Aritmetik Diziler ve Ötesi

Ünlü Alman matematikçisi Kari Friedrick Gauss 10 yaşındayken, öğretmeni öğrencileri oyalamak için, "1'den 100'e kadar sayıları yazarak toplayın" der. Başka bir deyişle, 1 + 2 + 3 + ... + 100 = ? toplamasını yapmalarını söyler.

Öğretmen soruyu okuyup bitirince Gauss, küçük yazı tahtasını masasının üzerine bırakarak, "oldu öğretmenim" deyip yerine oturur.

Öğretmen bir saat sonra öğrencilerin buldukları sonuçlan küçük yazı tahtalarından kontrol ederken hayretler içinde kalır. Bütün öğrencilerin yanıtları yanlış olduğu halde, Gauss'un yanıtı doğrudur. Gauss, hiç işlem yapmadan yazı tahtasına sorunun yanıtı olan 5050 sayısını yazmıştır.

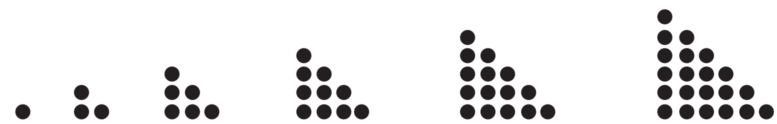
Yukarıdaki satırları, matematik dersleri ile ilgilendiğim, akrabalık derecesi bana çok yakın bir delikanlı adayının ders kitabından aldım[1].

Yazarlar kitaplarına böyle bir öyküyle başlamakla birkaç ereği birden amaçlarlar. Her şeyden önce öyküyle başlamak kitabı ilginçleştirir; dolayısıyla kitabın kolay okunmasını sağlar. Sonra ilk bakışta uzun bir hammaliye gibi görünen bir işi dâhi-

1 Osman Kırbaş, Hüseyin Başaran; **Matematik**, Ortaokul I, MEB Yayını, 1979.

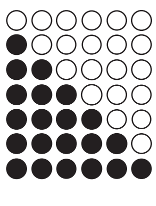
yane bir yöntemle bir çırpıda bitirerek öğretmenin oyununu boşa çıkartmak var; bu da öğrenciye çekici gelir. Gauss birden öğretmene karşı öğrenciyle gizli bir ittifak kurar sanki; ittifak ne kelime, öğrenci Gauss'la özdeşleşir.

Yukarıdaki öykü iyi hoş da önemlice bir konuyu eksik bırakıyor. Dolayısıyla yanlış anlamaya yol açıyor. Öyküyü okuyan bir kişi 1'den 100'e kadar sayıların toplamının ilk kez Gauss tarafından kısa yoldan hesaplandığı kanısına kapılıyor. Yanlış anlaşılmasın, Gauss'un dehasını azımsamak değil amacım. Olay büyük bir olasılıkla öyküde anlatıldığı gibi olmuştur ve Gauss 1'den 100'e kadar sayıları kolayca toplamak, için gerekli yöntemi hemen orada sınıfta bulmuştur; ama bu, bu yöntemin Gauss'tan önce bilinmediği anlamına gelmiyor doğal ki. Nitekim Gauss'tan yaklaşık 2300 yıl önce Pisagor ve müridleri ***üçgensel sayılar*** adını verdikleri sayı dizilerini biliyorlar ve bu sayılara gizemci anlamlar yüklüyorlardı. Üçgensel sayıların ilk 6'sı aşağıdaki şekilde görülüyor. Şekilden, bu sayılara neden



T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
1	1+2=3	1+2+3=6	1+2+3+4=10	1+2+3+4+5=15	1+2+3+4+5+6=

"üçgensel" adı verildiği açıkça görüleceği gibi, bunlardan n'incisinin (yani T_n'nin) 1'den n'ye kadar sayıların toplamı olduğu da okurun dikkatinden kaçmayacaktır.



Şimdi T_6'nın üstüne yandaki şekildeki gibi bir T_6 daha koyalım. Şu halde

$$2T_6 = 6 \times (6 + 1) = 42$$

ya da $T_6 = 6 \times (6 + 1)/2 = 21$ bulunur. Bu sonucu bir T_n üstüne başka bir T_n kapatarak hemen genelleştirebiliriz:

$$T_n = n(n + 1)/2.$$

Öyleyse 1'den 100'e kadar sayıların toplamı:

$$T_{100} = 100/2(100 + 1) = 5050$$

dir. Herhalde Gauss çocuk da böyle düşünmüştü.

