Ali Nesin

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.künye. . .

Ali Nesin

Fen Liseleri İçin Matematik 2

Doğal Sayılar Yapısı

İçindekiler

Önsöz

Okur doğal sayılara elbette daha önceki eğitim yıllarından aşinadır. Zaten önceki kitapta da hiç çekinmeden sayıları (kümelere örnek vermek amacıyla) kullanmıştık. Bu kitapta okurun doğal sayılar hakkında bildiklerini daha modern bir dille gözden geçireceğiz. Kullanacağımız dil daha çok kümeler kuramının dili olacak.

Anımsatalım: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 43, 127 gibi sayılara ***doğal sayı*** denir. Doğal sayı kümesinin $\mathbb{N}$ simgesiyle gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Doğal sayılar kümesi sadece bir küme değildir, üstünde toplama ve çarpma adı verilen iki işlem vardır. Ayrıca doğal sayılarda bir de "sıralama" vardır, mesela 5 sayısı 8'den küçüktür. Ayrıca asal sayılar, kareler, küpler filan da vardır. Yani $\mathbb{N}$ kümesi aslında basit bir kümeden çok daha zengindir, matematiksel dille söylemek gerekirse $\mathbb{N}$ "matematiksel bir yapı"dır. Bu kitapta, binyıllardır insanın merakını cezbetmiş bu ilginç matematiksel yapıyı biraz olsun anlamaya çalışacağız.

Doğal sayılar kümesini kabaca şöyle tanımlamaya çalışabiliriz: Doğal sayılar kümesi 0'ı içerir ve içerdiği her x ögesi için $x+1$ adında bir başka öge daha içerir. Yani 0 bir doğal sayıdır ve her doğal sayının "1 fazlası" da bir doğal sayıdır. Ama bu iki özellik doğal sayılar kümesini betimlemeye yetmez, daha fazlasını söylemek lazım, çünkü daha sonraki kitaplarda göreceğimiz tamsayılar kümesi de, kesirli sayılar kümesi de, gerçel sayılar kümesi de ve daha nice sayı kümeleri de bu iki özelliği sağlar. Doğal sayılar kümesi bu iki özelliği sağlar ama daha fazlasını da sağlar: Doğal sayılar kümesi, 0'ı içeren ve içerdiği her x ögesi için $x+1$ adında bir başka öge daha içeren kümelerin **en küçüğüdür**, yani bu iki özelliği sağlayan tüm kümelerin altkümesidir[1].

Şimdi bu tanımı (ya da tanım denemesini) tamamen bir yana bırakıp doğal sayılar konusuna sezgisel olarak yaklaşalım. Bundan böyle "5 nedir?" ya da

[1]Bu tanımın eksiksiz olması için 0'ı ve "her sayının bir fazlası" kavramını tanımlamak lazım. Kümeler kuramına başvurarak bu tanımlar yapılabilir. Konumuz bu olmadığından bu konuya hiç girmiyoruz.

"5 ne olmalıdır?" gibi hem matematiksel hem de felsefi anlamda çok ilginç olabilecek soruları es geçeceğiz. Bundan böyle herkesin 5'in anlamını bildiğini varsayacağız.

Bu kitapta sözünü etmeyeceğimiz doğal sayıların matematiksel inşası için okur çok daha ileri seviyede kümeler kuramı içeren ve en temel matematiğe dair olmasına karşın matematiksel olgunluk gerektiren [N2]'ye başvurabilir.

Aralara bayağı ilginç ve zorlayıcı problemler serpiştirdim. Okurun o problemler üzerine zaman geçirmesini öneririm, hemen olmasa da ileride yararını görecektir.

Kolaylıklar dilerim.

Ali Nesin
16 Eylül 2017

1. Toplama ve Çarpma İşlemleri

Doğal sayılarla toplama ve çarpma yapabiliriz. Yani iki doğal sayının toplamı ve çarpımı gene birer doğal sayıdır. Bu, matematikte, "doğal sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemleri altında ***kapalıdır***" cümlesiyle ifade edilir. Ama doğal sayılar kümesi çıkarma işlemi altında kapalı değildir, örneğin doğal sayılar kümesinde 7'den 5'i çıkarabiliriz (2 buluruz) ama 5'ten 7'yi çıkaramayız, çünkü bulmamız gereken -2 sayısı bir doğal sayı değildir. Oysa herhangi iki doğal sayıyı toplayıp çarptığımızda gene bir doğal sayı buluruz.

x ve y doğal sayılarının toplamının $x+y$ olarak, çarpımının da $x \times y$ olarak gösterildiğini herkes biliyordur, örneğin

$$5 + 7 = 12 \text{ ve } 5 \times 7 = 35$$

olur. x ve y sayılarının çarpımı $x \times y$ yerine bazen $x \cdot y$, bazen de daha basit olarak xy olarak gösterilir. Tabii $x = 13$ ve $y = 25$ ise, bu iki sayının çarpımı 13×25 ya da $13 \cdot 25$ olarak gösterilebilir ama kesinlikle 1325 olarak gösterilmez! Öte yandan a ve b sayılarının çarpımı ab olarak gösterilebilir. Bir karışıklık söz konusu olmayacaksa, olabilecek en sade yazım tercih edilir.

Ama dikkat, çarpma işareti olarak kulanılan $\cdot$ işaretiyle sayıları kolay okumaya yarayan nokta işaretini birbirine karıştırmamak lazım; örneğin 12.317 "on iki bin üç on yedi" sayısıdır ama $12 \cdot 317$, "12 çarpı 317" demektir. Noktalardan biri satırın en altında, diğeri hafifçe yukarıda.

İki doğal sayının toplamının ve çarpımının gene bir doğal sayı olmasını kümeler kuramının dilinde şöyle ifade ederiz:

$$\mathbb{N} + \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N}\,\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}.$$

Aslında burada eşitlik vardır, yani

$$\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N} \text{ ve } \mathbb{N}\,\mathbb{N} = \mathbb{N}$$

olur, çünkü ne de olsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n = n + 0 \in \mathbb{N} + \mathbb{N} \text{ ve } n = n \cdot 1 \in \mathbb{N}\,\mathbb{N}$$

olur.

Sıfır. Eskiden, eskiden dediğim birkaç onyıl önce filan, bazı matematikçiler 0'ı bir doğal sayı olarak kabul etmiyorlardı. Ya da aynı matematikçi bir makalesinde 0'ı doğal sayı olarak kabul ediyor, bir başka makalesinde kabul etmiyordu. 0'ı doğal sayı kabul edip etmemek matematiğin özüyle ilgili bir konu değildir, sadece bir anlaşma meselesidir, makalenin ya da kitabın başında 0'ın doğal sayı kabul edilip edilmediği söylenirse hiçbir sorun yaşanmaz, yeter ki neden söz edildiğini bilelim. 0'ın doğal sayı olup olmadığına biz insanlar karar veririz. "0 bir doğal sayı mıdır?" sorusuyla "balina bir balık mıdır?" sorusu arasında bir fark vardır, çünkü balina ve balık bizim dışımızda vardır ve balina ve balığın herkes tarafından kabul edilmiş tanımları vardır. Oysa "sayı", daha doğrusu "doğal sayı" kavramının neyi içerip içermediğine biz insanlar karar veririz. Hangi karar işimize gelirse, hangi karar hayatımızı kolaylaştıracaksa o kararı alırız. Matematikçilerin hemen hepsi bugün artık 0'ı bir doğal sayı olarak kabul eder çünkü bu sayede hayat daha kolay oluyor, teoremler daha kolay ifade ediliyor, matematik daha sade ve daha estetik oluyor. Biz de çoğunluk gibi 0'ı bir doğal sayı olarak kabul ediyoruz.

Sayma Sayıları. 0 dışındaki doğal sayılardan oluşan sayı kümesi $\mathbb{S}$ olarak gösterilir ve bu sayılara ***sayma sayıları*** denir. Demek ki

$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

$\mathbb{S}$ kümesi de toplama işlemi altında kapalıdır, yani iki sayma sayısının toplamı yine bir sayma sayısıdır, bir başka deyişle $\mathbb{S} + \mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$ olur, ama bu sefer eşitlik geçerli değildir, çünkü $\mathbb{S} + \mathbb{S}$ kümesinde 1 yoktur, bu kümenin en küçük sayısı 2'dir.

$$\mathbb{S} + \mathbb{S} = \{2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{S} \setminus \{1\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

eşitlikleri bariz olmalı. Benzer şekilde $\mathbb{S} + \mathbb{S} + \mathbb{S}$ kümesi 3 ve 3'ten büyük doğal sayıları içeren kümedir:

$$\mathbb{S} + \mathbb{S} + \mathbb{S} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}.$$

$\mathbb{S}$ kümesi çarpma işlemi altında da kapalıdır ve bu sefer $\mathbb{S}\mathbb{S} = \mathbb{S}$ eşitliği geçerlidir.

Katlar. Eğer n bir doğal sayıysa, $n\mathbb{N}$ kümesi n'nin doğal sayı katlarından oluşur, yani

$$n\mathbb{N} = \{0, n, 2n, 3n, 4n, \ldots\}$$

olur. $n\mathbb{N}$ kümesinin ögeleri n'ye bölünen doğal sayılardır. Örneğin, $n = 2$ ise,

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

olur, yani $2\mathbb{N}$ çift doğal sayılar kümesidir. Eğer n'yi 3'e eşit alırsak,

$$3\mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$$

olur. $4\mathbb{N}$ kümesinin ilk birkaç sayısını tahmin etmek zor değil:

$$4\mathbb{N} = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}.$$

$4\mathbb{N}$ kümesinin her ögesi 4'e bölünür, dolayısıyla $4\mathbb{N}$ kümesinin her ögesi 2'ye de bölünür; bundan da

$$4\mathbb{N} \subseteq 2\mathbb{N}$$

çıkar. Bunun gibi,

$$48\mathbb{N} \subseteq 16\mathbb{N} \subseteq 8\mathbb{N} \subset 4\mathbb{N} \subseteq 2\mathbb{N}$$

olur.

nm sayısı hem $n\mathbb{N}$ hem de $m\mathbb{N}$ kümesindedir, yani $nm \in n\mathbb{N} \cap m\mathbb{N}$ olur. Tabii $2nm$, $3nm$ gibi sayılar da bu kesişimdedir, yani $nm\mathbb{N} \subseteq n\mathbb{N} \cap m\mathbb{N}$ olur, ama bu kesişimde nm'nin katlarından daha fazla öge olabilir, örneğin $12 \in 4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N}$ olur, hatta $4\mathbb{N} \cap 6\mathbb{N} = 12\mathbb{N}$ olur, bir başka deyişle hem 4 hem de 6'nın katları olan sayılar tam tamına 12'nin katları olan sayılardır.

$n\mathbb{N}$ kümesinin ögelerini belli bir k doğal sayısıyla toplayabiliriz; elde edilen küme $n\mathbb{N} + k$ olarak yazılır. Örneğin,

$$\begin{aligned} 7\mathbb{N} + 3 &= \{3, 10, 17, 24, \ldots\}, \\ 7\mathbb{N} + 4 &= \{4, 11, 18, 25, \ldots\}, \\ 8\mathbb{N} + 1 &= \{1, 9, 17, 23, \ldots\}, \\ \mathbb{N} + 3 &= \{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}. \end{aligned}$$

Şu eşitlik de ilginizi çekebilir: $7\mathbb{N}+7 = 7\mathbb{S}$ ve genel olarak $n\mathbb{N}+n = n\mathbb{S}$. Ayrıca

$$7\mathbb{N} + 17 \subseteq 7\mathbb{N} + 10 \subseteq 7\mathbb{N} + 3$$

ve

$$14\mathbb{N} + 17 \subseteq 14\mathbb{N} + 3 \subseteq 7\mathbb{N} + 3$$

gibi ilişkiler de vardır. Bunların doğruluğunu kontrol etmeyi okura bırakıyoruz.

Tabii ki $2\mathbb{N}$ çift doğal sayılar, $2\mathbb{N} + 1$ de tek doğal sayılar kümesidir.

n'nin katlarıyla m'nin katlarını topladığımızda elde edilen küme ise

$$n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$$

olarak gösterilir. Örneğin

$$3\mathbb{N} + 7\mathbb{N} = \{3, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots\}$$

olur. (Bu tür kümelerin hangi sayılardan oluştuğunu bulmak kolay değildir, ama eğer n ve m'nin 1'den başka ortak böleni yoksa, $n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$ kümesinin $nm - n - m$ sayısından büyük tüm doğal sayıları içerdiği biliniyor.)

$$n\mathbb{N} + n\mathbb{N} = n\mathbb{N}$$

eşitliği gözümüzden kaçmasın. Elimiz değmişken sabit bir n için $n\mathbb{N} + k$ türünden kümelerin toplamı ve çarpımıyla ilgili birkaç örnek verelim.

$$(5\mathbb{N} + 4) + (5\mathbb{N} + 3) = 5\mathbb{N} + 7$$

olur. Ama mesela $(5\mathbb{N} + 4) \cdot (5\mathbb{N} + 3)$ kümesinin tam olarak hangi doğal sayılardan oluştuğunu bulmak hiç kolay değildir, yine de en azından

$$(5\mathbb{N} + 4) \cdot (5\mathbb{N} + 3) \subseteq 5\mathbb{N} + 12 \subseteq 5\mathbb{N} + 2$$

ilişkilerini biliyoruz.

Toplama ve çarpmanın özelliklerini ve bu özellikleri doğru uygulamayı okurun bildiğini varsayıyoruz. Örneğin

$$(a + b + c)(x + y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$$

olur. Zaten ileride bu özellikleri daha genel olarak gerçel sayılar için göreceğiz. Bu paragrafta merkezlediğimiz eşitlik dağılma özelliğinden, yani

$$a(x + y) = ax + ay$$

özdeşliğinden kaynaklanmaktadır.

Örnekler

1.1. Her x doğal sayısı için $x0 = 0x = 0$ olur. Bu yüzden 0 sayısının çarpma işleminin ***yutan ögesi*** denir.

1.2. Eğer iki doğal sayının toplamı 0 ise, her iki doğal sayı da 0 olmak zorundadır. Eğer iki doğal sayının toplamı 1 ise, bu sayılardan biri 1, diğeri 0 olmak zorundadır.

1.3. Eğer iki doğal sayının çarpımı 0 ise, iki doğal sayıdan en az biri 0 olmak zorundadır. (Her ikisi birden de 0 olabilir tabii.) Eğer elli tane doğal sayının çarpımı 0 ise, bu elli doğal sayının en az biri 0 olmak zorundadır. Bir başka deyişle, hiçbiri 0 olmayan doğal sayıların çarpımı 0 olamaz.

1.4. Eğer iki doğal sayının çarpımı 1 ise, her iki doğal sayı da 1 olmak zorundadır.

1.5. İki tek sayının çarpımının her zaman bir tek sayı olduğunu kanıtlayalım. Herhangi iki tek sayı alalım, bunlara x ve y diyelim. x bir tek sayı olduğundan, bir n doğal sayısı için $x = 2n + 1$ biçiminde yazılır. Aynı nedenden, bir m doğal sayısı için $y = 2m + 1$ biçiminde yazılır. (m, n'ye eşit olmak zorunda değil tabii.) Demek ki

$$xy = (2n + 1)(2m + 1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1$$

olur. Eğer $p = 2nm + n + m$ tanımını yaparsak, $xy = 2p + 1$ eşitliğini görürüz. p bir doğal sayı olduğundan, bu eşitlik xy'nin bir tek sayı olduğunu gösterir.

1.6. $\mathbb{T}$ kümesi 2 ve 2'den büyük doğal sayılardan oluşsun. $\mathbb{T}$ kümesi toplama ve çarpma altında kapalıdır. $\mathbb{T} + \mathbb{T}$ kümesi 4 ve 4'ten büyük tüm doğal sayıları içerir ve sadece bunları içerir, yani

$$\mathbb{T} + \mathbb{T} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$$

olur. Öte yandan $\mathbb{T}\,\mathbb{T}$ kümesinde olmayan çok doğal sayı vardır. Örneğin 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 doğal sayıları bu kümede değildir. $\mathbb{T}\,\mathbb{T}$ kümesindeki sayılar 1'den büyük en az iki doğal sayının çarpımı olarak yazılabilen sayılardır.

1.7. n ve m doğal sayıları için $5nm + 3n + 4m$ biçiminde yazılan sayıları kolayca tanımanın yolunu bulmak hiç kolay değil. Eğer $m = 0$ alırsak 3'ün katlarının bu biçimde yazıldığını görürüz. Eğer $n = 0$ alırsak 4'ün katlarının da yazıldığını görürüz. Ama başkaları da var; işte bazıları: 34, 47, 62, 73, 85, 86, 118, 125.

$13\mathbb{N} + 8$ kümesindeki sayıların bu biçimde yazılacağını gösterin.

$18\mathbb{N} + 12$ kümesindeki sayıların bu biçimde yazılacağını gösterin.

$23\mathbb{N} + 16$ kümesindeki sayıların bu biçimde yazılacağını gösterin.

Genel olarak, bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı için, $(5m + 3)\mathbb{N} + 4m$ kümesindeki sayılar bu biçimde yazılırlar.

1.8. $(7\mathbb{N} + 4) + (7\mathbb{N} + 5) = 7\mathbb{N} + 9 \subseteq 7\mathbb{N} + 2$ olur.

1.9. $(7\mathbb{N}+4) \cdot (7\mathbb{N}+5) \subseteq 7\mathbb{N}+20 \subseteq 7\mathbb{N}+6$ olur. $(7\mathbb{N}+4) \cdot (7\mathbb{N}+5)$ kümesinin hangi sayıları içerdiğini bulmak hiç de kolay değildir.

1.10. $(7\mathbb{N} + 5) + (7\mathbb{N} + 5) = 7\mathbb{N} + 10 \subseteq 7\mathbb{N} + 3$ olur.

1.11. $(7\mathbb{N} + 4) + (7\mathbb{N} + 5) + (7\mathbb{N} + 6) = 7\mathbb{N} + 15 \subseteq 7\mathbb{N} + 1$ olur.

1.12. $(7\mathbb{N} + 4) \cdot (7\mathbb{N} + 5) \cdot (7\mathbb{N} + 6) = 7\mathbb{N} + 120 \subseteq 7\mathbb{N} + 1$ olur.

