Kim Korkar Matematikten?

Matematik birtakım formüller ve simgeler yığını mıdır gerçekten? Elbette hayır. Böyle düşünmek ormanı ağaçlarla hayvanların karışımından oluşmuş bir bulamaç gibi görmeye benzer. Matematik, nesnel gerçeklikten, insanoğlunun gene nesnel gerçekliği daha iyi kavramak, onu biçimlendirmek için soyutladığı bazı kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerle uğraşır. Bu uğraşı sırasında da yöntem olarak mantığı kullanır. Formüller ve simgeler birer araç ya da matematiğin dilidir yalnızca.

Bu nedenle matematik, sanatta, edebiyatta, hukukta, kısaca yaşamda kullandığımız yöntemlerin soyut bir sistematiğidir.

Leibniz'e göre müzik gizli bir aritmetik alıştırmasıdır. Ama müziğe kendini veren kişi sayılarla oynadığının bilincinde değildir. Buna, klavsen ya da piyano çalan bir kişinin "logaritma" çaldığını da ekleyebilirdi.

İki notayı bir arada duymak, iki frekansı ya da iki sayıyı ve bu iki sayı arasındaki oranı algılamaktan başka bir şey değildir. Demek ki armoni sorunu iki sayının oranını seçme sorununa eşdeğerdir.

Matematikte bir teoremin kanıtlanması için izlenen yöntemle, mahkemede suçun ya da suçsuzluğun kanıtlanması için savcının ya da avukatın izlediği (ya da izlemesi gereken) yöntem aynıdır.

Başarılı dedektif tipleri, Holmes'lar, Poirot'lar Maigret'ler ya da Columbo'lar matematiğin yöntemleriyle tanışık mugalata ve demagojiden uzak kişilerdir.

Resim sanatı aritmetiği (oran ve orantıyı) ve geometriyi (perspektifi) ne kadar doğal bir biçimde içinde barındırır.

Sihirli Kareler

Eski Yunanlıların matematiği bilimden çok sanat olarak görmeleri gerçeği çok mu çarpıtır? Çarpıtsa bile, bunda, işe yararlılık ve kesinlik ve gerçeğin bir araya geldiği her şeyde güzelliğin de bulunmasının rolü yok mudur?

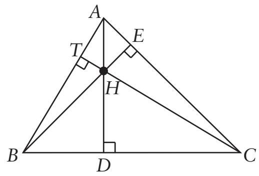
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Düzensizlik beklediğimiz bir durumda birden düzen keşfedivermek insanı heyecanlandırmaz mı? Yandaki şu kareye bakınız. Kutulara rastgele yerleştirilmiş sessiz ve anlamsız gibi duran bu 16 sayı, gizlerini bulduğunuz zaman birden bütünleşivermiyorlar mı?

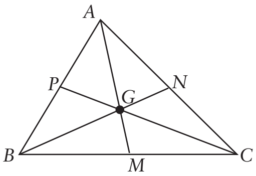
Albrecht Dürer'in "Melancolia" adlı gravüründe, duvarda asılı durur bu kare. (Bkz. sayfa 108.) Alt sıradaki 15 ve 14 sayıları da gravürün yapıldığı 1514 tarihini oluşturur.

Dokuz Nokta Çemberi

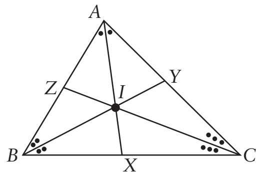
Bir doğru üzerinde olmayan 3 nokta alalım. Bu 3 noktayı birleştirirsek bir üçgen elde ederiz. Şimdi her köşeden karşısındaki kenara birer dikme inelim. Bu dikmelere ***yükseklik*** diyoruz. Bir düzlemde iki doğru - eğer paralel değillerse - bir noktada kesişirler. Şu halde iki yüksekliğin bir noktada kesişmesi beklenir. Ama burada olağanüstü bir durum olur: Üçüncü yükseklik de aynı noktadan geçer. Yani bir üçgenin üç yüksekliği tek bir noktada kesişirler. Aynı özellik, üçgenin ***kenarortayları*** (köşeleri karşı kenarların orta noktalarına birleştiren doğru parçaları) ile ***açıortayları*** (üçgenin iç açılarını iki eşit parçaya bölen doğrular) için de geçerlidir.



