Ali Nesin

Fen Liseleri İçin Matematik 1

Kümeler Kuramı 1

İçindekiler

Önsöz 1

1 Kümeler ve Ögeleri **5**

2 Boşküme **27**

3 Altküme **31**

4 Kümesel İşlemler **41**
4.1 Bileşim 41
4.2 Kesişim 44
4.3 Bileşim ve Kesişim 46
4.4 Kümelerin Farkı 49
4.5 Kümelerin 01-Tablosu 53
4.6 Simetrik Fark 59
4.7 Evrensel Küme ve Tümleyen 62

5 Birkaç Küme Yazılım Biçimi **71**

Kaynakça ve Okuma Listesi **74**

Önsöz

Milli Eğitim Bakanı Nabi Avcı Matematik Köyü'nü ziyaret ettiği bir gün, sohbet esnasında bir ara liseliler için bir matematik ders kitabı yazmamı önerdi. Hemen kabul ettim tabii. Liselerde okunacak bir matematik kitabı yazmayı görev sayarım. Üstelik zaten gençlere yönelik yazdığım onlarca kitap, yüzlerce popüler yazı var, bunların bir kısmını bir lise ders kitabı olarak gözden geçirip düzenlemem pek zor olmazdı. Ne büyük yanılgı! Şimdi düşünüyorum da, hayatımda bildiğimi sandığım bir konuda hiç bu kadar büyük bir yanılgıya düşmedim. Meğer bir lise kitabı yazmak ne kadar zormuş, hatta iyisini yazmak imkânsızmış! Bu zorluklardan bahsetmezsem olmaz çünkü bu zorluklar bu kitabın bel kemiği.

Kitabı ne tür liseli için yazacaktım? Çünkü liseli var, liseli var. Meraklısı var, umursamazı var. Temeli sağlam olanı var, çürük olanı var. Matematiği seveni var, matematikten nefret edeni var. Entelektüel heyecan arayanı var, daha maddi ödüllerle tatmin olanı var. Soyut kavramlarda zorlananı var, ayakları yere değmeyeni var. Çalışkanı var, tembeli var. Acarı var, aklı havada olanı var. İnatçısı var, kolay teslim olanı var. Çeşit çeşit liseli var. Kitabın seviyesini tutturmak için uzun süre cebelleştim. Sanırım lise 1 seviyesinde 1,5-2 milyon kadar öğrenci vardır Türkiye'de. Sonunda, bu kadar çok ve çeşitli öğrenci için tek bir kitap yazılamayacağını idrak ettim. Bu kadar çok öğrenciye tek bir kitap sunmanın ülkeye ancak kötülük olacağına kanaat getirdim. Hatta bu kadar çok ve çeşitli öğrenci için tek bir müfredat ve eğitim sistemi bile doğru değil ama neyse, konumuz bu değil... Seslendiğim kitleyi kısıtlayıp, bir fen lisesi öğrencisine ya da bir fen lisesi öğrencisi kadar meraklı gençlere seslenmeliydim.

Bu da kolay olmadı. Tecrübe gösterdi ki her fen lisesi bir olmadığı gibi, her fen liseli de bir olmuyor. Kendimi daha da kısıtlayıp, temel bilimlerde ilerlemek isteyen meraklı fen lisesi öğrencisi için yazmaya karar verdim.

Başka zorluklarla da karşılaştım. Doğal olarak müfredata bağlı kalmalıydım. Nabi Bey bu konuda bana kısmi bir özgürlük sağlamıştı, hatta gerekirse müfredatı değiştirebileceklerini bile çıtlatmıştı ama gene de müfredattan çok ayrılamazdım. Müfredatı gözden geçirdim. Aynı sınıfın müfredatında kümeler de var, sayılar da, istatistik de, geometri de... Bir kitapta bu kadar farklı konu olamaz ki... Her kitabın bir bütünlüğü, belirli ve sabit bir konusu olmalıdır, aksi halde tatsız tuzsuz bir kitap ortaya çıkar. (Ama neyse ki bir iki yıl sonra raflardan kalkar, unutulur gider.) Ayrıca, biraz ondan biraz bundan bahsedince aslında hiçbir şeyden bahsedilmez. Birbirinden çok farklı konuların tek bir kitapta toplanması doğru değil, hem kitabın bütünlüğü açısından doğru değil, hem de kitabın varabileceği hacim açısından doğru değil. "Lise 1 Matematik" diye bir kitap başlığı bana giderek daha absürt gelmeye başladı, "Lise 1 Matematik" diye bir konu yoktur çünkü, dolayısıyla kitabı da olamaz! Böylece her konuda ve her seviyede ayrı bir kitap yazmaya karar verdim. (Bu dediğim örneğin tarih kitapları için de geçerli olmalı. "Tarih" diye bir kitap olamaz, olmamalı, ama "Ortaçağ Avrupası Tarihi" diye bir kitap olabilir mesela.)

Zorluklar bu kadarla kalmadı: Müfredatta, anlatılması gereken konular söylendiği gibi, anlatılmaması gereken konular da söyleniyor! Bu talimata uymam söz konusu bile olamazdı. Daha neler!

Sonuç? Müfredatı bir yana bırakıp, meraklı bir fen lisesi öğrencisinin bilmesi gerektiğini düşündüğüm farklı konularda ve derinlikte farklı kitaplar yazmaya karar verdim. Elinizdeki bu kitap bir dizi kitabın birincisidir. Sadece kümeler kuramını ele alır ve kümeler kuramının ilk kitabıdır. Belli bir zihinsel olgunluk dışında herhangi bir önbilgi gerektirmemektedir. İleride, bir başka kitapta kümeler kuramının daha derinlerine ineceğiz.

Dizinin ilk kitabı olduğundan elinizdeki kitap lise 1 fen lisesi öğrencilerine uygun olmalı, en azından ben öyle düşünüyorum. Bu demek değildir ki öğretmen sınıfta kitaptaki her konudan bahsetmeli ya da öğrenci kitabı satır satır okumalı. Kitabın her sayfasından sınıfta söz edilmesi hiç doğru olmaz, o kadar çok zaman yok. Eğer sınıfında kitabı okutmaya cesaret eden öğretmen olursa, birçok konuyu, örneği ve alıştırmayı atlayabilir. Öğrenci o konuları kendi evinde isterse ve meraklıysa okur. Kitabın bazı bölümleri daha ileri sınıflarda da okutulabilir.

Müfredattan değil, matematiğin özünden kaynaklanan çok daha ciddi bir başka zorukla da karşılaştım. Bilindiği üzere matematik tamamen zihinsel bir uğraştır. İstisnasız tüm matematiksel kavramlar zihinseldir. Örneğin matematiksel 1 sayısı ile hissettiğimiz 1 sayısı aslında birbirinden apayrı şeylerdir; matematiksel 1 sayısı $\{0\}$ kümesi olarak tanımlanır (başka türlü de tanımlanabilirdi!) ve bu tanımın 1 sayısının pratikteki anlamıyla ilişkisi bayağı muğlaktır, ne de olsa 1 sayısı pratikte bir niceleme sıfatıdır ama matematiksel 1, yani $\{0\}$ kümesi, bir sıfat olmaktan bir hayli uzaktır.

Elbette matematiksel kavramlar somut olaylardan ve somut dünyadan kaynaklanır, elbette somut olayları algılamak için görme, işitme gibi duyularımızdan yararlanırız, elbette matematiksel kavramları sezgilerimizi kullanarak yaratıp içselleştiririz, ama kavramın kaynağı ve kavramı içselleştirme süreci başka, kavramın kendisi başka. Bir liseliye matematiği tamamen zihinsel bir faaliyet olarak anlatmak makul bir davranış değildir, aklı başında kimse böyle bir uğraşa yeltenmez. Yaklaşık 4000 yıllık bir sürecin sonucunu birkaç yılda öğrenciye aktarmak mümkün değildir çünkü. Demek ki bir lise matematik kitabı yazarı, sadece matematiği değil, matematiğin keşif sürecini de anlatmalı, hatta matematikten ödün verip keşif sürecini öne çıkarmalı. Paradoks gibi gelecek ama matematik anlatırken bir liseliye illa ki yalan söylenmeli. Mesela bir lise matematik kitabında 1 sayısı $\{0\}$ kümesi olarak tanımlanmamalı, 1 sayısının ne olduğunu öğrencinin sezgileriyle bildiği varsayılmalı. Pedagoji diye bir şey var nihayetinde! Yalan söylemeyi kabullendikten sonra yalanın dozunu ayarlamak gerekiyordu, bu konuda da bayağı zorluk çektim. Çok yazıp bozdum, çok bocaladım, çok iki arada bir derede kaldım. Yalanı asgariye indirdiğime inanıyorum. Hiç olmazsa yalansız dolansız matematik için başvurulması gereken kaynakları gösterdim.

Yıllardan beri öğrencilerle öğretmenlerin bazı tebelleş sorularıyla muhatap olurum. İşte o sorulardan bazıları: 0 bir sayı mıdır? $0/0$ niye tanımsızdır? 0^0 kaçtır? $0!$ sayısı niye 1'e eşittir? En büyük sayı ∞ mudur? Ayrıca, bu tür sorulara cevap vermeye çalıştım.

Kitapta matematik tarihinden sözettim biraz. Sadece kitabı neşelendirsin diye değil, başlı başına ilginç bir konu olduğundan ve genel kültürümüzün bir parçası olması gerektiğine inandığımdan.

Araya araştırmaya özendiren notlar ve alıştırmalar serpiştirdim, bilinmeyen sorulardan bahsettim. Bir öğrenci kendini unutup günlerce o sorulardan birine yoğunlaşırsa kitap amacına ulaşmış demektir.

En önemlisi elimden geldiğince tanımın ve kanıtın önemini vurgulamaya çalıştım. Bunu her zaman yapamadım çünkü yukarıda da belirttiğim gibi arada bir okurdan gerçekleri gizlemek zorunda kaldım. Ama birçok yerde tanımın ve kanıtın hakkını teslim ettiğimi düşünüyorum. Tanım yoksa kanıtlanacak cümle anlamsızlaşır ve dolayısıyla kanıt mümkün olmaz. Kanıtı atarsak da matematikten geriye sadece bir olgular dizisi kalır. Kanıtsız bir matematik kitabının ise bir telefon rehberinden pek bir farkı yoktur!

Matematik soyuttur, simgeseldir, x'ler, y'ler filan vardır, ama matematik bir simgeler dizisi olarak sunulmaz, sunulursa da anlaşılmaz olur. Bir matematik kitabında uzun açıklamalar olmalı, yani kaydadeğer miktarda metin olmalı. Okurun kitaptaki metin eksikliğinden yakınacağını hiç sanmıyorum.

Kitabın elbette bazı eksiklikleri vardır, ne de olsa hayatımda hiç bir lisede öğretmen olarak çalışmadım, öğretmenlerin karşılaştıkları sorunlardan bihaber olabilirim. Bu eksiklerden biri ve en önemlisi standart alıştırma eksikliği olabilir. Mesela üniversite sınavlarında çıkacak soruları hiç kale almadım. Bu tür eksiklikleri öğretmen ve öğrenci başka kaynaklardan giderebilir. Eksikliklerim konusunda beni de bilgilendirirseniz sevinirim (anesin@nesinvakfi.org).

Bu ilk kitapta modern matematiğin en temel direği olan kümelerle tanışacağız. Daha sonraki kitaplarda burada gördüğümüz kavramların bol bol uygulamalarını göreceğiz ve ayrıca bu kavramları daha da geliştirip genelleştireceğiz.

Küçük puntoyla yazılmış olan notlar, örnekler ve alıştırmalar korkarım ana metinden daha eğlenceli ve eğitici. Öğrenciye o küçük puntoyla yazılmış metne önem vermesini tavsiye ederim.

Kümeler kuramını "sezgisel" bir biçimde ele alacağız. Kümeler kuramı [N2] ve [N3] ders notlarında çok daha matematiksel olarak (ve çok daha ileri düzeyde) ele alınmıştır. Dileyen okur o ders notlarına uygun bir zamanında (bu kitapları okuduktan sonra ama!) göz atabilir.

Kitabı neden MEB'e sunmayıp da Nesin Yayınevi'nde basmayı tercih ettiğime gelince... Her şeyden önce kitabı MEB'e sunsaydım, muhtemelen kabul edilmeyecekti. Bazı haklı ve bazı haksız nedenlerden... Hele Nabi Bey bakanlıktan ayrıldıktan sonra kanaatimce hiç şansı yoktu. Kitap kabul edilmeseydi herhangi bir sorun olmazdı, yine Nesin Yayınevi'nden basardık. Asıl büyük sorunu kitap kabul edilseydi yaşardım. Hakkımda söylenmedik laf, atılmamış iftira kalmazdı. Biliyorum, çünkü kitap daha yazılmadan, kitabın sipariş edildiği haberi duyulur duyulmaz sosyal medyada iğrenç iftiralar ve hakaretler dolaşmaya başladı. Bir ders kitabının önsözünde bile olsa, ülkemizin bu aşırı politikleşmesinden had safhada gına geldiğini özellikle belirtmek istiyorum.

Kitapları baştan sona okuyup çeşitli öneriler getiren, düzeltmeler yapan, alıştırmalar öneren Mustafa Yağcı ve Ali Törün'e teşekkür etmek yetmez bile. Kitabın ilk taslağını internetten indirip düzeltmeler yapan onlarca adsız öğretmene de teşekkürü borç bilirim. Son olarak, bu kitap dizisinin yazılmasına önayak olan dostum Nabi Avcı'ya müteşekkir olduğumu belirtirim.

Ali Nesin / 8 Ağustos 2017

1. Kümeler ve Ögeleri

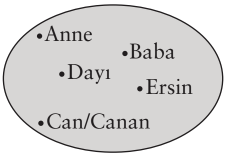
Birtakım nesnelerden oluşan topluluklara matematikte ***küme*** adı verilir. Örneğin şu anda içinde bulunduğunuz sınıfı bir öğrenci kümesi olarak düşünebilirsiniz. Okulunuzu da, eğer isterseniz, sınıflardan oluşan bir küme olarak görebilirsiniz. Elbise dolabınızı, elbiselerinizi içeren bir küme olarak algılayabilirsiniz. Yaşadığınız mahalle de insanlardan oluşan bir küme olarak görülebilir. İçinde bulunduğunuz ilçeyi isterseniz insanlardan, isterseniz mahallelerden, isterseniz evlerden oluşan bir küme olarak görebilirsiniz, seçim sizin, ama böylece bir değil, üç farklı küme elde edersiniz. Marangoz için kütüphane raflardan oluşan bir kümedir belki, ama kütüphaneyi kullanacak kişi için kütüphane kitaplardan oluşan bir kümedir. Raflardan oluşan kütüphane kümesi, tabii ki kitaplardan oluşan kütüphane kümesine eşit değildir.

Örneklerimizi çoğaltalım. Bir futbol takımı 11 oyuncudan oluşan bir küme olarak görülebilir. Eğer yedekleri de sayarsak, futbol takımı kümesinin "öge" sayısı artar. Antrenörü, doktoru, masörü filan da hesaba katarsak, futbol takımı kümesinin öge sayısı daha da artabilir. Ama her değişiklikte yeni bir küme elde ederiz.

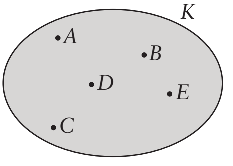
Bir teknisyen bir treni vagonlardan ve lokomotiften oluşan bir küme olarak görmek isteyebilir ama bir biletçi aynı treni yolculardan oluşan bir küme olarak görmeyi tercih edebilir, bakış açısına göre değişir. Önemli olan kümeyi oluşturan nesneleri, yani kümenin ögelerini belirlemektir. Tabii kümenin ögeleri değişince küme de değişir, trenin vagonlarından oluşan küme, trenin yolcularından oluşan kümeye eşit değildir.

Sonuç olarak bir küme, bazı nesnelerden oluşan bir topluluktur. Aslında küme sözcüğüyle topluluk sözcüğü arasında bir fark yoktur, "küme", "topluluk" sözcüğünün matematikçesidir; topluluklara matematikte "küme" denir.

Basit bir örnek ele alalım. Diyelim evinizi, içinde yaşayanlardan oluşan bir küme olarak görmek istiyorsunuz ve diyelim evinizde anneniz, babanız, dayınız, kardeşiniz (Ersin) ve siz (Can ya da Canan) yaşıyorsunuz. Demek ki evinizde toplam beş kişi yaşıyor. Bunu bir şekille şöyle gösterebiliriz:

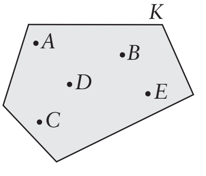


Bu kümenin beş ***ögesi*** vardır: Anne, baba, dayı, Ersin kardeş ve siz (yani Can ya da Canan). Anneyi A ile, babayı B ile, dayıyı D ile, Ersin kardeşi E ile ve sizi de Can'ın ya da Canan'ın C'si ile gösterelim. Son olarak, kümeye K adını verelim. Bu durumda kümemizi daha basit bir biçimde gösterebiliriz:



K kümesinin beş ögesi var: A, B, C, D ve E.

Kümeyi oluşturan kişileri yuvarlak bir çerçeve içine aldık, isteseydik kare ya da üçgen bir çerçeve içine de alabilirdik, önemli olan kümenin ögelerinin bir çerçeve içine alınmış olması. Aşağıda kümeyi beşgen içine almışız.



Kümenin nasıl gösterildiği hiç önemli değildir, yeter ki anlaşılır bir şekil olsun. Çizmesi kolay olsun diye kümeler daha çok bir ovalle (yumurta biçiminde bir şekille) gösterilir.

Kümeleri simgeleyen bu tür şekillere ***Venn diyagramı*** adı verilir. Aynı şekil üzerinde birden fazla küme gösterildiğinde Venn diyagramları daha eğlenceli olur. (Ama küme sayısı çok artarsa eğlencenin tadı kaçar!) İleride örnekler vereceğiz.

Eğer şekil çizmek zor geliyorsa, ki bazı durumlarda gerçekten zor olabilir, bu küme şöyle gösterilebilir:

$$K = \{A, B, C, D, E\}.$$

Sağ ve soldaki fiyakalı parantezlere ***küme parantezleri*** adı verilir, birincisi açan küme parantezidir, diğeri ise kapatan küme parantezi.

Anlamışsınızdır, bir kümeyi oluşturan nesnelere ***öge*** denir. Bazen öge yerine ***eleman*** da denir; biz genellikle bu kitapta birinci terimi tercih edeceğiz.

Küme yazarken ögelerin yazılış sırası önemli değildir, örneğin yukarıdaki kümeyi

$$K = \{E, C, B, A, D\}$$

olarak da gösterebilirdik. Ama ögelerden birini yazmazsak ya da fazladan bir öge (evimize taşınan yengeyi mesela) eklersek, o zaman başka bir küme elde ederiz.

Bazı kitaplarda, "bir küme, iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur" yazar ama bu tam doğru değildir, ya da şöyle söyleyelim: "iyi tanımlanmış olma"nın anlamı belirtilmediğinden bu tanım eksiktir. Gene de ilk kez küme kavramıyla karşılaşan birinin bunu tanım olarak kabul etmesinde çok büyük bir sakınca yoktur.

Evrendeki yıldızlar bir küme oluşturur mu? Matematiksel olarak bunun birçok sakıncası vardır. Her şeyden önce "evren" ve "yıldız"ın tanımları yapılmadığından "evrendeki yıldızlar" kümesi tam tanımlanmamıştır. Mesela bir yıldız, yıldız olmak için ne kadar büyük olmalıdır? Ama diyelim bu tanımları da yaptık. Bu durumda, evrendeki yıldızlar kümesinden söz edebilir miyiz? Gördüğümüz yıldızlardan söz edeceksek, gene bir sorun var, çünkü şu anda gördüğümüz yıldızların bazıları orada değil, çoktan sönüp yok olmuşlar... Ama olsun, onları da kümemize dahil edelim. Bazı yıldızlar parçalanıp iki yıldıza dönüşürler... Bazıları da yok olurlar. Yani yıldızlar kümesi de zamanla değişebilir. Oysa matematiksel nesneler zamanla değişmezler, zamandan bağımsızdırlar.

Hayattan alınan her küme örneğinin sorunları vardır. Sadece matematiksel anlamda tanımlanmış kümeler sorunsuzdur. Ama biz çok geniş görüşlü olup, en azından bu ilk bölümde, ince eleyip sık dokumayacağız. Bize "küme" duygusunu veren her şeyi küme olarak kabul edeceğiz. Ama bu konuda da abartmamak lazım. Ülkemizin sevilen şarkıcıları, yakışıklı oyuncuları, cennet koyları, ulu dağları gibi öznel zevkleri öne çıkaran, ögeleri kişiden kişiye değişebilecek toplulukları küme olarak kabul etmeyeceğiz. Kitaplıktaki eski kitaplar, Dünya'daki hayvanlar, Rus edebiyatının en iyi romanları ya da sevilen sanat müziği şarkıları küme adına layık olmayan topluluklardır. Öte yandan bir düzlemin noktaları, sayı doğrusu üzerindeki 1'den küçük sayılar ya da asal sayılar matematiksel anlamda küme oluştururlar.

Bir küme ögeleri tarafından belirlenir, yani aynı ögeleri olan iki küme eşittir ve farklı ögelere sahip kümeler farklı kümelerdir:

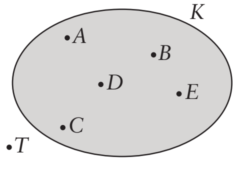
Küme Eşitliği Önermesi: *Aynı ögelere sahip iki küme eşittir.*

Bu önermeyi küme eşitliğinin tanımı olarak algılayabilirsiniz. Bu önermeye göre bir küme ögeleri tarafından belirlenir. Gene bu önermeye göre, eğer iki küme birbirine eşit değilse, o zaman kümelerden birinde diğerinde olmayan bir öge vardır. örneğin eğer x, K kümesinin bir ögesiyse ama L kümesinin bir ögesi değilse, o zaman kesinlikle K kümesi L kümesine eşit olamaz.

Ama dikkat, "aynı sayıda ögesi olan kümeler eşittir" değil, "aynı ögelere sahip iki küme eşittir" dedik. Aynı sayıda ögeye sahip iki küme eşit olmayabilir, örneğin sizin sınıfta da diğer şubede de 24 öğrenci olabilir ama sizin sınıfın öğrencilerinden oluşan küme diğer şubenin öğrencilerinden oluşan kümeye eşit değildir.

Bir kitap da sayfalardan oluşan bir küme olarak görülebilir, ama sayfaların sırası önemli olduğundan kitabı sayfalardan oluşan bir küme olarak görmek pek doğru bir bakış açısı olmaz, çünkü bir önceki sayfada değindiğimiz gibi bir küme ögelerini sıralamaz, olası sıralamalarını dikkate almaz. Bir tomar kâğıdı bir kâğıt kümesi olarak görmek daha doğru olur. Bir başka deyişle bir listeyle bir küme arasında bir fark vardır: Liste sıralanmıştır, birinci, ikinci, sonuncu ögesi vardır, ama bir kümenin birinci, ikinci ögesi yoktur. Bir sözlük bu konuda daha açıklayıcı bir örnek olabilir. Bir sözlüğü kelimeler kümesi olarak görmek hiç doğru değildir, çünkü sözlükte kelimeler alfabetik olarak sıralanmışlardır, oysa bir kümenin ögelerinin herhangi bir sırası yoktur. Daha da dramatik bir örnek bir romandır. Bir roman herhalde bir kelimeler kümesi değildir, çünkü bir romanda kelimeler sıralanmışlardır, üstelik aynı kelime birkaç kez geçebilir. Kümeyi, ögelerini karmakarışık bir şekilde ve her ögeyi tek bir defa içeren bir çuval olarak düşünebilirsiniz.

Ev ahalisi örneğimize geri dönelim. Teyzeniz sizin evde yaşamıyor, demek ki teyze, K kümesinde değil. Teyzeyi T harfiyle gösterelim. Aşağıda T'nin (yani teyzenin), K kümesine göre konumu gösteriliyor:



Bir kümede aynı öge birkaç defa gösterilebilir ama bu, kümeyi değiştirmez. örneğin,

$$\{A, B, C, D, E\} \text{ ile } \{A, A, B, B, B, C, D, E\}$$

kümeleri birbirine eşittir. Sağdaki kümede A ve B ögeleri bir nedenden birkaç defa gösterilmiş, ama bu sakarlık kümenin değişmesine neden olmaz. Sadelik açısından bir kümede her ögeyi bir defa yazmakta yarar var tabii. Bir başka örnek:

$$\{A, D, B, E, C, A\} = \{C, A, B, D, B, C, D, E\}.$$

Tabii en zarif ve en kullanışlı yazılım, ögeler birer defa ve belli bir sırayla, örneğin alfabetik sırayla yazılarak elde edilir. İki örnek:

$$\{C, E, B, A\} \text{ ile } \{A, B, C, E\}$$

ve

$$\{5, 1, 4, 2\} \text{ ile } \{1, 2, 4, 5\}$$

kümeleri eşittir ama belli bir düzen olması açısından ikinci yazılımı birincisine tercih ederiz. Yani her ne kadar bir kümenin ögeleri sıralanmamışsa da, estetik, pedagojik ve rahatlık gibi bazı kaygılardan dolayı kümelerin ögelerini belli bir düzende yazmakta yarar vardır.

Eğer y, x kümesinin bir ögesiyse, bu, matematiksel simgelerle

$$y \in x$$

olarak yazılır. Eğer tam tersine y, x kümesinin bir ögesi değilse

$$y \notin x$$

yazılır. Yukarıdaki aile örneğinde

$$A \in K,\ B \in K \text{ ve } T \notin K$$

olur. Bazen,

$$A \in K \text{ ve } B \in K$$

yazmak yerine,

$$A,\ B \in K$$

yazabiliriz, böylece matematiksel cümlelerimiz kısalır.

Şimdi bir S "nesnesi" alalım ve S'nin K kümesinin bir ögesi olup olmadığı sorusunu soralım. Eğer S, yukarıdaki A, B, C, D, E olarak gösterdiğimiz kişilerden birine eşitse (mesela annenin adı Sema olabilir ve anne hem S hem de A harfiyle gösteriliyor olabilir, yani $S = A$ olabilir), o zaman S, K'nin bir ögesi olur. Eğer S, yukarıdaki A, B, C, D, E olarak gösterdiğimiz kişilerden birine eşit değilse S, K'nin bir ögesi değildir.

Türkiye'yi şehirlerinden oluşan bir küme olarak görelim ve bu kümeyi T simgesiyle gösterelim. Eğer A, Ankara'yı simgeliyorsa, $A \in T$ olur. Ama eğer P, Paris'i simgeliyorsa, $P \in T$ olmaz, yani $P \notin T$ olur. Yarın öbür gün yeni bir il eklenirse, o zaman T kümesi değişir ve bu durumda T yerine T_1 gibi bir başka simge kullanılabilir.

Ama eğer Türkiye'yi vatandaşlarından oluşan bir küme olarak görürsek, o zaman siz (muhtemelen) bu kümenin bir ögesi olursunuz ama Ankara bu kümenin bir ögesi olmaz, çünkü Ankara bir vatandaş değildir. ABD'nin cumhurbaşkanı da bu kümenin bir ögesi değildir. Her yeni doğum ve ölümle bu küme değiştiğinden, matematik bu tür kümelerle muhatap olmaz. Matematiksel kümeler zamanla değişmemeli ve daha da önemlisi matematiksel kümelerin ögeleri de 1, 2, 3 gibi matematiksel nesneler olmalı. Bu kitapta daha çok

$$K = \{1, 2, 3, 5\}$$

gibi sayılardan oluşan kümelerden söz edeceğiz. Sadece, hayattan örnekler vererek kavramı daha da anlaşılır kılmak istediğimizde Ayşe, Burak, Ceyda gibi kişileri içeren kümelerden söz edeceğiz. Ama okur bilmeli ki gerçek bir matematiksel küme matematiksel ögelerden oluşmalıdır.

Sonlu ve Sonsuz Kümeler. Sonlu sayıda ögesi olan bir X kümesinin öge sayısı $s(X)$ olarak gösterilir. örneğin $X = \{1, 2, 6, 8\}$ ise, $s(X) = 4$ olur. Elbette $s(\{x\}) = 1$ olur ama $s(\{x, y\})$ sayısı 1 de olabilir 2 de, eğer $x \neq y$ ise $s(\{x, y\}) = 2$, eğer $x = y$ ise $s(\{x, y\}) = 1$ olur. Sonlu sayıda ögesi olan kümelere ***sonlu küme*** denir.

