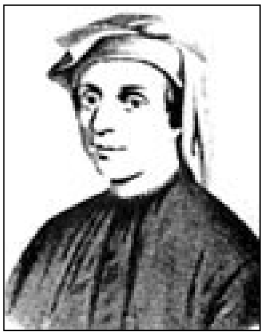
Leonardo Fibonacci

Pisa'lı Leonardo ya da Leonardo Fibonacci Rönesans öncesi Avrupasının en önde gelen matematikçisidir. Fibonacci için, matematiği Araplardan alıp Avrupa'ya aktaran kişi denebilir.

Leonardo'nun yaşamı hakkında matematik yazıları dışında pek az şey biliniyor. İlk ve en iyi bilinen kitabı **Liber Abaci**'nin[1] yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 dolayında doğmuş olabileceği sanılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olması olası. Leonardo henüz çocuk yaştayken, Pisalı bir tüccar olan babası Guglielmo, Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına konsül olarak atanır. (Bu limanın bugünkü adı Bejaiya'dır ve



1 Liber Abaci, "çörkü (= abaküs) kitabı" anlamına geliyor. Bilindiği gibi Arap rakamlarının Avrupa'ya girmesinden önce, Avrupa'da Roma rakamları kullanılıyordu. Bu rakamlarla dört işlem yapmak, hemen hemen olanaksız olduğu için hesap çörkülerle yapılırdı. Bu nedenle de "abacus" sözcüğü adeta hesap sözcüğüyle özdeşleşmişti. Avrupa'ya yepyeni bir hesap yöntemi getiren ve bir bakıma çörküyü ortadan kaldıran bu kitaba bu adın verilmesi ilginçtir.

Cezayir'dedir.) Babası burada oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Leonardo daha sonra **Liber Abaci'**de hocasından "Dokuz Hint rakamının sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatacaktır.

Fibonacci'nin Liber Abaci'sinin yayımlandığı yıllarda, Hindu-Arap sayıları, Avrupa'da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın[2] eserlerinin çevirilerini okuyabilmiş birkaç "aydın" dışında bilinmiyordu. Leonardo kitabında bu rakamları anlatmaya şöyle başlar: "Dokuz Hint rakamı 987654321'dir. Bu dokuz rakama 0 işaretinin de eklenmesiyle, aşağıda anlatılacağı gibi herhangi bir sayı yazılabilir." Kitabın ilk yedi bölümü bildiğimiz 10'lu sayı düzenini ve bu sayılarla dört işlemi anlatır. Daha sonra bu düzen, kâr hadleri, takas, para değiştirme, ağırlık ve hacim ölçülerinin birbirine çevrilmesi, ortaklar arasında bölüşme ve faiz gibi pratik ticaret problemlerine uygulanır.

Liber Abaci 13'üncü yüzyıl Avrupasında büyük ilgi görür, çok sayıda kopya edilir ve Kilise'nin yasaklamasına karşın Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılır. Kitap Kutsal Roma İmparatoru 2. Frederick'in dikkatini çeker. Frederick bilime düşkün bir imparatordur[3]. Bilim adamlarını korur. Bu nedenle kendisine Stupor Mundi (Dünya Harikası) denilmektedir. 1220'de Fibonacci huzura çağrılır. Frederick'in bilim adamlarından biri tarafından sınava çekilir. Sonunda Fibonacci göze girer. Yıllarca hem imparatorla hem de imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225'te yazdığı **Liber Quadratorum**'u (Kare Sayıların Kitabı) imparatora ithaf eder. İkinci dereceden "Diyofantus denklemleri"ne[4] ayrılan bu kitap Fibonacci'nin başyapıtıdır.

---

2 Harzemli ile ilgili kısa bilgi için "Ortaçağ Arapları" bölümüne bakınız.(Sayfa 21)

3 Adının "Kutsal Roma İmparatoru" olmasına bakmayın siz, Frederick Kilise ile arası bozuk bir dinsizdi.

4 Diyofantus denklemleri: Çözümleri tamsayı olan bir ya da daha çok bilinmeyen ihtiva eden denklemler. Örneğin $x^2 + y^2 = z^2$ denklemi x, y, z tamsayı olmak koşuluyla, ikinci dereceden bir Diyofontus denklemidir.