T_n, 1'den n'ye kadar sayıların toplamıydı. Demek ki, T_n toplamına $n + 1$ doğal sayısını eklersek T_{n+1}'i buluruz:

$$T_{n+1} = T_n + (n + 1). \qquad (1)$$

Eğer bir dizide ardışık iki sayı arasındaki fark sabit bir d sayısına eşitse bu diziye ***aritmetik dizi***, d sayısına da ***dizinin ortak farkı*** denir. Şu halde doğal sayılar dizisi 1'den başlayan ve ortak farkı da $d = 1$ olan bir aritmetik dizidir. Eğer $d = 2$ ise 1'den başlayan aritmetik dizi 1, 3, 5, ... tek sayılar dizisine, $d = 3$ ise 1, 4, 7, ... dizisine dönüşür. Eğer (1) kuralında $n + 1$ sayısı yerine bir aritmetik dizinin n+1'inci terimi olan a_{n+1}'i (dizide n + 1'inci sırada gelen terimi) koyarsak yani

$$C_{n+1} = C_n + a_{n+1} \qquad (2)$$

kuralına göre bir C_n, n = 1, 2, 3, ... dizisi oluşturursak, seçtiğimiz a_n aritmetik dizisine bağlı olarak değişik "çokgensel sayı dizileri" elde ederiz. Aşağıdaki tablo bu dizilerden bazılarını göstermektedir. Her dizinin üstünde o diziyi yaratan dizi de verilmiştir:

Üçgensel sayılar (d = 1)

a_n:	1	2	3	4	5	6	7	…
C_n:	1	3	6	10	15	21	28	…

Karesel sayılar (d = 2)

a_n:	1	3	5	7	9	11	13	…
C_n:	1	4	9	16	25	36	49	…

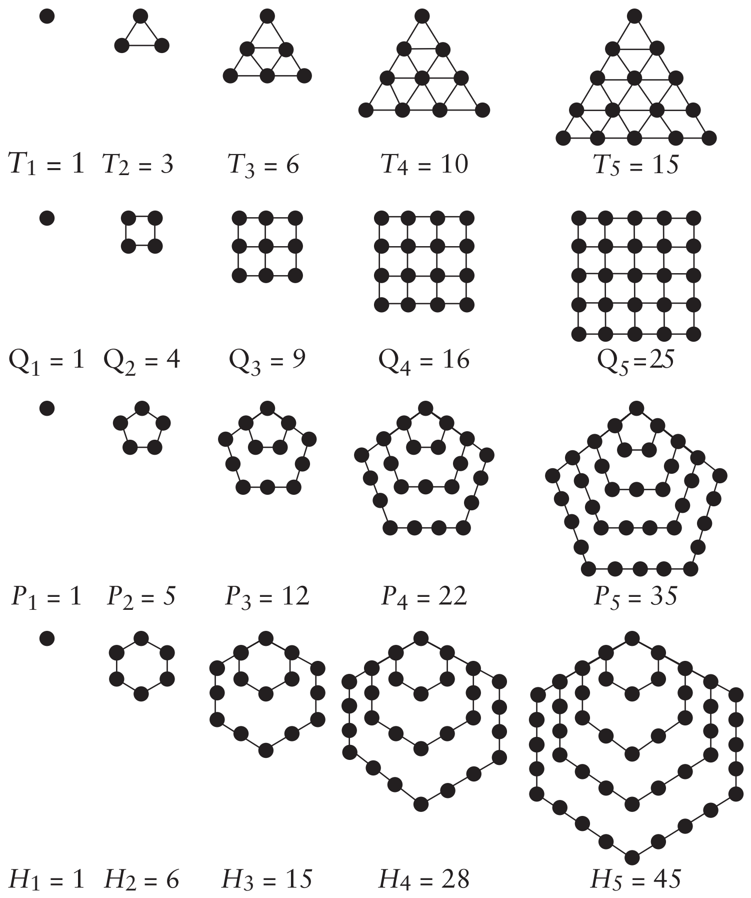
Beşgensel sayılar (d = 3)

a_n:	1	4	7	10	13	16	29	…
C_n:	1	5	12	22	35	51	70	…

Altıgensel sayılar (d = 4)

a_n:	1	5	9	13	17	21	25	…
C_n:	1	6	15	28	45	66	91	…

Bu şekilde sınırsız türde dizi oluşturabiliriz. Aşağıdaki şekil bu dizileri “şekilsel” olarak göstermektedir. Şekilden, örneğin, neden beşgensel sayılara “beşgensel” adının verildiği açıkça görülmektedir.