1.13. 1 ve 5 kuruşları bir araya getirerek kaç farklı biçimde 20 kuruş elde ederiz? Eğer 1 kuruşların sayısına n, 5 kuruşların sayısına m dersek, elde edeceğimiz tutar $n + 5m$ kuruş olur. Demek ki

$$n + 5m = 20$$

denkleminin doğal sayılarda kaç çözümü olduğunu bulmalıyız. $5m$ ve 20 sayıları 5'e bölündüğünden n de 5'e bölünür. n yerine $5n_1$ yazalım. O zaman denklemimiz

$$5n_1 + 5m = 20$$

olur. 5'leri sadeleştirirsek

$$n_1 + m = 4$$

denklemine varırız. Bu denklemin her çözümü bize orijinal problemin bir çözümünü verir. Her $n_1 = 0, 1, 2, 3, 4$ için bir çözüm vardır: m'yi $4 - n_1$ almak yeterlidir. Demek ki 1 ve 5 kuruşlarla toplam beş farklı biçimde 20 kuruş elde edebiliriz.

1.14. 1, 5 ve 10 kuruşlarla kaç farklı biçimde 20 kuruş elde ederiz? Bu sefer

$$n + 5m + 10p = 20$$

denkleminin doğal sayılarda çözüm sayısını bulmalıyız. Eğer $p = 2$ ise, tek bir çözüm var: $n = m = 0$ ve $p = 2$. Eğer $p = 0$ ise çözüm sayısının 5 olduğunu bir önceki alıştırmada gördük. Eğer $p = 1$ ise $n + 2m = 10$ denklemini çözmeliyiz. Her $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için bu denklemin tek bir çözümü var. Demek ki toplamda $1 + 5 + 6 = 12$ tane çözüm var.

1.15. "100 lirayı 1, 5, 10, 20 ve 50 liralarla kaç farklı biçimde bozdurabiliriz" sorusu benzer bir biçimde çözülebilir belki ama insanı canından bezdirecek kadar uzun sürer. Bu tür problemleri daha kısa zamanda çözecek başka yöntemler vardır, bkz. [PTW].

1.16. $(a + b + c + d)(x + y + z)$ ifadesini açtığımızda $4 \times 3 = 12$ tane terim toplarız:

$$(a + b + c + d)(x + y + z) = ax + ay + az + bx + by + bz + cx + cy + cz + dx + dy + dz.$$

Biraz daha zor bir örnek:

$$(a + b + c + d)(x + y + z)(u + v + w)$$

ifadesini açtığımızda $4 \times 3 \times 3 = 36$ tane terim toplarız. Toplanacak terimleri bulmak için her parantezden birer terim seçip çarpmak lazım.

$(a+b)(a+b)$ ifadesi açıldığında 4 terim buluruz: aa, ab, ba, bb. Ama $ab = ba$ olduğundan, terim sayısı 3'e iner. $(a + b)(a + b)(a + b)$ ifadesi açıldığında önce $2 \times 2 \times 2 = 8$ terim bulunur ama sonra birbirine eşit terimler toparlanınca terim sayısı 4'e iner.

Alıştırmalar

1.17. Tüm doğal sayıları teker teker küçükten büyüğe yazın. Şaka şaka...

1.18. İki tek sayının toplamının çift olduğunu gösterin. İki çift sayının toplamının çift olduğunu gösterin.

1.19. Herhangi üç doğal sayı arasında toplamı çift olan iki sayı olduğunu gösterin.

1.20. Eğer ab çarpımı tek sayıysa, a ve b'nin tek sayı olmak zorunda olduğunu kanıtlayın. Buradan a^2 sayısı tek ise a'nın tek olması gerektiğini gösterin. Aynı şeyi a^3 ve a^4 için gösterin. a^5 sayısı çift ise a'nın da çift olması gerektiğini gösterin.

1.21. $(6\mathbb{N}+3)\cdot(6\mathbb{N}+3)\subseteq 6\mathbb{N}+3$ önermesini gösterin. Eşitlik doğru mu?

1.22. $(8\mathbb{N}+4)+(8\mathbb{N}+5)\subseteq 8\mathbb{N}+9$ önermesini gösterin. Eşitlik doğru mu?

1.23. $(8\mathbb{N}+4)\cdot(8\mathbb{N}+5)\subseteq 8\mathbb{N}+4$ önermesini gösterin. Eşitlik doğru mu?

1.24. $(8\mathbb{N}+4)\cdot(8\mathbb{N}+4)\subseteq 16\mathbb{N}$ önermesini gösterin. Eşitlik doğru mu?

1.25. $(9\mathbb{N}+14)+(9\mathbb{N}+7)\subseteq 9\mathbb{N}+k$ ve $k<9$ ise k kaçtır? Eşitlik doğru olabilir mi?

1.26. $(9\mathbb{N}+4)\cdot(9\mathbb{N}+15)\subseteq 9\mathbb{N}+k$ ve $k<9$ ise k kaçtır? Eşitlik doğru olabilir mi?

1.27. $(9\mathbb{N}+5)+(9\mathbb{N}+5)\subseteq 9\mathbb{N}+k$ ve $k<9$ ise k kaçtır? Eşitlik doğru olabilir mi?

1.28. $(9\mathbb{N}+5)+(9\mathbb{N}+4)\subseteq 9\mathbb{N}+k$ ve $k<9$ ise k kaçtır? Eşitlik doğru olabilir mi?

1.29. $(9\mathbb{N}+4)+(9\mathbb{N}+5)+(9\mathbb{N}+6)\subseteq 9\mathbb{N}+k$ ve $k<9$ ise k kaçtır? Eşitlik doğru olabilir mi?

1.30. $(9\mathbb{N}+4)\cdot(9\mathbb{N}+5)\cdot(9\mathbb{N}+6)\subseteq 9\mathbb{N}+k$ ve $k<9$ ise k kaçtır? Eşitlik doğru olabilir mi?

1.31. $(9\mathbb{N}+14)+(9\mathbb{N}+k)\subseteq 9\mathbb{N}+1$ ve $k<9$ ise k kaç olabilir?

1.32. $(9\mathbb{N}+10)\cdot(9\mathbb{N}+k)\subseteq 9\mathbb{N}+4$ ve $k<9$ ise k kaç olabilir?

1.33. $(6\mathbb{N}+3)\cdot(6\mathbb{N}+k)\subseteq 6\mathbb{N}+4$ önermesinin hiçbir k için doğru olamayacağını kanıtlayın.

1.34. $(6\mathbb{N}+3)\cdot(6\mathbb{N}+k)\subseteq 6\mathbb{N}+m$ ve $m<6$ önermesi doğruysa, m'nin alabileceği değerleri bulun.

1.35. 5 ve 6 gibi ya da 123, 124 ve 125 gibi ardarda gelen doğal sayılara ***ardışık sayı*** denir. İki ardışık sayının toplamının mutlaka bir tek sayı olduğunu kanıtlayın. Bunun ters istikameti de doğrudur: Her tek sayı iki ardışık sayının toplamıdır; kanıtlayın.

1.36. Ardışık üç doğal sayının toplamının 3'e bölündüğünü kanıtlayın. 0 dışında 3'e bölünen her doğal sayının üç ardışık doğal sayının toplamı olduğunu gösterin.

1.37. Yukarıdaki alıştırmaların benzerini 5, 7 ve 9 ardışık sayının toplamı için gösterin.

1.38. Ardışık üç sayının toplamı 7'ye bölünüyorsa, bu üç sayıdan birinin 7'ye bölündüğünü kanıtlayın.

1.39. 12, 13 ve 14 sayılarının $3\mathbb{N}+7\mathbb{N}$ kümesinde olduğunu gösterin. Buradan hareketle, 11'den büyük her doğal sayının $3\mathbb{N}+7\mathbb{N}$ kümesinde olduğunu gösterin. 11 sayısının $3\times 7-3-7$ sayısına eşit olduğuna dikkatinizi çekeriz.

1.40. 24, 25, 26, 27 ve 28 sayılarının $5\mathbb{N}+7\mathbb{N}$ kümesinde olduğunu gösterin. Buradan hareketle, 23'ten büyük her doğal sayının $5\mathbb{N}+7\mathbb{N}$ kümesinde olduğunu gösterin. 23 sayısının $5\times 7-5-7$ sayısına eşit olduğuna dikkatinizi çekeriz.

1.41. 1'den başka ortak böleni olmayan herhangi iki doğal sayı seçerek yukarıdakine benzer örnekleri çoğaltın. Eğer sayılara a ve b dersek, her seferinde $ab-a-b$ sayısından büyük her doğal sayı $a\mathbb{N}+b\mathbb{N}$ kümesinde olacaktır.

1.42. $4n+5m=40$ denkleminin doğal sayılarda kaç çözümü vardır?

1.43. $4n+5m=3$ denkleminin doğal sayılarda kaç çözümü vardır?

1.44. $4n+5m=23$ denkleminin doğal sayılarda kaç çözümü vardır?

1.45. $3k+4n+5m=23$ denkleminin doğal sayılarda kaç çözümü vardır?

1.46. $3n+4$, $4n+5$ ve $5n+3$ sayılarından en az birinin çift olduğunu gösterin.

1.47. $(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_m)$ ifadesini açtığımızda (yani parantezleri kaldırdığımızda) kaç terim toplanır?

1.48. $(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_m)(c_1 + \cdots + c_k)$ ifadesini açtığımızda (yani parantezleri kaldırdığımızda) kaç terim toplanır?

1.49. **Para bozdurma Problemleri.**

a. 1 ve 5 kuruşlarla kaç farklı biçimde 12 kuruş elde ederiz?

b. 1, 5 ve 10 kuruşlarla kaç farklı biçimde 30 kuruş elde ederiz?

c. 1, 5, 10 ve 25 kuruşlarla kaç farklı biçimde 1 lira elde ederiz?

ç. 1, 5, 10, 25, 50 ve 100 kuruşlarla kaç farklı biçimde 5 lira elde ederiz? Bu soruyu çözmenin kullanışlı bir yöntemi vardır ama bu aşamada bu yöntemi açıklamak kolay değildir. Yanıt 98.411 çıkıyor. Benzer bir problem [PTW, sayfa 11-15]'te var. Çok çok boş zamanı olmayan okura bu soru önerilmez!

1.50. İki n ve m doğal sayısı için,

$$n \star m = 2nm + n + m$$

tanımını yapalım. Böylece doğal sayılar kümesi üzerine $\star$ adını verdiğimiz yeni bir işlem tanımlamış oluruz. Tanımdan, her n ve m için $n \star m = m \star n$ eşitliği çıkıyor, çünkü tanımda n ile m'yi değiş tokuş edersek sonuç değişmiyor. Her n, m, p için

$$n \star (m \star p) = (n \star m) \star p$$

eşitliğini kanıtlayın. Her n için $n \star 0 = 0 \star n = n$ eşitliğini kanıtlayın. Her n, m ve p sayısı için

$$n \star (m + p) = n \star m + n \star p$$

eşitliği doğru mudur?

1.51. **Sayı Çıkarma Oyunları.**

a. İki kişi arasında oynanan şu oyunu ele alalım. İki kişi rastgele bir doğal sayı seçerler ve bu sayıdan başlayarak teker teker ya 1 ya 2 çıkarırlar. Örneğin eğer seçilen sayı 23 ise, birinci oyuncu ya 1 çıkarıp 22 der ya da 2 çıkarıp 21 der. Diyelim birinci oyuncu 23'ten 2 çıkarıp 21 dedi. İkinci oyuncu 21'den ya 1 ya 2 çıkarır. Oyun böyle devam eder. Negatif sayılara inmek yasak. 0 diyen oyunu kaybediyor. 1, 4, 7, 10, 13 ile başlayan oyunları oyuna başlayan oyuncunun kaybettiğini kanıtlayın. Genel olarak $3n + 1$ türünden bir sayıyla başlayan oyunları ilk hamle yapan kaybeder (diğer oyuncu iyi oynarsa tabii), diğer oyunları iyi oynarsa birinci oyuncu kazanır. Bunu kanıtlayın. Kazanan oyuncu oyunu kazanmak için nasıl oynamalıdır?

b. Aynı oyun, ama bu sefer 0 diyen kazanıyor. Oyun nasıl oynanmalı?

c. Bu sefer oyuncular 1, 2 ya da 3 çıkarabilirler. 0 diyen kaybediyor. Bu oyunun kazanma stratejisini bulun.

ç. Bu sefer oyuncular 1, 2, 3 ya da 4 çıkarabilirler. 0 diyen kaybediyor. Bu oyunun kazanma stratejisini bulun.

d. Bu sefer oyuncular 1, 2 ya da 4 çıkarabilirler. 0 diyen kaybediyor. Bu oyunun kazanma stratejisini bulun. (Yukarıdakilerden daha zordur.)

e. Bu sefer oyuncular 1, 2 ya da 5 çıkarabilirler. 0 diyen kaybediyor. Bu oyunun kazanma stratejisini bulun.

f. Bu sefer oyuncular 1, 3 ya da 4 çıkarabilirler. 0 diyen kaybediyor. Bu oyunun kazanma stratejisini bulun. (Yukarıdakilerden çok daha zordur.)

1.52. **Sayı Ekleme Oyunları.**

a. İki oyuncu 0'dan başlayarak diğerinin söylediği sayıya 1'den 10'a kadar (1 ve 10 dahil) bir sayı ekliyor. 100 diyen oyuncu kazanıyor. Bu oyunu birinci oyuncunun iyi oynarsa kazanabileceğini gösterin.

b. Yukarıdaki oyunda 100 diyen ya da 100'ü aşan kaybetsin. Hangi oyuncu nasıl oynarsa kazanır?

c. Bu sefer 23'ten başlayarak iki oyuncu sırayla 1'den 6'ya kadar sayı ekleyebiliyorlar. 100 diyen ya da 100'ü aşan oyunu kaybediyor. Hangi oyuncu nasıl oynarsa kazanır?

d. 0'dan başlayarak iki oyuncu sırayla 100'ü aşmaması kaydıyla istedikleri kadar tek sayı ekleyebiliyorlar. 100 diyen ya da 100'ü aşan oyunu kaybediyor. Hangi oyuncu nasıl oynarsa kazanır?

1.53. **İki Kefeli Terazi Sorusu.**

a. İki kefeli bir terazimiz ve 1, 2 ve 5 kiloluk ağırlıklarımız var. Bu üç ağırlıkla elbette 1, 2 ve 3 kiloları tartabiliriz ama 4 kiloyu da tartabiliriz, bunun için kefelerden birine 5 kiloyu, diğerine 1 kiloyu koymak yeterlidir. Bu üç kiloyla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8 kiloları tartabileceğimizi gösterin. Eğer 1, 2 ve 6 kiloluk ağırlıklarımız olsaydı, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 kiloyu tartabilirdik. Demek ki 1, 2 ve 6 kilolar, 1, 2 ve 5 kilolardan daha iyi, daha fazla ardışık ağırlık tartabiliyoruz.

b. İki kefeli bir terazide sadece üç ağırlıkla en fazla kaç farklı ağırlık tartabilirsiniz?

c. Esnafsınız. İki kefeli bir teraziniz var. Belediye yanınıza sadece üç ağırlık alabileceğinizi söylüyor. (Yukarıda 1, 2 ve 5 kiloluk ağırlıkları almıştık.) Öyle üç ağırlık seçin ki, 1'den başlayarak **ardışık** en fazla ağırlığı tartabilin.

ç. Belediye koşulları esnetti, artık yanınıza dört ağırlık alabilirsiniz. 1'den başlayarak ardışık en fazla ağırlığı tartmak için yanınıza hangi dört ağırlığı almalısınız?

d. Aynı soru ama beş ağırlıkla.

e. Aynı soru ama n tane ağırlıkla.

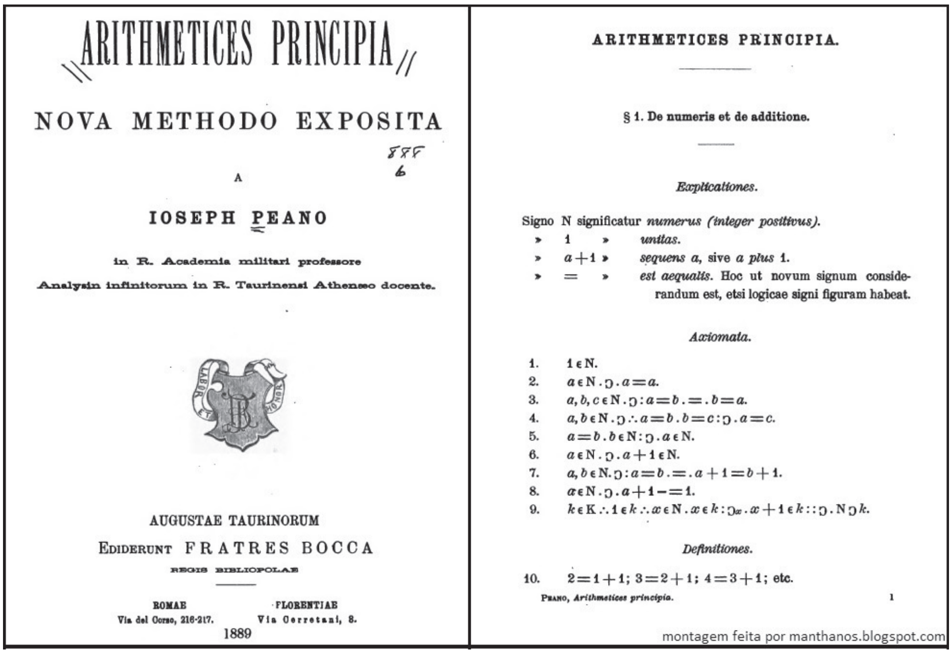
f. Yukarıdaki soruda bulduğunuz ağırlıkları yanınıza aldığınızı varsayalım. 212.412 kiloyu (mesela!) bu ağırlıkları kullanarak nasıl tartarsınız?