Bazı kümelerin sonsuz sayıda ögesi vardır ve bu tür kümelere ***sonsuz küme*** denir. Mesela 0, 1, 2, 3 gibi **tüm** doğal sayılardan oluşan küme sonsuzdur. Bu küme $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

(En sondaki üç nokta "bu böyle devam eder" demektir... Her ne demekse...) 0, 2, 4, 6 gibi çift doğal sayılardan oluşan küme de sonsuzdur. Bu son kümeyi tahmin edeceğiniz nedenlerden $2\mathbb{N}$ ile gösterirsek

$$6 \in 2\mathbb{N},\ 7 \notin 2\mathbb{N} \text{ ve } -2 \notin 2\mathbb{N}$$

olur[1]. Okurun sezgisine güvenerek bazen

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} 3\mathbb{N} &= \{0, 3, 6, 9, \dots\} \\ 4\mathbb{N} &= \{0, 4, 8, 12, \dots\} \\ 5\mathbb{N} &= \{0, 5, 10, 15, \dots\} \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$n\mathbb{N} = \{0, n, 2n, 3n, \dots\}$$

tanımı yapılır.

Bir önceki paragrafta "okurun sezgisine güvenerek" dedik çünkü sezgiden başka hiçbir yetimiz bize $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ kümesinin bir sonraki sayısının 10 olması gerektiğini söylemez[2]. $\mathbb{N}$ kümesini de sezgilerimize güvenerek yazalım:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

[1] -2 çift sayı olmasına rağmen bir doğal sayı değildir. doğal sayılar 0, 1, 2, 3, 4 gibi tamsayılardır, negatif olamazlar.

[2] Bizim gibi sezgisel zekâsı olmayan (ama Türkçe bilen) bir uzaylı, bu kümenin, en sol basamağında ilk harfi s, i, d ya da a olan bir rakamı olan sayıları içeren küme olduğunu, dolayısıyla bir sonraki ögenin 9 (dokuz) olduğunu sanabilir... Neyseki bizim sezgilerimiz sağlam!

Bu arada 0'ı bir doğal sayı olarak kabul ettiğimizi de belirtelim. Pozitif (yani 0'dan büyük) doğal sayılara ***sayma sayıları*** denir. Sayma sayıları kümesi $\mathbb{S}$ ile gösterilir:

$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Tek doğal sayılar kümesini ("çift sayılara 1 ekle" anlamına) $2\mathbb{N} + 1$ olarak gösterebiliriz:

$$2\mathbb{N} + 1 = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}.$$

Bunun gibi,

$$8\mathbb{N} + 3 = \{3, 11, 19, 27, \ldots\}$$

ya da

$$8\mathbb{S} + 3 = \{11, 19, 27, 35, \ldots\}$$

gibi kümelerle sık sık muhatap olacağız.

"Küme" ve "ögesi olmak" kavramlarını sezgisel olarak açıkladıktan sonra daha matematiksel örnekler görerek bu kavramları pekiştirelim.

Örnekler

1.1. Yukarıdaki metinde örnek olarak verdiğimiz kümelerin birçoğunun ögeleri matematiksel değildi. Ögeleri matematiksel nesneler olan kümelerle çalışacağız. Şu kümeyi ele alalım.

$$G = \{0, 1, 3, 6\}$$

olsun. Bu kümenin dört ögesi vardır: 0, 1, 3 ve 6. Mesela $0 \in G$ ve $4 \notin G$ olur. Elbette $s(G) = 4$ olur.

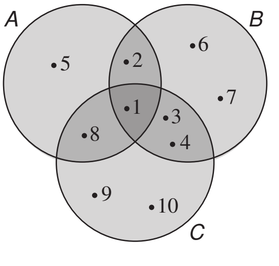
1.2. İlk bakışta $\{x, y, z\}$ kümesinin üç ögesi olduğunu sanabilirsiniz. Nitekim eğer x, y ve z birbirinden farklıysa öyledir. Ama mesela $x = y = z$ ise bu kümenin tek bir ögesi vardır. Bu kümenin en az bir, en fazla üç ögesi vardır. Tabii ki $\{x, y, z, t\}$ kümesinin de en az bir, en fazla dört ögesi vardır.

1.3. $\{x, x, x\}$ kümesinin tek bir ögesi vardır. Bu kümeyi $\{x\}$ olarak yazmak daha ekonomiktir. Örneğin $\{0, 0, 0\}$ kümesinin de tek bir ögesi vardır. Bu kümeyi $\{0\}$ olarak yazmayı tercih edeceğiz. Demek ki $s(\{0, 0, 0\}) = 1$.

1.4. $\mathbb{N}$ sonsuz bir kümedir ama $\{\mathbb{N}\}$ kümesinin tek bir ögesi vardır, o öge de $\mathbb{N}$ kümesidir. Görüldüğü gibi bir kümenin ögeleri küme olabilir. Aşağıda daha fazla örnek göreceğiz.

1.5. $\{\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 3\mathbb{N}, 6\mathbb{N}\}$ kümesinin dört ögesi vardır. (Ve bu dört ögenin her biri bir kümedir.) Öte yandan $\{\{\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 3\mathbb{N}, 6\mathbb{N}\}\}$ kümesinin tek bir ögesi vardır, o da $\{\mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 3\mathbb{N}, 6\mathbb{N}\}$ kümesidir.

1.6. $A = \{1, 2, 5, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, $C = \{1, 3, 4, 8, 9, 10\}$ kümelerinin Venn diyagramlarını aynı şekil üzerinde çizelim:



Görüldüğü üzere 1 sayısı her üç kümenin de ögesi. Ama 2, 3, 4 ve 8 sayıları kümelerin sadece ikisinde. 5, 6, 7, 9, 10 ise kümelerin sadece birinde yer alıyor.

Sayarak göreceğimiz üzere, $s(A) = 4$ ve $s(B) = s(C) = 6$ olur.

1.7. $0, 3, 6 \in 3\mathbb{N}$ olur, ama $-3 \notin \mathbb{N}$ olur, çünkü -3 bir doğal sayı değildir. 5 de 3'e bölünmediğinden $5 \notin 3\mathbb{N}$ olur.

1.8. $A = \{2, 3, 4\}$ olsun. A'daki sayıların gene A'daki sayılarla çarpılmasıyla elde edilen sayıları içeren ve başka da bir öge içermeyen kümeye B diyelim. örneğin $6 \in B$ olur, çünkü $6 = 2 \times 3$ eşitliği geçerlidir, ama $15 \notin B$ olur. Bu kümenin tüm ögelerini bulmak zor değildir:

$$B = \{4, 6, 8, 9, 12, 16\}.$$

Bu B kümesini AA olarak yazmak fena bir fikir olmayabilir. Demek ki $s(A) = 3$ ve $s(AA) = 6$.

1.9. $A = \{0, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{2, 5\}$ olsun. A'daki sayılarla B'deki sayıların toplanmasıyla elde edilen sayıları içeren ve başka da bir öge içermeyen kümeye C diyelim. örneğin $9 \in C$ olur, çünkü $9 = 4 + 5$ eşitliği geçerlidir, ama $15 \notin B$ ve $8 \notin B$ olur. Bu kümenin tüm ögelerini teker teker bulmak zor değildir:

$$C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Bu C kümesini $A + B$ olarak yazmayı teklif ediyoruz. Elbette $s(A) = 4$, $s(B) = 2$ ve $s(A + B) = 7$ oluyor.

Bu arada $B + A$ kümesinin $A + B$ kümesine eşit olduğuna dikkatinizi çekeriz, çünkü her ikisinin de aynı ögeleri vardır.

1.10. Eğer A ve B kümeleri sonlu sayı kümeleriyse, $A + B$ ve $A \cdot B$ kümeleri de sonludur ve $s(A + B) \leq s(A)s(B)$ ve $s(A \cdot B) \leq s(A)s(B)$ olur.

1.11. $A, B \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer $0 \in A \cdot B$ ise, 0 ya A kümesinde ya da B kümesinde olmalıdır.

1.12. $A, B \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer $1 \in A + B$ ise, 0 ya A kümesinde ya da B kümesinde olmalıdır; aynı şey 1 için de geçerlidir. Tabii her iki kümede de 0 ve 1 olabilir.

1.13. Bir küme bir başka kümenin ögesi olabilir, yukarıda buna örnekler verdik. Örneğin $\{0, 2\}$ kümesi

$$A = \{\{0, 2\}, 3, \{3, 4\}\}$$

kümesinin ögesidir. A kümesinin üç ögesi vardır; işte o ögeler:

$$\{0, 2\}, 3 \text{ ve } \{3, 4\}.$$

Dolayısıyla $\{0, 2\} \in A$ ve $3 \in A$ olur. Bu arada $0 \notin A$ olduğuna dikkatinizi çekerim.

1.14. $\{\{0, 1\}\}$ kümesinin tek bir ögesi vardır, o da $\{0, 1\}$ kümesidir. Ama $\{0, 1\}$ kümesinin iki ögesi vardır: 0 ve 1. Yani $s(\{\{0, 1\}\}) = 1$ ve $s(\{0, 1\}) = 2$ olur.

$\{\{\{0, 1\}\}\}$ kümesinin de tek bir ögesi vardır: $\{\{0, 1\}\}$.

1.15. Eğer x bir kümeyse, x kümesi $\{x\}$ kümesinin bir ögesidir. Tabii x aynı zamanda $\{x, y\}$ kümesinin de bir ögesidir. Elbette $s(\{x\}) = 1$ olur.

1.16. $\{a, b, c\}$ kümesi $\{x, y\}$ kümesine eşit olabilir; mesela $x = a = b$ ve $y = c$ ise bu iki küme birbirine eşittir. Başka koşullarda da bu iki küme birbirine eşit olabilir, örneğin $y = a = c$ ve $x = b$ ise de bu iki küme birbirine eşit olur. Ama mesela $a = b = c = x \neq y$ ise bu iki küme birbirine eşit olmaz, birincisinde bir, ikincisinde iki öge vardır. Sonlu iki küme eşit olduğunda öge sayıları da aynıdır, ama eğer kümelerin eleman sayısı 0 değilse tersi doğru değildir, yani aynı sayıda ögesi olan kümeler eşit olmak zorunda değildir.

1.17. $\{x, y\}$ kümesinin $\{a\}$ kümesine eşit olması için $x = y = a$ eşitlikleri gerek ve yeter koşuldur. Buradaki "gerek ve yeter koşul" şu anlama gelmektir: Bu iki küme eşitse $x = y = a$ olmalıdır ve $x = y = a$ ise iki küme birbirine eşittir.

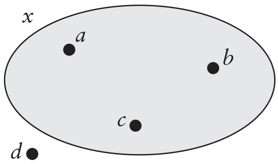
1.18. Eğer
- A, 8'den küçük tek sayılardan oluşan kümeyse,
- B, $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)=0$ denkleminin çözüm kümesiyse ve
- $C = \{1, 3, 5, 7\}$ ise

ise o zaman $A = B = C$ eşitlikleri geçerlidir, çünkü her üç kümenin de aynı ögeleri vardır.

1.19. Kümeler soyut nesneler olduklarından kümelerin şekli şemali yoktur, ama insanoğlu resmi yazıdan daha kolay algıladığından, kümeler aşağıdaki şekildeki gibi yumurta ya da patates biçiminde bir şekille gösterilir. Kümenin ögeleri yumurtanın içine yazılır. Kümenin ögesi olmayan nesneler de yumurtanın dışında gösterilir. Bu tür şekillere Venn diyagramı dendiğini metinde söylemiştik. Aşağıdaki örnekte üç ögeli

$$x = \{a, b, c\}$$

kümesi çizilmiş. d'nin yumurtanın dışında kalmasından $d \notin x$ olduğu anlaşılıyor, yani d, x'in a, b ve c ögelerinden birine eşit değildir.



$x = \{a, b, c\}$ kümesi

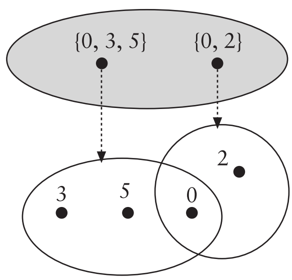
1.20. Kimi zaman bir kümenin ögelerinin de küme olabileceğini gördük. Bir örnek daha verelim:

$$\{\{0, 3, 5\}, \{0, 2\}\}$$

kümesinin

$$\{0, 3, 5\} \text{ ve } \{0, 2\}$$

olmak üzere iki ögesi vardır ve her iki öge de bir kümedir. Küme olan bu ögelerin de ögeleri vardır. örneğin $\{0, 3, 5\}$ ögesinin (ki kümedir aynı zamanda) üç ögesi vardır: 0, 3 ve 5. Bu kümeyi ve ögelerini aşağıdaki şekildeki gibi bir Venn diyagramıyla gösterebiliriz.



En yukarıda, öğeleri {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri olan iki öğeli küme görülüyor. Bu kümeyi griye boyadık. Bu kümede {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri birer nokta olarak, yani birer öğe olarak gösterilmiş. Altta ise, {0, 3, 5} ve {0, 2} kümeleri küme olarak gösterilmiş.

Bu aşamada $s(\{\{0, 3, 5\}, \{0, 2\}\}) = 2$, $s(\{0, 3, 5\}) = 3$ ve $s(\{0, 2\}) = 2$ eşitlikleri bariz olmalı.

1.21. Kümenin ögelerini kümenin çocukları olarak yorumlayacak olursak (ki böyle bir yorumlama matematiksel olarak anlamsızdır), kümenin ögelerinin ögelerini de kümenin torunları olarak düşünmek gerekir. Elbette, yeri geldiğinde, bir kümenin ögelerinin ögelerinin ögelerinden de söz edebiliriz.

1.22. $\{0, 3, 5\}$ bir kümedir, ama bu küme yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir başka kümenin ögesi olabilir. Demek ki aynı nesne aynı anda hem küme hem de öge olabiliyor. Aslında her küme bir başka kümenin ögesi olabilir, nitekim x kümesi örneğin $\{x\}$ kümesinin ögesidir.

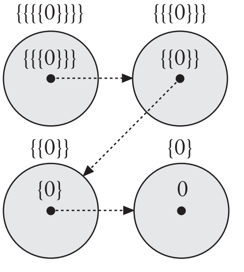
Bu gibi durumlarda aynı nesneyi -yukarıda yaptığımız gibi- aynı şekil üzerinde iki farklı biçimde resmetmekte yarar olabilir:

1. Öge olarak, yani bir nokta olarak,
2. Küme olarak, yani yumurta biçiminde bir şekille.

1.23. Yukarıdaki örnekten çok daha karmaşık durumlar olabilir. Sözgelimi

$$\{\{\{\{0\}\}\}\}$$

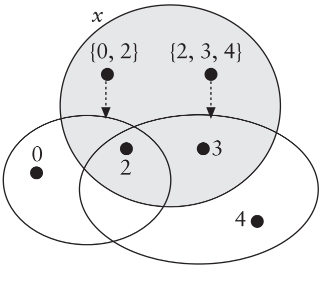
kümesinin tek bir ögesi vardır, o da $\{\{\{0\}\}\}$ kümesidir. $\{\{\{0\}\}\}$ kümesinin de bir tek ögesi vardır, o da $\{\{0\}\}$ kümesidir. $\{\{0\}\}$ kümesinin de bir tek ögesi vardır, o da $\{0\}$ kümesidir. $\{0\}$ kümesinin de bir tek ögesi vardır, o da 0 sayısıdır. Bu örneğimiz aşağıda resmedilmiştir.



1.24. Daha karmaşık durumlar olabilir. Şu örneği ele alalım:

$$x = \{\{0, 2\}, \{2, 3, 4\}, 2, 3\}$$

olsun. Bu kümeyi ve ögelerini aşağıdaki şekilde resmettik.



Ögeler de birer küme olduğundan, ögeleri hem bir öge gibi (birer kara noktayla), hem de bir patates şekliyle resmettik. Örneğin resimde iki tane $\{0, 1\}$ kümesi resmedilmiş, biri öge olarak, diğeri küme olarak.

1.25. Eğer x bir kümeyse, öge olarak sadece x'i içeren bir küme vardır. Bu küme

$$\{x\}$$

olarak yazılır. x'in kaç ögesi olursa olsun, $\{x\}$ kümesinin tek bir ögesi vardır: x. Eğer x ve y iki farklı kümeyse

$$\{x, y\}$$

diye bir küme vardır ve bu kümenin sadece iki ögesi vardır: x ve y. Genel olarak, sonlu sayıda küme verilmişse, diyelim $x_1, \ldots, x_n$ kümeleri, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi tüm bu kümeleri öge olarak içerir ve başka da öge içermez.

Bu dediğimizi bir "kural" olarak algılayabilirsiniz. Matematikte bu tür kurallara "aksiyon" adı verilir.

1.26. 00111101001110 türünden sadece 0 ve 1'lerden oluşan dizilere 01-***dizisi*** denir. Verdiğimiz örnekteki dizinin uzunluğu 14'tür çünkü dizide tam 14 tane terim vardır. Uzunluğu 3 olan 01-dizilerinden oluşan D_3 kümesini gösterelim:

$$D_3 = \{000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111\}.$$

Görüldüğü gibi uzunluğu 3 olan tam 8 tane 01-dizisi vardır. Bu bağlamda, herhalde $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ eşitliğinin bir rastlantı olmadığını tahmin etmişsinizdir.
Uzunluğu 2 olan diziler kümesi D_2 olsun:

$$D_2 = \{00,\ 01,\ 10,\ 11\}.$$

Ve tabii beklenen $s(D_2) = 4 = 2 \times 2 = 2^2$ eşitliği.
D_1 kümesi uzunluğu 1 olan dizilerden oluşur ve sadece iki ögesi vardır:

$$D_1 = \{0,\ 1\}.$$

Uzunluğu 4 olan tam $2^4 = 16$ tane 01-dizisi vardır. Bu 16 diziyi yazalım:

0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111,
1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Bu dizilerden oluşan kümeye elbette D_4 adını vereceğiz.
Bu dizileri rastgele bir sırayla yazmadığımızı anladınız mı? "Küçükten büyüğe" doğru önce soldan sağa, sonra yukarıdan aşağıya sıralayarak yazdık. Böyle yazarsanız 16 dizinin hiçbirini unutmazsanız, unutursanız da hangisini unuttuğunuzu kolayca bulabilirsiniz.
Uzunluğu 5 olan 01-dizisi sayısı 32'dir:

00000, 00001, 00010, 00011, 00100, 00101, 00110, 00111,
01000, 01001, 01010, 01011, 01100, 01101, 01110, 01111,
10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111,
11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110, 11111.

(Bu dizilerden oluşan kümeye D_5 adını verebiliriz.) Uzunluğu 6 olan 01-dizilerinin herbirini bulmak için, uzunluğu 5 olan 01-dizilerinin iki kopyasını bir kâğıda alt alta yazın ve birinci kopyadaki dizilerin başına 0, ikinci kopyadakilerin başına 1 getirin (toplam $32 + 32 = 64$ tane dizi elde edersiniz). Böylece tüm 01-dizileri küçükten büyüğe belirir.
Dizileri hiç unutmadan yazmanın bir yöntemi benzin istasyonlarındaki pompa sayacını düşünmektir. O sayaçlar, eğer benzinci hile yapmıyorsa başlangıçta 0000000 konumundadır. Sonra benzinin pompadan akmaya başlamasıyla en sağdaki yuvanın sayısı 1, 2, 3 diye artmaya başlar. 9'a geldikten hemen sonra o yuva tekrar 0 olur ama hemen solundaki yuva 1 olur, yani sayaç artık 10'u gösterir. En sağdaki yuvadaki sayı tekrar 0, 1, 2, diye artmaya başlar. En sağdaki rakam 9 olduğunda, tekrar 0'a döner ama hemen solundaki yuva 1 iken 2 olur, yani sayaç artık 20'yi gösterir. Sayacın nasıl işlediğini biliyorsunuz. En sağdaki dört yuva örneğin 9999 olduğunda, bu yuvalarda gösterilen bir sonraki sayı 0000 olur ama hemen önceki sayı (mesela) 3 ise 4 olur, 8 ise 9 olur; ama bu yuva da 9 ise bir sonraki aşamada 0 olur ve hemen solundaki rakam bir atar. Dizileri yazarken sadece 0 ve 1 rakamları olan bir sayaç olduğunuzu hayal edin, 2 ve 2'den sonraki rakamlar yok oldu! Nasıl bizim sistemimizde 9 rakamından sonra 0 geliyorsa, bu

yeni sistemde 1 sayısından sonra 0 gelir. Eğer 4 haneniz varsa şöyle işlersiniz:

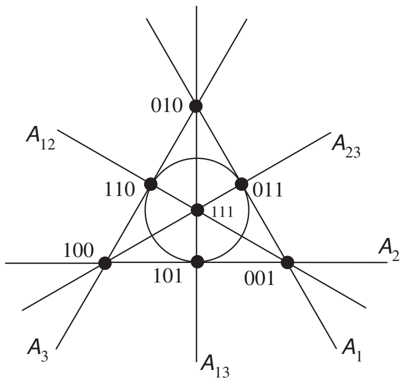
$$
\begin{array}{c}
0000\\
0001\\
0010\\
0011\\
0100\\
0101\\
0110\\
0111\\
1000\\
1001\\
1010\\
1011\\
1100\\
1101\\
1110\\
1111
\end{array}
$$

Toplam $2^4 = 16$ tane 4 uzunluğunda 01-dizisi var, demek ki hiçbirini unutmamışız.
Genel olarak, uzunluğu n olan 01-dizisi sayısı 2^n'dir, yani $s(D_n) = 2^n$ olur.
Toplam $2^5 = 32$ tane olan 5 uzunluğundaki 01-dizilerin hepsini yazmak için, yukarıdaki 4 uzunluğundaki dizilerin iki kopyasını alın, birinci kopyanın başına 0 ekleyin, ikinci kopyanın başına 1 ekleyin; böylece 5 uzunluğundaki 32 adet 01-dizisini elde edersiniz. Dilerseniz 0 ve 1'i dizilerin sonuna da ekleyebilirsiniz.
0 uzunluğunda 2^0, yani 1 tane 01-dizisi vardır. Bu diziye ***boşdizi*** adı verilir. Boşdizide hiç simge yoktur. Boşdizi $\langle\ \rangle$ olarak yazılır. Demek ki $D_0 = \{\langle\ \rangle\}$, yani D_0 kümesinin tek bir ögesi vardır, o da boşdizidir.
01-dizileriyle kümeler arasında çok yakın bir ilişki vardır. Biraz ileride bu yakın ilişkiyi göreceğiz.

1.27. Venn diyagramlarında kümeler genellikle oval bir şekille gösterilir, ama kümeleri başka türlü de gösterebiliriz, hatta bazen kümeleri başka türlü göstermek gerekir. Mesela bir doğruyu noktalarının kümesi olarak görmek doğaldır ama bir doğruyu bir oval olarak resmetmek pek kullanışlı olmasa gerek! Aynı şey bir üçgenin içindeki noktalardan oluşan küme için de geçerlidir! Bir üçgenin içindeki noktalar kümesini bir ovalin içi gibi göstermek pek sağlıklı bir davranış değildir, bir üçgenin içindeki noktalar kümesi lütfen bir üçgen olarak gösterilsin! Genel olarak, eğer bir kümenin geometrik bir anlamı ve şekli varsa, (amiyane tabirle) fazla kasmadan o kümeyi geometrik şekliyle göstermek gerekir. Ama bazen de görünürde hiçbir neden olmadan kümeleri Venn diyagramlarındaki gibi bir ovalle değil de, doğrular ve eğrilerle göstermek daha işlevsel ve daha estetiktir. Şu örneği ele alalım:

$$
\begin{array}{lcl}
A_1 & = & \{001, 010, 011\}\\
A_2 & = & \{001, 100, 101\}\\
A_3 & = & \{100, 010, 110\}\\
A_{12} & = & \{001, 110, 111\}\\
A_{23} & = & \{100, 011, 111\}\\
A_{13} & = & \{010, 101, 111\}\\
A_{123} & = & \{011, 101, 110\}
\end{array}
$$

olsun. Toplam 7 tane küme var ve her kümenin 3 tane ögesi var. Bu 7 kümenin bir nevi Venn diyagramını aşağıdaki gibi çizebiliriz:



Burada, A_{123} kümesi dışındakiler bir doğru olarak resmedilmiş ve her biri şekilde belirtilmiş; A_{123} kümesi ise bir çember olarak gösterilmiş. Bu 7 kümeyi Venn diyagramlarında olduğu gibi ovallerle resmetseydik, ortaya hiç de anlaşılır bir şekil çıkmazdı; oysa yukarıdaki şekilde her şey çok net biçimde anlaşılıyor.

Kümelerin adlarıyla ögeleri arasında bir ilişki vardır; bu ilişkiyi bulmayı okura bırakıyoruz. İki noktanın ortasındaki noktalar da bir anlamda o iki noktanın toplamı, şekilden görebilirsiniz.

Alıştırmalar

1.28. $\{1, 2, \{1, \{2\}\}\}$ kümesinin kaç ögesi vardır?

1.29. $\{\{1, 2, \{1, \{2\}\}\}\}$ kümesinin kaç ögesi vardır?

1.30. Türkçe okunuşunda içinde i harfi bulunmayan 30'dan küçük doğal sayılar kümesinin kaç ögesi vardır?

1.31. $\{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ kümesinin hangi koşullarda kaç ögesi vardır?

1.32. $\{a\} \in \{\{a, b\}\}$ içindeliği hangi koşulda doğru olabilir?

1.33. $c \in \{a, \{a, b\}\}$ içindeliği (ya da ifadesi) hangi koşullarda doğru olabilir?

1.34. A, Türkçe okunuşunda içinde a harfi bulunmayan 30'dan küçük doğal sayılar kümesi olsun. O, Türkçe okunuşunda içinde o harfi bulunmayan 30'dan küçük doğal sayılar kümesi olsun. U, Türkçe okunuşunda içinde u harfi bulunmayan 30'dan küçük doğal sayılar kümesi olsun. Bu üç kümenin Venn diyagramını çizin.

1.35. Eğer sonlu uzunluktaki bir 01-dizisinde beliren her 00'dan sonra mutlaka 1 geliyorsa ve beliren her 11'den sonra 0 geliyorsa, o diziye "makul dizi" diyelim. 100110101101001 dizisi örneğin 15 uzunluğunda makul bir dizidir ama 10011010110100 ya da 100110001010 makul bir dizi değildir. En fazla 7 uzunluktaki makul dizilerden oluşan kümenin kaç ögesi vardır?

1.36. $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 7\}$ kümelerinin Venn diyagramını çizin.

1.37. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $\{2, 3, 5\}$ kümelerinin Venn diyagramını çizin.

1.38. $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$ ve $\{2, 3, 5\}$ kümelerinin Venn diyagramını çizin.

1.39. $2\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$ ve $5\mathbb{N}$ kümelerinin Venn diyagramını çizin. (Bunlar sonsuz kümeler olduklarından, ögelerinin hepsini yazamazsınız.)

1.40. $\{3\mathbb{N}\}$ kümesinin kaç ögesi vardır? $\{3\mathbb{N}, 6\mathbb{N}\}$ kümesinin kaç ögesi vardır?

1.41. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ise A'daki sayıların gene A'daki sayılarla çarpılmasıyla elde edilen sayıları içeren ve başka da bir öge içermeyen kümenin tüm ögelerini bulun.

1.42. Yukarıdaki alıştırmayı çarpma yerine toplama ile yapın.

1.43. $A = \{1, 2, 4\}$ ve $B = \{0, 4, 6\}$ ise A'daki sayıların B'deki sayılardan çıkarılmasıyla elde edilen sayıları içeren ve başka da bir öge içermeyen kümenin ögelerini bulun.

1.44. 3 ve 7 sayılarının çeşitli defalar birbirleriyle toplanmasıyla elde edilen kümenin ögelerini bulun. Mesela 3, 6, 7, 9, 10, 13 ve 14 bu kümenin ögeleridir.

1.45. Aynı alıştırmayı 7 ve 15 sayıları için yapın. Bu sayıları birbirleriyle toplayarak belli bir doğal sayıdan büyük tüm doğal sayıları elde edeceğimizi gösterin.

1.46. $A = \{1, 2, 4\}$ ise $A + A$ kümesini tanımlayın ve ögelerini bulun.

1.47. A kümesi, 0 ve 10 dahil, 0'dan 10'a kadar olan sayılardan oluşan küme olsun. B, A'daki sayıların karelerinden oluşan küme olsun. C, A'daki sayıların küplerinden oluşan küme olsun. A, B ve C kümelerinin Venn diyagramını tek bir şekil üzerinde çizin.