Okur dilerse genel olarak bir s-gensel dizinin ($s = d + 2$) n’inci terimi u_n’yi veren aşağıdaki formülün geçerliğini sınayabilir:

$$u_n = [2 + (s - 2)(n - 1)]n/2 \qquad (3)$$

Şimdi (3)’ün bazı s değerleri için özel durumlarını araştıralım:

$s = 3$ için $u_n = n(n + 1)/2$ (üçgensel sayılar)
$s = 4$ için $u_n = n^2$ (karesel sayılar)
$s = 5$ için $u_n = n(3n - 1)/2$ (beşgensel sayılar)
$s = 6$ için $u_n = n(2n - 1)$ (altıgensel sayılar)

Örneğin altıgensel sayılarda beşinci sayı

$$u_5 = 5(10 - 1) = 45$$

olacaktır. Ayrıca bekleneceği gibi (3) ifadesi $s = 2$ için $u_n = n$, yani doğal sayılar dizisini vermektedir.

Dizinin Boyutu

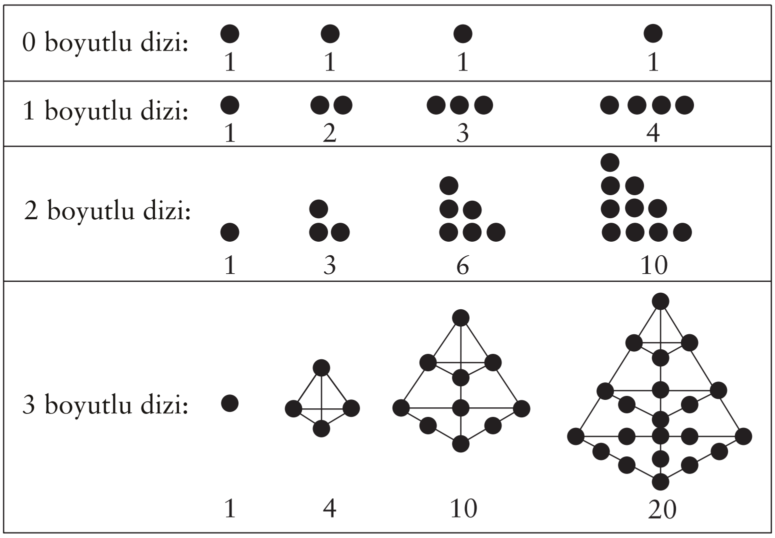
Bir düzlem üzerine çizilebilen ve yalnızca eni ve boyu olan şekillere ***düzemsel*** ya da 2 ***boyutlu şekil*** diyoruz. Örneğin üçgen ya da kare - ya da yan sayfadaki şekildeki çokgenlerden herhangi biri - bir 2 boyutlu şekil oluşturur. En ve boy boyutlarına bir de derinlik boyutu eklenirse 3 boyutlu bir şekil elde edilir. Benzer şekilde yalnızca boyu olan bir doğru çizgi 1 boyutlu, ne eni ve boyu ne de derinliği olan tek bir nokta da sıfır boyutlu bir şekildir. Yukarda da belirttiğim gibi (2) denkleminde a_n bir aritmetik dizi olduğu sürece C_n dizisi 2 boyutlu bir dizidir. a_n dizisini değiştirmekle yalnız 2 boyutlu çokgenin "gen" sayısını değiştirebiliriz.

Oysa, (2) denkleminde a_n dizisini aritmetik dizilerin dışından seçmekle C_n dizisinin boyutunu da değiştirebiliriz.

Konuyu daha iyi açıklayabilmek için, her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $a_n = 1$ olarak tanımlanan diziyi sıfır boyutlu dizi olarak tanımlayalım. Bu dizi 1, 1, 1, ... şeklindedir; n değiştikçe dizinin terimleri değişmez ve hep 1 değerini alır. Bu dizi aynı zamanda ortak farkı sıfır olan bir aritmetik dizi olarak da yorumlanabilir. Şimdi bu diziyi (2) denkleminde a_n olarak kullanırsak 1, 2, 3, ... doğal sayılar dizisini elde ederiz. Doğal sayılar dizisini 1 boyutlu dizi olarak tanımlayacağız. Daha önce de sözünü ettiğimiz gibi (2) denkleminde a_n yerine doğal sayılar dizisini kullandığımız zaman oluşacak dizi üçgensel sayılar dizisidir (buraya kadar yeni bir şey yok). Şimdi üçgensel sayılar dizisini a_n dizisi olarak kullanalım[2]. Bu durumda dörtyüzlüsel sayılar dizisi diye tanımlayacağım 3 boyutlu bir sayı dizisi ortaya çıkar. Aşağıdaki tablo bu olguyu göstermektedir.

Boyut	Dizi						
0	1	1	1	1	1	1	1 ...
1	1	2	3	4	5	6	7 ...
2	1	3	6	10	15	21	28 ...
3	1	4	10	20	35	56	84 ...

