Matematik Nasıl Matematik Oldu?

İki Macar soylusu matematik yarışması yapmaya karar verirler. Yarışma kurallarına göre taraflar sırayla birer sayı söyleyecekler ve en yüksek sayıyı söyleyen yarışmayı kazanmış sayılacaktır. "Peki" der soylulardan biri, "sen başla". Öteki soylu uzunca bir beyinsel çalışmadan sonra ürününü ortaya koyar: "Üç!" Sıra birinci soyludadır. On beş dakika kadar kendisinden ses çıkmaz. Ama yüz ifadesinden bütün benliği ile düşünmekte olduğu bellidir. Nihayet acı gerçeği teslim etmek zorunda kalır: "Sen kazandın..."

Şimdi çoğu okurun bana kızdığını görür gibiyim: "Soylu moylu. Bir insan bu kadar da ebleh olamaz." Neden? Çünkü aşağı yukarı 5000 yıldır insanoğlu (soylular dahil) üçten yukarı saymasını biliyor.

Bugün insanoğlu yalnızca sayı saymasını bilmiyor. Geometri, cebir de biliyor. Sonsuz küçüklerle uğraşıyor, türev ve tümlev alıyor, türevsel denklem çözüyor, olasılık kuramıyla, çizge kuramıyla, topolojiyle uğraşıyor.

Matematik dediğimiz bu uçsuz bucaksız bilgi denizini nasıl yarattı insanoğlu? Bir görüşe göre içinde bulunduğu toplumun "üstünde" yaşayan matematikçilerinin eliyle. Buna göre, matematikçiler etkinliklerini içinde yaşadıkları toplumdan bağımsız olarak sürdürürler. Ama doğal olarak, ortaya konan ürün teknolojiyi etkilediği için matematik toplumsal değişmede etkili olur. Matematikçiler bu etkinlikleri süresince kendilerine hoş gelen ya da uygun gördükleri kavramları, soyut varlıkları - biraz da keyfi bir biçimde - yaratırlar ve bundan sonra her şey mekanik bir mantıksal kıyas yöntemiyle, önermeler zinciri halinde büyür, gelişir. Matematikçinin somut gerçeklikten bu uzaklığı, doğal ki onun ortaya işe yarar bir ürün koymasına engel değildir. Hatta çoğu kez bu ürün çok çeşitli uygulama alanları bulur. Böylece matematikçi içinde yaşadığı toplumu etkiler, ama matematik salt matematikçinin ürünüdür. Böylece döner dolaşır, toplumun gelişmesindeki itici gücün toplumdaki deha sahibi bilge kişiler olduğu sonucuna varırız.

Bu görüş gerçekliğin üstünkörü bir biçimde yorumlanmasından kaynaklanır. Matematikçiyi toplumdan soyutlayıp fildişi kuleye hapseder ve matematiksel gelişmenin matematikçinin iradesiyle kendiliğinden olduğunu varsayar. Oysa matematikçi ile matematikçinin içinde yaşadığı toplum ayrılmaz bir bütün oluşturur. Ancak bu bütünlüğü gördüğümüz zaman, nasıl olup da toplumun teknolojik gereksinmelerini karşılayabilmek için matematiğin yavaş yavaş, ama emin adımlarla bugünkü durumuna geldiğini anlayabiliriz.

Matematik, yaşamın nesnel koşulları onun varlığını gerektirince dünyaya geldi. İlk matematikçi belki de sürüsündeki hayvanları saymaya çabalayan bir çobandı.

Tarımla uğraşan toplumların en ilkeli bile mevsimlerle ilgili sayısal bilgiye gereksinme duyar. Bu ise takvim yapmayla ilgili sorunların çözümünü gerektirir. İlkel toplumların hemen hepsinin takvim tutmayla, dolayısıyla astronomiyle ilgilendiklerini biliyoruz.

Fenikeliler gibi tüccar-gemici toplumların ekonomilerinin bir muhasebe sistemine, miras bölüşme kurallarına, denizcilik sanatına, kısacası aritmetik, geometri, astronomiye olan gereksinmeleri tartışma götürmez. Bu gelişme ticarete dayanan her uygarlıkta yer alır. Babil'de ve Eski Mısır'da aritmetik ve geometrinin, Hindistan'da da cebirin başlaması işte bu gelişme sonucudur. Eski Mısır'da Nil taşkınlarından sonra toprak sınırlarının yeniden saptanması sorunu da geometrinin Mısır'a özgü itici öğelerinden biriydi.