Notlar

1.54. Sık sık "0 bir doğal sayı mıdır?" sorusu sorulur. İsterseniz doğal sayı olur, isterseniz olmaz! Doğal sayıyla bir deve arasında bir fark vardır. Deve diye bir hayvan vardır, gözümüzle görürüz, karşımıza alabiliriz, inceleyebiliriz. Ama doğal sayı ortalıkta pek görünmez! Doğal sayı kavramını biz insanlar yarattık. (Deveyi biz yaratmadık!) 0'ı istersek doğal sayı olarak kabul ederiz, istersek etmeyiz. Bugün hemen herkes 0'ı bir doğal sayı olarak kabul eder. Ama eskiden öyle değildi, doğal sayıların 1'den başladığı zamanlar oldu. Biz, bildiğiniz gibi 0'ı bir doğal sayı olarak kabul ettik, çünkü paşa gönlümüz öyle istedi!

1.55. Doğal sayıları aksiyomatik olarak (yani her türlü deneyden ve tecrübeden bağımsız, tam matematiksel, dolayısıyla anlamsız olarak) ele almayı ilk başaran kişi Peano'dur. Ama Peano doğal sayıları bizim yaptığımız gibi 0'dan değil, 1'den başlatmıştır.

Peano'nun esinlendiği ve yararlandığı matematikçi, mantıkçı ve filozof Gottlog Frege'nin (1848-1925) çalışmaları da çok önemlidir. Frege, mantığın ve matematiğin (ve tabii ki aritmetiğin) sezgilerimizden arındırılması gerektiğini savunan ve bu konuda önemli çalışmalara imza atan ilk matematikçidir. Bu amaçla 1884'te Aritmetiğin Temelleri adlı eserini ve 1893 ve 1903'te Aritmetiğin Temel Yasaları adlı eserinin birinci ve ikinci ciltlerini yazmıştır. Aynı yıllarda, matematiğin tamamen mantığa indirgenmesi gerektiğini savunan ünlü filozof, matematikçi ve aktivist Bertrand Russell (1872-1970), 1898'de Geometrinin Temelleri Üzerine Bir Deneme, 1903'te Matematiğin İlkeleri, 1910 ve 1913 yılları arasında Whitehead ile birlikte üç ciltlik *Principia Mathematica* adlı eserlerini yazmıştır. Bunlara bir de David Hilbert'in 1899'da Öklid geometrisini matematiksel ve aksiyomatik olarak ele aldığı *Geometrinin Temelleri* [H] adlı kitabı eklemek lazım. Görüldüğü üzere 19'uncu yüzyılın sonlarıyla 20'nci yüzyılın başları matematiğin temelleri konusunda son derece verimli yıllar olmuştur.



ARITHMETICES PRINCIPIA

NOVA METHODO EXPOSITA

A

IOSEPH PEANO

in R. Academia militari professore

Analysin infinitorum in R. Taurinensi Athenaeo docente.

AUGUSTAE TAURINORUM

EDIDERUNT FRATRES BOCCA

REGIS BIBLIOPOLAE

ROMAE Via del Corso, 216-217. FLORENTIAE Via Cerretani, 8.

1889

ARITHMETICES PRINCIPIA.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*

» 1 » *unitas.*

» $a+1$ » *sequens a,* sive *a plus* 1.

» $=$ » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \in N.$
2. $a \in N . Ɔ . a = a.$
3. $a, b, c \in N . Ɔ : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in N . Ɔ \therefore a = b . b = c : Ɔ . a = c.$
5. $a = b . b \in N : Ɔ . a \in N.$
6. $a \in N . Ɔ . a + 1 \in N.$
7. $a, b \in N . Ɔ : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in N . Ɔ . a + 1 -= 1.$
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : Ɔ_x . x + 1 \in k :: Ɔ . N Ɔ k.$

Definitiones.

10. $2 = 1 + 1;\ 3 = 2 + 1;\ 4 = 3 + 1;$ etc.

PEANO, *Arithmetices principia.* 1

montagem feita por manthanos.blogspot.com

Giuseppe Peano'nun 1889 tarihli **Arithmetices principia, nova methodo exposita** adlı (Aritmetiğin İlkeleri, Yeni Bir Yöntem) Latince yazılmış eserinin kapağı.

1.56. Doğal sayıların bugünkü matematiksel tanımını yapan, matematiğin çok çeşitli dallarında, mantıkta, fizikte, bilgisayar biliminde, ekonomide önemli katkıları olmuş olan John von Neumann'dır (1903-1957). Von Neumann her doğal sayıyı kendinden küçük doğal sayılardan oluşan küme olarak tanımlamıştır. Dolayısıyla 0'ı boşküme olarak tanımlamıştır:

$$0 = \emptyset.$$

Diğer sayıların von Neumann tanımı şöyledir:

$$\begin{aligned} 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} \\ 4 &= \{0, 1, 2, 3\} \\ 5 &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ 6 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$n + 1 = n \cup \{n\}.$$

Von Neumann'ın bu tanımı "sonsuz sayı" olarak nitelendirilebilecek ve bugün matematikte çok temel olan ordinal ve kardinal gibi doğal sayıları genelleştiren kavramların matematiksel olarak tanımlanmasının önünü açmıştır. Eğer gelecekte matematikçi olursanız bu sonsuz sayılarla da haşır neşir olacaksınız. Şimdilik sonlu sayılarla haşır neşir olalım...

John von Neumann (1903-1957)

1.57. Küçük sayıların bir anlamı vardır beynimizde. Örneğin 5 saniyenin ne kadarlık bir süre olduğunu aşağı yukarı biliriz; 5 dakikayı da, 5 saati de algılayabiliriz ama mesela 2,5 milyar saniyenin ne kadarlık bir süreye tekabül ettiğini (kaç gün ya da kaç yıl ya da kaç yüzyıl eder?) hesap kitap yapmadan anlayamayız. Arkadaşlarınızla bir tahmin oyunu oynadıktan sonra gerçek süreyi bulun. Bu da şu demektir: Büyük sayılar aslında sadece kalem kâğıt üzerinde ve şeklen ve sadece bilgi olarak vardır, biz insanlar sadece küçük sayıları gerçekten hissedebiliriz.

2. Sıralama

Toplama ve çarpma işlemleri dışında doğal sayılarda bir de ilkokuldan beri bildiğimiz, hatta ilkokuldan da önce anaokuldan beri bildiğimiz "küçüklük-büyüklük" ilişkisi vardır. Örneğin 25, 48'den küçüktür, ya da 48, 25'ten büyüktür. Bunu

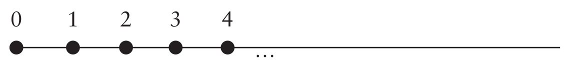
$$25 \leq 48,\ 25 < 48,\ 48 \geq 25 \text{ ya da } 48 > 25$$

olarak gösteririz. Bu küçüklük-büyüklük ilişkisine ***sıralama*** denir, daha doğrusu "doğal sayıların sıralaması" denir.

0 en küçük doğal sayıdır. 0'dan hemen sonra 1 gelir. 0 ile 1 arasında başka bir doğal sayı yoktur. 0'dan büyük sayılar ***pozitif*** olarak adlandırılır. Bilineni tekrar etmek olacak ama söyleyelim gene de, doğal sayıların sıralaması şöyledir:

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq 5 \leq \ldots$$

Resmi de şöyle:



Küçükten büyüğe doğru soldan sağa sıralanmış doğal sayılar.

0'dan büyük doğal sayılara ***pozitif*** adı verilir. Demek ki pozitif olmayan tek doğal sayı 0'dır.

Her doğal sayıdan daha büyük bir doğal sayı vardır: n doğal sayısından sonraki ilk doğal sayı $n+1$'dir. Tabii $n+2$ daha da büyüktür. En büyük doğal sayı yoktur, her doğal sayıdan daha büyük bir doğal sayı vardır.

Eğer a sayısı b'den küçükse ya da b sayısı a sayısından büyükse,

$$a < b$$

yazarız. Eğer a sayısı b'den küçükse ya da b'ye eşitse, bu

$$a \leq b$$

olarak yazılır. Hem $5 \leq 7$ hem de $5 < 7$ önermesi doğrudur. Ama $5 < 5$ önermesi yanlıştır. Öte yandan $5 \leq 5$ önermesi doğrudur. Genel olarak, her x için $x \leq x$ olur ama hiçbir x için $x < x$ olmaz. $<$ ilişkisi doğal sayılarda şöyle olur:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$$

Eğer $a \leq b$ ise, "büyükeşit/küçükeşit olmak" gibi tabirler uydurup b'nin a'dan ***büyükeşit*** ya da a'nın b'den ***küçükeşit*** olduğunu söyleyeceğiz. Henüz TDK sözlüğünde ya da herhangi bir sözlükte bulamayacağınız bu uydurma tabirler ifade gücümüzü artıracak.

5'ten küçükeşit tam altı tane doğal sayı vardır, bunlar da 0, 1, 2, 3, 4, 5 sayılarıdır. 0'dan küçükeşit tam bir tane doğal sayı vardır, o da 0'ın kendisidir. Ama 5'ten küçük tam beş tane doğal sayı vardır, onlar da 0, 1, 2, 3, 4 sayılarıdır. 0'dan küçük tam sıfır tane doğal sayı vardır, yani hiç yoktur.

$\geq$ ve $>$ simgelerinin anlamını biliyorsunuzdur: $a \geq b$ önermesi, $b \leq a$ anlamına gelir. $a > b$ önermesi de $b < a$ anlamına gelir. Yani, tanım gereği,

$$a \geq b \Longleftrightarrow b \leq a$$

ve

$$a > b \Longleftrightarrow b < a$$

önermeleri doğrudur.

Eğer $a < b$ ise elbette $a \leq b$ olur. Ama bunun ters istikameti her zaman doğru değildir, yani $a \leq b$ ise illa $a < b$ olmak zorunda değildir, $a = b$ durumu mızıkçılık çıkarır. Ters istikametin doğru olması için bir de ayrıca $a \neq b$ olmalıdır. Bir başka deyişle

$$a < b \Longleftrightarrow (a \leq b \text{ ve } a \neq b)$$

önermesi doğrudur. Bunun gibi

$$a \leq b \Longleftrightarrow (a < b \text{ ya da } a = b)$$

önermesi doğrudur.

Eğer $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise, bunu kısaca

$$a \leq b \leq c$$

olarak yazarız. Benzer bir gösterimi $<$ ile de yapacağız.

Sıralama ve Toplama. Doğal sayıların toplama işlemiyle sıralama ilişkisi arasında çok sıkı bir bağ vardır. Biri bilinirse, diğeri de bilinir. Anlatalım: a ve b iki doğal sayı olsun. Eğer $a \leq b$ ise, o zaman bir x doğal sayısı için $a + x = b$

olur. Bunun tersi de doğrudur: Eğer bir x doğal sayısı için $a+x=b$ oluyorsa, o zaman $a \leq b$ olur. Bir başka deyişle, a ve b doğal sayıları için,

$$a \leq b$$

ifadesiyle

$$\text{Bir } x \text{ doğal sayısı için } a+x=b \text{ olur}$$

ifadesi eşdeğerdir, biri doğruysa diğeri de doğrudur. Matematikte bunu şöyle yazarız:

$$(1) \qquad a \leq b \Longleftrightarrow \exists x \; a+x=b.$$

Oradaki $\exists x$ ifadesi, "öyle bir x var ki" olarak okunmalı; yani sağdaki ifade "öyle bir x var ki $a+x=b$ olur" olarak ya da daha doğru bir Türkçeyle "$a+x=b$ eşitliğini sağlayan bir x vardır" olarak okunmalı.

Yukarıda söylediklerimizden, doğal sayılarda, toplamanın sıralamayı, sıralamanın da toplamayı tanımladığı (ya da belirlediği çıkar). Birinin özelliklerinden diğerinin özellikleri kanıtlanabilir. Örnek olarak toplamanın özelliklerinden hareketle "$a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$" önermesini kanıtlayalım. Diyelim $a \leq b$ ve $b \leq c$. O zaman x ve y doğal sayıları için

$$a+x=b \text{ ve } b+y=c$$

olur. Buradan da

$$a+(x+y)=(a+x)+y=b+y=c$$

çıkar. Demek ki a'ya $x+y$ doğal sayısını eklersek c'yi buluyoruz. Buradan da $a \leq c$ çıkar. İstediğimizi kanıtladık.

$<$ ilişkisi de toplamadan hareketle tanımlanabilir: $a<b$ olması için a'ya eklenen x doğal sayısı 0 olmamalıdır. Matematikçe dilinde bu şöyle yazılır:

$$(2) \qquad a<b \Longleftrightarrow \exists x \; (x \neq 0 \wedge a+x=b).$$

Buradaki $\wedge$ simgesi "ve" anlamına gelmektedir[1].

İşlemlerle Uyum. Bu paragrafta toplama ve çarpma işlemleriyle sıralamanın uyumundan söz edeceğiz. Önce toplamayı ele alalım. Her x, y, z doğal sayısı için, eğer $x \leq y$ ise $x+z \leq y+z$ olur; yani sabit bir sayıyla (burada z ile) toplama eşitsizliği bozmaz. Aynı şey $\leq$ yerine $<$ simgesi için de doğrudur: $x<y$ ise $x+z<y+z$ olur. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanır: Eğer $x \leq y$ ve $z \leq t$ ise $x+z \leq y+t$ olur. Ayrıca eğer $x<y$ ve $z \leq t$ ise $x+z<y+t$ olur.

[1] Yeri gelmişken $\vee$ simgesinin de "veya" anlamına geldiğini belirtelim. $p \vee q$, ya p ya da q doğru demek, ama dikkat her ikisi de doğru olabilir. Daha fazla mantık bilgisi için [N1]'e bakabilirsiniz.

Sıralamayla çarpma arasında da büyük ölçüde bir uyum vardır: $x \leq y$ ise her $z \in \mathbb{N}$ için $xz \leq yz$ olur, yani sabit bir sayıyla (burada z ile) çarpma eşitsizliği bozmaz. Aynı şey $\leq$ yerine $<$ simgesi için de neredeyse doğrudur, tek istisna $z = 0$ durumudur: Eğer $x < y$ ise, 0'dan farklı her z doğal sayısı için $xz < yz$ olur.

Alıştırmalar

2.1. Toplamanın özelliklerinden hareketle ve (1)'i kullanarak toplama işleminin sıralamayla uyumlu olduğunu kanıtlayın, yani her a, b, c doğal sayısı için, $a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$ olduğunu kanıtlayın.

2.2. Toplamanın özelliklerinden hareketle ve (1)'i kullanarak çarpma işleminin sıralamayla uyumlu olduğunu kanıtlayın, yani her a, b, c doğal sayısı için, $a \leq b$ ise $ac \leq bc$ olduğunu kanıtlayın.

2.3. Toplamanın özelliklerinden hareketle ve (1) ve (2)'yi kullanarak, her a, b, c, d doğal sayısı için, $a < b$ ve $c \leq d$ ise $a + c < b + d$ olduğunu kanıtlayın.

2.4. Toplamanın özelliklerinden hareketle ve (1)'i kullanarak, her a, b, c, d doğal sayısı için, $a \leq b$ ve $c \leq d$ ise $ac \leq bd$ olduğunu kanıtlayın.

2.5. Toplamanın özelliklerinden hareketle ve (1)'i kullanarak, her a, b doğal sayısı için, $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ olduğunu kanıtlayın.

2.6. Toplamanın özelliklerinden hareketle ve (1)'i kullanarak, her a doğal sayısı için, $a \leq a$ olduğunu kanıtlayın.

2.7. Toplamanın özelliklerinden hareketle ve (2)'yi kullanarak, a, b, c, d doğal sayıları için, $a < b$ ve $c < d$ ise $ac < bd$ olduğunu kanıtlayın.

2.8. Yukarıdakilerine benzer alıştırmaları sıralamanın bildiğiniz başka özellikleri için yapın.

Üstsınır. Eğer $X \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin her ögesi belli bir a sayısından küçükeşitse, bu a sayısına X'in ***üstsınırı*** adı verilir. Bu durumda X'in üstten sınırlı olduğunu ve a'nın X'i üstten sınırladığını söyleyeceğiz. Elbette eğer a, X'in bir üstsınırıysa, a'dan büyük her sayı da X'in üstsınırıdır. Örneğin $5x + 7 < 108$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar kümesi 20 ve 20'den büyük her doğal sayı tarafından üstten sınırlanır. Ama $5x+7 > 108$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar kümesi üstten sınırlı değildir, çünkü 21 ve üstü her doğal sayı bu kümededir. Çift doğal sayılar kümesi de üstten sınırlı değildir.

En Büyük/Küçük Öge. Boşküme olmayan bir doğal sayı kümesi üstten sınırlıysa o zaman o kümenin en büyük bir ögesi vardır. Örneğin 100'den küçük ve 7'ye bölünen en büyük doğal sayı 98'dir. Eğer bir $X \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin en büyük ögesi varsa, bu ögeyi

$$\max X$$

olarak göstereceğiz. Ögeye de X'in ***maksimal ögesi*** ya da ***en büyük ögesi*** diyeceğiz. Örneğin

$$\max\{1, 7, 8\} = 8$$

olur. Bir başka örnek: Eğer X, $(x-1)(x-3)(x-4) = 0$ denkleminin çözümlerinden oluşan kümesiyse, $\max X = 4$ olur. Bir örnek daha: 24 ve 36'yı bölen sayılar kümesi 36 tarafından üstten sınırlıdır (25 tarafından da üstten sınırlıdır) ve bu küme boşküme değildir, örneğin 1 sayısı bu kümededir; demek ki bu kümenin en büyük ögesi vardır; tahmin edeceğiniz gibi bu kümenin en büyük ögesi (daha sonra adına en büyük ortak bölen diyeceğimiz) 12'dir. Bir örnek daha: $5x + 7 < 108$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar kümesinin en büyük ögesi 20'dir.

Eğer X üstten sınırlıysa, $\max X$, X'in bir üstsınırıdır ve X'in üstsınırlarının en küçüğüdür.