Her ne kadar Liber Abaci'ye oranla çok daha dar bir çevrenin ilgisini çekerse de kitap sayılar kuramına büyük katkı getirir.

1228'de Fibonacci Liber Abaci'yi yeniden gözden geçirir ve kitabın bu ikinci basımını imparatorun başbilimcisi Michael Scott'a ithaf eder. Bu tarihten 1240'a kadar Fibonacci hakkında hiçbir şey bilinmiyor. 1240'ta Pisa, kente hizmetlerinden dolayı kendisine 20 Pisa lirası "yıllık" bağlar. Bundan sonra matematikçimiz ne kadar yaşadı, o da bilinmiyor.

Pisa'daki Fibonacci heykeli

Yukarda da değindiğim gibi Leonardo Fibonacci Arap matematiğini ve kullanışlı Hindu-Arap sayılarını Batı'ya tanıtmakla çok büyük bir katkıda bulundu. Ancak ilginçtir, çağımız matematikçileri Fibonacci'nin adını, daha çok, Liber Abaci'de yer alan bir problemde ortaya çıkan bir sayı dizisi nedeniyle bilirler. Dolayısıyla Fibonacci'yi anlatan bir yazıda Fibonacci sayılarından ya da "Fibonacci dizisi"nden söz etmemek olmaz. Bu nedenle biz de bu bölümün geri kalan kesimini bu diziye ayıracağız.

Fibonacci Dizisi

Liber Abaci'de yer alan problemin metni aşağı yukarı şöyle:

Adamın biri, dört bir yanı duvarla çevrili bir yere bir çift (bir dişi bir erkek) tavşan koymuş. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift (bir dişi bir erkek) tavşan peydahladığı, her yeni çiftin de "büluğa" ermesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, bir yıl sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?

Knuth dostumuza göre[5] Fibonacci bu problemi kitabına biyoloji bilimine bir uygulama olsun diye ya da nüfus patlaması

5 D. E. Knuth, **Fundamental Algorithms**, 1. cilt Addison Wesley, 1975.

sorununa bir çözüm getirsin diye koymamış... Ben de aynı kanıdayım! Toplama alıştırması olarak düşünmüş bunu, besbelli. Her neyse, biraz düşününce tavşan çiftlerinin aylara göre şöyle çoğalacağı ortaya çıkıyor:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Yani her ay sonundaki tavşan çifti sayısı o aydan hemen önceki iki ayın tavşan sayılarının toplamına eşit. Örneğin, 9'uncu ay sonunda

$$21 + 34 = 55 \qquad (1)$$

tavşan çifti oluşacak. Bu kuralı biraz cebir kullanarak şöyle yazabiliriz:

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2}. \qquad (2)$$

Yukarıdaki denklemde u_n, n'inci ay sonundaki tavşan çifti sayısını gösteriyor. Görüldüğü gibi (1) denklemi (2) denkleminin $n = 8$ için özel hali, ayrıca $u_1 = u_2 = 1$ alıyoruz.

Fibonacci Quarterly dergisini çıkaran Fibonacci Derneği'nin logosu

Bu diziye "Fibonacci dizisi" adı verilir. Dizide yer alan sayıların sağladığı o kadar çok özellik var ki, bugün biri çıkıp da, "Fibonacci dizisi şu şu özelliği de sağlar" dediği zaman, "Ne olmuş yani?" yanıtını alıyor genellikle. Fibonacci dizisi hakkında o kadar çok şey söylenebiliyor ki, **Fibonacci Quarterly** adlı üç aylık bir dergi bile çıkabiliyor yıllardır.

Şimdi bu dizinin sağladığı özelliklerden bazılarını görelim[6].

6 Özellikleri kanıtlarını vermeden sıralıyorum. İlgi duyan okurlar kanıtları bölümün sonundaki Ekler bölümünde bulabilirler.