Toplumsal yaşamın gerektirdiği matematiksel gelişme belli bir düzeye eriştikten sonra matematik artık yalnızca uzmanların anladığı bir meta haline geldi. Toplumun egemenlerinin bir araya getirdiği ve beslediği bu uzmanlar toplumda bir kast oluşturdular. "Gizli şeyleri[1]" elinde tutan bu insanlar tekellerindeki bu bilgi birikimi sayesinde toplumda büyük bir güç kazandılar.

Şimdi burada, "gizli şeyleri" ellerinde tutan bu insanları yazımın başında sözünü ettiğim "toplumun üstünde yaşayan matematikçi" kavramıyla karıştırmamak gerek. Tam tersine bu kişiler "gizli şeyleri" ile toplumun gereksinme duyduğu işlevleri yerine getirdikleri için güçlüydüler. Örneğin, Mısır'da zamanı kâhinler ölçerdi. Gündüzleri güneşi, geceleri de yıldızları gözlemleyerek zaman ölçülürdü. Nil taşkınlarının ne zaman olacağını da belirlerdi kâhinler. Gene "gizli şeylerin" içinde dairenin ve çokgenlerin alanlarının, basit bazı cisimlerin hacimlerinin nasıl bulunacağı da vardı. Örneğin üstü kesik bir piramitin hacmini bulabiliyordu Mısırlı kâhinler. (Burada, firavun mezarlarının köşe taşlarının kesik piramit şeklinde olduğuna dikkati çekmek isterim.)

Ancak gene de, matematiğin bu yalnızca uzmanlarca bilinir olma niteliği, sayı ve şekil konusunda belli bir gizemcilik de ya-

---

1 "Gizli şeyler" deyimi MÖ 1650 yılında Ahmes adlı bir kâtip tarafından Eski Mısır'da yazılan ve Mısır matematiğinin gelişmişlik düzeyi ile ilgili önemli bilgiler taşıyan bir papirusta geçer. Bu papirüs 1858'de İskoç antikacı Alexander Henry Rhind tarafından Mısır'dan kaçırılarak Batı'ya getirildiği için "Rhind papirüsü" diye bilinir.

ratmadı değil. Özellikle Pisagorcu gizemciliğin Yunan bilim ve felsefesi üzerindeki etkisi dikkati çeker.

Yunan toplumu üretimde kölelerin kullanıldığı, bu nedenle de üretimi artırmak için teknolojik gelişmeye pek gereksinme duymayan bir toplumdu. Bu durum toplumun egemenlerinin somut gerçeklikten uzaklaşmalarına yol açmıştı. Bu toplumsal yapı Yunan matematiğine gerçekten özgün bir nitelik kazandırmıştı: Uygulamayı hor görmek. Yunanlıya göre bir ürün uygulanabiliyorsa matematik olamazdı. Olsa olsa zanaat olabilirdi. Bunun sonucu Yunanlı nesnel gerçeklikten kaçar, onu yadsır oldu.

Yunan toplumunun bu yapısı Yunanlıların soyutlama ve akıl yürütmede gösterdikleri ilerlemenin nesnel tabanını oluşturur. Aynı zamanda bu yapının, Yunanlıların salt akıl yürütmekle gerçeğe ulaşılabileceğine olan inançlarını doğurduğunu söylemek de yanlış olmaz. Bu nedenle Yunan toplumu matematiğe modern anlamda kanıtlama tekniğini kazandıran ilk toplumdur. Matematiği ilerletmek için yalnızca akıl yürütmeye dayanan Yunanlılar, geliştirdikleri kanıtlama yöntemiyle matematiğin daha sonraki dönemlerdeki gelişmesinde birincil etken olmuşlardır.

Yunanlı geometricilerin bu yolla elde ettikleri eşsiz başarı Yunanlıların nesnel gerçeklikten büsbütün uzaklaşmalarına yol açar. Örneğin, Pisagorculara göre, gerçeklik, güzellik ve iyilik, bir bütün halinde "sonluda" ve "duranda" aranmalıdır. Bu eğilim Yunanlı geometricilerin akıl yürütmelerindeki durağanlığı ve hareketsizliği açıklar. Örneğin Zeno, çok yaygın bilinen örnekte, bir noktadan atılan bir okun, izlediği her noktada duruyor olması gerektiğinden, hiçbir zaman hedefe ulaşamayacağını savunur, yani hareketi yadsır. Hatta Öklid bile çemberi, bir noktadan eşit uzaklıkta hareket eden noktanın çizdiği eğri (düzlem eğrisi) olarak tanımlamaz da, hareket kavramını gerektirmeyen başka bir tanım verir. Çember, Yunanlıya göre, düşünsel bir varlık olarak hep vardır çünkü.