1.48. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ kümesinin 3'e tam bölünen kaç ögesi vardır? Aynı kümenin 2'ye ve 3'e bölünen kaç ögesi vardır? Aynı kümenin 6'ya ve 15'e bölünen kaç ögesi vardır?

1.49. Her n doğal sayısı için A_n kümesi n'den $2n$'ye kadar doğal sayılardan oluşan küme olsun. Mesela

$$\begin{aligned} A_0 &= \{0\} \\ A_1 &= \{1, 2\} \\ A_2 &= \{2, 3, 4\} \\ A_3 &= \{3, 4, 5, 6\} \\ A_4 &= \{4, 5, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

olur. A_8'in öge sayısını bulun. A_5, A_6, A_7 ve A_8 kümelerinin Venn diyagramını çizin.

1.50. $\{x\}$ ve $\{\{y, z\}\}$ kümeleri birbirine eşit olabilir mi?

1.51. Hangi durumda $s(\{\{x\}, \{x, y\}\}) = 1$ olur?

1.52. Hangi durumlarda $s(\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}) = 1$ olur? Hangi durumda bu sayı 2 olur?

1.53. Eğer $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ ise, $x = z$ ve $y = t$ eşitliklerini kanıtlayın. İpucu: Kanıtı $x = y$ ve $x \neq y$ olmak üzere iki parçaya ayırabilirsiniz.

1.54. Öyle A ve B doğal sayı kümeleri bulun ki hem $s(AB) = s(A)s(B)$ hem de $s(A + B) = s(A)s(B)$ olsun.

1.55. A, doğal sayıların karelerinden oluşan küme olsun. B ise doğal sayıların küplerinden oluşan küme olsun. A ve B kümesinin ortak ilk dört ögesini bulun. A ve B kümesinin sonsuz tane ortak ögesini bulun.

1.56. A, iki ardışık doğal sayının toplamı olarak yazılabilen doğal sayılar kümesi olsun. Örneğin $5 + 6 = 11$ olduğundan, $11 \in A$ olur. B, üç ardışık doğal sayının toplamı olarak yazılabilen doğal sayılar kümesi olsun. A ve B kümelerinin ortak beş ögesini bulun.

1.57. A, üç ardışık doğal sayının toplamı olarak yazılabilen doğal sayılar kümesi olsun. B, dört ardışık doğal sayının toplamı olarak yazılabilen doğal sayılar kümesi olsun. C, beş ardışık doğal sayının toplamı olarak yazılabilen doğal sayılar kümesi olsun. A, B ve C kümelerinin ortak beş ögesini bulun.

1.58. A, B ve C kümeleri yukarıdaki gibi olsun. A'da olup da B'de ya da C'de olmayan üç öge bulun. Aynı şeyi B, A ve C için yapın. Aynı şeyi C, A ve B için yapın.

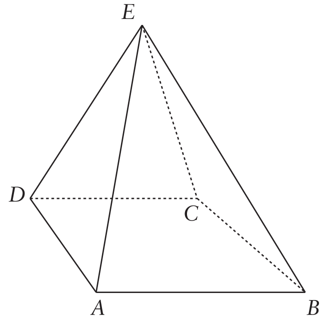
1.59. Üç ardışık doğal sayının toplamı olarak yazılan ögelerden oluşan kümeye A diyelim. A, 3'e bölünen pozitif doğal sayılar kümesidir. Bunun nedenini anlamaya çalışın. örneğin 78'i nasıl üç ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz?

Dört ardışık doğal sayının toplamı olarak yazılan ögelerden oluşan kümeye B diyelim. B kümesinin hangi doğal sayılardan oluştuğunu bulabilir misiniz?

Yukarıdaki A ve B kümelerinin ortak ögeleri hangi doğal sayılardır?

1.60. A, iki doğal sayının karesinin toplamı olarak yazılan doğal sayılardan oluşan küme olsun; A'da olmayan üç sayı bulun. B, üç doğal sayının karesinin toplamı olarak yazılan doğal sayılardan oluşan küme olsun; B'de olmayan üç sayı bulun. C, dört doğal sayının karesinin toplamı olarak yazılan doğal sayılardan oluşan küme olsun; C kümesinde olmayan üç sayı bulun. (Bu sefer bulamayacaksınız! Çünkü $C = \mathbb{N}$ olur. Bu bilinen bir teoremdir, yani her doğal sayı dört tamkarenin toplamıdır, ama bu teoremi bu kitapta kanıtlamayacağız.)

1.61. Tabanı kare olan bir piramit ele alalım.



Tabandaki köşelere A, B, C, D diyelim. Tepe noktası da E olsun. Bu piramidin taban dahil toplam 5 yüzü vardır. Her yüzdeki köşe noktalarından bir küme elde edelim:

$$\begin{aligned} T &= \{A, B, C, D\} \\ Y_1 &= \{A, B, E\} \\ Y_2 &= \{B, C, E\} \\ Y_3 &= \{C, D, E\} \\ Y_4 &= \{D, A, E\} \end{aligned}$$

Bu beş kümenin Venn diyagramını çizin. İşe yararlılık ve estetik bakımından Venn diyagramı mı daha cazip, yoksa piramit mi?

1.62. Aşağıdaki dokuz kümeyi yukarıdaki örnekten esinlenerek geometrik bir nesnenin yüzeyleri olarak gösterin:

$$\begin{aligned} T &= \{A, B, C, D\} \\ Y_1 &= \{A, B, E\} \\ Y_2 &= \{B, C, E\} \\ Y_3 &= \{C, D, E\} \\ Y_4 &= \{D, A, E\} \\ Z_1 &= \{A, B, F\} \\ Z_2 &= \{B, C, F\} \\ Z_3 &= \{C, D, F\} \\ Z_4 &= \{D, A, F\} \end{aligned}$$

1.63. Aşağıdaki kümeleri ele alalım:

$$\begin{aligned} X &= \{0, 1\} \\ Y &= \{1, 2\} \\ Z &= \{2, 3\} \\ T &= \{3, 0\} \\ S &= \{0, 2\} \\ U &= \{1, 3\} \end{aligned}$$

Alıştırma 1.27'de olduğu gibi bu kümeleri ikişer noktalık birer doğru olarak çizin. Üçgen piramide benzer bir şekil elde etmeyi amaçlayın, her küme (yani her doğru), piramidin bir kenarı olacak, her öge de (yani 0, 1, 2, 3 ögeleri) piramidin bir köşe noktası olacak.

1.64. Bir önceki alıştırmaya devam edelim. Şu kümeleri ele alalım:

$$\begin{array}{rcl} A_3 & = & \{0, 1, 2\} \\ A_2 & = & \{0, 1, 3\} \\ A_1 & = & \{0, 2, 3\} \\ A_0 & = & \{1, 2, 3\} \end{array}$$

Bu sefer kümelerin her birini bir üçgen piramidin bir yüzü olarak çizmeyi deneyin. Kümelerin ögeleri piramidin köşeleri olacak. Üçgen piramidin her yüzeyinde üç nokta vardır ve tam 4 yüzü vardır. Yukarıdaki alıştırmada elde edilen şekil yardımcı olacaktır.

1.65. Aşağıdaki kümeleri ele alalım:

$$\begin{array}{rcl} A_{\star 00} & = & \{000, 100\} \\ A_{0\star 0} & = & \{000, 010\} \\ A_{00\star} & = & \{000, 001\} \\ A_{\star 01} & = & \{001, 101\} \\ A_{0\star 1} & = & \{001, 011\} \\ A_{01\star} & = & \{010, 011\} \\ A_{\star 10} & = & \{010, 110\} \\ A_{1\star 0} & = & \{100, 110\} \\ A_{10\star} & = & \{100, 101\} \\ A_{\star 11} & = & \{011, 111\} \\ A_{1\star 1} & = & \{101, 111\} \\ A_{11\star} & = & \{110, 111\} \end{array}$$

Alıştırma 1.27'de olduğu gibi, bu kümeleri ikişer noktalık doğrular olarak çizin. Küpe benzer bir şekil elde etmeye çalışın, her küme (yani her doğru) küpün bir kenarı olacak.

1.66. Bir önceki alıştırmaya devam edelim. Şu kümeleri ele alalım:

$$\begin{array}{rcl} A_{\star\star 0} & = & \{000, 100, 010, 110\} \\ A_{\star\star 1} & = & \{001, 101, 011, 111\} \\ A_{\star 0\star} & = & \{000, 100, 001, 101\} \\ A_{\star 1\star} & = & \{010, 110, 011, 111\} \\ A_{0\star\star} & = & \{000, 010, 001, 011\} \\ A_{1\star\star} & = & \{100, 110, 101, 111\} \end{array}$$

Bu sefer kümelerin her birini küpün bir yüzü olarak çizmeyi deneyin. Kümelerin ögeleri küpün köşeleri olacak. Küpün her yüzünde dört köşe vardır ve küpün toplam 6 tane yüzü vardır. Yukarıdaki alıştırmada elde edilen şekil yardımcı olacaktır.

Notlar

1.67. Biz her zaman bu kurala uymayacağız ve geçmişte de uymadık ama genellikle kümeler A, B, X, $\mathbb{N}$ gibi büyük harflerle, ögeler de x, y, n, u gibi küçük harflerle temsil edilir. Bunu bir alışkanlık haline getirirseniz ögelerle kümeleri bir bakışta ayırdedebilirsiniz.

1.68. Kümeler sadece sayılardan ya da sayı kümelerinden oluşmaz. Bir düzlemin doğruları da mesela bir küme oluşturur. Bir düzleme çizilebilecek tüm kareler bir başka küme oluşturur. Her türlü matematiksel nesneden küme oluşabilir. Matematiksel nesnelerden oluşmuş kümeler de matematiksel nesnelerdir, dolayısıyla bunların da kümesi alınabilir.

1.69. Var olduğundan beri insanoğlu matematikte olmasa da günlük yaşamında küme kavramıyla aşinaydı elbette, örneğin koyun sürüsü, buğday tarlası, kabile, bir sepet yumurta gibi sözler küme fikrinin çeşitli tezahürleridir. Ancak matematiksel anlamda kümenin oldukça yakın bir geçmişi vardır. Kümelerden açık açık ilk kez 1847'de şimdiki Çek

Cumhuriyeti'nin başkenti Prag'da yaşamış olan matematikçi Bolzano (1781-1848) söz etmiştir. O zamanlar sonsuz sayıda ögesi olan kümelerin çelişki içereceğinden, yani matematikte bir çelişkiye yol açacağından korkuluyordu. Örneğin doğal sayılarla çift doğal sayıların

$$\begin{array}{c} 0 \longleftrightarrow 0 \\ 1 \longleftrightarrow 2 \\ 2 \longleftrightarrow 4 \\ 3 \longleftrightarrow 6 \\ \cdots \end{array}$$

biçiminde

$$n \longleftrightarrow 2n$$

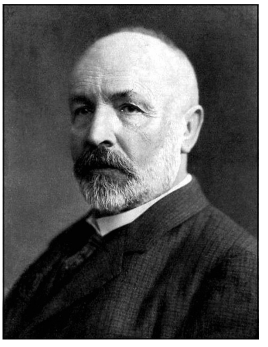
kuralıyla eşleştirilebilmesi bilim insanlarını korkutuyordu (örneğin Galileo'nun ödü patlamıştı) ne de olsa $2\mathbb{N}$ kümesinde $\mathbb{N}$ kümesinden daha az sayı olmalıydı, yarısı kadar!
19'uncu yüzyılın sonlarına doğru, yani bundan 100 küsur yıl önce, Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918) sonsuz kümelerden korkmamış, tam tersine üstlerine üstlerine gitmiş, onları anlamaya çalışmış, örneğin $\mathbb{N}$ ile $2\mathbb{N}$ kümesinin (yukarıdaki eşlemeden dolayı) aynı sayıda ögesi olduğuna hükmetmiş ve bugünkü matematiksel anlamına çok yakın bir kümeler kuramını matematik camiasının ağır baskılarına karşı koyarak neredeyse tek başına geliştirmiştir. Nitekim zamanın birçok ünlü matematikçisi kümeler kuramını gereksiz bir uğraş olarak görmüştü. Kümeler kuramıyla gençlik gerçek matematikten uzaklaştırılıp, gereksiz ve eften püften düşüncelere yönlendiriliyor diye düşünülüyordu[3]. Kümeler kuramını ciddiye alanlar matematiği getirisi olmayan bir alana sürüklemekle suçlanıyordu. O çağın en ünlü ve en etkin iki matematikçisi Alman David Hilbert ve Fransız Henri Poincaré matematiğin özüyle ilgili bu savaşta ayrı cephelerde yer almıştır. Savaşı Hilbert kazanmıştır; bugün kümeler kuramı matematikte merkezî bir konuma gelmiştir. Matematiğin klasik dallarının birçok önemli problemi çözümünü kümeler kuramında bulmuştur.

Poincaré ile Hilbert, 20'nci yüzyıl başının en önemli iki matematikçisi

Kümeler kuramı varlığını sonsuz kümelere borçludur. Cantor'dan önce sonsuz kümelerin varlığından kuşkulanılıyordu, kuşkulanmayanlar da sonsuz kümelerle işlem yapmaya çekiniyorlardı ya da iki sonsuz küme arasında matematiksel olarak (ögeleri dışında) bir fark

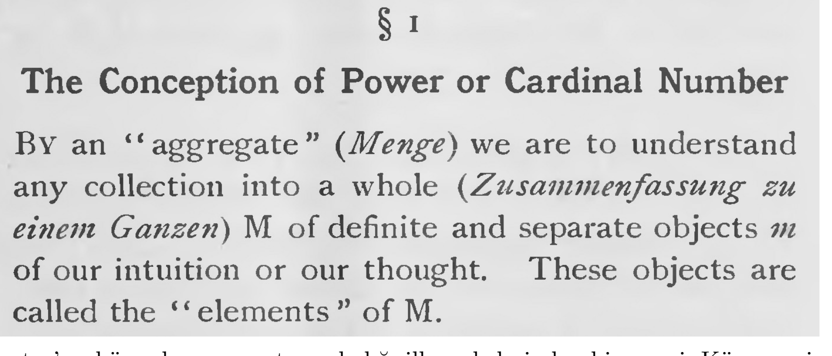
[3] Çağın iki ünlü matematikçisinden biri olan Poincaré'nin "Gelecek kuşaklar kümeler kuramını kurtulunması gereken bir hastalık olarak göreceklerdir" dediği söylenir (ancak 1992'de yayımlanmış bir makale Poincaré'nin böyle bir söz söylemediği iddia ediliyor [G].)

göremiyorlardı. Cantor 1874'te yayımladığı bir makalesinde iki sonsuz küme arasında (öge sayısı açısından mesela) derin farklar olabileceğini göstererek matematikte bir çığır açmıştır. Kümeler kuramının gelişimi onyıllar boyunca matematik dünyasında matematiksel ve felsefi düzeyde sert tartışmalara, hatta bilimsel kavgalara neden olmuştur.



Hayatını psikolojik sorunlarıyla boğuşarak geçiren Georg Cantor (1845-1918)

Cantor'un (matematiksel olduğunu hiç iddia etmediğimiz) küme tanımı şöyleydi: "Küme, algımızın ya da düşüncemizin açık ve net nesnelerinden oluşan bir topluluktur". Oysa günümüzün matematiğinde "küme" kavramı ve "bir kümenin ögesi olmak" ilişkisi matematiksel olarak tanımlanmadan kabul edilmesi gereken kavramlar olarak kabul edilir. Matematiğin diğer tüm kavramları bu iki kavrama dayandırılarak tanımlanabilir. Bunu şöyle algılayabilirsiniz: Tek bir kelime bilmediğiniz bir yabancı dilden, örneğin Macarcadan bir kelimenin anlamını Macarcadan Macarcaya bir sözlüğe bakarak anlayamazsınız; biraz Macarca bilmelisiniz ki bir kelimenin anlamını sözlüğe bakarak anlayabilesiniz. İşte "küme" ve $\in$ simgesiyle gösterilen "ögesi olmak" kavramları, matematikçenin tanımlanmadan bilindiği varsayılan kavramlarıdır. Bu iki kavram kullanılarak matematiğin diğer tüm kavramları karışıklığa yer vermeyecek biçimde tanımlanabilirler. Ama biz bu kitapta böyle bir uğraşa girmeyeceğiz, küme ve ögesi olmak kavramlarını açıklarken yaptığımız gibi gelecekte de okurun sezgilerine güveneceğiz.



§ I

The Conception of Power or Cardinal Number

BY an "aggregate" (*Menge*) we are to understand any collection into a whole (*Zusammenfassung zu einem Ganzen*) M of definite and separate objects *m* of our intuition or our thought. These objects are called the "elements" of M.

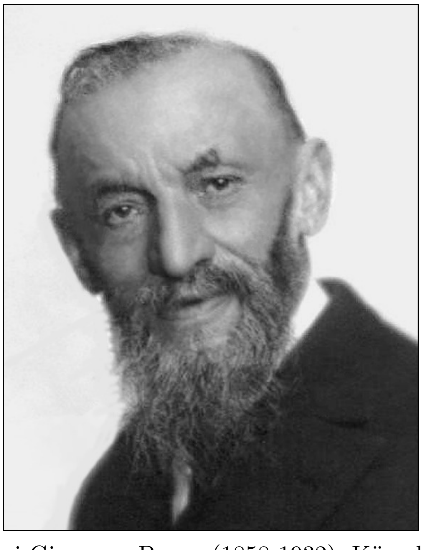
Cantor'un küme kavramını tanımladığı ilk makalesinden bir pasaj. Küme yerine "topluluk" kelimesini kullanmış, ama kümenin Almancası hâlâ daha makalede parantez içinde kullanılan *menge*'dir.

1.70. Kümeler kuramı matematiğe bakış açımızı da büyük ölçüde değiştirmiştir. Örneğin sayılar kuramı tamsayılardan ziyade tamsayılar kümesiyle ilgilendiği, geometrinin nokta ve doğrulardan ziyade nokta ve doğru kümeleriyle ilgilendiği anlaşılmıştır. Bu bakış açısı konuları soyutlamamızı ve genelleştirmemizi sağlamıştır. Kümeler kuramı modern matematiğin vazgeçilmezidir.

Yanlış anlaşılmasın, kümeler kuramı matematiğin özünü değiştirmemiştir; diğer konuların aksine matematikte doğrular değişmez, bundan iki bin küsur yıl önce kanıtlanmış teoremler bugün de geçerlidir, ama kümeler kuramı matematiğe bakış açımızı ve matematiği algılayışımızı dramatik bir biçimde değiştirmiştir.

Şunu da söylemek gerekiyor: Kümeler kuramı ve modern matematik, salt soyutlama olsun diye doğmamıştır. Kümeler kuramı bir nevi şımarıklık ya da züppelik değildir yani. Tüm kabul edilmiş kuramlar bir gereksinim sonucu ortaya çıkar, yani bir zorunluluktur.

1.71. a sayısı, İkinci Dünya Savaşı'nda savaş alanlarında ölen Fransız asker sayısı olsun. $A = \{a\}$ olsun. A bir kümedir ama a'nın kaça eşit olduğunu kimse bilmeyebilir. Demek ki bir kümenin oluşması için illa ögelerinin tam olarak bilinmesi gerekmiyor. b, Arjantin'de 1763 yılında doğan bebek sayısı olsun. $B = \{b\}$ olsun. Muhtemelen b sayısının kaça eşit olduğu da bilinmiyordur. Dolayısıyla $A = B$ eşitliğini ya da $A \neq B$ eşitsizliğini kanıtlayamayız. Tabii asker ve bebek matematiksel nesneler olmadığından, bu örnek pek matematiksel olmadı. Benzer örnekler matematiksel nesnelerle de verilebilir. Örneğin, C, iki asal sayının toplamı olarak yazılamayan 2'den büyük doğal sayılar kümesi olsun. $24 = 11 + 13$ olduğundan 24 bu kümenin bir ögesi değildir. $36 = 7 + 29$ olduğundan 36 da bu kümenin bir ögesi değildir. Bugün, bu satırların yazıldığı tarihte, C kümesinin boşküme olup olmadığı bilinmemektedir! Yani C diye bir küme var, ama kümenin hangi kümeye eşit olduğunu şimdilik bilmiyoruz, belki de hiçbir zaman bilemeyeceğiz!



Ünlü İtalyan matematikçi Giuseppo Peano (1858-1932). Kümeler kuramına, aritmetiğe ve analize yaptığı önemli katkılar dışında, *Latino sine flexione* (gramerden arındırılmış bir nevi Latince) adında yapay bir dil icat etmiştir. Bugün yapay dillerin en bilineni esperantodur. Peano ayrıca "Tanım nasıl tanımlanır" gibi yarı felsefi, yarı matematiksel konularla da ilgilenmiştir.

1.72. Kümeler kuramının hemen hemen tüm matematiğin temelini oluşturabileceği zamanla anlaşılmıştır. Yani kümelerden yola çıkarak matematiğin nokta, doğru, eğri, düzlem, tamsayı, kesirli sayı, gerçel sayı, boyut, toplama, çarpma, fonksiyon gibi tüm temel kavramları tanımlanabilir, ayrıca neredeyse tüm matematiksel kuramları kümeler kuramının içinde geliştirebiliriz. Bu yüzden de bugün kümeler kuramı matematiğin temeli konumundadır.

1.73. "Ögesi olmak" anlamında kullanılan $\in$ simgesi Yunan alfabesinin epsilon, yani e harfinin biraz stilize edilmiş şeklidir. Epsilon harfinin aslı ε biçimindedir. Epsilon harfi, eski Yunancada "olmak" anlamına gelen (ama "kümenin içinde**dir**" cümlesindeki "dir" eki anlamında kullanılan) "esti" ($\acute{\varepsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$) kelimesinin baş harfi olması nedeniyle ünlü İtalyan matematikçi Giuseppo Peano (1858-1932) tarafından 1889'da seçilmiştir. (Bu "esti" kelimesi Latinceye de geçmiş ve zamanla İngilizce *this is a door* cümlesindeki "is" ya da İtalyancadaki "essere" ve Fransızcadaki "être" yüklemlerine dönüşmüştür. Türkçede bu yüklemin görevi, "bu bir kapıdır" cümlesinde olduğu gibi "dır" ekiyle görülmektedir.)

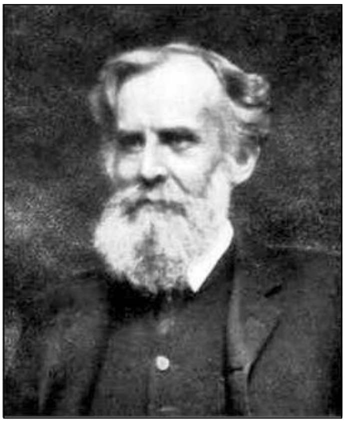
IV. *De classibus*.

Signo K significatur *classis*, sive entium aggregatio.

Signum ϵ significat *est*. Ita $a \epsilon b$ legitur *a est quoddam b*; $a \epsilon$ K significat *a est quaedam classis*; $a \epsilon$ P significat *a est quaedam propositio*.

Giuseppe Peano'nun 1889 tarihli **Arithmetices principia nova methodo exposita** adlı Latince yazılmış eserinde $\in$ simgesinin ilk kullanımı. Küme yerine "sınıf" anlamına gelen *classis* kelimesini kullandığı dikkatimizi çekiyor.

1.74. Mantık dahil pek çok bilimsel alanda sık sık kullanılan Venn diyagramları 1880 yılında mantıkçı ve felsefeci John Venn (1834-1923) tarafından bulunmuştur.



John Venn (1834-1923)

John Venn çok yönlü, toplumsal yaşamdan hiç uzak olmayan biriydi. Cambridge'in sivil toplum örgütlerinde çok faal olduğu anlaşılıyor. Mesela bir hayırseverler derneğinin başkan yardımcılığını, bir antikacılar derneğinin başkanlık görevini yürütmüştür. Hobileri arasında bahçecilik de vardı; güzel gül ve havuç yarışmaları birincilikleri vardır mesela. Bunun dışında kadınların seçme ve seçilme hakları için aktif olarak mücadele eden biriydi.

1.75. Sayfa 7'deki Küme Eşitliği Önermesi aslında bir ***belittir***. Belit, ya da Frekçesiyle aksiyom, ya da eskilerin deyimiyle postulat, doğruluğu kanıtlanmadan kabul edilen önerme anlamına gelir. Belitler sorgulanabilirler tabii, ama sorgulamak istemeyen de beliti gerekçesiz kabul eder. Küme Eşitliği Önermesi (daha doğrusu beliti), matematikçilerin

sorgulamaktan bile kaçındıkları belitlerdendir, o kadar özümsenmiştir. Çok daha ileri seviyede matematikte sorgulanabilecek kadar kuşku uyandıran belitler vardır.
Aslında Küme Eşitliği Önermesi, eğer istenirse, küme eşitliğinin tanımı olarak da kabul edilebilir.
Her kuram belitlerden oluşur, dolayısıyla kümeler kuramının da belitleri vardır, ama bu kitaplarda bu konuya girmeyeceğiz, sadece genel kültür olarak notlarda değineceğiz.
Metinde bir başka belit daha kullandık ama açık açık yazmadık. İşte o belit:

İki Ögeli Küme Önermesi: *Eğer x ve y birer kümeyse, öge olarak sadece ve sadece x ve y'yi içeren bir küme vardır.*

Küme eşitliği önermesinden dolayı, varolduğu söylenen bu küme tektir, ne de olsa kümenin ögelerinin x ve y olduğu söylenmiş. Bu kümenin $\{x, y\}$ olarak yazıldığını metinde söylemiştik.
Bir sonraki bölümde ifade edilen "Boşküme Önermesi" de aslında bir belittir.

1.76. Örnek 1.26'da tanımlanan 01-dizisi kavramı matematikte çok önemlidir, âdeta matematiğin iskeletidir. Ama bilgisayarlar yaygınlaşalı bu kavram çok daha önemli bir konuma gelmiştir, çünkü internet üzerinden yolladığınız her mesaj bilgisayarınız tarafından bir 01-dizisine dönüştürülüp karşı tarafa öyle yollanır. Mesajı yolladığınız kişinin bilgisayarı, aldığı bu 01-dizisini tekrar bildiğimiz dile çevirir.
İstenmeyen kişiler mesajı okuyamasın diye mesajlar şifrelenerek yollanır. Şifreleme konusu, anlaşılır nedenlerden, günümüzde çok önemli ve aktif bir araştırma alanıdır. İleride göreceğimiz asal sayıların da şifrelemeyle çok yakın bir ilişkisi vardır.

1.77. Doğal sayılar kümesini simgeleyen $\mathbb{N}$ harfi Latince kökenli dillerden kaynaklanmaktadır: İngilizce *natural*, Fransızca *naturel*, Almanca *natürlich* "doğal" demektir. Kelime Latince *naturalis*'ten gelmektedir. Ne yazık ki $\mathbb{N}$ simgesini ilk kez kimin kullandığını bilmiyorum. Sadece Türkçede gördüğüm sayma sayıları kümesinin simgesi $\mathbb{S}$ herhalde "sayma"nın se'sinden kaynaklanıyordur.

2. Boşküme

Bir önceki bölümde gördüğümüz tüm örneklerde kümelerin ögeleri vardı. Bu bölümde hiç ögesi olmayan bir kümeden söz edeceğiz.

Hiç ögesi olmayan bir küme var mıdır, daha doğrusu olmalı mıdır? Elbette olmalıdır! Örneğin her şeyi bilen insanlar kümesinin hiç ögesi yoktur, 2017 yılına kadar Türkiye'nin ya da ABD'nin cumhurbaşkanı olmuş kadınlar kümesinin hiç ögesi yoktur. Hiç ögesi olmayan kümeden bol ne var! (Ama birazdan hiç ögesi olmayan tek bir küme olduğunu kanıtlayacağız!)

Hiç ögesi olmayan bir kümenin varlığı kabul edilir:

Boşküme Önermesi: *Hiç ögesi olmayan bir küme vardır.*

Bu önermeyi bir nevi emir olarak algılayabilirsiniz.

Hiç ögesi olmayan kümeye ***boşküme*** denir. Boşkümenin bir tane bile ögesi yoktur. Boşküme $\emptyset$ simgesiyle gösterilir. Demek ki x ne olursa olsun, $x \notin \emptyset$.

Bazen boşkümenin $\{\ \}$ olarak gösterildiği de olur. (Aman içine toz kaçmasın!)