Eğer bir $X \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin en küçük ögesi varsa (ki ileride üzerine basa basa söyleyeceğimiz üzere, boşküme dışında her doğal sayı kümesinin en küçük ögesi vardır), bu ögeyi

$$\min X$$

olarak göstereceğiz ve adına X'in ***minimal ögesi*** ya da ***en küçük ögesi*** diyeceğiz. Örneğin

$$\min\{1, 7, 8\} = 1$$

olur. Eğer $X = \{a\}$ ise,

$$\min X = \max X = a$$

olur elbette. Bir başka örnek: Eğer X, $(x+5)(x-1)(x-3)(x-4) = 0$ denkleminin doğal sayı çözümlerinden oluşan kümesiyse, $\min X = 1$ olur. Bir başka örnek daha: 6'ya ve 8'e bölünen pozitif doğal sayılar kümesinin en küçük ögesi 24'tür. (Daha sonra bu sayıya 6 ve 8'in en küçük ortak katı dendiğini göreceğiz.)

Yukarıda parantez içinde değindiğimiz gibi X'in boş olmayan her altkümesinin en küçük ögesi vardır. Bu konudan biraz ileride daha kapsamlı olarak bahsedeceğiz; bkz. Bölüm 6.

Bu arada,

$$\min\{a, b\} + \max\{a, b\} = a + b$$

ilginç eşitliğine de dikkatinizi çekerim, bazen çok yararlı olur.

Örnekler

2.9. $\min X = \max X$ eşitliğinin sağlanması için yeter ve gerek koşul X'in tek ögeli bir küme olmasıdır.

2.10. Beş basamaklı doğal sayıların hepsi dört basamaklı doğal sayıların hepsinden daha büyüktür. Doğal sayılar önce basamak sayısına göre sıralanır, yani basamak sayısı daha az olan daha küçüktür. Eğer iki doğal sayının basamak sayısı aynıysa, en soldaki basamağa bakılır. En sol basamaktaki rakamı daha küçük olan daha küçüktür. En soldaki basamaktaki rakamlar eşitse, o basamağın hemen sağındaki rakamlara bakılır. Bunlar da eşitse bu basamağın hemen sağındaki rakamlara bakılır. Farklı bir basamak buluncaya kadar bu inceleme sürdürülür. En sol basamaktan başlayarak, ilk farklı rakamı küçük olan sayı daha küçüktür. Eğer basamak sayısı ve basmaklardaki tüm rakamlar eşitse, sayılar eşit demektir. Bunu ilkokul yıllarınızdan biliyorsunuz tabii. Gene de düzgün ifade edebilmekte yarar var, ki bu da hiç kolay değildir.

2.11. En küçük beş basamaklı doğal sayı 10.000'dir. En büyük dört basamaklı doğal sayı 9.999'dur.

2.12. En küçük beş basamaklı doğal sayıdan en büyük üç basamaklı doğal sayıyı çıkarırsak 9.001 buluruz, çünkü en küçük beş basamaklı doğal sayı 10.000 ve en büyük üç basamaklı doğal sayı 999'dur, aradaki fark da $10.000 - 999 = 9.001$ olur.

2.13. En küçük dört basamaklı doğal sayı 1000'dir. En büyük dört basamaklı doğal sayı 9999'dur. Ama dört basamaklı doğal sayıların sayısı $9999 - 1000 = 8999$ değil

$$9999 - 1000 + 1 = 9000$$

olur.

2.14. a rastgele bir doğal sayı olsun. Boşkümenin her ögesi a'dan küçüktür, çünkü boşkümede a'dan küçük olmayan bir öge yoktur, çünkü boşkümede hiç öge yoktur! Demek ki a boşkümenin bir üstsınırıdır. Buradan da her doğal sayının boşkümenin bir üstsınırı olduğu çıkar. Dolayısıyla boşkümenin en küçük üstsınırı 0'dır. Ama tabii boşkümenin en büyük ögesi yoktur. Boşkümenin en küçük ögesi de yoktur.

2.15. Eğer $X \subseteq Y$ ise ve Y üstten sınırlıysa, o zaman X de üstten sınırlıdır elbette.

2.16. $X \subseteq Y$ üstten sınırlı ve boş olmayan iki doğal sayı kümesiyse $\max X \leq \max Y$ olur çünkü X'in en büyük ögesi Y'nin de bir ögesidir, dolayısıyla X'in en büyük ögesi Y'nin en büyük ögesinden küçükeşittir.

Alıştırmalar

2.17. $x \leq y$ ve $a \leq b$ doğal sayılar olsun. $xa \leq yb$ önermesini kanıtlayın.

2.18. Eğer X doğal sayı kümesi üstten sınırlı değilse, XY kümesi hangi Y doğal sayı kümeleri için üstten sınırlı olur?

2.19. $X \subseteq \mathbb{N}$ üstten sınırlı bir küme olsun. X'in en fazla $\max X - \min X + 1$ tane ögesi olduğunu gösterin.

2.20. X ve Y üstten sınırlı ve boş olmayan iki doğal sayı kümesi olsun. Eğer $X \subseteq Y$ ise $\max X \leq \max Y$ olduğunu gösterin.

2.21. X ve Y üstten sınırlı ve boş olmayan iki doğal sayı kümesi olsun. Diyelim X kümesi üstten a tarafından sınırlı, Y kümesi de üstten b tarafından sınırlı. $X + Y$ kümesinin $a+b$ tarafından (mesela) üstten sınırlandığını kanıtlayın. $\max(X+Y) = \max X + \max Y$ eşitliğini kanıtlayın.

2.22. X ve Y üstten sınırlı ve boş olmayan iki doğal sayı kümesi olsun. Diyelim X kümesi üstten a tarafından sınırlı, Y kümesi de üstten b tarafından sınırlı. $X \cup Y$ kümesinin $\max\{a, b\}$ tarafından üstten sınırlandığını kanıtlayın. $\max(X \cup Y) = \max\{\max X, \max Y\}$ eşitliğini kanıtlayın.

2.23. $X_1, \ldots, X_n$ üstten sınırlı ve boş olmayan doğal sayı kümeleri olsun.

$$\max(X_1 \cup \ldots \cup X_n) = \max\{\max X_1, \ldots, \max X_n\}$$

eşitliğini kanıtlayın.

2.24. X ve Y üstten sınırlı ve boş olmayan iki doğal sayı kümesi olsun. $\max XY = \max X \max Y$ eşitliğini kanıtlayın.

2.25. **Tavukçu Sorusu.** Adamın biri tavukçuya girer, "Bu tavukların yarısını ver, bir de fazladan bir tavuk ver" der. Tavukçu adamın isteğini yerine getirir. Ardından kadının biri aynı tavukçuya girer, "Bu tavukların yarısını ver, bir de fazladan bir tavuk ver" der. Tavukçu kadının isteğini yerine getirir. Ardından bir genç aynı tavukçuya girer, "Bu tavukların yarısını ver, bir de fazladan bir tavuk ver" der. Tavukçu gencin isteğini yerine getirir. Ve tavukçuda hiç tavuk kalmaz! Tavukçuda başlangıçta kaç tavuk varmış?

3. Diğer İşlemler

3.1 Çıkarma ve Bölme

Doğal sayılarda çıkarma ve bölme işlemleri her zaman yapılamaz. Çıkarma işlemi yapabilmek için tamsayılara, bölme işlemini yapabilmek için kesirli sayılara geçmek zorundayız. Bunu ilerideki bölümlerde yapacağız. Ama doğal sayılarda **kimi zaman** çıkarma ve bölme işlemleri yapılabilir. Örneğin, 5'ten 12 çıkmasa da, 12'den 5 çıkabilir, 6'yı 12'ye bölemesek de 12'yi 6'ya bölebiliriz.

Doğal sayılarda çıkarmayı şöyle tanımlayabiliriz: Eğer $b + x = a$ denkleminin doğal sayılarda bir çözümü varsa, bu çözüm biriciktir; olduğunda, bu çözüm $a - b$ olarak gösterilir. Örneğin $5 + x = 12$ denkleminin bir çözümü olduğu için ve bu çözüm $x = 7$ olduğu için, $12 - 5 = 7$ olur.

Benzer şekilde doğal sayılarda bazen bölme yapılabilir. Eğer

$$bx = a$$

denkleminin bir çözümü varsa, o zaman "b, a'yı ***böler***" denir. Eğer ayrıca çözüm **biricikse**, o zaman o çözüm a/b olarak gösterilir. Örneğin $6x = 18$ denkleminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm $x = 3$'tür, dolayısıyla $18/6$ sayısı 3 olarak tanımlanır. Ama $18x = 6$ denkleminin doğal sayılarda bir çözümü olmadığı için $6/18$ diye bir sayı doğal sayılarda tanımlanmamıştır. $0x = 0$ denkleminin çözümü vardır, dolayısıyla 0 sayısı 0'ı böler, ama çözüm biricik olmadığından (her x sayısı $0x = 0$ denkleminin çözümüdür), $0/0$ diye bir şey tanımlanmamıştır. $b/0$ diye bir sayı da $0x = b$ denkleminin hiç çözümü olmadığından tanımlanmamıştır.

0'ın 0'ı bölmesi ama $0/0$ diye bir şeyin olmaması tuhaf gelebilir ama tanımlar bunun böyle olması gerektiğini söylüyor. Genel olarak $b/0$ ifadesini tanımsız bırakıyoruz. Bu arada $7/8$ ifadesi de şimdilik tanımsız (henüz kesirli sayılar konusuna geçmedik).

Eğer $bx = a$ denkleminin doğal sayılarda bir çözümü varsa, o zaman b'ye a'nin ***böleni*** ya da ***çarpanı*** adı verilir. Örneğin 48'in bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ve 48'dir.

1 her doğal sayıyı böler çünkü $1x = b$ denkleminin tek bir çözümü vardır: $x = b$; dolayısıyla $b/1 = b$ olur.

Her doğal sayı 0'ı böler çünkü her a için $ax = 0$ denkleminin bir çözümü vardır: $x = 0$ mesela. Eğer $a \neq 0$ ise bu çözüm biriciktir, dolayısıyla $a \neq 0$ ise $0/a = 0$ olur.

Her $a \neq 0$ doğal sayısı kendini böler çünkü $ax = a$ denkleminin tek bir çözümü vardır: $x = 1$; dolayısıyla $a/a = 1$ olur.

Her $a \neq 0$ ve b doğal sayısı için, a, ab sayısını böler. a'nın böldüğü doğal sayılar

$$0,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \ldots$$

gibi a'nın katlarıdır.

Doğal sayılarda **bazen** yapılabilen çıkarma ve bölmeye "işlem" yerine "kısmi işlem" denir. Okurun bu kısmi işlemlere aşina olduğunu bildiğimizden üstünde pek durmuyoruz. Örneğin

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

gibi eşitlikleri kanıtlamıyoruz ya da bu ifadenin $a-b+c$ olarak yazıldığını söylemiyoruz, söylesek de okurun bildiğini varsayarak üstünde pek durmuyoruz.

Diğer kitaplarda bölme işlemini çok daha ayrıntılı ve uzun uzadıya tartışacağımız için bu konuyu burada kapatıyoruz.

Alıştırmalar

3.1. $a \leq b$ iki doğal sayı olsun. $a \leq x \leq b$ eşitsizliklerini sağlayan kaç doğal sayı vardır?

3.2. $a \leq b$ iki doğal sayı olsun. $a < x \leq b$ eşitsizliklerini sağlayan kaç doğal sayı vardır?

3.3. $a \leq b$ iki doğal sayı olsun. $a < x < b$ eşitsizliklerini sağlayan kaç doğal sayı vardır?

3.4. 36'nın bölenlerini bulun.

3.5. a, b, c üç doğal sayı olsun. $b \neq 0$ ve $c \neq 0$ olsun. Eğer b, a'yı ve c, a/b'yi bölüyorsa, o zaman bc'nin a'yı böldüğünü ve $(a/b)/c = a/bc$ eşitliğini kanıtlayın.

3.6. 123 tane futbol takımı eleme usulü bir şampiyonaya katılıyor. Takımlar ikişer ikişer (kurayla diyelim) eşleşiyorlar. Tabii eğer takım sayısı tekse, takımlardan biri eşleşmez, o takımı maç yapmadan tur atlatacağız. Bu şampiyonada şampiyon belirlenene kadar kaç maç yapılır? Maç sayısıyla takım sayısı arasında bir ilişki gözünüze çarptı mı? Şampiyonaya katılan takım sayısı değiştiğinde aynı ilişkinin devam ettiğini görün. Bunun nedenini anlamaya çalışın.

3.2 Üs Almak

Doğal sayılarda toplama ve çarpmadan başka işlemler de vardır, örneğin bir sayının karesini alabiliriz, yani bir sayıyı kendisiyle çarpabiliriz:

$$x^2 = xx.$$

Örneğin $5^2 = 5 \times 5 = 25$. Bir sayının kübünü de alabiliriz, yani bir sayıyı kendisiyle üç defa çarpabiliriz:

$$x^3 = xxx.$$

Örneğin $5^3 = 125$. Eğer $n > 0$ bir doğal sayıysa, bir sayının n'inci ***kuvveti*** ya da ***üssü*** o sayıyı kendisiyle n defa çarpmak demektir; bu sayı

$$x^n$$

olarak gösterilir. Yani

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ tane } x}.$$

x^1, tanım gereği, x'tir; sonuç olarak x'i kendisiyle bir (1) defa çarpıyoruz.

$0^5 = 0$ ve $1^5 = 1$ gibi eşitlikler bariz olmalı.

10'un kuvvetleri de önemlidir ve hayatta sık sık karşımıza çıkar. Örneğin

$$10^5 = 100.000$$

olur, yani 10^5 sayısı 1'den sonra 5 tane 0 konularak yazılır. 10^{18} sayısı da 1'den sonra 18 tane 0 konularak yazılır. $10^3 = 1.000$ (bin) olur. 10^6 sayısı 1 milyondur. 10^9 bir milyar ve 10^{12} bir trilyondur. Bundan sonrakilerinin adlarını ben de bilmiyorum!

Sıfırıncı Kuvvet. x^0 için ayrı bir bölüm ayıralım, önemlidir. x^0 sayısını x'i kendisiyle 0 defa, yani "hiç defa" çarpmak olarak tanımlamak istiyoruz. x^0 sayısı sıfır tane x'in çarpımı olarak tanımlansın! Genel olarak, bir ögeyi kendisiyle sıfır defa bir işleme sokmak, o işlemin (varsa) etkisiz ögesi olarak tanımlanır. Örneğin hiç tane sayının toplamı (toplamanın etkisiz ögesi olan) 0'dır[1]; hiç tane kümenin bileşimi (bileşim işleminin etkisiz ögesi olan) $\emptyset$'dir; hiç tane kümenin kesişimi, eğer varsa, (kesişim işleminin etkisiz ögesi olan) evrensel kümedir; eğer evrensel küme yoksa, hiç tane kümenin kesişimi alınmaz, bu durumda hiç tane kümenin kesişimine **tanımsız** denir. Dolayısıyla hiç tane sayının çarpımı da (çarpmanın etkisiz ögesi olan) 1 olarak tanımlanır. Demek ki tanım gereği $5^0 = 1$ olur.

x^0 neden 1'e eşit olarak tanımlanır? x^0'ı 1'e eşit olarak tanımlamak işimize gelir de ondan. Bu tanımın yararlarını ileride göreceğiz şimdilik birini belirtelim: Birazdan kanıtlayacağımız

$$x^n x^m = x^{n+m},\ (xy)^n = x^n y^n \text{ ve } (x^n)^m = x^{nm}$$

eşitlikleri her x, y, n ve m doğal sayıları için geçerlidir, içlerinden biri ya da birkaçı 0 bile olsa. Örneğin,

$$\begin{aligned}
&2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}\\
&6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5\\
&\left(15^2\right)^4 = 15^{2\cdot 4} = 15^8 = (3 \cdot 5)^8 = 3^8 \cdot 5^8
\end{aligned}$$

gibi eşitlikler geçerlidir.

[1] 0 kere 5, sıfır tane 5'i toplamak demek olduğundan, $0 \times 5 = 0$ olmalı! Nitekim öyledir de...

Yukarıdaki $x^0 = 1$ tanımına bazen bir istisna getirilir. Tanımımıza göre $0^0 = 1$. Ancak bazı durumlarda 0^0 gibi bir ifadeyi tanımsız bırakmak daha doğru olabilir, çünkü $0^0 = 1$ tanımı bazı formülleri geçersiz kılar ve matematiksel ifadeyi zorlaştırır. Bu yüzden bazı matematik kitaplarında 0^0 tanımsız olarak kabul edilir. Genel olarak matematiksel analiz kitaplarında 0^0 tanımsız kabul edilir, cebir kitaplarında ise $0^0 = 1$ eşitliği kabul edilir. Kitabın başında hangi kabulün yapıldığı yazılırsa, hiçbir sorun yaşanmaz. Biz bu kitapta hep $0^0 = 1$ eşitliğini kabul edeceğiz. Bir başka kitapta fikir değiştirip 0^0 ifadesini tanımsız olarak kabul edebiliriz.

Eğer $x \geq 2$ ise x'in kuvvetleri çok hızlı büyürler, x'in katlarından çok çok daha hızlı. Örneğin 2'nin kuvvetlerini katlarıyla karşılaştıralım:

$$\begin{array}{rcr|rcr}
2^0 & = & 1 & 2\times 0 & = & 0\\
2^1 & = & 2 & 2\times 1 & = & 2\\
2^2 & = & 4 & 2\times 2 & = & 4\\
2^3 & = & 8 & 2\times 3 & = & 6\\
2^4 & = & 16 & 2\times 4 & = & 8\\
2^5 & = & 32 & 2\times 5 & = & 10\\
2^6 & = & 64 & 2\times 6 & = & 12\\
2^7 & = & 128 & 2\times 7 & = & 14\\
2^8 & = & 256 & 2\times 8 & = & 16\\
2^9 & = & 512 & 2\times 9 & = & 18\\
2^{10} & = & 1024 & 2\times 10 & = & 20\\
2^{11} & = & 2048 & 2\times 11 & = & 22\\
2^{12} & = & 4096 & 2\times 12 & = & 24\\
2^{13} & = & 8192 & 2\times 13 & = & 26\\
2^{14} & = & 16384 & 2\times 14 & = & 28
\end{array}$$

Soldakilerin (yani kuvvetlerin) sağdakilerden (yani katlardan) daha büyük olduğunu görüyoruz. Gerçekten de sadece 2 için değil, 2'den büyükeşit her x için ve her n doğal sayısı için

$$x^n \geq xn$$

olur. Bu yüzden çok büyük sayılar kuvvetlerle ifade edilir. Örneğin bir biçimde iletişim kurabildiğimiz evrende 10^{23} dolayında yıldız ve 10^{78} ila 10^{82} arasında atom olduğu tahmin ediliyor. Bizim ait olduğumuz Samanyolu galaksisinde ise yaklaşık 400 milyar, yani 4×10^{11} tane yıldız vardır.

