ANALİZ IV

Mert Çağlar

Matematik-Bilgisayar Bölümü
İstanbul Kültür Üniversitesi
Bakırköy 34156 İstanbul
http://web.iku.edu.tr/~mcaglar/
m.caglar@iku.edu.tr

Look within. Let neither the peculiar quality of anything nor its value escape thee.

—MARCUS AURELIUS

Meditations, Book VI, 3

(Trans. by George Long, 1862)

İçindekiler

Önsöz

2010/11 Bahar Dönemi'nde İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde verdiğim Analiz IV (MC 411) dersinin notlarından oluşan bu derleme, bir önceki dönem aynı bölümde verdiğim Analiz III (MC 311) dersinin devamıdır. Ders kitabı olarak yine William R. Wade'in *An Introduction to Analysis* [23] isimli kitabı kullanılmış ve notlar, temel olarak, bu kitabın ilgili bölümleri göz önüne alınarak oluşturulmuştur. Gerekli olan yerlerde Analiz III dersinin notlarına atıf yapılmış, ve bu atıflar önlerine 'III' ibâresi konularak (III/Teorem 2.4.2 ya da III/§1.4, Problem 1 gibi) verilmiştir. Bundan dolayı, okuyucunun Analiz III dersinin notlarını elinde bulundurması yararlı olacaktır: bu notlara `http://udes.iku.edu.tr` adresindeki ilgili sayfadan ulaşılabilir. Öklidyen uzaylar üzerinde integrasyon teorisinin ve bu teorinin esas sonuçlarının ele alındığı Analiz IV dersi, Analiz III dersiyle bir bütünlük arzetmektedir. Hâlihazırdaki ders notlarının verimli olarak kullanılabilmesi de, gereken alt-yapının edinilmesiyle mümkündür.

Uğur Gönüllü, Analiz III dersinde olduğu gibi, bu derste de uygulamaları yürüttü ve notları gözden geçirdi. Kendisine teşekkür ederim.

İstanbul, Mayıs 2011 — Mert Çağlar

1 $\mathbb{R}^n$ üzerinde integrasyon

Öklidyen uzaylar üzerinde integrasyon teorisi, aynı teorinin tek-değişkenli fonksiyonlar için geçerli olan araçlarının çok-boyutlu benzerleri elde edilerek kurulur. Temel olarak klâsik uzunluk, alan, ve hacim kavramlarının herhangi boyutlu uzaylardaki kümeler için tanımlanmasıyla inşâ edilen bu teori, bu bölümün konusudur.

1.1 Jordan bölgeleri

Bu kısımda, bir-boyutlu Riemann integralinin inşâsında kullanılan parçalanışların çok-boyutlu benzerleri tanımlanacak ve bunların yardımıyla $\mathbb{R}^n$ uzayının bazı özel alt-kümeleri sabitlenecektir.

$\mathbb{R}^n$ içinde bir (n-boyutlu) dikdörtgen

$$\begin{aligned} R :&= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{ her } j = 1, \ldots, n \text{ için } x_j \in [a_j, b_j]\} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

olsun. R dikdörtgeninin kenarlarının her birini alt-parçalara bölerek elde edilen n-boyutlu dikdörtgenlerin bir $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_p\}$ ailesine, R *üzerinde* bir ***ağ*** denir: bir başka deyişle R üzerinde bir ağ, her $j = 1, \ldots, n$ için, $\nu_j \in \mathbb{N}$ sayılarının ve $[a_j, b_j]$ aralığının $\mathcal{P}_j := \mathcal{P}_j(\mathcal{G}) := \{x_k^{(j)} \mid k = 1, \ldots, \nu_j\}$ parçalanışlarının; bir $k \in \{1, \ldots, \nu_j\}$ için $I_j := [x_{k-1}^{(j)}, x_k^{(j)}]$ olmak üzere, $\mathcal{G}$ ailesi $I_1 \times \cdots \times I_n$ formundaki n-boyutlu dikdörtgenlerin bir koleksiyonu olacak biçimde var olduğu küme olarak tanımlanır. R üzerinde $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{H}$ gibi iki ağ göz önüne alındığında, eğer her $j = 1, \ldots, n$ için $\mathcal{P}_j(\mathcal{G})$ parçalanışı karşılık gelen $\mathcal{P}_j(\mathcal{H})$ parçalanışından daha ince ise, $\mathcal{G}$ ağına "$\mathcal{H}$ ağından ***daha ince***dir," denir.

(1.1.1) yapısındaki n-boyutlu bir R dikdörtgeni için,

$$|R| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

sayısı R dikdörtgeninin ***hacmi*** olarak adlandırılır. ($n = 1$ olduğunda $|R|$ sayısı R aralığının ***uzunluğu***, $n = 2$ olduğunda ise aynı sayı R dikdörtgeninin ***alan***ı olarak isimlendirilecektir.) Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $R \subseteq (R^*)^\circ$ ve $|R^*| = |R| + \varepsilon$ gerçeklenecek biçimde bir R^* dikdörtgeninin var olduğu hemen gözlemlenebilir: her $j = 1, \dots, n$ için, $\delta \to 0$ olduğunda $b_j - a_j + 2\delta \to b_j - a_j$ sağlandığından, yeterince küçük bir $\delta > 0$ sayısı $R^* := [a_1 - \delta, b_1 + \delta] \times \cdots \times [a_n - \delta, b_n + \delta]$ dikdörtgeni $|R^*| = |R| + \varepsilon$ koşulunu sağlayacak biçimde seçilebilir.

Çok-değişkenli bir fonksiyonun integrali bu fonksiyonun tanım kümesini içeren bir Öklidyen uzayın alt-kümeleri üzerinde tanımlanmak istendiğinde−iki- ve üç-boyutlu uzaylardaki nesneler için geçerli olan standart kavramların genellemeleri olarak−, ilgili alt-kümelerin 'alan'larının ya da 'hacim'lerinin ne anlama geldiklerinin belirlenmesi gerektiği görülür; bu ise, Öklidyen bir uzaydaki bir kümenin hacminin nasıl tanımlanması gerektiği sorusuna yol açar.

Tanım 1.1.1. n-boyutlu bir R dikdörtgeninin bir alt-kümesi E, ve R üzerinde bir ağ $\mathcal{G} := \{R_j \mid j = 1, \dots, p\}$ olsun. Boş küme üzerinden alınan toplam sıfır kabul edilmek koşuluyla,

$$V(E;\mathcal{G}) := \sum_{R_j \cap \overline{E} \neq \varnothing} |R_j| \qquad \text{ve} \qquad v(E;\mathcal{G}) := \sum_{R_j \subseteq E^\circ} |R_j|$$

değerlerine, sırasıyla, E kümesinin $\mathcal{G}$ *ağına göre* ***dış toplam***ı ve ***iç toplam***ı denir.

Açıklama 1.1.2. Tanım nedeniyle, her $\mathcal{G}$ ağı için $V(\varnothing;\mathcal{G}) = v(\varnothing;\mathcal{G}) = 0$ olur; aynı zamanda, $E^\circ = \varnothing$ olan her E kümesi ve her $\mathcal{G}$ ağı için, $v(E;\mathcal{G}) = 0$ gerçeklenir.

Dış ve iç toplamlar, bir-boyutlu Riemann integrali kurulurken tanımlanan alt- ve üst-toplamların çok-boyutlu benzerleridir. Bu benzerlik, aşağıdaki yardımcı sonuçların gösterdiği gibi, sadece tanımların genelleştirilmelerinden ibaret değildir.

Lemma 1.1.3. *R, n-boyutlu bir dikdörtgen ve $E \subseteq R$ olsun. R üzerindeki her $\mathcal{G}$ ağı için,*

$$V(E;\mathcal{G}) - v(E;\mathcal{G}) = V(\partial E;\mathcal{G})$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $R_j \in \mathcal{G}$ olsun. III/Açıklama 1.2.15'den, $\partial E = \overline{\partial E}$ olur; $R_j \cap \partial E \neq \varnothing$ olması, o hâlde, R_j ve $\overline{E}$ kümelerinin arakesitlerinin boş küme olmadığını, aynı zamanda da R_j kümesinin E° tarafından içerilmediğini gösterir. Diğer taraftan da, eğer R_j ile $\overline{E}$ kesişiyorsa, R_j kümesi E° tarafından içerilmiyorsa, ve aynı zamanda $R_j \cap \partial E = \varnothing$ oluyorsa, bu durumda $E^\circ, (\mathbb{R}^n \setminus E)^\circ$ açık kümeler çifti R_j

dikdörtgenini ayırır; yani, III/§1.4, Problem 1 nedeniyle dikdörtgenler bağlantılı olduğundan, bir çelişkiye ulaşılır. Böylece, $R_j \cap \partial E \neq \varnothing$ olması için, R_j ve $\overline{E}$ kümelerinin kesişmelerinin ve R_j kümesinin E° kümesinin bir alt-kümesi olmamasının gerekli ve yeterli olduğu görülür. Dolayısıyla, tanım gereğince,

$$V(\partial E;\mathcal{G}) = V(E;\mathcal{G}) - v(E;\mathcal{G})$$

eşitliği sağlanır. □

Lemma 1.1.4. *R, n-boyutlu bir dikdörtgen, $E \subseteq R$, ve R üzerinde iki ağ $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ olsun. Eğer $\mathcal{G}$ ağı $\mathcal{H}$ ağından daha ince ise,*

$$0 \leqslant v(E;\mathcal{H}) \leqslant v(E;\mathcal{G}) \leqslant V(E;\mathcal{G}) \leqslant V(E;\mathcal{H})$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Kanıt. $v(E;\mathcal{H})$ değeri ya sıfıra eşit ya da negatif-olmayan terimlerin bir toplamı olduğundan, her $\mathcal{H}$ ağı için $v(E;\mathcal{H}) \geqslant 0$ olduğu bârizdir.

Diğer taraftan, eğer $E^\circ = \varnothing$ ise, Açıklama 1.1.2 nedeniyle, gösterilmek istenen üçüncü eşitsizlik doğru olur; $E^\circ \neq \varnothing$ olması durumunda ise, $R_j \subseteq E^\circ$ içermesi $R_j \cap \overline{E} \neq \varnothing$ olmasını gerektirdiğinden, $V(E;\mathcal{G})$ değerini belirleyen toplam $v(E;\mathcal{G})$ değerini belirleyen toplamın tüm terimlerini içerir. Her durum için, o hâlde, $v(E;\mathcal{G}) \leqslant V(E;\mathcal{G})$ eşitsizliği sağlanır.

Kanıtı tamamlamak için, ikinci ve dördüncü eşitsizliklerin de doğru oldukları gösterilmelidir; ispatları benzer olduğundan, sadece dördüncü eşitsizlik kanıtlanacak ve ikinci eşitsizliğin gösterilmesi okuyucuya bırakılacaktır. $\mathcal{G}$ ağı $\mathcal{H}$ ağından daha ince olduğundan, her $Q \in \mathcal{H}$ dikdörtgeni $\mathcal{G}$ ağına ait R_j dikdörtgenlerinin bir sonlu birleşimidir. Eğer $Q \cap \overline{E} \neq \varnothing$ ise, R_j dikdörtgenlerinden bazıları $\overline{E}$ kümesini keser, ancak bazıları kesmeyebilir. Böylece,

$$\mathcal{I}_1 := \{R \in \mathcal{G} \mid R \cap \overline{E} \neq \varnothing\}$$

ve

$$\mathcal{I}_2 := \{R \in \mathcal{G} \smallsetminus \mathcal{I}_1 \mid Q \cap \overline{E} \neq \varnothing \text{ olan bir } Q \in \mathcal{H} \text{ için, } R \subseteq Q\}$$

denilerek, istenen

$$V(E;\mathcal{H}) = \sum_{R \in \mathcal{I}_1} |R| + \sum_{R \in \mathcal{I}_2} |R| \geqslant \sum_{R \in \mathcal{I}_1} |R| = V(E;\mathcal{G})$$

sonucuna ulaşılır. □

Lemma 1.1.5. *R, n-boyutlu bir dikdörtgen ve $E \subseteq R$ olsun. Eğer $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ aileleri R üzerinde iki ağ ise,*

$$0 \leqslant v(E;\mathcal{G}) \leqslant V(E;\mathcal{H}) \tag{1.1.2}$$

olur.

Kanıt. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ ağlarından daha ince olan, R üzerinde bir ağ $\mathcal{I}$ olsun$-$böyle bir ağ, örneğin, her $j = 1, \dots, n$ için $\mathcal{P}_j(\mathcal{I}) := \mathcal{P}_j(\mathcal{G}) \cup \mathcal{P}_j(\mathcal{H})$ alınarak elde edilebilir. Lemma 1.1.4'den, o hâlde,

$$0 \leqslant v(E;\mathcal{G}) \leqslant v(E;\mathcal{I}) \leqslant V(E;\mathcal{I}) \leqslant V(E;\mathcal{H})$$

gerçeklenir. □

Tanım 1.1.6. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve E kümesini içeren n-boyutlu bir dikdörtgen R olsun.

(i) E kümesinin ***iç hacmi***,

$$\underline{\mathrm{Vol}}\,(E) := \sup\{v(E;\mathcal{G}) \mid \mathcal{G} \text{ ailesi } R \text{ üzerinde bir ağ}\}$$

değeridir.

(ii) E kümesinin ***dış hacmi***,

$$\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) := \inf\{V(E;\mathcal{G}) \mid \mathcal{G} \text{ ailesi } R \text{ üzerinde bir ağ}\}$$

değeridir.

Açıklama 1.1.7. Tanım 1.1.6 ile verilen iç ve dış hacim, $\mathcal{G}$ ağları üzerinde alınan, R dikdörtgeninden bağımsızdır: Bunu görmek için, E kümesini içeren R ve Q dikdörtgenleri göz önüne alınsın. İki dikdörtgenin kesişimi yine bir dikdörtgen olduğundan, genelliği bozmaksızın, $E \subseteq Q \subseteq R$ olduğu varsayılabilir. İlk olarak, $\overline{E} \subseteq Q^\circ$ içermesinin de gerçeklendiği özel durum incelensin. R üzerinde keyfî bir ağ $\mathcal{G}$ olsun, ve $Q := [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n]$ olmak üzere R üzerinde $\mathcal{G}_0$ ağı, her $j = 1, \dots, n$ için $\mathcal{P}_j(\mathcal{G}_0) := \mathcal{P}_j(\mathcal{G}) \cup \{c_j, d_j\}$ alınarak tanımlansın. (R üzerinde bu şekilde oluşturulan $\mathcal{G}_0$ ağını, "Q dikdörtgeninin uç-noktalarını $\mathcal{G}$ ağına ekleyerek elde edilen ağ," olarak adlandıralım.) Bu durumda, $\mathcal{G}_0$ ağı $\mathcal{G}$ ağından daha ince ve $\mathcal{H}_0 := \mathcal{G}_0 \cap Q$ ailesi Q üzerinde bir ağ olur; $\overline{E} \subseteq Q^\circ \subseteq R^\circ$ olması $V(E;\mathcal{H}_0) = V(E;\mathcal{G}_0)$ eşitliğini gerektirdiğinden, o hâlde, Lemma 1.1.4 kullanılarak,

$$\inf_{Q \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) \leqslant V(E;\mathcal{H}_0) = V(E;\mathcal{G}_0) \leqslant V(E;\mathcal{G})$$

elde edilir. Bu son eşitsizliklerin R üzerindeki $\mathcal{G}$ ağları üzerinden infimumu alınarak da,

$$\inf_{Q \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) \leqslant \inf_{R \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G})$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ters yöndeki eşitsizliği elde etmek için, Q üzerinde keyfî bir $\mathcal{H}$ ağı göz önüne alınsın. $\mathcal{H}_0$, "R dikdörtgeninin uç-noktalarını $\mathcal{H}$ ağına ekleyerek elde edilen ağ" olsun. Bu durumda, $\overline{E} \subseteq Q^\circ \subseteq R^\circ$ içermelerinden dolayı

$$V(E;\mathcal{H}) = V(E;\mathcal{H}_0) \geqslant \inf_{R \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G})$$

sağlanır, ve bu son eşitsizliğin Q üzerindeki $\mathcal{H}$ ağları üzerinden infimumu alınarak

$$\inf_{Q \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) \geqslant \inf_{R \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G})$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece, $\overline{E} \subseteq Q^\circ \subseteq R^\circ$ olması durumunda

$$\inf_{Q \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) = \inf_{R \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G})$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi, $E \subseteq Q \subseteq R$ içermelerinin sağlandığı genel durum göz önüne alınsın. $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlensin ve Q^*, R^* dikdörtgenleri, $Q \subseteq (Q^*)^\circ \subseteq (R^*)^\circ$ içermeleri ve $|Q^*| = |Q| + \varepsilon$, $|R^*| = |R| + \varepsilon$ eşitlikleri sağlanacak biçimde alınsın. Böylece, $\overline{E} \subseteq Q \subseteq (Q^*)^\circ \subseteq (R^*)^\circ$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\inf_{Q \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) &\leqslant \inf_{Q^* \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) = \inf_{R^* \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G}) \\ &\leqslant \inf_{R \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G}) + \varepsilon,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\inf_{Q \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) + \varepsilon &\geqslant \inf_{Q^* \text{ üzerinde } \mathcal{H}} V(E;\mathcal{H}) = \inf_{R^* \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G}) \\ &\geqslant \inf_{R \text{ üzerinde } \mathcal{G}} V(E;\mathcal{G})\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Sonuç olarak, dış hacmin R dikdörtgeninden bağımsız olduğu görülmüş olur. Benzer argümanlarla, iç hacmin de R dikdörtgenine bağlı olmadığı sonucuna ulaşılır.

İç ve dış hacim kavramlarının iyi-tanımlı olmaları, aşağıdaki isimlendirmeleri anlamlı kılar.

Tanım 1.1.8. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) = \underline{\mathrm{Vol}}\,(E)$ ise, E kümesine bir ***Jordan bölgesi*** denir. Bu durumda $\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) = \underline{\mathrm{Vol}}\,(E)$ değeri *E kümesinin* ***hacmi*** (ya da, ***Jordan içeriği***) olarak adlandırılır, ve $\mathrm{Vol}\,(E)$ ile gösterilir.

Eğer $n = 1$ ise, $\mathrm{Vol}\,(E)$ değerine *E kümesinin* ***uzunluğu*** denir ve $\ell(E)$ olarak gösterilir; $n = 2$ olması durumunda ise, $\mathrm{Vol}\,(E)$ değeri *E kümesinin* ***alan*ı** olarak isimlendirilir ve $\mathrm{Alan}\,(E)$ ile gösterilir.

$\mathrm{Vol}\,(E) = 0$ özelliğini gerçekleyen bir E kümesine, ***sıfır-hacimli*** denir. Tanım 1.1.1 nedeniyle boş küme üzerinden alınan toplamlar sıfır kabul edildiğinden, o hâlde, $\underline{\mathrm{Vol}}\,(\varnothing) = \overline{\mathrm{Vol}}\,(\varnothing) = 0$ olur: yani, boş küme sıfır-hacimlidir.

Jordan bölgelerinden oluşan bir aile $\mathcal{E} := \{E_\ell \mid \ell \in \mathbb{N}\}$ olsun. Her $j \neq k$ için $E_j \cap E_k$ kümesi sıfır-hacimli ise $\mathcal{E}$ ailesinin "***örtüşmeyen*** kümelerden oluştuğu," her $j \neq k$ için $E_j \cap E_k = \varnothing$ olması durumunda ise $\mathcal{E}$ ailesinin "***ikişer-ikişer ayrık*** kümelerden oluştuğu," söylenir. Tanım gereğince, ikişer-ikişer ayrık kümelerden oluşan bir aile örtüşmeyen kümelerden oluşur; bu önermenin tersi ise, genel olarak doğru değildir (bkz. Problem 6).

Aşağıdaki basit gözlem, Jordan bölgelerini karakterize etmek için kullanılabilecek sonuçlardandır.

Lemma 1.1.9. *$\mathbb{R}^n$ uzayının her sınırlı E alt-kümesi için,* $0 \leqslant \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) \leqslant \overline{\mathrm{Vol}}\,(E)$ *sağlanır. Buna ek olarak, E kümesinin bir Jordan bölgesi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul,* $\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) \leqslant \underline{\mathrm{Vol}}\,(E)$ *eşitsizliğinin gerçeklenmesidir.*

Kanıt. Tanım 1.1.8 nedeniyle, kanıtı bitirmek için ilk cümlede verilen eşitsizlikleri göstermek yeterlidir. E kümesini içeren bir dikdörtgen R olsun, ve R üzerinde bir $\mathcal{H}$ ağı sabitlensin. R üzerinde tanımlı $\mathcal{G}$ ağları üzerinden (1.1.2) eşitsizliklerinin supremumu alınırsa, $0 \leqslant \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) \leqslant V(E;\mathcal{H})$ sonucuna ulaşılır; bu son eşitsizliklerin R üzerinde tanımlı $\mathcal{H}$ ağları üzerinden infimumlarına geçilerek de, istenen elde edilir. □

Şimdi de, dikdörtgenlere kısıtlandığında, yapılan hacim tanımının klâsik hacim kavramıyla uyuştuğunu göreceğiz.

Teorem 1.1.10. *Eğer R kümesi n-boyutlu bir dikdörtgen ise, R bir Jordan bölgesidir ve* $\mathrm{Vol}\,(R) = |R|$ *eşitliği sağlanır.*

Kanıt. Lemma 1.1.9'dan dolayı, istenenler, $\underline{\mathrm{Vol}}\,(R) \geqslant |R| \geqslant \overline{\mathrm{Vol}}\,(R)$ eşitsizlikleri gösterilirse elde edilmiş olur. Şimdi, $\mathcal{G} := \{R\}$ ailesi R üzerinde bir ağ olduğundan, tanım nedeniyle $|R| = V(R;\mathcal{G}) \geqslant \overline{\mathrm{Vol}}\,(R)$ gerçeklenir. Diğer taraftan, $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlenerek

$$R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

olduğu varsayılırsa, $\delta \to 0$ için $b_j - a_j - 2\delta \to b_j - a_j$ yakınsamasının her $j = 1, \dots, n$ için geçerli olduğu kullanılarak,

$$Q := [a_1 + \delta, b_1 - \delta] \times \cdots \times [a_n + \delta, b_n - \delta]$$

olarak alındığında $|R| - |Q| < \varepsilon$ sağlanacak biçimde yeterince küçük bir $\delta > 0$ sayısının seçilebileceği görülür. Her $j = 1, \dots, n$ için

$$\mathcal{P}_j(\mathcal{G}) := \{a_j, a_j + \delta, b_j - \delta, b_j\}$$

parçalanışı vâsıtasıyla elde edilen ağ $\mathcal{G}$ ile gösterilirse, o hâlde, $\mathcal{G}$ ağına ait olan ve R° tarafından kapsanan tek dikdörtgenin Q olduğu sonucuna ulaşılır; bu ise, tanım kullanıldığında,

$$\underline{\mathrm{Vol}}\,(R) \geqslant v(R; \mathcal{G}) = |Q| > |R| - \varepsilon,$$

yani $\underline{\mathrm{Vol}}\,(R) > |R| - \varepsilon$ olması demektir: bu son eşitsizliğin $\varepsilon \to 0$ için limiti alınarak da, $\underline{\mathrm{Vol}}\,(R) \geqslant |R|$ elde edilir ve kanıt tamamlanır. □

Lemma 1.1.11. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. E kümesinin sıfır-hacimli bir Jordan bölgesi olabilmesi için, $\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) = 0$ olması gerekli ve yeterlidir. Buna ek olarak, eğer E kümesi sıfır-hacimli bir Jordan bölgesi ve $E_0 \subseteq E$ ise, E_0 kümesi de sıfır-hacimli bir Jordan bölgesidir.*

Kanıt. Eğer $\mathrm{Vol}\,(E) = 0$ ise, Tanım 1.1.8 kullanılarak, $\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) = 0$ olduğu görülür. Tersine, eğer $\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) = 0$ ise, Lemma 1.1.9 ve Tanım 1.1.8'den dolayı, $\mathrm{Vol}\,(E) = \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) = \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) = 0$ olarak elde edilir.

Son olarak, E kümesi sıfır-hacimli bir Jordan bölgesi ve $E_0 \subseteq E$ olsun. Hipotez ve supremum tanımı kullanılırsa, $0 \leqslant \overline{\mathrm{Vol}}\,(E_0) \leqslant \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) = 0$ sonucuna ulaşılır; bu ise E_0 kümesinin, ilk ispatlanan önermeden dolayı, $\mathrm{Vol}\,(E_0) = 0$ koşulunu gerçekleyen bir Jordan bölgesi olması demektir. □

Açıklama 1.1.12. Lemma 1.1.11'den dolayı, sıfır-hacimli bir kümenin *her* altkümesi bir Jordan bölgesidir. Bu ifadedeki "sıfır-hacimli" olma koşulu kaldırılamaz: $\mathbb{R}^2$ içindeki $R := [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin Jordan bölgeleri olmayan alt-kümeleri vardır. Gerçekten,

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$$

olarak tanımlanırsa, $R_j \subseteq E$ koşulunu sağlayan hiçbir R_j dikdörtgeni var olmadığından, her $\mathcal{G}$ ağı için $v(E; \mathcal{G}) = 0$ olur; diğer taraftan, eğer R_j dikdörtgeni R tarafından içeriliyorsa, $R_j \cap E \neq \varnothing$ olur, yani $R_j \cap \overline{E} \neq \varnothing$ gerçeklenir.

Dolayısıyla, R üzerindeki her $\mathcal{G}$ ağı için $V(E;\mathcal{G}) = 1$ olduğu görülür; bu ise

$$\underline{\mathrm{Vol}}\,(E) = 0 < 1 = \overline{\mathrm{Vol}}\,(E)$$

olması anlamına gelir.

Aşağıdaki netice, sınırlı bir kümenin bir Jordan bölgesi olup olmadığını belirlemek için kullanılabilecek bir diğer yöntemi önerir.

Teorem 1.1.13. *Sınırlı bir $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir Jordan bölgesi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, ∂E kümesinin sıfır-hacimli olmasıdır.*

Kanıt. E kümesini içeren bir dikdörtgen R, ve R üzerinde bir ağ $\mathcal{G}$ olsun. Lemma 1.1.3 ve Tanım 1.1.6 nedeniyle,

$$V(\partial E;\mathcal{G}) = V(E;\mathcal{G}) - v(E;\mathcal{G}) \geqslant \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \underline{\mathrm{Vol}}\,(E)$$

olur; bu ise, tüm $\mathcal{G}$ ağları üzerinden infimum alındığında,

$$\overline{\mathrm{Vol}}\,(\partial E) \geqslant \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) \tag{1.1.3}$$

olması demektir. Öte yandan, $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlendiğinde,

$$\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) + \varepsilon > V(E;\mathcal{H}_1) \qquad \text{ve} \qquad \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \varepsilon < v(E;\mathcal{H}_2)$$

gerçeklenecek biçimde R üzerinde $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ ağları bulunur. Böylece, R üzerinde alınan ve $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ ağlarının her birinden daha ince olan bir ağ $\mathcal{G}$ ise, Lemma 1.1.4'den,

$$\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) + \varepsilon > V(E;\mathcal{G}) \qquad \text{ve} \qquad \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \varepsilon < v(E;\mathcal{G})$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlikler çıkarılıp Lemma 1.1.3 kullanılarak, o hâlde,

$$V(\partial E;\mathcal{G}) = V(E;\mathcal{G}) - v(E;\mathcal{G}) < \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) + 2\varepsilon$$

elde edilir, yani $\overline{\mathrm{Vol}}\,(\partial E) < \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \underline{\mathrm{Vol}}\,(E) + 2\varepsilon$ olur; bu ise, $\varepsilon \to 0$ için limit alındığında, $\overline{\mathrm{Vol}}\,(\partial E) \leq \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \underline{\mathrm{Vol}}\,(E)$ sonucuna ulaştırır. Bu son eşitsizlik, (1.1.3) ile birlikte, $\overline{\mathrm{Vol}}\,(\partial E) = \overline{\mathrm{Vol}}\,(E) - \underline{\mathrm{Vol}}\,(E)$ eşitliğini gerektirir. Dolayısıyla, Tanım 1.1.8 sebebiyle, E kümesinin bir Jordan bölgesi olabilmesi için $\overline{\mathrm{Vol}}\,(\partial E) = 0$ olmasının gerekli ve yeterli olduğu görülür: Lemma 1.1.11'den dolayı E kümesinin bir Jordan bölgesi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, o hâlde, ∂E kümesinin sıfır-hacimli bir Jordan bölgesi olmasıdır. □

Teorem 1.1.14. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. E kümesinin sıfır-hacimli olması için gerek ve yeter şart, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık aynı hacimli (yani, her birinin ayrıt uzunluğu aynı ve s olan) Q_k küplerinin sonlu bir $\{Q_k \mid k = 1, \ldots, p\}$ ailesinin*

$$\overline{E} \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} Q_k \qquad \textit{ve} \qquad \sum_{k=1}^{p} |Q_k| < \varepsilon$$

gerçeklenecek biçimde bulunmasıdır.

Kanıt. E kümesi sıfır-hacimli ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, $\mathrm{Vol}\,(E) = 0$ olduğundan, hacim tanımından dolayı bir $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_q\}$ ağı,

$$\overline{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^{q} R_j \qquad \text{ve} \qquad \sum_{j=1}^{q} |R_j| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde vardır. Eğer gerekiyorsa kenar uzunlukları yeterli miktarda artırılarak, genelliği bozmaksızın, R_j dikdörtgenlerinin her birinin kenar uzunluklarının rasyonel sayılar oldukları ve $\sum_{j=1}^{q} |R_j| < \varepsilon$ koşulunun sağlandığı varsayılabilir. (Bu şekilde elde edilen dikdörtgenlerin ailesinin artık örtüşmeyen kümelerden *oluşmayabileceği* göz önüne alınmalıdır.) Rasyonel sayılar olan R_j dikdörtgenlerinin kenar uzunlukları, o hâlde, ortak bir paydaya sahiptir$-$bu sayı d olsun. Böylece, yeterince ince bir ağ kullanılarak her R_j dikdörtgeninin, $\nu_j \in \mathbb{N}$ sayıları $k = 1, 2, \ldots, \nu_j$ için $Q_k^{(j)}$ küplerinin her birinin ayrıt uzunluğu $s := 1/d$ olacak şekilde seçilerek, $Q_k^{(j)}$ küplerine parçalanabileceği görülür. Bu ise, her $j = 1, \ldots, q$ için $|R_j| = \sum_{k=1}^{\nu_j} |Q_k^{(j)}|$ olduğundan, istenen

$$\sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{\nu_j} |Q_k^{(j)}| = \sum_{j=1}^{q} |R_j| < \varepsilon$$

sonucuna ulaştırır.

Tersine, verilen koşulu sağlayan Q_k küpleri bulunsun. Her $k = 1, \ldots, p$ için

$$Q_k := [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \cdots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$$

olsun, ve Q_k küplerinin birleşimlerini içeren bir R dikdörtgeni alınsın. Bu durumda, her $j = 1, 2, \ldots, n$ için, $\{a_j^{(1)}, b_j^{(1)}, \ldots, a_j^{(p)}, b_j^{(p)}\}$ uç noktaları, artan bir sırada, R dikdörtgeninin j'inci kenarının bir parçalanışı olacak biçimde dizilebilir: yani, her Q_k kübü R_j dikdörtgenlerinin bir birleşimi olacak şekilde, yeterince

ince bir $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_q\}$ ağı bulunur. Bu ise, hipotez nedeniyle her $\varepsilon > 0$ için $V(E;\mathcal{G}) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |Q_k| < \varepsilon$ sağlandığından, $\overline{\mathrm{Vol}}\,(E) < \varepsilon$ eşitsizliğinin her $\varepsilon > 0$ için gerçeklenmesi, yani $\mathrm{Vol}\,(E) = 0$ olması anlamına gelir: E kümesi, o hâlde, sıfır-hacimlidir. □

Sonuç 1.1.15. *Eğer E_1 ve E_2 kümeleri Jordan bölgeleri ise, $E_1 \cup E_2$ kümesi de bir Jordan bölgesidir, ve*

$$\mathrm{Vol}\,(E_1 \cup E_2) \leqslant \mathrm{Vol}\,(E_1) + \mathrm{Vol}\,(E_2)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Kanıt. E_1 ve E_2, Jordan bölgeleri olsun. Teorem 1.1.14'den, her biri sıfır-hacimli olan iki kümenin birleşimi de sıfır-hacimlidir; III/§1.2, Problem 7 (c) nedeniyle $\partial(E_1 \cup E_2) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2$ içermesi de sağlandığından, Teorem 1.1.13 kullanılarak, $E_1 \cup E_2$ kümesinin bir Jordan bölgesi olduğu görülür.

Şimdi, $E_1 \cup E_2$ kümesini içeren bir dikdörtgen üzerinde alınan bir ağ $\mathcal{G}$ olsun. Eğer bu ağa ait olan bir R_j dikdörtgeni $\overline{E_1 \cup E_2}$ kümesini kesiyorsa, bu dikdörtgen, $\overline{E_1}$ *veya* $\overline{E_2}$ kümesini keser; dolayısıyla, $V(E_1 \cup E_2;\mathcal{G})$ toplamındaki her terim $V(E_1;\mathcal{G})$ *veya* $V(E_2;\mathcal{G})$ toplamında bulunur. Böylece, ilgili her $\mathcal{G}$ ağı için,

$$\mathrm{Vol}\,(E_1 \cup E_2) \leqslant V(E_1 \cup E_2;\mathcal{G}) \leqslant V(E_1;\mathcal{G}) + V(E_2;\mathcal{G})$$

koşulunun sağlandığı görülür. Bu son eşitsizliğin $\mathcal{G}$ ağları üzerinden en büyük altsınırına geçilerek de, $\mathrm{Vol}\,(E_1 \cup E_2) \leqslant \mathrm{Vol}\,(E_1) + \mathrm{Vol}\,(E_2)$ eşitsizliğine ulaşılır. □

Bu kısımda son olarak, Jordan bölgelerinin fonksiyonlar altındaki görüntülerinin hangi koşullar altında yine Jordan bölgeleri olduklarını göreceğiz.

Teorem 1.1.16. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi, ve $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde bire-bir ve sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\overline{E} \subseteq V$ ise ve V üzerinde $\Delta_\phi \neq 0$ oluyorsa, o zaman $\phi(E)$ kümesi bir Jordan bölgesidir.*

Kanıt. III/Teorem 2.4.2'den $\phi(E^\circ)$ kümesi açık, ve III/Teorem 1.6.6'dan $\phi(\overline{E})$ kümesi kompakt, yani−Heine-Borel Teoremi'nden−kapalı olur; bunlar kullanılarak, III/Teorem 1.2.14 (ii) & (iii) nedeniyle, $\phi(E^\circ) \subseteq (\phi(E))^\circ$ ve $\phi(\overline{E}) \supseteq \overline{\phi(E)}$ içermelerinin sağlandığı görülür. Böylece, ϕ fonksiyonu da bire-bir olduğundan,

$$\partial(\phi(E)) = \overline{\phi(E)} \smallsetminus (\phi(E))^\circ \subseteq \phi(\overline{E}) \smallsetminus \phi(E^\circ) = \phi(\overline{E} \smallsetminus E^\circ) = \phi(\partial E)$$

elde edilir. Bu ise, Teorem 1.1.13 sebebiyle, $\phi(\partial E)$ kümesinin sıfır-hacimli olduğu gösterilirse kanıtın tamamlanacağı anlamına gelir.

Her $\mathbf{x} \in \overline{E}$ için, $\overline{B_r(\mathbf{x})} \subseteq V$ içermesi sağlanacak biçimde bir $r := r_{\mathbf{x}} > 0$ sayısı seçilsin. E kümesi sınırlı olduğundan, $\overline{E}$ kümesi kompakttır; bu nedenle, bir $N \in \mathbb{N}$ ve $j = 1, \ldots, N$ için, $\mathbf{x}_j \in \overline{E}$ noktaları ve $r_j := r_{\mathbf{x}_j}$ yarıçapları,

$$\overline{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{r_j}(\mathbf{x}_j) \subseteq H := \bigcup_{j=1}^{N} \overline{B_{r_j}(\mathbf{x}_j)}$$

olacak biçimde vardır: H kümesi, o hâlde, kompakttır, ve $\overline{E} \subseteq H^\circ \subseteq H \subseteq V$ olur.

Tanımından dolayı sınırlı olan bir dikdörtgen III/§1.4, Problem 1 nedeniyle aynı zamanda kompakt ve konveks olduğundan, III/Sonuç 2.3.4 nedeniyle (sadece H kümesine ve ϕ fonksiyonuna bağlı olan) bir $M > 0$ sabiti, H kümesinin içinde kalan her R dikdörtgeni için,

$$\|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})\| \leqslant M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{1.1.4}$$

eşitsizliği tüm $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R$ noktaları için gerçeklenecek biçimde vardır. Şimdi, $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlensin. ∂E kümesi sıfır-hacimli ve H° kümesinin kapalı bir alt-kümesi olduğundan, Teorem 1.1.14'den,

$$\partial E \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} Q_j \qquad \text{ve} \qquad \sum_{j=1}^{p} |Q_j| < \frac{\varepsilon}{M^n n^{n/2}} \tag{1.1.5}$$

olacak biçimde, her birinin ayrıt uzunluğu aynı ve s olan ve her $j = 1, \ldots, p$ için $Q_j \subseteq H$ koşulunu sağlayan $Q_1, \ldots, Q_p$ küpleri bulunur; bu ise, her $j = 1, \ldots, p$ için $|Q_j| = s^n$ olduğundan, (1.1.5) kullanıldığında,

$$s < \left(\frac{\varepsilon}{pM^n n^{n/2}}\right)^{1/n} = \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^{1/n} \cdot \frac{1}{M\sqrt{n}}$$

olması anlamına gelir.

Her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_j$ için $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leqslant s\sqrt{n}$ olduğundan, (1.1.4) nedeniyle her $\phi(Q_j)$ kümesi, ayrıt uzunluğu $(\varepsilon/p)^{1/n}$ değerinden kesin küçük olan bir R_j kübünün içinde kalır; dolayısıyla,

$$\phi(\partial E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} R_j \qquad \text{ve} \qquad \sum_{j=1}^{p} |R_j| < \varepsilon$$

özellikleri de sağlanır.

Son olarak, ∂E kümesi kompakt olduğundan, III/Teorem 1.6.6'dan $\overline{\phi(\partial E)}$ kümesinin de kompakt, yani kapalı olduğu da görülür. Sonuç itibariyle, $\overline{\phi(\partial E)}$ kümesinin küçük hacimli küplerle örtülebileceği kanıtlanmış olur. O hâlde, Teorem 1.1.14'den, $\phi(\partial E)$ kümesi sıfır-hacimlidir. $\square$

Problemler

1. $\mathbb{R}^n$ uzayının her sonlu alt-kümesinin sıfır-hacimli bir Jordan bölgesi olduğunu kanıtlayınız; 'sonlu' kelimesi 'sayılabilir' kelimesiyle değiştirilirse, aynı önermenin genel olarak doğru olmadığını gösteriniz.

2. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi olsun.
   (a) E° ve $\overline{E}$ kümelerinin Jordan bölgeleri olduklarını gösteriniz.
   (b) $\mathrm{Vol}\,(E^\circ) = \mathrm{Vol}\,(\overline{E}) = \mathrm{Vol}\,(E)$ olduğunu kanıtlayınız.
   (c) $\mathrm{Vol}\,(E) > 0$ olması için, $E^\circ \neq \varnothing$ olmasının gerekli ve yeterli olduğunu ispatlayınız.

3. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. E kümesinin bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ noktası kadar ***ötelenme**si*

$$\mathbf{x} + E := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \text{ bir } \mathbf{z} \in E \text{ için, } \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}\}$$

olarak; E kümesinin bir $\alpha > 0$ skaleri oranında ***genleştirilme**si* ise

$$\alpha E := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \text{ bir } \mathbf{z} \in E \text{ için, } \mathbf{y} = \alpha\mathbf{z}\}$$

olarak tanımlanır.
   (a) E kümesinin bir Jordan bölgesi olması için $\mathbf{x} + E$ kümesinin bir Jordan bölgesi olmasının gerekli ve yeterli olduğunu, ve bu durumda $\mathrm{Vol}\,(\mathbf{x} + E) = \mathrm{Vol}\,(E)$ eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.
   (b) E kümesinin bir Jordan bölgesi olması için αE kümesinin bir Jordan bölgesi olmasının gerekli ve yeterli olduğunu, ve bu durumda $\mathrm{Vol}\,(\alpha E) = \alpha^n \mathrm{Vol}\,(E)$ eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

4. E_1 ve E_2 kümeleri $\mathbb{R}^n$ içinde Jordan bölgeleri olsun.
   (a) Eğer $E_1 \subseteq E_2$ ise, $\mathrm{Vol}\,(E_1) \leqslant \mathrm{Vol}\,(E_2)$ olduğunu gösteriniz.
   (b) $E_1 \cap E_2$ ve $E_1 \setminus E_2$ kümelerinin Jordan bölgeleri olduklarını kanıtlayınız.
   (c) Eğer E_1 ve E_2 örtüşmeyen kümeler ise, $\mathrm{Vol}\,(E_1 \cup E_2) = \mathrm{Vol}\,(E_1) + \mathrm{Vol}\,(E_2)$ olduğunu gösteriniz.
   (d) Eğer $E_2 \subseteq E_1$ ise, $\mathrm{Vol}\,(E_1 \setminus E_2) = \mathrm{Vol}\,(E_1) - \mathrm{Vol}\,(E_2)$ eşitliğini kanıtlayınız.
   (e) $\mathrm{Vol}\,(E_1 \cup E_2) = \mathrm{Vol}\,(E_1) + \mathrm{Vol}\,(E_2) - \mathrm{Vol}\,(E_1 \cap E_2)$ olduğunu ispatlayınız.

5. (a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun. $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ kümesinin, $\mathbb{R}^2$ içinde, alanı sıfıra eşit olan bir Jordan bölgesi olduğunu kanıtlayınız.
   (b) (a) kısmındaki sonucun, 'sürekli' kelimesi 'integrallenebilir' ya da 'sınırlı' kelimesiyle değiştirildiğinde yine geçerli olup olmadığını belirleyiniz.

6. Her ağın, örtüşmeyen Jordan bölgelerinden oluşan bir aile olduğunu ispatlayınız.

7. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, ve $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olsun.

(a) Eğer E kümesi sıfır-hacimli ve $\overline{E} \subseteq V$ ise, $\phi(E)$ kümesinin sıfır-hacimli olduğunu ispatlayınız.

(b) Eğer ϕ fonksiyonu bire-bir, her $\mathbf{x} \in V$ için $\Delta_\phi(\mathbf{x}) \neq 0$, ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\overline{E_k} \subseteq V$ koşulunu sağlayan kümelerden oluşan $\{E_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ailesi örtüşmeyen Jordan bölgelerinden oluşuyor ise, $\{\phi(E_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ ailesinin örtüşmeyen Jordan bölgelerinden oluştuğunu kanıtlayınız.

8. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi sınırlı ise ve sonlu sayıda yığılma noktasına (bkz. III/Tanım 1.5.2 (i)) sahipse, E kümesinin bir Jordan bölgesi olduğunu ispatlayınız.

9. (a) Bir $B_r(\mathbf{a})$ açık topunun sınırının

$$\partial B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$$

ile verildiğini kanıtlayınız.

(b) Her $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ve her $r \geqslant 0$ için, $B_r(\mathbf{a})$ açık topunun bir Jordan bölgesi olduğunu gösteriniz.

10. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, E kümesinin bir örtülüşü (bkz. III/Tanım 1.3.13 (i)) olan sayılabilir bir $\{R_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ dikdörtgenler ailesi $\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, E kümesi ***sıfır-ölçülü*** olarak adlandırılır.

(a) Eğer $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi sıfır-hacimli ise, E kümesinin sıfır-ölçülü olduğunu kanıtlayınız.

(b) Eğer $E \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi sayılabilir ise, E kümesinin sıfır-ölçülü olduğunu gösteriniz.

(c) $\mathbb{R}^2$ içinde, sıfır-ölçülü fakat alanı sıfırdan farklı olan, hattâ bir Jordan bölgesi bile olmayan, bir E kümesinin var olduğunu kanıtlayınız.

1.2 Jordan bölgeleri üzerinde Riemann integrali

Bir-boyutlu durum ve bir önceki kısımda geliştirilen yapılar göz önüne alındığında, bir $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan bölgesi üzerinde tanımlı, gerçel-değerli bir f fonksiyonunun Riemann integralinin $\{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in E,\ 0 \leqslant t \leqslant f(\mathbf{x})\}$ kümesinin hacmi olması gerektiği; aynı zamanda da bu hacme, tabanları E üzerinde bir ağa ait olan ve 'yükseklikleri' $t = f(\mathbf{x})$ değerlerini yaklaşık olarak veren $(n+1)$-boyutlu dikdörtgenler kullanılarak ulaşılabileceği tahmin edilebilir. Bu kısmın amacı, bu tahminin doğru olduğunu göstermektir.

Tanım 1.2.1. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi, $f : E \to \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon, E kümesini kapsayan n-boyutlu bir dikdörtgen R, ve R dikdörtgeni üzerinde bir ağ $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_p\}$ olsun.

(i) Her $j = 1, \ldots, p$ için $M_j := \sup\limits_{\mathbf{x} \in R_j \cap E} f(\mathbf{x})$ olmak üzere,

$$U(f, \mathcal{G}) := \sum_{R_j \cap E \neq \varnothing} M_j |R_j|$$

değerine, f fonksiyonunun $\mathcal{G}$ ağına göre E üzerindeki ***üst toplam***ı denir.

(ii) Her $j = 1, \ldots, p$ için $m_j := \inf_{\mathbf{x} \in R_j \cap E} f(\mathbf{x})$ olmak üzere,

$$L(f, \mathcal{G}) := \sum_{R_j \cap E \neq \varnothing} m_j |R_j|$$

değerine, f fonksiyonunun $\mathcal{G}$ ağına göre E üzerindeki ***alt toplam***ı denir.

(iii) İnfimum ve supremumlar R üzerindeki tüm $\mathcal{G}$ ağları üzerinden alınmak koşuluyla,

$$(L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := (L) \int_E f\, dV := \sup_{\mathcal{G}} L(f, \mathcal{G})$$

ve

$$(U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := (U) \int_E f\, dV := \inf_{\mathcal{G}} U(f, \mathcal{G})$$

değerleri, sırasıyla, f fonksiyonunun E üzerindeki ***alt integral***i ve ***üst integral***i olarak adlandırılır.

(iv) Eğer

$$(L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = (U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{1.2.1}$$

ise, f fonksiyonuna E üzerinde "***(Riemann) integrallenebilir***dir," denir; bu durumda (1.2.1) ile verilen ortak değer f fonksiyonunun E üzerindeki ***(Riemann) integral***i olarak adlandırılır ve

$$\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad \text{veya} \qquad \int_E f\, dV$$

sembolleriyle gösterilir. $n = 2$ ve $n = 3$ olduğunda $\int_E f\, dV$ integrali için, sırasıyla,

$$\iint_E f\, dA \qquad \text{ve} \qquad \iiint_E f\, dV$$

gösterilimleri de kullanılır.

Açıklama 1.2.2. Her $j = 1, \ldots, p$ için $m_j \leqslant M_j$ olduğundan, her sınırlı f fonksiyonu ve her $\mathcal{G}$ ağı için $L(f, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{G})$ olur.

Açıklama 1.2.3. R dikdörtgeni üzerindeki iki ağ $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$, ve $\mathcal{G}$ ağı $\mathcal{H}$ ağından daha ince ise,

$$L(f, \mathcal{H}) \leqslant L(f, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{H})$$

sağlanır: Gerçekten, daha ince olan $\mathcal{G}$ ağı $\mathcal{H}$ ağına her seferinde bir dikdörtgen eklenerek sonlu sayıda adımda elde edilebileceğinden, Açıklama 1.2.2 ve durumun simetrisi nedeniyle, $U(f, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{H})$ eşitsizliğini n-boyutlu bir P dikdörtgeni için $\mathcal{G} := \{P\} \cup \mathcal{H}$ özel durumunda göstermek yeterlidir; aynı zamanda, genelliği bozmaksızın, $P \notin \mathcal{H}$ olduğu da varsayılabilir. O hâlde, ayrık P ve $R_{j_0} \setminus P$ dikdörtgenlerinin birleşimi olan bir R_{j_0} dikdörtgeni P dikdörtgenini içereceğinden,

$$M^* := \sup_{\mathbf{x} \in (R_{j_0} \setminus P) \cap E} f(\mathbf{x}), \quad M_* := \sup_{\mathbf{x} \in P \cap E} f(\mathbf{x}), \quad \text{ve} \quad M := \sup_{\mathbf{x} \in R_{j_0} \cap E} f(\mathbf{x})$$

olmak üzere, Teorem 1.1.10 ve §1.1, Problem 4 (c) kullanılarak,

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{G}) - U(f, \mathcal{H}) &= M^* |R_{j_0} \setminus P| + M_* |P| - M |R_{j_0}| \\ &\leqslant M |R_{j_0} \setminus P| + M |P| - M |R_{j_0}| = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 1.2.4. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi, $f : E \to \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon, ve E kümesini kapsayan n-boyutlu bir dikdörtgen R olsun.*

(i) *R üzerindeki her $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ ağı için,*

$$L(f, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{H})$$

olur.

(ii) *f fonksiyonunun E üzerindeki alt ve üst integralleri vardır, değerleri R dikdörtgenine bağlı değildir, ve*

$$(L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant (U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

Kanıt. Her $j = 1, \ldots, n$ için $\mathcal{P}_j(\mathcal{I}) := \mathcal{P}_j(\mathcal{G}) \cup \mathcal{P}_j(\mathcal{H})$ alınarak kurulan $\mathcal{I}$ ağı $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ ağlarının her birinden daha ince olduğundan, Açıklama 1.2.3'den,

$$L(f, \mathcal{G}) \leqslant L(f, \mathcal{I}) \leqslant U(f, \mathcal{I}) \leqslant U(f, \mathcal{H})$$

sağlanır, yani (i) doğru olur. Diğer taraftan, (i) nedeniyle R üzerindeki her $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ ağı için $L(f, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{H})$ olduğundan, bu eşitsizliğin R üzerindeki tüm $\mathcal{G}$ ağları üzerinden supremumu alınarak

$$(L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant U(f, \mathcal{H})$$

elde edilir; yani, f fonksiyonunun E üzerindeki alt integrali vardır ve sonludur. Bu son eşitsizliğin R üzerindeki tüm $\mathcal{H}$ ağları üzerinden infimumu alınarak da, hem f fonksiyonunun E üzerindeki üst integralinin de var ve ilgili alt integralden büyük ya da eşit olduğu, hem de bu integralin R dikdörtgenine bağlı olmadığı elde edilir—böylece (ii) de kanıtlanmış olur. □

Teorem 1.2.5. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon olsun. f fonksiyonunun E üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart, her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{G}$ ağının*

$$U(f, \mathcal{G}) - L(f, \mathcal{G}) < \varepsilon \tag{1.2.2}$$

olacak biçimde var olmasıdır.

Kanıt. f fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olsun, ve $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlensin. Bu durumda, tanım gereğince, E kümesini kapsayan ve keyfî olarak sabitlenen bir R dikdörtgeni üzerinde $\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}_2$ ağları,

$$U(f, \mathcal{G}_1) < (U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$L(f, \mathcal{G}_2) > (L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde bulunur. Her $j = 1, \ldots, n$ için $\mathcal{P}_j(\mathcal{G}) := \mathcal{P}_j(\mathcal{G}_1) \cup \mathcal{P}_j(\mathcal{G}_2)$ denilerek $\mathcal{G}$ ağının $\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}_2$ ağlarının her birinden daha ince olduğu göz önüne alınırsa, Açıklama 1.2.3 ve (1.2.1) kullanılarak,

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{G}) - L(f, \mathcal{G}) &\leqslant U(f, \mathcal{G}_1) - L(f, \mathcal{G}_2) \\ &< (U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2} - (L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir—yani, (1.2.2) eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için sağlanır.

