# Pi'nin Öyküsü

İnsanoğlu, "çember" dediğimiz kendine özgü düzgün yuvarlak şeklin farkına tekerleğin icadından çok önce varmıştı. Bu şekli diğer insanların, hayvanların gözbebeklerinde, gökyüzünde güneşte, ayda görüyordu. Etrafındaki bitkilerden, çiçeklerden de çember ya da çembere yakın şekiller algılıyordu. Derken bir gün elindeki çomakla kuma bir çember çizdi. Sonra düşündü: Bazı çemberler küçüktü, bazılarıysa büyük. Çemberin bir ucundan öteki ucuna uzaklığı ne kadar büyürse çevresi de o kadar büyüyordu. Sonra gene düşündü. Cilalı taş devri insanı artık soyutlamasını yapmıştı: Çemberin çevresinin uzunluğu çapının uzunluğuyla orantılıydı. Yani çap 2 kat büyüyünce çevre de 2 kat, çap 3 kat büyüyünce çevre de 3 kat büyüyordu. Çapı 4 kat küçültünce çevre de 4 kat küçülüyordu. Başka bir deyişle çevrenin çapa oranı çemberden çembere değişmiyor, sabit kalıyordu.

Demek ki, bu sabit orana $\pi$ dersek[1] çağdaş matematik diliyle,

$$\pi = \text{çevre}/\text{çap} = \text{sabit}$$

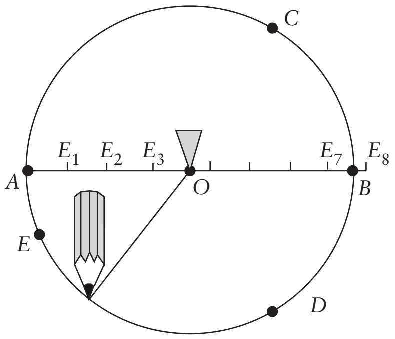
yazılabiliyordu.

1 $\pi$ (pi) Yunan alfabesinin 16'ncı harfi. İsviçreli büyük matematikçi Leonhard Euler'in de 1737 yılında yayınladığı bir kitabında benimseyip kullanmasıyla dairenin çevresinin çapına oranı artık hemen herkesçe bu harfle gösteriliyor.

Bu oranın sabitliğine karar kıldıktan sonra şimdi soru bu sabitin değerinin saptanmasıydı. Babil'de ve Eski Mısır'da MÖ 2000 dolayında sırasıyla $\pi = 31/8$ ve $\pi = (16/9)^2$ değerleri kullanılıyordu.

Bu insanlar bu değerleri nasıl bulmuşlardı? Kesin bir şey söylemek olanaksız ama bir tahmin yürütebiliriz: $\pi$ sayısının değerini bulmak için en kolay yol bir daire alıp bunun çevresi ile çapını ölçmek ve ikisini birbirine bölmektir. Biz de öyle yapalım. Nil nehrinin kıyısında büyücek bir ıslak kumsal alanının ortasına bir yere bir kazık çakalım. Kazığa bir ip bağlayalım. İpin öbür ucuna sivri uçlu bir sopa tutturalım ve ipi gergin tutarak kuma bir çember çizelim.

Şimdi kazığı ve ipi çıkarıp atalım (kazığın deliği *O*'yu bozmayalım). Başka bir ip bulalım. Bu ipi çember üzerinde alınan herhangi bir *A* noktasından çemberin bir ucundan öteki ucuna doğru *O*'dan geçecek şekilde uzatalım. İpin *A*'ya ve çemberin öteki ucu *B*'ye karşı gelen noktalarını bir kömür parçasıyla işaretleyelim. İpin üzerindeki *AB* uzunluğu çemberin çapıdır ve bizim ölçü birimimizdir. İpin kömürle işaretlenmiş noktası çemberimizin *A* noktasıyla çakıştırarak, ipi saat yönünde çemberin üzerine yayalım. Öteki kömür işaretine çember üzerinde karşı gelen noktaya *C* diyelim. İpi şimdi *C*'ye taşıyalım. Kömür işaretinin altındaki yeni noktaya *D* diyelim ve benzer şekilde *E* noktasını da bulalım. Çember üzerinde 3 çap boyu gittik ve *E* noktasına vardık. Çevre üzerinde gidecek "azıcık" daha uzunluğumuz kaldı. Şu halde çevrenin çapa oranı yani $\pi$'nin değeri "üç küsur"dur. Küsuru atarsak $\pi = 3$ yazabiliriz.