Üs Almanın Birkaç Özelliği. Biraz önce

$$x^n x^m = x^{n+m},\ (xy)^n = x^n y^m \text{ ve } (x^n)^m = x^{nm}$$

eşitliklerinden söz ettik.

$(x^n)^m = x^{nm}$ eşitliğinin kanıtı bariz: $(x^n)^m$, x^n sayısını m defa kendisiyle çarpıyoruz demek:

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \cdots x^n}_{m \text{ tane } x^n};$$

ama x^n de x'i kendisiyle n defa çarparak elde edilir:

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ tane } x};$$

bu son ifadeyi bir öncekinin içine sokarsak,

$$(x^n)^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdots x)}_{n \text{ tane } x} \cdots \underbrace{(x \cdots x)}_{n \text{ tane } x}}_{m \text{ tane } x^n}$$

elde ederiz; bu da bize tam nm tane x'in çarpımını verir; demek ki

$$(x^n)^m = \underbrace{x \cdots \cdots \cdots x}_{nm \text{ tane } x} = x^{nm}.$$

Verdiğimiz diğer $x^n x^m = x^{n+m}$ eşitliğinin doğruluğu benzer şekilde gösterilebilir:

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{\underbrace{(x \cdots x)}_{n \text{ tane } x} \cdot \underbrace{(x \cdots x)}_{m \text{ tane } x}}_{n+m \text{ tane } x} = \underbrace{x \cdots \cdots x}_{n+m \text{ tane } x} = x^{n+m}.$$

$(xy)^n = x^n y^n$ eşitliği aslında $xy = yx$ eşitliğinden kaynaklanıyor, örneğin,

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x(yx)y = x(xy)y = (xx)(yy) = x^2y^2.$$

Doğal sayıların sıralamasıyla üs alma arasında çok bilinen ve bariz bir ilişki vardır. Örneğin $x \le y$ ise $x^z \le y^z$ olur. Bir başka ilişki: Eğer $y \le z$ ise $x^y \le x^z$ olur; neredeyse, bir istisnası vardır! Örneğin eğer $x = 0$, $y = 0$, $z = 5$ ise, $y \le z$ olur ama $x^y \le x^z$ olmaz, çünkü $x^z = 0^5 = 0$ olur ama $x^y = 0^0$ sayısını bu kitapta 1 olarak tanımlamıştık. Bu önermeyi şöyle düzeltmek lazım: Eğer $y \le z$ ise ve x ve y'nin her ikisi birden 0'e eşit değilse, o zaman $x^y \le x^z$ olur.

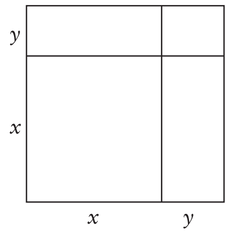
Üs almayla ilgili başka önemli eşitlikler de var, örneğin

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2\\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + +y^2\\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Okurun muhtemelen önceki yıllarından bildiği bu eşitliklerin gerekçelerini ileride vereceğiz ama şimdilik $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ eşitliği geometriyle gerekçelendirelim: Bir kenarı $x+y$ olan bir kare çizelim. Bu karenin alanı $(x+y)^2$ dir[2].

[2]Okurun, kenarları x ve y olan bir dikdörtgenin alanının xy olduğunu bildiğini varsayıyoruz. Aslında dikdörtgenin alanının xy olduğu da bir varsayımdır (yani bir kabuldür)

Bu karenin alanını başka türlü hesaplayacağız. Aşağıdaki gibi kareyi dörde bölelim. Ve hemen hesaplayalım:



$$\begin{aligned}
\text{Sol alt dörtgenin alanı } &= x^2\\
\text{Sol üst dörtgenin alanı } &= xy\\
\text{Sağ alt dörtgenin alanı } &= xy\\
\text{Sağ üst dörtgenin alanı } &= y^2
\end{aligned}$$

Tüm karenin alanını bulmak için bu dört alanı toplayalım.

$$x^2 + 2xy + y^2$$

buluruz. Demek ki $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ imiş. Cebirsel olarak aynı eşitlik şöyle hesaplanır:

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = (x + y)x + (x + y)y = xx + yx + xy + yy,$$

ve buradan $xx = x^2$, $xy = yx$ ve $yy = y^2$ eşitliklerini kullanarak istediğimiz elde ederiz.

Yukarıda hesapladığımız

$$(x + y)^2 = xx + yx + xy + yy$$

eşitliğinin benzerini $(x + y)^3$ için yaparsak,

$$(x + y)^3 = xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy$$

buluruz, yani x ve y ile yazılmış 3 uzunluğundaki tüm "kelimeleri" (toplam $2^3 = 8$ tane) toplarız. Tabii toparlarsak,

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^4$$

buluruz. Bir sonraki aşamada, $(x + y)^4$ ifadesini açarsak,

$$\begin{aligned}
&xxxx\\
&xxxy,\ xxyx,\ xyxx,\ yxxx\\
&xxyy,\ xyxy,\ xyyx,\ yxxy,\ yxyx,\ yyxx\\
&xyyy,\ yxyy,\ yyxy,\ yyyx\\
&yyyy
\end{aligned}$$

ifadelerini toplamamız gerektiğini görürüz. Bu ifadeler de aynen x ve y ile yazılmış olan $2^4 = 16$ tane kelimedir. $xy = yx$ eşitliğini kullanarak toparlarsak

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

buluruz.

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

eşitliğini bulmaya okura bırakıyoruz. 1, 5, 10, 10, 5, 1 katsayılarının toplamının $2^5 = 32$ olması şaşırtıcı olmayacaktır diye umuyoruz.

Örnekler

3.7. 10^5 sayısı 10^7 sayısının 100 katıdır. 10^{10} sayısı 10^{100} sayısının 10^{90} katıdır. 10^{10} sayısının 10 katı 10^{11}'dir ama 10^{10} sayısının 10'uncu kuvveti 10^{100} olur. 10^{10} sayısının 10^{10} katının kaç olduğunu herhalde bulabilirsiniz. Ya 10^{10} sayısının 10^{10}'uncu kuvveti kaçtır?

3.8. Bir otelin sabah kahvaltısında 3 çeşit peynir, 5 çeşit reçel, 2 çeşit sıcak içecek, 5 çeşit soğuk içecek, 5 çeşit ekmek, 3 çeşit de zeytin vardır. Her bir ürün çeşidinden tam bir tane seçmek zorundaysak, kaç farklı kahvaltı sepeti hazırlayabiliriz? Yanıt $3 \times 5 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 = 2 \times 3^2 \times 5^3 = 2250$'dir.

3.9. Bir futbol kulübünde toplam 22 oyuncu vardır ve her pozisyon için 2 oyuncu vardır. (Futbolda sağ açık, sol bek, kaleci, libero filan gibi 11 farklı pozisyon vardır ve bir futbol takımı 11 kişiden oluşur.) Bu futbol kulübü kaç farklı takım dizilimi sahaya sürebilir? Yanıt 2^{11}, yani 2048'dir. Eğer her oyuncu her pozisyonda oynayabilirse yanıt çok daha büyük olur; bu durumda $22 \times 21 \times \cdots \times 12 = 28.158.588.057.600$ farklı takım dizilebilir. Eğer oyuncuların pozisyonlarını dikkate almazsak, yani takımı bir küme olarak görürsek o zaman yanıt ileride göreceğimiz üzere yanıt 705.432 olur.

3.10. Her n doğal sayısı için $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ olur. Nitekim,

$$2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

olur. Bunun gibi $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$ olur. Kanıtı basit:

$$3^n + 3^n + 3^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}.$$

3.11. $f_0 = f_1 = 1$ ve her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

tanımlarını yapalım, yani eğer $n \geq 2$ ise her f_n önceki iki terimin toplamı olsun. Böylece bir dizi tanımlamış oluruz. Dizinin ilk terimleri şöyle:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

Görüldüğü gibi, ilk iki terimden sonraki her terim önceki iki terimin toplamı. Bu diziye ***Fibonacci dizisi*** denir. Her n için $f_n \leq 2^n$ eşitsizliğini kanıtlayalım. $n = 0$ ve $n = 1$ için bu eşitsizliklerin doğru olduğu belli, nitekim

$$f_0 = 1 \leq 1 = 2^0 \text{ ve } f_1 = 1 \leq 2 = 2^1$$

olur. Şimdi 2'den büyük n'lere el atalım. Diyelim $n \geq 2$ için

$$f_{n-2} \leq 2^{n-2} \text{ ve } f_{n-1} \leq 2^{n-1}$$

eşitsizliklerini bir biçimde kanıtladık. Bakalım bu varsayımlar altında $f_n \le 2^n$ eşitsizliği doğru mu? Tanımlara dönerek hesaplayalım:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \le 2^{n-2} + 2^{n-1} \le 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

Demek ki $f_{n-2} \le 2^{n-2}$ ve $f_{n-1} \le 2^{n-1}$ eşitsizlikleri doğruysa, $f_n \le 2^n$ eşitsizliği de doğruymuş. $f_0 \le 2^0$ ve $f_1 \le 2^1$ eşitsizliklerini daha en başından gösterdiğimizden, bundan, $f_2 \le 2^2$ eşitsizliği çıkar. Şimdi $f_1 \le 2^1$ ve $f_2 \le 2^2$ eşitsizliklerini biliyoruz; bu iki eşitsizlikten $f_3 \le 2^3$ eşitsizliği çıkar. Şimdi $f_2 \le 2^2$ ve $f_3 \le 2^3$ eşitsizliklerini biliyoruz; bu iki eşitsizlikten $f_4 \le 2^4$ eşitsizliği çıkar. Böylece devam ederek, $f_n \le 2^n$ eşitsizliğinin her n için geçerli olduğunu anlamış oluruz.

Bu tür kanıtlara matematikte "tümevarımla kanıt" denir. İleride bu konuya çok daha dikkatlice eğileceğiz. Bunu bir ısınma hareketi olarak addedin.

3.12. 5 haneli kaç doğal sayı vardır? Sayıyı $abcde$ olarak rakamlarıyla gösterelim. a rakamı için 1'den 9'a kadar 9 seçeneğimiz var. Ama b, c, d ve e rakamlarının her biri için 0'dan 9'a kadar olmak üzere 10'ar seçeneğimiz var. Tüm bu seçenekler birbirinden bağımsız, yani örneğin a'yı 5 olarak seçmek diğer rakamların seçimini etkilemiyor. Dolayısıyla 5 haneli

$$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^4 = 90.000$$

tane doğal sayı vardır. Beş haneli doğal sayılar 10.000'den başlayıp 99.999'a kadar gittiğinden, bunların sayısını şöyle bir hesapla da bulabiliriz:

$$(99.999 - 10.000) + 1 = 90.000.$$

En sondaki $+1$'e dikkat, eğer $a \le b$ ise, a ve b dahil, a ile b arasında $b - a$ tane değil, $b - a + 1$ tane sayı vardır.

3.13. 100 haneli 9×10^{99} tane doğal sayı vardır.

3.14. 5 haneli 90.000 doğal sayı olduğunu gördük. Bunların yarısı çift, yarısı tektir. Demek ki 5 haneli 45.000 tane çift, 45.000 tane de tek sayı vardır.

3.15. 5 haneli 90.000 doğal sayı olduğunu gördük. Her üç ardışık sayıdan sadece biri 3'e bölünür. Demek ki bu 90.000 sayının üçte biri 3'e bölünür. Böylece 3'e bölünen 5 haneli doğal sayı sayısı 30.000'dir. Aynı akıl yürütmeyle 4'e bölünen 5 haneli doğal sayı sayısının $90.000/4 = 22.500$ olduğu görünür. Aynı akıl yürütme 5'e ve 6'ya bölünen 5 haneli doğal sayı sayısı için de geçerlidir, sonuç sırasıyla 18.000 ve 15.000 çıkar. Ama 7'ye bölünen 5 haneli doğal sayı sayısı için biraz farklı bir akıl yürütme kullanmak lazım çünkü 90.000 sayısı 7'ye bölünmez.

3.16. 5 haneli kaç doğal sayının 7'ye bölündüğünü hesaplayalım. 10.000'den büyükeşit 7'ye bölünen en küçük doğal sayı 10.003'tür. 99.999'dan küçükeşit 7'ye bölünen en büyük doğal sayı 99.995'tir. Demek ki

$$10.003 \le 7x \le 99.995$$

eşitsizliklerini sağlayan x doğal sayılarının sayısını hesaplamalıyız. Tarafları 7'ye bölerek

$$1.429 \le x \le 14.285$$

buluruz. Bu x'lerin sayısı da

$$14.285 - 1.429 + 1 = 12.857$$

dir.

3.17. 5 haneli ama aynı rakamın yanyana olmadığı kaç doğal sayı vardır? En soldaki haneye 0 dışındaki 9 rakamdan biri gelebilir. Bunun sağına bu rakam dışındaki 9 rakamdan biri gelebilir vs. Bu sefer her rakamın seçimi diğer rakamlardan bağımsız değil, ama her haneye gelebilecek rakam sayısı sabit, hep 9. Yanıt 9^5'tir.

3.18. n ögeli bir kümenin 2^n tane altkümesi olduğunu [1. Kitap]'ta görmüştük, bir defa daha görelim. Eğer küme $\{1, 2, \ldots, n\}$ ise, bir altküme 1'i içerebilir ya da içermeyebilir (2 seçenek), 2'yi içerebilir ya da içermeyebilir (2 seçenek), 3'ü içerebilir ya da içermeyebilir (2 seçenek)... Her seferinde iki seçenek var. Bu seçenekler birbirinden bağımsız olduğundan toplam 2^n tane altküme vardır.

3.19. Biri mavi diğeri kırmızı iki zar atalım. Toplam 6^2, yani 36 tane farklı zar gelebilir çünkü mavi zarın 2, kırmızı zarın 3 gelmesiyle, kırmızı zarın 2, mavi zarın 3 gelmesini farklı olaylar olarak algılıyoruz. Ama eğer zarlar birbirinin tıpatıp aynısıysa 2-3 ile 3-2 arasında bir ayrım gözetemeyiz. Eğer zarlar aynıysa olay sayısı 36'dan 21'e düşer. Nitekim zarları, $1 \leq x \leq y \leq 6$ olmak üzere, x-y olarak yazarsak, x'in 1'e eşit olduğu 6 olay vardır: 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, ama x'in 2'ye eşit olduğu sadece 5 olay vardır: 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6. Okur kolaylıkla x'in 3'e eşit olduğu sadece 4 olay olduğunu görecektir. Böylece olay sayısı $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ olur.

3.20. A, B, C, D harfleriyle anlamlı ya da anlamsız kaç tane 6 harfli kelime yazabiliriz? 6 harfin geleceği yerleri soldan sağa doğru birer çizgiyle (birer yuvayla) gösterelim:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Bu yuvalara dört harfimizden birini koyacağız. Hepsi A olabileceği gibi, hepsi D olabilir. Harfler herhangi bir dizilişte olabilir, bir yuvaya konan harf diğer yuvalara konan harfleri etkilemezler. Dolayısıyla toplam 4^6 tane kelime vardır.

3.21. Birler, onlar ve binler basamağında 0, 1, 3, 7 ve 8 rakamlarından biri olan 6 basamaklı kaç sayı vardır? En sol basamakta 9 rakamdan biri olabilir. Yüzler ve onbinler basamağı için istediğimiz 10 rakamdan birini seçebiliriz. Geri kalan üç basamak için söylenen beş rakamdan birini seçmeliyiz. Yanıt $9 \times 10^2 \times 5^3$'tür.

3.22. Bu örnekte her n doğal sayısı için $n \leq 2^n$ eşitsizliğini göstermek istiyoruz. Eşitsizliğin $n = 0$ için doğru olduğu $0 \leq 2^0$ eşitsizliğinden belli. Diyelim $n \leq 2^n$ eşitsizliğini biliyoruz. ("Biliyoruz" demedim, "diyelim biliyoruz" dedim.) Bakalım aynı eşitsizlik n'den bir sonraki sayı olan $n + 1$ için doğru mu?

$$n + 1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

hesabından $n + 1 \leq 2^{n+1}$ eşitsizliği çıkar. Demek ki $n \leq 2^n$ eşitsizliği doğruysa, $n + 1 \leq 2^{n+1}$ eşitsizliği de doğru. Yani eşitsizlik n için doğruysa $n + 1$ için de doğru. Eşitsizliğin $n = 0$ için doğru olduğunu bildiğimizden, bundan eşitsizliğin tüm n doğal sayıları için doğru olduğu çıkar.

3.23. Bakalım $2n+1 \leq 2^n$ önermesi hangi n doğal sayıları için doğru. Önerme $n = 0$ için doğru çünkü her iki tarafta da 1 elde ederiz. Ama aynı önerme $n = 1$ için yanlış, çünkü sol tarafta 3, sağ tarafta 2 elde ederiz. $n = 2$ için de yanlış. Ama $n = 3$ için doğru, sol taraf 7'ye, sağ taraf 8' eşit olur. Örnermenin 3 ve 3'ten büyük her doğal sayı için doğru olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bu amaçla, önerme herhangi bir $n \geq$ için doğruysa, aynı önermenin $n + 1$ için kanıtlayalım. Yani

$$2n + 1 \leq 2^n$$

eşitsizliğini **varsayarak**,

$$2(n + 1) + 1 \leq 2^{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlayalım. (Ama n'nin en az 3 olduğunu varsayıyoruz.) Hesaplar şöyle:

$$2(n + 1) + 1 = 2n + 3 = (2n + 1) + 2 \leq 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Demek ki önerme n için doğruysa $n + 1$ için de doğru. Önerme $n = 3$ için doğru olduğundan, bundan, önermenin her $n \geq 3$ doğal sayısı için geçerli olduğu anlaşılır.