Tersine, her $\varepsilon > 0$ için bir $\mathcal{G}$ ağı, (1.2.2) sağlanacak biçimde var olsun. Tanım 1.2.1 (iii) nedeniyle $(U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant U(f, \mathcal{G})$ ve $(L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geqslant L(f, \mathcal{G})$ olduğundan, Lemma 1.2.4 (ii) ve (1.2.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \left| (U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - (L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| &= (U) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - (L) \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &\leqslant U(f, \mathcal{G}) - L(f, \mathcal{G}) < \varepsilon \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır; bu ise, her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan, (1.2.1) eşitliğini gerektirir: f fonksiyonu, o hâlde, E üzerinde integrallenebilirdir. □

Teorem 1.2.6. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi ve $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde düzgün sürekli[1] ise, f fonksiyonu E üzerinde integrallenebilirdir.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ ve E kümesini içeren bir dikdörtgen R olsun. f fonksiyonu E üzerinde düzgün sürekli olduğundan bir $\delta > 0$ sayısı, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ ve $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ olması $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/|R|$ olmasını gerektirecek biçimde vardır. R üzerinde bir $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_p\}$ ağı, her $j = 1, \ldots, p$ için, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_j$ olduğunda $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ eşitsizliği gerçeklenecek incelikte alınsın. Böylece, Tanım 1.2.1 (i) ve (ii)'de kullanılan M_j ve m_j değerleri $R_j \cap E \neq \varnothing$ olan her j için $M_j - m_j \leqslant \varepsilon/|R|$ koşulunu sağladıklarından,

$$U(f, \mathcal{G}) - L(f, \mathcal{G}) \leqslant \frac{\varepsilon}{|R|} \sum_{R_j \cap E \neq \varnothing} |R_j| \leqslant \varepsilon$$

elde edilmiş olur; bu ise, Teorem 1.2.5'den, f fonksiyonunun E üzerinde integrallenebilir olması demektir. □

Teorem 1.2.6'nın kullanışlı bir sonucu, bir Jordan bölgesinin hacminin integrasyon yoluyla hesaplanabilir olduğudur.

Sonuç 1.2.7. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi ise,*

$$\operatorname{Vol}(E) = \int_E \mathbf{1}\, d\mathbf{x}$$

olur.

Kanıt. Teorem 1.2.6 nedeniyle, $f \equiv \mathbf{1}$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilirdir. $E \subseteq R$ koşulunu sağlayan bir dikdörtgen R, ve R dikdörtgeni üzerinde bir ağ $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_p\}$ olsun. Eğer E° boş küme değilse, $R_j \subseteq E^\circ$ olması $R_j \cap E \neq \varnothing$ olmasını, $R_j \cap E \neq \varnothing$ olması ise $R_j \cap \overline{E} \neq \varnothing$ olmasını gerektirir; yani,

$$v(E; \mathcal{G}) \leqslant L(\mathbf{1}, \mathcal{G}) \leqslant U(\mathbf{1}, \mathcal{G}) \leqslant V(E; \mathcal{G})$$

eşitsizlikleri her $\mathcal{G}$ ağı için doğru olur. Boş küme üzerinden alınan toplam sıfır kabul edildiğinden, ilgili eşitsizlikler $E^\circ = \varnothing$ durumunda da sağlanır. O hâlde,

$$\operatorname{Vol}(E) = \sup_{\mathcal{G}} v(E; \mathcal{G}) \leqslant \int_E \mathbf{1}\, d\mathbf{x} \leqslant \inf_{\mathcal{G}} V(E; \mathcal{G}) = \operatorname{Vol}(E)$$

gerçeklenir. □

[1] Bkz. III/Tanım 1.6.11.

Bir-boyutlu durumdakine benzer biçimde, integral lineer bir fonksiyondur.

Teorem 1.2.8. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi, $f, g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar, ve α bir skaler olsun.*

(i) *Eğer f ve g fonksiyonları E üzerinde integrallenebilir ise, αf ve $f+g$ fonksiyonları da E üzerinde integrallenebilirdir, ve*

$$\int_E \alpha f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \alpha \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{1.2.3}$$

ve

$$\int_E (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{1.2.4}$$

eşitlikleri sağlanır.

(ii) *Eğer E tarafından kapsanan E_1 ve E_2 kümeleri örtüşmeyen iki Jordan bölgesi ve f fonksiyonu E_1 ve E_2 üzerinde integrallenebilir ise, f fonksiyonu $E_1 \cup E_2$ üzerinde integrallenebilirdir, ve*

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{E_1} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{1.2.5}$$

olur.

Kanıt. $\alpha = 0$ olması durumunda (1.2.3) eşitliği bâriz olduğundan ve $\alpha < 0$ iken aynı eşitlik $-\alpha$ sayısı ve pozitif işaretli durum göz önüne alınarak elde edilebileceğinden, $\alpha > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlensin ve buna istinâden bir $\mathcal{G}$ ağı,

$$U(f, \mathcal{G}) - \varepsilon < \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(f, \mathcal{G}) + \varepsilon \tag{1.2.6}$$

eşitsizlikleri gerçeklenecek biçimde alınsın. Bu durumda, $U(\alpha f, \mathcal{G}) = \alpha U(f, \mathcal{G})$ ve $L(\alpha f, \mathcal{G}) = \alpha L(f, \mathcal{G})$ olduğu gözlemlenerek (1.2.6) eşitsizlikleri α ile çarpılırsa,

$$U(\alpha f, \mathcal{G}) - \alpha\varepsilon < \alpha \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(\alpha f, \mathcal{G}) + \alpha\varepsilon$$

elde edilir; yani,

$$\inf_{\mathcal{G}} U(\alpha f, \mathcal{G}) < \alpha \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \alpha\varepsilon$$

ve

$$\sup_{\mathcal{G}} L(\alpha f, \mathcal{G}) > \alpha \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \alpha\varepsilon$$

olur. Son iki eşitsizliğin $\varepsilon \to 0$ için limiti alınarak da,

$$\inf_{\mathcal{G}} U(\alpha f, \mathcal{G}) \leqslant \alpha \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \sup_{\mathcal{G}} L(\alpha f, \mathcal{G}),$$

yani

$$(U) \int_E \alpha f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \alpha \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant (L) \int_E \alpha f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

sonucuna ulaşılır: Lemma 1.2.4 (ii)'den, o hâlde, (1.2.3) sağlanır.

(1.2.4) eşitliğini görmek için, $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlenerek bir $\mathcal{G}$ ağı,

$$U(f, \mathcal{G}) - \varepsilon < \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(f, \mathcal{G}) + \varepsilon$$

ve

$$U(g, \mathcal{G}) - \varepsilon < \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(g, \mathcal{G}) + \varepsilon$$

sağlanacak biçimde alınsın. Bu eşitsizlikler toplanarak,

$$U(f, \mathcal{G}) + U(g, \mathcal{G}) - 2\varepsilon < \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(f, \mathcal{G}) + L(g, \mathcal{G}) + 2\varepsilon$$

elde edilir; diğer taraftan, tanım nedeniyle $U(f+g, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{G}) + U(g, \mathcal{G})$ ve $L(f+g, \mathcal{G}) \geqslant L(f, \mathcal{G}) + L(g, \mathcal{G})$ eşitsizlikleri sağlandığından,

$$U(f+g, \mathcal{G}) - 2\varepsilon < \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(f+g, \mathcal{G}) + 2\varepsilon$$

olur. Bu son eşitsizliklerde $\mathcal{G}$ ağları üzerinden infimum ve supremum, ve sonra $\varepsilon \to 0$ için limit alınarak da

$$\inf_{\mathcal{G}} U(f+g, \mathcal{G}) \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \sup_{\mathcal{G}} L(f+g, \mathcal{G}),$$

yani

$$(U) \int_E (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant (L) \int_E (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$$

sonucuna ulaşılır: yine Lemma 1.2.4 (ii)'den, o hâlde, (1.2.4) sağlanır. Böylece (i) kanıtlanmış olur.

(ii) ile verilen (1.2.5) eşitliğini elde etmek için, $\Omega := \partial E_1 \cup \partial E_2 \cup (E_1 \cap E_2)$ denilsin ve III/§1.2, Problem 7 (c), Teorem 1.1.13, Sonuç 1.1.15, ve Lemma

1.1.11'in ikinci kısmı hipotezle birlikte kullanılarak, $\mathrm{Vol}\,(\Omega) = 0$ olduğu gözlemlensin. Diğer taraftan, $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlenerek $i = 1, 2, 3$ için $\mathcal{G}_i$ ağları; $i = 1, 2$ için

$$U(f, \mathcal{G}_i) - \varepsilon < \int_{E_i} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(f, \mathcal{G}_i) + \varepsilon, \tag{1.2.7}$$

ve

$$V(\Omega; \mathcal{G}_3) < \varepsilon \tag{1.2.8}$$

gerçeklenecek biçimde alınsın. $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ve $\mathcal{G}_3$ ağlarının her birinden daha ince bir ağ $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_p\}$; ve her $j = 1, \ldots, p$ için

$$M_j := \sup_{\mathbf{x} \in R_j \cap (E_1 \cup E_2)} f(\mathbf{x})$$

olmak üzere,

$$M := \max_{1 \leqslant j \leqslant p} |M_j|$$

olsun. Son olarak, $\mathcal{I}_1 := \{j \mid R_j \subseteq E_1\}$, $\mathcal{I}_2 := \{j \mid R_j \subseteq E_2\}$, ve

$$\mathcal{I}_3 := \{j \notin \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \mid R_j \cap (E_1 \cup E_2) \neq \varnothing\}$$

olarak tanımlansın. Şimdi, eğer $j \in \mathcal{I}_3$ ve $R_j \cap (E_1 \cap E_2) = \varnothing$ ise, bu durumda $R_j \cap \partial E_1 \neq \varnothing$ veya $R_j \cap \partial E_2 \neq \varnothing$ olur; dolayısıyla,

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_3} M_j |R_j| \leqslant M\, V(\Omega; \mathcal{G}) \tag{1.2.9}$$

sağlanır. $\mathcal{G}$ ağı, her $i = 1, 2, 3$ için, $\mathcal{G}_i$ ağından daha ince olduğundan da, (1.2.7), (1.2.8), ve (1.2.9) kullanılarak,

$$\begin{aligned} U(f, \mathcal{G}) &= \sum_{j \in \mathcal{I}_1} M_j |R_j| + \sum_{j \in \mathcal{I}_2} M_j |R_j| + \sum_{j \in \mathcal{I}_3} M_j |R_j| \\ &\leqslant U(f, \mathcal{G}_1) + U(f, \mathcal{G}_2) + M\, V(\Omega; \mathcal{G}) \\ &< \int_{E_1} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + (2 + M)\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir; bu ise, $\mathcal{G}$ ağları üzerinden infimum ve sonra $\varepsilon \to 0$ için limit alındığında

$$\inf_{\mathcal{G}} U(f, \mathcal{G}) \leqslant \int_{E_1} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

yani

$$(U)\int_{E_1\cup E_2} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \int_{E_1} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

sonucuna ulaştırır. Benzer argümanlar kullanılarak,

$$(L)\int_{E_1\cup E_2} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqslant \int_{E_1} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

olduğu da görülür. (1.2.5) eşitliği, o hâlde, Lemma 1.2.4 (ii)'den dolayı sağlanır. Böylece (ii) de kanıtlanmış olur. □

Riemann integralinin önemli bir özelliği, integrand sıfır-hacimli bir küme üzerinde değiştiğinde aynı kalmasıdır.

Sonuç 1.2.9. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi ve $g : E \to \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon olsun.*

(i) *Eğer $E_0 \subseteq E$ kümesi sıfır-hacimli ise, g fonksiyonu E_0 üzerinde integrallenebilirdir ve*

$$\int_{E_0} g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$$

olur.

(ii) *Eğer $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir ve*

$$E_0 := \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\}$$

kümesi sıfır-hacimli bir Jordan bölgesi ise, g fonksiyonu E üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. (i) $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlensin ve $M := \sup_{\mathbf{x}\in E_0} |g(\mathbf{x})|$ olsun. E_0 kümesi sıfır-hacimli olduğundan, $V(E_0;\mathcal{G}) < \varepsilon/M$ olacak biçimde bir $\mathcal{G}$ ağı vardır. Dolayısıyla,

$$-\varepsilon < -M\,V(E_0;\mathcal{G}) \leqslant U(g,\mathcal{G}) \leqslant M\,V(E_0;\mathcal{G}) < \varepsilon,$$

yani $(U)\int_{E_0} g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ olur. Benzer argümanlar, $(L)\int_{E_0} g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ eşitliğinin de gerçeklendiğini gösterir. g fonksiyonu, o hâlde, E_0 üzerinde integrallenebilen ve $\int_{E_0} g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ olan bir fonksiyondur.

(ii) İlk kısımdan dolayı, g fonksiyonu E_0 üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_{E_0} g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{E_0} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

eşitliği sağlanır; diğer taraftan $E \smallsetminus E_0$ üzerinde $g \equiv f$ olduğundan, g fonksiyonu $E \smallsetminus E_0$ üzerinde de integrallenebilirdir. Teorem 1.2.8 (ii) kullanılarak, o hâlde, g fonksiyonunun E üzerinde integrallenebilir olduğu ve

$$\begin{aligned}\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_{E\smallsetminus E_0} g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{E_0} g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\\ &= \int_{E\smallsetminus E_0} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{E_0} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. □

Açıklama 1.2.10. Sonuç 1.2.9'dan dolayı f fonksiyonunun, E kümesinin tamâmı üzerinde tanımlı olmadığı durumlarda da E üzerindeki integrali tanımlanabilir: E bir Jordan bölgesi ve E_0 kümesi sıfır-hacimli olmak üzere, eğer f fonksiyonu $E \smallsetminus E_0$ üzerinde tanımlı ve

$$g(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in E \smallsetminus E_0 \text{ ise;}\\ 0, & \mathbf{x} \in E_0 \text{ ise;}\end{cases}$$

fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir ise,

$$\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} := \int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

olarak tanımlanır. Bu nedenle, örneğin, §1.1, Problem 1 sebebiyle her sonlu küme sıfır-hacimli olduğundan,

$$\int_0^2 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx = \int_0^2 (x+1)\,dx = 4$$

olur. Dolayısıyla, "$f : E \to \mathbb{R}$ integrallenebilirdir," ifadesinin f fonksiyonunun E kümesinin sıfır-hacimli bir alt-kümesi üzerinde tanımlı *olmayabileceği* ihtimâlini içerdiği gözden kaçırılmamalıdır.

Teorem 1.2.11 (İntegraller İçin Karşılaştırma Teoremi)**.** *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi ve $f, g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları E üzerinde integrallenebilir olsun.*

(i) *Her* $\mathbf{x} \in E$ *için* $f(\mathbf{x}) \leqslant g(\mathbf{x})$ *ise,*

$$\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

olur.

(ii) *Eğer* m *ve* M*, her* $\mathbf{x} \in E$ *için* $m \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant M$ *koşulunu sağlayan iki skaler ise, bu durumda*

$$m \ \mathrm{Vol}\,(E) \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant M \ \mathrm{Vol}\,(E)$$

eşitsizlikleri gerçeklenir.

(iii) $|f|$ *fonksiyonu* E *üzerinde integrallenebilirdir, ve*

$$\left| \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \leqslant \int_E |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \tag{1.2.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. (i) Eğer E üzerinde $f \leqslant g$ ise, her $\mathcal{G}$ ağı için $L(f, \mathcal{G}) \leqslant L(g, \mathcal{G})$ olur; bu son eşitsizliğin $\mathcal{G}$ ağları üzerinden supremumu alınarak da, istenen elde edilir.

(ii) Sonuç 1.2.7, (1.2.3) eşitliği, ve ilk kısımdaki netice kullanılarak,

$$m \ \mathrm{Vol}\,(E) = \int_E m\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E M\, d\mathbf{x} = M \ \mathrm{Vol}\,(E)$$

olduğu görülür.

(iii) $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlenerek bir $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_p\}$ ağı,

$$U(f, \mathcal{G}) - \varepsilon < \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(f, \mathcal{G}) + \varepsilon,$$

yani

$$U(f, \mathcal{G}) - L(f, \mathcal{G}) < 2\varepsilon \tag{1.2.11}$$

olacak biçimde seçilsin. Bu durumda,

$$\sup_{\mathbf{x} \in R_j \cap E} |f(\mathbf{x})| - \inf_{\mathbf{x} \in R_j \cap E} |f(\mathbf{x})| \leqslant \sup_{\mathbf{x} \in R_j \cap E} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in R_j \cap E} f(\mathbf{x})$$

olduğundan, (1.2.11)'den dolayı

$$U(|f|, \mathcal{G}) - L(|f|, \mathcal{G}) \leqslant U(f, \mathcal{G}) - L(f, \mathcal{G}) < 2\varepsilon$$

gerçeklenir: yani, $|f|$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilirdir. Diğer taraftan da, $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sağlandığından, ilk kısımdaki sonuç kullanılarak

$$-\int_E |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \int_E |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x},$$

yani (1.2.10) elde edilir. □

Teorem 1.2.12 (İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi). *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi, $f, g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları E üzerinde integrallenebilir, ve her $\mathbf{x} \in E$ için $g(\mathbf{x}) \geqslant 0$ olsun.*

(i)
$$\inf_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x}) \leqslant c \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x}) \tag{1.2.12}$$

koşulunu sağlayan bir c sayısı,

$$c\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.2.13}$$

eşitliği sağlanacak biçimde vardır.

(ii) *(1.2.12) koşulunu sağlayan bir c sayısı,*

$$c\,\mathrm{Vol}\,(E) = \int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

eşitliği sağlanacak biçimde vardır.

Kanıt. (i) Hipotezden dolayı, fg fonksiyonu E üzerinde integrallenebilirdir (bkz. Problem 3). $m := \inf_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$ ve $M := \sup_{\mathbf{x}\in E} f(\mathbf{x})$ olsun. E üzerinde $g \geqslant \mathbf{0}$ olduğundan, Teorem 1.2.11 (i) kullanılarak,

$$m\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant \int_E f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leqslant M\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.2.14}$$

olduğu görülür. Eğer $\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ ise, (1.2.14)'den $\int_E f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ olur ve (1.2.13) eşitliği her c sayısı için gerçeklenir; $\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \neq 0$ olması durumunda ise, (1.2.13) eşitliği

$$c := \frac{\int_E f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}}{\int_E g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}}$$

için sağlanır.

(ii) İlk kısımda elde edilen sonuç $g \equiv \mathbf{1}$ fonksiyonuna uygulanarak elde edilir. □

Problemler

1. $f(x,y) := xy$ fonksiyonunun, her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{P}_j(\mathcal{G}_m) := \{k/2^m \mid k = 0, 1, \ldots, 2^m\}$$

parçalanışları tarafından $j = 1, 2$ için üretilen $\mathcal{G}_m$ ağına göre $[0,1] \times [0,1]$ karesi üzerindeki alt ve üst toplamlarını hesaplayınız; bunları kullanarak,

$$\lim_{m\to\infty} (U(f, \mathcal{G}_m) - L(f, \mathcal{G}_m)) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

2. (a) D ve E kümeleri $\mathbb{R}^n$ içinde Jordan bölgeleri, ve $D \subseteq E$ olsun. Eğer $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir ise, f fonksiyonunun D üzerinde integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

(b) Eğer $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli ise, f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ içindeki her Jordan bölgesi üzerinde integrallenebilir olduğunu ispatlayınız.

3. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi ve $f, g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları E üzerinde integrallenebilir olsun.

(a) fg fonksiyonunun E üzerinde integrallenebilir olduğunu kanıtlayınız.

(b) Her $\mathbf{x} \in E$ için

$$(f \vee g)(\mathbf{x}) := \max\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\} \qquad \text{ve} \qquad (f \wedge g)(\mathbf{x}) := \min\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\}$$

olarak tanımlanan $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonlarının E üzerinde integrallenebilir olduklarını ispatlayınız.

4. (a) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi, E üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon $f : E \to \mathbb{R}$, ve her $k \in \mathbb{N}$ için E üzerinde integrallenebilir $f_k : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarından oluşan bir dizi $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olsun. Eğer $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna E üzerinde düzgün yakınsıyorsa (bkz. III/§1.6, Problem 9 (b)),

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

olduğunu ispatlayınız.

(b) $\mathbb{R}^2$ içindeki her E Jordan bölgesi için

$$\lim_{k\to\infty} \iint_E \cos(x/k) e^{y/k}\, dA$$

limitinin var olduğunu gösteriniz, ve bu limit değerini hesaplayınız.

5. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık Jordan bölgesi ve $\mathbf{x}_0 \in E$ olsun. Eğer $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir ve $\mathbf{x}_0$ noktasında sürekli ise,

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B_r(\mathbf{x}_0))} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)$$

olduğunu gösteriniz.

6. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık Jordan bölgesi, $f, g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar, ve $\mathbf{x}_0 \in E$ olsun. f ve g fonksiyonlarının E üzerinde integrallenebilir oldukları ve g fonksiyonunun $\mathbf{x}_0$ noktasında sürekli olduğu varsayılsın. Bu koşullar altında

$$I := \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B_r(\mathbf{x}_0))} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

limitinin var olması için

$$J := \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B_r(\mathbf{x}_0))} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

limitinin var olmasının gerekli ve yeterli olduğunu, ve bu durumda $J = g(\mathbf{x}_0) I$ eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

7. $\mathbb{R}^n$ içinde kompakt ve bağlantılı olan bir Jordan bölgesi H, ve H üzerinde sürekli bir fonksiyon $f : H \to \mathbb{R}$ olsun.

(a) Eğer $g : H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu H üzerinde integrallenebilir ise ve negatif değerler almıyorsa, bir $\mathbf{x}_0 \in H$ noktasının

$$f(\mathbf{x}_0) \int_H g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_H f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

olacak biçimde var olduğunu kanıtlayınız.

(b) Eğer $H^\circ \neq \varnothing$ ise,

$$\int_H f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)\, \mathrm{Vol}\,(H)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $\mathbf{x}_0 \in H^\circ$ noktasının var olduğunu ispatlayınız.

8. $H \subseteq \mathbb{R}^n$ bir kompakt Jordan bölgesi, $H_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ sıfır-hacimli bir Jordan bölgesi, ve sınırlı bir $f : H \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $H \setminus H_0$ üzerinde sürekli ise, f fonksiyonunun H üzerinde integrallenebilir olduğunu ispatlayınız.

9. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $f : V \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer V kümesinin içerdiği her E Jordan bölgesi için $\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$ ise, V üzerinde $f \equiv \mathbf{0}$ olduğunu kanıtlayınız.

10. (Lebesgue Teoremi). $E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon olsun. f fonksiyonunun E üzerinde integrallenebilir olması için, bu fonksiyonun E üzerindeki süreksizlik noktalarından oluşan kümenin sıfır-ölçülü (bkz. §1.1., Problem 10) olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.

1.3 Ardışık integraller

§1.2 kısmında çok-değişkenli fonksiyonlar için tanımlanan Riemann integrali, pek çok Jordan bölgesi üzerinde, kısmî integraller (bkz. III/§2.1) kullanılarak hesaplanabilir. Katlı integralleri hesaplamanın en kullanışlı yollarından biri olan bu metod, bu kısımda incelenecektir.

$j, k \in \{1, \ldots, n\}$ ve $j \neq k$ olmak üzere, eğer $f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ fonksiyonu $x_k \in [c, d]$ ve $x_j \in [a, b]$ olduğunda tanımlanmış ise,

$$\int_c^d \int_a^b f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_j dx_k := \int_c^d \left(\int_a^b f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_j \right) dx_k$$

değerine−eşitliğin sağ yanındaki integraller var oldukça−, bir ***ardışık integral*** denir. Yüksek-mertebeli ardışık integraller benzer biçimde tanımlanır.

Sâdelik açısından, ilk olarak iki-boyutlu durum ele alınacaktır: Tanım 1.2.1 (iii) $n = 1$ durumunda işletilerek $(L) \int_a^b \phi(x)\, dx$ ve $(U) \int_a^b \phi(x)\, dx$ simgelerinin, bir $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki, sırasıyla, alt ve üst integrallerini gösterdikleri hatırlanmalıdır.

Lemma 1.3.1. *$R := [a, b] \times [c, d]$ iki-boyutlu bir dikdörtgen ve $f : R \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ için $f(x, \cdot)$ fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde integrallenebilir ise, bu durumda*

$$\begin{aligned} (L) \iint_R f\, dA &\leqslant (L) \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \\ &\leqslant (U) \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx \leqslant (U) \iint_R f\, dA \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

olur.

Kanıt. $\{x_0, \ldots, x_k\}$ ve $\{y_0, \ldots, y_\ell\}$, sırasıyla, $[a, b]$ ve $[c, d]$ aralığının birer parçalanışı olmak üzere, her $i = 1, \ldots, k$ ve $j = 1, \ldots, \ell$ için $R_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ olsun. Bu durumda R üzerinde bir ağ, $\mathcal{G} := \{R_{ij} \mid i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, \ell\}$ biçiminde bir ailedir. $\varepsilon > 0$ sayısı sabitlenerek

$$U(f, \mathcal{G}) - \varepsilon < (U) \iint_R f\, dA \tag{1.3.2}$$

eşitsizliği gerçeklenecek biçimde bir $\mathcal{G}$ ağı alınsın, ve her (i, j) indis çifti için

$$M_{ij} := \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$$

denilsin. Şimdi, $[a, b]$ üzerinde tanımlı, gerçel-değerli ve sınırlı herhangi ϕ ve ψ fonksiyonları için $(U) \int_a^b \phi(x)\, dx = \sum_{i=1}^k (U) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x)\, dx$ ve

$$(U) \int_a^b (\phi(x) + \psi(x))\, dx \leqslant (U) \int_a^b \phi(x)\, dx + (U) \int_a^b \psi(x)\, dx$$

özelliklerinin sağlandığı gözlemlenirse,

$$
\begin{aligned}
(U)\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx &= \sum_{i=1}^{k}(U)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\sum_{j=1}^{\ell}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy\right)dx\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}(U)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy\right)dx\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = U(f,\mathcal{G})
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir; bu ise, (1.3.2) kullanıldığında,

$$(U)\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx < (U)\iint_R f\,dA + \varepsilon$$

olması anlamına gelir. Bu son eşitsizliğin $\varepsilon \to 0$ için limiti alınarak da,

$$(U)\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \leqslant (U)\iint_R f\,dA$$

sonucuna ulaşılır. Benzer argümanlar kullanılarak

$$(L)\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \geqslant (L)\iint_R f\,dA$$

eşitsizliği de elde edilebileceğinden, Lemma 1.2.4 (ii) göz önüne alınarak, (1.3.1) eşitsizliklerinin sağlandıkları görülür. □

Artık, uygun koşullar altında, bir dikdörtgen üzerinde alınan iki-katlı bir integralin ardışık integraller vâsıtasıyla hesaplanabileceğini gösterebiliriz.

Teorem 1.3.2 (Fubini Teoremi). *$R := [a,b] \times [c,d]$ iki-boyutlu bir dikdörtgen ve $f : R \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in [a,b]$ için $f(x,\cdot)$ fonksiyonunun $[c,d]$ üzerinde, her $y \in [c,d]$ için $f(\cdot,y)$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde, ve f fonksiyonunun R üzerinde integrallenebilir olduğu varsayılsın. Bu durumda,*

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy \tag{1.3.3}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Kanıt. Her $x \in [a,b]$ için, $g(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy$ olsun. f fonksiyonu R üzerinde integrallenebilir olduğundan, Lemma 1.3.1 nedeniyle

$$\iint_R f\,dA = (U)\int_a^b g(x)\,dx = (L)\int_a^b g(x)\,dx$$

olur: yani, g fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir, ve (1.3.3) ile verilen ilk eşitlik sağlanır. x ve y değişkenlerinin rolleri değiştirilerek

$$\iint_R f\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

olduğu da görülürse, o hâlde, (1.3.3) ile verilen ikinci eşitlik de elde edilmiş olur. □

Açıklama 1.3.3. Fubini Teoremi'nin hipotezi, f fonksiyonu $[a,b]\times[c,d]$ dikdörtgeni üzerinde sürekli olduğunda gerçeklenir. Diğer taraftan, (1.3.3) ile verilen ikinci eşitlik, ardışık bir integralde integrasyon sırasının değiştirilebileceğini gösterir: bu, kimi durumlarda, bir değişkene göre hesaplanması zor−ya da, elemanter yöntemlerle imkânsız−olan integrallerin kolaylıkla alınabilmelerini sağlar.

Örnek 1.3.4. Koşulları gerçeklendiğinden dolayı Fubini Teoremi kullanılarak

$$\int_0^1\int_0^1 y^3 e^{xy^2}\,dydx$$

integralinde integrasyon sırası değiştirilirse, bu integralin değeri

$$\int_0^1\int_0^1 y^3 e^{xy^2}\,dxdy = \int_0^1 y(e^{y^2}-1)\,dy = \frac{e-2}{2}$$

olarak elde edilir.

Açıklama 1.3.5. Fubini Teoremi'nin hipotezindeki, "f fonksiyonunun R üzerinde integrallenebilir olması" koşulu kaldırılamaz: $f(x,\cdot)$ ve $f(\cdot,y)$ fonksiyonlarının $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olduğu, fakat ilgili ardışık integrallerin eşit olmadığı bir $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Gerçekten,

$$f(x,y) := \begin{cases} 2^{2n}, & (x,y)\in[2^{-n},2^{-n+1})\times[2^{-n},2^{-n+1}),\ n\in\mathbb{N} \text{ ise;}\\ -2^{2n+1}, & (x,y)\in[2^{-n-1},2^{-n})\times[2^{-n},2^{-n+1}),\ n\in\mathbb{N} \text{ ise;}\\ 0, & \text{diğer durumlarda;}\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, her $y_0 \in [0,1)$ için $f(x, y_0)$ fonksiyonu sadece iki tane sıfırdan farklı değer alır ve $[0,1)$ üzerinde (x değişkenine göre) integrallenebilirdir: örneğin, $y_0 \in [2^{-n}, 2^{-n+1})$ olduğunda, $x \in [2^{-n}, 2^{-n+1})$ için $f(x, y_0) = 2^{2n}$ ve $x \in [2^{-n-1}, 2^{-n})$ için $f(x, y_0) = -2^{2n+1}$ olur; dolayısıyla, $f(x, y_0)$ fonksiyonu $[0,1)$ üzerinde sınırlıdır, ve

$$\int_0^1 f(x, y_0)\, dx = \int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} 2^{2n}\, dx - \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} 2^{2n+1}\, dx = 2^n - 2^n = 0 \qquad (1.3.4)$$

gerçeklenir. $x_0 \in [0, 1/2)$ olduğunda da benzer durum $f(x_0, y)$ fonksiyonu için geçerlidir; ancak $x_0 \in [1/2, 1)$ olduğunda, $f(x_0, y)$ fonksiyonu sıfırdan farklı tek bir değer ($y \in [1/2, 1)$ için $f(x_0, y) = 4$) alır. Sonuç olarak

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dydx = \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 4\, dydx = 1$$

olur. Ancak diğer taraftan, (1.3.4) nedeniyle,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy = 0$$

eşitliği sağlanır: yani, ardışık integraller eşit değildir. Bu durumda, Fubini Teoremi'nden, f fonksiyonunun $[0,1) \times [0,1)$ üzerinde integrallenebilir olmadığı da gözden kaçırılmamalıdır—bu küme üzerinde f fonksiyonu sınırlı bile değildir.

Açıklama 1.3.6. Ardışık integrallerin var ve eşit olmaları, çok-değişkenli bir fonksiyonun ilgili bölge üzerinde integrallenebilir olmasını *gerektirmez*: $f(x, \cdot)$ ve $f(\cdot, y)$ fonksiyonlarının $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir ve integrallerinin eşit olduğu, fakat f fonksiyonunun $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde integrallenebilir olmadığı, bir sınırlı $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Gerçekten,

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & (x, y) = \left(\dfrac{p}{2^n}, \dfrac{q}{2^n}\right),\ 0 < p, q < 2^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda;} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $x_0 = p/2^n$ olması ancak bir $q = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ için $y = q/2^n$ olduğunda $f(x_0, y) = 1$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, her $x_0 \in [0,1]$ için, sonlu sayısa y değeri dışında $f(x_0, y) = 0$ olur; bu ise, her $x \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = 0$$

olması demektir. Benzer argüman, dx integrali için de geçerlidir. Böylece,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dxdy = 0$$

eşitliğine ulaşılır.

Şimdi, f fonksiyonunun integrallenebilir olmadığını görmek için, $[0,1] \times [0,1]$ karesinin içinde dejenere-olmayan bir $R_j := [a,b] \times [c,d]$ dikdörtgeni göz önüne alındığında, $[a,b]$ ve $[c,d]$ aralıklarının her birinin hem irrasyonel hem de $p/2^n$ formunda noktalar içerdikleri gözlemlensin. Bu, $[0,1] \times [0,1]$ dikdörtgeni üzerindeki bir $\mathcal{G} := \{R_j\}$ ağı için, $M_j(f) = 1$ ve $m_j(f) = 0$ eşitliklerinin her j için doğru, yani $U(f,\mathcal{G}) - L(f,\mathcal{G}) = 1 - 0 = 1$ olması anlamına gelir: Teorem 1.2.5'den, o hâlde, f fonksiyonu $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde integrallenebilir değildir.

Açıklama 1.3.7. f fonksiyonunun $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde ve her $y \in [0,1]$ için $f(\cdot, y)$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olduğu, fakat sonsuz sayıda $x \in [0,1]$ değeri için $f(x,\cdot)$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir olmadığı bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır:

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ veya } x \text{ yahut } y \text{ irrasyonel ise;} \\ 1/q, & x, y \in \mathbb{Q} \text{ ve indirgenmiş formda } x = p/q \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, $([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \times [0,1]$ üzerinde, f fonksiyonunun sürekli ve sıfıra eşit olduğu görülür. Böylece, Lebesgue Teoremi'nden (bkz. §1.2, Problem 10), $R := [0,1] \times [0,1]$ karesi üzerinde f fonksiyonunun integrallenebilir olduğu elde edilir. İlgili alt toplamlar hesaplanarak da, $\iint_R f\, dA = 0$ eşitliğine ulaşılır. Benzer argümanlar kullanılarak, her $y \in [0,1]$ için $f(\cdot, y)$ fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir ve $\int_0^1 f(x,y)\, dx = 0$ olduğu da görülür. Dolayısıyla,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = \iint_R f\, dA = 0$$

sonucuna ulaşılır. Öte yandan, sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{Q}$ için $f(x,\cdot)$ fonksiyonu hiçbir yerde sürekli olmadığından, bu fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir değildir: Fubini Teoremi'nden, o hâlde, diğer sırada alınan ardışık integral var olamaz.

Fubini Teoremi, iki-katlı bir integralin bir dikdörtgen üzerinde nasıl hesaplanabileceği hakkında bilgi verir. Aşağıdaki sonuç, dikdörtgensel olmayan bölgeler üzerinde integral hesabının yapılabilmesiyle ilgilidir.

Teorem 1.3.8. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Jordan bölgesi, E kümesini içeren n-boyutlu bir dikdörtgen R, ve $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda,*

$$g(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in E \text{ ise;} \\ 0, & \mathbf{x} \notin E \text{ ise;} \end{cases}$$

fonksiyonu R üzerinde integrallenebilirdir, ve

$$\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_R g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{1.3.5}$$

olur.

Kanıt. $f^+ := f \vee \mathbf{0}$ ve $f^- := (-f) \vee \mathbf{0}$ (bkz. §1.2, Problem 3 (b)) denilerek, ikisi de negatif olmayan ve $f = f^+ - f^-$ özdeşliğini sağlayan f^+ ve f^- fonksiyonlarının E üzerinde integrallenebilir oldukları gözlemlensin. Böylece, $g^+ = f^+$ ve $g^- = f^-$ olduğundan, Teorem 1.2.3 (i) kullanılarak, $f \geqslant \mathbf{0}$ olduğu varsayılabilir.

$\varepsilon > 0$ sayısı sabitlenerek R üzerinde bir $\mathcal{G} := \{R_1, \ldots, R_p\}$ ağı,

$$U(f, \mathcal{G}) - \varepsilon < \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < L(f, \mathcal{G}) + \varepsilon \tag{1.3.6}$$

ve−Lemma 1.1.3 göz önüne alınarak−

$$V(\partial E; \mathcal{G}) = V(E; \mathcal{G}) - v(E; \mathcal{G}) < \varepsilon \tag{1.3.7}$$

gerçeklenecek biçimde seçilsin. Her $j = 1, \ldots, p$ için $M_j := \sup_{\mathbf{x} \in R_j} g(\mathbf{x})$ denilerek g fonksiyonunun R üzerindeki üst toplamı,

$$\mathcal{I}_1 := \{j \mid R_j \subseteq E\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{j \notin \mathcal{I}_1 \mid R_j \cap \partial E \neq \varnothing\},$$

ve

$$\mathcal{I}_3 := \{j \notin \mathcal{I}_2 \mid R_j \subseteq R \setminus E\}$$

olmak üzere,

$$U(g, \mathcal{G}) =: S_1 + S_2 + S_3 := \sum_{j \in \mathcal{I}_1} M_j |R_j| + \sum_{j \in \mathcal{I}_2} M_j |R_j| + \sum_{j \in \mathcal{I}_3} M_j |R_j|$$

şeklinde üç parçaya ayrılsın. Şimdi, eğer $M := \max_{1 \leqslant j \leqslant p} |M_j|$ ise, (1.3.7) nedeniyle $S_2 \leqslant M\varepsilon$ elde edilir; $j \in \mathcal{I}_1$ olması $\mathbf{x} \in R_j$ için $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ olmasını gerektirdiğinden ve $f \geqslant \mathbf{0}$ olduğundan, $S_1 \leqslant U(f, \mathcal{G})$ sağlanır; ve $j \in \mathcal{I}_3$ iken

$\mathbf{x} \in R_j$ için $g(\mathbf{x}) = 0$ gerçeklendiğinden, $S_3 = 0$ olur. Dolayısıyla, (1.3.6) kullanılarak,

$$U(g, \mathcal{G}) = S_1 + S_2 + S_3 \leqslant U(f, \mathcal{G}) + M\varepsilon < \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + (M+1)\varepsilon,$$

yani

$$(U) \int_R g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer argümanlar kullanılarak

$$(L) \int_R g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \geqslant \int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

eşitsizliği de elde edilebileceğinden, o hâlde, Lemma 1.2.4 (ii) göz önüne alınarak g fonksiyonunun R üzerinde integrallenebilir olduğu ve (1.3.5) eşitliğinin sağlandığı görülür. □

Jordan bölgeleri üzerinde tanımlı fonksiyonların integrallerini—özellikle, uygulamalarda sıkça karşılaşılan düşük-boyutlu Öklidyen uzaylarda—ardışık integraller yardımıyla hesaplamak için, grafikleri birtakım sürekli fonksiyonlar vâsıtasıyla belirlenebilen bazı bölgeleri sabitlemek yararlıdır. Bir x_j değişkeni için $\widehat{x_j}$ sembolü, bundan böyle, x_j değişkeninin *olmaması* durumunu belirtecektir; dolayısıyla $(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)$ vektörü, $\mathbb{R}^{n-1}$ uzayı içinde bir noktadır.

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer bir $H \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt Jordan bölgesi, bir $j \in \{1, \ldots, n\}$ indisi, ve sürekli $\phi, \psi : H \to \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid\ & (x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) \in H \\ & \text{ve } \phi(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) \leqslant x_j \leqslant \psi(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)\} \end{aligned}$$

gerçeklenecek biçimde varsa, E kümesine bir ***izdüşürülebilir bölge*** adı verilir. Bu durumda E bölgesinin, "j, H, ϕ, ve ψ tarafından ***üretildiği***," söylenir.

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ içindeki izdüşürülebilir bölgelerin özellikle üzerinde durulacağından, bunların sabitlenmeleri de faydalı olacaktır. $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere; eğer

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ \phi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

ise E kümesi $\mathbb{R}^2$ *içinde* ***birinci tipten*** bir ***bölge***, eğer

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a, b],\ \phi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\}$$

ise E kümesi $\mathbb{R}^2$ *içinde* ***ikinci tipten*** bir ***bölge*** olarak adlandırılacaktır. Benzer biçimde, $E \subseteq \mathbb{R}^3$, $H \subseteq \mathbb{R}^2$ bir kompakt Jordan bölgesi, ve $\phi, \psi : H \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere; eğer

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in H,\ \phi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\}$$

ise E kümesi $\mathbb{R}^3$ *içinde* ***birinci tipten*** bir ***bölge***, eğer

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in H,\ \phi(x, z) \leqslant y \leqslant \psi(x, z)\}$$

ise E kümesi $\mathbb{R}^3$ *içinde* ***ikinci tipten*** bir ***bölge***, ve eğer

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in H,\ \phi(y, z) \leqslant x \leqslant \psi(y, z)\}$$

ise E kümesi $\mathbb{R}^3$ *içinde* ***üçüncü tipten*** bir ***bölge*** olarak isimlendirilecektir.

Örnek 1.3.9. $\mathbb{R}^2$ içinde, $y = x$ ve $y = x^2$ tarafından sınırlanan E kümesi birinci ve ikinci tiplerden bir bölgedir: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leqslant y \leqslant x,\ x \in [0, 1]\}$ veya $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x \leqslant \sqrt{y},\ y \in [0, 1]\}$ gösterilişleri tanımı sağlar.

Örnek 1.3.10. $\mathbb{R}^3$ içinde, $4x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ koşulunu sağlayan (x, y, z) noktalarından oluşan E elipsoidi birinci, ikinci, ve üçüncü tiplerden bir bölgedir: $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ olmak üzere,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\sqrt{(1 - 4x^2 - y^2)} \leqslant z \leqslant \sqrt{(1 - 4x^2 - y^2)},\ (x, y) \in H\}$$

gösterilişinden dolayı birinci tipten olan E bölgesinin, değişkenlerin yerleri bâriz biçimlerde değiştirilerek ikinci ve üçüncü tiplerden olduğu da görülür.

İzdüşürülebilir bölgeler üzerinde integrallerin nasıl hesaplanabileceklerini görmeden önce son olarak, ihtiyaç duyulacak diğer bazı kavramları tanımlamak gerekmektedir. Her $k = 1, \ldots, n$ için

$$\Pi_k := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k = 0\}$$

olarak tanımlanan küme bir ***koordinat hiper-düzlemi*** olarak adlandırılacaktır. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $k \in \{1, \ldots, n\}$ olmak üzere, E kümesinin Π_k koordinat hiper-düzlemi üzerine ***izdüşüm***ü, bir $x_k \in \mathbb{R}$ için $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \in E$ koşulunu sağlayan $(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ noktalarından oluşan E_k kümesidir.

Örnek 1.3.11. $\mathbb{R}^3$ içinde, Π_1 koordinat hiper-düzlemi yz-düzlemidir; üç-boyutlu bir $B_r((x_0, y_0, z_0))$ açık topunun Π_1 üzerine izdüşümü ise, iki-boyutlu $B_r((y_0, z_0))$ açık topudur.

Aşağıdaki yardımcı sonuç, sürekli bir fonksiyonun $\mathbb{R}^n$ içinde bir dikdörtgenin üzerindeki integralinin n tane kısmî integral kullanılarak alınabileceğini gösterir.

Lemma 1.3.12. *n bir doğal sayı, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ bir n-boyutlu dikdörtgen, ve $f : R \to \mathbb{R}$ fonksiyonu R üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, \cdot, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ fonksiyonu $[a_k, b_k]$ üzerinde integrallenebilir ise, bu durumda*

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dt$$

fonksiyonu R_k izdüşümü üzerinde integrallenebilirdir, ve

$$\int_R f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{R_k} \int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_k\, d(x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n) \tag{1.3.8}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. R dikdörtgeninin Π_k koordinat hiper-düzlemi üzerine izdüşümü olan R_k kümesi, $(n-1)$-boyutlu bir dikdörtgen olduğundan, Teorem 1.1.10'dan dolayı bir Jordan bölgesidir. Böylece, Lemma 1.3.1'in ispatında kullanılan argüman tekrar edilerek, her sınırlı f fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
(L) \int_R f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &\leqslant (L) \int_{R_k} \int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_k\, d(x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n) \\
&\leqslant (U) \int_{R_k} \int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_k\, d(x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n) \\
&\leqslant (U) \int_R f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

olduğu görülür; bu ise, f fonksiyonu R üzerinde integrallenebilir olduğundan, (1.3.8) eşitliğinin sağlanması anlamına gelir. □

Teorem 1.3.13. *$\mathbb{R}^n$ içinde, j, H, ϕ, ve ψ tarafından üretilen bir izdüşürülebilir bölge E olsun. Bu durumda E kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde bir Jordan bölgesidir. Ayrıca, E üzerinde sürekli olan her $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$\int_E f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_H \left(\int_{\phi(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)}^{\psi(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_j \right) d(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) \tag{1.3.9}$$

olur.

Kanıt. Durumun simetrisi göz önüne alınarak, $j = n$ olduğu varsayılabilir; bu durumda

$$E = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H \text{ ve } \phi(\mathbf{x}) \leqslant t \leqslant \psi(\mathbf{x})\}$$

olur. Teorem 1.1.13 nedeniyle, E kümesinin bir Jordan bölgesi olduğunu göstermek için ∂E kümesinin sıfır-hacimli olduğu gösterilmelidir. ∂E kümesinin bir $B := \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in H \text{ ve } t = \phi(\mathbf{x})\}$ tabanı, bir $T := \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in H \text{ ve } t = \psi(\mathbf{x})\}$ tepesi, ve bir $S := \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in \partial H \text{ ve } \phi(\mathbf{x}) \leqslant t \leqslant \psi(\mathbf{x})\}$ kenarından oluştuğu göz önüne alınırsa, o hâlde, 'daha düşük boyutlu' parçalar olan B, T, ve S kümelerinin sıfır-hacimli oldukları gösterilirse istenenin elde edileceği görülür.

B kümesinin hacmini belirlemek için, ilk olarak, tanım gereğince kompakt olduğu kabul edilen H kümesi üzerinde sürekli olan ϕ fonksiyonunun bu küme üzerinde−III/Teorem 1.6.15 nedeniyle−düzgün sürekli olduğu gözlemlensin: bu, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısının,

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H \quad \text{ve} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \quad \text{olduğunda} \quad \|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})\| < \varepsilon \tag{1.3.10}$$

gerçeklenecek biçimde bulunabilmesi anlamına gelir. Heine-Borel Teoremi nedeniyle kompakt kümeler sınırlı olduğundan, H kümesi $(n-1)$-boyutlu bir Q kübü tarafından da içerilir. Q kübü, her $k = 1, \ldots, p$ için, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_k$ olması $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ olmasını gerektirecek biçimde $Q_1, \ldots, Q_p$ alt-küplerine bölünerek, her $k = 1, \ldots, p$ ve bir $\mathbf{a}_k \in Q_k$ için $R_k := Q_k \times [\phi(\mathbf{a}_k) - 2\varepsilon, \phi(\mathbf{a}_k) + 2\varepsilon]$ olarak tanımlansın. Bu durumda her R_k bir n-boyutlu dikdörtgendir ve

$$\sum_{k=1}^{p} |R_k| = 4\varepsilon \sum_{k=1}^{p} |Q_k| = 4\varepsilon |Q|$$

olur. Diğer taraftan, (1.3.10) nedeniyle, B kümesi R_k dikdörtgenleri tarafından örtülür. Böylece, keyfî her $\varepsilon > 0$ için doğru olan, $\overline{\mathrm{Vol}}\,(B) < 4\varepsilon|Q|$ eşitsizliğine ulaşılır: diğer bir deyişle, B kümesi sıfır-hacimlidir. Benzer argümanlar, T kümesinin de sıfır-hacimli olduğunu gösterir.

S kümesinin hacmini belirlemek içinse,

$$M := \sup_{\mathbf{x} \in H} \psi(\mathbf{x}) \qquad \text{ve} \qquad m := \inf_{\mathbf{x} \in H} \phi(\mathbf{x})$$

denilsin. Şimdi, H kümesinin bir Jordan bölgesi olduğu göz önüne alınıp Teorem 1.1.13 ve Teorem 1.1.14 kullanılarak ∂H kümesini örten ve

$$\sum_{k=1}^{p} |Q_k| < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan $(n-1)$-boyutlu $Q_1, \ldots, Q_p$ küpleri seçilirse, $R_k := Q_k \times [m, M]$ olmak üzere,

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} R_k \qquad \text{ve} \qquad \sum_{k=1}^{p} |R_k| < (M-m)\varepsilon,$$

yani $\overline{\mathrm{Vol}}\,(S) \leqslant (M-m)\varepsilon$ olduğu görülür: S kümesi de, o hâlde, sıfır-hacimlidir. Sonuç olarak ∂E kümesinin sıfır-hacimli olduğu elde edilmiş olur; yani, E bir Jordan bölgesidir.

Son olarak, (1.3.9) eşitliğini kanıtlamak için, E kümesini içeren n-boyutlu bir $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ dikdörtgeni alınıp R üzerinde g fonksiyonu, $(\mathbf{x}, t) \in E$ için $g(\mathbf{x}, t) := f(\mathbf{x}, t)$ şeklinde, diğer durumlarda ise $g(\mathbf{x}, t) := 0$ olarak tanımlansın. Bu durumda Teorem 1.3.8 ve Lemma 1.3.12 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_E f(\mathbf{x}, t)\, d(\mathbf{x}, t) &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1 \\ &= \int_H \left(\int_{a_n}^{b_n} g(\mathbf{x}, t)\, dt \right) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Ancak diğer taraftan, her $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in H$ için

$$g(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} f(\mathbf{x}, t), & \phi(\mathbf{x}) \leqslant t \leqslant \psi(\mathbf{x}) \text{ ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda;} \end{cases}$$

olduğundan,

$$\int_{a_n}^{b_n} g(\mathbf{x}, t)\, dt = \int_{\phi(\mathbf{x})}^{\psi(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, t)\, dt$$

eşitliğinin de sağlandığı görülür, ve kanıt tamamlanır. □

Açıklama 1.3.14. Hipotezi f fonksiyonunun sürekli olması koşulunu içeren Teorem 1.3.13, Lemma 1.3.12'nin koşulları sağlandığında da geçerli olur: bir başka deyişle, f fonksiyonu E üzerinde ve her $\mathbf{x} \in H$ için $f(\mathbf{x}, \cdot)$ fonksiyonu $[a_k, b_k]$ üzerinde integrallenebilir olduğunda (1.3.9) eşitliği sağlanır.

Eğer H kümesinin kendisi bir izdüşürülebilir bölge ise, Teorem 1.3.13 ile verilen sonuç tekrar H kümesine uygulanabilir; dolayısıyla, 'yeterince düzgün' bir E kümesinin üzerinde alınan bir integral, n tane kısmî integral kullanılarak hesaplanabilir. Bu yöntemin uygulanışını gösteren örnekler vererek, bu kısmı kapatacağız.

Örnek 1.3.15. $z = 1 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, ve $z = 0$ ile sınırlanan E bölgesi üzerinde $f(x, y, z) := x$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda, $z = 0$ ve $z = 1 - x - y$ yüzeyleri $y = 1 - x$ olduğunda kesişirler. Diğer taraftan E_3 izdüşümü, $x = 0$, $y = 0$, ve $y = 1 - x$ tarafından sınırlanır; bu son iki eğri ise, $x = 1$ olduğunda kesişir. O hâlde,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

olduğundan, E bölgesi $\mathbb{R}^3$ içinde birinci tiptendir. Böylece,

$$\begin{aligned}\iiint_E f\,dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.3.16. $|x| = 1$, ve $z \geqslant 0$ olmak üzere $z = x^2 - y^2$ ile sınırlanan E bölgesi üzerinde $f(x, y, z) := x^2$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda, $z = 0$ ve $z = x^2 - y^2$ yüzeyleri $x^2 - y^2 = 0$, yani $y = \pm x$ olduğunda; diğer taraftan da, $y = \pm x$ ve $|x| = 1$ eğrileri $x = \pm 1$ olduğunda kesişirler. Dolayısıyla,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -|x| \leqslant y \leqslant |x|,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\}$$

olur: yani E bölgesi $\mathbb{R}^3$ içinde birinci tiptendir. Böylece,

$$\begin{aligned}\iiint_E f\,dV &= \int_{-1}^1 \int_{-|x|}^{|x|} \int_0^{x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-|x|}^{|x|} (x^2 - y^2)x^2\,dy\,dx \\ &= 4\int_0^1 \int_0^x (x^2 - y^2)x^2\,dy\,dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^5\,dx = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.3.13 ve Teorem 1.2.8 (ii) birlikte kullanıldığında, sonlu sayıda izdüşürülebilir alt-bölgenin birleşimi olarak yazılabilen E bölgeleri üzerinde alınan integrallerin, ilgili her alt-bölge üzerinde alınan integrallerin toplamı olarak ifade edilebileceği görülür. Buna mukabil bazı durumlarda integrasyon sırasını değiştirmek, E bölgesini alt-bölgelere parçalamadan, integralin tek seferde alınabilmesini sağlar.