1. İlk n terimin toplamı n + 2'nci terimden 1 eksiktir:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1. \tag{3}$$

Örneğin $n = 6$ için

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 21 - 1.$$

2. n'inci terimin karesiyle (n – l)'inci terimin karesinin toplamı (2n – 1)'inci terime eşittir:

$$u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_{2n-1}. \tag{4}$$

Örneğin $n = 5$ için,

$$3^2 + 5^2 = 34.$$

3. n'inci terimle (n + 1)'inci terimi çarpıp bundan (n – 1)'inci terimle (n – 2)'inci terimin çarpımını çıkarırsak (2n – 1)'inci terimi buluruz:

$$u_n u_{n+1} - u_{n-1}\, u_{n-2} = u_{2n-1}. \tag{5}$$

Örneğin $n = 5$ için

$$5 \times 8 - 3 \times 2 = 34.$$

4. (n + 1)'inci terimin karesinden (n + 2)'inci terimle n'inci terimin çarpımını çıkarırsak; n çiftse 1, n tekse –1 buluruz:

$$u_{n+1}^2 - u_{n+2} u_n = (-1)^n. \tag{6}$$

Örneğin $n = 6$ için,

$$13^2 - (21) \times (8) = +1.$$

Altın Kesim

Diziyle ilgili "keşiflerimizi" Fibonacci dizisinin ardışık iki sayısını birbirine bölerek oluşturacağımız diziyle sürdürelim, yani u_{n+1}/u_n dizisine bakalım.

Bir sonraki sayfadaki listeye bakınca tahmin edileceği gibi, n arttıkça u_{n+1}/u_n, 1,618 dolayında bir sayıya yakınsıyor. Dizinin yakınsadığı sayının tam kaç olduğunu bulmak için (6) denkleminde her iki tarafı $u_n u_{n+1}$'e bölelim. Böylece,

n	u_{n+1}/u_n	n	u_{n+1}/u_n
1	1/1 = 1,0000	7	21/13 ≈ 1,6154
2	2/1 = 2,0000	8	34/21 ≈ 1,6190
3	3/2 = 1,5000	9	55/34 ≈ 1,6176
4	5/3 ≈ 1,6667	10	89/55 ≈ 1,6182
5	8/5 = 1,6000	11	144/89 ≈ 1,6180
6	13/8 = 1,6250	12	233/144 ≈ 1,6181

$$u_{n+1}/u_n - u_{n+2}/u_{n+1} = (-1)^n/u_n u_{n+1} \qquad (7)$$

denklemini elde ederiz. n büyüdükçe (7) denkleminin sağ tarafı sıfıra yaklaştığı için, büyük n'ler için (7) ifadesi

$$u_{n+1}/u_n \approx u_{n+2}/u_{n+1} \qquad (8)$$

şekline girer. Öte yandan (2) denklemini, her iki tarafını u_{n+1}'e bölerek,

$$u_n/u_{n+1} + 1 = u_{n+2}/u_{n+1} \qquad (9)$$

biçiminde yazabiliriz. Madem ki u_{n+1}/u_n, n büyüdükçe sabit bir sayıya gidiyor[7], bu sabit sayıya φ dersek[8], (9) denklemini yeterince büyük n'ler için $1/\varphi + 1 = \varphi$ ya da

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu son denklemi çözersek

$$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,61803... \qquad (10)$$

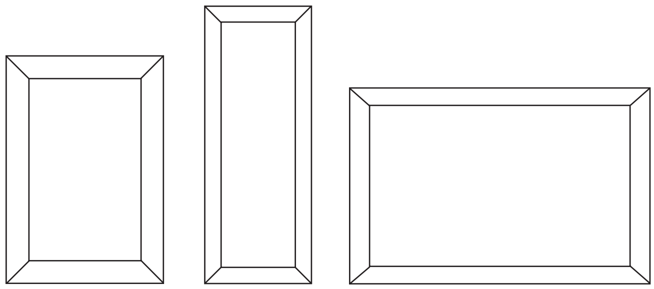
buluruz. Demek ki Fibonacci dizisinde ardışık iki sayının birbirine oranı $\varphi = 1,61803...$ sayısına gidiyor.

Bu sayı (ya da bu oran) Fibonacci'den en az 16 yüzyıl önce Yunanlılarca biliniyordu ve "altın kesim" diye adlandırılıyordu. Yunanlılara göre göze en hoş gelen orandı bu.