3.24. $n^2 \leq 2^n$ önermesi $n = 0, 1, 2$ için doğrudur ama $n = 3$ için yanlıştır. $n = 4$ için eşitlik elde ederiz, dolayısıyla $n^2 \leq 2^n$ eşitsizliği $n = 4$ için doğrudur. Önermenin her $n \geq 4$ doğal sayısı için doğru olduğunu kanıtlayalım. Yukarıdaki yöntemi kullanacağız, yani önerme herhangi bir $n \geq 4$ doğal sayısı için doğruysa, $n + 1$ için de doğru olduğunu kanıtlayacağız. $n \geq 4$ olsun ve

$$n^2 \leq 2^n$$

önermesinin doğru olduğunu varsayalım. Amacımız

$$(n + 1)^2 \leq 2^{n+1}$$

eşitsizliğini kanıtlamak. Hesaplara başlayalım:

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + (2n + 1) \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

(Üçüncü eşitsizlikte eğer $n \geq 3$ ise bir önceki örnekte kanıtladığımız $2n + 1 \leq 2^n$ eşitsizliğini kullandık.) Böylece her $n \geq 4$ için $n^2 \leq 2^n$ olur.

3.25. Belli bir aşamadan sonra hep $n^3 \leq 2^n$ olduğu yukarıdaki yöntemlere benzer bir yöntemle oldukça kolay bir biçimde kanıtlanabilir. Okurun kanıta bir el atmasını öneririz.

3.26. $10 - 1$ sayısı 9'a bölünür. $10^2 - 1$ sayısı da 9'a bölünür. $10^3 - 1$ sayısı da 9'a bölünür. Her n doğal sayısı için $10^n - 1$ sayısının 9'a bölündüğü doğru mudur?

3.27. $10^3 + 1$ sayısının 11'e bölündüğünü gösterin. $10^6 - 1$ sayısının 11'e bölündüğünü gösterin. $10^9 + 1$ sayısının 11'e bölündüğünü gösterin. Bu yapılanları genelleştirmeye çalışın.

3.28. Aşağıdaki eşitlikleri gözlemleyin:

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & 2^1 - 1 \\ 1 + 2 & = & 2^2 - 1 \\ 1 + 2 + 2^2 & = & 2^3 - 1 \\ 1 + 2 + 2^2 + 2^3 & = & 2^4 - 1 \\ 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 & = & 2^5 - 1 \end{array}$$

Bu eşitliklerin bir rastlantı olmadığını tahmin ediyorsunuzdur. Nitekim her n doğal sayısı için

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliği $n = 5$ için kanıtlayalım:

$$T = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

olsun. T'yi 2'yle çarpalım:

$$2T = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

elde ederiz. Demek ki

$$\begin{array}{lcl} 2T & = & 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 \\ T & = & 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \end{array}$$

eşitlikleri geçerli. Bazı terimler her iki satırda da yer alıyor; onların altını çizelim:

$$\begin{array}{lcl} 2T & = & \underline{2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5} + 2^6 \\ T & = & 1 + \underline{2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5} \end{array}$$

Alttaki eşitliği üsttekinden çıkarırsak altı çizili terimler sadeleşir ve geriye

$$T = 2T - T = 2^6 - 1$$

kalır. Aynı kanıtı 5 yerine genel bir n doğal sayısı için yapmak işten bile değildir. Sonuç: Her n doğal sayısı için

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

eşitliği geçerlidir.

3.29. (Harvard MIT Matematik Turnuvası 2004, bkz. [AAZ, sayfa 4]) *Ayşe, Bülent'e*

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

kümesinden seçtiği beş sayının çarpımını Bülent'e söylediğinde, Bülent bu sayılarının toplamının tek mi çift mi olduğunu bilebiliyor. Ayşe'nin seçtiği sayıların çarpımı kaçtır? Seçilen beş sayının çarpımını vermek, seçilmeyen iki sayının çarpımını vermeye eşdeğerdir. Bu kümeden seçilen (Ayşe'nin seçmediği) iki sayının çarpımı, farklı seçimler için aynı olabilir mi? Evet. Eğer

$$\{3, 4\} \text{ ya da } \{2, 6\}$$

seçilmişse çarpım 12 olur; bir de

$$\{1, 6\} \text{ ya da } \{2, 3\}$$

seçilmişse çarpım 6 olur. Ama ikinci durumda her iki kümedeki sayıların toplamı tek; demek ki bu durumda Bülent'in sonucu bulmasına imkân yok. Bülent sonucu bulabildiğine göre Ayşe ya 3 ve 4'ü ya da 2 ve 6'yı seçmemiş olmalı. Dolayısıyla Ayşe'nin seçtiği sayıların çarpımı

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{12} = 420$$

olmalı.

Alıştırmalar

3.30. Hangi sayıların tek sayıda böleni vardır?

3.31. Her pozitif çift sayının iki tek sayının toplamı olduğunu kanıtlayın.

3.32. Tavukçuya sırayla n müşteri girer ve her biri "Bu tavukların yarısını ver, bir de fazladan bir tavuk ver" der. Tavukçu her müşterinin isteğini yerine getirir. Ve tavukçuda hiç tavuk kalmaz! Tavukçuda başlangıçta kaç tavuk varmış?

3.33. Beş ögeli bir kümenin kaç tane iki ögeli altkümesi vardır? (10 tane! Hepsini teker teker bulun.)

3.34. Beş ögeli $\{a, b, c, d, e\}$ kümesinden üç ögeli bir altküme, dört ögeli $\{x, y, z, t\}$ kümesinden iki ögeli bir altküme ve son olarak üç ögeli $\{u, v, w\}$ kümesinden bir ögeli bir altküme seçeceğiz. (Üç kümenin her birinden birer altküme seçeceğiz, sadece birinden değil.) Kaç farklı seçim vardır?

3.35. Ya beş ögeli $\{a, b, c, d, e\}$ kümesinden üç ögeli bir altküme ya da dört ögeli $\{x, y, z, t\}$ kümesinden iki ögeli bir altküme seçeceğiz. Kaç farklı seçim vardır?

3.36. Her biri beş ögeli on kümenin her birinden üçer ögeli birer altküme seçeceğiz. Toplam kaç farklı seçim vardır?

3.37. 11'e tam bölünen kaç tane 5 haneli doğal sayı vardır?

3.38. Tüm rakamları birbirinden farklı kaç tane 5 haneli doğal sayı vardır?

3.39. İlk 1000 doğal sayının kaçı 17'ye bölünür?

3.40. Hangi n doğal sayıları için $3^n \in 5\mathbb{N} + 4$ olur? Hangi n doğal sayıları için $3^n \in 4\mathbb{N} + 1$ olur? Hangi n doğal sayıları için $3^n \in 12\mathbb{N} + 1$ olur?

3.41. Her n doğal sayısı için $3^n + 1$ sayısının çift olduğunu gösterin.

3.42. Her n ve m doğal sayısı için $3^n + 5^m$ sayısının çift olduğunu gösterin.

3.43. Her k, n ve m doğal sayısı için $3^k + 5^n + 7^m$ sayısının tek olduğunu gösterin.

3.44. $6n + 6 \leq 2^n$ eşitsizliğinin $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için yanlış olduğunu gösterin. $n = 6$ ve daha büyük n doğal sayıları için sizce eşitsizlik doğru mudur?

3.45. $3n^2+3n+1 \leq 2^n$ eşitsizliğinin $n = 1, 2, \ldots, 7$ için yanlış olduğunu gösterin. Önermenin $n = 8$ ve $n = 9$ için doğru olduğunu gösterin. Daha büyük n sayıları için ne oluyor?

3.46. $S(n)$, n doğal sayısının onluk tabanında yazılımının rakamlarının karelerinin toplamı olsun. Örneğin,

$$S(347) = 3^2 + 4^2 + 7^2 = 9 + 16 + 49 = 74$$

olur. $S(S(999999999999982)) = 7$ eşitliğini gösterin.

3.47. $R(n)$, n doğal sayısının onluk tabanında yazılımının rakam sayısı olsun. $R(10^n)$ kaça eşittir? $R(n) = n$ eşitliğini sağlayan doğal sayıları bulun. $R(n) > n$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayıları bulun.

$$1 = R(R(R(n))) < R(R(n)) < R(n) < n$$

eşitsizliklerini sağlayan bir n doğal sayısı bulun.

3.48. 10^7 sayısı 10^5 sayısının 100 katıdır. 10^{100} sayısı 10^{10} sayısının 10^{90} katıdır. 10^{10} sayısının 10 katı 10^{11}'dir ama 10^{10} sayısının 10'uncu kuvveti 10^{100} olur. 10^{10} sayısının 10^{10} katının kaç olduğunu herhalde bulabilirsiniz. Ya 10^{10} sayısının 10^{10}'uncu kuvveti en basit nasıl yazılır? 10^{10} sayısının 10^{10}'uncu kuvvetinin 10^{10}'uncu kuvvetini en basit biçimde yazın.

3.49. $n^{(n^n)}$ ile $(n^n)^n$ sayılarından hangisi daha büyüktür?

3.50. $n^3 \leq 2^n$ eşitsizliğinin $n = 1, 2, \ldots, 9$ için yanlış olduğunu gösterin. Önermenin $n = 10$ ve $n = 11$ için doğru olduğunu gösterin. Daha büyük n sayıları için ne oluyor?

3.51. $n^4 \leq 2^n$ eşitsizliği sizce hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.52. Her n doğal sayısı için $3^n - 1$ doğal sayısının çift olduğunu kanıtlayın. Her n doğal sayısı için

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = (3^{n+1} - 1)/2$$

eşitliğini kanıtlayın.

3.53. **Zar Sayısı.**

a. Hepsi farklı renklerde üç zar atıldığında olası kaç olay vardır?

b. Birbirinden farkı olmayan üç zar atıldığında olay sayısının 56 olduğunu gösterin.

c. Birbirinden farkı olmayan dört zar atıldığında kaç olay vardır?

3.54. Türkçede 8'i sesli olmak üzere 29 tane harf vardır. Bu 29 harfle, her sesli harften sonra sessiz harf, her sessiz harften sonra sesli harf gelecek biçimde n harfli kaç kelime yazılabilir? (Not: Kelimeler anlamlı olmak zorunda değiller.)

3.55. $g_0 = 1$, $g_1 = 3$ ve $g_2 = 9$ olsun. Eğer $n \geq 3$ ise

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3}$$

tanımını yapalım. Dizinin ilk 6 terimini yazın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n \leq 3^n$ eşitsizliğini kanıtlayın.

3.56. $g_0 = 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $g_{n+1} = 2g_n + 1$ olsun.

a. $f_n = g_n + 1$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_{n+1} = 2f_n$ eşitliğini gösterin.

b. Yukarıda bulduğunuzdan her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n = 2^n$ eşitliğini çıkarın.

c. Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n = 2^n - 1$ eşitliğini gösterin.

3.57. $g_0 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $g_{n+1} = 2g_n + n - 1$ olsun.

a. g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 sayılarını bulun.

b. $2^n - n$ ifadesini $n = 0, 1, 2, 3, 4$ için hesaplayın. Yukarıdaki diziyle bir benzerlik gözlemliyor musunuz?

c. $f_n = g_n + n$ olsun. $f_0 = 1$ ve $f_{n+1} = 2f_n$ eşitliğini kanıtlayın. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n = 2^n$ eşitliğini kanıtlayın. Buradan da $g_n = 2^n - n$ olduğu çıkar.

d. Problemi bir de şöyle ele alalım: $h_n = g_{n+1} - g_n + 1$ olsun. $h_n = 2h_{n-1}$ eşitliğini kanıtlayın. $h_0 + \cdots + h_n$ toplamını hesaplayarak aynı çözüme buradan ulaşmaya çalışın.

Notlar

3.58. **Karelerin Toplamı.** Her doğal sayı dört karenin toplamı olarak yazılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 8 &= 2^2+2^2+0^2+0^2 \\ 18 &= 4^2+1^2+1^2+0^2 \\ 28 &= 5^2+1^2+1^2+1^2 \\ 38 &= 4^2+3^2+3^2+2^2 \\ 48 &= 6^2+2^2+2^2+2^2 \end{aligned}$$

Bunu Fransız matematikçi Lagrange 1770 yılında kanıtlamıştır ama teoremin doğruluğu M.Ö. üçüncü yüzyılda yaşamış olan Eski Yunan matematikçi Diofant tarafından da biliniyordu.

3.59. **Üç Karenin Toplamı.** Ama her doğal sayı üç karenin toplamı olarak yazılamaz. Örneğin 7 sayısı üç karenin toplamı değildir. Yine Fransız matematikçi Legendre 1797-1798'de $4^n(8m+7)$ türünden sayıların üç karenin toplamı olarak yazılamayacağını ama diğerlerin yazılacağını kanıtlamıştır.

3.60. **Küplerin Toplamı.** Acaba her doğal sayı belli (yani sabit) sayıda küpün toplamı olarak yazılabilir mi? Deneyelim:

$$\begin{aligned} 0 &= 0^3 \\ 1 &= 1^3 \\ 2 &= 1^3+1^3 \\ 3 &= 1^3+1^3+1^3 \\ 4 &= 1^3+1^3+1^3+1^3 \\ &\dots \\ 7 &= 1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3 \\ 8 &= 2^3 \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere en az 7 tane küp gerekiyor. Acaba her doğal sayı 7 küpün toplamı olarak yazılabilir mi? 8'in sonuna 1'ler ekleyerek 14'e kadar her sayıyı en fazla 7 küpün toplamı olarak yazabiliriz, mesela:

$$14 = 2^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3.$$

Ama 15 için 8 tane küp gerekiyor, daha azı yetmiyor:

$$15 = 2^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3.$$

Acaba her doğal sayı 8 tane küpün toplamı olarak yazılabilir mi? Nitekim 16 için sadece iki küp yetiyor:

$$16 = 2^3+2^3.$$

Bu eşitliğe 1'ler ekleyerek 22'ye kadar her sayıyı 8 tane küpün toplamı olarak yazabiliriz, örneğin:

$$22 = 2^3+2^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3.$$

Peki ya 23? Ne yazık ki 23 için 8 tane küp yetmiyor, illa dokuzuncusu gerekiyor:

$$23 = 2^3+2^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3.$$

Acaba her doğal sayı 9 tane küpün toplamı olarak yazılabilir mi? 24 için sadece üç küp yetiyor:

$$24 = 2^3+2^3+2^3.$$

Bundan sonra 29'a kadar 1'ler ekleyerek gidebiliriz:

$$29 = 2^3+2^3+2^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3+1^3.$$

30'un yardımına $3^3 = 27$ yetişiyor:

$$30 = 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3.$$

Okur denemelere devam edebilir ama biz burada duracağız. Her doğal sayının en fazla 9 tane küpün toplamı olarak yazılabileceği 20'nci yüzyılın başlarında kanıtlanmıştır. Ama daha fazlası bilinmektedir: 9 tane küp gerektiren sadece iki sayı vardır: 23 ve 239. Diğer tüm sayılar en fazla 8 tane küpün toplamı olarak yazılabilir. 8 tane küp gerektiren sayılar bilinmektedir: 15, 22, 50, 114, 167, 175, 186, 212, 231, 238, 303, 364, 420, 428 ve 454. Diğer tüm sayılar en fazla 7 tane küpün toplamı olarak yazılabilir. Ancak tam 7 tane küp gerektiren sayıların sayısının sonlu olup olmadığı bilinmemektedir. Bugüne kadar 7 küp gerektiren bilinen en büyük sayı 8042'dir. Bir sanıya göre 7.373.170.279.850 sayısı dört küpün toplamı olarak yazılamayan en büyük sayıdır, yani bu sayıdan büyük tüm sayıların dört küpün toplamı olarak yazıldığı sanılıyor; bu sadece bir sanı, kanıtı bilinmiyor.

3.61. **Dördüncü Kuvvetlerin Toplamı.** Her sayı en fazla 19 tane dördüncü kuvvetin toplamı olarak yazılabileceği kanıtlanmıştır. Waring problemi olarak bilinen genel problem, verilmiş her $n > 1$ doğal sayısı için, her doğal sayının en fazla m tane n'inci kuvvetin toplamı olarak yazılacağı bir m sayısının olup olmayacağı problemidir. Yukarıdaki notlarda da söylediğimiz üzere, $n = 2$ ise $m = 4$ oluyor, $n = 3$ ise $m = 9$ oluyor ve biraz önce söylediğimiz üzere $n = 4$ ise $m = 19$ oluyor. Ünlü matematikçi David Hibert bu problemi 1909 yılında olumlu olarak kanıtlamıştır.

3.62. **Fermat'nın Son Teoremi.** Yıl 1637 sanılıyor. Vebanın ve savaşın Avrupa'yı kasıp kavurduğu yıllar. Yer Toulouse, Fransa'nın güneyinde, İspanya sınırına yakın bir kent. Fransız hukuk adamı, aynı zamanda amatör matematikçi, ama amatör olmasına karşın çağının en büyük matematikçisi Pierre de Fermat[3] (1601-1665), okumakta olduğu Diofantos'un[4] **Aritmetik** adlı yapıtının sayfa kenarına Latince, "Hanc marginis exiguitas non caperet," diye not düşer, yani "sayfa kenarında kanıt için yeterince yer yok." Fermat'nın sözünü ettiği şu teoremin kanıtı:

Fermat'nın Son Teoremi. *Eğer n, 2'den büyük bir doğal sayıysa, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif doğal sayılarda çözümü yoktur.*

Örneğin teorem, $x^{79} + y^{79} = z^{79}$ denklemini hiçbir (x, y, z) pozitif doğal sayı üçlüsü sağlamaz, yani bu denklemin pozitif doğal sayılarda çözümü yoktur.

Bu teoremi Fermat gerçekten kanıtlamış mıdır? Bilinmiyor. Büyük bir olasılıkla hiçbir zaman da bilinemeyecek. Dünyanın en büyük beyinleri üç yüz yılı aşkın bir süredir teoremi kanıtlamaya çalıştılar[5].

Bu çalışmalar sonucu modern cebir doğdu. Teoremi kanıtlamak için geliştirilen yöntemler ve bulunan kavramlar salt matematikte değil, başka dallarda da uygulama alanı buldular.