Sadece bir tane boşküme vardır! (Zaten önceki iki paragrafta da sadece bir tane boşküme olduğunu biliyormuşuz gibi "boşküme"den söz ettik.) Bunu hemen kanıtlayabiliriz. Hiç ögesi olmayan iki küme alalım, diyelim x ve y. Amacımız $x = y$ eşitliğini kanıtlamak. Kanıtlayalım. Diyelim x ve y kümeleri birbirine eşit değil. O zaman ikisinden birinde diğerinde olmayan bir öge olmalı, çünkü her ikisinin de aynı ögeleri olsaydı, sayfa 7'deki Küme Eşitliği Önermesi'nden dolayı, x ve y kümeleri birbirine eşit olurdu. Ama bu kümelerin hiç ögesi yok ki ikisinden birinde diğerinde olmayan bir öge olsun!.. Demek ki bu iki küme birbirine eşitmiş...

Boşkümeden sadece bir tane olduğundan ona ***boşküme*** adını verme ve onu $\emptyset$ simgesiyle gösterme hakkını kendimizde buluyoruz. İki tane olsaydı örneğin, birini $\emptyset_1$, diğerini $\emptyset_2$ olarak göstermek zorunda kalırdık.

Demek ki $s(\emptyset) = 0$ olur. Ayrıca $\emptyset$, 0 ögesi olan yegâne kümedir, yani $s(X) = 0$ ise $X = \emptyset$ olmak zorundadır.

Şimdi birçok okura ilk okuyuşta tuhaf geleceğini sandığımız bir teorem kanıtlayalım: Boşkümenin her ögesi 1'e eşittir! Kanıtın püf noktası boşkümenin hiç öge içermemesidir. Tanımı gereği hiç öge içermeyen boşkümenin her ögesi

1'e eşittir! Bunu kanıtlayalım. Diyelim ki savımız yanlış, yani boşkümenin her ögesi 1'e eşit değil... O zaman boşkümede 1'e eşit olmayan bir öge vardır. Ama hani boşkümede hiç öge yoktu? Hiç ögesi olmayan boşkümede 1'e eşit olmayan bir öge olabilir mi? Elbette olamaz. Demek ki boşkümenin her ögesi 1'e eşittir!

Dikkat edin, boşkümede 1' eşit bir öge var demiyoruz. Boşkümede hiç ögenin olmadığını biliyoruz tabii. Boşkümenin **her** ögesinin 1'e eşit olduğunu söylüyoruz.

Bu kanıtın bir benzeri, boşkümenin her ögesinin 2'ye eşit olduğunu da kanıtlar. Yani boşkümenin her ögesi hem 1'e hem de 2'ye eşittir, hatta hatta π'ye ve $\sqrt{2}$'ye ve adını kimsenin duymadığı her sayıya da eşittir... Neyse ki boşkümenin hiç ögesi yok... Olsaydı, $1 = 2$ gibi saçmasapan bir eşitlik kanıtlamış olacaktık!

Boşkümenin her ögesi istediğimiz tüm özellikleri sağlar. Boşkümenin her ögesi sarıdır, yeşildir, uzundur ve aynı zamanda kısadır da. Hiç ögesi olmayan boşkümenin tüm ögeleri tüm özellikleri ve eşitlikleri sağlar. Bunu boşkümenin hiç ögesi olmamasına borçluyuz.

Boşkümeyi boşlamayalım! En önemli birkaç kümeden biridir. Bir ögeli çok küme vardır, ama sıfır ögeli tek bir küme vardır: boşküme. Sadece bu özellik bile boşkümenin diğer kümelerden ayrışmasına, onun ayrıcalıklı olmasına yeter.

Örnekler

2.1. Şu an sınıfınızda bulunan develer kümesi çok muhtemelen boşkümedir!

2.2. Türkçede içinde sesli harf barındırmayan sözcükler kümesi boşkümedir.

2.3. Gözümüzden kaçan olmamışsa ya da bilim insanları laboratuvar ortamında üretmemişlerse, günümüzde yaşayan dinozorlar kümesi boşkümedir.

2.4. $x + 1 = 0$ denkleminin yegâne çözümü $x = -1$'dir, dolayısıyla bu denklemin doğal sayılardaki çözüm kümesi boşkümedir.

2.5. $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümü doğal sayılarda (ya da kesirli sayılarda ya da gerçel sayılarda) yoktur, çünkü x hangi sayı olursa olsun, $x^2 + 1$ sayısı 1'den küçük olamaz, demek ki 0 da olamaz. Dolayısıyla bu denklemin tamsayılardaki çözüm kümesi boşkümedir.

2.6. Boşkümenin her ögesi 0'dan büyük bir sayıdır, çünkü aksi halde boşkümede 0'dan büyük olmayan bir sayı olurdu! Aynı nedenden boşkümenin her ögesi 0'dan küçük bir sayıdır. Boşkümenin hiç ögesi olmaması bizi bir çelişkiden kurtarıyor.

2.7. Boşkümenin her ögesi $x^2+1 = 0$ denkleminin bir çözümüdür, çünkü aksi halde hiç ögesi olmayan boşkümede $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümü olmayan bir öge olurdu. Daha neler!

2.8. $\{\emptyset\}$ kümesi boşküme değildir, çünkü bir ögesi vardır, o da boşkümedir, yani $\emptyset \in \{\emptyset\}$ olur.

2.9. $\{\{\emptyset\}\}$ kümesinin de bir ögesi vardır, o da $\{\emptyset\}$ kümesidir. Ama $\{\{\emptyset\}\}$ kümesi bir önceki örnekteki $\{\emptyset\}$ kümesine eşit değildir, çünkü bu iki kümenin farklı ögeleri vardır.

2.10. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ kümesinin iki ögesi vardır, çünkü $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

2.11. Bu örnekte "ilkel" adını vereceğimiz bir kavram tanımlayacağız. Tanımımız şöyle: Eğer bir kümenin tüm ögeleri ilkelse, kümenin kendisine de "ilkel" diyelim. Bu tanıma göre boşküme ilkeldir, çünkü boşkümenin ilkel olmayan ögesi olamaz, ne de olsa boşkümenin (ilkel olsun ya da olmasın) hiç ögesi yoktur! Dolayısıyla $\{\emptyset\}$ kümesi de ilkeldir, çünkü yegâne ögesi olan $\emptyset$ ilkeldir. Buradan $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ kümelerinin de ilkel olduğu çıkar.

Alıştırmalar

2.12. Sınıfınızın, kardeşleri kümesi boşküme olan öğrencilerinden oluşan kümenin kaç ögesi vardır? (Türkçesi: Sınıfınızda kardeşi olmayan kaç öğrenci vardır?)

2.13. $2x + 8 = 13$ denkleminin doğal sayılar kümesindeki çözümlerinden oluşan kümeye A diyelim. $5x+25 = 13$ denkleminin tamsayılar kümesindeki çözümlerinden oluşan kümeye B diyelim. $5x^2 + 7 = 2$ denkleminin kesirli sayılar kümesinde olan çözümlerden oluşan kümeye C diyelim. $A = B = C$ eşitliğini gösterin.

2.14. Bir futbol takımında 1'den 11'e kadar numaralı 11 oyuncu var. Soyunma odasında da 1'den 11'e kadar numaralandırılmış dolaplar var. Dolapların hepsi başlangıçta kapalı. Birinci oyuncu dolapların hepsini açıyor. Sonra ikinci oyuncu odaya giriyor ve çift numaralı dolapları kapatıyor. Ardından üçüncü oyuncu giriyor ve 3'e bölünen numaralı dolapları açıksa kapatıyor, kapalıysa açıyor. Sonra sıra dördüncü oyuncuya geliyor, o da 4'e bölünen numaralı dolaplara müdahale ediyor, açıksa kapatıyor, kapalıysa açıyor. Bu böyle 11'inci oyuncuya kadar devam ediyor. n'inci oyuncudan sonraki açık dolaplar kümesine A_n diyelim. Başlangıçta tüm dolaplar kapalı olduğu için $A_0 = \emptyset$ tanımını yapalım. Elbette $A_1 = \{1, 2, \ldots, 11\}$ ve $A_2 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ olur. $A_3 = \{1, 5, 6, 7, 11\}$ eşitliğini bulmak zor değil. A_4'ten A_{11}'e kadar olan kümeleri bulun.

2.15. Yukarıdaki soruda, yedeklerle birlikte futbol takımında 20 oyuncu ve 20 dolap varsa, A_{20} kümesini bulun.

2.16. Yukarıdaki sorularda en sonda açık kalan dolaplar kümesinin oyuncuların odaya giriş sırasından bağımsız olduğunu gözlemleyin. Yani öğrenciler odaya hangi sırayla girerse girsin, en sonda hep aynı dolaplar açık kalır.

2.17. Bu soruda oyuncu ve dolap sayısını sonsuz yapalım: Oyuncuların numaraları 1, 2, 3 gibi sayma sayıları olsun. Dolaplar da aynen oyuncular gibi sayma sayılarıyla numaralandırılmış olsun. Her öğrenci teker teker odaya girip, kendi numarasının bir katı olan dolapları açıksa kapatsın, kapalıysa açsın; ama diğer dolaplara dokunmasın. Tüm öğrenciler odaya girip çıktığında (!) hangi dolaplar açık kalır?

2.18. Bülent boş bir odada bekliyor. Ayşe de odanın hemen dışında, kapının önünde. Ayşenin önünde 0, 1, 2 diye doğal sayılarla numaralandırılmış sonsuz sayıda top var. İlk aşamada Ayşe 0 ve 1 numaralı topları Bülent'e atıyor, Bülent de 0 numaralı topu pencereden dışarı atıyor. Sonra Ayşe 2 ve 3 numaralı topları Bülent'e atıyor, Bülent de 1 numaralı topu pencereden dışarı atıyor. Ardından Ayşe 4 ve 5 numaralı topları Bülent'e atıyor, Bülent de 2 numaralı topu pencereden dışarı atıyor. Ayşe her aşamada önündeki en küçük numaralı iki topu Bülent'e atıyor, Bülent de odadaki en küçük numaralı topu pencereden dışarı atıyor. Her aşamada Ayşe odaya 2 top atıyor, Bülent de pencereden dışarıya 1 top atıyor. Böylece odadaki top sayısı her aşamada 1 artıyor. Bülent'in her hamlesinden sonra odadaki top kümelerini şöyle gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\} \\ A_2 &= \{2, 3\} \\ A_3 &= \{3, 4, 5\} \\ A_4 &= \{4, 5, 6, 7\} \\ A_5 &= \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi Bülent'in n'inci hamlesinden sonra odada n tane top kalıyor. Genel olarak, Bülent'in n'inci hamlesinden sonra odadaki topların kümesi şöyle:

$$A_n = \{n,\, n+1, \ldots, 2n-1\}.$$

Top sayısı her aşamada 1 arttığından, bu sonsuz süreç sonlandığında[1] odada sonsuz tane top kaldığı düşünülebilir. Ama hayır! Odada hiç top kalmıyor. Nitekim Bülent tüm topları teker teker dışarı atıyor, ilk hamlesinde 0'ıncı topu, ikinci hamlesinde 1'inci topu, üçüncü hamlesinde 2'inci topu ve genel olarak $n+1$'inci hamlesinde n'inci topu pencereden atıyor. Dolayısıyla süreç tamamlandığında odada hiç top kalmıyor. Bunu şöyle de görebiliriz: Bülent'in her hamlesinden sonra dışarıdaki toplar kümesine bakalım:

$$\begin{array}{lcl} B_1 & = & \{0\} \\ B_2 & = & \{0,\, 1\} \\ B_3 & = & \{0,\, 1,\, 2\} \\ B_4 & = & \{0,\, 1,\, 2,\, 3\} \\ B_5 & = & \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4\} \\ & \ldots & \end{array}$$

Genel olarak

$$B_n = \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots, n-1\}$$

olur. Görüldüğü üzere her top bir zaman sonra kendini dışarıda bulur ve odada hiç top kalmaz. Hayat sürprizlerle dolu!

[1] Bu sonsuz sürecin sonlanabileceğini hayal edin.

3. Altküme

A ve B iki küme olsun. Eğer A'nın her ögesi B'nin de bir ögesiyse, A'ya B'nin ***altkümesi*** denir. Örneğin

$$\{0,\ 2,\ 5\}$$

kümesi

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 9\}$$

kümesinin bir altkümesidir çünkü birinci kümenin ögesi olan tüm ögeler (0, 2 ve 5 sayıları) ikinci kümenin de ögeleridir, ama $\{0, 2, 5\}$ kümesi,

$$\{1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 9\}$$

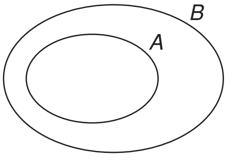
kümesinin bir altkümesi değildir çünkü bu son kümede 0 yoktur.

Eğer A, B'nin bir altkümesiyse, bunu

$$A \subseteq B$$

olarak gösteririz. Ender de olsa, bu durumda bazen B'nin A'nın ***üstkümesi*** olduğu söylenir. B'nin A'yı ***kapsadığı*** da söylenir. İki küme arasındaki bu $\subseteq$ ilişkisine ***kapsama ilişkisi*** ya da ***altküme olma ilişkisi*** diyeceğiz.

Eğer $A \subseteq B$ ise, Venn diyagramı şöyle bir şey olur:



Hayattan örnek vermek gerekirse, sınıfımızın kız öğrencilerinden oluşan küme, sınıfımızın (ya da okulumuzun) öğrencilerinden oluşan kümenin altkümesidir. Ya da ailemizin 18 yaşına girmemiş bireylerinden oluşan küme, ailemizin bireylerinden oluşan kümenin altkümesidir. Bir başka örnek, ikâmetgâhı İstanbul'da olan vatandaşlardan oluşan küme, tüm vatandaşlardan oluşan kümenin altkümesidir. Ama bir matematik kitabında matematiksel nesnelerden oluşan kümelerden söz etmek gerekir, biz de çoğunlukla öyle yapacağız. İşte matematiksel bir örnek:

$$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}.$$

Bir başkası:

$$\{0,\ 3,\ 5,\ 7\} \subseteq \{0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 11\}.$$

Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise, bunu

$$A \subseteq B \subseteq C$$

olarak kısaltacağız. Örneğin,

$$24\mathbb{N} \subseteq 12\mathbb{N} \subseteq 4\mathbb{N} \subseteq 2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$$

olur.

Bir A kümesinin bir B kümesinin altkümesi olmaması için, yani A'nın her ögesinin B'de olmaması için, A'da olan ama B'de olmayan en az bir öge olmalıdır; bu durum

$$A \not\subseteq B$$

olarak gösterilir. örneğin memeli hayvanlar kümesi dört ayaklı hayvanlar kümesinin altkümesi değildir, çünkü örneğin balina memeli bir hayvandır ama dört ayağı yoktur. Matematiksel bir örnek: $\{1,\ 2,\ 3\}$ kümesi $\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ kümesinin bir altkümesi değildir, çünkü birinci kümedeki 3 ögesi ikinci kümede değildir.

Sonlu bir kümenin altkümeleri de sonludur tabii. Hatta eğer $A \subseteq B$ ise ve B sonluysa, $s(A) \leq s(B)$ olur. Mesela 5 ögeli bir kümenin 6 ögeli altkümesi yoktur, yani 5 ögeli bir kümenin 6 ögeli altküme sayısı 0'dır. Söz açılmışken, 5 ögeli bir kümenin -3 ögeli altküme sayısının da 0 olduğunu belirtelim. -6 ögeli bir kümenin de 3 ögeli altküme sayısı 0'dır, çünkü -6 ögeli bir küme yoktur, olmayan bir kümenin altkümesi de olamaz! (Çok fazla mantık...)

Örnekler

3.1. Çift doğal sayılar kümesi $2\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesidir elbette, ne de olsa her çift doğal sayı bir doğal sayıdır. Yani $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ olur.

3.2. 6'ya bölünen doğal sayılar kümesi $6\mathbb{N}$, çift doğal sayılar kümesi $2\mathbb{N}$'nin bir altkümesidir. Yani $6\mathbb{N} \subseteq 2\mathbb{N}$ olur çünkü 6'ya bölünen bir doğal sayı mecburen 2'ye de bölünür yani bir çift sayı olur.

3.3. Ama $2\mathbb{N}$, $6\mathbb{N}$'nin bir altkümesi değildir, çünkü $2\mathbb{N}$ kümesinin bir ögesi olan 2, 6'ya bölünmediği için $6\mathbb{N}$ kümesinin bir ögesi değildir. Matematiksel simgelerle göstermek gerekirse, $2\mathbb{N} \not\subseteq 6\mathbb{N}$ olur.

3.4. Ne $3\mathbb{N}$, $5\mathbb{N}$'nin ne de $5\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$'nin bir altkümesidir. Ama mesela $15\mathbb{N}$ kümesi hem $3\mathbb{N}$ kümesinin hem de $5\mathbb{N}$ kümesinin bir altkümesidir.

3.5. $6\mathbb{N}$ ve $15\mathbb{N}$ kümeleri $3\mathbb{N}$ kümesinin altkümeleridir.

3.6. $\{0,\ 3,\ 9,\ 15\} \subseteq 3\mathbb{N}$ olur.

3.7. $\{a\}$ kümesi $\{a,\ b\}$ kümesinin bir altkümesidir.

3.8. $\{a,\ b\}$, $\{b,\ c\}$ ve $\{a,\ c\}$ kümeleri $\{a,\ b,\ c\}$ kümesinin birer altkümesidir. Ayrıca $\{a\}$, $\{b\}$ ve $\{c\}$ kümeleri de $\{a,\ b,\ c\}$ kümesinin bir altkümesidir.

3.9. $\{a\}$ kümesinin $\{b, c, d\}$ kümesinin bir altkümesi olması için yeter ve gerek koşul a'nın b, c ya da d'ye eşit olmasıdır.

3.10. Birazdan her kümenin kendisinin altkümesi olduğunu göreceğiz (Teorem 3.1.i), yani her x kümesi için $x \subseteq x$ olur, ama bu olgu daha şimdiden bariz olmalı.

3.11. Küme Eşitliği Önermesi'ne göre, $x = y$ olması için yeter ve gerek koşul $x \subseteq y$ ve $y \subseteq x$ önermelerinin doğru olmasıdır. Bunu da birazdan teorem adı altında yazacağız (bkz. Teorem 3.1.i ve ii).

3.12. Birazdan boşkümenin her kümenin altkümesi olduğunu kanıtlayacağız (Teorem 3.2), ama bir önceki bölümü hakkıyla okuyan okur için bu olgu daha şimdiden bariz olmalı.

3.13. $\{0, 1\}$ kümesi $\{0, 1, \{0, 1\}\}$ kümesinin hem bir ögesi hem de bir alkümesidir. Tuhaf ama gerçek! Bazen bir küme bir başka kümenin hem ögesi hem de altkümesi olabilir. Örnekler inşa etmek kolay: Mesela eğer $x = \{1, 2, 3\}$ ise, x kümesi $\{1, 2, 3, x\}$ kümesinin hem bir ögesi hem de bir altkümesidir.

3.14. 5 ögeli bir kümenin 6 ögeli altkümesi yoktur; 7 ögeli altkümesi de olamaz.

3.15. $\{2\}$ kümesi $\{1, 2\}$ kümesinin bir altkümesidir ama ögesi değildir. Ama $\{2\}$ kümesi $\{1, 2, \{2\}\}$ kümesinin hem bir ögesi hem de bir altkümesidir. 1 ise $\{1, 2, \{2\}\}$ kümesinin sadece bir ögesidir, bir altkümesi değildir. Ögelerle altkümeleri karıştırmamak lazım; örneğin birazdan göreceğimiz üzere, boşküme her kümenin altkümesidir, ama boşküme her kümenin ögesi değildir. (Neden olsun ki!) Mesela boşküme, boşkümenin bir ögesi değildir.

3.16. $A = \{0, 1, 2\}$ kümesinin iki ögeli altkümeleri: $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$.

3.17. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin iki ögeli altkümelerini bulalım:

$$\{0, 1\},\ \{0, 2\},\ \{0, 3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\}$$

Bunları belli bir sırayla yazdığımıza dikkat edin.

3.18. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin iki ögeli altkümelerini bulalım:

$$\begin{array}{cccc} \{0, 1\}, & \{0, 2\}, & \{0, 3\}, & \{0, 4\}, \\ & \{1, 2\}, & \{1, 3\}, & \{1, 4\}, \\ & & \{2, 3\}, & \{2, 4\}, \\ & & & \{3, 4\}. \end{array}$$

Görüldüğü üzere toplam 10 tane var. Okur herhalde buradan hareketle A'nın üç ögeli altkümelerini de bulabilir, onlardan da tam 10 tane vardır.

3.19. n ögeli kümenin n ögeli tek bir altkümesi vardır, o da kendisidir. Her kümenin 0 ögeli tek bir altkümesi vardır, o da boşkümedir.

3.20. n ögeli bir kümenin 1 ögeli altküme sayısı n'dir.

3.21. n ögeli bir kümenin $n - 1$ ögeli altküme sayısı n'dir. (Niye?)

3.22. 100 ögeli bir kümenin kaç tane 30 ögeli altkümesi vardır? Eğer daha önce bir yerden öğrenmemişseniz, bu aşamada bu tür sorunun çok zor olduğunu düşünebilirsiniz. Ama ileride çok kolay bir yöntemle bu sayının (eğer bir hesap hatası yapmadıysak!) 24.934.074.551.452.400.000.000 olduğunu hesaplayabileceğiz.

Hemen basit bir teorem kanıtlayalım:

Teorem 3.1. *A, B ve C herhangi iki küme olsun. O zaman şu önermeler doğrudur:*
i. *$A \subseteq A$ olur.*
ii. *$A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise $A = B$ olur.*
iii. *$A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ olur.*

Kanıt: **i.** A'nın her ögesi elbette A'nın bir ögesidir, dolayısıyla altküme olmanın tanımına göre $A \subseteq A$ olur.

ii. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ varsayımlarını yapalım. $A \subseteq B$ olduğundan A'nın her ögesi B'dedir. $B \subseteq A$ olduğundan B'nin her ögesi A'dadır. Demek ki A ile B kümelerinin aynı ögeleri vardır. Sayfa 7'deki Küme Eşitliği Önermesi'ne göre $A = B$ olur.

iii. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ varsayımlarını yapalım. A'dan rastgele bir öge alalım. $A \subseteq B$ olduğundan, bu öge B'dedir. Ama ayrıca $B \subseteq C$ olduğundan, B'de olan bu öge aynı zamanda C'dedir. Demek ki A'nın her ögesi C'dedir, yani $A \subseteq C$ olur. □

Teoremin ikinci maddesi, A ve B kümelerinin eşit olduklarını kanıtlamak için A ve B'nin birbirlerinin altkümesi olması gerektiğini söylüyor. Yani $A = B$ eşitliğini kanıtlamak için, kanıt genellikle iki bölüme ayrılır, birinde $A \subseteq B$ önermesi, diğerinde $B \subseteq A$ önermesi kanıtlanır.

Yukarıda kanıtladığımız üç önermeye boşkümenin her kümenin bir altkümesi olduğunu da eklemeliydik belki ama kanıtladığımız o üç önerme özel önermelerdir, onları bozmak istemedik. Boşkümenin her kümenin altkümesi olduğunu şimdi kanıtlayalım:

Teorem 3.2. *Her A kümesi için $\emptyset \subseteq A$ olur.*

Kanıt: Eğer $\emptyset \subseteq A$ önermesi doğru olmasaydı, yani boşkümenin her ögesi A'da olmasaydı, o zaman, boşkümede A'da olmayan bir öge olurdu, ama boşkümede hiç öge yoktur ki A'da olmayan bir ögesi olsun... Dolayısıyla boşküme A'nın bir altkümesidir. □

Notlar

3.23. Teorem 3.2'nin kanıt yöntemine "olmayana ergi" adı verilir. Bu kanıt yönteminde kanıtlanmak istenen önermenin (örneğimizde $\emptyset \subseteq A$ önermesi) yanlış olduğu varsayılır ve bu varsayımdan hareketle bir çelişki, yani bir saçmalık (örneğimizde boşkümenin bir ögesi olduğu saçmalığı) elde edilir. Böylece önermenin yanlış olduğunun yanlış olduğu, dolayısıyla önermenin doğru olduğu anlaşılır.

Olmayana ergi yöntemi mantıkta, "saçmaya indirgeme" demek olan Latince *reductio ad absurdum* sözleriyle ifade edilir.

3.24. Teorem 3.2'den dolayı $\emptyset \subseteq \{1\}$ olur. Demek ki boşkümenin her ögesi 1'e eşittir. Tabii aynı nedenden boşkümenin her ögesinin 2'ye eşit olduğu anlaşılır. Bundan daha önce de sözetmiş, hatta bu önermeleri kanıtlamıştık. Boşkümenin hiç öğesi olmadığından, bundan bir çelişki çıkmaz. Gayet tutarlıyız.

3.25. Sayfa 7'deki Küme Eşitliği Önermesi ya da sayfa 25'teki İki Ögeli Küme Önermesi gibi, sayfa 27'deki Boşküme Önermesi de bir belittir (bkz. Not 1.75), yani doğruluğu kanıtlanmadan kabul edilen önermelerdendir. Birazdan ifade edeceğimiz Altkümeler Kümesi Önermesi de bir başka belittir. Kümeler kuramının bu kitapta hiç söz etmeyeceğimiz başka belitleri de vardır.

Altkümeler Kümesi Önermesi: *Eğer X bir kümeyse, ögeleri X'in altkümelerinden oluşan bir küme vardır.*

Yukarıda var olduğu söylenen bu küme $\wp(X)$ olarak yazılır. Adına ***X'in kuvvet kümesi*** ya da daha doğal olarak ***X'in altkümeler kümesi*** denir. Demek ki $\wp(X)$ kümesinin ögeleri X kümesinin altkümeleridir, yani $Y \in \wp(X)$ önermesinin doğru olması için yeter ve gerek koşul $Y \subseteq X$ önermesidir. Örneklerle her şey daha anlaşılır olacak:

Örnekler

3.26. Her X kümesi için

$$\emptyset \subseteq X \text{ ve } X \subseteq X$$

önermelerinin doğruluğunu artık biliyoruz. Demek ki $\emptyset$, $X \in \wp(X)$. Ama bir kümenin genellikle başka altkümeleri de vardır. Oldukça basit bir örnekte bir kümenin tüm altkümelerini bulalım.

$$X = \{0, 1, 2\}$$

olsun. X'in tüm altkümelerini bulmak zor değildir, işte:

$$\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}.$$

Demek ki A'nın 8 tane altkümesi var ve

$$\wp(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

3.27. Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere 3 ögeli her kümenin 8 tane altkümesi vardır.

3.28. 2 ögeli bir kümenin 4 tane altkümesi vardır. örneğin $A = \{0, 1\}$ ise A'nın altkümeleri şunlardır:

$$0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}.$$

3.29. 1 ögeli bir kümenin 2 tane altkümesi vardır. örneğin $A = \{a\}$ ise A'nın altkümeleri şunlardır:

$$\emptyset, \{a\}.$$

3.30. 0 ögeli bir kümenin, yani boşkümenin tek bir altkümesi vardır, o da kendisidir, yani boşkümedir. Boşküme,tek bir altkümesi olma özelliğini sağlayan yegâne kümedir.

3.31. 4 ögeli bir kümenin 16 tane altkümesi olduğunu tahmin etmiş olabilirsiniz. Nitekim öyledir. Alıştırma olarak $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin 16 altkümesini bulun.

3.32. Eğer $x \subseteq y$ ise $\wp(x) \subseteq \wp(x)$ olur çünkü $a \subseteq x$ ve $a \subseteq y$ olduğundan $a \subseteq y$ olur. Bir başka deyişle "altküme olma" ilişkisi ***geçişli*** bir ilişkidir.