Örnek 1.3.17. $z = y^2$, $z = 1$, $z = x$, ve $x = 0$ ile sınırlanan E bölgesi üzerinde $f(x, y, z) := x - z$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda E bölgesi, âşikâr olarak, $\mathbb{R}^3$ içinde birinci tiptendir; ilk olarak dz integrali alınmak istendiğinde ise, z değişkeninin, y^2 ve 1 ve x ve 1 arasında değiştiği durumlar ayrıştırılarak, iki tane integral kullanılması gerektiği görülür. Aynı integral

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant z \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant z\}$$

olduğu gözlemlenerek E bölgesinin $\mathbb{R}^3$ içinde üçüncü tipten olduğu kullanılıp alındığında ise, tek bir integrasyonla

$$\begin{aligned}\iiint_E f\,dV &= \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_0^z (x - z)\,dx\,dz\,dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} z^2\,dz\,dy = \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} (y^6 - 1)\,dy = -\frac{2}{7}\end{aligned}$$

elde edilir.

Problemler

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(xy + x)}\,dx\,dy$; (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} y\cos(xy)\,dy\,dx$.

2. Her integrali bir E bölgesi üzerinde yazıp bu bölgenin grafiğini çizerek, aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{x^2+1} (x + y)\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_0^{x^2+y^2} 3\,dz\,dx\,dy$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sin(x^2)\,dx\,dy$; (d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \int_{x^3}^1 \sqrt{(x^3 + z)}\,dz\,dx\,dy$.

3. Aşağıda verilen her E bölgesi ve her f fonksiyonu için, $\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ integralini hesaplayınız:
   (a) $y = x$ ve $y = x^2$ ile sınırlanan E bölgesi üzerinde, $f(x, y) := x\sqrt{y}$;
   (b) köşeleri $(0, 0)$, $(0, 1)$, ve $(2, 0)$ noktaları olan üçgenle sınırlanan E bölgesi üzerinde, $f(x, y) := x + y$;

(c) $y = \sqrt{x}$, $x = -\sqrt{y}$, ve $y = 4$ ile sınırlanan E bölgesi üzerinde, $f(x, y) := x$;
(d) $0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2$, $0 \leqslant y \leqslant x^2 + z^2$, ve $x \geqslant 0$ koşullarını sağlayan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktalarından oluşan E bölgesi üzerinde, $f(x, y, z) := x$.

4. Aşağıda verilen E bölgelerinin hacimlerini hesaplayınız:
(a) $x + y + z = 3$, $z = 0$, ve $x^2 + y^2 = 1$ ile sınırlanan E bölgesi;
(b) $z = x+y$ düzleminin altında, ve xy-düzleminin içinde olup $x = \sqrt{(y/2)}$, $x = 2\sqrt{y}$, ve $x + y = 3$ eğrileriyle sınırlanmış olan bölgenin üzerinde kalan E bölgesi;
(c) $z = y^2$, $x = y^2 + z^2$, $x = 0$, ve $z = 1$ ile sınırlanan E bölgesi;
(d) $y = x^3$, $x = z^2$, $z = x^2$, ve $y = 0$ ile sınırlanan E bölgesi.

5. (a) Fubini Teoremi'nin hipotezinin, f fonksiyonu R dikdörtgeni üzerinde sürekli ise geçerli olduğunu kanıtlayınız.
(b) Açıklama 1.3.5'de verilen fonksiyonu değiştirerek, $f(x, y)$ fonksiyonu her değişkenine göre ayrı ayrı sürekli olduğunda (yani, her $x \in [a, b]$ için $f(x, \cdot)$ ve her $y \in [c, d]$ için $f(\cdot, y)$ fonksiyonları sürekli iken) bile, Fubini Teoremi'nin hipotezinde verilen "f fonksiyonunun R üzerinde integrallenebilir olması" koşulunun kaldırılamayacağını gösteriniz.

6. (a) Her $k = 1, \ldots, n$ için $f_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a_k, b_k]$ üzerinde integrallenebilir, ve $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ olsun.
$$\int_R f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n) = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\, dx_1 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)\, dx_n \right)$$
eşitliğini kanıtlayınız.
(b) Eğer $Q := [0, 1]^n$ ve $\mathbf{y} := (1, 1, \ldots, 1)$ ise,
$$\int_Q e^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\, d\mathbf{x} = \left(\frac{e-1}{e} \right)^n$$
olduğunu gösteriniz.

7. Bir x gerçel sayısının ***tam değer***i, $n \leqslant x < n + 1$ koşulunu sağlayan ve tek türlü belirli olan $\lfloor x \rfloor := n$ tam sayısı olarak tanımlanır. Bir $[a, b]$ aralığı, eğer $b + a \neq \lfloor b \rfloor + \lfloor a \rfloor + 1$ ise, $\mathbb{Z}$-***asimetrik*** olarak adlandırılır.
(a) R, iki-boyutlu bir $\mathbb{Z}$-***asimetrik dikdörtgen*** olsun: yani, R dikdörtgeninin her iki kenarı da $\mathbb{Z}$-asimetrik aralıklardan oluşsun. Eğer her (x, y) gerçel sayılar çifti için $\psi(x, y) := (x - \lfloor x \rfloor - 1/2)(y - \lfloor y \rfloor - 1/2)$ ise, $\iint_R \psi\, dA = 0$ olması için R dikdörtgeninin en az bir kenar uzunluğunun tam sayı olmasının gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlayınız.
(b) R bir dikdörtgen olmak üzere, her biri $\mathbb{Z}$-asimetrik dikdörtgenlerden oluşan ve örtüşmeyen bir $\{R_1, \ldots, R_N\}$ ailesi için $R = \bigcup_{j=1}^{N} R_j$ sağlansın. Eğer her R_j dikdörtgeninin en az bir kenar uzunluğu tam sayı ve R dikdörtgeni $\mathbb{Z}$-asimetrik ise, R dikdörtgeninin de en az bir kenar uzunluğunun tam sayı olduğunu kanıtlayınız.

8. $E \subseteq \mathbb{R}^2$ bir Jordan bölgesi ve $f : E \to [0, \infty)$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in E,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}$ ise,
$$\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iint_E f\, dA$$
olduğunu ispatlayınız.

9. $R := [a,b] \times [c,d]$ iki-boyutlu bir dikdörtgen ve $f : R \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun.

(a) $X = U$ veya $X = L$ için,

$$\begin{aligned}(L)\iint_R f\,dA &\leqslant (L)\int_a^b \left((X)\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx\\ &\leqslant (U)\int_a^b \left((X)\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx\\ &\leqslant (U)\iint_R f\,dA\end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Eğer f fonksiyonu R üzerinde integrallenebilir ise,

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \left((L)\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_a^b \left((U)\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

eşitliklerini kanıtlayınız.

(c) (b) kısmındaki iki ardışık integrali

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q} \text{ ise;}\\ x, & y \notin \mathbb{Q} \text{ ise;}\end{cases}$$

fonksiyonu ve $R := [0,1] \times [0,1]$ karesi için hesaplayınız; bunları kullanarak, f fonksiyonunun R üzerinde integrallenebilir olmadığını gösteriniz.

10. (Genelleştirilmiş İntegraller[2] İçin Fubini Teoremi). $a < b$ genişletilmiş gerçel sayılar, $c < d$ sonlu gerçel sayılar, ve $f : (a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. Eğer

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$$

genelleştirilmiş integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsak[3] ise,

$$\int_c^d f(x,y)\,dy$$

fonksiyonunun (a,b) üzerinde genelleştirilmiş integrallenebilir olduğunu ve

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

[2] Bkz. III/Dipnot 5, s.56.
[3] Bkz. III/Tanım 2.1.7.

1.4 Değişkenlerin dönüşümü

Sürekli-diferansiyellenebilir bir $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $[a,b]$ üzerinde $\phi' \neq 0$ ise, $\phi([a,b])$ üzerinde integrallenebilen gerçel-değerli her f fonksiyonu için

$$\int_{\phi([a,b])} f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f(\phi(x))|\phi'(x)|\,dx$$

eşitliği sağlanır.[4] Bu ve bunu izleyen kısmın temel amacı yukarıda ifade edilen değişken dönüştürme sonucunu çok-değişkenli fonksiyonlara genişletmek, diğer bir deyişle

$$\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.4.1}$$

eşitliğinin sağlandığı koşulları belirlemek olacaktır. Kanıtı iki kısım içinde verilen birçok adımda tamamlanacak olan (1.4.1) eşitliği, Ters Fonksiyon Teoremi'yle[5] birlikte, çok-değişkenli hesabın en derin sonuçlarındandır.

Bir f fonksiyonu, bir E kümesi, ve verilen bir $\mathscr{P}$ özelliği söz konusu olduğunda, eğer her $\mathbf{a} \in E$ için $\mathbf{a}$ noktasını içeren bir B açık topu f fonksiyonu $\mathscr{P}$ özelliğini $B \cap E$ kümesi üzerinde sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa, "f fonksiyonunun $\mathscr{P}$ özelliğini E kümesi üzerinde ***lokal olarak*** sağladığı," söylenecektir. Benzer biçimde, eğer f fonksiyonu $\mathscr{P}$ özelliğini E kümesinin her noktası için sağlıyorsa, "f fonksiyonunun $\mathscr{P}$ özelliğini E kümesi üzerinde ***global olarak*** sağladığı," ifade edilecektir. Bu kısımda, Jacobi determinantları sıfır olmayan fonksiyonlar için, önce lokal olarak (Teorem 1.4.3) daha sonra da global olarak (Teorem 1.4.4) sağlanan birer değişken dönüştürme formülü elde edilecektir. Sıfır-hacimli bir küme üzerinde Jacobi determinantları sıfır olan fonksiyonlar için global olarak sağlanan bir değişken dönüştürme formülünün (Teorem 1.4.5) *ifadesi* de, bu kısımda verilecekler arasındadır; diğerlerinden daha kapsamlı olan ve bu nedenle kanıtı ilâve birtakım mekanizmalar gerektiren bu sonuç, bir sonraki kısımda ispatlanacaktır.

İlk olarak, her biri (1.4.1) eşitliğini sağlayan iki fonksiyonun bileşkesinin de aynı eşitliği sağladığını göreceğiz.

Lemma 1.4.1. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir, ve $\sigma : \psi(V) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\psi(V)$ üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Bunlara ek olarak V kümesinin bir E alt-kümesinin, E, $\psi(E)$, ve $\sigma(\psi(E))$ kümeleri Jordan bölgeleri olacak biçimde var olduğu kabul*

[4] Bkz. [23, §3.3, Theorem 3.15 & Exercise 11].
[5] Bkz. III/Teorem 2.4.5.

edilsin. Eğer f fonksiyonunun $\sigma(\psi(E))$ üzerinde, $f\circ\sigma|\Delta_\sigma|$ fonksiyonunun $\psi(E)$ üzerinde, g fonksiyonunun $\psi(E)$ üzerinde, ve $g\circ\psi|\Delta_\psi|$ fonksiyonunun E üzerinde integrallenebilir olduğu her f ve g fonksiyonu için

$$\int_{\psi(E)} g(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_E (g\circ\psi)(\mathbf{x})|\Delta_\psi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.4.2}$$

ve

$$\int_{\sigma(\psi(E))} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_{\psi(E)} (f\circ\sigma)(\mathbf{x})|\Delta_\sigma(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.4.3}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, bu durumda $\phi := \sigma\circ\psi$ fonksiyonu için

$$\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$$

eşitliği, f fonksiyonu $\phi(E)$ üzerinde ve $f\circ\phi|\Delta_\phi|$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olduğu müddetçe sağlanır.

Kanıt. Zincir Kuralı[6] nedeniyle,

$$\Delta_\phi(\mathbf{x}) = \Delta_\sigma(\psi(\mathbf{x}))\Delta_\psi(\mathbf{x}) \tag{1.4.4}$$

eşitliği her $\mathbf{x}\in V$ için doğru olur; bu ise, (1.4.3), (1.4.2), ve (1.4.4) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} &= \int_{\sigma(\psi(E))} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}\\ &= \int_{\psi(E)} (f\circ\sigma)(\mathbf{y})|\Delta_\sigma(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}\\ &= \int_E (f\circ\sigma\circ\psi)(\mathbf{x})|\Delta_\sigma(\psi(\mathbf{x}))|\,|\Delta_\psi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\\ &= \int_E (f\circ\phi)(\mathbf{x})|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\end{aligned}$$

sonucuna ulaştırır. □

Şimdi de, ϕ fonksiyonu 'yeterince düzgün' olduğunda, (1.4.1) eşitliğini $f\equiv\mathbf{1}$, ve R bir dikdörtgen olmak üzere, $E=\phi^{-1}(R)$ ve $E=\phi(R)$ durumlarında kanıtlamanın yeterli olduğu görülecektir: Her integrallenebilir fonksiyonun 'hemen hemen' sürekli (yani, esasında 'küçük' kümeler üzerinde sabit) ve her Jordan bölgesinin $V(E;\mathcal{G})$ toplamları yardımıyla yaklaşık olarak 'kestirilebilen' bir hacme sahip (yani, esasında dikdörtgenlerin bir sonlu birleşimi) olduğu göz önüne alındığında, bu türden bir sonucun beklenmedik olmadığı kolayca fark edilebilir.

[6] Bkz. III/Teorem 2.2.20.

Lemma 1.4.2. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde birebir ve sürekli-diferansiyellenebilir, $\phi^{-1} : \phi(V) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\phi(V)$ üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir, ve V üzerinde $\Delta_\phi \neq 0$ olsun. Eğer n-boyutlu her $R \subseteq \phi(V)$ dikdörtgeni için*

$$|R| = \int_{\phi^{-1}(R)} |\Delta_\phi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}, \tag{1.4.5}$$

ve n-boyutlu her $Q \subseteq V$ dikdörtgeni için

$$|Q| = \int_{\phi(Q)} |\Delta_{\phi^{-1}}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \tag{1.4.6}$$

ise, bu durumda $\overline{E} \subseteq V$ koşulunu sağlayan her E Jordan bölgesi için

$$\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u} = \int_E (f \circ \phi)(\mathbf{x}) |\Delta_\phi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

eşitliği, f fonksiyonu $\phi(E)$ üzerinde ve $f \circ \phi |\Delta_\phi|$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olduğu müddetçe sağlanır.

Kanıt. $\overline{E} \subseteq V$ koşulunu sağlayan sabitlenmiş bir Jordan bölgesi E, ve−hipotezden dolayı koşulları sağlanan Teorem 1.1.16 nedeniyle $\phi(E)$ kümesinin bir Jordan bölgesi olduğu göz önüne alınarak−$\phi(E)$ üzerinde integrallebilir bir fonksiyon $f : \phi(E) \to \mathbb{R}$ olsun. Teorem 1.3.8'in kanıtının açılışındaki argüman kullanılarak, $\phi(E)$ üzerinde $f \geqslant \mathbf{0}$ olduğu varsayılsın.

$\phi(E)$ kümesini içeren bir dikdörtgen H, ve H üzerinde bir ağ $\mathcal{G}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $\mathcal{G}$ ağından daha ince olan ve $V(\partial(\phi(E)); \mathcal{H}) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{H} := \{R_1, \ldots, R_p\}$ ağı alınsın. Bunlarla birlikte, $\mathcal{I}_1 := \{j \mid R_j \subseteq \phi(E)\}$, $\mathcal{I}_2 := \{j \notin \mathcal{I}_1 \mid R_j \cap \phi(E) \neq \varnothing\}$, her $j \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ için

$$m_j := \inf_{\mathbf{u} \in R_j \cap \phi(E)} f(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{x} \in \phi^{-1}(R_j) \cap E} f(\phi(\mathbf{x})),$$

ve $M := \sup\{m_1, \ldots, m_p\}$ olarak tanımlansın. §1.1, Problem 7 (b) kullanılarak $\{\phi^{-1}(R_j) \mid j \in \mathcal{I}_1\}$ ailesinin örtüşmeyen kümelerden oluştuğu, aynı zamanda

$$\Omega := \bigcup_{j \in \mathcal{I}_1} \phi^{-1}(R_j) \subseteq E$$

içermesinin de sağlandığı gözlemlensin.

Böylece, (1.4.5), Teorem 1.2.11, ve Teorem 1.2.8 (ii) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
L(f,\mathcal{G}) \leqslant L(f,\mathcal{H}) &= \sum_{j\in\mathcal{I}_1} m_j|R_j| + \sum_{j\in\mathcal{I}_2} m_j|R_j| \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathcal{I}_1} m_j|R_j| + M\,V(\partial(\phi(E));\mathcal{H}) \\
&< \sum_{j\in\mathcal{I}_1} m_j|R_j| + M\varepsilon \\
&= \sum_{j\in\mathcal{I}_1} m_j \int_{\phi^{-1}(R_j)} |\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} + M\varepsilon \\
&\leqslant \sum_{j\in\mathcal{I}_1} \int_{\phi^{-1}(R_j)} f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} + M\varepsilon \\
&= \int_\Omega f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} + M\varepsilon \\
&\leqslant \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} + M\varepsilon
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır; bu son eşitsizliğin tüm $\mathcal{G}$ ağları üzerinden supremumu ve daha sonra $\varepsilon \to 0$ için limit alınarak da,

$$
\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} \leqslant \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.4.7}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Ters yöndeki eşitsizliği elde etmek için ilk olarak, III/Teorem 2.4.2 nedeniyle, $\phi(V)$ kümesinin açık olduğu gözlemlensin. Aynı zamanda Zincir Kuralı'ndan dolayı, V üzerinde $\Delta_\phi \neq 0$ koşulu sağlandığından $\phi(V)$ üzerinde $\Delta_{\phi^{-1}} \neq 0$ olduğuna da dikkât edilsin. Bu iki gözlem, ϕ yerine ϕ^{-1}, f yerine $f\circ\phi|\Delta_\phi|$, ve $\phi(E)$ yerine $E = \phi^{-1}(\phi(E))$ kullanılarak (1.4.7) eşitsizliğinin işletilebileceğini gösterir: yani,

$$
\int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_{\phi(E)} f(\phi(\phi^{-1}(\mathbf{u})))|\Delta_\phi(\phi^{-1}(\mathbf{u}))|\,|\Delta_{\phi^{-1}}(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u} \tag{1.4.8}
$$

olur. Ancak $\phi(V)$ üzerinde $\phi\circ\phi^{-1} = I_n$ gerçeklendiğinden, Zincir Kuralı kullanılarak her $\mathbf{u}\in\phi(V)\supseteq\phi(E)$ için

$$
|\Delta_\phi(\phi^{-1}(\mathbf{u}))|\,|\Delta_{\phi^{-1}}(\mathbf{u})| = |\Delta_{I_n}(\mathbf{u})| = 1
$$

olduğu da görülür: (1.4.8)'den, o hâlde,

$$\int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant \int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}$$

sonucuna ulaşılır. Bu son eşitsizlik ve (1.4.7) ile birlikte, kanıt tamamlanmış olur. □

Artık, lokal olarak sağlanan değişken dönüştürme formülünü kanıtlayabilecek durumdayız.

Teorem 1.4.3. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\mathbf{a} \in V$, ve $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde bire-bir ve sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\Delta_\phi(\mathbf{a}) \neq 0$ ise, bu durumda $\mathbf{a}$ noktasını içeren bir $W \subseteq V$ açık dikdörtgeni, f fonksiyonunun $\phi(E)$ üzerinde ve $f \circ \phi|\Delta_\phi|$ fonksiyonunun E üzerinde integrallenebilir olduğu ve $\overline{E} \subseteq W$ koşulunu sağlayan her E Jordan bölgesi için*

$$\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$$

eşitliği sağlanacak şekilde vardır.

Kanıt. n üzerinden tümevarım kullanılacaktır. Bir-boyutlu teori[7] ve Lemma 1.4.2'den dolayı, ifade edilen sonuç $n = 1$ için doğrudur. Bir $n > 1$ tam sayısı için, teoremin $\mathbb{R}^{n-1}$ üzerinde doğru olduğu kabul edilsin. $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\Delta_\phi(\mathbf{a}) \neq 0$ koşulunu sağlasın. Bu durumda ilk sütun kullanılıp $\Delta_\phi(\mathbf{a})$ determinantı açılırsa, $D\phi(\mathbf{a})$ matrisinin $\partial\phi_i/\partial x_1$ girdisinin kofaktörü Δ_i olmak üzere, bir $i \in \{1, \ldots, n\}$ için $\partial\phi_i/\partial x_1 \cdot \Delta_i$ değerinin $\mathbf{a}$ noktasında sıfır olmadığı görülür. ϕ_i ve ϕ_1 fonksiyonları birbirleriyle yer değiştirilerek, her $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n) \in V$ için,

$$\psi(\mathbf{x}) := (x_1, \phi_2(\mathbf{x}), \ldots, \phi_n(\mathbf{x}))$$

ve

$$\sigma(\mathbf{x}) := (\phi_1(\psi^{-1}(\mathbf{x})), x_2, \ldots, x_n)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\phi = \psi \circ \sigma$ olur ve, $(\phi_1)_{x_1} \cdot \Delta_\psi = \partial\phi_1/\partial x_1 \cdot \Delta_1$ değeri $\mathbf{a}$ noktasında sıfır olmadığından, $\Delta_\psi(\mathbf{a}) \neq 0$ gerçeklenir.

Lemma 1.4.1 nedeniyle, $\mathbf{a} \in W \subseteq V$ koşulunu sağlayan bir W açık kümesinin var olduğunu ve V yerine W alındığında (1.4.2) ve (1.4.3) eşitliklerinin ikisinin de sağlandığını göstermek yeterlidir; dolayısıyla, Lemma 1.4.2'den, ϕ yerine ψ ve

[7] Bkz. [23, §3.3, Exercise 11].

σ fonksiyonları alındığında, sırasıyla, her $R \subseteq \psi(W)$ ve her $R \subseteq \sigma(W)$ dikdörtgeni için (1.4.5), ve her $Q \subseteq W$ dikdörtgeni için (1.4.6) eşitliklerinin sağlandığı, $\mathbf{a}$ noktasını içeren bir açık $W \subseteq V$ kümesinin var olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur. Kullanılan argümanlar benzer ve (1.4.6) eşitliğinin kanıtı (1.4.5) eşitliğinden daha kolay olduğundan, sadece (1.4.5) ispatlanacaktır.

$\Delta_\psi(\mathbf{a}) \neq 0$ olduğundan, Ters Fonksiyon Teoremi[8] kullanılarak $\mathbf{a}$ noktasını içeren bir açık $W \subseteq V$ kümesi; her $\mathbf{x} \in W$ için $\Delta_\psi(\mathbf{a}) \neq 0$, $\psi(W)$ üzerinde ψ^{-1} fonksiyonu sürekli-diferansiyellenebilir, ve $\psi(W)$ üzerinde $\Delta_{\psi^{-1}} \neq 0$ olacak şekilde bulunabilir.

Eğer gerekiyorsa W kümesi daha da küçültülerek, genelliği bozmaksızın, W kümesinin bir açık dikdörtgen olduğu, yani $W = I_1 \times \cdots \times I_n$ olacak şekilde her $j = 1, \ldots, n$ için I_j açık aralıklarının bulunduğu da varsayılabilir. Şimdi, $W_0 := I_2 \times \cdots \times I_n$ alınsın, $x_1 \in I_1$ noktası sabitlensin, ve $(x_1, \mathbf{y}) \in W$ koşulunu sağlayan her $\mathbf{y} := (x_2, \ldots, x_n)$ için

$$\phi_0(\mathbf{y}) := (\phi_2(x_1, \mathbf{y}), \ldots, \phi_n(x_1, \mathbf{y}))$$

olarak tanımlansın. $\phi_0 : W_0 \to \mathbb{R}^{n-1}$ fonksiyonu $\psi(x_1, \mathbf{y}) = (x_1, \phi_0(\mathbf{y}))$ eşitliğini sağlar; dolayısıyla ϕ_0 fonksiyonu, sürekli-diferansiyellenebilirdir ve Zincir Kuralı'ndan dolayı W_0 üzerinde $\Delta_{\phi_0} = \Delta_\psi \neq 0$ koşulunu gerçekler. Böylece, tümevarım hipotezinden, $(n-1)$-boyutlu her $R_0 \subseteq \phi_0(W_0)$ dikdörtgeni için

$$|R_0| = \int_{\phi_0^{-1}(R_0)} |\Delta_{\phi_0}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}, \tag{1.4.9}$$

ve $(n-1)$-boyutlu her $Q_0 \subseteq W_0$ dikdörtgeni için

$$|Q_0| = \int_{\phi_0(Q_0)} |\Delta_{\phi_0^{-1}}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

eşitlikleri elde edilir. (W_0, dolayısıyla, W dikdörtgenleri, eğer yine gerekiyorsa, daha da küçültülebilir.)

$R \subseteq \psi(W)$ koşulunu sağlayan n-boyutlu bir dikdörtgen R olsun. Bu durumda, $\phi_0(W_0)$ tarafından içerilen $(n-1)$-boyutlu bir dikdörtgen R_0 ve her $x_1 \in [a, b]$ için

$$\psi^{-1}(\{x_1\} \times R_0) = \{x_1\} \times \phi_0^{-1}(R_0)$$

olmak üzere, $R = [a, b] \times R_0$ olur. (1.4.9) ve Teorem 1.3.13 kullanılarak, o hâlde,

$$|R| = (b-a)|R_0| = \int_{\phi_0^{-1}(R_0)} \int_a^b |\Delta_{\phi_0}(\mathbf{y})| \, dx_1 \, d\mathbf{y} = \int_{\psi^{-1}(R)} |\Delta_\psi(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$$

[8] Bkz. III/Teorem 2.4.5.

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak, n-boyutlu her $R \subseteq \psi(W)$ dikdörtgeni için $|R| = \int_{\psi^{-1}(R)} |\Delta_\psi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}$ eşitliği kanıtlanmış olur: yani, ϕ yerine ψ alındığında (1.4.5) eşitliği sağlanır. Benzer argümanlar kullanılarak, ϕ yerine σ alındığında da (1.4.5) eşitliğinin sağlandığı görülür ve kanıt tamamlanır. □

Teorem 1.4.3 yardımıyla, global olarak geçerli olan aşağıdaki değişken dönüştürme formülüne ulaşılır.

Teorem 1.4.4. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde bire-bir ve sürekli-diferansiyellenebilir olsun. Eğer V üzerinde $\Delta_\phi \neq 0$ ise ve bir E Jordan bölgesi $\overline{E} \subseteq V$ koşulunu sağlıyorsa, bu durumda f fonksiyonu $\phi(E)$ üzerinde ve $f \circ \phi|\Delta_\phi|$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olduğunda*

$$\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \tag{1.4.10}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $f : \phi(E) \to \mathbb{R}$, $H := \overline{E}$, f fonksiyonu $\phi(E)$ üzerinde integrallenebilir, ve $(f \circ \phi)|\Delta_\phi|$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olsun. Teorem 1.4.3'den, her $\mathbf{a} \in H$ için bir $V_\mathbf{a}$ açık dikdörtgeni, $\mathbf{a} \in V_\mathbf{a} \subseteq V$ ve $\overline{E_i} \subseteq V_\mathbf{a}$ koşulunu sağlayan her E_i Jordan bölgesi için

$$\int_{\phi(E_i)} f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \int_{E_i} f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \tag{1.4.11}$$

olacak şekilde vardır. $\mathbf{a} \in W_\mathbf{a} \subseteq \overline{W_\mathbf{a}} \subseteq V_\mathbf{a}$ sağlanacak şekilde bir açık dikdörtgen $W_\mathbf{a}$ olsun. Bir Jordan bölgesi olan E kümesi sınırlı olduğundan, Heine-Borel Teoremi'nden dolayı H kümesi kompakttır; bu ise,

$$H \subseteq \bigcup_{\mathbf{a} \in H} W_\mathbf{a}$$

sağlandığından, $j = 1, \ldots, k$ için $W_j := W_{\mathbf{a}_j}$ açık dikdörtgenlerinin

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} W_j$$

gerçeklenecek biçimde bulunabilmeleri anlamına gelir. H kümesini içeren büyük bir dikdörtgen R olsun. Sonlu sayıda W_j dikdörtgeninin var olduğu kullanılarak R üzerinde yeterince ince bir $\mathcal{G} := \{R_i \mid i = 1, \ldots, N\}$ ağı, H kümesini kesen her dikdörtgenin bir $\overline{W_j}$ kümesinin bir alt-kümesi olduğu dikdörtgenlerden oluşacak şekilde alınsın. Her $i = 1, \dots, N$ için $E_i := R_i \cap E$ olsun. Bu durumda, bir $j \in \{1, \dots, k\}$ için $\overline{E_i} \subseteq R_i \cap H \subseteq \overline{W_j} \subseteq V_{\mathbf{a}_j}$ olur; yani, (1.4.11) sağlanır. Aynı zamanda $\{E_i \mid i = 1, \dots, N\}$ koleksiyonu, birleşimleri E kümesine eşit olan ve örtüşmeyen Jordan bölgelerinden oluşan bir ailedir; dolayısıyla, §1.1, Problem 7 (b) nedeniyle $\{\phi(E_i) \mid i = 1, \dots, N\}$ koleksiyonu da, birleşimleri $\phi(E)$ kümesine eşit olan ve örtüşmeyen Jordan bölgelerinden oluşan bir aile olur. Teorem 1.2.8 (ii) ve (1.4.11)'den, o hâlde, istenen

$$\begin{aligned}\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\phi(E_i)} f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{E_i} f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. □

Teorem 1.4.4 ile verilen değişken dönüştürme formülü, global olarak sağlanmasına karşın, yeterince genel değildir. Δ_ϕ determinantının V kümesinin *tamâmının* üzerinde sıfırdan farklı kabul edilmesi, $(-1, 1)$ üzerinde $\phi(x) := x^3$ gibi basit değişken dönüşümleri için bile, oldukça kısıtlayıcıdır. Pek çok durum için bu engel, Jacobi determinantının sadece *sıfır-hacimli bir küme üzerinde* sıfıra eşit olmasının varsayıldığı aşağıdaki sonuç kullanılarak aşılabilir.

Teorem 1.4.5 (Katlı İntegraller İçin Değişkenlerin Dönüşümü)**.** *$W \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ bir sürekli-diferansiyellenebilir fonksiyon, ve $\overline{E} \subseteq W$ koşulunu sağlayan bir E Jordan bölgesi için $\phi(E)$ de bir Jordan bölgesi olsun. Eğer $E \cap Z$ kümesi sıfır-hacimli olacak şekilde bir kapalı Z kümesi varsa, ve her $\mathbf{x} \in E^\circ \setminus Z$ için ϕ fonksiyonu bire-birse ve $\Delta_\phi(\mathbf{x}) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, o zaman f fonksiyonu $\phi(E)$ üzerinde ve $(f \circ \phi)|\Delta_\phi|$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir olduğunda*

$$\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \tag{1.4.12}$$

eşitliği sağlanır.

Buraya kadar elde edilenlere ek birtakım mekanizmalar gerektiren Teorem 1.4.5'in kanıtı, bir sonraki kısımda verilecektir. Şimdilik, gerektiği durumlarda bu sonucu sadece uygulayacağız. Birçok koşul içerdiğinden ilk bakışta uygulanması zor gibi görünen Teorem 1.4.5'in hipotezlerinin çoğu, aslında, sezgisel olarak doğrulanabilir niteliktedir. Özellikle dikkât edilmesi gerekenler, ϕ fonksiyonunun bire-bir, Δ_ϕ determinantının Z dışında sıfıra eşit, ve $E \cap Z$ kümesinin sıfır-hacimli olması gerektiğini bildiren koşullardır.

Teorem 1.4.5'in önemli ve çok kullanışlı ilk uygulamaları olarak, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ içinde bâzı özel değişken dönüşümlerini ele alacağız.

$\mathbb{R}^2$ içinde ***kutupsal koordinatlar***, her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için, $r := \|(x, y)\|$ ve pozitif x-ekseninden $L((0,0);(x,y))$ doğru parçasına saat yelkovanının ters yönünde ölçülen açı θ olmak üzere,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

dönüşümleriyle tanımlanır. Bu sistemi Teorem 1.4.5'i kullanarak anlamlandırmak için, $r \geqslant 0$ koşulunu sağlayan her $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ için $\phi(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, her $\theta \in \mathbb{R}$ için $\phi(0, \theta) = (0, 0)$ olduğundan, $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan $\phi : \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geqslant 0\} \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu bire-bir değildir. Ancak diğer taraftan, $\Omega := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$ alındığında $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğu görülür. Ayrıca

$$\Delta_\phi = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

olduğundan, Ω üzerinde Δ_ϕ sıfırdan farklıdır. $Z := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r = 0\}$ kümesi dışında, o hâlde, ϕ fonksiyonu bire-birdir ve bu fonksiyonun Jacobi determinantı sıfırdan farklı olur. Her E Jordan bölgesi için $Z \cap E$ kümesi sıfır-hacimli olduğundan, Teorem 1.4.5 nedeniyle, $\phi(E)$ bir Jordan bölgesi ve f ve $f \circ \phi|\Delta_\phi|$ fonksiyonları, sırasıyla, $\phi(E)$ ve E üzerinde integrallenebilir olduğunda (1.4.12) eşitliğinin sağlandığı böylece görülmüş olur. Kutupsal koordinatlardan kartezyen koordinatlara yukarıdaki biçimde tanımlanan dönüşüm formülü $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ olarak kısaltılacaktır.

Kutupsal koordinatlar, Fubini Teoremi'yle birlikte, kartezyen koordinat sistemi kullanıldığında kolayca hesaplanamayan integralleri almak için çok elverişlidir.

Örnek 1.4.6. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, ve $z = 0$ ile sınırlanan E bölgesinin hacmini bulma problemi göz önüne alınsın. Bu durumda E kümesi, $f(x, y) := x^2 + y^2$ fonksiyonunun grafiğinin altında ve $B := B_2((0,0))$ açık topunun üzerinde kalan bir Jordan bölgesidir. Kutupsal koordinatlar ve §1.3, Problem 8 kullanılarak, o hâlde,

$$\mathrm{Vol}\,(E) = \iint_B (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\,dr d\theta = 8\pi$$

olduğu görülür.

Örnek 1.4.7. $a \in (0,1)$ için $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$ olmak üzere,

$$\iint_E \frac{x^2+y^2}{x}\, dA$$

integrali göz önüne alınsın. Kutupsal koordinatlara geçildiğinde,

$$\iint_E \frac{x^2+y^2}{x}\, dA = \int_0^{\pi/4} \int_a^1 \frac{r^3}{r\cos\theta}\, dr d\theta = \frac{1-a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta$$

olduğu görülür; bu son integrali almak için integrand $\sec\theta + \tan\theta$ ile çarpılıp bölünerek $u := \sec\theta + \tan\theta$ değişken dönüşümü yapıldığında da

$$\int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \ln(1+\sqrt{2})$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\iint_E \frac{x^2+y^2}{x}\, dA = \frac{(1-a^3)\ln(1+\sqrt{2})}{3}$$

elde edilir.

$\mathbb{R}^3$ içinde ***silindirik koordinatlar***, her $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için, $r := \|(x,y,z)\|$ ve pozitif x-ekseninden $L((0,0,0);(x,y,0))$ doğru parçasına saat yelkovanının ters yönünde ölçülen açı θ olmak üzere,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

dönüşümleriyle tanımlanır. Bunlar kullanıldığında, $\phi(r,\theta,z) := (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ olarak tanımlanan $\mathcal{C}^1$-sınıfından $\phi : \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \geqslant 0\} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun $\Omega := \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$ üzerinde bire-bir olduğu; aynı zamanda da,

$$\Delta_\phi = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

olduğundan, $Z := \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r = 0\}$ kümesi dışında $\Delta_\phi \neq 0$ koşulunun sağlandığı görülür. Böylece, her E Jordan bölgesi için $Z \cap E$ kümesi sıfır-hacimli olduğundan, Teorem 1.4.5 nedeniyle, $\phi(E)$ bir Jordan bölgesi ve f ve $f \circ \phi|\Delta_\phi|$

fonksiyonları, sırasıyla, $\phi(E)$ ve E üzerinde integrallenebilir olduğunda (1.4.12) eşitliğinin sağlandığı görülmüş olur. Silindirik koordinatlardan kartezyen koordinatlara yukarıdaki biçimde tanımlanan dönüşüm formülü $dx\,dy\,dz = r\,dz\,dr\,d\theta$ olarak kısaltılacaktır.

Örnek 1.4.8. $x^2+y^2+z = 4$ paraboloidinin içinde, $x^2-2x+y^2 = 0$ silindirinin dışında, ve $z = 0$ düzleminin üzerinde kalan E bölgesinin hacmini bulma problemi göz önüne alınsın. Bu durumda E kümesi, tepe noktası $(0,0,4)$ olan ve z-ekseni boyunca yukarı doğru açılan $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve tabanı $(1,0)$ merkezli ve 1 yarıçaplı çember olan $x^2 - 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$ silindiri tarafından belirlenen bir Jordan bölgesidir. Bu nedenle E_3 izdüşümü, $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin içinde ve $x^2 + y^2 = 2x$ çemberinin dışında kalır. Bu son çember kutupsal koordinatlar kullanılarak $r^2 = 2r\cos\theta$, yani $r = 2\cos\theta$ olarak betimlenebileceğinden, silindirik koordinatlar ve Sonuç 1.2.7 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(E) &= \iiint_E \mathbf{1}\,dV = \iint_{E_3}\int_0^{4-r^2} dzdA \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{2}(4-r^2)r\,drd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^2(4-r^2)r\,drd\theta = \frac{11\pi}{2}\end{aligned}$$

bulunur.

$\mathbb{R}^3$ içinde ***küresel koordinatlar***, her $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için, $\rho := \|(x,y,z)\|$, pozitif x-ekseninden $L((0,0,0);(x,y,0))$ doğru parçasına saat yelkovanının ters yönünde ölçülen açı θ, ve pozitif z-ekseninden (x,y,z) vektörüne ölçülen açı φ olmak üzere,

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\varphi$$

dönüşümleriyle tanımlanır. $\phi(\rho,\varphi,\theta) := (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$ olarak tanımlanan $\mathcal{C}^1$-sınıfından $\phi : \{(\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geqslant 0\} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun $\Omega := \{(\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho > 0,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$ üzerinde bire-bir olduğu; aynı zamanda da,

$$\Delta_\phi = \det\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{bmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

olduğundan, $Z := \{(\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho = 0,\ \varphi = 0,\pi\}$ kümesi dışında $\Delta_\phi \neq 0$ koşulunun sağlandığı kolayca görülür. Böylece, her E Jordan bölgesi için $Z \cap E$

kümesi sıfır-hacimli olduğundan, Teorem 1.4.5 nedeniyle, $\phi(E)$ bir Jordan bölgesi ve f ve $f \circ \phi|\Delta_\phi|$ fonksiyonları, sırasıyla, $\phi(E)$ ve E üzerinde integrallenebilir olduğunda (1.4.12) eşitliğinin sağlandığı görülmüş olur. Küresel koordinatlardan kartezyen koordinatlara yukarıdaki biçimde tanımlanan dönüşüm formülü $dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ olarak kısaltılacaktır.

Örnek 1.4.9. $\mathbb{R}^3$ içinde $Q := B_3(\mathbf{0}) \setminus B_2(\mathbf{0})$ ise, küresel koordinatlar kullanıldığında,

$$\iiint_Q x\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^3 \rho \sin\varphi \cos\theta (\rho^2 \sin\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 0$$

olarak elde edilir.

Teorem 1.4.4 ve Teorem 1.4.5, kutupsal, silindirik, ve küresel koordinat dönüşümlerinin dışında birtakım değişken dönüşümleri için de kullanılabilir.

Örnek 1.4.10. $y = 2x - 1$, $y = 2x + 3$, $y = -x$, ve $y = -x + 1$ ile sınırlanan E bölgesi üzerinde

$$\iint_E \sin(x+y)\cos(2x-y)\, dA$$

integrali göz önüne alınsın. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $\phi(x, y) := (2x - y, x + y)$ olsun. Cramer Kuralı'ndan[9] dolayı, sabitlenmiş her $u, v \in \mathbb{R}$ için, $u = 2x - y$, $v = x + y$ sisteminin x ve y değişkenlerine göre tek bir çözümü vardır; yani, ϕ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bire-birdir. Diğer taraftan, $\mathcal{C}^1$-sınıfından olduğu bâriz olan bu fonksiyon,

$$\Delta_\phi(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$$

koşulunu sağlar. Dolayısıyla, $f(u, v) := \cos u \sin v$ olmak üzere, verilen integral (1.4.10) eşitliğinin sağ yanı olarak

$$\iint_E \sin(x+y)\cos(2x-y)\, dA = \frac{1}{3} \iint_E f \circ \phi(x, y) \Delta_\phi(x, y)\, d(x, y)$$

şelinde ifade edilmiş olur.

Şimdi, $y = 2x - 1$ olduğunda $u = 1$, $y = 2x + 3$ olduğunda $u = -3$, $y = -x$ olduğunda $v = 0$, ve $y = -x + 1$ olduğunda $v = 1$ elde edildiği gözlemlenirse,

[9] Bkz. [22, Theorem 2.104].

$\phi(E) = [-3, 1] \times [0, 1]$ olarak bulunur. Böylece, Teorem 1.4.4 kullanılarak,

$$\iint_E \sin(x+y)\cos(2x-y)\,dA = \frac{1}{3}\int_0^1\int_{-3}^1 \sin v \cos u \,du\,dv$$
$$= \frac{1}{3}(\sin 1 + \sin 3)(1 - \cos 1)$$

sonucuna ulaşılır.

Problemler

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız:

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{(4-x^2)}} \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt[3]{(2y-y^2)^2}\,dy\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_a^b\int_0^x \sqrt{(x^2+y^2)}\,dy\,dx$, $0 \leqslant a < b$; (d) $\displaystyle\int_1^2\int_{\sqrt{x}}^x \sin(\pi x/(2y))\,dy\,dx$.

2. Aşağıda verilen her E bölgesi ve her f fonksiyonu için, $\iint_E f\,dA$ integralini hesaplayınız:

(a) $x^2 + y^2/3 \leqslant 1$ koşulunu sağlayan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktalarından oluşan E bölgesi üzerinde, $f(x, y) := \cos(3x^2 + y^2)$;

(b) köşeleri $(0, 0)$, $(4, 0)$, ve $(4, 2)$ noktaları olan üçgenle sınırlanan E bölgesi üzerinde, $f(x, y) := y\sqrt{(x-2y)}$.

3. Aşağıda verilen her E bölgesi ve her f fonksiyonu için, $\iiint_E f\,dV$ integralini hesaplayınız:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 6$ ve $z \geqslant x^2 + y^2$ koşullarını sağlayan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktalarından oluşan E bölgesi üzerinde, $f(x, y, z) := z^2$;

(b) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$, ve $z \geqslant 0$ koşullarını sağlayan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktalarından oluşan E bölgesi üzerinde, $f(x, y, z) := e^z$;

(c) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant \sqrt{(x^2+y^2)}$, ve $x \geqslant 0$ koşullarını sağlayan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktalarından oluşan E bölgesi üzerinde, $f(x, y, z) := (x-y)z$.

4. (a) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ elipsoidi ile sınırlanan bölgenin hacminin $4\pi abc/3$ olduğunu kanıtlayınız.

(b) a, b, c, d pozitif gerçel sayılar ve $r^2 < d^2/(b^2+c^2)$ olsun. $y^2 + z^2 = r^2$ ve $ax + by + cz = d$ ile sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

(c) Her $a \geqslant 0$ için, $x^2 + z^2 = a^2$ ve $y^2 + z^2 = a^2$ silindirleriyle sınırlanan bölgenin hacminin $16a^3/3$ olduğunu gösteriniz.

(d) $a \geqslant 0$ olmak üzere, $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, ve $x^2 + z^2 = a^2$ silindirleriyle sınırlanan bölgenin hacmini hesaplayınız.

5. (a) Köşeleri $(0, 0)$, $(2/3, -1/3)$, $(1, 0)$, ve $(1/3, 1/3)$ olan paralelkenar E olmak üzere, $\iint_E \sqrt{(x-y)}\sqrt{(x+2y)}\,dA$ integralini hesaplayınız.

(b) $y = x/3$, $y = (x-1)/3$, $y = -2x$, ve $y = 1-2x$ doğrularıyla sınırlanan paralelkenar E olmak üzere, $\iint_E \sqrt[3]{(2x^2 - 5xy - 3y^2)}\,dA$ integralini hesaplayınız.

(c) Köşeleri $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,0)$, ve $(4,0)$ olan yamuk E olmak üzere,

$$\iint_E e^{(y-x)/(y+x)}\,dA$$

integralini hesaplayınız.

(d) Eğer $\int_0^1 (1-x)f(x)\,dx = 5$ ise,

$$\int_0^1 \int_0^x f(x-y)\,dy\,dx$$

integralini hesaplayınız.

6. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme ve sürekli-diferansiyellenebilir olan $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için V üzerinde $\Delta_f \neq 0$ olsun. Her $\mathbf{x}_0 \in V$ için,

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mathrm{Vol}\,(f(B_r(\mathbf{x}_0)))}{\mathrm{Vol}\,(B_r(\mathbf{x}_0))} = |\Delta_f(\mathbf{x}_0)|$$

olduğunu kanıtlayınız.

7. (a) Vol fonksiyonunun, $\mathbb{R}^2$ içinde, ***rotasyon (dönme) altında invaryant (değişmez)*** kaldığını ispatlayınız: diğer bir deyişle, eğer ϕ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir rotasyon[10] ve $E \subseteq \mathbb{R}^2$ bir Jordan bölgesi ise,

$$\mathrm{Vol}\,(\phi(E)) = \mathrm{Vol}\,(E)$$

olduğunu gösteriniz.

(b) §1.1, Problem 3 (a), Vol fonksiyonunun, $\mathbb{R}^n$ içinde, ***ötelenme altında invaryant*** kaldığını gösterir. Bunu ve (a) kısmında elde edilen sonucu kullanarak, yarıçapı r olan bir kürenin hacminin $(4/3)\pi r^3$, yüksekliği h ve taban yarıçapı r olan bir dik dairesel koninin hacminin ise $\pi r^2 h/3$ olduğunu kanıtlayınız.

8. Her $j = 1, \ldots, n$ için, $\mathbf{v}_j := (v_{j1}, \ldots, v_{jn}) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) := \{t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n \mid \text{ her } j = 1, \ldots, n \text{ için } t_j \in [0,1]\}$$

kümesi, $\{\mathbf{v}_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ vektörleri tarafından belirlenen ***paralelyüzlü*** olarak adlandırılır. Eğer $\det\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) := \det\,[v_{jk}]_{n\times n}$ ise,

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{P}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)) = |\det\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|$$

olduğunu kanıtlayınız; bu formülü $n = 2$ ve $n = 3$ durumlarında göz önüne alarak, sırasıyla, bir paralelkenarın ve bir dörtyüzlünün hacmini veren klâsik formüllerle[11] uyuştuğunu gösteriniz.

9. (a) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ genelleştirilmiş integralinin sonlu bir gerçel sayıya yakınsadığını ispatlayınız.

(b) Eğer (a) kısmındaki integralin değeri I ise,

$$I^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^N e^{-r^2} r\,dr\,d\theta$$

eşitliğini kanıtlayınız.

---

[10] Bkz. III/§1.1, Problem 6.
[11] Bkz. III/§1.1, Problem 5.

(c)
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
olduğunu gösteriniz.

(d) Q_k, n-boyutlu $[-k,k]\times\cdots\times[-k,k]$ kübünü göstersin.
$$\lim_{k\to\infty}\int_{Q_k} e^{-\|\mathbf{x}\|^2}\,d\mathbf{x}$$
değerini bulunuz.

10. H kümesi konveks ve V kümesi açık olmak üzere, $H\subseteq V\subseteq\mathbb{R}^n$ olsun, ve $\mathcal{C}^1$-sınıfından $\phi: V\to\mathbb{R}^n$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

(a) Eğer E kümesi H° kümesinin bir kapalı alt-kümesi ve, $\mathbf{x}\in V$ ve yeterince küçük $\mathbf{h}$ vektörleri için
$$\varepsilon_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) := \phi(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\phi(\mathbf{x})-D\phi(\mathbf{x})(\mathbf{h})$$
ise, bu durumda $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ için, E üzerinde düzgün olarak $\varepsilon_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})/\|\mathbf{h}\|\to 0$ yakınsamasının sağlandığını kanıtlayınız.

(b) H° içinde bir kapalı dikdörtgen R ise ve bir $\mathbf{x}\in R$ için $S:=[D\phi(\mathbf{x})]^{-1}$ varsa, her $\varepsilon>0$ için $\delta>0$ ve $M>0$ sabitlerinin ve bir $T(\mathbf{x},\mathbf{y})$ fonksiyonunun, her $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R$ için
$$S\circ\phi(\mathbf{x})-S\circ\phi(\mathbf{y})=\mathbf{x}-\mathbf{y},$$
ve $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|<\delta$ olduğunda $\|T(\mathbf{x},\mathbf{y})\|\leqslant M\varepsilon$ gerçeklenecek biçimde var olduklarını ispatlayınız.

(c) (a) ve (b) kısımlarında elde edilenleri kullanarak, V üzerinde $\Delta_\phi\neq 0$, $\mathbf{x}\in H^\circ$, ve ε sayısı yeterince küçük ise, sadece H, ϕ, n, ve ε değerlerine bağlı olan $C_\varepsilon>0$ sayılarının, ve bir $\delta>0$ sayısının, $\varepsilon\to 0$ için $C_\varepsilon\to 1$ ve $\mathbf{x}$ noktasını içerip $\mathrm{Vol}\,(Q)<\delta$ koşulunu sağlayan her $Q\subseteq H$ kübü için $\mathrm{Vol}\,(S\circ\phi(Q))\leqslant C_\varepsilon|Q|$ gerçeklenecek şekilde var olduklarını kanıtlayınız.

(d) (c) kısmında elde edilen sonucu ve Problem 8'i kullanarak, eğer V üzerinde $\Delta_\phi\neq 0$ ve $\mathbf{x}\in H^\circ$ ise, her $j\in\mathbb{N}$ için $\mathbf{x}\in Q_j$ ve $j\to\infty$ için $\mathrm{Vol}\,(Q_j)\to 0$ koşulunu sağlayan her $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ küpler dizisinin, $j\to\infty$ için $\mathrm{Vol}\,(\phi(Q_j))/|Q_j|\to|\Delta_\phi(\mathbf{x})|$ özelliğini gerçeklediğini ispatlayınız.

1.5 Birimin ayrışımları

Bu kısmın amacı, Öklidyen uzayların alt-kümeleri üzerinde tanımlı ve 'yeterince düzgün' olan fonksiyonların her biri 'küçük' bir kümenin dışında sıfıra eşit olan aynı tipte fonksiyonların toplamı olarak ifade edilebileceklerini göstermek, ve bunu kullanarak global olarak sağlanan ve ifadesi bir önceki kısımda Teorem 1.4.5 ile verilen değişken dönüştürme formülünü kanıtlamaktır.

Tanım 1.5.1. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(i) f fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı kümenin kapanışına, yani

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

kümesine, f fonksiyonunun ***dayanağı*** denir.

(ii) Eğer $\operatorname{supp} f$ kümesi kompakt ise, f fonksiyonunun "***kompakt dayanaklı*** olduğu," söylenir.

Örnek 1.5.2. Gerçel eksen üzerinde

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ ise;} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}$ olur.

Örnek 1.5.3. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \text{ ise;} \\ 2, & x \in (1,2) \text{ ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $\operatorname{supp} f = [0,2]$ olur.

Açıklama 1.5.4. Bir fonksiyonun dayanağı tanım gereğince kapalı olduğundan, Heine-Borel Teoremi nedeniyle, bir f fonksiyonunun kompakt dayanaklı olması için gerek ve yeter şart $\operatorname{supp} f$ kümesinin sınırlı olmasıdır.

Açıklama 1.5.5. Eğer $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ise,

$$\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$$

olur: Gerçekten, eğer $(f+g)(\mathbf{x}) \neq 0$ ise, $f(\mathbf{x}) \neq 0$ veya $g(\mathbf{x}) \neq 0$ olmak zorundadır. Böylece,

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (f+g)(\mathbf{x}) \neq 0\} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \neq 0\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\}$$

olduğu görülür; bu ise, iki kümenin birleşiminin kapanışı bu kümelerin kapanışlarının birleşimine eşit olduğundan[12] ve kapanış işlemi içerme bağıntısı altında korunduğundan,[13] $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$ içermesinin sağlanması anlamına gelir. Dolayısıyla, III/Teorem 1.3.18 (i) nedeniyle, kompakt dayanaklı iki fonksiyonun toplamı da kompakt dayanaklıdır.