Haziran 1993'te teoremin kanıtlandığı duyuruldu. Andrew Wiles adlı bir matematikçi kanıtladı. Ama Fermat'nın Son Teoremi'nin kanıtlandığı ilk kez duyurulmuyordu. Daha önce birçok ünlü matematikçi teoremi kanıtladığını sandıysa da sonradan kanıtların yanlış olduğu anlaşıldı. Bu matematikçilerden en ünlüleri geçen yüzyılda yaşamış olan Cauchy (1789-1857), Lamé (1795-1870) ve Kummer'dir (1810-1893). Nitekim birkaç ay sonra bu kanıtta da yanlış olduğu anlaşıldı, ama bu kez kanıta çok daha fazla

---

[3] "Pier dö Ferma" okunur.

[4] Diofantos, M.Ö. 3'üncü yüzyılda yaşamış Yunanlı bir matematikçidir.

[5] Aslında kanıtlanmamış bir önermeye teorem denmez, "sanı" denir. Ama Fermat'nın önermesine "Fermat'nın Son Teoremi" adını vermek matematikçilerin bir alışkanlığıdır.

yaklaşılmıştı. Yaklaşık bir yıl süren bir çalışma sonucunda, Kasım 1994'te Wiles kanıtını öğrencisi Richard Taylor'ın yardımıyla düzeltti. Artık teoremin doğru olduğu biliniyor.

Çek Cumhuriyeti'nin Andrew Wiles'ın Fermat'nın Teoremi'ni kanıtlaması dolayısıyla çıkardığı pul

Fermat'nın Teoremi olağanüstü bir üne sahipti. Her şeyden önce önerme çok kolay anlaşılıyordu, bir ilkokul öğrencisinin anlayabileceği seviyede bir soruydu. Dolayısıyla bu teoremle salt profesyonel matematikçiler uğraşmadı. Amatör ya da profesyonel olsun, bir tek matematikçi yoktur ki yaşamının bir döneminde teoremi kanıtlamaya çalışmış olmasın. Şu an, teoremin çok daha basit bir kanıtını bulmaya çalışan amatör matematikçiler olduğundan eminim.

Fermat'nın teoreminin herhangi bir uygulamasının olduğunu sanmıyorum. Ama teoremi kanıtlamak için geliştirilen yöntemler, bulunan kavramlar ve kanıtlanan diğer sonuçların müthiş yararı olmuştur. Fermat'nın teoremi, matematikçiler için bir nevi sınavdı. Belki hiçbir uygulaması olmayacak bu soru sayesinde matematikte ve özellikle cebirde olağanüstü atılımlar yapılmıştır.

3.3 Faktoriyel

Eğer n bir doğal sayıysa, "n faktoriyel" olarak okunan $n!$ ifadesi şöyle tanımlanır:

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Yani $n!$ sayısı ilk n pozitif doğal sayının çarpımına eşittir. Örnek:

$$\begin{array}{rcl} 1! &=& 1 &=& 1\\ 2! &=& 1\times 2 &=& 2\\ 3! &=& 1\times 2\times 3 &=& 6\\ 4! &=& 1\times 2\times 3\times 4 &=& 24\\ 5! &=& 1\times 2\times 3\times 4\times 5 &=& 120\\ 6! &=& 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 &=& 720\\ 7! &=& 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 &=& 5.040\\ 8! &=& 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8 &=& 40.320\\ 9! &=& 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9 &=& 362.880\\ 10! &=& 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10 &=& 3.628.800 \end{array}$$

Basamak sayısı bu aşamadan sonra her seferinde en az 1 artar, 100! ve sonrasında da en az 2 hane, 1000! ve sonrasında en az 3 hane artar. Yani faktoriyellerle kısa zamanda devasa sayılara ulaşılır.

$n!$ sayısı ilk n pozitif sayının çarpımına eşit olduğundan, $0!$ sayısı ilk 0 pozitif doğal sayının çarpımıdır, yani hiç tane doğal sayının çarpımıdır; daha önce hiç tane sayının çarpımını 1 olarak tanımlamıştık (bkz. sayfa 21). Demek ki tanım gereği

$$0! = 1$$

olur. Elbette her n doğal sayısı için,

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

eşitliği geçerlidir. $0! = 1$ tanımı sayesinde bu eşitlik $n = 0$ için de doğrudur. (Görüldüğü üzere hiç tane sayının çarpımını 1 olarak tanımlamak çok işimize yarıyor. Eğer $0!$ diye bir sayı tanımlamak gerekirse, bu sayıyı 1 olarak tanımlamak gerekir, en doğal seçim bu. İleride bu tanımın başka yararlarını da göreceğiz. Ama eğer $0!$ ifadesinin tanımı bizi zorda bıraksaydı, hayatımızı zorlaştırsaydı, o zaman bu ifadeyi tanımsız bırakırdık.)

Faktoriyellerin çok çabuk büyüdüğünü görmek için (zaten çabuk büyüdüğünü bildiğimiz) 2'nin kuvvetleriyle faktoriyelleri karşılaştıralım:

2^0	=	1	$0!$	=	1
2^1	=	2	$1!$	=	1
2^2	=	4	$2!$	=	2
2^3	=	8	$3!$	=	6
2^4	=	16	$4!$	=	24
2^5	=	32	$5!$	=	120
2^6	=	64	$6!$	=	720
2^7	=	128	$7!$	=	5.040
2^8	=	256	$8!$	=	40.320
2^9	=	512	$9!$	=	362.880
2^{10}	=	1024	$10!$	=	3.628.800

Görüldüğü üzere $n = 4, 5, 6, \ldots, 10$ ise $n!$ sayıları 2^n sayılarından daha büyük (daha önce değil) ve giderek de büyüklükleri astronomik olarak artıyor. 4 ve sonrasında hep öyle devam eder: Eğer $n \geq 4$ ise

$$2^n \leq n!$$

olur. Bu eşitsizliği de ileride kanıtlayacağız. Benzer bir eşitsizlik belli bir n'den sonra 2 yerine 3 için de geçerlidir, yani belli bir n sayısından sonra hep $3^n \leq n!$ olur. Hatta her k doğal sayısı için, eğer n yeterince büyükse hep $k^n \leq n!$ olur. Hülasa, $n!$ sayıları devasa sayılardır.

$n!$ sayısının doğal bir yorumu vardır: Diyelim n kişiyi numaralandırılmış n koltuğa her koltuğa bir kişi gelecek biçimde oturtacağız. Bunu kaç farklı biçimde yapabiliriz? Birinci koltuğa n kişiden birini oturtabiliriz. Yani birinci koltuk için n seçeneğimiz var. Birinci koltuğa n kişiden birini oturttuktan sonra, ikinci koltuğa oturtabileceğimiz $n-1$ kişi kalır. İkinci koltuğa da kişiyi oturttuğumuzda üçüncü koltuğa oturtabileceğimiz kişi sayısı $n-2$'ye düşer. Her sonraki koltukta seçenekler 1 eksilir. İlk koltuk için n seçeneğimiz vardı, ikinci koltuk için $n-1$, üçüncü koltuk için $n-2$. Bu böylece devam eder, en son koltuğa da oturtabileceğimiz tek bir kişi kalır. Böylece n koltuğa n kişiyi

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

farklı biçimde oturtabiliriz. Örneğin $n = 3$ ise ve kişilere A, B ve C adlarını verirsek, oturtmaları (!) şu şekilde yapabiliriz:

$$\begin{array}{c} ABC \\ ACB \\ BAC \\ BCA \\ CAB \\ CBA \end{array}$$

Toplam 6 tane var, yani 3! tane.

Bir başka örnek: $n = 4$ ise ve kişilere A, B, C ve D adlarını verirsek, insan oturtmalarını şu şekilde yapabiliriz:

$$\begin{array}{cccc} ABCD & BACD & CABD & DABC \\ ABDC & BADC & CADB & DACB \\ ACBD & BCAD & CBAD & DBAC \\ ACDB & BCDA & CBDA & DBCA \\ ADBC & BDAC & CDAB & DCAB \\ ADCB & BDCA & CDBA & DCBA \end{array}$$

Sayarsanız toplam 24 tane oturtma biçimi olduğunu göreceksiniz, yani 4! tane. Bu arada yukarıdaki listelerin rastgele olmadığını, belli bir düzenle, sözlük sırasıyla, yani alfabetik sırayla yazıldığını göreceksiniz. (Soldaki sütundan başlayarak yukarıdan aşağıya doğru okuyun.)

$ABCDE$ kelimesinin harflerini de $5! = 120$ farklı biçimde karabiliriz. 120 tane kelimeyi $ABCDE$'den $EDCBA$'ya kadar alfabetik sırayla teker teker yazmak zor olabilir ama mesela $CBDEA$ kelimesinden önce ve sonra gelen kelimeleri bulabilmeniz lazım. Bu arada CB ile başlayan 3! tane, C ile başlayan 4! tane kelime olduğuna da dikkatinizi çekerim.

Aşağıdaki örnekler ve alıştırmalar önemlidir. Bir sonraki bölümü daha iyi anlamanızı sağlayacaktır.

Örnekler

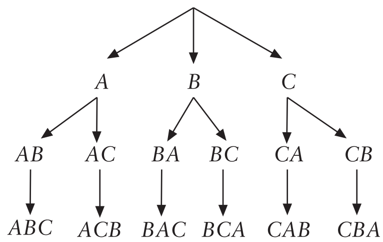
3.63. Elimizde A, B ve C harfleri var ve bu harflerin her birini tam bir defa kullanarak (Türkçede ya da başka bir dilde anlamı olması gerekmez) üç harfli kaç sözcük üretebiliriz?
Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri -alfabe sırasına göre- sıralayalım:

$$ABC,\ ACB,\ BCA,\ BAC,\ CAB,\ CBA.$$

Demek 6 sözcük üretebilirmişiz.
Bu problemi şöyle düşünelim. Soldan sağa doğru üç yerimiz olsun.

$$\_\ \_\ \_$$

Bu üç yere üç harfi teker teker yerleştireceğiz. Birinci yer için üç seçeneğimiz var, birinci yere gelecek harf seçildikten sonra ikinci yere gelecek iki harf kalır, ikinci yere gelecek harf de seçildikten sonra üçüncü yere geri kalan tek harf gelmek zorundadır. Yani ilk harf için 3, sonraki için 2 ve en sonuncu harf için 1 seçenek kalır. Bu seçenekleri bir "ağaç" üstünde gösterebiliriz:



Eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçeneğimiz var: B ve C. Dolayısıyla A budağından B ve C dallarını sallandırıyoruz. Bu son dalların her birinden sonra birer dal daha çıkacaktır. Örneğin soldan birinci dal olan AB dalının sonuna C gelecektir. Her üç dal için bunu yaptığımızdan, bu 3 harfle toplam

$$3 \times 2 \times 1 = 3!$$

tane iki değişik harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

3.64. A, B, C, D harflerinin her birini kullanarak 4! tane dört harflik (anlamlı ya da anlamsız) kelime yazabiliriz. Tüm kelimeleri metinde yazmıştık zaten, bir daha yazalım:

$$\begin{array}{cccc} ABCD & BACD & CABD & DABC \\ ABDC & BADC & CADB & DACB \\ ACBD & BCAD & CBAD & DBAC \\ ACDB & BCDA & CBDA & DBCA \\ ADBC & BDAC & CDAB & DCAB \\ ADCB & BDCA & CDBA & DCBA \end{array}$$

Bu problemi şöyle düşünelim. Soldan sağa doğru dört yerimiz olsun.

$$\_\ \_\ \_\ \_$$

Bu dört yere dört harfi yerleştireceğiz. Birinci yer için dört seçeneğimiz var, birinci yere gelecek harf seçildikten sonra ikinci yere gelecek üç harf kalır, ikinci yere gelecek harf de seçildikten sonra üçüncü yere geri kalan iki harften biri gelmek zorunda, en sonuncu harf ilk üç harften geri kalan harftir. Yani ilk harf için 4, sonraki için 3, daha sonraki için 2 ve en sonuncu harf için 1 seçenek kalır. Dilersek bu seçenekleri bir önceki örnekte olduğu gibi bir "ağaç" üstünde gösterebiliriz. Ağaç bu sefer, önce 4, sonra 3, sonra 2 ve en nihayetinde 1 kez dallanacak.

3.65. A harfini iki defa kullanarak ama B ve C harflerini birer defa kullanarak dört harfli kaç kelime yazabiliriz? Bu soruyu çözmek için kullanacağımız iki A harfini ayrıştıralım, birine A_1, diğerine A_2 diyelim. Artık A_1 ve A_2'yi ayrı harfler olarak addediyoruz, biri ince A, diğeri kalın A olarak algılanabilir. Bu A_1, A_2, B, C harfleriyle 4! tane kelime yazabileceğimizi bir önceki örnekte gördük. Ama bu kelimelerde aslında aynı olması gereken A_1 ve A_2 harfleri yer alıyor. Eğer A_1 ile A_2 arasındaki farkı kaldırırsak, kelime sayımız azalır. Örneğin CA_1BA_2 ve CA_2BA_1 kelimeleri $CABA$ kelimesine dönüşür. Kelimelerin yarısında A_1 harfi A_2'den önce gelir, diğer yarısında A_2 harfi A_1'den önce gelir, yani A_1 ve A_2 kullanarak türetilmiş her iki kelime, A'lar arasındaki fark kaldırıldığında aynı kelimeye dönüşür. Demek ki sorumuzun cevabını bulmak için 4! sayısını 2'ye bölmeliyiz. Yanıt 12'dir.

3.66. A, B ve C harflerinin her birini en az bir defa kullanarak dört harfli kaç kelime yazabiliriz? Harflerden birini iki defa kullanmalıyız. A'yı iki defa kullanarak 12 farklı kelime kullanacağımızı gördük. Aynı şey tabii B'yi ya da C'yi iki defa kullanırsak da geçerli. Demek ki yanıt $3 \times 12 = 36$ imiş.

3.67. A harfini üç defa kullanarak ama B ve C harflerini birer defa kullanarak beş harfli kaç kelime yazabiliriz? Bu soruyu çözmek için kullanacağımız üç A harfini ayrıştıralım, artık üç tane A harfi yerine, sadece birer defa kullanabileceğimiz A_1, A_2, A_3 harfleri olsun. A_1, A_2, A_3, B ve C harflerini birer defa kullanarak tam 5! tane beş harflik kelime yazabileceğimizi önceki alıştırmalardan biliyoruz. Bu 5! farklı kelimede A_1, A_2 ve A_3 harfleri tam 3! farklı biçimde sıralanmıştır: Soldan sağa doğru harfleri okuduğumuzda önce A_1, sonra A_2, ve en sonda A_3 gelebilir; ya da önce A_2, sonra A_3, sonra A_1 gelebilir; bunun gibi A_i harfleri tam 3! farklı sıralamada gelebilir. A'ların altındaki 1, 2 ve 3 göstergeçlerini kaldırdığımızda, yani çeşitli A'lar arasında artık fark gözetmediğimizde, kelime sayısı 5!'den $5!/3! = 5 \times 4 = 20$'ye düşer. Yanıt 20'dir.

3.68. A harfini üç defa kullanarak ve B harfini dört defa kullanarak 7 harfli kaç kelime yazabiliriz? Bu soruyu çözmek için kullanacağımız üç A harfini ayrıştıralım, artık üç tane A harfi yerine, sadece birer defa kullanabileceğimiz A_1, A_2, A_3 harfleri olsun. Aynı şeyi B harfi için de yapalım. A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, B_4 harflerini birer defa kullanarak tam 7! tane beş harflik kelime yazabileceğimizi önceki alıştırmalardan biliyoruz. Bu 7! farklı kelimede A_1, A_2 ve A_3 harfleri tam 3! farklı biçimde sıralanmıştır: Soldan sağa doğru harfleri okuduğumuzda önce A_1, sonra A_2, ve en sonda A_3 gelebilir; ya da önce A_2, sonra A_3, sonra A_1 gelebilir; bunun gibi A_i'ler tam 3! tane farklı sıralamada gelebilir. Aynı şey B_1, B_2, B_3, B_4 harfleri için de geçerli; bunlar da 4! farklı biçimde bir kelimede belirebilirler. A'ların altındaki 1, 2 ve 3 göstergeçlerini kaldırdığımızda, yani çeşitli A'lar arasında artık fark gözetmediğimizde, aynı şeyi B'ler için yaptığımızda kelime sayısı 7!'den

$$\frac{7!}{3!\,4!}$$

sayısına düşer.

3.69. A harfini üç defa kullanarak, B harfini dört defa kullanarak, C harfini de beş defa kullanarak 12 harfli kaç kelime yazabiliriz? Üç tane A yerine A_1, A_2, A_3 koyalım. B ve C harfleri için de benzer şeyi yapalım. Böylece toplam 12 farklı harfimiz olur. Bu 12 farklı harfle tam 12! tane 12 harfli kelime yazabiliriz. Ayrıştırılan A, B ve C harflerini tekrar birer harf olarak sayarsak, kelime sayımız

$$\frac{12!}{3!\,4!\,5!}$$

sayısına düşer. Hesap yaparsak 27.720 buluruz.

3.70. A, B ve C harflerinin her birini en az bir defa kullanarak beş harfli kaç kelime yazabiliriz? Ya iki harf ikişer defa ya da bir harf üç defa kullanılmalı.

A ve B'yi ikişer defa kullanırsak

$$\frac{5!}{2!\,2!} = 30$$

kelime yazabiliriz. Aynı şeyi B ve C ile ya da A ve C ile de yapabiliriz. Demek ki iki harfi ikişer defa kullanarak

$$3 \times \frac{5!}{2!\,2!} = 3 \times 30 = 90$$

kelime yazabiliriz.

Ya bir harfi üç defa kullanarak kaç kelime yazabiliriz? Yukarıdaki gibi düşünürsek bir harfi üç defa kullanarak

$$3 \times \frac{5!}{3!} = 3 \times 20 = 60$$

kelime yazabileceğimizi görürüz. Demek ki yanıt $90 + 60 = 150$'dir.

Bu kelimeleri alfabetik sıraya sokabilmek önemlidir. Liste şöyle başlar: AAABC, AAACB, AABAC, AABCA, AACAB, AACBA. Son kelime CCCBA'dır. ACABA kelimesinin kaçıncı sırada olduğu ilginç bir soru.

Alıştırmalar

3.71. Bugüne kadar yaklaşık kaç faktoriyel saniye yaşadığınızı bulun.

3.72. $AABCD$ kelimesinin tüm harflerini kullanarak yazılan $5!/2 = 60$ kelimeyi alfabetik sırada yazın.

