + \binom{100}{1} = \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \binom{100}{3} + \cdots + \binom{200}{102}$$

elde ederiz. Sağ tarafın ilk iki terimine

$$\binom{100}{1} + \binom{100}{2} = \binom{101}{2}$$

eşitliğini (Pascal özdeşliği) uygulayıp aynı uygulamayı sürdürelim:

$$\begin{array}{rcccccccc} T + \binom{100}{1} & = \binom{100}{1} & + & \binom{100}{2} & + & \binom{101}{3} & + & \cdots & + & \binom{200}{102} \\ & = & & \binom{101}{2} & + & \binom{101}{3} & + & \cdots & + & \binom{200}{102} \\ & = & & & & \binom{102}{3} & + & \cdots & + & \binom{200}{102} \\ & \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ & = & & & & & & & & \binom{201}{102} \end{array}$$

buluruz. Sonuç,

$$T = \binom{201}{102} - \binom{100}{1}$$

çıkar. □

Alıştırmalar

6.3. $\binom{111}{7} - \binom{111}{8} + \binom{111}{9} - \cdots + \binom{111}{103} - \binom{111}{104}$ toplamını hesaplayınız.
6.4. $\binom{112}{7} - \binom{112}{8} + \binom{112}{9} - \cdots + \binom{112}{101} - \binom{112}{100}$ toplamını hesaplayınız.
6.5. Pascal üçgeni, Pascal Özdeşliği her r ve n tamsayısı için geçerli olacak biçimde tüm düzleme genişletilebilir mi ve genişletilebilirse kaç farklı biçimde genişletilebilir?

Sonuç 6.1 (Toplam Özelliği)**.**

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$

Kanıt: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ olduğundan, sol taraf

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+r}{r}$$

ifadesine eşittir. Bu ifadenin ilk iki terimini, Pascal Özdeşliği'nden çıkan

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$$

eşitliğiyle bire indirelim. Böylece elde edilen ifadenin ilk iki terimini de gene Pascal Özdeşliği'nden çıkan,

$$\binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{2}$$

eşitliğini kullanarak bire indirelim. Böylece adım adım devam edip terim sayısını bire indirebilir ve istediğimiz sonuca varırız:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}}_{\binom{n+2}{1}} + \binom{n+2}{2}}_{\binom{n+3}{2}} + \cdots + \binom{n+r}{r}}_{\cdots}}_{\binom{n+r+1}{r}}$$

Örnekler

6.6. Teorik bir önemi olmasa da, simetri ve toplam özelliklerini kullanarak çok bilinen

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

eşitliğini gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+\cdots+n &= \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \cdots + \binom{n}{1} \\ &= \binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} \\ &= \binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

6.7. Yukarıdaki gibi $i(i+1)/2$ biçiminde yazılabilen sayılara ***üçgensel sayı*** denir. (Neden?) Örnekten esinlenerek ilk n "üçgensel" sayının toplamını da rahatlıkla bulabiliriz:

$$\begin{aligned} 1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n-1)}{2} &= \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{n}{2} \\ &= \binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\cdots+\binom{n}{n-2} \\ &= \binom{n+1}{n-2} = \binom{n+1}{3} = \frac{n^3-n}{6}. \end{aligned}$$

Sonuç 6.2 (Newton Özdeşliği)**.** *$0 \le r \le k \le n$ tamsayıları için,*

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Basit bir hesap:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\binom{k}{r} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{n!}{(n-k)!r!(k-r)!} \\ &= \frac{n!(n-r)!}{(n-r)!(n-k)!r!(k-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!}\frac{(n-r)!}{(n-k)!(k-r)!} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}. \end{aligned}$$

Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Binom Açılımı. $n \in \mathbb{N}$ için, $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında, Pascal üçgenini kullanabileceğimizi biliyoruz:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{i}x^{n-i}y^i + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}$$

Binom açılımı denilen bu eşitliği toplam sembolüyle,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

şeklinde de gösterebiliriz.

Bu eşitlikte $x = y = 1$ alırsak,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

özdeşliği elde edilir. Örneğin,

$$\binom{100}{0}+\binom{100}{1}+\binom{100}{2}+\cdots+\binom{100}{100}=2^{100}.$$

Bir başka varyasyon: $x=1$, $y=-1$ alırsak,

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

ilginç eşitliğini buluruz.

Örnekler

6.8. $6^{2007}+8^{2007}$ *sayısının* 49*'a bölümünden kalan kaçtır?*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
&6^{2007}+8^{2007}=(7-1)^{2007}+(7+1)^{2007}\\
&=\sum_i\binom{2007}{i}7^i(-1)^{2007-i}+\sum_i\binom{2007}{i}7^i\\
&\equiv 2007\times 7-1+2007\times 7+1=2007\times 14\\
&=((49\times 44)+47)\times 14\equiv 47\times 14\equiv -2\times 14=-28\equiv 21(\text{mod } 49).
\end{aligned}$$

6.9. 101^{10} *sayısının son on rakamının toplamı kaçtır?*

Çözüm: Binom formülünü kullanarak

$$101^{10}=(10^2+1)^{10}$$

sayısını mod 10^{10} hesaplayalım[1]:

$$\begin{aligned}
101^{10}&=\left(10^2+1\right)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}10^{2i}\\
&=10^{20}+\cdots+\binom{10}{4}10^8+\binom{10}{3}10^6+\binom{10}{2}10^4+\binom{10}{1}10^2+\binom{10}{0}10^0\\
&\equiv\binom{10}{4}10^8+\binom{10}{3}10^6+\binom{10}{2}10^4+\binom{10}{1}10^2+1\\
&=210\cdot 10^8+120\cdot 10^6+45\cdot 10^4+10\cdot 10^2+1\\
&\equiv 10^9+12\cdot 10^7+45\cdot 10^4+10\cdot 10^2+1\\
&=10^9+10^8+2\cdot 10^7+4\cdot 10^5+5\cdot 10^4+10^3+1\ (\text{mod } 10^{10})
\end{aligned}$$

denkliğinden, son 10 rakamın toplamının

$$1+1+2+4+5+1+1=15$$

olduğu görülür.

[1] Modüler aritmetiği bilmeyenler için: "$a\equiv b$ mod n", n sayısı $a-b$ sayısını böler, yani a ile b'nin n'ye bölümünden kalanlar eşittir demektir.

6.10. $\sum_{k=1}^{10} 5^k \binom{11}{k}$ *ifadesinin son rakamı kaçtır?*
Çözüm:

$$\sum_{k=0}^{11} 5^k \binom{11}{k} = (5+1)^{11}$$

eşitliğinin solundaki ifadenin ilk ve son terimlerini çıkarırsak,

$$\sum_{k=1}^{10} 5^k \binom{11}{k} = (5+1)^{11} - 5^0 \binom{11}{0} - 5^{11} \binom{11}{11} = 6^{11} - 5^{11} - 1$$

eşitliğini bulmuş oluruz. 6^{11} sayısının son rakamı 6, 5^{11} sayısının son rakamı 5 olduğundan, sorunun yanıtı $6 - 5 - 1 = 0$ olur.

6.11. *x sayısının hangi pozitif tamsayı değeri için, $(2x+9)^{10}$ ifadesinin açılımının x^4 terimi komşu terimlerden daha büyüktür?*
Çözüm:

$$\binom{10}{4}(2x)^4 9^6 \geq \binom{10}{3}(2x)^3 9^7$$

ve

$$\binom{10}{4}(2x)^4 9^6 \geq \binom{10}{5}(2x)^5 9^5$$

olmalıdır. Buna göre, bu eşitsizliklerde gerekli sadeleştirmeleri yaparsak, birincisinden $x \geq 3$, ikincisinden $x \leq 3$ buluruz. Demek ki $x = 3$.

6.12. $\sum_{k=1}^{50} \binom{100}{2k-1}$ *sayısını asallarına ayırın.*
Çözüm: Sorudaki ifadeyi

$$\sum_{i \text{ tek}} \binom{100}{i}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi, $(1+1)^{100}$ ve $(1-1)^{100}$ sayılarının binom açılımlarını yazıp birbirinden çıkaralım:

$$2^{100} = (1+1)^{100} - (1-1)^{100} = \sum_{i=0}^{100} \binom{100}{i} - \sum_{i=0}^{100} (-1)^i \binom{100}{i}.$$

i göstergeci çift olanlar sadeleşir ve geriye,

$$2^{100} = 2 \times \sum_{i \text{ tek}} \binom{100}{i}$$

kalır. Demek ki yanıt 2^{99}'dur.

6.13. *$1 \leq r \leq n$ tamsayıları için,*

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{r}$$

toplamını hesaplayınız.
Çözüm: Newton özdeşliğinden, $0 \leq r \leq k \leq n$ tamsayıları için,

$$\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$$

olduğundan,

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{r}\binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$$

yazabiliriz. Ama k'dan bağımsız bir sabit olan

$$\binom{n}{r}$$

sayısını toplamın dışına çıkarabiliriz:

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\sum_{k=r}^{n}\binom{n-r}{k-r}$$

Göstergeçleri düzenlersek ($s=k-r$ olsun),

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\sum_{s=0}^{n-r}\binom{n-r}{s}$$

elde edilir. Binom açılımından

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}2^{n-r}$$

çıkar. Tüm bu yaptıklarımızı bir yerde toplayalım:

$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{k}{r}&=\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}=\binom{n}{r}\sum_{k=r}^{n}\binom{n-r}{k-r}\\&=\binom{n}{r}\sum_{\ell=0}^{n-r}\binom{n-r}{\ell}=\binom{n}{r}2^{n-r}.\end{aligned}$$

6.14. $\binom{100}{50}\binom{50}{50}+\binom{100}{51}\binom{51}{50}+\cdots+\binom{100}{100}\binom{100}{50}$ *toplamı 2'nin en büyük kaçıncı kuvvetine bölünür?*

Çözüm: Newton Özdeşliği'nden (Sonuç 6.2), sorudaki toplam,

$$\begin{aligned}&\binom{100}{50}\binom{50}{0}+\binom{100}{50}\binom{50}{1}+\cdots+\binom{100}{50}\binom{50}{50}\\&=\binom{100}{50}\left(\binom{50}{0}+\binom{50}{1}+\cdots+\binom{50}{50}\right)=\binom{100}{50}2^{50}=\frac{100!}{50!50!}2^{50}\end{aligned}$$

sayısına eşittir. $100!/(50!50!)$ sayısında,

$$(50+25+12+6+3+1)-2(25+12+6+3+1)=3$$

tane 2 çarpanı olduğundan (bkz. Alıştırma 5.7 ya da Teorem 27.5), toplamda 2 çarpanının kuvveti en fazla $50+3=53$ olur.

6.15. $\binom{50}{0}+\binom{51}{1}+\cdots+\binom{149}{99}+\binom{150}{100}=\,?$

Çözüm: Toplam özelliğinden (Sonuç 6.1) doğrudan,

$$\binom{151}{100}$$

çıkar.

6.16. $0\le k\le m\le n$ *tamsayıları için,*

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}^{-1}$$

ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: Önce şu eşitliği farkedelim:

$$\begin{aligned}\binom{m}{k}\binom{n}{k}^{-1} &= \frac{m!}{k!(m-k)!}\,\frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{m!(n-k)!}{n!(m-k)!}\\ &= \frac{m!(n-m)!}{n!}\,\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!} = \binom{n}{m}^{-1}\binom{n-k}{m-k}.\end{aligned}$$

Demek ki hesaplamak istediğimiz toplam,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{m}^{-1}\binom{n-k}{m-k} &= \binom{n}{m}^{-1}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}\\ &= \binom{n}{m}^{-1}\sum_{k=0}^{m}\binom{(n-m)+(m-k)}{m-k}\\ &= \binom{n}{m}^{-1}\sum_{\ell=0}^{m}\binom{(n-m)+\ell}{\ell}\\ &= \binom{n}{m}^{-1}\binom{n+1}{m} = \frac{n+1}{n-m+1}\end{aligned}$$

çıkar. (Üçüncü eşitlikte $\ell = m-k$ değişikliğini yaptık. Dördüncü eşitlikte toplam özelliğini kullandık.)

6.17. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ *toplamını hesaplayın.*
Çözüm: Doğrudan hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell} = n2^{n-1}.\end{aligned}$$

6.18. $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ *toplamını hesaplayın.*
Çözüm: Yukarıdakine benzer bir yöntem kullanacağız:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} - 1\right) = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).\end{aligned}$$

6.19. *m ve n doğal sayıları için,*

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m}$$

ifadesinin kapalı bir biçimini bulunuz.
Çözüm: $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$ olduğundan, Pascal Özdeşliği'ni (Teorem 3.5) ilk iki terime

sürekli uygulayarak,

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{n-1}{m}+\binom{n}{m}\\
=\;&\underbrace{\binom{m+1}{m+1}+\binom{m+1}{m}}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{n-1}{m}+\binom{n}{m}\\
=\;&\underbrace{\binom{m+2}{m+1}+\binom{m+2}{m}}+\cdots+\binom{n-1}{m}+\binom{n}{m}\\
=\;&\binom{m+3}{m+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\binom{n-1}{m}+\binom{n}{m}\\
=\;&\vdots\\
=\;&\underbrace{\binom{n}{m+1}+\binom{n}{m}}\\
=\;&\binom{n+1}{m+1}
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

6.20. $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\cdots+96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100=?$

Çözüm: $i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)=5!\times\binom{i+4}{5}$ olduğundan sorudaki toplam, toplam özelliğinden dolayı,

$$
\begin{aligned}
5!\binom{5}{5}+5!\binom{6}{5}+5!\binom{7}{5}+\cdots+5!\binom{99}{5}+5!\binom{100}{5}
&=\sum_{i=0}^{95}5!\binom{5+i}{5}=5!\sum_{i=0}^{95}\binom{5+i}{i}=5!\binom{101}{6}\\
&=5!\frac{101!}{6!95!}=\frac{101\cdot 100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{6}\\
&=101\cdot 100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 16
\end{aligned}
$$

olur. Böylece, yanıt $101\cdot 100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 16$ bulunur.

6.21. $(x+2y)^{20}$ *ifadesinin açılımında ardışık iki terimin katsayıları eşittir. Buna göre, bu terimleri bulunuz.*

Çözüm: $(x+2y)^{20}$ ifadesinin açılımında,

$$\binom{20}{a}x^a(2y)^{20-a}\text{ ve }\binom{20}{a+1}x^{a+1}(2y)^{20-a-1}$$

katsayıları eşit olan iki terim olsun. Demek ki,

$$\binom{20}{a}2^{20-a}=\binom{20}{a+1}2^{20-a-1}.$$

Buradan,

$$\frac{20!}{a!(20-a)!}\times 2=\frac{20!}{(a+1)!(20-a-1)!}$$

ve daha da sadeleştirerek

$$\frac{1}{20-a}\times 2=\frac{1}{a+1}$$

elde ederiz. Bundan da $a=6$ çıkar. Yani 7'nci ve 8'inci terimlerin katsayıları eşittir.

6.22. *n bir çift pozitif tamsayı olmak üzere,*

$$\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!1!}$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!1!}\\ &=\frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!1!}\right)\\ &=\frac{1}{n!}\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-1}\right)\end{aligned}$$

eşitliğinden dolayı, parantez içindeki toplamı hesaplamalıyız. Bunun için, Örnek 6.12'deki gibi, $(1+1)^n$ teriminin binom açılımından $(1-1)^n$ teriminin binom açılımını çıkarırsak, artılar birbirini götürür ve geriye

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n},$$

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots-\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

-

$$2^n=2\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}\right)$$

kalır. Demek ki, istenen toplam, $2^{n-1}/n!$ dir.

6.23. $\sum_{k=0}^{121}k\,9^k\binom{121}{k}=x^2$ *eşitliğinde x kaç olabilir?*

Çözüm: Soldaki terimi kapalı bir biçimde ifade edelim:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{121}k9^k\binom{121}{k}&=9\cdot 121\cdot\sum_{k=1}^{121}9^{k-1}\binom{120}{k-1}\\ &=9\cdot 121\cdot\sum_{\ell=0}^{120}9^{\ell}\binom{120}{\ell}=3^2\cdot 11^2(9+1)^{120}=(3\cdot 11\cdot 10^{60})^2.\end{aligned}$$

Sonuç $x=\pm 33\cdot 10^{60}$ olmalıdır.

6.24. $\sum_{k=0}^{100}\frac{5^k}{k+1}\binom{100}{k}=?$

Çözüm: $\frac{100}{k+1}\binom{100}{k}=\binom{101}{k+1}$ eşitliğini kulanarak, yanıtı kolay bir hesapla buluruz:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{100}\frac{5^k}{k+1}\binom{100}{k}&=\sum_{k=0}^{100}\frac{5^k}{101}\binom{101}{k+1}=\frac{1}{101\cdot 5}\sum_{k=0}^{100}5^{k+1}\binom{101}{k+1}\\ &=\frac{1}{101\cdot 5}\sum_{\ell=1}^{101}5^{\ell}\binom{101}{\ell}=\frac{1}{505}\left((5+1)^{101}-5^{101}-1\right)\\ &=\frac{6^{101}-5^{101}-1}{505}.\end{aligned}$$

6.25. *Aşağıdaki eşitliği sağlayan n sayısını bulunuz.*

$$1 \cdot 1998 + \cdots + i(1999 - i) + \cdots + 1998 \cdot 1 = \binom{n}{3}.$$

Yanıt: $\{1, 2, \ldots, n\}$ sayılarından seçilen $a < b < c$ şeklindeki üç farklı sayıdan oluşan $\{a, b, c\}$ kümelerini iki farklı biçimde sayalım. Bunlardan elbette,

$$\binom{n}{3}$$

tane vardır. Öte yandan, b sayısı seçildikten sonra a sayısı için $b - 1$ seçenek, c sayısı için $n - b$ seçenek vardır. Böylece, bu kümelerden,

$$0 \cdot (n-1) + 1 \cdot (n-2) + \cdots + (n-2) \cdot 1 + (n-1) \cdot 0$$

tane vardır. Demek ki

$$\binom{n}{3} = \sum_{b=1}^{n} (b-1)(n-b)$$

olur. Orijinal denklem $n = 2000$ durumunda elde edilebilir.

Alıştırmalar

6.26. Yukarıdaki eşitliği kullanarak

$$\sum_{b=1}^{n} b^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

eşitliğini bir kez daha kanıtlayın (bkz. Alıştırma 2.15).

6.27. $\{1, 2, \ldots, n\}$ sayılarından seçilen $a < b < c < d$ şeklindeki dört farklı sayıdan oluşan $\{a, b, c, d\}$ kümelerini Örnek 6.25'teki gibi iki farklı biçimde sayarak

$$2\binom{n}{4} = \sum_{u=1}^{n} u(n-u)(n-u-1)$$

eşitliğini kanıtlayın. Buradan

$$\sum_{u=1}^{n} u^3$$

için bir formül çıkarın.

Mültinom Açılımı. İkiden fazla terimin doğal sayı kuvvetlerini de, binom açılımına benzer şekilde ifade etmemiz mümkündür. Örneğin,

$$(x + y + z)^6$$

çarpımını oldukça çabuk bulabilmek isteriz.

$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ negatif olmayan tamsayılar ve

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

olmak üzere,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

tanımını yapalım. O zaman, $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ kuvveti,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

eşitliğini sağlayan tüm $n_1,\ n_2, \ldots, n_k$ doğal sayıları için,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$$

terimlerinin toplamıdır, yani

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \cdots + n_k = n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

eşitliği geçerlidir. Bu ifadeye ***mültinom açılımı*** diyeceğiz. (Bu formül ileride Teorem 10.5 olarak kanıtlanacak.)

Örneğin,

$$(x + 3y + 2z)^7 = \sum_{n_1 + n_2 + n_3 = 7} \binom{7}{n_1, n_2, n_3} x^{n_1} (3y)^{n_2} (2z)^{n_3}.$$

şeklinde açılabilir.

Not 1. Mültinom katsayılarını, parantezin altındaki (n_1, n_2, n_3) sayılarına göre "alfabetik sıraya" dizebiliriz:

$$(0,0,7), (0,1,6), (0,2,5), \ldots, (0,7,0), (1,0,6), (1,1,5), \ldots, (7,0,0).$$

Not 2. $k = 2$ durumunda,

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1}$$

elde ederiz.

Örnekler

6.28. $(x + 3y + 2z)^7$ *ifadesinin açılımında,* $x^3 y^2 z^2$ *teriminin katsayısını bulunuz.*
Çözüm: $\binom{7}{3,2,2} 3^2 2^2 = \frac{7!}{3!2!2!} 3^2 2^2 = 7560.$

6.29. $(1 + x^6 + x^{11})^{20}$ *ifadesinin açılımında* x^{39} *teriminin katsayısı kaçtır?*
Çözüm: Önce $(1 + x^6 + x^{11})^{20}$ ifadesini açalım:

$$(1 + x^6 + x^{11})^{20} = \sum_{a+b+c=20} \binom{n}{a, b, c} 1^a (x^6)^b (x^{11})^c$$

Bu ifadede x^{39} teriminin katsayını bulabilmemiz için,

$$6b + 11c = 39 \text{ ve } a + b + c = 20$$

eşitliklerini sağlayan tüm a, b, c sayılarını bulmalıyız. Birinci denklem b ve c sayılarını bayağı kısıtlıyor. Her şeyden önce, $0 \leq b \leq 6$ olmalı. Bu değerler denendiğinde, $(b,\ c) = (1,\ 3)$ bulunuyor sadece. Demek ki $a = 16$. Böylece, yanıt,

$$\binom{20}{16, 1, 3} = \frac{20!}{16!1!3!} = 19.380$$

olur.

6.30. $(1 + 3x + 2x^3)^{10}$ *ifadesinin açılımında* x^4 *teriminin katsayısı kaçtır?*
Çözüm: Yukarıdaki gibi çözeceğiz.

$$(1 + 3x + 2x^3)^{10} = \sum_{a+b+c=10} \binom{n}{a, b, c} 1^a (3x)^b (2x^3)^c$$

eşitliğinden x^4'ün katsayını bulabilmemiz için,

$$b + 3c = 4 \text{ ve } a + b + c = 10$$

eşitliklerinden a, b, c sayılarını bulmalıyız. Birinci eşitlikten,

$$b = 1 \text{ ya da } 4$$

çıkar. Dolayısıyla c sırasıyla 1 ya da 0'dır. Demek ki

$$a = 8 \text{ ya da } 6$$

olabilir. O halde, x^4 teriminin katsayısı,

$$6\binom{10}{8, 1, 1} + 3^4\binom{10}{6, 4, 0},$$

yani 7830 olur.

6.31. $(a + b + c + d + e)^{11}$ *ifadesinin açılımında kaç terim vardır?*
Çözüm: Terimlerin kuvvetleri n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 olmak üzere,

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 11$$

eşitliğini sağlayan kaç tane doğal sayı beşlisi olduğunu bulmalıyız. Yani, 11 ceviz 5 kişiye kaç farklı şekilde paylaştırılabilir? Buna göre, yanıt,

$$\binom{11 + 5 - 1}{5 - 1} = \binom{15}{4} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2} = 1365$$

bulunur.

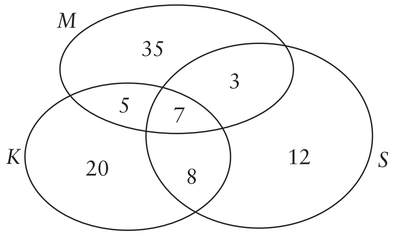
7. Kümelerin Elemanlarını Sayma

7.1 Bileşim

Herkesin nefret ettiği türden bir problemle başlayalım. Bir toplulukta 50 kişi maviyi, 40 kişi kırmızıyı, 30 kişi sarıyı, 12 kişi hem maviyi hem kırmızıyı, 10 kişi hem maviyi hem sarıyı, 15 kişi hem kırmızıyı hem sarıyı, 7 kişi hem maviyi hem kırmızıyı hem de sarıyı seviyor. (Mavi seven 50 kişi başka renkler de sevebilir.) Bu toplulukta mavi, kırmızı ya da sarı renklerinden en az birini seven kaç kişi vardır?

Tam bir ahiret sorusu!

Biraz düşününce durumun aşağıdaki gibi olması gerektiği ve toplam $35 + 20 + 12 + 3 + 5 + 8 + 7 = 90$ kişinin bu üç renkten en az birini sevdiği anlaşılır.



Aynı yanıtı hiç düşünmeden, sadece verilere bakarak, şu şekilde de bulabileceğimiz sizi şaşırtabilir:

$$(50 + 40 + 30) - (12 + 10 + 15) + 7 = 90.$$

Bu yazıda ikinci yöntemin neden doğru yanıtı verdiğini göreceğiz, yani M, K, S kümelerinin bileşiminin eleman sayısının, bu kümelerin eleman sayısından ve ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayısından ve üçünün birden kesişiminin eleman sayısından,

$$|M \cup K \cup S| = |M| + |K| + |S| - (|M \cap K| + |K \cap S| + |S \cap M|) + |M \cap K \cap S|$$

formülüyle elde edildiğini göreceğiz.

Bunu sadece M, K, S diye adlandırdığımız üç kümeyle değil,

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$$

diye adlandıracağımız herhangi n tane sonlu kümeyle de yapabiliriz: Bu kümelerin her birinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca ikişer ikişer kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca üçer üçer kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, ayrıca dörder dörder kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse ve böylece mümkün olan tüm kesişimlerinin eleman sayısı verilmişse, o zaman,

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

bileşiminin eleman sayısını bulabiliriz.

Kanıtlayacağımız formülü $n = 3$ için yukarıda yazdık. $n = 2$ için yanıt oldukça basit:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Son olarak, $n = 4$ için yazalım:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

bileşiminin eleman sayısı

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$$

kümelerinin eleman sayılarının toplamı, eksi,

$$A_1 \cap A_2,\ A_1 \cap A_3,\ A_1 \cap A_4,\ A_2 \cap A_3,\ A_2 \cap A_4,\ A_3 \cap A_4$$

kümelerinin eleman sayısının toplamı, artı,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3,\ A_1 \cap A_2 \cap A_4,\ A_1 \cap A_3 \cap A_4,\ A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

kümelerinin eleman sayısının toplamı, eksi,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

kümesinin eleman sayısı olarak bulunur. Eğer, örneğin,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_4$$

yerine $A_{1,2,4}$ yazarsak, formülü, $n = 4$ için

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & -(|A_{1,2}| + |A_{1,3}| + |A_{1,4}| + |A_{2,3}| + |A_{2,4}| + |A_{3,4}|) \\ & +(|A_{1,2,3}| + |A_{1,2,4}| + |A_{1,3,4}| + |A_{2,3,4}|) - A_{1,2,3,4}\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz.

Sanırım $n = 5$ için formülün ne olacağı tahmin edilmiştir. Konumumuzu belirleyelim ve formülü en ekonomik biçimde yazabilmek için bir tanım verelim. n tane sonlu küme alalım. Bu kümelere

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$$

adını verelim. Ayrıca, $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, n\}$ için,

$$A_{i_1,\ldots,i_j} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}$$

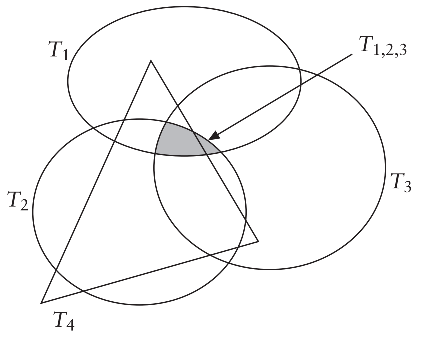
tanımını yapalım. Elbette, örneğin,

$$\begin{aligned}
&A_{1,1} = A_1,\\
&A_{1,1,2} = A_{1,2} = A_{2,1},\\
&A_{1,4,2} = A_{4,1,2} = A_{2,4,1} = A_{1,2,4}
\end{aligned}$$

olur. Bundan böyle $A_{i_1,\ldots,i_j}$ yazılımını, sadece

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_j \le n$$

eşitsizliklerini sağlayan $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_j$ göstergeçleri için kullanacağız.



Şimdi, kanıtlayacağımız formülü matematiksel olarak yazabiliriz:

Teorem 7.1 (İçindelik-Dışındalık Teoremi)**.** *Yukarıdaki yazılımla, her biri sonlu $A_1, \ldots, A_n$ kümeleri için*

$$\left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1,i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |A_{i_1,i_2,i_3}| - \cdots$$

yani,

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \left|A_{i_1,\ldots,i_j}\right| \right)$$

olur. Ayrıca,

$$|A_1 \cap \cdots \cap A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots$$

olur.

Kanıt: Birinci eşitliğe odaklanalım. İkincisi birincisinden kolay bir biçimde çıkacak.

Önce biraz düşünelim.

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

toplamında birçok elemanı birkaç kez sayıyoruz: Bu toplamda her eleman kaç tane A_i'nin içindeyse, o kadar kez sayılıyor. Örneğin bir eleman A_1, A_2, A_4 kümelerindeyse ve diğerlerinde değilse, o zaman bu eleman toplamda tam üç kez sayılıyor. Açıkça görülmese de kanıtımızda bizi yönlendiren fikir budur.

Herhangi bir t elemanı ve $i = 1, \ldots, n$ için

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in A_i \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } t \notin A_i \text{ ise} \end{cases}$$

tanımını yapalım. O zaman, biraz düşününce kolaylıkla görülebileceği üzere, her $t \in T$ için,

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - t_i) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } t \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ ise} \\ 1 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olur. Demek ki, her $t \in T$ için,

$$1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - t_i) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

ve dolayısıyla,

$$(1) \qquad \sum_t \left(1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - t_i)\right) = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

bulunur. Şimdi soldaki ifadedeki çarpımı açalım.

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - t_i) = (1 - t_1)(1 - t_2) \ldots (1 - t_n) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, 0 \le j} (-1)^j t_{i_1} \ldots t_{i_j}$$

buluruz. (İkinci eşitlik göründüğü kadar zor değildir, parantezleri dağıtmak yeterlidir. Ayrıca, $j = 0$ olduğunda, $t_{i_1} \dots t_{i_j}$ çarpımının 1 olduğunu varsayıyoruz.) Bundan,

$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - t_i) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n, j > 0} (-1)^{j+1} t_{i_1} \dots t_{i_j}$$

çıkar. ($j = 0$ için elde edilen 1 sadeleşti.) Demek ki, (1) formülünün solundaki

$$\sum_t \left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - t_i)\right)$$

ifadesi

$$\sum_t \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, 0 < j} (-1)^{j+1} t_{i_1 \ldots} t_{i_j}$$

ifadesine eşit. Şimdi bu son ifadeyle oynayalım. Önce,

$$\begin{aligned}\sum_t \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, 0 < j} (-1)^{j+1} t_{i_1 \ldots} t_{i_j} &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, 0 < j} \sum_t (-1)^{j+1} t_{i_1 \ldots} t_{i_j} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n,\, 0 < j} \left((-1)^{j+1} \sum_t t_{i_1 \ldots} t_{i_j}\right)\end{aligned}$$

eşitliğini görelim. Hesaplara kısa bir ara verip en sağdaki toplamın ne olduğuna bakalım. t_i'lerin tanımından, hemen,

$$t_{i_1} \cdots t_{i_j} = \begin{cases} 1 & \text{eğer } t \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j} \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}$$

eşitliği çıkar. Demek ki,

$$\sum_t t_{i_1} \dots t_{i_j} = \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right|$$

olur. Yukarıda başladığımız hesaba devam edelim.

$$\begin{aligned} &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n\, 0 < j} (-1)^{j+1} \left|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_j \le n} \left|A_{i_1, \ldots i_j}\right|\right).\end{aligned}$$

Birinci eşitliği kanıtladık. İkinci eşitliğe geçelim.

Eğer $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = N$ ise

$$|A_i^c \cup A_j^c \cup A_k^c| = |(A_i \cap A_j \cap A_k)^c| = N - |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

olur. Bu eşitliği üçer üçer seçilmiş kümelerden ℓ'şer ℓ'şer seçilmiş kümelere genelleştirmek işten bile değildir.

Şimdi, kanıtladığımız birinci eşitliği, $A_1, \ldots, A_n$ kümeleri yerine bunların tümleyenlerine uygularsak ve yukarıda bulduğumuz eşitliği gereken yerlere yerleştirirsek ve karşımıza çıkan N'leri sadeleştirirsek, istediğimiz eşitliği buluruz. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Bu olgunun bir başka (belki biraz daha kolay) kanıtını aşağıda bulabilirsiniz.

Teorem 7.1'in İkinci Kanıtı. Adım adım gideceğiz. Sadece birinci eşitliği kanıtlamamız gerektiğini biliyoruz (bkz bir önceki kanıtın sonu).

Sav 1. *$I \subseteq \mathbb{R}$, n elemanlı bir küme olsun. $\{(i_1, i_2, i_3) \in I^3 : i_1 < i_2 < i_3\}$ kümesinin eleman sayısı $\binom{n}{3}$'tür. Eğer 3 yerine rastgele bir $\ell = 1, \ldots, n$ alırsak sonuç $\binom{n}{\ell}$ olur.*
Kanıt: I'nın üç elemanlı altkümelerini küçükten büyüğe doğru sıraya dizersek küçükten büyüğe sıralanmış sıralı üçlüleri buluruz. Dolayısıyla kümenin,

$$\binom{n}{3}$$

tane elemanı vardır. 3 yerine rastgele bir ℓ alırsak, sonuç elbette

$$\binom{n}{\ell}$$

olur.

Sav 2. *Herhangi bir $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sayısı için:*

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s} = 1$$

olur.
Kanıt: $(1-1)^s = 0$ eşitliğinin solundaki ifadeyi binom açılımına göre açarsak ve birinci terim dışındakileri diğer tarafa atarsak, istediğimizi elde ederiz.

Sav 3. Bundan böyle $A_1, \ldots, A_n$ *sonlu kümeler olsun. x, bu kümelerin tam s tanesinde bulunan bir eleman olsun. x'in*

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

sayısına olan katkısı $\binom{s}{3}$*'tür, yani eğer* $B_i = A_i \setminus \{x\}$ *ise*

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k} |B_i \cap B_j \cap B_k| = \binom{s}{3}$$

olur.

Kanıt: Eğer x elemanı A_i, A_j, A_k kümelerinden en az birinde değilse, o zaman elbette

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = |B_i \cap B_j \cap B_k|$$

olur ve bu durumun toplama bir katkısı olmaz. Öte yandan eğer x elemanı A_i, A_j, A_k kümelerinin hepsindeyse, o zaman

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = |B_i \cap B_j \cap B_k| + 1$$

olur ve bu durumun katkısı 1 olur. Demek ki,

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k} |B_i \cap B_j \cap B_k| = \binom{s}{3}$$

olur.

Sav 4. *Eğer* $x \in \bigcup_i A_i$ *ise, x'in*

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

sayısına katkısı 1*'dir.*

Kanıt: Bir önceki savı 3'ten k'ya genelleştirerek, x'in katkısının

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s},$$

yani Sav 2'den dolayı 1 olduğunu görürüz.

Sav 5. [İçindelik-Dışındalık Teoremi]

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

olur.

Kanıt: Bir önceki savı $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ kümesinin her elemanına teker teker uygularsak,

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

sayısının $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ kümesinin eleman sayısına eşit olduğunu görürüz. □

7.2 Simetrik Fark

A ve B kümeleri için,

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

tanımını yapalım. $A\Delta B$ kümesine A ve B'nin ***simetrik farkı*** denir. Elbette

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

eşitliği geçerlidir.

Önce şu temel önsavı aradan çıkaralım:

Önsav 7.2. *Δ işleminin birleşme ve değişme özellikleri vardır ve $\cap$ işlemi Δ üzerine dağılır.*

Kanıt: Δ'nın değişme özelliği olduğu belli, yani

$$A\Delta B = B\Delta A$$

olur. Δ'nın birleşme özelliği olduğunu kanıtlayalım. A, B ve C herhangi üç küme olsun.

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

eşitliğini kanıtlayacağız.

Aşağıdaki tablolarda bir $x \in A \cup B \cup C$ elemanı için, x'in içindeliğine göre önce 4 sonra 8 farklı durumu ele alıyoruz. Bir hücrede yazan "1", x, o sütunun en başında gösterilen kümenin elemanı demektir, "0" ise x o kümenin elemanı değil demektir. Önce $A\Delta B$ kümesinin tablosunu yapalım:

A	B	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

Şimdi de $(A\Delta B)\Delta C$ ve $A\Delta(B\Delta C)$ kümelerinin tablosunu yapalım:

A	B	C	$A\Delta B$	$(A\Delta B)\Delta C$	$B\Delta C$	$A\Delta(B\Delta C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Gri sütunlardaki sayılar aynı. Bu şu demektir:

$$x \in (A\Delta B)\Delta C \Leftrightarrow x \in A\Delta(B\Delta C).$$

Bir başka deyişle, $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

Son olarak, kesişimin simetrik farka dağıldığını, yani,

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

eşitliğini kanıtlayalım. Bunu da tablo yöntemiyle kanıtlayacağız:

A	B	C	$B\Delta C$	$A\cap(B\Delta C)$	$A\cap B$	$A\cap C$	$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Teorem 7.3. *Her biri sonlu $A_1, \ldots, A_n$ kümeleri için*

$$|A_1\Delta\cdots\Delta A_n| = \sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 2^2 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

olur.

Kanıt: Gene adım adım ilerleyeceğiz.

Sav 1. *$n \geq 2$ ise $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ kümesi tek sayıda A_i'lere ait olan elemanlardan oluşur.*

Kanıt: n üzerine tümevarımla. $n = 2$ için yukarıdaki birinci tablodan her şey belli. İstediğimizin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlayalım. Bir elemanın $A_1\Delta\cdots\Delta A_n\Delta A_{n+1}$ kümesinde olması için,

$$A_1\Delta\cdots\Delta A_n \text{ ve } A_{n+1}$$

kümelerinden sadece birinde olmalıdır. Eğer eleman $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ kümesindeyse ama A_{n+1} kümesinde değilse, o zaman, tümevarım varsayımına göre eleman tek sayıda kümededir. Eğer eleman $A_1\Delta\cdots\Delta A_n$ kümesinde değilse ama A_{n+1} kümesindeyse, o zaman tümevarım varsayımına göre eleman ilk n kümenin çift sayıda tanesinin elemanıdır; buna bir de A_{n+1} kümesi eklenince, istediğimizi elde ederiz.

3. $\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i-1}2^{i-1}\binom{s}{i}$ *sayısı, eğer s çiftse* 0, *tekse* 1 *olur.*

Kanıt: Sonuç kolaylıkla s'nin çiftliğine ya da tekliğine göre değişen $(1-2)^s = \pm 1$ eşitliğinden çıkar: Soldaki ifadenin binom açılımını yazıp, binom açılımının ilk terimi olan 1'i sağa geçirip 2'ye bölersek istediğimiz sonucu elde ederiz.

4. *Her biri sonlu $A_1, \ldots, A_n$ kümeleri için*

$$|A_1 \Delta \cdots \Delta A_n| = \sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + 2^2 \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

olur.

Kanıt: Bir x elemanının $A_1, \ldots, A_n$ kümelerinin tam s tanesinde olduğunu varsayalım. O zaman x'in $|A_1 \Delta \cdots \Delta A_n|$ sayısına katkısı,

$$\binom{s}{1} - 2\binom{s}{2} + 2^2\binom{s}{3} - \cdots$$

kadar olur. Demek ki, bir önceki soruya göre, eğer s çiftse x'in bu ifadeye katkısı yoktur, eğer s tekse, x'in bu ifadeye katkısı 1'dir. Bunu $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinin tüm elemanlarına uygularsak, istediğimizi buluruz. Teorem kanıtlanmıştır. □

8. Sayma Problemleri

Uyarı: Problemler illa kolaydan zora doğru sıralanmamışlardır ve bazıları gerçekten zor olabilirler. Ayrıca kitapta da problemlerin benzerlerini çözmemiş ya da çözüm yöntemine eğilmemiş olabiliriz.

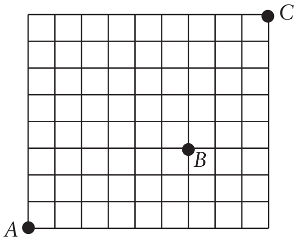
1. Yirmi öğrenci ev ödevi yaparlar. Her öğrenci en az üç soruyu doğru yanıtlar ve her soru en fazla iki öğrenci tarafından doğru yanıtlanır. Ödevde en az kaç soru olmalıdır?

2. İçinde en az bir 1 olan 10.000'den küçük kaç doğal sayı vardır?

3. Toplamı 100 olan ve birbirinden farklı 7 pozitif doğal sayı arasından üçünün toplamının en az 50 edeceğini kanıtlayın.

4. Düzlemde, üçünün doğrusal olmadığı $2n + 2$ tane nokta alınıyor. Bu noktaların ikisinden geçen bir doğrunun düzlemi, n tane nokta bir bölgede, diğer n tane diğer bölgede olmak üzere iki bölgeye ayırdığını kanıtlayın.

5. Aşağıdaki ızgarada A noktasından C noktasına B noktasından geçmeden kaç farklı biçimde gidilebilir?



6. Bir tane 1, iki tane 2, üç tane 3 ve dört tane 4 ile 10 rakamlı kaç sayı yazabilirsiniz? Bir tane 1, iki tane 2, üç tane 3 ve dört tane 4 ile en fazla 10 rakamlı kaç sayı yazabilirsiniz?

7. Herhangi bir insan topluluğunda aynı sayıda insan tanıyan en az iki kişi olduğunu kanıtlayın.

8. $2n$'den küçükeşit $n + 1$ tane farklı sayı verilsin.

a. Bunlardan ikisinin toplamının mutlaka $n + 1$ edeceğini kanıtlayın.

b. Bunlardan ikisinin aralarında asal olduklarını kanıtlayın.

c. Bunlardan birinin diğerini böldüğünü kanıtlayın.

9. 25 kız ve 25 erkek çocuk yuvarlak bir masanın etrafında oturuyorlar. Her iki komşusu da kız olan en az bir kişinin olduğunu kanıtlayın.

10. İlla birbirinden farklı olmak zorunda olmayan 6 rakamı (yani 0'dan 9'a kadar olan altı sayıyı) üçer rakamlık öyle iki kümeye ayırabilirsiniz ki kümelerin rakamlarının toplamları arasındaki fark en fazla 9 olur. Kanıtlayın. Bu soruyu genelleştirerek çözmeye çalışın.

11. $2n+1$ tane sayı verilmiş. Bu sayıların şu özelliği var: Herhangi n tanesinin toplamı geri kalan $n+1$ tanesinin toplamından küçük. Tüm sayıların pozitif olduklarını kanıtlayın.

12. Bir masanın üstünde 2009 tane madenî para var. Sırasıyla

$$1, 2, 3, \ldots, 2009$$

tane parayı ters çevirerek masanın üstünde tüm paraları ya hep yazı ya da hep tura yapabileceğimizi kanıtlayın. (**İpucu:** 2009 için değil de, tümevarımla tüm tek sayılar için kanıtlayın.)

13. m ve $n > 1$, iki doğal sayı olsun. S, n elemanlı bir küme olsun. $A_1, \ldots, A_m$ kümeleri S'nin altkümeleri olsunlar. Şu varsayımı yapalım: S'nin her $x \neq y$ elemanı için, ya "$x \in A_i$ ve $y \in A_i$" özelliğini ya da "$x \notin A_i$ ve $y \in A_i$" özelliğini sağlayan bir

$$i = 1, \ldots, m$$

vardır. $n \leq 2^m$ eşitsizliğini kanıtlayın. Eğer $n \leq 2^m$ ise gerçekten bu özelliği sağlayan m altkümenin seçilebileceğini kanıtlayın. (**İpucu:** $n = 2^m$ eşitliğini varsayabiliriz. Tümevarımla devam edin.)

14. Eğer n, 4'e bölünüyorsa,

$$\sum_k \binom{n}{4k+1} = \sum_k \binom{n}{4k+3}$$

eşitliğini kanıtlayın. (**İpucu:** Karmaşık sayılarla daha kolay kanıtlanır.)

15. Eğer n, 8'e bölünüyorsa, n elemanlı bir kümenin eleman sayısı 4'e bölünen altküme sayısının $2^{n-2} + 2^{(n-2)/2}$ olduğunu kanıtlayın. (**İpucu:** Karmaşık sayılarla daha kolay kanıtlanır.)

16. En küçük ortak çarpımı $2^4 3^5 5^{12}$ olan kaç (a, b) doğal sayı çifti vardır.

17. Çift sayıda insan yuvarlak bir masa etrafında oturuyorlar. Bir aradan sonra kalkıp tekrar masaya oturuyorlar ama illa eski yerlerine değil, rastgele oturuyorlar. En az iki kişinin arasında aradan önce ve aradan sonra aynı sayıda insanın oturduğunu kanıtlayın.

18. $\{f \in S_n : \text{ her } i = 1, \ldots, n \text{ için } f(i) \neq i\}$ kümesinin

$$n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

tane elemanı olduğunu kanıtlayın.

19. [Euler φ Fonksiyonu]. $n > 0$ bir doğal sayı olsun. $p_1, p_2, \ldots, p_r$ asal sayıları birbirinden farklı olsunlar ve bunlar n'yi bölen tüm asallar olsun. $\{m \in \mathbb{N} : 1 \leq m \leq n$ ve n ve m aralarında asal$\}$ kümesinin

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

tane elemanı olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Teorem 7.1'i kullanabilirsiniz.

20. Bir çemberin üstünde n tane nokta alınıyor. Köşeleri bu noktalar arasından seçilen kaç üçgen vardır? Köşeleri bu noktalardan olan kaç tane dışbükey çokgen vardır?

21. A harfini 20, B harfini 40, C harfini 25, D harfini 15 defa kullanarak 100 harfli kaç sözcük yazabilirsiniz?

22. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin $f^3 = \mathrm{Id}$ eşitliğini sağlayan kaç f eşleşmesi vardır?

23. $\{1, 2, \ldots, 20\}$ kümesinin $f^3 = \mathrm{Id}$ eşitliğini sağlayan kaç f eşleşmesi vardır?

24. Aşağıdaki eşitlikleri ve önermeleri kanıtlayın, verilen ifadelerin kapalı formüllerini bulun.

a. $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$.

b. $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

c. $\binom{n+m}{k} = \binom{n}{k}\binom{m}{0} + \binom{n}{k-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{k-2}\binom{m}{2} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{m}{k}$.

d. $\binom{n}{0}\binom{n}{k} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = 2^k\binom{n}{k}$.

e. $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

f. $n^2\binom{2n-2}{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}^2$.

g. $\binom{3n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\binom{n}{k}$.

h. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

i. $\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}\binom{k-1}{r-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

j. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

k. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}$.

l. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 = ?$

m. $\sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2m+1} = 4^n$.

n. $\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} = ?$

o. $\sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} = ?$

p. $\sum_{k=0}^{m} \binom{u}{k}\binom{v}{m-k} = ?$

q. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{u}{k}\binom{v}{m-k} = ?$

r. $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}\binom{n}{k} = ?$

s. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = ?$

t. $\sum_{k=0}^{m} \binom{u+k}{k}\binom{v-k}{m-k} = ?$

u. $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{k}(-2)^k.$

v. $\sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+k}{p+q} = \binom{n}{p}\binom{n}{q}.$

w. $\sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k}\binom{q}{k}\binom{n+p+q-k}{p+q} = \binom{n+p}{p}\binom{n+q}{q}.$

x. $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{n/2} > \binom{n}{n/2+1} > \ldots > \binom{n}{n}$ eğer n çiftse.

y. $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2} > \ldots > \binom{n}{n}$ eğer n tekse.

z. q ve n birer doğal sayı, $k = 0, 1, \ldots, n$ olmak üzere,

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(q^i-1)}{\prod_{i=1}^{k}(q^i-1)\prod_{i=1}^{n-k}(q^i-1)}$$

tanımını yapalım. Yukarıdaki eşitsizliklerin bu sayılar için de geçerli olduğunu kanıtlayın.

Kaynakça

Titu Andreescu ve Zuming Feng, **A Path to Combinatorics for Undergraduates**, Birkhäuser 2003.

Titu Andreescu ve Razvan Gelca, **Mathematical Olympiad Challenges**, Birkhäuser 2000.

Kısım II

Daha Derin Sayma

9. Catalan Sayıları

Selin Enüst Çalışkan

Bu bölümde Catalan sayılarından sözedeceğiz. Önce birkaç problem sıralayıp bunların her birinin çözümünün Catalan sayılarını verdiğini göstereceğiz. Daha sonra Catalan sayılarının nasıl hesaplanacağını göreceğiz.

Problem 1. Sıralı Çarpım Sayısı. $n+1$ tane farklı sayı belli bir sırayla verilmiş. Bu sayıları, sıralarını değiştirmeden kaç farklı şekilde çarpabiliriz? $0 \leq n \leq 4$ için yanıtlar şöyle:

$n = 0$. Tek bir sayı verilmiş, a. Yanıt 1'dir. (Hiç çarpma yapmadığımızdan bazı okurlar haklı olarak yanıtın 0 olması gerektiğini düşünebilir. Bu sorunun üstünde durmayıp bir sonraki örneğe geçsin bu okurlar.)

$n = 1$. Bu sefer iki sayı verilmiş: sırasıyla a ve b. Bu iki sayıyı bu sırayla tek bir biçimde çarpabiliriz: $a \cdot b$. Yanıt gene 1'dir.

$n = 2$. Üç sayımız var: a, b ve c. İki değişik biçimde çarpabiliriz: $(a \cdot b) \cdot c$, $a \cdot (b \cdot c)$. Yanıt bu sefer 2.

$n = 3$. Sayılarımıza sırasıyla a, b, c ve d diyelim. İşte yapabileceğimiz farklı işlemler:

$$((a \cdot b) \cdot c) \cdot d,\ (a \cdot b) \cdot (c \cdot d),\ (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d,\ a \cdot ((b \cdot c) \cdot d),\ a \cdot (b \cdot (c \cdot d)).$$

Yanıt 5'tir.

$n = 4$. Sayılarımıza a, b, c, d ve e diyelim ve bu sayıların bu sıralamasını değiştirmeden yapabileceğimiz çarpmaları dizelim.

$$\begin{array}{lll}
(((a \cdot b) \cdot c) \cdot d) \cdot e, & ((a \cdot b) \cdot c) \cdot (d \cdot e), & ((a \cdot b) \cdot (c \cdot d)) \cdot e, \\
(a \cdot b) \cdot ((c \cdot d) \cdot e), & (a \cdot b) \cdot (c \cdot (d \cdot e)), & ((a \cdot (b \cdot c))d) \cdot e, \\
(a \cdot (b \cdot c)) \cdot (d \cdot e), & (a \cdot ((b \cdot c) \cdot d)) \cdot e, & (a \cdot (b \cdot (c \cdot d))) \cdot e, \\
(a \cdot (((b \cdot c) \cdot d) \cdot e), & a \cdot ((b \cdot c) \cdot (d \cdot e)), & a \cdot ((b \cdot (c \cdot d)) \cdot e), \\
a \cdot (b \cdot ((c \cdot d) \cdot e)), & a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot e))). &
\end{array}$$

Bu sefer yanıt 14.

Verilen her n sayısı için çözüm sayısını n'ye bağlı olarak veren bir formül bulmak istiyoruz. Bulmak istediğimiz bu sayıya ***Catalan sayısı*** denir.

Problem 2. Dengelenmiş Parantezler. Diyelim elimizde n tane açan ve n tane kapatan parantez var ve bu parantezlerin kaç "dengeli" şekilde gruplanabileceğini bulmak istiyoruz. Burada "dengeli"den kastımız her açılan parantezin bir parantez tarafından kapatılması. Örneğin $(()())$ dengeli bir gruplamadır, öte yandan $()))()($ dengeli bir gruplama değildir. Aşağıda $0 \leq n \leq 4$ için bütün olasılıkları görüyoruz.

$n = 0$. Hiç parantez yazmamanın tek bir yolu vardır! Yanıt 1'dir.

$n = 1$. Parantezi açıp kapatmalıyız: $()$. Yanıt 1.

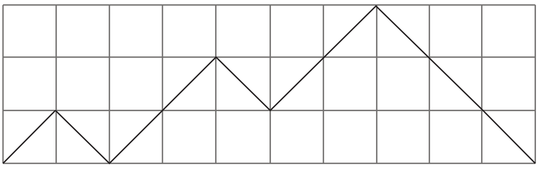
$n = 2$. Yanıt 2: $()()$ ve $(())$.

$n = 3$. Yanıt 5: $()()()$, $()(())$, $(())()$, $(()())$ ve $((()))$

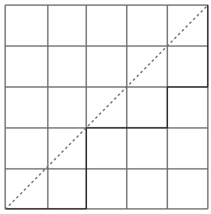
$n = 4$. Yanıt 14: $()()()()$, $()()(())$, $()(())()$, $()(()())$, $()((()))$, $(())()()$,$(())(())$, $(()())()$, $((()))()$, $(()()())$, $(()(()))$, $((())())$, $((()()))$, $(((())))$.

Bu problem yukarıda verdiğimiz çarpma sayılarını bulma problemine denktir, yani biri çözüldü mü diğeri de çözülür. Bunu görmek için, herhangi bir çarpmayı alıp, önce en sona bir kapatan parantez koyalım; sonra, noktalar ve kapatan parantezler dışında her şeyi silelim; son olarak, noktaları açan parantezlerle değiştirelim. Bu işlem bize dengeli bir parantez gruplaması verecektir. Örnek olarak $(a \cdot b) \cdot c$ çarpımını alalım. Bunu, önce, $(a \cdot b) \cdot c)$ olarak yazalım. Harfleri ve açan parantezleri sildiğimizde $\cdot) \cdot)$ elde ederiz. Şimdi noktaları açık parantezlerle değiştirirsek $()()$ dengeli parantez grubunu elde ederiz. Bu işlemi geriye alıp dengeli parantezlerden sıralı bir çarpma bulabiliriz. Bu durumda dengeli parantezlerle çarpım sıraları arasında birebir bir eşleme olduğundan, iki problemin çözümleri birbirine eşittir.

Problem 3. Sıradağlar Problemi. Problem, n tane aşağı eğimli çizgi ve n tane yukarı eğimli çizgi kullanarak, zeminden başlayıp zeminde biten ve hep zeminin üstünde kalan kaç tane dağ sırası oluşturulabileceğini bulmak.



Problem 4. New York Adres Problemi. Şimdi de $n \times n$'lik bir ızgara üzerinde -ki bunu New York şehrinin sokak ve cadde haritası olarak düşünebilirsiniz- $(0, 0)$ noktasından başlayıp, hep sağa ve yukarı (ya da kuzeye ve doğuya) giderek (n, n) noktasında biten ve hep köşegenin altında kalan yolların sayısını bulmak istiyoruz. Aşağıda böyle bir yola örnek görüyoruz.

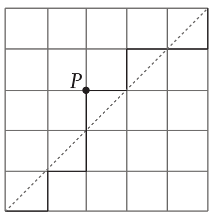


Bu sorunun yukarıda verdiğimiz sıradağlar problemine denk olduğunu görmeye çalışın. Aynı şekilde bu problem dengeli parantezlerin ve çarpım sayılarının sayısını buldugumuz problemlere de denktir. Mesela sağa bir birim hareket “(” ile ve yukarı bir birim hareket “)” ile değiştirilirse, yukarıdaki gibi bir yol dengeli bir paranteze denk gelir.

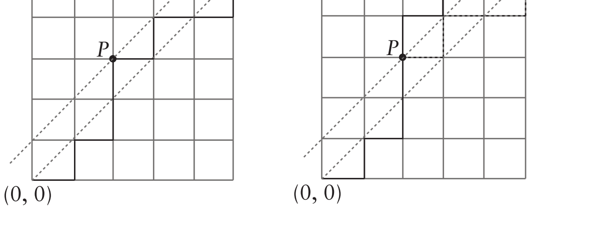
Problemlerin Çözümü. Verdiğimiz bütün problemler birbirine denk olduğuna göre, bunların hepsini çözmek için birine çözüm bulmak yeterlidir.

En son problemi ele alalım.

$n \times n$'lik bir ızgara üzerinde $(0,0)$'dan (n,n)'ye giden ve köşegenin altında kalan kuzeydoğu yollarını sayalım. Bunun için, $(0,0)$ noktasından başlayıp hep kuzeydoğuya giden ve (n,n) noktasında biten yolların sayısını bulup, bunlardan köşegeni aşanların sayısını çıkaralım. Köşegeni aşan yollara “kötü yol” diyelim. Bu kötü yolların her biri köşegenin bir noktada üstüne çıkarlar. Aşağıdaki şekilde bir kötü yol örneği görüyorsunuz.



Bu kötü yolun köşegenin üstüne çıktığı ilk noktayı P ile gösterelim ve, bir sonraki şekilde gösterildiği gibi, yolu P'den itibaren P'den geçen köşegene göre yansıtalım.



P noktası, kötü yolun köşegenin üstüne çıktığı ilk nokta olduğundan, P noktasına gelene kadar doğuya atılan adımların sayısı k ise, o noktaya gelene kadar kuzeye atılan adımların sayısı $k+1$ olacaktır. Toplam n tane doğuya ve n tane kuzeye adım olduğundan, geri kalan adımların $n-k$ tanesi doğuya ve $n-k-1$ tanesi kuzeye olmalıdır. Ama yolumuzu P noktasından itibaren yansıttığımızdan, yansıtılmış yolda toplam

$$k + (n-k-1) = n-1$$

doğuya adım ve

$$(k+1) + (n-k) = n+1$$

kuzeye adım olacaktır. Böylece her yansıtılmış yol $(n-1, n+1)$ noktasında bitecektir.

Her kötü yol, bu şekilde, $(0,0)$ noktasında başlayıp

$$(n-1, n+1)$$

noktasında biten bir yola dönüşür. Aynı şekilde, bu tip her yol bir kötü yola denk gelir. Demek ki kötü yolların sayısı $(0,0)$ noktasında başlayıp

$$(n-1, n+1)$$

noktasında biten yolların sayısına eşittir. Bu tip yollarda $n-1$ tane doğuya adım, $n+1$ tane de kuzeye adım olduğundan bu sayı,

$$\binom{2n}{n-1}$$

dir. $(0,0)$ noktasından başlayıp, hep doğuya ve kuzeye giderek (n,n) noktasında biten bütün yolların sayısı ise,

$$\binom{2n}{n}$$

dir. Bu durumda bizim istediğimiz sayı,

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

dir. Bu sayıya ***Catalan sayısı*** denilir ve genelde C_n simgesiyle gösterilir (bkz. Teorem 27.1).

Buradan da $n+1$ sayısının $\binom{2n}{n}$ sayısını böldüğü çıkar ki hiç de bariz bir sonuç değildir.

Catalan sayıları çok çabuk büyürler. İlk Catalan sayıları şöyledir: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1.430, 4.862, 16.796, 58.786, 208.012, 742.900, 2.674.440, 9.694.845, 35.357.670, 129.644.790, 477.638.700, 1.767.263.190, 6.564.120.420, 24.466.267.020, 91.482.563.640, 343.059.613.650, 1.289.904.147.324, ...

10. Nesneleri Farklı Biçimlerde Boyamak

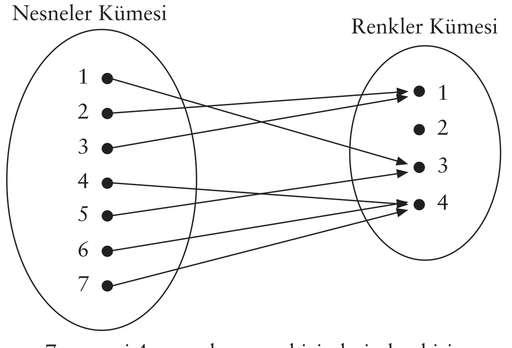
Elimizde 1'den n'ye kadar numaralandırılmış n tane nesne var. Bu n nesneyi r farklı renge kaç farklı biçimde boyayabilirsiniz?

Her nesne r renge boyanabileceğine göre, n nesneyi tam

$$r \times \ldots \times r = r^n$$

farklı biçimde r renge boyayabiliriz.

Yukarıda bulduğumuz sayı aslında n elemanlı nesneler kümesinden r elemanlı renkler kümesine giden fonksiyon sayısıdır.



7 nesneyi 4 renge boyama biçimlerinden biri.
Her fonksiyon ayrı bir boyama biçimi verir.