3.33. n ögeli bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır. örneğin 10 ögeli bir kümenin 2^{10}, yani 1024 tane altkümesi vardır. Bunu kanıtlamak o kadar zor değildir. 10 ögeli bir küme alalım, diyelim 0'dan 9'a kadar olan rakamları içeren kümeyi aldık. Bir altküme ögeleri tarafından belirlendiğinden, bir altküme yaratmak için 10 rakamın her biri için ya "evet, bu rakam altkümenin ögesidir" ya da "hayır, bu rakam altkümenin ögesi değildir" kararını almalıyız. Her rakam için iki karardan birini almak zorunda olduğumuzdan ve toplam 10 rakam olduğundan, toplam 2^{10} altküme seçeneği vardır.
Demek ki $s(A) = n$ ise, $s(\wp(A)) = 2^n$ olur.
$n = 3$ için söylediklerimizi daha da somutlaştıralım. Diyelim üç ögeli

$$X = \{a, b, c\}$$

kümesini aldık. X'in altkümeleri şunlardır:

$$\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c\},\ \{a,\ b,\ c\}.$$

Toplam 8 tane, yani 2^3 tane olduğu görülüyor. Bu kümeleri 01-dizileriyle sırasıyla şöyle kodlayabiliriz (açıklama hemen sonra gelecek):

$$000,\ 100,\ 010,\ 001,\ 110,\ 101,\ 011,\ 111.$$

Kodlamayı şöyle yaptık:
$\emptyset$'yi 000 ile temsil ettik çünkü boşkümede ne a var, ne b var, ne de c.
$\{a\}$ kümesini 100 ile temsil ettik çünkü sadece a kümede, b ve c kümede değiller. Dizinin ilk terimi olan 1, a'nın altkümede olduğunu söylüyor. Bu 1'den sonra gelen iki adet 0, b ve c'nin kümeye dahil olmadığını söylüyor.
$\{b,\ c\}$ kümesini 011 ile temsil ettik, çünkü a kümede değil (dizinin ilk terimi bu yüzden 0), ama b ve c altkümedeler (dizinin ikinci ve üçüncü terimi bu yüzden 1).

3.34. n ögeli bir kümenin iki ögeli altküme sayısını bulalım. n ögeli kümeye A diyelim. İki ögeli bir altküme seçmek demek aslında A kümesinden iki öge seçmek demektir. Birinci öge için n tane seçenek var. Birinci öge seçildikten sonra geriye $n-1$ tane seçenek kalır. Böylece toplamda (!) tam $n(n-1)$ tane seçenek vardır. Ama bir kümede "birinci öge", "ikinci öge" yoktur ki, yani $\{a,\ b\}$ kümesiyle $\{b,\ a\}$ kümesi arasında bir fark yoktur, oysa bulduğumuz $n(n-1)$ seçenekte bu iki yazılım iki farklı kümeye işaret ediyormuş gibi algılandı. Dolayısıyla bu sayıyı 2'ye bölmemiz lazım. Yani n ögeli bir kümenin 2 ögeli atküme sayısı $n(n-1)/2$'dir.

3.35. Eğer $B \subseteq C$ ise $\wp(B) \subseteq \wp(C)$ olur elbette. Bu dediğimiz aynen Teorem 3.1.iii önermesidir.

3.36. Eğer A bir kümeyse, $\wp(A)$ da bir kümedir, dolayısıyla $\wp(A)$'nın da altkümeleri vardır; bu altkümeler de elbette $\wp(\wp(A))$ kümesinin ögeleridir. örneğin $A = \{1, 2, 3\}$ ise,

$$\{\{1\}, \{1,\ 2\}\} \subseteq \wp(A)$$

olur çünkü soldaki kümenin her ögesi (ki sadece iki tane var), $\wp(A)$ kümesinin ögesidir, yani A'nın bir altkümesidir.

3.37. Her A kümesi için, $A \subseteq A$ olduğundan, her zaman $A \in \wp(A)$ olur. Peki, $A \in \wp(\wp(A))$ olduğu durumlar olur mu? Evet. Mesela $A = \emptyset$ ise, her X kümesi için $A \in \wp(X)$ olur (çünkü boşküme her kümenin altkümesidir), bunun özel bir durumu olarak ($X = \wp(A)$ alalım) $A \in \wp(\wp(A))$ olur. Peki... Boşkümeden başka bu özelliği sağlayan başka A kümeleri var mı? Evet var. Şu tanımları yapalım:

$$\begin{array}{lcl} A_0 & = & \emptyset \\ A_1 & = & \{A_0\} \\ A_2 & = & \{A_0,\ A_1\} \\ A_3 & = & \{A_0,\ A_1,\ A_2\} \\ A_4 & = & \{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3\} \end{array}$$

Her $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ için $A_i \in \wp(\wp(A_i))$ olur. Örnekleri çoğaltmak zor değil. Genel olarak, aşağıdaki önermeler mantıksal olarak eşdeğerdir, yani biri doğruysa diğeri de doğrudur:

$A \in \wp(\wp(A))$.
$A \subseteq \wp(A)$.
A'nın her ögesi $\wp(A)$'nın bir ögesidir.
A'nın her ögesi A'nın bir altkümesidir.

3.38. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. A'nın 2^5, yani 32 tane altkümesi olduğunu biliyoruz. A'nın 3 ögeli altkümelerini bulalım:

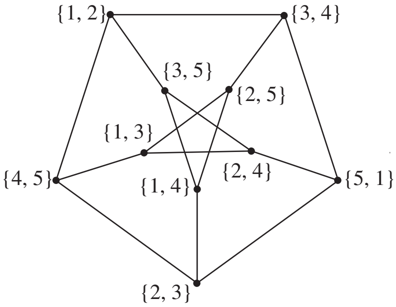
$$\begin{array}{l}\{1, 2, 3\},\ \{1, 2, 4\},\ \{1, 2, 5\},\ \{1, 3, 4\},\ \{1, 3, 5\},\ \{1, 4, 5\},\\ \{2, 3, 4\},\ \{2, 3, 5\},\ \{2, 4, 5\},\\ \{3, 4, 5\}.\end{array}$$

Toplam 10 tane var. (Altkümeleri belli bir sırayla yazdığımız gözünüzden kaçmamalı. Belli bir düzende yazmazsak arada unuttuklarımız olabilir, ya da tam tersine bazılarını yanlışlıkla iki defa yazabiliriz.) A'nın iki ögeli altkümeleri de aşağıda:

$$\begin{array}{l}\{4, 5\},\ \{3, 5\},\ \{3, 4\},\ \{2, 5\},\ \{2, 4\},\ \{2, 3\},\\ \{1, 5\},\ \{1, 4\},\ \{1, 3\},\\ \{1, 2\}.\end{array}$$

Bunlardan da toplam 10 tane var. İki listeyi karşılaştırdığınızda kümelerin birbirini tamamladığını görüyor musunuz? Aynı pozisyondaki kümeler birbirinin "tümleyeni", bu konuyu daha sonra da göreceğiz.

Bu örnekten güzel bir geometrik şekil ortaya çıkarabiliriz. Yukarıda listesini yaptığımız iki ögeli 10 kümenin her biri için düzleme bir nokta koyalım. Demek ki toplam 10 noktamız var. Noktaların adları kümelerin kendisi olsun. örneğin noktalardan birinin adı $\{1, 2\}$; bir diğerininki $\{2, 5\}$. Böyle bunun gibi 10 tane noktamız olsun. Eğer iki noktanın adları kesişmiyorsa, iki nokta arasına bir doğru parçası çizelim; örneğin $\{1, 2\}$ noktasıyla $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$ ve $\{4, 5\}$ noktalarını birleştirelim. Eğer noktaların adları kesişiyorsa noktaları birleştirmeyelim; örneğin $\{1, 2\}$ noktasıyla $\{1, 4\}$ noktasını birleştiren bir doğru parçası çizilmez. Eğer noktaları düzleme doğru biçimde yerleştirirsek aşağıdaki güzel şekli elde ederiz.



Bu şekil matematikte oldukça ünlüdür, Petersen çizgesi olarak bilinir.

Özaltküme. Eğer $Y \subseteq X$ ama $Y \neq X$ ise, Y'ye X'in ***özaltkümesi*** denir. Bu durum

$$Y \subset X$$

olarak gösterilir[1].

n ögeli bir kümenin 2^n tane altkümesi olduğunu söyledik. Demek ki n ögeli bir kümenin $2^n - 1$ tane özaltkümesi vardır.

[1] Maalesef birçok kitapta $\subseteq$ ile $\subset$ simgeleri arasında bir fark gözetilmez.

Boşkümenin ise özaltkümesi yoktur; yani boşkümenin özaltkümelerinden oluşan küme gene boşkümedir.

Alıştırmalar

3.39. $\{1, 3, 7\}$ kümesinin kaç altkümesi vardır? Hepsini bulun.

3.40. $\{1, 3, 5, 7\}$ kümesinin tüm altkümelerini bulun.

3.41. Sadece 5 altkümesi olan bir küme var mıdır?

3.42. Sadece 1268 altkümesi olan bir küme var mıdır?

3.43. Tam 1024 tane altkümesi olan bir kümenin kaç ögesi vardır?

3.44. $A = \{0, 1\}$ kümesinin 4 tane altkümesi vardır. Dolayısıyla $\wp(A)$ kümesinin 4 ögesi vardır. Bundan da $\wp(A)$ kümesinin 2^4, yani 16 tane altkümesi olduğu anlaşılır. Bir başka deyişle $\wp(\wp(A))$ kümesinin 16 tane ögesi vardır. Tüm bu ögeleri bulun.

3.45. 5 ögeli bir kümenin tüm altkümelerini bulun.

3.46. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin üç ögeli tüm altkümelerini bulun.

3.47. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin kaç tane üç ögeli altkümesi vardır?

3.48. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 1'i içeren kaç altkümesi vardır?

3.49. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 1 ve 2'yi içeren kaç altkümesi vardır?

3.50. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 1'i ya da 2'yi içeren (her ikisini birden de içerebilir) kaç altkümesi vardır?

3.51. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 1'i ya da 2'yi içermeyen (her ikisini birden de içermeyebilir) kaç altkümesi vardır?

3.52. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 1'i ve 2'yi içermeyen kaç altkümesi vardır?

3.53. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin sadece çift sayılardan oluşan kaç altkümesi vardır?

3.54. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin kaç altkümesinde 1 vardır ama 2 yoktur?

3.55. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin kaç altkümesinde 1 ve 2 bulunur ama 3 bulunmaz?

3.56. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin ögelerinin toplamı 13 olan kaç altkümesi vardır?

3.57. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin eşit sayıda tek ve çift sayı içeren kaç altkümesi vardır?

3.58. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olsun. A'nın altkümesi olan ama B'nin altkümesi olmayan kaç küme vardır?

3.59. $B \subset A$ olsun. $s(A) = n$ ve $s(B) = m$ olsun. A'nın altkümesi olan ama B'nin altkümesi olmayan $2^n - 2^m$ tane küme olduğunu gösterin.

3.60. $B \subset A$ olsun. $s(A) = n$ ve $s(B) = m$ olsun. $B \subset C \subseteq A$ özelliğini sağlayan C kümesi sayısının $2^{n-m} - 1$ olduğunu kanıtlayın.

3.61. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ olsun. A'nın en az bir tek sayı içeren altkümelerinin sayısını bulun.

3.62. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ olsun. A'nın tam iki çift sayı içeren altkümelerinin sayısını bulun.

3.63. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ve $C = \{8, 9\}$ olsun. A'nın B'yi kapsayan ama C ile ayrık olan altküme sayısını bulun.

3.64. A, B ve C yukarıdaki gibi olsun. A'nın C'yi kapsayan ama B ile ayrık olan altküme sayısını bulun.

3.65. A, B ve C yukarıdaki gibi olsun. A'nın C ve B ile ayrık olmayan altküme sayısını bulun.

3.66. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ ve $C = \{1, 8, 9\}$ olsun. A'nın C ve B ile ayrık olmayan altküme sayısını bulun.

3.67. $A = \{1, \{1, 2\}, \{2\}, \{1, 3\}, 3, 4\}$ kümesinin altkümelerinin kaçında 1 öge olarak bulunur?

3.68. $A \subseteq B$, $s(A) = 4$ ve $s(B) = 12$ ise B kümesinin 8 ögeli altkümelerinin kaçı A kümesini kapsar?

3.69. 4 ögeli bir kümenin kaç tane tek sayıda ögeli altkümesi vardır? Kaç tane çift sayıda ögeli altkümesi vardır?

3.70. 5 ögeli bir kümenin kaç tane tek sayıda ögeli altkümesi vardır? Kaç tane çift sayıda ögeli altkümesi vardır?

3.71. Yukarıdaki iki alıştırmadan, sonlu bir kümenin tek sayıda ögeli altküme sayısının çift sayıda ögeli altküme sayısına eşit olduğunu tahmin etmişsinizdir, yeter ki küme boşküme olmasın. a_n, n ögeli bir kümenin tek sayıda ögeli altküme sayısı olsun. b_n de n ögeli bir kümenin çift sayıda ögeli altküme sayısı olsun. Demek ki

$$a_n + b_n = 2^n.$$

Amacımız, eğer $n \geq 1$ ise $a_n = b_n = 2^{n-1}$ eşitliğini göstermek. $a_1 = b_1 = 1$ olduğunu gösterin. Demek ki $a_n = b_n = 2^{n-1}$ eşitliği $n = 1$ için doğru. Yukarıdaki iki alıştırmada $a_4 = b_4 = 2^3$ ve $a_5 = b_5 = 2^4$ eşitliklerini göstermiştiniz. Şimdi $a_{n+1} = a_n + b_n$ ve $b_{n+1} = b_n + a_n$ eşitliklerini gösterin. (İpucu: n ögeli kümeye X diyelim. X'in bir a ögesini sabitleyelim. X'in altkümelerini a'yı içerenler ve içermeyenler olarak ikiye ayırın.) Bundan da hemen $a_{n+1} = a_n + b_n = 2^n$ ve $b_{n+1} = b_n + a_n = 2^n$ eşitlikleri çıkar. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

3.72. 3 ögeli bir kümenin kaç tane 3 ögeli altkümesi vardır? 4 ögeli bir kümenin kaç tane 3 ögeli altkümesi vardır? 5 ögeli bir kümenin kaç tane 3 ögeli altkümesi vardır? Genel olarak n ögeli bir kümenin kaç tane 3 ögeli altkümesi vardır? (Bkz. Örnek 3.34. Aklınıza ilk gelen cevap yanlış olabilir, bu yüzden cevabınızın ilk sorulara verdiğiniz cevaplarla çakıştığını kontrol edin.)

3.73. "$A \in \wp(\wp(A))$" önermesiyle, "her $x \in A$ için $x \subseteq A$" önermesinin eşdeğer olduğunu kanıtlayın, yani biri doğruysa diğeri de doğrudur. (Bkz. Örnek 3.37.)

3.74. X sonlu bir küme ve $a \in X$ olsun. X'in a'yı içeren altküme sayısının, X'in a'yı içermeyen altküme sayısına eşit olduğunu gösterin. Eğer $s(X) = n$ ise, X'in a'yı içeren (ya da içermeyen) kaç tane altkümesi vardır?

3.75. X, n ögeli sonlu bir küme ve $a, b \in X$ olsun. $a \neq b$ varsayımını yapalım. X'in a ya da b'den en az birini içeren kaç altkümesi vardır?

4. Kümesel İşlemler

Bu bölümde kümelerle ilgili birkaç işlem göreceğiz. Yani bir ya da daha fazla kümeden başka kümeler elde etmeyi öğreneceğiz.

4.1 Bileşim

A ve B adında iki küme alalım. A ya da B kümelerinden en az birinde olan ögelerden oluşan kümeye A ile B kümelerinin ***bileşimi*** adı verilir. örneğin,

$$A = \{0,\ 2,\ 5,\ 7\} \text{ ve } B = \{1,\ 3,\ 5,\ 9\}$$

ise, bu iki kümenin bileşimi

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$$

kümesidir. Bu bileşim $A \cup B$ olarak yazılır. Demek ki yukarıdaki örnekte

$$A \cup B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$$

oluyor. Bileşim kümesinde her iki kümede birden olan ögeler de yer alır.

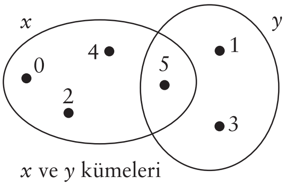
Sonuç olarak $A \cup B$ kümesinin ögeleri ya A'nın ya da B'nin ögelerinden oluşur, bunlara aynı anda hem A'da hem de B'de olan ögeler de dahildir. Matematikte ve mantıkta "ya şu koşul ya da bu koşul" dendiğinde her iki koşulun da doğru olduğu durumlar da kapsanır. (Günlük konuşmada "ya sinemaya ya da pikniğe gideceğiz" dendiğinde, genel olarak iki işten sadece biri yapılacağı anlaşılır; ama matematikte ve mantıkta öyle değildir, bu cümle mantıksal anlamıyla her iki işin birden yapılacağı durumu da kapsar.)

Örnekler

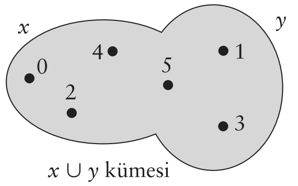
4.1. $x = \{0,\ 2,\ 4,\ 5\}$ ve $y = \{1,\ 3,\ 5\}$ kümelerinin bileşimi olan

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

kümesinin Venn diyagramı aşağıda:



x ve y kümeleri



$x \cup y$ kümesi

4.2. Hayattan bir örnek alalım. Sınıfımızın öğrencilerini yanında yaşlarıyla birlikte listeleyelim: Ahmet (16), Beyza (13), Celal (14), Doğan (14), Esengül (15), Furkan (14), Gökhan (15), Hümeyra (15), İhsan (13), Jale (14). O zaman sınıfımızın 15 yaşına basmış öğrencilerinden oluşan kümeyle sınıfımızın kız öğrencilerinden oluşan kümenin bileşimi,

Ahmet, Beyza, Esengül, Gökhan, Hümeyra ve Jale

öğrencilerinden (ögelerinden) oluşur. Görüldüğü gibi Esengül ve Hümeyra da bu kümenin ögeleriler.

4.3. Eğer x çift doğal sayılar kümesiyse, y de 3'e bölünen doğal sayılar kümesiyse, o zaman $x \cup y$ bileşimi ya 2'ye ya da 3'e bölünen doğal sayılar kümesi olur. 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9 sayılarını içerir ama 1, 5, 7 sayılarını içermez.
Doğal sayılar kümesinin $\mathbb{N}$ ile gösterildiğini söylemiştik. Demek ki bir önceki paragraf

$$0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9 \in 2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N} \text{ ve } 1,\ 5,\ 7 \notin 2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}$$

diyor.

4.4. $3,\ 15 \notin 6\mathbb{N} \cup 9\mathbb{N}$ olur.

4.5. Her A kümesi için, $A \cup A = A$ olur.

4.6. Bileşimin tanımı gereği, her A ve B kümesi için, $A \subseteq A \cup B$ olur. Tabii aynı zamanda $B \subseteq A \cup B$ olur.

4.7. Elbette her A ve B kümesi için $A \cup B = B \cup A$ olur, çünkü A ve B kümelerinden en azından birinde olan ögeler, aynen, B ve A kümelerinden en azından birinde olan ögelerdir, ne bir fazla ne bir eksik.

4.8. Eğer $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ olur. örneğin $A = \{2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise $A \cup B = B$ olur. Sınıftan bir örnek: Kız öğrenciler kümesiyle öğrenciler kümesinin bileşimi gene öğrenciler kümesidir. 14 yaşından büyük öğrenciler kümesiyle 13 yaşından büyük öğrenciler kümesinin bileşimi gene 13 yaşından büyük öğrenciler kümesidir.
Bu olgunun özel bir durumu olarak, Teorem 3.2'den dolayı, her B kümesi için $\emptyset \cup B = B$ olur, bir başka deyişle boşküme, bileşim işleminin ***etkisiz ögesidir***.

4.9. Bir önceki maddede söylediğimizin diğer istikameti de doğrudur, yani $A \cup B = B$ ise, $A \subseteq B$ olmak zorundadır, nitekim A'nın her ögesi $A \cup B$ kümesinin bir ögesidir ve $A \cup B = B$ varsayımı sayesinde $A \cup B$ kümesinin her ögesinin B kümesinde olduğu anlaşılır. Demek ki A'nın her ögesi B kümesinin bir ögesidir. Dolayısıyla $A \subseteq B$ olur.

4.10. Biraz daha somut bir örnek verelim: $3\mathbb{N} \cup 12\mathbb{N} = 3\mathbb{N}$ olur; çünkü 12'ye bölünen her doğal sayı 3'e de bölünür, yani $12\mathbb{N} \subseteq 3\mathbb{N}$ olur. Öte yandan $12\mathbb{N}$ ile $15\mathbb{N}$ kümeleri "altküme olma ilişkisi" açısından karşılaştırılamaz, hiçbiri diğerinin altkümesi değildir, dolayısıyla bu iki altkümenin bileşimi ikisinden de daha büyük bir kümedir.

4.11. Bileşimin belli başlı özelliklerini toplu halde yazalım: Her x, y ve z kümesi için aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. Değişme özelliği : $x \cup y = y \cup x$.
2. Etkisiz Öge : $x \cup \emptyset = x$.
3. Birleşme özelliği : $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$.
4. Tekkuvvetli İşlem : $x \cup x = x$.

5. Eğer x, $y \subseteq z$ ise $x \subseteq x \cup y \subseteq z$ olur.
6. $x \subseteq y$ ve $x \cup y = y$ önermelerinden biri doğruysa diğeri de doğrudur.

4.12. Eğer x bir kümeyse, x kümesi $x \cup \{x\}$ kümesinin aynı zamanda hem bir ögesi hem de bir altkümesidir.

4.13. Biraz önce sözünü ettiğimiz birleşme özelliğini biraz açalım. A, B ve C üç küme olsun. $A \cup B$ ile C'nin bileşimi alınabilir, yani $(A \cup B) \cup C$ kümesinden söz edebiliriz. Ve tabii ki $A \cup (B \cup C)$ kümesinden de söz edebiliriz. "Birleşme özelliği" adı verilen

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

eşitliği bariz olmalı. Bu eşitlik, birden fazla kümenin bileşimi alınırken bileşimin hangi sırayla alındığının önemli olmadığını söylüyor, dolayısıyla parantezleri tamamen kaldırıp $(A \cup B) \cup C$ ya da $A \cup (B \cup C)$ yerine $A \cup B \cup C$ yazabiliriz. Aynı şey dört kümenin bileşimi için de geçerlidir, örneğin

$$(A \cup B) \cup (C \cup D) = A \cup ((B \cup C) \cup D) = ((A \cup B) \cup C) \cup D$$

olur; bu kümenin yerine de çok daha sade olarak $A \cup B \cup C \cup D$ yazabiliriz. Bu örnekleri elbette çoğaltabiliriz. $A \cup B \cup C \cup D$ ifadesinin kaç farklı biçimde parantezleneceği ilginç bir alıştırmadır.

4.14. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 5\}$ olsun. $\{2, 5\} \notin \wp(A) \cup \wp(B)$ olur, çünkü $\{2, 5\}$ kümesi ne A'nın ne de B'nin bir altkümesidir. Ama $\{2, 5\} \in \wp(A \cup B)$ olur.

4.15. Her A ve B kümesi için $\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$ olur, ama yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere her zaman eşitlik olmak zorunda değil. Bkz. Alıştırma 4.17.

4.16. $A_0 = \emptyset$ olsun ve her n doğal sayısı için,

$$A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$$

tanımını yapalım. Örneğin burada $n = 0$ alırsak,

$$A_1 = A_{0+1} = A_0 \cup \{A_0\} = \emptyset \cup \{A_0\} = \{A_0\}$$

olur. Sonra, bundan yararlanıp,

$$A_2 = A_{1+1} = A_1 \cup \{A_1\} = \{A_0\} \cup \{A_1\} = \{A_0, A_1\}$$

buluruz. Okur,

$$A_3 = \{A_0, A_1, A_2\}$$

ve

$$A_4 = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$$

eşitliklerini kontrol edebilir.
(İnanması belki zor ama "gerçek" matematikte n sayısı A_n kümesi olarak tanımlanır; böylece $A_4 = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ eşitliği $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ eşitliğine dönüşür.)

Alıştırmalar

4.17. A ve B iki küme olsun. $\wp(A) \cup \wp(B) = \wp(A \cup B)$ eşitliğinin geçerli olması için iki kümeden birinin diğerinin altkümesi olmasının yeter ve gerek olduğunu gösterin.

4.18. $\wp(A) \subseteq \wp(B)$ ile $A \subseteq B$ önermelerinin eşdeğer olduklarını kanıtlayın, yani önermelerden biri doğruysa diğerinin de doğru olduğunu kanıtlayın.

Burada sonlu sayıda kümenin bileşimini almayı gördük, ileride sonsuz sayıda kümenin bileşimini de almayı göreceğiz. Ama önce iki kümenin kesişimini görelim.

4.2 Kesişim

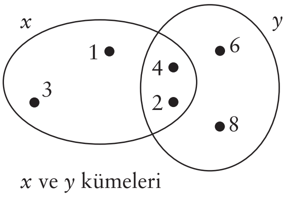
İki kümenin ***kesişimini*** (ya da ***arakesitini***) almak iki kümenin bileşimini almak kadar kolaydır. Örneğin sınıfımızın öğrencileri kümesiyle okulumuzun kız öğrencileri kümesinin kesişimi sınıfımızın kız öğrencileri kümesidir. Daha matematiksel bir örnek: Eğer

$$x = \{1, 2, 3, 4\} \text{ ve } y = \{2, 4, 6, 8\}$$

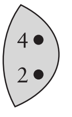
ise, bu iki kümenin kesişimi

$$\{2, 4\}$$

kümesidir, yani iki kümenin ortak ögelerinden oluşan kümedir. Resmi aşağıda:



x ve *y* kümeleri



$x \cap y$ kümesi

İki kümenin kesişimi ya da arakesiti her iki kümede **birden** olan ögelerin kümesidir. x ve y kümelerinin kesişimi

$$x \cap y$$

olarak gösterilir.

Örnekler

4.19. Denizde yaşayan hayvanlar kümesiyle memeli hayvanlar kümesinin kesişiminde balina ve fok gibi denizde yaşayan memeli hayvanlar vardır. Ama aslan ve yarasa bu kümenin ögeleri değildir. Tavuk hele hiç değildir!

4.20. Eğer x çift doğal sayılar kümesiyse, y de 3'e bölünen doğal sayılar kümesiyse, $x \cap y$ kesişimi 6'ya bölünen doğal sayılar kümesidir. Yani $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} = 6\mathbb{N}$ olur. Bir başka örnek: $6\mathbb{N} \cap 9\mathbb{N} = 18\mathbb{N}$ olur. Öte yandan $6\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z} = 18\mathbb{Z}$ olur.

4.21. Tabii ikiden fazla kümenin de kesişimini alabiliriz. Birleşme özelliği kesişim için de geçerlidir, yani her x, y, z kümesi için $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ olur, dolayısıyla kesişim alınırken parantez kullanmak gereksizdir.

4.22. Bazen iki kümenin kesişimi boşküme olur. örneğin tek doğal sayılar kümesiyle çift doğal sayılar kümesinin kesişimi boşkümedir. Bu durumda iki kümeye ***ayrık kümeler*** denir.

4.23. Bileşim için yaptığımız gibi ayrıntılara girmeyip, kesişimin birkaç özelliğini sıralayalım:

1. Değişme özelliği : $x \cap y = y \cap x$.
2. Etkisiz Öge : $x \cap \emptyset = \emptyset$.
3. Tekkuvvetli İşlem : $x \cap x = x$.
4. Birleşme özelliği : $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$.
5. Eğer $z \subseteq x$ ve $z \subseteq y$ ise $z \subseteq x \cap y$ ve $x \cap y \subseteq x$ olur.
6. Eğer $x \subseteq y$ ise $x \cap y = x$ olur.
7. Eğer $x \cap y = x$ ise $x \subseteq y$ olur.

Bunların her birinin kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

4.24. Eğer $z \subseteq x$ ve $x \cap y = \emptyset$ ise, elbette $z \cap y = \emptyset$ olur. Daha genel olarak, ayrık iki kümenin altkümeleri de ayrıktır.

4.25. Birleşme özelliği sayesinde, ikiden fazla kümenin kesişimini alırken parantezlere gerek yok, dolayısıyla $x \cap (y \cap z)$ yerine $x \cap y \cap z$ yazabiliriz. Değişme özelliğinden dolayı da kümelerin yerlerini istediğimiz gibi değiştirebiliriz. Tekkuvvetli işlem özelliğinden dolayı da kesişimde her kümeyi tek bir defa yazmak yeterli. Yutma özelliğinden dolayı da kesişimden üstkümeleri atıp sadece altkümelerle yetinebiliriz. Mesela kesişimi alınan kümelerden biri boşkümeyse, tüm kesişim boşküme olur.

4.26. $x \cap y = x$ eşitliğinin doğru olması için, $x \subseteq y$ önermesi yeter ve gerek koşuldur. Nitekim yukarıdaki "yutma" maddesinde $x \subseteq y$ ise $x \cap y = x$ olduğunu gördük. Diğer taraftan, eğer $x \cap y = x$ ise, x'in her ögesi $x \cap y$ kümesinde olduğundan, x'in her ögesi aynı zamanda y kümesindedir.