Aşağıdaki şekilde üç dikdörtgen görüyorsunuz. Bunların

7 Editörün Notu: Aslında böyle bir limitin olduğu kanıtlanmadı, sadece varsayıldı.

8 φ (fi) Yunan alfabesinin 21'inci harfi. Büyük Yunan heykeltraşı Fidyas'ın (MÖ 490 - 430) adı bu harfle başladığı için genellikle bu sabite φ adı veriliyor. Fidyas, Partenon tapınağının mermer heykellerini yapan sanatçı. Şimdi "φ sayısının sanatla ne ilgisi var" diyorsanız okumaya devam edin.



içinden resminizi çerçeveletmek için hangisini seçerdiniz? Sağdakini "çok kare" ortadakini "çok ince" bulmaz mıydınız? Buna karşın soldakinin yüksekliğinin genişliğine oranı ne kadar "uyumlu" değil mi? Evet, yanılmadınız, sağdaki çerçevenin boyunun enine oranı φ'ye eşit.

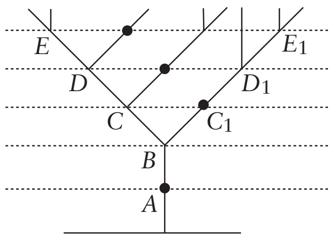
Altın kesimin bu estetik özelliği eski Yunan'ın mimarlarını, ressamlarını, heykeltraşlarını baştan sona etkiledi. Günümüze ulaşan hemen hiçbir büyük yapı, tapınak ya da anıt yoktur ki, kapıları, pencereleri ya da duvarlarının boylarının enlerine oranı φ olmasın.

Daha sonraki yıllarda da Leonardo da Vinci'nin, Christopher Wren'in[9] ve daha birçok mimar, ressam ve heykeltıraşın yapıtlarında altın kesim kullandıkları biliniyor.

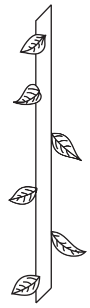
Şimdi haklı olarak tavşanların çoğalmasını modellediğimiz dizide ortaya çıkan φ'nin nasıl olup da "altın" sıfatını hak edecek denli uyumlu bir oran oluşturduğu, bu oranın neden - en azından bazılarının - gözüne hoş geldiği sorulabilir.

Kanımca bunun nedeni doğada gözlediğimiz birçok büyüme ve çoğalma sürecinin Fibonacci'nin tavşanlarınınkine benzer oluşu ve bu nedenle bu süreçlerin oluşturduğu birçok sayı, oran ve büyüklüğün φ'ye yakın değerler almasıdır. İnsanoğlu, sanırım, φ sayısını, farkına varmadan doğadan algılaya algılaya, onu beğeni dizgesinin bir parçası yapmış.

9 Christopher Wren (1632-1723) ünlü İngiliz mimar, astronom ve matematikçisi.



Örneğin bir ağacın dal salması ve büyümesi de aynen Fibonacci tavşanlarının üremesine benzetilebilir. Her dal, ilk çıkışından iki yıl sonra ve ondan sonra her yıl yeni bir dal çıkarır. Şekilde ana dal *ABCDE*; bu ana dal *B*, *C*, *D*, *E* dallarını çıkarmış. *B*'den başlayan dal $BC_1D_1E_1$ dalıdır ve o da ilk dalını D_1 noktasında çıkarmış, vb. 4'üncü yılın sonunda (*D* düzeyinin hemen üstü) ağacın 5 dalı var ($u_5 = 5$), 5'inci yılın sonunda (*E* düzeyinin hemen üstü) ağacın 8 dalı var ($u_6 = 8$).

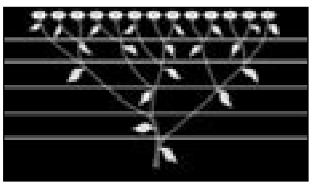


Fibonacci sayılarına, yaprakların dalda yerleşim biçiminde de (phyllotaxis) rastlıyoruz. Yanda bir kiraz sürgünü görüyorsunuz. Yapraklar aşağıdan yukarı doğru

dalın etrafında dönerek çıkıyorlar. Her beş yaprakta bir (yani 1'inci yaprakla 6'ncı yaprak) tam aynı yöne bakıyorlar. Şimdi, bu yaprakların diplerinden, aşağıdan yukarı doğru hiç yaprak atlamadan bir iplik geçirirsek iplik bir sarmaşık gibi ağaç dalını saracak (bir sarmal oluşturacak) ve 1'inci yaprakla 6'ncı yaprak arasında dalın etrafında 2 tur yapacaktır. Yaprakların yerleşim biçimini,

f = (ipliğin tur sayısı)/(bir dönemdeki yaprak sayısı)

oranıyla gösterirsek, kiraz ağacı için bu oran görülüyor ki 2/5'tir. Oran meşede de aynıdır. Bazı durumlarda örneğin karaağaçta, yapraklar, ipliğin her yarım dönüşüne bir yaprak düşecek şekilde karşılıklı çıkar, yani $f = 1/2$'dir. Bu oran kayında 1/3, armutta 3/8, söğütte 5/13'tür.