Şimdi, kaç tane nesnenin hangi renge boyanacağını belirleyelim. Örneğin, nesne sayımız 20, renk sayımız da 4 (diyelim, sarı, kırmızı, mavi, yeşil) olsun. 5 nesne sarıya, 7 nesne kırmızıya, 6 nesne maviye ve geri kalan 2 nesne yeşile boyanacak. Böyle bir boyamayı kaç farklı biçimde yapabiliriz? Önce sarıya boyanacak nesneleri seçelim. 20 nesne arasından 5 nesne seçmeliyiz. Bu seçimi,

$$\binom{20}{5}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Geri kalan 15 nesne arasından kırmızıya boyanacak 7 nesneyi seçmeliyiz. Bu seçimi de,

$$\binom{15}{7}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Geri kalan 8 nesnenin 6'sı maviye boyanacak. Bunu da,

$$\binom{8}{6}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Geri kalan 2 nesne de mecburen yeşile boyanmalı. Demek ki, 20 nesnenin 5'ini sarıya, 7'sini kırmızıya, 6'sını sarıya, 2'sini yeşile toplam

$$\binom{20}{5} \times \binom{15}{7} \times \binom{8}{6} = \frac{20!}{5!15!} \times \frac{15!}{7!8!} \times \frac{8!}{6!2!}$$

farklı biçimde boyayabiliriz. 15! ve 8!'leri sadeleştirirsek, boyama sayısının

$$\frac{20!}{5!7!6!2!}$$

olduğunu görürüz.

Yukarıda yaptığımızı genelleştirelim. n nesnenin k_1 tanesini 1 rengine, k_2 tanesini 2 rengine, ..., k_r tanesini r rengine kaç farklı biçimde boyayabiliriz? Tabii $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ olmalı, ki boyanmamış nesne kalmasın.

Önce n nesne arasından 1 rengine boyanacak k_1 nesneyi seçelim. Bu seçimi,

$$\binom{n}{k_1}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Geriye $n - k_1$ nesnemiz kaldı. Bu $n - k_1$ nesneden 2 rengine boyanacak k_2 tane nesne seçmeliyiz. Bu seçimi,

$$\binom{n-k_1}{k_2}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Geriye $n - k_1 - k_2$ nesnemiz kaldı. Bu

$$n - k_1 - k_2$$

nesneden 3 rengine boyanacak k_3 tane nesne seçmeliyiz. Bu seçimi

$$\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Buna böylece devam edelim. Elde ettiğimiz sayıları çarparsak sorumuzun yanıtını buluruz: n nesnenin k_1 tanesini 1 rengine, k_2 tanesini 2 rengine, ..., k_r tanesini r rengine

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{r-1}}{k_r}$$

farklı biçimde boyayabiliriz. Bu sayıyı açalım:

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdots\frac{(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}{k_r!(n-k_1-k_2-\cdots-k_r)!}$$

Ve sadeleştirelim: Geriye sadece

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\cdots k_r!}$$

kalır. Bu arada

$$k_1+k_2+\cdots+k_r=n$$

eşitliğini unutmayalım. Madem $k_1+k_2+\cdots+k_r=n$, yukarıdaki

$$\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\cdots k_r!}$$

sayısı,

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$$

olarak yazılır:

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}=\frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}.$$

Bulduğumuzu teorem adı altında yazalım:

Teorem 10.1. *n tane nesnemiz ve r tane rengimiz olsun. $k_1, k_2, \ldots, k_r$ doğal sayılarının toplamı n olsun. O zaman, n nesnenin k_1 tanesini 1 rengine, k_2 tanesini 2 rengine, ..., k_r tanesini r rengine*

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}=\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}$$

farklı biçimde boyayabiliriz. □

Eğer $r=2$ alırsak, $k_1+k_2=n$ olduğundan,

$$\binom{n}{k_1,k_2}=\frac{n!}{k_1!k_2!}=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}=\binom{n}{k_1}$$

buluruz, yani bildiğimiz n'nin k_1'li kombinasyonunu. Demek ki tanımladığımız sayılar binom katsayılarının genelleşmiş bir hali.

Eğer k_i'lerden biri negatifse ya da toplamları n etmiyorsa,

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

sayısını 0 olarak tanımlayalım (ne de olsa bu durumlarda istenilen türden bir boyama yoktur.) Bu anlaşma bize kolaylıklar sağlayacak.

Yukarıdaki teoremin değişik yorumlarını yapacağız ileride. Önce birkaç basit eşitlik kanıtlayalım.

Her şeyden önce, k'ların sonuna (ya da herhangi bir yerine) sonucu değiştirmeden bir 0 ekleyebileceğimizin farkına varalım:

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r, 0}$$

Tanımdan da belli ki k_i sayılarının yerlerini değiştirirsek,

$$\binom{n}{k_1, \ldots k_r}$$

değerleri değişmiyor. Örneğin,

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3, k_4} = \binom{n}{k_2, k_4, k_3, k_1}.$$

n tane nesne r tane renge toplam r^n değişik biçimde boyanacağından (n elemanlı nesneler kümesinden r elemanlı renkler kümesine r^n tane fonksiyon vardır),

(1) $$\sum_{k_1+\cdots+k_r=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = r^n$$

eşitliğini elde ederiz.

Eğer $k_1 + \cdots + k_r \neq n$ ise

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = 0$$

olarak tanımlandığından, yukarıdaki eşitliği,

$$\sum_{k_1,\ldots,k_r} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = r^n$$

olarak daha sade bir biçimde yazabiliriz.

Bu sayılarla (Pascal özdeşliğine benzeyen) yeni bir eşitlik daha elde edeceğiz. Nesnelerimizin numaralandırıldığını aklımızda tutalım. Gene n nesnenin k_1 tanesini 1 rengine, k_2 tanesini 2 rengine, ..., k_r tanesini r rengine boyayacağız ama bu sefer 1 numaralı nesnenin boyandığı rengi dikkate alacağız. 1 numaralı nesnenin 1 rengine boyandığı kaç tane boyama vardır? 1 numaralı nesneyi çıkarırsak geriye $n-1$ tane nesne kalır. Bu $n-1$ nesnenin k_1-1 tanesini 1 rengine, k_2 tanesini 2 rengine, ..., k_r tanesini r rengine boyayacağız. Demek ki bu boyama çeşitlerinden,

$$\binom{n-1}{k_1-1, k_2, \ldots, k_r}$$

tane var. Şimdi 1 numaralı nesnenin 2 rengine boyandığı kaç tane boyama olduğunu bulalım. Geri kalan $n-1$ nesnenin k_1 tanesini 1 rengine, k_2-1 tanesini 2 rengine, k_3 tanesini 3 rengine, ..., k_r tanesini r rengine boyayacağız. Demek ki bu boyama çeşitlerinden,

$$\binom{n-1}{k_1, k_2-1, k_3, \ldots, k_r}$$

tane var. Bu böyle devam eder. 1 numaralı nesne mutlaka bir renge boyanacağından,

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

sayısı, $i = 1, \ldots, r$ için,

$$\binom{n-1}{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_r}$$

sayılarının toplamıdır. Yani

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_r}$$

eşitliği geçerlidir. Örneğin, $n = 10$, $r = 3$, $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$ için,

$$\binom{10}{5,3,2} = \binom{9}{4,3,2} + \binom{9}{5,2,2} + \binom{9}{5,3,1}$$

eşitliğini buluruz.

Bu sonucu yazalım, gerekebilir:

Sonuç 10.2. *Eğer $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ ise*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_r}$$

olur. □

Şimdi,

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

sayısının başka yorumlarını yapalım.

Teorem 10.3. *Eğer $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ ise n tane numaralandırılmış nesne r tane numaralandırılmış kutuya, birinci kutuda k_1 tane, ikinci kutuda k_2 tane, ..., r'inci kutuda k_r tane olacak biçimde, tam*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

farklı şekilde yerleştirilebilir.

Kanıt: Kutuların numaralarını içine konan nesnelerin rengi olarak yorumlayın. □

Teorem 10.4. *Eğer $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ ise, n elemanlı bir kümeden r elemanlı $\{y_1, \ldots, y_r\}$ kümesine, her $i = 1, \ldots, r$ için, y_i'nin önimgesinde k_i tane eleman olacak biçimde tam*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

tane fonksiyon vardır.

Kanıt: Tanım kümesindeki elemanları boyanacak nesneler olarak, değer kümesindeki elemanları renkler olarak, bu nesnelerin imgelerini de nesnenin rengi olarak algılayın. □

Binom teoremini genelleştirelim:

Teorem 10.5. [**Mültinom Açılımı**] *n ve k birer doğal sayı olsun. O zaman,*

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_r=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: n tane $(x_1 + \cdots + x_r)$ ifadesini yanyana yazıp çarpacağız:

$$(x_1 + \cdots + x_r) \cdots (x_1 + \cdots + x_r).$$

Bu çarpımı sayıların dağılma özelliğini kullanarak hesaplarız. Her ifadeden x'lerden birini seçip çarparız. Kaç farklı biçimde

$$x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$$

terimini elde ederiz? Yukarıdaki parantez içinde gruplaşmış ifadeleri nesne olarak görelim. n tane nesnemiz var. Her nesneden (parantezden) seçilen x, o nesnenin rengi olsun. Örneğin birinci parantezden x_3 seçilmişse, bu, birinci nesne 3 numaralı renge boyanmış anlamına gelsin. Çarpımda

$$x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$$

ifadesinin elde edilmesi için, n tane parantezin k_1 tanesinden x_1, k_2 tanesinden x_2, ..., k_r tanesinden x_r seçmek gerekir; bir başka deyişle, n tane nesnenin toplam k_1 tanesi 1 rengine, k_2 tanesi 2 rengine, ..., k_r tanesi r rengine boyanmalıdır. Bunu da

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

farklı biçimde yapabileceğimizi biliyoruz. Demek ki $x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}$ ifadesinin katsayısı

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

olmalı. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Yukarıdaki bütün x_i'leri 1 alırsak birkaç sayfa önce kanıtlanan (1) eşitliğinin yeni bir kanıtını elde ederiz:

Sonuç 10.6. *n ve k birer doğal sayı olsun. O zaman,*

$$r^n = \sum_{k_1+\cdots+k_r=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

olur. □

Örnekler

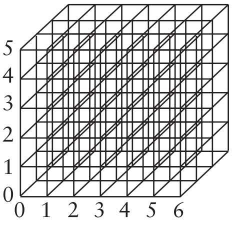
10.1. *A harfini 20 defa, B harfini 40 defa, C harfini 25 defa, D harfini 15 defa kullanarak yazılmış toplam 100 harflik anlamlı ya da anlamsız kaç sözcük vardır?*

Yanıt: Sıraya dizilmiş 100 haneyi A, B, C, D harflerine boyayacağız! Her bir harfi (rengi), sırasıyla, 20, 40, 25, 15 defa kullanacağız. Demek ki yanıt,

$$\binom{100}{20, 40, 25, 15}$$

olur.

10.2. *Üç boyutlu bir ızgarayı temsil eden aşağıdaki resimde $(0,0,0)$ noktasından $(6,5,3)$ noktasına giden kaç tane en kısa yol vardır?*



Yanıt: Toplam

$$6 + 5 + 3 = 14$$

hamle yapacağız. Bunların 6'sı sağa, 5'i yukarı, 3'ü derine gidecek. Hamleleri S (sağa), Y (yukarı), D (derine) olmak üzere sıraya dizelim. Demek ki içinde 6 tane S, 5 tane Y, 3 tane D olan 14 harfli sözcükleri bulmalıyız. Bunların da sayısı,

$$\binom{14}{6,5,3} = \frac{14!}{6!5!3!}$$

olur. $\square$

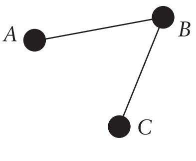
11. Çizgeler ve Ağaçlar

11.1 Tanım

Evren anlayamayacağımız kadar karmaşık ve çetrefillidir. Her an, çok azını algıladığımız, birçoğunu algılayamadığımız, algılasak da farkına varmadığımız, hatta algılamak bile istemediğimiz, dahası, algılasak ve algıladığımızın farkına varsak da o algıladıklarımızla ne yapacağımızı bilemediğimiz milyonlarca, milyarlarca, belki de sonsuz sayıda veriyle karşı karşıyayız. Varolabilmek için, anlayamayacağımız kadar karmaşık olan bu evreni bir biçimde biraz olsun anlamaya çalışmalıyız. Bunun için de birçok veriyi yoksaymak ya da değiştirmek, yani yalan söylemek zorundayız. Yalan söylemenin en yalın biçimlerinden biri, varlıklar arasındaki ikili bir ilişkiyi bir "çizge" biçiminde göstermektir.

Sözgelimi insanlar arasındaki tanışıklık ilişkisini ele alalım. Yakından ya da uzaktan tanımak, "kanka" olmak, gözü ısırmak, şöyle böyle tanımak, içtiği su ayrı gitmemek, can ciğer olmak, adını duymak, eş dost olmak, sıkı fıkı olmak, gıyaben ya da ailece, çocukluktan, askerlikten, cezaevinden ya da yolculuktan tanışmak... Binbir türlü tanışıklık ilişkisi vardır. Hiçbir tanışıklık hiçbir tanışıklığa benzemediği gibi, her tanışıklık ilişkisi her an değişir.

Tanışıklığı derecelendirmek de mümkün değildir. Her şeye bir not vermeye alıştırılmışız belki ama verilen o not çoğu kez aldatıcıdır. Güzelliğe, dostluğa, sevgiye, tanışıklığa not verilmez örneğin.



Doğru olsun ya da olmasın, biz tanışıklığa bir not verelim. İki kişi **birbirini** ya tanısın ya da tanımasın. Bunun ortası, "eh işte"si olmasın. Yani ya hep ya hiç! Ya sıfır ya bir! Ya herro ya merro!

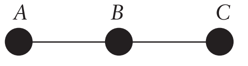
Daha fazla yalan söylemek bir hayli güç olmalı!

Barış, Ahmet ve Canan'ı tanıyorsa, ama Ahmet'le Canan birbirini tanımıyorsa, bu durumu yukarıdaki gibi bir şekille gösterebiliriz. Bu şekilde noktalar insanları, noktaların arasındaki çizgiler de tanışıklık ilişkisini simgeler.

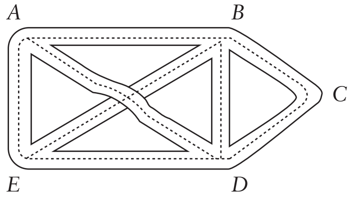
Ne Ahmet ne Barış ne de Canan birer noktadır. Aralarındaki tanışıklık da bir çizgi değildir. Elbette! Ama biz öyle gösterdik... Anlaşılamayacak kadar karmaşık olan insanı ve aralarındaki tanışıklık ilişkisini yukarıdaki basit şekille gösterdik. Birçok veriyi yoksayarak... Yani yalan söyleyerek...

Berlin'le Antalya ve Chicago arasında uçak seferi varsa, ama Antalya'yla Chicago arasında uçak seferi yoksa, bu durumu (örneğin şehirler arasındaki mesafeyi yoksayarak), aynen yukarıdaki gibi gösterebiliriz. Burada noktalar şehirleri, noktaların arasındaki çizgiler de "uçak seferi var" ilişkisini simgeler.

Daha sade olmak istiyorsak, yukarıdaki durumu, aşağıdaki gibi de gösterebiliriz.



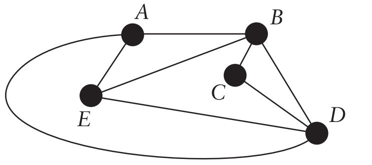
Bir de aşağıdaki yol haritasına göz atalım.



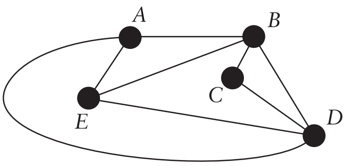
Bu haritayı noktalar ve çizgiler kullanarak, belki biraz daha az estetik ama çok daha kolay anlaşılır biçimde aşağıdaki ilk çizimdeki çizge gibi gösterebiliriz.

Bir ***çizge*** (ya da ***graf***) işte yukarıda ve aşağıda örneklerini verdiğimiz gibi bir şekildir. Nokta sayısı çok çok artabilir, sonsuz bile olabilir. Bazı noktalar arasına "ilişki var" anlamına bir çizgi çekilir. Çizgilerin boyu bosu, şekli şemali önemli değildir, çizgilerin sadece varlıkları yoklukları önemlidir. Çizgi sadece ve sadece iki nokta arasında bir ilişki olduğunu simgeler. Noktaların konumu da önemli değildir. Çizgiler istenmedik bir biçimde kesişebilir de. Örneğin, yukarıdaki haritada (çizgede) EB ve AD çizgileri (yolları) kesişiyor, ama kesiştikleri yerde çizgenin bir noktası yok.

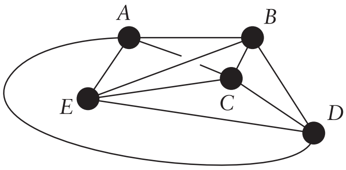
Bu çizgeyi yandaki gibi çizgilerin kesişmediği bir şekille de gösterebilirdik.



Eğer C'yle A ve E arasında da birer çizgi olsaydı, istediğimiz kadar deneyelim, çizgemizi, kesişmemesi gereken çizgilerin kesişmeyeceği biçimde çizemezdik. İstenmedik kesişimlerin olmayacağı biçimde düzleme çizilebilen çizgelere ***düzlemsel çizge*** denir.

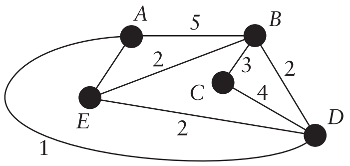


Öte yandan sonlu her çizge üç boyutlu (içinde yaşadığımız) uzaya, kesişmemesi gereken çizgilerin kesişmeyeceği biçimde çizilebilir. Örneğin yukarıdaki çizgeye AC ve CE çizgilerini üç boyutta kesişmeyecek biçimde ekleyebiliriz.

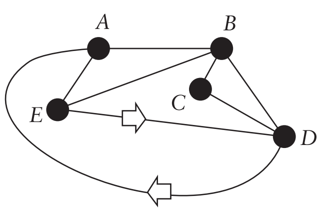


İki boyutta çizmek daha kolay olduğundan, çizgelerimizi iki boyutta çizeceğiz. Dolayısıyla kimi zaman çizgilerimiz istemediğimiz halde kesişecek.

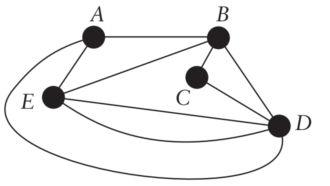
Çizgelerimizde şehirler arası mesafe, yolun biçimi, irtifa gibi bilgiler kayboldu, sadece şehirler arasında bir yolun olup olmadığı bilgisi kaldı. Mesafelerin varlığı çok çok (ama gerçekten çok çok) önemliyse, yani vazgeçilmezse, illa da olması gerekiyorsa, örneğin bir yol haritası çiziyorsak, çizgilerin üstüne mesafeyi bildiren bir sayı yazabiliriz. Ama yazmasak daha iyi olur...



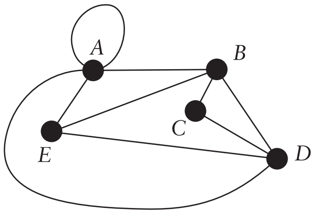
Ya da, örneğin çizgiler yolları simgeliyorsa, trafiğin tek yön olduğu yollara (yani çizgilere) aşağıdaki şekildeki gibi oklar koyabiliriz. Ama koymasak daha iyi olur... (Her çizgisinin yönlendirildiği çizgelere ***yönlendirilmiş çizge*** adı verilir.



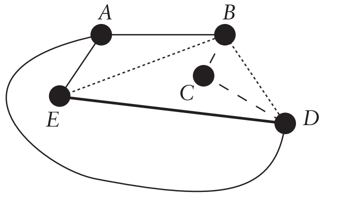
Kimi zaman da iki şehir arasında (sözgelimi E'yle D arasında) iki değişik yol olabilir, o zaman iki nokta arasında aşağıdaki şekildeki gibi birkaç çizgi birden olabilir. Ama olmasa daha iyi olur...



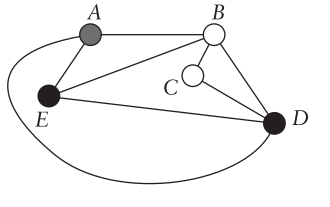
Anlaşılmaz bir nedenden A şehrinden gene A şehrine giden ve başka bir şehirden geçmeyen bir yol olabilir. Ama böyle gereksiz yollar (tekdöngüler) olmasa daha iyi olur...



Bir nedenle, noktalar arasındaki çizgileri aşağıdaki şekildeki gibi farklı renklere boyamak zorunda kalabiliriz... Yani noktalar arasındaki çizgilerin türleri olabilir (otoyol, patika, sokak, cadde, bulvar...) Ama tek tür çizgi olsa daha iyi olur...

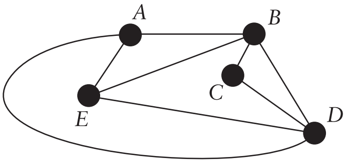


Bir başka nedenle, aşağıdaki şekildeki gibi noktaları renklere boyamak zorunda kalabiliriz, örneğin, illeri ilçelerden, ilçeleri kasabalardan, kasabaları köylerden ayırmak zorunda kalabiliriz. Ama böyle bir zorunluluğun olmaması her şeyi daha basitleştirir.



Bu kitapta ele alacağımız çizgelerde genellikle iki nokta arasında birden fazla çizgi olmayacak, bir noktadan gene kendisine giden bir çizgi olmayacak, çizgilerin yönü, kalınlığı, rengi, kokusu olmayacak, çizgilere bir sayı iliştirilmiş olmayacak, noktaları çeşitli sınıflara ayıran yapay bir özellik olmayacak... Yani daha çok en basit çizgelerden sözedeceğiz. Bu tür çizgelere ***yalın çizge*** diyelim. Bundan böyle "yalın çizge" yerine ***çizge*** terimini kullanacağız. Gerekirse renklendirilmiş, yönlendirilmiş, derecelendirilmiş, numaralandırılmış, çok çizgili çizgelerden sözederiz, ki bazen gerekecek.

Çizgenin Matematiksel Tanımı. Adına G diyeceğimiz ve şeklini aşağıda tekrarladığımız çizgeye geri dönelim. Daha önce, G, matematiksel olarak değil, görsel olarak tanımlanmıştı. Şimdi G çizgesinin matematiksel tanımını bulacağız.



A, B, C, D, E noktalarına çizgenin ***noktaları*** ya da ***köşeleri*** denir. G çizgesinin noktalar kümesi matematikte $V(G)$ olarak gösterilir. Demek ki örneğimizde,

$$V(G) = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E\}.$$

İki nokta arasındaki çizgilere ***bağıntı*** ya da ***kenar*** denir. Her kenarı iki noktalı bir küme olarak gösterebiliriz. Örneğimiz olan G çizgesinin kenarları şunlardır:

$$\{A,B\},\ \{A,D\},\ \{A,E\},\ \{B,C\},\ \{B,D\},\ \{B,E\},\ \{C,D\},\ \{D,E\}.$$

G'nin kenarlar kümesi matematikte $E(G)$ olarak gösterilir. Demek ki,

$$E(G) = \{\{A,B\},\ \{A,D\},\ \{A,E\},\ \{B,C\},\ \{B,D\},\ \{B,E\},\ \{C,D\},\ \{D,E\}\}.$$

Şimdi artık G çizgesini $(V(G),\ E(G))$ ikilisi olarak gösterebiliriz, ve bu gösterim bir çizgenin matematiksel tanımının nasıl olması gerektiğini bize fısıldar.

Matematiksel anlamda bir ***çizge*** (daha doğrusu yalın bir çizge), bir V kümesiyle V'nin iki elemanlı altkümelerinden oluşan bir E kümesinden oluşur. V'nin elemanlarına ***nokta*** ya da ***köşe***, E'nin elemanlarına ***bağıntı*** ya da ***kenar*** denir. Bir kenarın iki noktasına ***komşu noktalar*** denir. Bir noktanın kenar sayısına o noktanın ***derecesi*** adı verilir. Yukarıdaki G çizgesinde A ve E noktalarının derecesi 3, B ve D noktalarının derecesi 4, C noktasının derecesi de 2'dir.

Eğer

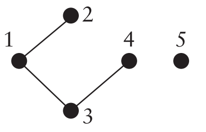
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ve

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$$

ise, (V, E) çizgesini aşağıdaki şekildeki gibi görselleştirebiliriz. Bu çizge bağlantılı olmadığından (birbiriyle bağlantısı olmayan iki parçadan oluşur), bu çizge

bağlantılı çizge değildir, iki ayrı parçadan oluşmuştur, birbiriyle bağlantılı olan $\{1, 2, 3, 4\}$ parçası ve tek başına duran $\{5\}$ parçası. Bağlantılı olmak konusuna birazdan daha ayrıntılı değineceğiz.



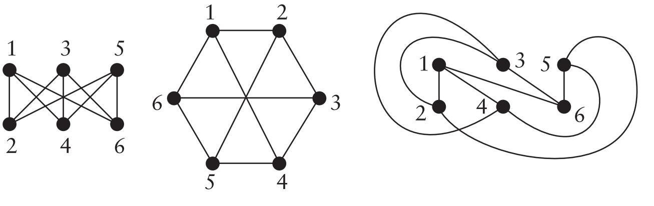
Çizgeyi nasıl görselleştirdiğimizin hiçbir önemi yoktur elbette. Noktaları istediğimiz gibi kâğıda yerleştirebiliriz. Aralarındaki kenarları istediğimiz gibi çizebiliriz, ister bir doğru parçası olarak, ister bir eğri olarak. Örneğin, eğer noktalar kümesi

$$V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

ise ve tek sayılarla çift sayılar arasında bir kenar varsa, yani kenarlar kümesi

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{5, 2\}, \{5, 4\}, \{5, 6\}\}$$

ise, (V, E) çizgesini aşağıdaki şekillerden herhangi biri olarak görselleştirebiliriz:



Çizgeleri yukarıdaki gibi görsel olarak ifade etmenin büyük avantajları olsa da, nokta sayısı çok olan çizgeleri görsel olarak ifade etmek kolay olmayabilir.

Uç noktaları A ve B olan bir kenarı $\{A, B\}$ diye yazacağımıza kısaca AB olarak yazarsak yazılımımız sadeleşir. Elbette, bu yazılımla, $AB = BA$ eşitliği geçerlidir.

Verdiğimiz çizge tanımının sadece yalın çizgeler için geçerli olduğunu unutmayın. Örneğin A ve B noktaları arasında iki ayrı kenarın olduğu ya da kenarların yönlendirilmiş olduğu bir çizgede bir kenarı $\{A, B\}$ olarak gösteremezdik.

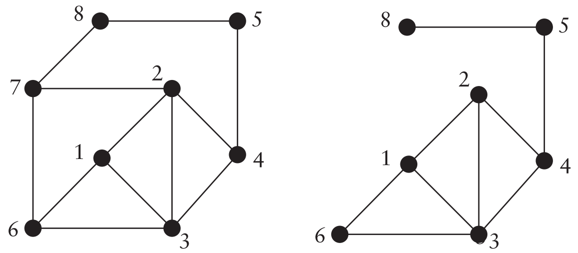
Bu altbölümü basit bir olguyla bitirelim.

Önsav 11.1. *Sonlu bir çizgenin noktalarının derecelerinin toplamı bir çift sayıdır.*

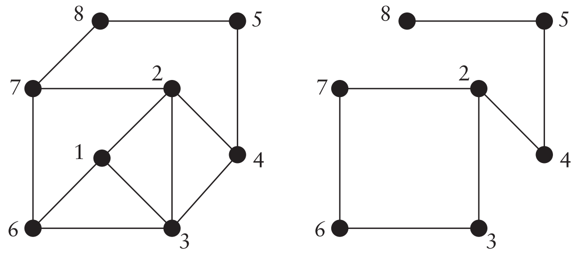
Kanıt: P noktasının derecesini $d(P)$ ile gösterelim. Her kenar iki noktayı birleştirdiğinden, her kenar, noktaların derecelerinin toplamına 2 katar. Demek ki $d(P)$'lerin toplamı 2 defa kenar sayısına eşittir, yani bir çift sayıdır. □

11.2 Altçizge ve Bağlantılı Bileşenler

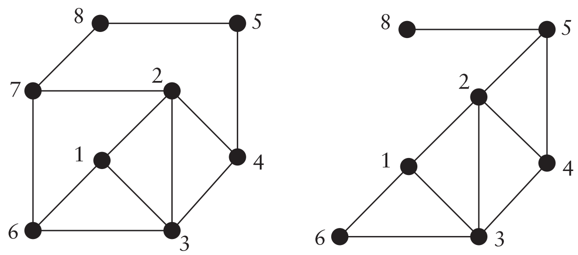
Altçizge. Matematik literatüründe "altçizge" terimi iki farklı anlamda kullanılır. Bizim kullanacağımız anlamda, bir G çizgesinin bir ***altçizgesi***, çizgenin bazı köşelerinden ve bu köşeler arasında G'de olan **tüm** kenarlardan oluşur. Bir örnek ve iki karşıörnek aşağıda.



Bir çizge ve bir altçizgesi



Sa¼daki soldakinin bir altçizgesi de¼ldir çünkü 7 ile 8 arasındaki kenar eksiktir.



Sa¼daki soldakinin bir altçizgesi de¼ldir çünkü 2 ile 5 arasında bir kenar belirmiştir.

Biçimsel tanım şöyle: Bir (W, H) çizgesinin bir (V, G) çizgesinin ***altçizgesi*** olması için $W \subseteq V$ olmalı ve her A, $B \in W$ için eğer $\{A, B\} \in G$ ise $\{A, B\} \in H$ olmalı.

Eğer A bir çizgenin bir köşesiyse, $\{\{A\}, \emptyset\}$ (yani sadece A noktası) çizgenin bir altçizgesidir. Eğer A ve B bir çizgenin komşu olmayan iki köşesiyse, yalnızca A ve B noktaları (aralarında bir kenar olmaksızın) çizgenin bir altçizgesidir; ama bu iki nokta arasına bir kenar koyarsak o zaman elde edilen çizge başlangıç çizgesinin bir altçizgesi olmaz.

Bir tamçizgenin tüm altçizgeleri tamçizge olmak zorundadırlar. İkiparça bir tamçizgenin tüm altçizgeleri de ikiparça tamçizge olmak zorundadırlar.

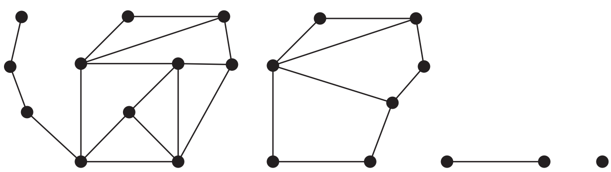
Bir çizgenin altçizgesi, altçizgenin noktaları tarafından belirlenmiştir. Dolayısıyla n noktalı bir altçizgenin 2^n tane altçizgesi vardır ve her altçizgeyi bir noktalar kümesi olarak algılayabiliriz.

Bağlantılı Bileşenler. Bir çizgede bir ***yol***, çizgenin kenarlarını izleyen bir yoldur. Daha açık olalım: Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n$ çizgenin (illa birbirinden değişik olmak zorunda olmayan) noktalarıysa ve her $i = 1, \ldots, n-1$ için A_i ve A_{i+1} noktaları komşuysa, o zaman

$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \text{ ya da } A_1 A_2 \ldots A_n$$

dizisine ***yol*** denir. Bu yolun "A_1 ile A_n arasında" ya da "A_1'den A_n'ye giden bir yol" olduğu ve ***uzunluğunun*** $n-1$ olduğu söylenir. Uzunluğu 0 olan bir yol tek bir noktadan oluşur. Uzunluğu 1 olan bir yol iki komşu kenardan oluşur. Eğer bir çizgenin her iki noktası arasında bir yol varsa, o çizgeye ***bağlantılı çizge*** denir. Her çizgenin bağlantılı en büyük altçizgeleri vardır. Bu altçizgelere çizgenin ***bağlantılı bileşenleri*** adı verilir. Bir çizgenin iki değişik bağlantılı bileşenlerinin noktalar kümesi ayrıktır elbet ve birinin noktasıyla bir diğerinin noktası komşu olamaz. Sezgisel olarak çok bariz olan bu olguları biçimsel olarak kanıtlayalım.

Teorem 11.2. *"Arasında bir yol olmak" ilişkisi çizgenin noktaları üzerine bir denklik ilişkisidir. Her denklik sınıfı, çizgenin bağlantılı en büyük altçizgesidir, yani bağlantılı bileşenidir. Ayrıca, çizgenin her noktası tek bir bağlantılı bileşenin noktasıdır.*



4 bağlantılı bileşkeden oluşan bir çizge

Kanıt: Eğer A çizgenin bir noktasıysa, (A), A'dan A'ya giden 0 uzunluğunda bir yoldur.

A'dan B'ye giden bir yol olsun. Eğer

$$(A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B),$$

A'dan B'ye giden bir yolsa,

$$(B = A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1 = A)$$

da bir yoldur ve B'den A'ya giden bir yoldur.

A'dan B'ye giden ve B'den C'ye giden birer yol olsun. Eğer

$$(A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B),$$

A'dan B'ye giden bir yolsa, ve

$$(B = B_1, B_2, \ldots, B_m = C),$$

B'den C'ye giden bir yolsa, o zaman,

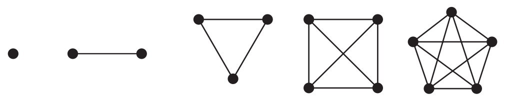
$$(A = A_1, A_2, \ldots, A_n = B = B_1, B_2, \ldots, B_m = C),$$

A'dan C'ye giden bir yoldur.

Demek ki ilişki gerçekten bir denklik ilişkisidir.

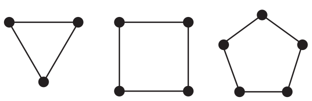
Her denklik sınıfının bağlantılı bir altçizge olduğu ve bağlantılı altçizgelerin en büyüğü olduğu belli.

Ünlü Çizgeler. K_n çizgesi, tüm kenarların varolduğu n noktalı çizgedir. Bunlara ***tamçizge*** denir. K_n çizgesinde her noktanın derecesi $n-1$'dir.



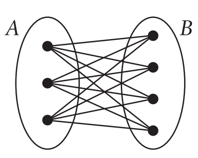
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

$n \geq 3$ için, C_n çizgesi, her noktaya tam iki kenar değen n noktalı bağlantılı bir çizgedir. Bunlara ***döngü*** denir. C_n çizgesinde her noktanın derecesi 2'dir.



C_3 C_4 C_5

$K_{n,m}$ çizgesi, noktaları n ve m elemanlı olmak üzere iki A ve B kümesine ayrılmış, A'daki her noktanın B'deki her noktaya bağlandığı, başka da kenarı olmayan çizgedir. $K_{n,m}$'ye ***iki parçalı*** ya da ***iki kümeli tamçizge*** denir.



$K_{3,4}$ çizgesi

Alıştırmalar

11.1. Üç doğru parçasıyla düzlemi 7 bölgeye ayırabilirsiniz. Bölgelerden her birinin bir ülke olduğunu düşünelim. Her bir bölgede başkenti simgeleyen bir şehir seçelim. Sınırdaş ülkelerin başkentlerini bir tren yoluyla bağlayalım. Böylece noktaları başkentler olan bir çizge elde ederiz. Bu çizgeyi çizin.

11.2. Aynı alıştırmayı dört veya daha fazla doğruyla yapın. n doğruyla düzlemi

$$\frac{n^2+n+2}{2}$$

bölgeye ayırabiliriz.

11.3. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. Çizgemizin noktaları X'in iki elemanlı altkümeleri olacak. Eğer iki noktanın kesişimi boşküme değilse, bu noktaları birleştirelim. Böylece bir çizge elde ederiz. Bu çizgeyi çizin.

11.4. 14 noktalı, 29 kenarlı bir çizgede AB, BC, CD, DA kenarlarının olduğu dört tane A, B, C, D noktasının mutlaka olması gerektiğini kanıtlayın.

11.3 Çizgelerin Önemi

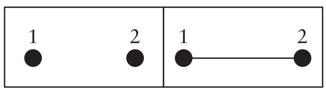
Çizgeler son derece önemlidir.

11.4 Çizge Sayısı

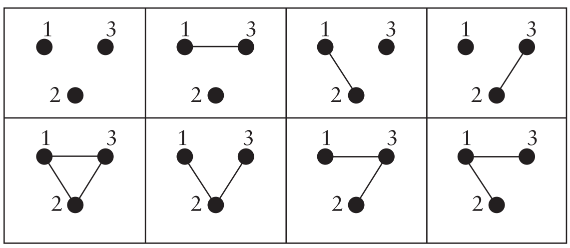
Bu altbölümde çizgeleri saymaya çalışacağız. Noktalarının kişiliği olan (yani her noktanın özel bir adı olduğu) çizgeleri saymak kolay olacak, ama noktaları birbirinden ayırdedilmeyen çizgeleri saymak zor olacak. Örneklerle başlayalım.

Bir Noktalı Çizgeler: Sadece bir tane var. İşte o çizge: ●

İki Noktalı Çizgeler: İki noktalı iki çizge var. İşte:



Üç Noktalı Çizgeler: Üç noktalı sekiz çizge var. İşte:



***n* Noktalı Çizge Sayısı.** Genel olarak n noktalı çizge sayısını bulalım. Noktalarımızı $1, 2, \ldots, n$ diye adlandıralım. Herhangi iki nokta arasında bir kenar olup olmadığına karar vereceğiz. Noktalar kümesi $\{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. Bu noktalar arasında

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

tane nokta çifti vardır. Her bir nokta çifti için "kenar var" ya da "kenar yok" yargısını vereceğiz. Yani $n(n-1)/2$ tane "evet" ya da "hayır" kararı vereceğiz. Demek ki n noktalı toplam

$$2^{n(n-1)/2}$$

tane çizge vardır. Örneğin $n = 3$ ise,

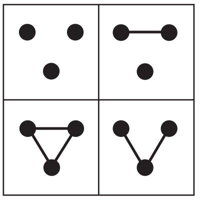
$$2^{3(3-1)/2} = 2^3 = 8$$

tane çizge vardır; yukarıda görüldüğü gibi. Eğer $n = 100$ ise, çizge sayısı

$$2^{100(100-1)/2} = 2^{4950}$$

olur; çok büyük bir sayı.

Üç Noktalı Adsız Çizgeler. Her birini teker teker yukarıda çizdiğimiz üç noktalı 8 çizgeye geri dönelim. Eğer bu 8 çizgenin noktalarının adlarını silersek geriye sadece 4 çizge kalır.

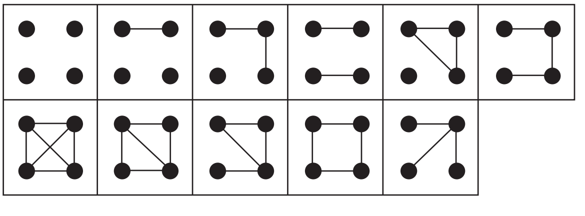


Noktaları adlandırılmış çizge sayısı (örneğimizde 8), noktaları adlandırılmamış çizge sayısından (örneğimizde 4) daha fazla (haliyle...)

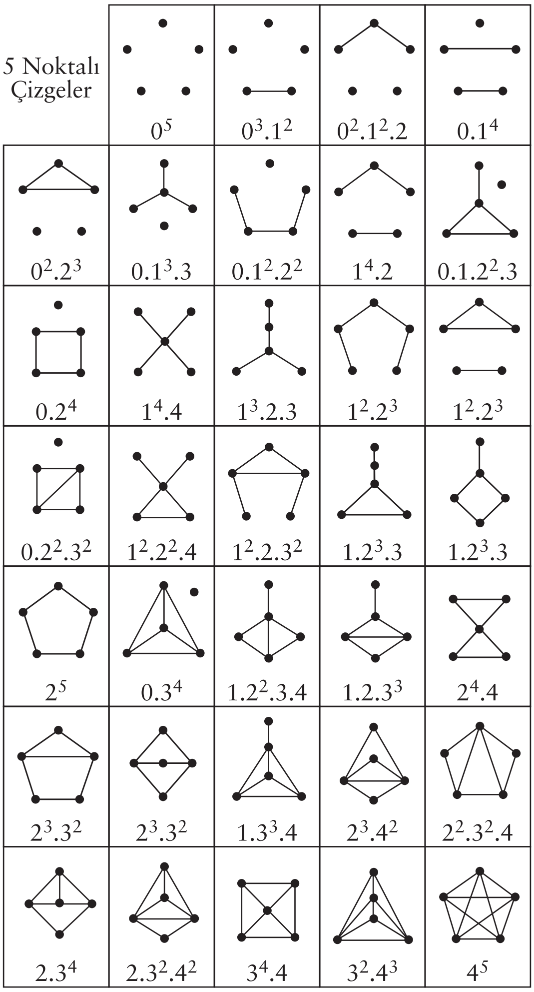
Dört Noktalı Adsız Çizgeler. Şimdi $n = 4$ olsun. $\binom{4}{2} = 6$ olduğundan, noktaları adlandırılmış çizge sayısı

$$2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$$

olur. Hepsini çizmeyeceğiz, hatta hiçbirini çizmeyeceğiz, meraklısı çizsin! Noktaların adlarını silelim. Çizge sayısı gene azalır, 11'e iner. İşte o 11 çizge:



Beş Noktalı Adsız Çizgeler. Eğer $n = 5$ ise, noktaları adlandırılmamış 34 çizge vardır. Bu 34 çizgeyi aşağıda bulacaksınız.



Yukarıdaki şekildeki çizgelerin altındaki $2^2.3^2.4$ gibi kodları açıklayalım. Örneğin $2^2.3^2.4$ kodu, 2 dereceli 2 nokta olduğunu, 3 dereceli 2 nokta olduğunu ve 4 dereceli 1 nokta olduğunu söylüyor. Bu çizgede 1 dereceli nokta yok. Çizgeler bu kodlara göre sıralanmışlar. En başta 0^5, yani 00000 kodlu çizge, sonra $0^3 1^2$, yani 00011 kodlu çizge... En sonda da 4^5, yani 44444 kodlu çizge...

Aynı koddan birkaç farklı çizge olabilir, örneğin $1^2.2^3$ kodlu iki farklı çizge var.

Veilmiş bir koddan bir çizgenin olup olmadığı, varsa kaç tane olduğu başlı başına ilginç bir problem olmalı. Örneğin 3^5 kodlu bir çizge olamaz çünkü böyle bir çizgede noktaların derecelerinin toplamı $3 \times 5 = 15$ olur ve 15 bir tek sayıdır (bkz. Önsav 11.1).

Noktaları adlandırılmış ağaçları saymak daha kolaydır. Bu konuya Bölüm 11.5'te değineceğiz.

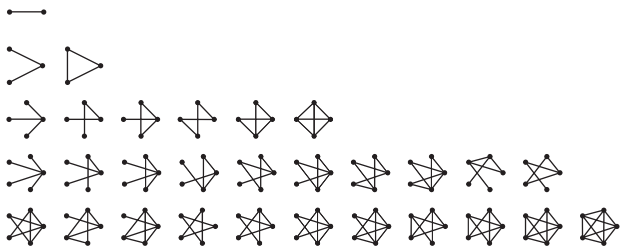
Az sayıda nokta için adsız çizge sayısı şöyle:

n	G_n = adsız n noktalı çizge sayısı
1	1
2	2
3	4
4	11
5	34
6	156
7	1044
8	12346
9	274668
10	12005168
11	1018997864
12	165091172592
13	50502031367952
14	29054155657235488
15	31426485969804308768
16	64001015704527557894928
17	245935864153532932683719776
18	1787577725145611700547878190848
19	24637809253125004524383007491432768
20	645490122795769841856164638490742749440
21	32220272899808983433502244253755283616097664
22	3070846483094144300637568517187105410586657814272
23	559924939699792080597976380819462179812276348458981632
24	195704906302078447922174862416726256004122075267063365754368
25	131331393569895519432161548405816890146389214706146483380458576384

Çeşitli kaynaklarda bulunan bu sayıların doğruluğunu kontrol etmedik! Sayıların korkunç bir hızla arttığı belli.

Noktaları adlandırılmamış çizge sayısını bulmak kolay değildir. Bu soru 1850 yıllarında ilk olarak Arthur Cayley tarafından sorulmuştur. Daha sonraları Cayley bu problemi belirli bir karbon atomuna sahip C_nH_{2n+2} alkalilerini sayma problemine uygulamıştır. (Herbirinin derecesi 4 olan n tane C noktası ve herbirinin derecesi 1 olan $2n+2$ tane H noktası olan kaç çizge vardır?)

Bağlantılı Çizge Sayısı. Her iki nokta arasında kenarlardan oluşan en az bir yolun bulunduğu çizgelere ***bağlantılı*** çizge denir. $n = 2, 3, 4, 5$ için bağlantılı çizgeler aşağıda:

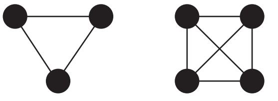


Bağlantılı çizge sayısı toplam çizge sayısından (yani G_n'den) daha azdır elbet, ama ne kadar daha azdır? n noktalı bağlantılı çizge sayısına T_n diyelim. Küçük n'ler için T_n sayısının değerini aşağıdaki tabloda bulacaksınız [RW, `http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/graphs.html`].

n	$T_n = n$ adsız noktalı bağlantılı çizge sayısı
1	1
2	1
3	2
4	6
5	21
6	112
7	853
8	11117
9	261080
10	11716571
11	1006700565
12	164059830476
13	50335907869219
14	29003487462848061
15	31397381142761241960
16	63969560113225176176277
17	245871831682084026519528568
18	1787331725248899088890200576580
19	24636021429399867655322650759681644
20	645465483198722799426731128794502283004
21	32219627385046589818232044119082157323436797
22	30708142621757297238955684543991868295095501717f55

Örnekler

11.5. **İkiparça Tamçizgelerin Kenar Sayısı.** n tane nokta alalım. Bu n noktayı iki kampa ayıralım. Bir kampta a, öbür kampta b tane nokta olsun. Demek ki $a + b = n$. Kamplara sırasıyla A ve B diyelim. A kampının noktalarının hepsini birbirine bağlayalım. B kampındaki noktaların da hepsini birbirine bağlayalım. Ama A kampındaki hiçbir noktayı B kampındaki bir noktaya bağlamayalım. Böylece bir çizge elde ederiz, birbirinden ayrık iki parçadan oluşan bir çizge... Örneğin $n = 7$, $a = 3$, $b = 4$ için aşağıdaki çizgeyi elde ederiz:



A B

n verilmişse, hangi a ve b için bu çizgenin kenar sayısı maksimumdur ve hangi a ve b için bu çizgenin kenar sayısı minimumdur?

Benzer soruları üç değişik kampa ayrılmış noktalar için yanıtlamaya çalışın.

11.6. Adlandırılmış n noktalı $2^{n(n-1)/2}$ tane çizge olduğunu gördük. Peki, n noktalı ve m kenarlı adlandırılmış kaç çizge vardır? Olası kenar sayımız $n(n-1)/2$. Bu olası $n(n-1)/2$ kenardan m tanesini seçmemiz gerekiyor. Demek ki n noktalı m kenarlı çizge sayısı

$$\binom{n(n-1)/2}{m}$$

olur.

n	$\approx T_n/G_n$
1	1
2	0,5
3	0,5
4	0,545455
5	0,617647
6	0,717949
7	0,817050
8	0,900454
9	0,950529
10	0,975961
11	0,987932
12	0,993753
13	0,996710
14	0,998256
15	0,999074
16	0,999509
17	0,999740
18	0,999862

Rastgele Çizgeler. Soldaki tabloda da görüldüğü gibi, T_n sayıları G_n'lerden çok çok küçük değil, hatta onlara oldukça yakın. T_n/G_n sayıları giderek 1'e daha çok yaklaşırlar ve hızla yaklaşırlar. Bir başka deyişle, rastgele sonlu bir çizge muhtemelen bağlantılıdır, yani n büyüdükçe, n noktalı bir çizgenin bağlantılı olma olasılığı artar.

Rastgele çizgeler son derece ilginç bir konudur. Örneğin, n arttıkça, n noktalı rastgele bir çizgenin düzlemsel olma olasılığı düşer, 0'a yakınsar.

Gene n arttıkça, bir noktadan herhangi bir başka noktaya tek bir noktadan geçerek ve kenarları takip ederek (yani iki adımda) gidebilirsiniz, çok büyük bir olasılıkla... Bir başka deyişle rastgele bir çizgenin çapı muhtemelen 2'dir.

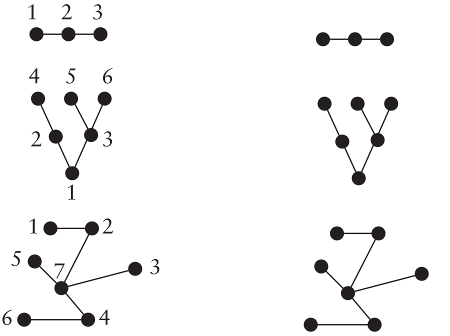
Bunlar, son yılların canlı bir araştırma konusu olan "rastgele çizgeler kuramı"na girer. Bu konuya bir başka kitabımızda değiniriz.

Kaynakça:

[RW] Ronald C. Read ve Robin J. Wilson, **An Atlas of Graphs**, Oxford Science Publications 1998.

11.5 Adlandırılmış Ağaç Sayısı

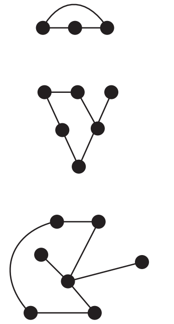
İçinde döngü olmayan ve her noktasından her noktasına ulaşılabilen (yani bağlantılı) çizgelere ***ağaç*** denir. Aşağıda solda üç tane ***adlandırılmış ağaç*** görüyorsunuz. “Adlandırılmış” demekle ağacın noktalarının adları olduğunu söylemek istiyoruz. ***Yaftalı*** da diyebilirdik (bkz. [AZ]).



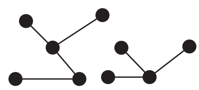
Adlandırılmış üç ağaç

Adlandırılmamış üç ağaç

Bu yazıda n noktalı adlandırılmış ağaçları sayacağız. Noktalarımızın adları $1, 2, \ldots, n$ olacak.

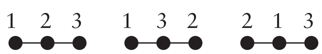


Ağaç olmayan üç çizge (döngüleri var)

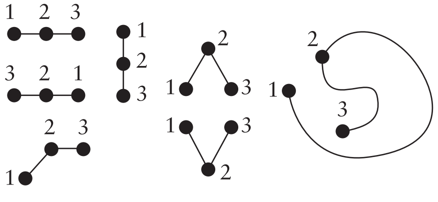


Bağlantılı olmadığı için ağaç olmayan, döngüsüz bir çizge; bunlara *orman* denir.

Adlandırılmış üç farklı 3 noktalı ağaç vardır:



Aşağıdaki ağaçların hepsi **aynı** adlandırılmış ağaç olarak addedilir:



Bunların hepsi aynı ağaçtır ve aynı biçimde adlandırılmışlardır.

Bir noktalı bir tek ağaç var elbette.

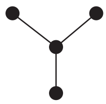
İki noktalı da tek bir ağaç var; ne de olsa iki nokta birbirleriyle bağlantılı olmak zorunda.

Üç noktalı ve adlandırılmış üç ağaç var. Yukarıda üçünü de göstermiştik.

Dört noktalı 16 tane adlandırılmış ağaç vardır. İşte bu 16 ağaç:

 türünden,
soldan sağa aşağıdaki gibi
adlandırılmış toplam
12 tane ağaç var:

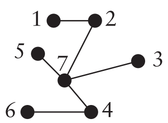
1234
1243
1324
1342
1423
1432
2134
2143
2314
2413
3124
4123

 türünden,
ortadaki nokta 1, 2, 3
ya da 4 olmak üzere
toplam 4 tane ağaç var.

Demek ki 4 noktalı toplam 12 + 4 = 16 tane ağaç var.

Beş noktalı 125 tane adlandırılmış ağaç vardır. Bunların tiplerini ve her tipten kaç tane olduğunu bulmayı okura bırakıyoruz.

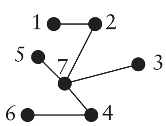
Adlandırılmış ağaçları birkaç değişik biçimde sayacağız. Önce ağaçları noktaların derecelerine göre sayacağız. Bir noktanın ***derecesi***, o noktanın bağlandığı nokta sayısıdır. Örneğin,



ağacında 7 noktasının derecesi 4'tür, 2 ve 4 noktalarının dereceleri 2'dir, 1, 3, 5 ve 6 noktalarının dereceleri 1'dir. Noktaları ve derecelerini altalta yazalım:

Nokta:	1	2	3	4	5	6	7
Derece:	1	2	1	2	1	1	4

Bu çizgenin ***derece tipinin*** $(1, 2, 1, 2, 1, 1, 4)$ olduğunu söyleyeceğiz.



derece tipi (1, 2, 1, 2, 1, 1, 4) olan adlandırılmış ağaç

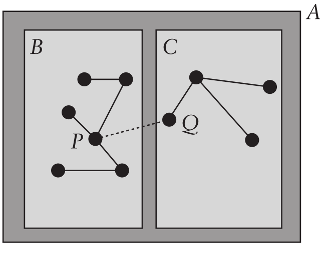
Her derece tipinden kaç tane n noktalı adlandırılmış ağaç olduğunu hesaplayıp bu sayıları toplayacağız ve sonuç n^{n-2} çıkacak.

Önce ağaçlar üstüne temel ve oldukça basit birkaç sonuç kanıtlayalım.

Önsav 11.3. a. *Bir ağaçta bir noktadan bir başka noktaya aynı kenardan iki kez geçmeyen tek bir yol vardır.*
b. *Bir ağaçtan bir kenar atarsak geriye iki ağaç kalır.*
c. *n noktalı bir ağaçta $n-1$ tane kenar vardır.*
d. *n noktalı bir ağacın noktalarının derecelerinin toplamı $2n-2$'dir.*
e. *Her sonlu ağaçta derecesi 1 olan en az iki nokta vardır.*

Kanıt: a. Aksi halde kolaylıkla bir döngü elde ederdik, oysa bir ağaçta -tanım gereği- döngü olamaz.

b. Aşağıdaki resimden takip edin. Ağacımıza A diyelim. Ağaçtan attığımız kenar P ile Q noktalarını birleştirsin. Attığımız kenara da PQ adını verelim. A ağacında P noktasına PQ kenarından geçmeden birleştirilen noktalar kümesine ve bu noktalar arasındaki kenarlara B adını verelim.



A ağacında Q noktasına PQ kenarından geçmeden birleştirilen noktalar kümesine ve bu noktalar arasındaki kenarlara da C adını verelim. B ile C'nin birer ağaç olduklarını ve A'nın her noktasının ya B'de ya da C'de olduğunu kanıtlayacağız.

A'nın her noktası ya B'de ya da C'de olmak zorundadır, çünkü bir X noktasıyla P arasındaki aynı kenardan geçmeyen yegâne yol Q'dan geçmiyorsa o zaman X noktası B'dedir, aksi halde yol PQ kenarını kullanmak zorundadır ve bu durumda X noktası C'dedir.

B'de bir döngü olamaz, çünkü A'da döngü yok.

B'nin her noktasından gene B'nin her noktasına B'deki kenarlar kullanılarak gidilebilir; nitekim X ve Y noktaları B'deyse, bu noktalar P'ye Q'den geçmeden bağlanabilir; bu yollara XP ve PY adını verirsek, XPY yolunu kolaylıkla inşa edebiliriz.

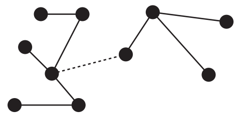
c. Eğer $n = 1$ ise, yani sadece tek bir nokta varsa, ağaçta hiç kenar yoktur, daha doğrusu 0 kenar vardır. Bu durumda önermemiz doğru.

Şimdi $n > 1$ olsun ve önermenin n'den az noktası olan ağaçlar için doğru olduğunu varsayalım. Ağaçtan herhangi bir kenar atalım. (b)'ye göre, her biri daha az noktalı iki ağaç elde ederiz. Bkz. aşağıdaki şekil.

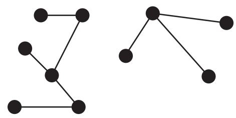
Bu ağaçların nokta sayılarına a ve b dersek, bu a ve b sayıları

$$a < n,\ b < n \text{ ve } a + b = n$$

ilişkilerini sağlar.



Yukardaki ağaçtan kesik çizgili bağıntıyı atarsak aşağıdaki iki ağacı elde ederiz:



Tümevarım varsayımından dolayı, a noktalı ağaçta $a-1$ tane kenar vardır ve b noktalı ağaçta $b-1$ tane kenar vardır. Demek ki, başlangıçtaki ağaçta (attığımız kenarla birlikte),

$$(a-1)+(b-1)+1 = a+b-1 = n-1$$

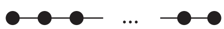
tane kenar vardır.

d. n noktalı bir çizgede $n-1$ tane kenar olduğunu gördük. Her kenar, bağladığı iki noktanın derecelerini 1 artırır, yani her kenar derecelerin toplamına 2 katar. Demek ki derecelerin toplamı $2(n-1)$'dir. $2(n-1)$ de $2n-2$'ye eşit olduğundan önerme kanıtlanmıştır.

e. n noktalı bir ağacın noktalarının derecelerinin toplamının $2n-2$ olduğunu gördük. Eğer $n-1$ tane noktanın her birinin derecesi en az 2 olsaydı, o zaman derecelerin toplamı en az $2(n-1) = 2n-2$ olurdu ve n'inci noktanın derecesi mecburen 0 olurdu, ki bu bir ağaçta elbette mümkün değildir. Önsav tamamıyla kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

11.7. İki noktasının derecesinin 1 olduğu, diğer noktalarının derecelerinin 1 olduğu bir çizgenin aşağıdaki şekildeki gibi



bir çizge olması gerektiğini kanıtlayın. **İpucu:** n üzerine tümevarımla.

11.8. Tüm noktalarının derecelerinin 2 olduğu bağlantılı bir çizgenin bir döngü olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Bir önceki soru.

11.9. Önsav 11.3.c'ye göre, n noktası ve n kenarı olan bağlantılı bir çizge ağaç olamaz, dolayısıyla böyle bir çizgenin bir döngüsü olmak zorundadır. Böyle bir çizgede tek bir döngü olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Derecesi 1 olan bir nokta varsa tümevarımla kanıt işi halleder, aksi halde bir önceki soruya başvurun.

Önsav 11.3.d'ye göre eğer n noktalı adlandırılmış bir ağacın derece tipi

$$(d_1, \ldots, d_n)$$

ise, derecelerin toplamı $2n-2$ olmalı:

$$d_1 + \cdots + d_n = 2n-2.$$

Şimdi şu canalıcı sonucu kanıtlayacağız:

Önsav 11.4. *$n > 1$ bir doğal sayı olsun. $d_1, \ldots, d_n$ pozitif doğal sayıları,*

$$d_1 + \cdots + d_n = 2n - 2$$

eşitliğini sağlasın. O zaman derece tipi

$$(d_1, \ldots, d_n)$$

olan

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

tane adlandırılmış ağaç vardır.

Bir an için bu önsavın kanıtlandığını varsayıp n noktalı adlandırılmış ağaç sayısının n^{n-2} olduğunu kanıtlayalım.

Teorem 11.5 (Cayley)**.** *n noktalı n^{n-2} tane adlandırılmış ağaç vardır.*

Kanıt: Yukarıdaki önsava göre, adlandırılmış ağaç sayısı

$$\sum_{d_1+\cdots+d_n=2n-2,\, d_i \geq 1} \binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

tanedir. (Ağaçları derece tiplerine göre sayalım.) Toplamdaki d_i'lerin herbiri 1'den büyükeşit. $k_i = d_i - 1$ tanımını yapalım ve toplamı bu tanıma göre değiştirelim.

$$\begin{aligned} k_1 + \cdots + k_n &= (d_1 - 1) + \cdots + (d_n - 1) \\ &= (d_1 + \cdots + d_n) - (1 + \cdots + 1) \\ &= (d_1 + \cdots + d_n) - n = (2n-2) - n = n - 2 \end{aligned}$$

olduğundan, adlandırılmış ağaç sayısını

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=n-2, k_i \geq 0} \binom{n-2}{k_1, \ldots, k_n}$$

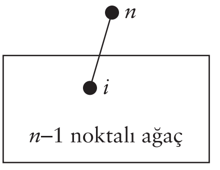
olarak buluruz. Bu aşamada Sonuç 10.6 eşitliğini kullanabiliriz: Bu toplam tam tamına n^{n-2}'dir. □

İş Önsav 11.4'ü kanıtlamaya kaldı. Bunu n üzerine tümevarımla yapacağız. $n = 2$ ise, $2n - 2 = 2$ olur; dolayısıyla $d_1 = d_2 = 1$ olmalı. Derece tipi $(1, 1)$ olan tek bir ağaç vardır elbette. Önsavın tahmin ettiği sayı

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1} = \binom{0}{0, 0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$$

olduğundan, önsav bu durumda doğru.