4.27. $\wp(x) \cap \wp(y) = \wp(x \cap y)$ olur. Bunun kanıtı oldukça kolaydır:
Eğer $z \in \wp(x) \cap \wp(y)$ ise, z, hem x'in hem de y'nin bir altkümesidir, dolayısıyla $x \cap y$ kesişiminin bir altkümesidir, yani $z \in \wp(x \cap y)$ olur.
Ters istikamette: Eğer $z \in \wp(x \cap y)$ ise, z, $x \cap y$ kesişiminin, dolayısıyla x'in bir altkümesidir, yani $z \in \wp(x)$ olur. Benzer nedenden $z \in \wp(y)$ olur. Demek ki $z \in \wp(x) \cap \wp(y)$ olur.

4.28. $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N} \cap 4\mathbb{N} = 12\mathbb{N}$ olur. Ama $2\mathbb{N} \cap 4\mathbb{N} \cap 8\mathbb{N} = 8\mathbb{N}$ olur.

Alıştırmalar

4.29. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olsun. A'nın, $s(B \cap C) = 3$ eşitliğini sağlayan C altkümelerinin sayısını bulun.

4.30. Hangi koşulda $A \cap B = A \cup B$ olur?

4.31. $6\mathbb{N} \cap 9\mathbb{N}$ kümesini bulun.

4.32. $26\mathbb{N} \cap 39\mathbb{N}$ kümesini bulun.

4.33. $30\mathbb{N} \cap 42\mathbb{N} \cap 70\mathbb{N}$ kesişimini bulun.

4.34. n ve m iki pozitif doğal sayı olsun. $n\mathbb{N} \cap m\mathbb{N}$ kümesinde sonsuz tane öge olduğunu gösterin.

4.35. $3\mathbb{N}+1$, daha önce de yaptığımız gibi $\{1, 4, 7, \dots\}$ kümesi olsun, yani 3'e bölündüğünde 1 kalanını veren doğal sayılar kümesi olsun. $5\mathbb{N}+3$ de tahmin edilen küme olsun. $(3\mathbb{N}+1) \cap (5\mathbb{N}+3) = 15\mathbb{N}+13$ eşitliğini kanıtlayın.

4.36. $(3\mathbb{N}+1) \cap (5\mathbb{N}+1)$ kesişimini bulun.

4.37. $(6\mathbb{N}+1) \cap (9\mathbb{N}+5) = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın.

4.38. $(10\mathbb{N}+1) \cap (15\mathbb{N}+8)$ kesişimini bulun.

4.39. $(10\mathbb{N}+1) \cap (15\mathbb{N}+11)$ kesişimini bulun.

4.40. 10 ögeli bir kümenin 5 ve 8 ögeli iki altkümesinin kesişiminde en az 3 öge olmalıdır. Neden?

4.41. 10 ögeli bir kümenin 6, 7 ve 8 ögeli üç altkümesinin kesişiminin boşküme olamayacağını kanıtlayın.

4.42. Herkesin en az bir renk sevdiği 40 kişilik bir toplulukta 30 kişi maviyi, 20 kişi kırmızıyı seviyor. Kaç kişi hem maviyi hem de kırmızıyı sever?

4.43. 100 kişilik bir toplulukta 60 kişi maviyi, 50 kişi kırmızıyı, 40 kişi de hem maviyi hem kırmızıyı seviyor. Ne maviyi ne de kırmızıyı seven kaç kişi vardır?

4.44. Kesişimi boşküme olan kümelere ***ayrık*** kümeler dendiğini anımsatalım. Eğer A ve B sonlu kümeleri ayrıksa elbette $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur. Herhangi iki sonlu A ve B

kümesi için,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlayın. Herhangi üç sonlu A, B ve C kümesi için,

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(C \cap A) + s(A \cap B \cap C)$$

eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlayın.
Yukarıdaki formüllerin benzerlerini iki ya da üç sonlu küme yerine dört sonlu küme için bulun. Genel formülü tahmin edebilir misiniz?

4.45. 1 ve 100 dahil, 1'den 100'e kadar olan sayıların kaçı 2'ye ya da 3'e bölünür? B, 2'ye bölünen sayıların, C de 3'e bölünen sayıların kümesi olsun. Tabii sadece, 1 ile 100 dahil, 1 ila 100 arasındaki sayıları dikkate alıyoruz. Biraz düşününce $s(B) = 50$ ve $s(C) = 33$ olduğu anlaşılır. Aradığımız sayı $s(B \cup C)$ sayısıdır. Bir önceki örneğe göre,

$$s(B \cup C) = s(B) + s(C) - s(B \cap C)$$

olur. Öte yandan $B \cap C$, 6'ya bölünen sayıların kümesidir ve bu kümenin de tam 16 tane ögesi vardır. Demek ki,

$$s(B \cup C) = s(B) + s(C) - s(B \cap C) = 50 + 33 - 16 = 67$$

olur. Bu formüllerin benzerlerini iki ya da üç sonlu küme yerine dört sonlu küme için bulun. Genel formülü tahmin edebilir misiniz?

4.46. Bir toplulukta 50 kişi maviyi, 40 kişi kırmızıyı, 30 kişi sarıyı, 12 kişi hem maviyi hem kırmızıyı, 10 kişi hem maviyi hem sarıyı, 15 kişi hem kırmızıyı hem sarıyı, 7 kişi hem maviyi hem kırmızıyı hem de sarıyı seviyor. Bu toplulukta mavi, kırmızı ya da sarı renklerinden en az birini seven kaç kişi vardır?

4.47. 1 ve 1000 dahil, 1'den 1000'e kadar olan doğal sayıların kaçı 3'e ya da 5'e bölünür?

4.48. 1 ve 1000 dahil, 1'den 1000'e kadar olan doğal sayıların kaçı 6'ya ya da 8'e bölünür?

4.49. 1 ve 1000 dahil, 1'den 1000'e kadar olan doğal sayıların kaçı 3'e, 5'e ya da 7'ye bölünür?

4.50. 1 ve 1000 dahil, 1'den 1000'e kadar olan doğal sayıların kaçı 6'ya, 10'a ya da 15'e bölünür?

4.51. Eğer $\emptyset \in X$ ise, elbette $\emptyset \in X \cap \wp(X)$ olur, yani X ile $\wp(X)$ kümeleri ayrık olmaz. Öyle bir X kümesi örneği verin ki $\emptyset \notin X$ olsun ve X ile $\wp(X)$ kümeleri ayrık olmasın.

4.3 Bileşim ve Kesişim

Kesişimi ve bileşimi tanımladık ve bu iki işlemin kendi aralarındaki ilişkileri ayrı ayrı irdeledik. Ama kesişimle bileşim arasındaki ilişkiyi pek irdelemedik. Burada bunu yapacağız. Önce problemi anlamaya çalışan birkaç örnek verelim:

Örnekler

4.52. İkiden fazla kümenin bileşimini ya da kesişimini alırken parantezlerin önemsiz olduğunu gördük. Ama dikkat, eğer ifadede hem bileşim hem de kesişim varsa parantezler önem kazanır. örneğin

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{2, 3, 4\} \text{ ve } C = \{3, 4, 5\}$$

ise

$$(A \cup B) \cap C = \{3, 4\}$$

olur ama

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

olur, yani $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ eşitliği doğru değildir, parantezlerin yerlerini değiştirirsek küme değişir. Dolayısıyla $A \cup B \cap C$ gibi bir ifade anlamlı değildir, anlamlı olması için illa parantez koymak gerekir.

4.53. Her A, B ve C kümesi için

$$(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$$

olur. Bunu kanıtlayalım. Bunun için eşitliğin sol tarafındaki kümeden bir x ögesi alıp bu ögenin sağ taraftaki kümede olduğunu gösterelim. x ögesi hem $A \cup B$'de hem de C'de. Demek ki $x \in A \cup B$. Önümüzde iki şık var: Ya $x \in A$ ya da $x \in B$. Birinci şıkta $x \in A \cup (B \cap C)$ olur; tam istediğimiz gibi. İkinci şıkta, yani $x \in B$ şıkkında, x aynı zamanda C'nin bir ögesi olduğundan, $x \in B \cap C$ olur, dolayısıyla $x \in A \cup (B \cap C)$ olur; bu da tam istediğimiz gibi. Her iki şıkta da x'in sağ taraftaki kümede olduğunu kanıtladık.

Bir önceki örnekten dolayı eşitliğin olmayacağını biliyoruz.

4.54. Herhangi üç küme alalım, diyelim A, B ve C ve şu soruyu soralım: $(A \cap B) \cup C$ ile $A \cap (B \cup C)$ arasında nasıl bir ilişki vardır? Cevabı verelim:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$$

olur. Bunun kanıtını ve eşitliğin her zaman doğru olmadığını bir örnekle göstermeyi okura bırakıyoruz.

Kümelerin bileşimiyle kesişim arasında çok önemli iki ilişki vardır:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

eşitliği ve bunun benzeri olan

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

eşitliği. Bu eşitliklere ***dağılma özelliği*** adı verilir, birincisi kesişimin bileşime dağıldığını söyler, ikincisi ise bileşimin kesişime; yani her iki işlem de birbirine dağılır. Bu eşitlikleri sayılarda geçerli olan $x(y + z) = xy + xz$ eşitliğine benzetebilirsiniz.

Bu eşitliklerden birincisini kanıtlayalım.

Önce

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

kapsama ilişkisini kanıtlayalım. Sol taraftaki kümeden bir x ögesi alalım, yani $x \in A \cap (B \cup C)$ olsun. x'in sağ taraftaki kümede olduğunu göstereceğiz. $x \in A \cap (B \cup C)$ olduğundan, x hem A'da hem de $B \cup C$'de. $x \in B \cup C$ ilişkisi x'in ya B'de ya da C'de olduğunu söylüyor. (x her ikisinde birden de olabilir tabii.) x'in B ya da C'de olduğuna göre durumu iki şıkka ayıralım. Eğer $x \in B$ ise, o zaman $x \in A \cap B$ olur, dolayısıyla $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olur. Eğer $x \in C$ ise, o zaman $x \in A \cap C$ olur, dolayısıyla $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olur. Her iki durumda da x'in $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ kümesinde olduğunu gösterdik. Böylece istediğimizin yarısı kanıtlandı.

Şimdi

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$

kapsama ilişkisini kanıtlayalım. (Böylece kanıtımız bitmiş olacak.) Sol taraftaki kümeden herhangi bir x ögesi alalım, yani $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olsun. Demek ki x ya $A \cap B$ ya da $A \cap C$ kümesinde. Önce birinci durumu alalım, yani diyelim $x \in A \cap B$. Buradan $x \in A$ çıkar; ayrıca $x \in B$ de çıkar. Ama $x \in B$ olduğundan, $x \in B \cup C$ olur. Demek ki hem $x \in A$ hem de $x \in B \cup C$. Dolayısıyla $x \in A \cap (B \cup C)$. İkinci durum da benzer biçimde kanıtlanır, bunun için bir önceki kanıtta B ile C'nin yerlerini değiştirmek yeterlidir. Kanıtı yazalım: Diyelim $x \in A \cap C$. Buradan $x \in A$ çıkar; ayrıca $x \in C$ de çıkar. Ama $x \in C$ olduğundan, $x \in B \cup C$ olur. Demek ki hem $x \in A$ hem de $x \in B \cup C$. Dolayısıyla $x \in A \cap (B \cup C)$. Böylece istediğimiz eşitliğin ikinci yarısı da kanıtlanmış oldu. □

İkinci dağılma özelliği de benzer şekilde kanıtlanır. Kanıtı okura bırakıyoruz.

Kanıtın pek kısa olmadığının ve dikkatli bir okuma gerektiğinin farkındayım. İleride bu tür kanıtları çok daha kısa bir biçimde yapmamızı sağlayacak bir yöntem göreceğiz.

Alıştırmalar

4.55. Yukarıdaki dağılma özelliklerini kullanarak, her A, B, C ve D kümesi için,

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

eşitliğini kanıtlayın.

4.56. $(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \cup (C_1 \cap C_2)$ kesişiminin her türlü $A_i \cup B_j \cup C_k$ kümelerinin kesişimi olduğunu kanıtlayın.

4.57. Yukarıdaki iki alıştırmadaki önermelerde $\cap$ ile $\cup$ simgelerinin yerlerini değiştirip elde ettiğiniz önermeyi kanıtlayın.

4.58. $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$ tanımını yapalım.

a. $n = 0, 1, 2, 3, 4$ için A_n kümesinin ögelerini yazın.

b. A_n'nin kaç ögesi vardır?

c. $A_n \cap A_{n+1}$ kümesinin kaç ögesi vardır?

ç. Herhangi bir n ve m için $A_n \subseteq A_m$ olabilir mi?

d. $A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$ kümesinin ögeleri hangi sayılardır?

e. $A_n \cap A_{2n+1} = \emptyset$ eşitliğini gösterin.

f. Eğer $m > 2n$ ise $A_n \cap A_m = \emptyset$ eşitliğini gösterin.

g. $A_n + A_m = A_{n+m}$ eşitliğini kanıtlayın.

h. $A_n A_m \subseteq A_{nm} \cup A_{2nm+1}$ kapsamasını kanıtlayın.

4.4 Kümelerin Farkı

A ve B iki küme olsun. A'da olup da B'de olmayan ögelerden oluşan küme $A \setminus B$ olarak gösterilir[1]. Yani $A \setminus B$ kümesini elde etmek için A'nın ögelerinden B'de olanları atıyoruz. $A \setminus B$ kümesi "A fark B" ya da dili biraz daha esnetirsek "A eksi B" olarak okunabilir. "A at B" olarak okunması daha doğru olabilirdi belki ama maalesef öyle okunmuyor.

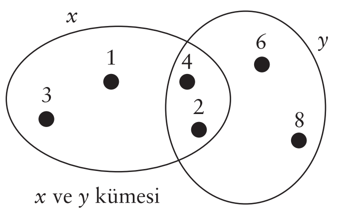
Demek ki tanıma göre bir x ögesinin $A \setminus B$ kümesinde olması için x'in A'da olup B'de olmaması gerekir; başka türlü de x ögesi $A \setminus B$ kümesinde olamaz.

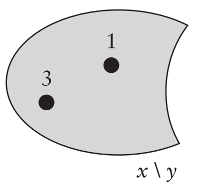
Örnekler

4.59. A, okulumuzun öğrencileri kümesi olsun. B, şehrimizde ikamet eden 15 yaşına girmiş kişiler kümesi olsun. $A \setminus B$ kümesi okulumuzun 15 yaşına girmemiş öğrencilerinden oluşan kümedir.

4.60. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{2, 4, 7, 9\}$ ise $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ olur. (Bu örneğin bir önceki somut örnekten daha kolay olması, matematiğin hayattan daha kolay olduğunun göstergesidir!)

4.61. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ise $A \setminus B = \{1, 3\}$ olur. Bunun Venn diyagramı aşağıda.





4.62. $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{S}$ olur.

4.63. Hayattan bir örnek: Sınıfımızın öğrencileri kümesinden okulumuzun kız öğrencileri kümesini çıkarırsak, sınıfımızın erkek öğrencileri kümesini buluruz. Sınıfımızın öğrencileri kümesinden sınıfımızın kız öğrencileri kümesini çıkarırsak da sınıfımızın erkek öğrencileri kümesini buluruz elbette.

4.64. Sonsuz kümelerden de bir örnek verelim. $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$, tek sayılar kümesidir, yani

$$\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N} = 2\mathbb{N} + 1$$

olur.

---

[1] Bazı kitaplarda $A \setminus B$ yerine $A - B$ yazılır ama biz bu yazılımın sayı kümelerinde karışıklığa neden olabileceğini düşünüyoruz. (İkinci yazılım A'daki sayılardan B'deki sayılar çıkarılarak elde edilen küme anlamına da gelebilir.)

4.65. $\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$, 3'e tam bölünmeyen doğal sayılar kümesidir elbette. Ama bunu biraz daha ayrıntılı ele alalım. Bir doğal sayı 3'e bölündüğünde ya 0 ya 1 ya da 2 kalır. örneğin 25'i 3'e bölersek 1 kalır: $25 = 3 \times 8 + 1$. Ama 26'yı 3'e bölersek 2 kalır: $26 = 3 \times 8 + 2$. Öte yandan 27, 3'e tam bölünür, yani 27, 3'e bölündüğünde kalan 0 olur: $27 = 3 \times 9 + 0$. Yani doğal sayıları 3'e bölündüğünde kaç kaldışına göre üç ayrık altkümeye ayırabiliriz:

$$3\mathbb{N},\ 3\mathbb{N} + 1 \text{ ve } 3\mathbb{N} + 2.$$

Buradan da şu çıkar:

$$\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N} = (3\mathbb{N} + 1) \cup (3\mathbb{N} + 2).$$

4.66. $(\mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}) \setminus (3\mathbb{N} + 2)$ kümesi 3'e bölündüğünde kalanın 1 olduğu doğal sayılar kümesidir, yani $3\mathbb{N} + 1$ kümesidir.

4.67. $\mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \setminus 14\mathbb{N})$ kümesi ya tek ya da 14'e tam bölünen doğal sayılardan oluşur, yani $(2\mathbb{N} + 1) \cup 14\mathbb{N}$ kümesidir.

4.68. $A \setminus B$ elbette A'nın bir altkümesidir. Ama eğer A ve B kümeleri ayrıksa, yani $A \cap B = \emptyset$ ise $A \setminus B = A$ olur. Bunun ters istikameti de doğrudur: Eğer $A \setminus B = A$ eşitliği doğruysa A ile B kümeleri ayrıktır.
Bunun özel bir durumu $A \setminus \emptyset = A$ eşitliğidir.

4.69. Her A, B, C kümesi için

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

olur. Bu eşitliği kanıtlayalım.
Önce eşitliğin solundaki kümenin eşitliğin sağındaki kümenin altkümesi olduğunu gösterelim. Bu amaçla sol taraftaki $(A \setminus B) \setminus C$ kümesinden bir x ögesi alalım. Bu x'in sağ taraftaki $A \setminus (B \cup C)$ kümesinde olduğunu göstereceğiz, yani x'in A'da ama B ya da C'de olmadığını göstereceğiz. $x \in (A \setminus B) \setminus C$ olduğundan, $x \in A \setminus B$ olur, dolayısıyla $x \in A$ ve $x \notin B$ olur. İstediğimizin yarısından fazlasını kanıtladık. Geriye $x \notin C$ önermesini kanıtlamak kaldı; ama $x \in (A \setminus B) \setminus C$ olduğundan bu da bariz.
Şimdi eşitliğin sağındaki kümenin eşitliğin solundaki kümenin altkümesi olduğunu gösterelim. Bu amaçla sağ taraftaki $A \setminus (B \cup C)$ kümesinden bir x ögesi alalım. Bu x'in sol taraftaki $(A \setminus B) \setminus C$ kümesinde olduğunu göstereceğiz, yani x'in $A \setminus B$'de ama C'de olmadığını göstereceğiz. $x \in A \setminus (B \cup C)$ olduğundan, x, A kümesinde ama B ya da C kümesinde değildir. Demek ki $x \in A \setminus B$ kümesinde ama C kümesinde değil.
Eşitlik kanıtlanmıştır.
Uzun kanıtlar pek sevilmez, bu kanıt da biraz fazla uzun. Bir sonraki altbölümde bu tür eşitliklerin daha kısa kanıtlarını vermenin bir yolunu göreceğiz.

4.70. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin tek sayıda öge içeren altkümelerinin sayısını hesaplayalım.
Önce birkaç tanım yapalım. B, A kümesinin tek sayıda öge içeren altkümelerinden oluşan küme olsun. Mesela $\{1, 2, 6\} \in B$ olur. Amacımız B'nin kaç tane öge içerdiğini bulmak. C de A kümesinin çift sayıda öge içeren altkümelerinden oluşan küme olsun. Mesela $\{1, 2, 6, 8\} \in C$ olur. Ayrıca boşküme de C'nin bir ögesidir.
Elbette $B \cap C = \emptyset$ ve $B \cup C = \wp(A)$ olur. Buradan da

$$s(B) + s(C) = s(\wp(A)) = 2^8$$

bulunur. Dolayısıyla eğer $s(B) = s(C)$ eşitliğini kanıtlayabilirsek, yukarıdaki eşitlikten

$$s(B) = s(C) = 2^8/2 = 2^7$$

çıkar. Şimdi $s(B) = s(C)$ eşitliğini kanıtlayalım.
B ve C kümelerinin her birini iki ayrık parçaya ayıracağız:

B_1, B'nin 1 ögesini içeren ögelerinden oluşsun; yani B_1'in ögeleri A'nın tek sayıda öge içeren ve ayrıca 1'i de içeren altkümelerinden oluşan küme olsun. örneğin $\{1, 2, 6\} \in B_1$ ama $\{2, 5, 6\} \notin B_1$ ya da $\{1, 2, 3, 6\} \notin B_1$.
$B_0 = B \setminus B_1$ olsun; yani B_0'ın ögeleri A'nın tek sayıda öge içeren ama 1'i içermeyen altkümelerinden oluşan küme olsun. örneğin $\{2, 3, 6\} \in B_0$ ama $\{1, 5, 6\} \notin B_0$ ya da $\{2, 3, 5, 6\} \notin B_0$.
Elbette $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ ve $B = B_0 \cup B_1$ olur. Buradan da

$$s(B) = s(B_0) + s(B_1)$$

çıkar.
Şimdi benzer tanımları C için yapalım. C_1, C'nin 1'i içeren ögelerinden, C_0 ise C'nin 1'i içermeyen ögelerinden oluşsun. Aynen yukarıdaki gibi

$$s(C) = s(C_0) + s(C_1)$$

çıkar.
Demek ki $s(B_1) = s(C_0)$ ve $s(B_0) = s(C_1)$ eşitliklerini kanıtlayabilirsek istediğimiz $s(B) = s(C)$ eşitliğine ulaşırız, çünkü $s(B_1) = s(C_0)$ ve $s(B_0) = s(C_1)$ eşitlikleri bize

$$s(B) = s(B_0) + s(B_1) = s(C_1) + s(C_0) = s(C)$$

eşitliğini verir.
Önce $s(B_1) = s(C_0)$ eşitliğini kanıtlayalım. B_1'in herhangi bir ögesinden 1'i çıkarırsak C_0'dan bir öge buluruz. Ve bu "1 çıkarma işlemi"nin tersi de vardır: C_0'ın bir ögesine 1 eklersek B_1'in bir ögesini buluruz. Demek ki $s(B_1) = s(C_0)$ eşitliği geçerli.
Aynı şeyi B_0 ve C_1 için de yapabiliriz: B_0'ın bir ögesine 1 eklersek C_1'in bir ögesini ve C_1'in bir ögesinden 1'i çıkarırsak B_0'ın bir ögesini buluruz. Demek ki $s(B_0) = s(C_1)$ eşitliği de geçerli.
Böylece istediğimizi kanıtladık. Sonuç $2^7 = 128$ çıkar.

4.71. Yukarıdaki örneğin özel olarak seçilmiş A kümesiyle bir ilgisi olmadığı, sonlu her küme için geçerli olduğu belli: *n ögeli bir kümenin 2^{n-1} tane tek sayıda ögesi olan altkümesi vardır.* Aynı önerme çift sayıda ögesi olan altkümeler için de geçerlidir tabii ki.

4.72. $A = \{0, 1, 2\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümeleri verilmiş olsun. $A \subseteq D \subseteq B$ koşulunu sağlayan D kümelerinin kaçında en az üç asal sayı bulunacağını hesaplayalım.
B'nin A'yı içeren altkümeleri $B \setminus A$ kümesinin altkümeleriyle A'nın bileşimi alınarak bulunur. Ayrıca B'de toplam dört tane asal sayı vardır ve bunlardan sadece biri A kümesindedir. Demek ki

$$C = B \setminus A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

kümesinin en az iki asal sayı içeren altküme sayısını bulmalıyız. C'nin toplam $2^6 = 64$ tane altkümesi vardır. C'nin 64 altkümesinden hiç asal sayı içermeyenleri ve sadece bir asal sayı içerenleri ayıklamalıyız. Hiç asal sayı içermeyen altkümeler $\{4, 6, 8\}$ kümesinin altkümeleridir ve bunlardan $2^3 = 8$ tane vardır. Hiç asal sayı içermeyen bu 8 altkümeye 3, 5 ya da 7'yi eklersek C'nin sadece 1 asal sayı içeren altkümelerini buluruz; bunlardan da $3 \times 2^3 = 24$ tane vardır. Bulmak istediğimiz sayı $64 - (8 + 24) = 32$ olur.

4.73. $\{0, 1, \ldots, 9\}$ rakamlar kümesinin altkümelerinin kaçında en az iki tek sayının bulunacağını hesaplayalım.
Rakamlar kümesinin altküme sayısı $2^{10} = 1024$. Bu sayıdan sadece bir ögesi tek sayı olan altkümelerin sayısını ve hiçbir ögesi tek sayı olmayan altkümelerin sayısını çıkarmalıyız.
Sadece bir ögesi tek sayı olan altküme sayısı $5 \times 2^5 = 160$.
Hiçbir ögesi tek sayı olmayan altküme sayısı $2^5 = 32$.
Demek ki en az iki ögesi tek sayı olan altküme sayısı $1024 - 160 - 32 = 832$ olur.

4.74. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin altkümelerinin kaçında 1 sayısı veya sadece bir çift sayı bulunacağını hesaplayalım. Önce, 1 veya çift sayılardan sadece 2'nin bulunuduğu altküme sayısını bulalım. Bunun için

$$\{1, 2, 3, 5, 7\}$$

kümesinde 1 veya 2'nin bulunduğu altküme sayısını hesaplamalıyız: $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ kümesinin tüm altküme sayısından 1 ve 2'nin bulunmadığı altküme sayısını çıkarırsak aradığımız sayıyı buluruz. Bu kümenin tüm altküme sayısı $2^5 = 32$, 1 ve 2'nin bulunmadığı altküme sayısı $2^3 = 8$ olduğundan aradığımız sayı $32 - 8 = 24$ olur.

Yukarıdaki hesaplama 1 veya sadece 4'ün ve 1 veya sadece 6'nın bulunduğu altküme sayıları bulunurken de aynı şekilde yapılacağından sorunun yanıtı $3 \times 24 = 72$ olarak bulunur.

4.75. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin tüm altkümelerindeki ögelerin toplamını hesaplayalım. Bu kümenin altkümeleri içinde 1'in bulunduğu altküme sayısı $2^5 = 32$ (1'in bulunmadığı altküme sayısı kadar). Aynı durum 2, 3, 4, 5 ve 6 için de geçerlidir. O halde A kümesinin altkümelerinde 32'şer tane 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 bulunmaktadır ve A'nın tüm altkümelerindeki ögelerin toplamı

$$32 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 672$$

olur.

4.76. 1 ve 100 dahil, 1'den 100'e kadar olan sayıların kaçı 2'ye ve 3'e bölünmez?

$A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ olsun. B, A'nın 2'ye bölünen sayılarından, C de 3'e bölünen sayılarından oluşan küme olsun. $B \cup C$ kümesi A'nın 2'ye ya da 3'e bölünen sayılarından oluşur. Dolayısıyla $A \setminus (B \cup C)$ kümesinin ögeleri ne 2'ye ne de 3'e bölünür. Amacımız bu kümenin öge sayısını bulmak. Demek ki önce $B \cup C$ kümesinin öge sayısını hesaplamalıyız. Daha önce gördüğümüz

$$s(B \cup C) = s(B) + s(C) - s(B \cap C)$$

eşitliğini kullanacağız. Biraz düşününce $s(B) = 50$ ve $s(C) = 33$ olduğu anlaşılır. Ayrıca $B \cap C$, 6'ya bölünen sayıların kümesidir ve bu kümenin de tam 16 tane ögesi vardır. Demek ki,

$$s(B \cup C) = s(B) + s(C) - s(B \cap C) = 50 + 33 - 16 = 67$$

olur. Buradan da

$$s(A \setminus (B \cup C)) = s(A) - s(B \cup C) = 100 - 67 = 33$$

çıkar.

Alıştırmalar

4.77. Her A ve B kümesi için $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın. Bundan daha iyisi doğru: $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ olur; bu eşitliğin de doğru olduğunu gösterin.

4.78. Her A, B ve C kümesi için $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ eşitliğini (metne bakmadan) kanıtlayın.

4.79. Her A, B, C kümesi için, $(A \cap C) \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cap C$ önermesini kanıtlayın. Eşitlik olmak zorunda mıdır?