Nitekim, Kutsal Kitap'ta, Eski Ahit'te I. Krallar Bap 7, Ayet 23'te ya da II. Tarihler, Bap 4, Ayet 2'de şu satırları okuyoruz: "Ve dökme denizi bir kenardan o bir kenara on arşın olarak değirmi biçimde yaptı, ve yüksekliği beş arşındı; ve otuz arşınlık bir ip onun çevresini sarardı."

Görüldüğü gibi dökme deniz değirmi, yani çember biçiminde. Bir kenardan öbür kenara (yani çapı) 10 arşın geliyor. Çevresi de 30 arşın. Şu halde $\pi$'nin Kutsal Kitap'a göre değeri 30/10 = 3. Kutsal Kitap'ın "Krallar Kitabı" bölümü yaklaşık MÖ 550'de eski Yahudiler tarafından derlenmişti. O tarihte $\pi$ sayısı çok daha hassas bir biçimde biliniyordu, ama herhalde Yahudi derleyiciler bunu bilmiyordu. Buradan da din adamlarıyla matematikçilerin bu tarihte artık eskiden olduğu gibi aynı kişiler olmadığı sonucuna varabiliriz.

Biz Kutsal Kitap'ı bir kenara bırakıp Nil kıyısındaki çemberimize dönelim ve "küsuratımız" $EA$'nın uzunluğunu çapın bir kesri olarak ölçelim: Önce $EA$ uzunluğunu bir ip üzerine işaretleyelim. Bu uzunluğu ipi gererek $AB$ çapının üzerine taşıyalım ve $AE_1$, $E_1E_2$, vb. $EA$'ya eşit olacak şekilde çapı bölmeleyelim. Göreceğiz ki $B$ noktası $E_7$ ile $E_8$'in arasına düşecektir. Şu halde $EA$ uzunluğu çapın 1/7'si ile 1/8'i arasındadır. Yani

$$3 + 1/8 < \pi < 3 + 1/7.$$

Kumda çizilen daireyle, iplerle, kömürden işaretlerle bundan daha iyi yapamayacağımız bir gerçek. Ama gene de

$$\pi = 3 + 1/7 = 22/7$$

yaklaşık değeri birçok uygulamada yeterince hassas sayılabilir. En azından benim ortaokulda, lisede okuduğum yıllarda matematik ya da fizik yazılısında "$\pi$'yi yirmi iki bölü yedi alabilir miyiz hocam?" diye sormak modaydı. Hocalar da bu modaya uyarlar ve problemde dairenin çapını ya 7 ya da 7'nin katı bir sayı olarak verirlerdi ki çarpma kolay olsun.

Şimdi bir de $\pi$'nin aşağıdaki değerine bakalım:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| π = | 3,14159 | 26535 | 89793 | 23846 | 26433 | 83276 |
| | 50288 | 41971 | 69399 | 37510 | 58209 | 74944 |
| | 59230 | 78164 | 06286 | 20899 | 86280 | 34825 |
| | 34211 | 70679 | 82148 | 08651 | 32823 | 06647 |
| | 09384 | 46095 | 50582 | 23172 | 53594 | 08128 |
| | 48111 | 74502 | 84102 | 70193 | 85211 | 05559 |
| | 64462 | 29489 | 54930 | 38196 | 44288 | 10975 |
| | 66593 | 34461 | 28475 | 64823 | 37867 | 83165 |
| | 27120 | 19091 | 45648 | 56692 | 34603 | 48610 |
| | 45432 | 66482 | 13393 | 60726 | 02491 | 41273 |
| | 72458 | 70066 | 06315 | 58817 | 48815 | 20920 |
| | 96282 | 92540 | 91715 | 36436 | 78925 | 90360 |
| | 01133 | 05305 | 48820 | 46652 | 13841 | 46951 |
| | 94151 | 16094 | 33057 | 27036 | 57595 | 91953 |
| | 09218 | 61173 | 81932 | 61179 | 31051 | 18548 |
| | 07446 | 23799 | 62749 | 56735 | 18857 | 52724 |
| | 89122 | 79381 | 83011 | 94912 | 98336 | 73362 |
| | 44065 | 66430 | 86021 | 39501 | 60924 | 48077 |
| | 23094 | 36285 | 53096 | 62027 | 55692 | 97986 |
| | 95022 | 24749 | 96206 | 07497 | 03041 | 23668 |
| | 86199 | 51100 | 89202 | 38377 | 02131 | 41694 |
| | 11902 | 98858 | 25446 | 81639 | 79990 | 46597 |
| | 00081 | 70029 | 63123 | 77381 | 34208 | 41307 |
| | 91451 | 18398 | 05709 | 85... | | |