Şimdi $n > 2$ olsun ve önsavın n'den küçük sayılar için doğru olduğunu varsayalım. $d_1 + \cdots + d_n = 2n - 2$ ve $d_i \geq 1$ olduğundan, d_i'lerden en az biri 1 olmalı.



Diyelim $d_n = 1$. O zaman n noktası 1, 2, ..., $n-1$ noktalarından sadece biriyle bağlantılı olmalı. n noktasının i noktasıyla bir kenarla bağıntılı olduğunu varsayalım ve bu kenarı ve n noktasını atalım. Geriye $n-1$ noktalı ve derece tipi,

$$(d_1, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \ldots, d_{n-1})$$

olan adlandırılmış bir ağaç kalır. Tümevarım varsayımından dolayı bu ağaçlardan tam

$$\binom{n-3}{d_1 - 1, \ldots, d_{i-1} - 1, d_i - 2, d_{i+1} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1}$$

tane vardır. Demek ki aradığımız yanıt, $i = 1, \ldots, n-1$ için bu sayıların toplamı olan,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-3}{d_1 - 1, \ldots, d_{i-1} - 1, d_i - 2, d_{i+1} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1}$$

sayısıdır. Ve Sonuç 10.2'den dolayı yukarıdaki toplam tamıtamına,

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

sayısına eşittir. Önsav kanıtlanmıştır. □

Bu kanıt sayesinde, n noktalı tüm adlandırılmış ağaçları, çok çok zaman alsa da, teker teker çizebiliriz. Örnek olarak $n = 5$ için, derece tipi $(3, 2, 1, 1, 1)$ olan tüm ağaçları çizelim. (Derecelerin toplamının gerçekten $2n - 2 = 8$ olduğuna dikkatinizi çekeriz)

5 noktasının 1'e bağlı olduğu ağaçların tipi

$$(2, 2, 1, 1),$$

ve 2 noktasına bağlı olduğu ağaçların tipi

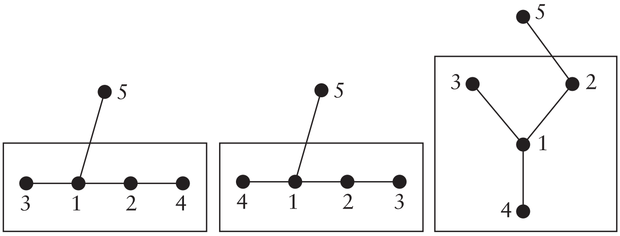
$$(3, 1, 1, 1)$$

olmalı. 5 noktasının 3'e ya da 4'e bağlı olduğu ağaçlar olamaz. Demek ki önce tipleri

$$(2, 2, 1, 1) \text{ ve } (3, 1, 1, 1)$$

olan ağaçları çizip 5 noktasını sırasıyla 1 ve 2 noktalarına kenarlandırmalıyız.

İşte o ağaçlar:



Toplam 3 tane bulduk. Teoreme göre, bu ağaçlardan

$$\binom{5-2}{3-1, 2-1, 1-1, 1-1, 1-1} = \binom{3}{2, 1, 0, 0, 0} = \frac{3!}{2!1!0!0!0!} = 3$$

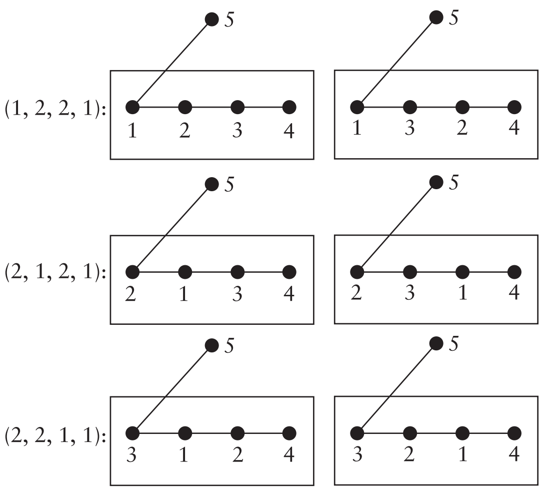
tane olmalı. Görüldüğü gibi her şey tutarlı.

İçinde 3 ve 2 bulunan derece tiplerinden,

$$\binom{5}{2} \times 2 = 20$$

tane olduğundan, böylece $20 \times 3 = 60$ ağaç buluruz.

Derece tipi $(2, 2, 2, 1, 1)$ olanları da aynı yöntemle çizelim:



İçinde üç tane 2 olan tam 10 tane derece tipi olduğundan, böylece $6 \times 10 = 60$ ağaç elde ederiz.

İçinde bir tane 4 olan 5 ağaç olduğundan ve

$$60 + 60 + 5 = 125 = 5^3$$

olduğundan böylece tüm 5 noktalı adlandırılmış çizgeleri bulmuş olduk.

Cayley Teoremi'nin İkinci Kanıtı. Teorem 11.5'in farklı bir kanıtını sunacağız. A. Joyal'ın bulduğu bu kanıtı, matematikle ilgilenen herkesin elinin altında bulunması gerektiğine inandığım [AZ]'den alıyorum.

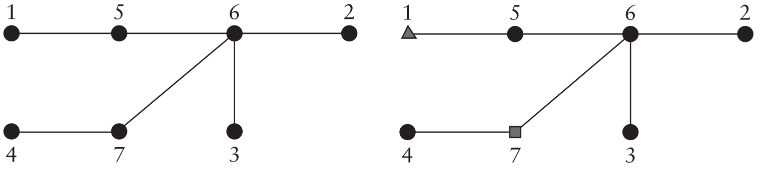
Adlandırılmış bir ağacın iki noktasına özel adlar verelim. Noktalardan biri "sol uç", diğeri (ya da aynı nokta) "sağ uç" olsun. Noktalarından birinin sol uç, diğerinin sağ uç olarak nitelendirildiği adlandırılmış ağaçlara "özel ağaç" diyelim.

Sağ ve sol uçlar illa değişik noktalar olmak zorunda değiller. Aynı nokta aynı zamanda hem sağ hem de sol uç olabilir.

n noktalı özel ağaç sayısı, tam tamına,

$$n^2 \times (n \text{ noktalı adlandırılmış ağaç sayısı})$$

dır, çünkü adlandırılmış her ağaçtan, n^2 değişik biçimde sol ve sağ uçlar seçerek özel bir ağaç elde ederiz. Bir seçim örneği aşağıda.



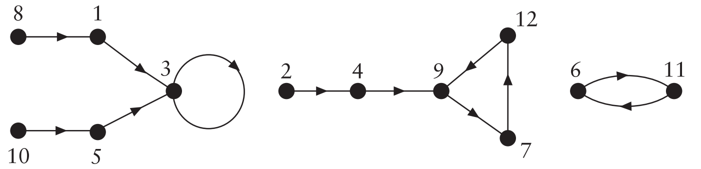
Bir ağacın herhangi iki noktasını sol uç nokta (gri üçgen) ve sağ uç nokta (gri kare) olarak seçebiliriz. Aynı nokta aynı anda hem sol uç nokta hem de sağ uç nokta olabilir.

Dolayısıyla, Teorem 11.5'i kanıtlamak için n noktalı özel ağaç sayısının n^n olduğunu kanıtlamak yeterli. Bunu kanıtlamak için, n noktalı özel ağaçların kümesiyle $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden gene $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi arasında bir eşleme bulacağız.

Önce her $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ fonksiyonu için, i'den $f(i)$'ye giden bir okun bulunduğu n noktalı bir çizge inşa edelim. Örneğin $n = 12$ ise ve f fonksiyonu,

$$\begin{aligned} &f(1) = 3, \ f(5) = 3, \quad f(9) = 7, \\ &f(2) = 4, \ f(6) = 11, \ f(10) = 5, \\ &f(3) = 3, \ f(7) = 12, \ f(11) = 6, \\ &f(4) = 9, \ f(8) = 1, \quad f(12) = 9 \end{aligned}$$

ise, elde ettiğimiz çizge aşağıdaki çizgedir. Bu çizgenin üç adet bağlantılı bileşeni vardır. Her bağlantılı bileşen, bileşenin noktalarından noktalarına giden bir fonksiyon olarak görülebilir.



Her noktadan tek bir ok **çıktığından**, her bağlantılı bileşenin toplam kenar sayısı bileşenin nokta sayısına eşittir. Alıştırma 11.9'a göre, her bağlantılı bileşenin tek bir döngüsü vardır. Bu döngülerin noktalarının kümesine B diyelim. Örneğimizde

$$B = \{3, 9, 12, 7, 6, 11\} = \{3, 6, 7, 9, 11, 12\}$$

bulunur. B'nin elemanlarını küçükten büyüğe doğru dizelim:

$$B : a_1 < a_2 < \cdots < a_k.$$

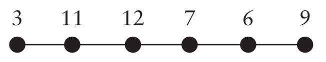
Örneğimizde

$$B : 3 < 6 < 7 < 9 < 11 < 12$$

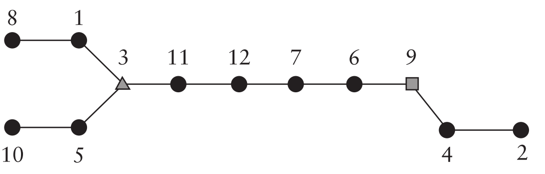
olur. Sonra,

$$(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k))$$

yolunu bir çizge olarak (bu sırayla) çizelim. Örneğimizde



çizgesini elde ederiz. 3 numaralı nokta sol uç, 9 numaralı nokta sağ uç olacak. Yönlendirilmiş çizgenin diğer noktalarını ve bağıntılarını bu çizgeye olduğu gibi aktaralım, ama bağıntıların yönlerini kaldırarak yapalım bu işlemi. Örneğimizde,



özel çizgesini elde ederiz. Böylece her fonksiyondan nasıl özel bir çizge yapılabileceğini gördük.

$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin B altkümesi, $f_{|B}$ fonksiyonunun eşleşme olduğu en büyük altkümesidir. Bunu görmek o kadar zor değil.

Bu işlem tersine çevrilebilir: Özel bir çizgeden hareket ederek, yukarıda açıkladığımız yöntemle bu özel çizgeyi veren fonksiyonu bulabiliriz. Bunun için sol uç noktayla sağ uç nokta arasındaki noktaları (sayıları) alalım. Örneğimizde

$$3, 11, 12, 7, 6, 9$$

sayılarını buluruz. Bu sayıları küçükten büyüğe doğru dizerek bu kümenin bir eşleşmesini buluruz. Örneğimizle anlatmak daha kolay, örneğimizde

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 6 & 7 & 9 & 11 & 12 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 11 & 12 & 7 & 6 & 9 \end{array}$$

eşleşmesi bulunur. Geri kalan i sayılarının değerlerini bulmak için i noktasını bu yola bağlayan biricik yola bakmamız yeterli. Teoremimiz bir kez daha kanıtlanmıştır.

Cayley Teoremi'nin Üçüncü Kanıtı (Prüfer Yöntemi). $n = 2$ için sonuç belli: 2 noktalı tek bir ağaç vardır. Bundan böyle $n \geq 3$ eşitsizliğini varsayalım.

Noktaları adlandırılmış n noktalı her ağaç için, terimleri $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden olan bir $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ dizisi bulacağız. Yöntemimiz, noktaları adlandırılmış n noktalı ağaçlarla, terimleri $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden olan $n-2$ uzunluğundaki diziler arasında bir eşleme verecek. Bu biçimde yazılmış n^{n-2} adet dizi olduğundan sonucu elde etmiş olacağız.

Önce noktaları adlandırılmış her T ağacına karşılık gelen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$$

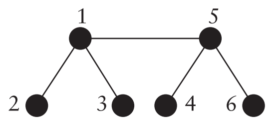
biçimindeki diziyi nasıl elde edeceğimizi açıklayalım. Nokta adlarının

$$1, 2, \ldots, n$$

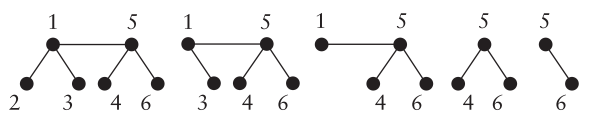
olduğunu varsayalım. b_1, derecesi 1 olan adı en küçük nokta olsun. a_1 de b_1'in bitişik olduğu tek nokta olsun (bkz. Önsav 11.3.e). Dizimizin ilk terimine a_1 yazıp, b_1 noktasını ve ona bitişik kenarı silip $n-1$ noktalı yeni ağaca bakalım ve aynı işlemi bu yeni ağaca uygulayalım. Bu işlemi sadece iki nokta kalana kadar uygularsak aradığımız $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ dizisini elde ederiz. Bu yöntemle elde edilmiş dizi, T ağacının ***Prüfer dizisi*** diye adlandırılmıştır.

Örnekler

11.10. Aşağıdaki ağaç için



sırasıyla 12, 13, 51 ve 54 kenarlarını silip



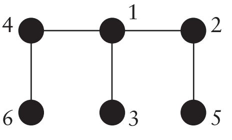
ağaçlarını elde ederiz. T ağacının eşleştiği dizi $(1,1,5,5)$ dizisidir.

Şimdi terimleri $\{1,2,\dots,n\}$ olan herhangi bir

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$$

dizisinin hangi ağaca karşılık geldiğini bulalım. b_1 bu dizide görünmeyen en küçük nokta olsun. a_1 ve b_1 noktaları arasına bir kenar koyalım. Ardından diziden a_1'i kaldırıp $n-3$ terimli yeni diziye bakalım ve b_1'i yok sayıp yöntemimizi yeni diziye uygulayalım. Bu şekilde adım adım ağacın kenarlarını belirleyebiliriz. Son adımda ise hâlâ daha kullanabileceğimiz atılmamış son iki nokta arasına kenar koyarak ağacımızı tamamlarız.

11.11. $(1,2,1,4)$ dizisine bu yöntemi uygulayarak eşleştiği T ağacını bulalım. Dizimiz dört terimli olduğuna göre noktalar kümesi $\{1,2,3,4,5,6\}$ olacak. Dizinin ilk noktası 1, görünmeyen en küçük noktası 3'tür. Dolayısıyla 13 çizeceğimiz ilk kenar. Yeni dizimiz $(2,1,4)$. Bu sefer 3'ü dikkate almayacağız, yani noktalar kümemizin $\{1,2,4,5,6\}$ olduğunu varsayacağız. Yeni dizimizin ilk terimi 2, dizide görünmeyen en küçük nokta da 5. Demek ki 25 de bir kenar. 2'yi dizimizden silip geri kalan $(1,4)$ dizisini ele alalım. 3 ve 5 noktalarını artık kullanmayacağız. 1 dizinin ilk terimi, 2 ise dizide görünmeyen en küçük nokta, dolayısıyla 12 diğer bir kenar olacak. Artık 2, 3 ve 5 noktalarını kullanmayacağız. Son dizi (4) dizisi, dizide görünmeyen en küçük nokta 1, demek ki 14 diğer bir kenar olacak. 1 de kullanmayacağımız noktalar arasına eklendi. Son adımda, kullanabileceğimiz kalan iki nokta arasına bir kenar koyacağız, yani 46 da bir kenar. Demek ki $(1,2,1,4)$ dizisi



ağacıyla eşleşir. İlk yöntemi uygulayarak bu ağacın eşleştiği dizinin $(1,2,1,4)$ olduğunu kontrol edebilirsiniz.

Bu iki yöntem noktaları adlandırılmış n noktalı ağaçlarla, terimleri $\{1,2,\dots,n\}$ kümesinden olan $n-2$ uzunluğundaki diziler arasında eşleme vermektedir. Demek ki noktaları adlandırılmış n noktalı ağaç sayısı n^{n-2}'dir.

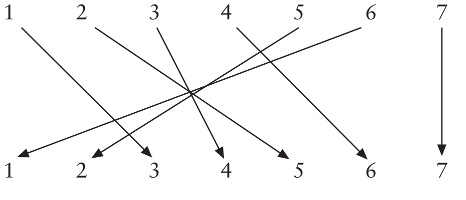
[AZ]'de aynı teoremin başka kanıtları da vardır.

12. Simetrik Grup

1. S_n'nin Tanımı. n kadın ve n erkek kaç değişik biçimde (her kadına bir erkek ve her erkeğe bir kadın düşecek biçimde) eşleştirilebilir? Sorunun (kolay olan) yanıtını bulmak için kadınları numaralandıralım. Birinci kadına n erkekten birini eşleştireceğiz. İkinci kadına geri kalan $n-1$ erkekten birini, üçüncü kadına geri kalan $n-2$ erkekten birini eşleştireceğiz ve bunu böylece devam ettireceğiz. Anlaşılacağı gibi, toplam $n!$ değişik kadın-erkek eşlemesi vardır. Bu $n!$ sayısı, elbette, n elemanlı herhangi bir kümeden n elemanlı herhangi bir kümeye giden eşleme sayısıdır.

$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinden gene $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ kümesine giden eşleşmeler kümesi $\mathrm{Sym}\, n$ ya da S_n olarak gösterilir ve ***simetrik grup*** adı verilir. Gördüğümüz üzere, S_n'nin tam $n!$ tane elemanı vardır.

2. S_n'nin Elemanlarının Yazılımı. Önce S_n kümesinin elemanlarını teker teker inceleyelim, sonra modern matematiğin gereği, kümeye bir bütün olarak bakarız. Bir örnekle başlayalım.



Bu eşleşmeyi daha sade olarak şöyle yazabiliriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Üst sıra tanım kümesinin elemanlarını, alt sıra da değer kümesinin elemanlarını simgeler. 5'in hemen altında 2 olması, bu eşleşmenin 5'teki değerinin iki olduğunu söyler, yani,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

ise, $f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 4,\ f(4) = 6,\ f(5) = 2,\ f(6) = 1,\ f(7) = 7$'dir.

Yukarıdakinden daha kolay bir yazılım vardır. Örneğimizdeki eşleşmeye bakalım.

• Bu eşleşme 1'i 3'e, 3'ü 4'e, 4'ü 6'ya, 6'yı da 1'e (başladığımız sayıya) göndermiş. Yani

$$1 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 1$$

diye bir döngü olmuş.

• Aynı eşleşme 2'yi 5'e ve 5'i 2'ye (başladığımız sayıya) yollamış. Demek ki bir de

$$2 \mapsto 5 \mapsto 2$$

diye bir döngü sözkonusu.

• Son olarak, bu eşleşme 7'yi 7'ye göndermiş.

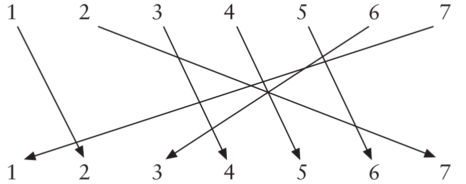
Bu üç nedenden dolayı bu eşleşme

$$(1\ 3\ 4\ 6)(2\ 5)(7)$$

olarak simgelenir. Buradaki her sayının imgesi hemen sağındaki sayıdır, ama eğer sayı parantezin sonundaysa, o zaman o sayının imgesi bulunduğu parantezin ilk sayısıdır.

Her bir paranteze ***döngü*** adı verilir. $(1\ 3\ 4\ 6)(2\ 5)(7)$ eşleşmesinde 3 döngü vardır.

Örneğin S_7'nin $(1\ 2\ 7)(3\ 4\ 5\ 6)$ eşleşmesinin resmi aşağıdadır. Görüldüğü gibi, $(1\ 2\ 7)$ döngüsü nedeniyle 1 sağındaki 2'ye, 2 sağındaki 7'ye, 7 de ta en baştaki 1'e gidiyor.



Her sayı hemen kendi sağındaki sayıya gider. Sağında sayı olmayan sayılar, bulundukları parantezin en başına giderler. S_7'nin her elemanı (ki $7! = 5040$ tane elemanı vardır) böyle ayrık döngüler biçiminde yazılabilir.

Yalnız dikkat edilmesi gereken bir nokta var. Bu yazılımla,

$$(1\ 2\ 7)(3\ 4\ 5\ 6) \text{ ve } (3\ 4\ 5\ 6)(1\ 2\ 7)$$

eşleşmeleri de birbirine eşittir. Aynı biçimde,

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 7)(3\ 4\ 5\ 6) &= (2\ 7\ 1)(3\ 4\ 5\ 6) = (3\ 4\ 5\ 6)(2\ 7\ 1)\\ &= (4\ 5\ 6\ 3)(2\ 7\ 1) = (5\ 6\ 3\ 4)(7\ 1\ 2)\end{aligned}$$

gibi eşitlikler geçerlidir. Genel olarak (15936) gibi bir döngüyü yazmaya döngüdeki herhangi bir elemandan başlayabiliriz:

$$(1\ 5\ 9\ 3\ 6) = (5\ 9\ 3\ 6\ 1) = (9\ 3\ 6\ 1\ 5) = (3\ 6\ 1\ 5\ 9) = (6\ 1\ 5\ 9\ 3).$$

Her S_n'nin I_n ya da kısaca I olarak göstereceğimiz çok özel bir elemanı vardır: Hiçbir şeyi değiştirmeyen eşleme, yani ***birim fonksiyon*** ya da ***özdeşlik fonksiyonu***. Tanımı gereği, her $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $I_n(x) = x$ olur. Yukarıda açıkladığımız yazılımla, I_n birim fonksiyonu

$$I_n = (1)(2) \cdots (n)$$

olarak gösterilir.

S_4'ün 4! yani 24 elemanını bu yazılımla yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&I_4 = (1)(2)(3)(4),\\
&(1\ 2)(3)(4), (1\ 3)(2)(4), (1\ 4)(2)(3), (2\ 3)(1)(4), (2\ 4)(1)(3), (3\ 4)(1)(2),\\
&(1\ 2\ 3)(4), (1\ 3\ 2)(4), (1\ 2\ 4)(3), (1\ 4\ 2)(3),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (1\ 3\ 4)(2), (1\ 4\ 3)(2), (2\ 3\ 4)(1), (2\ 4\ 3)(1),\\
&(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3),\\
&(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2).
\end{aligned}$$

Yazılımı biraz daha sadeleştirebiliriz. Eğer n'nin kaç olduğunu önceden biliyorsak tek elemanlı döngüleri yazmasak da olur. Örneğin (1 3 4 6)(2 5)(7) yerine daha basit olarak (1 3 4 6)(2 5) yazabiliriz. Bunun gibi (1 2 3)(4 5)(6)(7) yerine (1 2 3)(4 5) yazalım.

Ama o zaman (1)(2)(3)(4) yerine ne yazacağız? Onun yerine de sadece I_4 yazalım. Eğer 4 umurumuzda değilse, I_4 yerine sadece I yazılır. Bu daha basit yazılımla, S_4'ün 24 elemanı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
&I_4,\\
&(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4),\\
&(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)(2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3),\\
&(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3),\\
&(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2).
\end{aligned}$$

Bu yazılımın bir tehlikesi var. O da şu: Bu yazılımla

$$(1\ 3\ 4\ 6)(2\ 5)$$

elemanı S_6'nın da, S_7'nin de, S_8'in de elemanı olabilir. Nasıl anlayacağız hangisinin elemanı olduğunu? Konunun gelişinden... Biraz dikkat etmek gerekir sadece o kadar.

Bu yazılımın, tehlikesi yanında, bir avantajı vardır: Bu yazılım sayesinde, örneğin, S_6'yı rahatlıkla S_9'un altkümesi olarak görebiliriz. Nitekim S_6'nın her elemanı, S_9'un 7, 8 ve 9'u sabitleyen bir elemanı olarak görülebilir.

Yukarıda açıkladığımız yazılımın gerçekten mümkün olduğunu göstermek için şu soruyu olumlu yanıtlamamız gerekiyor. $f \in \mathrm{Sym}\, n$ olsun. f'yi döngülerin bileşkesi olarak yazmak istiyoruz. Herhangi bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ alalım ve

$$i,\ f(i),\ f^2(i),\ f^3(i),\ \ldots$$

dizisine bakalım. (Böylece i ile başlayan döngüyü bulmayı amaçlıyoruz.) Bu dizinin terimleri $\{1, \ldots, n\}$ kümesinde yer aldığından, bir zaman sonra aynı sayı kendini gösterir ve bu aşamadan sonra dizi kendisini tekrarlamaya başlar, yani dizi periyodiktir. Diyelim $f^k(i)$ sayısı dizinin daha önceki bir terimine eşit, yani bir $0 \leq j < k$ için $f^k(i) = f^j(i)$ ve k sayısı, bu özelliği sağlayan sayıların en küçüğü. Bu durumda, $j = 0$ eşitliğini göstermeliyiz, ki $f^k(i) = i$ olsun ve i ile başladığımız döngünün tekrar i'ye geri döndüğünden ve daha önce geri dönmediğinden emin olalım. Nitekim eğer $j > 0$ ise, f fonksiyonu birebir olduğundan,

$$f(f^{k-1}(i)) = f^k(i) = f^j(i) = f(f^{j-1}(i))$$

eşitliğinden, $f^{k-1}(i) = f^{j-1}(i)$ çıkar, ki bu da k'nın sözünü ettiğimiz özelliği sağlayan en küçük doğal sayı olma özelliğiyle çelişir. Demek ki $j = 0$ olmalı.

3. Hangi Tipten Kaç Eleman Var? Biraz hesap yapalım. S_n'de "tipi" aynı olan elemanların sayısını hesaplayalım.

Örneğin (12) gibi ikili döngü biçiminde yazılabilen kaç eleman vardır? Eğer $n = 4$ ise 6 tane vardır:

$$(1\ 2),\ (1\ 3),\ (1\ 4),\ (2\ 3),\ (2\ 4),\ (3\ 4).$$

Eğer $n = 5$ ise, 10 tane vardır:

$$(1\ 2),\ (1\ 3),\ (1\ 4),\ (1\ 5),\ (2\ 3),\ (2\ 4),\ (2\ 5),\ (3\ 4),\ (3\ 5),\ (4\ 5).$$

Genel olarak bu tip elemanlardan n'nin ikilisi kadar, yani

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

tane vardır.

Ya (1 2 3) gibi yazılabilen kaç eleman vardır?

$$\binom{n}{3}$$

tane değil. Çünkü seçtiğimiz her üçlü için iki ayrı seçeneğimiz var. Örneğin, eğer 1, 2 ve 3 elemanları seçilmişse, bu elemanlarla elde edeceğimiz (123) ve (132) gibi iki ayrı eşleşme var. Dolayısıyla bu tipten toplam

$$\binom{n}{3} \times 2$$

tane eleman vardır.

Ya (12)(34) tipinden? Birinci çift için

$$\binom{n}{2}$$

seçenek var. İkinci çift için

$$\binom{n-2}{2}$$

tane seçenek vardır. Ancak bu iki sayıyı çarparsak yanlış sonuç buluruz. Çünkü böyle yaparsak (12)(34) ve (34)(12)'yi sanki iki ayrı elemanmış gibi iki kez sayarız, oysa bunlar birbirlerine eşittir. Çarpımı ikiye bölmek gerekir. Sonuç olarak, (12)(34) tipinden

$$\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}}{2}$$

tane eleman vardır.

Aynı tipten olan elemanlara ***eşlenik*** denir. Eşlenik elemanların tümünden oluşan kümeye de ***eşleniklik sınıfı*** denir.

İki sonraki sayfadaki tabloda $n = 2, \ldots, 8$ için, S_n'de her eşlenik sınıfında kaç eleman olduğunu hesapladık. Her sütunun altında bulduğumuz sayıları toplayarak, toplamın $n!$ olup olmadığını kontrol ettik. Böylece yaptığımız hesapların sağlamasını yapmış olduk. (Gene de hata olabilir! Yanlışa tahammülü olmayan okur kendi başına hesaplamalıdır bu sayıları.)

Örneğin tipi, (1 2)(3 4)(5 6) elemanının tipiyle aynı olan eleman sayısını bulmak için,

$$\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}$$

sayısını 3! sayısına bölmek zorundayız, aksi halde, örneğin, hepsi birbirine eşit olan

$$(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6), (1\ 2)(5\ 6)(3\ 4), (3\ 4)(1\ 2)(5\ 6),$$
$$(3\ 4)(5\ 6)(1\ 2), (5\ 6)(1\ 2)(3\ 4), (5\ 6)(3\ 4)(1\ 2)$$

eşleşmelerinin hepsini ayrı ayrı saymış olurduk.

Bunun gibi, $n \geq 22$ için, S_n'de, tipi

$$(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12\ 13)(14\ 15\ 16)(17\ 18\ 19)(20\ 21\ 22)$$

olan elemanlardan tam,

$$\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\binom{n-6}{2}\binom{n-8}{2}\binom{n-10}{3}\binom{n-13}{3}\binom{n-16}{3}\binom{n-19}{3}2^4}{5! \times 4!}$$

tane vardır; paydaki ilk beş ve son dört terim sadeleşir ve geriye,

$$\frac{n!}{(n-22)! \times (5!\,2^5) \times (4!\,3^4)}$$

kalır. Bir sonraki teoremi okuduğunuzda bu sayının anlamını daha iyi kavrayacaksınız.

Teorem 12.1. *$f \in S_n$ olsun. k_i, f'de bulunan i uzunluğundaki döngülerin sayısı olsun. (Demek ki $\sum ik_i = n$.) O zaman, f'nin eşleniklik sınıfının eleman sayısı,*

$$\frac{n!}{(k_1!\,1^{k_1})\,(k_2!\,2^{k_2})\cdots(k_n!\,r^{k_n})}$$

olur.

Kanıt: Önce döngülerimizin parantezlerini hazırlayalım.

$$(\_)(\_)\ldots(\_)(\_\,\_)(\_\,\_)\ldots(\_\,\_)(\_\,\_\,\_)(\_\,\_\,\_)\ldots(\_\,\_\,\_)\ldots$$

Burada k_1 tane 1 sayılık parantez, k_2 tane 2 sayılık parantez, ..., k_n tane n sayılık parantez var. (En uzun döngünün uzunluğu ancak n olabilir.) Sayı konulabilecek toplam n tane yuva var. Önce n tane sayıyı her biçimde bu parantezlere (her parantezin kabul ettiği kadar) yerleştirelim. Bunu elbette $n!$ farklı biçimde yapabiliriz. Ama bu $n!$ yerleştirmenin bazıları S_n'nin aynı elemanını verir. Kaç tanesinin aynı elemanı verdiğini bulup bu sayıya bölelim. İçine i tane sayı yerleştirilebilen bir parantezi alalım. Bu parantezin içindeki sayıları i farklı biçimde yerleştirirsek S_n'nin aynı elemanını elde ederiz. Örneğin,

$$\begin{array}{l}(1\ 2\ 3\ 4\ 5),\\ (2\ 3\ 4\ 5\ 1),\\ (3\ 4\ 5\ 1\ 2),\\ (4\ 5\ 1\ 2\ 3),\\ (5\ 1\ 2\ 3\ 4)\end{array}$$

yerleştirmeleri aynı eşleşmeyi verir. Bu parantezlerden tam k_i tane olduğundan, sayıları bulundukları parantezlerden çıkarmadan

$$i^{k_i}$$

tane yerleştirmenin aynı eşleşmeyi verdiğini buluruz. Öte yandan bu parantezlerin de yerlerini değiştirebiliriz. Örneğin,

$$\begin{array}{l}(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6),\\ (1\ 2)(5\ 6)(3\ 4),\\ (3\ 4)(1\ 2)(5\ 6),\\ (3\ 4)(5\ 6)(1\ 2),\\ (5\ 6)(1\ 2)(3\ 4),\\ (5\ 6)(3\ 4)(1\ 2)\end{array}$$

yerleştirmelerinin hepsi aynı eşleşmeyi verir. i uzunluğundaki k_i parantezi $k_i!$ farklı biçimde yerleştirebiliriz. Demek ki sadece i uzunluğundaki parantezlere yapılan

$$i^{k_i} \cdot k_i!$$

tane farklı yerleştirme aynı eşleşmeyi verir. Bunları $i = 1, 2, \ldots, r$ için çarparsak, toplam

$$(1^{k_1} \cdot k_1!)(2^{k_2} \cdot k_2!) \cdots (i^{k_i} \cdot k_i!) \cdots (r^{k_r} \cdot k_r!)$$

farklı yerleştirmenin aynı eşleşmeyi vereceğini buluruz. Demek ki bu tipteki eleman sayısını bulmak için, toplam yerleştirme sayısı olan $n!$ sayısını bu sayıya bölmeliyiz. □

Küçük n sayıları için, eşleniklik sınıflarının eleman sayısını bir liste olarak yazalım.

Eşlenik Sınıfları Sayısı							
	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
I	1	1	1	1	1	1	1
(12)	1	**3**	6	$\underline{10}$	$\underline{15}$	$\underline{21}$	$\underline{28}$
(123)		$\underline{2}$	**8**	20	40	70	112
(12)(34)			$\underline{3}$	15	45	105	210
(1234)			6	**30**	90	210	420
(12)(345)				20	120	420	1120
(12345)				24	**144**	504	1344
(12)(34)(56)					$\underline{15}$	105	420
(12)(3456)					90	630	2520
(123)(456)					40	280	1120
(123456)					120	**840**	3360
(12)(34)(567)						210	1680
(12)(34567)						504	4032
(123)(4567)						420	3360
(1234567)						720	5760
(12)(34)(56)(78)							105
(12)(34)(5678)							1260
(12)(345)(678)							1120
(12)(345678)							3360
(123)(45678)							2688
(1234)(5678)							1260
(12345678)							**5040**
Toplam	2	6	24	120	720	5040	40302

Listede, S_n'de en fazla eleman olan eşleniklik sınıflarını koyu harflerle, I eşleşmesi dışında, en az eleman olan sınıfları da altı çizili olarak gösterdik.

Belli ki, eğer $n \geq 4$ ise en az (12) tipinde eleman var.

Ve gene belli ki S_n'de en kalabalık sınıf

$$(1\ 2\ \ldots\ n{-}1)$$

sınıfı. Bu sınıfın $n(n-2)!$ tane, yani

$$\frac{n!}{(n-1)}$$

tane elemanı var. Bir başka deyişle, her $n-1$ elemandan biri bu tipten (yani bu eşleniklik sınıfında). En az elemanlı eşlenik sınıfının (1 2)'nin eşleniklik sınıfı olduğunu birazdan kanıtlayacağız. $(1\ 2\ \ldots\ n{-}1)$ elemanının sınıfının en kalabalık olduğu da doğru ama bu olgunun bu kitaba alacak kadar kolay ve okuması zevkli bir kanıtını bilmiyorum. Meraklı okur Matematik Dünyası dergisinin 2003-II sayısının 103'üncü sayfasındaki Özer Çözer'in kanıtını okuyabilir.

Eşlenik Sınıfı Sayısı. Her eşleniklik sınıfının sayısını bulduk. Peki S_n'de kaç tane eşleniklik sınıfı var? Birkaç sayfa önce eşleniklik sınıflarını ve dolayısıyla kaç tane olduklarını $n = 8$'e kadar teker teker bulduk. Biraz daha ileri gidelim:

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
sınıf sayısı :	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135

S_n'deki eşleniklik sınıfı sayısı aslında n sayısının ***parçalanış sayısına*** eşittir. Örneğin, eğer $n = 6$ ise,

6	=	$1+1+1+1+1+1$	I sınıfı
6	=	$2+1+1+1+1$	(1 2) sınıfı
6	=	$3+1+1+1$	(1 2 3) sınıfı
6	=	$2+2+1+1$	(1 2)(3 4) sınıfı
6	=	$4+1+1$	(1 2 3 4) sınıfı
6	=	$3+2+1$	(1 2 3)(4 5) sınıfı
6	=	$5+1$	(1 2 3 4 5) sınıfı
6	=	$2+2+2$	(1 2)(3 4)(5 6) sınıfı
6	=	$4+2$	(1 2 3 4)(5 6) sınıfı
6	=	$3+3$	(1 2 3)(4 5 6) sınıfı
6	=	6	(1 2 3 4 5 6) sınıfı.

Bir doğal sayının parçalanış sayısı, o sayının (sıra gözetmeden) doğal sayıların toplamı olarak kaç türlü yazılabileceğidir. Dolayısıyla 6'nın parçalanış sayısı yukarıda görüldüğü gibi 11'dir, S_6'nın eşleniklik sınıfı sayısına eşittir. Genel olarak, S_n'nin eşleniklik sınıfı sayısı n'nin parçalanış sayısına eşittir. Bugün bile üzerine pek çok araştırma yapılan parçalanış sayısı konusuna ileride eğileceğiz.

Teorem 12.2. *Eğer $n \geq 4$ ise, (12)'nin eşleniklik sınıfı, I_n'nin sınıfı dışında, S_n'nin en az elemanlı eşleniklik sınıfıdır.*

Kanıt: $\mathrm{Id} \neq f \in S_n$ olsun. f'nin eşleniklik sınıfının eleman sayısını $[f]$ olarak gösterelim. f'yi ayrık döngülerine ayırıp, uzunluğu r olan döngülerini, adına f_r diyeceğimiz bir elemanda toparlayalım. Örneğin

$$f = (12)(34)(5\ 6\ 7\ 8)$$

ise

$$f_2 = (12)(34), f_3 = I, f_4 = (5\ 6\ 7\ 8).$$

Demek ki her f_r uzunluğu r olan ayrık döngülerin çarpımı ve f, değişik r'ler için bu f_r'lerin çarpımı. Eğer $f_r \neq \mathrm{Id}$ ise, $[f_r] \leq [f]$ eşitsizliği bariz. Demek ki $[(12)] \leq [f_r]$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli.

Bundan böyle, f, herbirinin uzunluğu r olan k ayrık döngünün çarpımı olsun. Demek ki $kr \leq n$. Ayrıca $2 \leq r$. Bu bilgiler daha sonra gerekecek. Şimdi $g = (1\ 2 \ldots r)$ olsun. Önce $[g] \leq [f]$ eşitsizliğini kanıtlayacağız. Her iki sayıyı da açık açık bulabiliriz:

(Teorem 12.1'i de kullanabilirdik.)

$$[g] = \binom{n}{r}(r-1)!$$
$$[f] = \binom{n}{r}\binom{n-r}{r}\cdots\binom{n-kr+r}{r}\frac{((r-1)!)^k}{k!}$$

Bundan sonra $[f] \leq [g]$ eşitsizliğini k ve n üzerine tümevarımla kanıtlamak kolay. (Alttaki sayı sadeleşiyor.)

Demek ki $[(12)] \leq [g]$ eşitsizliğini, yani

$$\binom{n}{2} \leq \binom{n}{r}(r-1)!$$

eşitsizliğini kanıtlamamız gerekiyor. Bu da kolay (tümevarımla). Teorem böylece kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

12.1. (Bu soru IMO 1987 yarışmasında sorulmuştur.)

$$P_n(k) = |\{f \in S_n : f \text{ tam } k \text{ eleman sabitliyor}\}|$$

olsun.

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$$

eşitliğini kanıtlayın.

12.2. Her $i = 1, \ldots, n-1$ için $\sigma_i = (i, i+1) \in S_n$ olsun. S_n'nin her elemanının sonlu tane σ_i'nin çarpımı olduğunu kanıtlayın. Her i ve $j = 1, \ldots, n-1$ için ya $(\sigma_i \circ \sigma_j)^1 = \mathrm{Id}$, ya $(\sigma_i \circ \sigma_j)^2 = \mathrm{Id}$, ya da $(\sigma_i \circ \sigma_j)^3 = \mathrm{Id}$ olmalı. Kanıtlayın.

12.3. Her $i = 2, \ldots, n$ için $\tau_i = (1, i) \in S_n$ olsun. S_n'nin her elemanının sonlu tane τ_i'nin çarpımı olduğunu kanıtlayın.

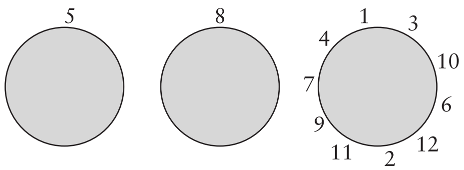
12.4. Sym $\mathbb{N}$'nin her elemanının $f^2 = g^2$ eşitliklerini sağlayan iki f ve g eşleşmesi için $f \circ g$ olarak yazıldığını kanıtlayın.

13. Stirling Sayıları

Şermin Çam

Birinci Stirling Sayıları. 12 kişiyi 3 yuvarlak masaya, her masada en az bir kişi olması koşuluyla kaç farklı biçimde yerleştirebiliriz? Masalar arasında fark gözetmiyoruz, ama kişiler arasında fark gözetiyoruz. Yani kişilerin adları var ama masaların adları yok.

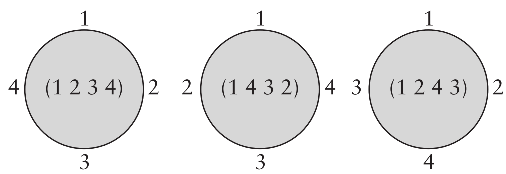
Örneğin iki masaya birer kişi koyup, geri kalan on kişiyi üçüncü masaya yerleştirebiliriz. Tek başına oturacak o iki kişiyi $\binom{12}{2} = 66$ farklı biçimde seçebiliriz. Geri kalan on kişiyi de üçüncü masaya farklı biçimlerde oturtabiliriz.



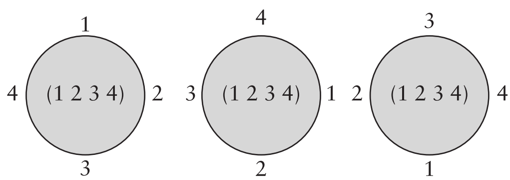
(5)(8)(1 3 10 6 12 2 11 9 7 4) yerleşimi

Ya da her masaya, sanki pişti oynayacaklarmış gibi dörder kişi yerleştirebiliriz; pişti oynayacak dörtlü grupları farklı biçimlerde seçebiliriz elbet; ayrıca dört kişilik grupların her birini masanın etrafına farklı biçimlerde oturtabiliriz.

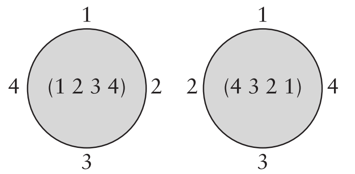
Aşağıdaki yerleşimler değişik yerleşimler olarak algılanacak (kişilerin sağı solu önemli olacak yani.)



Ama aşağıdaki şekildeki yerleşimler değişik algılanmayacak.



Sözün kısası masaların yuvarlak oluşu sonuçsuz değil, masaların başı sonu yok ve masalar döndürülebilir. Ancak masaların sağı solu var, (1 2 3 4) oturtmasıyla, bunun tam ters istikametlisi olan (4 3 2 1) oturtması ayrı sayılıyor.



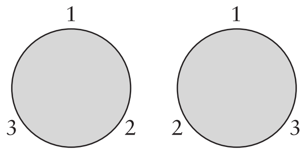
Ayrı sayılan iki oturtma biçimi. Ama sağdaki (4 3 2 1) oturtma biçimiyle (1 4 3 2) oturtma biçimi arasında bir ayrım yoktur.

Öte yandan iki masa arasında ayrım gözetmiyoruz. Yani masaları numaralandırmıyoruz, bizim için bir masanın bir başka masadan ayrımı yok. Ama kişiler arasında ayrım gözetiyoruz. Eğer kişiler arasında da ayrım gözetmeseydik, sorumuzu 12 patatesi 3 çuvala kaç değişik biçimde koyabiliriz şeklinde sorardık; ne de olsa patateslerin ve çuvalların kişilikleri yoktur. Yani kişilerin numarası var ama masaların numarası yok. Genel soru şu:

Soru: *n kişi k tane yuvarlak masaya, her masada en az bir kişi olma koşuluyla kaç farklı biçimde yerleştirilir?*

$s(n,k)$ ile gösterilen bu sayılara ***Birinci Stirling sayıları*** adı verilir. Amacımız $s(n,k)$ sayılarını kolayca hesaplayabilmek.

Her masada en az bir kişi olması gerektiğinden, kişi sayısı masa sayısından az olursa böyle bir yerleştirme yapılamayacağından, $n < k$ ise $s(n,k) = 0$ olur. Dolayısıyla $0 \le k \le n$ koşullarının sağlandığını varsayabiliriz.



Üç kişi iki değişik biçimde yuvarlak bir masaya yerleşebilir. Demek ki $s(3, 1) = 2$.

Birkaç Özel Durum. Birkaç kolay durumda $s(n,k)$ sayılarını bulalım. Önce hiç masa olmadığı, yani $k = 0$ durumunu ele alalım. Eğer 0 kişi varsa, bu 0 kişinin hepsini birden 0 tane masaya tek bir biçimde oturtabiliriz: Kimseyi hiçbir masaya yerleştirmeyiz olur biter! Başka da çözüm yoktur. Demek ki $s(0,0) = 1$. (Bu akıl yürütmede matematikten ziyade temel mantık var, üstünde durmaya pek değmez.)

Öte yandan eğer en az bir kişi varsa, bu kadar çok kişiyi 0 masaya yerleştiremeyiz. Demek ki $n > 0$ ise, $s(n,0) = 0$.

Eğer sadece bir tek masa varsa, yani $k = 1$ ise yanıt ne olacak? Herkesi bu tek masaya yerleştireceğiz. Bir numaralı kişiyi masanın herhangi bir yerine yerleştirebiliriz (boş yerler arasında bir ayrım yok.) Geri kalan $n - 1$ yere bir numara dışındaki $n-1$ kişiyi yerleştireceğiz. Elbette $(n-1)!$ değişik biçimde yapabiliriz böyle bir yerleşimi. Demek ki $s(n,1) = (n-1)!$ dir.

Eğer $k = n$ ise, yani masa sayısı kişi sayısına eşitse, o zaman her masaya bir kişi yerleştirmek zorunda kalırız, yani bir tek çözüm vardır. (Masalar arasında ayrım gözetmediğimizden tek bir yerleşim vardır, yoksa yerleşim sayısı n! olurdu.) Demek ki $s(n,n) = 1$.

Şimdi de masa sayısının kişi sayısından bir eksik olduğu duruma bakalım: n kişi ve $n-1$ masa olsun. n de 1'den büyük olsun, çünkü $n = 1$ şıkkında $k = n-1 = 0$ ve bu durumu iki paragraf önce halletmiştik. Ne boş bir masa ne de ayakta kalan birini görmek istiyoruz. Demek ki masalardan birine (hangisi olduğu önemli değil) iki kişi oturacak, diğer masalara da birer kişi yerleştireceğiz. Önemli olan aynı masaya oturacak o iki kişiyi seçmek; o iki kişi seçildiğinde yerleşim planı kendiliğinden ortaya çıkar. n kişi arasından 2 kişi seçeceğiz. Bunu

$$s(n,2) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

farklı biçimde yapabiliriz.

Her yerleşim (1 2)(3 4 5)(6 7)(8) gibi bir yazılımla gösterilebilir. Örneğin, $s(4,2)$'yi hesaplamak için şu listeyi saymak gerekir:

$$\begin{aligned}&(1)(2\ 3\ 4), (1)(2\ 4\ 3), (2)(1\ 3\ 4), (2)(1\ 4\ 3),\\ &(3)(1\ 2\ 4), (3)(1\ 4\ 2), (4)(1\ 2\ 3), (4)(1\ 3\ 2),\\ &(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3).\end{aligned}$$

Dolayısıyla $s(4,2) = 11$ olur. Görüldüğü gibi $s(n,k)$, $\mathrm{Sym}\, n$ grubunda k ayrık döngünün çarpımı olarak yazılan elemanların sayısıdır. Dolayısıyla, birazdan bir başka yöntemle kanıtlayacağımız

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$$

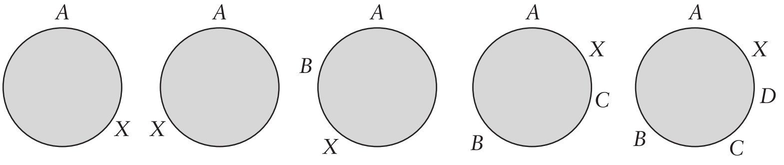
formülü geçerlidir.

Genel Durum. Genel durumu irdelemek için, n kişi, birbirinden farkı olmayan n tane masaya kaç farklı şekilde oturabilir sorusuna iki ayrı yanıt bulup bu yanıtları eşleyeceğiz. (Bu kez, ilk sorumuzun aksine bazı masalar boş kalabilir.)

Birinci Yanıt: n kişi hiçbir masa boş kalmayacak biçimde 1 masaya $s(n,1)$, hiçbir masa boş kalmayacak biçimde 2 masaya $s(n,2)$ ve genel olarak $1 \leq k \leq n$ için hiçbir masa boş kalmayacak biçimde k masaya $s(n,k)$ farklı şekilde oturabilir. Öyleyse, doldurdukları masa sayısını göz önünde tutarak, n kişinin n masaya $\sum_{k=1}^{n} s(n,k)$ değişik biçimde yerleşeceklerini buluruz. Birinci yanıtı bulduk. Şimdi aynı soruya ikinci bir yanıt bulalım.

İkinci Yanıt: Masalar birbirinden ayırt edilemediklerinden, birinci kişinin tek bir hamlesi var: Herhangi bir masaya oturmak.

İkinci kişi ya boş masalardan birine yerleşecek (hangi boş masaya yerleştiği önemli değil çünkü masalar arasında ayrım gözetmiyoruz) ya da birincinin oturduğu masaya yerleşecek. Şimdilik saçma gelse de, bu ikinci durumda, ikinci kişinin birincinin "hemen soluna" yerleştiğini söyleyelim. (Aşağıdaki şekle bakın.) Demek ki ikinci kişinin iki değişik hamlesi var.



Yukarıdaki beş şekilde de X, A'nın hemen soluna yerleşmiştir.

Üçüncü kişinin yapabileceği hamleleri sayalım: Üçüncü kişi ya boş bir masaya geçecek ya birincinin **hemen** soluna ya da ikincinin **hemen** soluna oturacak. Demek ki üçüncünün toplam 3 hamlesi var. Dördüncü kişi boş bir masaya ya da birincinin hemen soluna ya da ikincinin hemen soluna geçebilir ya da üçüncünün hemen soluna geçebilir. Demek ki dördüncü kişinin toplam 4 hamlesi var. Genel olarak k'inci kişinin k hamlesi var.

Demek ki n kişi n masaya $n!$ biçimde oturabilir. İkinci yanıtı da bulduk. Yukarıda bulduğumuz iki yanıttan şu sonuç çıkar:

Teorem 13.1. $\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$ □

Binom katsayıları arasında da buna benzer bir ilişki vardır:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Binom katsayılarıyla ilgili

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n-1}{i-1}$$

eşitliği geçmişte kanıtlamıştık. Birinci Stirling sayıları için de benzer bir eşitlik vardır ve bu eşitlik sayesinde değerini bildiğimiz birinci Stirling sayılarını kullanarak yenilerini hesaplayabiliriz.

Teorem 13.2. *$n \geq k \geq 1$ ise, $s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$.*

Kanıt: n kişiyi k masaya, hiçbir masa boş kalmayacak şekilde yerleştireceğiz. En son kişi olan n'yi ele alalım. İki şık var: Ya n tek başına bir masada kalacak ya da başkalarıyla birlikte olacak.

Eğer n numaralı kişi bir masada tek başınaysa, geri kalan $k-1$ masaya $n-1$ kişi hiçbir masa boş kalmayacak şekilde yerleştirilmiş demektir. Demek ki bu şıkta $s(n-1,k-1)$ seçenek var.

n'nin yalnız kalmaması için $n-1$ kişiyi $s(n-1,k)$ değişik biçimde k masaya yerleştirmeli ve n'yi kalan $n-1$ kişiden herhangi birinin hemen soluna oturtmalıyız, bunu yapmanın da elbette $n-1$ yolu vardır. Demek ki n numaralı kişinin yalnız kalmayacağı $(n-1)s(n-1,k)$ kadar yerleşim biçimi vardır.

Böylelikle toplamda

$$s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k)$$

tane yerleşim belirleyebiliriz. □

Teorem 13.2'yi kullanarak birinci Stirling sayıları için de binom açılımlarındaki katsayıları gösteren Pascal üçgeni gibi bir üçgen (birinci Stirling üçgenini) oluşturabiliriz ve birinci Stirling sayılarını teker teker bulabiliriz.

$S(0,k)$:	1									
$S(1,k)$:	0	1								
$S(2,k)$:	0	1	1							
$S(3,k)$:	0	2	3	1						
$S(4,k)$:	0	6	11	6	1					
$S(5,k)$:	0	24	50	35	10	1				
$S(6,k)$:	0	120	274	225	85	15	1			
$S(7,k)$:	0	720	1.764	1.624	735	175	21	1		
$S(8,k)$:	0	5.040	13.068	13.132	6.769	1.960	322	28	1	
$S(9,k)$:	0	40.320	109.584	118.124	67.284	22.449	4.536	546	36	1

Birinci Stirling Sayılarının Cebirsel Tanımı. Nasıl binom katsayıları $(x+y)^n$ polinomunun katsayılarıysa, birinci Stirling sayıları da bir polinomun katsayılarıdır:

Teorem 13.3. *Birinci Stirling sayısı $s(n,k), n>0$ için,*

$$p_n(X)=X(X+1)\cdots(X+n-1)$$

polinomunda X^k'nın katsayısıdır, yani,

$$p_n(X)=\sum_{k=0}^{n} s(n,k)X^k.$$

Kanıt: $p_n(X)$ polinomunda X^k teriminin katsayısı $a_{n,k}$ olsun, yani

$$p_n(X)=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$$

olsun. $p_n(X) = (X+n-1)p_{n-1}(X)$ olduğundan, bu polinomlar tümevarımla kanıta elverişlidirler. Bundan yararlanıp hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
p_n(X) &= (X+n-1)p_{n-1}(X) = (X+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}X^k \\
&= X\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}X^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}X^{k+1} + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}X^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1}X^k + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}X^k \\
&= a_{n-1,0} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k})X^k + a_{n-1,n-1}X^n.
\end{aligned}$$

Herhangi iki polinomun eşitliği, her $k \in \mathbb{N}$ için bu polinomların X^k terimlerinin katsayılarının eşit olması anlamına geldiğine göre, $n > 1$ için,

$$\begin{aligned}
a_{n,0} &= a_{n-1,0} \\
a_{n,n} &= a_{n-1,n-1}
\end{aligned}$$

ve $0 < k < n$ iken,

$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}$$

olur.

Bulduğumuz bu son ilişki sayesinde $a_{1,0}$ ve $a_{1,1}$ katsayılarından hareketle tüm $a_{n,k}$ katsayılarını bulabiliriz. $a_{1,0} = 0$ ve $a_{1,1} = 1$ eşitlikleri de kolaylıkla bulunabilir.

Görüldüğü üzere, $a_{n,k}$ ve $s(n,k)$ sayıları birbirleriyle aynı tümevarımsal bağlantıyı sağlıyorlar. Dolayısıyla başlangıç koşulları aynıysa $a_{n,k}$ ve $s(n,k)$ eşit olurlar. Nitekim öyle de:

$$s(1,0) = 0 = a_{1,0} \text{ ve } s(1,1) = 1 = a_{1,1}.$$

Demek ki $s(n,k) = a_{n,k}$ olmalı. □

Yukarıdaki polinomu kullanarak, binom katsayıları için bulduğumuz eşitliklerin benzerlerini birinci Stirling sayıları için de kanıtlayabiliriz:

Eğer yukarıdaki polinomda $X = 1$ alırsak, daha önce de kanıtladığımız

$$\sum_{k=1}^{n} s(n,k) = n!$$

eşitliğini bir kez daha buluruz. Eğer $X = -1$ alırsak $n \geq 2$ için

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k s(n,k) = 0$$

buluruz. $X = 2$ aldığımızda bulunacak eşitliği okura bırakıyoruz.

İkinci Stirling Sayıları. Birinci Stirling sayılarından sonra ikinci Stirling sayıları gelir!.. Bu sefer n kişiyi her grupta en az bir kişi olacak şekilde k gruba ayıracağız. Böyle kaç gruplama vardır? Her grup bir altküme olduğundan, bunu n elemanlı bir kümenin k tane ayrık ve boş olmayan altkümeye parçalanış sayısı olarak görebiliriz. Bu dağıtımların sayısına ***ikinci Stirling sayıları*** denir ve bu sayılar $S(n,k)$ olarak simgelenir.

Örnek olarak $S(4,2)$'yi bulalım. Dört elemanlı $\{1,2,3,4\}$ kümesini ayrık ve hiçbiri boş olmayan iki altkümeye ayıracağız. İşte tüm gruplaşmalar:

$$\begin{gathered}
\{1\}, \{2,3,4\} \\
\{1,2\}, \{3,4\} \\
\{1,3\}, \{2,4\} \\
\{1,4\}, \{2,3\} \\
\{1,2,3\}, \{4\} \\
\{1,2,4\}, \{3\} \\
\{1,3,4\}, \{2\}.
\end{gathered}$$

Toplam 7 tane bulduğumuzdan, $S(4,2) = 7$ olur.

Amacımız $S(n,k)$ sayılarını kolay bir biçimde hesaplayabilmek. İşe gene kolay birkaç sonuç bulmakla başlayalım.

$S(0,0) = 1$ olur: Eğer kimse yoksa, bu kişileri (!) tek bir biçimde 0 gruba ayırabiliriz, kimseyi hiçbir gruba sokmayız olur biter! (Gene mantık yaptık!) Ama eğer $n > 0$ ise, $S(n,0) = 0$ olur elbette.

Eğer $k = 1$ ise tek bir gruplaşma olabilir, herkesi tek grupta toplamak zorundayız. Dolayısıyla $S(n,1) = 1$ olur.

Eğer $k = n$ ise gene tek bir gruplaşma vardır, her grup bir kişiden oluşur: $S(n,n) = 1$.

Eğer $k > n$ ise gruplardan en az biri boşküme olmak zorundadır; demek ki bu durumda $S(n,k) = 0$. Bundan böyle $k \leq n$ eşitsizliğini varsayabiliriz.

Daha ciddi sonuçlara doğru yelken açmanın zamanı geldi. $S(n, n-1)$ sayısını hesaplayalım. $n-1$ gruptan birinde iki eleman, diğerlerinde birer eleman olmalı. n eleman arasından aynı gruba düşecek o iki elemanı seçeceğiz; bunu kaç değişik biçimde yapacağımızı biliyoruz:

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$S(n,2)$'yi de bulmak o kadar zor değil. İki gruptan birini seçtik mi diğeri belirlenir, nitekim eğer gruplardan biri A ise diğeri A'nın tümleyeni olan A^c kümesi olmak zorundadır. Ama burada A boşküme ya da tüm küme olamaz (yoksa tümleyeni boş olur.) n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi olduğundan, A için $2^n - 2$ seçeneğimiz var. Yalnız bir şeye daha dikkat etmek gerekiyor: $\{A, A^c\}$ gruplaşmasıyla $\{A^c, A\}$ gruplaşması aynı gruplaşmalar. Demek ki $2^n - 2$ sayısını ikiye bölmemiz gerekiyor. Sonuç: $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

Birinci Stirling sayıları ve binom katsayıları için yaptığımız gibi, İkinci Stirling sayıları için de tümevarımsal bir ilişki bulalım, böylece bu sayıları da küçüklerden başlayarak teker teker hesaplayabileceğiz.