Üçgenin üç yükseklik ayağı



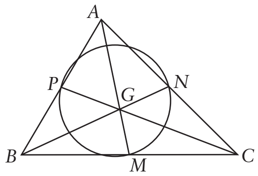
Üçgenin üç kenarortayı



Üçgenin üç içaçıortayı

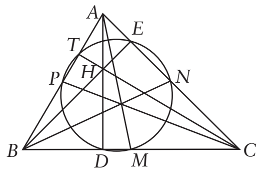
Buraya kadar size üçgenle ilgili pek yeni bir şey söylemediysem, okumaya devam edin:

Bir doğru üzerinde olmayan 3 nokta bir çember belirler. Şu halde üçgenimizin kenarlarının orta noktalarından yandaki şekildeki gibi bir çember geçirebiliriz. (Şekil A)



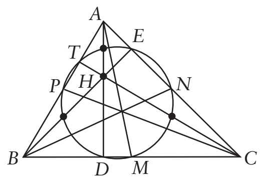
Şekil A

Şimdi, üçgenin dördüncü bir noktasının da bu çember üstünde olması büyük bir rastlantı olurdu doğrusu. Ama bir nokta değil 3 nokta daha aynı çemberin üstüne düşer: Yüksekliklerin *D*, *E*, *T* ayakları da çemberin üstündedirler. (Şekil B)



Şekil B

Bitmedi. Yüksekliklerin *H* kesişim noktasını köşelere bağlayan doğru parçalarının orta noktaları da aynı çemberin üstündedir. (Şekil C) İşte size Euler'in dokuz nokta çemberi.



Şekil C

Üstelik Euler kördü. Euler bu çember üzerinde üçgenin daha 22 özel noktasının bulunduğunu bilseydi ne sevinirdi kimbilir.

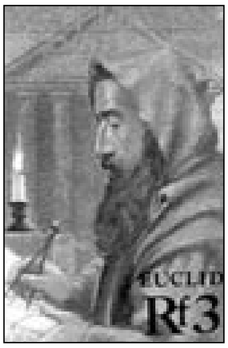
Üçgen denen elmasın güzellikleri bu yazının boyutlarını çok aşar. Bu nedenle biz şimdi geometrinin elmas'ını bırakıp aritmetiğin - ya da sayılar kuramının - yakutlarına çevirelim dikkatimizi.

Asal Sayılar

0, 1, 2, 3, ... sayılarına "doğal sayılar" diyoruz. Bu sayılar içinde 1'den büyük ve kendinden ve 1'den başka hiçbir sayıya bölünmeyen sayılara da, yakutlar - hayır - "asal sayılar" diyoruz. Örneğin 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sayıları gibi. 9 asal değildir, çünkü 3'e bölünür. Görüldüğü gibi 2 dışında hiçbir çift sayı (2'ye bölündüğü için) asal değildir.

Her doğal sayı yalnızca tek bir şekilde asal çarpanlarla ifade edilebilir. Örneğin $30 = 2 \times 3 \times 5$ ve 30 sayısı başka asal çarpanlarla ifade edilemez. Öyleyse sayıyı verdiğiniz zaman asal çarpanları, asal çarpanları verdiğiniz zaman sayıyı belirlemiş olursunuz. Bu nedenle asal sayılar doğal sayıların yapıtaşları, yakutlarıdır.

Acaba kaç tane asal sayı vardır? Asal sayıların sayısı sonlu mudur? Bu problemi ilk ele alıp çözen geometrinin dedesi[1] Öklid'dir: Asal sayıların sayısı sonsuzdur. Yani verilen her asal sayıdan daha büyük başka bir asal sayı bulunabilir.