4.80. Her A, B ve C kümesi için $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ eşitliği geçerli midir? Değilse bu eşitlik hangi koşul ya da koşullarda geçerlidir?

4.81. Her A, B ve C kümesi için $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$ eşitliği geçerli midir? Değilse bu eşitlik hangi koşul ya da koşullarda geçerlidir?

4.82. Her A, B ve C kümesi için $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$ önermesini kanıtlayın.

4.83. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ eşitliği hangi koşulda geçerlidir?

4.5 Kümelerin 01-Tablosu

A ve B iki küme olsun. Rastgele bir x ögesi seçelim. x'in A ve B kümelerinin ögesi olup olmamasına göre dört farklı durum baş gösterebilir. Bu dört durumu bir tablo olarak gösterelim:

A	B
$x \notin A$	$x \notin B$
$x \notin A$	$x \in B$
$x \in A$	$x \notin B$
$x \in A$	$x \in B$

Eğer A, B ve C kümelerimiz varsa, 4 değil, 8 farklı durum ortaya çıkar:

A	B	C
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \notin C$
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \in C$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \notin C$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \in C$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \notin C$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \in C$
$x \in A$	$x \in B$	$x \notin C$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$

Eğer 4 küme varsa, $2^4 = 16$ farklı durum baş gösterir. Bu 16 durumun her birini bulmayı okura bırakıyoruz.

Genel olarak, n tane küme varsa, x ögesinin bu n kümeyle ilişkisine göre toplam 2^n farklı durum baş gösterir, çünkü her bir küme için "x içindedir" ya da "x içinde değildir" kararlarından birini almamız lazım.

Sadece iki tane kümenin (A ve B kümeleri) olduğu oldukça basit durumu ele alalım. Bir x ögesi bazen $A \cup B$ kümesinde olur, bazen olmaz, duruma göre değişir. Aşağıdaki tabloda dört durumun her birinde x'in $A \cup B$ kümesinde olup olmadığını ele aldık.

A	B	$A \cup B$
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \notin A \cup B$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \in A \cup B$
$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cup B$

En sağdaki sütuna, soldaki iki durumun sonucunu yazdık. örneğin birinci satırın soldaki iki hücresinde $x \notin A$ ve $x \notin B$ olduğundan, o satırın en sağdaki hücresine $x \notin A \cup B$ yazdık.

Şimdi içinde $\notin$ simgesi bulunan hücrelere 0, içinde $\in$ simgesi bulunan hücrelere 1 koyup tabloyu daha basit (ve daha matematiksel) bir hale getirelim[2]:

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Birazdan şahit olacağımız üzere bu tür tablolar çok kullanışlıdır, uzun ve sıkıcı kanıtları çok kısaltır. Bu tür tablolara 01-***tablosu*** adı verilir. Yukarıdaki bileşim işleminin 01-tablosudur. Kümelerle yapılan her işlemin bir 01-tablosu vardır.

Eğer öge sütunun en tepesinde belirtilen kümedeyse hücreye 1 yazılır, aksi halde 0 yazılır. Yukarıdaki tabloda A ve B'nin altında yazan sayılardan en az biri 1 ise, $A \cup B$ sütununun o satırına 1 yazmışız; ama eğer A ve B'nin altında yazan sayıların her ikisi de 0 ise $A \cup B$ sütununun o satırına 0 geliyor.

Eğer A'nın altında yazan 0 ya da 1 sayısını f_A ile gösterirsek ve aynı şeyi B ve $A \cup B$ kümeleri için yaparsak, her dört durumda da her satırda

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B \tag{1}$$

olduğunu kolaylıkla kontrol edebiliriz. örneğin $f_A = f_B = 1$ ise (tablonun son satırı),

$$f_A + f_B - f_A \cdot f_B = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

olur, aynen $f_{A \cup B}$ gibi. Demek ki bu durumda $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A f_B$ eşitliği doğru. Okur lütfen diğer üç durumda da eşitliğin sağlandığını kontrol etsin. Birkaç sayfa ileride bu tür formüllerin nasıl bulunduğunu göreceğiz.

Bu tabloları kullanarak, biraz önce Örnek 4.13'te edebiyat parçalayarak kanıtladığımız

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

eşitliğini çok daha cebirsel bir biçimde kanıtlayabiliriz. Bunun için rastgele bir x ögesi ele alalım. Bu öge, A, B ve C kümelerinin ögesi olup olmayacağına göre 8 farklı durum baş gösterebilir; yani f_A, f_B ve f_C değerleri 0 ya da 1 olabilir, böylece toplamda $2^3 = 8$ farklı durum belirir. Her 8 durumda da, x ögesi $(A \cup B) \cup C$ ve $A \cup (B \cup C)$ kümelerinden birindeyse diğerinde de olacağını göstermek gerekiyor, yani $(A \cup B) \cup C$ ve $A \cup (B \cup C)$ sütunlarındaki sayılar aynı olmalı. Bunu gösterirsek eşitliği göstermiş oluruz. Bunun için 8 durumu bir tablo halinde satır satır gösterelim (aşağıdaki tablodaki ilk üç sütun). Önce

[2] Matematikte 0, "hayır", 1 ise "evet" anlamında kullanılır. 0 olan hücreler "hayır, x ögesi değildir", 1 olan hücreler ise "evet, x ögesidir" olarak okunmalı.

$A \cup B$ kümesinin (dördüncü sütun), ardından $(A \cup B) \cup C$ kümesinin (beşinci sütun) her durumda, yani her satırda alacağı değerleri gösterelim. Sonra $B \cup C$ kümesinin (altıncı sütun) ve ardından $A \cup (B \cup C)$ (son sütun) kümesinin alacağı değerleri gösterelim. Her şey aşağıda:

A	B	C	$A \cup B$	$(A \cup B) \cup C$	$B \cup C$	$A \cup (B \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$A \cup B$ sütunundaki sayıları bulmak için sadece A ve B sütununun sayılarına bakmak gerekiyor. $(A \cup B) \cup C$ sütunundaki sayıları bulmak için ise $A \cup B$ ve C sütunundaki sayılardan yararlanılıyor. Görüldüğü üzere $(A \cup B) \cup C$ ile $A \cup (B \cup C)$ sütunları aynı, demek ki bu iki küme birbirine eşit.

Kesişimin tablosu şöyle:

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bu tabloyu, daha önce bileşim için yaptığımız gibi cebirsel olarak tek bir formülle şöyle ifade edebiliriz:

$$f_{A \cap B} = f_A f_B. \tag{2}$$

Geçmişte kanıtını uzun uzun anlatarak verdiğimiz dağılma özelliklerini bu yöntemle çok daha kolay biçimde kanıtlayabiliriz:

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$A \cup (B \cap C)$ ile $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ sütunlarında aynı sayılar bulunduğundan, bu iki küme birbirine eşittir; çünkü x'in yer alabileceği sekiz bölgeyi ayrı ayrı irdeledik ve gördük ki x sekiz bölgeden birindeyse, o zaman x'in $A \cup (B \cap C)$ kümesinde ya da $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ kümesinde olup olmaması eşdeğer, x bu iki kümenin birindeyse diğerindedir, birinde değilse diğerinde de değildir.

f_A sayısı ya 0 ya da 1 olduğundan,

$$f_A^2 = f_A \tag{3}$$

olur. Şimdi, (1), (2) ve (3) formüllerini kulanarak $A \cup (B \cap C)$ ile $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ kümelerinin eşitliğini çok daha cebirsel biçimde şöyle de kanıtlayabiliriz: Önce,

$$f_{A\cup(B\cap C)} = f_A + f_{B\cap C} - f_A f_{B\cap C} = f_A + f_B f_C - f_A f_B f_C$$

hesabını, sonra

$$\begin{aligned}
f_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} &= f_{A\cup B} f_{A\cup C} \\
&= (f_A + f_B - f_A f_B)(f_A + f_C - f_A f_C) \\
&= f_A(f_A + f_C - f_A f_C) \\
&\quad + f_B(f_A + f_C - f_A f_C) \\
&\quad - f_A f_B(f_A + f_C - f_A f_C) \\
&= f_A + f_A f_C - f_A f_C \\
&\quad + f_B f_A + f_B f_C - f_B f_A f_C \\
&\quad - f_A f_B - f_A f_B f_C + f_A f_B f_C \\
&= f_A + f_B f_C - f_A f_B f_C
\end{aligned}$$

hesabını yapalım. (En son eşitlikte sadeleştirmeleri yaptık, bir öncekinde de $f_A^2 = f_A$ eşitliğini kullandık.) Gördüğümüz gibi iki hesabın sonucu aynı çıkıyor, yani $A \cup (B \cap C)$ ile $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ kümelerinin tabloları aynı sonucu veriyor, yani kümeler birbirine eşit.

Diğer dağılma özelliği olan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ eşitliğini yukarıdaki yöntemlerle kanıtlamayı okura bırakıyoruz.

Kümesel farkın tablosu da şöyle:

A	B	$A \setminus B$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Bu tablodan kolayca görüleceği üzere

$$f_{A\setminus B} = f_A(f_A - f_B)$$

olur. (3) eşitliği sayesinde,

$$f_{A\setminus B} = f_A(f_A - f_B) = f_A^2 - f_Af_B = f_A - f_Af_B = f_A(1 - f_B)$$

elde ederiz.

Örnekler

4.84. Aşağıdaki tabloyu ele alalım:

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

S sütunundaki sayıları A, B ve C sütunundaki sayılarla ifade etmeye çalışalım. Yani aynı satırdaki sayılara sırasıyla f_A, f_B, f_C ve f_S dersek, f_S sayısını f_A, f_B ve f_C sayıları cinsinden yazmaya çalışalım.

En son sütunda tek bir 1 olduğunun farkına varalım; diğer tüm sayılar 0. Sayının 1 olduğu altıncı satıra odaklanalım. Biraz düşününce, sonucun

$$f_S = f_A(1 - f_B)f_C$$

çıktığı anlaşılacaktır, nitekim $f_A(1 - f_B)f_C$ sayısının 1 olması için yeter ve gerek koşul her üç çarpanın da, yani f_A, $1 - f_B$ ve f_C'nin herbirinin 1 olması gerekir, bunun için de $f_A = 1$, $f_B = 0$ ve $f_C = 1$ olmalı. Diğer tüm durumlarda $f_A(1 - f_B)f_C$ çarpımı 0 olur, aynen f_S gibi.

Okur herhalde $f_A(1 - f_B)f_C$ ifadesini nasıl bulduğumuzu anlamıştır: 1 olan sütuna f yazıyoruz, 0 olan sütuna $1 - f$ yazıyoruz ve tüm bu ifadeleri çarpıyoruz.

Bir başka örnek görelim.

4.85. Aşağıdaki tablonun son sütununu ilk üç sütun cinsinden yazalım:

A	B	C	T
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Bu sefer sonuç

$$f_T = (1 - f_A)f_B(1 - f_C)$$

çıkacaktır.

Bir sonraki alıştırmada yukarıdaki tabloların son sütunlarını toplayacağız.

4.86. Aşağıdaki tablonun son sütununu ilk üç sütun cinsinden yazalım:

A	B	C	U
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Son sütundaki sayılar, önceki iki alıştırmadaki f_S ve f_T sayılarının toplamıdır. Dolayısıyla

$$f_U = f_S + f_T = f_A(1 - f_B)f_C + (1 - f_A)f_B(1 - f_C)$$

çıkacaktır. Bu ifadeyi sadeleştirebiliriz tabii. Gereken sadeleştirmeler yapıldığında sonucun

$$f_U = f_B + f_A f_C - f_A f_B - f_B f_C$$

çıktığı görülecektir.

4.87. Aşağıdaki tablonun son sütununu ilk üç sütun cinsinden yazalım:

A	B	C	V
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Son sayısı 1 olan satırlara odaklanalım.

$$(1 - f_A)(1 - f_B)(1 - f_C)$$

ifadesi sadece ve sadece $f_A = f_B = f_C = 0$ ise (yani birinci satırda) 1 değerini alıyor.

$$(1 - f_A)f_B f_C$$

ifadesi sadece ve sadece dördüncü satırda 1 değerini alıyor.

$$f_A f_B(1 - f_C)$$

ifadesi sadece ve sadece yedinci satırda 1 değerini alıyor. Dolayısıyla sadece ve sadece birinci, dördüncü ve yedinci satırlarda 1 değerini alan ifadeyi bulmak için yukarıdaki üç ifadeyi toplamalıyız:

$$f_V = (1 - f_A)(1 - f_B)(1 - f_C) + (1 - f_A)f_B f_C + f_A f_B(1 - f_C).$$

Dileyen okur çarpımları yaparak ifadeyi sadeleştirebilir. Biz dilemedik! (Sadeleştirme yaparken $f_A^2 = f_A$ eşitliğini kullanacaksınız.)

4.88. Yukarıdaki alıştırmalarda değişken olarak A, B ve C aldık. Değişken sayımızı çoğaltabiliriz tabii ki. Eğer değişken sayısı n ise 2^n tane 0 ve 1'lerden oluşan satır olur. Böyle bir tablonun sonuna eklenen 0 ve 1'lerden oluşan herhangi bir W sütunu, diğer n sütun cinsinden toplama, çarpma ve çıkarma kullanılarak yazılabilir. Yukarıdaki yöntemi anlayan okur kendi kendine örnekler vermekte ve çözümü bulmakta zorlanmayacaktır.

Alıştırmalar

4.89. Her A, B, C kümesi için $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ eşitliğinin geçerli olduğunu 01-tablolarını kullanarak kanıtlayın.

4.90. Her A, B, C kümesi için $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$ önermesinin doğru olduğunu ama eşitliğin her zaman doğru olmayabileceğini 01-tablolarını kullanarak kanıtlayın.

4.91. Aşağıdaki tablonun son sütununu ilk üç sütun cinsinden yazın.

A	B	C	G
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Bulduğunuz sonucu sadeleştirin.

4.92. Aşağıdaki tablonun son sütununu ilk dört sütun cinsinden yazın.

A	B	C	D	G
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Bulduğunuz sonucu sadeleştirin.

4.93. Herhangi iki A ve B kümesi için, $(A \cup B) \setminus (B \cap A) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ eşitliğini sağ ve soldaki ifadelerin f'lerini bularak gösterin.

4.94. Önceki bölümlerde bulunan küme eşitliklerden dilediklerinizi (zor görünenleri ya da yapamadıklarınızı) yukarıdaki yöntemle kanıtlayın.

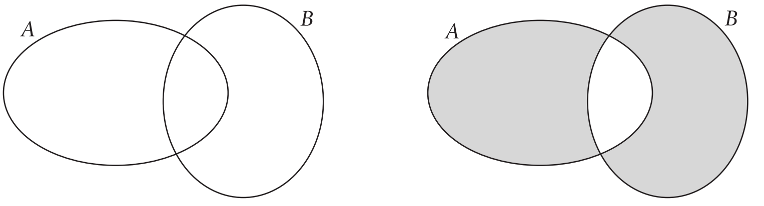
4.6 Simetrik Fark

Eğer A ve B birer kümeyse, A ya da B'de olan ama her ikisinde birden olmayan ögelerden oluşan kümeyi oluşturabiliriz. Örneğin ya denizde yaşayan ya da memeli olan ama (balina ve fok gibi) denizde yaşayan memeli olmayan hayvanlar kümesine bakmak isteyebiliriz. İşte bu kümenin matematiksel tanımı:

A ve B kümeleri için,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

tanımını yapalım. $A \Delta B$ kümesini Venn diyagramı üstünde gösterelim:



A ve *B* kümeleri $\qquad$ *A* Δ *B* kümesi

$A \Delta B$ kümesi A ya da B'de olan **ama** her ikisinde birden **olmayan** ögelerden oluşur. Elbette

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$$

olur.

$A \Delta B$ kümesine A ve B'nin ***simetrik farkı*** denir.

Hayattan örnekler: Okulun basketbol takımıyla futbol takımının simetrik farkında hem basketbol hem de futbol oynayanlar yer almazlar, ne basketbol ne de futbol oynayanlar da yer almazlar, iki spordan sadece birini yapanlar yer alırlar. En az dört ayağı olan hayvanlar kümesiyle memeli hayvanlar kümesinin simetrik farkında kırkayak, balina ve insan vardır ama koyun yoktur. Matematiği iyi olanlarla Türkçesi iyi olanlar kümelerinin simetrik farkında hem matematiği hem de Türkçesi kötü olanlar olmadığı gibi, hem matematiği hem de Türkçesi iyi olanlar da yoktur.

Simetrik farkın tablosu aşağıdaki gibidir:

A	B	$A \Delta B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ayrıca

$$f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2 f_A f_B$$

eşitliğini kontrol etmek zor değil. A ile B'nin yerlerini değiştirirsek,

$$f_{B \Delta A} = f_B + f_A - 2 f_B f_A$$

buluruz. Eşitliklerin sağ tarafları eşit olduğundan, bundan

$$A \Delta B = B \Delta A$$

eşitliği çıkar.

Şimdi önemli bir eşitliği kanıtlayalım: Her A, B ve C kümesi için

$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$

olur. Bu eşitliği kelimelerle kanıtlamak hiç kolay değildir, kanıtlansa bile kanıtın pek anlaşılır olması mümkün değildir. En doğru yöntem

$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C \text{ ve } A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$

kümelerinin 01-tablosunu çizmektir:

A	B	C	$A \,\Delta\, B$	$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$	$B \,\Delta C$	$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1

$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$ ve $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$ sütunları eşit olduğundan, istediğimiz eşitlik kanıtlanmıştır; çünkü sütunların eşit olması demek, bir x ögesi iki kümeden birindeyse diğerinde de demektir.

Örnekler

4.95. Türkiye Cumhuriyeti vatandaşları kümesiyle Alman vatandaşları kümesinin simetrik farkı, çifte vatandaş olmayan TC vatandaşlarıyla Almanya vatandaşlarından oluşur.

4.96. Torunu olan insanlar kümesiyle erkekler kümesinin simetrik farkı, torunu olan kadınlarla torunu olmayan erkeklerden oluşur.

4.97. Türk alfabesiyle İngiliz alfabesinin simetrik farkı, ı, ö, ü, ğ, w, x, q gibi bir dilde olup diğer dilde olmayan harflerden oluşur.

4.98. $3\mathbb{N} \,\Delta\, 4\mathbb{N}$ kümesi, 3'e ya da 4'e bölünen ama 12'ye bölünmeyen doğal sayılar kümesidir:

$$3\mathbb{N} \,\Delta\, 4\mathbb{N} = \{3, 4, 6, 8, 9, 15, 16, 18, 20, 21, 27, 28, \dots\}.$$

4.99. $(3\mathbb{N}+1) \,\Delta\, (5\mathbb{N}+1)$ kümesinin ilk birkaç ögesini yazalım: 4, 6, 7, 10, 11, 13, 19, 21, 22, 25, 26.

Alıştırmalar

4.100. $5\mathbb{N} \,\Delta 7\mathbb{N}$ kümesinin en küçük 12 ögesini yazın.

4.101. $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ eşitliğini gösterin.

4.102. $(3\mathbb{N}+1) \,\Delta\, 5\mathbb{N}$ kümesinin ilk 20 ögesini bulun.

4.103. $(3\mathbb{N}+1) \,\Delta (5\mathbb{N}+3)$ kümesinin ilk 20 ögesini bulun.

4.104. Eğer $B \subseteq A$ ise $A \,\Delta\, B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ eşitliğini kanıtlayın.

4.105. Her A, B, C kümesi için aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın:
- **Birleşme Özelliği:** $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$. (Yukarıda tablo yöntemiyle kanıtlamıştık bu önermeyi. Kanıtı tablosuz yapmaya çalışıp ne kadar zorlanacağınızı görün.)
- **Etkisiz Ögenin Varlığı:** $A \Delta \emptyset = A = \emptyset \Delta A$.
- **Yok Edici Özellik:** $A \Delta A = \emptyset$.
- **Değişme Özelliği:** $A \Delta B = B \Delta A$.
- **Dağılma Özelliği:** $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

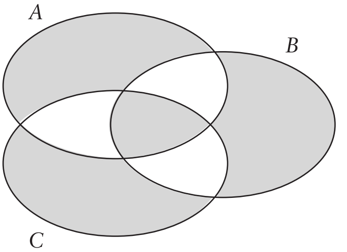
Görüldüğü üzere, Δ toplama gibi, $\cap$ ise çarpma gibi davranıyor.

4.106. Hangi koşulda $A \Delta B = A$ olur?

4.107. Hangi koşulda $A \Delta B = A \cup B$ olur?

4.108. Hangi koşulda $A \Delta B \subseteq A$ olur?

4.109. $A \Delta B \Delta C$ kümesinin aşağıdaki gri alan olduğunu kontrol edin.



$A \Delta B \Delta C$ kümesi

4.110. $3\mathbb{N} \Delta 5\mathbb{N} \Delta 7\mathbb{N}$ kümesinin en küçük 20 ögesini bulun.

4.111. $(3\mathbb{N}+1) \Delta (4\mathbb{N}+1) \Delta (5\mathbb{N}+1)$ kümesinin en küçük 20 ögesini bulun.

4.112. Venn diagramı üzerinde $A \Delta B \Delta C \Delta D$ kümesini griye boyayarak gösterin.

4.113. Δ işlemi $\cap$ işlemine dağılır mı? Yani her A, B ve C kümesi için

$$A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$$

olur mu? Bu eşitlik her zaman doğru değilse, eşitlik ne tür A, B ve C kümeleri için geçerlidir?

4.114. Eğer A, B, C kümeleri için $A \Delta B = A \Delta C$ eşitliği doğruysa $B = C$ eşitliğinin de doğru olduğunu kanıtlayın.

4.115. $A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$ kümesi, tek sayıda A_i kümesinde olan ögelerden oluşur. Bunun nedenini anlamaya çalışın.

4.7 Evrensel Küme ve Tümleyen

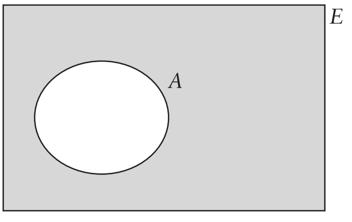
Aslında evrensel küme diye mutlak bir kavram yoktur. Evrensel küme konuya ve güne göre değişir. örneğin eğer hep öğrenci kümelerinden söz edeceksek, o zaman evrensel kümeyi tüm öğrencilerden oluşan küme olarak alabiliriz. Eğer konumuz kütüphanenin kitaplarıysa, evrensel kümeyi kütüphanedeki kitaplar olarak tanımlayabiliriz. Evrensel küme, söz ettiğimiz ve (mesela gün boyunca) söz edeceğimiz tüm kümeleri kapsayan kocaman bir kümedir. Eğer hep doğal sayı kümelerinden söz edeceksek, evrensel kümeyi $\mathbb{N}$ olarak tanımlayabiliriz. Gerektiğinde karatahtayı bile evrensel küme olarak alabilirsiniz.

Görüldüğü üzere "evrensel küme" denen şey matematiksel bir nesne değildir, sadece hayatı kolaylaştıran ve istediğimiz zaman değiştirecebileceğiz kocaman ve muğlak bir topluluktur.

Öte yandan "evrensel küme" oldukça doğal bir kavramdır. Şöyle bir örnek vereyim. "Matematikte zayıf not almayanlar" kümesi normalde ayakkabıyı da içerir, çünkü ne de olsa ayakkabı matematikte zayıf not almamıştır, hatta not bile almamıştır, öğretmenler ayakkabılara not vermezler. Ama "matematikte zayıf not almayanlar" kümesi dendiğinde, algıda seçicilik yapıp matematikte zayıf not almayan öğrencilerden oluşan küme aklımıza gelir, ayakkabıyı bu kümenin dışında tutarız, çünkü sezgisel olarak bu kapsamda evrensel kümenin öğrenciler kümesi olduğunu biliriz, hayatın olağan akışı bunu gerektirir. Bu kapsamda, evrensel küme öğrenciler kümesi olduğuna göre ayakkabıyı kümeye dahil etmeyiz.

Bu altbölümde evrensel bir küme seçtiğimizi varsayalım. Bu evrensel kümeye E diyelim. Şimdi A herhangi bir küme olsun. "Herhangi" dedik, ama aslında kümemiz herhangi bir küme olamaz, ancak E'nin bir altkümesi olabilir, çünkü evrensel kümemizi belirledik. E'de olup da A'da olmayan ögelerden oluşan kümeye, yani $E \setminus A$ kümesine A'nın ***tümleyeni*** denir. Evrensel kümenin değişme olasılığı varsa "A'nın E'deki tümleyeni" de diyebiliriz. A'nın tümleyeni A' olarak yazılır.

Aşağıda evrensel kümeyi bir dikdörtgen olarak çizdik. A' kümesini de gri renkte gösterdik.



Tümleyenin tablosu da aşağıdaki gibidir:

A	A'
0	1
1	0

Yani tümleyen 0 değeriyle 1 değerinin yerlerini değiştirir. Cebirsel olarak ifade edecek olursak,

$$f_{A'} = 1 - f_A$$

olur.

Bir kümenin tümleyeninden söz edildiğinde, evrensel bir küme sabitlenmiş demektir, aksi halde "tümleyen" kelimesi anlamsızdır.

Tümleyenle ilgili ***De Morgan özdeşlikleri*** adı verilen iki önemli eşitlik vardır:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \text{ ve } (A \cup B)' = A' \cap B'$$

eşitliği. Bunlardan birincisini tablo tekniğiyle kanıtlayalım:

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	A'	B'	$A' \cup B'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

$(A \cap B)'$ ve $A' \cup B'$ sütunları aynı olduğundan, bu iki küme eşittir. Benzer kanıt $(A \cup B)' = A' \cap B'$ eşitliği için de yapılabilir, ayrıntıları okura bırakıyoruz.

Bir başka önemli eşitlik

$$(A')' = A$$

ya da daha kısa yazacak olursak

$$A'' = A$$

eşitliğidir.

Bu son eşitlik ve De Morgan özdeşlikleri sayesinde $\cap$, $\cup$ ve $'$ (tümleme) kullanan her eşitliği, her $\cap$ işlemini $\cup$ işlemine çevirerek, her $\cup$ işlemini $\cap$ işlemine çevirerek, tümleyen işaretlerini silerek, tümleyen olmayan yerlere tümleyen işareti koyarak yeni bir eşitlik elde ederiz. örneğin,

$$(A \cap B) \cup (C \cap A') = D' \cap B$$

eşitliğinde her iki tarafında tümleyenini alırsak,

$$(A' \cup B') \cap (C' \cup A) = D \cup B'$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliklerden her biri diğerinin "düali" ya da "eşleniği"dir.

Aşağıdaki alıştırmalarda bir evrensel kümeyi sabitliyoruz ve bu evrensel kümeye E adını veriyoruz.

Alıştırmalar

4.116. $E \Delta A = A'$ eşitliğini kanıtlayın.

4.117. $\emptyset' = E$ ve $E' = \emptyset$ eşitliklerini kanıtlayın.

4.118. $A' = B$ ise $B' = A$ olduğunu kanıtlayın.

4.119. $A' = A$ eşitliğini sağlayan bir A kümesi var mıdır? Varsa E ne olmalıdır?

4.120. $A' = B$, $B' = C$ ve $C' = A$ eşitliklerinin hepsini sağlayan A, B ve C kümelerinin olmadığını kanıtlayın.

4.121. $E \neq \emptyset$ ise $A' \subseteq B$, $B' \subseteq C$ ve $C' \subseteq A$ önermelerinin hepsini sağlayan A, B ve C kümeleri var mıdır? Varsa hangileridir? Örnek bulun.

4.122. $A' = B$, $B' = C$, $C' = D$ ve $D' = A$ eşitliklerinin hepsini sağlayan A, B, C ve D kümeleri var mıdır?

4.123. $A \Delta B = \emptyset$ ise A ve B kümeleri hakında ne söyleyebiliriz?

4.124. $A \setminus B = A \cap B'$ eşitliğini kanıtlayın.

4.125. $A \cap B = \emptyset$ ile $B \in \wp(A')$ önermelerinin mantıksal olarak eşdeğer olduklarını, yani biri doğruysa diğerinin de doğru olduğunu kanıtlayın.

4.126. $(A \cap B')' = A' \cup B$ eşitliğini De Morgan özdeşliğini ve önceki alıştırmaları kullanarak kanıtlayın.

4.127. $((A \cap B') \cup (A' \cap B' \cap C))' = (A' \cup B) \cap (A \cup B \cup C')$ eşitliğini De Morgan özdeşliklerini kullanarak kanıtlayın.

4.128. $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) = A \cap B$ eşitliğini kanıtlayın.