Teorem 13.4. *$n \geq k \geq 1$ için $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi k farklı gruba, tanım gereği, $S(n,k)$ farklı yolla ayrılabilir. Bu gruplaşmalardan, altkümelerden birinin $\{n\}$ olduğu tam

$$S(n-1, k-1)$$

tane gruplaşma vardır, çünkü bu durumda $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesini $k-1$ gruba ayırmak zorundayız. n elemanının gruplardan birinde tek eleman olmadığı gruplaşmalar ise $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesini k gruba ayırıp n'yi bu k gruplardan herhangi birine eklemek yoluyla elde edilebilir. Bunu yapmanın da

$$kS(n-1, k)$$

yolu var. Yani $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi k altkümeye aynı zamanda

$$S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

farklı biçimde parçalanabilir. □

Bu teorem sayesinde İkinci Stirling sayılarını tümevarımla hesaplayabiliriz:

$s(0,k)$:	1									
$s(1,k)$:	0	1								
$s(2,k)$:	0	1	1							
$s(3,k)$:	0	1	3	1						
$s(4,k)$:	0	1	7	6	1					
$s(5,k)$:	0	1	15	25	10	1				
$s(6,k)$:	0	1	31	90	65	15	1			
$s(7,k)$:	0	1	63	301	350	140	21	1		
$s(8,k)$:	0	1	127	966	1.701	1.050	266	28	1	
$s(9,k)$:	0	1	255	3.025	7.770	6.951	2.646	462	36	1

Şimdi, İkinci Stirling sayıları için cebirsel bir tanım bulalım. $n \geq 0$ için

$$q_n(X) = X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

polinomunu tanımlayalım.

Teorem 13.5. *$n \geq 0$ için, $X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, q_k(X)$ olur.*

Kanıt: Birinci Stirling sayıları için verdiğimiz benzer teoremdeki gibi düşüneceğiz. Şu soruyu iki farklı şekilde yanıtlayalım: n kişi kaç farklı biçimde numaralandırılmış x balona dağıtılabilir? Bu sefer orijinal sorumuzun tersine bazı balonlarda 0 kişi olabilir. Ayrıca balonları numaralandırarak her balona bir kişilik veriyoruz. Bu soruyu iki farklı biçimde yanıtlayacağız.
Birinci Yanıt: Herkesin x seçeneği olduğuna göre, n kişi x^n değişik biçimde x balona dağıtılabilir.
İkinci Yanıt: n kişinin x balondan k tanesine bineceklerini, diğer balonların boş kalacağını düşünelim. Balonlara daha sonra bindirmek üzere n kişiyi k gruba ayıralım. Bu gruplaşmayı $S(n,k)$ değişik biçimde yapabiliriz. Şimdi bu $S(n,k)$ gruplaşmadan herhangi birini alalım. Birinci grup x balondan birini seçecek. İkinci grup geri kalan $x-1$ balondan birini seçecek, genel olarak k'inci grup geri kalan $x-k+1$ balondan birini seçecek. Demek ki her gruplaşmanın

$$x(x-1)\cdots(x-k+1) = q_k(x)$$

tane balona farklı biniş şekli vardır. Bundan da k balonun

$$S(n,k)q_k(x)$$

farklı biçimde doldurulabileceği çıkar. Dolayısıyla yanıt

$$\sum_{k=0}^{n} = S(n,k)q_k(x)$$

olur.

Her x doğal sayısı için

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, q_k(x)$$

olduğundan, x sayısı yerine polinomların "değişkeni" olan X koyarsak,

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, q_k(X)$$

polinom eşitliğini bulmuş oluruz[1]. □

[1]Eğer katsayıları $\mathbb{R}$'den olan $f(X)$ ve $g(X)$ polinomları sonsuz kez aynı değeri alıyorlarsa, $f(X)-g(X)$ polinomunun sonsuz tane kökü olur; ama katsayıları $\mathbb{R}$'de olan 0'dan farklı bir polinomun ancak derecesi kadar kökü olabilir; demek ki $f(X)-g(X)=0$, yani $f(X)=g(X)$ olmalı.

Birinci ve İkinci Stirling Sayıları Arasındaki İlişki. Birinci ve İkinci Stirling sayıları arasında beklenmedik bir ilişki vardır:

Teorem 13.6. *m, $n \in \mathbb{Z}$ için,*

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } n = m \textit{ ise} \\ 0 & \textit{eğer } n \neq m \textit{ ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)S(k,m)(-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n}$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt: Eğer $n \geq k \geq m$ eşitlikleri sağlanmazsa

$$s(n,k)S(k,m) = 0$$

olur. Dolayısıyla $m > n$ ise, soldaki toplam da sağdaki $\delta_{m,n}$ de 0'a eşit olur. Bundan böyle $m \leq n$ eşitsizliğini varsayalım. Demek ki, kanıtlamak istediğimiz eşitlik,

$$\sum_{m \leq k \leq n} s(n,k)S(k,m)(-1)^k = (-1)^n \delta_{m,n}$$

eşitliğine dönüşür.

Eğer $m = n$ ise, soldaki toplam $(-1)^n s(n,n)S(n,n) = (-1)^n$, sağdaki toplam $(-1)^n \delta_{n,n} = (-1)^n$ olur ve bu durumda sorun olmaz. Bundan böyle $n > m$ eşitsizliğini varsayalım.

$$\delta_{m,n} = 0$$

olduğundan,

$$\sum_{k \text{ çift}} s(n,k)S(k,m) = \sum_{k \text{ tek}} s(n,k)S(k,m)$$

eşitliğini göstermeliyiz.

Bir okulda n öğrenci, m sınıf ve k tane daire biçiminde masa olsun. Her sınıf her sınıfa ve her masa her masaya benzesin, yani iki masa ya da sınıf arasında bir ayrım yapmayalım. Her sınıfta en az bir masa olacak ve her masada en az bir öğrenci olacak biçimde kaç değişik masa dağıtımı ve öğrenci yerleşimi yapılabilir?

Öğrencileri masalara $s(n,k)$ değişik biçimde yerleştirebiliriz. Bu yerleştirmelerden birini yaptığımızda daha önce aralarında fark olmayan masalar birdenbire öğrenciler sayesinde kişilik kazanırlar. Bu kişilik kazanmış k masayı

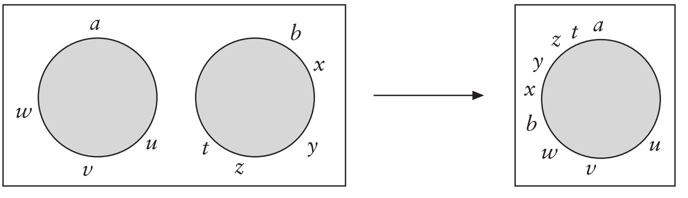
m sınıfa hiçbir sınıf boş kalmayacak şekilde $S(k,m)$ biçiminde yerleştirebiliriz. Demek ki böyle bir masa dağıtımı ve öğrenci yerleşimi $s(n,k)S(k,m)$ değişik biçimde yapılabilir. Bu sayıları k tekken ve çiftken ayrı ayrı toplarsak, eşit olduklarını göstermek istediğimiz toplamları buluruz.

Öğrencileri 1'den n'ye kadar numaralandıralım. $n > m$ olduğundan en az bir sınıfta birden fazla öğrenci olacaktır. Bir sınıfta tek başına bulunmayan en küçük numaralı öğrenci a olsun. a'yla aynı sınıfta bulunan bir sonraki numaralı öğrenci b olsun. Demek ki

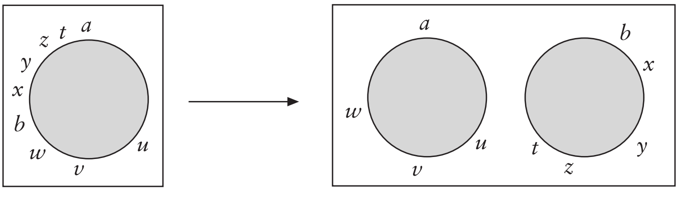
- a ile b aynı sınıftalar,
- a'dan küçük numaralı öğrenciler tek başlarınalar ve
- a'nın sınıfında, numarası a'yla b arasında olan başka bir öğrenci yok.

İki şık var: a ile b ya aynı masada ya da ayrı masalarda oturuyorlardır.

Eğer a'yla b ayrı masalarda oturuyorlarsa, (aşağıdaki şekilden izleyin) b'nin masasını, b'nin sağındaki kişi a'nın hemen sağına gelecek şekilde ve oturuş sırasını bozmadan olduğu gibi a'nın masasına aktaralım. Eskiden b'nin oturduğu ve şimdi boş kalan masayı da atalım. Böylece masa sayısı bir azalır.



Eğer a'yla b aynı masada oturuyorlarsa, (aşağıdaki şekilden izleyin) b de dahil olmak üzere, b'nin solunda ve a'nın sağında kalan öğrencileri bu sırayla yeni bir masaya aktaralım. Böylece masa sayısı bir artar. Bu iki işlemin birbirinin tersi olduğuna dikkatinizi çekerim. Yani birinin değiştirdiğini diğeri geri değiştirir. Masa sayısı 1 arttığından ya da 1 azaldığından, k tekse çift olur, çiftse tek olur. Bu da yukarıdaki eşitliğin doğru olduğu anlamına gelir.



Şimdi de $m = n$ olsun. O zaman $s(n,k)S(k,n)$ sayılarından sadece

$$s(n,n)S(n,n)$$

sayısı 0 değildir: $s(n,n)S(n,n) = 1$. Bu durumda eşitlik çok bariz. $\square$

Alıştırmalar

13.1. [GKP] Her $n, k \geq 0$ tamsayıları için, $s(n,k) \geq S(n,k)$ eşitsizliğini kanıtlayın. Eşitlik hangi durumda geçerlidir?

13.2. Aşağıdaki formülleri kanıtlayın.

a. $S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k,m)$

b. $s(n+1, m+1) = \sum_k \binom{k}{m} s(n,k)$

c. $S(n,m) = \sum_k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} S(k+1, m+1)$

d. $s(n,m) = \sum_k (-1)^{m-k} \binom{k}{m} s(n+1, k+1)$

e. $m!S(n,m) = \sum_k (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n$

f. $S(n+1, m+1) = \sum_{k=0}^{n} S(k,m)(m+1)^{n-k}$

g. $s(n+1, m+1) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{s(k,m)}{k!}$

h. $S(m+n+1, m) \sum_{k=0}^{m} kS(n+k, k)$

i. $s(m+n+1, m) = \sum_{k=0}^{m} (n+k) s(n+k, k)$

j. $\binom{n}{m} = \sum_k (-1)^{m-k} S(n+1, k+1) s(k,m)$

k. $S(n, n-m) = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} s(m+k, k)$

l. $s(n, n-m) = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} S(m+k, k)$

14. Üreteç Fonksiyonlarıyla Dizi Formülü Bulmak

Bu bölümün sonuçlarından biri, Fibonacci dizisinin, örneğin, 100.000'inci terimini hemen, çok sade bir formülle hesaplamak için "kapalı" bir formül bulmak olacak. Fibonacci dizisini anımsayalım: $f_0 = f_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}.$$

Bu iki bilgiyle her n doğal sayısı için f_n sayısını bulabiliriz. Ama büyük n sayıları için bu zaman alır. Bu bölümde f_n'yi n cinsinden sınırlı sayıda işlemle (yani işlem sayısı n'ye göre değişmeyecek) hesaplayan bir formül bulacağız. Yöntemimiz sadece Fibonacci dizisine değil, Fibonacci dizisi gibi tümevarımla tanımlanan tüm dizilere (farklı zorluk seviyelerinde) uygulanabilecek. Yani güçlü bir yöntem göstereceğiz. Bunun için "biçimsel kuvvet serisi" kavramına ihtiyacımız olacak. Bu kavramla haşır neşir olmak biraz zamanımızı alacaksa da yöntemin gücü verilen çabaya fazlasıyla değecek.

14.1 Polinomlar

Tanımlayacağımız "biçimsel kuvvet serileri" ya da diğer bir deyişle "üreteç fonksiyonları" polinomların genelleşmiş bir halidir. Dolayısıyla önce kısaca polinomlardan sözedelim. Bir ***polinom***, belirli bir kümeden (genellikle bir sayı kümesinden) seçilmiş sonlu sayıda a_0, a_1, $\ldots$, a_n elemanı için,

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

biçiminde ya da daha kısa olarak,

$$\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$$

biçiminde yazılan bir ifadedir. a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n'lere polinomun ***katsayıları*** denir. a_i'ye i'inci katsayı adı verilir. Birinci katsayı a_1'dir, sıfırıncı, yani ilk katsayı ise a_0'dır. a_0'a polinomun ***sabit katsayısı*** demek daha yaygın ve uygundur. Polinomun katsayıları $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ gibi, elemanlarını toplayıp, çıkarıp, çarpabileceğimiz "matematiksel bir yapıdan" (çarpması değişmeli olan bir "yapı"dan) seçilir. Biz katsayıları istisnasız hep $\mathbb{Q}$ kümesinden seçeceğimizden bundan böyle polinomların katsayılarının kesirli sayı olduklarını varsayacağız.

Bir polinomun bir fonksiyon olmadığına dikkatinizi çekerim. Her $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ polinomu, $\mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ üzerinde

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

kuralıyla tanımlanan bir fonksiyon tanımlar ama polinomun kendisi kesinlikle bir fonksiyon değildir, öyle tanımlanmamıştır çünkü; bir polinom sadece $\sum_{i=0}^n a_i X^i$ şeklinde anlamı olmayan soyut ve biçimsel bir ifadedir.

$\mathbb{Q}$'nun her elemanının bir polinom olarak görülebileceğine dikkat çekelim. Nitekim polinomun tanımında $n = 0$ alırsak, kesirli bir sayı olan a_0'ı buluruz. Yani her kesirli sayı bir polinomdur. Bu arada (yeri geldi çünkü)

$$X^0 = 1,\ X^1 = X,\ 1X^n = X^n$$

eşitliklerini varsayacağımızı da belirtelim. Ayrıca, alışılageldiği üzere, $0X^n$ yerine 0 yazma, hatta hiçbir şey yazmama özgürlüğünü alacağız. Örneğin $X^3 + 2X + 1$ polinomu $1X^3 + 0X^2 + 2X + 1$ polinomu yerine yazılır.

Okurun, polinomlarla toplama ve çarpmanın nasıl yapılabileceğini bildiğini varsayıyoruz. Bu işlemlerle ilgili önemli bir gözlemde bulunacağız.

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

ve

$$b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_mX^m$$

polinomları toplanıp çarpıldığında ilk katsayılar (yani sabit katsayılar) sırasıyla

$$a_0 + b_0 \text{ ve } a_0b_0$$

olur. Bu katsayılar sadece ve sadece a_0 ve b_0'a bağımlıdır, diğer katsayılardan bağımsızdır. İkinci katsayılar ise gene sırasıyla

$$a_1 + b_1 \text{ ve } a_0b_1 + a_1b_0$$

olur. Bu katsayılar da sadece ve sadece a_0, a_1, b_0 ve b_1'e bağımlıdır, diğer katsayılardan bağımsızdır. Üçüncü katsayılar da

$$a_2 + b_2 \text{ ve } a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2$$

olur. Bu katsayılar da sadece ve sadece a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ve b_2'ye bağımlıdır, diğer katsayılardan bağımsızdır. Ve bu böyle devam eder. Polinomların toplamının ve çarpımının k'ıncı katsayısı, çarpılan polinomların ilk $k + 1$ katsayılarına bağımlıdır sadece, daha sonraki katsayılardan bağımsızdır. Genel olarak toplamın k'ıncı katsayısı

$$a_k + b_k$$

olur. Çarpımın k'ıncı katsayısı ise,

$$a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0,$$

yani

$$\sum_{i=0}^{k} a_i b_{n-i},$$

ya da daha kullanışlı bir yazılımla

$$\sum_{i+j=k} a_i b_j$$

olur.

Peki, polinomların sonlu bir toplam olmalarından vazgeçsek ne olur? Gene toplama ve çarpma yapamaz mıyız? Yukarıdaki gibi

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

ve

$$b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_m X^m$$

polinomlarını toplayıp çarpacağımıza, aynı toplama ve çarpma kurallarına uyarak, sonsuza kadar gidebilecek olan

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

ve

$$b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_m X^m + \cdots$$

nesnelerini aynen polinomları çarptığımız gibi toplayıp çarpalım. İlk katsayılar gene polinomlardaki gibi sonlu bir toplamla verilir. İşte bir sonraki altbölümde ayrıntılarıyla ele alacağımız, sonsuza kadar gidebilen bu tür polinomsu nesnelere ***biçimsel kuvvet serisi*** denir.

Katsayıları kesirli olan polinomlar kümesi $\mathbb{Q}[X]$ olarak yazılır. $\mathbb{Q}[X]$ kümesinde tanımladığımız toplama ve çarpma sayılardan aşina olduğumuz birçok özelliği sağlar.

14.2 Biçimsel Kuvvet Serileri

Bir biçimsel kuvvet serisi de bir polinom gibidir ancak sonlu bir toplam olarak yazılma zorunluluğu yoktur, toplanan $a_i X^i$ terimlerinden (ki bunlara ***monom*** adı verilir) sonsuz sayıda olabilir. İşte genel bir kuvvet serisi:

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

Bunu, daha tıkız olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

olarak da yazacağız. İlla somut bir örnek gerekiyorsa hemen verelim:

$$1 + X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots$$

bir biçimsel kuvvet serisidir.

$$1 - X + X^2 - X^3 + \cdots + (-1)^n X^n + \cdots$$

bir başka biçimsel kuvvet serisidir.

$$\exp X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

ve

$$\ell(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n},$$

matematikte iyi bilinen iki biçimsel kuvvet serisidir.

$$\sin X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \cdots$$

ve

$$\cos X = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots$$

biçimsel kuvvet serileri de matematikte iyi bilinirler. $\tan X$ biçimsel kuvvet serisini ileride tanımlayacağız[1].

[1]Buradaki sin, cos ve tan biçimsel kuvvet serilerinin trigonometriyle ilgisi vardır tabii. Biraz önce tanımladığımız $\exp X$ ve $\ell(X)$ kuvvet serileri de e^x ve $\ln(1+X)$ fonksiyonlarıyla bağlantılıdır. Ama bu kitapta bu ilişkilerin hiç önemi olmayacak. Okur analiz dersinde ilişkiyi görecektir ya da görmüştür.

Bir biçimsel kuvvet serisini $a(X)$ olarak kısaltabileceğimiz gibi a olarak da kısaltabiliriz:

$$a = a(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

Polinomlar, belli bir zaman (yani belli bir göstergeçten) sonra katsayıları hep 0 olan biçimsel kuvvet serileri olarak görülebilirler. Örneğin $1-X$ polinomu

$$1 + (-1)X + 0X^2 + 0X^3 + \cdots + 0X^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisi olarak görülebilir. Demek ki her polinom biçimsel bir kuvvet serisidir, yani biçimsel kuvvet serileri genelleştirilmiş polinomlardır.

Katsayıları $\mathbb{Q}$ kümesinden seçilen biçimsel kuvvet serileri kümesi $\mathbb{Q}[[X]]$ olarak gösterilir. Katsayılar $\mathbb{Z}$'de ise biçimsel kuvvet serileri kümesi $\mathbb{Z}[[X]]$ olarak yazılır. Polinomlar kümesi için ise, katsayılara göre, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ yazılımları kullanılır.

Biçimsel kuvvet serisinin a_0 katsayısına, polinomlarda olduğu gibi, ***sabit katsayı*** denir.

X bir sayı olmadığından, biçimsel kuvvet serilerinde (nasıl polinomlarda anlam aranmıyorsa) anlam aranmaz; biçimsel kuvvet serileri oldukları gibi biçimsel olarak kabul edilirler. "Biçimsel" teriminin var oluş nedeni şudur:

$$a(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

ve

$$b(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serilerinin eşit olması için yeter ve gerek koşul her n için $a_n = b_n$ eşitliğidir; yani iki biçimsel kuvvet serisi ancak ve ancak katsayıları eşitse eşit olabilir[2].

Bir $\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ polinomunu bir x sayısında değerlendirebiliriz, yani X yerine x sayısını koyup $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ toplamının değerini hesaplayabiliriz. Sonlu bir toplam sözkonusu olduğundan, sorun yaşamayız. Ancak biçimsel kuvvet serilerinde toplam sonsuza dek gidebileceğinden, bir biçimsel kuvvet serisini bir x sayısında değerlendirmek için sonsuz sayıda toplama yapmak zorunda kalabiliriz, ve böyle bir toplama kimi x'ler için mümkün olsa da her zaman mümkün değildir.

[2]Eğer anlamsız olan X simgesi $1/2$, $\sqrt{2}$, π gibi bir sayı olsaydı, o zaman yazılan sonsuz toplamın bir sayıya eşit olup olmadığı, yani serinin yakınsak olup olmadığı sorusu sorulabilirdi. Örneğin yukarıda tanımladığımız

$$\ell(X) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}$$

biçimsel kuvvet serisinde X yerine 2 koyarsak seri sonsuza ıraksar.

Yukarıda söylediklerimizin tek bir istisnası var: Bir biçimsel kuvvet serisini her zaman 0'da değerlendirebiliriz. Nitekim bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ biçimsel kuvvet serisinde X yerine 0 koyarsak, her $n \geq 1$ için $a_n 0^n = 0$ olduğundan geriye sadece a_0 kalır[3]. Eğer

$$a(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

bir biçimsel kuvvet serisiyse, $a(0) = a_0$ yazacağız. Örneğin, $\exp(0) = 1$ ve $\ell(0) = 0$ olur.

Şimdi biçimsel kuvvet serilerinde toplamayla çarpma işlemlerini tanımlayalım.

14.3 Toplama ve Çarpma

Biçimsel kuvvet serilerini de aynen polinomlar gibi toplayıp çarpabiliriz. Tanımlar şöyle:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) X^n$$

Biçimsel kuvvet serilerinde çıkarmayı ve bir r sayısıyla çarpmayı da tanımlayabiliriz:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) X^n,$$

$$r\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r a_n X^n.$$

Her a, b ve c biçimsel kuvvet serisi ve her $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}
&a + b = b + a,\\
&a(bc) = (ab)c,\\
&ab = ba,\\
&a(b + c) = ab + ac,\\
&-(-a) = a,\\
&a0 = 0a = 0\\
&r(ab) = (ra)b = a(rb)
\end{aligned}$$

gibi beklenen eşitliklerin kolay kanıtlarını okura bırakıyoruz.

[3] Aslında burada $0^0 = 1$ anlaşmasını kullanmak gerekmektedir. Neden olduğunu anladınız mı?

Örnekler

14.1. Bir çarpma örneği verelim. Diyelim

$$a(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)X^n = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[[X]]$$

biçimsel kuvvet serisiyle

$$b(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n X^n = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + \cdots \in \mathbb{Z}[[X]]$$

biçimsel kuvvet serisini çarpmak istiyoruz.

$$a_i = i+1 \text{ ve } b_j = (-1)^j$$

tanımlarını yaparsak, çarpmanın tanımına göre,

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

olmak üzere

$$a(X)b(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$$

olur. Hesabı tamamlamak için c_n sayılarını açık bir biçimde bulalım:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} (-1)^j (i+1) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(i+1) \\ &= (-1)^n \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(i+1) = (-1)^n[(1-2) + (3-4) + \cdots] \end{aligned}$$

olduğundan (en sondaki toplam sonlu adımda duruyor), kolay bir hesapla,

$$c_{2n} = c_{2n+1} = n+1$$

bulunur. Bir başka yazılımla,

$$c_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

(Burada köşeli parantez, içindeki sayının tamkısmı anlamına gelmektedir.) Demek ki,

$$a(X)b(X) = 1 + X + 2X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 3X^5 + 4X^6 + 4X^7 + \cdots$$

olur. Bunu da

$$\begin{aligned} a(X)b(X) &= 1 + X + 2X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 3X^5 + 4X^6 + 4X^7 + \cdots \\ &= (1+X) + 2X^2(1+X) + 3X^4(1+X) + 4X^6(1+X) + \cdots \\ &= (1+X)(1 + 2X^2 + 3X^4 + 4X^6 + \cdots) \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz.

Biraz ileride de göreceğiz, ama okur daha şimdiden

$$(1+X)b(X) = 1$$

eşitliğini kontrol edebilir. Bunu da kale alırsak $a(X)b(X)$ için bulduğumuz eşitliğin her iki tarafını $1+X$ ile çarparak,

$$a(X) = (1+X)^2(1 + 2X^2 + 3X^4 + 4X^6 + \cdots)$$

eşitliğini buluruz. Demek ki, $a(X)$ biçimsel kuvvet serisi $(1+X)^2$ biçimsel kuvvet serisine (ama aslında polinomuna) $\mathbb{Z}[[X]]$ halkasında bölünebilir.

Hesapların son derece biçimsel olduğuna dikkatinizi çekerim: X'e herhangi bir anlam yüklemiyoruz, X'i kendi başına bir varlık olarak kabul ediyoruz.

14.2. Bu yöntemle birçok eşitliğin şaşırtıcı ve son derece estetik kanıtları yapılabilir. Konumuz bu olmadığından tek bir örnek vermekle yetinelim: her n, m, k doğal sayısı için,

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j}$$

eşitliğini kanıtlayalım. Bunun için

$$(1+X)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} X^i$$

(eğer $i > n$ ise, $\binom{n}{k}$ katsayısı tanım gereği 0'dır) ve

$$(1+X)^n(1+X)^m = (1+X)^{n+m}$$

eşitliklerini kullanacağız. Hesaplar şöyle,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+m}{k} X^k &= (1+X)^{n+m} = (1+X)^n(1+X)^m \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} X^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j}\right) X^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j}\right) X^k.\end{aligned}$$

Her iki taraftaki X^k'nın katsayısını eşleyerek dilediğimiz eşitliğe ulaşırız.

Bu eşitliğin ("daha sezgisel" anlamında) daha geometrik kanıtı vardır: n erkek ve m kadının olduğu bir toplulukta k kişilik bir komisyonu kaç farklı biçimde seçebileceğimizi iki farklı biçimde hesaplayalım. Birinci sayım bariz: $n+m$ kişi arasından k kişi seçeceğiz. İkinci sayımı komisyonda bulunan erkek sayısına ($i = 0, 1, 2, \ldots, k$) göre ayrı ayrı yapalım ve bulduğumuz sayıları toplayalım. Sonuca ulaşırız.

14.3. İkiden fazla biçimsel kuvvet serisini çarpabiliriz. Mesela

$$(1+X+X^2+X^3+\cdots)(1+X^2+X^4+X^6+\cdots)(1+X^3+X^6+X^9+\cdots)$$

çarpımından sözedebiliriz. Okur bu çarpımın ilk katsayılarını hesaplamaya çalışmalıdır. Çarpım şöyle başlar:

$$1+X+2X^2+3X^3+4X^4+5X^5+\cdots$$

Bulduğumuz katsayıları yorumlamaya çalışalım. Birinci parantezden bir X^a, ikinci parantezden bir X^{2b} ve üçüncü parantezden bir X^{3c} seçip çarptığımızda $X^{a+2b+3c}$ elde ederiz. Eğer $a+2b+3c = n$ ise, bu çarpımın X^n'nin katsayısına katkısı 1'dir. Ama başka çarpımlar da X^n'yi verebilirler. Mesela X^5'in katsayısını bulmaya çalışalım. (5 olduğunu biliyoruz!) Bu katsayı şu monomların çarpımıyla belirebilir:

$$X^5X^0X^0,\ X^3X^2X^0,\ X^2X^0X^3,\ X^1X^4X^0,\ X^0X^2X^3.$$

Görüldüğü gibi aslında,

$$a + 2b + 3c = 5$$

denkleminin (a, b, c) çözümlerini sayıyoruz: Her çözüm X^5'in katsayısına 1 ekliyor. Çözümler aşağıda:

$$\begin{aligned}
5 &= 5 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0\\
5 &= 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0\\
5 &= 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1\\
5 &= 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0\\
5 &= 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1.
\end{aligned}$$

Bunu anladıysak, X^6'nın da katsayısını hesaplayabiliriz. Bunun için,

$$a + 2b + 3c = 6$$

denkleminin (a, b, c) çözümlerini saymamız gerekir:

$$\begin{aligned}
6 &= 6 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0\\
6 &= 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0\\
6 &= 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1\\
6 &= 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0\\
6 &= 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1\\
6 &= 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0\\
6 &= 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2
\end{aligned}$$

Toplam 7 tane çözüm olduğu için, sonuç 7 çıkar. (Sürpriz?)

14.4. 1, 5, 10, 25 kuruşlarla kaç farklı biçimde 100 lira elde edeceğimizi bulmak için,

$$a + 5b + 10c + 25d = 100$$

denkleminin çözüm sayısını aramalıyız. Bunu bulmak için bir önceki örnekten esinlenebiliriz.

$$\begin{array}{l}
1 + X + X^2 + X^3 + \cdots\\
1 + X^5 + X^{10} + X^{15} + \cdots\\
1 + X^{10} + X^{20} + X^{30} + \cdots\\
1 + X^{25} + X^{50} + X^{75} + \cdots
\end{array}$$

biçimsel kuvvet serilerinin çarpımında x^{100}'ün katsayısını hesaplamalıyız. Şimdilik çok zor gibi görünse de yakın zamanda bu sorunun yanıtını bulacağız (bkz. Örnek 14.15).

Alıştırmalar

14.5. $\exp X \cos X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını hesaplayın.

14.6. $\sin X \cos X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını hesaplayın.

14.7. Örnek 14.3'teki çarpımda, X^7'nin katsayısını hesaplayın.

14.8. $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$ eşitliğini kanıtlayın.

14.9. a, $b \in \mathbb{Q}[[X]]$ olsun. Eğer $ab = 0$ ise ya a'nın ya da b'nin 0 olmak zorunda olduğunu kanıtlayın. Buradan, $ab = ac$ ise $b = c$ olduğunu kanıtlayın.

Verilmiş a, $b \in \mathbb{Q}[[X]]$ için $a = bc$ eşitliğini sağlayan en fazla bir tane $c \in \mathbb{Q}[[X]]$ olabileceğini Alıştırma 14.9'da gördük. Bu durumda "b, a'yı böler" diyeceğiz ve bazen

$$c = \frac{a}{b}$$

yazacağız. Örneğin, eğer katsayılar halkası kesirli sayıları içeriyorsa,

$$\frac{\sin X}{X} \text{ ve } \frac{\exp X - 1}{X}$$

biçimsel kuvvet serileri vardır:

$$\frac{\sin X}{X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n+1)!}$$

ve

$$\frac{\exp X - 1}{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)!}.$$

Bir sonraki altbölümde ne zaman b'nin 1'i böldüğünü, yani ne zaman $1/b$ biçimsel kuvvet serisinin olduğunu göreceğiz.

Bir kuvvet serisinin (mesela) $X+1$'e bölünüp bölünmediğini anlamak kolay olmayabilir ama X'e bölünüp bölünmediğini anlamak kolaydır: Sabit katsayısı 0 olanlar X'e bölünürler. İlk n katsayısı 0 olanlar da tam tamına X^n'ye bölünürler.

Bir $a(X)$ biçimsel kuvvet serisinin $a(X)^2$, $a(X)^3$ gibi kuvvetlerinin nasıl tanımlandığı bariz olmalı. Bazen $a(X)^n$ yerine $a^n(X)$ yazabileceğimizi de belirtelim. Tanım gereği $a^0 = 1$ ve $a^1 = a$ olur.

14.4 Tersinir Biçimsel Kuvvet Serileri

$\mathbb{Z}$'de sadece 1 ve -1 elemanları çarpma için tersinirdir, çünkü mesela 5'in tersi olan $1/5$ sayısı bir tamsayı değildir. Öte yandan $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$'de 0 dışında her eleman çarpma için tersinirdir. Üstünde etkisiz elemanlı bir işlemi olan bir R yapısının tersinir elemanlarının kümesi R^* olarak gösterilir. Demek ki

$$\mathbb{Z}^* = \{1, -1\},$$
$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$
$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olur.

Bir yapıda tersinir olmayan bir eleman, daha büyük bir yapıda tersinir olabilir.

Örnekler

14.10. Örneğin $\mathbb{Z}$'de tersinir olmayan 2 elemanı $\mathbb{Q}$'da tersinirdir.

14.11. $\mathbb{Z}[[X]]$'te de $\mathbb{Z}[X]$'ten çok daha fazla tersinir eleman vardır. Örneğin, $\mathbb{Z}[[X]]$'in $1-X$ elemanı (ki bir polinomdur) elemanı tersinirdir ve bu biçimsel kuvvet serisinin tersi (bir polinom olmayan)

$$1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n + \cdots$$

kuvvet serisidir, nitekim çarpma yapıldığında, kolaylıkla,

$$(1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n + \cdots)(1 - X) = 1$$

elde edilir. Demek ki $1 - X$ polinomu polinomlarda değil ama kuvvet serilerinde tersinirdir.

14.12. Yukarıdaki örnekte X yerine $-X$ koyarsak, $1 + X$ biçimsel kuvvet serisinin de tersinir olduğunu görürüz. Nitekim,

$$(1 - X + X^2 - X^3 + \cdots + (-1)^n X^n + \cdots)(1 + X) = 1$$

eşitliği çarpmanın tanımından kolayca çıkar.

14.13. Örnek 14.11'de X yerine X^2 koyarsak, $1 - X^2$ biçimsel kuvvet serisinin de tersinir olduğunu görürüz. Nitekim,

$$(1 + X^2 + X^4 + X^6 + \cdots + X^{2n} + \cdots)(1 - X^2) = 1$$

eşitliği çarpmanın tanımından kolayca çıkar. X yerine X^5 de koyabilirdik. Bir sonraki altbölümde bu konuda daha fazla şey söyleyeceğiz.

14.14. $2 - X$ polinomu ne $\mathbb{Z}[X]$'te ne de $\mathbb{Z}[[X]]$'te tersinirdir ama $\mathbb{Q}[X]$'te tersinirdir; tersi de

$$\begin{aligned}(2-X)^{-1} &= \left[2\left(1 - \frac{X}{2}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{X}{2}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4} + \cdots + \frac{X^n}{2^n} + \cdots\right)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{X}{2^2} + \frac{X^2}{2^3} + \cdots + \frac{X^n}{2^{n+1}} + \cdots\end{aligned}$$

biçimsel kuvvet serisidir.

14.15. $1, 5, 10, 25$ *kuruşlarla kaç farklı biçimde* 100 *lira elde edebiliriz?*

Çözüm: Bu soruyu Örnek 14.4'te sormuştuk ama çözüme ulaşamamıştık. O örnekte, yanıtı bulmak için

$$\begin{aligned}a(X) &= 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots\\ b(X) &= 1 + X^5 + X^{10} + X^{15} + \cdots\\ c(X) &= 1 + X^{10} + X^{20} + X^{30} + \cdots\\ d(X) &= 1 + X^{25} + X^{50} + X^{75} + \cdots\end{aligned}$$

biçimsel kuvvet serilerinin çarpımındaki X^{100}'ün katsayısını hesaplamamız gerektiğini görmüştük. Şimdi hesaplayabiliriz. Yukarıdaki biçimsel kuvvet serilerinin her biri tersinirdir, dolayısıyla çarpımı terslerinin terslerine eşittir (bkz. Örnek 14.13):

$$a(X)b(X)c(X)d(X) = \frac{1}{1-X}\,\frac{1}{1-X^5}\,\frac{1}{1-X^{10}}\,\frac{1}{1-X^{25}}.$$

Şu tanımları yapalım:

$$\begin{aligned}a(X) &= \frac{1}{1-X} &&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n\\ a(X)b(X) &= \frac{1}{1-X^5}\,a(X) &&= \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n\\ a(X)b(X)c(X) &= \frac{1}{1-X^{10}}\,a(X)b(X) &&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n\\ a(X)b(X)c(X)d(X) &= \frac{1}{1-X^{25}}\,a(X)b(X)c(X) &&= \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n\end{aligned}$$

Amacımız d_{100}'ü hesaplamak. Her n için $a_n = 1$ eşitliğini biliyoruz. Bu dört eşitlikten bir de şunları biliyoruz:

$$
\begin{array}{lclcl}
a(X) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n & = & \left(1 - X^5\right) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \\
a(X)b(X) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n & = & \left(1 - X^{10}\right) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n \\
a(X)b(X)c(X) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n & = & \left(1 - X^{25}\right) \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n.
\end{array}
$$

Dolayısıyla her n için,

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_n - b_{n-5} \\
b_n &= c_n - c_{n-10} \\
c_n &= d_n - d_{n-25}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da şunlar çıkar:

$$
\begin{aligned}
b_n &= a_n + b_{n-5} \\
c_n &= b_n + c_{n-10} \\
d_n &= c_n + d_{n-25}
\end{aligned}
$$

Ayrıca şunları da biliyoruz:
1. Her $n \geq 0$ için $a_n = 1$.
2. Her $n < 0$ için $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$. (Bilmiyorsak da varsayabiliriz!)

Tüm bu bilgilerden d_{100}'ü hesaplayabiliriz. En sonuncu denklemden, d_{100}'ü hesaplamak için d_{75} ve c_{100}'ü hesaplamamız gerektiği çıkar. d_{75}'i hesaplamak için d_{50} ve c_{50}'yi, c_{100}'ü hesaplamak için ise b_{100} ve c_{90}'ı hesaplamamız gerekir. Böylece geriden başlayarak tüm a_n, b_n, c_n ve d_n'leri hesaplayabiliriz. Biraz daha yakından bakınca 5 ve 5'in katları için a_n, b_n, c_n ve d_n'leri hesaplamamız gerektiğini görürüz. Sonuçları bir tabloyla gösterelim:

	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
b_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
c_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90	100	110	121
d_n	1					13					49					121					242

Bu tabloda örneğin b_n'leri hesaplamak için,

$$b_n = a_n + b_{n-5} = 1 + b_{n-5}$$

formülünü kullandık. b_n'leri hesapladıktan sonra c_n'leri hesaplamak için

$$c_n = b_n + c_{n-10}$$

formülünü kullandık. Ardından, d_n'leri hesaplamak için,

$$d_n = c_n + d_{n-25}$$

formülünü kullandık. Sonuç $d_{100} = 242$ çıktı. Bu arada d_0, d_{25}, d_{50}, d_{75} ve d_{1000}'den başka d_n'leri hesaplamanın gereksiz olduğunu gözlemleyebiliriz. Bu örnek [PTW]'deki bir örnekten esinlenilmiştir.

Tüm tersinir biçimsel kuvvet serileri kolaylıkla bulunabilir:

Teorem 14.1. *Katsayıları R'den olan bir $\sum_k a_k X^k$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul a_0'ın R'de tersinir olmasıdır*[4]*.*

Kanıt: Önce $\sum_k a_k X^k$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olduğunu varsayalım. Demek ki

$$\left(\sum_k a_k X^k\right)\left(\sum_k b_k X^k\right) = 1$$

eşitliğini sağlayan bir $\sum_k b_k X^k$ biçimsel kuvvet serisi var. Bundan, $a_0 b_0 = 1$ çıkar ki bu da a_0 elemanı R'de tersinir demektir. Teoremin yarısı kanıtlandı.

Şimdi a_0'ın R'de tersinir olduğunu varsayalım.

$$\left(\sum_k a_k X^k\right)\left(\sum_k b_k X^k\right) = 1$$

eşitliğini sağlayan bir $\sum_k b_k X^k$ biçimsel kuvvet serisi arıyoruz. Yani,

$$\begin{array}{lll}
a_0 b_0 & = 1 & (0) \\
a_0 b_1 + a_1 b_0 & = 0 & (1) \\
a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 & = 0 & (2) \\
\qquad \dots & & \\
a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots\cdots + a_k b_0 & = 0 & (k) \\
\qquad \dots & &
\end{array}$$

denklemlerinin hepsini birden R'de çözmemiz gerekiyor (a'ları biliyoruz, b'leri arıyoruz.) Birinci denklemden başlayıp tüm bu denklemleri teker teker çözelim.

Sıfırıncı denklem kolay: $a_0 \in R^*$ koşulundan dolayı, $a_0 b_0 = 1$ eşitliğini sağlayan bir $b_0 \in R$ vardır: $b_0 = a_0^{-1}$. Birinci denkleme geçelim. Bu denklemde yer alan b_0 zaten bulundu. b_1'i bulmalıyız. Denklem hemen bize b_1'in ne olması gerektiğini söylüyor:

$$b_1 = -a_0^{-1} a_1 b_0.$$

İkinci denkleme geçelim. Bu denklemi sağlayan bir b_2 bulmalıyız. Denklem bize b_2'nin ne olması gerektiğini söylüyor:

$$b_2 = -a_0^{-1}(a_1 b_1 + a_2 b_0).$$

Genel olarak, k'ıncı denkleme bakarak b_k'yi bulabiliriz:

$$b_k = -a_0^{-1}(a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0).$$

[4] Eğer $R = \mathbb{Z}$ ise, bu, $a_0 = \pm 1$ demektir. Eğer $R = \mathbb{Q}$ ya da $\mathbb{R}$ ise, bu, $a_0 \neq 0$ demektir.

Demek ki $\sum_k a_k X^k$ biçimsel kuvvet serisi tersinirmiş ve tersi de

$$a_0^{-1}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k\right)$$

imiş. □

Aynı sonucu biraz ilerde daha şık bir biçimde elde edeceğiz.

Böylece $\cos X$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olduğunu ama $\sin X$ biçimsel kuvvet serisinin tersinir olmadığını görüyoruz. Dolayısıyla

$$\tan X = \frac{\sin X}{\cos X}$$

tanımını yapmaya hakkımız var. Daha genel olarak tersinir bir f kuvvet serisinin tersi f^{-1} ya da $\frac{1}{f}$ olarak yazılır. Bu durumda gf^{-1} kuvvet serisi yerine $\frac{g}{f}$ yazılabilir.

Alıştırmalar

14.16. $\mathbb{Z}[X]^* = \{1, -1\}$ ve $\mathbb{Q}[X]^* = \mathbb{Q}^*$ eşitliklerini kanıtlayın.

14.17. $1/\cos X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını bulun.

14.18. $\tan X$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 6 katsayısını bulun.

14.19. $\exp X$ kuvvet serisinin tersini bulun. $\exp X$'in tersi $\exp(-X)$ olarak yazılır. Neden?

14.20. $\frac{\sin X}{X}$ kuvvet serisinin tersinir olduğunu gösterin ve tersinin ilk 8 katsayısını hesaplayın.

14.21. 5, 10, 50 ve 100 liralık kâğıt paralarla kaç farklı biçimde 1000 lira elde edebiliriz?

14.5 Bileşke

Bazen, ama her zaman değil, sonsuz sayıda biçimsel kuvvet serisini de toplayabiliriz. Zaten her $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ biçimsel kuvvet serisi $a_n X^n$ biçimsel kuvvet serilerinin (ki herbiri bir monomdur) toplamı olarak da görülebilir ve polinom olmayan bir biçimsel kuvvet serisinde bunlardan sonsuz sayıda vardır.

Bir $0 \neq a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ biçimsel kuvvet serisinde $a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0$ ama $a_n \neq 0$ ise, o zaman bu biçimsel kuvvet serisinin ***sırasının*** n olduğunu söyleyelim[5] ve bu durumda $\operatorname{ord} a = n$ yazalım. Demek ki eğer a biçimsel kuvvet serisi X^n'nin bir çarpımıysa (katıysa), yani a biçimsel kuvvet serisi

$$a = a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + \cdots = X^n(a_n + a_{n+1} X + \cdots)$$

biçiminde yazılabiliyorsa, o zaman a'nın sırası en az n'dir. Eğer $a_n = 0$ ise sırası n'den de büyüktür.

[5] İngilizcesi *order*.

$(f_n)_n$ bir biçimsel kuvvet serisi dizisi olsun. Her n için $\operatorname{ord} f_n \geq n$ olsun. Bu durumda

$$f_0 + f_1 + f_2 + \cdots$$

sonsuz toplamına (biçimsel kuvvet serisi serisine) bir anlam verebiliriz. Nitekim, her n için X^n monomu sadece f_0, f_1, ..., f_n biçimsel kuvvet serilerinde belirir ve diğerlerinde belirmez. Dolayısıyla $f_0+f_1+f_2+\cdots$ ifadesinde X^n'nin katsayısını sonlu sayıda toplama yaparak hesaplayabiliriz.

$\operatorname{ord} fg \geq \operatorname{ord} f + \operatorname{ord} g$ olduğundan (katsayıları $\mathbb{Q}$ kümesinden aldığımızdan aslında eşitlik vardır), eğer $\operatorname{ord} f \geq 1$ ise, $\operatorname{ord} f < \operatorname{ord} f^2 < \operatorname{ord} f^3 < \ldots$ olur ve dolayısıyla

$$1 + f + f^2 + f^3 + \cdots$$

toplamı anlamlıdır. Örneğin

$$1 + \sin X + \sin^2 X + \sin^3 X + \cdots$$

sonsuz toplamının anlamı vardır çünkü $\sin X$ serisi X ile başlar, yani sırası 1'dir. Ama

$$1 + \cos X + \cos^2 X + \cos^3 X + \cdots$$

sonsuz toplamının anlamsızdır çünkü $\cos X$'in sırası 0'dır.

Yukarıda söylediklerimizden şu çıkar: Eğer $(f_n)_n$ herhangi bir biçimsel kuvvet serisi dizisiyse,

$$f_0 + Xf_1 + X^2 f_2 + X^3 f_3 + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisi anlamlıdır.

Biçimsel kuvvet serilerinin bileşkesini almaya gelelim. Örneğin $\exp \ell(X)$ ifadesini ele alalım. $\exp \ell(X)$ ne demektir?

$$\exp X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

olarak tanımlanan biçimsel kuvvet serisinde X yerine $\ell(X)$ biçimsel kuvvet serisini koyup,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ell(X)^n}{n!}$$

terimini hesaplıyoruz demektir, yani $\exp X$ biçimsel kuvvet serisini $\ell(X)$ biçimsel kuvvet serisinde değerlendiriyoruz demektir. Bunun bir anlamı var mı? Evet var, çünkü $\operatorname{ord} \ell(X) = 1 > 0$ ve biraz önce sıraları mutlak artan sonsuz sayıda biçimsel kuvvet serisini toplayabileceğimizi gördük.

Eğer $a(X)$ ve $b(X)$ birer biçimsel kuvvet serisi ise $a(b(X))$ ifadesine bir anlam vermek istiyoruz, $a(X)$ biçimsel kuvvet serisini $b(X)$ biçimsel kuvvet serisinde değerlendirip, yani X yerine $b(X)$ koyup mümkünse bir başka biçimsel kuvvet serisi elde etmek istiyoruz. Bunun için $\operatorname{ord} b(X) > 0$ koşulu yeterlidir.

Ama mesela $a(X)$ biçimsel kuvvet serisinde X yerine $1+X$ koyamayız; koymayı deneyelim, bakalım başımıza neler gelecek:

$$a(1+X) = a_0 + a_1(1+X) + a_2(1+X)^2 + \cdots + a_n(1+X)^n + \cdots$$

Bu şeyin sabit terimi hesaplamak için, halkada

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

sonsuz toplamı hesaplamamız gerektiğini görüyoruz. Diyelim bu sonsuz toplamla bir biçimde başa çıkabildik. Ama bir sonraki aşamada $a(1+X)$ ifadesinde X'in katsayısını hesaplamak için, halkada,

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n + \cdots$$

sonsuz toplamını hesaplamamız gerektiğini görürüz. Daha sonraki katsayılar için daha da karmaşık toplamlar belirir.

Burada sorun yaratan $1+X$'in 0'a eşit olmayan sabit katsayısıdır (yani 1'dir). $1+X$ yerine sabit terimi 0 olmayan hangi polinomu alırsak alalım benzer sorunu yaşarız. Örneğin, $a(2-3X+X^2)$ ifadesini hesaplamak istersek, $2-3X+X^2$'nin sabit katsayısı olan 2 sorun yaratır. (İnanmayan açık açık yazsın $a(2-3X+X^2)$ ifadesini.) Sabit terim 0 olmazsa benzer sorun hep yaşanır, her seferinde R'de sonsuz bir seri hesaplamak zorunda kalırız.

Bu zorluktan kurtulmanın en kolay yolu b'nin sabit terimini 0 almaktır, yani $\operatorname{ord} b \geq 1$ koşulunu varsaymaktır. Nitekim bir biçimsel kuvvet serisini, sabit terimi 0 olan bir başka biçimsel kuvvet serisinde değerlendirebiliriz. Bunu bu altbölümün başında görmüştük.

Örneğin,

$$a(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisinde X yerine $-X$ alıp,

$$a(-X) = a_0 - a_1X + a_2X^2 - \cdots + (-1)^n a_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz. Ya da X yerine $2X$ koyup,

$$a(2X) = a_0 + 2a_1X + 4a_2X^2 + \cdots + 2^n a_nX^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz. Ya da X yerine X^2 koyup,

$$a(X^2) = a_0 + a_1X^2 + a_2X^4 + \cdots + a_nX^{2n} + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz.

Bu bölümün ana sonucu aslında bir tanım, o tanımı yazalım: *Eğer $b(X)$ biçimsel kuvvet serisinin sabit katsayısı 0'sa, o zaman herhangi bir $a(X)$ biçimsel kuvvet serisinde X yerine $b(X)$ koyup $a(b(X))$ biçimsel kuvvet serisini elde edebiliriz.*

Bu durumda, a ve b'nin (bu sırayla) ***bileşkesi*** adı verilen $a(b(X))$ biçimsel kuvvet serisi bazen $a \circ b$ olarak yazılır.

Örnek 14.22. $\exp \ell(X)$ biçimsel kuvvet serisi anlamlıdır. Ayrıca, $-1+\exp X$ biçimsel kuvvet serisinin sabit katsayısı 0 olduğundan, $\ell(-1+\exp X)$ biçimsel kuvvet serisi de vardır.

Bir an $\exp \ell(X)$'i elle bulmaya çalışalım.

$$\exp X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisinde X yerine

$$\ell(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \frac{X^5}{5} - \cdots$$

koymak gerekir. Okur deneyip bunun hiç de kolay bir hesap olmadığını görmeli. Hatta zamanına acımayıp $\exp \ell(X)$'in ilk dört katsayısını hesaplamaya çalışmalıdır. Nihai sonuç $\exp \ell(X) = 1 + X$ çıkar ama bunun kanıtını buraya almak istemiyoruz, isteyen okur [N2]'ye başvurabilir.

Bileşke tanımını kullanarak Teorem 14.1'i bir defa daha kanıtlayabiliriz.

Teorem 14.1'in İkinci Kanıtı: Önce şu basit gözlemi yapalım: Daha önce farkına vardığımız

$$\left(1 + X + X^2 + X^3 + \cdots + X^n + \cdots\right)(1 - X) = 1 \tag{1}$$

eşitliğinde X yerine sabit katsayısı 0 olan herhangi bir biçimsel kuvvet serisi alabiliriz. Şimdi a, sabit terimi tersinir olan bir biçimsel kuvvet serisi olsun. Eğer $a(0) = 1$ ise,

$$a(X) = 1 - Xb(X)$$

olarak yazılabilir; nitekim

$$a(X) = 1 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

ise, $b(X)$'i

$$b(X) = -a_1 - a_2X - a_3X^2 - \cdots - a_nX^{n-1} - \cdots$$

olarak almak yeterlidir. Şimdi $a(X)$'in tersini kolayca buluruz: Bunun için (1) eşitliğinde X yerine sabit terimi 0 olan $Xb(X)$ almak yeterlidir, Altbölüm 14.5'e göre buna hakkımız olduğunu biliyoruz.

$$1 + Xb(X) + X^2b(X)^2 + \cdots + X^nb(X)^n + \cdots$$

biçimsel kuvvet serisi $1 - Xb(X)$'in yani $a(X)$'in tersidir.

En genel durum: Eğer $a(0) \in R^*$ ise (ama illa 1'e eşit değilse), o zaman $a(X)$'in tersini bulmak için $a(0)^{-1}a(X)$ biçimsel kuvvet serisi ele alınır (çünkü bunun sabit katsayısı 1'dir) ve yukarıdaki yöntem uygulanır. □

Örneğin, $\exp 0 = 1$ olduğundan, $\exp X$ tersinirdir. $\exp X$ biçimsel kuvvet serisinin tersinin $\exp(-X)$ olduğunu okur kanıtlayabilir.

$$\cos X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} X^{2i}$$

kuvvet serisi $\mathbb{Q}[[X]]$'te tersinirdir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos X} &= \frac{1}{1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots} = \frac{1}{1 - \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right)} \\ &= 1 + \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots \\ &= 1 + \left(\frac{X^2}{2!} - \frac{X^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{X^4}{4!} + \cdots\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{X^2}{2!} + \left(\frac{-1}{24} + \frac{1}{4}\right) T^4 + \text{daha üst dereceden terimler.}\end{aligned}$$

Ama

$$\sin X = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} X^{2i+1}$$

biçimsel kuvvet serisi $\mathbb{Q}[[X]]$'te tersinir değildir çünkü X ile başlar. Öte yandan $1 + \sin X$ biçimsel kuvvet serisi $\mathbb{Q}[[X]]$'te terisinirdir ve tersi de

$$1 - \sin X + \sin^2 X - \sin^3 X + \sin^4 X - \cdots$$

kuvvet serisidir. Bu biçimsel kuvvet serisinin ilk birkaç katsayısını bulmayı deneyebilirsiniz. $2 + X$ biçimsel kuvvet serisinin $\mathbb{Z}[[X]]$'te tersinir olmadığını ama $\mathbb{Q}[[X]]$'te tersinir olduğuna dikkatinizi çekeriz.

Alıştırmalar

14.23. $1 + \sin X + \sin^2 X + \sin^3 X + \cdots$ kuvvet serisinin ilk 8 terimini hesaplayın.

14.24. $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ biçimsel bir kuvvet serisiyse ve $f(X) = f(-X)$ ise, her n için $a_{2n+1} = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

14.25. $f(-X) = -f(X)$ ise f'nin katsayıları hakkında ne söyleyebiliriz?

14.26. $f(X) = f(X^2)$ ise f'nin sabit olduğunu kanıtlayın.

14.27. $\frac{\exp X - 1}{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{(n+1)!}$ biçimsel kuvvet serisinin başkatsayısı 1'dir, dolayısıyla tersinirdir. B_n sayılarını,

$$\frac{X}{\exp X - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} X^n$$

olarak tanımlayalım. Bu sayılara ***Bernoulli sayıları*** adı verilir. $B_0 = 1$ ve $n > 1$ için

$$\frac{B_0}{n!0!} + \frac{B_1}{(n-1)!1!} + \cdots + \frac{B_{n-1}}{1!(n-1)!} = 0$$

eşitliklerini kanıtlayın. Eğer $n > 1$ bir tek sayıysa $B_n = 0$ eşitliğini kanıtlayın (bkz Alıştırma 14.24).

14.28. $\sin(\cos X)$ biçimsel kuvvet serisinin ilk 8 katsayısını hesaplayın.

14.6 Kuvvet Serileriyle Dizi Formülü Bulmak

Bu altbölümde, önceki altbölümlerde açıkladığımız teorinin ürünlerini alacağız. Konuyu örneklerle anlatmanın en doğrusu olduğunu düşünüyoruz.

Bu arada, aşağıdaki kapsamlarda kullanıldığında, biçimsel kuvvet serisi yerine üreteç fonksiyonu dendiğini söyleyelim.

Örnekler

14.29. Yanıtını önceden tahmin edebileceğimiz bir soruyla başlayalım. $a_0 = 0$ olsun ve $n \geq 0$ için,

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \tag{1}$$

tanımını yapalım. Bu tanım her n doğal sayısı için a_n'yi belirler.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{0+1} = 2a_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1, \\ a_2 &= a_{1+1} = 2a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3, \\ a_3 &= a_{2+1} = 2a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7, \\ a_4 &= a_{3+1} = 2a_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 \end{aligned}$$

Her seferinde, bir önceki terimi 2'yle çarpıp 1 ekliyoruz. İlk terimi ($a_0 = 0$) bildiğimiz için tüm a_n terimlerini bu yöntemle bulabiliriz. Sonraki terimler 31, 63, 127 olacak. Ama a_{1000} sayısını bulmak için bu işlemi (2'yle çarpıp 1 ekleme işlemini) 999 defa yapmalıyız... Bu yüzden a_n sayısını veren "kapalı" bir formül tercih edilir. Bu örnekte kapalı formülü bulmak zor değil. Yukarıda hesaplanan terimlere 1 eklersek neyin ne olduğu anlaşılıyor:

$$\begin{aligned} a_0 + 1 &= 0 + 1 = 1 = 2^0, \\ a_1 + 1 &= 1 + 1 = 2 = 2^1, \\ a_2 + 1 &= 3 + 1 = 4 = 2^2, \\ a_3 + 1 &= 7 + 1 = 8 = 2^3, \\ a_4 + 1 &= 15 + 1 = 16 = 2^4. \end{aligned}$$

Belli ki, $a_n + 1 = 2^n$ ve

$$a_n = 2^n - 1.$$

Bu sadece bir tahmin tabii ki. (Hem de çok güçlü bir tahmin.) Bu tahmini tümevarımla kanıtlamak gerekiyor, ki bu da çok zor bir uğraş değildir. Bu bölümde bu ve bunun gibi diziler için bir formül bulmanın bir başka yolunu bulacağız.

(1) formülünün taraflarını X^n ile çarpıp her iki tarafı tüm n doğal sayıları için toplayalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2a_n+1)X^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nX^n + \sum_{n=0}^{\infty} X^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n + \sum_{n=0}^{\infty} X^n.$$

Bu aşamada,

$$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n = X + 3X^2 + 7X^3 + \cdots$$

tanımını yapalım.
Bu tanımdan sonra biraz önce bulduğumuz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n + \sum_{n=0}^{\infty} X^n$$

eşitliğinin sol ve sağ taraflarını $A(X)$ cinsinden ayrı ayrı hesaplayalım.
Önce sol taraf. Sol tarafı X'le çarparsak, neredeyse $A(X)$'i elde ederiz, sadece $A(X)$'in ilk terimi olan a_0 eksik kalır, ama a_0 zaten 0'a eşit. Demek ki,

$$X\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^n = A(X)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^n = \frac{A(X)}{X}.$$

Sol tarafı bulduk. Şimdi sıra sağ tarafta. Sağ tarafta iki kuvvet serisi var. Birincisinin ne olduğu belli: $2A(X)$'e eşit. İkincisi ise $1/(1-X)$. Sonuç olarak,

$$\frac{A(X)}{X} = 2A(X) + \frac{1}{1-X}.$$

eşitliğini buluruz. Buradan da

$$A(X) = 2XA(X) + \frac{X}{1-X}$$

ve

$$A(X) = \frac{X}{(1-X)(1-2X)}$$

çıkar. Şimdi öyle a ve b sayıları bulalım ki,

$$\frac{1}{(1-X)(1-2X)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{1-2X}$$

olsun. a ve b'yi bulmanın bin türlü yöntemi vardır; işte bunlardan biri: Eşitliği $1-X$ ile çarpıp $X=1$ alırsak[6] , $a=-1$ buluruz. Aynı eşitliği $1-2X$ile çarpıp $X=1/2$ alırsak, $b=2$ buluruz. Demek ki, a ve b varsa, ancak $a=-1, b=2$ olmalı. Nitekim bu değerlerle yukarıdaki eşitliğin sağlanacağını kontrol etmek hiç zor değil. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{(1-X)(1-2X)} = \frac{2}{1-2X} - \frac{1}{1-X}$$

[6]Daha doğrusu eşitliği 1'de değerlendirirsek... Bir polinomu bir sayıda değerlendirmek bir sorun yaratmaz ama bir kuvvet serisini bir sayıda değerlendirebilmek için analiz gibi bazı derin konular gerekebilir. Okur ya [N2, Bölüm 22.7]'ye başvursun ya da hoşgörsün.

olur. Bu aşamada

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n \text{ ve } \frac{1}{1-2X} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n$$

eşitliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-X)(1-2X)} &= \frac{2}{1-2X} - \frac{1}{1-X} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n - \sum_{n=0}^{\infty} X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} X^n - \sum_{n=0}^{\infty} X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}-1\right) X^n\end{aligned}$$

buluruz. Biraz önce $A(X)$ için bulduğumuz formülden,

$$A(X) = \frac{X}{(1-X)(1-2X)} = X\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}-1\right) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}-1\right) X^{n+1}$$

çıkar. Şimdi $A(X)$ için iki eşitliğimiz var, biri tanımdaki, diğeri üst satırdaki:

$$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1}-1\right) X^{n+1}.$$

Katsayılar eşit olmak zorunda olduğundan (çünkü bunlar **biçimsel** kuvvet serileri),

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

elde ederiz, en başta tahmin ettiğimiz gibi...