Görüldüğü gibi f oranının payındaki ve paydasındaki sayılar Fibonacci dizisinden birer atlayarak alınmış sayılardır. Yaprakların dönerek çıkmasını yaprakların birbirini örtmemesi, dolayısıyla güneşten eşit oranda yararlanılması biçiminde yorumlayabiliriz belki, ama neden ille Fibonacci dizisindeki sayılara uyarak dönüyorlar? Ben bilmiyorum. Öğrenemedim de.

EKLER

Yukarda Fibonacci dizisinin (3), (4), (5) ve (6) eşitlikleri ile verilen özellikleri sağladığını söylemiştik. Şimdi bu iddiamızı kanıtlayacağız. Kanıtlama yöntemimiz "matematiksel tümevarım" adı verilen yöntem olacak. Önce yöntemi kısaca tanıtalım: $P(n)$, n doğal sayısına bağlı bir önerme olsun. Örneğin "n bir doğal sayı olmak üzere $2n$ şeklinde ifade edilebilen bütün sayılar çifttir" önermesi n'ye bağlı bir önermedir. Gene örneğin "n bir doğal sayı olmak üzere $24/n$ şeklinde ifade edilebilen sayı tamsayıdır" önermesi de n'ye bağlı bir önermedir. Bu tür n'ye bağlı önermeler kimi kez bütün n değerleri için doğru ya da yanlış olabildikleri gibi kimi kez de bazı n değerleri için doğru, öteki n değerleri için yanlış olabilirler. Birinci önerme bütün n değerleri için doğrudur. Önermede "çifttir" yüklemini, "tektir" yüklemiyle değiştirirsek, önerme bütün n değerleri için yanlış olur. Öte yandan ikinci önerme yalnızca n'nin 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 değerleri için doğru, öteki n değerleri için yanlıştır.

Şimdi yineleyelim: $P(n)$, n doğal sayısına bağlı bir önerme olsun. $P(n)$'nin bütün n değerleri için doğru olduğunu göstermek isteyelim. Bunu kanıtlamanın güçlü bir yolu "matematiksel tümevarım" adı verilen yöntemdir:

1. $P(1)$'in doğru olduğunu kanıtla.

2. Herhangi bir n için $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$ önermelerinin doğru olduğunu varsayarak $P(n+1)$ önermesinin doğru olduğunu kanıtla.

Bu şekilde bütün n'ler için $P(n)$'nin doğru olduğunu göstermiş oluruz. Çünkü kanıtlama genel bir n için yapıldığı için, $P(1)$ doğru olduğuna göre, $P(2)$ de doğrudur. Şu halde $P(3)$ de doğrudur. Öyleyse $P(4)$ de doğrudur vb...

Şimdi (3) eşitliğini kanıtlayalım:

$P(n)$ önermesi, "Fibonacci dizisinde ilk n terimin toplamı $n+2$'nci terimden 1 eksiktir" önermesi olsun.

$P(1)$ önermesinin, "Fibonacci dizisinde ilk terim, üçüncü terimden 1 eksiktir" şekline girdiğine dikkat edelim.

$$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2$$

olduğuna göre, gerçekten $u_1 = u_3 - 1$'dir. Böylece $P(1)$'in doğru olduğunu gösterdik. Şimdi herhangi bir $n \geq 1$ için $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$'nin doğru olduğunu varsayalım:

$$\begin{aligned} &u_1 = u_3 - 1 \\ &u_1 + u_2 = u_4 - 1 \\ &u_1 + u_2 + u_3 = u_5 - 1 \\ &\quad\ldots \\ &u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Bu varsayımdan kalkarak $P(n + 1)$'in, yani,

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} = u_{n+3} - 1 \tag{12}$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstereceğiz.