π sayısı burada 707 basamağa kadar veriliyor. 1874 yılında İngiliz matematikçisi W. Shanks tarafından yayımlanmış. On altı basamağın, yarıçapı yerküre ile güneş arasındaki ortalama uzaklığa eşit bir dairenin çevresini bir kıl kalınlığı kadar hata ile hesaplamaya yeterli olduğu; güneşin yerine bilinen en uzak nebula, kıl kalınlığı yerine de fizikçilerce bilinen en küçük taneciğin büyüklüğü konduğunda gerekli basamak sayısının yalnızca 40 olduğu düşünülürse, π'yi 707 basamağa kadar hesaplamanın düpedüz işgüzarlık olduğu anlaşılır.

Ama her alanda olduğu gibi işgüzarlık alanında da sınır tanımayan insanoğlu 707 basamakla da yetinmeyerek ilk bilgisayarın icadından sonra π sayısını 1947'de 2035 basamağa kadar hesapladı, π'nin basamaklarının fethini aşağıdaki kronoloji cetvelinden izleyebilirsiniz.

**Pi'nin Kronolojisi**

| | |
|---|---|
| MÖ 20. yy | Babilliler $\pi = 3\ 1/8$ değerini kullanıyorlar. |
| MÖ 20. yy | Mısırlılar $\pi = (16/9)^2 = 3{,}1605$ değerini kullanıyorlar. |
| MÖ 12.yy | Çinliler $\pi = 3$ değerini kullanıyorlar. |
| MÖ 550 | Kutsal Kitap'ta, I. Krallar 7:23'te π, 3 anlamına geliyor. |
| MÖ 434 | Anoksagoras daireyi kare yapmaya girişiyor. |
| MÖ 3. yy | Arşimet $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$ olduğunu buluyor. Bundan başka $\pi = 211875/67441$ kesrini de buluyor. |
| 2. yy | Batlamyos $\pi = 377/120 = 3{,}14166...$ değerini kullanıyor. |
| 3. yy | Çung Hing $\pi = \sqrt{10} = 3{,}16$, Vang Fau $\pi = 142/45 = 3{,}155$, Liu Hui $\pi = 471/150 = 3{,}14$ değerlerini kullanıyorlar. |
| 5. yy | Zu Çung-Çi $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ olduğunu buluyor. |
| 6.yy | Hintli Aryabhatta $\pi = 62832/2000 = 3{,}1416$ değerini, Brahmagupta ise $\pi = \sqrt{10}$ değerini kullanıyor. |
| 1220 | Fibonacci $\pi = 3{,}141818$ değerini kullanıyor. |
| 1436 | Semerkantlı El Kaşi π'yi 14 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1573 | Valentinus Otho $\pi \approx 355/113 \approx 3{,}1415929$ olduğunu buluyor. |
| 1593 | Hollandalı Adriaen Van Rooman π'yi 15 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1596 | Hollandalı Ludolph Van Ceulen π'yi 35 basamağa kadar hesaplıyor. (Bu nedenle Almanya'da π Ludolph sayısı diye de bilinir). |

| | |
|---|---|
| 1705 | Abraham Sharp π'yi 72 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1706 | John Machin π'yi 100 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1719 | Fransız De Lagny π'yi 127 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1737 | Leonhard Euler'in benimsemesiyle π adı evrensellik kazanıyor. |
| 1761 | İsviçreli Johann Heinrich Lambert π'nin irrasyo nelliğini kanıtlıyor. |
| 1775 | Euler π'nin aşkın olabileceğine işaret ediyor. |
| 1794 | Fransız Adrien - Marie Legendre π'nin ve $\pi^2$'nin irrasyonelliğini kanıtlıyor. Aynı zamanda π'nin aşkın olabileceğini belirtiyor. |
| 1794 | Vega π'yi 140 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1844 | Avusturyalı Schulz Von Stranssnigtzky π'yi 200 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1855 | Richter π'yi 500 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1874 | İngiliz W. Shanks π'yi 707 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1882 | Alman Ferdinand Lindemann π'nin aşkın bir sayı olduğunu kanıtlıyor. |
| 1947 | İlk bilgisayar ENIAC π'yi 2035 basamağa kadar hesaplıyor. |
| 1981 | Bilim ve Sanat'ın 6'ncı sayısında π'nin öyküsü yayımlanıyor. |