14.30. Bu sefer $a_0 = 1$ olsun ve $n \geq 0$ için,

(2) $$a_{n+1} = 2a_n + n$$

tanımını yapalım. Bu tanım her n doğal sayısı için a_n'yi verir. İlk a_n değerlerini hesaplarsak,

1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, 248

buluruz. Bu sefer dizgiyi tahmin etmek hiç kolay değil. Ama her seferinde önceki sayıyı 2 ile çarptığımız için, daha doğrusu,

$$a_{n+1} = 2a_n + n \geq 2a_n$$

eşitsizliğinden dolayı,

$$a_{n+1} \geq 2a_n \geq 4a_{n-1} \geq 8a_{n-2} \geq \ldots \geq 2^{n+1}a_0 = 2^{n+1}$$

olur Yani $(a_n)_n$ dizisi üstsel büyür.

Bir önceki örnekteki yöntemi kullanarak dizinin terimlerinin kapalı bir formülünü bulacağız.

(2) eşitliğinin taraflarını X^n ile çarpıp n üzerinden toplayalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n+n)\,X^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nX^n + \sum_{n=0}^{\infty} nX^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n + \sum_{n=0}^{\infty} nX^n.$$

Yine

$$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

tanımını yapıp bir önceki eşitliği $A(X)$ cinsinden ifade edelim. Sol taraf bir önceki örnekteki gibi (ama bu sefer $a_0 = 0$ değil, $a_0 = 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}X^n = \frac{A(X)-1}{X}.$$

Sağ tarafın birinci serisi $2A(X)$'e eşit. En zoru en sağdaki terim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nX^n$$

Bu sonsuz toplamı bulmak için türev kavramını kullanabiliriz. (Ama toplamı bulduktan sonra, bulduğumuz eşitliğin doğru olduğunu türev kavramını kullanmadan kanıtlayabiliriz.) Daha önce de gördüğümüz

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$$

eşitliğinin her iki tarafının da formel türevlerini alalım:

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} nX^{n-1} = \frac{1}{(1-X)^2}$$

elde ederiz. Her tarafı X ile çarparsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nX^n = \frac{X}{(1-X)^2}$$

buluruz. Şimdi yukarıdaki eşitliği $A(X)$ cinsinden ifade edebiliriz:

$$\frac{A(X)-1}{X} = 2A(X) + \frac{X}{(1-X)^2}.$$

Buradan kolay bir hesapla $A(X)$'i çekelim:

$$A(X) = \frac{1-2X+2X^2}{(1-X)^2(1-2X)}.$$

Şimdi,

$$\frac{1-2X+2X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{a}{(1-X)^2} + \frac{b}{1-X} + \frac{c}{1-2X}$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c sayılarını bulalım. Eşitliği $1-2X$ ile çarpıp $X = 1/2$ alırsak, $c = 2$ buluruz. Eşitliği $(1-X)^2$ ile çarpıp $X = 1$ alırsak, $a = -1$ buluruz. Eşitliği $1-X$ ile çarpıp X'i sonsuza götürürsek,

$$1 - b + \frac{c}{2} = b + 1,$$

yani $b = 0$ buluruz. Demek ki,

$$A(X) = \frac{1-2X+2X^2}{(1-X)^2(1-2X)} = \frac{-1}{(1-X)^2} + \frac{2}{1-2X}.$$

Sağda toplanan iki terimi kuvvet serisi olarak hesaplayalım. İlk terimi bulmuştuk ve sonucu (3) olarak yazmıştık. İkinci terim de geometrik seri olarak ifade edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}A(X) &= -\sum_{n=1}^{\infty} nX^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)X^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n X^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1} - n - 1\right)X^n\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki $A(X)$'in n'inci katsayısı a_n'yi bulduk:

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1.$$

14.31. Bu örnekte meşhur Fibonacci dizilerini de ele alacağız. Fibonacci dizileri, $n \geq 1$ için

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \tag{4}$$

eşitliğiyle verilmiştir, yani dizinin her terimi daha önceki iki terimin toplamıdır. Eğer ilk iki terim olan f_0 ve f_1 (ayrıca) verilmişse, tüm dizi bu ilişkiyle belirlenir. Genel olarak $f_0 = f_1 = 1$ alınır; biz de öyle yapalım. Böylece,

$$\begin{aligned}f_2 &= f_1 + f_0 = 1+1 = 2\\ f_3 &= f_2 + f_1 = 2+1 = 3\\ f_4 &= f_3 + f_2 = 3+2 = 5\\ f_5 &= f_4 + f_3 = 5+3 = 8\\ f_6 &= f_5 + f_4 = 8+5 = 13\end{aligned}$$

bulunur ve bu prosedür hayat izin verdiği sürece devam ettirilebilir.
Her f_n'yi teorik olarak hesaplayabiliriz belki ama pratikte f_{1000}'i ya da $f_{1.000.000}$'u hesaplamak çok uzun süre alacağından, f_n için kapalı bir formül bulmak işimize gelir. Bu örnekte bunu yapacağız.
Daha önceki örneklerde olduğu gibi (4) dizisini X^n ile çarpıp toplayacağız.

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n$$

tanımını yaparsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}X^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X^n + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}X^n$$

ilişkisinden önce

$$\frac{F(X) - 1 - X}{X} = (F(X) - 1) + XF(X),$$

sonra da

$$F(X) = \frac{1}{1 - X - X^2}$$

bulunur. Devam edelim. $1 - X - X^2$ polinomunun iki kökü vardır:

$$u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}61803 \text{ ve } v = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \simeq -1{,}61803.$$

(Bu arada $u + v = -1$, $uv = -1$ ve $u - v = \sqrt{5}$ eşitliklerini görelim, hesap yapmakta yararlı olabilirler.) Demek ki $1 - X - X^2$ polinomu,

$$1 - X - X^2 = -(X-u)(X-v)$$

olarak ayrışır. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned}
F(X) &= \frac{1}{1-X-X^2}\\
&= \frac{-1}{(X-u)(X-v)}\\
&= \frac{1}{u-v}\left(\frac{1}{X-v}-\frac{1}{X-u}\right)\\
&= \frac{1}{u-v}\left(\frac{-1/v}{1-X/v}+\frac{1/u}{1-X/u}\right)\\
&= \frac{1}{u-v}\left(\frac{-1}{v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{v^n}+\frac{1}{u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{u^n}\right)\\
&= \frac{1}{u-v}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{u^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{v^{n+1}}\right)\\
&= \frac{1}{u-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{n+1}-u^{n+1}}{(uv)^{n+1}}X^n\\
&= \frac{1}{u-v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{n+1}-u^{n+1}}{(-1)^{n+1}}X^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{v^{n+1}-u^{n+1}}{u-v}X^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{v^{n+1}-u^{n+1}}{\sqrt{5}}X^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Demek ki,

$$f_n = (-1)^{n+1}\frac{v^{n+1}-u^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

olur. İstediğimizi bulduk. Bu formülü biraz daha güzelleştirebiliriz.

$$s = -u = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}61803 \text{ ve } t = -v = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}61803$$

olsun. O zaman,

$$f_n = \frac{t^{n+1}-s^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

olur. Sağdaki sayının bir tamsayı çıkması bile başlı başına şaşırtıcı bir olay!

Bu son formül sayesinde, f_n'nin yaklaşık değerini de bulabiliriz. $|s| < 1$ olduğundan, n çok çok büyükten v^{n+1} çok çok küçük bir sayıdır. Dolayısıyla

$$f_n \approx \frac{t^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

olur. Hatta her $n \geq 0$ için $0 < |s|^{n+1}/\sqrt{5} \leq 0{,}3 < 1/2$ olduğundan, f_n, $t^{n+1}/\sqrt{5}$ sayısına en yakın doğal sayıdır. Aşağıdaki tablo bunun doğruluğunu teyit ediyor:

n	$t^{n+1}/\sqrt{5}$	f_n
0	$0,723606798$	1
1	$1,170820393$	1
2	$1,894427191$	2
3	$3,065247584$	3
4	$4,959674775$	5
5	$8,024922359$	8
6	$12,98459713$	13
7	$21,00951949$	21
8	$33,99411663$	34
9	$55,00363612$	55
10	$88,99775275$	89
11	$144,0013889$	144
12	$232,9991416$	233
13	$377,0005305$	377

15. Parçalanış Sayısı

Bir doğal sayının, doğal sayıların toplamı olarak yazılış sayısına o sayının ***parçalanış sayısı*** denir. Örneğin,

$$3 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$$

olduğundan ve 3'ün başka parçalanışı olmadığından, 3'ün parçalanış sayısı 3'tür. n'nin parçalanış sayısı $p(n)$ olarak gösterilir. Bu sayıların birkaçını yandaki tabloda görebilirsiniz.

n	$p(n)$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
7	15
8	22
9	30
10	42
11	56
12	77
13	101
14	135
15	176
50	204.226
100	190.569.292
150	40.853.235.313
200	3.972.999.029.388
250	230.793.554.364.681
300	9.253.082.936.723.602

Örneğin $n = 4$ için parçalanışlar şöyle:

$$\begin{aligned}4 &= 4\\ &= 2 + 2\\ &= 1 + 3\\ &= 1 + 1 + 2\\ &= 1 + 1 + 1 + 1,\end{aligned}$$

demek ki $p(4) = 5$. Dikkat edilirse $1+3$ parçalanışıyla $3 + 1$ parçalanışı arasında bir ayrım yapmıyoruz, bunları aynı parçalanış olarak kabul ediyoruz.

$p(n)$ sayısı üzerine ilk düşünen matematikçi Leibniz'tir (1669). O zamandan bu zamana $p(n)$'nin "kapalı" bir formülü bulunamamıştır[1].

Formülünü bulamasa da, İsviçreli büyük matematikçi Euler bu sayının hesaplanması için kolay bir yöntem bulmuştur (1740). Bu yöntemi açıklayacağız şimdi.

[1] Kapalı bir formül olmayabilir de. Kapalı formül sayısı sayılabilir sonsuzluktadır. Oysa $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye sayılamaz sonsuzlukta fonksiyon vardır. Bkz. Sezgisel Kümeler Kuramı [N1].

Bir örnekle başlayalım. 24'ün bir parçalanışına bakalım:

$$24 = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 5 + 5.$$

Burada

3 tane 1

4 tane 2

1 tane 3

0 tane 4

2 tane 5

var ve 5'ten büyük sayı da yok.

$$k_1 = 3,$$
$$k_2 = 4,$$
$$k_3 = 1,$$
$$k_4 = 0,$$
$$k_5 = 2,$$

ve $i > 5$ için

$$k_i = 0$$

olsun. Demek ki bu k_i sayıları,

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 + 6k_6 + \cdots + 24k_{24} = 24$$

denkleminin bir çözümü. Ve bu denklemin her çözümü bize 24'ün bir parçalanışını verir. Örneğin bir çözümde $k_6 = 2$ ise, bu, çözümün 24'ü verdiği parçalanışta iki tane 6 var demektir. Çözümdeki k_i sayısı toplamda kaç adet i olacağını söyler.

Parçalanış sayısını hesaplamakta bu fikri kullanacağız.

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n = n$$

denkleminin $\mathbb{N}$'deki çözüm sayısı aynen n'nin parçalanış sayısına eşittir. **Not:** nk_n'de durmak zorunda değildik. Sonsuza kadar gidebilirdik, ne de olsa, k_{n+1}, $k_{n+2}, \ldots$ sayılarının hepsi 0 olmak zorundadır.

Parçalanış Sayısını Hesaplamak. Şu kuvvet serisini ele alalım:

$$\alpha(X) := 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots$$

Burada X yerine X^k alırsak,

$$\alpha(X^k) = 1 + X^k + X^{2k} + X^{3k} + \cdots$$

elde ederiz. Şimdi bu serileri $k = 1, 2, 3, \ldots$ için çarpalım, yani

$$(1+X+X^2+X^3+\cdots)(1+X^2+X^4+\cdots)(1+X^3+X^6+\cdots)(1+X^4+X^8+\cdots)\cdots$$

çarpımını, ya da daha modern bir yazılımla,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + X^k + X^{2k} + X^{3k} + \cdots).$$

çarpımını hesaplayalım. Dikkat, burada sonsuz sayıda kuvvet serisi çarpılıyor. Sonsuz sayıda kuvvet serisini çarpmanın kolay olmadığını söyleyebilirsiniz. Kolay değildir, her zaman mümkün de değildir ama bu örnekte mümkün.

Örneğin bu sonsuz çarpımda 1, X, X^2, X^3, X^4 ve X^5'in katsayılarını hesaplamak için, $k \geq 6$ için tüm X^k'ları yok sayabiliriz çünkü bunların X^5'in katsayısına etkisi yoktur. İşte ilk altı katsayıyı bulan o hesap:

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{\infty}(1 + X^k + X^{2k} + X^{3k} + \cdots)\\
&= (1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5)(1 + X^2 + X^4)(1 + X^3)(1 + X^4)(1 + X^5) + X^6(\cdots)\\
&= (1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5)(1 + X^2 + X^4)(1 + X^3 + X^4 + X^5) + X^6(\cdots)\\
&= (1 + X + 2X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 3X^5)(1 + X^3 + X^4 + X^5) + X^6(\cdots)\\
&= 1 + X + 2X^2 + 3X^3 + 5X^4 + 7X^5 + X^6(\cdots)
\end{aligned}$$

(Parantezler içinde üç nokta yerine kuvvet serileri olacak ama bizi ilgilendirmediğinden yazmadık.) Bulduğumuz katsayılara dikkat ettiniz mi? Çarpmayı devam ettirelim ve birkaç katsayı daha hesaplayalım:

$$1 + X + 2X^2 + 3X^3 + 5X^4 + 7X^5 + 11X^6 + 15X^7 + 22X^8 + 30X^9 + 42X^{10} + 56X^{11} + \cdots$$

Katsayıları gördünüz mü? Sabit terimi sıfırıncı katsayı olarak sayarsak, k'inci katsayı $p(k)$. Şaşırtıcı bir biçimde,

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + X^k + X^{2k} + X^{3k} + \cdots) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)X^k$$

eşitliği geçerlidir. (Burada $p(0) = 1$ aldık.) Her ne kadar şaşırtıcıysa da, bunun kanıtı pek zor değildir. Bu eşitlik üzerine biraz düşünen okur eşitliğin nedenini kendi kendine bulur sanıyorum. Açıklaması şöyle: Diyelim çarpımın sonucundaki X^n teriminin katsayısını hesaplamak istiyoruz.

$$(1 + X + X^2 + \cdots)(1 + X^2 + X^4 + X^6 + \cdots)(1 + X^3 + X^6 + \cdots)(1 + X^4 + X^8 + \cdots)\cdots$$

Çarpımı yapıp parantezleri (sonsuz tane var ama olsun!) açtığımızda X^n terimini nasıl elde edeceğimizi anlamaya çalışalım. Her parantezden bir X^i terimi seçip bunları çarpıyoruz, yani üsleri topluyoruz ve çarpımın kaç kez X^n olacağını anlamaya çalışıyoruz. Birinci parantezden X^{k_1} seçmiş olalım, ikinci parantezden X^{2k_2} seçmiş olalım, üçüncü parantezden X^{3k_3} seçmiş olalım, ... O zaman bunların çarpımı

$$X^{k_1+2k_2+3k_3+\cdots}$$

olur. Demek ki, $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots$ toplamı ne kadar n ederse, çarpımda o kadar çok X^n elde ederiz. Bu da tam n'nin parçalanış sayısıdır.

Alıştırmalar

15.1. $p(1000) = 24.061.467.864.032.622.473.692.149.727.991$ eşitliğini kanıtlayın. (Şaka şaka...)

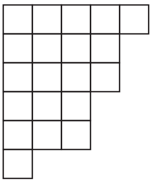
15.2. $p(k, n)$, n'nin k'dan büyükeşit sayılar kullanılarak yazıldığı parçalanmalar olsun. Aşağıdakileri kanıtlayın.

a. Eğer $k > n$ ise $p(k, n) = 0$.
b. $p(n, n) = 1$.
c. $p(n-1, n) = 2$.
d. $p(1, n) = p(n)$.
e. Eğer $k < n$ ise $p(k, n) = p(k+1, n) + p(k, n-k)$.
f. $i = 1, 2, 3, 4, 5$ için $p(i, 2^{i+1}) = 2i + 3$. Ama $i = 6$ için ne elde ediyorsunuz?
g. $1 + \sum_{k=1}^{[n/2]} p(k, n-k) = p(n)$.

Young Tabloları. Her parçalanış, adına ***Young tablosu*** denilen bir şekille gösterilebilir. Örneğin, 20'nin

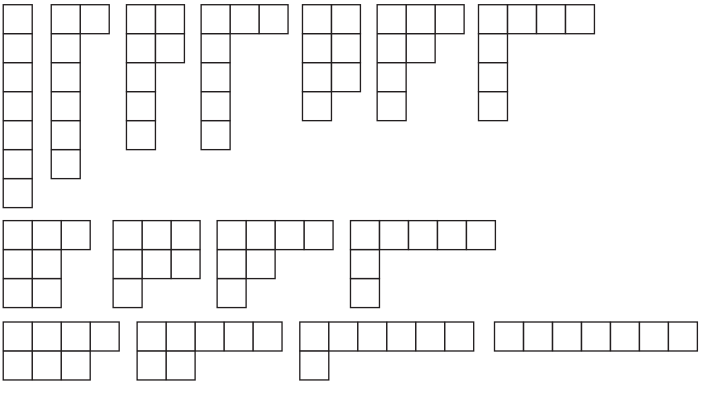
$$20 = 6 + 5 + 5 + 3 + 1$$

parçalanışı,



6 + 5 + 5 + 3 + 1 = 20 parçalanışına
tekabül eden Young tablosu

Young tablosuyla gösterilebilir. n tane birim kareden oluşmuş her Young tablosu n'nin bir parçalanışını verir ve n'nin her parçalanışı n tane birim kareden oluşmuş bir Young tablosuna tekabül eder. Örneğin 7'nin 15 parçalanışının Young tabloları şöyledir:

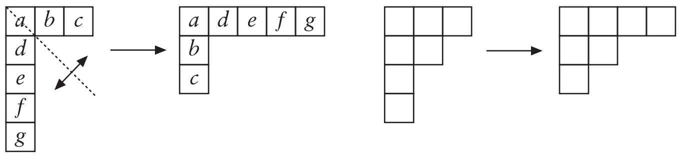


Young tabloları üstten hizalanırlar ve soldan sağa doğru büyükten küçüğe dizilirler.

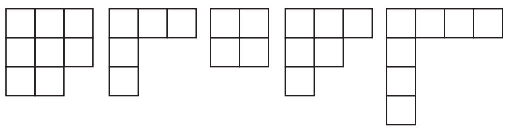
Yukarıdaki bazı Young tablolarının birbirinin simetriği olduğu gözünüze çarpmıştır. Bu fikri kullanacağız.

Young tablolarının matematiğin çeşitli alanlarında uygulamaları vardır. Daha çok, oldukça çetrefilli cebirsel ya da burada olduğu gibi kombinatorik bir durumu kolayca akılda tutmaya yarayan bir tür geometrik kısaltmadır.

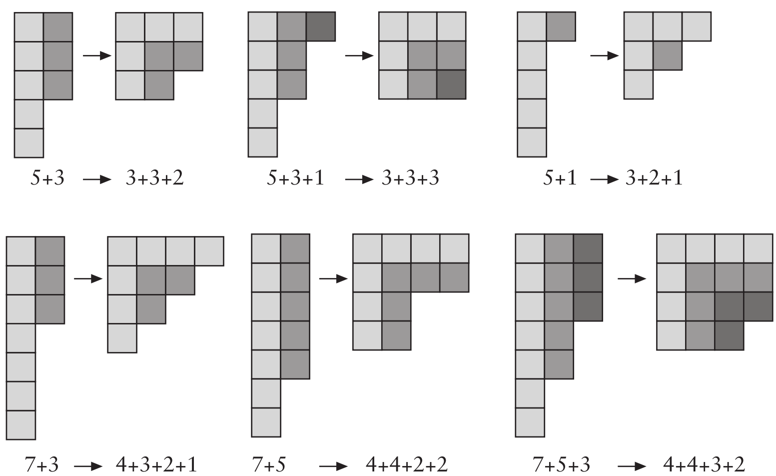
Her Young tablosunun kuzeybatıdan güneybatıya uzanan çapraza göre simetriğini alabiliriz. Örnekler aşağıda.



Bu tür birbirinin simetrisi olan Young tablolarına ***eşlenik Young tabloları*** denir. Bazı Young tabloları kendi kendilerinin simetriğidir. Adına ***özeşlenik*** diyebileceğimiz kendi kendisinin simetriği olan Young tablosu örnekleri aşağıda:



Teorem 15.1. *Verilmiş bir n için, n birim kareden oluşmuş özeşlenik Young tablosu sayısı, n'nin, her parçanın tek olduğu ve her parçanın bir diğerinden değişik olduğu parçalanış sayısına eşittir.*



Kanıt: Her parçanın tek olduğu parçalanışlar her sütunda tek sayıda kare olan Young tablolarına tekabül eder. Her sütununda değişik sayıda kare bulunan böyle bir Young tablosu alalım. Her sütunu ortasından kırıp özeşlenik bir Young tablosu oluşturabiliriz. Örnekler aşağıda. Bu dönüşüm tersinir bir dönüşümdür. □

Alıştırmalar

15.3. n'nin her parçasının en fazla k olduğu parçalanışlarının sayısının, n'nin en fazla k parçası olan parçalanışlarının sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

15.4. Yukarıdaki sayının $n+k$'nın tam k parçaya parçalanış sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

Not. Büyük k'lar için $p(k)$'yı hesaplamak. Büyük k'lar için $p(k)$'yı hesaplamak çok kolay değildir. Bu yüzden k çok çok büyükken $p(k)$'nın aşağı yukarı kaç olduğunu, yani $p(k)$'nın "asemptotik davranışını" bilmek yararlıdır. 1918'de İngiliz matematikçisi Hardy ve Hint dâhisi Ramanujan,

$$p(n) \approx \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}$$

formülünü bulmuşlardır. (Buradaki e, Napier ya da Euler sabiti diye bilinen 2,718... sayısıdır.) Bu kitapta kanıtlamamıza imkân olmayan bu formülün anlamı şudur: n çok çok büyük alınırsa, sağdaki ve soldaki terimlerin birbirine oranı 1'e çok çok yakındır, daha doğru bir deyişle, oranların limiti 1'dir.

Ramanujan'ın bulduğu başka olgular:

$p(5k+4)$ sayısı 5'e tam bölünür.

$p(7k+5)$ sayısı 7'ye tam bölünür.

$p(11k+6)$ sayısı 11'e tam bölünür.

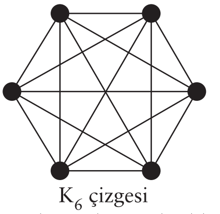
Ama $p(13k+7)$ sayısının 13'e tam bölündüğü doğru değildir.

16. Ramsey Teorisi

16.1 Ramsey Sayıları

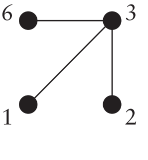
Altı kişilik bir toplulukta ya herkesin birbirini tanıdığı ya da hiçbirinin hiçkimseyi tanımadığı en az üç kişi mutlaka vardır. Zekâ oyunları köşelerinde sık sık okurlardan bu önermenin kanıtlanması istenir. Ramsey kuramının en basit örneği olan bu önermeyi kanıtlayalım önce. Sonra çok daha zor, yanıtı bile bilinmeyen sorular soracağız.

Altı kişiyi bir çizgenin altı noktası olarak görelim. Noktalara 1, 2, 3, 4, 5, 6 diyelim. İki nokta arasına, o iki noktanın simgelediği kişilerin tanışıp tanışmamalarına göre, kırmızı ya da mavi bir kenar (çizgi) çizelim. Sözgelimi, tanışıyorlarsa kenar kırmızı olsun, tanışmıyorlarsa mavi. Her kenarı ya kırmızıya ya da maviye boyanmış K_6 tamçizgesini elde ederiz. Yukarıdaki önermeyi, "Kenarları kırmızı ve maviye boyanmış K_6 tamçizgesinde ya en az bir kırmızı üçgen ya da en az bir mavi üçgen vardır," olarak ifade edebiliriz.



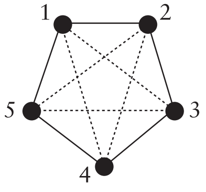
K_6 çizgesi
Her noktanın her noktaya bağıntılı olduğu *n* noktalı çizgelere ***tamçizge*** denir ve bu çizgeler K_n ile simgelenir.

Her noktaya beş kenar değdiğinden, her noktaya ya en az üç kırmızı kenar ya da en az üç mavi kenar değer. Noktamızın 3 numaralı nokta olduğunu, bu noktaya bitişik en az üç kırmızı kenar olduğunu ve bu kırmızı kenarların $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ ve $\{6,3\}$ kenarları olduğunu varsayalım. Artık sadece 1, 2, 3 ve 6 noktalarını dikkate alacağız.



1, 2 ve 6 noktaları arasındaki kenarlardan biri kırmızıysa, bu kırmızı kenarın iki uç noktası ve 3 noktası kırmızı bir üçgen oluştururlar. Aksi halde, yani kenarların hepsi maviyse o zaman bu üç nokta mavi bir üçgen oluşturur.

Matematiksel olarak ifade edecek olursak, kenarları iki renge boyanmış K_6 çizgesinde tek renkli bir üçgen vardır, önermesini kanıtladık. Elbette bu önerme, eğer $n \geq 6$ ise, tüm K_n çizgeleri için de doğrudur, çünkü $n \geq 6$ ise, K_6, K_n'nin içinde yaşar.



Aynı önermeyi şöyle de ifade edebiliriz: Eğer $n \geq 6$ ise, kenarları iki renge boyanmış K_n çizgesinde tek renkli K_3 yaşar.

Bu önerme, yandaki çizgeden de anlaşılacağı üzere $n = 5$ için doğru değildir, n illa en az 6 olmalıdır, daha az olamaz.

Yukarıdaki önermede K_3 yerine K_4 almak istersek durum ne olur?

Soru: n en az kaç olmalıdır ki, iki renge boyanmış K_n tamçizgesinde tek renkli bir K_4 yaşasın?

4 yerine herhangi bir a doğal sayısı alıp benzer soruyu sorabiliriz:

Soru: a doğal sayısı verilmiş olsun. n en az kaç olmalıdır ki kenarları iki renge boyanmış K_n tamçizgesinde tek renkli bir K_a yaşasın? Hatta böyle bir n var mıdır?

Bu soruyu da genelleştirebiliriz:

Soru: a ve b doğal sayıları verilmiş olsun. n en az kaç olmalıdır ki, kenarları A ve B renklerine boyanmış K_n tamçizgesi ya tamamen A renkli bir K_a içersin ya da tamamen B renkli bir K_b? Hatta böyle bir n var mıdır? (Eğer $a = b$ ise, bir önceki sorunun aynısını elde ederiz.)

Evet, öyle bir n vardır:

Teorem 16.1. [Ramsey, 1930]. *a ve b herhangi iki doğal sayı olsun. Öyle bir N vardır ki, eğer $n \geq N$ ise, kenarları A ve B renklerine boyanmış K_n tamçizgesinde ya tamamen A renkli bir K_a ya da tamamen B renkli bir K_b vardır.*

Yukarıdaki teoremde varlığı iddia edilen en küçük N sayısına ***Ramsey sayısı*** denir ve bu sayı $r(a, b)$ olarak yazılır.

Biraz önce $r(3, 3) = 6$ eşitliğini gördük.

Sorudaki simetriden dolayı $r(a,b) = r(b,a)$. Dolayısıyla $a \leq b$ eşitsizliğini varsayabiliriz.

Bazı $r(a,b)$ sayılarını bulmak kolay:

$$r(1,b) = 1,\ r(2,b) = b.$$

Ramsey sayıları için genel bir formül bilinmiyor. Ramsey sayılarının bulunması çizge kuramının zor ve yanıtlanmamış sorularından biridir. Bu yazının sonundaki tablo bilinen bazı Ramsey sayılarını, bilinmeyenlerin ise alt ve üstsınırlarını verir.

Aşağıdaki sonuç $r(a,b)$ sayılarına tümevarımsal bir üstsınır getiriyor.

Teorem 16.2 (Erdös ve Szekeres). *$a \geq 2$ ve $b \geq 2$ iki tamsayıysa,*

$$r(a,b) \leq r(a,b-1) + r(a-1,b).$$

Eğer $r(a,b-1)$ ve $r(a-1,b)$ sayılarının ikisi de çiftse,

$$r(a,b) < r(a,b-1) + r(a-1,b).$$

Kanıt: $n = r(a,b-1) + r(a-1,b)$ olsun. K_n çizgesini herhangi bir biçimde iki renge boyayalım. Bu çizgede ya tamamen A rengine boyanmış bir K_a ya da tamamen B rengine boyanmış bir K_b bulacağız. Bu da teoremi kanıtlayacak.

v, K_n'nin herhangi bir noktası olsun. K_n'nin geri kalan $n-1$ noktasına bakalım. v'nin A renkli kenarla bağlandığı noktalara $A(v)$, B renkli kenarla bağlandığı noktalara $B(v)$ diyelim.

$$|A(v)| + |B(v)| = n - 1 = r(a,b-1) + r(a-1,b) - 1$$

eşitlikleri bariz. Dolayısıyla hem

$$|A(v)| < r(a,b-1)$$

hem de

$$|B(v)| < r(a-1,b)$$

eşitsizlikleri sağlanamaz. Demek ki ya

$$|A(v)| \geq r(a-1,b)$$

ya da

$$|B(v)| \geq r(a,b-1).$$

Birinci durumda, $A(v)$ ya A renkli bir K_{a-1} ya da B renkli bir K_b içerir. Dolayısıyla $A(v) \cup \{v\}$ ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b içerir. İkinci durumda, benzer biçimde, $B(v) \cup \{v\}$ ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b içerir. Sonuç olarak

$$r(a,b) \leq r(a,b-1) + r(a-1,b).$$

Şimdi $r(a,b-1)$ ve $r(a-1,b)$'nin çift olduklarını varsayalım. Bu kez

$$n = r(a,b-1) + r(a-1,b) - 1$$

olsun. Demek ki n tek. K_n'de ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b bulacağız. B renkli kenarları K_n'den silip n noktalı bir G çizgesi elde edelim. G'nin tek sayıda noktası olduğundan (ve noktaların derecelerin toplamının çift olduğunu bildiğimizden, bkz. Önsav 11.1), G'de derecesi çift olan mutlaka bir nokta olacaktır. Bu noktaya v diyelim. Demek ki $A(v)$ çift bir sayı, dolayısıyla

$$A(v) \neq r(a-1,b) - 1,$$

bunu aklımızda tutalım. Öte yandan,

$$|A(v)| + |B(v)| = n - 1 = [r(a-1,b) - 2] + r(a,b-1)$$

olduğundan, hem

$$|A(v)| \leq r(a-1,b) - 2$$

hem de

$$|B(v)| < r(a,b-1)$$

eşitsizlikleri sağlanamaz. Demek ki ya

$$|A(v)| > r(a-1,b) - 2$$

ya da

$$|B(v)| \geq r(a,b-1)$$

eşitsizliklerinden biri sağlanacak. Ama

$$A(v) \neq r(a-1,b) - 1.$$

Dolayısıyla ya

$$|A(v)| > r(a,b-1)$$

ya da

$$|B(v)| \geq r(a,b-1).$$

Aynen yukarıda yaptığımız gibi K_n'de ya A renkli bir K_a ya da B renkli bir K_b buluruz. $\square$

Ne yazık ki eşitlik doğru değil. Örneğin, aşağıdaki çizelgeden,

$$r(3,6) = 18,\ r(4,5) = 25 \text{ ve } r(4,6) \leq 41$$

ilişkilerini biliyoruz, dolayısıyla

$$r(4,6) \leq 41 < 43 = 18 + 25 = r(3,6) + r(4,5).$$

Bölümü $r(a,b)$'nin bir üstsınır formülünü bularak tamamlayalım.

Sonuç 16.3.

$$r(a,b) \leq \binom{a+b-2}{b-1}.$$

Kanıt: Kanıtı $a+b$ üzerine tümevarımla yapacağız. $a+b=2$ için, yani $a=b=1$ için eşitsizliğin doğruluğu belli. $a+b \geq 3$ olsun. Teorem 16.2 ve tümevarım varsayımına göre,

$$\begin{aligned} r(a,b) &\leq r(a-1,b) + r(a,b-1) \\ &\leq \binom{a+b-3}{b-1} + \binom{a+b-3}{b-2} = \binom{a+b-2}{b-1} \end{aligned}$$

İstediğimizi kanıtladık. □

$r(a,b)$ Ramsey sayılarının 2005'te bilinen aralıklarını aşağıda gösterdik. Satırlar a'ların, sütunlar b'lerin.

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35-41	49-61	55-84	69-115
5			43-49	58-87	80-143	95-216	116-316
6				102-165	109-298	122-495	153-780
7					205-540	216-1031	227-1713
8						282-1870	295-3583
9							565-6625

16.2 Sonsuz Ramsey Teoremi

Sonsuz sayıda insanın bulunduğu bir toplulukta, öyle sonsuz sayıda insan seçebilir miyiz ki, bu seçtiğimiz insanların ya hepsi birbirini tanısın ya da hiçbiri kimseyi tanımasın?

Yanıt, okurun da tahmin ettiğini sandığım gibi, "evet, seçebiliriz"dir. Bu, Ramsey adlı bir matematikçinin kanıtladığı çok ünlü bir teoremin sonucudur.

Önce soruyu matematikselleştirelim. Her insanı bir nokta olarak gösterelim. Eğer iki insan birbirini tanıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları kırmızı bir kenarla birleştirelim. Eğer iki insan birbirini tanımıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları mavi bir kenarla birleştirelim. Her ikisi kırmızı ya da mavi bir kenarla birleştirilmiş sonsuz noktalı bir çizge elde ettik. Bu noktalar arasından, hep aynı renkle (ya hep kırmızıyla ya hep maviyle) birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta bulacağız.

Kanıtımızı iki aşamada gerçekleştireceğiz. Birinci aşamada öyle sonsuz tane

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_i,\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \ldots$$

noktası bulacağız ki, her a_i kendisinden sonra gelen

$$a_{i+1},\ a_{i+2},\ a_{i+3},\ \ldots$$

noktalarıyla aynı renk kenarla (ya hep kırmızı, ya hep mavi kenarla) bağlanmış olacak.

Birinci noktayı seçmek kolay, herhangi bir a_0 noktası işi görür. Ama diğer a_1, a_2, a_3, ... noktalarını biraz daha dikkatli seçeceğiz. Bu a_1, a_2, a_3, ... noktalarını öyle seçmeliyiz ki, a_0 noktası bu noktalarla hep aynı renk kenarla bağlanmış olsun.

a_0 noktası, öbür noktalarla ya kırmızı ya da mavi bir kenarla bağlanmıştır. Sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki renk kenar olduğundan, a_0'ın aynı renk kenarla bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. a_0'ın hep aynı renk kenarla bağlandığı sonsuz bir nokta kümesi alalım. Bu kümeye A_0 diyelim. Demek ki,

a_0, A_0'ın noktalarıyla hep aynı renk kenarla bağlanmıştır.

Bunu aklımızda tutalım. a_1, a_2, a_3, ... noktalarını bu A_0 kümesinde seçeceğiz. Böylece a_0 noktası istediğimiz koşulu sağlamış olacak.

Şimdi A_0'dan herhangi bir a_1 noktası alalım. a_1 noktası, A_0'ın öbür noktalarına ya kırmızı ya da mavi bir renkle bağlanmıştır. A_0'da sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_0 kümesinde, a_1'in aynı renk kenarla bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Yani, ya

$$\{a \in A_0 : aa_1 \text{ kırmızı}\}$$

kümesi, ya da

$$\{a \in A_0 : aa_1 \text{ mavi}\}$$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_1 adını verelim. Demek ki, $A_1 \subseteq A_0$ ve

a_1, A_1'in noktalarıyla hep aynı renk kenarla bağlanmıştır.

a_2, a_3, a_4, ... noktalarını A_1'de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul a_1 için sağlanmış olacak.

Şimdi A_1'den herhangi bir a_2 noktası alalım. a_2 noktası A_1'in öbür noktalarıyla ya kırmızı ya da mavi bir kenarla bağlanmıştır. A_1'de sonsuz nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_1'de, a_1'in hep aynı renkle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Bir başka deyişle, ya

$$\{a \in A_1 : aa_2 \text{ kırmızı}\}$$

kümesi, ya da

$$\{a \in A_1 : aa_2 \text{ mavi}\}$$

kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_2 adını verelim. Demek ki,

a_2, A_2'nin noktalarıyla hep aynı renk kenarla bağlanmıştır.

a_3, a_4, a_5, ... noktalarını A_2'de (dolayısıyla A_1 ve A_0 kümelerinde de) seçeceğiz ve böylece yukarıdaki koşul a_2 için (ve a_0 ve a_1 için de) sağlanmış olacak.

Şimdi A_2'den herhangi bir a_3 noktası alalım. Yukarıda yaptıklarımızı a_3 ve A_2 için yapalım. A_2'nin içinde, öyle bir sonsuz A_3 kümesi bulalım ki, a_3, A_3'ün her noktasıyla hep aynı renk kenarla bağlanmış olsun.

Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz. Demek ki, öyle

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_i,\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \ldots$$

noktaları bulabiliriz ki, her nokta kendisinden sonra gelen noktalarla aynı renk kenarla bağlanmış olsun.

Kanıtın birinci aşamasını tamamladık. Sıra ikinci aşamaya geldi.

Dikkatle seçtiğimiz bu a_0, a_1, a_2, a_3, ... noktalarının herbirine bir renk vereceğiz. Eğer bir nokta kendisinden sonra gelen noktalarla hep kırmızı kenarla bağlanmışsa, o noktaya ***kırmızı nokta***, aksi halde ***mavi nokta*** diyeceğiz. Örneğin, eğer a_0 noktası, kendisinden sonra gelen a_1, a_2, a_3, ... noktalarıyla hep kırmızı bir kenarla bağlanmışsa, a_0 noktasına kırmızı nokta diyeceğiz. Eğer a_5 noktası kendisinden sonra gelen a_6, a_7, a_8, ... noktalarıyla hep mavi kenarla bağlanmışsa, a_5 noktasına mavi nokta diyeceğiz.

Sonsuz sayıda nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

noktalarından sonsuz tanesi aynı renk noktadır. Bir başka deyişle, ya kırmızı noktalar kümesi ya da mavi noktalar kümesi sonsuzdur. Matematiksel olarak söyleyecek olursak, ya

$$\{a_i : a_i \text{ kırmızı bir nokta}\}$$

ya da

$$\{a_i : a_i \text{ mavi bir nokta}\}$$

kümesi sonsuzdur. İki küme birden de sonsuz olabilir ama en azından birinin sonsuz olduğunu biliyoruz. İki kümeden sonsuz olanını alalım. Öbür noktaları atalım. Noktalarımızı yeniden adlandırarak, her noktanın aynı renk olduğunu varsayabiliriz, diyelim hepsi kırmızı. Demek ki,

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

noktalarının herbirinin kırmızı olduğunu varsayıyoruz. Bu kümeden iki nokta alalım: a_i ve a_j. Diyelim i, j'den daha küçük. a_i, kırmızı bir nokta olduğundan, a_i noktası a_j noktasıyla kırmızı bir kenarla bağlanmıştır. Demek ki yukarıdaki sonsuz nokta birbirleriyle aynı renk kenarla (kırmızıyla) bağlanmıştır. Ramsey'in teoremi kanıtlanmış oldu. □

Elbette iki renkle yaptığımızı üç renkle, dört renkle, genel olarak sonlu sayıda renkle de yapabilirdik. Ramsey'in asıl teoremi de zaten genel olarak n renk içindir:

Teorem 16.4 (Sonsuz Ramsey Teoremi)**.** *n renk ve sonsuz sayıda noktamız olsun. Her iki nokta, bu n renkten birine boyanmış bir kenarla birleştirilmiş olsun. O zaman, her iki noktası aynı renk kenarla birleştirilmiş sonsuz sayıda nokta vardır.* □

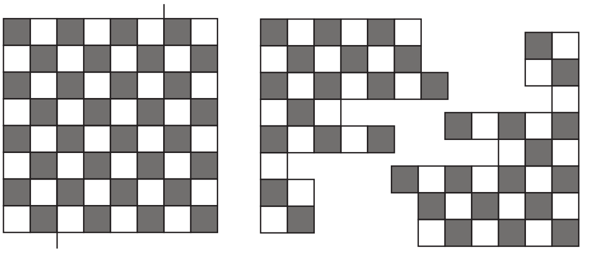
Kısım III

Okuma Parçaları ve Uygulamalar

17. Saymak Zor, Hatta Kimileyin İmkânsız Bir Zanaattır

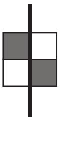
Bu kitapta ele aldığımız sayma konusu gerçekten zor bir konudur. Hatta kimi zaman imkânsızdır. Bu bölümde bu zorluğa bir örnek vereceğiz. Ünlü matematiksel bilmece yazarı Ernest Dudeney'in (1857 – 1930) aklına gelen basit bir satranç tahtası sorusunu konu edeceğiz.

Bir satranç tahtası, karelere dokunmamak koşuluyla kaç değişik biçimde aynı biçim ve ebatta iki parçaya bölünebilir? Bir örnek aşağıda:



Eğer sağdaki parçalardan birini 180 derece döndürürsek aynen diğerini elde ederiz.

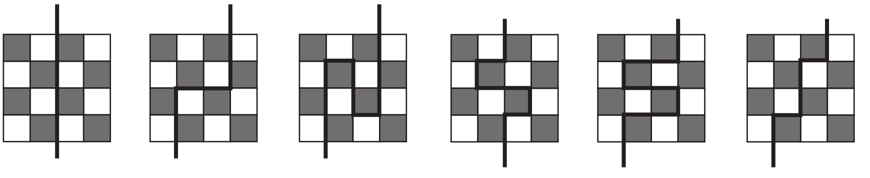
Eğer satranç tahtası 2×2 boyutundaysa, özünde tek bir çözüm var: Tahtayı aşağıdaki şekildeki gibi tam ortadan dikey olarak cart diye ikiye bölmek.



Bir de tabii tahtayı yatay olarak ikiye ayırabiliriz ama bu iki parçalanış birbirinin simetrisi olduğundan, ikisini ayrı parçalanışlar olarak algılamak istemiyoruz. Birbirinin yansıması ya da döndürüsü olan parçalanışları tek bir parçalanış olarak algılamak istiyoruz.

3×3 boyutlu bir satranç tahtasının böyle bir parçalanışı yoktur. Bunun neden böyle olduğunu anlamaya çalışınca, 3'ün tek sayı olmasından kaynaklandığı anlaşılıyor. Eğer n bir tek sayıysa, $n \times n$ boyutunda bir satranç tahtasının böyle bir parçalanışı yoktur. Tahtanın göbeğindeki kare mızıkçılık yapar.

4×4 boyutlu satranç tahtasının tam 6 tane eş parçalanışı vardır. İşte bu parçalanışlar:

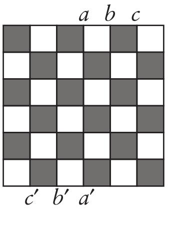


Bir sonraki soru doğal olarak 6×6 boyutlu satranç tahtasının tam eş parçalanış sayısı.

Yanıt 255'tir; 6×6 boyutlu satranç tahtasının, simetrileri ve döndürüleri saymazsak tam 255 tane değişik eş parçalanışı vardır. Dolayısıyla tüm eş parçalanışları teker teker göstermemiz mümkün değil, gerekli de değil; zaten eş parçalanışlar değil, eş parçalanış sayısı isteniyor. Önemli olan eş parçalanışları sistematik bir biçimde sayabilmek.

Buradaki kilit kelime "sistematik". Eğer nesneleri teorik olarak saymayı beceremiyorsak, bazı özel durumları sistematik olarak saymaya çalışmaktan başka çaremiz yok.

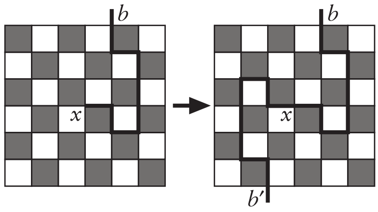
Her parçalanış, tahtanın çizgilerini izleyen bir yolla belirlendiğinden, bu yolları saymamız yeterli. İlk olarak yolların hangi noktalardan başlayacağını anlamaya çalışalım. Biraz düşününce, yolu tahtanın dört köşesinden birinden başlatmamıza gerek olmadığını görürüz; çünkü bu yolla verilen eş parçalanışı, köşeden başlamayan bir yolla da elde edebiliriz. Her eş parçalanışın yolunun aşağıdaki şekilde en tepede gösterilen a, b ya da c'den başlayıp aşağı doğru indiğini varsayabiliriz.



(Eğer öyle değilse, bir döndürü ya da simetriyle o hale getirebiliriz.)

a'dan aşağı inerek başlayan bir yol a' noktasından aşağı inerek çıkmak zorundadır. Aynı şey b ve c noktaları için de geçerlidir.

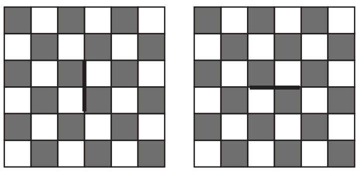
Yol tahtanın merkezindeki noktadan geçmek zorundadır. Hatta yol tam yarısında merkezde olmak zorundadır. Aslında yol, a, b ya da c'den aşağı inerek başlayıp merkezde biten yolun merkeze göre simetrisiyle (ya da 180 derece döndürülmüş haliyle) birleşimidir. Aşağıda bir örnek var.



Dolayısıyla sadece a, b ya da c'den aşağı inerek başlayan ve merkezde biten yolları dikkate alabiliriz. Bu tür yollara ***yarıyol*** diyelim.

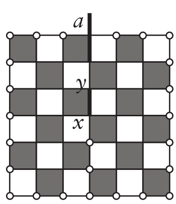
Yarıyol, 180 derece döndürülmüşüyle kesişmemeli elbet. Bu koşul, olası yarıyol sayısını bayağı düşürür.

Yol tahtanın merkezinden iki farklı biçimde geçebilir: yatay ya da dikey. Demek ki yarıyolun son hamlesi merkeze giden dört kenardan biri olmalı.

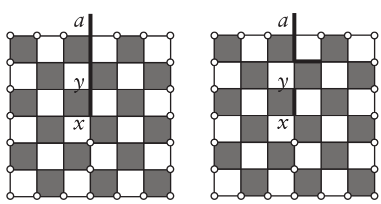


Eğer yarıyol merkezin sağındaki noktaya değerek merkeze gidiyorsa, o zaman merkezin solundaki noktaya dokunamaz. Aynı biçimde eğer yarıyol merkezin üstündeki noktaya değerek merkeze gidiyorsa, o zaman merkezin altındaki noktaya değemez.

Ayrıca yol, tahtanın dört kenarına (biri girerken, biri de çıkarken olmak üzere) sadece iki kez değebilir. Dolayısıyla a, b ya da c'den başlayıp tahtanın merkezine giden yarıyol bir defa daha tahtanın kenarlarına değemez, yol boyunca hep tahtanın içinde yol almak zorundadır.



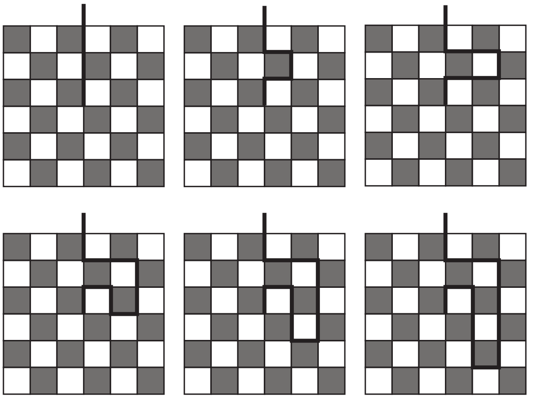
a'dan aşağı inerek başlayan ve *yx* hamlesini yaparak merkeze ulaşan yarıyol, yukarıda beyaz yuvarlaklarla gösterilen noktalara uğrayamaz.



Ayrıca yarıyolun, aşağı inen ilk hamleden sonra ya tekrar aşağı indiğini ya da sağa hamle yaptığını varsayabiliriz.

Bütün bu dediklerimizi dikkate alarak, a'dan aşağı inerek başlayıp merkeze dikey inen yarıyolları belirleyebiliriz. Simetrileri saymadığımızdan, yarıyolun a'dan aşağı indikten hemen sonra ya hemen tekrar aşağı ya da sağa hamle yaptığını varsayabiliriz. Çünkü ikinci hamlesi sola olan bir yolun dikey doğruya göre simetriğini alırsak, ikinci hamlesi sağa olan bir yol elde ederiz.

İşte o yarıyollar:



Sadece 6 tane var.

Diğer yollarla da benzer hesaplar yapmak gerekiyor. Dudeney'in dediğine göre toplam 255 tane varmış. Bulmaya çalışmadım.

Ya 8×8 boyutlu satranç tahtasının tam eş parçalanış sayısı kaçtır? Bunu Dudeney bile hesaplamaya kalkışmamış.

Kaynakça:

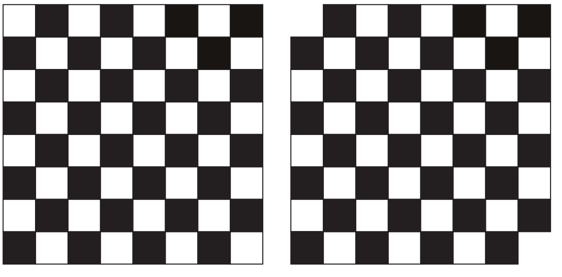
[Du] H. E. Dudeney, **Amusements in Mathematics**, Dover Publications 1970.

18. İkiye Kadar Filan Sayma

Bir ***domino*** iki karenin yanyana gelmesinden oluşmuştur. Her karesi dominonun bir karesi kadar olan bir satranç tahtasını elbette dominolarla çok farklı biçimlerde kaplayabiliriz. Ama eğer satranç tahtasından bir kare çıkaracak olursak, satranç tahtasının geri kalan kareleri dominolarla kaplanamaz, ne de olsa satranç tahtasında artık 63 kare kalmıştır ve her domino iki karelik bir alan kaplar. Peki...

Birinci Problem. *İki kare çıkarılmış bir satranç tahtasını dominolarla kaplayabilir miyiz?*

Deneyelim. Satranç tahtasının sol üst ve sağ alt karelerini çıkaralım.



Normal Satranç Tahtası — Eksiltilmiş Satranç Tahtası

Sağdaki eksiltilmiş satranç tahtasını dominolarla kaplayabilir miyiz? Her domino komşu iki kare kaplayacak elbette. Dolayısıyla toplam $62/2 = 31$ domino kullanmalıyız.

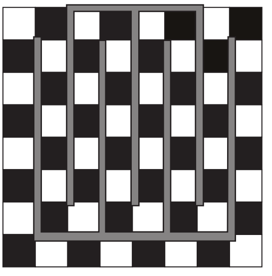
Kaplayamayız. Çünkü her domino bir siyah ve bir beyaz kare kaplar, dolayısıyla toplam 31 siyah ve 31 beyaz kare kaplayabiliriz, ama yukarıdaki eksiltilmiş satranç tahtasında siyah kare sayısı (32) beyaz kare sayısından (30) fazladır.

Şık bir çözüm. Bulması da hiç kolay değil.

Bir de aynı soru satranç tahtasının kareleri boyanmadan sorulursa o zaman soru daha da zorlaşır. Yanıtı bulmak için satranç tahtasını önce boyamak gerekir. Soru, değme matematikçinin çuvallayacağı bir soru haline dönüşür.

Demek ki aynı renkten iki kare eksiltirsek, satranç tahtasını dominolarla kaplayamayız. Peki bir siyah bir de beyaz kare eksiltirsek, o zaman bu eksiltilmiş satranç tahtasını dominolarla kaplayabilir miyiz?

Evet! Satranç tahtasından hangi beyaz kare ve hangi siyah kare çıkartılırsa çıkartılsın, geri kalan kareleri dominolarla kaplayabiliriz. Bunun şaşırtıcı kanıtı (IBM'in eski araştırmadan sorumlu genel müdür yardımcısı) Ralph Gomory tarafından verilmiştir. Kanıtı verelim: Satranç tahtasına barikatlar yerleştirerek bir pist yapalım. Örneğin aşağıdaki gibi.

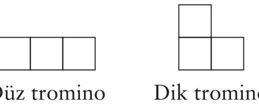


Dikkat ederseniz, bu pisti izleyerek (barikatları aşmak yok) ve sürekli aynı yöne giderek, satranç tahtasının tüm karelerinden bir ve bir defa geçip başladığımız yere geri döneriz. Yani pist döngüseldir. Pistin toplam 64 karesi vardır. Elbette.

Şimdi bu döngüsel pistten biri siyah ve biri beyaz kare çıkaralım. Pisti iki parkura ayırırız, her birinde **çift sayıda** kare olan iki parkura... (Eğer çıkarılan kareler komşu karelerse pist 62 kareden oluşan bir parkura ve 0 kareden oluşan bir başka "parkura" dönüşür.)

Çift sayıda kareden oluşan bir parkuru da elbette dominolarla kaplayabiliriz: Parkurun herhangi bir karesinden başlayarak ve parkuru izleyerek parkuru dominolarla tek bir biçimde kaplayabiliriz.

Trominolar. Birbirine sınırdaş üç kareden oluşan bir şekle ***tromino*** denir. İki cins tromino vardır: ***Düz tromino*** ve ***dik tromino***. Şekilleri aşağıda.



Düz tromino Dik tromino

Bir satranç tahtasının trominolarla tamamen kaplanamayacağı apaçık, çünkü ne de olsa satranç tahtasının 64 karesi vardır ve 64 sayısı 3'e bölünmez. Ama satranç tahtasından bir kare çıkarırsak, geri kalan kareler trominolarla belki kaplanabilir. Tabii böyle bir kaplama için toplam

$$\frac{63}{3} = 21$$

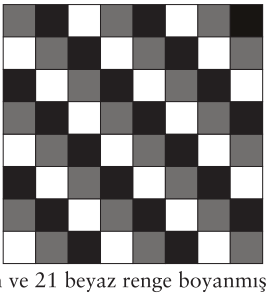
adet tromino kullanmak gerekir.

Ayrıca, böyle bir kaplama bazı kareler çıkarıldığında mümkün olabilir ama bazı diğer kareler çıkarıldığında mümkün olmayabilir.

İkinci Problem. *Hangi kare(ler) çıkarıldığında satranç tahtası trominolarla kaplanabilir?*

Önce 21 adet düz trominoyla bir karesi eksik satranç tahtasını kaplamaya çalışalım.

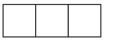
Eksiksiz satranç tahtasını aşağıdaki gibi üç renge (siyah, gri ve beyaza) boyayalım.



22 gri, 21 siyah ve 21 beyaz renge boyanmış satranç tahtası

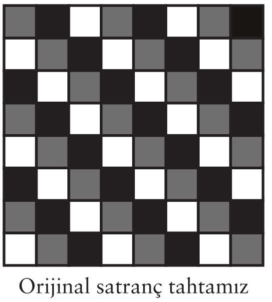
Bu boyamada 22 gri, 21 beyaz ve 21 siyah kare vardır. İnanmazsanız sayın. Yani gri kare sayısı, beyaz ve siyah kare sayılarından bir fazladır.

Öte yandan bu satranç tahtasına konan her düz tromino, satranç tahtasına nasıl konulursa konulsun, bir gri, bir siyah ve bir beyaz kare kaplayacaktır. Demek ki bir karesi eksik bir satranç tahtası, ancak gri bir kare çıkartılırsa düz trominolarla kaplanabilir.

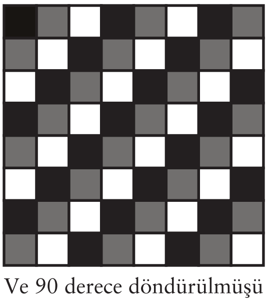


Yani satranç tahtasının düzgün trominolarla kaplanabilmesi için en fazla 22 kareden biri çıkarılabilir, bu kareler de yukarıda griye boyanmış karelerdir.

Öte yandan, bir kaplama, satranç tahtası 90 derece döndürülürse de satranç tahtasını kaplamalı. Demek ki çıkarılacak gri kare bu dönüşümle gene çıkarılacak bir kareye, yani gene bir gri kareye gitmeli.



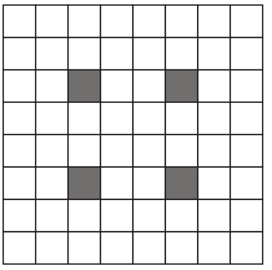
Orijinal satranç tahtamız



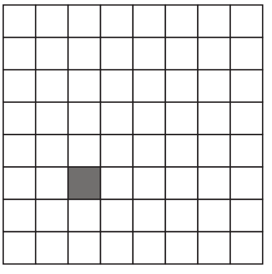
Ve 90 derece döndürülmüşü

Doksan derecelik döndürmeyle gene gri bir kareye dönüşen gri karelere gıpgri kare diyelim. Demek ki sadece gıpgri karelerden biri çıkarılırsa satranç tahtası düz trominolarla kaplanabilir.

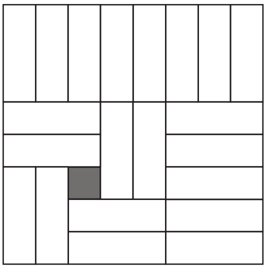
Bunlardan da fazla yok, sadece dört tane var:



Simetriden dolayı dördü de eşdeğerdir. Sadece birini ele alalım. Diyelim aşağıdaki gri kareyi çıkardık. Geri kalan satranç tahtasını düz trominolarla kaplayabilir miyiz?



Evet. İşte bir kaplama:

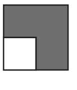


Şimdi aynı problemi dik tromino için çözeceğiz.

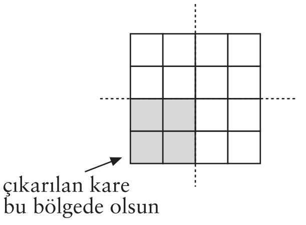
Üçüncü Problem. 8×8'*lik bir satranç tahtasından hangi kare çıkarılırsa çıkarılsın, geri kalan kareler* 21 *tane dik tromino ile kaplanabilir mi*?

8'in 2^3'e eşit olduğunu dikkate alıp, her $n > 0$ doğal sayısı için, $2^n \times 2^n$ boyutunda bir satranç tahtasından herhangi bir kare çıkarılırsa, tahtanın geri kalan karelerinin trominolarla kaplanabileceğini kanıtlayacağız.

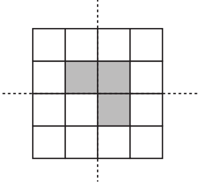
Eğer $n = 1$ ise oldukça kolay; işte çözüm:



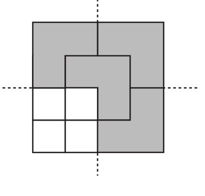
Problemi $n = 2$ için, yani 4×4'lük bir "satranç tahtası" için ele alalım. Önce satranç tahtasının tam ortasından biri yatay biri dikey olmak üzere iki doğru geçirerek satranç tahtasını dört eşit parçaya bölelim. Dört tane 2×2'lik satranç tahtası elde ederiz. Çıkardığımız karenin sol alt taraftaki 2×2'lik satranç tahtasında olduğunu varsayalım. (Hangisinde olduğu önemli değil tabii; satranç tahtasını döndürerek, bu varsayımı her zaman yapabiliriz.)



Şimdi bir dik trominoyu, satranç tahtasının ortasına ve eksik bölgeye girmeyecek biçimde, aşağıdaki şekildeki gibi göbeğe yerleştirelim.

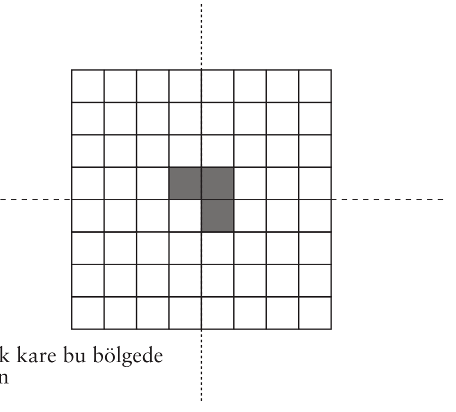


Geriye, bir karesi eksik 4 tane 2×2'lik satranç tahtası kalır. (Bunlardan üçünün birer karesi ilk yerleştirdiğimiz dik trominoyla kaplanmış, diğerinin ise gerçekten çıkmış.) Bu dört eksik kareli 2×2'lik satranç tahtasının her birini dik trominolarla kaplayabileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla 4×4 boyutlu satranç tahtasını da trominolarla kaplayabiliriz. İşte sonuç:



(Sol alt köşedeki 2×2'lik satranç tahtası çıkarılmış olan karenin konumuna göre dik trominolarla kaplanacak.)