Yunan geometrisinin bu diyalektikdışı karakteri, tamsayıyı yücelten, irrasyonel sayılardan kaçan, "sonsuz" kavramını dışlayan Pisagorcu fikirlerle birlikte bugünkü matematiğin temeli olan matematiksel analizin ve cebirin gelişmesini önledi. Çünkü analiz ve cebirin gelişmesi için pratik bir sayı sistemi gerekiyordu ve Yunanlıların geometrisi böyle bir sistemin gelişmesinin önünü tıkamıştı.

Öte yandan Hindistan'da tüccar bir toplum görüyoruz. Bu toplumsal yapının sonucu Hindular ticaret için gerekli aritmetiği ve toprak ölçmek için gerekli geometriyi geliştirmişlerdi. Hindular matematiğe Yunanlılardan çok farklı bir biçimde yaklaşıyorlardı: Matematik onlar için yaşamı kolaylaştıran bir araçtan başka bir şey değildi. Bu nedenle Hindular matematiğin "teorik" yanı üzerinde pek durmadılar; kanıtlarla öyle uzun boylu uğraşmadılar. Ne sayılara taptılar ne de sayılardan korktular: İrrasyonel sayı herhangi bir sayıydı onlar için.

Ticaret kullanışlı bir sayı sistemi gerektiriyordu. Bugün bildiğimiz sayı sistemini geliştirdiler, sıfır kavramını icat ettiler. Dolayısıyla analiz ve cebiri geliştirdiler. Bu kavramlar daha sonra Araplar aracılığıyla Batı'ya tanıtıldı ve özellikle 13'üncü yüzyıl İtalyasında büyük ilgi gördü. Buradan Avrupa'ya yayıldı.

Bu kısa yazıda toplum yapısının matematiği nasıl biçimlendirdiğini anlatmaya çalıştım. Göstermeye çalıştım ki, matematik bir toplumun üretim ilişkilerinin işlevidir. Matematiğin gelişmesinin özellikleri toplumun gelişmesinin özellikleriyle belirlenir.

EKLER

Bu yazı ilk kez, Türkiye'de insanların satırlardan çok satır aralarını okumaya düşkün oldukları bir zamanda yayımlandı. Bu nedenle olsa gerek, yazının en çok ilgi çeken bölümü baştaki Macar soylularıyla ilgili fıkra oldu. Çok kişi bana bu fıkrayla ne anlatmak istediğimi sordu. Oysa ben bu fıkrayı yazıya ilginç bir başlangıç olsun diye almıştım. Başka hiçbir amacım yoktu.

Satır aralarında buzağı arama merakı bugün de sürdüğüne göre, Macar soylularıyla ilgili bir başka fıkra daha aktarayım isterseniz: Bir grup Macar soylusu Alp dağlarında yürüyüş yaparken yollarını kaybetmişler. Bunlardan biri - söylendiğine göre - bir harita çıkarmış ve haritayı uzun bir süre "tetkik etmiş" sonra "muzafferane" bir tavırla, "Nerede olduğumuzu buldum arkadaşlar!" demiş. Ötekiler de heyecanla: "Neredeyiz?" diye sormuşlar. "Şu ilerdeki büyük dağı görüyor musunuz? İşte tam onun tepesindeyiz."

Pisagor'un Karasabanı: İrrasyonel Sayılar

Geometrinin kaynağı, kuşkusuz, uzunluk, yüzey ve hacim ölçüsü problemleridir.