Bu özel durumda (11)'deki eşitliklerin yalnızca sonuncusunu kullanmak yeterli. Bu eşitliğin her iki tarafına u_{n+1}'i eklersek

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} - 1 \tag{13}$$

buluruz. Fakat (2) eşitliğinden

$$u_{n+1} + u_{n+2} = u_{n+3}$$

olduğu kolayca görülür. Şu halde (12) doğrudur.

Şimdi matematiksel tümevarım yöntemiyle (6) eşitliğini kanıtlayalım. $n = 1$ için (6) eşitliği

$$u_2^2 - u_3 u_1 = -1 \tag{14}$$

şekline girer. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ olduğu hatırlanırsa, (14)'ün doğru olduğu anlaşılır. Şu halde $P(1)$ doğrudur. Şimdi herhangi bir n için $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$'nin doğru olduğunu varsayalım ve $P(n+1)$'in doğru olduğunu gösterelim. $P(n)$'nin doğru olduğu varsayıldığına göre,

$$u_{n+1}^2 - u_{n+2}u_n = (-1)^n \tag{6}$$

yazabiliriz. (2) eşitliğinden

$$u_{n+1} + u_{n+2} = u_{n+3} \tag{15}$$

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2} \tag{16}$$

elde edilebileceğine göre,

$$u_{n+2} = u_{n+3} - u_{n+1} \tag{17}$$

$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1} \tag{18}$$

bulunur. Bunları (6)'da yerine koyarsak,

$$u_{n+1}^2 - (u_{n+3} - u_{n+1})(u_{n+2} - u_{n+1}) = (-1)^n \tag{19}$$

buluruz. Sadeleştirirsek,

$$u_{n+3}u_{n+1} + u_{n+1}u_{n+2} - u_{n+3}u_{n+2} = (-1)^n \tag{20}$$

elde ederiz. (20)'de (15)'i kullanırsak,

$$u_{n+3}u_{n+1} + u_{n+1}u_{n+2} - (u_{n+1} + u_{n+2})u_{n+2} = (-1)^n \tag{21}$$

ya da

$$u_{n+3}u_{n+1} - u_{n+2}^2 = (-1)^n \tag{22}$$

bulunur. Şimdi (22) eşitliğinin her iki tarafı –1 ile çarpılırsa

$$u_{n+2}^2 - u_{n+3}u_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

elde edilir. Bu da $P(n + 1)$'den başka bir şey değildir.

Şimdi sıra (4) eşitliğini kanıtlamaya geldi. Ancak biz burada (4) eşitliği yerine ondan çok daha genel

$$u_{n+m-1} = u_m\, u_n + u_{m-1}\, u_{n-1} \tag{23}$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Görüldüğü gibi (4), (23)'ün $m = n$ için özel halidir. (23)'ü kanıtlamak için (2) eşitliğini yazalım:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

Şu halde

$$u_{n+2} = 2u_n + u_{n-1} \tag{24}$$

yazabiliriz. Öte yandan

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} = u_{n+2} + (u_n + u_{n-1})$$

olduğuna göre (24)'ü kullanarak,

$$u_{n+3} = 3u_n + 2u_{n-1} \tag{25}$$

yazabiliriz. Şimdi u_n'nin katsayısı 3'ün u_4, u_{n-1}'in katsayısı

2’nin de u_3 olduğunu hatırlarsak acaba (25)’i genelleştir

$$u_{n+m-1} = u_m u_n + u_{m-1} u_{n-1} \tag{26}$$

yazabilir miyiz? (25)’in $m = 4$ için (26)’nın özel hali olduğu dikkatli okurun gözünden kaçmayacaktır. (25), matematiksel tümevarım için gerekli tabanı oluşturmaktadır. Şimdi (26)’nın doğru olduğunu varsayıp (26)’nın $m + 1$ için de doğru olduğunu göstermemiz gerekiyor. (2)’den

$$u_{n+m} = u_{n+m-1} + u_{n+m-2}$$

yazılabilir. Burada (26)’yi kullanalım:

$$u_{n+m} = u_m u_n + u_{m-1} u_{n-1} + u_{m-1} u_n + u_{m-2} u_{n-1}$$

ya da

$$u_{n+m} = (u_m + u_{m-1}) u_n + (u_{m-1} + u_{m-2}) u_{n-2}.$$

Şu halde

$$u_{n+m} = u_{m+1} u_n + u_m u_{n-2}. \tag{27}$$

(27) eşitliği (26)’da m yerine $m + 1$ konduğu zaman elde edilen eşitliktir. Göstermemiz gereken de buydu.