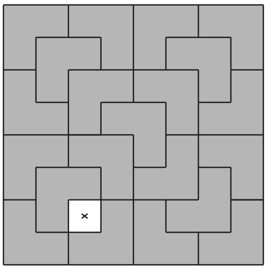
Şimdi, bir karesi eksik 8×8'lik satranç tahtasını dik trominolarla kaplayabiliriz. Önce satranç tahtasını tam ortadan dikey ve yatay doğrularla 4 tane 4×4'lük satranç tahtasına ayıralım. Eksik kare gene sol alt tarafta olsun (diyelim). Tahtanın tam ortasına, karesi alınmamış diğer üç 4×4'lük satranç tahtasının her birinin birer karesini kaplayacak biçimde bir dik tromino koyalım.



Böylece geriye birer karesi eksiltilmiş kaplanması gereken dört tane 4×4'lük satranç tahtası kalır. Bunları da dik trominolarla kaplayabileceğimizi biliyoruz.

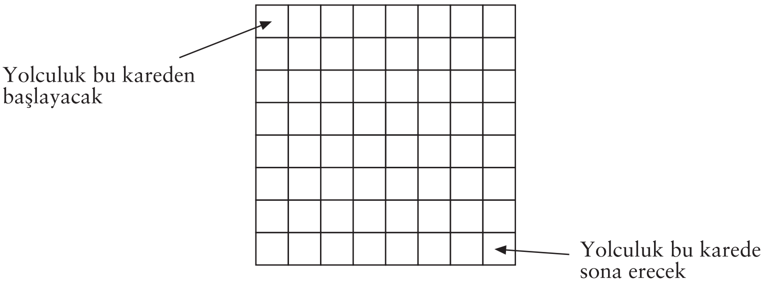
Genel yöntemin nasıl bulunacağı anlaşılmıştır herhalde. Bir karesi eksiltilmiş 8×8'lik satranç tahtasını dik trominolarla nasıl kaplayacağınızı biliyorsanız, bir adım daha ileri gidip bir karesi eksiltilmiş 16×16'lık satranç tahtasını dik trominolarla nasıl kaplayacağınızı bulabilirsiniz.

Yukarıda anlattığımız yöntem tek bir çözüm veriyor. Örneğin aşağıdaki çarpı işareti konmuş beyaz kare çıkarılırsa, satranç tahtası dik trominolarla aşağıdaki şekildeki gibi kaplanır.



Bu yönteme ***tümevarımla kanıt*** yöntemi denir. İleride yöntemin ayrıntılarına gireceğiz. Tümevarım yönteminde, kanıtlamak istenen şey (örneğimizde, bir karesi eksiltilmiş $2^n \times 2^n$ boyutlu satranç tahtasının dik trominolarla kaplacağını kanıtlamak istiyoruz) önce belli bir başlangıç sayısı için kanıtlanır (biz 1 için kanıtladık), daha sonra kanıtlanmak istenen şeyin n'den küçük doğal sayılar için doğru olduğu varsayılıp, aynı şey n için kanıtlanır.

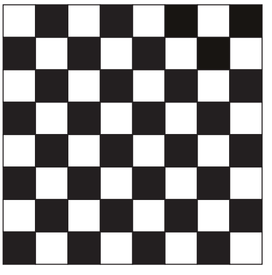
Dördüncü Problem. 8×8 *boyutlu bir satranç tahtasında, bir kaleyle (yani aşağı, yukarı, sağa ve sola hareket ederek) en üst sol kareden başlayarak ve her kareden sadece bir kez geçerek en alt sağ kareye ulaşabilir misiniz? Ulaşırsanız nasıl ulaşırsınız? Ulaşamazsanız neden ulaşamazsınız?*



Kale her kareden sadece bir kez geçerek sol üst kareden
sağ üst kareye gidebilir mi?

Yanıt olumsuz. Yanıtın olumsuz olduğunu anlamak için, göreceğimiz üzere, gene ikiye kadar saymak yetiyor.

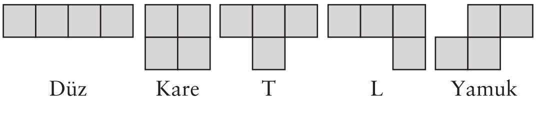
Tahtanın karelerini satranç tahtası gibi siyaha ve beyaza boyayalım.



Yolculuk beyaz bir kareden başlayıp gene beyaz bir karede bitmeli. Öte yandan, kalenin atması gereken adımları sayarsak, kalenin yolculuğun başladığı kareden yolculuğun bittiği kareye kadar tam 63 adım atması gerektiğini görürüz. 63 de bir tek sayıdır. Oysa kale, beyaz bir kareden başlayarak, tek sayıda adımda ancak siyah bir kareye gidebilir, gene beyaz bir kareye gidemez, çünkü her adımda kale renk değiştirir, siyahtaysa beyaza, beyazdaysa siyaha gider... Çelişki.

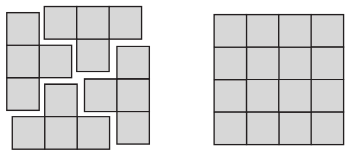
Peki, hangi siyah karelerden başlayarak ve her kareden sadece bir kez geçerek hangi beyaz karelere gidebiliriz? Eğer kareler komşu karelerse, yanıtın olumlu olduğunu görmek zor değil (birinci sorunun çözümüne bakın). Genel yanıtı bilmiyorum. Daha doğrusu yanıtın olumlu olduğundan eminim de kanıtım yok.

Tetrominolar. Yukarıda domino ve trominolarla ilgili problemler gördük. Bir de tetrominolar vardır. Tetrominolarda birbirine komşu dört kare bulunur ve bunlardan tam beş tane vardır:



L ve yamuk tetrominoların ayna simetrileri de vardır ama onları burada ayrı tetrominolar olarak saymayacağız.

Düz, kare ve L biçimindeki tetrominolarla 8×8'lik bir satranç tahtasını kaplayabileceğimiz bariz olmalı, çünkü bunlardan sadece ikisi 2×4'lük bir satranç tahtasını kaplar. T biçimindeki tetrominolarla da bir satranç tahtasını kaplayabiliriz çünkü 4 tane T tetromino, aşağıdaki şekilde gösterildiği üzere, 4×4'lük bir satranç tahtasını kaplar:



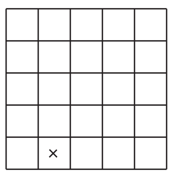
Ama yamuk tetrominolarla satranç tahtasının tek bir kenarı bile kaplanamaz.

Alıştırmalar

18.1. Bir at, satranç tahtasının en üst sol karesinden başlayarak ve her kareden sadece bir tek kez geçerek en alt sol kareye gidebilir mi?

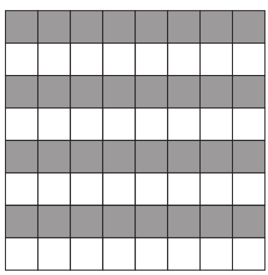
18.2. 5×5 boyutlu bir satranç tahtasında bir at her kareden bir defa geçerek başladığı kareye geri dönebilir mi?

18.3. Sadece sağ, sol, aşağı ve yukarı giderek (çapraz gitmece yok) ve bütün karelerden sadece bir kez geçerek ve istediğiniz kareden başlayarak aşağıdaki şekilde çarpı işareti bulunan kareye gidebilir misiniz?

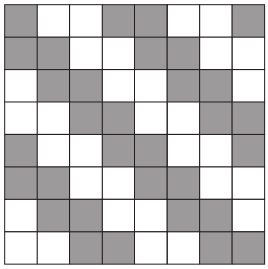


18.4. Bir satranç tahtası, 15 tane T biçiminde ve bir kare tetrominoyla kaplanamaz. **İpucu:** Satranç tahtasını satranç tahtası gibi iki renge boyayın.

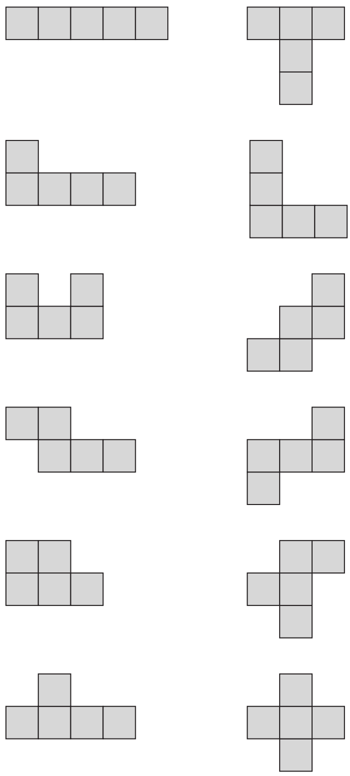
18.5. Bir satranç tahtası, 15 tane L biçiminde ve bir kare tetrominoyla kaplanamaz. **İpucu:** Satranç tahtasını satranç tahtası gibi değil de aşağıdaki gibi iki renge boyayın.



18.6. Bir satranç tahtası, bir kare tetromino ve istendiği kadar yamuk ve düz tetrominolarla kaplanamaz. **İpucu:** Satranç tahtasını satranç tahtası gibi değil de aşağıdaki şekildeki gibi iki renge boyayın.



Yanıtı Bilinmeyen Bir Sayma Problemi. Birbirine en az bir kenardan dokunan beş kareden oluşan şekillere ***pentomino*** adı verilir. Toplam 12 tane pentomino vardır. İşte o 12 pentomino:



Altı kareden meydana gelen tekparça şekillere ***heksomino*** (hexomino) adı verilir. Bunlardan 35 tane vardır. Bulmayı okura bırakıyoruz.

n tane kareden oluşan ve birbirine en az bir kenardan dokunan şekillere ***n-omino*** diyelim. n-omino sayısına a_n diyelim. $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 12$ ve $a_6 = 35$ eşitliklerini gördük ya da söyledik. Bilinen a_n'lerin listesi aşağıda. (Dizilerle ilgili muhteşem bir internet sitesi olan *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* sayfasından alınmıştır. Adresi `https://oeis.org/`.)

n	a_n
0	1
1	1
2	1
3	2
4	5
5	12
6	35
7	108
8	369
9	1.285
10	4.655
11	17.073
12	63.600
13	238.591
14	901.971
15	3.426.576
16	13.079.255
17	50.107.909
18	192.622.052
19	742.624.232
20	2.870.671.950
21	11.123.060.678
22	43.191.857.688
23	168.047.007.728
24	654.999.700.403
25	2.557.227.044.764
26	9.999.088.822.075
27	39.153.010.938.487
28	153.511.100.594.603

Bu sayılar bilgisayar yardımıyla bulunmuştur. Kimse a_n'yi veren basit bir formül bilmiyor, muhtemelen de yok[1]. İşte size son derece kolay anlaşılır ama yanıtı bilinmeyen bir sayma problemi: n-ominoları saymayı bilmiyoruz...

Yukarıdaki tabloya bakılınca $a_{n+1} \leq 10a_n$ eşitsizliğinin en azından $n = 27$'ye kadar doğru olduğu görülüyor, ama bu eşitsizlik hep doğru mu? Bu soru çok zor geldiyse, $a_{n+1} \leq 100a_n$ eşitsizliği doğru mu? Bu sorular hakkında hiçbir fikrim yok.

[1] Her dizinin bir formülü olmadığı kümeler kuramı yardımıyla kolaylıkla kanıtlanabilir.

Bir de a_n/a_{n+1} oranlarına bakalım (yaklaşık değer):

n	a_n/a_{n+1}
0	1
1	1
2	0,5
3	0,4
4	0,416667
5	0,342857
6	0,324074
7	0,292683
8	0,28716
9	0,276047
10	0,272653
11	0,268443
12	0,266565
13	0,264522
14	0,263228
15	0,261986
16	0,261022
17	0,260136
18	0,25938
19	0,258694
20	0,258083
21	0,257527
22	0,257022
23	0,25656
24	0,256137
25	0,255746
26	0,255385
27	0,25505

Bu oranlar $n = 4$'ten sonra giderek küçülüyor mu? Bilmiyorum. n büyüdükçe oranlar belli bir limite yakınsıyor mu? Gene bilmiyorum. Birilerinin bildiğini de sanmıyorum.

Sanırım bu örnek sayma konusunun ne kadar zor olduğu ya da sayma konusunda ne kadar beceriksiz olduğumuzu göstermiştir.

Farklı Bir Sayma Biçimi. Önceki problemlerde satranç tahtasını 1, 2, 3 diye adlandırdığımız ya da adlandırabileceğimiz renklere boyadık. Burada bir satranç tahtasını daha değişik bir biçimde boyayacağız. Soruyu soralım. Çözümünün okura son derece ilginç geleceğini umuyorum.

Beşinci Problem. 4×11 *boyutlu bir satranç tahtasının* L *şeklindeki tetrominolarla kaplanamayacağını kanıtlayın.*
Çözüm: Bu problem Alıştırma 18.5'teki yöntemle kolay bir biçimde çözülür. Andreescu ve Gelca'nın daha zor ama daha ilginç çözümünü sunalım. Satranç tahtasını bir sonraki şekildeki gibi a, b, c ve e renklerine boyayalım.

Şimdi tuhaf bir şey yapıp renkleri çarpacağız. a, b, c ve e renkleri şöyle çarpılacak:

$$\begin{aligned} &ab = ba = c, \quad ea = ae = a, \quad aa = e,\\ &bc = cb = a, \quad eb = be = b, \quad bb = e,\\ &ca = ac = b, \quad ec = ce = c, \quad cc = e,\\ &ee = e. \end{aligned}$$

Bilenlere Not: Klein 4-grubudur bu.

Her x, y, z rengi için $(xy)z = x(yz)$ eşitliğine dikkatinizi çekerim (bunu kontrol etmesi zaman alır ama yapılabilir), yani renkleri çarparken parantez kullanmaya gerek yok.

a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a
c	e	c	e	c	e	c	e	c	e	c
b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
e	c	e	c	e	c	e	c	e	c	e

Ayrıca çarpım tablosundan hemen görüleceği üzere her x, y rengi için $xy = yx$, yani renkleri çarparken çarpımın hangi sırayla yapıldığı önemli değil.

Yukarıdaki renklendirmede her sütundaki renklerin çarpımı kolayca görüleceği üzere e'ye eşittir. Örneğin birinci sütunun renklerini çarparsak $acbe = bbe = ee = e$. Dolayısıyla bütün tablodaki renkleri çarparsak e buluruz.

L biçiminde bir tetromino bu tahtaya yerleştirildiğinde, tetrominonun kapladığı 4 karenin renklerinin çarpımı ya a olur ya da b. Demek ki satranç tahtasını 11 tetrominoyla kaplayabilseydik, 11 tane a ve b renginin çarpımı e olurdu. Ama çift sayıda a'nın ve çift sayıda b'nin çarpımı e, dolayısıyla 11 tane a ve b'nin çarpımı ancak a ya da b olabilir ama kesinlikle e olamaz. Kanıtımız bitmiştir.

Kaynakça:
[Go] Solomon W. Golomb, **Polyominoes, Puzzles, Patterns, Problems, and Packings**, Princeton University Press 1994.
[AG] Titu Andreescu ve Razvan Gelca, **Mathematical Olympiad Challenges**, Birkhäuser 2000.

19. Doğrudan Sayma

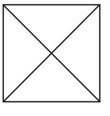
Bu bölümde tümevarıma gerek duymadan, doğrudan çözebileceğimiz birkaç sayma problemi ele alacağız.

19.1 Köşegenler Çokgenleri Kaç Parçaya Ayırır?

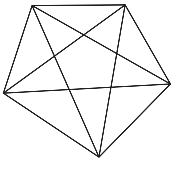
Köşegenlerin çokgenleri en fazla kaç parçaya ayırdığını sayalım.

Üçgende köşegen olmadığından dörtgenlerden başlayalım. Üçgenin (olmayan) köşegenlerinin üçgeni 1 parçaya ayırdığını söyleyebiliriz.

Bir dörtgenin köşegenleri dörtgeni dört parçaya ayırır:

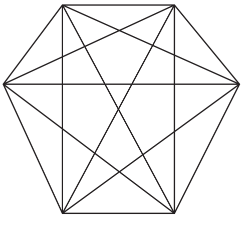


Bir beşgenin köşegenleri beşgeni kaç parçaya ayırır? Çizerek hesaplayalım:

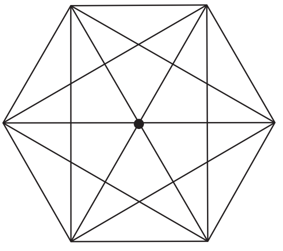


Sayarsak, beşgenin 11 parçaya ayrıldığını görürüz.

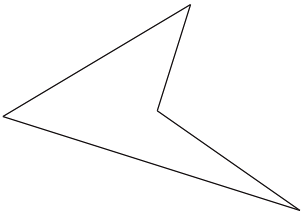
Ya bir altıgen kaç parçaya ayrılır? Bu soru biraz daha zor. Gene bir şekil çizelim:



Ve sayalım. Altıgen 25 parçaya ayrılmış. Ancak bu kez dikkat etmek gerekiyor, eğer köşegenlerin üçü aynı noktadan geçerse, parça sayımız azalır. Örneğin altıgenimiz düzgün altıgense bu başımıza gelir ve parça sayısı 25'ten 24'e düşer:



Aslında dörtgende de dikkat etmek gerekir. Örneğin eğer dörtgenimiz, dışbükey değilse, aşağıdaki gibiyse, köşegenler kesişmezler ve yanıtımız farklı olur.

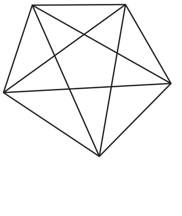


Bunu engellemek için bundan böyle n-genlerimizi dışbükey alalım. n kenarlı dışbükey bir çokgenin hiçbir üç köşegeni aynı noktada kesişmiyorsa, köşegenler çokgeni kaç parçaya ayırırlar? Yanıt küçük sayılar için şöyle:

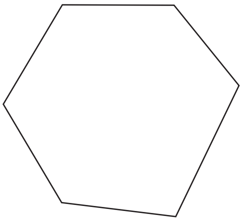
$$n = 3 \text{ için } 1,$$
$$n = 4 \text{ için } 4,$$
$$n = 5 \text{ için } 11,$$
$$n = 6 \text{ için } 25.$$

Genel yanıtı bulalım. Bu diziye bakarak yanıtı tahmin etmek mümkün değil. Biraz daha teorik düşünmeliyiz. Zaten dizinin nasıl devam ettiğini tahmin etsek bile, bulduğumuz sadece bir tahmindir, kanıtlanmadığı sürece tahmin olarak kalmaya mahkûmdur.

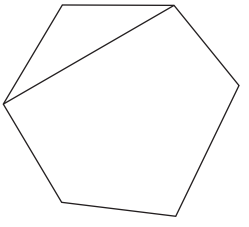
Bölgelere ayrılmış çokgenin içindeki köşegenlerin kesişim noktalarına ***iç-nokta*** adını verelim. Örneğin, aşağıdaki şekilde 5 içnokta vardır. Her köşegen 2 içnokta içerir.



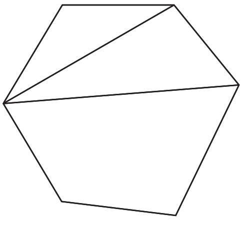
Başlangıçta bir tek bölgemiz var:



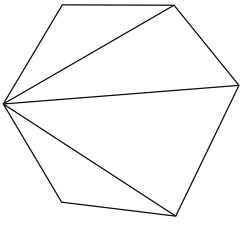
Köşegenleri teker teker çizelim. Birinci köşegenimiz 1 bölge daha ekler ve 2 bölgemiz olur:



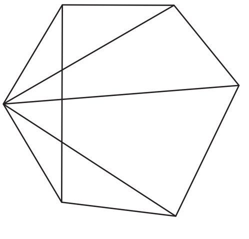
Bu köşegenin üstünde şimdilik hiç içnokta yoktur. Aynı noktadan çıkan bir sonraki köşegen de bölge sayısını 1 artıracaktır ve bu köşegenin de üstünde hiç içnokta olmayacaktır:



Bu köşeden çıkacağımız her köşegen, bölge sayısını 1 artırır:

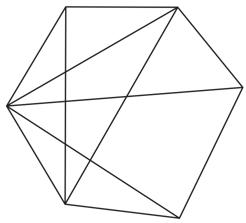


İkinci köşeye gelelim ve ikinci köşeden ilk köşegenimizi çıkalım:



Bu köşegenin üstünde 3 tane içnokta var ve bölge sayımızı 4 artıyor.

Bir sonraki köşegenin üstünde (şimdilik) 2 tane içnokta olacak ve bölge sayımızı 3 artıracak:



Çekilen her köşegen, bölge sayısını, çekildiği anda üstünde bulunan içnokta sayısının 1 fazlası kadar artıracaktır. Ayrıca, çokgenin her içnoktası bu yöntemle yalnızca bir kez sayılacaktır. Demek ki, bölge sayısı,

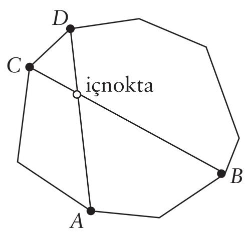
$$1 + (\text{köşegen sayısı}) + (\text{içnokta sayısı})$$

sayısına eşittir.

İçnokta sayısı

$$\binom{n}{4}$$

sayısına eşittir. Çünkü, çokgenin üstündeki her 4 nokta, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, tam bir tane içnokta verir.



Köşegen sayısı ise

$$\binom{n}{2} - n$$

sayısına eşittir, çünkü n tane köşeyi birleştiren doğru parçası sayısı

$$\binom{n}{2}$$

sayısına eşittir ve bunlardan n tanesi çokgenin kenarlarıdır (yani köşegen değildirler.)

Demek ki bölge sayımız,

$$1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$$

sayısına eşittir.

Eğer $n = 4$ ise, daha önce elle hesapladığımız gibi,

$$1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4} = 1 + \binom{4}{2} - 4 + \binom{4}{4} = 1 + 6 - 4 + 1 = 4$$

bölge buluruz. Eğer $n = 7$ ise,

$$1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4} = 1 + \binom{7}{2} - 7 + \binom{7}{4} = 1 + 21 - 7 + 35 = 50$$

bölge bulunur.

19.2 Bir Sihirbazlık

Kitabın ta en başında, ikinci bölümde gördüğümüz Güvercin Yuvası İlkesi'nin gücünü gösteren bir teorem kanıtlayalım. Buram buram sihirbazlık kokan bir teorem... 1'le 50 arasından herhangi on sayı seçin. Şimdi çok iddialı bir şey söyleyeceğiz: Bu on sayı arasından, toplamları birbirine eşit olan iki tane beş sayılık küme bulabilirsiniz. Örneğin, diyelim,

$$\{2, 5, 24, 26, 27, 30, 33, 34, 42, 50\}$$

sayılarını seçtiniz. Aşağıdaki beş elemanlı altkümelere bakalım:

$$\{2, 24, 27, 33, 42\} \text{ ve } \{5, 26, 30, 33, 34\}.$$

Bu iki kümenin sayılarının toplamları birbirine eşittir. İnanmazsanız toplayın.

İsterseniz başka on sayı seçin. Biraz denerseniz -ne sihirdir ne keramet- seçtiğiniz on sayı arasından, toplamları eşit olan iki tane beş elemanlı küme bulabilirsiniz.

Bu savı kanıtlayalım. A, on sayılık kümemiz olsun. A'nın kaç tane beş elemanlı altkümesi vardır? Tam

$$\binom{10}{5} = 252$$

tane vardır. Bu sayıyı aklımızda tutalım, birazdan gerekecek. Her beş elemanlık altkümenin sayılarının toplamı en az

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

en çok da

$$46 + 47 + 48 + 49 + 50 = 240$$

olabilir.

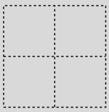
Toplamların 15'le 240 arasında değiştiğini bulduk. 15'le 240 arasında

$$240 - 15 + 1 = 226$$

sayı vardır. Bu sayı da önemli olacak, aklımızda tutalım.

Demek ki, 252 tane beş elemanlık altkümenin sayılarının toplamı (15'le 240 arasındaki) 226 sayıdan biri olmalı. 252, 226'dan daha büyük olduğundan, güvercin yuvası ilkesine göre, bu 252 altkümeden en az ikisi aynı toplamı vermeli. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Karenin Kare Sayısı



$n \times n$ tane birim kareye ayrılmış bir karede (kenarları yatay ve dikey) birim karelerden oluşan kaç kare vardır? Örneğin, $n = 2$ ise (yandaki şekil üstünde sayılabileceği gibi) toplam 5 kare vardır, dördü küçük, biri büyük.

Genel yanıt oldukça kolay. Oluşturulacak $i \times i$ boyutlu bir karenin tabanını koyacak $n - i + 1$ tane yerimiz var (bunun için tabanın başlangıç noktasını seçmek yeterli). Aynı nedenden yüksekliği için de bu kadar seçeneğimiz var. Demek ki toplamda

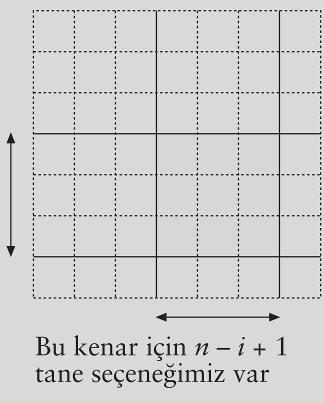
$$(n - i + 1)^2$$

tane $i \times i$ boyutlu kare var. Bu sayıları $i = 1, 2, \ldots, n$ için toplamalıyız. Şu sayıyı elde ederiz:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

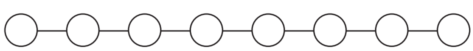
Bu toplamın kapalı bir formülü vardır (bkz. Alıştırma 2.15):

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



19.3 Sopayla Sayalım!

Bir tahta parçası alalım. Bu tahta parçası üzerinde eşit aralıklı ve biri sopanın başına biri de sonuna gelmek üzere n tane çentik açalım. Örneğin $n = 8$ ise, tahta parçamız şöyledir:



Bu n çentiğin p tanesini boyayacağız. Burada p, n'den küçükeşit bir sayı elbet. Örneğin $n = 8$ ve $p = 3$ ise, sopayı şöyle boyayabiliriz:

Boyamak için başka çentikler de seçebilirdik. Örneğin yukarıdaki çentikler yerine dördüncü, beşinci ve altıncı çentikleri boyayabilirdik.

Sekiz çentik arasından boyanacak üç çentik seçeceğiz. Kaç türlü seçebiliriz? Yanıt, "sekizin üçlüsü"

$$\binom{8}{3}$$

sayısıdır, yani $8!/5! \times 3!$ tür. Demek ki, sekiz çentik arasından üçünü,

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

değişik biçimde seçebiliriz.

Genel olarak, n çentik arasından p tanesini

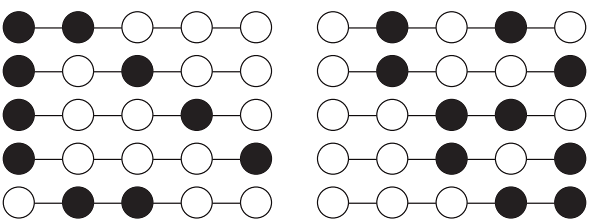
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

("n'nin p'lisi") değişik biçimde seçebiliriz.

Örneğin $n = 5$ ve $p = 2$ olsun ve beş çentikli bir sopa üzerinde kaç türlü iki çentik seçebileceğimizi hesaplayalım. Yukarıda dediğim gibi,

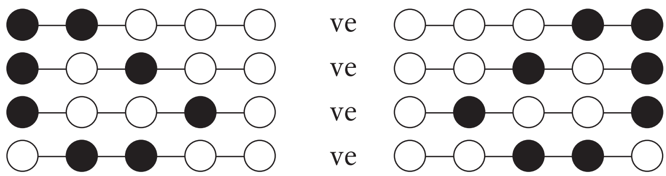
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

türlü iki çentik seçebiliriz. İşte o on seçim:

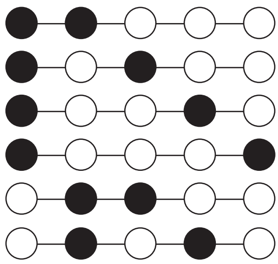


Buraya değin bir sorun olmaması gerekir. Ama var!

Sorun şu: sopayı 180 derece çevirdiğimizde, yani sopanın solunu sağına, sağını soluna getirdiğimizde, ayrı gibi gözüken iki boyanış türünün aslında bir olduğunu görürüz. Sopanın başı sonu belli değil ki! Örneğin, yukarıdaki ikisi boyalı beş çentikli on sopadan,



sopaları arasında bir ayrım yapamayız. Bu sopalar birbirinin simetriğidir ve bu simetrik sopaları bir saymak zorundayız. O zaman, on sopa arasından iki tane olanlarından birini atıp geriye kalanlara bakalım:



Soru. *Simetrik boyanmış sopaları bir sayarsak, n çentikli sopanın p çentiğini kaç türlü boyayabiliriz?*
Yanıt: Eğer $n = 5$, $p = 2$ ise, yanıtın 6 olduğunu yukarıda gördük. Simetrik boyalı sopaları ayrı ayrı sayarsak yanıtın

$$\binom{n}{p}$$

olduğunu biliyoruz. Bu,

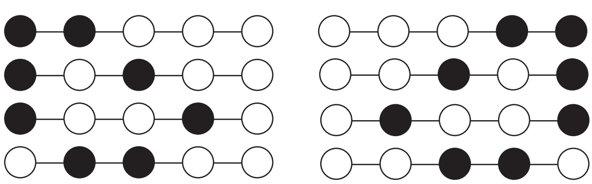
$$\binom{n}{p}$$

tane, simetrik ya da değil, boyanmış sopayı içeren kümeye A adını verelim.

Örneğin, $n = 5$, $p = 2$ ise, A kümesinin elemanlarını yukarıda görmüştük.

A kümesinin elemanlarını iki sınıfa ayıralım: Kendi kendisinin simetriği olanlar ve simetriği başka olanlar. Birinci kümeye B diyelim, ikinci kümeye C. Örneğin, $n = 5$, $p = 2$ ise, B kümesi aşağıdaki iki elemandan oluşmuştur:

ve C kümesi aşağıdaki 8 elemandan oluşmuştur:



Eğer A, B ve C kümelerinin eleman sayısını $|A|$, $|B|$ ve $|C|$ olarak gösterirsek, bizim bulmak istediğimiz sayı,

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} \tag{1}$$

sayısıdır.

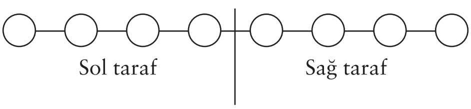
Ne biliyoruz?

$$\binom{n}{p} = |A| = |B| + |C| \tag{2}$$

eşitliğini biliyoruz. Bize yeterli değil. Eğer $|B|$ sayısını bulabilirsek, (2) eşitliğini kullanarak $|C|$ sayısını da bulabiliriz, arkasından da (1) eşitliğini kullanarak aradığımız x sayısını bulabiliriz. Demek ki B kümesinin eleman sayısını bulmak kalıyor.

B kümesinin eleman sayısı, n ve p sayılarının tekliği ve çiftliğine göre değişir.

***n* ve *p* Çift Sayılarsa:** İlk olarak n ve p sayılarının çift olduklarını varsayalım. B kümesinin her elemanı simetrik biçimde boyanmıştır. Demek ki boyalı p çentiğin yarısı sopanın solunda, yarısı sağındadır ve bu iki yarı birbirinin simetriğidir, bir başka deyişle, sol tarafın nasıl boyandığını biliyorsak, sağ tarafın da nasıl boyandığını biliriz.



n çift olduğundan, sopanın tam ortasında çentik yoktur ve bu çentiklerin $n/2$ tanesi soldadır. Soldaki bu $n/2$ çentikten $p/2$ tanesini seçeceğiz ve aynı seçimin simetriğini sağ tarafta da yapacağız. Soldaki $n/2$ çentikten kaç türlü $p/2$ çentik seçebiliriz?

$$\binom{n/2}{p/2}$$

türlü elbette. Demek ki, B kümesinde

$$\binom{n/2}{p/2}$$

tane eleman varmış. Yani

$$|B| = \binom{n/2}{p/2}$$

imiş. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{n/2}{p/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak x'i bulabiliriz:

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{n/2}{p/2}}{2}.$$

***n* Çift, *p* Tekse:** Bu durumda sopanın simetriği olmaz, yani

$$|B| = 0$$

dır. Demek ki,

$$x \overset{(1)}{=} \frac{|C|}{2} \overset{(2)}{=} \frac{|A|}{2} = \frac{\binom{n}{p}}{2}$$

dir.

***n* Tek, *p* Çiftse:** Şimdi n'nin bir tek sayı olduğunu varsayalım. O zaman sopanın tam ortasında bir çentik vardır ve çentiklerin

$$(n-1)/2$$

tanesi solda, $(n-1)/2$ tanesi sağdadır. p çift olduğundan, B kümesinin hiçbir sopasının ortasındaki çentik boyalı olamaz (yoksa çentikleri simetrik bir biçimde boyayamayız.) Demek ki B'deki her sopanın boyalı çentiklerinin yarısı, yani $p/2$ tanesi solda, öbür yarısı sağda, solun tam simetriğinde olmalıdır. Soldaki $(n-1)/2$ çentikten boyanacak $p/2$ tanesini seçeceğiz. Kaç türlü seçebiliriz?

$$\binom{(n-1)/2}{p/2}$$

türde elbet. Demek ki,

$$|B| = \binom{(n-1)/2}{p/2}$$

dir. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{(n-1)/2}{p/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak x'i bulabiliriz:

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}}{2}.$$

***n* ve *p* Tekse.** Bu durumda, B kümesinin her sopasının tam ortasındaki çentik boyanmalıdır. Çünkü p tektir ve tam ortadaki çentik boyanmazsa, boyalı çentiklerin yarısı solda, yarısı sağda olamaz. Demek ki, soldaki $(n-1)/2$

çentikten $(p-1)/2$ tanesi boyalıdır. Soldaki bu $(n-1)/2$ çentikten kaç türlü boyanacak $(p-1)/2$ çentik seçebiliriz?

$$\binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

tane elbet. Demek ki

$$|B| = \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak x'i bulabiliriz:

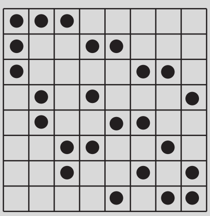
$$x + |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}}{2}$$

Sonuç. n ve p sayılarının tekliği ve çiftliğine göre dört değişik sonuç bulduk. Ama sonuçlara biraz dikkatle bakarsak bu dört değişik sonucu 2'ye indirebiliriz:

$$\begin{cases} x = \frac{\binom{n}{p}}{2}, & \text{eğer } n \text{ çift, } p \text{ tekse} \\ x = \frac{\binom{n}{p} + \binom{[n/2]}{[p/2]}}{2}, & \text{öbür durumlarda} \end{cases}$$

Burada, $[x]$, x'in tamkısmı, yani x'ten küçükeşit en büyük tamsayı anlamına gelir.

Dikdörtgensiz Dama



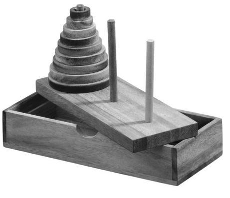
8×8 boyutlu bir dama tahtasına, dördü (yatay ya da dikey) bir dikdörtgenin köşelerini oluşturmayacak biçimde 24 tane dama taşı yerleştirilebilir. Bu yerleştirmelerden biri solda gözüküyor. Bu özelliği sağlayacak biçimde 25 tane taş yerleştiremeyeceğinizi kanıtlayın. Aynı türden soruları daha büyük ebatta dama tahtaları için yanıtlamaya çalışın.

20. Tümevarımla Sayma

Üç sayma problemi daha ele alacağız bu bölümde. Herbirinin sayma problemi olmasının yanısıra, bir başka ortak yanları, genel çözümün aynı problemin daha basit hallerinin çözümünden kaynaklanması, yani problemleri belli bir zorluk seviyesinde çözmek için problemlerin daha kolay durumlardaki çözümünden yararlanılmasıdır, yani tümevarım ilkesidir.

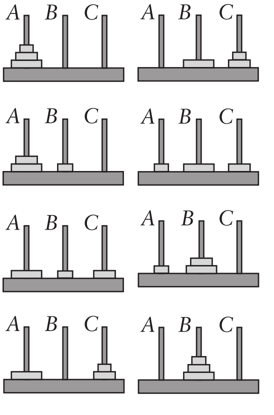
20.1 Hanoi Kulesi Oyunu

Aşağıdaki resimdeki tek kişilik oyuna bakın. Amaç soldaki çiviye boy sırasıyla dizilmiş dokuz tekeri gene boy sırasıyla bir başka çiviye dizmektir. Yasal bir tür hamle var: Bir teker bulunduğu çividen çıkarılıp bir başka çiviye geçirilebilir, ama alttaki tekerler üstteki tekerlerden hep daha büyük olmalı; yani bir tekeri kendisinden daha küçük bir tekerin üstüne koyamazsınız.



Bunu başarabilir misiniz ve başarabilirseniz en az kaç hamlede başarabilirsiniz? Dokuz yerine n tane teker alalım ve aynı soruyu 9 yerine n için soralım.

Bu problem Fransız matematikçi Edouard Lucas tarafından 1883'te bir Hint söylencesinden esinlenerek bulunmuştur. Söylenceye göre, Benares şehrinde bulunan ve dünyanın merkezi olan (inanmayan ölçsün!) bir tapınağın kubbesinin altına, var olan her şeyi yaratan Brahma, evreni yaratırken, üç elmas iğneden birine, büyükten küçüğe sıralanmış biçimde saf altından yapılmış 64 teker geçirmiş. Rahipler gece gündüz dur durak bilmeden bu 64 tekeri teker teker gene aynı sırayla bir başka iğneye geçirmeye çalışırlarmış. Ama bir tekeri daha küçük bir tekerin üstüne koymaya hakları yokmuş. Rahipler başarıya ulaştıklarında tapınak dahil her şey yerle bir ve un ufak olacak, yani kıyamet kopacakmış.



Küçük n sayıları için, mesela $n = 1$, 2, 3 için sonucu bulmaya çalışalım.

Eğer $n = 1$ ise, o zaman tek bir hamle yeterli: Tekeri A çivisinden alıp B çivisine geçirelim.

Eğer $n = 2$ ise, kolayca sınanacağı üzere üç hamle yeterli ve daha az hamlede de problem çözülemez.

Eğer $n = 3$ ise, bir çözümü önceki sayfaya çizdik. Toplam 7 hamle yetiyor. Problemin daha az hamlede çözülemeyeceği sanırım hissedilir, ama bu kez ikna olmak ya da etmek o kadar kolay olmayabilir.

n tekerli problemi çözen en az hamle sayısına f_n diyelim. Yukarıda gördüğümüz gibi,

$$f_1 = 1,\ f_2 = 3,\ f_3 \leq 7.$$

Amacımız f_n'yi bulmak.

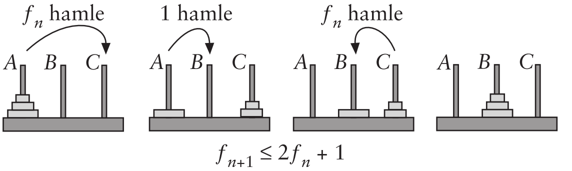
Şimdi düşünelim. Aşağıdaki şekilden takip edin. $n+1$ tekerli oyunda, en alttaki tekeri unutursak, geri kalan n tekeri f_n hamlede C çivisine boy sırasına göre dizebiliriz. Ardından en büyük tekeri A'dan B'ye geçirebiliriz. Son olarak da C çivisinde boy sırasına göre dizilmiş olan n tekeri B çivisine (en büyük tekerin üstüne) gene boy sırasına göre f_n hamlede aktarabiliriz. Böylece

$$f_n + 1 + f_n = 2f_n + 1$$

hamlede $n+1$ tekeri boy sırasına göre dizmiş oluruz. Demek ki

$$f_{n+1} \leq 2f_n + 1$$

olur.



$f_{n+1} \leq 2f_n + 1$

Peki daha az hamlede bu işi becerebilir miyiz, yani

$$f_{n+1} < 2f_n + 1$$

olabilir mi? Hayır! Olamaz! Bunu kanıtlayalım. En büyük teker ancak en altta olabilir, dolayısıyla bu en büyük tekeri yerinden oynatabilmemiz için çivilerden biri boş olmalı, yani geri kalan n teker, boy sırasıyla tek bir çiviye geçirilmiş olmalı. Büyük tekerin yerini iki kez değiştirmek demek, aynı pozisyona iki kez gelmek demektir ki böyle bir hareket gereksiz olup bize zaman kaybettireceğinden büyük tekeri sadece bir kez yerinden oynatmalıyız. Demek ki büyük tekeri bir kez yerinden oynattıktan sonra sadece geri kalan n tekere dokunmalıyız ve bunları boy sırasına göre büyük tekerin üstüne dizmeliyiz, ki bu da en az f_n hamlede yapılabilir. Dolayısıyla $f_{n+1} \geq 2f_n + 1$. Böylece

$$f_{n+1} = 2f_n + 1$$

eşitliğini elde ederiz.

Demek ki f_n'yi biliyorsak, $f_{n+1} = 2f_n + 1$ eşitliğinden hareketle f_{n+1}'i de bulabiliriz. Bu formülü $n = 1, 2, 3, 4$'e uygularsak, f_1'i bildiğimizden,

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1\\
f_2 &= 2f_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3\\
f_3 &= 2f_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7\\
f_4 &= 2f_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15\\
f_5 &= 2f_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada durmak zorunda değiliz elbet, istediğimiz kadar gidebiliriz. On adımda f_{10}'u, yüz adımda f_{100}'ü, bin adımda f_{1000}'i hesaplayabiliriz. En önemlisi, 64 adımda f_{64}'ü hesaplayıp kıyametin aşağı yukarı ne zaman kopacağını tahmin edebiliriz! Brahma rahiplerinin saniyede bir hamle yaptıklarını ve hiç şaşırmadıklarını varsayarsak, evrenin bilinen yaşının beş katı bulunur! Demek ki Brahma 64 yerine 62 teker koysaydı, bugün tahmin edilen kıyamet tarihi bulunacaktı aşağı yukarı, tuhaf bir tesadüf[1]!

Her şey iyi güzel de, f_{1000}'i bin adımda değil, bir adımda hesaplamak istiyorum! İşim gücüm var, acelem var, bin tane hesap yapmak istemiyorum. Bu kolaylığa ulaşmak için sadece f_n'nin sadece n'ye bağımlı olan "kapalı" bir formülünü bulmalıyım.

Yukarıda bulduğumuz f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 sayılarına 1 ekleyelim, bakalım ne olacak:

$$\begin{aligned}
f_1 + 1 &= 1 + 1 = 2\\
f_2 + 1 &= 3 + 1 = 4\\
f_3 + 1 &= 7 + 1 = 8\\
f_4 + 1 &= 15 + 1 = 16\\
f_5 + 1 &= 31 + 1 = 32
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bunların 2'nin kuvvetleri olduğu dikkatinizi celbetmiştir herhalde:

[1] Hint inanışına göre üç büyük tanrı vardır: var eden Brahma, koruyan Vişnu ve yok eden Şiva. Bu üç tanrı, "üç biçimli" anlamına gelen ve çoğu zaman üç başlı bir vücutla resmedilen Trimurti ortak adıyla anılırlar.

$$\begin{aligned}
f_1 + 1 &= 2 = 2^1\\
f_2 + 1 &= 4 = 2^2\\
f_3 + 1 &= 8 = 2^3\\
f_4 + 1 &= 16 = 2^4\\
f_5 + 1 &= 32 = 2^5.
\end{aligned}$$

Bu kadar da rastlantı olamaz! Burada bir teorem olmalı! Galiba,

$$f_n + 1 = 2^n$$

denklemi doğru... Bu son eşitliği kanıtlayalım.

Bildiğimiz

$$f_{n+1} = 2f_n + 1$$

denkleminin her iki tarafına da 1 ekleyelim:

$$f_{n+1} + 1 = 2f_n + 2 = 2(f_n + 1)$$

elde ederiz; yani eğer, $f_n + 1$ yerine g_n dersek,

$$g_{n+1} = 2g_n$$

denklemini elde etmiş oluruz.

$$g_1 = f_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

olduğundan, $g_{n+1} = 2g_n$ formülünde sırayla $n = 1, 2, 3, 4$ alarak,

$$\begin{aligned}
g_1 &= 2 = 2^1\\
g_2 &= 2 \times g_1 = 2 \times 2^1 = 2^2\\
g_3 &= 2 \times g_2 = 2 \times 2^2 = 2^3\\
g_4 &= 2 \times g_3 = 2 \times 2^3 = 2^4\\
g_5 &= 2 \times g_4 = 2 \times 2^4 = 2^5
\end{aligned}$$

buluruz. Bunlar zaten bildiğimiz sonuçlardı, ama olsun, bir defa daha bulduk ve bir defa daha bularak gerçekten ikna olduk: Her g_n bir öncekinin iki katı olduğundan ve $g_1 = 2^1$ olduğundan, g_n gerçekten 2^n olmalı.

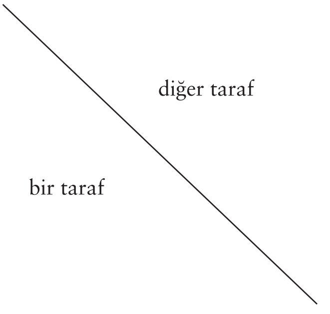
Olmalı ama matematikte içinde "olmalı" sözü geçen kanıtlar geçerli değildir. Doğruluğu apaçık belli olan bu eşitliğin matematiksel bir kanıtını Örnek 2.1'de vermiştik.

Sonuç. *n tekerli Hanoi Kuleleri problemi en az $2^n - 1$ adımda çözülebilir.* □

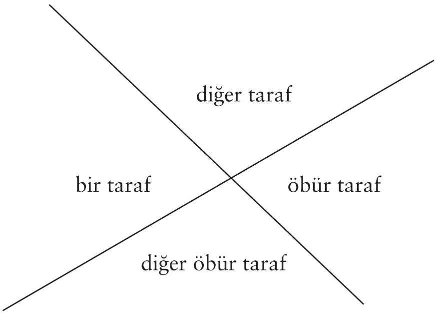
Yanıtı Bilinmeyen Bir Soru. $k > 3$ tane çubuk olursa, n teker için Hanoi Kulesi problemi en fazla kaç hamlede çözülür? Bu sorunun yanıtı bilinmiyor. $k = 4$ şıkkında kısmi yanıt için bkz. Ben Houston ve Hassan Masum: `http://www.exocortex.org/toh/` Genel durum için bkz. `http://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi/`

20.2 İkinci Problem: Düzlemi Parçalayan Doğrular

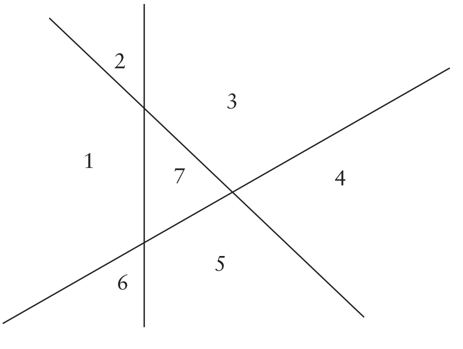
Bir doğru düzlemi iki bölgeye parçalar. İşte:



Paralel olmayan iki doğru aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi düzlemi dört parçaya böler.



Üçüncü bir doğru daha çizersek, eğer üçüncü doğru ilk iki doğrunun kesişiminden geçmezse ve daha önceki iki doğrudan birine paralel değilse, düzlem yediye parçalanır:



Dördüncü bir doğru, eğer ilk üç doğrunun belirlediği kesişimlerden geçmezse ve ilk üç doğrudan birine paralel değilse düzlemi 11 parçaya böler.

Ya 7 doğru bir düzlemi en fazla kaç parçaya ayırır? Yapacağımızı ve matematiği doğru değerlendirmek için bu soruyla beş on dakika ilgilenin. Pek kolay olmadığını göreceksiniz.

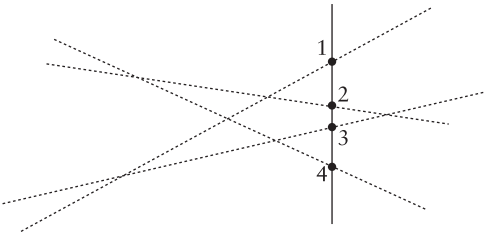
Ya 50 doğru bir düzlemi en fazla kaç parçaya ayırır? Kaleme kâğıda sarılıp 50 tane doğru çizmenizi önermem!

Soru şu: n tane doğru düzlemi en fazla kaç parçaya böler? Bu sayıya B_n diyelim. $B_0 = 1$ (hiç doğru yoksa düzlem eskisi gibi tekparça kalır!) $B_1 = 2$, $B_2 = 4$, $B_3 = 7$ eşitliklerini biliyoruz. Sıra diğerlerini bulmaya geldi!

Oyun moyun yok ama olsun... Bu da bir çeşit tek kişilik oyun sayılır.

Her doğru eski parçaların her birini en fazla iki parçaya bölebilir. Demek ki $B_{n+1} \leq 2B_n$. Ama $n = 2$ olduğunda görüldüğü gibi eşitlik her zaman geçerli değil, bu kez işimiz biraz daha zor.

Gene biraz düşüneceğiz... Çizilen her yeni doğru, kestiği



doğru sayısından bir fazla kadar alanı ikiye böler, örneğin eğer yeni çizilen doğru 4 doğruyu kesmişse, bu yeni doğru beş alanı ikiye bölmüş ve bu beş alanı on alan yapmış demektir; bu söylediğimizin doğruluğu yukarıdaki şekilden anlaşılmalı. Dolayısıyla $n{+}1$'inci doğruyu diğer tüm n doğruyu kesecek biçimde çizersek, ki çizebiliriz elbet, alan sayısını $n + 1$ artırmış oluruz. Bundan da,

$$B_{n+1} = B_n + n + 1$$

eşitliği çıkar. Şimdi $B_0 = 1$ eşitliğinden hareketle, yeterince zamanımız varsa her B_n'yi bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1\\
B_1 &= B_0 + 1 = 2\\
B_2 &= B_1 + 2 = 4\\
B_3 &= B_2 + 3 = 7\\
B_4 &= B_3 + 4 = 11\\
B_5 &= B_4 + 5 = 16\\
B_6 &= B_5 + 6 = 22\\
B_7 &= B_6 + 7 = 29
\end{aligned}$$

Böylece ilk sorumuzu yanıtlamış olduk: Yedi doğruyla düzlem en fazla 29 alana bölünebilir. Ama ikinci sorumuza yanıt verecek durumda değiliz daha, 50 doğruyla düzlemi kaç parçaya ayıracağımızı bulmak için bu işlemlerden tam 50 tane yapmalıyız. Oysa bilindiği üzere bizim işimiz gücümüz var!

Yukarıdaki listeyi 0'dan 7'ye kadar yazacağımıza 0'dan n'ye kadar (kaçsa o n!) yazalım:

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1\\
&B_1 = B_0 + 1\\
&B_2 = B_1 + 2\\
&B_3 = B_2 + 3\\
&\ldots\\
&B_{n-1} = B_{n-2} + n - 1\\
&B_n = B_{n-1} + n
\end{aligned}$$

ve eşitliğin her iki tarafını da toplayalım. Sol tarafta B_0'dan B_n'ye kadar olan sayıların toplamlarını buluruz. Sağ tarafta B_0'dan B_{n-1}'e kadar olan sayıların toplamları beliriyor, bunun dışında bir de 1 ve 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamları var. B_0'dan B_{n-1}'e kadar olan sayılar her iki tarafta da belirdiğinden, bunlar sadeleşirler, yani yok olurlar ve geriye,

$$B_n = 1 + (1 + 2 + \cdots + n)$$

kalır. Ne güzel! Şimdi, sağdaki

$$1 + 2 + \cdots + n$$

toplamını bulmalıyız. Gauss'un anasının karnındayken bulduğu rivayet edilen bu toplamın ne olduğunu herhalde herkes biliyordur:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Bkz. Alıştırma 2.15.) Demek ki

$$B_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Şimdi artık ikinci sorumuza yanıt verebiliriz, 50 doğruyla bir düzlemi,

$$\frac{50^2 + 50 + 2}{2} = \frac{2552}{2} = 1276$$

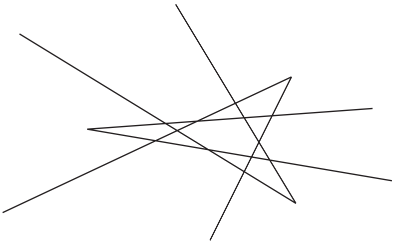
parçaya ayırabiliriz.

Alıştırmalar

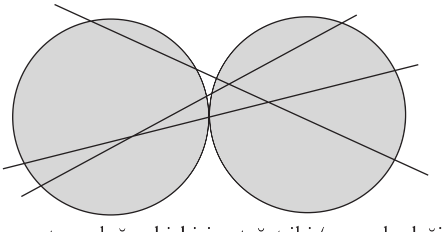
20.1. n tane doğru bir daireyi en fazla kaç parçaya ayırır?

20.2. n tane doğru bir düzlemi en fazla kaç **sınırlı olmayan** parçaya ayırır? ($n = 0$ için 1, $n = 1$ için 2, $n = 2$ için 4, $n = 3$ için 6.)

20.3. n tane kırık doğruyla düzlem en fazla kaç parçaya ayrılır?



20.4. n tane doğru iki (eş ya da değil) teğet daireyi en fazla kaç parçaya ayırır?



n tane doğru birbirine teğet iki (eş ya da değil) daireyi en fazla kaç parçaya böler?

20.5. n tane eş çember düzlemi en fazla kaç parçaya böler?

20.6. n tane (eş ya da değil) çember düzlemi en fazla kaç parçaya böler?

20.7. n tane çember ve doğru düzlemi en fazla kaç parçaya böler?

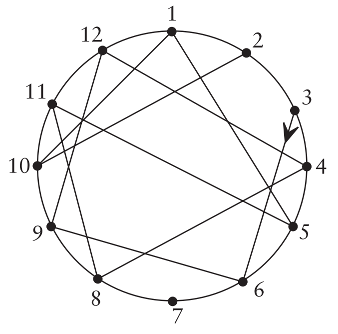
20.8. n tane düzlem, üç boyutlu uzayı en fazla kaç parçaya böler? Bunlardan kaçı sınırlı bölgedir?

20.3 Üçüncü Problem: Josephus Problemi

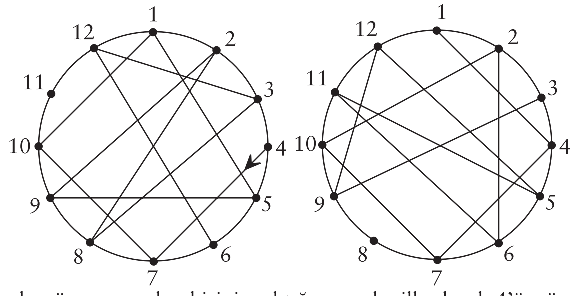
Flavius Josephus'un ilginç yaşamöyküsünü bölümün sonunda okuyabilirsiniz. Belli ki, zeki, işini bilen, havayı iyi koklayan, rüzgârın hangi yönden eseceğini doğru kestirebilen biriymiş. Josephus sayesinde matematik dünyası şu problemle tanışmıştır:

41 kişi bir daire şeklinde diziliyorlar. Kişiler 1'den 41'e kadar belli bir yön takip edilerek numaralandırılıyorlar. Sonra birinciden itibaren saymaya başlanıyor ve her üçüncü kişi oyundan ve daireden çıkıyor... Son kalan kazanıyor. Oyunu kazanmak için kaçıncı kişi olmak gerekir?

Bu soruyu elbette sadece 41 oyuncu için değil, herhangi n sayıda oyuncu için sorabiliriz, örneğin eğer 12 kişiyle başlarsak, aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere 10'uncu kişi oyunu kazanır. (Saymaya 1'den başlanıyor: $1 - 2 - 3$ ve üçüncü kişi oyundan çıkıyor; $4 - 5 - 6$ ve 6'ncı kişi oyundan çıkıyor, vs.)



Saymaya başkasından başlarsak sonuç değişebilir. Aşağıda buna örnek verdik.



12 oyuncuyla ve her üç oyuncudan birinin çıktığı oyunda, ilk olarak 4'üncü oyuncu çıkarsa oyunu 11'inci oyuncu kazanır. İlk olarak 1'inci oyuncu çıkarsa oyunu 8'inci oyuncu kazanır.

Her üç kişiden biri oyundan çıkacağına her p'inci kişiden biri oyundan çıkarsa (p, n'den büyük de olabilir), oyun daha da genelleşmiş olur.

Biz burada n'yi herhangi bir sayı olarak alacağız ama p'yi 2 seçeceğiz: Her ikinci kişi oyundan çıkacak. Önce 2 numara, sonra varsa 4, 6, 8 numaralar çıkacak vs.

Birkaç denemeyle başlayalım ($J(n)$, oyunu kazananın numarası olsun):

$$\begin{array}{lcccccccccccc} n & = & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ J(n) & = & 1 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

Kazananın hep tek sayılı oyuncu olması o kadar şaşırtıcı olmamalı, ne de olsa birinci turda çift sayılar eleniyorlar ve geriye sadece tek sayılar kalıyor. Bu oyunu genel olarak kimin kazandığını bulacağız.

Eğer Çift Sayıda Oyuncu Varsa. Oyuncu sayısına $2n$ diyelim. İlk n seferde

$$2,\ 4,\ \ldots,\ 2n$$

numaralar elenecek ve geriye sadece n tane tek numara kalacak ve o andan itibaren aynı oyun $2n$ yerine n oyuncuyla yeniden oynanacak. Bu yeni oyunda eski 1 numaralı oyuncu gene 1 numara olacak, ama diğerlerinin numarası değişecek: eski 3 numara 2 numara, eski 5 numara 3 numara, eski 7 numara 4 numara olacak... Genel olarak eski $2k-1$ numaralı oyuncu yeni oyunda k numara olacak. Demek ki bu yeni n kişilik oyunu k numaralı oyuncu kazanıyorsa, $2n$ kişilik oyunu $2k-1$ numaralı oyuncu kazanır. Dolayısıyla,

$$J(2n) = 2J(n) - 1$$

eşitliği geçerlidir. Örneğin, $J(1) = 1$, $J(2) = 1$, $J(3) = 3$ eşitliklerini bulmak kolay olduğundan, bu formülden,

$$\begin{aligned} J(2) &= 2J(1) - 1 = 2 - 1 = 1, \\ J(4) &= 2J(2) - 1 = 2 - 1 = 1, \\ J(6) &= 2J(3) - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

eşitliklerini de bulabiliriz. Daha da ileri gidelim:

$$J(8) = 2J(4) - 1 = 2(2J(2) - 1) - 1 = 1.$$

Bir adım daha gidelim:

$$J(10) = 2J(5) - 1.$$

Demek ki $J(5)$'i bulursak $J(10)$'u da bulabiliriz. Kolay bir denemeyle $J(5) = 3$ bulunur. Demek ki,

$$J(10) = 2J(5) - 1 = 5.$$

Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} J(20) &= 2J(10) - 1 = 9, \\ J(40) &= 2J(20) - 1 = 17 \end{aligned}$$

bulunur.