Verilen bir doğru parçasının uzunluğunu ölçmek demek, o doğru parçası içinde standart bir uzunluktan kaç tane olduğunu saptamak demektir. Bir doğru parçasını kendi içinde tam kere bulunan diğer bir doğru parçasıyla ölçmek kolaydır. Örneğin, 3 m'lik uzunluk demek, o uzunlukta standart olarak kabul ettiğimiz 1 m'lik doğru parçasından 3 tane var demektir. Peki, eğer ölçülecek uzunlukta standart doğru parçası tam kere bulunmuyorsa ne yaparız? O zaman standart uzunluğumuzun belli bir kesrinin - örneğin yarısının - ölçülecek uzunlukta tam kere olup olmadığına bakarız. Örneğin standart uzunluğun yarısı, ölçülecek uzunlukta 3 kere varsa, iki uzunluğun birbirine oranı 3/2'dir. Standart uzunluğun, ölçülecek uzunlukta tam kere bulunan kesrine ***ortak ölçü*** diyeceğiz. Yani yukarıdaki örnekte ortak ölçüden standart uzunlukta 2 tane, ölçülecek uzunlukta 3 tane vardır.

Şimdi şu soruyu soralım: Farklı uzunlukta iki doğru parçası verildiğinde her zaman öyle bir ortak ölçü bulabilir miyiz ki, bu ortak ölçü her iki doğru parçasının da uzunluğunda tam kere bulunsun? Başka bir deyişle, iki uzunluk verildiğinde bu iki uzunluğun birbirine oranını m/n şeklinde, yani iki tamsayının oranı olarak her zaman yazabilir miyiz?

İlk bakışta bu sorunun yanıtı olumluymuş gibi gelebilir. Nitekim "evrenin başlangıcı ve özü tamsayıdır", "evrende her şey bir ahenge, bir ölçüye, bir sayıya bağlıdır" inancı içinde Pisagorcular da böyle düşündüler ilk başta.

Oysa aşağıda da göstereceğimiz gibi, örneğin bir karenin kenarının uzunluğuyla köşegeninin uzunluğunun ortak ölçüsü yoktur. Yani karenin köşegeninin, kenarına oranı iki tamsayının oranı olarak yazılamaz.

Bunu ilk kim buldu dersiniz? Pisagor'un kendisi!

Bu buluş, Pisagorcuları tam bir paniğe sevketti. Öyle ya bütün nicelikler ya tamsayılar ya da bunların birbirine oranı (rasyonel sayılar = akla yakın sayılar) ile ifade edilebilirken, şimdi Pisagorcu felsefenin açıklayamadığı nicelikler ortaya çıkıyordu. Pisagorcular bunu aralarında bir sır olarak saklamak için yemin ettiler. Evrenin yüce mimarının bir kusurunu bulmuşlardı çünkü! m/n gibi iki tamsayının oranı şeklinde yazılamayan bu sayılara "Alogon = ifade edilemez" adını verdiler. Bugün de bunlara ***irrasyonel sayılar***, yani akıldışı sayılar, diyoruz. Demek ki hâlâ pek içimize sindirememişiz bunların varlığını.

Şimdi Pisagor'un irrasyonel sayıların varlığını - kendisine rağmen - nasıl bulduğunu görelim. Kenar uzunluğu a olan bir kare alalım. Bu karenin köşegeninin uzunluğu d olsun. Pisagor teoremini kullanarak köşegenin uzunluğunun karesini kenar uzunluğu cinsinden,

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad (1)$$

olarak yazabiliriz. Şu halde $(d/a)^2 = 2$'dir. Şimdi göstereceğiz ki, d ve a sayılarının ikisi birden tamsayı olamaz. Kanıtımızda *olmayana ergi* yöntemini kullanacağız. Bir an için hem d'nin, hem de a'nın tamsayı olduğunu varsayalım. Burada d ve a'nın aralarında asal olduğunu (ortak çarpanları olmadığını) varsayabiliriz. Çünkü başlangıçta d ile a'nın ortak çarpanları olsa bile, d/a kesrini sadeleştirerek ortak çarpanları götürebiliriz. d ile a aralarında asal olduklarına göre ikisi birden çift sayı olamazlar. (1) denkleminde d^2, 2 kere a^2'ye eşit olduğuna göre d^2 çifttir. Şu halde d de çifttir (neden?) Öyleyse q bir tamsayı olmak üzere $d = 2q$ yazabiliriz. Bu ifadeyi (1)'de yerine koyarsak $a^2 = 2q^2$ buluruz. Şu halde a'nın da çift olması gerekir. Demek ki hem a hem d çifttir; bu da bir çelişkidir. Bizi bu çelişkiye götüren varsayım d/a'nın iki tamsayının oranı olduğu (yani d/a'nın rasyonel olduğu) varsayımıydı, öyleyse d/a, yani 2'nin karekökü, irrasyonel bir sayıdır.