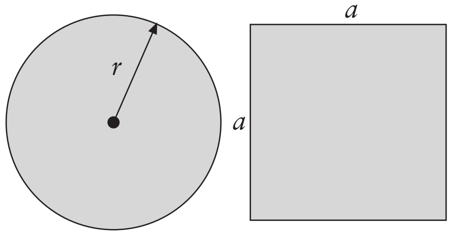
## Pi'nin İrrasyonelliği

Nasıl bir sayı π sayısı? Örneğin *m* ve *n* birer tamsayı olmak üzere *m*/*n* biçiminde yazılabilir mi? Yani π rasyonel midir? Başlangıçta insanlar bu yönde umutluydular. π'nin bu kadar çok basamağının hesaplanmasının nedenlerinden biri de buydu herhalde. Bekliyorlardı ki bir yerden sonra basamaklar önceki değerlerini tekrar etsin, yani π devirli bir ondalık sayı halinde yazılabilsin[2]. Bu olmadı. Sonunda 1761'de İsviçreli matematikçi Lambert $\pi$'nin irrasyonel olduğunu, yani çemberin çevresi ile çapının bir ortak ölçüsü olmadığını kanıtladı.

### Pi'nin Aşkınlığı

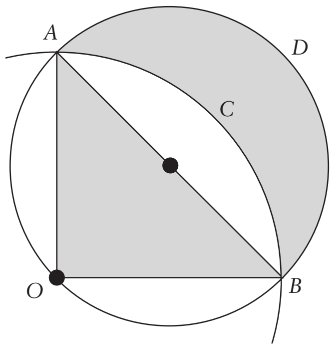
$\pi$ sayısının gittikçe daha fazla basamağını hesaplama tutkusunun yanısıra matematikçilerin rüyalarına giren başka bir $\pi$ problemi de, çemberi kare yapma problemiydi. Önce problemi tanımlayalım:

Sonlu sayıda işlem yaparak ve yalnızca pergel ve cetvel kullanarak[3] alanı verilen bir çemberin alanına eşit kare çizmek.



$r$ verilmiş. $\pi r^2 = a^2$ eşitliğini sağlayan $a$ uzunluğunu pergel ve cetvelle inşa et.

Bu uğraşıya kendilerini kaptıranların atası Anaksagoras'tır (MÖ 500-128). Bir ara Atina'da zındıklıkla suçlanıp hapse atılan Anaksagoras burada can sıkıntısından, çemberi kare yapmanın yollarını aramaya başlar. Kendisinin çözüm sandığı bazı yaklaşık sonuçlar da elde eder. Daha sonra Kiyoslu (Sakızlı) Hippokrates[4] (MÖ 5'inci yüzyılın ikinci yarısı), şekilde gri $ACBD$ alanının $AOB$ üçgeninin alanına eşit olduğunu gösterir. Şekildeki $ACB$ yayı, merkezi $O$, yarıçapı $OA$ olan yaydır. $ADB$ yayı ise çapı $AB$ olan yaydır.




2 Bu durumdu $\pi$'nin rasyonel olması gerektiği gösterilebilir.

3 Burada cetvel sözcüğü yalnızca doğru çizmeye yarayan taksimatsız, düz kenarlı tahta anlamına alınmalıdır.

4 Doktorların piri Koslu (İstanköylü) Hippokrates'le karıştırılmamalıdır.

Bu ve buna benzer başka örnekler gösterir ki, belli eğrilerle sınırlanmış bazı bölgelerin alanlarına eşit alanda kareler çizilebilir[5].

Şu halde verilen bir çemberin de alanına eşit alanda bir kare neden çizilmesin?

Matematik tarihi bu uğraşa kendini adayan matematikçilerin ve amatörlerin adlarıyla doludur. Hepsinin de uğraşı düş kırıklığı ile sonuçlanır. Bunların içinde en büyük düş kırıklığı Jacques Mathulon adlı bir doktorun olsa gerektir. Çünkü bu kişi 18'inci yüzyılda daireyi kare yaptığını ilan etmiş ve yönteminin yanlışlığını bulana 1000 ecu[6] ödeyeceğini söylemişti. 1000 ecu'yü mahkeme huzurunda yanlışını bulana ödedi de. Bundan sonra kare yapıcılar daha ihtiyatlı oldular.