Eğer Tek Sayıda Oyuncu Varsa. Oyuncu sayısına bu kez $2n+1$ diyelim. O zaman 2, 4, 6, ..., $2n$ ve 1 numaralı oyuncular bu sırayla elenirler ve geriye n tane oyuncu kalır. Bu n oyuncu gene aynı oyunu oynayacaklar ama bu yeni oyunda da oyuncuların numaraları değişir. İlk oyunda 3 numara bu yeni oyunda 1 numara olur, eski 5 numara 2 numara olur, eski 7 numara 3 numara olur... Genel olarak eski oyunda $2k+1$ numaralı olan oyuncu yeni oyunda k numaralı oyuncu olur. Demek ki,

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1.$$

Böylece oyunun analizi neredeyse tamamlandı:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1, \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1. \end{aligned}$$

Artık istediğimiz n sayısından başlayarak $J(1)$'e kadar geri gidebilir ve $J(n)$'yi bulabiliriz. Örneğin,

$$J(19) = 2J(9) + 1 = 2(2J(4) + 1) + 1 = 7.$$

Yalnız bulduğumuz yöntem pek pratik değil. $J(10.000)$'i bu yöntemle hesaplamak epey meşakkatli. Genel ve "kapalı" bir formül bulalım. İlk olarak bulduğumuz ilk birkaç J değeri yazıp bu değerlere alıcı gözle bakalım:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Belli bir düzen olduğu belli. 2^k'dan $2^{k+1} - 1$'e kadar olan sayılar için J değeri 1, 3, 5, ..., $2^{k+1} - 1$ diye değişiyor.

Formülü tahmin etmek için J'nin 8'den 15'e kadar olan sayılarda aldığı değerleri bir liste halinde yazalım:

$$\begin{aligned}
J(8) &= J(2^3 + 0) = 1 = 2 \times 0 + 1,\\
J(9) &= J(2^3 + 1) = 3 = 2 \times 1 + 1,\\
J(10) &= J(2^3 + 2) = 5 = 2 \times 2 + 1,\\
J(11) &= J(2^3 + 3) = 7 = 2 \times 3 + 1,\\
J(12) &= J(2^3 + 4) = 9 = 2 \times 4 + 1,\\
J(13) &= J(2^3 + 5) = 11 = 2 \times 5 + 1,\\
J(14) &= J(2^3 + 6) = 13 = 2 \times 6 + 1,\\
J(15) &= J(2^3 + 7) = 15 = 2 \times 7 + 1.
\end{aligned}$$

Demek ki tahminimiz, eğer $m \geq 0$ ve $0 \leq \ell < 2^m$ ise

$$J(2^m + \ell) = 2\ell + 1$$

olmalı.

Bu eşitliği de tümevarımla kanıtlayacağız, ama burada bir değil, ℓ ve m diye adlandırdığımız iki tamsayıyla ilgili bir eşitlik sözkonusu. Biz m üzerine tümevarım yapacağız. Yani m üzerine tümevarımla şu önermeyi kanıtlayacağız: $0 \leq \ell < 2^m$ *eşitsizliklerini sağlayan her* ℓ *için,* $J(2^m + \ell) = 2\ell + 1$.

Önce $m = 0$ durumunu kanıtlayalım. (Tümevarımın başlangıç adımı; merdivenin eşiği diyelim.) Bu durumda ℓ ancak 0 olabilir, çünkü $0 \leq \ell < 2^0 = 1$ eşitsizlikleri sağlanmalı. Demek ki,

$$J(2^0 + 0) = 2 \times 0 + 1$$

eşitliğini kanıtlamalıyız, yani $J(1) = 1$ eşitliğini, ki bunu biliyoruz.

Şimdi merdivenin m'inci basamağında olduğumuzu varsayıp bir sonraki $m+1$'inci basamağa nasıl çıkacağımızı görelim. $0 \leq \ell < 2^m$ eşitsizliklerini sağlayan her ℓ için,

$$J(2^m + \ell) = 2\ell + 1$$

eşitliğini varsayıp (tümevarım varsayımı), $0 \leq \ell < 2^{m+1}$ eşitsizliğini sağlayan her ℓ için,

$$J(2^{m+1} + \ell) = 2\ell + 1$$

eşitliğini kanıtlayalım. Eğer ℓ çiftse, $\ell = 2k$ yazıp hesaplayalım:

$$\begin{aligned} J(2^{m+1} + \ell) &= J(2^{m+1} + 2k) = J(2(2^m + k)) \\ &= 2J(2^m + k) - 1 = 2(2k+1) - 1 \\ &= 2(\ell + 1) - 1 = 2\ell + 1. \end{aligned}$$

(Birinci eşitlik $\ell = 2k$ eşitliğinden, üçüncü eşitlik yukarıda bulduğumuz

$$J(2n) = 2J(n) - 1$$

eşitliğinden çıkar. Dördüncü eşitlik tümevarım varsayımıdır. Gerisi hesap.) Şimdi de ℓ'nin tek olduğunu varsayıp $\ell = 2k+1$ yazalım ve hesaplayalım:

$$\begin{aligned} J(2^{m+1} + \ell) &= J(2^{m+1} + 2k + 1) = J(2(2^m + k) + 1) \\ &= 2J(2^m + k) + 1 = 2(2k+1) + 1 = 2\ell + 1. \end{aligned}$$

(Birinci eşitlik $\ell = 2k+1$'den, üçüncü eşitlik yukarıda bulduğumuz

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1$$

eşitliğinden çıkar. Dördüncü eşitlik tümevarım varsayımıdır. Gerisi basit hesap.)

Flavius Josephus (MS 37 - ∼100). Flavius Josephus hayata filozof olarak başlamış, daha sonra Roma'ya karşı savaşan bir generale dönüşmüş, hayatta kalabilmek için bir ara peygamber olmak zorunda kalmış ve daha sonra tarihçilikle iştigal etmiş ilginç bir kişiliktir. Çağının tek Yahudi tarihçisi olarak bilinir.

Yahudilerin acımasızca vergilendirilmesi ve yoksullaşması sonucu halkın ayaklanmasıyla başlayan, Roma'yla Roma işgali altındaki Yahudi Krallığı'nın savaşında (MS 66-70) Galilee bölgesini Romalı general Vespasian'a karşı korumaya çalışmıştır. (Burada ilginç bir parantez açalım: Vespasian, yaşlı ama geçmişte birçok zafere imza atan bir Roma generaliydi. Roma imparatoru Nero'nun bir konserinde uyuyakaldığı için maaşı kesilmiş ve gözden düşmüştü!

Ancak savaşın kötüye gitmesi, Nero'yu konserinde uyuyakalan generali tekrar göreve çağırmaya mecbur bırakmıştır.) Josephus direnmede başarılı olamayınca, gözünü budaktan sakınmayan 40 savaşçısıyla birlikte bir mağaraya sığınmıştır. Josephus'un karşı koymasına karşın, diğerleri Romalılara teslim olmaktansa intihar etmeyi yeğlemişlerdir. Bunun üzerine Josephus şu intihar biçimini önermiş: 41 kişi bir daire şeklinde dizilecek ve kimse kalmayıncaya kadar her üç kişiden biri kendini öldürecek... Josephus kendisini hayatta kalan en son kişi kalacak biçiminde yerleştirmiş(miş...) sonra da gidip Roma generali Vespasian'a teslim olmuştur. Josephus, generalin imparator olacağı kehanetinde bulunması sayesinde çarmıha gerilmekten kurtulmuştur. Generalin kendi yaşındaki oğluyla sıkı fıkı olup hapisten de kurtulmuş ve hele kehaneti gerçekleştiğinde (MS 69) daha da göze girip yaşamını Yahudi kültürünü Romalılara ve Roma kültürünü Yahudilere aktarmaya adamıştır. MS 98'de Vespasian'ın sülalesi imparatorluktan atılınca gözden düşmüştür. Nasıl ve ne zaman öldüğü (dolayısıyla ölüp ölmediği de!) bilinmemektedir.

Kaynakça:

[GKP] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, **Concrete Mathematics,** Addison - Wesley 1994.

21. Dizi Sayma

A ve B harflerini kullanarak 4 haneli kaç sözcük yazabiliriz? Sözcüklerimizin illa anlamlı olması gerekmez.

Bu sözcükleri alfabe sırasına göre sıralayabiliriz. İşte:

$$\begin{gathered}AAAA,\\AAAB,\\AABA,\\AABB,\\ABAA,\\ABAB,\\ABBA,\\ABBB,\\BAAA,\\BAAB,\\BABA,\\BABB,\\BBAA,\\BBAB,\\BBBA,\\BBBB.\end{gathered}$$

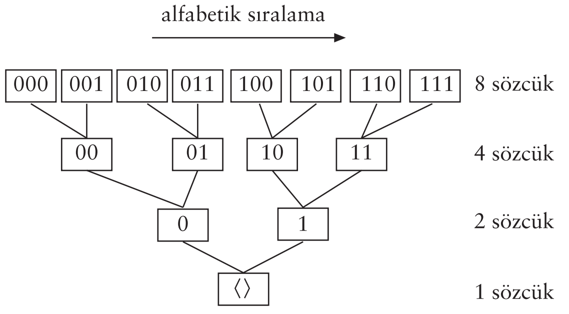
Toplam 16 tane.

Matematikte A ve B harfleri yerine 0 ve 1 rakamları tercih edilir. O zaman, "sözcüklerimiz", yine "alfabe sırasına göre", yani küçükten büyüğe doğru 0000'dan başlayarak 1111'e kadar uzanır ve bunlara sözcük yerine kimileyin 01-***dizisi*** denir. Biz her iki terimi de kullanacağız.

n uzunluğunda kaç 01-dizisi vardır? Yanıt oldukça kolay. Her hane için, 0 ve 1 olmak üzere 2 seçenek vardır. Dolayısıyla n tane hane için, toplam,

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

tane seçenek olur. Bu dizileri aşağıdaki şekildeki gibi, n yüksekliğinde bir "ağacın" uç noktaları olarak görebiliriz. (Ağacın en dibindeki "boşsözcük"e, daha doğrusu boşdiziye dikkatinizi çekerim. Boşdizinin uzunluğu 0'dır, yani hiç harfi yoktur. Boşdizi $\langle\ \rangle$ olarak yazılır.)



Bir üst katı oluşturmak için, en üst kattaki her sözcüğün sonuna 0 ve 1 eklenir. 0 eklendiğinde sola, 1 eklendiğinde sağa gidilir. Böylece sözcükler - soldan sağa doğru - alfabetik sırayla belirir.

Şimdi sorularımızı yavaş yavaş zorlaştıralım.

Soru 1. *İçinde* 01 *altdizisi barındırmayan n uzunluğunda kaç* 01*-dizisi vardır?* Dikkat: Dizinin içinde 10 olabilir; ama yanyana gelmiş 01 olmayacak. 01'i ayıp kelime olarak düşünün. İçinde ayıp kelime olmayan n uzunluğundaki kelime sayısını soruyoruz.
Yanıt: $n + 1$ tane vardır.
Yanıtın Kanıtı: Bir dizinin içinde 01 barındırmaması için, dizide 0 göründüğü andan itibaren dizinin hep 0 olması gerekir. Dolayısıyla böyle bir dizi 1'le başlayabilir ve 1'le bir süre devam edebilir, ama dizide 0 göründüğü andan itibaren dizi hep 0 olarak devam etmelidir. İşte $n = 5$ ise o diziler:

$$00000,\ 10000,\ 11000,\ 11100,\ 11110,\ 11111.$$

Toplam 6 tane var. Genel bir n sayısı için, n uzunluğunda kaç tane 01'siz 01-dizisi vardır?

Yukarıda dediğimiz gibi, 01'siz her dizi, 0'ın ilk belirdiği yer tarafından belirleniyor. 0 ilk olarak tam $n + 1$ değişik yerde belirebilir: Birinci terim 0 olabilir, ki o zaman sadece 0'dan oluşan $000\ldots00$ sözcüğünü elde ederiz; 0 ilkin ikinci terim olarak belirebilir, ki o zaman $1000\ldots00$ sözcüğünü elde ederiz, ..., 0 ilkin sonuncu terim olarak görülebilir, ki o zaman sadece sonunda 0 olan $111\ldots110$ sözcüğünü elde ederiz ve son olarak 0 hiçbir zaman belirmeyebilir, ki o zaman da sadece 1'den ibaret olan $111\ldots11$ sözcüğünü elde ederiz... Toplam $n + 1$ tane.

Birinci sorunun yanıtı kolaydı. Şimdi daha zor bir soru soralım.

Soru 2. *İçinde* 00 *altdizisi barındırmayan n uzunluğunda kaç* 01*-dizisi vardır?*

Yanıt: Bu sorunun yanıtı sorulduğu biçimiyle biraz fazla zor. n uzunluğundaki 01-dizilerinin sayısı yerine 10 uzunluğundaki 01-dizilerinin sayısını bulalım. Küçük uzunluktaki 00'sız ilk 01-dizisini bulalım.

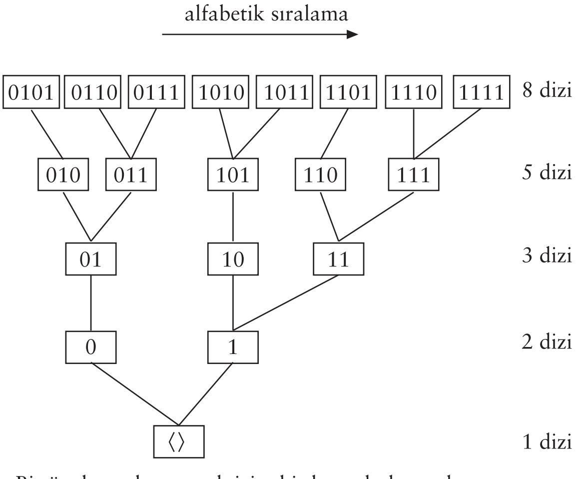
0 uzunluğunda: boşdizi, yani $\langle\rangle$.

1 uzunluğunda: 0, 1.

2 uzunluğunda: 01, 10, 11.

3 uzunluğunda: 010, 011, 101, 110, 111.

4 uzunluğunda: 0101, 0110, 0111, 1010, 1011, 1101, 1110, 1111. Aşağıdaki şekilde gösterdik bunları.



Bir üst katı oluşturmak için, bir katta bulunan her kelimenin, sonunda 1 varsa sonuna 0 ve 1, sonunda 0 varsa sonuna 1 eklenir.

5 uzunluğunda: 01010, 01011, 01101, 01110, 01111, 10101, 10110, 10111, 11010, 11011, 11101, 11110, 11111.

Okur listeyi uzatabilir ve içinde hiç 00 bulunmayan 6 uzunluğundaki tüm sözcükleri bulabilir. Zaten birazdan özel bir yöntem uygulayarak biz de bulacağız.

Eğer bulmak istediğimiz sayıya f_n dersek, şu sonuçları elde ederiz:

$$f_0 = 1,$$
$$f_1 = 2,$$
$$f_2 = 3,$$
$$f_3 = 5,$$
$$f_4 = 8,$$
$$f_5 = 13.$$

Belli bir düzen farkettiniz mi? Diziye dikkatlice bakarsanız düzeni farkedersiniz: 1, 2, 3, 5, 8, 13. Her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamı. En azından şimdiye kadar böyle. Bu her zaman böyle mi? Yani örneğin f_6, tahmin ettiğimiz gibi $13+8=21$ mi? Daha genel olarak, her $n \geq 2$ için,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

eşitliği doğru mu?

Sanki öyle... Bunu kanıtlamaya çalışalım.

$n \geq 2$ olsun ve biraz düşünelim.

n uzunluğunda 00'sız bir dizinin sonunda 1 ya da 0 olabilir.

Eğer dizinin en sonunda 1 varsa ve o 1'i atarsak geriye $n-1$ uzunluğunda 00'sız bir dizi kalır. "En sondaki 1'i atma" işleminin geri dönüşü vardır: $n-1$ uzunluğunda 00'sız bir dizinin sonuna 1 eklersek n uzunluğunda ve sonunda 1 olan 00'sız bir dizi elde ederiz. Demek ki n uzunluğunda ve sonunda 1 olan 00'sız dizilerin sayısı $n-1$ uzunluğunda 00'sız dizilerin sayısı kadardır, yani f_{n-1} kadardır.

Eğer dizinin sonunda 0 varsa o zaman o son 0'dan önce bir 0 daha olamaz, en sondaki 0'dan önce mutlaka bir 1 olmalı, yani dizi 10'la bitmeli. Bu en sondaki 10'ı atarsak, $n-2$ uzunluğunda 00'sız bir dizi buluruz. Ve $n-2$ uzunluğunda 00'sız bir dizinin sonuna 10 eklersek, n uzunluğunda ve sonunda 0 olan (dolayısıyla 10 olan) 00'sız bir dizi elde ederiz. Demek ki n uzunluğunda ve sonunda 0 olan 00'sız dizilerin sayısı $n-2$ uzunluğunda 00'sız dizilerin sayısı kadardır, yani f_{n-2} kadardır.

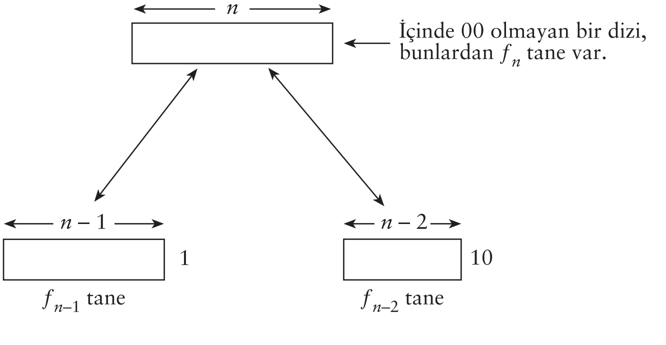
Yukarıdaki iki paragraftan

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

eşitliği çıkar. Dilediğimizi kanıtladık.

Bu akıl yürütmeyi şöyle özetleyebiliriz: İçinde 00 olmayan bir dizinin sonu ya 1 ile ya da 10 ile bitmeli, başka seçenek yoktur. Ve sondaki 1'i ya da 10'ı attığımızda geriye $n-1$ ve $n-2$ uzunluğunda, içinde 00 olmayan diziler kalır. Ayrıca, içinde 00 olmayan $n-1$ uzunluğunda bir dizinin sonuna 1 getirilirse ya da içinde 00 olmayan $n-2$ uzunluğunda bir dizinin sonuna 10 getirilirse, içinde 00 olmayan n uzunluğunda bir dizi elde ederiz.

Bir de şekil çizelim ki açıklama tam olsun:



Yukarıdaki yöntemle, içinde 00 olmayan örneğin 6 uzunluğundaki 01-dizilerini bulabiliriz. Bunun için, içinde 00 olmayan 5 uzunluğundaki 01-dizilerinin (bunları bulmuştuk) sonuna 1 ekleyelim ve içinde 00 olmayan 4 uzunluğundaki 01-dizilerinin (bunları da bulmuştuk) sonuna 10 ekleyelim: Böylece içinde 00 olmayan 6 uzunluğundaki tüm 01-dizilerini elde ederiz:

01010**1**, 01011**1**, 01101**1**, 01110**1**, 01111**1**, 10101**1**, 10110**1**,
10111**1**, 11010**1**, 11011**1**, 11101**1**, 11110**1**, 11111**1**

ve

0101**10**, 0110**10**, 0111**10**, 1010**10**, 1011**10**, 1101**10**, 1110**10**, 1111**10**.

$(f_n)_n$ dizisine ***Fibonacci dizisi*** dendiğini daha önce birkaç kez, mesela Örnek 2.3'te söylemiştik. f_n türünden sayılara da ***Fibonacci sayıları*** denir. Doğada ve matematik kitaplarında pek sık karşımıza çıkarlar.

Soru 3. *İçinde* 000 *altdizisi barındırmayan* 10 *uzunluğunda kaç* 01-*dizisi vardır?*
Yanıt: Aynen yukarıdaki gibi hesaplanır. İçinde 000 bulunmayan n uzunluğundaki 01-dizilerinin sayısına a_n dersek,

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4$$

ve $n \geq 3$ için

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

buluruz. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. (Bir sonraki daha zor örneğe geçmeden önce mutlaka yapın; hatta eliniz değmişken içinde 0000 olmayan dizi sayısını da hesaplayın.)

Soru 4. *İçinde* 001 *altdizisi barındırmayan* 10 *uzunluğunda kaç* 01-*dizisi vardır?*
Yanıt: İçinde 001 altdizisi barındırmayan n uzunluğundaki 01-dizisi sayısına a_n diyelim. Elbette,

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4.$$

001 dışında, üç uzunluğundaki her dizi 001'siz bir dizidir, dolayısıyla

$$a_3 = 8 - 1 = 7$$

olur. Biz a_{10}'u bulmak istiyoruz.

n	a_n
0	1
1	2
2	4
3	7
$\vdots$	$\vdots$
10	?

Diğerlerini bulmak için a_n'ler arasında bir ilişki bulmaya çalışalım.

İçinde 001 olmayan n uzunluğunda bir dizi alalım. Burada $n \geq 3$ bir doğal sayıdır. Dizinin son hanesi ya 0 ya da 1'dir. Her iki şıkkı da ayrı ayrı irdeleyelim.

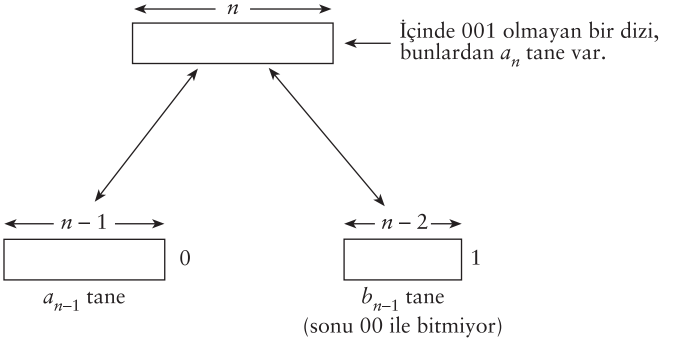
Eğer son hane 0 ise, bu 0'ı atarak, içinde 001 olmayan bir başka dizi elde ederiz, ama kalan dizinin uzunluğu 1 kısalır, yani uzunluğu $n-1$ olur. Tam tersine, içinde 001 olmayan $n-1$ uzunluğundaki bir dizinin sonuna 0 eklersek, gene içinde 001 olmayan bir dizi elde ederiz, ama bu sefer uzunluk 1 artar, $n-1$'den n'ye çıkar. Demek ki sonunda 0 olan n uzunluğundaki 001'siz dizilerin sayısı a_{n-1}'dir. Bu sayıya sonu 1 ile biten n uzunluğundaki 001'siz dizilerin sayısını eklemeliyiz.

Eğer son hane 1 ise, bu 1'i silersek gene içinde 001 olmayan bir başka dizi elde ederiz ve gene kalan dizinin uzunluğu 1 kısalır, yani uzunluğu $n-1$ olur. (Ayrıca kalan dizinin sonunda 00 olamaz.) Ama 001'siz bir dizinin sonuna 1 eklersek bal gibi 001'li bir dizi elde edebiliriz, ne de olsa 001'siz bir dizi 00 ile bitebilir ve sonuna 1 eklediğimizde en sondaki üç hane 001 olabilir. Bundan böyle içinde 001 olmayan ve sonu 00 ile bitmeyen n uzunluğundaki dizi sayısına b_n diyelim. Böylece, sonu 1 ile biten ve içinde 001 olmayan n uzunluğunda dizilerin sayısının b_{n-1} olduğunu gördük.

Yukarıdaki iki paragraftan,

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

çıkar. Kanıtın resmi aşağıdaki şekilde.



Dolayısıyla eğer b_n'leri bulabilirsek, a_n'leri de bulabiliriz. İlk birkaç b_n'yi bulmak kolay:

$$b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 = 3.$$

Bir sonraki b'yi, yani b_3'ü bulalım. 3 uzunluğunda toplam 8 tane dizi var. Bunlardan biri 001, ölçütümüze uymuyor; ikisi de 00 ile bitiyor: 000 ve 100, bunlar da ölçütümüze uymuyor. Demek ki

$$b_3 = 8 - 1 - 2 = 5.$$

Böylece
$$a_4 = a_3 + b_3 = 7 + 5 = 12$$
buluruz. Yeni bir liste yapalım:

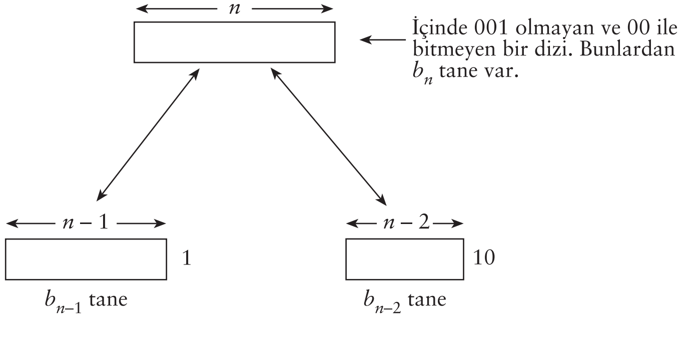
n	a_n	b_n
0	1	1
1	2	2
2	4	3
3	7	5
4	12	?
⋮	⋮	⋮
10	?	?

Şimdi b_n'leri bulma işine girişelim.

İçinde 001 olmayan ve sonu 00 ile bitmeyen n uzunluğunda bir 01-dizisi alalım. İki seçenek var. Sonu ya 0 ile ya da 1 ile biter. Gene her iki durumu ayrı ayrı irdeleyelim:

Eğer dizinin sonu 0 ile bitiyorsa, bir önceki hanede 1 olmalı, yani sonu 10 ile bitmeli. Eğer en sondaki 10'ı atarsak gene aynı cins bir dizi kalır, ama uzunluğu $n-2$'dir. Ve tersine, eğer içinde 001 olmayan ve sonu 00 ile bitmeyen $n-2$ uzunluğunda bir dizinin sonuna 10 eklersek, içinde 001 olmayan ve sonu 00 ile bitmeyen n uzunluğunda bir dizi elde ederiz. Demek ki içinde 001 olmayan ve sonunda 00 olmayan n uzunluğundaki dizilerin b_{n-2} tanesinin sonunda 0 vardır.

Şimdi de dizinin sonunun 1 ile bittiğini varsayalım. Eğer en sondaki 1'i atarsak geriye gene aynı cins bir dizi kalır, ama uzunluğu $n-1$'dir. Ve tersine, eğer içinde 001 olmayan ve sonu 00 ile bitmeyen $n-1$ uzunluğunda bir dizinin sonuna 1 eklersek, içinde 001 olmayan ve sonu 00 ile bitmeyen n uzunluğunda bir dizi elde ederiz. Demek ki içinde 001 olmayan ve sonunda 00 olmayan n uzunluğundaki dizilerin b_{n-1} tanesinin sonunda 1 vardır.



Bu yaptıklarımızdan,
$$b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$$

eşitliği çıkar. Yani b dizisi Fibonacci dizisidir. Böylece b'leri hesaplayabiliriz:

n	a_n	b_n
0	1	1
1	2	2
2	4	3
3	7	5
4	12	8
5		13
6		21
7		34
8		55
9		89
10	?	144

Ve daha önce bulduğumuz $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ eşitliğini kullanarak a'ları hesaplayabiliriz:

n	a_n	b_n
0	1	1
1	2	2
2	4	3
3	7	5
4	12	8
5	20	13
6	33	21
7	54	34
8	88	55
9	143	89
10	232	144

Yukarıda, a_n ve b_n'ler arasında bir ilişki ve b_n'ler arasında bir ilişki bulduk. İşte o iki ilişki:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

Ama a_n'ler arasında bir ilişki bulamadık. Bulalım. Birinci denklemden,

$$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

buluruz. Göstergeçleri bir artırıp, bir azaltırsak,

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

buluruz. Bu son üç denklemi kullanarak $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ eşitliğinden b'leri yok edip yerine a'ları koyalım:

$$a_{n+1} - a_n = b_n = b_{n-1} + b_{n-2} = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}).$$

Sadeleştirmeleri yaparsak,

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-2}$$

buluruz. Göstergeçleri birer azaltalım:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}.$$

Böylece b'leri hesaplamadan a'ları hesaplayabiliriz:

n	a_n
0	1
1	2
2	4
3	7
4	12
5	20
6	33
7	54
8	88
9	143
10	232

a_n'ler arasında bir başka formül daha bulabiliriz. Bunun için, yukarıda bulduğumuz $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}$ formülünü $n = 3$'ten başlayarak belli bir n'ye kadar altalta yazıp toplayalım:

$$\begin{array}{rll}
 & a_n & = 2a_{n-1} - a_{n-3} \\
 & a_{n-1} & = 2a_{n-2} - a_{n-4} \\
 & a_{n-2} & = 2a_{n-3} - a_{n-5} \\
 & a_{n-3} & = 2a_{n-4} - a_{n-6} \qquad \longleftarrow \text{Sadeleşen kısım} \\
 & a_{n-4} & = 2a_{n-5} - a_{n-7} \\
 & & \ \vdots \\
 & a_6 & = 2a_5 - a_3 \\
 & a_5 & = 2a_4 - a_2 \\
 & a_4 & = 2a_3 - a_1 \\
+ & a_3 & = 2a_2 - a_0 \\
\hline
 & a_n & = a_{n-1} + a_{n-2} + a_2 - a_1 - a_0 \\
 & a_n & = a_{n-1} + a_{n-2} + 4 - 2 - 1 \\
 & a_n & = a_{n-1} + a_{n-2} + 1
\end{array}$$

İkinci Çözüm: Önceki çözümde dizilerin sayısını saymaya en sağdaki terimlere bakarak başladık. Tam tersine en soldaki terimlere bakarak saymaya çalışalım. İçinde 001 olmayan n uzunluğunda bir d dizisi alalım. (n yeterince büyük olsun.) En soldaki terim ya 0'dır ya da 1, yani dizi $n-1$ uzunluğunda bir d' dizisi için ya $0d'$ ya da $1d'$ biçimindedir. Elbette d' dizisinde de 001 olamaz. Ters istikamette gidecek olursak, uzunluğu $n-1$ olan 001'siz bir d' dizisinin başına 1 koyarsak, uzunluğu n olan 001'siz bir dizi elde ederiz; ama başına 0 koyarsak 001 belirebilir. Bu yüzden $0d'$ biçimindeki dizileri biraz daha irdeleyelim. d' dizisinin başında ya 0 vardır ya da 1; yani $d = 0d'$ dizisi ya $d = 00d''$ biçimindedir ya da $d = 01d''$ biçiminde. Eğer d dizisi 00 ile başlıyorsa, bir sonraki terim gene 0 olmalı, daha sonraki de, d toptan 0 dizisi olmalıdır. Ama $d = 01d''$ ise d'' dizisinde 001 olmadığı gibi, içinde 001 olmayan bir d'' dizisinin başına 01 getirirsek, içinde 001 olmayan bir dizi elde ederiz. Böylece şunu bulduk: Eğer içinde 001 olmayan n uzunluğundaki diziler kümesine A_n dersek, $n \geq 2$ için

$$A_n = 1A_{n-1} \sqcup 01A_{n-2} \sqcup \{00\ldots0\}$$

olur. Demek ki $n \geq 2$ için

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$$

olur.

Birinci çözümden çok daha hızlı oldu. Ama doğrusu şansımız yaver gitti. Eğer 001'siz dizilerin sayısını hesaplamak yerine 010'sız dizilerin sayısını hesaplamak isteseydik, dizinin sağından da başlasak, solundan da başlasak aynı zorlukla karşılaşacaktık, farketmeyecekti.

Yukarıda içinde 001 bulunmayan dizi sayısını hesapladık. İçinde 110 bulunmayan dizi sayısı aynıdır çünkü 1'leri 0, 0'ları 1 yaparsak birinden diğerine geçiş yaparız. İçinde 100 bulunmayan dizilerin sayısı da aynıdır, çünkü diziyi ters yüz edip sondan başa yazabiliriz. İçinde 011 bulunmayanlar da aynı şekilde bulunur.

Okur bu türden soruları kolaylıkla çoğaltabilir.

Alıştırmalar

21.1. İçinde 11 olmayan 10 uzunluğunda kaç tane 01-dizisi vardır?

21.2. İçinde 000 olmayan n uzunluğunda dizi sayısına f_n diyelim. Her $n \geq 3$ için

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$$

eşitliğini kanıtlayın.

21.3. İçinde 010 olmayan 01-dizilerinin sayısını hesaplayın.

22. Pokerin Matematiği

Bu bölümde pokeri bahane ederek saymanın temellerini ele alacağız. Poker, en fazla dört oyuncuyla ve yediliden asa 32 iskambil kâğıdıyla oynanır. (Amerika'da 52 kâğıtla oynanır poker ama biz bu yazıda 32 kâğıtla oynanan "Türk pokeri"nden sözedeceğiz.)

Hemen belirtelim, bu yazının içeriğini anlamak için poker bilmeye gerek yoktur ama bir deste iskambil kâğıdını ele almış olmak fena olmaz.

32 kâğıtlık deste 7'den başlar ve asa (A'ya) kadar devam eder:

$$7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.$$

Her cinsten dört renk vardır:

$$\clubsuit \text{ (sinek)}, \blacklozenge \text{ (karo)}, \heartsuit \text{ (kupa)}, \spadesuit \text{ (maça)}$$

Toplam $8 \times 4 = 32$ tane.

Pokerde, oyunun başında her oyuncuya önce 32'lik desteden beşer kâğıt dağıtılır, sonra her oyuncu elindeki beş kâğıttan istediği kadarını değiştirebilir (isterse hiç değiştirmez.) Bu değiştirmeden sonra "en iyi" eli olan kazanır. Elbet burada "en iyi el"in tanımlanması, anlam kazandırılması gerekir. Örneğin, beş kâğıdın beşinin de aynı renkten (örneğin hepsi maça, $\spadesuit$) olduğu bir el çok iyi sayılır. Bu el, iki papaz, iki as ve bir onlu gibi iki çiftten oluşan ellerden daha "iyi" bir eldir. Bunun nedeni bellidir: beş kâğıdın aynı renkten olma olasılığı iki çift gelme olasılığından daha düşüktür.

Aynı renkten ellere ***renk*** adı verilir. Bu yazıdaki amaçlarımızdan biri de pokerde dağıtılan ilk beş kâğıdın renk olma olasılığını hesaplamak.

Toplam Poker Eli Sayısı. Şimdi toplam poker eli sayısını hesaplayabiliriz. 32 kâğıttan kaç tane 5 kâğıtlık el çıkar? Yani 32 elemanlık bir kümenin kaç tane 5 elemanlı altkümesi vardır? Teorem 3.2'ye göre,

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5!(32-5)!} = \frac{32!}{5!27!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 201.376$$

tane, yani 200 binden fazla poker eli vardır ve bu poker ellerinden herbirinin gelme olasılığı aynıdır, yani 1/201.376'dır.

Renk Sayısı. Şimdi de kaç tane "renk" eli olduğunu hesaplayalım. Önce kaç tane maça ($\spadesuit$) renkli el olduğunu bulalım. 32 kâğıttan 8 tanesi maça. Bu 8 maçadan 5 tanesini seçeceğiz. Teorem 3.2'ye göre,

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

tane salt maça olan el vardır. Toplam dört renk olduğundan ($\blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$), bu sayıyı 4'le çarparsak, toplam renk sayısını buluruz:

$$56 \times 4 = 224.$$

Ama bu sayıdan, toplam "floş" (aynı renkten ve birbirini takip eden kâğıtlar) sayısını çıkarmalıyız (çünkü floş renkten çok daha iyi bir eldir ve renk sayılmaz.) Maçalardan oluşan floşlar, asla $(A-7-8-9-10)$, yediliyle $(7-8-9-10-J)$, sekizliyle, dokuzluyla ya da onluyla $(10-J-Q-K-A)$ başlayabilir. Demek maçadan 5 tane floş var ve toplam floş sayısı $5 \times 4 = 20$. Böylece, gerçek renk sayısının, $224 - 20 = 204$ olduğunu buluruz. Olasılık olarak düşünürsek, elden renk gelme olasılığı $204/201.376 \approx 0{,}001013$'tür, yani aşağı yukarı binde birdir.

Kare Sayısı. Elden kare gelme, yani beş kâğıttan dördünün aynı sayı olma olasılığını bulalım. Önce dört aslı el sayısını bulalım. Dört asın yanına gelebilecek kâğıt sayısı $32 - 4 = 28$'dir. Demek 28 tane dört aslı el var. Toplam 8 tür kâğıt olduğundan, $28 \times 8 = 224$ tane kare el vardır.

Bu sayı, renk sayısından biraz daha fazla olduğundan, renk kareyi yener diye düşünebilirsiniz. Nitekim, eğer pokerde kâğıt değiştirme olmasaydı, düşündüğünüz gibi olurdu. Ama kâğıt değiştirme olasılıkları da etkiler. Örneğin, üç ası olan, öbür iki kâğıdını değiştirerek, dört as yakalama olasılığını artırır. Bunun gibi eline dört maça gelen, beşinci kâğıdını değiştirerek, renk yakalama olasılığını artırır. Yani pokerin sonundaki olasılıklar, ilk beş kâğıdın olasılıklarından değişiktir. Pokerde kare rengi yener.

Elinde dört maçası olan, maça olmayan kâğıdını değiştirerek kaç olasılıkla rengi yakalayabilir? Hesaplayalım. 32 kâğıdın 5'i elimizde. Demek ki toplam 27 kâğıttan bir kâğıt seçilecek (öbür oyuncuların ellerini bilmiyoruz, onların ellerinde kâğıt yokmuş gibi hesaplayabiliriz.) Bu 27 kâğıtta 4 tane maça var (toplam maça sayısı 8, ama bu maçalardan 4'ü elimizde.) Demek ki rengi yakalama olasılığımız $4/27$'dir, yani $1/7$'den daha fazla. Renge çekmeli miyiz? Eğer kâğıt değiştirmek için ortaya 1 lira koymamız gerekiyorsa (bedava kâğıt değiştirilmez pokerde, şansını artırmanın bedeli vardır) ve kazanacağımız paranın en az $27/4$ lira olacağını düşünüyorsak kâğıt çekmeliyiz. Yoksa çekmemeliyiz. Örneğin iki oyuncu oyundan kaçmışsa, büyük bir olasılıkla kâğıt çekmeye değmez. Eğer kâğıt çekmeye karar verecek son oyuncuysak ve bizden önceki üç oyuncu oyuna girmişse, o zaman kâğıt çekmeliyiz.

Ful El Sayısı. Eğer bir elde bir türden 3 tane, bir başka türden 2 tane kâğıt varsa, o ele ***ful*** denir. Örneğin, 3 as ve 2 papazdan oluşan bir el fuldür. Ful eller oldukça iyi ellerdir. İlk beş kâğıdı ful görmenin kendine özgü bir zevki vardır. En azından, hangi kâğıdı değiştireyim türünden zor sorularla karşılaşılmaz.

Elin ful olma olasılığını bulalım. Bu biraz daha zor. Önce 3 as ve 2 papaz gelme olasılığını bulalım. Dört astan üçünü seçeceğiz, yani 4 elemanlı bir kümeden 3 elemanlı bir altküme seçeceğiz. Teorem 3.2'ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

seçeneğimiz var aslar için. Şimdi de dört papazdan ikisini seçeceğiz. Yine Teorem 3.2'ye göre, aslar için

$$\binom{4}{2} = 6$$

değişik seçeneğimiz var. Demek ki,

$$4 \times 6 = 24$$

tane 3 as ve 2 papazlı el var. 3 papaz ve 2 aslı eller de 24 tane. Yani as ve papazlardan oluşan

$$24 + 24 = 48$$

tane ful el vardır. Bu hesaplar salt as ve papazlar için değil, tüm iki tür kâğıtlar için de geçerli. Örneğin yedi ve dokuzlulardan oluşan 48 tane ful el vardır. Kaç tane iki tür kâğıt var? Toplam 8 türden 2 tür seçeceğiz. Teorem 3.2'ye göre,

$$\binom{8}{2} = 28$$

tane iki tür var. Demek ki toplam ful el sayısı,

$$48 \times 28 = 1344$$

kadardır.

Üçlü Sayısı. Bir elde 3 tane aynı kâğıt varsa, o ele "üçlü" adı verilir. Örneğin $AAAKQ$ bir üçlüdür. Ama kare ve fuller üçlü sayılmaz. Üçlü sayısını hesaplayalım. Önce 3 aslı üçlü sayısını bulalım. Teorem 3.2'ye göre,

$$\binom{4}{3} = 4$$

çeşit 3 as seçebiliriz. Bu 3 asın yanına iki kâğıt gelecek, ama herhangi iki kâğıt değil: hiçbiri as olmayacak ve aynı tür kâğıt olmayacaklar. As dışında $32 - 4 = 28$ tane kâğıt var. Bunlardan ikisini seçelim:

$$\binom{28}{2} = 378$$

tane seçenek var. Ama bu seçeneklerden bazıları iki aynı tür kâğıttan oluşuyor. Bu sayıyı bulup 378'den çıkartalım. Kaç tane iki papaz seçebiliriz?

$$\binom{4}{2} = 6$$

tane. As dışında yedi tür kâğıt var. Demek ki, 378 seçenekten

$$6 \times 7 = 42$$

tanesi iki aynı tür kâğıttan oluşuyor. Dolayısıyla, seçilen üç asın yanına,

$$378 - 42 = 336$$

tane iki kâğıtlık el koyabiliriz. Dört çeşit üç as seçilebildiğinden, aslı üçlü el sayısı,

$$336 \times 4 = 1344$$

tür. Bu hesap as dışındaki öbür kâğıtlar için de geçerli olduğundan, üçlü el sayısı,

$$1344 \times 8 = 10.752$$

olur.

Kalan hesapları okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Yanıtları aşağıdaki çizelgede bulacaksınız. Matematiksel şeytanınız bol olsun.

El türü	**El sayısı**	**Olasılığı** $(\pm 0,0005)$
Floş Ruayal[1]	5	$\% \, 0,0025$
Floş	20	$\% \, 0,010$
Renk	204	$\% \, 0,101$
Kare	224	$\% \, 0,111$
Ful	1.344	$\% \, 0,667$
Kent[2]	% 5.100	$\% \, 2,533$
Üçlü	10.752	$\% \, 5,339$
İki Çift	24.192	$\% \, 12,013$
Bir Çift	107.520	$\% \, 53,393$

Alıştırmalar

22.1. Aynı olasılıkları 52 kâğıtlık desteyle oynanan poker oyunu için hesaplayın.

22.2. Elinde bir çifti olan oyuncunun, diğer üç kâğıdını değiştirerek üçlü yakalama olasılığı kaçtır?

[1] Bir elin kâğıtları peşpeşeyse, örneğin 7-8-9-10-J ise ve aynı renktense (örneğin hepsi kupaysa), o ele "şahane floş" anlamına "floş ruayal" denir.

[2] Bir elin kâğıtları peşpeşeyse, örneğin 7-8-9-10-J ise, ama aynı renkten (örneğin kupa) değilse, o ele her nedense "kent" denir.

22.3. Elinde bir çifti olan oyuncunun, diğer üç kâğıttan ikisini değiştirerek üçlü ya da ikinci bir çift yakalama olasılığı kaçtır?

22.4. Elinde 4, 5, 6, 7 ve 10 olan oyuncunun 10'luyu değiştirerek kent yakalama olasılığı kaçtır?

22.5. Elinde 4, 5, 7, 8 ve 10 olan oyuncunun 10'luyu değiştirerek kent yakalama olasılığı kaçtır?

22.6. Elinde dört tane aynı renkten olan oyuncunun, diğer kâğıdını değiştirerek renk yakalama olasılığı kaçtır?

22.7. Elinde beş benzemez olan oyuncu, iki çift ya da daha iyi bir el yakalama olasılığını artırmak için kaç kâğıt değiştirmelidir?

23. Ayrı Düşen Çiftler

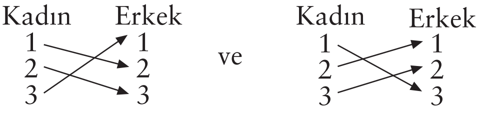
Başak Ay

Tipik bir sayma problemini ele alacağız bu yazıda: n tane çift bir baloya davet ediliyor. Eşlerin hiçbirinin birbiriyle dans etmediği kaç farklı eşleşme vardır?

Örneğin $n = 3$ ise, çiftleri 1, 2, 3 diye numaralandırıp i numaralı çiftin kadın ve erkeğine sırasıyla k_i, e_i diyelim. O zaman,

$$k_1 - e_2, k_2 - e_3, k_3 - e_1 \text{ ve } k_1 - e_3, k_2 - e_1, k_3 - e_2$$

olmak üzere iki değişik eşleşme mümkündür. (k_i ile e_i dans edemezler.) Bu iki eşleşmeyi



olarak gösterebiliriz. Bunları da (gene sırasıyla)

$$(1\ 2\ 3) \text{ ve } (1\ 3\ 2)$$

olarak gösterebiliriz. Buradaki, örneğin, (1 2 3),

birinci kadın k_1 ikinci erkek e_2 ile,
ikinci kadın üçüncü erkekle,
üçüncü kadın birinci erkekle

eşleşecek (dans edecek) anlamına gelir.

Eğer $n = 1$ ise, yani bir tek çift varsa böyle bir eşleşme olamaz elbette. Eğer $n = 2$ ise bu özelliği sağlayan sadece bir tek eşleşme olabilir: Her çiftin erkeği diğer çiftin kadınıyla dans eder.

Şimdi $n = 4$ olsun. Çiftlerin birbirleriyle eşleştirilmedikleri eşleşmeleri teker teker yazalım:

$$\begin{gathered}(1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 2\ 4\ 3),\ (1\ 3\ 2\ 4)\\(1\ 3\ 4\ 2),\ (1\ 4\ 2\ 3),\ (1\ 4\ 3\ 2)\\(1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3).\end{gathered}$$

Bu sefer toplam 9 eşleme bulduk. Örneğin (1 2 3 4),

birinci kadın ikinci erkekle,
ikinci kadın üçüncü erkekle,
üçüncü kadın dördüncü erkekle
dördüncü kadın birinci erkekle

eşleşecek anlamına gelir. Öte yandan (1 2)(3 4),

birinci kadın ikinci erkekle,
ikinci kadın birinci erkekle,
üçüncü kadın dördüncü erkekle
dördüncü kadın üçüncü erkekle

eşleşecek anlamına gelir.

Her çifte yukarıdaki gibi bir sayı verirsek ve

$$f(i) = j$$

eşitliğini, "i sayılı çiftin kadını, j sayılı çiftin erkeğiyle eşleşecek" olarak yorumlarsak, o zaman, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin, her $i = 1, 2, \ldots, n$ sayısı için,

$$f(i) \neq i$$

koşulunu sağlayan f eşleşmelerinin (yani birebir ve örten fonksiyonlarının) sayısını bulmak istediğimiz anlaşılır.

$\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin eşleşmelerinin S_n olarak simgelendiğini geçen bölümde görmüştük. S_n'nin toplam $n!$ tane elemanı vardır. Örneğin S_5'in

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

tane elemanı vardır. İşte bu elemanlar

- Özdeşlik fonksiyonu: Id_5. Bu eşleşme her sayıyı kendisine götürür.
- (12) eşleşmesi: 1'i 2'ye, 2'yi 1'e götürür; ama 3, 4 ve 5'i yerlerinden oynatmaz. Buna benzer (1 3), (1 4), (1 5), (2 3), (2 4), (2 5), (3 4), (3 5) ve (4 5) eşleşmeleri de vardır. Görüldüğü gibi bu türden toplam 10 tane vardır. Üç sayı sabitlediklerinden bu tür eşleşmelerle ilgilenmiyoruz.
- (1 2 3) eşleşmesi: 1'i 2'ye, 2'yi 3'e, 3'ü 1'e götürür ve 4 ve 5'i sabitler. Buna benzer, (1 2 4), (1 2 5), (1 3 2), (1 3 4), (1 3 5), (1 4 2), (1 4 3), (1 4 5), (1 5 2), (1 5 3), (1 5 4), (2 3 4), (2 3 5), (2 4 3), (2 4 5), (2 5 3), (2 5 4), (3 4 5) ve (3 5 4) olmak üzere toplam 20 tane eşleşme vardır. İki sayı sabitlediklerinden bu tür eşleşmelerle ilgilenmiyoruz.
- (1 2 3 4) eşleşmesinin ne yaptığı artık belli olmuş olmalı. Bu eşleşme 5'i sabitler. Bu türden toplam

$$\binom{5}{4} \times 3! = 5 \times 6 = 30$$

tane eşleşme vardır. Bir sayı sabitlediklerinden bu eşleşmelerle de ilgilenmiyoruz.

• (1 2 3 4 5) türünden $4! = 24$ tane vardır. Bunlar hiç sayı sabitlemediklerinden bu eşleşmeler bizim istediğimiz türden; bunlarla ilgileniyoruz.

• Gelelim (1 2)(3 4 5) türünden eşleşmelere... Bunlardan,

$$\binom{5}{2} \times 2 = 20$$

tane eşleşme vardır. Bunlar da hiç sayı sabitlemezler, yani bu eşleşmeler bizim aradıklarımızdan.

• Son olarak, (1 2)(3 4) türünden

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2} = 10 \times \frac{3}{2} = 15$$

tane eşleşme vardır. Bunlar bir sayı sabitlediklerinden, bunlarla da ilgilenmiyoruz.

Toplam,

$$1 + 10 + 20 + 30 + 24 + 20 + 15 = 120 = 5!$$

tane eşleşme bulduk; olması gerektiği kadar. Ama bu 120 eşleşmenin sadece $24 + 20 = 44$ tanesi (sadece (1 2 3 4 5) ve (1 2)(3 4 5) türünden olanlar) hiç kimsenin kendi eşiyle dans etmediği bir eşleşme veriyor.

Şimdi $n = 6$ ise bu türden kaç eşleşme olduğunu hesaplayalım:

• (1 2)(3 4)(5 6) türünden

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = \frac{15 \times 6 \times 1}{6} = 15$$

tane eşleşme vardır. (Neden 3!'e böldüğümüzü anladınız mı? Yoksa örneğin (1 2)(3 4)(5 6) eşleşmesini 3! kez saymış olurduk.)

• (1 2 3)(4 5 6) türünden

$$\frac{\binom{6}{3} \times 2 \times \binom{3}{3} \times 2}{2!} = \frac{20 \times 2 \times 1 \times 2}{2} = 40$$

tane eşleşme vardır.

• (1 2)(3 4 5 6) türünden

$$\binom{6}{2} \times 3! = 15 \times 6 = 90$$

tane eşleşme vardır.

• (1 2 3 4 5 6) türünden $5! = 120$ tane vardır.

Diğerlerinin hepsi en az bir sayı sabitlediğinden başka da yoktur. Böylece çiftlerin birbirleriyle dans etmediği toplam $15 + 40 + 90 + 120 = 265$ tane eşleşme buluruz.

Bulduklarımızı yazalım:

$$\begin{aligned}
&n = 1 \text{ için } 0 \text{ eşleşme}\\
&n = 2 \text{ için } 1 \text{ eşleşme}\\
&n = 3 \text{ için } 2 \text{ eşleşme}\\
&n = 4 \text{ için } 9 \text{ eşleşme}\\
&n = 5 \text{ için } 44 \text{ eşleşme}\\
&n = 6 \text{ için } 265 \text{ eşleşme.}
\end{aligned}$$

0, 1, 2, 9, 44, 265, ... Tuhaf bir dizi. Formülü bulana aşkolsun! Formülü değil ama bir sonraki sayıyı bulacağız!

Matematik. Matematiğe başlayalım. Her $i = 1, \ldots, n$ sayısı için,

$$A_i = \{\alpha \in S_n : \alpha(i) = i\}$$

olsun; yani A_i, i'yi sabitleyen eşleşmeler kümesi. Demek ki,

$$S_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

kümesinin eleman sayısını bulmak istiyoruz. Dolayısıyla,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

kümesinin, yani

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

kümesinin eleman sayısını bulmamız yeterli olacak.

Her bir i için A_i kümesinin eleman sayısını bulmak oldukça kolay: A_i'nin elemanlarının i'yi i'ye götürdüklerini bildiğimizden, bu elemanları $n - 1$ elemanlı $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ kümesinin eşleşmeleri olarak görebiliriz. Bunlardan da $(n - 1)!$ tane olduğundan,

$$|A_i| = (n - 1)!$$

olur.

Aynen yukarıda olduğu gibi, eğer $i \neq j$ ise,

$$|A_i \cap A_j| = (n - 2)!$$

dir, çünkü $A_i \cap A_j$ kümesinin elemanları i ve j sayılarını sabitleyen eşleşmeler olduğundan, bu eşleşmeleri $n-2$ elemanlı

$$\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$$

kümesinin eşleşmeleri olarak görebiliriz ve bunlardan da $(n-2)!$ tane vardır.

Genel olarak, eğer $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ birbirinden değişik k sayıysa,

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

olur.

Demek ki $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ kesişimlerinin eleman sayılarını biliyoruz ve

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

bileşiminin eleman sayısını bulmak istiyoruz. Ama bunu Teorem 7.1'de görmüştük. Teorem 7.1'e göre

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i_1,\ldots,i_k} (-1)^{k+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \sum_{i_1,\ldots,i_k} (-1)^{k+1}(n-k)!$$

buluruz. Hesaba devam edelim. Kaç farklı biçimde birbirinden farklı

$$i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

sayısı seçebiliriz? Elbette $\binom{n}{k}$ tane. Böylece formülümüz,

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

şeklini alır. Ama,

$$\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Dolayısıyla,

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}\,.$$

Şimdi aradığımız yanıtı (yani birbiriyle eşleşmeyen eşleştirme sayısını) bulmak için bu sayıyı $n!$ sayısından çıkarmalıyız.

İşte aradığımız formül:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}\,.$$

Formülümüzü $n = 5$ için sınayalım. Yukarıda 44 tane eşleşme bulmuştuk. Bakalım formül kaç verecek? Eğer şanslı bir günümüzdeysek aynı sonucu bulmamız gerekiyor:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\frac{5!}{k!} &= \frac{5!}{0!}-\frac{5!}{1!}+\frac{5!}{2!}-\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{4!}-\frac{5!}{5!}\\ &= 5!-5!+5\times 4\times 3-5\times 4+5-1\\ &= 120-120+60-20+5-1=44.\end{aligned}$$

Rastgele Eşleştirme. Çiftleri rastgele eşleyip hiçbir eşin birbiriyle dans etmeme olasılığını hesaplayalım. n tane çifti $n!$ biçimde eşleştirebiliriz. Bu $n!$ eşleştirmenin

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}.$$

tanesinde çiftler birbirleriyle dans etmiyorlar. Demek ki olasılık,

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

olur.

Bu olasılık öyle rastgele bir sayı değildir. Eğer n'yi sonsuza götürürsek, daha ileri seviyede matematikle bu olasılığın ***Euler*** ya da ***Napier sabiti*** adı verilen e sayısının tersine "yakınsadığı" kanıtlanabilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{e}.$$

Demek ki eğer n büyük bir sayıysa, rastgele bir eşleştirmenin eşlerden hiçbirini diğeriyle eşleştirmeme olasılığı aşağı yukarı $1/e$'dir. Dolayısıyla, büyük n'ler için, eşleri birbirleriyle eşleştirmeyen eşleşme sayısı aşağı yukarı $n!/e$'dir. Örneğin, hesap makinasıyla kolayca hesaplanacağı üzere,

$$\begin{aligned}4!/e &\approx 8{,}829107 \approx 9,\\ 5!/e &\approx 44{,}14553 \approx 44,\\ 6!/e &\approx 264{,}8732 \approx 265\end{aligned}$$

olur. Görüldüğü gibi $n = 4$, 5 ve 6 için $n!/e$ sayıları bizim bulduğumuz $9, 44$ ve 265 sayılarına çok yakınlar.

Eğer $n = 7$ ise, $7!/e \approx 1864{,}112$. Dolayısıyla $n = 7$ için 1864 tane eşlerin birbirleriyle eşleşmediği eşleşme olduğunu umut edebiliriz.

Euler Sabiti Üzerine. e sayısı ***Euler*** ya da ***Napier sabiti*** olarak bilinir. Aynen π gibi doğanın sürekli gündemde olan bir sabitidir. Yaklaşık değeri

$$e \approx 2{,}718281828459045235$$

dir. Bu sayı matematikte birçok farklı yerde karşımıza çıkar. Bu da doğallığının bir kanıtıdır. Çok bilinen şu eşitlik bile başlı başına kaydadeğerdir: Her x gerçel (ya da karmaşık) sayısı için,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Bu sayıya ***Euler sabiti*** denmesinin nedeni İsviçreli ünlü matematikçi Leonard Euler'dir. Her ne kadar sayı Euler'den önce biliniyorsa da, sayının temel özelliklerini içeren çok kapsamlı bir makaleyi ilk yazan Euler'dir. Euler bu makalesinde metindeki

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$$

serisinin e^{-1}'e yakınsadığını göstermiştir. Ayrıca gene aynı makalesinde De Moivre'nin ünlü

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

formülünden faydalanarak

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

eşitliğini göstermiştir. Ayrıca bu formülde $x = \pi$ alarak, matematiğin gelmiş geçmiş en güzel formüllerinden biri olarak nitelendirilen ve analizi (e), geometriyi (π), cebiri (i) ve aritmetiği (-1) buluşturan, gizemli

$$e^{i\pi} = -1$$

formülüne dikkatimizi çekmiştir.

24. Fonksiyonları Sayma

Hayri Ardal

Soru 1. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç farklı fonksiyon vardır?*

Yanıt: m^n tane vardır, çünkü n elemanlı kümenin her elemanının gidebileceği tam m değişik yer vardır. n elemanlı kümenin her elemanı için m elemanlı kümenin herhangi bir elemanını seçebiliriz.

Soru 2. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç eşleme vardır?*

Yanıt: Eşlemelerin sayısını bulmak da oldukça kolay. Eğer $n \neq m$ ise bu sayı sıfırdır, öyle bir eşleme olamaz. Eğer $n = m$ ise bu sayı $n!$'dir. Çünkü birinci elemanın gidecek n yeri vardır. Birinci elemanın gideceği yer belirlendiğinde ikinci elemana $n-1$ yer kalır. Bu yer de belirlendiğinde, üçüncü elemana $n-2$ yer kalır... Son elemana ise tek bir yer kalır.

Soru 3. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç farklı birebir fonksiyon vardır?*

Yanıt: Eğer $n > m$ ise bu sayı sıfırdır. Eğer $n = m$ ise, her birebir fonksiyonun bir eşleme olması gerektiğinden bu sayı $n!$'dir. Ya $n < m$ ise?

Bu sayıya $f(n, m)$ diyelim. Demek ki, $f(n, n) = n!$ ve eğer $n > m$ ise $f(n, m) = 0$.

$f(n, m)$ sayılarını bulmak pek o kadar zor değildir, bulalım.

n elemanlı kümemizi

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

olarak, m elemanlı kümemizi de

$$B = \{b_1, \ldots, b_m\}$$

olarak gösterelim. A kümesinin birinci elemanı olan a_1'in B'de gidebileceği m yer vardır. Bu yer belirlendiğinde A'nın geri kalan $n-1$ elemanına B'nin daha seçilmemiş $m-1$ elemanı arasından değişik yerler beğenmemiz gerekecek. Demek ki,

$$f(n, m) = mf(n-1, m-1)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliği bir adım daha götürelim, yani n ve m yerine $n-1$ ve $m-1$ sayılarına uygulayalım:

$$f(n,m) = m(m-1)f(n-2, m-2)$$

buluruz. Devamla,

$$f(n,m) = m(m-1)\dots(m-i)f(n-(i+1), m-(i+1))$$

buluruz. Şimdi $i = n-2$ olsun,

$$\begin{aligned} f(n,m) &= m(m-1)\cdots(m-(n-2))f(n-(n-1), m-(n-1)), \\ &= m(m-1)\cdots(m-n+2)f(1, m-n+1) \end{aligned}$$

buluruz. $f(1, m-n+1)$ sayısı, 1 elemanlık bir kümeden $m-n+1$ elemanlı kümeye giden birebir fonksiyonların sayısı, ki bu da $m-n+1$ dir. Demek ki

$$f(n,m) = m(m-1)\cdots(m-n+2)(m-n+1),$$

yani

$$f(n,m) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

olur.

Yanıtımızı bulduk. Eğer $n = m$ ise, yukarıda bulduğumuz $n!$ yanıtını bulduğumuza dikkatinizi çekeriz. Bu da yanıtımızın bir tür sağlamasıdır.

Soru 4. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç tane örten fonksiyon vardır?*

Yanıt: Bu soru önceki sorulardan daha zordur (ve bu yüzden en sona bırakılmıştır.)

Eğer $n < m$ ise yanıt sıfırdır elbet.