[12]Bkz. III/§1.2, Problem 7 (b).
[13]Bkz. III/S. 16, **Problemler**'den önceki son paragraf.

$p \in \mathbb{N}$ veya $p = \infty$ olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından[14] olan ve kompakt dayanaklı $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{C}_c^p(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilecektir. Açıklama 1.5.5 nedeniyle, eğer her $j = 1, \ldots, N$ için $f_j \in \mathcal{C}_c^p(\mathbb{R}^n)$ ise,

$$\sum_{j=1}^{N} f_j \in \mathcal{C}_c^p(\mathbb{R}^n)$$

gerçeklenir—basit ancak önemli olan bu gözlem, bu kısmın içinde sık sık kullanılacaktır.

Eğer f fonksiyonu ($\mathcal{C}^\infty$-sınıfından olmaktan daha kuvvetli bir nitelik olan) analitik[15] olma özelliğine sahip ve kompakt dayanaklı ise, f fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşittir (bkz. Problem 4); dolayısıyla, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ailesinin sıfır fonksiyonu dışında bir fonksiyon içerdiği yolundaki iddia, âşikâr olmaktan uzak ve kanıtlanmaya muhtaç bir önermedir: Teorem 1.5.8 ve Problem 7 ile, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ailesinin, sadece sıfırdan farklı fonksiyonlar içerdiğini değil, her kompakt kümeyi 'yaklaşık olarak' belirleyebilmek için yeterli sayıda fonksiyona sahip olduğunu kanıtlayacağız.

İlk olarak, bir-boyutlu durumla başlayalım.

Lemma 1.5.6. *Her $a < b$ gerçel sayılar çifti için bir $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu, $t \in (a, b)$ için $\phi(t) > 0$ ve $t \notin (a, b)$ için $\phi(t) = 0$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. Gerçel eksen üzerinde

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0 \text{ ise;} \\ 0, & t = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

[14]Bkz. III/Tanım 2.1.1.

[15]$V \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ise ve Taylor Formülü'nün (bkz. III/Teorem 2.3.7) ifadesindeki $R_p(\mathbf{a}) := \frac{1}{p!} D^{(p)} f(\mathbf{c}; \mathbf{h})$ terimi için $\lim_{p\to\infty} R_p(\mathbf{a}) = 0$ oluyorsa, bu durumda $\mathbf{h} := \mathbf{x} - \mathbf{a}$ için

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(\mathbf{a}; \mathbf{h}) \tag{1.5.1}$$

eşitliği sağlanır; (1.5.1) eşitliğinin sağ yanındaki seriye, f fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki ***Taylor serisi*** denir. Her $\mathbf{a} \in V$ için $\mathbf{a}$ noktasını içeren bir U açık kümesi, f fonksiyonunun $\mathbf{a}$ noktasındaki Taylor serisi her $\mathbf{x} \in U$ için $f(\mathbf{x})$ değerine yakınsayacak biçimde varsa, f fonksiyonu V üzerinde ***(reel-) analitik*** olarak adlandırılır. Bâriz biçimde, her analitik fonksiyon $\mathcal{C}^\infty$-sınıfındandır; bu önermenin tersi ise, genel olarak doğru değildir (bkz. Problem 3). Reel-analitik fonksiyonlarla ilgili geniş bilgi için: bkz. [14].

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ailesine aittir, ve her $j \in \mathbb{N}$ için $f^{(j)}(0) = 0$ olur (bkz. Problem 3). Dolayısıyla,

$$\phi(t) := \begin{cases} e^{-1/(t-a)^2} e^{-1/(t-b)^2}, & t \in (a,b) \text{ ise;} \\ 0, & \text{diğer durumlarda;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ailesine aittir, her $t \in (a,b)$ için $\phi(t) > 0$ koşulunu sağlar, ve $\operatorname{supp}\phi = [a,b]$ özelliğine sahiptir. □

Şimdi de, yine bir-boyutlu durum için olmak üzere, sıfırdan farklı ve $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından olup küçük bir aralık dışında her yerde sabit olan bir fonksiyonun var olduğunu görelim.

Lemma 1.5.7. *Her $\delta > 0$ sayısı için $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından olan bir ψ fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathbf{0} \leqslant \psi \leqslant \mathbf{1}$, her $t \leqslant 0$ için $\psi(t) = 0$, ve her $t > \delta$ için $\psi(t) = 1$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. Lemma 1.5.6 kullanılıp her $t \in (0,\delta)$ için $\phi(t) > 0$ ve her $t \notin (0,\delta)$ için $\phi(t) = 0$ koşullarını sağlayan bir $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu seçilerek, $t \in \mathbb{R}$ için

$$\psi(t) := \frac{\int_0^t \phi(u)\,du}{\int_0^\delta \phi(u)\,du}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, İntegral Hesabın Temel Teoremi[16] nedeniyle $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ olur, tanımı nedeniyle ψ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathbf{0} \leqslant \psi \leqslant \mathbf{1}$ özelliğini sağlar, ve

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \text{ ise;} \\ 1, & t > \delta \text{ ise;} \end{cases}$$

gerçeklenir. □

Artık, Lemma 1.5.6 ve Lemma 1.5.7 ile verilen bir-boyutlu sonuçları kullanarak, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ailesinin sıfırdan farklı fonksiyonlar içerdiğini gösterebilecek durumdayız.

Teorem 1.5.8 (Urysohn Lemması'nın $\mathcal{C}^\infty$-uyarlaması)**.** *$H \subseteq \mathbb{R}^n$ bir kompakt küme, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, ve $H \subseteq V$ olsun. Bu durumda, her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için $0 \leqslant h(\mathbf{x}) \leqslant 1$, her $\mathbf{x} \in H$ için $h(\mathbf{x}) = 1$, ve $\operatorname{supp} h \subseteq V$ olacak biçimde bir $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu vardır.*

[16] Bkz. [23, Theorem 3.13].

Kanıt. Lemma 1.5.6 kullanılarak, $t \in (-1,1)$ için $\phi(t) > 0$ ve $t \notin (-1,1)$ için $\phi(t) = 0$ koşullarını sağlayan bir $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu alınsın. Her $\varepsilon > 0$ ve her $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $Q_\varepsilon(\mathbf{x})$ simgesiyle, n-boyutlu

$$Q_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{ her } j = 1, \dots, n \text{ için } |y_j - x_j| \leqslant \varepsilon\}$$

kübü gösterilsin. Aynı zamanda

$$g_\varepsilon(\mathbf{y}) := \phi\left(\frac{y_1}{\varepsilon}\right) \cdots \phi\left(\frac{y_n}{\varepsilon}\right) \tag{1.5.2}$$

tanımı yapılarak, tek-değişkenli fonksiyonların türevleri için geçerli olan Çarpım Kuralı[17] nedeniyle, g_ε fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından olduğu gözlemlensin. Bu durumda, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $g_\varepsilon(\mathbf{y}) \geqslant 0$ gerçeklenir, $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ açık topuna ait her $\mathbf{y}$ noktası için $g_\varepsilon(\mathbf{y}) > 0$ sağlanır, ve g_ε fonksiyonunun dayanağı $Q_\varepsilon(\mathbf{0})$ kübünün bir alt-kümesi olur. Özel olarak da, $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür.

Şimdi, bu g_ε fonksiyonlarını öteleyerek elde edilecek fonksiyonların toplamlarını göz önüne alıp, dayanağı V kümesi üzerinde bulunan ve H üzerinde kesin pozitif olan, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından bir fonksiyon kuracağız.

Her $\mathbf{x} \in H$ için bir $\varepsilon := \varepsilon_\mathbf{x} > 0$ sayısı, $Q_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq V$ içermesi sağlanacak biçimde alınsın; diğer taraftan her $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ için

$$h_\mathbf{x}(\mathbf{y}) := g_\varepsilon(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

olarak tanımlanıp, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $h_\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, her $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x})$ için $h_\mathbf{x}(\mathbf{y}) > 0$, her $\mathbf{y} \notin Q_\varepsilon(\mathbf{x})$ için $h_\mathbf{x}(\mathbf{y}) = 0$, ve $h_\mathbf{x} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğu gözlemlensin. H kümesinin kompakt olduğu ve

$$H \subseteq \bigcup_{\mathbf{x} \in H} B_\varepsilon(\mathbf{x})$$

içermesinin sağlandığı göz önüne alınarak, $j = 1, \dots, N$ için, $\mathbf{x}_j \in H$ noktaları ve $\varepsilon_j := \varepsilon_{\mathbf{x}_j}$ sayıları,

$$H \subseteq B_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon_N}(\mathbf{x}_N)$$

gerçeklenecek biçimde seçilsin. Bunlar kullanılarak,

$$Q := Q_{\varepsilon_1}(\mathbf{x}_1) \cup \cdots \cup Q_{\varepsilon_N}(\mathbf{x}_N) \qquad \text{ve} \qquad f := h_{\mathbf{x}_1} + \cdots + h_{\mathbf{x}_N}$$

şeklinde tanımlansın.

[17] Bkz. [23, Theorem 2.13].

Bâriz biçimde, Q kümesi kompakttır, $Q \subseteq V$ içermesi sağlanır, ve f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfındandır. Eğer $\mathbf{x} \notin Q$ ise, her $j = 1, \dots, N$ için $\mathbf{x} \notin Q_{\varepsilon_j}(\mathbf{x}_j)$ olduğundan, $f(\mathbf{x}) = 0$ olur. Dolayısıyla, $\operatorname{supp} f \subseteq Q$ sağlanır. Eğer $\mathbf{x} \in H$ ise, bir $j \in \{1, \dots, N\}$ için $\mathbf{x} \in B_{\varepsilon_j}(\mathbf{x}_j)$ olacağından, $f(\mathbf{x}) > 0$ gerçeklenir. Kanıtı tamamlamak için, o hâlde, f fonksiyonunu 'düzleştirerek' H üzerinde özdeş olarak bire eşit olmasını sağlamak yeterlidir.

Kompakt olan H kümesi üzerinde $f > \mathbf{0}$ olduğundan, Ekstremum Değer Teoremi[18] nedeniyle, f fonksiyonu H üzerinde sıfırdan farklı bir minimum değerine sahiptir; yani bir $\delta > 0$ sayısı, her $\mathbf{x} \in H$ için $f(\mathbf{x}) > \delta$ olacak şekilde vardır. Lemma 1.5.7'den de, $t \leqslant 0$ iken $\psi(t) = 0$ ve $t > \delta$ iken $\psi(t) = 1$ olacak şekilde bir $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunur. Şimdi $h := \psi \circ f$ olarak alınırsa, $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğu, $\operatorname{supp} h \subseteq Q \subseteq V$ içermelerinin sağlandığı, ve H üzerinde $f > \delta$ olduğundan aynı küme üzerinde $h \equiv \mathbf{1}$ özdeşliğinin de gerçeklendiği görülür. Son olarak, $\mathbf{0} \leqslant \psi \leqslant \mathbf{1}$ olması ise, aynı özelliğin h için de geçerli olması anlamına gelir. □

Teorem 1.5.8 yardımıyla, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından fonksiyonlar için aşağıdaki ayrışım teoremine ulaşılır.

Teorem 1.5.9 (Birimin $\mathcal{C}^\infty$-ayrışımları)**.** *$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ boş-olmayan bir küme ve $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ailesi Ω kümesinin bir açık örtülüşü[19] olsun. Her $j \in \mathbb{N}$ için, aşağıdaki özellikler doğru olacak biçimde, $\phi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları ve $\alpha_j \in I$ indisleri vardır:*

(i) *Her $j \in \mathbb{N}$ için, $\phi_j \geqslant \mathbf{0}$ olur.*

(ii) *Her $j \in \mathbb{N}$ için,* $\operatorname{supp} \phi_j \subseteq V_{\alpha_j}$ *içermesi sağlanır.*

(iii) *Her $\mathbf{x} \in \Omega$ için, $\sum_{j=1}^\infty \phi_j(\mathbf{x}) = 1$ gerçeklenir.*

(iv) *Eğer $H \subseteq \Omega$ kümesi kompakt ise, bir $W \supseteq H$ açık kümesi ve bir N tam sayısı, her $j \geqslant N$ ve her $\mathbf{x} \in W$ için $\phi_j(\mathbf{x}) = 0$ olacak biçimde bulunur. Özel olarak, her $\mathbf{x} \in W$ için*

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_j(\mathbf{x}) = 1$$

olur.

[18]Bkz. III/Teorem 1.6.9.

[19]Bkz. III/Tanım 1.3.13.

Kanıt. Her $\mathbf{x} \in \Omega$ için,

$$\mathbf{x} \in W_{\mathbf{x}} \subseteq \overline{W_{\mathbf{x}}} \subseteq V_\alpha$$

olacak şekilde, sınırlı ve açık bir $W_{\mathbf{x}}$ kümesi ve bir $\alpha \in I$ indisi alınsın. Bu durumda $\mathcal{W} := \{W_{\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \in \Omega\}$ ailesi Ω kümesinin bir açık örtülüşü olur, ve Lindelöf Teoremi'nden[20] dolayı $\mathcal{W} = \{W_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ olarak alınabilir. Dolayısıyla, her $j \in \mathbb{N}$ için bir $\alpha_j \in I$ indisi,

$$W_j \subseteq \overline{W_j} \subseteq V_{\alpha_j}$$

sağlanacak biçimde bulunmuş olur. Diğer taraftan, Teorem 1.5.8 kullanılarak her $j \in \mathbb{N}$ için $h_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\mathbf{0} \leqslant h_h \leqslant \mathbf{1}$, $\overline{W_j}$ üzerinde $h_j \equiv \mathbf{1}$, ve $\operatorname{supp} h_j \subseteq V_{\alpha_j}$ olacak şekilde seçilebilir. Şimdi, $\phi_1 := h_1$ ve $j > 1$ için

$$\phi_j := (1 - h_1) \cdots (1 - h_{j-1}) h_j$$

olarak tanımlanırsa, her $j \in \mathbb{N}$ için, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\phi_j \geqslant \mathbf{0}$ olduğu, ve $\phi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ özelliğinin $\operatorname{supp} \phi_j \subseteq \operatorname{supp} h_j \subseteq V_{\alpha_j}$ içermeleriyle birlikte sağlandığı görülür. Böylece, (i) ve (ii) kanıtlanmış olur.

Öte yandan, tümevarım kullanılarak, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j=1}^{k} \phi_j = 1 - (1 - h_1) \cdots (1 - h_k)$$

elde edilir. Eğer $\mathbf{x} \in \Omega$ ise, bir $j_0 \in \mathbb{N}$ için $\mathbf{x} \in W_{j_0}$ olacağından, $1 - h_{j_0}(\mathbf{x}) = 0$ olur. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{k} \phi_j = 1 - 0 = 1$$

eşitliğinin $k \geqslant j_0$ için sağlandığı sonucuna ulaşılır. Eğer H kümesi Ω kümesinin bir kompakt alt-kümesi ise, bu durumda bir $N \in \mathbb{N}$ için $H \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_N$ gerçeklenir. $W := W_1 \cup \cdots \cup W_N$ denilirse, $\mathbf{x} \in W$ olmasının bir $k \in \{1, \ldots, N\}$ için $h_k(\mathbf{x}) = 1$ olmasını gerektirdiği görülür; yani, her $j > N$ için $\phi_j(\mathbf{x}) = 0$ olur. Dolayısıyla, her $\mathbf{x} \in W$ için

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\mathbf{x}) = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, (iii) ve (iv) özelliklerinin de sağlandığı kanıtlanmış olur. $\square$

[20]Bkz. III/Teorem 1.2.11.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir örtülüşünü meydana getiren V_α kümelerinin her birinin boştan farklı ve açık olduğu, ve sürekli ve kompakt dayanaklı olan her ϕ_j fonksiyonunun Teorem 1.5.9'un ifadesinde verilen (i), (ii), (iii), ve (iv) özelliklerini gerçeklediği bir $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine, ***birimin Ω üzerinde $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ örtülüşüne bağımlı bir ($\mathcal{C}^0$-) ayrışımı*** denir. Birimin, ϕ_j fonksiyonları $\mathcal{C}^p(\Omega)$ ailesine ait olan Ω üzerinde bağımlı bir ayrışımı, ***birimin Ω üzerinde bir $\mathcal{C}^p$-ayrışımı*** olarak adlandırılır. Teorem 1.5.9'dan ötürü $\mathbb{R}^n$ içindeki boştan farklı her Ω kümesinin verilen her $\mathcal{V}$ açık örtülüşü ve her p genişletilmiş gerçel sayısı için, birimin Ω üzerinde $\mathcal{V}$ örtülüşüne bağımlı bir $\mathcal{C}^p$-ayrışımı vardır.

Birimin $\mathcal{C}^p$-ayrışımları, verilen bir fonksiyonu, en az kendisi kadar 'düzgünlüğe' sahip ve dayanakları daha küçük olan fonksiyonların toplamı olarak ayrıştırmakta kullanılır. Örneğin, f fonksiyonu bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlı ve $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi birimin Ω üzerinde $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ örtülüşüne bağımlı bir $\mathcal{C}^p$-ayrışımı ise, her $j \in \mathbb{N}$ için $f_j := f\phi_j$ olmak üzere,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} f(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\mathbf{x})$$

eşitlikleri her $\mathbf{x} \in \Omega$ için sağlanır: eğer f fonksiyonu Ω üzerinde sürekli ve $p \geqslant 0$ ise, bu durumda her f_j fonksiyonu da Ω üzerinde sürekli olur; eğer f fonksiyonu Ω üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir ve $p \geqslant 1$ ise, o zaman her f_j fonksiyonu da Ω üzerinde sürekli-diferansiyellenebilirdir. Bu türden bir bakış açısı, lokal olarak sağlanan sonuçlardan global olarak sağlanan sonuçlara geçebilmeyi mümkün kılar; eğer verilen bir özelliğin, örneğin, Ω içindeki küçük açık kümeler üzerinde gerçeklendiği biliniyorsa, birimin Ω kümesinin küçük açık kümelerden oluşan bir örtülüşüne bağımlı bir ayrışımı kullanılarak, benzer bir özelliğin Ω kümesinin tamâmının üzerinde de gerçekleneceği gösterilebilir.

Bu bakış açısından hareket ederek, şimdi, Jordan bölgeleri üzerinde tanımlanan Riemann integralinin sınırlı ve açık kümelere−bu kümeler Jordan bölgeleri olmasalar bile−genişletilebileceğini göreceğiz. Genelleştirilmiş integral[21] kavramının çok-boyutlu benzeri olan bu genişletme işleminin ana fikri, sınırlı ve açık bir $V \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde tanımlı ve bu küme üzerinde ***lokal-integrallenebilir*** olan, yani V kümesinin içinde kalan her H kapalı Jordan bölgesi üzerinde integrallenebilen,[22] bir $f : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu göz önüne almaktır. Aynı zamanda, her $\mathbf{x} \in V$ için $\mathbf{x} \in V_\mathbf{x} \subseteq V$ koşulunu sağlayan bir $V_\mathbf{x}$ açık Jordan bölgesi ($V_\mathbf{x}$, örneğin, bir açık top olabilir) seçilebileceğinden, V için bir $\{V_\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V\}$ açık örtülüşü elde edilebilir, ve Lindelöf Teoremi'nden

[21] Bkz. III/Dipnot 5, s.56.
[22] Tek-değişkenli fonksiyonlar için yapılan tanımla karşılaştırmak için: bkz. III/Dipnot 5, s.56.

dolayı bu örtülüşün bir $\mathcal{V} := \{V_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir alt-örtülüşü vardır. Diğer taraftan da, Teorem 1.5.9 nedeniyle, birimin V üzerinde $\mathcal{V}$ örtülüşüne bağımlı bir ayrışımı olan bir $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunabilir. f fonksiyonu V üzerinde lokal-integrallenebilir olduğundan, o hâlde, her $f\phi_j$ fonksiyonu integrallenebilirdir. Bu ise, $f = \sum_{j=1}^{\infty} f\phi_j$ eşitliği sağlandığından,

$$\int_V f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{V_j} f(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

tanımını yapmanın anlamlı olabileceğini akla getirir. Bu tanımı yapabilmek için, yukarıdaki son eşitlikle verilen serinin yakınsak olup olmadığını, ve eğer yakınsaksa göz önüne alınan birimin ayrışımı değiştiğinde değerinin aynı kalıp kalmadığını belirlemek gereklidir. Aşağıdaki iki yardımcı sonuç, bu soruların cevaplarıdır.

Lemma 1.5.10. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, ve*

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$$

koşulunu gerçekleyen V içindeki boştan farklı açık Jordan bölgelerinin bir ailesi $\mathcal{V} := \{V_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ olsun. $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun, V üzerinde sınırlı ve her V_j üzerinde integrallenebilir olduğu varsayılsın. Eğer $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, birimin V üzerinde $\mathcal{V}$ örtülüşüne bağımlı bir ayrışımı ise, bu durumda

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{V_j} \phi_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.5.3}$$

serisi mutlak yakınsaktır.

Kanıt. V kümesini içeren n-boyutlu bir dikdörtgen R, ve $M := \sup_{\mathbf{x}\in V} |f(\mathbf{x})|$ olsun. Her $j \in \mathbb{N}$ için, ϕ_j fonksiyonunun dayanağı V_j üzerinde olduğundan, $\phi_j f$ fonksiyonu V_j üzerinde integrallenebilirdir. Ayrıca, $N \in \mathbb{N}$ olmak üzere, eğer

$E = \cup_{j=1}^{N} V_j$ ise,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\left|\int_{V_j}\phi_j(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{N}\int_E |\phi_j(\mathbf{x})f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\\ &= \int_E \sum_{j=1}^{N}|\phi_j(\mathbf{x})f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\\ &\leqslant M\int_E \sum_{j=1}^{N}|\phi_j(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \leqslant M\,\mathrm{Vol}\,(E) \leqslant M|R| < \infty\end{aligned}$$

olduğu görülür: (1.5.3) serisi, o hâlde, mutlak yakınsaktır. □

Yakınsak olduğu Lemma 1.5.10 ile kanıtlanan (1.5.3) serisinin değeri, ne göz önüne alınan birimin ayrışımına ne de $\mathcal{V}$ örtülüşüne bağlıdır.

Lemma 1.5.11. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı, boştan farklı, ve açık bir küme olsun. $\mathbb{R}^n$ içindeki boştan farklı açık Jordan bölgelerinden oluşan $\mathcal{V} := \{V_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ve $\mathcal{W} := \{W_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ aileleri,*

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$$

koşulunu gerçeklesin. $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun, V üzerinde, sınırlı ve lokal-integrallenebilir olduğu varsayılsın. Eğer $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ve $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sırasıyla, birimin V üzerinde $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{W}$ örtülüşlerine bağımlı birer ayrışımı ise, o zaman

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_{V_j}\phi_j(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{W_k}\psi_k(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{1.5.4}$$

olur.

Kanıt. Lemma 1.5.10 nedeniyle, (1.5.4) ile verilen toplamlar mutlak yakınsaktır. Problem 6'dan dolayı, $(\phi_j\psi_k)_{j,k\in\mathbb{N}}$ dizisi birimin V üzerinde $\{V_j \cap W_k \mid j,k \in \mathbb{N}\}$ örtülüşüne bağımlı bir ayrışımıdır. Dolayısıyla,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_V \phi_j(\mathbf{x})\psi_k(\mathbf{x})f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

serisi de mutlak yakınsak olur. Şimdi, $j \in \mathbb{N}$ sabitlensin. Bu durumda, $\operatorname{supp} \phi_j$ kompakt olduğundan bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı, $k > N$ ve $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} \phi_j$ olduğunda $\psi_k(\mathbf{x}) = 0$ olacak biçimde seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\int_{V_j} \phi_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_{V_j} \phi_j(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{N} \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \int_{V_j \cap W_k} \phi_j(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_j \cap W_k} \phi_j(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

elde edilir; bu ise,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{V_j} \phi_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{V_j \cap W_k} \phi_j(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

eşitliğinin sağlanması anlamına gelir. j ve k indislerinin rolleri değiştirilip benzer argümanlarla

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{W_k} \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{V_j \cap W_k} \phi_j(\mathbf{x}) \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

eşitliğine de ulaşılır. Seriler mutlak yakınsak olduklarından, o hâlde, son eşitliğin sağındaki çift-seride toplamın sırasının değiştirilebileceği göz önüne alınarak ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 1.5.11 kullanılarak, sınırlı ve açık bir V kümesi üzerinde lokal-integrallenebilen bir fonksiyonun integrali aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

Tanım 1.5.12. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı, boştan farklı, ve açık bir küme, ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, V üzerinde, sınırlı ve lokal-integrallenebilir olsun. $\mathbb{R}^n$ içindeki boştan farklı açık Jordan bölgelerinden oluşan $\mathcal{V} := \{V_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ailesi,

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$$

koşulunu gerçeklesin. $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, birimin V üzerinde $\mathcal{V}$ örtülüşüne bağımlı bir ayrışımı olsun. Bu durumda

$$I_V(f) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{V_j} \phi_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

değerine, f fonksiyonunun V üzerindeki ***integral***i denir.

V bir Jordan bölgesi olduğunda Tanım 1.5.12'nin verdiği integral kavramının daha önce Tanım 1.2.1 (iv) ile verilen integral tanımıyla uyuştuğu, aşağıdaki teoremin içeriğidir: bundan dolayı, $I_V(f)$ yerine $\int_V f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ yazılımını kullanmakta bir sakınca yoktur.

Teorem 1.5.13. *Eğer E kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde boştan farklı, açık bir Jordan bölgesi ve $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde integrallenebilir ise, bu durumda*

$$\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = I_E(f)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ olsun. E bir Jordan bölgesi olduğundan, bir $R \supseteq E$ dikdörtgeni üzerinde bir $\mathcal{G} := \{Q_1, \ldots, Q_p\}$ ağı,

$$\sum_{Q_\ell \cap \partial E \neq \varnothing} |Q_\ell| < \varepsilon \tag{1.5.5}$$

olacak biçimde seçilebilir.

$$H := \bigcup_{Q_\ell \subseteq E} Q_\ell$$

olarak tanımlanırsa, H kümesi kompakttır, ve (1.5.5) ve §1.1, Problem 4 (d) nedeniyle $\operatorname{Vol}(E \setminus H) < \varepsilon$ gerçeklenir.

$M := \sup_{\mathbf{x}\in E} |f(\mathbf{x})|$ olsun. Her elemanı E kümesi tarafından kapsanan ve $E = \cup_{j=1}^{\infty} R_j^\circ$ koşulunu sağlayan bir dikdörtgenler dizisi $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ve birimin E üzerinde $\mathcal{V} := \{R_j^\circ \mid j \in \mathbb{N}\}$ örtülüşüne bağımlı bir ayrışımı $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ alınsın. H kümesinin kompakt olduğu kullanılarak bir $N_1 \in \mathbb{N}$ sayısı, $j > N_1$ ve $\mathbf{x} \in H$ olduğunda $\phi_j(\mathbf{x}) = 0$ olacak biçimde seçilsin. Bu durumda, her $N \geqslant N_1$ için

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{N} \int_{R_j} \phi_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| &= \left|\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^{N} \int_E \phi_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \\
&\leqslant \int_E \left| f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})\right| d\mathbf{x} \\
&\leqslant M \int_E \left| 1 - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(\mathbf{x})\right| d\mathbf{x} \\
&\leqslant M \operatorname{Vol}(E \setminus H) < M\varepsilon
\end{aligned}$$

olduğu görülür: bu ise, $I_E(f)$ değerinin var ve $\int_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ integraline eşit olması demektir. $\square$

Yeni tanımlarla, tüm sınırlı ve açık kümeler için geçerli olan aşağıdaki değişken dönüştürme formülüne ulaşılır.

Teorem 1.5.14. *$V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı, boştan farklı ve açık bir küme, $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde bire-bir ve sürekli-diferansiyellenebilir, ve $\phi(V)$ kümesi sınırlı olsun. Eğer V üzerinde $\Delta_\phi \neq 0$ ise, o zaman f fonksiyonunun $\phi(V)$ üzerinde ve $(f \circ \phi)|\Delta_\phi|$ fonksiyonunun V üzerinde integrallenebilir olduğu her sınırlı $f : \phi(V) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için*

$$\int_{\phi(V)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_V f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Her $\mathbf{a} \in V$ için, Teorem 1.4.3 kullanılarak, $\overline{W_\mathbf{a}} \subseteq V$ ve

$$\int_{\phi(W_\mathbf{a})} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} = \int_{W_\mathbf{a}} f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \tag{1.5.6}$$

gerçeklenecek biçimde bir $W_\mathbf{a}$ açık dikdörtgeni seçilsin. $\mathcal{W} := \{W_\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in V\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{W}$ ailesi V için bir açık örtülüş olur, ve Lindelöf Teoremi nedeniyle $\mathcal{W} = \{W_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ olduğu varsayılabilir. $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, birimin V üzerinde $\mathcal{W}$ örtülüşüne bağımlı bir ayrışımı, yani

$$\text{her } j \in \mathbb{N} \text{ için } \operatorname{supp}\phi_j \subseteq W_j \subseteq V, \text{ ve her } \mathbf{x} \in V \text{ için } \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\mathbf{x}) = 1$$

özelliklerini sağlayan $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından fonksiyonların bir dizisi olsun. Teorem 1.1.16 sebebiyle, her $\phi(W_j)$ kümesi bir Jordan bölgesidir. III/§2.4, Problem 9'dan, her $\phi(W_j)$ kümesi açıktır. Ve Problem 5 nedeniyle, $(\phi_j \circ \phi^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi birimin $\phi(V)$ üzerinde $\{\phi(W_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ açık örtülüşüne bağımlı bir ayrışımıdır. Tanım 1.5.12 ve (1.5.6) eşitliği kullanılarak, o hâlde,

$$\begin{aligned}
\int_{\phi(V)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi(W_j)} (\phi_j \circ \phi^{-1})(\mathbf{u}) f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{W_j} \phi_j(\mathbf{x}) f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \\
&= \int_V f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Artık, sıfır-hacimli bir küme üzerinde Jacobi determinantları sıfır olan fonksiyonlar için global olarak sağlanan ve ifadesi Teorem 1.4.5 ile verilen katlı integraller için değişken dönüştürme formülünü kanıtlayabilecek durumdayız.

TEOREM 1.4.5'İN KANITI. $V := E^\circ \setminus Z$ denilerek, V kümesinin açık ve sınırlı olduğu gözlemlensin. Aynı zamanda $\phi(E) \supseteq \phi(V)$ olduğundan, $\phi(V)$ kümesi de sınırlıdır. Hipotez nedeniyle, $E \setminus E^\circ \subseteq \partial E$ içermesi sağlanır ve $E \cap Z$ kümesi sıfır-hacimlidir. Ayrıca, §1.1, Problem 7 (a) sebebiyle, $\phi(E \setminus E^\circ)$ ve $\phi(E \cap Z)$ kümeleri de sıfır-hacimli olur. $E = V \cup (E \cap Z) \cup (E \setminus E^\circ)$ ve $\phi(E) = \phi(V) \cup \phi(E \cap Z) \cup \phi(E \setminus E^\circ)$ olduğundan, o hâlde, Teorem 1.2.8, Sonuç 1.2.9, ve Teorem 1.5.14 kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_{\phi(E)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u} &= \int_{\phi(V)} f(\mathbf{u})\,d\mathbf{u}\\ &= \int_V f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = \int_E f(\phi(\mathbf{x}))|\Delta_\phi(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. □

Öklidyen uzaylardaki integrasyon teorisinin pratikteki kullanımları açısından yeterince genel olan Teorem 1.4.5'in daha da geliştirilebileceğini not ederek, bu kısmı kapatacağız: Riemann integrali yerine *Lebesgue integrali* kullanılarak, hem $(f \circ \phi)|\Delta_\phi|$ fonksiyonuyla ilgili olan koşul hem de $\Delta_\phi \neq 0$ şartı kaldırılabilir. Bu konuda detaylı bilgi için [2] ya da [19] kaynaklarına bakılabilir.

Problemler

1. Eğer $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ise, $\operatorname{supp}(fg) \subseteq \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g$ olduğunu gösteriniz.

2. Eğer $f, g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ise, fg ve her α skaleri için αf fonksiyonlarının da $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ailesine ait olduklarını kanıtlayınız.

3. Gerçel eksen üzerinde

$$f(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0 \text{ ise;} \\ 0, & t = 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

(a) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ olduğunu ispatlayınız.

(b) Her $j \in \mathbb{N}$ için $f^{(j)}(0) = 0$ olduğunu göstererek, f fonksiyonunun $x = 0$ noktasını içeren hiçbir aralık üzerinde analitik olmadığını kanıtlayınız.

4. f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde analitik ve bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $f(x_0) \neq 0$ ise, $f \notin \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ olduğunu ispatlayınız.

5. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde bire-bir ve sürekli-diferansiyellenebilir, ve V üzerinde $\Delta_\phi \neq 0$ olsun. $\mathcal{W} := \{W_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ailesinin V için bir açık örtülüş ve, $p \geqslant 1$ olmak üzere, $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin birimin V üzerinde $\mathcal{W}$ örtülüşüne bağımlı bir $\mathcal{C}^p$-ayrışımı olduğu varsayılsın. Bu durumda $(\phi_j \circ \phi^{-1})_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin, birimin $\phi(V)$ üzerinde $\{\phi(W_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ açık örtülüşüne bağımlı bir $\mathcal{C}^1$-ayrışımı olduğunu kanıtlayınız.
6. V kümesi $\mathbb{R}^n$ içinde açık, ve $\mathcal{V} := \{V_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ve $\mathcal{W} := \{W_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ aileleri V için birer örtülüş olsun. Eğer $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ve $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sırasıyla, birimin V üzerinde $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{W}$ örtülüşlerine bağımlı birer $\mathcal{C}^p$-ayrışımı ise, $(\phi_j\psi_k)_{j,k\in\mathbb{N}}$ dizisinin birimin V üzerinde $\{V_j \cap W_k \mid j,k \in \mathbb{N}\}$ örtülüşüne bağımlı bir $\mathcal{C}^p$-ayrışımı olduğunu ispatlayınız.
7. Verilen her $H \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt kümesi için, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından fonksiyonlardan oluşan bir $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin
$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \mathrm{Vol}\,(H)$$
olacak biçimde var olduğunu kanıtlayınız.

1.6 Gama fonksiyonu ve hacim

Bu kısımda gama fonksiyonu tanımlanarak, bu fonksiyon yardımıyla n-boyutlu bir topun hacmini ve $n!$ sayısının yaklaşık değerini veren formüller elde edilecektir.

Eğer $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde lokal-integrallenebilir ise,
$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to\infty}} \int_x^y f(t)\,dt$$
olarak verildiği hatırlanmalıdır.[23] Bunu kullanarak, $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt$ genelleştirilmiş integralinin her $\alpha > 0$ için yakınsak olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 1.6.1. ***Gama fonksiyonu***, $x \in (0,\infty)$ değerleri için, ilgili genelleştirilmiş integral yakınsak olduğunda,
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$
olarak tanımlanır.

Tanımdan dolayı
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1,$$

[23] Bkz. III/Dipnot 5, s. 56.

ve $t = u^2$ değişken dönüşümü yapılıp §1.4, Problem 9 (c) kullanıldığında

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

olduğu görülür. Daha da genel olarak, $\Gamma(x)$ değeri her $x \in (0,\infty)$ için tanımlıdır.

Teorem 1.6.2. *Her $x \in (0,\infty)$ için $\Gamma(x)$ değeri var ve sonludur, aynı x değerleri için $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ eşitliği sağlanır, ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$ olur.*

Kanıt. İntegral iki parçaya ayrılarak,

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt =: I_1 + I_2$$

olarak yazılsın. L'Hôpital Kuralı[24] nedeniyle her $y \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t/2}t^y = 0$$

olduğundan, yeterince büyük t gerçel sayıları için $e^{-t}t^{x-1} \leqslant e^{-t/2}$ eşitsizliği sağlanır; bu ise, Teorem 1.2.11 (i) nedeniyle, I_2 integralinin her $x \in \mathbb{R}$ için sonlu olması demektir.

I_1 integralinin $x > 0$ için sonlu olduğunu göstermek maksadıyla, ilk olarak, $x \geqslant 1$ olduğu varsayılsın. Bu durumda her $t \in [0,1]$ için $t^{x-1} \leqslant 1$ olacağından,

$$I_1 = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-t}\,dt = 1 - \frac{1}{e} < \infty$$

gerçeklenir: yani, $\Gamma(x)$ değeri her $x \geqslant 1$ için sonlu olur. Şimdi de, $0 < x < 1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $x+1 \geqslant 1$ sağlanacağından, $\Gamma(x+1)$ değeri sonludur. Kısmî integrasyon kullanılarak da

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \frac{t^x e^{-t}}{x}\bigg|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{x}\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

elde edilir: dolayısıyla, $\Gamma(x)$ değeri $0 < x < 1$ olduğunda da sonlu olur.

Kullanılan son argüman, her $x \in (0,\infty)$ için $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ eşitliğinin sağlandığını da kanıtlar; bu eşitlik ise, $\Gamma(1) = 1$ olduğu göz önüne alınıp ard-arda uygulandığında, her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$ sonucuna ulaştırır. □

[24] Bkz. [23, Theorem 2.18].

Gama fonksiyonu, elemanter yöntemlerle alınamayan bazı integralleri hesaplamak için kullanılabilir.

Teorem 1.6.3. *Eğer $x, y \in (0, \infty)$ ise,*

(i)

$$\int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1}\,dv = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

ve

(ii)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\varphi \sin^{2y-1}\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

eşitlikleri sağlanır. Özel olarak, her $k > 2$ tam sayısı için,

(iii)

$$\int_0^{\pi} \sin^{k-2}\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma((k-1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k/2)}$$

olur.

Kanıt. (i) ile verilen eşitliği göstermek için, $v = u/(1+u)$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\begin{aligned}\int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1}\,dv &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{1+u}\right)^{y-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\frac{du}{(1+u)^2}\\ &= \int_0^\infty u^{y-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{x+y} du\end{aligned}$$

olarak yazılsın. Böylece, $s = t/(1+u)$ ve $w = su$ değişken dönüşümleri yapılıp Fubini Teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned}&\Gamma(x+y)\int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1}\,dv\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{y-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{x+y} t^{x+y-1}e^{-t}\,dt\,du\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{y-1}s^{x+y-1}e^{-s(u+1)}\,ds\,du\\ &= \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}\left(\int_0^\infty u^{y-1}s^y e^{-su}\,du\right)ds\\ &= \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}\left(\int_0^\infty w^{y-1}e^{-w}\,dw\right)ds = \Gamma(x)\Gamma(y)\end{aligned}$$

olduğu görülür. (ii) ile verilen eşitlik için (i) kısmında $v = \sin^2\varphi$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\varphi \sin^{2y-1}\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1}\, dv = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

elde edilir. Son olarak, (ii) eşitliğinde $x = 1/2$ ve $y = (k-1)/2$ durumları göz önüne alındığında, (iii) eşitliği gösterilmiş olur. □

Gama fonksiyonu ile hacim arasındaki bağlantı, aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.6.4. *Eğer $r > 0$ ve $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ise, o zaman*

$$\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{a})) = \frac{2r^n\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$$

olur.

Kanıt. §1.1, Problem 3 (a) ve Sonuç 1.2.7 kullanıldığında, $B := B_r(\mathbf{0})$ için $\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{a})) = \int_B \mathbf{1}\, d\mathbf{x}$ olduğu görülür. Sâdelik açısından $n \geqslant 2$ olduğu kabul edilsin, ve üç-boyutlu uzaydaki küresel koordinatların $\mathbb{R}^n$ uzayındaki benzerleri olarak, $0 \leqslant \rho \leqslant r$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, ve $j = 1, \dots, n-2$ için $0 \leqslant \varphi_j \leqslant \pi$ olmak üzere,

$$x_1 = \rho\cos\varphi_1, \quad x_2 = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \quad x_3 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \quad \dots,$$

$$x_{n-1} = \rho\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\theta, \quad \text{ve} \quad x_n = \rho\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\theta$$

değişken dönüşümü tanımlansın. Bu durumda, tümevarımla, bu değişken dönüşümünün Jacobi determinantı

$$\Delta := \rho^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2} \tag{1.6.1}$$

olarak elde edilir. Teorem 1.4.5 ve Teorem 1.6.3 (iii) nedeniyle, o hâlde,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{a})) &= \int_B \mathbf{1}\, d\mathbf{x} \\
&= \int_0^r\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\, d\theta\, d\varphi_1\dots d\varphi_{n-2}\, d\rho \\
&= \frac{2\pi r^n}{n}\left(\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi\right)\cdots\left(\int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi\right) \\
&= \frac{2\pi r^n}{n}\cdot\frac{\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n/2)}\cdot\frac{\Gamma((n-2)/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma((n-1)/2)}\cdots\frac{\Gamma(1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/2)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Sadeleşen çarpanlar elenip $\Gamma(1/2)$ yerine $\sqrt{\pi}$ değeri konularak da,

$$\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{a})) = \frac{2\pi r^n}{n}\left(\frac{\Gamma^{n-2}(1/2)}{\Gamma(n/2)}\right) = \frac{2r^n\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$$

olarak bulunur. □

Açıklama 1.6.5. Teorem 1.6.4 ile verilen hacim formülü, bilinen klâsik formüllerle uyuşur: $n = 1$ için

$$\operatorname{Vol}(B_r(0)) = \frac{2r\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)} = 2r,$$

$n = 2$ için

$$\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{0})) = \frac{2r^2\pi}{2\Gamma(1)} = \pi r^2,$$

ve $n = 3$ için

$$\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{0})) = \frac{2r^3\pi^{3/2}}{3\Gamma(3/2)} = \frac{2r^3\pi^{3/2}}{(3/2)\Gamma(1/2)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

olur.

Bu kısmın kalan parçasında, $n!$ sayısı için asimptotik bir yaklaşım elde etmeye yönelik yapılar geliştirilecektir. İlk olarak, ileride kullanacağımız ve kendi başına önemli olan klâsik bir sonucu kanıtlayacağız. Bunun için önce, bâzı kavramları tanımlamak gerekmektedir.

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ boş-olmayan bir küme ve her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarından oluşan bir dizi $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olsun. Eğer her $\mathbf{x} \in E$ için $f(\mathbf{x}) := \lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x})$ limiti varsa, "$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna E üzerinde ***noktasal yakınsadığı***," söylenir. Diğer taraftan, eğer her $\mathbf{x} \in E$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $f_k(\mathbf{x}) \leqslant f_{k+1}(\mathbf{x})$ ya da $f_k(\mathbf{x}) \geqslant f_{k+1}(\mathbf{x})$ ise, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi E üzerinde, sırasıyla, ***noktasal artan*** ya da ***noktasal azalan*** olarak adlandırılır; E üzerinde noktasal artan veya noktasal azalan bir diziye, E üzerinde ***noktasal monoton*** denir.

Tanımlar karşılaştırılırsa, düzgün yakınsak[25] bir fonksiyonlar dizisinin noktasal yakınsak olduğu görülür; aşağıdaki önemli netice, bu önermenin genel olarak doğru olmayan tersinin gerçeklendiği koşulları sabitler.

[25]Bkz. III/§1.6, Problem 9 (b).

Teorem 1.6.6 (Dini Teoremi). *$H \subseteq \mathbb{R}^n$ bir kompakt küme ve her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : H \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarından oluşan noktasal monoton bir dizi $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olsun. Eğer $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna H üzerinde noktasal yakınsıyorsa ve f fonksiyonu H üzerinde sürekli ise, o zaman $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna H üzerinde düzgün yakınsar.*

Kanıt. Genelliği bozmaksızın, H kümesinin boştan farklı ve $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin H üzerinde noktasal artan olduğu varsayılabilir. $\varepsilon > 0$ olsun. Noktasal yakınsama tanımı kullanılarak her $\mathbf{x} \in H$ için bir $N_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}$ sayısı, $k \geqslant N_{\mathbf{x}}$ olması $|f_k(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon/3$ olmasını gerektirecek biçimde seçilsin. Böylece, f ve $f_{N_{\mathbf{x}}}$ fonksiyonları H üzerinde sürekli olduklarından, bir $r := r_{\mathbf{x}} > 0$ sayısı

$$\mathbf{y} \in H \cap B_r(\mathbf{x}) \quad \text{iken} \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ve} \quad |f_{N_{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) - f_{N_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gerçeklenecek biçimde bulunur. Diğer taraftan, H kümesinin kompakt olmasından dolayı bir $M \in \mathbb{N}$ sayısı, $j \in \{1, \ldots, M\}$ olduğunda seçilecek $\mathbf{x}_j \in H$ noktaları ve $r_j := r_{\mathbf{x}_j} > 0$ sayıları için

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} B_{r_j}(\mathbf{x}_j)$$

içermesi sağlanacak biçimde vardır. Şimdi, $N := \max\{N_{\mathbf{x}_1}, \ldots, N_{\mathbf{x}_M}\}$ ve $\mathbf{x} \in H$ olsun, ve $k \geqslant N$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, bir $j \in \{1, \ldots, M\}$ indisi için $\mathbf{x} \in B_{r_j}(\mathbf{x}_j)$ ve $k \geqslant N_{\mathbf{x}_j}$ olacağından,

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x})| = f(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}) &\leqslant f(\mathbf{x}) - f_{N_{\mathbf{x}_j}}(\mathbf{x}) \\ &\leqslant |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_j)| + |f(\mathbf{x}_j) - f_{N_{\mathbf{x}_j}}(\mathbf{x}_j)| \\ &\quad + |f_{N_{\mathbf{x}_j}}(\mathbf{x}_j) - f_{N_{\mathbf{x}_j}}(\mathbf{x})| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

sağlanır: bu eşitsizlik ise, her $\mathbf{x} \in H$ için doğru olduğundan, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin f fonksiyonuna H üzerinde düzgün yakınsadığını gösterir. □

Şimdi, $n!/(n^{n+1/2}e^{-n})$ değeri için bir integral gösterilişi elde edeceğiz.

Lemma 1.6.7. *Eğer her $x > 0$ için $\phi(x) := x - \ln x - 1$ ise,*

$$\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}} = \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\phi(1+t/\sqrt{n})}\, dt$$

eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için sağlanır.

Kanıt. Tanım 1.6.1 ve Teorem 1.6.2 nedeniyle, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

olur. Önce $x = ny$ ve daha sonra $y = 1 + t/\sqrt{n}$ değişken dönüşümleri yapılarak, o hâlde,

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{-x+n}\, dx \\
&= \sqrt{n} \int_0^\infty y^n e^{-n(y-1)}\, dy \\
&= \sqrt{n} \int_0^\infty e^{-n\phi(y)}\, dy = \int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{-n\phi(1+t/\sqrt{n})}\, dt
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi de, Lemma 1.6.7'de elde edilen integralin limitini hesaplamakta kullanılacak bazı eşitsizlikler geliştireceğiz.

Lemma 1.6.8. *Eğer her $x > 0$ için $\phi(x) := x - \ln x - 1$ ise,*

$$0 < x < 1 \text{ için } \ (x-1)\phi'(x) - 2\phi(x) > 0$$

ve

$$x > 1 \text{ için } \ (x-1)\phi'(x) - 2\phi(x) < 0$$

olur. Ayrıca, bir mutlak $M > 0$ sabiti,

$$0 < x < 2 \text{ için } \ \phi(x) \geqslant M(x-1)^2 \tag{1.6.2}$$

ve

$$x \geqslant 2 \text{ için } \ \phi(x) \geqslant M(x-1) \tag{1.6.3}$$

olacak biçimde vardır.

Kanıt. $\psi(x) := 2\ln x - x + 1/x$ denilerek $(x-1)\phi'(x) - 2\phi(x) = \psi(x)$ eşitliğinin her $x > 0$ için sağlandığı; diğer taraftan da, $x \neq 1$ için $\psi'(x) = -(x-1)^2/x^2 < 0$ olmasından dolayı, ψ fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerinde azalan olduğu gözlemlensin. Böylece, $\psi(1) = 0$ olduğundan, $(0, 1)$ aralığı üzerinde $\psi > \mathbf{0}$ ve $(1, \infty)$ aralığı üzerinde $\psi < \mathbf{0}$ olduğu sonucuna ulaşılır−ilk eşitsizlik çifti, o hâlde, kanıtlanmış olur.

İkinci eşitsizlik çiftini kanıtlamak maksadıyla, ilk olarak, Taylor Formülü[26] nedeniyle x ve 1 değerleri arasında kalan bir c sayısının,

$$\phi(x) = \phi(1) + \phi'(1)(x-1) + \phi''(c)\frac{(x-1)^2}{2!} = \frac{(x-1)^2}{2c^2}$$

olacak şekilde var olduğu görülsün: bu, $0 < x < 2$ koşulunu sağlayan tüm x değerleri için $\phi(x) \geqslant (x-1)^2/8$ eşitsizliğini gerektirir. Daha sonra, $x > 1$ için $\phi(x) > 0$ ve $x \to \infty$ durumunda $\phi(x)/(x-1) \to 1$ olmasından dolayı, $\phi(x)/(x-1)$ değerlerinin $[2, \infty)$ aralığı üzerinde m gibi bir pozitif minimum değerine sahip oldukları gözlemlensin: bu ise, $M := \min\{m, 1/8\}$ için, (1.6.1) ve (1.6.2) eşitsizliklerinin gerçeklenmesi anlamına gelir. □

Son yardımcı sonuç olarak, Lemma 1.6.7'deki integralin limitini hesaplayacağız.

Lemma 1.6.9. *Eğer her $x > 0$ için $\phi(x) := x - \ln x - 1$, ve her $n \in \mathbb{N}$ ve $t > -\sqrt{n}$ için $F_n(t) := e^{-n\phi(1+t/\sqrt{n})}$ ise, o zaman*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} F_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

olur.

Kanıt. $\varepsilon > 0$ olsun, ve $n > a$ koşulunu sağlayan her $a > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ sayıları için

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} F_n(t)\,dt - \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt \right| \\
&\qquad \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
&\qquad := \left| \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \left(F_n(t) - e^{-t^2/2}\right)\,dt \right| + \int_{|t|\geqslant\sqrt{a}} e^{-t^2/2}\,dt \\
&\qquad\qquad + \int_{\sqrt{a}}^{\infty} |F_n(t)|\,dt + \int_{-\sqrt{n}}^{-\sqrt{a}} |F_n(t)|\,dt
\end{aligned}$$

olduğu gözlemlensin: isteneni görmek için, o hâlde, n ve a sayıları yeterince büyük olduğunda $|I_j| \leqslant \varepsilon/4$ eşitsizliğinin $j = 1, 2, 3, 4$ için sağlandığını göstermek yeterlidir.

[26] Bkz. III/Teorem 2.3.7.

Lemma 1.6.8 ile varlığı kanıtlanan sabit M olmak üzere, $a > 0$ sayısı yeterince büyük seçilerek,

$$\int_{|t|\geqslant\sqrt{a}} e^{-Mt^2}\,dt < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \int_{\sqrt{a}}^{\infty} e^{-Mt}\,dt < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.6.4}$$

ve

$$\int_{|t|\geqslant\sqrt{a}} e^{-t^2/2}\,dt < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1.6.5}$$

eşitsizliklerinin gerçeklenmesi sağlansın. (1.6.5) nedeniyle, $|I_2| < \varepsilon/4$ olur.