18'inci yüzyılın sonundan başlayarak dairenin kare yapılmasının olanaksız olduğu fikri matematikçilere egemen olur. Bu kuşku o kadar büyür ki 1775'te Paris Bilimler Akademisi devri daim makinesi projeleri, açıyı pergel ve cetvel kullanarak üçe bölme yöntemlerinin yanısıra daireyi kare yapma yöntemlerini de artık incelememe kararı alır. 1775'te Euler, 1794'te Legendre, $\pi$'nin belki de cebirsel bir sayı olmadığına, dolayısıyla aşkın bir sayı olması gerektiğine ilişkin inançlarını belirtirler.

Şimdi bu konuyu biraz açalım, $m$ ve $n$ tamsayı olmak üzere $m/n$ biçiminde **yazılamayan** sayılara irrasyonel dendiğini biliyoruz. Katsayıları tamsayılar olmak üzere

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

biçiminde yazılabilen denklemlere de ***cebirsel denklem*** diyoruz. Eğer bir sayı bir cebirsel denklemin kökü ise o sayıya ***cebirsel sayı*** diyoruz. Örneğin bütün rasyonel sayılar cebirseldir ($m/n$ rasyonel sayısı $nx - m = 0$ denkleminin köküdür).

İrrasyonel sayıların bazıları da cebirseldir: Örneğin $\sqrt{2}$ sayısı $x^2 - 2 = 0$ denkleminin köküdür, dolayısıyla cebirseldir. Pe-

5 Üçgeni çizdikten sonra üçgenden kareye kolayca geçilebilir.
6 Ecu (ekü): 5 Franklık gümüş Fransız parası. 1000 eküyü kazanan François Nicole parayı Lyons hastanelerine ve yoksullara bağışlamıştır.

ki cebirsel olmayan irrasyonel sayılar var mıdır? Evet. Böyle sayıların varlığını 1840'ta Fransız matematikçisi Joseph Liouville kanıtladı. Böyle cebirsel olmayan sayılara ***aşkın***[7] deniyor.

Bunları anlatmamın nedeni şu: Kanıtlanması bizi bu kitabın amacından çok uzaklara götürecek bir teorem gereğince, eğer $\pi$ sayısı cebirsel bir sayı değilse, daire kare yapılamaz.

İşte bu nedenle Euler ile Legendre $\pi$'nin cebirsel bir sayı olmadığına olan inançlarını belirtiyorlar. Ama inançla matematik yapılmaz. Kanıtlamak gerek. Kanıtlamak için de matematiksel avadanlık gerek. Bu avadanlığın gelişmesi ve $\pi$'nin aşkın olduğunun kanıtlanması için daha yaklaşık 100 yıl beklendi. Sonunda 1882'de Alman matematikçisi Lindemann $\pi$'nin aşkın olduğunu kanıtladı da, böylece MÖ 434'te başlayan serüven son buldu. Son buldu ama hâlâ da daireyi kare yaptığını iddia eden amatör gözbağcılara rastlanıyor.

### Pi'nin Resmi Değeri!

$\pi$'nin öyküsünü, geçen yüzyılın sonunda Amerika Birleşik Devletleri'nin Indiana Eyaleti'nde geçen bir olaydan söz ederek bitirelim. Olay "özel teşebbüs" hırsıyla bilgisizliğin bir arada olduğunda hem kişileri hem de kurumları bazen nasıl gülünç duruma düşürebileceğini göstermesi bakımından ibret vericidir.

Olay Edwin Goodwin adlı bir tıp doktorunun $\pi$ için yeni bir – yanlış – değer bulması, başka bazı yanlış hususlardan hareketle daireyi kare yapması ve bunları bir yasa önerisi haline getirip eyalet temsilciler meclisi üyesi Taylor Record'a vermesi ile başlar. Yasa önerisi 18 Ocak 1897'de Record tarafından eyalet temsilciler meclisine sunulur.