Eğer $n = m$ ise, her örten fonksiyon birebir olmak zorunda olduğundan, yanıt $n!$'dir.

Genel yanıtı bulacağız.

A ve B, sırasıyla n ve m elemanlı iki küme olsun.

F, A'dan B'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. Birinci soruda açıklandığı üzere, $|F| = m^n$.

Her $i \in B$ için, F_i, A'dan $B \setminus \{i\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun. Bir başka deyişle,

$$F_i = \{f \in F : \text{ her } x \in A \text{ için } f(x) \neq i\}$$

olsun. Gene birinci sorudan dolayı,

$$|F_i| = (m-1)^n$$

olur.

Eğer $i \neq j$, B'nin iki elemanıysa

$$\begin{aligned} F_i \cap F_j &= \{f \in F : \text{ her } x \in A \text{ için } f(x) \neq i \text{ ve } f(x) \neq j\} \\ &= \{A\text{'dan } B \setminus \{i,j\} \text{ kümesine giden fonksiyonlar}\} \end{aligned}$$

dır; dolayısıyla

$$|F_i \cap F_j| = (m-2)^n$$

olur.

Yukarıdaki akıl yürütmeyi genelleştirerek, eğer $i_1, i_2, \ldots, i_k$ elemanları B kümesinin birbirinden farklı k elemanıysa,

$$|F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_k}| = (m-k)^n$$

eşitliğini gösterebiliriz. Nitekim $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_k}$ kümesi aynen,

$$\{A\text{'dan } B \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \text{ kümesine giden fonksiyonlar}\}$$

kümesine eşittir.

Örten olmayan her fonksiyon, F_i kümelerinden en az birinin elemanıdır. Demek ki örten olmayan fonksiyonlar kümesi

$$\bigcup_{i \in B} F_i$$

kümesidir ve örten olan fonksiyonlar kümesi

$$F \setminus \bigcup_{i \in B} F_i$$

kümesidir. Eğer $\bigcup_{i \in B} F_i$ kümesinin eleman sayısını bulursak sorumuzu yanıtlayabiliriz.

Şimdi $\bigcup_{i \in B} F_i$ kümesinin eleman sayısını bulalım. Bunun için Teorem 7.1'i kullanacağız. Teorem 7.1'e göre,

$$\begin{aligned} \left|\bigcap_{i \in B} F_i\right| &= \sum_{i \in B} |F_i| - \sum_{i_2 \neq i_2} |F_{1_i} \cap F_i| + \sum_{|\{i_1, i_2, i_3\}|=3} |F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap F_{i_3}| \\ &\qquad - \cdots + (-1)^{m-1} \left|\bigcap_{i \in B} F_i\right| \\ &= \binom{m}{1}(m-1)^n - \binom{m}{2}(m-2)^n + \binom{m}{3}(m-3)^n \\ &\qquad - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}(m-m)^n \\ &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n \end{aligned}$$

olur. Bulduk! Örten fonksiyon sayısı

$$\left|F \setminus \bigcup_{i\in B} F_i\right| = |F| - \left|\bigcup_{i\in B} F_i\right| = m^n - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n$$

imiş.

Teorem 24.1. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden örten fonksiyon sayısı*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}(m-k)^n$$

olur. □

Sonuçlar. Yukarıdaki yanıttan ilginç eşitlikler çıkar:
a. Eğer $n < m$ ise, örten fonksiyon olmadığından,

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}(m-k)^n = 0.$$

b. Eğer $n = m$ ise $n!$ tane örten fonksiyon olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^n = n!$$

c. Eğer $n = m + 1$ ise bu yanıt bize hangi eşitliği verir?

$m + 1$ elemanı olan bir A kümesinden m elemanı olan bir B kümesine giden kaç örten fonksiyon olduğunu bir başka yöntemle hesaplayalım. Örten bir fonksiyon altında, A'nın iki elemanı B'nin aynı elemanına gitmek zorundadır ve A'nın geri kalan $m-1$ elemanı B'nin geri kalan $m-1$ elemanına bir eşleme biçiminde gider. Demek ki A'dan B'ye giden örten fonksiyon sayısı,

$$\binom{m+1}{2}\binom{m}{1}(m-1)! = \frac{m \times (m+1)!}{2}$$

olur. (A'dan iki eleman, B'den bir eleman seçtik ve geri kalan $m-1$ eleman arasında bir eşleme bulduk). Dolayısıyla,

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}(m-k)^{m+1} = m\frac{(m+1)!}{2}$$

eşitliği geçerlidir.

Rastgele Bir Fonksiyonun Eşleşme Olma Olasılığı

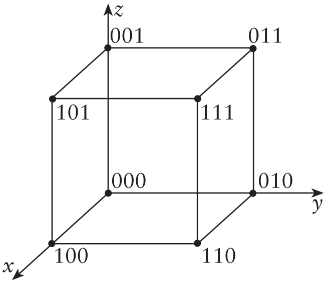
Birinci soruya göre, n elemanlı bir kümenin rastgele bir fonksiyonunun bir eşleşme olma olasılığı $n!/n^n$ dir. Eğer $n = 1$ ise bu olasılık 1, yani yüzde yüzdür. Eğer $n = 2$ ise olasılık yüzde elliye düşer. $n = 3$ ise 2/9'a... Tahmin edildiği gibi n büyüdükçe eşleşme bulma olasılığı azalır. Nitekim, eğer n çok çok büyükse,

$$\frac{n!}{n^n} \approx e\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = e\frac{n!}{(n+1)^n}$$

olur. (Buradaki e, "logaritmik sabit" adı verilen ve yaklaşık 2,718 olan sabit bir sayıdır.) Biraz basit analizle, bu olgudan, n sonsuza gittiğinde olasılığın sıfıra yakınsadığı görülür.

25. Küpleri Sayma

Üç boyutlu küpü herkes bilir. İşte resmi:



Resimdeki küp birim kenarlıdır ve xyz-uzayına yerleştirilmiştir. Köşelerin koordinatlarını -örneğin- $(1, 0, 1)$ olarak yazmak yerine 101 olarak yazdık, böylesi daha kolay olacak. Üç boyutlu küpün 8 köşesi, 12 kenarı ve 6 yüzü vardır. Köşeleri

$$000,\ 001,\ 010,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111$$

olarak kodladık. Örneğin 011 ile 111 köşeleri "komşu", yani aralarında bir kenar var. Ama 100 ile 001 köşeleri komşu değil, aralarındaki "mesafe" 2, çünkü kenarlardan giderek birinden diğerine ulaşmak için önce 101 ya da 000 köşelerinden geçmek gerekiyor. 000 ile 111 köşeleri arasındaki mesafe 3. Birinden diğerine giden 6 farklı en kısa yol vardır ve herbirinin uzunluğu 3'tür; bu yollardan biri

$$000 - 100 - 110 - 111$$

yoludur, bir başkası

$$000 - 010 - 011 - 111$$

yoludur. En kısa yolu bulmak için 000 koordinatlarını teker teker 111 koordinatlarına değiştirmemiz gerekir ve bunu da 6 farklı biçimde yapabiliriz: İlk değişiklik için 3 seçim vardır, ya birinci ya ikinci ya da üçüncü koordinatı 1'e dönüştürmeliyiz; sonraki değişiklik için 2 koordinat seçimi kalır; son değişiklik için tek bir seçim kalmıştır; böylece 000 köşesinden 111 köşesine giden toplam $3 \times 2 \times 1 = 6$ tane farklı en kısa yol bulunur.

Yüzeylerden biri $x = 0$ düzleminde bulunuyor ve birinci koordinatı 0 olan

$$000,\ 001,\ 010,\ 011$$

köşelerinden oluşuyor. Diğer yüzeyler

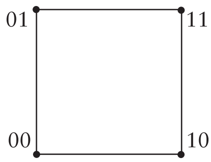
$$x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$$

düzlemlerinde. Her birinin dörder köşesi var. Mesela $z = 1$ düzleminde bulunan yüzeyin köşeleri şunlardır:

$$001,\ 011,\ 101,\ 111.$$

(Hepsinin son koordinatı 1.)

İki boyutlu küpü de herkes bilir ama küp yerine daha çok kare denir. İşte iki boyutlu küp:



Bu sefer x ve y eksenlerini çizmedik. İki boyutlu küpün 4 köşesi, 4 kenarı ve 1 yüzü vardır. Köşeler

$$00,\ 01,\ 10,\ 11$$

olarak kodlanmışlardır. Kenarlar ise $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ ve $y = 1$ doğrularının üstünde bulunurlar.

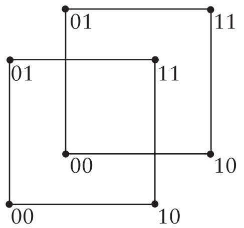
Bir boyutlu küp ise $[0, 1]$ aralığıdır.

Bir boyutlu küpün 2 köşesi ve 1 kenarı vardır. Yüzey sayısı ise 0'dır.

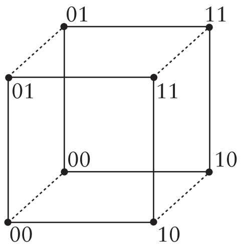
Sıfır boyutlu küp sadece bir noktadan oluşur, yani tek bir köşesi vardır.

$n = 1, 2, 3$ için, n boyutlu küpün köşeleri n uzunluğunda 01-dizisiyle kodlandığına göre, 0 boyutlu küpün köşelerinin 0 uzunluğunda bir 01-dizisiyle, yani **boşdiziyle** kodlanması gerekir. Boşdizi, şekilde gösterildiği üzere $\langle\ \rangle$ simgesiyle gösterilir.

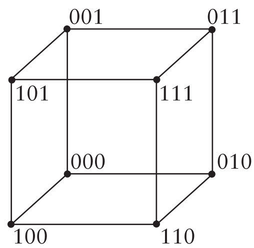
Şimdi yukarıda irdelediğimiz 3, 2, 1 ve 0 boyutlu küpleri bir de şöyle irdeleyelim. Köşeleri 00, 01, 10, 11 olarak numaralandırılmış iki boyutlu iki küp alalım.



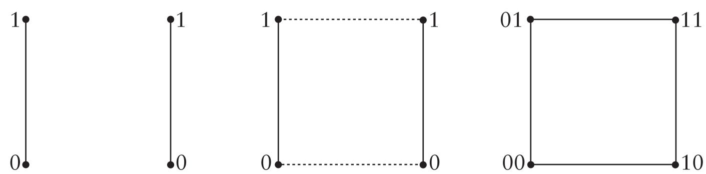
Ve aynı kodla kodlanmış köşeleri bir doğru parçasıyla birleştirelim:



Böylece üç boyutlu bir küp elde ettik. Ama elde ettiğimiz bu 3 boyutlu küpte her koddan iki köşe var; bu doğru değil, bu sorunu gidermek için iki boyutlu küplerden birinin köşelerinin kodlarının başına 0 ekleyelim, diğerine 1 ekleyelim. Böylece yazının en başındaki standart küpü elde ederiz.



İki boyutlu küp de yukarıdaki yöntemle iki tane bir boyutlu küpten elde edilebilir:



İki tane bir boyutlu küp

Aynı kodlu köşeler birleşsin.

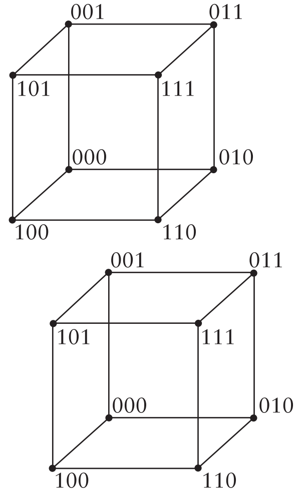
Birincisinin başına 0 ikincisinin başına 1 ekleyelim.

Benzer şekilde bir boyutlu küp, iki tane sıfır boyutlu küpten elde edilir.
Bundan böyle n boyutlu küp yerine n-***küp*** diyelim.
İki tane 0-küpten bir 1-küp elde ettik.

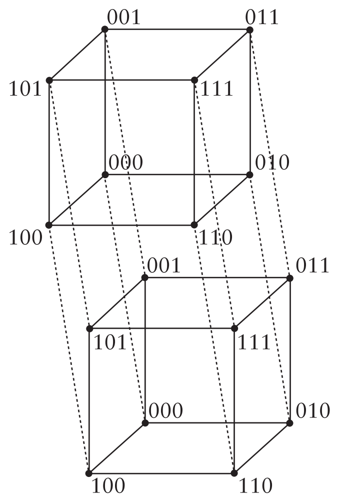
İki tane 1-küpten bir 2-küp elde ettik.

İki tane 2-küpten bir 3-küp elde ettik.

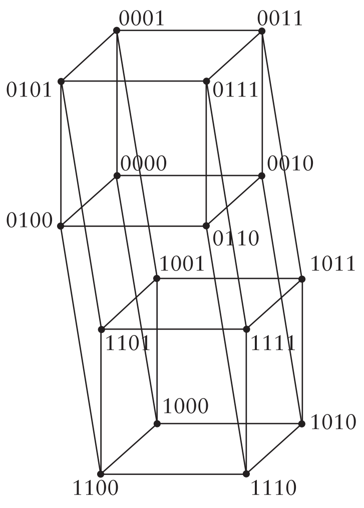
Şimdi aynı yöntemle iki tane 3-küpten bir "4-küp" elde edelim. Bunun için iki tane 3-küp alalım:



Aynı kodu taşıyan köşeleri birleştirelim:



3-küplerden birinin kodlarının başına 0 diğerinin kodlarının başına 1 getirelim:



Böylece bir 4-küp çizdik. Dikkat ederseniz iki köşenin komşu (yani birbirine bağlanmış) olması için yeter ve gerek koşul, köşelerin kodlarının sadece bir teriminin farklı olması. Örneğin 0100 ile 1100 komşu köşelerdir, çünkü sadece ilk terimleri farklıdır. Aynı şekilde 1101 ile 1001 komşudur, çünkü sadece ikinci terimleri farklıdır. Ama 1001 ile 0110 komşu olmadıkları gibi birbirine oldukça uzaktır, nitekim bu noktalardan birinden diğerine küp üstünde kalarak gitmek için en az dört kenarın üstünden geçmek gerekir.

$$1001 - 0001 - 0101 - 0111 - 0110,$$

bu iki köşe arasında bir yoldur. Bu yol 4 uzunluğundadır çünkü 4 kenardan geçiliyor. 1001 ile 0110 noktaları arasında $4! = 24$ tane en kısa yol vardır. Ama 1100 ile 1010 arasında sadece $2! = 2$ tane en kısa yol vardır.

4-küpte toplam $8 \times 2 = 16$ tane köşe (yani 0-küp) vardır, yani 2^4 tane.

4-küpte bulunan kenar (yani 1-küp) sayısını hesaplayalım. Bu sayıyı farklı biçimlerde hesaplayabiliriz:

Birinci Hesap: 4-küpü inşa etmek için ilk olarak ele aldığımız iki 3-küpün her birinde 12 tane kenar (yani 1-küp) vardır. Böylece $2 \times 12 = 24$ tane kenar elde ettik. Ama bir de bu iki küpün aynı kodlu köşelerini birleştirdiğimizde eklediğimiz kenarlar var: Orijinal 3-küplerden birinin her köşesini diğerinin bir köşesiyle birleştirdik ve böylece yeni kenarlar elde ettik. 3-küpte 8 tane köşe olduğundan, bu da bize 8 yeni kenar daha verir. Toplam kenar sayısı $24 + 8 = 32$ etti. Dikkat ederseniz bu sayıyı şöyle elde ettik:

$$2 \times (\text{3-küpteki 1-küp sayısı}) + (\text{3-küpteki 0-küp sayısı}).$$

İleride buna benzer formüller elde edeceğiz.

İkinci hesap: 4-küpün 2^4 tane köşesi var. Her köşeden tam 4 tane kenar çıkar. Böylece $2^4 \times 4$ tane kenar elde ederiz. Ama bu yöntemle her kenar iki kez sayılır; dolayısıyla $2^4 \times 4$ sayısını 2'ye bölmeliyiz. Böylece $2^4 \times 2 = 32$ tane kenar olduğu görülür.

Üçüncü hesap: 0101 ve 0111 köşeleri bir kenar oluştururlar. Bu kenar, $x = 0$, $y = 1$ ve $t = 1$ denklemlerini sağlayan noktalardan oluşur. Bu tür denklem sayısını hesaplarsak kenar sayısını da bulmuş oluruz. Toplam 4 koordinat var: x, y, z, t. Bu 4 koordinatın 3'ünü seçip, bu koordinatları 0 ya da 1 olarak belirleyeceğiz. Bu tür seçimlerden $\binom{4}{3} = 4$ tane yapabiliriz. Ardından seçilen 3 koordinatın her birinin 0'a mı yoksa 1'e mi eşit olduğunu belirlemek gerekiyor. Her koordinat için 2 seçim var, her koordinat ya 0'a ya da 1'e eşit olacak. Demek ki seçilmiş her 3 koordinat için toplam 2^3 tane seçim var. Dolayısıyla kenar sayısı $\binom{4}{3} \times 2^3 = 32$ olur.

Şimdi de 4-küpte bulunan yüzey (yani 2-küp) sayısını hesaplayalım. Bunu da farklı biçimlerde hesaplayabiliriz:

Birinci Hesap: 4-küpü inşa etmek için ilk olarak ele aldığımız iki 3-küpün her birinde 6 tane yüzey (yani 2-küp) vardır. Böylece $2 \times 6 = 12$ tane yüzey elde ettik. Ama bir de bu iki küpün aynı kodlu kenarlarını (yani 1-küplerini) birleştirirken eklediğimiz yüzeyler var: 3-küplerden birinin her kenarının iki köşesini diğer 3-küpün aynı kodlu köşeleriyle birleştirdik. Böylece bir 3-küpün kenar sayısı kadar yüzey daha elde ettik, yani 12 tane daha yüzey elde ettik. Toplam yüzey sayısı $12 + 12 = 24$ etti. Dikkat ederseniz bu sayıyı şöyle elde ettik:

$$2 \times (\text{3-küpteki 2-küp sayısı}) + (\text{3-küpteki 1-küp sayısı}).$$

Buna benzer formüller elde edeceğimizi söylemiştik.

İkinci hesap: 4-küpün 32 tane kenarı var. Her kenar tam 3 tane yüzeyin üstünde. Böylece 32×3 tane yüzey elde ederiz. Ama bu yöntemle her yüzey dört kez sayılır çünkü her yüzeyin üstünde 4 kenar vardır; dolayısıyla 32×3 sayısını 4'e bölmeliyiz. Böylece 24 tane yüzey olduğu görülür.

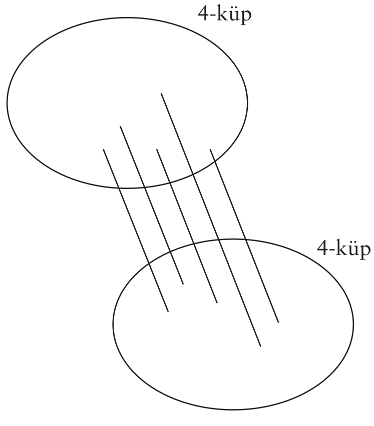
Üçüncü hesap: 0101 – 0111 – 1111 – 1101 köşeleri bir yüzey oluşturur. Bu kenar, $y = 1$ ve $t = 1$ denklemlerini sağlayan noktalardan oluşur. Bu tür denklem sayısını hesaplarsak yüzey sayısını da bulmuş oluruz. Toplam 4 koordinat var, bunlardan 2'sini seçeceğiz. Bu tür seçimlerden $\binom{4}{2} = 6$ tane var. Ardından seçilen 2 koordinatın her birinin 0'a mı yoksa 1'e mi eşit olduğunu belirleyeceğiz. Demek ki seçilmiş 2 koordinat için toplam 2^2 tane seçim var. Dolayısıyla yüzey sayısı $\binom{4}{2} \times 2^2 = 24$ olur.

Şimdi bir de 4-küpün içindeki 3-küp sayısını hesaplayalım. İlk olarak ele aldığımız (daha sonra eşleşen köşelerini birleştirdiğimiz) iki 3-küp var. Ama bunun dışında köşeleri eşleştirirken ortaya çıkan 3-küpler var. Ortaya çıkan 3-küpler, orijinal 3-küplerdeki yüzeyler (yani 2-küpler) birleştirilerek elde edilirler. Orijinal 3-küpte de 6 tane yüzey (2-küp) var. Demek ki 4-küpteki 3-küp sayısı $2 + 6 = 8$'dir. Dikkat ederseniz bu sayıyı şöyle elde ettik:

$$2 \times (\text{3-küpteki 3-küp sayısı}) + (\text{3-küpteki 2-küp sayısı}).$$

Benzer formül yine karşımıza çıktı.

Gelelim 5-küpe. Önce 5 boyutlu küpü çizelim (!)



Köşe sayısı belli: $2^5 = 32$, ne de olsa köşeler 01101 gibi 5 uzunluğundaki 01-dizilerinden oluşuyor. Köşe sayısını şöyle de hesaplayabiliriz: 5-küpün köşeleri iki 4-küpün köşelerinden oluşuyor, yani $2 \times 2^4 = 2^5$. Bu kolaydı.

Şimdi kenar (yani 1-küp) sayısını hesaplayalım. Bir 4-küpte 32 tane kenar olduğunu gördük. Demek ki orijinal 4-küplerde $2 \times 32 = 64$ tane kenar var. Ama bir de arada eklediğimiz kenarlar var. Bunlardan da bir 4-küpün köşe sayısı kadar, yani 16 tane var. Böylece kenar sayısı $64 + 16 = 80$ etti.

Genel yöntem anlaşılmış olmalı. Örneğin 5-küpteki 3-küp sayısını bulmak için

$$2 \times (\text{4-küpteki 3-küp sayısı}) + (\text{4-küpteki 2-küp sayısı})$$

sayısı hesaplanır. Aşağıda bulduklarımızın ve bulabileceklerimizin bir listesini yaptık.

	altküpler					
	0-küp	1-küp	2-küp	3-küp	4-küp	5-küp
0-küp	1	0	0	0	0	0
1-küp	2	1	0	0	0	0
2-küp	4	4	1	0	0	0
3-küp	8	12	6	1	0	0
4-küp	16	32	24	8	1	0
5-küp	32	80	80	40	10	1

Neredeyse Pascal üçgenindeki gibi, sadece birinci sütun 2^n sayılarından oluşuyor (bu sayı n-küpün köşe sayısıdır) ve diğer hücreler o hücrenin üstündeki ve sol üstündeki sayılardan elde ediliyor. Bir başka deyişle n-küpteki k-küp sayısını $a_n(k)$ olarak gösterirsek,

$$a_n(k) = a_{n-1}(k-1) + 2a_{n-1}(k)$$

eşitliği geçerlidir. k ya da n negatifken $a_n(k) = 0$ tanımını yaparsak, buna bir de $a_0(0) = 1$ koşulunu eklersek, tüm $a_n(k)$ sayılarını belirleyebiliriz.

Alıştırma 25.1. $a_n(k)$ için kapalı bir formül bulun.

n boyutlu bir küpün köşelerini n uzunluğunda bir 01-dizisiyle kodladık ve iki köşenin, ancak kodlarının tek bir terimi farklıysa komşu olduklarını (yani aralarında bir kenar olduğunu) gördük. Küpün bir yüzü ise sadece iki koordinatı farklı köşelerden oluşuyor. Küpün içindeki 3-küpler de sadece üç koordinatı farklı olan 8 köşeden oluşuyor. Şimdi n'yi sonsuz yapalım ve aynı komşuluk ilişkisini koruyalım. Böylece sonsuz boyutlu bir küp elde ederiz[1].

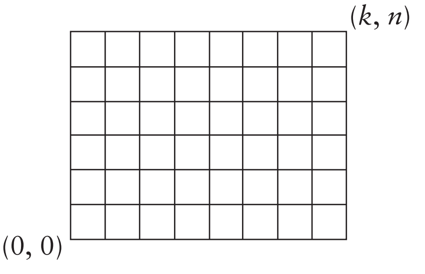
[1]Sadece sonlu sayıda koordinatı 1 olan, diğerleri hep 0 olan köşeler de sonsuz boyutlu bir küp oluşturur. Ama sonsuz boyutlu bu iki küp birbirinden farklıdır, birincisinin köşe "sayısı" ikincisinden fazladır. Birincisinin, gerçel sayı kadar köşesi vardır, ikincisinin ise doğal sayı kadar.

26. Çözümlü Birkaç Problem

Andrei Ratiu ile birlikte hazırlanmıştır.

Cahit Arf Matematik Günleri 2004

Problem 1. *Düzlemdeki* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *ızgarasında* (*aşağıdaki şekil*) $(0,\, 0)$ *noktasından herhangi bir* $(k,\, n)$ *noktasına hep kuzeye ve doğuya gitmek koşuluyla ve ızgarayı takip ederek kaç değişik biçimde gidilir*?



Çözüm: Doğuya doğru k adım, kuzeye doğru n adım atmalıyız. Demek ki toplam $k+n$ adım atmalıyız. Bu $k+n$ adımın tam k tanesi doğuya olmalı, geri kalanlar zorunlu olarak kuzeye olurlar. Demek ki $k+n$ adımdan doğuya atılacak k adımı seçmeliyiz. Yanıt

$$\binom{n+k}{k}$$

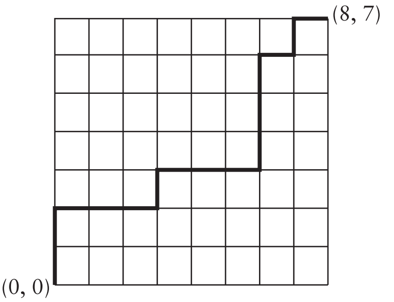
olur. □

Problem 2. n *ve* k *birer doğal sayı olsun.*

$$A(n,\, k) = \{(a_0,\ \ldots,\, a_{k-1}) \in \mathbb{N}^k : a_0 + \cdots + a_{k-1} = n\}$$

kümesinin eleman sayısını bulun.

Çözüm 1: $(a_0,\ \ldots,\, a_{k-1}) \in A(n,\, k)$ olsun. Kendimizi yukarıdaki ızgaranın üstünde olduğu gibi $(0,\, 0)$'dan $(k-1,\, n)$ noktasına giderken düşünelim ve her a_i sayısını, doğuya doğru i-inci hamle yapıldıktan hemen sonra kuzeye doğru attığımız adım sayısı olarak yorumlayalım.



$(2, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 1, 0) \in A(7, 9)$

Bunun geri dönüşü de vardır: Birinci problemdeki her kuzeydoğu yolu bize bu sayede (yukarıdaki şekle bakın) $A(n, k)$ kümesinden bir elemana tekabül eder. Sonuç olarak, yanıt

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

olur. □

Çözüm 2: n sayısını n tane 1 (ya da çubuk) olarak görelim. Bu n tane 1'i aralarına $k-1$ tane ayraç koyarak ayıracağız. Ardışık ayraçların arasındaki 1 sayısı bize a_i sayılarını verecek. (Ayraçlar başa ya da sona gelebilir. İki ayraç aynı yere gelebilir.) Her ayırım bize $A(n,\ k)$ kümesinin ayrı bir elemanını verecek. n tane 1 ve $k-1$ tane ayraç olamak üzere toplam

$$n+k-1$$

tane nesnemiz var. Bu

$$n+k-1$$

nesne arasından ayraç olacak $k-1$ nesneyi (ya da 1 olacak n nesneyi) seçmeliyiz. Yanıt

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

olur. □

Problem 3. *n elma, adları $A_0,\ \ldots,\ A_{k-1}$ olan k kişi arasında kaç türlü dağıtılır? (Dikkat: Kişiler arasında ayrım yapıyoruz ama elmalar arasında yapmıyoruz.)*

Çözüm: $A(n, k)$, Problem 2'deki gibi olsun.

$$(a_0,\ \ldots,\ a_{k-1}) \in A(n,\ k)$$

olsun. Her a_i'yi A_i'ye verilecek elma sayısı olarak yorumlayabiliriz. Yanıt gene

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

olur. □

Problem 4. *$n \geq 1$ ve $k \geq 1$ birer doğal sayı olsun.*

$$B(n, k) = \{(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n : 0 \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq k-1\}$$

kümesinin eleman sayısını bulun.
Çözüm: $B(n, k)$ kümesinde yukarıdaki $A(n, k)$ kümesindeki eleman kadar eleman vardır. Nitekim,

$$(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in A(n, k)$$

olsun. Bu elemanın yardımıyla $B(n, k)$ kümesinden bir

$$(b_1, \ldots, b_n)$$

elemanı bulacağız. $(b_1, \ldots, b_n)$ elemanının ilk a_0 tanesi 0 olsun, sonraki a_1 tanesi 1 olsun, ..., en son a_{k-1} tanesi $k-1$ olsun. Örneğin, $n = 5$, $k = 4$ ise, $A(5, 4)$ kümesinin (0, 2, 1, 2) elemanı $B(5, 4)$ kümesinin (1, 1, 2, 3, 3) elemanına tekabül eder (0 tane 0, 2 tane 1, 1 tane 2, 2 tane 3).

Bunun geri dönüşü de vardır: Eğer

$$(b_1, \ldots, b_n) \in B(n, k)$$

ise, a_i bu sonlu dizideki i sayısı olsun. Örneğin eğer $n = 5$ ve $k = 4$ ise, $B(5, 4)$ kümesinin

$$(1, 1, 2, 3, 3)$$

elemanına $A(5, 4)$ kümesinin (0, 2, 1, 2) elemanı tekabül eder (0 tane 0, 2 tane 1, 1 tane 2, 2 tane 3). □

Problem 5. *Birbirinden ayırdedilemeyen n top ve bu topları boyayabileceğimiz k farklı renkte boyamız var. Bu n topu bu k farklı renge kaç türlü boyayabiliriz?*
Dikkat: Toplar ayırdedilmiyor ama renkler ayırdediliyor. Örnek: Üç top ve kırmızı ve mavi olmak üzere iki rengimiz varsa, (üçü mavi), (ikisi mavi, biri kırmızı), (biri mavi, ikisi kırmızı), (üçü kırmızı) olmak üzere dört türlü boyayabiliriz. Eğer üç top ve üç rengimiz varsa boyamayı 10 türlü yapabiliriz.
Çözüm: Bu da aynı sayı! Her topu elma olarak düşünelim. Her renk de bir kişiyi simgelesin. Toplar (yani elmalar) dağıtılan kişinin rengine boyanır. Problem 3'le aynı yanıtı buluruz. □

Problem 6. *$n \geq 1$ bir doğal sayı olsun. n'yi kaç farklı biçimde pozitif doğal sayıların toplamı olarak yazabiliriz?*
Dikkat: Farklı sıralamalar ayrı ayrı sayılacak, örneğin, $n = 14$ ise, $1+3+5+5$ ve $5+3+5+1$ toplamları ayrı ayrı sayılacak.
Çözüm: n pirinç tanesi alıp yanyana sıraya dizelim. Bu n pirinç tanesi arasında $n-1$ tane aralık vardır. Bu $n-1$ aralığa belli bir sayıda çubuk yerleştireceğiz.

İki çubuk arasında olan pirinç tanesi sayısı toplamı oluşturan bir sayıyı belirleyecek. Örneğin, $n = 9$ ise, aşağıdaki çubukların pozisyonu bize

$$9 = 3 + 2 + 4$$

toplamını verecek. Toplam $n - 1$ aralığımız var ve her aralığa

$$\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\Big|\bigcirc\ \bigcirc\Big|\bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc\ \bigcirc$$

bir çubuk ya yerleştireceğiz ya da yerleştirmeyeceğiz. Demek ki toplam 2^{n-1} seçeneğimiz var.

Cahit Arf Matematik Günleri 2005'ten bir soru

Aşağıdaki şekilde, sadece dikey ve yatay olarak birer basamak hareket edebilen birinin MATEMATİK *sözcüğünü kaç türlü okuyabileceğini bulunuz.*

								m
							m	a
						m	a	t
					m	a	t	e
				m	a	t	e	m
			m	a	t	e	m	a
		m	a	t	e	m	a	t
	m	a	t	e	m	a	t	i
m	a	t	e	m	a	t	i	k
a	t	e	m	a	t	i	k	
t	e	m	a	t	i	k		
e	m	a	t	i	k			
m	a	t	i	k				
a	t	i	k					
t	i	k						
i	k							
k								

Çözüm: En sağdaki ve en üstteki m harfinden başlayarak "matematik" sözcüğünü şekil üzerinde hiç yatay hareket etmeden aşağı inerek yazabiliriz. Sağdaki ikinci m harfinden başlayarak ise ya bir kere yatay hareket yaparak yada hiç yatay hareket yapmadan yazabiliriz. Ve yatay hareketi sekiz farklı harften birinde seçebiliriz. Dolayısıyla sağdan ikinci harften başlayarak

$$1 + \binom{8}{1}$$

farklı şekilde matematik yazabiliriz. Sağdan üçüncü m harfinden başlarsak, sıfır, bir ya da iki defa sağa gitmemiz gerekecek. Demek ki sağdan üçüncü m harfinden başlayarak,

$$1 + \binom{8}{1} + \binom{8}{2}$$

değişik biçimde matematik yazabiliriz. En soldaki m harfine geldiğimizde ise,

$$\begin{aligned} T = 1 &+ \left(1 + \binom{8}{1}\right) + \left(1 + \binom{8}{1} + \binom{8}{2}\right) \\ &+ \cdots + \left(1 + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8}\right) \end{aligned}$$

farklı şekilde matematik sözcüğünü yazabileceğimizi görürüz. Dolayısıyla yukarıdaki toplamı hesaplarsak sonuca ulaşmış olacağız:

Hesaplarsak,

$$\begin{aligned} T &= 9 \cdot 1 + 8 \cdot \binom{8}{1} + 7 \cdot \binom{8}{2} + \cdots + 1 \cdot \binom{8}{8} \\ &= 9 \cdot 1 + 8 \cdot \binom{8}{7} + 7 \cdot \binom{8}{6} + \cdots + 1 \cdot \binom{8}{0} \\ &= 2^8 + 8 \sum_{k=1}^{8} \frac{7!}{(k-1)!(7-k+1)!} \\ &= 2^8 + 8 \sum_{k=1}^{8} \binom{7}{k-1} = 2^8 + 8 \sum_{\ell=0}^{7} \binom{7}{\ell} \\ &= 2^8 + 8 \times 2^7 = 2^7(2+8) = 1280 \end{aligned}$$

buluruz.

27. Bir Olimpiyat Sorusu ve Düşündürdükleri

Problem [Endonezya TST 2009]: *Eğer $n > 1$ tek bir doğal sayıysa, $8n+4$ sayısının,*

$$(*) \qquad \binom{4n}{2n}$$

sayısını böldüğünü kanıtlayın.

Sorulandan daha genel iki olgu kanıtlayacağız:

Teorem 27.1. *m bir doğal sayı olsun.*
i. *Eğer $m \geq 1$ ise $m+1$ sayısı $\binom{2m}{m}$ sayısını böler.*
ii. *Eğer $m \geq 1$ ise, m'nin 2'nin bir kuvveti olması için (yani tek olan bir sayıya bölünmemesi için) yeter ve gerek koşul, 4'ün $\binom{2m}{m}$ sayısını bölmesidir.*

Bu teorem gerçekten de Endonezya matematik olimpiyatları seçmelerinde sorulan problemden daha genel. Nitekim

$$8n+4 = 4(2n+1)$$

olduğundan ve 4 ile $2n+1$ sayıları aralarında asal olduğundan, problemi çözmek için hem 4'ün hem de $2n+1$'in (*) sayısını bölmesi gerekir. Teoremin birinci kısmında $m = 2n$ alırsak, $2n+1$'in (*) sayısını böldüğünü görürüz. n tek olmak üzere, $m = 2n$ alırsak, m, 2'nin bir kuvveti olmaz ve teoremin ikinci kısmına göre (*) sayısı 4'e bölünür.

Doğrudan teoreme yüklenmeyeceğiz. Problemi çözmeye çalışıp teoremin nasıl doğal olarak kendiliğinden kanıtlandığını göreceğiz. Yani okuru düşünce sürecimizin peşine katacağız.

Problemi çözmeye başlayalım.

$$8n+4 = 4(2n+1)$$

olduğundan ve 4 ile $2n+1$ birbirine asal olduğundan (biri tek sayı, diğeri 2'nin bir kuvveti), problemi iki probleme ayırabiliriz:

Problem 1. *Eğer $n > 1$ tekse,*
$$\binom{4n}{2n}$$
sayısının 4'e bölündüğünü kanıtlayın.

Problem 2. *Eğer $n > 1$ tekse,*
$$\binom{4n}{2n}$$
sayısının $2n+1$'e bölündüğünü kanıtlayın.

Biraz denemeyle, ikinci problemin sunulduğundan daha genel (dolayısıyla daha kolay!) bir problem olduğu tahmin edilebilir; nitekim problemin n'nin tekliğiyle filan ilgisi yok. Hatta $4n$ ve $2n$ ile de ilgisi yok, yeter ki üstteki sayı alttakinin iki katı olsun. İşte o daha genel problem.

Problem 3. *Eğer $n \geq 1$ bir doğal sayıysa, $\binom{2n}{n}$ sayısının $n+1$'e bölündüğünü kanıtlayın.*

Demek ki Problem 1 ve 3'ü çözmek yeterli. Problem 3, Teorem 27.1.i'i de kanıtlayacaktır.

Problem 3'ün Birinci Çözümü: Problem 3, basit bir hesapla doğruluğu gösterilebilen şu eşitlikten çıkıyor:
$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Sağ taraftaki ifade bir tamsayı olduğundan, sol taraftaki de bir tamsayıdır! Bu sayılara ***Catalan sayıları*** dendiğini görmüştük.

Problem 3'ün İkinci Çözümü: Verdiğimiz bu (çok kolay) kanıttan tatmin olunmaması gerekir. Çünkü bu eşitliğin nereden geldiği, nereden çıktığı, nasıl akla geldiği hiç belli değil. Geometrik bir nedeni olmayan ya da standart bir yolla bulunmayan, sanki bir rastlantıymış gibi ortaya çıkan çözümlerden pek hoşlanmaz matematikçiler. Problem 3'ü bir başka yolla çözmeye çalışalım. Basit bir hesap yapalım:
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!n}\frac{1}{n} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \binom{2n}{n+1}\frac{n+1}{n},$$
yani
$$n\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n+1}.$$

Demek ki, sağ taraftaki $n+1$ çarpanı, sol taraftaki $n\binom{2n}{n}$ terimini böler. Ama $n+1$ ile n aralarında asaldır. Demek ki $n+1$ sayısı $\binom{2n}{n}$ sayısını böler. $\square$

Problem 3'ün Üçüncü Çözümü: Bu son kanıt bir önceki kanıttan da uzun ama çok daha anlaşılır. Ama daha geometrik bir kanıt çok daha anlaşılır olur. İşte daha geometrik kanıt:

$$\binom{2n}{n}$$

sayısı, $2n$ elemanlı bir kümenin n elemanlı altküme sayısıdır. Bu geometrik düşünceyi kullanacağız. $2n$ elemanlı bir X kümesi alalım. Herhangi bir k doğal sayısı için, X'in k elemanlı altkümeleri kümesine $\wp_k(X)$ diyelim. Biz, sadece $\wp_n(X)$ ve $\wp_{n+1}(X)$ ile ilgileneceğiz. Şimdi şu kümenin elemanlarını iki değişik biçimde sayalım:

$$F = \{(A, B) \in \wp_n(X) \times \wp_{n+1}(X) : A \subseteq B\}.$$

Birinci Sayma. Her $A \in \wp_n(X)$ için, (A, B)'nin F'de olduğu kaç tane $B \in \wp_{n+1}(X)$ vardır? B'leri bulmak için, A'ya $X \setminus A$'dan bir eleman eklemek gerekir. Ama $|X \setminus A| = n$ olduğundan, (A, B)'nin F'de olduğu tam n tane $B \in \wp_{n+1}(X)$ vardır. Dolayısıyla,

$$|F| = |\wp_n(X)| \times n = n\binom{2n}{n}.$$

İkinci Sayma. Her $B \in \wp_{n+1}(X)$ için, (A, B)'nin F'de olduğu kaç tane $A \in \wp_n(X)$ vardır? A'ları bulmak için, B'den bir eleman çıkarmak gerekir. Ama $|B| = n+1$ olduğundan, (A, B)'nin F'de olduğu tam $n+1$ tane $A \in \wp_{n+1}(X)$ vardır. Dolayısıyla,

$$|F| = (n+1)|\wp_{n+1}(X)| = (n+1)\binom{2n}{n+1}.$$

Sonuç: Yukarıdaki iki formülden, gene

$$n\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n+1}$$

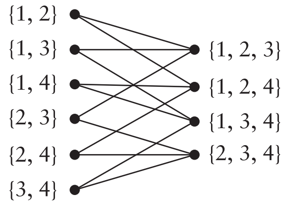
formülünü buluruz.

Bu kanıt, daha da uzun ama (bir anlamda) geometrik olduğu için daha anlaşılır.

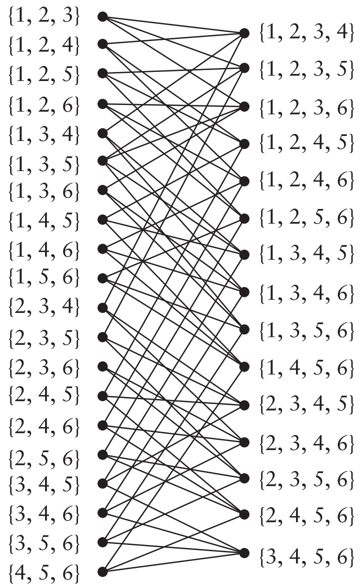
Yukarıdaki Yöntemin Geometrik Yorumu: Yukarıdaki fikri kullanarak güzel bir şekil çizelim. İleride bu tür şekillere çizge dendiğini göreceğiz.

$\wp_n(X) \cup \wp_{n+1}(X)$ kümesinin elemanlarını birer nokta olarak görelim. Aşağıdaki şekillerdeki gibi $\wp_n(X)$ kümesinin elemanlarını sola, $\wp_{n+1}(X)$ kümesinin elemanlarını sağa altalta dizelim.

Eğer $A \in \wp_n(X)$ kümesi $B \in \wp_{n+1}(X)$ kümesinin altkümesiyse, A ile B noktalarını bir doğru parçasıyla birleştirelim, değilse birleştirmeyelim. Örneğin $n = 2$ ise, şu şekli elde ederiz:



Eğer $n = 3$ ise,



şeklini elde ederiz.

Aynı yöntemle şu teorem kanıtlanır:

Teorem 27.2. *$2 \leq i \leq n$, iki doğal sayı olsun. Eğer i ile $n+1$ aralarında asalsa, i sayısı $\binom{n}{i-1}$ sayısını böler.*

Kanıt: n elemanlı bir X kümesi alalım. Şu kümenin elemanlarını iki değişik biçimde sayalım:

$$F = \{(A, B) \in \wp_{i-1}(X) \times \wp_i(X) : A \subseteq B\}.$$

Birinci Sayma. Her $A \in \wp_{i-1}(X)$ için, (A, B)'nin F'de olduğu kaç tane $B \in \wp_i(X)$ vardır? B'leri bulmak için, A'ya $X \setminus A$'dan bir eleman eklemek gerekir. Ama $|X \setminus A| = n - i + 1$ olduğundan, (A, B)'nin F'de olduğu tam $n - i + 1$ tane $B \in \wp_{n+1}(X)$ vardır. Dolayısıyla,

$$|F| = |\wp_{i-1}(X)| \times (n - i + 1) = \binom{n}{i-1}(n - i + 1).$$

İkinci Sayma. Her $B \in \wp_i(X)$ için, (A, B)'nin F'de olduğu kaç tane $A \in \wp_{i-1}(X)$ vardır? A'ları bulmak için, B'den bir eleman çıkarmak gerekir. Ama $|B| = i$ olduğundan, (A, B)'nin F'de olduğu tam i tane $A \in \wp_{i-1}(X)$ vardır. Dolayısıyla,

$$|F| = i \times |\wp_i(X)| = i\binom{n}{i}.$$

Yukarıdaki iki formülden,

$$\binom{n}{i-1}(n-i+1) = i\binom{n}{i}.$$

formülünü buluruz. Bu formülü doğrudan hesaplayarak da bulabilirdik elbet, ama bu kadar şık olmazdı.

Demek ki sağ taraftaki i çarpanı sol taraftaki

$$\binom{n}{i-1}(n-i+1)$$

terimini böler. Ama i ile $n+1$ aralarında asal olduklarından, i ile $n-i+1$ de aralarında asaldır. Demek ki, i sayısı

$$\binom{n}{i-1}$$

sayısını böler. İstediğimizi kanıtladık.

Sonuç 27.3. *p bir asalsa ve $1 \le i < p$ ise, i sayısı $\binom{p-1}{i-1}$ sayısını böler.*

Kanıt: Teorem 27.2'de n yerine $p-1$ alalım. □

İkinci Problemin Çözümü: Gelelim ikinci probleme. Bir tanımla başlayalım. Eğer $n \neq 0$ bir tamsayı ve p bir asal sayıysa, $\mathrm{val}_p(n)$ sayısı, n'yi bölen p'nin en büyük kuvveti olsun, yani

$$p^{\mathrm{val}_p(n)}$$

sayısı n'yi bölsün ama

$$p^{\mathrm{val}_p(n)+1}$$

sayısı bölmesin. Örneğin,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}_3(9) = \mathrm{val}_3(18) = \mathrm{val}_3(45) = 2,\\
&\mathrm{val}_3(54) = 3,\\
&\mathrm{val}_3(12) = 1,\\
&\mathrm{val}_3(10) = 0.
\end{aligned}$$

val_p sayısını, 0'dan değişik kesirli sayılar için de tanımlayabiliriz. Herhangi bir q kesirli sayısı alalım. q'yü, bir k tamsayısı için, a ve b tamsayıları p'ye asal olmak üzere,

$$q = p^k \frac{a}{b}$$

biçiminde yazabiliriz. Buradaki k bir tamsayıdır, yani negatif de olabilir. Bu durumda,

$$\mathrm{val}_p(q) = k$$

tanımını yapalım. q bir tamsayı olduğunda, her iki tanımın da örtüştüğüne dikkatinizi çekerim.

Örneğin,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}_3(9/7) = \mathrm{val}_3(18/7) = \mathrm{val}_3(45/2) = 2,\\
&\mathrm{val}_3(1/54) = -3,\\
&\mathrm{val}_3(7/12) = -1,\\
&\mathrm{val}_3(10/13) = 0.
\end{aligned}$$

$\mathrm{val}_p(q)$ sayısı, q'nün "logaritması" gibi davranır:

Özellikler. *Her $x,\ y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için,*

1. $\mathrm{val}_p(xy) = \mathrm{val}_p(x) + \mathrm{val}_p(y)$.
2. $\mathrm{val}_p(x/y) = \mathrm{val}_p(x) - \mathrm{val}_p(y)$.
3. $\mathrm{val}_p(-x) = \mathrm{val}_p(x)$.
4. $\mathrm{val}_p(x^n) = n\,\mathrm{val}_p(x)$.
5. *x ve n doğal sayılarsa, $p^n | x \Leftrightarrow n \le \mathrm{val}_p(x)$ olur.*

Bütün bu özelliklerin kanıtı çok kolaydır. Okura bırakıyoruz.

Bir n doğal sayısı için, $\mathrm{val}_p(n!)$ sayısı kolaylıkla hesaplanabilir:

Teorem 27.4. *p bir asalsa ve $n \neq 0$ bir doğal sayıysa*

$$\mathrm{val}_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

olur.

Not 1. Buradaki $[x]$, x'in tamkısmı anlamına gelmektedir.
Not 2. $\mathrm{val}_p(0)$, ∞ olarak da tanımlansaydı, o zaman ∞ ile tahmin edilen işlem ve sıralamayla yukarıdaki özellikler gene doğru olurdu.
Not 3. Sağdaki toplamdaki terimler bir zaman sonra 0'a eşit olduklarından, sağdaki toplam aslında sonlu sayıda sayının toplamıdır. Eğer, k sayısı,

$$p^k \le n < p^{k+1}$$

eşitsizliği sağlayan yegâne doğal sayıysa, o zaman teoremdeki formül,

$$\mathrm{val}_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

olur.

Teorem 27.4'ün Kanıtı: p'nin $n!$ sayısını kaç defa böldüğünü, yani $\mathrm{val}_p(n)$ sayısını bulacağız. p'ye bölünen n'den küçükeşit her pozitif doğalsayı, yani

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots,\ [n/p]p$$

sayıları, hesaplamak istediğimiz bu $\mathrm{val}_p(n)$ sayısına 1 ekler. Bunlardan da tam

$$\left[\frac{n}{p}\right]$$

tane vardır. Yani $\mathrm{val}_p(n)$ en az bu kadardır. Ama bu hesabı yaparken, n'den küçükeşit olan ve p^2'ye bölünen

$$p^2,\ 2p^2,\ 3p^2,\ \ldots,\ [n/p^2]p^2$$

sayılarının $\mathrm{val}_p(n)$ sayısına katkılarının 2 olduğunu unutuyoruz. Bunlardan da tam $[n/p^2]$ tane olduğundan, $\mathrm{val}_p(n)$ en az

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right]$$

olmalıdır. Ama bu da eksik olabilir, çünkü burada örneğin p^3'ün $\mathrm{val}_p(n)$ sayısına katkısı sadece 2 sayılmış, oysa 3 sayılmalıydı. Bunu telafi etmek için yukarıda bulduğumuzu

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right]$$

olarak düzeltelim. Bunu böylece devam ettirirsek, teoremde belirtilen eşitliğe ulaşırız. $\square$

İkinci problemi bu teoremi kullanarak çözmeye çalışmak doğaldır. Herkesin ilk yapması gereken şey de herhalde budur. Her ne kadar başarısızlığa uğrayacaksak da bu uğraşa girişelim, eğitici olacak.

Kanıtlamak istediğimiz, $n > 1$ ve tek iken, 4'ün, yani 2^2'nin

$$\binom{4n}{2n}$$

sayısını böldüğü, bir başka deyişle,

$$2 \le \mathrm{val}_2 \binom{4n}{2n}$$

eşitsizliği. Sağdaki terimi, val'in özelliklerini kullanarak daha açık yazabiliriz:

$$\operatorname{val}_2 \binom{4n}{2n} = \operatorname{val}_2 \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!} = \operatorname{val}_2(4n!) - 2\operatorname{val}_2(2n)!$$

Bir önceki teoremi kullanarak val'i hesaplamaya devam edebiliriz:

$$\begin{aligned}
\operatorname{val}_2 \binom{4n}{2n} &= \operatorname{val}_2(4n!) - 2\operatorname{val}_2(2n)! \\
&= \left[\frac{4n}{2}\right] + \left[\frac{4n}{4}\right] + \left[\frac{4n}{8}\right] + \left[\frac{4n}{16}\right] + \cdots \\
&\qquad\qquad -2\left(\left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \left[\frac{2}{8}\right] + \cdots\right) \\
&= 2n + n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots - 2\left(n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4} + \right] \cdots\right) \\
&= n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] - \cdots
\end{aligned}$$

Demek ki kanıtlamamız gereken,

$$2 \le n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] - \cdots$$

eşitsizliği ya da

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots \le n - 2$$

eşitsizliği. k sayısı, $2^k \le n < 2^{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayı olsun. O zaman yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafını sınırlı bir toplam olarak yazabiliriz ve kanıtlamamız gereken eşitsizlik,

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^k}\right] \le n - 2$$

eşitsizliğine dönüşür.

Bu son eşitsizliğin bir "ancak ve ancak" koşulu olduğuna dikkatinizi çekeriz. Yani, 2'nin $\binom{4n}{2n}$ sayısını bölmesi için, yukarıdaki eşitsizlik gerek ve yeter koşuldur.

Eşitsizliğin sağ tarafındaki sayıyı hesaplayalım ama bu sayıyı tam hesaplamak mümkün olmayabilir. Bu yüzden, sağ taraftaki

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^k}\right]$$

sayısından biraz daha büyük ama $n - 2$'den küçük bir sayı bulmaya çalışalım.

Her x gerçel sayısı için, $[x] \leq x$ eşitsizliği elbette geçerlidir. Bunları kullanarak yukarıdaki ifadeyi üstten sınırlayalım:

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^k}\right] &\leq \frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\cdots+\frac{n}{2^k}\\ &= \frac{n}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)\\ &= \frac{n}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}\right)\\ &= n\left(1-\frac{1}{2^k}\right)=n-\frac{n}{2^k}.\end{aligned}$$

Şimdi bakalım mutlu sona ulaşabilecek miyiz, yani en sondaki ifade $n-2$'den küçükeşit oluyor mu? Yani $2 \leq n/2^k$ oluyor mu? Olmuyor, çünkü, $n/2^k < 2$.

Bu yöntem hüsranla sonuçlandı; çünkü kullandığımız

$$[x] \leq x$$

eşitsizliği bol geldi.

Başka bir yol izleyeceğiz. $\operatorname{val} p(n!)$ için, yukarıda bulduğumuzdan başka bir formül bulacağız.

Teorem 27.5. *p bir asal sayı olsun. $a_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ olmak üzere, n'yi*

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k$$

olarak yazalım. (Buna n'nin p tabanında yazılımı denir.)

$$S_p(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

olsun. O zaman,

$$\operatorname{val}_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

olur.

Notlar:

Not 1. Buradaki her a_i, $0 \leq a_i < p$ eşitsizliklerini sağlayan bir doğal sayıdır.

Not 2. Mecburen $n < p^{k+1}$ olur. Eğer $a_k \neq 0$ ise $p^k \leq n$ olur.

Not 3. $S_p(n) = S_p(pn)$ olur.

Not 4. Bulunan a_i katsayıları biriciktir, dolayısıyla $S_p(n)$ sayısı da biriciktir, yani iyi tanımlıdır. Kolaylık olsun diye, eğer p ve n sayıları önceden biliniyorsa bazen $S_p(n)$ yerine S yazacağız.

Not 5. Eğer $p = 2$ ise, $\operatorname{val}_2(n!) = n - S$ eşitliğini elde ederiz.

Not 6. $S_p(n)$, ancak n, p'nin bir kuvvetiyse 1 olabilir; aksi halde en az 2'dir.

Teorem 27.5'in Kanıtı: Bir önceki teoremi kullanacağız.

$$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k$$

eşitliğinden,

$$\left[\frac{n}{p}\right] = a_1 + a_2 p + \cdots + a_k p^{k-1}$$

çıkar. Benzer biçimde,

$$\left[\frac{n}{p^2}\right] = a_2 + a_3 p + \cdots + a_k p^{k-2}$$

bulunur. Genel olarak, her $i = 1, \ldots, k$ için,

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] = a_i + a_{i+1} p + \cdots + a_k p^{k-i}$$

bulunur. Şimdi $\mathrm{val}_p(n!)$ sayısını bir önceki teoremdeki eşitlikten hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}_p(n!) &= \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^k}\right]\\
&= \left(a_1 + a_2 p + \cdots + a_k p^{k-1}\right) + \left(a_2 + a_3 p + \cdots + a_k p^{k-2}\right)\\
&\quad + \cdots + \left(a_i + a_{i+1} p + \cdots + a_k p^{k-i}\right) + \cdots + a_k.
\end{aligned}$$

Bu canavarı hesaplamanın kolay bir yolunu bulmalıyız. Canavarı $p-1$ ile çarpalım; bakalım neler olacak:

$$\begin{aligned}
(p-1)\mathrm{val}_p(n!) &= p\,\mathrm{val}_p(n!) - \mathrm{val}_p(n!)\\
&= \left(a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k\right)\\
&\quad + \cancel{\left(a_2 p + a_3 p^2 + \cdots + a_k p^{k-1}\right)} \quad - \left(a_1 + \cancel{a_2 p + \cdots + a_k p^{k-1}}\right)\\
&\quad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\\
&\quad + \cancel{\left(a_i p + a_{i+1} p^2 + \cdots + a_k p^{k-i+1}\right)} - \left(a_{i-1} + \cancel{a_i p + \cdots + a_k p^{k-i+1}}\right)\\
&\quad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\\
&\quad + \cancel{a_k p} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \left(a_{k-1} + \cancel{a_k p}\right)\\
&\quad \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a_k
\end{aligned}$$

oldu! Birçok sadeleştirme olacaktır. Sadeleştirmelerden sonra geriye sadece

$$a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k - a_1 - a_2 - \cdots - a_k$$

kalacaktır. a_0 ekleyip çıkarırsak,

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k - a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_k$$

elde ederiz. Bu da tam $n - S$'dir. Demek ki,

$$(p-1)\,\mathrm{val}_p(n!) = n - S$$

buluruz. Bu da aynen teoremdeki eşitlik. $\square$

Bu teorem sayesinde ikinci problemi çözebiliriz. Problemi anımsatalım:

Problem 1. *Eğer $n > 1$ tekse, $\binom{4n}{2n}$ sayısı 4'e bölünür.*

Biz, şu daha genel soruyu yanıtlayacağız:

Problem 1′. *Hangi $m \geq 1$ doğal sayıları için, $\binom{2m}{m}$ sayısı 4'e bölünür?*

Bu soruyu şu şekle dönüştürebiliriz:

Problem 1″. *Hangi $m > 1$ doğal sayıları için, $2 \leq \mathrm{val}_2 \binom{2m}{m}$ olur?*

Çözüm: Sağ taraftaki sayıyı bulalım:

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}_2 \binom{2m}{m} &= \mathrm{val}_2\left(\frac{(2m)!}{m!m!}\right) = \mathrm{val}_2((2m)!) - 2\,\mathrm{val}_2(m!) \\
&= \frac{2m - S_2(2m)}{2-1} - 2\frac{m - S_2(m)}{2-1} \\
&= 2m - S_2(2m) - 2(m - S_2(m)) \\
&= 2S_2(2m) - S_2(m) = 2S_2(m) - S_2(m) = S_2(m),
\end{aligned}$$

çünkü $S_2(2m) = S_2(m)$. Demek ki, 4'ün $\binom{2m}{m}$ sayısını bölmesi için yeter ve gerek koşul,

$$2 \leq S_2(m) \text{ ya da } 1 < S_2(m)$$

eşitsizliğidir, yani m'nin 2^k biçiminde yazılamamasıdır. Böylece Teorem 27.1'in ikinci kısmı da kanıtlanmıştır.

Kaynakça

[AE] Titu Andreescu ve Bogdan Enescu, **Mathematical Olympiad Treasures,** Birkhauser 2004.

[AF] Titu Andreescu ve Zuming Feng, **A Path to Combinatorics for Undergraduates,** Birkhauser 2003.

[AG] Titu Andreescu ve Razvan Gelca, **Mathematical Olympiad Challenges,** Birkhauser 2000.

[AZ] Martin Aigner ve Günter M. Ziegler, **Kitap'tan Deliller,** Çeviren A. Muhammed Uludağ, İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları Mart 2009.

[Bo] Alexander Bogomolny, `http://cut-the-knot.org`

[Br] Victor Bryant, **Aspects of Combinatorics, Topics Techniques Algorithms**, Cambridge University Press 1992.

[Ca] Peter J. Cameron, **Combinatorics, Topics Techniques Algorithms,** Cambridge University Press 1994.

[Du] H. E. Dudeney, **Amusements in Mathematics**, Dover Publications 1970.

[Go] Solomon W. Golomb, **Polyominoes,** Princeton University Press 1996.

[GKP] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, **Concrete Mathematics,** Addison - Wesley 1994.

[Gr] Samuel L. Greitzer, **International Mathematical Olympiads 1959-1977,** The Mathematical Association of America.

[J] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles,* Advances in Math 42 (1981), sayfa 1-81.

[Ki] Branislav Kisacanin, **Mathematical Problems and Proofs**, Plenum Press 1998.

[Kl] Murray S. Klamkin, **USA Mathematical Olympiads 1972-1986**, The Mathematical Association of America.

[MD] **Matematik Dünyası** dergisi, 1991-2008. `www.matematikdunyasi.org`

[N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, üçüncü basım, Nesin Yayıncılık 2010.

[N2] Ali Nesin, **Analiz II**, Nesin Yayıncılık 2014'te yayımlanacak.

[PTW] George Polyà, Robert E. Tarjan, Donald R. Woods, **Notes on Introductory Combinatorics**, üçüncü basım, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser 1983.

[Rw] Ronald C. Reaf ve Robin J. Wilson, **An Atlas of Graphs,** Oxford Science Publications 1998.

Dizin