Şimdi, $j \neq 2$ için $|I_j|$ değerini kestirebilmek maksadıyla, $t > -\sqrt{a}$ sayısı sabitlenerek $x > 0$ için $G(x) := e^{-x\phi(1+t/\sqrt{x})}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda, $y := 1 + t/\sqrt{x}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G'(x) &= e^{-x\phi(1+t/\sqrt{x})}\left(\frac{t}{2\sqrt{x}}\phi'\left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right) - \phi\left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right)\right) \\ &= \frac{e^{-x\phi(y)}}{2}\left((y-1)\phi'(y) - 2\phi(y)\right) \end{aligned}$$

olur. Bu ise, Lemma 1.6.8 nedeniyle, $x > a$ ve $-\sqrt{a} < t < 0$ için $G'(x) > 0$, ve $x > 0$ ve $t > 0$ olduğunda $G'(x) < 0$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla, her $t \in (-\sqrt{a}, 0)$ için $n \to \infty$ durumunda $F_n(t) \uparrow e^{-t^2/2}$, ve her $t \in (0,\infty)$ için $n \to \infty$ durumunda $F_n(t) \downarrow e^{-t^2/2}$ sağlanır. Dini Teoremi ve §1.2, Problem 4'den, o hâlde, $n \to \infty$ için

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} F_n(t)\,dt \to \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} e^{-t^2/2}\,dt$$

olduğu sonucuna ulaşılır: yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ sayısının, $n \geqslant N$ için $|I_1| < \varepsilon/4$ gerçeklenecek biçimde seçilebileceği böylece görülmüş olur. Kanıtı tamamlamak için, $j = 3, 4$ durumunda $|I_j|$ değeri de sınırlanmalıdır. Bu amaçla, $n > \max\{N, a\}$ olduğu varsayılsın. (1.6.2) ve (1.6.3) sebebiyle,

$$-\sqrt{n} < t < \sqrt{n} \quad \text{için} \qquad n\phi\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \geqslant nM\frac{t^2}{n} = Mt^2$$

ve

$$t \geqslant \sqrt{n} \quad \text{için} \qquad n\phi\left(1+\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \geqslant nM\frac{t}{\sqrt{n}} \geqslant Mt$$

gerçeklenir. Bu ise, $n > a$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
|I_3| + |I_4| &= \int_{\sqrt{a}}^{\infty} |F_n(t)|\,dt + \int_{-\sqrt{n}}^{-\sqrt{a}} |F_n(t)|\,dt \\
&\leqslant \int_{\sqrt{a}\leqslant|t|\leqslant\sqrt{n}} e^{-Mt^2}\,dt + \int_{\sqrt{n}}^{\infty} e^{-Mt}\,dt \\
&< \int_{|t|\geqslant\sqrt{a}} e^{-Mt^2}\,dt + \int_{\sqrt{a}}^{\infty} e^{-Mt}\,dt
\end{aligned}$$

olması anlamına gelir: böylece, (1.6.4) göz önüne alındığında, $|I_3| + |I_4| < \varepsilon/2$ eşitsizliğinin de sağlandığı görülür. □

Artık, $n!$ sayısının asimptotik değerini belirleyebilecek durumdayız.

Teorem 1.6.10 (Stirling Formülü). *n doğal sayısı yeterince büyük olduğunda, $n! \approx \sqrt{(2\pi)}n^{n+1/2}e^{-n}$ olur; diğer bir ifadeyle,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2\pi)}n^{n+1/2}e^{-n}} = 1$$

gerçeklenir.

Kanıt. §1.4, Problem 9 (c) ve $t = \sqrt{2}\,u$ değişken dönüşümü kullanılarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = 2\sqrt{2}\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{(2\pi)}$$

elde edilir. Lemma 1.6.7 ve Lemma 1.6.9'dan, o hâlde,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{(2\pi)}n^{n+1/2}e^{-n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\phi(1+t/\sqrt{n})}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

Problemler

1. $$\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

   olduğunu gösteriniz.

2.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(-\ln x)}} = \sqrt{\pi}$$
eşitliğini kanıtlayınız.

3.
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi t - e^t}\, dt = \Gamma(\pi)$$
olduğunu gösteriniz.

4. Yarıçapı r olan dört-boyutlu bir topun hacminin $\pi^2 r^4/2$, yarıçapı r olan beş-boyutlu bir topun hacminin ise $8\pi^2 r^5/15$ olduğunu gösteriniz.

5. Teorem 1.6.4'ün kanıtındaki (1.6.1) eşitliğini doğrulayınız.

6. $n > 2$ olmak üzere, n-boyutlu
$$E := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + \cdots + x_n^2/a_n^2 \leqslant 1\}$$
elipsoidinin hacminin
$$\operatorname{Vol}(E) = \frac{2a_1 \cdots a_n \pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$$
olduğunu kanıtlayınız.

7. $n > 2$ olmak üzere, n-boyutlu
$$C := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (h/r)\sqrt{(x_2^2 + \cdots + x_n^2)} \leqslant x_1 \leqslant h\}$$
konisinin hacminin
$$\operatorname{Vol}(C) = \frac{2hr^{n-1}\pi^{(n-1)/2}}{n(n-1)\Gamma((n-1)/2)}$$
olduğunu ispatlayınız.

8. Her $k \in \mathbb{N}$ için,
$$\int_{B_r(\mathbf{0})} x_k^2 \, d(x_1, \ldots, x_n)$$
değerini hesaplayınız.

9. Eğer $f : B_1(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir, $f(\mathbf{0}) = 0$, ve her $\mathbf{x} \in B_1(\mathbf{0})$ için $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leqslant 1$ ise,
$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_1(\mathbf{0})} |f(\mathbf{x})|^k \, d\mathbf{x}$$
limitinin var ve sıfıra eşit olduğunu kanıtlayınız.

10. (a) Γ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu, ve bu aralık üzerinde
$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t \, dt$$
eşitliğinin sağlandığını ispatlayınız.

(b) Γ fonksiyonunun, $(0, \infty)$ aralığı üzerinde, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ve konveks[27] olduğunu kanıtlayınız.

---

[27] Bkz. III/§1.4, Problem 10.

2 Çok-değişkenli hesabın temel teoremleri

Bu bölümde eğriler ve yüzeylerle ilgili temel bilgiler verilerek, vektör hesabının esas sonuçları olan Green, Gauss, ve Stokes teoremleri ele alınacaktır.

2.1 Eğriler

Sezgisel olarak *eğri* kelimesinden, 'düzgün' bükümlü bir doğru, ya da bir uzunluğa sahip olup 'genişliği' olmayan bir-boyutlu bir nesne anlaşılır. Kesinlikten uzak ve çok kısıtlayıcı olan bu sezgisel kavrayışı matematiksel bir alt-yapıya kavuşturmak, bu kısmın temel amacı olacaktır.

Eğer $I \subseteq \mathbb{R}$ ve $\phi : I \to \mathbb{R}^m$ ise, I kümesinin ϕ altındaki görüntüsünün

$$\phi(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \text{bir } t \in I \text{ için } \mathbf{x} = \phi(t)\}$$

kümesi olduğu hatırlanmalıdır. $\mathbb{R}^m$ içindeki en basit eğri tipi, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ noktaları için, $\mathbf{b}$ doğrultusundaki ve $\mathbf{a}$ noktasından geçen ve $\mathbb{R}$ kümesinin $\phi(t) := \mathbf{a}+t\mathbf{b}$ fonksiyonu altındaki görüntüsünden oluşan doğrudur (bkz. Problem 2).

Doğru için yapılan tanımdan hareket ederek bir eğri gerçel eksen üzerindeki bir aralığın sürekli bir $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu altındaki görüntüsü olarak tanımlandığında, bu tanımlamanın fazla geniş olduğu görülür: $[0, 1]$ birim aralığını *örten* olarak $[0, 1] \times [0, 1]$ birim karesinin üzerine gönderen sürekli fonksiyonlar vardır.[1] Bu tanımlamayı düzeltmenin bir yolu *eş-yapı dönüşümlerini* (*homeomorfizm*leri)$-$yani, bire-bir, örten, ve sürekli olup tersleri de sürekli olan fonksiyonları$-$kullanmaktır. Hedeflediğimiz temel sonuçlar açısından eğrilerin diferansiyel yapılarıyla ilgileneceğimizden, bir diğer yaklaşımı tercih ederek, eğrileri diferansiyellenebilir fonksiyonları kullanarak tanımlayacağız.

İlk olarak, kısmî türev tanımını[2] açık-olmayan kümeler üzerinde tanımlanmış fonksiyonları da içerecek biçimde genişleteceğiz.

[1] "Alan-dolduran eğriler" olarak adlandırılan bu fonksiyonlarla ilgili bilgi için: bkz. [4].

[2] Bkz. III/S. 50.

$m, n, p \in \mathbb{N}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, ve $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_m) : E \to \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon olsun. Eğer bir $V \supseteq E$ açık kümesi ve her $j \leqslant p$ için j'inci mertebeden kısmî türevleri V üzerinde var ve sürekli olup her $\mathbf{x} \in E$ için $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{g} := (g_1, \ldots, g_m) : V \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, $\mathbf{f}$ fonksiyonuna "E üzerinde ***$\mathcal{C}^p$-sınıfından***dır," denir. Bu durumda $\mathbf{f}$ fonksiyonunun ***kısmî türev***leri $\mathbf{g}$ fonksiyonunun kısmî türevlerine eşit olarak tanımlanır: bir başka ifadeyle, $k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ve $\mathbf{x} \in E$ için $\partial f_j / \partial x_k(\mathbf{x}) := \partial g_j / \partial x_k(\mathbf{x})$ olarak verilir. Her $p \in \mathbb{N}$ için E üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan bir $\mathbf{f} : E \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun "E üzerinde ***$\mathcal{C}^\infty$-sınıfından*** olduğu," söylenir.[3] Ara-Değer Teoremi'nin[4] ve Ortalama Değer Teoremi'nin[5] E üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan fonksiyonlar için geçerli oldukları kolayca gözlemlenebilir.

Genel bir eğriyi, aşağıdaki gibi tanımlayacağız. p simgesi $\mathbb{N}$ kümesinin bir elemanını veya ∞ genişletilmiş gerçel sayısını gösterecektir.

Tanım 2.1.1. I, gerçel sayılar içinde (sınırlı veya sınırsız) dejenere-olmayan bir aralık ve $\phi := (\phi_1, \ldots, \phi_m) : I \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu I üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından ve I° üzerinde bire-bir ise, $\mathbb{R}^m$ kümesinin $\mathcal{C} := \phi(I)$ alt-kümesine ($\mathbb{R}^m$ içinde) *$\mathcal{C}^p$-sınıfından* bir ***eğri*** denir. Bu durumda (ϕ, I) sıralı ikilisi $\mathcal{C}$ eğrisinin *bir **parametrizasyon**u*, ve $\mathcal{C}$ kümesi (ϕ, I) ikilisinin ***iz***i olarak adlandırılır. Her $j = 1, \ldots, m$ ve $t \in I$ için

$$x_j := \phi_j(t)$$

olarak tanımlanan denklemlere, $\mathcal{C}$ eğrisinin (ϕ, I) parametrizasyonuyla belirlenen ***parametrik denklemler***i adı verilir.

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}^m$ içinde, $\mathbf{b}$ doğrultusundaki ve $\mathbf{a}$ noktasından geçen doğru, $I := \mathbb{R}$ ve her $t \in I$ için $\phi(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ olmak üzere, (ϕ, I) parametrizasyonuna sahip $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından bir eğridir.

Pratikte karşılaşılan birçok durum için, eğri kavramını daha da özelleştirmek gerekir.

Tanım 2.1.3. $I := [a, b]$ kapalı ve sınırlı bir aralık olmak üzere, bir (ϕ, I) parametrizasyonuna sahip $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $\mathcal{C}$ eğrisine bir ***yay*** adı verilir. Bu durumda $\phi(a)$ ve $\phi(b)$ noktalarına $\mathcal{C}$ yayının ***uç noktaları*** denir; $\phi(a) = \phi(b)$ koşulunu sağlayan bir yay, ***kapalı*** olarak adlandırılır.

---

[3]Karşılaştırmak için: bkz. III/Tanım 2.1.1.
[4]Bkz. III/Teorem 1.6.10.
[5]Bkz. III/Teorem 2.3.2.

Örnek 2.1.4. $\mathbb{R}^n$ içindeki $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ noktalarını birleştiren $L(\mathbf{a};\mathbf{b})$ doğru parçası[6] bir yaydır; $x^2+y^2=a^2$ bağıntısıyla belirlenen bir çember ise bir kapalı yaydır (ayrıca bkz. Örnek 2.1.6).

Uç noktaları hariç tutulduğunda, kendisini kesmeyen kapalı bir yay ***basit*** olarak adlandırılır. Jordan Eğri Teoremi nedeniyle, basit kapalı yaylara ***Jordan eğrileri*** de denir: bu teoreme göre $\mathbb{R}^2$ içindeki bir $\mathcal{C}$ basit kapalı yayı, $\mathbb{R}^2$ düzlemini, $\partial E = \partial\Omega = \mathcal{C}$ koşulunu sağlayan sınırlı ve bağlantılı bir E kümesinin[7] ve sınırsız ve bağlantılı bir Ω kümesinin belirlediği iki parçaya ayırır (bkz. [10]).

Tanım 2.1.1 ile verilen eğri kavramı, $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ ailesine ait fonksiyonların grafiklerini içerecek denli geniştir.

Örnek 2.1.5. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından olsun. f fonksiyonunun I üzerindeki grafiği $\mathbb{R}^2$ içinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir eğridir: Her $t \in I$ için $\phi(t) := (t, f(t))$ olarak tanımlanırsa, ϕ fonksiyonu I üzerinde bire-bir ve $\mathcal{C}^p$-sınıfından olur; aynı zamanda da $\phi(I)$ kümesi, x değişkeni I üzerinde değiştiğinde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini gösterir. (Bu durumda (ϕ, I) parametrizasyonu, $y = f(x)$ eğrisinin ***âşikâr parametrizasyon***u olarak adlandırılacaktır.)

Eğer $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\phi(t) := (t, f(t))$ ya da $\phi(t) := (f(t), t)$ ise, $\phi(I)$ eğrisi bir ***bâriz eğri*** olarak isimlendirilecektir; dolayısıyla bir bâriz eğri, $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $y = f(x)$ ya da $x = f(y)$ eşitliğini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir.

Örnek 2.1.5 nedeniyle, her bâriz eğri $\mathbb{R}^2$ içinde bir eğridir; bu önermenin tersi ise, aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi, genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.1.6. $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi $\mathbb{R}^2$ içinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından bir Jordan eğrisidir: Verilen çember kutupsal koordinatlar kullanıldığında $r = a$ şeklinde temsil edileceğinden, kartezyen koordinatlara geçildiğinde ilgili çember $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ eşitlikleriyle belirlenir. Bu durumda, $I := [0, 2\pi]$ olmak üzere her $t \in I$ için $\phi(t) := (a\cos t, a\sin t)$ olarak tanımlanan $\phi : I \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu I üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ve $[0, 2\pi)$ üzerinde bire-bir olur; aynı zamanda da $\phi(I)$ ailesi, $x^2 + y^2 = a^2$ bağıntısını gerçekleyen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktalarının kümesidir.

Bir aralık üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan gerçel-değerli bir fonksiyonun grafiği 'düzgün'dür; bir başka deyişle bu türden bir fonksiyon, grafiğinin her noktasında

---

[6] Bkz. III/S. 4.

[7] Buradaki E kümesi, bir Jordan bölgesi olmak zorunda değildir. İlk olarak W.F. Osgood tarafından keşfedilen bu ilginç olgu için: bkz. [16].

bir teğet düzlemine sahiptir.[8] Aynı durum, $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir eğri için genel olarak doğru *değildir*.

Örnek 2.1.7. $I := [0, 2\pi]$ olmak üzere, $\phi(t) := (\cos^3 t, \sin^3 t)$ olsun. Bu durumda $\phi : I \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu I üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ve $[0, 2\pi)$ üzerinde bire-birdir. $x := \cos^3 t$ ve $y := \sin^3 t$ denilerek yarım-açı formülleri yardımıyla

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}\cos^2(2t) + \frac{1}{4}$$

eşitliği gözlemlenirse, ilgili eğrinin üzerindeki noktaların başlangıç noktasına olan uzaklıklarını belirleyen $\sqrt{(x^2 + y^2)}$ büyüklüğünün, ($t = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$ olduğunda alınan) 1 maksimum değeriyle ($t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ olduğunda alınan) $1/2$ minimum değeri arasında değiştiği görülür. III/Teorem 1.4.10 nedeniyle I aralığı bağlantılı ve ϕ fonksiyonu diferansiyellenebilir—dolayısıyla, sürekli—olduğundan, III/Teorem 1.6.8'den $\phi(I)$ kümesi de bağlantılıdır. $\phi(I)$ kümesi, $(1, 0)$ noktasından başlayıp saat yelkovanının ters yönünde $\partial B_1(\mathbf{0})$ sınırından $\partial B_{1/2}(\mathbf{0})$ sınırına hareket ederek geriye dönen, dört-köşeli bir yıldız görünümündedir; t parametresi 0 ile 2π arasında değiştiğinden, ilgili eğri bir tam dolanım yapar. (Bu eğri, kartezyen denklemi $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ olan ve ***astroid*** olarak adlandırılan eğrilerdendir.)

Eğrilerin teorisini inceleme işine, bir eğrinin 'uzunluğunu' tanımlayarak başlayacağız. (Bu tanımın geometrik anlamı için, Teorem 2.1.22 göz önüne alınmalıdır.)

Tanım 2.1.8. Bir parametrizasyonu (ϕ, I) olan, $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yay $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ yayının, (ϕ, I) parametrizasyonuyla ölçülen, ***yay uzunluğu***

$$L(\mathcal{C}) := \int_I \|\phi'(t)\|\, dt$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.1.9. Yarıçapı a olan bir $\mathcal{C}$ çemberinin Örnek 2.1.6 ile verilen parametrizasyonu (ϕ, I) ise, her $t \in [0, 2\pi]$ için $\|\phi'(t)\| = a$ olduğundan, $L(\mathcal{C}) = 2\pi a$ olur.

Açıklama 2.1.10. Örnek 2.1.9, parametrizasyonları belirleyen fonksiyonların, tanım kümelerinin içleri üzerinde bire-bir olma şartıyla ele alınmalarının nedenini de açıklar: eğer ϕ fonksiyonu $(0, 2\pi)$ üzerinde bire-bir olmasaydı, bâzı kısımları bir kereden fazla çizilmiş olacağından, verilen çember çevre uzunluğundan büyük bir yay uzunluğuna sahip olurdu.

---

[8] İki-değişkenli fonksiyonlar için: bkz. III/Teorem 2.2.15 & III/§2.4, Problem 8.

Eğer ϕ' fonksiyonu kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli ise, Teorem 1.2.6 nedeniyle, $\|\phi'(t)\|$ fonksiyonu aynı aralık üzerinde integrallenebilirdir; bundan dolayı, $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $\mathcal{C}$ yayının her parametrizasyonu için, $L(\mathcal{C})$ değeri sonludur. Bu özellik, bir aralığın sürekli bir görüntüsü olan[9] ya da açık bir aralığın görüntüsü olarak belirlenen bir $\mathcal{C}$ kümesi için genel olarak geçerli değildir (bkz. Problem 4).

$\mathcal{C}$, bir $[a, b]$ aralığı üzerinde $y = f(x)$ eşitliğiyle belirlenen ve âşikâr parametrizasyonu (ϕ, I) olan bir bâriz eğri olduğunda, Tanım 2.1.8 ile verilen yay uzunluğu

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{(1 + (f'(x))^2)}\, dx$$

biçimine girer.

En basit eğrilerin bile birçok farklı parametrizasyona sahip olabilecekleri, gözden kaçırılmamalıdır. Örneğin $\mathbb{R}^2$ içindeki $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x,\ 0 < x \leqslant 1\}$ doğru parçası, $(0, 1]$ üzerinde $\phi(t) := (t, t)$ ile, $(0, 2]$ üzerinde $\psi(t) := (t/2, t/2)$ ile, ve $[1, \infty)$ üzerinde $\sigma(t) := (1/t, 1/t)$ ile verilen parametrizasyonların izidir. Bu fonksiyonların hepsi de aynı doğru parçasını çizmelerine karşın, her biri bu doğru parçasını farklı bir biçimde çizer: ψ fonksiyonu ilgili doğruyu ϕ fonksiyonuna nazaran 'iki kat daha yavaş' çizerken, σ fonksiyonu söz konusu doğruyu ϕ fonksiyonundan 'geriye doğru' çizmiş olur. Bir $\mathcal{C}$ eğrisinin bir (ϕ, I) parametrizasyonu, o hâlde, $\mathcal{C}$ eğrisi üzerindeki noktaları belirlemenin *yollarından biridir.*

Farklı parametrizasyonları göz önüne alındığında bir $\mathcal{C}$ eğrisinin $L(\mathcal{C})$ yay uzunluğunun aynı kalıp kalmadığı, doğal bir sorudur. Bu soruyu yanıtlamaya, aynı bir yayın herhangi iki parametrizasyonunun birbirlerine bir-boyutlu bir τ değişken dönüşümü ile bağlı olduklarını göstererek başlayacağız.

Lemma 2.1.11. *I ve J kapalı ve sınırlı aralıklar, ve $\phi : I \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu bire-bir ve sürekli olsun. Bu durumda sürekli bir $\psi : J \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun $\phi(I) = \psi(J)$ eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter şart, $\psi = \phi \circ \tau$ olacak şekilde J kümesinden I kümesine tanımlı sürekli ve örten bir τ fonksiyonunun var olmasıdır.*

Kanıt. I aralığı kapalı ve sınırlı ve ϕ fonksiyonu bu aralık üzerinde bire-bir ve sürekli olduğundan, III/§1.6, Problem 5 nedeniyle, ϕ^{-1} fonksiyonu $\phi(I)$ kümesinden I kümesine sürekli ve örtendir. Eğer $\psi(J) = \phi(I)$ ise, o hâlde, $\tau := \phi^{-1} \circ \psi$ fonksiyonu J kümesinden I kümesine sürekli ve örten olur.

Tersine, J kümesinden I kümesine sürekli ve örten her τ fonksiyonu için, $\psi = \phi \circ \tau$ fonksiyonu J kümesinden $\phi(I)$ kümesine sürekli ve örtendir: yani, $\psi(J) = \phi(I)$ gerçeklenir. □

[9] Sürekli olmasına rağmen, alan-dolduran bir eğrinin (bkz. Dipnot 1) uzunluğu sonlu değildir.

Dolayısıyla, eğer (ϕ, I) ve (ψ, J) ikilileri aynı bir yayın $\mathcal{C}^p$-sınıfından parametrizasyonları ve ϕ fonksiyonu bire-bir ise, $\psi = \phi \circ \tau$, veya buna eşdeğer olarak, $\tau = \phi^{-1} \circ \psi$ olacak şekilde bir sürekli $\tau : J \to I$ fonksiyonu vardır−bu fonksiyonu J kümesinden I kümesine ***geçiş fonksiyonu*** olarak adlandıracağız. Eğer geçiş fonksiyonu $\mathcal{C}^p$-sınıfından ise, Zincir Kuralı[10] nedeniyle, her $u \in J$ için

$$\psi'(u) = \phi'(\tau(u))\tau'(u) \tag{2.1.1}$$

eşitliği de sağlanır.

Artık, sıfırdan farklı bir türeve sahip geçiş fonksiyonları için, yay uzunluğu tanımının seçilen parametrizasyona bağlı olmadığını gösterebilecek durumdayız.

Teorem 2.1.12. *Eğer (ϕ, I) ve (ψ, J) ikilileri aynı bir yayın $\mathcal{C}^p$-sınıfından parametrizasyonları ise, aynı zamanda da J kümesini I kümesine örten olarak gönderen ve her $u \in J$ için $\tau'(u) \neq 0$ koşulunu sağlayan bir τ fonksiyonu için $\psi = \phi \circ \tau$ oluyorsa, o zaman*

$$\int_I \|\phi'(t)\|\, dt = \int_J \|\psi'(u)\|\, du$$

gerçeklenir.

Kanıt. Hipotez nedeniyle, $\tau(J) = I$ olur. Bu ise, (2.1.1) eşitliği ve Teorem 1.4.4'den,

$$\int_I \|\phi'(t)\|\, dt = \int_{\tau(J)} \|\phi'(t)\|\, dt = \int_J \|\phi'(\tau(u))\|\, |\tau'(u)|\, du = \int_J \|\psi'(u)\|\, du$$

olması demektir. □

Açıklama 2.1.13. Teorem 2.1.12'nin hipotezindeki $\tau' \neq 0$ koşulu, J kümesinin sonlu sayıda noktasında zayıflatılabilir (bkz. Problem 8).

Bir $\mathcal{C}$ eğrisinin farklı parametrizasyonlarını $\phi(t)$ vektörünü bu eğri boyunca yol alan bir parçacığın t zamanındaki konumunu olarak yorumlamak, faydalı bir düşünme biçimidir: $\mathcal{C}$ eğrisinin farklı parametrizasyonları, bu durumda, izleri (veya, *geometrik taşıyıcıları*) aynı olan, fakat kimi daha 'hızlı' ya da kimi daha 'yavaş' tezahür eden, yahut kimi 'ileriye doğru' veya kimi 'geriye doğru' belirlenen ve hepsi de $\mathcal{C}$ eğrisini çizen değişik hareket biçimlerini gösterirler.

---

[10] Bkz. III/Teorem 2.2.20.

Teorem 2.1.14. *(ϕ, I) ikilisi $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $\mathcal{C}$ eğrisinin bir parametrizasyonu, ve bir $t_0 \in I^\circ$ için $\mathbf{x}_0 := \phi(t_0)$ olsun. Eğer $\mathcal{C}$ boyunca yol alan bir parçacığın t zamanındaki konumunu $\phi(t)$ gösteriyorsa, o zaman $\|\phi'(t_0)\|$ değeri bu parçacığın $\mathbf{x}_0$ konumundaki süratidir; aynı zamanda da $\phi'(t_0)$ vektörü, $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$ iken, $\mathbf{x}_0$ konumundaki hareket doğrultusunu gösteren bir vektördür.*

Kanıt. $t_0 \in I^\circ$ olsun ve, yeterince küçük her $h > 0$ sayısı için,

$$\frac{\phi(t_0 + h) - \phi(t_0)}{h}$$

oranının $\mathcal{C}$ eğrisi boyunca devam eden hareket doğrultusunda bir vektörü gösterdiği gözlemlensin. İlgili parçacığın süratini hesaplamak amacıyla, $\mathcal{C} := \phi(I)$ eğrisinin ***doğal parametrizasyon***u, her $t \in [a, b]$ için

$$s := \ell(t) := \int_a^t \|\phi'(u)\| \, du \tag{2.1.2}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, İntegral Hesabın Temel Teoremi[11] nedeniyle, $ds/dt = \ell'(t) = \|\phi'(t)\|$ gerçeklenir: s yay uzunluğunun zamana göre değişiminin t_0 ânındaki değeri, yani parçacığın $\mathbf{x}_0$ konumundaki sürati, o hâlde, $\|\phi'(t_0)\|$ olur. $\square$

Türevle ilgili temel özelliklerden dolayı, $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan her bâriz eğri 'düzgün'dür; yani, her noktasında bir teğet doğrusuna sahiptir. Örnek 2.1.7'de verilen astroid, genel bir eğri için aynı durumun her zaman geçerli olmadığını gösterir. Diğer taraftan, eğer (ϕ, I) ikilisi bu eğrinin bir parametrizasyonu ise, $\phi(I)$ astroidinin bir teğete sahip olmadığı noktalarda, yani $t = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$ için, $\phi'(t) = \mathbf{0}$ olur. Aşağıdaki sonuç, bu durumun bir rastlantı olmadığını kanıtlar.

Teorem 2.1.15. *Eğer (ϕ, I) ikilisi $\mathbb{R}^2$ içindeki $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $\mathcal{C}$ eğrisinin bir parametrizasyonu ise, ve bir $t_0 \in I^\circ$ için $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$ oluyorsa, o zaman $\mathcal{C}$ eğrisinin $(x_0, y_0) := \phi(t_0)$ noktasında bir teğet doğrusu vardır.*

Kanıt. ϕ fonksiyonunun bileşenleri (ϕ_1, ϕ_2) olsun. Hipotezden dolayı $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$ sağlandığından, $\phi_1'(t_0) \neq 0$ olduğu varsayılabilir. Şimdi $F(x, t) := \phi_1(t) - x$ denilerek Kapalı Fonksiyon Teoremi[12] kullanılırsa, x_0 noktasını içeren bir J_0 açık aralığının ve sürekli-diferansiyellenebilir bir $g : J_0 \to I$ fonksiyonunun, $x \in J_0$ için $\phi_1(g(x)) = x$ ve $g(x_0) = t_0$ olacak biçimde bulunabildikleri görülür. Her

[11] Bkz. [23, Theorem 3.13].
[12] Bkz. III/Teorem 2.4.10.

$x \in J_0$ için $y = f(x) := \phi_2 \circ g(x)$ olarak tanımlanan f fonksiyonunun grafiğinin $g(J_0)$ üzerinde−yani, (x_0, y_0) noktasının civârında−ϕ eğrisinin iziyle aynı olduğu böylece elde edilmiş olur: $\mathcal{C}$ eğrisinin, o hâlde, $(x_0, y_0) := \phi(t_0)$ noktasında bir teğet doğrusu vardır. $\square$

Tanım 2.1.16. (ϕ, I) ikilisi $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $\mathcal{C}$ eğrisinin bir parametrizasyonu olsun.

(i) Eğer bir $t_0 \in I$ için $\phi'(t_0) \neq \mathbf{0}$ ise, (ϕ, I) parametrizasyonu t_0 ***noktasında düzgün*** olarak adlandırılır.

(ii) Eğer (ϕ, I) parametrizasyonu I kümesinin her noktasında düzgünse, ***düzgün*** olarak isimlendirilir; bu durumda ϕ' fonksiyonuna, $\mathcal{C}$ eğrisinin (ϕ, I) parametrizasyonu tarafından belirlenen ***teğet vektörü*** denir.

(iii) Düzgün bir parametrizasyona sahip ve kapalı bir yay olmayan, ve eğer kapalı bir yay ise bir $(\psi, [c, d])$ düzgün parametrizasyonunun aynı zamanda $\psi'(c) = \psi'(d)$ koşulunu da sağladığı, bir eğri ***düzgün*** olarak adlandırılır.

Açıklama 2.1.17. Tanım 2.1.16 nedeniyle, düzgün bir parametrizasyona sahip bir eğri düzgündür. Bu önermenin tersi ise, yaylar için bile, genel olarak doğru değildir; bir başka deyişle, her düzgün yayın düzgün-olmayan bir parametrizasyonu bulunabilir: Gerçekten, eğer $(\phi, [a, b])$ ikilisi düzgün bir $\mathcal{C}$ yayının bir düzgün parametrizasyonu ise, bir değişken dönümü yardımıyla genelliği bozmaksızın $0 \in (a, b)$ koşulunun sağlandığı varsayılarak, $J := (\sqrt{[3]a}, \sqrt{[3]b})$ ve her $t \in J$ için $\psi(t) := \phi(t^3)$ olarak alınırsa, (ψ, J) ikilisinin de $\mathcal{C}$ yayının bir parametrizasyonu olduğu görülür; ancak bu parametrizasyon, $t = 0$ için $\psi'(t) = \phi'(t^3) \cdot 3t^2 = \mathbf{0}$ olduğundan, düzgün *değildir*.

Böylece, parametrizasyon değişimlerinin hangi koşullar altında düzgünlüğü korudukları sorusunun anlamlı olduğu görülür. Bu soruyu yanıtlamak için, aynı bir eğrinin (ϕ, I) ve (ψ, J) gibi iki parametrizasyonu, ϕ fonksiyonu bire-bir ve (ϕ, I) parametrizasyonu düzgün olmak üzere, göz önüne alınsın. Bu durumda, eğer J kümesinden I kümesine geçiş fonksiyonu olan τ diferansiyellenebiliyorsa, (2.1.1) nedeniyle, (ψ, J) parametrizasyonunun düzgün olması için gerek ve yeter koşul her $u \in J$ için $\tau'(u) \neq 0$ olmasıdır. Aşağıdaki tanım, o hâlde, anlamlıdır.

Tanım 2.1.18. Eğer $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan (ϕ, I) ve (ψ, J) ikilileri aynı bir eğrinin iki düzgün parametrizasyonu ise, aynı zamanda da $\mathcal{C}^p$-sınıfından olup J kümesinden I kümesine tanımlı, $\psi = \phi \circ \tau$ ve $\tau(J) = I$ koşullarını sağlayan, ve her $u \in J$ için $\tau'(u) \neq 0$ olan bir τ fonksiyonu varsa, bu durumda (ϕ, I) ve (ψ, J)

parametrizasyonlarının "***düzgünce denk*** oldukları," söylenir. Bu durumda τ fonksiyonu J kümesinden I kümesine ***geçiş fonksiyonu*** olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.12 nedeniyle, bir eğrinin yay uzunluğu aynı eğrinin düzgünce denk parametrizasyonları altında değişmeden kalır. Diğer taraftan da, τ' fonksiyonu sürekli ve sıfırdan farklı olduğundan, ya J üzerinde τ' pozitif olur ya da J üzerinde τ' negatiftir; düzgünce denk olan iki parametrizasyon arasındaki bir τ geçiş fonksiyonu, o hâlde, her zaman bire-birdir.

Tanım 2.1.19. Bir parametrizasyonu (ϕ, I) olan, $\mathbb{R}^m$ içinde bir düzgün yay $\mathcal{C}$, ve $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda g fonksiyonunun $\mathcal{C}$ üzerindeki ***eğrisel integral***i

$$\int_{\mathcal{C}} g\, ds := \int_I g(\phi(t))\, \|\phi'(t)\|\, dt \tag{2.1.3}$$

değeridir.

Her $x \in [a, b]$ için $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktalarının belirlediği bir bâriz $\mathcal{C}$ eğrisi için (2.1.3) eğrisel integrali,

$$\int_{\mathcal{C}} g\, ds = \int_a^b g(x, f(x))\sqrt{(1 + |f'(x)|^2)}\, dx$$

şekline dönüşür. Aynı zamanda, Tanım 2.1.8 sebebiyle, $g \equiv \mathbf{1}$ olduğunda (2.1.3) eğrisel integrali $\mathcal{C}$ eğrisinin yay uzunluğuna eşit olur. Bu eşitlik ds yazılımının anlamını da açıklar: bu durumda s parametresi (2.1.2) ile verilen yay uzunluğunu göstermiş olur ve, İntegral Hesabın Temel Teoremi nedeniyle, $ds/dt = \|\phi'(t)\|$ gerçeklenir. Ayrıca, bir g fonksiyonunun bir eğri üzerindeki eğrisel integralinin düzgünce denk parametrizasyonlar altında değişmeden kaldığı da not edilmelidir (bkz. Problem 8).

Eğrisel integral bir-boyutlu bir integral olduğundan, klâsik integrasyon teknikleriyle hesaplanabilir.

Örnek 2.1.20. $I := [0, \pi/2]$, her $t \in I$ için $\phi(t) := (\cos t, \sin t)$, $\mathcal{C} := \phi(I)$, ve $g(x, y) := 2x + y$ ise, $\|\phi'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = 1$ olduğundan,

$$\int_{\mathcal{C}} g\, ds = \int_0^{\pi/2} (2\cos t + \sin t)\, dt = 3$$

olur.

En basit uygulamalar için bile, birim karenin sınırı olan $\partial([0,1]\times[0,1])$ eğrisi gibi, düzgün olmayan fakat sonlu sayıda düzgün parçanın birleşimi olarak ifade edilebilen eğrilerle çalışabilecek kadar zengin bir eğriler teorisine ihtiyaç duyulur; şimdi, buraya kadar geliştirilen teoriyi bu türden eğrilere doğal bir biçimde genişleteceğiz.

Her $j = 1,\dots,N$ için $\mathbb{R}^m$ uzayının bir $\mathcal{C}_j$ alt-kümesi bir düzgün eğri ya da bir düzgün yay ise, ve her $j \neq k$ için ya $\mathcal{C}_j$ ve $\mathcal{C}_k$ ayrıksa ya da tek bir noktada kesişiyorlarsa, bu durumda $\mathbb{R}^m$ uzayının $\mathcal{C} := \bigcup_{j=1}^N \mathcal{C}_j$ alt-kümesine, sırasıyla, bir ***parçalı düzgün eğri*** ya da bir ***parçalı düzgün yay*** adı verilir. Parçalı düzgün bir eğri, o hâlde, $0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2$ halkasının sınırı gibi ayrık düzgün parçalardan, ya da $([0,3]\times[0,3]) \setminus ([1,2]\times[1,2])$ delikli karesinin sınırı gibi köşeli ve bağlantılı olan ayrık parçalardan oluşabilir.

$\mathcal{C} := \bigcup_{j=1}^N \mathcal{C}_j$, bir parçalı düzgün eğri olsun. $\mathcal{C}$ eğrisinin bir ***parametrizasyonu***ndan, $\mathcal{C}_j$ eğrilerinin (ϕ_j, I_j) düzgün parametrizasyonlarının bir ailesi anlaşılacaktır. $\mathcal{C}$ eğrisinin $\bigcup_{j=1}^N (\phi_j, I_j)$ ve $\bigcup_{j=1}^N (\psi_j, J_j)$ gibi iki parametrizasyonunun, eğer her $j \in \{1,\dots,N\}$ için (ϕ_j, I_j) ve (ψ_j, J_j) parametrizasyonları düzgünce denk ise, "***düzgünce denk*** oldukları," söylenecektir. Son olarak, eğer $\mathcal{C}$ bir parçalı düzgün yay ise, $\mathcal{C}$ eğrisinin ***yay uzunluğu***

$$L(\mathcal{C}) := \sum_{j=1}^N L(\mathcal{C}_j)$$

olarak; bir sürekli $g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathcal{C}$ üzerindeki ***eğrisel integral***i ise

$$\int_{\mathcal{C}} g\, ds := \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{C}_j} g\, ds$$

biçiminde tanımlanacaktır.

Örnek 2.1.21. $[0,1]\times[0,1]$ birim karesinin $\mathcal{C}$ sınırını oluşturan dört düzgün parça, $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\phi_1(t) := (t,0), \quad \phi_2(t) := (1,t), \quad \phi_3(t) := (t,1), \quad \phi_4(t) := (0,t)$$

şeklinde parametrelenebilir; böylece, $j = 1,2,3,4$ için $\|\phi_j'(t)\| = 1$ olduğu görülür. $g(x,y) := x^2 + y^3$ ise, o hâlde,

$$\int_{\mathcal{C}} g\, ds = \int_0^1 t^2\, dt + \int_0^1 (1+t^3)\, dt + \int_0^1 (t^2+1)\, dt + \int_0^1 t^3\, dt = \frac{19}{6}$$

olarak bulunur.

$\mathcal{C}^p$-sınıfından *olmayan* bazı eğrilerin yay uzunluklarının, eğri üzerindeki sonlu tane noktanın belirlediği doğru parçalarının uzunlukları toplamını ilgili yay uzunluğu için bir yaklaşım kabul ederek hesaplanabileceklerini göstererek, bu kısmı kapatacağız. Bir parametrizasyonu (ϕ, I) olan bir $\mathcal{C}$ eğrisi, eğer

$$\|\mathcal{C}\| := \sup\left\{\sum_{j=1}^{k}\|\phi(t_j)-\phi(t_{j-1})\| \mid \{t_0,t_1,\ldots,t_k\} \text{ ailesi } I \text{ için bir parçalanış}\right\}$$

değeri sonlu ise, ***doğrultulabilir*** olarak adlandırılır; bu durumda $\|\mathcal{C}\|$ değerine $\mathcal{C}$ eğrisinin ***yay uzunluğu*** denir.

Aşağıdaki sonuç, $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan her yayın doğrultulabilir olduğunu, ve bu türden eğriler için, şimdiye dek iki farklı şekilde tanımlanan yay uzunluğu değerlerinin aynı olduklarını gösterir.

Teorem 2.1.22. *Eğer $\mathcal{C}$ eğrisi $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yay ise, bu durumda $\|\mathcal{C}\|$ değeri sonludur, ve $L(\mathcal{C}) = \|\mathcal{C}\|$ olur.*

Kanıt. $\varepsilon > 0$ olsun, $\phi := (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m)$ alınsın, ve $I^m := I \times \cdots \times I$ kübüne ait her $(x_1, \ldots, x_m)$ noktası için

$$F(x_1,\ldots,x_m) := \left(\sum_{\ell=1}^{m}|\phi_\ell'(x_\ell)|^2\right)^{1/2}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda I^m kübü kapalı ve sınırlıdır, ve hipotez nedeniyle F fonksiyonu I^m üzerinde sürekli olur; bu ise, III/Teorem 1.6.15 nedeniyle, F fonksiyonunun I^m üzerinde düzgün sürekli olması demektir: bir $\delta > 0$ sayısı, o hâlde,

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I^m \quad \text{ve} \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta \quad \text{iken} \quad |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{2|I|}$$

olacak şekilde bulunur.

I aralığının bir parçalanışı $\mathcal{P} := \{u_0, \ldots, u_N\}$ olsun ve $\|\phi'\|$ fonksiyonunun I üzerinde integrallenebilir olduğu kullanılarak I aralığının $\mathcal{P}$ parçalanışından daha ince olan bir $\mathcal{P}_0 := \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ parçalanışı, $\|\mathcal{P}_0\| < \delta/\sqrt{m}$ ve

$$\int_I \|\phi'(t)\|\,dt - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=1}^{k}\|\phi'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) < \int_I \|\phi'(t)\|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}$$

gerçeklenecek biçimde alınsın. $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ ve $j \in \{1, \ldots, k\}$ sabitlensin. Bir-boyutlu Ortalama Değer Teoremi[13] kullanılıp bir $c_j(\ell) \in [t_{j-1}, t_j]$ sayısı,

$$\phi_\ell(t_j) - \phi_\ell(t_{j-1}) = \phi'_\ell(c_j(\ell))(t_j - t_{j-1})$$

olacak şekilde seçilsin. Bu durumda, yeni parçalanış için $\|\mathcal{P}_0\| < \delta/\sqrt{m}$ gerçeklendiğinden, $|F(t_j, \ldots, t_j) - F(c_j(1), \ldots, c_j(m))| < \varepsilon/(2|I|)$ olur; diğer taraftan da, $\phi'(t) = (\phi'_1(t), \ldots, \phi'_m(t))$ olduğundan, $F(t_j, \ldots, t_j) = \|\phi'(t_j)\|$ ve

$$\begin{aligned} F(c_j(1), \ldots, c_j(m))(t_j - t_{j-1}) &= \left(\sum_{\ell=1}^{m} |\phi'_\ell(c_j(\ell))|^2 \right)^{1/2} (t_j - t_{j-1}) \\ &= \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\| \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan,

$$\sum_{j=1}^{k} \|\phi'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=1}^{k} \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\| < \sum_{j=1}^{k} \|\phi'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece, bu son eşitsizlik çifti daha önce elde edilen eşitsizlik çiftiyle birleştirilerek,

$$\int_I \|\phi'(t)\|\, dt - \varepsilon < \sum_{j=1}^{k} \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\| < \int_I \|\phi'(t)\|\, dt + \varepsilon$$

eşitsizliklerine ulaşılır; bu ise, soldaki eşitsizlik ve $\|\mathcal{C}\|$ büyüklüğünün tanımı nedeniyle,

$$L(\mathcal{C}) - \varepsilon = \int_I \|\phi'(t)\|\, dt - \varepsilon < \sum_{j=1}^{k} \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\| \leqslant \|\mathcal{C}\|$$

olması demektir: Tanım 2.1.8'den, o hâlde, $L(\mathcal{C}) \leqslant \|\mathcal{C}\|$ sonucuna ulaşılmış olur. Öte yandan, $\mathcal{P}_0$ parçalanışı $\mathcal{P}$ parçalanışından daha ince olduğundan, sağdaki eşitsizlik nedeniyle

$$\sum_{i=1}^{N} \|\phi(u_i) - \phi(u_{i-1})\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\| < \int_I \|\phi'(t)\|\, dt + \varepsilon$$

[13] Bkz. III/Sonuç 2.3.3'de $n = 1$ durumu.

olduğu görülür, ve I aralığının tüm $\{u_0, \ldots, u_N\}$ parçalanışları üzerinden supremum alınarak,

$$\|\mathcal{C}\| \leqslant \int_I \|\phi'(t)\|\,dt + \varepsilon,$$

yani $\|\mathcal{C}\| \leqslant L(\mathcal{C})$ eşitsizliğine ulaşılarak kanıt tamamlanır. □

Problemler

1. $I := [0, 2\pi)$, $J := [0, \pi)$, $\psi(t) := (a\sin t, a\cos t)$, ve $\sigma(t) := (a\cos(2t), a\sin(2t))$ olsun. (ψ, I) ve (σ, J) parametrizasyonlarının izlerini çiziniz. Her parametrizasyonun 'hareket yönünü' ve 'süratini' belirleyiniz. Bu parametrizasyonları Örnek 2.1.6'da verilenle karşılaştırınız.

2. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ve $\phi(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{C} := \phi(\mathbb{R})$ kümesinin, $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ noktalarını içeren sınırsız bir düzgün eğri olduğunu gösteriniz. Her $t_1, t_2 \neq 0$ için, $\phi(t_1) - \phi(0)$ ve $\phi(t_2) - \phi(0)$ vektörleri arasındaki açının 0 veya π olduğunu kanıtlayınız.

3. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık olsun, ve sürekli-diferansiyellenebilir bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\theta \in I$ için
$$|f(\theta)|^2 + |f'(\theta)|^2 \neq 0$$
koşulunu sağlasın. Kutupsal koordinatlarda $r = f(\theta)$ eşitliğinin gösterdiği grafiğin $\mathbb{R}^2$ içinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir düzgün eğri olduğunu kanıtlayınız.

4. $0 < x \leqslant 1$ için $y = \sin(1/x)$ eğrisinin doğrultulabilir olmadığını kanıtlayınız, ve bunu kullanarak $\mathcal{C}$ eğrisi bir yay değilse Teorem 2.1.22'nin doğru olmayabileceğini gösteriniz.

5. Aşağıda verilen her eğrinin izini çiziniz ve yay uzunluğunu hesaplayınız:
   (a) $t \in [0, 2\pi]$ için, $\phi(t) := (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$;
   (b) $(-1, 1)$ noktasından $(1, 1)$ noktasına, $y^3 = x^2$;
   (c) $t \in [0, 2]$ için, $\phi(t) := (t^2, t^2, t^2)$;
   (d) Örnek 2.1.7'de verilen astroid.

6. Aşağıda verilen her $\mathcal{C}$ eğrisi ve her g fonksiyonu için, $\mathcal{C}$ eğrisinin (parçalı) düzgün bir parametrizasyonunu bularak $\int_{\mathcal{C}} g\,ds$ eğrisel integralini hesaplayınız:
   (a) $\mathcal{C}$ eğrisi $x \geqslant 0$ için $y = \sqrt{(9 - x^2)}$, ve $g(x, y) := xy^2$;
   (b) $a, b > 0$ olmak üzere, $\mathcal{C}$ eğrisi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsinin birinci bölgede kalan kısmı, ve $g(x, y) := xy$;
   (c) $\mathcal{C}$ eğrisi $x^2 + z^2 = 4$ ve $y = x^2$ yüzeylerinin arakesiti, ve $g(x, y, z) := \sqrt{(1 + yz^2)}$;
   (d) $\mathcal{C}$ eğrisi köşeleri $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, ve $(0, 2, 0)$ olan üçgen, ve $g(x, y, z) := x + y + z^3$.

7. $\mathcal{C} := \phi(I)$ bir düzgün yay, ve her $k \in \mathbb{N}$ için $g_k : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun.
   (a) Eğer $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi g fonksiyonuna $\mathcal{C}$ üzerinde düzgün yakınsıyorsa,[14] $k \to \infty$ için $\int_{\mathcal{C}} g_k\,ds \to \int_{\mathcal{C}} g\,ds$ olduğunu ispatlayınız.
   (b) $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathcal{C}$ üzerinde noktasal monoton olsun ve bu dizi $\mathcal{C}$ üzerinde g fonksiyonuna noktasal yakınsasın. Eğer g fonksiyonu $\phi(I)$ üzerinde sürekli ise, $k \to \infty$ için $\int_{\mathcal{C}} g_k\,ds \to \int_{\mathcal{C}} g\,ds$ olduğunu gösteriniz.

[14]Bkz. III/§1.6, Problem 9 (b).

8. $\mathbb{R}^m$ içindeki bir düzgün yayın bir parametrizasyonu (ϕ, I) olsun, ve $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan $\tau : J \to \mathbb{R}$ fonksiyonu J kümesini bire-bir ve örten olarak I kümesine göndersin. Eğer sonlu sayıda $u \in J$ noktası için $\tau'(u) \neq 0$ ise, $\psi = \phi \circ \tau$ oluyorsa, ve $g : \phi(I) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekliyse, bu durumda

$$\int_I g(\phi(t))\, \|\phi'(t)\|\, dt = \int_J g(\psi(u))\, \|\psi'(u)\|\, du$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

9. (Descartes Yaprağı). $I_1 := (-\infty, -1)$, $I_2 := (-1, \infty)$, ve

$$\phi(t) := \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

olmak üzere, parçalı düzgün $\mathcal{C}$ eğrisi $\phi(I_1 \cup I_2)$ olsun. Eğer $(x, y) = \phi(t)$ ise, $x^3 + y^3 = 3xy$ olduğunu gösteriniz. $\mathcal{C}$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

10. Bir parametrizasyonu (ψ, I) olan bir düzgün eğri için $\mathbf{x}_0 := \psi(t_0)$ olsun. $\psi'(t)$ ve $\psi'(t_0)$ vektörleri arasındaki açı $\theta(t)$, ve $\psi(I)$ eğrisinin $\psi(t)$ noktasından $\psi(t_0)$ noktasına yay uzunluğu $\ell(t)$ olmak üzere,

$$\kappa(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\theta(t)}{\ell(t)}$$

değeri, ilgili limit var olduğunda, verilen eğrinin $\mathbf{x}_0$ noktasındaki ***mutlak eğriliği*** olarak adlandırılır. (κ büyüklüğü, tanım gereğince, $\theta(t)$ değerinin yay uzunluğuna göre hangi hızla değiştiğini ölçer.)

(a) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $I := (-\infty, \infty)$, ve $\psi(t) := \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ olmak üzere, $\Lambda := \psi(I)$ doğrusunun mutlak eğriliğinin, her $\mathbf{x}_0 \in \Lambda$ noktasında, sıfır olduğunu gösteriniz.

(b) $I := [0, 2\pi)$ ve $\psi(t) := (r\cos t, r\sin t)$ olmak üzere $\mathcal{C} := \psi(I)$ ile belirlenen r yarıçaplı çemberin mutlak eğriliğinin, her $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ noktasında, $1/r$ olduğunu kanıtlayınız.

11. $\mathcal{C}$, bir parametrizasyonu $(\phi, [a, b])$ olan, $\mathbb{R}^m$ içinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından bir yay olsun, ve $s = \ell(t)$ yay uzunluğu (2.1.2) ile verilsin. Bu durumda,

$$\nu(s) := (\phi \circ \ell^{-1})(s) \quad \text{ve} \quad L := L(\mathcal{C})$$

olmak üzere, $(\nu, [0, L])$ ikilisine $\mathcal{C}$ yayının ***doğal parametrizasyon***u denir.

(a) Her $s \in [0, L]$ için $\|\nu'(s)\| = 1$ eşitliğinin sağlandığını, ve $\mathcal{C}$ yayının her $(\nu, [c, d])$ alt-eğrisinin yay uzunluğunun $d - c$ olduğunu kanıtlayınız. (Bundan dolayı $(\nu, [0, L])$ ikilisi doğal parametrizasyon olarak adlandırılır.)

(b) Her $s \in [0, L]$ için $\nu'(s)$ ve $\nu''(s)$ vektörlerinin ortogonal olduklarını gösteriniz.

(c) $(\nu, [0, L])$ eğrisinin $\mathbf{x}_0 := \nu(s_0)$ noktasındaki mutlak eğriliğinin (bkz. Problem 10) $\kappa(\mathbf{x}_0) = \|\nu''(s_0)\|$ olduğunu ispatlayınız.

(d) Eğer $\mathbf{x}_0 = \phi(t_0) = \nu(s_0)$ ve $m = 3$ ise,

$$\kappa(\mathbf{x}_0) = \|\nu'(s_0) \times \nu''(s_0)\| = \frac{\|\phi'(t_0) \times \phi''(t_0)\|}{\|\phi'(t_0)\|^3}$$

olduğunu gösteriniz.

(e) Âşikâr parametrizasyonuyla göz önüne alınan $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $y = f(x)$ bâriz eğrisinin (x_0, y_0) noktasındaki mutlak eğriliğinin

$$\kappa = \frac{|y''(x_0)|}{(1 + (y'(x_0))^2)^{3/2}}$$

olduğunu ispatlayınız.

2.2 Yönlendirilmiş eğriler

Düzgün bir $\mathcal{C}$ eğrisinin her (ϕ, I) parametrizasyonu, t parametresi I üzerinde değiştiğinde, $\phi(t)$ vektörünün hareket ettiği doğrultuyu−ya da buna denk olarak, $\phi'(t)$ teğet vektörünün gösterdiği doğrultuyu−belirleyerek, $\mathcal{C}$ boyunca bir 'hareket doğrultusu' meydana getirir. Bu doğrultu, ***$\mathcal{C}$ eğrisinin (ϕ, I) tarafından belirlenen yönlendirilişi*** olarak adlandırılır.