Bu teoremin kanıtlanmasında kullanılan yöntem, matematiğin güzelliğini yansıtması bakımından dikkati çeker. *N*, 1'den büyük herhangi bir sayı olsun. Şimdi 2'den başlayarak *N*'ye kadar olan bütün sayıları çarpalım ve çarpıma 1 ekleyelim:

$(2 \times 3 \times 4 \times 5 \times ... \times N) + 1.$

Bu sayı *N* dahil *N*'ye kadar hiçbir asal sayıya bölünmez; kalan hep 1 olur çünkü. Şu halde ya bu sayı *N*'den büyük bir asal sayıya bölünüyordur ya da kendisi asaldır. Öyleyse her iki durumda da *N*'den daha büyük bir asal sayı vardır. Demek ki, verilen her sayıdan daha büyük başka bir asal sayı vardır ve dolayısıyla sonsuz tane asal sayı vardır.

---

1 Dedesi diyorum, çünkü kendisi geçen yüzyılın ikinci yarısında Riemann, Bolyai, Lobaçevski ve Hilbert tarafından geometri ailesinin reisliğinden sürüldü.

Şimdi asal sayıların sayısının sonsuz olduğunu kanıtladığımıza göre, asal sayıların tümünü gösteren bir tablo yapamayacağımız ortaya çıkıyor.

Peki acaba $a = f(n)$ şeklinde öyle bir ifade bulabilir miyiz ki n sayısı 1, 2, 3, 4, ... şeklinde doğal sayılar içinden geçerken, a da asal sayılara teker teker - hiçbirini atlamadan - eşit olsun[2]? Yanıt hayır. Günümüze kadar böyle bir ifade bulunamadı[3].

1640 yılında Fermat, n'nin bütün değerleri için asal sayı vereceğini umduğu bir ifade ortaya attı:

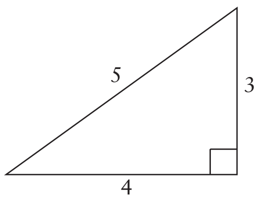
$$2^{2^n} + 1.$$

Bu ifade $n = 1$ için 5, $n = 2$ için 17, $n = 3$ için 257 ve $n = 4$ için 65537 sayılarını verir. Gerçekten de bu sayıların hepsi asaldır. Ancak bu ifadenin açıklanmasından yaklaşık 100 yıl sonra Euler (gene mi Euler?) $n = 5$ için elde edilen sayının 641 ile 6.700.417'nin çarpımı olduğunu, dolayısıyla asal olmadığını gösterdi. Bugün, $n > 5$ için formülün verdiği sayılar içinde asal sayı olup olmadığı bilinmiyor.

Fermat'nın Son Teoremi

Söz tamsayılardan ve Fermat'dan açılmışken, Fermat'nın Son Teoremi'nden söz etmemek olmaz.

Eski Mısır'da işini seven her marangoz, kenarlarının uzunluğu 3 : 4 : 5 olan her üçgenin bir diküçgen olduğunu biliyordu.



Daha sonraları bizde "eşek davası" olarak öğretilen Pisagor Teoremi de aynı şeyi söyler zaten: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Üçüncü yüzyılda İskenderiyeli Diyofantus, 3, 4 ve 5'in bu özelliği sağlayan

2 Örneğin $a = 2n$ formülünden n doğal sayılar içinden geçerken a'nın da çift sayılar, $a = 2n + 1$ formülünde ise tek sayılar içinden geçtiğini hatırlamak isterim.

3 Editörün Notu: Burada f'nin "cebirsel" bir ifade olması istenmektedir, yoksa, örneğin "$f(n) = n$'inci asal" gibi bir ifade istenileni sağlar. İstenen özelliği sağlayan bir polinomun olmadığı bilinmektedir.

tek tamsayı üçlüsü olmadığını, bu şekilde sonsuz sayıda tamsayı üçlüsü bulunabileceğini gösterdi:

$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2,$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2$$
vb.

Bu tür tamsayı üçlülerine ***Pisagor üçlüleri***, bu şekilde her üç kenarı da tamsayı olan dik üçgenlere de ***Pisagor üçgenleri*** deniyor. Şu halde dik kenarlarının uzunluğu x ve y tamsayıları, hipotenüsünün uzunluğu da z tamsayısı olan bir Pisagor üçgeni

$$x^2 + y^2 = z^2$$

bağıntısını sağlar.