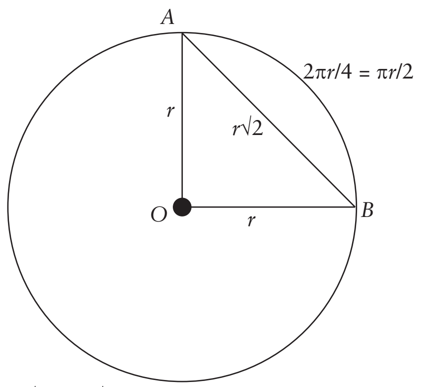
Önerinin giriş bölümünde şöyle denilmektedir: "Yeni bir matematiksel gerçeği tanıtmak ve eğitime katkıda bulunmak amacıyla sunulan ve 1897 yılında yasama organınca kabul edil-

7 Aşkın sözcüğüne Frenkler "transcendental" diyorlar.

mek ve benimsenmek koşuluyla içeriğinden yalnızca Indiana Eyaleti'nin hiçbir telif ücreti ödemeden yararlanabileceği bir yasa tasarısı."

Üç bölümden oluşan tasarı, baştan sona, insanın tüylerini diken diken edecek, hem temel geometri kurallarıyla hem de birbiriyle çelişen önermelerle doludur. Biz burada yalnızca ikinci bölümden alıntı yapalım: "... ayrıca 90°'lik kiriş uzunluğunun yay uzunluğuna oranı 7/8'dir. Öte yandan karenin köşegeninin kenarına oranı 10/7'dir ki, bu şu önemli dördüncü gerçeği ortaya koymaktadır: Dairenin çapının çevresine oranı 5/4'ün 4'e oranıdır..."

Böylece aynı paragraf içinde hem $\pi = 16\sqrt{2}/7 = 3{,}2324\ldots$




$$\frac{\text{kiriş}}{\text{yay}} = \frac{r\sqrt{2}}{\pi r/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} > \frac{2\times 1{,}414}{3{,}142} \approx 0{,}900063654 > \frac{9}{10} > \frac{7}{8}$$

hem de $\pi = 16/5 = 3{,}20$ olduğu söylenmekte, bununla da yetinilmeyip, ta Pisagor'dan beri bilinen karenin köşegeninin kenarına oranının irrasyonel olduğu gerçeği de yadsınmaktadır[8]. Tasarı – nedense – önce Bataklık Arazi Komisyonu'na havale edilir, buradan da "aidiyeti cihetiyle" Eğitim Komisyonu'na gönderilir. Komisyon'un olumlu görüşü ile birlikte 5 Şubat

8 Bu sonuncu ile ilgili ayrıntılı bilgi için "Matematik Nasıl Matematik Oldu?" bölümüne bakınız.

1897'de tekrar genel kurula gelen tasarı burada 67 oya karşılık 0 oyla kabul edilir!

Şimdi sıra Senato'dadır. Tasarı Senato'da – neden bilinmez – Alkollü İçkilerle Mücadele Komisyonu'na havale edilir ve komisyonun olumlu görüşüyle geri gelir. Artık tasarının yasalaşması (!) için hiçbir engel kalmamış gibidir, ama büyük bir rastlantı Senato'yu büyük bir yanılgıdan, π'yi de resmi bir değere kavuşmaktan alıkoyar. Tasarı komisyon dönüşü Senato genel kurulunda okunduğu sırada Purdue Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Profesör Waldo da üniversiteyle ilgili iş takibi dolayısıyla Senato'dadır. Genel kurulda tartışılmakta olanları duyunca kulaklarına inanamaz. Doğu Indiana'dan eski bir öğretmen senatör şöyle demektedir: "Sorun çok basit. Eğer π sayısı için yeni ve doğru bir değer belirleyen bu tasarıyı yasalaştırırsak, tasarının sahibi buluşunun eyaletimizde parasız kullanımına, okul kitaplarında yayımlanmasına izin verecektir. Buna karşılık öteki eyaletler kendisine telif ücreti ödemek durumundadır."

Profesör Waldo hemen kolları sıvayıp yoğun bir kulis faaliyetine girişir ve bunun sonucu 12 Şubat 1897'de Senato tasarı üzerindeki görüşmeleri belirsiz bir tarihe erteler. Bundan sonra da bu konu bir daha gündeme gelmez.

## EKLER

Bu yazıyı yazdıktan birkaç ay sonra Shanks'ın 1874'te yayımladığı π değerindeki son 180 basamağın yanlış olduğunu öğrendim. Bu gerçek 1947'de π ENIAC bilgisayarıyla 2 bin küsur basamağa kadar hesaplandığı zaman ortaya çıkıyor ve vahim bir tarihsel hata da bu şekilde düzeltilmiş oluyor. Ancak ne yazık ki bu son 180 basamağın doğrusu bende yok. Bu nedenle okur ya 527 doğru basamakla yetinecek ya da düzeltme işini kendi yapacak!