Bir parametrizasyonu (ϕ, I) olan düzgün bir $\mathcal{C}$ eğrisinin bir $\mathbf{x}_0 := \phi(t_0)$ noktasındaki ***birim teğet vektörü***

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_0) := \phi'(t_0)/\|\phi'(t_0)\|$$

olarak tanımlanır. Eğer (ϕ, I) ve (ψ, J) aynı bir eğrinin τ geçiş fonksiyonuna sahip düzgünce denk parametrizasyonları ise, τ' fonksiyonu sürekli ve sıfırdan farklı olduğundan, ya her $u \in J$ için $\tau'(u) > 0$ olur ya da her $u \in J$ için $\tau'(u) < 0$ gerçeklenir. İlk durumda, bir önceki kısımdaki (2.1.1) eşitliğinden dolayı, $\phi'(\tau(u))$ ve $\psi'(u)$ vektörleri aynı doğrultuyu gösterirler; dolayısıyla ilgili parametrizasyonlar, eğri için aynı yönlendirilişi ve aynı birim teğet vektörlerini belirlerler. İkinci durumda ise, benzer nedenlerle, $\phi'(\tau(u))$ ve $\psi'(u)$ vektörleri zıt doğrultulara sahiptirler; bir başka deyişle verilen parametrizasyonlar, zıt yönlendirilişleri ve aksi yönlü birim teğet vektörlerini belirlemiş olurlar. Aşağıdaki tanım, bu gözlemler neticesinde yapılır.

Tanım 2.2.1. Düzgünce denk olan ve J kümesinden I kümesine geçişi belirleyen τ fonksiyonunun her $u \in J$ için $\tau'(u) > 0$ koşulunu sağladığı (ϕ, I) ve (ψ, J) gibi iki parametrizasyonun "***yönlendirilişce denk*** oldukları," söylenir.

Pratikte, bir eğri ve parametrizasyonu çoğu kez geometrik olarak belirlenir: yani, eğrinin izini belirlenmiş bir doğrultuda çizen uygun bir parametrizasyon aranır.

Örnek 2.2.2. $\mathbb{R}^3$ içinde, $x^2 + 5y^2 = 5$ ve $z = x^2$ yüzeylerinin kesişimiyle belirlenen ve pozitif z-ekseninden yukarı doğru görüldüğünde saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş olan $\mathcal{C}$ eğrisi göz önüne alınsın. Bu durumda $x^2 + 5y^2 = 5$ eliptik silindiri $z = x^2$ parabolik silindirini, bir 'sarkık elips' oluşturacak biçimde keser. Diğer taraftan, $x = \sqrt{5}\sin t$ ve $y = \cos t$ denilerek $x^2 + 5y^2 = 5$ elipsinin çevresine saat yönündeki hareket dâhil edildiğinde, $z = x^2 = 5\sin^2 t$ olduğu görülür. $\mathcal{C}$ eğrisinin saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş bir düzgün parametrizasyonu, o hâlde, $I := [0, 2\pi]$ ve her $t \in I$ için $\phi(t) := (\sqrt{5}\sin t, \cos t, 5\sin^2 t)$ ile belirlenmiş olur.

Örnek 2.2.3. $\mathbb{R}^3$ içinde, $z = x^2 - y^2$ ve $x + y = 1$ yüzeylerinin kesişimiyle belirlenen ve xy-düzlemindeki $y = x$ doğrusunun uzağından görüldüğünde sağdan sola doğru yönlendirilmiş $\mathcal{C}$ eğrisi göz önüne alınsın. Bu durumda bir eyer noktasına[15] sahip $z = x^2 - y^2$ yüzeyi ile $x + y = 1$ düzlemi, yüzeyi çaprazvâri kesen bir eğri oluşturacak biçimde kesişirler. Parametre olarak $x = t$ kullanılıp sağdan-sola-doğru yönlendirme ilgili eğriye dâhil edildiğinde ise, $y = 1 - t$ ve $z = t^2 - (1-t)^2 = 2t - 1$ olduğu görülür. $\mathcal{C}$ eğrisinin bir düzgün parametrizasyonu, şu hâlde, $I := \mathbb{R}$ üzerinde $\phi(t) := (t, 1-t, 2t-1)$ ile belirlenmiş olur—bu eğri, $(1, -1, 2)$ doğrultusundaki ve $(0, 1, -1)$ noktasından geçen bir doğrudur.

Aşağıda tanımlanan integral tipiyle, akışkanlar, elektrik ve manyetizma gibi konuların analizinde doğal olarak karşılaşılır.

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}^m$ içinde, birim teğet vektörü $\mathbf{T}$ olan bir düzgün yay $\mathcal{C}$, ve (ϕ, I) ikilisi $\mathcal{C}$ yayının bir parametrizasyonu olsun. Eğer $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu sürekli ise,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds := \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\phi := \int_I \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt \tag{2.2.1}$$

değerine $\mathcal{C}$ ***boyunca* F *fonksiyonunun yönlendirilmiş eğrisel integrali*** denir.

$\mathbf{F} \cdot d\phi$ yazılımının anlamı açıktır. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ notasyonu ise, §2.1 kısmındaki (2.1.3) eşitliğiyle uyumludur: $\mathbf{T} = \phi'(t)/\|\phi'(t)\|$ ve $ds = \|\phi'(t)\|\, dt$ olduğundan, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ ifadesindeki $\|\phi'(t)\|$ skalerleri sadeleşirler.

$\mathbf{F}$ vektör fonksiyonu bir akışkanın akışını gösterdiğinde, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ skaleri $\mathbf{T}$ teğet vektörünün gösterdiği doğrultudaki akışkan akışının bir ölçüsünü, bir başka deyişle $\mathbf{F}$ fonksiyonunun teğetsel bileşenini belirler. Örneğin, $\mathcal{C}$ eğrisi, saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş birim çember ve $\mathbf{F}(x, y) := (-y, x)$ olsun. Bir (x, y) noktasında $\mathcal{C}$ eğrisinin birim teğet vektörü $(-y, x)$ olduğundan, $\mathbf{F}$ fonksiyonu $\mathbf{T}$ vektörünün gösterdiği doğrultudadır. Dolayısıyla $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = 1$ skaleri, akışkanın, teğete zıt yönde değil 'teğetle birlikte' aktığını işaret eder. Diğer taraftan, eğer $\mathbf{G}(x, y) := (y, -x)$ ve $\mathbf{H}(x, y) = (x, y)$ ise, bu durumda, akışkan teğete zıt yönde aktığından $\mathbf{G} \cdot \mathbf{T} = -1$, ve akışkan teğete ortogonal olarak aktığından $\mathbf{H} \cdot \mathbf{T} = 0$ olur. $\mathcal{C}$ boyunca $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ büyüklüğünün integrali, o hâlde, teğet vektörü doğrultusunda $\mathbf{F}$ fonksiyonunun $\mathcal{C}$ etrafındaki dolanımının bir ölçüsüdür; eğer bu integralin değeri pozitif ise, akışkanın net akışının $\mathbf{T}$ vektörüne zıt yönde değil bu vektörle aynı yönde olduğu anlaşılır.

Yönlendirilmiş bir eğrisel integral de, tıpkı eğrisel integral gibi, bir-boyutlu bir integral olduğundan, çoğu kez standart integrasyon teknikleriyle hesaplanabilir.

---

[15] Bkz. III/Tanım 2.5.6.

Örnek 2.2.5. $I := [0, 4\pi]$, her $t \in I$ için $\phi(t) := (\cos t, \sin t, t)$, $\mathcal{C} := \phi(I)$, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (1, \cos z, xy)$ olsun. Bu durumda, $(x, y, z) = \phi(t)$ ise $x^2 + y^2 = 1$ olacağından, ϕ fonksiyonunun izi $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 4\pi$ silindirinin üzerinde bulunur; t arttıkça da, (x, y) noktası $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin etrafında saat yelkovanının ters yönünde dolanım yapar. Bundan dolayı, ϕ fonksiyonunun izinin $x^2 + y^2 = 1$ silindiri etrafında kıvrılarak ilerleyen bir spiral olduğu görülür. (Bu eğri, ***dairesel helis*** olarak adlandırılır.) Parametre olan t sıfır ile 4π arasında değiştiğinden, bu spiral silindirin etrafında iki kere dolanım yapar, ve z de sıfırdan 4π değerine kadar değişir. Bu ise, $\phi'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= \int_0^{4\pi} (1, \cos t, \cos t \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt \\ &= \int_0^{4\pi} (-\sin t + \cos^2 t + \sin t \cos t)\, dt = 2\pi\end{aligned}$$

olması demektir.

Bir yönlendirilmiş $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ integrali, eğrisel bir $\int_{\mathcal{C}} g\, ds$ integralinin tersine, aynı bir eğrinin düzgünce denk olan farklı parametrizasyonları için farklı değerler alabilir.

Teorem 2.2.6. *Eğer (ϕ, I) ve (ψ, J) parametrizasyonları düzgünce denk iseler fakat yönlendirilişçe denk değillerse, o zaman*

$$\int_I \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = -\int_J \mathbf{F}(\psi(u)) \cdot \psi'(u)\, du$$

olur.

Kanıt. J kümesinden I kümesine geçiş fonksiyonu τ olsun. Sürekli ve sıfırdan farklı olduğundan, τ' fonksiyonu ya J üzerinde pozitiftir ya da J üzerinde negatif olur; bu ise, (ϕ, I) ve (ψ, J) parametrizasyonları yönlendirilişçe denk olmadıklarından, J üzerinde τ' fonksiyonunun negatif olması, yani her $u \in J$ için $|\tau'(u)| = -\tau'(u)$ eşitliğinin sağlanması demektir. Bu gözlem Teorem 1.4.4 ve §2.1 kısmındaki (2.1.1) eşitliğiyle birlikte kullanıldığında ise,

$$\begin{aligned}\int_I \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt &= \int_J \mathbf{F}(\phi(\tau(u))) \cdot \phi'(\tau(u))\, |\tau'(u)|\, du \\ &= -\int_J \mathbf{F}(\psi(u)) \cdot \psi'(u)\, du\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

Teorem 2.2.6'daki yöntem kullanılarak, (2.2.1) ile verilen yönlendirilmiş eğrisel integralin aynı bir eğrinin yönlendirilişçe denk parametrizasyonları için aynı değeri verdiği de kolayca gösterilebilir (bkz. Problem 5). Dolayısıyla, yönlendirilişi geometrik olarak belirlenmiş olan bir $\mathcal{C}$ eğrisi boyunca yönlendirilmiş bir integrali hesaplamak için, $\mathcal{C}$ eğrisinin herhangi bir düzgün parametrizasyonunu kullanıp integralin işaretini belirlenen yönlendirilişi yansıtacak biçimde ayarlamak yeterli olur.

Örnek 2.2.7. Saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş $x^2 + y^2 = 1$ birim çemberi $\mathcal{C}$, ve $\mathbf{F}(x, y) := (y, xy)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{C}$ eğrisinin, her $t \in [0, 2\pi]$ için $\phi(t) := (\cos t, \sin t)$ ile belirlenen parametrizasyonu saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiştir (bkz. Örnek 2.1.6). Teorem 2.2.6'dan, o hâlde,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= -\int_0^{2\pi} (\sin t, \sin t \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin t \cos^2 t)\, dt = \pi\end{aligned}$$

elde edilir.

Diferansiyel notasyonu kullanılarak, (2.2.1) ile verilen yönlendirilmiş integral için bir diğer gösteriliş de elde edilebilir. Eğer $x_j := \phi_j(t)$ ise $dx_j = \phi_j'(t)\, dt$ olduğu hatırlanırsa, $\mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt$ ifadesinin biçimsel olarak

$$(F_1(\phi(t))\phi_1'(t) + \cdots + F_m(\phi(t))\phi_m'(t))\, dt = F_1\, dx_1 + \cdots + F_m\, dx_m$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Bu son eşitlikle verilen ifadeye, $\mathbb{R}^m$ üzerinde ***birinci-dereceden*** bir ***diferansiyel form*** (ya da, bir 1-***form***) adı verilir; F_j fonksiyonları ilgili formun ***katsayıları*** olarak adlandırılır. Katsayılarının her biri bir E kümesi üzerinde sürekli olan bir 1-formun "E üzerinde ***sürekli*** olduğu," söylenir. $\mathbf{F} := (F_1, \ldots, F_m)$ olmak üzere, sürekli bir 1-formun $\mathbb{R}^m$ içindeki bir düzgün $\mathcal{C}$ yayı üzerindeki ***yönlendirilmiş integral***i

$$\int_{\mathcal{C}} F_1\, dx_1 + \cdots + F_m\, dx_m := \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

olarak tanımlanır.

Diferansiyel formlar, bâriz eğrilerin parametrizasyonlarını belirleme zorunluluğu olmadan, yönlendirilmiş eğrisel integrallerin hesaplanabilmesini sağlarlar.

Örnek 2.2.8. $\mathbb{R}^2$ içinde, $(0,0)$ noktasından (π,π^2) noktasında yönlendirilmiş olan $y = x^2 + \sin x$ bâriz eğrisi için $dy = (2x + \cos x)\,dx$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} y\,dx + \cos x\,dy &= \int_0^\pi (x^2 + \sin x)\,dx + \int_0^\pi \cos x(2x + \cos x)\,dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi}{2} - 2\end{aligned}$$

olur.

$\mathbb{R}^m$ içinde bir parçalı düzgün yay $\mathcal{C} := \bigcup_{j=1}^N \mathcal{C}_j$, ve her $j = 1,\ldots,N$ için $\mathcal{C}_j$ yayının bir birim teğet vektörü $\mathbf{T}_j$ olsun. Eğer $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu sürekli ise, $\mathbf{T}_j$ teğetleri tarafından belirlenen, ***$\mathcal{C}$ boyunca F fonksiyonunun yönlendirilmiş eğrisel integrali***

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds := \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{C}_j} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_j\,ds$$

olarak tanımlanır. Eğer $\mathcal{C}$ üzerinde sürekli bir 1-form ω ise, ω formunun $\mathcal{C}$ ***boyunca yönlendirilmiş integrali***

$$\int_{\mathcal{C}} \omega := \sum_{j=1}^N \int_{\mathcal{C}_j} \omega$$

ile verilir.

Örnek 2.2.9. $\mathcal{C}$ eğrisi $Q := [0,1]\times[0,1]$ karesinin saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş sınırı, ve $\mathbf{F} := (xy, x^2 + y^2)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{C} = \partial Q$ eğrisi, $x = 0$ üzerinde bulunan eğri $\mathcal{C}_1$, $y = 0$ üzerinde bulunan eğri $\mathcal{C}_2$, $x = 1$ üzerinde bulunan eğri $\mathcal{C}_3$, ve $y = 1$ üzerinde bulunan eğri $\mathcal{C}_4$ olmak üzere, dört düzgün parçadan oluşur. $\mathcal{C}$ eğrisinin yönlendirilişi göz önüne alınarak, $\mathcal{C}_1$ üzerinde, $x = 0$ olsun ve y değişkeni 1 değerinden 0 değerine doğru değişsin. Böylece,

$$\int_{\mathcal{C}_1} xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = \int_1^0 y^2\,dy = -\frac{1}{3}$$

elde edilir. Benzer argümanlarla $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, ve $\mathcal{C}_4$ eğrileri üzerindeki integraller, sırasıyla, 0, 4/3, ve $-1/2$ olarak bulunur. O hâlde,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

olur.

Problemler

1. Aşağıdakilerin her biri için, $(\phi, \mathbb{R})$ parametrizasyonunun izini çiziniz, bu parametrizasyonun yönlendirilişini belirleyiniz, ve ilgili eğrinin verilen $\mathcal{S}$ yüzeyinin bir alt-kümesi olduğunu gösteriniz:

(a) $\phi(t) := (3t, 3\sin t, \cos t)$, $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + 9z^2 = 9\}$;

(b) $\phi(t) := (t^2, t^3, t^2)$, $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x\}$;

(c) $\phi(t) := (t, t^2, \sin t)$, $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$;

(d) $\phi(t) := (\cos t, \sin t, \cos t)$, $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 1\}$;

(e) $\phi(t) := (\sin t, \sin t, t)$, $\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x\}$.

2. Aşağıda verilen her $\mathcal{C}$ eğrisi ve her $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, $\mathcal{C}$ eğrisinin (parçalı) düzgün bir parametrizasyonunu bularak $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{C}$ eğrisi $(1, 1)$ noktasından $(3, 9)$ noktasına $y = x^2$, ve $\mathbf{F}(x, y) := (xy, y - x)$;

(b) $\mathcal{C}$ eğrisi, pozitif x-ekseninin uzağından görüldüğünde saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş, $y^2 + 2z^2 = 1$ eliptik silindiri ile $x = -1$ düzleminin arakesiti, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (\sqrt{(x^3 + y^3 + 5)}, z, x^2)$;

(c) $\mathcal{C}$ eğrisi, pozitif y-ekseninin uzağından görüldüğünde saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş, $y = |x|$ eğik düzlemi ile $x^2 + 3z^2 = 1$ eliptik silindirinin arakesiti, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (z, -z, x + y)$.

3. Aşağıda verilen her $\mathcal{C}$ eğrisi ve her ω 1-formu için, $\int_{\mathcal{C}} \omega$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{C}$ eğrisi, $(1, 1)$ noktasıyla $(2, 1)$ noktasını birleştiren doğru parçasının $(2, 1)$ noktasıyla $(2, 3)$ noktasını birleştiren doğru parçası tarafından takip edildiği çokgensel yol, ve $\omega := y\, dx + x\, dy$;

(b) $\mathcal{C}$ eğrisi, pozitif z-ekseninin uzağından görüldüğünde saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş, $z = x^2 + y^2$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yüzeylerinin arakesiti, ve $\omega := dx + (x + y)\, dy + (x^2 + xy + y^2)\, dz$;

(c) $\mathcal{C}$ eğrisi $R := [a, b] \times [c, d]$ karesinin saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş sınırı, ve $\omega := xy\, dx + (x + y)\, dy$;

(d) $\mathcal{C}$ eğrisi, y-ekseninin uzağından görüldüğünde soldan-sağa yönlendirilmiş, $y = x$ ve $0 \leqslant z \leqslant 1$ için $y = z^2$ yüzeylerinin arakesiti, ve $\omega := \sqrt{x}\, dx + \cos y\, dy - dz$.

4. (a) $c \in \mathbb{R}$ ve $\delta > 0$ olsun, ve her $u \in \mathbb{R}$ için $\tau(u) := \delta u + c$ olarak tanımlansın. Eğer (ϕ, I) ikilisi bir eğrinin bir düzgün parametrizasyonu oluyorsa, $J := \tau^{-1}(I)$ ise, ve $\psi := \phi \circ \tau$ gerçekleniyorsa, bu durumda (ψ, J) ikilisinin (ϕ, I) parametrizasyonuna yönlendirilişçe denk olduğunu kanıtlayınız.

(b) Eğer (ϕ, I) ikilisi bir düzgün yayın bir parametrizasyonu ise, bu parametrizasyona yönlendirilişçe denk olan bir $(\psi, [0, 1])$ parametrizasyonunun var olduğunu ispatlayınız.

(c) Parçalı düzgün eğriler için, (b) kısmındaki sonucun bir benzerini elde ediniz.

5. (ϕ, I) ikilisi bir yayın bir düzgün parametrizasyonu olsun, ve bir J kümesinden I kümesine bire-bir ve örten olup $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan bir τ fonksiyonu J kümesinin sonlu sayıda noktası dışında her $u \in J$ için $\tau'(u) > 0$ koşulunu sağlasın. Eğer $\psi := \phi \circ \tau$ ise, bu durumda

$$\int_I \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt = \int_J \mathbf{F}(\psi(u)) \cdot \psi'(u)\, du$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

6. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından, ve her $t \in [a, b]$ için $f'(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $f(a)$ noktasından $f(b)$ noktasına değişen y değişkeni için $x = f^{-1}(y)$ bâriz eğrisinin, a noktasından b noktasına değişen x değişkeni için $y = f(x)$ bâriz eğrisine yönlendirilişçe denk olduğunu ispatlayınız.

7. $V \subseteq \mathbb{R}^2$ boş-olmayan bir küme ve $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}^2$ bir fonksiyon olsun. Eğer bir $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde $\mathbf{F} = \nabla f$ gerçeklenecek biçimde bulunabiliyorsa, $\mathbf{F}$ fonksiyonu V üzerinde bir ***korunum fonksiyonu*** olarak adlandırılır. Bir $(x, y) \in V$ noktası alınsın ve $\mathbf{F} := (P, Q) : V \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun V üzerinde sürekli olduğu varsayılsın.

(a) $\mathcal{C}(x)$ simgesi, (x, y) noktasında sonlanan bir yatay doğru parçasını (yani, bir (x_1, y) noktasından (x, y) noktasına doğru yönlendirilmiş $L((x_1, y); (x, y))$ formunda bir doğru parçasını) göstersin. Eğer $\mathcal{C}(x)$ kümesi V kümesinin bir alt-kümesi ise,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathcal{C}(x)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = P(x, y)$$

olduğunu kanıtlayınız. Ayrıca, $\partial/\partial y$ türevini ve V içinde kalıp (x, y) noktasında sonlanan dikey doğru parçalarını göz önüne alarak benzer bir ifade oluşturunuz ve bunu ispat ediniz.

(b) $(x_0, y_0) \in V$ olsun. V içinde kalan kapalı ve parçalı düzgün her $\mathcal{C}$ eğrisi için

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0 \qquad (2.2.2)$$

olması için gerekli ve yeterli koşulun, her $(x, y) \in V$ için, V içinde kalan ve (x_0, y_0) noktasından başlayıp (x, y) noktasında sonlanan parçalı düzgün her $\mathcal{C}(x, y)$ eğrisi için

$$f(x, y) := \int_{\mathcal{C}(x,y)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

integrallerinin aynı değeri vermeleri olduğunu kanıtlayınız.

(c) $\mathbf{F}$ fonksiyonunun V üzerinde bir korunum fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli koşulun, V kümesinin içinde kalan kapalı ve parçalı düzgün her $\mathcal{C}$ eğrisi için (2.2.2) eşitliğinin sağlanması olduğunu kanıtlayınız.

(d) Eğer $\mathbf{F}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^1$-sınıfından ise ve bu fonksiyon V kümesinin içinde kalan kapalı ve parçalı düzgün her $\mathcal{C}$ eğrisi için (2.2.2) eşitliğini sağlıyorsa, bu durumda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

olduğunu gösteriniz.

8. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli-diferansiyellenebilir ve artan, ve köşe noktaları $(0, f(0))$, $(1, f(0))$, ve $(1, f(1))$ olan dik üçgen T olsun. Eğer T üçgeninin hipotenüsünün uzunluğu c, aynı üçgenin kenar uzunlukları a ve b, ve $x \in [0, 1]$ için $y = f(x)$ bâriz eğrisinin yay uzunluğu L ise, $c \leqslant L \leqslant a + b$ olduğunu gösteriniz.

2.3 Yüzeyler

Bu kısımda, §2.1 kısmında tanımlanan yay ve eğrisel integral kavramlarının iki-boyutlu benzerleri olarak, yüzey ve yönlendirilmemiş yüzey integrali kavramları tanımlanacaktır. Bir düzgün yayın kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde parametrelendiği hatırlanırsa, bu türden bir genelleştirmenin $\mathbb{R}^2$ içindeki kapalı ve sınırlı kümeler kullanılarak yapılması gerektiği de hemen anlaşılır. Dikdörtgenleri kullanmak, ilk akla gelen ve en doğal olan yol olmasına karşın, çok kısıtlayıcıdır: pratikte sıklıkla karşılaşılan ve izdüşürülebilir bölgeler olarak belirlenen ya da silindirik veya küresel koordinatlar vâsıtasıyla temsil edilebilen pek çok yüzey için, dikdörtgenlerden daha 'esnek' özelliklere sahip kümelere ihtiyaç duyulur.

Tanım 2.3.1. $\mathbb{R}^m$ içindeki boştan farklı, açık, ve bağlantılı bir V Jordan bölgesi için $E = \overline{V}$ yapısındaki bir $E \subseteq \mathbb{R}^m$ kümesine, bir m***-boyutlu bölge*** denir.

Her kapalı ve sınırlı aralığın bir-boyutlu bir bölge, her iki-boyutlu dikdörtgenin ve iki-boyutlu bir açık topun ya da elipsin kapanışının iki-boyutlu bir bölge, ve her üç-boyutlu dikdörtgenin ve üç-boyutlu bir açık topun ya da elipsoidin kapanışının üç-boyutlu bir bölge olduğu kolayca gözlemlenebilir.

Tanım 2.3.2. E, iki-boyutlu bir bölge ve $\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3) : E \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından ve E° üzerinde bire-bir ise, $\mathbb{R}^3$ uzayının $\mathcal{S} := \phi(E)$ altkümesine ($\mathbb{R}^3$ içinde) $\mathcal{C}^p$*-sınıfından* bir ***yüzey*** denir. Bu durumda (ϕ, E) sıralı ikilisi E yüzeyinin *bir* ***parametrizasyon***u, ve $\mathcal{S}$ kümesi (ϕ, E) ikilisinin ***iz***i olarak adlandırılır. Her $(u, v) \in E$ için

$$x := \phi_1(u, v), \quad y := \phi_2(u, v), \quad z := \phi_3(u, v)$$

olarak tanımlanan denklemlere, $\mathcal{S}$ yüzeyinin (ϕ, E) parametrizasyonuyla belirlenen ***parametrik denklemler***i adı verilir.

Tanım 2.3.2 ile verilen yüzey kavramı, $\mathcal{C}^p(\mathbb{R}^2)$ ailesine ait fonksiyonların grafiklerini içerir.

Örnek 2.3.3. E, iki-boyutlu bir bölge ve $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^p$- sınıfından olsun. Bu durumda $z = f(x, y)$ eşitliğiyle verilen grafik $\mathbb{R}^3$ içinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yüzeydir: her $(u, v) \in E$ için $\phi(u, v) := (u, v, f(u, v))$ olarak tanımlanırsa, ϕ fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından ve bire-bir olur; aynı zamanda da $\phi(E)$ kümesi, $z = f(x, y)$ koşulunu sağlayan noktaların grafiğidir. (Bu durumda (ϕ, E) parametrizasyonu, $z = f(x, y)$ yüzeyinin ***âşikâr parametrizasyon***u olarak adlandırılacaktır.)

$x = f(y, z)$ ve $y = f(x, z)$ eşitlikleriyle belirlenen yüzeylerin âşikâr parametrizasyonları, Örnek 2.3.3'dekine benzer biçimde tanımlanır: örneğin $(y, z) \in E$ için $x = f(y, z)$ yüzeyinin âşikâr parametrizasyonu, $\phi(u, v) := (f(u, v), u, v)$ olmak üzere, (ϕ, E) ikilisidir. İki-boyutlu bir E bölgesi ve $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan bir

$f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, $x = f(y,z)$, $y = f(x,z)$, veya $z = f(x,y)$ formundaki bir yüzey, E ***üzerinde*** bir ***bâriz yüzey*** olarak adlandırılacaktır. Örnek 2.3.3'ün kanıtından dolayı, her bâriz yüzey $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yüzeydir.

Örnek 2.3.4. $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ ile belirlenen kesik silindir, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından bir yüzeydir: $E := [0, 2\pi] \times [0, 2]$ ve her $(u, v) \in E$ için $\phi(u, v) := (\cos u, \sin u, v)$ olarak alınırsa, ϕ fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ve E° üzerinde bire-bir olur; karşılık gelen parametrik denklemler de, $x = \cos u$, $y = \sin u$, $z = v$ olarak belirlenir. $\phi(E)$ kümesi, o hâlde, $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ silindirinin bir alt-kümesidir. III/§1.4, Problem 1 nedeniyle E dikdörtgeni bağlantılı ve ϕ fonksiyonu diferansiyellenebilir—dolayısıyla, sürekli—olduğundan, III/Teorem 1.6.8'den $\phi(E)$ kümesi de bağlantılıdır. Son olarak, $\phi(E)$ kümesinin ilgili silindirin tamâmını oluşturduğunu görmek maksadıyla E içindeki yatay doğru parçalarının görüntülerine bakılırsa, $v = v_0$ şeklindeki bu tipten bir doğru parçasının, $z = v_0$ düzleminin içinde yatan, $(0, 0, v_0)$ merkezli bir çember olduğu görülür; yani, v_0 parametresi sıfırdan 2 değerine değiştiğinde, $v = v_0$ yatay doğrularının görüntülerinin $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ silindirinin tamâmını örttükleri gözlemlenmiş olur.

Örnek 2.3.5. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ bağıntısıyla belirlenen küre, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından bir yüzeydir: Gerçekten, $E := [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ ve her $(u, v) \in E$ için $\phi(u, v) := (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ olarak alınırsa, ϕ fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ve E° üzerinde bire-bir olur. Diğer taraftan da karşılık gelen parametrik denklemler, $x = a \cos u \cos v$, $y = a \sin u \cos v$, $z = a \sin v$ olarak belirlenir; bu ise, $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 v$ olduğundan, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ eşitliğinin sağlanması anlamına gelir. $\phi(E)$ kümesi, o hâlde, yarıçapı a olan merkezil kürenin bir alt-kümesidir. Öte yandan, bir $v = v_0$ yatay doğru parçasının görüntüsüne bakıldığında, bunun, $z = a \sin v_0$ düzleminin içinde yatan, $(0, 0, a \sin v_0)$ merkezli ve $a \cos v_0$ yarıçaplı bir çember olduğu görülür. Aynı zamanda, E kümesinin $v = \pi/2$ yatay doğrusunun görüntüsüyle belirlenen üst kenarı $(0, 0, a)$ koordinatlı kuzey kutup noktası, aynı kümenin $v = -\pi/2$ yatay doğrusunun görüntüsüyle belirlenen alt kenarı ise $(0, 0, -a)$ koordinatlı güney kutup noktasıdır. Böylece, v_0 parametresi $-\pi/2$ değerinden $\pi/2$ değerine değiştiğinde, $v = v_0$ yatay doğrularının görüntülerinin $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin tamâmını örttükleri sonucuna ulaşılır.

$\mathcal{C}$ eğrisi, $a > b$ olmak üzere, xz-düzlemindeki, $(a, 0, 0)$ merkezli ve b yarıçaplı çemberi göstersin. $\mathcal{C}$ çemberini z-ekseni etrafında döndürerek elde edilen simit-biçimli yüzey, yarıçapları $a > b$ olan orijin merkezli ***torus*** olarak adlandırılır.

Örnek 2.3.6. Yarıçapları $a > b$ olan orijin merkezli torus, $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından bir yüzeydir: Gerçekten, $E := [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ ve $(u, v) \in E$ ikilileri göz önüne alındığında $\phi(u, v) := ((a+b\cos v)\cos u, (a+b\cos v)\sin u, b\sin v)$ şeklinde tanımlanırsa, ϕ fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ve E° üzerinde bire-bir olur. Diğer taraftan, $u = 0$ doğrusunun görüntüsü xz-düzlemindeki $(a, 0, 0)$ merkezli ve b yarıçaplı çember; $v = v_0$ yatay doğrularının görüntüleri ise, xy-düzlemine paralel olan, $(0, 0, b\sin v_0)$ merkezli ve $(a + b\cos v_0)$ yarıçaplı çemberlerdir. Aynı zamanda da $v = \pm\pi$ doğrularının görüntüleri, xy-düzlemindeki $(0, 0, 0)$ merkezli ve $a - b$ yarıçaplı çember olur. Dolayısıyla, $\phi(E)$ kümesi ilgili torusun tamâmını örter.

Örnek 2.3.7. $b > 0$ olmak üzere, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $0 \leqslant z \leqslant b$ kesik konisi $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından bir yüzeydir: $E := [0, 2\pi] \times [0, b]$ ve her $(u, v) \in E$ ikilisi için $\phi(u, v) := (v\cos u, v\sin u, v)$ olarak alınırsa, ϕ fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^\infty$-sınıfından ve E° üzerinde bire-bir olur. Bâriz olarak, $x^2 + y^2 = z^2$ ve $0 \leqslant z \leqslant b$ sağlanır. Yani $\phi(E)$ kümesi, verilen koninin bir alt-kümesidir. Diğer taraftan, $0 < v_0 \leqslant b$ olmak üzere, $v = v_0$ yatay doğrusunun görüntüsü, $z = v_0$ düzleminin içinde yatan, $(0, 0, v_0)$ merkezli ve v_0 yarıçaplı bir çemberdir: $\phi(E)$ kümesi, o hâlde, $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $0 \leqslant z \leqslant b$ ile belirlenen kesik konidir. $v = 0$ doğrusunun görüntüsünün koninin $(0, 0, 0)$ köşesi olduğu da dikkâte alınmalıdır.

Bir parametrizasyonu (ϕ, E) olan, $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yüzey $\mathcal{S}$, ve $(u_0, v_0) \in E^\circ$ olsun. Eğer $\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ise, Kapalı Fonksiyon Teoremi'nden[16] dolayı,[17] ϕ fonksiyonunun kısmî Jacobi determinantlarından[18] en az biri (u_0, v_0) noktasında sıfıra eşit değilse, diğer bir ifadeyle $i \neq j$ koşulunu sağlayan bir (i, j) indis çifti için

$$\Delta_{\phi_i,\phi_j}(u_0, v_0) := \frac{\partial(\phi_i, \phi_j)}{\partial(u, v)}(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0) \tag{2.3.1}$$

oluyorsa, bu durumda $(x_0, y_0, z_0) := \phi(u_0, v_0) \in \psi(B)$ ve $\psi(B) \subseteq \phi(B)$ gerçeklenecek biçimde $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir (ψ, B) bâriz yüzeyi vardır. Diferansiyellenebilir bâriz yüzeyler teğet düzlemlerine sahip olduklarından,[19] eğer $i \neq j$ koşulunu sağlayan bir (i, j) indis çifti için (2.3.1) gerçekleniyorsa ve $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$ ise, $\mathcal{S}$ yüzeyinin (x_0, y_0, z_0) noktasında bir teğet düzlemine sahip olduğu görülür.

Aşağıdaki sonuç bir yüzeyin bir parametrizasyonunun, yüzeyin teğet düzleminin bir normal vektörünü bulmak için nasıl kullanılabileceğini gösterir.

[16] Bkz. III/Teorem 2.4.10.
[17] Ayrıca bkz. Teorem 2.1.15'in kanıtı.
[18] Bkz. III/S. 62.
[19] İki-değişkenli fonksiyonlar için: bkz. III/Teorem 2.2.15 & III/§2.4, Problem 8.

Teorem 2.3.8. *Bir parametrizasyonu (ϕ, E) olan, $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yüzey $\mathcal{S}$, ve $\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ olsun. Eğer $i \neq j$ koşulunu sağlayan bir (i, j) indis çifti için bir $(u_0, v_0) \in E^\circ$ noktasında (2.3.1) gerçekleniyorsa, o zaman $\mathcal{S}$ yüzeyinin $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$ noktasındaki teğet düzleminin bir normali*

$$(\phi_u \times \phi_v)(u_0, v_0) := (\Delta_{\phi_2,\phi_3}(u_0, v_0), \Delta_{\phi_3,\phi_1}(u_0, v_0), \Delta_{\phi_1,\phi_2}(u_0, v_0)) \qquad (2.3.2)$$

vektörüdür.

Kanıt. $\mathcal{S}$ yüzeyinin $\phi(u_0, v_0)$ noktasındaki teğet düzlemi Π olsun. Bu düzlemin bir normalini belirleyebilmek için, Π düzleminin içinde yatan iki vektör bulmak yeterlidir. Ancak $\phi_u(u_0, v_0)$ vektörü $\phi(u, v_0)$ eğrisine ve $\phi_v(u_0, v_0)$ vektörü $\phi(u_0, v)$ eğrisine eğrisine teğet olduğundan, $\phi_u(u_0, v_0)$ ve $\phi_v(u_0, v_0)$ vektörlerinin ikisi de Π düzleminin içinde kalır. Böylece, vektörel çarpım[20] tanımı gereğince, Π düzleminin (x_0, y_0, z_0) noktasındaki bir normalinin

$$\phi_u(u_0, v_0) \times \phi_v(u_0, v_0) = (\Delta_{\phi_2,\phi_3}(u_0, v_0), \Delta_{\phi_3,\phi_1}(u_0, v_0), \Delta_{\phi_1,\phi_2}(u_0, v_0))$$

vektörü olduğu görülür. □

Eğer (ϕ, E) ikilisi $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir $\mathcal{S}$ yüzeyinin bir parametrizasyonu ise, (2.3.2) ile verilen vektör, $(u, v) \in E$ için,

$$\mathbf{N}_\phi(u, v) := \phi_u(u, v) \times \phi_v(u, v)$$

notasyonuyla gösterilecektir. Bununla ilintili olarak, $i \neq j$ koşulunu sağlayan bir (i, j) indis çifti için (2.3.1) gerçeklendiğinde, $\mathbf{N}_\phi(u_0, v_0)$ vektörü $\mathcal{S}$ üzerinde ϕ ***tarafından belirlenen normal*** olarak adlandırılacaktır. Eğer âşikâr parametrizasyonu ϕ ile belirlenen bir bâriz yüzey $z = f(x, y)$ ise, $\mathbf{N}_\phi = (-f_x, -f_y, 1)$ olduğunu gözlemlemek oldukça kolaydır.[21]

Yüzeyler için normal vektörler, eğriler için teğet vektörlerin görevini üstlenirler: eğrilerle ilgili kavramların çoğu, ϕ' vektörü $\mathbf{N}_\phi$ ile değiştirilerek, yüzeylere taşınabilir. Aşağıdaki tanım, bundan dolayı, §2.1 kısmındaki Tanım 2.1.16 ile karşılaştırılarak okunmalıdır.

Tanım 2.3.9. (ϕ, E) ikilisi $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yüzeyin bir parametrizasyonu olsun.

(i) Eğer bir $(u_0, v_0) \in E$ için $\mathbf{N}_\phi(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ ise (ya da buna denk olarak, eğer $\|\mathbf{N}_\phi(u_0, v_0)\| > 0$ oluyorsa), (ϕ, E) parametrizasyonu (u_0, v_0) ***noktasında düzgün*** olarak adlandırılır.

[20] Bkz. III/Tanım 1.1.13.
[21] Karşılaştırmak için: bkz. III/Teorem 2.2.15.

(ii) Eğer (ϕ, E) parametrizasyonu E kümesinin her noktasında düzgünse, ***düzgün*** olarak isimlendirilir.

(iii) $E_0 \subseteq E$ olmak üzere, eğer (ϕ, E) parametrizasyonu $E \setminus E_0$ kümesinin her noktasında düzgünse, E_0 ***kümesi dışında düzgün*** olarak adlandırılır.

Açıklama 2.3.10. Bâriz bir yüzeyin âşikâr parametrizasyonu düzgündür.

Eğrilerdeki duruma benzer olarak, düzgün bir parametrizasyona sahip bir yüzey, üzerindeki her noktada bir teğet düzlemine sahiptir (bkz. Problem 7). Diğer taraftan, her noktasında bir teğet düzlemine sahip olan bir yüzeyin düzgün-olmayan parametrizasyonları var olabilir: Örnek 2.3.5'de verilen kürenin ϕ parametrizasyonu,

$$\|\mathbf{N}_\phi\| = \|(a^2 \cos u \cos^2 v, a^2 \sin u \cos^2 v, a^2 \sin v \cos v)\| = a^2 |\cos v|$$

olduğundan, $v = \pm\pi/2$ için düzgün değildir. (Bunun nedeni ilgili parametrizasyonun, $v = \pm\pi/2$ doğrularını kürenin kuzey ve güney kutuplarına göndermesi, yani bu noktalarda bire-bir olmamasıdır.)

Bir $\mathcal{S}$ yüzeyini, $\mathbf{x}_0 := \phi(u_0, v_0)$ olmak üzere, eğer her $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$ için (u_0, v_0) noktasında düzgün olan bir (ϕ, E) parametrizasyonu bulunabiliyorsa, ***düzgün*** olarak adlandıracağız. Bu adlandırma bir yüzeyi, bir düzgün parametrizasyona sahip olduğunda 'düzgün' olarak nitelendirmekten *farklıdır* ve daha kullanışlıdır; zîrâ üç-boyutlu bir bölgenin sınırı olarak belirlenen birçok 'kapalı' yüzey, (global olarak) 'düzgün' parametrizasyonlara sahip *değildir.* (Bir önceki paragrafta kürenin parametrizasyonuyla ilgili yürütülen tartışma, bu konuda iyi bir perspektif sağlar: küre, yaptığımız tanıma göre, DÜZGÜNDÜR; çünkü kürenin, kuzey ve güney kutup noktalarında 'düzgün' olan—her bir yarıkürenin âşikâr parametrizasyonları gibi—başka parametrizasyonları bulunabilir.) Ayrıca, yaptığımız tanıma nazaran düzgün olan her yüzey, düzgün parametrizasyonlara sahip yüzeylerin bir birleşimidir (bkz. §2.4, Problem 7).

Bir parametre değişimi altında $\mathbf{N}_\phi$ normalinin nasıl değiştiği, aşağıdaki teoremin içeriğidir.

Teorem 2.3.11. *(ϕ, E) ve (ψ, B) ikilileri, $\mathcal{C}^p$-sınıfından aynı bir yüzeyin parametrizasyonları olsun. Eğer τ fonksiyonu B kümesini E kümesine gönderen $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir fonksiyon ise ve $\psi = \phi \circ \tau$ oluyorsa, o zaman her $(u, v) \in B$ için*

$$\mathbf{N}_\psi(u, v) = \Delta_\tau(u, v)\, \mathbf{N}_\phi(\tau(u, v))$$

gerçeklenir.

Kanıt. $\phi := (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ve $\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ olsun. Teorem 2.3.8'den,

$$\mathbf{N}_\psi = (\Delta_{(\psi_2,\psi_3)}, \Delta_{(\psi_3,\psi_1)}, \Delta_{(\psi_1,\psi_2)})$$

olur. Hipotezden dolayı da $i, j = 1, 2, 3$ için $(\psi_i, \psi_j) = (\phi_i, \phi_j) \circ \tau$ sağlandığından, Zincir Kuralı kullanılarak her $(u, v) \in B$ için

$$\Delta_{(\psi_i,\psi_j)}(u, v) = \Delta_\tau(u, v)\Delta_{(\phi_i,\phi_j)}(\tau(u, v))$$

eşitliğine ulaşılır: B üzerinde, o hâlde, $\mathbf{N}_\psi = \Delta_\tau \cdot (\mathbf{N}_\phi \circ \tau)$ gerçeklenir. □

Böylece, Tanım 2.1.18 ile karşılaştırılarak okunması faydalı olan, aşağıdaki tanıma ulaşılır.

Tanım 2.3.12. Eğer $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan (ϕ, E) ve (ψ, B) ikilileri aynı bir yüzeyin iki düzgün parametrizasyonu ise, aynı zamanda da $\mathcal{C}^p$-sınıfından olup B kümesini örten olarak E kümesine gönderen, $\psi = \phi \circ \tau$ özelliğine sahip, ve her $(u, v) \in B$ için $\Delta_\tau(u, v) \neq 0$ koşulunu gerçekleyen bir τ fonksiyonu varsa, bu durumda (ϕ, E) ve (ψ, B) parametrizasyonlarının "***düzgünce denk*** oldukları," söylenir. Bu durumda τ fonksiyonu B kümesinden E kümesine ***geçiş fonksiyonu*** olarak adlandırılır.

Aşağıdaki kavramlar da, yüzeyler için, Tanım 2.1.8 ve Tanım 2.1.19'da verilenlerin benzerleridir.

Tanım 2.3.13. Bir parametrizasyonu (ϕ, E) olan, $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yüzey $\mathcal{S}$ olsun.

(i) $\mathcal{S}$ yüzeyinin ***yüzey alanı***

$$\sigma(\mathcal{S}) := \int_E \|\mathbf{N}_\phi(u, v)\| \, d(u, v)$$

değeridir.

(ii) Eğer $g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise, g fonksiyonunun $\mathcal{S}$ üzerindeki ***yüzey integrali***

$$\iint_\mathcal{S} g \, d\sigma := \int_E g(\phi(u, v)) \, \|\mathbf{N}_\phi(u, v)\| \, d(u, v) \tag{2.3.3}$$

olarak tanımlanır.

(2.3.3) ile verilen yüzey integrali, biçimi $\phi(E)$ ve yoğunluğu g olan bir zarın kütlesi olarak yorumlanabilir. Diğer taraftan bu integral, $(x, y) \in E$ olmak üzere $z = f(x, y)$ ile belirlenen $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir $\mathcal{S}$ bâriz yüzeyi için,

$$\iint_{\mathcal{S}} g\, d\sigma = \int_E g(x, y) \sqrt{}(1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y))\, d(x, y) \tag{2.3.4}$$

biçimine girer.

Yüzey alanı kavramı kendi doğallığı içinde anlamlandırılmaya çalışıldığında, bu kavram için doğru tanımın yukarıda verilen olduğunu keşfetmek zor değildir. Bu tanım, Örnek 2.1.21'den sonra, doğru parçalarının uzunlukları toplamını göz önüne alarak $\|\mathcal{C}\|$ yay uzunluğunun tanımlanmasına benzer biçimde, düzlemsel bölgelerin alanları toplamını göz önüne alarak da verilebilir; ancak bu yaklaşım, sadece uygun kısıtlamalar altında geçerlidir: Sınırlı bir silindirin yüzey alanı üçgensel bölgeler kullanılarak bu şekilde hesaplanmaya çalışıldığında bile, yaklaşımı veren bölgelerin alanları toplamı sınırsızca büyüyebilir.[22]

Göz önüne alınması gereken bir diğer husus, Sonuç 1.2.9 nedeniyle, $\mathbf{N}_\phi(u, v)$ normalinin sıfır-alanlı bir küme üzerinde tanımlı olmadığı durumlar için de (2.3.3) yüzey integralinin anlamlı olduğudur. Yani, düzgün-olmayan bazı yüzeyler −örneğin, koniler−üzerinde de yüzey integrali tanımlanabilir.

Yüzey alanı ve yüzey integrali kavramlarının düzgünce denk parametrizasyonlar altında, hattâ $\Delta_\tau \neq 0$ koşulu sıfır-alanlı bir kapalı küme üzerinde zayıflatıldığında bile, korunduklarını gözlemlemek de zor değildir (bkz. Problem 5). Benzer biçimde, eğer $\mathcal{S}$ yüzeyi $\mathbb{R}^2$ uzayının bir alt-kümesi ise, bu yüzeyin Tanım 2.3.13 (i) ile verilen yüzey alanının, $\mathcal{S}$ kümesinin Tanım 1.1.8 kullanılarak belirlenen alanıyla aynı olduğu da gösterilebilir (bkz. Problem 4).

Bir yüzey integralini hesaplamak için, verilen yüzeyin uygun bir parametrizasyonunu bulmak ve Tanım 2.3.13'ü uygulamak gereklidir.

Örnek 2.3.14. $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = \sqrt{}(a^2 - x^2 - y^2)$ yarıküresi ve $g(x, y, z) := \sqrt{}z$ olsun. Bu durumda, $E := [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$ ve ϕ, Örnek 2.3.5'de verilen fonksiyon olarak alındığında, (ϕ, E) ikilisinin $\mathcal{S}$ yarıküresinin bir parametrizasyonu olduğu ve $\|\mathbf{N}_\phi\| = a^2 \cos v$ eşitliğinin gerçeklendiği görülür. Böylece,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} g\, d\sigma &= \iint_E a^2 \cos v \sqrt{}(a \sin v)\, du\, dv \\ &= 2\pi a^{5/2} \int_0^{\pi/2} \cos v \sqrt{}(\sin v)\, dv = \frac{4\pi}{3}\, a^{5/2}\end{aligned}$$

elde edilir.

[22] Daha detaylı bilgi için: kkz. [19, s. 130].

g fonksiyonunun sürekli olması koşulu, Tanım 2.3.13'de, sadece (2.3.3) eşitliğinin sağ yanının var olmasını garantilemek içindir. Eğer ilgili ardışık integrallerin biri yakınsak bir genelleştirilmiş integral[23] ise, yüzey integrali tanımı doğal biçimde genişletilebilir. Bu düşünme biçimi kullanılarak Örnek 2.3.14'deki yüzey integrali yeniden göz önüne alınırsa, istenen integralin âşikâr parametrizasyon kullanılarak da hesaplanabileceği görülür. Bunun için $z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$ bâriz yüzeyinin normalinin $\mathbf{N} = (-z_x, -z_y, 1) = (x/z, y/z, 1)$ olduğu gözlemlenmelidir. (Bu normal $\partial B_a(\mathbf{0})$ üzerinde var olmaz; ancak $\partial B_a(\mathbf{0})$ kümesi sıfır-alanlı olduğundan, $B_a(\mathbf{0})$ üzerinde integral alınırken bu küme ihmâl edilebilir.) Böylece, (2.3.3) ve kutupsal koordinatlar kullanılarak,

$$\iint_{\mathcal{S}} g\, d\sigma = \int_{B_a(\mathbf{0})} \frac{a\sqrt{z}}{z}\, d(x,y) = a \int_0^{2\pi} \int_0^a r(a^2 - r^2)^{-1/4}\, dr\, d\theta = \frac{4\pi}{3}\, a^{5/2}$$

sonucuna ulaşılır. (İçteki, r değişkenine göre alınan integral bir genelleştirilmiş integraldir.)

En basit uygulamalar için bile, birim kübün sınırı olan $\partial([0,1] \times [0,1] \times [0,1])$ yüzeyi gibi, düzgün olmayan fakat sonlu sayıda düzgün parçanın birleşimi olarak ifade edilebilen yüzeylerle çalışabilecek kadar zengin bir yüzeyler teorisine ihtiyaç duyulur; şimdi, eğriler için yapıldığı gibi, buraya kadar geliştirilen teoriyi bu türden yüzeylere doğal bir biçimde genişleteceğiz. Genişletilmiş bu teori, pratikte karşılaşılan somut yüzeyleri görsel olarak betimlemek kolay olduğundan, kesin ve formel tanımlardan ziyade geometrik betimlemeler üzerinden kurulacaktır.

Parçalı düzgün yüzeyleri tanımlamadan önce, iç noktalar (yani, yüzeyin 'içinde' yatan noktalar) ve sınır noktaları (yani, yüzeyin 'kenarında' bulunan noktalar) arasında bir ayrım yapılmalıdır. Bu ayrımın neden yapılması gerektiğini anlamak maksadıyla Örnek 2.3.4'de verilen (ϕ, E) ikilisiyle parametrelenen $\mathcal{S}$ kesik silindiri göz önüne alınırsa, bir $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ noktasının, eğer $0 < z < 2$ ise $\mathcal{S}$ silindirinin içinde kaldığı, buna karşın $z = 0$ veya $z = 2$ ise $\mathcal{S}$ silindirinin kenarında bulunduğu gözlemlenebilir. Sezgisel olarak bu, bir (x,y,z) noktasının bir $\phi(E)$ eğrisinin kenarında bulunması için $(x,y,z) \notin \phi(E^\circ)$ koşulunun sağlanmasının gerekli ve yeterli olduğu yolunda bir tahmine yol açar. Ancak bu tahmin, göz önüne alınan silindir için bile, doğru değildir: $(1,0,1) = \phi(0,1)$ noktası, $\phi(E^\circ)$ kümesinde olmadığı gibi, silindirin bir kenarına da ait değildir. (Esasında bu nokta, $\mathcal{S}$ silindirinin bir 'yivi' üzerinde bulunur.) Bu basit gözlem, genel bir yüzeyin iç ve sınır noktalarını, yüzeyin bir parametrizasyonunu kullanarak değil geometrik olarak tanımlamanın daha uygun olacağını gösterir.

---

[23]Bkz. III/Dipnot 5, s.56.

$\mathbb{R}^3$ içinde $\mathcal{C}^p$-sınıfından bir yüzey $\mathcal{S}$ olsun. Eğer bir $(x,y,z) \in \mathcal{S}$ noktası $\mathcal{S}$ kümesine ait noktalar tarafından her yönden sarılıyorsa, bir başka deyişle bu noktadan itibaren herhangi bir yöne yeterince küçük bir hereket yapıldığında yine $\mathcal{S}$ kümesinin içinde kalınıyorsa, $\mathcal{S}$ yüzeyinin bir ***iç nokta***sı olarak adlandırılacaktır. Bir $\mathcal{S}$ yüzeyinin tüm iç noktalarının kümesini $\operatorname{Int}(\mathcal{S})$ ile göstereceğiz ve $\mathcal{S}$ yüzeyinin ***(manifold) sınır***ını $\partial\mathcal{S} := \mathcal{S} \setminus \operatorname{Int}(\mathcal{S})$ olarak tanımlayacağız.