Peki acaba kare alacağımıza küp alsak, $x^3 + y^3 = z^3$ denklemine her biri 0'dan değişik tamsayı çözümler bulabilir miyiz? Ya da herhangi bir n tamsayısı için $x^n + y^n = z^n$ denklemini sağlayan her biri 0'dan değişik tamsayılar var mıdır? Fermat 1637'de Diyofantus'un Arithmetica adlı kitabının yeni çıkan Latince çevirisini okurken, Pisagor üçgenlerinin anlatıldığı sayfanın yanındaki boşluğa $n > 2$ için yanıtın olumsuz olduğunu yazdı ve devam etti: *Cujus rei demonstrationem*, *mirabilem sane*, *detexi*; *hane marginis exiguitasnon caperet*. "Bu önermenin harikulade bir kanıtını buldum, ancak bu sayfa kenarında bunu yazacak yer yok."

Ölümünden sonra bu kitap Fermat'nın kitaplığında bulundu, ama önermenin kanıtına rastlanmadı. Bu 300 yıl önceydi. O zamandan beri dünyanın en iyi matematikçileri teoremi yeniden kanıtlamaya çalıştılar, çalışıyorlar. 300 yılda epey yol alındı. Bugün n'nin 269'dan küçük değerleri için $x^{n} + y^{n} = z^{n}$ denkleminin tamsayı çözümü olmadığı biliniyor. Ama genel bir n için hâlâ bir kanıt bulunamadı[4].

EKLER

$x^2 + y^2 = z^2$ bağıntısını sağlayan tamsayıların aralarında asal olma koşulunu (yani ortak çarpanlarının olmaması koşulunu) aramazsak, bir Pisagor üçlüsünden, üçlüyü genişleterek başka üçlüler kolayca türetilebilir. Örneğin $3^2 + 4^2 = 5^2$ bağıntısını 4 ile genişleterek $6^2 + 8^2 = 10^2$, 9 ile genişleterek $9^2 + 12^2 = 15^2$, 16 ile genişleterek $12^2 + 16^2 = 20^2$ vb bağıntıları türetilebilir. Diyofantus problemini ilginç yapan, aralarında asal olan sonsuz sayıda Pisagor üçlülerinin varlığıdır. Bu tür Pisagor üçlülerine ***başat üçlü*** deniyor.

Bütün başat üçlüleri türetmenin bir yolu x, y ve z'yi,

$$x = p^2 - q^2,$$
$$y = 2pq,$$
$$z = p^2 + q^2$$

olacak şekilde seçmektir. Yukarıdaki ifadelerde, p ve q aralarında asal, biri tekse öbürü çift seçilen ve $p > q$ koşulunu sağlayan herhangi iki tamsayı olabilir. x, y ve z yukarıdaki gibi seçilirse $x^2 + y^2 = z^2$ bağıntısının sağlanacağı kolayca gösterilebilir.

Eğer p ve q aralarında asal değilse ve örneğin $k > 1$ gibi bir ortak çarpanları varsa, k sayısı x, y ve z'nin de çarpanı olacağından, x, y, z üçlüsü başat olmayacaktır.

Eğer p ve q sayılarının ikisi de çift seçilirse, p ve q aralarında asal olmaz; ikisi de tek seçilirse bu kez hem x hem de z çift olur; y de daima çift olduğuna göre, x, y, z üçlüsü gene başat olmaz.

Son olarak: $p > q$ koşulu $x > 0$ eşitsizliği için gereklidir.

---

4 Editörün Notu: Andrew Wiles 1993'te (bu kitabın yazıldığı tarihten birkaç yıl sonra) Fermat'nın Teoremi'ni kanıtlamıştır.

Aşağıdaki tablo birkaç başat üçlüyü göstermektedir. Okur bu tabloyu başka p ve q sayıları alarak dilediğince genişletebilir:

p	q	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25

İlkel üçlülerin bazı ilginç özelliklerini, kanıtlarını okura bırakarak aşağıda sıralıyorum:

1. Ya x ya da y, 3'e bölünür.

2. Ya x ya da y, 4'e bölünür.

3. Ya x ya y ya da z, 5'e bölünür.

4. Ya x ya y ya $x + y$ ya da $x - y$, 7'ye bölünür.