Tabloda ilk 7 elemanı verilen diziler aşağıdaki şekilde "şekilsel olarak" gösterilmiştir. Şekilden sabit diziye neden sıfır boyutlu, doğal sayılar dizisine de neden 1 boyutlu dediğim açıkça görülüyor. Üç boyutlu dizinin de bir düzgün dörtyüzlü piramidin (tetrahedronun) köşelerine konan noktalarla gösterilebildiğine dikkat edilmelidir. Bu nedenle bu diziye "dörtyüzlüsel" adını verdim.



Üç boyut biz ölümlülerin algılayabileceği en büyük boyut

2 Dikkat edilirse ardışık terimler arasındaki fark sabit olmadığı için üçgensel sayılar dizisi aritmetik bir dizi değildir.

sayısı, oysa yukarıdaki tabloda uyguladığımız kuralı uygulamaya devam etmememiz için de hiçbir neden yok:

Boyut	Dizi						
4	1	5	15	35	70	126	210 ...

Dikkat edilirse ardışık terimler arasındaki fark sabit olmadığı için üçgensel sayılar dizisi aritmetik bir dizi değildir.

Ancak şimdi bir sorunumuz var. Bu son diziyi 3 ya da daha az boyutlu bir şekille gösterebilmemize olanak yok. Bunun için 4 boyutlu bir şekil gerekiyor! Ancak böyle bir şekli benim 3 boyutlu beynim düşünemiyor bile...

Üçgensel sayıların *n*'inci terimi için bir formül bulmuştuk:

$$T_n = n/2 \times (n + 1) = n(n + 1)/2.$$

Dörtyüzlüsel sayılar dizisinin de

$$C_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3}$$

kuralına uyduğu gösterilebilir. 0 ve 1 boyutlu sayı dizilerinin de sırasıyla n^0 ve $n/1$ formülleriyle verildiği düşünülecek olursa, genel olarak *b* boyutlu bir sayı dizisinin *n*'inci teriminin

$$C_n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+b-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times b}$$

formülüyle verildiği bulunabilir. Bu son formülün geçerliği matematiksel tümevarım yöntemiyle kolayca kanıtlanabilir.

1'den *n*'ye kadar sayıların çarpımı $n!$ (*n* faktöriyel) ile gösterilirse (örneğin 4! = 24, 5! = 120, 7! = 5040) yukardaki formül

$$C_n = \frac{(n+b-1)!}{(n-1)!\,b!}$$

şeklinde ya da

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{(r-s)!\,s!}$$

tanımıyla,

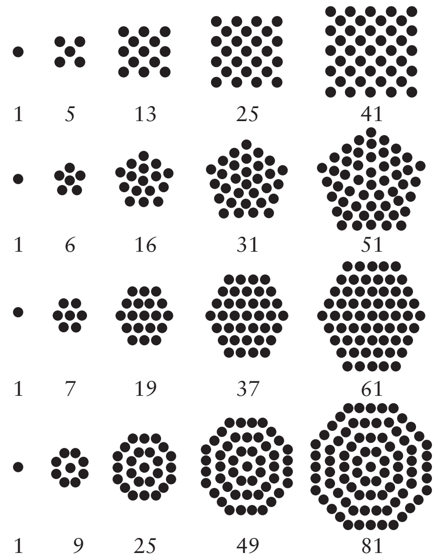
$$C_n = \binom{n+b-1}{b}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son ifadenin b = 0, 1, 2, 3 için yukarıdaki tablodaki dizileri verdiği gözden kaçmamalıdır (0! = 1 olarak tanımlanır). Bir ortaokul ders kitabından yola çıkarak nerelere geldik!

Matematik Eğlendirir

Düzlemsel Diziler: Aşağıdaki şekilde bazı düzlemsel dizilerin ilk 5 terimi gösterilmiştir. Bu şekildeki her dizi için, *n*'inci terimi veren bir ifade bulun.

İpucu: Şekildeki dizilerin tümü düzlemsel oldukları için, bu dizileri yaratan diziler aritmetik dizilerdir. Dolayısıyla önce her dizi için o dizinin yaratan dizisini bulmak gerekir.



Başka düzlemsel sayı dizileri

Yanıtlar

Yukardaki şekildeki diziler $C_{n+1} = C_n + a_{n+1}$ kuralına göre oluşturulmuştur. Her dizide C_1 = 1'dir. 1'inci dizide

$$a_n = 4(n-1),$$

2'nci dizide

$$a_n = 5(n-1),$$

3'üncü dizide

$$a_n = 6(n-1),$$

4'üncü dizide de

$$a_n = 8(n-1)$$

dir. Görüldüğü gibi her dört durumda da a_n dizileri a_1 = 0'dan başlayan ve ortak farkları sırasıyla 4, 5, 6 ve 8 olan aritmetik dizilerdir.