Aynı kavramlar *olmamalarına* karşın, bir yüzeyin sınırını ve bir kümenin III/Tanım 1.2.12 (iii) ile tanımlanan sınırını göstermek için aynı notasyonun kullanıldığına dikkât edilmelidir. Bu seçim, çok-değişkenli hesabın tüm temel teoremleri için aynı terminolojiye imkân sağladığından dolayı tercih edilmiştir. Belirsizliğe yol açmamak için, bundan böyle bir E bölgesinin sınırını, yani $\overline{E} \setminus E^\circ$ kümesini, E kümesinin ***topolojik sınır***ı olarak adlandıracağız. Yüzeyler söz konusu olduğunda kullanılacak olan sınır kavramı manifold sınırı ve m-boyutlu bölgeler söz konusu olduğunda kullanılacak olan sınır kavramı topolojik sınır olacağından, böyle bir ayrım bir karışıklığa yol açmayacaktır.

Bir $\mathcal{S}$ yüzeyi, eğer $\partial\mathcal{S} = \varnothing$ ise, ***kapalı*** olarak adlandırılır. Örneğin, $a > 0$ için, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresi kapalıdır; fakat $z = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}$ yarıküresi, sınırı $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ olduğundan, kapalı değildir. (Benzer durum, sınırı $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ olan $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ kesik paraboloidi için de geçerlidir.)

Jordan Eğri Teoremi[24] nedeniyle kapalı bir $\mathcal{C}$ yayı $\mathbb{R}^2$ düzlemini, sınırlı bileşenleri $\mathcal{C}$ tarafından 'çevrelenen' ve sınırsız bileşeni $\mathcal{C}$ yayının 'dışında' kalan, iki veya daha çok ayrık ve bağlantıyı kümeye ayırır. Aynı durum, kapalı yüzeyler için genel olarak geçerli *değildir*: (Klein şişesi gibi) hiçbir noktayı çevrelemeyen, ve bundan dolayı da $\mathbb{R}^3$ uzayını ayrık kümelere bölmeyen, kapalı düzgün yüzeyler vardır.[25]

Her $j = 1, \ldots, N$ için $\mathcal{S}_j := (\phi_j, E_j)$ bir düzgün yüzey ise, ve her $j \neq k$ için ya $\mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$ boş küme oluyorsa ya da $\mathcal{S}_j$ yüzeyinin sınırının bir parçası $\mathcal{S}_k$ yüzeyinin sınırının bir parçasına eklenmişse, bu durumda $\mathcal{S} := \bigcup_{j=1}^N \mathcal{S}_j$ kümesi bir ***parçalı düzgün yüzey*** olarak adlandırılacaktır. Dolayısıyla bir parçalı düzgün yüzey, $0 < a \leqslant \|(x,y,z)\| \leqslant b$ ***tac***ının topolojik sınırı gibi ayrık parçalardan, ya da ortak-merkezli $\partial[([0,3] \times [0,3] \times [0,3]) \setminus ([1,2] \times [1,2] \times [1,2])]$ kutuları gibi, 'sırt'lara sahip bağlantılı parçalardan oluşabilir. Bunlara ilâve olarak, $\mathcal{S}_j$ yüzeylerinden herhangi üçünün kesişiminin en çok sonlu bir küme olduğu kısıtlamasını da getireceğiz: bu, bir parçalı düzgün yüzeyin herhangi bir kenarı boyunca kendisinin üzerine iki kere katlanması gibi bir durumun söz konusu olmaması an-

[24] Bkz. Sayfa 83, Örnek 2.1.4'den sonraki paragraf.
[25] Bkz. [10, S. 22].

lamına gelecektir.

$\mathcal{S} := \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{S}_j$, bir parçalı düzgün yüzey olsun. $\mathcal{S}$ yüzeyinin bir ***parametrizasyonu***ndan, $\mathcal{S}_j$ yüzeylerinin (ϕ_j, E_j) düzgün parametrizasyonlarının bir ailesi anlaşılacaktır. $\mathcal{S}$ yüzeyinin $\bigcup_{j=1}^{N}(\phi_j, E_j)$ ve $\bigcup_{j=1}^{N}(\psi_j, B_j)$ gibi iki parametrizasyonunun, eğer her $j \in \{1, \ldots, N\}$ için (ϕ_j, E_j) ve (ψ_j, B_j) parametrizasyonları düzgünce denk ise, "***düzgünce denk*** oldukları," söylenecektir. $\mathcal{S}$ yüzeyinin ***sınırı***, $\partial\mathcal{S}_j$ yüzeyinin eklenmemiş bir parçasının kapanışına ait olan tüm noktaların birleşimi olarak tanımlanacaktır. (Örneğin, $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ birim kübünden $z = 1$ yüzünün çıkarılmasıyla elde edilen kutunun sınırı $z = 1$ düzlemindeki birim kare; $x^2 + y^2 = 1$, $-3 \leqslant z \leqslant 0$ ve $z = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)}$ yüzeylerinin birleşiminin sınırı ise $z = -3$ düzlemindeki birim çemberdir.) Son olarak, eğer $\mathcal{S}$ bir parçalı düzgün yüzey ise, $\mathcal{S}$ yüzeyinin ***yüzey alanı***

$$\sigma(\mathcal{S}) := \sum_{j=1}^{N} \sigma(\mathcal{S}_j)$$

olarak; $\mathcal{S}$ üzerinde sürekli olan gerçel-değerli bir g fonksiyonunun ***yüzey integrali*** ise

$$\iint_{\mathcal{S}} g \, d\sigma := \sum_{j=1}^{N} \iint_{\mathcal{S}_j} g \, d\sigma$$

olarak tanımlanacaktır.

Örnek 2.3.15. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ve $x + y + x = 1$ ile sınırlanan bölgenin topolojik sınırı alınarak oluşturulan dörtyüzlü $\mathcal{S}$, ve $g(x, y, z) := x + y^2 + z^3$ olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ dörtyüzlüsü, köşe noktaları $(0,0)$, $(1,0)$, ve $(0,1)$ olan E üçgensel bölgesine ait her (u, v) için, $\phi_1(u,v) := (u, v, 0)$, $\phi_2(u,v) := (0, u, v)$, $\phi_3(u,v) := (u, 0, v)$, $\phi_4(u,v) := (u, v, 1-u-v)$ parametrizasyonlarıyla belirlenen dört adet yüze sahiptir. Aynı zamanda, $j = 1, 2, 3$ için $\|\mathbf{N}_{\phi_j}\| = 1$ ve $\|\mathbf{N}_{\phi_4}\| = \sqrt{3}$

olur. O hâlde,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} g\,d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (u+v^2)\,dv\,du + \int_0^1 \int_0^{1-u} (u^2+v^3)\,dv\,du \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^{1-u} (u+v^3)\,dv\,du \\
&\quad + \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-u} (u+v^2+(1-u-v)^3)\,dv\,du \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} [(2+\sqrt{3})u + u^2 + (1+\sqrt{3})v^2 + 2v^3 \\
&\quad + \sqrt{3}(1-u-v)^3]\,dv\,du \\
&= \int_0^1 [(2+\sqrt{3})u - (1+\sqrt{3})u^2 - u^3 + \frac{1+\sqrt{3}}{3}(1-u)^3 \\
&\quad + \frac{2+\sqrt{3}}{4}(1-u)^4]\,du \\
&= \frac{3}{10}(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Problemler

1. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyinin yüzey alanını hesaplayınız:
  (a) $\mathcal{S}$ yüzeyi, $a \leqslant z \leqslant b$ olmak üzere $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$ ile verilen konisel kabuk;
  (b) $\mathcal{S}$ yüzeyi, Örnek 2.3.5'de verilen küre;
  (c) $\mathcal{S}$ yüzeyi, Örnek 2.3.6'da verilen torus.

2. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve her g fonksiyonu için, $\mathcal{S}$ yüzeyinin ve bu yüzeyin $\partial\mathcal{S}$ sınırının (parçalı) düzgün bir parametrizasyonunu bularak $\iint_{\mathcal{S}} g\,d\sigma$ integralini hesaplayınız:
  (a) $\mathcal{S}$ yüzeyi, $z = x^2 - y^2$ yüzeyinin xy-düzleminin üzerinde olup $x = 1$ ve $x = -1$ düzlemleri arasında kalan parçası, ve $g(x,y,z) := \sqrt{(1+4x^2+4y^2)}$;
  (b) $\mathcal{S}$ yüzeyi, $y = x^3$, $0 \leqslant y \leqslant 8$, $0 \leqslant z \leqslant 4$ ile belirlenen yüzey, ve $g(x,y,z) := x^3 z$;
  (c) $\mathcal{S}$ yüzeyi, $z = \sqrt{(9-x^2-y^2)}$ yarıküresinin $2x^2 + 2y^2 = 9$ silindirinin dışında kalan parçası, ve $g(x,y,z) := x+y+z$.

3. $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ elipsoidinin, ∂E topolojik sınırı dışında düzgün olan bir (ϕ, E) parametrizasyonunu bulunuz.

4. (a) E kümesi iki-boyutlu bir bölge ve $\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in E \text{ ve } z = 0\}$ ise,

$$\text{Alan}\,(E) = \iint_{\mathcal{S}} d\sigma$$

ve her sürekli $g : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\iint_{\mathcal{S}} g\, d\sigma = \int_E g(x,y,0)\, d(x,y)$$

olduğunu kanıtlayınız.

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^p$-sınıfından olsun, $\mathbb{R}^2$ içindeki $\mathcal{C}$ eğrisi $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ ile belirlensin, ve $\mathbb{R}^3$ içindeki $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ olarak verilsin. Bu durumda, $\sigma(\mathcal{S}) = (d-c)L(\mathcal{C})$ olduğunu gösteriniz.

(c) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^p$-sınıfından olsun ve $\mathcal{S}$ yüzeyi $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ eğrisini x-ekseni etrafında döndürerek elde edilsin. $\mathcal{S}$ yüzeyinin yüzey alanının

$$\sigma(\mathcal{S}) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{(1 + |f'(x)|^2)}\, dx$$

olduğunu ispatlayınız.

5. $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan $\psi(B)$ ve $\phi(E)$ yüzeyleri, ve B kümesini örten olarak E kümesine gönderen ve $\psi = \phi \circ \tau$ koşulunu sağlayan $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir τ fonksiyonu göz önüne alınsın.

(a) Eğer (ψ, B) ve (ϕ, E) parametrizasyonları düzgün ise ve B üzerinde, τ fonksiyonu bire-bir oluyorsa ve $\Delta_\tau \neq 0$ gerçekleniyorsa, bu durumda her sürekli $g : \phi(E) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\iint_E g(\phi(u,v))\, \|\mathbf{N}_\phi(u,v)\|\, du\, dv = \iint_B g(\psi(s,t))\, \|\mathbf{N}_\psi(s,t)\|\, ds\, dt$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

(b) Eğer Z kümesi B kümesinin sıfır-alanlı ve kapalı bir alt-kümesi ise ve (ψ, B) parametrizasyonu Z kümesinin dışında düzgün oluyorsa, τ fonksiyonu bire-bir ise, ve $B^\circ \setminus Z$ kümesi üzerinde $\Delta_\tau \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda her sürekli $g : \phi(E) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\iint_E g(\phi(u,v))\, \|\mathbf{N}_\phi(u,v)\|\, du\, dv = \iint_B g(\psi(s,t))\, \|\mathbf{N}_\psi(s,t)\|\, ds\, dt$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlayınız.

6. $f : B_3(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon olsun ve her $(x,y) \in B_3(\mathbf{0})$ için $\|\nabla f(x,y)\| \leqslant 1$ sağlansın. Eğer $\mathcal{S}$ yüzeyi $2z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$ ile belirlenen paraboloid ise,

$$\iint_{\mathcal{S}} |f(x,y) - f(0,0)|\, d\sigma \leqslant 40\pi$$

olduğunu gösteriniz.

7. $\phi(E)$ yüzeyi $\mathcal{C}^p$-sınıfından, ve $(u_0, v_0) \in E^\circ$ olmak üzere $(x_0, y_0, z_0) = \phi(u_0, v_0)$ olsun. Eğer $\mathbf{N}_\phi(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ ise, $\phi(E)$ yüzeyinin (x_0, y_0, z_0) noktasında bir teğet düzlemine sahip olduğunu kanıtlayınız.

8. $\mathcal{S} := \psi(B)$ bir düzgün yüzey olsun. Eğer $E := \|\psi_u\|$, $F := \psi_u \cdot \psi_v$, ve $G := \|\psi_v\|$ ise, $\mathcal{S}$ yüzeyinin yüzey alanının $\int_B \sqrt{(E^2G^2 - F^2)}\, d(u,v)$ olduğunu ispatlayınız.

9. $\mathcal{S}$ yüzeyinin, (x_0, y_0, z_0) noktasında düzgün olan bir (ϕ, E) parametrizasyonuna sahip $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir yüzey olduğu varsayılsın. E içindeki, (u_0, v_0) noktasından geçen (yani, $\psi(t_0) = (u_0, v_0)$ olacak şekilde bir $t_0 \in I$ bulunan) $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir eğrinin bir parametrizasyonu (ψ, I) olsun. Bu durumda, $(\phi \circ \psi)'(t_0) \cdot (\phi_u \times \phi_v)(u_0, v_0) = 0$ olduğunu ispatlayınız.

2.4 Yönlendirilmiş yüzeyler

Bir düzgün (ϕ, I) eğrisinin yönlendirilmesi, §2.2 kısmında, bir 'pozitif yön' seçmek için $\phi'(t)$ teğet vektörü kullanılarak yapılmıştı. Benzer biçimde, bir düzgün $\mathcal{S} = \phi(E)$ yüzeyi de, $\mathbf{N}_\phi$ birim normali $\mathcal{S}$ yüzeyi için bir 'pozitif taraf' seçmek için kullanılarak yapılacaktır. Düzgün yüzeyler tanımları gereğince bağlantılı olduklarından, böyle bir seçim $\mathcal{S}$ yüzeyinin *sadece* iki tarafının olması durumunda mümkündür.

Bu durumda, yeni bir sorunla karşılaşılır: sadece bir tarafı olan düzgün yüzeyler vardır.

Örnek 2.4.1 (Möbius Bandı). $E := [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ ve her $(u, v) \in E$ için $\phi(u, v) := ((2 + v \sin(u/2)) \cos u, (2 + v \sin(u/2)) \sin u, v \cos(u/2))$ olsun. Bu durumda $v = 0$ yatay doğrusunun ϕ altındaki görüntüsü $(2 \cos u, 2 \sin u, 0)$, yani xy-düzlemindeki orijin merkezli ve 2 yarıçaplı çemberdir. Diğer taraftan her $u = u_0$ dikey doğrusunun görüntüsü, u_0 değeri artarken üç-boyutlu uzayda dönen, $\mathbb{R}^3$ içinde bir doğru parçasıdır: örneğin $u = 0$ doğrusunun görüntüsü $(2, 0, v)$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$, ve $u = \pm\pi$ doğrularının görüntüleri ise $S_0 := (-2 \mp v, 0, 0)$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$ yivi, yani $\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leqslant x \leqslant -1\}$ noktalarının kümesidir. (ϕ, E) parametrizasyonunun izi, o hâlde, tek taraflı bir yüzey belirler.

Bu türden sıradışı durumlardan kaçınmak için, yeni kavramlar tanımlayacağız. Bir $\mathcal{S}$ düzgün yüzeyinin, üzerindeki bir (x_0, y_0, z_0) noktasındaki, bir (ϕ, E) parametrizasyonuyla belirlenen ***birim normal***i, $\phi(u_0, v_0) := (x_0, y_0, z_0)$ olmak üzere, $\mathbf{n}(x_0, y_0, z_0) := \mathbf{N}_\phi(u_0, v_0)/\|\mathbf{N}_\phi(u_0, v_0)\|$ vektörüdür. Apaçık olarak, $\mathbf{n}$ birim normalinin iyi-tanımlı olabilmesi, $j = 0, 1$ için, $\phi(u_j, v_j) = (x_0, y_0, z_0)$ koşulunu sağlayan tüm $(u_j, v_j) \in E$ noktaları için

$$\frac{\mathbf{N}_\phi(u_0, v_0)}{\|\mathbf{N}_\phi(u_0, v_0)\|} = \frac{\mathbf{N}_\phi(u_1, v_1)}{\|\mathbf{N}_\phi(u_1, v_1)\|} \neq \mathbf{0}$$

olmasıyla mümkündür. Bu durum, ϕ fonksiyonu E üzerinde bire-bir ve düzgün olduğunda gerçeklenir. Buna karşın, eğer ϕ fonksiyonu E üzerinde bire-bir değilse, (ϕ, E) parametrizasyonu E üzerinde düzgün olduğunda bile, $\mathbf{n}$ birim normali iyi-tanımlı olmayabilir (her $v \in [-1,1]$ için, $\phi(\pi,v) = \phi(-\pi,v)$ olan fakat $\mathbf{N}_\phi(\pi,v) = -\mathbf{N}_\phi(-\pi,v)$ durumu gerçeklenen Möbius bandı buna bir örnektir).

Bir $\mathcal{S}$ düzgün yüzeyi, $\mathcal{S}$ üzerinde sürekli olarak değişen kesin bir $\mathbf{n}$ birim normali *belirleyen* bir düzgün (ϕ, E) parametrizasyonuna sahipse, bir başka ifadeyle $\phi(u_0,v_0) = \phi(u_1,v_1)$ olduğunda $\mathbf{N}_\phi(u_0,v_0)$ vektörü $\mathbf{N}_\phi(u_1,v_1)$ vektörüyle aynı doğrultuyu gösteriyorsa, ve (u_2,v_2) noktası (u_0,v_0) noktasının yakınında iken $\mathbf{N}_\phi(u_2,v_2)$ vektörü yaklaşık olarak $\mathbf{N}_\phi(u_0,v_0)$ vektörüyle aynı doğrultuyu işaret ediyorsa, ***yönlendirilebilir*** olarak adlandırılacaktır. Eğer $\mathcal{S}$ yüzeyi yönlendirilebilir ise, bu yüzeyin birim normali yüzey için bir 'pozitif' taraf ($\mathbf{n}$ vektörünün işaret ettiği doğrultudan yana olan taraf) seçmekte kullanılabilir.

Bundan böyle, bir ***$\mathcal{S}$ yönlendirilebilir yüzeyinin bir parametrizasyonu***ndan, $\mathcal{S}$ üzerinde kesin bir birim normal belirleyen bir düzgün (ϕ, E) ikilisi anlaşılacaktır.

Tanım 2.4.2. Eğer (ϕ, E) ve (ψ, B) ikilileri aynı bir yönlendirilebilir yüzeyin τ geçiş fonksiyonuna sahip düzgünce denk iki parametrizasyonu ise, ve her $(u,v) \in B$ için $\Delta_\tau(u,v) > 0$ oluyorsa, bu durumda (ϕ, E) ve (ψ, B) parametrizasyonlarının "***yönlendirilişçe denk*** oldukları," söylenir.

Teorem 2.3.11'den dolayı, eğer (ϕ, E) ve (ψ, B) parametrizasyonları yönlendirilişçe denk iseler, bu parametrizasyonların ürettikleri normaller aynı doğrultuyu gösterirler. (ϕ, E) kullanılarak seçilen pozitif taraf, şu halde, (ψ, B) kullanılarak seçilen pozitif tarafla aynı olur.

Birim teğet vektörü kullanılarak yönlendirilmiş eğrisel integrallerin tanımlanmasına benzer biçimde, birim normal kullanılarak yönlendirilmiş yüzey integralleri tanımlanabilir (aşağıdaki tanım, Tanım 2.2.4 ile karşılaştırılmalıdır).

Tanım 2.4.3. $\mathcal{S}$, bir (ϕ, E) parametrizasyonu tarafından belirlenen $\mathbf{n}$ birim normaline sahip düzgün bir yönlendirilebilir yüzey olsun. Eğer $\mathbf{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu sürekli ise,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma := \int_E (\mathbf{F} \circ \phi)(u,v) \cdot \mathbf{N}_\phi(u,v)\, d(u,v)$$

değerine $\mathcal{S}$ üzerinde $\mathbf{F}$ fonksiyonunun ***yönlendirilmiş yüzey integrali*** denir.

Soldaki integral için kullanılan notasyon, $\mathbf{n} = \mathbf{N}_\phi / \|\mathbf{N}_\phi\|$ ve $d\sigma = \|\mathbf{N}_\phi\|\, d(u,v)$ olduğundan, (2.3.3)'de verilen notasyonla uyumludur.

Bâriz bir yüzey üzerinde âşikâr parametrizasyonun her zaman kesin bir normal belirlediği gözlemlenmelidir. Eğer $\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in E\}$

ise, o hâlde, Tanım 2.4.3 ile verilen yönlendirilmiş yüzey integrali

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_E \mathbf{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\, d(x, y) \tag{2.4.1}$$

formuna dönüşür.

Parametrizasyonları normal vektörünün sıfıra eşit olduğu en az bir noktaya sahip olan ve bundan ötürü birim normallerinin tanımlanamadığı, üç-boyutlu bölgelerin sınırı olan (küre gibi) yüzeyler ve düzgün-olmayan (koni gibi) yüzeyler için, durum her zaman kolay değildir; ne ki, yönlendirilmiş eğrisel integrallerde olduğu gibi, normal vektörünün sıfır-alanlı bir küme üzerinde tanımlı olmadığı yüzeyler üzerinde de yönlendirilmiş yüzey integrali tanımlanabilir (bkz. Problem 4). Ancak bu durumda, yönlendirilebilir olma tanımı dikkâtli biçimde ele alınmalıdır. Düzgün-olmayan noktaların ailesi (bir çadırın tepesinde ya da bir piramidin kenarında olduğu gibi) bütün yüzeye dokunarak gidiyorsa, 'sürekli olarak değişen' normal kavramından ne anlaşılması gerektiğini tanımlamak zor olabilir. Bu kısmın sonunda, parçalı düzgün yüzeyler için, bu probleme değineceğiz. Şimdilik, bir $\mathcal{S} = \phi(E)$ yüzeyinin yönlendirilebilir olmasının ne anlama geldiğini tanımlamanın, eğer yüzeyin ***tekillik***lerinin (yani, $\mathbf{N}_\phi(u, v) = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan bir $(u, v) \in E$ için $(x, y, z) = \phi(u, v)$ olan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktalarının) kümesi sonlu ise mümkün olduğunu söylemekle yetineceğiz. Böylece, kürelerin ve konilerin standart parametrizasyonlarının Tanım 2.4.3'de kullanılabilecekleri görülür.

Eğer $\mathbf{F}$ fonksiyonu sıkıştırılamayan bir akışkanın bir $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerinde bulunan noktalardaki akışını temsil ediyorsa, bu durumda $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ değeri $\mathbf{F}$ fonksiyonunun normal bileşenini, yani $\mathbf{n}$ doğrultusunda akan akışkan miktarını gösterir. Bu ise $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ değerinin integralinin, ilgili akışkanın $\mathcal{S}$ yüzeyi boyunca $\mathbf{n}$ doğrultusundaki akışının bir ölçüsünü vermesi anlamına gelir; bu değere $\mathcal{S}$ boyunca $\mathbf{F}$ ile temsil edilen akışkanın ***akı***sı denir. Birçok yönlendirilmiş yüzey integralinin değerinin sıfır olması, bundan dolayı şaşırtıcı değildir.

Bir $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerinde $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ değerinin integralinin yönlendirilişçe denk parametrizasyonlar altından değişmeden kaldığı, kolayca gösterilebilir (bkz. Problem 4). Aşağıdaki sonuç, yönlendirilişin değiştirilmesinin, yönlendirilmiş bir yüzey integralinin değerini bir işaret farkıyla etkilediğini gösterir.

Teorem 2.4.4. *Eğer (ϕ, E) ve (ψ, B) parametrizasyonları düzgünce denk iseler fakat yönlendirilişçe denk değillerse, o zaman*

$$\int_E \mathbf{F}(\phi(u, v)) \cdot \mathbf{N}_\phi(u, v)\, d(u, v) = -\int_B \mathbf{F}(\psi(s, t)) \cdot \mathbf{N}_\psi(s, t)\, d(s, t)$$

olur.

Kanıt. B kümesinden E kümesine geçiş fonksiyonu τ olsun. Bağlantılı olan B kümesi üzerinde Δ_τ Jacobi determinantı sürekli ve sıfırdan-farklı olduğundan, aynı zamanda da (ϕ, E) ve (ψ, B) parametrizasyonları yönlendirilişçe denk olmadıklarından, B üzerinde $\Delta_\tau < 0$ gerçeklenir. Teorem 2.3.11 ve Teorem 1.4.4'den, o hâlde,

$$\begin{aligned}\int_B \mathbf{F}(\psi(s,t)) \cdot \mathbf{N}_\psi(s,t)\, d(s,t) &= -\int_B |\Delta_\tau(s,t)|(\mathbf{F} \circ \phi \circ \tau)(s,t) \cdot (\mathbf{N}_\phi \circ \tau)(s,t) \\ &= -\int_{\tau(B)} \mathbf{F}(\phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}_\phi(u,v)\, d(u,v) \\ &= -\int_E \mathbf{F}(\phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}_\phi(u,v)\, d(u,v)\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Böylece, yönlendirilişi geometrik olarak betimlenmiş olan bir $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerinde bir yönlendirilmiş yüzey integralini hesaplarken, $\mathcal{S}$ yüzeyinin herhangi bir düzgün parametrizasyonunu kullanıp integralin işaretini belirlenen yönlendirilişi yansıtacak biçimde ayarlamanın yeterli olacağı görülmüş olur.

Örnek 2.4.5. $\mathcal{S}$ yüzeyi, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere, $x+y+z=1$ ile belirlenen düzlemsel bölge, $\mathbf{n}$ vektörü aşağıya-doğru-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (xy, x-y, z)$ olsun. Bu durumda, $x+y+z=1$ düzleminin $(1,1,1)$ normali yukarıya-doğru-yönelmiş olduğundan, Teorem 2.4.4 kullanılarak,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\int_0^1 \int_0^1 (xy, x-y, 1-x-y) \cdot (1,1,1)\, dx\, dy = -\frac{1}{4}$$

elde edilir.

Yönlendirilmiş eğrisel integraller için yapıldığı gibi, yönlendirilmiş yüzey integrallerini göstermek için de bir 'diferansiyel' notasyonu geliştirmek uygun olacaktır. İkinci-dereceden diferansiyelleri tanımlamak için, parametrik denklemleri $x = \phi_1(u,v)$, $y = \phi_2(u,v)$, $z = \phi_3(u,v)$ olan düzgün bir $\mathcal{S} := \phi(E)$ yönlendirilmiş yüzeyi göz önüne alınsın. Teorem 2.3.8 nedeniyle,

$$\mathbf{N}_\phi = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

olur. Buradan, bir $\mathbf{F} := (P,Q,R) : \phi(E) \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun yönlendirilmiş yüzey integralinin

$$\int_E \left(P\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) d(u,v) \\ =: \iint_{\mathcal{S}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

şekline dönüştüğü, yani ikinci-dereceden diferansiyellerin

$$dy\,dz := \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,d(u,v), \quad dz\,dx := \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,d(u,v), \quad dx\,dy := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,d(u,v)$$

biçiminde tanımlanmaları gerektiği görülür. (Bunlar, $dy = f'(x)\,dx$ diferansiyelinin iki-boyutlu benzerleridir.) Bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi üzerinde bir 2***-form*** (ya da, ***ikinci-dereceden*** bir ***diferansiyel form***), $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olmak üzere,

$$P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

yapısında bir ifadedir. ***Katsayı***ları olarak adlandırılan P, Q, R fonksiyonlarının Ω üzerinde sürekli oldukları bir 2-formun "Ω üzerinde ***sürekli*** olduğu," söylenir. $\mathbf{F} := (P,Q,R) : \phi(E) \to \mathbb{R}^3$ olmak üzere, sürekli bir 2-formun bir $\mathbf{n}$ birim normali ile yönlendirilmiş bir düzgün $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerindeki ***yönlendirilmiş integral***i

$$\iint_{\mathcal{S}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy := \iint_{\mathcal{S}} (P,Q,R)\cdot \mathbf{n}\,d\sigma$$

olarak tanımlanır.

Birinci-dereceden diferansiyel formlar, yönlendirilmiş bir eğrisel integrali hesaplamak ya da bir fonksiyonun artışını yaklaşık olarak belirlemek gibi işlemleri yapmak için kullanılan formel aygıtlardır. Benzer biçimde ikinci-dereceden diferansiyel formlar da, yönlendirilmiş yüzey integrallerini hesaplama gibi işlemlerde kullanılırlar. Ayrıca bu formlar, §2.5 ve §2.6 kısımlarında verilecek olan, vektör hesabının üç esas sonucunu birleştirmek için de kullanılabilir.[26] (Diferansiyel formlar, daha doğal fakat biraz daha uzun bir şekilde, dx diferansiyeli $(x,y,z) \mapsto x$ izdüşüm operatörünün türevi şeklinde görülerek de tanımlanabilirler.[27])

Bir yüzeyin sınırı, genel olarak, bir eğridir. Möbius bandının sınırı bir basit kapalı eğri olduğundan, yönlendirilebilir olmayan bir yüzeyin sınırı yönlendirilebilir bir eğri olabilir.

[26] Bkz. [23, §10.1, Exercise 4].
[27] Bkz.[19, S. 89].

$\mathcal{S}$ yönlendirilmiş yüzeyi, parçalı düzgün bir $\partial\mathcal{S}$ sınırına sahip olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yüzeyinin yönlendirilişi kullanılarak, $\partial\mathcal{S}$ üzerinde bir yönlendirme belirlenebilir. Bunun için $\mathcal{S}$ yüzeyinin pozitif tarafında, $\partial\mathcal{S}$ sınırına yakın olan bir noktada bulunulduğu varsayılırsa, $\partial\mathcal{S}$ üzerindeki pozitif akış yönünün sağdan sola doğru olduğu görülür; diğer bir deyişle, $\mathcal{S}$ yüzeyinin pozitif tarafının üzerinde ve pozitif akış yönü doğrultusunda sınır boyunca yol alındığında, yüzey solda kalır. $\partial\mathcal{S}$ sınırının bu yönlendirmesi ***pozitif yönlendiriliş***, ya da ***sağ-el yönlendirilişi***, veya $\mathcal{S}$ yüzeyinin yönlendirilişi tarafından $\partial\mathcal{S}$ üzerinde ***belirlenen*** yönlendiriliş olarak adlandırılır. $\mathcal{S}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayının bir alt-kümesi olduğunda, yani xy-düzleminin içinde kaldığında, eğer $\partial\mathcal{S}$ sınırı $\mathcal{S}$ üzerindeki yukarıya-doğru-yönelmiş normal vektör (yani, $z \geqslant 0$ üst yarı-düzlemine doğru yönelmiş normal vektör) tarafından belirlenen yönlendirilişe sahipse, $\partial\mathcal{S}$ sınırının ***pozitif olarak*** yönlendirilmiş olduğunu söyleyeceğiz. Böylece, eğer $\mathcal{S}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayının, sınırı bağlantılı ve parçalı düzgün bir kapalı eğri olan sınırlı bir alt-kümesi ise, $\mathcal{S}$ üzerindeki doğal yönlendirilişin $\partial\mathcal{S}$ üzerinde pozitif z-ekseninin yukarısından görüldüğünde saat yelkovanının ters yönünde olan bir yönlendiriliş belirlediği elde edilir. Bu durum, E bölgesinin içinde 'delikler' varsa geçerli olmaz: örneğin, bir $a > 0$ için $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$ ise, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = b^2\}$ üzerindeki pozitif yönlendiriliş saat yelkovanının ters yönünde olmasına karşın, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\}$ üzerindeki pozitif yönlendiriliş saat yelkovanıyla aynı yöndedir.

Yönlendiriliş kavramının geometrik olarak yukarıdaki şekilde yapılan betimlemesi, pratikte karşılaşılan pek çok somut durumda, yüzey tarafından belirlenen yönlendirilişi tespit etmek için yeterli olur.

Örnek 2.4.6. $\mathcal{S}$ yüzeyi, $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$ ile belirlenen ve içeriye-yönelmiş normale sahip kesik paraboloid olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yüzeyinin sınırı, $z = 4$ düzlemi üzerindeki $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir; z-ekseninin yukarısından görüldüğünde, pozitif yönlendiriliş saat yelkovanı yönündedir. $\partial\mathcal{S}$ sınırının bir parametrizasyonu, o hâlde, $t \in [0, 2\pi]$ için $\phi(t) := (2\sin t, 2\cos t, 4)$ olarak belirlenir.

Yukarıdaki fikirler parçalı düzgün yüzeylere genişletilmek istendiğinde, bu türden bir $\mathcal{S} := \bigcup_j \mathcal{S}_j$ yüzeyi için, her $\mathcal{S}_j$ yüzeyinin yönlendirilebilir olduğunu varsaymanın yeterli olmayacağı görülür: Örnek 2.4.1'de verilen Möbius bandı, $k = 1, 2$ için $E_k := [\pi(k-2), \pi(k-1)] \times [-1, 1]$ ve ϕ fonksiyonu Örnek 2.4.1'deki gibi alındığında, $\phi(E_1)$ ve $\phi(E_2)$ yönlendirilmiş yüzeylerinin birleşimi olur. Eğer $\pm\mathbf{N}_{\phi_j}$ normalleri her $\mathcal{S}_j$ parçası üzerinde 'pozitif tarafı' uyumlu bir biçimde belirleyen bir $\mathbf{n}_j$ birim normali üretilecek biçimde kullanılabiliyorsa (örneğin, bağlantılı bir parça üzerindeki tüm normal vektörler dışarıya-yönelmiş ve diğer bir bağlantılı parça üzerindeki tüm normal vektörler içeriye-yönelmiş ise), bu durumda parçalı düzgün $\mathcal{S} := \bigcup_j \mathcal{S}_j$ yüzeyinin ***yönlendirilebilir*** olduğu söylenecektir. Eğer parçalı düzgün $\mathcal{S} = \bigcup_j \mathcal{S}_j$ yüzeyi yönlendirilebilir ise, sürekli bir $\mathbf{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun ***yönlendirilmiş yüzey integrali***

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma := \sum_{j=1}^{N} \iint_{\mathcal{S}_j} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_j\, d\sigma$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.4.7. $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ve $z = 0$ ve $z = 2$ düzlemleriyle sınırlanmış katı cismin topolojik sınırı $\mathcal{S}$, bu yüzey üzerindeki ve dışarıya-yönelmiş normal $\mathbf{n}$, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, 0, y)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yüzeyinin, bir dikey $\mathcal{S}_1$ tarafı, bir $\mathcal{S}_2$ tabanı, ve bir $\mathcal{S}_3$ tepesinden müteşekkil üç düzgün parçadan oluştuğu görülür. $E := [0, 2\pi] \times [0, 2]$ ve her $(u, v) \in E$ için $\phi(u, v) := (\cos u, \sin u, v)$ alınarak $\mathcal{S}_1$ yüzeyinin bir parametrizasyonu belirlenirse, $\mathbf{N}_\phi = (\cos u, \sin u, 0)$ olur ve

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 u\, du\, dv = 2\pi$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan, $\mathcal{S}_2$ üzerindeki, dışarıya-yönelmiş birim normal $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ olduğundan, §2.3, Problem 4 (a) kullanılarak,

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = -\int_{B_1(\mathbf{0})} y\, d(x, y) = -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta = 0$$

sonucuna ulaşılır. Benzer argümanlarla, $\mathcal{S}_3$ üzerindeki integralin de sıfıra eşit olduğu görülür. O hâlde,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 2\pi + 0 + 0 = 2\pi$$

olur.

Örnek 2.4.8. $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $z = 1$ düzlemi tarafından sınırlanan katı cismin topolojik sınırı $\mathcal{S}$, bu yüzey üzerindeki ve dışarıya-yönelmiş normal $\mathbf{n}$, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x + z^2, x, z)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yüzeyi, $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ ile belirlenen $\mathcal{S}_1$ paraboloidinden ve $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$ ile belirlenen $\mathcal{S}_2$ diskinden oluşan iki düzgün parçadan müteşekkildir. $\mathcal{S}_1$ yüzeyinin âşikâr parametrizasyonu, $(u, v) \in B_1(\mathbf{0})$ olmak üzere, $\phi(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$ ile belirlenir. Bu durumda $\mathbf{N}_\phi = (-2u, -2v, 1)$ normalinin, verilenden aksi yönde, yani içeriye-yönelmiş olduğuna dikkât edilmelidir. Teorem 2.4.4 ve kutupsal koordinatlar kullanılarak, şu hâlde,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= -\int_{B_1(\mathbf{0})} (-2u^2 - 2u(u^2+v^2)^2 - 2uv + (u^2+v^2))\,d(u,v)\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} (2r^2\cos^2\theta + 2r^5\cos\theta + 2r^2\cos\theta\sin\theta - r^2)r\,dr\,d\theta = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\mathcal{S}_2$ üzerindeki ve dışarıya-yönelmiş birim normal $\mathbf{n} = (0,0,1)$, ve $\mathcal{S}_2$ üzerinde $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = z = 1$ olduğundan, §2.3, Problem 4 (a) kullanılarak,

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_{B_1(\mathbf{0})} d(x,y) = \text{Alan}\,(B_1(\mathbf{0})) = \pi$$

sonucuna ulaşılır. O hâlde,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0 + \pi = \pi$$

olur.

Örnek 2.4.9. $z = -1$ ve $z = \sqrt{3}$ düzlemleri ve $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ tek yapraklı hiperboloidi ile sınırlanmış katı cismin topolojik sınırı $\mathcal{S}$, bu yüzey üzerindeki ve dışarıya-yönelmiş normal $\mathbf{n}$, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x,y,z)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yüzeyi, bir dikey $\mathcal{S}_1$ tepesi, bir $\mathcal{S}_2$ tarafı, ve bir $\mathcal{S}_3$ tabanından müteşekkil üç düzgün parçadan oluşur. $\mathcal{S}_1$ üzerinde $\mathbf{n} = (0,0,1)$ kullanılarak,

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_{B_2(\mathbf{0})} \sqrt{3}\,d(x,y) = 4\sqrt{3}\pi$$

elde edilir. Benzer biçimde,

$$\iint_{\mathcal{S}_3} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 2\pi$$

olduğu görülür. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ fonksiyonunu $\mathcal{S}_2$ üzerinde integre etmek için, $z = u$ alınarak $x^2+y^2 = 1+u^2$ olduğu gözlemlensin. Bu durumda $\mathcal{S}_2$ yüzeyinin bir parametrizasyonu, $(u,v) \in [-1,\sqrt{3}] \times [0,2\pi]$ için $\phi(u,v) := ((1+u^2)\cos v, (1+u^2)\sin v, u)$ ile belirlenir. Öte yandan, $\mathbf{N}_\phi = (-(1+u^2)\cos v, -(1+u^2)\sin v, 2u(1+u^2))$ normali içeriye-yönelmiş olduğundan ve

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_\phi &= ((1+u^2)\cos v, (1+u^2)\sin v, u)\\ &\qquad \cdot (-(1+u^2)\cos v, -(1+u^2)\sin v, 2u(1+u^2))\\ &= -(1+u^2)^2 + 2u^2(1+u^2) = u^4 - 1\end{aligned}$$

gerçeklendiğinden,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= -\int_{-1}^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}(u^4-1)\,dv\,du\\ &= 2\pi\int_{-1}^{\sqrt{3}}(1-u^4)\,du = \frac{8\pi}{5}(1-\sqrt{3})\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 4\sqrt{3}\pi + 2\pi + \frac{8\pi}{5}(1-\sqrt{3}) = \frac{6\pi}{5}(3+2\sqrt{3})$$

sonucuna ulaşılır.

Problemler

1. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, $\partial\mathcal{S}$ sınırının $\mathcal{S}$ yüzeyi tarafından belirlenen yönlendirilişle uyumlu bir (parçalı) düzgün parametrizasyonunu bularak, $\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi, dışarıya-yönelmiş normale sahip ve $y = 9 - x^2 - z^2$, $y \geqslant 0$ ile belirlenen kesik paraboloid, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x^2y, y^2x, x+y+z)$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi, başlangıç noktasından öteye yönelmiş normale sahip $x + 2y + z = 1$ düzleminin birinci oktandaki parçası, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x-y, y-x, xz^2)$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi, dışarıya-yönelmiş normale sahip ve $z = x^2+y^2$, $1 \leqslant z \leqslant 4$ ile belirlenen kesik paraboloid, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (5y+\cos z, 4x-\sin z, 3\cos z + 2y\sin z)$.

2. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = x^2+y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ ile belirlenen kesik paraboloid, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x,y,z)$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = \sqrt{(4-y^2)}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ile belirlenen kesik yarım silindir, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x^2+y^2, yz, z^2)$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi Örnek 2.3.6'da verilen torus, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (y,-x,z)$;

(d) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = x^2$ yüzeyinin $x^2+y^2 = 1$ silindirinin içinde kalan parçası, $\mathbf{n}$ vektörü yukarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (y^2z, \cos(2+\ln(2-x^2-y^2)), x^2z)$.

3. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve ω 2-formu için, $\iint_{\mathcal{S}} \omega$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi, yukarıya-yönelmiş normale sahip ve $z = x^4+y^2$ yüzeyinin $[0,1]\times[0,1]$ birim karesinin üzerinde kalan parçası, ve $\omega := x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi, yukarıya-yönelmiş normale sahip $z = \sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$ yarıküresi, ve $\omega := x\,dy\,dz + y\,dz\,dx$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi, $x^2+y^2 = b^2$, $0 < b < a$ silindirinin içinde kalan, yukarıya-yönelmiş normale sahip olan, ve $z = \sqrt{(a^2-x^2-y^2)}$ eşitliğiyle belirlenen küresel takke, ve $\omega := xz\,dy\,dz + dz\,dx + z\,dx\,dy$;

(d) $\mathcal{S}$ yüzeyi, z-ekseninden öteye yönelmiş normale sahip $z = 2\sqrt{(x^2 + y^2)}$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ kesik konisi, ve $\omega := x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$.

4. $\mathcal{C}^p$-sınıfından olan $\psi(B)$ ve $\phi(E)$ yüzeyleri, ve B kümesini örten olarak E kümesine gönderen ve $\psi = \phi \circ \tau$ koşulunu sağlayan $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir τ fonksiyonu göz önüne alınsın.

(a) Eğer (ψ, B) ve (ϕ, E) parametrizasyonları düzgün ise ve B üzerinde, τ fonksiyonu bire-bir oluyorsa ve $\Delta_\tau \neq 0$ gerçekleniyorsa, o zaman her sürekli $\mathbf{F} : \phi(E) \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu için

$$\int_E \mathbf{F}(\phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}_\phi(u,v)\,d(u,v) = \int_B \mathbf{F}(\psi(s,t)) \cdot \mathbf{N}_\psi(s,t)\,d(s,t)$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

(b) Eğer Z kümesi B kümesinin sıfır-alanlı ve kapalı bir alt-kümesi ise ve (ψ, B) parametrizasyonu Z kümesinin dışında düzgün oluyorsa, τ fonksiyonu bire-bir ise, ve $B^\circ \setminus Z$ kümesi üzerinde $\Delta_\tau \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda her sürekli $\mathbf{F} : \phi(E) \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu için

$$\int_E \mathbf{F}(\phi(u,v)) \cdot \mathbf{N}_\phi(u,v)\,d(u,v) = \int_B \mathbf{F}(\psi(s,t)) \cdot \mathbf{N}_\psi(s,t)\,d(s,t)$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlayınız.

5. $x = 0, y = 0, z = 0$, ve $x+y+z = 1$ düzlemleriyle sınırlanan katı dörtyüzlü E olsun, ve bu dörtyüzlünün ∂E topolojik sınırının dışarıya-yönelmiş normal vektörüyle yönlendirildiği varsayılsın. Bu durumda, $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan tüm $P, Q, R : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$\iint_{\partial E} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_E (P_x + Q_y + R_z)\,dV$$

olduğunu ispatlayınız.

6. T, Problem 5'de verilen dörtyüzlünün dışarıya-yönelmiş normale sahip topolojik sınırını göstersin, ve T yüzeyinin meyilli yüzü çıkarılarak elde edilen yüzey $\mathcal{S}$ olsun; yani $\mathcal{S}$, her biri $x = 0$, $y = 0$, ve $z = 0$ düzlemlerinin birinin içinde bulunan üç tane üçgensel yüze sahip olan yüzey olarak tanımlansın. Eğer $\partial\mathcal{S}$ pozitif olarak yönlendirilmişse, bu durumda $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan tüm $P, Q, R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$\int_{\partial\mathcal{S}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\mathcal{S}} (R_y - Q_z)\,dy\,dz + (P_z - R_x)\,dz\,dx + (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

7. $\mathcal{S}$, bir düzgün yüzey olsun.

(a) $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^N \phi_j(E_j)$ olacak şekilde, $\mathcal{S}$ yüzeyinin parçalarının (ϕ_j, E_j) düzgün parametrizasyonlarının var olduklarını gösteriniz.

(b) $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^N \phi_j(E_j)$ olacak şekilde, düzgün parametrizasyonlara sahip, örtüşmeyen $\mathcal{S}_j$ yüzeylerinin var olduklarını kanıtlayınız. Aynı durumun $\mathcal{S}$ yüzeyi yönlendirilebilir olduğunda da geçerli olup olmadığını belirleyiniz.

2.5 Green ve Gauss Teoremleri

İntegral Hesabın Temel Teoremi,[28] $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan gerçel-değerli her f fonksiyonu için

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$$

eşitliğinin sağlandığını bildirir. Buna göre f' türev fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki integrali, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığının topolojik sınırı olan $\{a, b\}$ kümesi üzerinde aldığı değerlerle tamamen belirlenir.

Bu ve bunu izleyen kısımda yukarıda ifade edilen sonucun $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonları için benzerleri, Ω kümesi bir yüzey iken ya da aynı küme $m = 2$ veya $m = 3$ için bir m-boyutlu bölge olduğunda elde edilecektir. Bir başka deyişle $\mathbf{F}$ fonksiyonunun bir 'türevinin' Ω üzerindeki integralinin, $\mathbf{F}$ fonksiyonunun Ω kümesinin 'sınırında' aldığı değerlerle tamamen belirlenebileceğini göstereceğiz. Hangi 'türevin' ve 'sınırın' kullanılacağı, Ω kümesinin bir yüzey ya da m-boyutlu bir bölge olarak belirlenmesine ve $m = 2$ veya $m = 3$ olmasına bağlı olacaktır.

Göreceğimiz ilk temel teorem, düzlemdeki iki-boyutlu bölgeler için geçerlidir.

Teorem 2.5.1 (Green Teoremi)**.** *Topolojik sınırı ∂E pozitif olarak yönlendirilmiş $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir parçalı düzgün eğri olan iki-boyutlu bir bölge E olsun. Eğer $P, Q : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathcal{C}^1$-sınıfından ve $\mathbf{F} := (P, Q)$ ise, o zaman*

$$\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

gerçeklenir.

Özel bölgeler için kanıt. Sâdelik açısından, E bölgesinin birinci ve ikinci tiplerden bir bölge[29] olduğu varsayılsın. İstenen eşitliğin sol yanındaki eğrisel integral, diferansiyel notasyonu kullanılarak,

$$\int_{\partial E} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial E} P\, dx + \int_{\partial E} Q\, dy =: I_1 + I_2$$

şeklinde yazılsın. İlk olarak I_1 integralini hesaplayacağız. E bölgesi birinci tipten olduğundan,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$

[28] Bkz. [23, Theorem 3.13].
[29] Bkz. §1.3, ss. 33-34.

olacak biçimde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları bulunur. Dolayısıyla ∂E sınırının, bir $y = g(x)$ 'tepesi', bir $y = f(x)$ 'tabanı', ve (belki de) bir ya da iki adet dikey 'kenarı' vardır.

Pozitif yönlendiriliş sat yelkovanının ters yönünde olduğundan, ilgili sınırın tepesinin âşikâr parametrizasyonu, x parametresi b değerinden a değerine değişmek üzere, $y = g(x)$ biçimindedir; benzer şekilde aynı sınırın tabanının parametrizasyonu da, x parametresi a değerinden b değerine değişmek üzere, $y = f(x)$ biçiminde olur. Dikey her eğri üzerinde $dx = 0$ olduğundan, dikey kenarların I_1 integraline katkıları sıfırdır. Tanım 2.2.4 ve İntegral Hesabın Temel Teoremi kullanılarak, o hâlde,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\partial E} P\,dx &= \int_a^b P(x, f(x))\,dx + \int_a^b P(x, g(x))\,dx \\ &= -\int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) \\ &= -\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\,dx = -\iint_E \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Öte yandan, E bölgesi aynı zamanda ikinci tipten olduğundan, benzer argümanlar kullanılarak

$$I_2 = \int_{\partial E} Q\,dy = \int_E \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

olduğu görülür. (Burada, ∂E sınırının parametrizasyonları, örneğin $y = f(x)$ yerine $x = f^{-1}(y)$ kullanılarak, değiştirilmiştir. Bu parametrizasyonlar yönlendirilişçe denk olduklarından, yönlendirilmiş integralin değeri aynı kalır−bkz. §2.2, Problem 6.) I_1 ve I_2 değerleri toplanarak da, kanıt tamamlanır. □

E bölgesinin birinci ve ikinci tiplerden oluştuğu varsayımı, kanıtı basitleştirmek için yapılmıştır. İfade edildiği şekliyle Green Teoremi'nin kanıtı için [23, Theorem 10.8] ve bunu izleyen referans kullanılabilir. Green Teoremi'nin, bu şekliyle bile, her biri birinci ve ikinci tiplerden olan sonlu sayıda alt-bölgeye parçalanabilen iki-boyutlu bölgeler için geçerli olduğu kolayca gözlemlenebilir. Örneğin, ikinci tipten olmayan fakat ortak sınırlarını oluşturan bir $\mathcal{C}$ doğru parçasının kendisini her biri birinci ve ikinci tiplerden olan E_1 ve E_2 alt-bölgelerine parçaladığı bir

E bölgesi göz önüne alınarak Teorem 2.5.1 her bir parçaya uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \iint_{E_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{E_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \int_{\partial E_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds + \int_{\partial E_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \\ &= \int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds + \int_{\mathcal{C} \cap \partial E_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds + \int_{\mathcal{C} \cap \partial E_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu, ∂E_1 ve ∂E_2 sınırlarının ikisi de saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş olduklarından, $\mathcal{C} \cap \partial E_1$ sınır parçasının yönlendirilişinin $\mathcal{C} \cap \partial E_2$ sınır parçasının yönlendirilişinden farklı olması anlamına gelir. Yönlendirilişin değiştirilmesi integrali bir işaret değişimiyle etkilediğinden, $\mathcal{C}$ boyunca hesaplanan integrallerin toplama katkıları sıfırdır. Elde edilen değer, şu hâlde, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ ifadesinin ∂E üzerindeki integraline eşit olur.

Green Teoremi, sıklıkla, uzun ve sıkıcı parametrizasyonlardan kurtulmak için kullanılır.

Örnek 2.5.2. ∂E saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş olmak üzere $E := [0, 2] \times [1, 3]$, ve $\mathbf{F}(x, y) := (xy, x^2 + y^2)$ olsun. Bu durumda ∂E sınırı dört kenardan oluştuğundan, $\mathbf{F}$ fonksiyonunun bu sınır üzerindeki eğrisel integrali doğrudan hesaplanmak istenirse dört ayrı parametrizasyon kullanılması gerekir. Buna karşın Green Teoremi kullanıldığında aynı integral,

$$\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_0^2 \int_1^3 (2x - x)\, dy\, dx = 4$$

olarak elde edilir.

Hesaplanması zor olan integraller için de, Green Teoremi'ni kullanmak yararlı olabilir.

Örnek 2.5.3. $E := B_1(\mathbf{0})$ bölgesinin sınırı olan ∂E saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş olmak üzere, $\mathbf{F}(x, y) := (xy^2, \arctan(\ln(y + 3)) - x)$ olsun. Bu durumda $\mathbf{F}$ fonksiyonunun ikinci bileşeninin doğrudan integralini hesaplamak zordur; ancak Green Teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds &= -\iint_{B_1(\mathbf{0})} (-1 - 2xy)\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r^2 \cos\theta \sin\theta) r\, dr\, d\theta = \pi\end{aligned}$$

değeri kolayca elde edilir.