4.129. $(A' \cap B) \cup (B \setminus (B' \cap A))$ ifadesini daha basit biçimde yazın.

4.130. $(A \cup B' \cup C')' \cap (A \cup B \cup C') = (B \cap C) \setminus A$ eşitliğini kanıtlayın.

4.131. $(A \Delta B)'$ kümesiyle $A' \Delta B'$ kümeleri arasında nasıl bir ilişki vardır?

4.132. $(A \setminus B)'$ kümesiyle $A' \setminus B'$ kümeleri arasında nasıl bir ilişki vardır?

4.133. $(A \cap B) \cup (A' \cup B)' = A$ eşitliğini kanıtlayın.

Notlar

4.134. Evrensel bir kümenin varlığına inanırsak, sonlu sayıda kümeyle yapılabilecek tüm işlemler kesişim (yani $\cap$) ve tümleyenle (yani $'$ ile) elde edilebilir. örneğin bileşim işlemini kesişim ve tümleyen işlemleriyle ifade edebiliriz:

$$A \cup B = (A' \cap B')'.$$

Kümelerin farkı da şöyle ifade edilir:

$$A \setminus B = A \cap B'.$$

Simetrik fark:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B') \cup (B \cap A');$$

ve hemen ardından en sağdaki ifadeye bileşimin tanımını kullanarak

$$A \Delta B = ((A \cap B')' \cap (B \cap A')')'$$

elde ederiz. Pek pratik olmasa da bu tür yazılımlar teori de yararlı olabilir.
Temel işlemler olarak kesişim ve tümleyen işlemlerini alacağımıza, bileşim ve tümleyen işlemlerini de alabilirdik.
Ama kesişim ve bileşimle tümleyen işlemi ifade edilemez.

4.135. Kümelerle yeni bir işlem tanımlayalım:

$$A \star B = (A \cup B)'$$

olsun. Sadece $\star$ işlemini kullanarak diğer tüm işlemleri tanımlayabiliriz. Bir önceki nottan dolayı sadece bileşim ve tümleyeni tanımlarsak diğer her işlemi tanımlayabileceğimizi biliyoruz. Nitekim

$$A' = A \star A$$

eşitliği sayesinde tümleyeni ve

$$A \cup B = ((A \cup B)')' = (A \star B)' = (A \star B) \star (A \star B)$$

eşitliği sayesinde bileşimi tanımlayabiliriz.

4.136. Sonlu sayıda kümeyle yapılan işlemlerin ana özelliklerini sıralayalım. Evrensel kümenin olduğunu varsayıyoruz ve adına E diyoruz.

Değişme Özellikleri: $A \cap B = B \cap A$ ve $A \cup B = B \cup A$.
Birleşme Özellikleri: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ve $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
Dağılma Özellikleri: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Tekkuvetli İşlem Özellikleri: $A \cap A = A$ ve $A \cup A = A$.
Etkisiz Ögelerin Varlığı: $A \cap E = A$ ve $A \cup \emptyset = A$.
Yutan Ögelerin Varlığı: $A \cap \emptyset = \emptyset$ ve $A \cup E = E$.
Tümleyenin Özellikleri:

$$\begin{aligned} &(A')' = A, \\ &A \cup A' = E, \\ &A \cap A' = \emptyset, \\ &E' = \emptyset, \\ &\emptyset' = E. \end{aligned}$$

De Morgan Yasaları: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ve $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Kümelerle ilgili tüm özdeşlikler bu özellikler kullanılarak kanıtlanabilir. Ama yukarıdaki listede de diğerlerinden hareketle kanıtlanabilen özellikler var, yani en az sayıda özellik yazmak gibi bir çabaya girmedik.
Bu özellikleri kullanarak $(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = A$ eşitliğini kanıtlayalım. Bunun için eşitliğin solundaki ifadeden hareket edip, yukarıda listelediğimiz eşitlikleri kullanarak adım adım sağdaki ifadeye varacağız. De Morgan yasalarından dolayı

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = (A \cup B) \cap ((A')' \cup B')$$

olur. Ama $(A')' = A$ olduğundan, buradan,

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = (A \cup B) \cap (A \cup B')$$

eşitliğini elde ederiz. Dağılma özelliğinden dolayı sağdaki ifade $A \cup (B \cap B')$ kümesine eşit. Demek ki

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = A \cup (B \cap B').$$

Ama $B \cap B' = \emptyset$ olduğundan, yukarıdaki eşitlikten

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = A \cup \emptyset$$

eşitliğini elde ederiz. Etkisiz ögenin özelliği bize son olarak

$$(A \cup B) \cap (A' \cap B)' = A$$

eşitliğini verir.
$A \cup (A \cap B) = A$ eşitliği de şöyle kanıtlanır:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B) = A \cap (E \cup B) = A \cap E = A.$$

Bu kanıtta hangi özellikleri kullandığımızı bulmayı okura bırakıyoruz.
Okur alıştırma olarak, yukarıdaki özellikleri ve sadece bunları kulanarak şu eşitlikleri kanıtlayabilir: $A \cap (A \cup B) = A$, $B \cup (\emptyset \cap A) = B$, $(A' \cap E)' = A$, $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$, $(A \cap B) \cup (A \cup B')' = B$.

4.137. Mutlak anlamda evrensel kümenin olmadığını kanıtlayabiliriz, yani ögeleri **tüm** kümelerden oluşan bir kümenin olmadığını kanıtlayabiliriz. Daha matematiksel bir deyişle şu teoremi kanıtlayabiliriz (ve kanıtlayacağız da):

Teorem 4.1. *x, ögeleri kümelerden oluşan bir küme olsun. y, x'in "$z \notin z$" özelliğini sağlayan z ögelerinden oluşsun. Yani $y = \{z \in x : z \notin z\}$ tanımını yapalım. O zaman $y \notin x$ olur.*

Kanıt: y'nin tanımına göre her z kümesi için şu doğrudur.

$$z \in y \iff (z \in x \text{ ve } z \notin z).$$

Bu önerme her z için geçerli olduğundan, özel bir durum olarak y için de geçerlidir, yani önermede z yerine y koyabiliriz:

(1) $$y \in y \iff (y \in x \text{ ve } y \notin y).$$

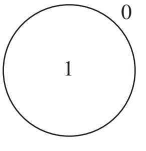
Şimdi diyelim kanıtlamak istediğimiz $y \notin x$ ifadesi yanlış, yani $y \in x$ ifadesi doğru. O zaman (1) ifadesinde bulunan "$y \in x$" önermesini kaldırabiliriz çünkü doğru olduğunu biliyoruz[3]. Demek ki

$$y \in y \iff y \notin y$$

önermesi doğru. Yani y kümesi y'nin ögesiyse o zaman y kümesi y'nin ögesi olamaz ve aksi istikamette, y kümesi y'nin ögesi değilse o zaman y kümesi y'nin ögesi olmak zorunda! Bu bariz bir çelişkidir, bir önermenin doğru olması için yanlış, yanlış olması için doğru olması gerekiyor, daha neler! □

Demek ki herhangi bir küme tüm kümeleri öge olarak içeremez, mutlaka bir küme dışında kalmak zorunda. Buradan da ögeleri tüm kümeler olan bir kümenin olamayacağı çıkar.
Bu aslında bu kitabın en başında verdiğimiz küme kavramıyla çelişir, çünkü kitabın başında bir kümeyi herhangi bir topluluk olarak tanımlamıştık ve tüm kümeler de bal gibi bir topluluktur, dolayısıyla verdiğimiz küme tanımına göre tüm kümelerden oluşan bir küme olması lazım. Bu işte tam olarak ***Russell Paradoksu***'dur. Sorun, kitabın en başında verdiğimiz küme tanımında. O tanım doğru olamaz. Okura yalan söyledik!
Russell Paradoksu ortaya çıktığında matematik ta en temelinden sarsıldı. Birkaç yol sonra paradoks giderildi ve her şey rayına oturdu. Bu ilginç konu için bkz. zorluk ve derinlik derecesine göre sıraladığımız [N4, sayfa 207-218], [N1], [N2].

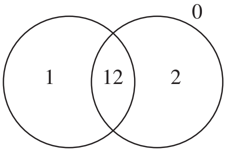
4.138. Çembersel Venn diyagramlarıyla ögelerin kümelere göre konumunu ne dereceye kadar doğru yansıtabiliriz? Bu ve bundan sonraki notlarda bu soruyu irdeleyeceğiz.
Tek bir kümeyle hiç sorun yok: Tek bir küme, ögeleri kümenin içindekiler ve dışındakiler olarak iki sınıfa ayırır. Bunu düzlemde bir çemberle göstermek mümkündür:



Yukarıdaki şekilde iki bölgeyi 0 ve 1 sayılarıyla gösterdik. 0, kümenin (yani çemberin) dışını temsil ediyor, 1 de içini.

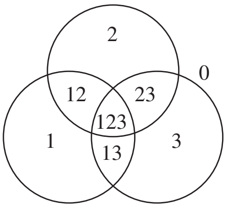
4.139. İki farklı küme ise ögeleri dört sınıfa ayırır: kesişimdekiler, birinde olup diğerinde olmayanlar (bunlardan iki adet var) ve her iki kümede de olmayanlar. İki çemberle bu dört sınıfı rahatlıkla gösterebiliriz:

[3] "Sadece ve sadece hava güzelse ve $2 \times 2 = 4$ ise pikniğe gideceğim" ifadesiyle "Sadece ve sadece hava güzelse pikniğe gideceğim" ifadesi mantıksal olarak birbirlerine denktir, çünkü $2 \times 2 = 4$ doğru bir önermedir.



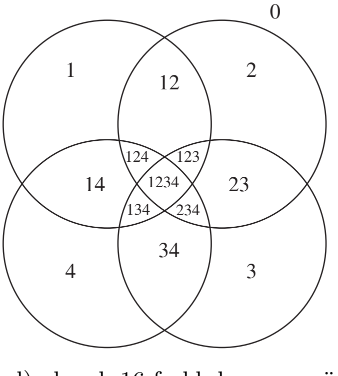
Yukarıdaki şekilde elde ettiğimiz dört bölgeyi 0, 1, 2, ve 12 ile gösterdik. 0, her iki kümede de olmayan ögelerin yerini temsil ediyor. 1, birinci kümede olup da ikinci kümede olmayan ögelerin yerini temsil ediyor. 2, tam tersine, ikinci kümede olup da birinci kümede olmayan ögelerin yerini temsil ediyor. 12 ise her iki kümede de olan ögelerin yerini temsil ediyor. Böylece iki kümenin en genel durumunu düzlemde çemberlerle gösterebiliriz.

4.140. Üç küme, ögeleri 8 farklı sınıfa ayırır. Üç çemberle de düzlemi sekiz parçaya ayırabiliriz.

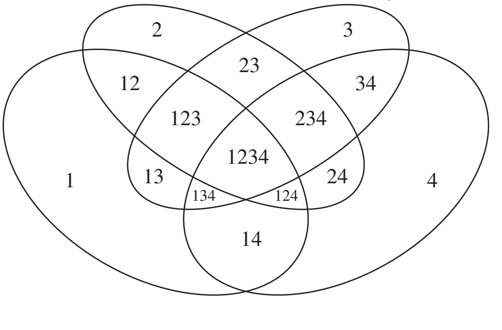


Yukarıdaki şekilde elde ettiğimiz sekiz bölgeyi 0, 1, 2, 3, 12, 13, 23, 123 sayılarıyla gösterdik. örneğin 23 bölgesi, ikinci ve üçüncü kümede olan ama birinci kümede olmayan ögelerin yerini temsil ediyor. Böylece üç kümenin konumunu düzlemde çemberlerle gösterebiliriz.

4.141. Dört kümenin birbirine göre konumlarını düzlemde çemberlerle göstermek mümkün değildir, mesela aşağıdaki şekil olmuyor çünkü 13 ve 24 bölgeleri eksik.

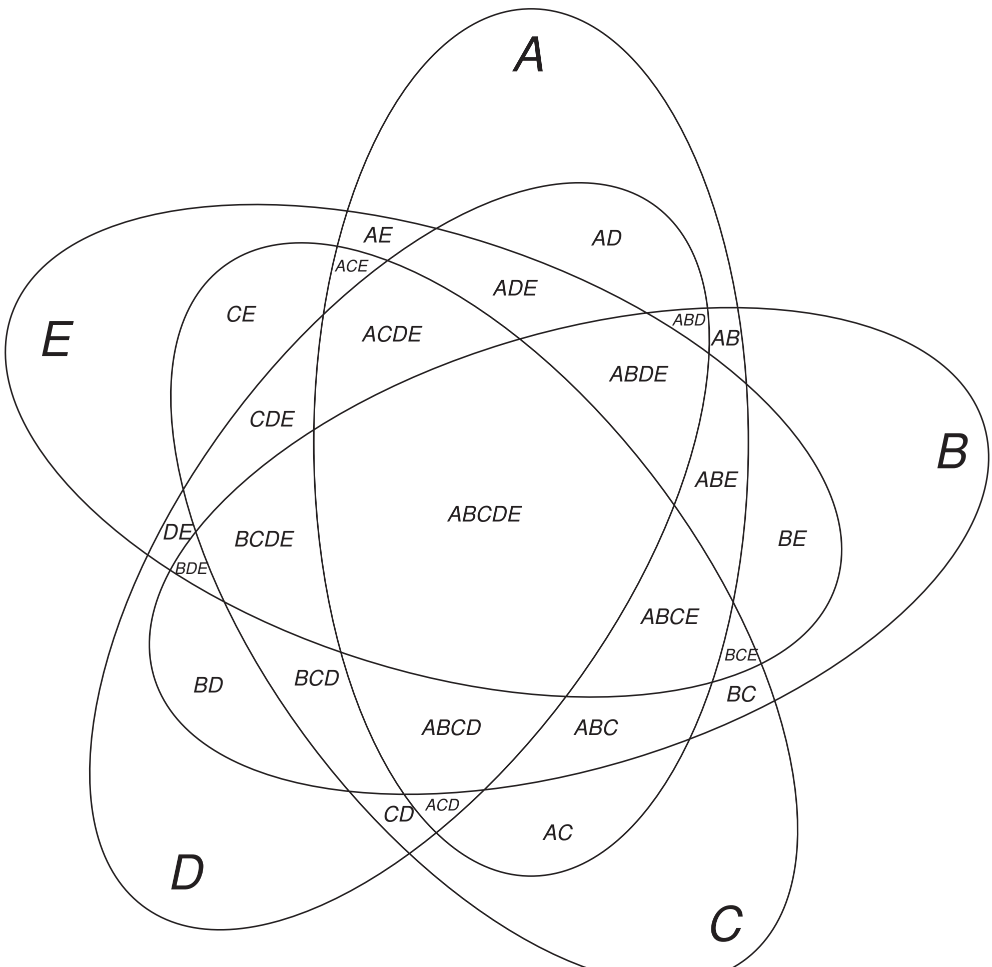


Ama çember yerine elips (oval) alırsak 16 farklı konumu göstermek mümkün. İşte dört kümenin elipslerle mükemmel bir Venn diyagramı:



Ögelerin dört kümeye göre $2^4 = 16$ farklı konumu olabilir. Bu konumları 0, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234 ve 1234 olarak gösterebiliriz. 124 konumu, üçüncü kümede olmayan ama diğer üç kümede olan ögelerin konumunu gösteriyor.

4.142. Uzunca bir süre elipslerle (ya da dışbükey şekillerle) en fazla dört kümenin en genel konumu gösterileceği sanıldı. Yanlış! Beş kümenin en genel konumu da gösterilebilir. 1880'de Venn ile başlayan bu yanlış inanç 1975'e kadar sürdü. Bu tarihte Hırvat matematikçi Branko Grünbaum bu yanlış inancı çürüttü. Beş kümenin tüm konumlarını da elipslerle düzlemde göstermek mümkün, hatta bol simetrili güzel bir şekille gösterebiliriz. Bir sonraki sayfada o Venn diyagramını bulacaksınız. Bu sefer bölgeleri sayılarla değil, A, B, C, D ve E ile gösterdik. Örneğin ADE bölgesi $A \cap D \cap E \setminus (B \cup C)$ anlamına geliyor.



Yukarıdaki güzel şekli Hırvat matematikçi Branko Grünbaum'a borçluyuz. Elipslerle beşten fazla kümenin konumunun gösterilemeyeceğini de Grünbaum kanıtlamıştır [Gr]. Eğer elipslerden vazgeçip her türlü şekil kullanma hakkımız varsa, n tane kümenin tüm 2^n adet konumu gösterilebilir. Bunu da Venn kanıtlamıştır. (Aslında Venn sadece 6 kümenin tüm konumlarını gösteren bir şekil çizmiş ama gene de bu şekille genel durumun nasıl yapılacağını da işaret etmiştir.)

5. Birkaç Küme Yazılım Biçimi

Bu bölümde kümeleri göstermenin bazı pratik yollarını göreceğiz.

n bir doğal sayı olsun. n'nin doğal sayı katlarının kümesinin $n\mathbb{N}$ olduğunu biliyoruz:

$$n\mathbb{N} = \{0,\ n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \ldots\}.$$

Bu yazılımdaki üç nokta pek hoş değil, sezgilerimize çok fazla sesleniyor çünkü. Sadece sezgilerimizle bir sonraki ögenin $5n$ olduğunu biliyoruz, matematiksel bir nedenden değil. Bu kümeyi şöyle göstermeyi tercih edeceğiz:

$$n\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : x,\ n\text{'nin bir doğal sayı katıdır}\}.$$

Bu yazılımda x yerine y, z, a, b gibi yazılımda kullanılmayan başka simgeler de kullanabilirdik tabii, yani $n\mathbb{N}$ kümesini örneğin,

$$n\mathbb{N} = \{u \in \mathbb{N} : u,\ n\text{'nin bir doğal sayı katıdır}\}$$

olarak da yazabilirdik. $n\mathbb{N}$ kümesini şöyle de ifade edebiliriz:

$$n\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : \text{ bir } y \in \mathbb{N} \text{ için } x = ny\}.$$

Eşitliğin sağında küme parantezi içinde yer alan ifade,

"bir y doğal sayısı için ny biçiminde yazılan x'ler"

olarak okunabilir. Bir başka genel kullanım gören yazılım da şöyledir:

$$n\mathbb{N} = \{ny : y \in \mathbb{N}\}.$$

Bu sonuncusu hepsinden daha kısa bir yazılım olduğundan diğerlerine tercih edilebilir. Bu yazılım tipine başka örnekler de verelim:

$$\begin{aligned}
5\mathbb{N} + 2 &= \{x \in \mathbb{N} : \text{ öyle bir } y \in \mathbb{N} \text{ var ki } x = 5y + 2\}\\
&= \{a \in \mathbb{N} : a = 5x + 2 \text{ denkleminin } \mathbb{N}\text{'de çözümü var}\}\\
&= \{5n + 2 : n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Eğer A ve B birer doğal sayı kümesiyse, $A+B$ kümesini A ve B'nin ögeleri toplanarak elde edilen sayılardan oluşan küme olarak tanımlayalım. Demek ki

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Bu kümeyi şöyle de yazabiliriz:

$$A + B = \{c \in \mathbb{N} :\ a \in A \text{ ve } b \in B \text{ için } c = a + b\}.$$

Örneğin

$$\{3,\ 5\} + \{1,\ 3,\ 7\} = \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$$

olur. Benzer şekilde $A \cdot B$ kümesini de tanımlayabiliriz:

$$A \cdot B = \{ab : a \in A,\ b \in B\}.$$

Daha somut bir örnek:

$$5\mathbb{N} + 7\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : a,\ b \in \mathbb{N} \text{ için } n = 5a + 7b\}.$$

Aynı kümeyi şöyle de gösterebilirdik:

$$5\mathbb{N} + 7\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} :\ \text{bir } u \in 5\mathbb{N} \text{ ve } v \in 7\mathbb{N} \text{ sayıları için } n = u + v\}.$$

Şu ifade daha kısa ve daha anlaşılır:

$$5\mathbb{N} + 7\mathbb{N} = \{5x + 7y : x,\ y \in \mathbb{N}\}.$$

Asal sayılar kümesini $\mathbb{P}$ olarak gösterelim. Demek ki

$$\mathbb{P} = \{p : p \text{ asal}\}.$$

Eğer asal sayıların doğal sayı olduklarına dikkati çekmek istiyorsak,

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ asal}\}$$

yazabiliriz. Asal sayıların tanımı gereği,

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} :\ \text{bir } n \text{ doğal sayısı } p\text{'yi bölüyorsa ya } n = 1 \text{ ya da } n = p\}$$

yazabiliriz. Asal sayılar kümesi

$$\mathbb{P} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \dots\}$$

olarak da yazılabilir ama pek tercih edlmez çünkü hiçbir şey bize 13'ten sonra 17'nin geleceğini belirtmiyor. 15'ten küçük asal sayılar kümesi

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 15 \text{ ve } n \text{ asal}\}$$

olarak ya da

$$\{n \in \mathbb{P} : n < 15\}$$

olarak yazılır. Tabii bu kümeyi

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

olarak da yazabiliriz. Aynı küme şöyle de yazılabilir:

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 15 \text{ ve } n \neq 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\},$$

ama pek cazip olmaz... Tam karelerden oluşan kümeyi şöyle gösterebiliriz:

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{ bir } m \in \mathbb{N} \text{ için } n = m^2\};$$

ya da çok daha sade olarak şöyle:

$$\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tek sayılar kümesi farklı biçimlerde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
2\mathbb{N}+1 &= \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} : \text{ 2, } n\text{'yi bölmez}\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} : \text{ bir } m \in \mathbb{N} \text{ için } n = 2m+1 \text{ olur}\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} : \text{ 2, } n-1\text{'i böler}\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} : \text{ 2, } n+1\text{'i böler}\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} : \text{ 2, } n+3\text{'ü böler}\}.
\end{aligned}$$

Bir başka örnek: $\{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$; bu küme, tam karelere 1 ekleyerek elde edilen sayılardan oluşuyor.

$$\{n^2 + m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$$

kümesi ise iki tam karenin toplamı olarak yazılan sayılardan oluşuyor. 0, 1, 2 sayıları bu kümede ama 3 değil.

İleride küme yazılımlarına çok örnek vereceğiz. Tüm yazılım biçimlerinde önemli olan, kümenin ögelerini hiç kuşkuya yer kalmayacak biçimde düzgün olarak ifade etmektir. Bir de ayrıca (iki nokta üstüste koymak gibi) matematikçilerin teamüllerine uyulsa fena olmaz. Bu arada bazı (Fransız ekolü) kitaplarda iki nokta üstüste yerine dikey bir çizgi (|) yazıldığını da belirtelim, gün gelir gerekir...

Notlar

5.1. $n\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : \text{ bir } y \in \mathbb{N} \text{ için } x = ny\}$ tanımını metinde görmüştük. Sağdaki ifadede beliren x ve y, kümenin özüyle ilgili değildir, nitekim eşitliğin sol tarafındaki $n\mathbb{N}$ ifadesinde x ve y belirmez. Buradaki x ve y değişkendirler. x ve y yerine u ve t yazsak da tanım değişmezdi:

$$n\mathbb{N} = \{u \in \mathbb{N} : \text{ bir } t \in \mathbb{N} \text{ için } u = nt\}.$$

Alıştırmalar

5.2. En az iki farklı asala bölünen sayılardan oluşan kümeyi metindeki yöntemle ifade edin.

5.3. $\{x \in \mathbb{N} : p,\, q \in \mathbb{P}$ için $x = pq\}$ kümesinin ilk 6 ögesini yazın.

5.4. $\{x \in \mathbb{N} : p,\, q \in \mathbb{P}$ için $x = p + q\}$ kümesinin ilk 6 ögesini yazın.

5.5. $\{x \in \mathbb{N} : p,\, q \in \mathbb{P}$ ve $p \neq q$ için $x = pq\}$ kümesinin ilk 6 ögesini yazın.

5.6. $\{x \in \mathbb{N} : u,\, v \in \mathbb{N}$ için $x = u^2 + v^2\}$ kümesinin ilk 10 ögesini yazın.

5.7. $\{x \in \mathbb{N} : u,\, v,\, w \in \mathbb{N}$ için $x = u^2 + v^2 + w^2\}$ kümesinin ilk 10 ögesini yazın.

5.8. $\{x \in \mathbb{N} : u,\, v,\, w,\, s \in \mathbb{N}$ için $x = u^2 + v^2 + w^2 + s^2\}$ kümesinin ilk 30 ögesini yazın.

5.9. $\{x \in \mathbb{N} : p,\, q$ asal sayıları için $2x = p + q\}$ kümesinin ilk 30 ögesini yazın.

5.10. $\{p \in \mathbb{P} : p + 2 \in \mathbb{P}\}$ kümesinin ilk 10 ögesini yazın.

5.11. $A,\, B \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer $0 \in B$ ise, $A \subseteq A + B$ olur elbette. Eğer $A \subseteq A + B$ ise 0'ın B'de olduğunu kanıtlayın.

5.12. $A,\, B \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer $A \cup B \subseteq A + B$ ise $0 \in A \cap B$ olduğunu kanıtlayın.

5.13. Eğer $A \subseteq A \cdot B$ ise A ve B hakkında ne söyleyebilirsiniz?

5.14. $\emptyset + A = \emptyset$ ve $\emptyset \cdot A = \emptyset$ eşitliklerini kanıtlayın.

Kaynakça

[G] Jeremy Gray, **Did Poincaré say "set theory is a disease"?**, The Mathematical Intelligencer, Aralık 1991, Cilt 13, Sayı 1, sayfa 19-22.

[Gr] Branko Grünbaum, **Venn Diagrams and Independent Families of Sets**, The American Mathematical Monthly, cilt 82, 175, sayfa 12-23. `http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/BrankoGrunbaum.pdf`

[H] David Hilbert, **Project Gutenberg's The Foundations of Geometry**, `http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf`

[L] A. M. Legendre, **Essai sur la Théorie des Nombres**, Paris, Duprat, An VI.

[N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıcılık 2015.

[N2] Ali Nesin, **Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: `http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2`.

[N3] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık tarafından yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: `http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2`.

[N4] Ali Nesin, **Matematik ve Korku**, Nesin Yayıncılık, 2016.

Simgeler Dizini

$\{\ \}$, 6
$\in$, 9
$\notin$, 9
$\mathbb{N}$, 10
$\mathbb{S}$, 11
$\langle\ \rangle$, 16
$\emptyset$, 27
$\subseteq$, 31
$s(A)$, 10, 32
$\not\subseteq$, 32
$\subset$, 37
$\cup$, 41
$\cap$, 44
Δ, 60
A', 63
$\mathbb{P}$, 72

Dizin

01-dizisi, 15
01-tablosu, 54

0, 11

A', 63
açan küme parantezi, 6
aksiyom, 15, 24
altküme, 31
altküme olma ilişkisi, 31
altküme sayısı, 35
altkümeler kümesi önermesi, 35
arakesit, 44
ayrık kümeler, 45

belit, 24, 34
bileşim, 41
birleşme özelliği, 42, 44, 62
değişme özelliği, 66
Bolzano, Johann, 21
boşdizi, 16
boşküme, 27
boşküme önermesi, 27

Cantor, Georg, 21

dağılma özelliği, 47, 55, 62, 66
De Morgan özdeşlikleri, 64
De Morgan yasaları, 66
değişme özelliği, 42, 44, 62, 66
dizi, 15
dizinin uzunluğu, 15
doğal sayı, 10, 43
doğal sayılar kümesi, 10
düal, 64

eleman, 6
eşlenik, 64
etkisiz öge, 42, 44, 62, 66
evrensel küme, 62

geçişli ilişki, 35
Grünbaum, Branko, 69

Hilbert, David, 21

iki ögeli küme önermesi, 25

kapatan küme parantezi, 6
kapsama ilişkisi, 31
kesişim, 44
küme, 5
küme eşitliği, 7
küme eşitliği önermesi, 7
küme parantezleri, 6

$\mathbb{N}$, 10

olmayana ergi, 34
öge, 5, 6
özaltküme, 37

$\mathbb{P}$, 72
Petersen çizgesi, 37
Poincaré, Henri, 21
postulat, 24
pozitif, 11

Russell Paradoksu, 67

$\mathbb{S}$, 11
sayma sayıları, 11
simetrik fark, 60
sonlu küme, 10
sonsuz küme, 10

tablo, 54
tekkuvvetli işlem, 42, 44, 66
tümleyen, 63, 66

üstküme, 31
uzunluk (dizinin), 15

Venn diyagramı, 6, 13, 67
Venn, John, 24, 69

yok edici özellik, 62
yutan öge, 66