Yukarda da değindiğimiz gibi (26)’yi kanıtlamakla (4)’ü de kanıtlamış olduk.

Şimdi son olarak (5)’i gösterelim. Bu amaçla (2)’yi yeniden yazalım:

$$u_{n-1} + u_{n-2} = u_n.$$

Burada her iki tarafı u_{n-1}’le çarpalım:

$$u_{n-1}(u_{n-1} + u_{n-2}) = u_{n-1} u_n. \tag{28}$$

(28)’de sağ tarafta

$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

koyalım ve (28)’i yeniden düzenleyelim:

$$u_{n-1}(u_{n-1} + u_{n-2}) = (u_{n+1} - u_n) u_n$$

yani

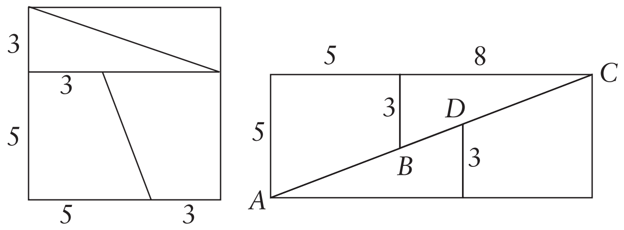
$$u_n^2 + u_{n-1}^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_{n-2}. \tag{29}$$

(29)’un sol tarafının u_{2n-1} olduğunu göstermiştik. Şu halde böylece (5)’i de göstermiş olduk.

Aşağıda yaygın olarak bilinen, ama Fibonacci dizisiyle yakın ilişkisi dolayısıyla bu bölümde yer vermekten kendimi alamadığım bir paradoks sunuyorum.

Kaybolan Kare: Aşağıda soldaki 8×8 boyutlu kareyi (satranç tahtası gibi) gösterildiği biçimde 4 parçaya ayıralım ve bu parçaları yeniden düzenleyip 5×13'lük bir dikdörtgen oluşturalım.

Satranç tahtasının alanı $8 \times 8 = 64$ idi. Yeni dikdörtgenin alanı ise $5 \times 13 = 65$'tir. 1 birim karelik alanı nereden kazandık?



Bu paradoksun (6) denklemiyle yakın ilişkisi olduğunu belirtmeliyim.

Konuya ilişkin bir soru daha: Bu paradoksun yaratılabilmesi için karenin 8×8 boyutlu olması şart mıdır? Değilse başka hangi büyüklükteki karelerle de bu soru sorulabilir?

Yanıt: Sağ şekildeki *A*, *B*, *C* ve *D* noktaları, aslında alanı 1 birim kare olan ipince bir paralelkenarın köşeleridir. Eğer bu noktalar şekilde gösterildiği gibi bir doğru üstünde olsalardı, dikdörtgenin üst yarısındaki iki dik üçgen benzer olacaklarından $5/13 = 3/8$ yazabilmek gerekirdi ki bu ise $39 = 40$ demek olurdu!

Dolayısıyla parçalar yeniden düzenlenip dikdörtgen oluşturulduğunda, ortada 1 birim kare alanında paralelkenar biçiminde bir yarık kalır ki "kazanılan" alan budur.

Karenin kenar uzunluğunu Fibonacci dizisinin (n + 1)'inci sayısı ($n > 2$) olacak şekilde seçersek bu soruyu başka sayılarla da sorabiliriz. Bu durumda dikdörtgenin kısa kenarının uzunluğu dizinin n'inci sayısı, uzun kenarının uzunluğu da (n + 2)'nci sayısı olacaktır.

Son olarak belirtelim ki kareden dikdörtgene geçtiğimizde 1 birim karelik alanı n çiftse "kazanırız"; n'nin tek olduğu durumlarda parçalar ortada boşluk oluşturacak yerde üst üste binerler. Bu durumda 1 birim karelik alanı "yitiririz".