Green Teoremi, $\mathbb{R}^2$ içindeki iki-boyutlu bölgeler göz önüne alındığında integral hesabın temel teoremi tipinde bir sonucun elde edilebilmesi için kullanılması gereken 'türevin' $Q_x - P_y$ olduğunu gösterir. Ω kümesi $\mathbb{R}^3$ içinde bir yüzey veya bir üç-boyutlu bölge olduğunda kullanılacak 'türevler' ise, aşağıdakilerdir.

Tanım 2.5.4. $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt-kümesi E, ve $\mathbf{F} := (P, Q, R) : E \to \mathbb{R}^3$ vektör fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından olsun. $\mathbf{F}$ fonksiyonunun ***rotasyonel***i

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

olarak tanımlanan vektör fonksiyonu, ve $\mathbf{F}$ fonksiyonunun ***diverjans***ı

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

olarak tanımlanan skaler fonksiyondur.

Açıklama 2.5.5. P ve Q fonksiyonları Green Teoremi'nin ifadesindeki gibi olmak üzere, eğer $\mathbf{F} := (P, Q, \mathbf{0})$ ise, bu durumda Green Teoremi'nde kullanılan türev $\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = Q_x - P_y$ olur.

Tanıtılan bu son türevler,

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

diferansiyel operatörü kullanıldığında, sembolik olarak, daha kısa bir şekilde ifade edilebilirler: bu durumda, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ ve $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ olur.

Eğer E, topolojik sınırı bir parçalı düzgün yönlendirilebilir yüzey olan bir üç-boyutlu bölge ise, ∂E üzerindeki ***pozitif yönlendiriliş***, E° kümesinden öteye yönelen birim normal kullanılarak belirlenir. Eğer E kümesi konveks ise, bunun anlamı $\mathbf{n}$ vektörünün dışarıya-yönelmiş olduğudur. Ancak bu durum, E kümesi dahilî 'kabarcıklara' sahip olduğunda geçerli *değildir*: örneğin, eğer bir $a > 0$ için $E := \{\mathbf{x} \mid a \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant b\}$ ise, $\mathbf{n}$ vektörü $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = b\}$ üzerinde orijinden öteye yönelmiş olmasına karşın, aynı vektör $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = a\}$ üzerinde orijine doğru yönelir.

Göreceğimiz ikinci temel teorem, üç-boyutlu bölgeler için geçerlidir. Bu sonuç ***Diverjans Teoremi*** olarak da bilinir.

Teorem 2.5.6 (Gauss Teoremi). *Topolojik sınırı ∂E pozitif olarak yönlendirilmiş $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir parçalı düzgün yüzey olan üç-boyutlu bir bölge E olsun.*

Eğer $\mathbf{F} : E \to \mathbb{R}^3$ *fonksiyonu* E *üzerinde* $\mathcal{C}^1$*-sınıfından ise, o zaman*

$$\iint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

gerçeklenir.

ÖZEL BÖLGELER İÇİN KANIT. Sâdelik açısından, E bölgesinin birinci, ikinci, ve üçüncü tiplerden bir bölge[30] olduğu varsayılsın. $\mathbf{F} := (P, Q, R)$ olsun ve istenen eşitliğin sol yanındaki yüzey integrali, diferansiyel notasyonu kullanılarak,

$$\iint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{\partial E} P\, dy\, dz + \iint_{\partial E} Q\, dz\, dx + \iint_{\partial E} R\, dx\, dy =: I_1 + I_2 + I_3$$

şeklinde yazılsın. İlk olarak I_3 integralini hesaplayacağız. E bölgesi birinci tipten olduğundan, iki-boyutlu bir $B \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesi ve sürekli $f, g : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B,\ f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\}$$

olacak biçimde bulunur. Dolayısıyla ∂E sınırının, bir $z = g(x, y)$ 'tepesi', bir $z = f(x, y)$ 'tabanı', ve (belki de) bir dikey 'kenarı' vardır. ∂E sınırının dikey kenar üzerindeki her normali, xy-düzlemine paraleldir. Aynı zamanda $dx\, dy$ alan elemanı, ∂E yüzeyinin herhangi bir normalinin üçüncü bileşeni olduğundan, dikey parça üzerinde sıfıra eşit olmak zorundadır. Böylece, I_3 integralinin ∂E yüzeyinin tepesinde ve tabanında integral alınarak hesaplanabileceği görülür. Dikkât edilmesi gereken bir diğer husus da, hipotez nedeniyle, taban kısmındaki birim normalin aşağıya-yönelmiş olduğu, buna karşın tepe kısmındaki normalin yukarıya-yönelmiş olduğudur. Âşikâr parametrizasyonlar ve İntegral Hesabın Temel Teoremi kullanılarak, o hâlde,

$$\begin{aligned} I_3 = \iint_{\partial E} R\, dx\, dy &= \int_B \big(R(x, y, g(x, y)) - R(x, y, f(x, y))\big)\, d(x, y) \\ &= \int_B \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dz\, d(x, y) = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer argümanlarla, E bölgesinin ikinci tipten olması nedeniyle

$$I_2 = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV,$$

[30] Bkz. §1.3, s. 34.

ve E bölgesinin üçüncü tipten olması nedeniyle

$$I_1 = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV$$

olduğu görülür. $I_1+I_2+I_3$ toplamı göz önüne alınarak da, kanıt tamamlanır. $\square$

E bölgesinin birinci, ikinci, ve üçüncü tiplerden oluştuğu varsayımı, kanıtı basitleştirmek için yapılmıştır. İfade edildiği şekliyle Gauss Teoremi'nin kanıtı için [23, Theorem 10.8] ve bunu izleyen referans kullanılabilir. Gauss Teoremi'nin, bu şekliyle bile, her biri birinci, ikinci, ve üçüncü tiplerden olan sonlu sayıda E_j alt-bölgesine parçalanabilen üç-boyutlu her E bölgesi için geçerli olduğu kolayca gözlemlenebilir. Örneğin, aralarındaki ortak yüzey $\mathcal{S}$ olan bu türden E_1 ve E_2 bölgeleri için $E = E_1 \cup E_2$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \iiint_{E_1} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV + \iiint_{E_2} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \\ &= \iint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{\mathcal{S}\cap\partial E_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{\mathcal{S}\cap\partial E_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma\end{aligned}$$

gerçeklenir. E_1 ve E_2 bölgeleri dışarıya-yönelmiş normallere sahip olduklarından, $\mathcal{S} \cap \partial E_1$ üzerindeki yönlendiriliş $\mathcal{S} \cap \partial E_2$ üzerindeki yönlendirilişten farklı olur, ve $\mathcal{S}$ üzerindeki integraller birbirlerini götürürler.

Gauss Teoremi de, tıpkı Green Teoremi gibi, hesaplanması zor integraller ve uzun parametrizasyonlardan kaçınmak için yararlıdır.

Örnek 2.5.7. $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$ olarak belirlenen katı cismin topolojik sınırı $\mathcal{S}$, bu yüzey üzerindeki ve dışarıya yönelmiş normal $\mathbf{n}$, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (2x + z^2, x^5 + z^7, \cos(x^2) + \sin(y^3) - z^2)$ olsun. Bu durumda, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2 - 2z$ olduğundan, Gauss Teoremi kullanılarak,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_E (2 - 2z)\, dV = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 (1 - z) r\, dz\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{3}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.5.8. $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ birim kübü Q, bu kübün topolojik sınırı üzerindeki ve dışarıya yönelmiş normal $\mathbf{n}$, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (2x - z, x^2 y, -xz^2)$ olsun. Bu durumda ∂Q sınırı altı tane yüzden oluştuğundan, $\mathbf{F}$ fonksiyonunun bu sınır üzerindeki yüzey integrali doğrudan hesaplanmak istenirse altı ayrı integralin hesaplanması gerekir. Buna karşın Gauss Teoremi kullanıldığında aynı integral,

$$\iint_{\partial Q} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2 + x^2 - 2xz)\, dx\, dy\, dz = \frac{11}{6}$$

olarak elde edilir.

Bu kısımda tanımlanan kavramların ve elde edilen sonuçların, akışkanların hareketi bağlamında incelendiğinde yeni anlamlar kazandıkları görülür. Eğer $\mathbf{F}$ vektör fonksiyonu sıkıştırılamayan bir akışkanın bir $\mathbf{a}$ noktası yakınındaki akışını temsil ediyorsa, $\operatorname{curl}\mathbf{F}(\mathbf{a})$ vektörü ilgili akışkanın $\mathbf{a}$ etrafında ve saat yelkovanının ters yönündeki anafor yapma eğilimini (bkz. §2.6, Problem 6), $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{a})$ skaleri ise aynı akışkanın $\mathbf{a}$ noktasından saçılma düzeyini ölçer (bkz. Problem 7). (Bunlar, *rotasyonel* ve *diverjans* kelimelerinin etimolojilerini açıklar.) Örneğin, eğer $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ ise, akışkan anafor yapmaz, fakat orijinden doğrudan saçılır. Bu yüzden, $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ve $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$ olur. Diğer taraftan, eğer $\mathbf{G}(x,y,z) := (y,-x,0)$ ise, bu durumda akışkan orijin etrafında bir dairesel hareketle anafor yapar. Bundan dolayı da, $\operatorname{curl}\mathbf{G} = (0,0,-1)$ fakat $\operatorname{div}\mathbf{G} = 0$ olur. Burada, $\operatorname{curl}\mathbf{G}$ vektörünün bileşenlerinden birindeki negatif işarete de dikkât edilmelidir: böyle bir akışkan orijin etrafında saat yelkovanı yönünde anafor yapar, ve bundan dolayı da saat yelkovanının ters yönündeki dairesel hareketin aksi yönünde yol alır.

Akışkan iki-boyutlu bir $E \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesi üzerinde aktığında, $\mathcal{C}$ eğrisi boyunca $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ büyüklüğünün integrali teğet vektörü doğrultusunda $\mathbf{F}$ fonksiyonunun $\mathcal{C}$ etrafındaki dolanımının bir ölçüsüdür (Tanım 2.2.4'den hemen sonra yapılan yorumları göz önüne alınız). Böylece Green Teoremi, akışkanın teğet vektörü doğrultusunda ∂E etrafındaki dolanımının, aynı akışkanın E içerisinde ne kadar kuvvetli anafor yaptığıyla belirlenebileceğini gösterir. $\mathbf{F}$ fonksiyonu sıkıştırılamayan bir akışkanın üç-boyutlu bir $E \subseteq \mathbb{R}^3$ bölgesi boyunca akışını temsil ettiğinde ve $\mathcal{S} := \partial E$ olduğunda ise, $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ integrali $\mathcal{S}$ yüzeyi boyunca ilgili akışkanın akısını temsil eder (Tanım 2.4.3'den sonra yapılan yorumları göz önüne alınız). Gauss Teoremi, o hâlde, $\mathcal{S}$ yüzeyi boyunca akışkanın akısının, aynı akışkanın E içerisine ne kadar kuvvetli saçıldığıyla belirlenebileceğini söylemiş olur.

Bu kısmı, rotasyonel ve diverjansla ilgili yukarıda yapılan fiziksel yorumların en iyimser ifadeyle 'kusurlu' olduklarını belirterek kapatacağız. Örneğin, $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,z,0)$ vektör alanının rotasyoneli $(-1,0,0)$ vektörüdür. Burada, katmanlar hâlinde kesilen ve $z > 0$ olduğunda pozitif y-ekseni doğrultusunda xy-düzlemine paralel bir akışa sahip olan bir akışkan söz konusudur. Anafor yapmamasına karşın bu akışkan, tepe kısmına taban kısmından daha fazla kuvvet uygulandığından, içine yerleştirilmiş ve z-eksenine paralel olan bir çubuğu (örneğin, $\{(0,1,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ doğru parçasını) döndürme eğilimindedir. Rotasyonelin değeri, akışkanın döndürme yapma yönündeki bu eğilimini yansıtır. (Dönüş yönünün saat yelkovanı yönünde ve rotasyonelin ilk bileşeninin negatif olduğuna dikkât edilmelidir.)

Problemler

1. Aşağıda verilen her $\mathcal{C}$ eğrisi ve her $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{C}$ eğrisi, saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş, $x=0$, $y=0$, ve $y=\sqrt{(4-x^2)}$ ile sınırlanan ve koordinat sisteminin birinci parçasının içinde kalan iki-boyutlu bölgenin topolojik sınırı, ve $\mathbf{F}(x,y) := (\sin\sqrt{(x^3-x^2)}, xy)$;

(b) $\mathcal{C}$ eğrisi, saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş, köşe noktaları $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(2,3)$ olan dikdörtgenin çevresi, ve $\mathbf{F}(x,y) := (e^y, \ln(x+1))$;

(c) Saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş $\mathcal{C}_1 := \partial B_1(\mathbf{0})$ eğrisi ve saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş $\mathcal{C}_1 := \partial B_2(\mathbf{0})$ eğrisi için, $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, ve $[1,2]$ aralığı üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından bir fonksiyon f olmak üzere, $\mathbf{F}(x,y) := (f(x^2+y^2), xy^2)$.

2. Aşağıda verilen her $\mathcal{C}$ eğrisi ve her ω 1-formu için, $\int_{\mathcal{C}} \omega$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{C}$ eğrisi $[a,b]\times[c,d]$ dikdörtgeninin saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş topolojik sınırı, ve $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyon olmak üzere, $\omega := (f(x)+y)\,dx + xy\,dy$;

(b) $\mathcal{C}$ eğrisi, saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş, $y=x^2$ ve $y=x$ ile sınırlanan iki-boyutlu bölgenin topolojik sınırı, ve $\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$ eşitliğini gerçekleyen ve $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan bir fonksiyon $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ olmak üzere, $\omega := yf(x)\,dx + (x^2+y^2)\,dy$;

(c) $\mathcal{C}$ eğrisi Green Teoremi'nin hipotezlerini gerçekleyen iki-boyutlu bir E bölgesinin pozitif olarak yönlendirilmiş topolojik sınırı, ve $\omega := e^x \sin y\,dy - e^x\cos y\,dx$.

3. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve her $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, $\mathbf{n}$ vektörünü dışarıya-yönelmiş birim normal kabul ederek, $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi $[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$ olarak verilen üç-boyutlu dikdörtgenin topolojik sınırı, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x+e^z, y+e^z, z)$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi $x^2+y^2 \leqslant 1$, $z=0,1$ diskleri ile birlikte $x^2+y^2=1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ kesik silindiri, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x^2,y^2,z^2)$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z=2-x^2$, $z=x^2$, $y=0$, $z=y$ tarafından sınırlanan $E\subseteq\mathbb{R}^3$ bölgesinin topolojik sınırı, ve $f,g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathcal{C}^1$-sınıfından olmak üzere, $\mathbf{F}(x,y,z) := (x+f(y,z), y+g(x,z), z+h(x,y))$;

(d) $\mathcal{S}$ yüzeyi $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ elipsoidi, ve $\mathbf{F}(x,y,z) := (x|y|, y|z|, z|x|)$.

4. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve her ω 2-formu için, $\mathbf{n}$ vektörünü dışarıya-yönelmiş birim normal kabul ederek, $\iint_{\mathcal{S}} \omega$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi $y=x^2$, $z=0$, $z=1$, $y=4$ tarafından kapatılan üç-boyutlu bölgenin topolojik sınırı, ve $\omega := xyz\,dy\,dz + (x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx + (x+y+z)\,dx\,dy$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi $x^2+z^2\leqslant 1$, $y=0$ ve $x^2+z^2\leqslant 2$, $y=1$ diskleri ile birlikte göz önüne alınan $x^2-y^2+z^2=1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ kesik tek yapraklı hiperboloidi, ve $\omega := xy|z|\,dy\,dz + x^2|z|\,dz\,dx + (x^3+y^3)\,dx\,dy$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi $x^2+y+z^2=4$ ve $4x+y+2z=5$ tarafından sınırlanan $E\subseteq\mathbb{R}^3$ bölgesinin topolojik sınırı, ve $\omega := x+y^2+z^2\,dy\,dz + (x^2+y+z^2)\,dz\,dx + (x^2+y^2+z)\,dx\,dy$.

5. (a) Topolojik sınırı saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş bir parçalı düzgün eğri olan her E Jordan bölgesi için,

$$\mathrm{Alan}\,(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial E} x\,dy - y\,dx$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Descartes yaprağındaki[31] ilmik−yani, $t \in [0, \infty)$ için

$$\phi(t) := \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$$

parametrizasyonuna sahip eğri−tarafından kapatılan bölgenin alanını hesaplayınız.

(c) $\mathbb{R}^3$ içindeki bir E Jordan bölgesi için, (a) kısmında elde edilen sonucun bir benzerini bulunuz.

(d) Yarıçapları $a > b$ olan torusun[32] hacmini hesaplayınız.

6. (a) Eğer P ve Q fonksiyonlarının sürekli olmaları koşulu E bölgesinin bir noktasında zayıflatılırsa, Green Teoremi'nin geçerli olmadığını gösteriniz.

Yol gösterme: $E := B_1(\mathbf{0})$ olmak üzere, $P := y/(x^2 + y^2)$ ve $Q := -x/(x^2 + y^2)$ fonksiyonlarını göz önüne alınız.

(b) Eğer $\mathbf{F}$ fonksiyonunun sürekli olması koşulu E bölgesinin bir noktasında zayıflatılırsa, Gauss Teoremi'nin geçerli olmadığını gösteriniz.

7. V kümesi $\mathbb{R}^3$ içinde boştan farklı ve açık, ve $\mathbf{F} : V \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu $\mathcal{C}^1$-sınıfından olsun. $B_r(\mathbf{x}_0)$ açık topunun dışarıya-yönelmiş birim normali $\mathbf{n}$ olmak üzere, her $\mathbf{x}_0 \in V$ için

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(B_r(\mathbf{x}_0))} \iint_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

8. $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları diferansiyellenebilir olsun. Standart türev için geçerli olan çarpım ve toplam kurallarının rotasyonel ve diverjans 'türevleri' için benzerleri olan aşağıdaki özdeşlikleri kanıtlayınız:

(a) $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{G})$.

(b) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f \times \mathbf{F})$.

(c) $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F})$.

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$.

(e) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$.

9. $E \subseteq \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ***gradyant***ının[33]

$$\operatorname{grad} f := \nabla f := (f_x, f_y, f_z)$$

olarak tanımlandığı hatırlansın.

(a) Eğer f fonksiyonu $\mathbf{x}_0$ noktasında $\mathcal{C}^2$-sınıfından ise, $\operatorname{curl}\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ olduğunu ispatlayınız.

---

[31] Bkz. §2.1, Problem 9.
[32] Bkz. Örnek 2.3.6.
[33] Bkz. III/§2.2, S. 64.

(b) Eğer $\mathbf{F} : E \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu, E üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından ve $\mathbf{x}_0$ noktasında $\mathcal{C}^2$-sınıfından ise, $\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

(c) E kümesi Gauss Teoremi'nde verilen koşulları gerçeklesin, ve $\mathcal{C}^2$-sınıfından olan $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu E üzerinde harmonik (bkz. Problem 10 (d)) olsun. Eğer E üzerinde $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ ise, bu durumda

$$\iint_{\partial E} f\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_E \|\mathbf{F}\|^2\,dV$$

olduğunu kanıtlayınız.

10. $\mathbb{R}^m$ içinde bir küme E olsun. E üzerinde ikinci-mertebeden kısmî türevleri var olan her $u : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için, ***Laplace operatörü***[34]

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

olarak tanımlanır.

(a) Eğer u fonksiyonu E üzerinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından ise, E üzerinde $\Delta u = \nabla\cdot(\nabla u)$ olduğunu gösteriniz.

(b) (Birinci Green Özdeşliği). Eğer $E \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi Gauss Teoremi'nin hipotezlerini sağlıyorsa, bu durumda $\mathcal{C}^2$-sınıfından olan tüm $u, v : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$\iiint_E (u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v)\,dV = \iint_{\partial E} u\nabla v\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlayınız.

(c) (İkinci Green Özdeşliği). Eğer $E \subseteq \mathbb{R}^3$ kümesi Gauss Teoremi'nin hipotezlerini sağlıyorsa, bu durumda $\mathcal{C}^2$-sınıfından olan tüm $u, v : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$\iiint_E (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_{\partial E} (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

eşitliğinin geçerli olduğunu ispatlayınız.

(d) Bir $u : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, eğer E üzerinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından ise ve her $\mathbf{x} \in E$ için $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$ oluyorsa, E üzerinde ***harmonik***[35] olarak adlandırılır. E kümesi, Gauss Teoremi'nin koşullarını gerçekleyen, $\mathbb{R}^3$ içinde boştan farklı bir açık bölge olsun. Eğer u fonksiyonu E üzerinde harmonik ise, u fonksiyonu $\overline{E}$ üzerinde sürekli oluyorsa, ve ∂E üzerinde $u = \mathbf{0}$ gerçekleniyorsa, bu durumda $\overline{E}$ üzerinde $u = \mathbf{0}$ olduğunu kanıtlayınız.

(e) V kümesi $\mathbb{R}^2$ içinde açık ve boştan-farklı, u fonksiyonu V üzerinde $\mathcal{C}^2$-sınıfından, ve u fonksiyonu $\overline{V}$ üzerinde sürekli olsun. u fonksiyonunun V üzerinde harmonik olması için gerekli ve yeterli koşulun, Green Teoremi'nin hipotezlerini gerçekleyen iki-boyutlu her $E \subseteq V$ bölgesi için

$$\int_{\partial E} (u_x\,dy - u_y\,dx) = 0$$

eşitliğinin sağlanması olduğunu ispatlayınız.

---

[34] İki-boyutlu ***Laplace denklemi*** için: bkz. III/§2.2, Problem 21.
[35] İki-boyutlu harmonik fonksiyon için: bkz. III/§2.2, Problem 21.

2.6 Stokes Teoremi

Son temel teorem olarak, $\mathbb{R}^3$ içindeki, sınırları eğrilerle verilen yüzeyler için geçerli olan aşağıdaki sonucu göreceğiz.

Teorem 2.6.1 (Stokes Teoremi). *Birim normali* $\mathbf{n}$ *olan,* $\mathbb{R}^3$ *içinde* $\mathcal{C}^2$*-sınıfından bir yönlendirilmiş parçalı düzgün yüzey* $\mathcal{S}$ *olsun. Eğer* $\partial\mathcal{S}$ *sınırı pozitif olarak yönlendirilmiş* $\mathcal{C}^1$*-sınıfından bir parçalı düzgün eğri ve* $\mathbf{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ *fonksiyonu* $\mathcal{C}^1$*-sınıfından ise, o zaman*

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

gerçeklenir.

BÂRİZ YÜZEYLER İÇİN KANIT. Sâdelik açısından $\mathcal{S}$ yüzeyinin, Green Teoremi'nin hipotezlerini gerçekleyen iki-boyutlu bir E bölgesi üzerinde bulunan, $\mathcal{C}^2$-sınıfından bir bâriz yüzey olduğu varsayılsın. $\mathbf{F} := (P, Q, R)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından olsun ve istenen eşitliğin sol yanındaki eğrisel integral, diferansiyel notasyonu kullanılarak,

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_{\partial\mathcal{S}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

şeklinde yazılsın. Genelliği bozmaksızın $\mathcal{S}$ yüzeyinin, $\mathcal{C}^2$-sınıfından bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $(x, y) \in E$ olmak üzere $z = f(x, y)$ eşitliğiyle belirlendiği ve yukarıya-yönelmiş birim normal ile yönlendirilmiş olduğu kabul edilsin. Böylece, $\mathbf{N} := (-f_x, -f_y, 1)$ olmak üzere, $\mathbf{n} = \mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$ olur.

∂E eğrisinin saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş bir parçalı düzgün parametrizasyonu, $t \in [a, b]$ olmak üzere $(\psi(t), \sigma(t))$ olsun. Bu durumda, $t \in [a, b]$ için

$$\phi(t) := (\psi(t), \sigma(t), f(\psi(t), \sigma(t)))$$

olarak tanımlanan fonksiyon, $\partial\mathcal{S}$ sınırının pozitif olarak yönlendirilmiş bir parçalı düzgün parametrizasyonudur. Eğer $x = \psi(t)$, $y = \sigma(t)$, ve $z = f(\psi(t), \sigma(t))$ ise, o zaman $dx = \psi'(t)\,dt$, $dy = \sigma'(t)\,dt$, ve

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

olur. Tanım gereğince, o hâlde,

$$\int_{\partial\mathcal{S}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\partial E} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \qquad (2.6.1)$$

elde edilir. Şimdi, bu son integrale Green Teoremi'ni uygulayacağız. Zincir Kuralı ve türev için Çarpım Kuralı kullanılarak,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki ikinci-mertebeden kısmî türevler ise, $z = f(x, y)$ ile belirlenen f fonksiyonu $\mathcal{C}^2$-sınıfından olduğundan, eşittir. Buradan,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\
&\quad = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&\quad = \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, (2.6.1) eşitliği, Green Teoremi, ve §2.4 kısmındaki (2.4.1) eşitliği kullanıldığında,

$$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_E \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,d(x,y) = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

sonucuna ulaştırır. □

$\mathcal{S}$ yüzeyinin bir 'Green bölgesi' üzerinde bulunan bir bâriz yüzey olduğu varsayımı, kanıtı basitleştirmek için yapılmıştır. İfade edildiği şekliyle Stokes Teoremi'nin kanıtı için [23, Theorem 10.8] ve bunu izleyen referans kullanılabilir. Stokes Teoremi'nin bu türden sonlu tane bâriz alt-yüzeye bölünebilen yüzeyler için geçerli olduğu ise, kolayca gösterilebilir. Daha önceki durumlarda olduğu gibi ortak sınırlar, her seferinde farklı bir yönlendirilişle, ilgili integralde iki kez bulunurlar, ve bundan dolayı birbirlerini götürürler.

Stokes Teoremi, karmaşık eğrisel integralleri basit yüzey integralleriyle değiştirmek için kullanılabilir.

Örnek 2.6.2. y-ekseninin üzerinden ve uzaktan bakılarak görüldüğünde saat yelkovanının ters yönünde yönlendirilmiş $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ çemberi $\mathcal{C}$, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x^2 z + \sqrt{(x^3 + x^2 + 2)}, xy, xy + \sqrt{(z^3 + z^2 + 2)})$ olsun. Bu durumda $\operatorname{curl}\mathbf{F} = (x, x^2 - y, y)$ olduğundan, Stokes Teoremi'ni kullanmak $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$

eğrisel integralini hesaplamaktan çok daha kolaydır. $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 0$ diski $\mathcal{S}$ olsun, ve $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ olduğu gözlemlensin. Böylece, $\mathcal{C}$ eğrisi saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş olduğundan, $\mathcal{S}$ diskinin normali pozitif y-ekseninden öteye belirlenmek zorundadır: yani, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ olur. Buradan da, $\mathcal{S}$ üzerinde $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = x^2 - y = x^2$ gerçeklendiğinden, Stokes Teoremi kullanılarak

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_{\mathcal{S}} x^2\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.6.2'deki integral, sınırı $\mathcal{C}$ olan herhangi bir $\mathcal{S}$ yüzeyi seçilerek de hesaplanabilir. Stokes Teoremi, o hâlde, karmaşık yüzey integrallerini daha basit olanlarıyla değiştirmek için de kullanılabilir.

Örnek 2.6.3. Yukarıya-yönelmiş $\mathbf{n}$ birim normaline sahip $9x^2+4y^2+36z^2 = 36$, $z \geqslant 0$ yarı-elipsoidi $\mathcal{S}$, ve

$$\mathbf{F}(x, y, z) := (\cos x\sin z + xy, x^3, e^{x^2+z^2} - e^{y^2+z^2} + \tan(xy))$$

olsun. $\mathcal{C} := \partial\mathcal{S}$ olarak alınsın. Bu durumda hem $\mathcal{S}$ üzerinde $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ büyüklüğünün hem de $\mathcal{C}$ üzerinde $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ büyüklüğünün integrallerini hesaplamak zordur. Ancak, Stokes Teoremi'nden, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ büyüklüğünün $\mathcal{C}$ üzerindeki integrali, $\partial E = \mathcal{C}$ koşulunu sağlayan $\mathcal{C}^2$-sınıfından her E yüzeyinin üzerindeki $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ elemanının integraline eşittir. İki-boyutlu $9x^2 + 4y^2 \leqslant 36$ bölgesi E olsun. Bu durumda, E üzerinde $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ olur. Böylece, $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ vektörünün sadece üçüncü bileşenine, yani

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})_3 := \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos x\sin z + xy) = 3x^2 - x$$

skaler fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. Bu ise,

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_E (3x^2 - x)\,d(x, y)$$

olması demektir; $x = 2r\cos\theta$ ve $y = 3r\sin\theta$ denilip değişken dönüşümü yapılarak da,

$$\int_E (3x^2 - x)\,d(x, y) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (12r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta)6r\,dr\,d\theta = 18\pi$$

olarak bulunur.

Stokes Teoremi, karmaşık yüzey integrallerini basit eğrisel integrallerle değiştirmek için de kullanılabilir.

Örnek 2.6.4. $z = x^2+y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ kesik paraboloidi ile $x^2+y^2 = 1$, $1 \leqslant z \leqslant 3$ kesik silindirinin birleşimi $\mathcal{S}$, bu yüzey üzerindeki ve dışarıya-yönelmiş normal $\mathbf{n}$, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x + z^2, 0, -z - 3)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{S}$ yüzeyinin sınırı $x^2+y^2 = 1$, $z = 3$ ile belirlenir. Stokes Teoremi'ni kullanabilmek için, curl $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ eşitliğini sağlayan, yani

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x + z^2, \tag{2.6.2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \tag{2.6.3}$$

ve

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -z - 3 \tag{2.6.4}$$

koşullarını gerçekleyen, bir $\mathbf{G} := (P, Q, R) : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu bulunmalıdır. İlk olarak (2.6.2) eşitliğiyle başlanıp

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -x \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = z^2 \tag{2.6.5}$$

olarak alınsın. Bu durumda (2.6.5)'in sol yanı, bir $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $Q = -xz + g(x, y)$ olmasını gerektirir; benzer biçimde (2.6.5)'in sağ yanı ise, bir $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $R = z^2 y + h(x, z)$ eşitliğine ulaştırır. Böylece, $g \equiv \mathbf{0}$ ve $P_y = 3$ alınırsa $Q_x = -z + g_x$ fonksiyonunun (2.6.4) eşitliğini çözeceği, yani bir $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $P = 3y + \sigma(x, z)$ olacağı elde edilmiş olur. Bu ise, $\sigma = h \equiv \mathbf{0}$ olduğunda $P_z - R_x = \sigma_z - h_x$ fonksiyonunun (2.6.3) eşitliğini sağlayacağı anlamına gelir. O hâlde $P = 3y$, $Q = -xz$, ve $R = yz^2$, dolayısıyla $\mathbf{G} = (3y, -xz, yz^2)$ olur.

Şimdi, $\partial\mathcal{S}$ sınırı, $t \in [0, 2\pi]$ olmak üzere $\phi(t) := (\sin t, \cos t, 3)$ ile parametrize edilerek

$$(\mathbf{G} \circ \phi) \cdot \phi' = (3\cos t, -3\sin t, 9\cos t) \cdot (\cos t, -\sin t, 0) = 3\cos^2 t + 3\sin^2 t = 3$$

olduğu gözlemlenirse, Stokes Teoremi kullanılarak,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_0^{2\pi} 3\, dt = 6\pi$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.6.4, $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ koşulunu sağlayan bir $\mathbf{G}$ fonksiyonunun bulunmasını gerektirmiştir. Bu fonksiyon tek türlü belirli değildir: (2.6.5) yerine

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -z^2 \qquad \text{ve} \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = x$$

eşitlikleriyle de işe başlanabilir, ve bu durumda bir başka

$$\widetilde{\mathbf{G}}(x, y, z) = (zy, -(3x + z^3/3), xy)$$

çözümüne ulaşılır. Örnek 2.6.4 için kullanılan çözüm yöntemi ise, mükemmelen geçerlidir: Stokes Teoremi nedeniyle $\mathbf{G} \cdot \mathbf{T}$ fonksiyonunun eğrisel integrali, $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{C}^1$-sınıfından her $\mathbf{G}$ fonksiyonu için aynı olur.

Bu çözüm yöntemi, ancak, $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ kısmî türevli diferansiyel denklem sisteminin bir $\mathbf{G}$ çözümü var olduğunda işletilebilir. Var olmayan bir çözümü aramak gibi bir duruma meydan vermemek açısından, bu türden bir çözümün var olup olmadığının önceden belirlenmesi yararlı olur. Bunun nasıl yapılabileceğini görmek için, $\mathbf{G}$ fonksiyonunun bir E kümesi üzerinde $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{C}^2$-sınıfından bir fonksiyon olduğu varsayılsın. Bu durumda §2.5, Problem 9 (b) nedeniyle, E üzerinde $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ olur. Bir başka deyişle $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ koşulu, $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ denkleminin bir $\mathbf{G}$ çözümünün var olabilmesi için gereklidir. Aşağıdaki netice, yeterince 'iyi' E kümeleri için, ilgili koşulun aynı zamanda yeterli de olduğunu gösterir.

Teorem 2.6.5. *Ω, içi boş küme olmayan bir top ya da bir dikdörtgen olsun, ve $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun Ω üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından olduğu varsayılsın. Bu durumda, aşağıdaki üç önerme birbirine denktir:*

(i) *$\mathcal{C}^2$-sınıfından bir $\mathbf{G} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu, Ω üzerinde* $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ *olacak biçimde vardır.*

(ii) *Eğer E ve $\mathcal{S} := \partial E$ kümeleri Gauss Teoremi'nin hipotezlerini sağlıyorlarsa ve $E \subseteq \Omega$ ise, o zaman*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0 \tag{2.6.6}$$

gerçeklenir.

(iii) *Ω üzerindeki her noktada* $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ *özdeşliği sağlanır.*

Kanıt. Eğer (i) sağlanıyorsa, $\mathbf{G}$ fonksiyonunun birinci-mertebeden kısmî türevleri değişmeli olduklarından,[36] $\operatorname{div}\mathbf{F} = \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{G}) = 0$ olur. Bu ise, Gauss

[36] Bkz. III/Teorem 2.1.2.

Teoremi nedeniyle, (2.6.6) eşitliğinin sağlanması anlamına gelir. (Bu argüman, her Ω kümesi için geçerlidir.)

Eğer (ii) doğru ise, Gauss Teoremi ve §2.5, Problem 7 nedeniyle, her $\mathbf{x}_0 \in \Omega^\circ$ için

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{x}_0))} \iiint_{B_r(\mathbf{x}_0)} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_r(\mathbf{x}_0))} \iint_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece, $\operatorname{div}\mathbf{F}$ fonksiyonu Ω üzerinde sürekli olduğundan, Ω kümesinin her noktasında $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ eşitliğinin sağlandığı hükmüne varılır. (Bu argüman, üç-boyutlu her Ω bölgesi için geçerlidir.)

Son olarak, (iii) önermesinin gerçeklendiği varsayılsın. $\mathbf{F} := (p, q, r)$ olsun, ve sâdelik açısından $\mathbf{G} := (0, Q, R)$ olduğu kabul edilsin. Şimdi, $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ olması durumunda

$$R_y - Q_z = p, \qquad -R_x = q, \qquad Q_x = r \tag{2.6.7}$$

eşitlikleri sağlanır. Eğer Ω bir top ise, (x_0, y_0, z_0) noktası bu topun merkezi olsun; eğer Ω bir dikdörtgen ise, (x_0, y_0, z_0) bu dikdörtgen içindeki keyfî bir noktayı göstersin. Bu durumda her $(x, y, z) \in \Omega$ için, (x_0, y, z) ile (x, y, z) noktalarını birleştiren doğru parçası Ω kümesinin bir alt-kümesi olur. Dolayısıyla, (2.6.7) ile verilen son iki özdeşliğin x_0 noktasından x noktasına integrallerinin alınabileceği görülür, ve bunun sonucunda, bir $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar çifti için,

$$R = -\int_{x_0}^{x} q(u, y, z)\, du + g(y, z) \quad \text{ve} \quad Q = \int_{x_0}^{x} r(u, y, z)\, du + h(y, z)$$

olarak elde edilir. Böylece, integral işareti altında türev[37] alınarak (iii) koşulu kullanıldığında, (2.6.7)'deki ilk özdeşliğin

$$\begin{aligned}
p = R_y - Q_z &= -\int_{x_0}^{x} (q_y(u, y, z) + r_z(u, y, z))\, du + g_y - h_z \\
&= \int_{x_0}^{x} p_x(u, y, z)\, du + g_y - h_z = p(x, y, z) - p(x_0, y, z) + g_y - h_z
\end{aligned}$$

biçimine dönüştüğü görülür. (2.6.7) eşitliklikleri, o hâlde, $g_y = p(x_0, y, z)$ ve $h \equiv \mathbf{0}$ için çözülebilirdir; diğer bir ifadeyle,

$$Q = \int_{x_0}^{x} r(u, y, z)\, du \quad \text{ve} \quad R = \int_{y_0}^{y} p(x_0, v, z)\, dv - \int_{x_0}^{x} q(u, y, z)\, du$$

[37] Bkz. III/Teorem 2.1.6.

olarak elde edilir. □

Açıklama 2.6.6. Teorem 2.6.5, bir $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ noktasının, her $(x, y, z) \in \Omega$ için $L((x_0, y, z); (x, y, z))$ ve $L((x_0, y_0, z); (x_0, y, z))$ doğru parçalarının ikisi de Ω kümesinin alt-kümeleri olacak şekilde bulunabildiği her üç-boyutlu Ω bölgesi için geçerlidir. Aşağıdaki örnek, Ω kümesi üzerinde bir kısıtlama olmadığında Teorem 2.6.5'in genel olarak doğru olmadığını gösterir.

Örnek 2.6.7. $\mathbb{R}^3$ içinde, $\Omega := B_1(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, ve $w := w(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ olmak üzere

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \Big(\frac{x}{w^{3/2}}, \frac{y}{w^{3/2}}, \frac{z}{w^{3/2}}\Big)$$

olsun. Bu durumda, tanım kullanılarak,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{w^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{w^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{w^{5/2}} = 0$$

olduğu görülür.

Dışarıya-yönelmiş birim normal ile yönlendirilmiş $\partial B_1(\mathbf{0})$ birim küresi $\mathcal{S}$ ile gösterilerek, $\operatorname{curl} \mathbf{G} = \mathbf{F}$ sağlanacak biçimde bir $\mathbf{G}$ fonksiyonunun var olduğu kabul edilsin. Bir taraftan bu, $\mathcal{S}$ üzerinde $\mathbf{F} = (x, y, z) = \mathbf{n}$ eşitliğinin sağlanması $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ olmasını gerektirdiğinden,

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{1} \, dA = \sigma(\mathcal{S}) = 4\pi \tag{2.6.8}$$

değerinin elde edilmesi anlamına gelir. Ancak diğer taraftan, $\mathcal{S}$ yüzeyi $\mathcal{S}_1$ üst yarıküresine ve $\mathcal{S}_2$ alt yarıküresine bölünerek Stokes Teoremi kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \int_{\partial \mathcal{S}_1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}_1 \, ds + \int_{\partial \mathcal{S}_2} \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}_2 \, ds = 0\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

değerine ulaşılır−son eşitlik, $\partial \mathcal{S}_1 = \partial \mathcal{S}_2$ ve $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}_2$ olmasından kaynaklanır. Böylece, (2.6.8) ve (2.6.9) ile elde edilen değerler aynı olmadıklarından, yapılan varsayımın yanlış olduğu, yani $\operatorname{curl} \mathbf{G} = \mathbf{F}$ olacak biçimde bir $\mathbf{G}$ fonksiyonunun var olmadığı görülmüş olur.

Problemler

1. Aşağıda verilen her $\mathcal{C}$ eğrisi ve $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{C}$ eğrisi, pozitif z-ekseninin üzerinde uzaktan görüldüğünde saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş, $x^2 + y^2 = 1$ silindiri ile $z = -x$ düzleminin arakesiti, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (xy^2, 0, xyz)$;

(b) $\mathcal{C}$ eğrisi, pozitif z-ekseninden yukarıya doğru uzaktan görüldüğünde saat yelkovanı yönünde yönlendirilmiş, $z = y^3$ kübik silindiri ile $x^2 + y^2 = 3$ dairesel silindirinin arakesiti, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (e^x + z, xy, ze^y)$.

2. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, $\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi $y = x^2$ ile $z = 1 - y$ tarafından sınırlanan, $z \geqslant 0$ üst yarı-uzayının içindeki 'tabanı' olmayan yüzey, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x \sin(z^3), y \cos(z^3), x^3 + y^3 + z^3)$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = 3 - x^2 - y^2$, $z \geqslant 0$ ile belirlenen kesik paraboloid, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (y, xyz, y)$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = \sqrt{(10 - x^2 - y^2)}$ yarıküresi, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, x, x^2 y^3 \ln(z + 1))$;

(d) $\mathcal{S}$ yüzeyi $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y + 3z = 1$, $z \geqslant 0$ ile sınırlanan, $z \geqslant 0$ üst yarıuzayındaki 'tabanı' olmayan dörtyüzlü, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (xy, yz, zx)$.

3. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve $\mathbf{F}$ fonksiyonu için, Stokes Teoremi'ni ya da Gauss Teoremi'ni kullanarak, $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (xz^2, x^2 y - z^3, 2xy + y^2 z)$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = y$ düzleminin $B_1(\mathbf{0})$ topunun içinde kalan parçası, $\mathbf{n}$ vektörü yukarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (xy, xz, -yz)$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi $y = 2\sqrt{(x^2 + z^2)}$, $2 \leqslant y \leqslant 4$ ile belirlenen kesik koni, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x, -2y, z)$;

(d) $\mathcal{S}$ yüzeyi $z = 4 - x^2 - y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$ ve $z = x^2 + y^2 - 4$, $-4 \leqslant z \leqslant 0$ kesik paraboloidlerinin birleşimi, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (x + y^2 + \sin z, x + y^2 + \cos z, \cos x + \sin y + z)$;

(e) $\mathcal{S}$ yüzeyi belirleyicileri $z = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 2)$, $2 = x^2 + y^2$ $(2 \leqslant z \leqslant 5)$, ve $z = 7 - x^2 - y^2$ $(5 \leqslant z \leqslant 6)$ olan üç yüzeyin birleşimi, $\mathbf{n}$ vektörü dışarıya-yönelmiş birim normal, ve $\mathbf{F}(x, y, z) := (2y, 2z, 1)$.

4. Aşağıda verilen her $\mathcal{S}$ yüzeyi ve her ω 2-formu için, Stokes Teoremi'ni ya da Gauss Teoremi'ni kullanarak, $\int_{\mathcal{S}} \omega$ integralini hesaplayınız:

(a) $\mathcal{S}$ yüzeyi, dışarıya-yönelmiş normale sahip, $y^2 + z^2 \leqslant 9$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ silindirik katı cisminin topolojik sınırı, ve $\omega := xy\, dy\, dz + (x^2 - z^2)\, dz\, dx + xz\, dx\, dy$;

(b) $\mathcal{S}$ yüzeyi, dışarıya-yönelmiş normale sahip $x^2 + z^2 = 8$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ kesik silindiri, ve $\omega := (x - 2z)\, dy\, dz - y\, dz\, dx$;

(c) $\mathcal{S}$ yüzeyi, dışarıya-yönelmiş normale sahip, $R := [0, \pi/2] \times [0, 1] \times [0, 3]$ katı cisminin topolojik sınırı, ve $\omega := e^y \cos x\, dy\, dz + x^2 z\, dz\, dx + (x + y + z)\, dx\, dy$;

(d) $\mathcal{S}$ yüzeyi, pozitif x-ekseninden öteye yönelmiş normale sahip olan, $2x^2 + z^2 \leqslant 1$ ile belirlenen eliptik-silindir-biçimli katı cisimle $x = y$ düzleminin arakesiti, ve $\omega := x\,dy\,dz - y\,dz\,dx + \sin y\,dx\,dy$.

5. Green Teoremi'nin Stokes Teoremi'nin bir sonucu olduğunu ispatlayınız.

6. Birim normali $\mathbf{n}$ olan, $\mathbb{R}^3$ içinde bir düzlem Π, ve $\mathbf{x}_0 \in \Pi$ olsun. Her $r > 0$ için, Π düzleminin içinde bulunan, $\mathbf{x}_0$ merkezli ve r yarıçaplı disk $\mathcal{S}_r$ ile gösterilsin; diğer bir ifadeyle, $\mathcal{S}_r := B_r(\mathbf{x}_0) \cap \Pi$ olarak alınsın. Eğer $\mathbf{F} : B_1(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu $\mathcal{C}^1$-sınıfından ise ve $\partial\mathcal{S}_r$ sınırı $\mathbf{n}$ tarafından belirlenen yönlendirilişe sahipse, bu durumda

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{n} = \lim_{r\to 0+}\frac{1}{\sigma(\mathcal{S}_r)}\int_{\partial\mathcal{S}_r}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

olduğunu kanıtlayınız.

7. $\mathcal{S}$, birim normali $\mathbf{n}$ olan, ve boş küme olmayıp Stokes Teoremi'nin hipotezlerini gerçekleyen $\partial\mathcal{S}$ sınırına sahip bir yönlendirilebilir yüzey olsun.

(a) $\mathbf{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^1$-sınıfından, $\partial\mathcal{S}$ sınırı düzgün, ve $\mathbf{n}$ tarafından $\partial\mathcal{S}$ üzerinde belirlenen birim teğet vektör $\mathbf{T}$ olsun. Eğer hiçbir $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathcal{S}$ için $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ vektörleri arasındaki açı geniş değilse ve $\iint_{\mathcal{S}}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$ oluyorsa, bu durumda her $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathcal{S}$ için $\mathbf{T}(\mathbf{x}_0)$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ vektörlerinin ortogonal olduklarını kanıtlayınız.

(b) Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan $\mathbf{F}_k : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonlarından oluşan bir $(\mathbf{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\mathcal{C}^1$-sınıfından olan bir $\mathbf{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonuna $\partial\mathcal{S}$ üzerinde düzgün yakınsıyorsa, bu durumda

$$\lim_{k\to\infty}\iint_{\mathcal{S}}\operatorname{curl}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{S}}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlayınız.

8. İki-boyutlu bir E bölgesi, $(x, y) \in E$ olduğunda, $(0, 0)$ ve $(x, 0)$ noktalarını ve $(x, 0)$ ve (x, y) noktalarını birleştiren doğru parçalarının ikisinin de E kümesinin alt-kümeleri olma özelliğine sahip olsun. Eğer $\mathbf{F} : E \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $\mathcal{C}^1$-sınıfından ise, aşağıdaki üç önermenin birbirine denk olduklarını kanıtlayınız:

(a) Bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, E üzerinde $\mathbf{F} = \nabla f$ olacak biçimde vardır.

(b) $\mathbf{F} =: (P, Q)$ vektör fonksiyonu ***tam***dır; yani, E üzerinde $Q_x = P_y$ gerçeklenir.

(c) Ω kümesi Green Teoremi'nin hipotezlerini sağlayan iki-boyutlu bir bölge ve $\Omega \subseteq E$ olmak üzere, saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş parçalı düzgün her $\mathcal{C} := \partial\Omega$ eğrisi için $\int_{\mathcal{C}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = 0$ olur.

9. Ω bir üç-boyutlu bölge ve $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu Ω üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından olsun. Ayrıca, her $(x, y, z) \in \Omega$ için, $L((x, y, 0); (x, y, z))$ ve $L((x, 0, 0); (x, y, 0))$ doğru parçalarının ikisinin de Ω kümesinin alt-kümeleri oldukları varsayılsın. Aşağıdaki önermelerin birbirine denk olduklarını kanıtlayınız:

(a) $\mathcal{C}^2$-sınıfından bir $\mathbf{G} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu, Ω üzerinde $\operatorname{curl}\mathbf{G} = \mathbf{F}$ olacak biçimde vardır.

(b) Eğer E ve $\mathcal{S} := \partial E$ kümeleri ve $\mathbf{F}$ vektör fonksiyonu Gauss Teoremi'nin hipotezlerini sağlıyorlarsa ve $E \subseteq \Omega$ ise, o zaman

$$\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = 0$$

gerçeklenir.

(c) Ω üzerindeki her noktada $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ özdeşliği sağlanır.

10. E kümesi Gauss Teoremi'nin, $\mathcal{S}$ kümesi ise Stokes Teoremi'nin hipotezlerini sağlasın.

(a) Eğer $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{C}^2$-sınıfından ise ve $\mathcal{S}$ üzerinde $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ oluyorsa,

$$\iint_{\partial \mathcal{S}} (f\mathbf{F}) \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$$

olduğunu ispatlayınız.

(b) Eğer $\mathbf{G} : E \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu $\mathcal{C}^2$-sınıfından ise ve E üzerinde $\mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{G}$ oluyorsa,

$$\iint_{\partial \mathcal{S}} (f\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{F}\, dV$$

olduğunu ispatlayınız.

Yol gösterme: §2.5, Problem 8 ve Problem 9 kullanılabilir.

11. $\mathbf{F}$ vektör fonksiyonu $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ üzerinde $\mathcal{C}^1$-sınıfından ve tam (bkz. Problem 8 (b)) olsun.

(a) $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$, saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş, ayrık, düzgün, ve basit eğriler, ve E, topolojik sınırı olan ∂E kümesi $\mathcal{C}_1$ ve $\mathcal{C}_2$ eğrilerinin birleşimi olan iki-boyutlu bir bölge olsun. (Bunun anlamı E bölgesinin, $\mathcal{C}_j$ eğrilerinden birinin dış sınırı ve diğerinin iç sınırı olduğu, bir delik içermesidir.) Eğer $\mathbf{0} \notin E$ ise, bu durumda

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

eşitliğinin sağlandığını kanıtlayınız.

(b) İki-boyutlu E bölgesi için $\mathbf{0} \in E^\circ$ olsun. Eğer ∂E, saat yelkovanının tersine yönlendirilmiş bir düzgün basit eğri, ve

$$\mathbf{F}(x, y) := \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

ise, $\int_{\partial E} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ integralini hesaplayınız.

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ üzerinde tanımlı $\mathbf{F}$ fonksiyonları, üç-boyutlu bölgeler, ve düzgün yüzeyler için, (a) kısmında elde edilen sonucun bir benzerini ifade ve ispat ediniz.

Kaynakça

[1] Mustafa A. Akcoglu, Paul F.A. Bartha & Dzung Minh Ha, *Analysis in Vector Spaces*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2009.

[2] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd edition, Addison Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1974.

[3] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, 2nd edition, Springer, 1997.

[4] Ralph P. Boas, Jr., *A Primer of Real Functions*, 4th edition (revised and updated by Harold P. Boas), The Carus Mathematical Monographs, No. 13, The Mathematical Association of America, Inc., 1997.

[5] R.C. Buck, *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[6] S. Dineen, *Functions of Two Variables*, Chapman & Hall/CRC Mathematics, 2000.

[7] H. Dym, *Linear Algebra in Action*, GSM, Vol. 78, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[8] W. Fleming, *Functions of Several Variables*, 2nd edition, Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), New York, 2004.

[9] Gerald B. Folland, *Advanced Calculus*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2002.

[10] Hubert B. Griffiths, *Surfaces*, 2nd edition, Cambridge University Press, London and New York, 1981.

[11] W. Kaplan, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1984.

[12] Witold A.J. Kosmala, *A Friendly Introduction to Analysis*, 2nd edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004.

[13] T.W. Körner, *A Companion to Analysis. A Second First and First Second Course in Analysis*, GSM, Vol. 62, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[14] Steven G. Krantz & Harold R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, 2nd edition, Birkhäuser Boston, 2002.

[15] S. Lang, *Calculus of Several Variables*, 3rd ed., Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), New York, 1987.

[16] William F. Osgood, "A Jordan curve of positive area," *Trans. Amer. Math. Soc.* **4** (1903), no. 1, 107-112.

[17] William R. Parzynski & Philip W. Zipse, *Introduction to Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.

[18] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[19] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, HarperCollins Publishers, 1965.

[20] Karl R. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[21] T. Terzioğlu, *An Introduction to Real Analysis*, Matematik Vakfı, İstanbul, 2000.

[22] E.B. Vinberg, *A Course in Algebra*, GSM, Vol. 56, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[23] William R. Wade, *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[24] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis, Vol. I & Vol. II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2004.

Dizin