3.73. $AAACB$ kelimesinin tüm harflerini kullanarak yazılan $5!/2 = 60$ kelimeyi alfabetik sırada yazarsak ACABA kelimesi kaçıncı sırada olur?

3.74. 7! sayısı 2'nin en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?

3.75. 10! sayısı 2'nin en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür? 10! sayısı 3'ün en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür? 10! sayısı 6'nın en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?

3.76. 100! sayısı 2'nin en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür? 100! sayısı 4'ün en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür? 100! sayısı 3'ün en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür? 100! sayısı 6'nın en fazla kaçıncı kuvvetine bölünür?

3.77. $a_0 = 1$ ve her $n \geq 1$ doğal sayısı için $a_n = na_{n-1}$ olsun. a_{100} kaçtır?

3.78. A, B, C, D, E harfleriyle 6 harfli kaç kelime yazabiliriz? (Her harf kullanılmak zorunda değil.)

3.79. Altı farklı harfin altısını da birer defa kullanarak altı harfli kaç kelime yazılır?

3.80. A harfini dört defa, B, C ve D harflerini birer defa kullanarak 7 harfli kaç kelime yazılır?

3.81. A harfini dört defa, B, C ve D harflerini üçer defa kullanarak 13 harfli kaç kelime yazılır?

3.82. A, B, C ve D harflerinin her birini en az bir defa kullanarak beş harfli kaç kelime yazılır?

3.83. A, B, C ve D harflerinin her birini en az bir defa kullanarak altı harfli kaç kelime yazılır?

3.84. A, B ve C harflerinin her birini en az bir defa kullanarak altı harfli kaç kelime yazılır?

3.85. AAABB kelimesinin tüm harflerini kullanarak 5 harfli kaç kelime yazılır?

3.86. AAABBCC kelimesinin tüm harflerini kullanarak 7 harfli kaç kelime yazılır?

3.87. AAAABBBBCCCDD harflerinin hepsini kullanarak kaç kelime yazabiliriz?

3.88. ABRAKADABRA kelimesinin tüm harflerini kullanarak 11 harfli kaç kelime yazılır?

3.89. 22 kişilik bir sınıftan 11 kişilik bir futbol takımı, 6 kişilik bir voleybol takımı ve 5 kişilik bir basketbol takımı çıkarmak istiyoruz, ama aynı öğrenci iki farklı takımda olamaz. Bunu kaç farklı biçimde yapabiliriz? (İpucu: Öğrencileri soldan sağa doğru sıraya dizin. Elinizde 11 tane F harfi, 6 tane V harfi ve 5 tane B harfi olsun. Bu harfleri yapacakları spora göre öğrencilere dağıtacaksınız. Öğrenciler sıraya dizildiğinden, öğrencilere dağıtacağınız harfler 11 tane F'si, 6 tane V'si ve 5 tane B'si olan bir kelime oluşturacaktır. Soru, bu harflerle kaç kelime yazılabileceği sorusudur.)

3.90. 30 kişilik bir sınıftan 11 kişilik bir futbol takımı, 6 kişilik bir voleybol takımı ve 5 kişilik bir basketbol takımı çıkarmak istiyoruz, ama aynı öğrenci iki farklı takımda olamaz. Bunu kaç farklı biçimde yapabiliriz? (İpucu: Bir önceki soru gibi, ama hiçbir takıma girmeyenler misket oynasınlar! Harflere 8 tane M eklendi...)

3.91. Her n doğal sayısı için $n! \leq n^n$ eşitsizliğinin niye doğru olduğunu anlayabilir misiniz?

3.92. $2^n \leq n!$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur? $3^n \leq n!$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur? $4^n \leq n!$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.93. $5^n \leq (n-1)!$ eşitsizliği hangi $n \geq 1$ doğal sayıları için doğrudur? $2^n \leq (n-2)!$ eşitsizliği hangi $n \geq 2$ doğal sayıları için doğrudur?

3.94. $n^2 \leq 2^n$ eşitsizliği hangi n doğal sayıları için doğrudur?

3.95. $3 + 4n + n^2 \leq 2^n$ eşitsizliğinin hangi n doğal sayıları için doğru olduğunu tahmin edin.

3.96. $n^3 \leq 2^n$ eşitsizliğinin hangi n doğal sayıları için doğru olduğunu tahmin edin.

3.97. $n! + m! = k!$ eşitliğinin tüm çözümlerinde n ve m'nin 0 ya da 1 olduğunu, k'nın ise 2 olduğunu kanıtlayın.

3.4 Altküme Sayısı

Bu altbölümde n ögeli bir kümenin kaç tane k ögeli altkümesi olduğunu bulacağız. Örneğin 5 ögeli $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin tam 10 tane 3 ögeli altkümesi vardır; işte o altkümeler:

$$\{1, 2, 3\}$$
$$\{1, 2, 4\}$$
$$\{1, 2, 5\}$$
$$\{1, 3, 4\}$$
$$\{1, 3, 5\}$$
$$\{1, 4, 5\}$$
$$\{2, 3, 4\}$$
$$\{2, 3, 5\}$$
$$\{2, 4, 5\}$$
$$\{3, 4, 5\}$$

Bu kümelerin tümleyeni bize 2 ögeli altkümeleri verir. Dolayısıyla 5 ögeli bir kümenin 3 ögeli altküme sayısı, 2 ögeli altküme sayısına eşittir. Bu akıl yürütmeyi genelleştirmek işten bile değildir: n ögeli bir kümenin k ögeli altküme sayısı, $n-k$ ögeli atküme sayısına eşittir.

Eğer genel sorunun yanıtını bulursak, örneğin, 30 kişilik bir sınıftan kaç farklı biçimde 11 kişilik futbol takımı seçebileceğimizi de öğrenmiş oluruz, ne de olsa bu problem, 30 ögeli bir kümenin 11 ögeli altküme sayısını bulmaya denk.

Bundan sonrasını okumadan önce Örnek 3.64 ve sonrasını okuyup anlamanız yararlı olacaktır. Oradaki örneklerin bazılarına burada ihtiyacımız olacak.

n ögeli kümemiz

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

olsun. Bu kümenin k ögeli altküme sayısını hesaplayacağız. Yani bu n öge arasından kaç farklı biçimde k tane öge seçebileceğimizi hesaplayacağız.

Kümenin ögelerini soldan sağa doğru sıraya dizilmiş yerler olarak algılayalım: Birinci yer, ikinci yer, ..., n'inci yer. Yerlerin resmi aşağıda:

$$- \; - \; - \; - \; \ldots - \; - \; -$$

Ha X kümesinden k ögeli bir altküme seçmişiz, ha bu n tane yerden k tanesini seçmişiz, aynı şey. Örneğin, seçtiğimiz yerlere A harfini yerleştirirsek, yukarıdaki örnekteki gibi $n = 5$, $k = 3$ ise, altkümelerle yer seçimleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{array}{lcl}
\{1, 2, 3\} & \longleftrightarrow & A\,A\,A - - \\
\{1, 2, 4\} & \longleftrightarrow & A\,A - A - \\
\{1, 2, 5\} & \longleftrightarrow & A\,A - - A \\
\{1, 3, 4\} & \longleftrightarrow & A - A\,A - \\
\{1, 3, 5\} & \longleftrightarrow & A - A - A \\
\{1, 4, 5\} & \longleftrightarrow & A - - A\,A \\
\{2, 3, 4\} & \longleftrightarrow & - A\,A\,A - \\
\{2, 3, 5\} & \longleftrightarrow & - A\,A - A \\
\{2, 4, 5\} & \longleftrightarrow & - A - A\,A \\
\{3, 4, 5\} & \longleftrightarrow & - - A\,A\,A
\end{array}$$

Sol tarafta 5 ögeli $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 3 ögeli altkümeleri yer alıyor, sağ tarafta ise 5 yer arasında seçilebilecek 3 tane yerin listesi. (Seçilmiş yerleri A harfiyle gösterdik.) Örneğin

$$\{2, 4, 5\}$$

altkümesine 2'nci, 4'üncü ve 5'inci yerlerin seçimi, yani

$$- A - A\,A$$

dizisi tekabül etmiş.

Yeni sorumuz şöyle: n tane yer arasından kaç farklı biçimde k tane yer seçebiliriz? Yukarıdaki örnekte seçtiğimiz yerleri A harfiyle gösterdik. Oldu olacak seçmediğimiz yerleri de B harfiyle gösterelim. O zaman örneğimiz şu hale dönüşür:

$$\begin{array}{rcl}
\{1,\,2,\,3\} & \longleftrightarrow & A\;A\;A\;B\;B \\
\{1,\,2,\,4\} & \longleftrightarrow & A\;A\;B\;A\;B \\
\{1,\,2,\,5\} & \longleftrightarrow & A\;A\;B\;B\;A \\
\{1,\,3,\,4\} & \longleftrightarrow & A\;B\;A\;A\;B \\
\{1,\,3,\,5\} & \longleftrightarrow & A\;B\;A\;B\;A \\
\{1,\,4,\,5\} & \longleftrightarrow & A\;B\;B\;A\;A \\
\{2,\,3,\,4\} & \longleftrightarrow & B\;A\;A\;A\;B \\
\{2,\,3,\,5\} & \longleftrightarrow & B\;A\;A\;B\;A \\
\{2,\,4,\,5\} & \longleftrightarrow & B\;A\;B\;A\;A \\
\{3,\,4,\,5\} & \longleftrightarrow & B\;B\;A\;A\;A
\end{array}$$

Böylece $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 3 ögeli her altkümesi, üç adet A ve iki adet B'den oluşan bir (ve bir tek) kelimeyle ifade edilir. (Aynı şeyi A ve B yerine 0 ve 1 ile [1. Kitap, Örnek 3.32]'de yapmıştık.) Genel problemimize geri dönecek olursak, X kümesinde toplam n tane öge olduğuna göre, kelimenin uzunluğu n olmalıdır. Ama seçilen altkümede k tane öge olduğundan, kelimede tam k tane A olmalıdır (dolayısıyla $n-k$ tane de B olmalıdır). Şimdi problem, k tane A'nın ve $n-k$ tane B'nin her birini tam bir defa kullanarak kaç farklı n harfli kelime yazabileceğimiz problemine dönüştü. (Buna benzer problemleri bir önceki altbölümdeki örneklerde çözmüştük. Okurun o problemlere bu aşamada tekrar bakmasında yarar olabilir.) Önce A'ları ve B'leri birbirinden ayıralım: k tane A yerine

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k$$

ve $n-k$ tane B yerine

$$B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_{n-k}$$

yazalım.

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k,\, B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_{n-k}$$

harfleriyle tam $n!$ tane kelime yazabileceğimizi biliyoruz çünkü burada tam $n!$ tane **farklı** harf var. Ama A ve B'lerin sağ yamacındaki göstergeçler silindiğinde kelime sayısı azalır, örneğin

$$A_1A_2A_3B_1B_2B_3B_4 \text{ ile } A_3A_2A_1B_2B_4B_1B_3$$

kelimeleri arasında fark kalmaz, her ikisi de

$$AAABBBB$$

kelimesine dönüşür. Göstergeçler silindiğinde kaç farklı kelime aynı kelimeye dönüşür?

$$A_1,\, A_2,\, \ldots, A_k$$

harfleri tam $k!$ farklı biçimde sıraya dizilir; yani A'ların göstergeçlerini kaldırdığımızda $k!$ tane kelime aynı kelimeye dönüşür.

$$B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_{n-k}$$

harfleriyse tam $(n-k)!$ farklı biçimde sıraya dizilir; yani B'lerin göstergeçlerini kaldırdığımızda $(n-k)!$ tane kelime aynı kelimeye dönüşür. Böylece hem A'ların hem de B'lerin göstergeçlerini kaldırdığımızda tam

$$k!\,(n-k)!$$

tane kelimenin aynı kelimeye dönüştüğünü görürüz. Demek ki

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k,\, B_1,\, B_2,\, \ldots,\, B_{n-k}$$

harfleriyle yazılan $n!$ tane kelimeden, tüm göstergeçler kaldırıldığında, geriye sadece

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

tane kelime kalır. Bir başka deyişle k tane A ve $n-k$ tane B ile toplam

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

tane kelime yazılır. Bu da tam tamına n ögeli bir kümenin k ögeli altküme sayısıdır. Aşağıdaki önemli teoremi kanıtladık:

Teorem 3.1. *Eğer $0 \le k \le n$ ise, n ögeli bir kümenin tam*

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

tane k ögeli altkümesi vardır.

Kanıt: Teoremi yukarıda zaten kanıtlamıştık. İkinci bir kanıt daha verelim. n ögeli bir küme alalım. Bu kümenin k ögeli bir altkümesini seçeceğiz. Bakalım kaç farklı biçimde seçebileceğiz. Önce kümenin "birinci" ögesini seçelim. Biliyoruz, kümelerin birinci ya da ikinci ögesi olmaz, kümelerde sıralama yoktur ama biz yine de ilk seçtiğimiz ögeye "birinci öge" diyelim. Birinci öge kümenin n ögesinden biri olabilir. Demek ki birinci öge için n seçeneğimiz var. Şimdi gelelim kümenin ikinci ögesine. Birinci öge seçildiğinden geriye $n-1$ tane öge kalır. İkinci ögeyi bu $n-1$ ögeden birini seçmeliyiz. Üçüncü ögeyi geri kalan $n-2$ ögeden birini seçmeliyiz. Bu böyle devam eder. Sonuncu, yani k'ıncı öge için geri kalan $n-(k-1)$ ögeden birini seçmeliyiz. Böylece

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

tane seçeneğimiz olur. Ama bu sayı "ögeleri sıralı olan k ögeli altküme" sayısı. Oysa kümelerde birinci, ikinci öge filan olmaz. Sıralamayı dikkate almazsak altküme sayısı azalır. Örneğin $k = 3$ ise,

$$\{1, 2, 3\},\ \{1, 3, 2\},\ \{2, 1, 3\},\ \{2, 3, 1\},\ \{3, 2, 1\},\ \{3, 1, 2\}$$

kümeleri aynı kümelerdir ama biz yukarıdaki hesapta bu altkümeyi tam 6 defa saydık, hatta her altkümeyi tam 6 defa saydık, daha doğrusu 3! defa saydık. Sonuç olarak, yukarıdaki hesapta k ögeli her altküme tam k! defa sayıldı. Bu yanlışı düzeltelim. k ögeli altküme sayısını bulmak için yukarıda bulduğumuz sayıyı k!'e bölmeliyiz. Sonuç,

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

çıkar; tam istediğimiz gibi. □

Sonuç 3.2 (Simetri Özelliği)**.** *Her $0 \le k \le n$ doğal sayısı için,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

eşitliği geçerlidir.

Birinci Kanıt: Sol taraftaki sayı, n ögeli bir kümeden kaç farklı biçimde k öge seçilebileceğini söylüyor. Sağ taraftaki sayı da, n ögeli bir kümeden kaç farklı biçimde $n - k$ öge seçilebileceğini söylüyor. Ama k öge seçmekle, seçmeyeceğimiz geri kalan $n - k$ ögeyi seçmek aynı şey... Biri belirlendi mi diğeri de belirlenir. Demek ki iki sayı birbirine eşit.

Daha biçimsel olarak bu kanıtı şöyle ifade edebiliriz: X, n ögeli bir küme olsun. Her $A \subseteq X$ için, eğer $s(A) = k$ ise, $s(A') = n - k$ olur. Yani

$$A \mapsto A' = X \setminus A$$

kuralı, k ögeli kümelerle $n - k$ ögeli kümeler arasında bir eşleme verir. Dolayısıyla k ögeli küme sayısı tam tamına $n - k$ ögeli küme sayısıdır. Yani istediğimiz eşitlik geçerlidir.

İkinci Kanıt: Daha cebirsel ve daha kısa bir kanıt aşağıda:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

"n'de k", "n seç k", "n'nin k'lısı" ya da "n'nin k'lı kombinasyonu" gibi adlar verilen bu sayı matematikte

$$\binom{n}{k}$$

olarak gösterilir. Demek ki

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Örneğin $n = 5$, $k = 3$ ise,

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

bulunur; bu da anımsarsanız 5 ögeli bir kümenin 3 ögeli altküme sayısı. Her şey teoremle uyum içinde... 25 kişilik bir sınıftan kaç farklı 11 kişilik futbol takımı çıkarılabileceğini de artık kolaylıkla hesaplayabiliriz:

$$\binom{25}{11} = \frac{25!}{11!\,14!};$$

gereksiz uzun hesapları yapmıyoruz, meraklı okur sadeleştirmelerden sonra kocaman bir sayı bulabilir. Burada ilginç olan, bu sayının bir doğal sayı çıkması: 25! elbette 11! sayısına bölünür ve tabii ki 14! sayısına da bölünür; hiç bariz olmayan (ama artık bildiğimiz), 25! sayısının 11! 14! sayısına bölündüğü. Bu ilginç olguyu not edelim.

Sonuç 3.3. *$k!\,m!$ sayısı $(k+m)!$ sayısını böler.* □

Kanıt: Nitekim, eğer $n = k + m$ tanımını yaparsak,

$$\frac{(k+m)!}{k!\,m!} = \binom{n}{k}$$

olur ve sağdaki sayının n ögeli bir kümenin k ögeli altküme sayısı olduğunu biliyoruz, bu sayı da tabii ki bir doğal sayıdır. □

Örnekler

3.98. *Rakamları soldan sağa doğru kesin artan 5 haneli kaç doğal sayı vardır?*

Çözüm: En soldaki rakam 0 olamaz, dolayısıyla sayılar 1'den 9'a kadar olan 9 rakamdan oluşurlar. Bu 9 rakamdan 5'ini seçip küçükten büyüğe sıraya dizersek, sorudaki tüm sayıları buluruz. Sonuç $\binom{9}{5} = 126$ çıkar.

3.99. 18 takım içeren bir futbol liginde her takım her takımla maç yaparsa, toplam

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{2!(18-2)!} = \frac{18!}{2!16!} = \frac{18 \times 17}{2} = 9 \times 17 = 153$$

maç yapılmış olur, çünkü 18 takımdan oluşan bir kümenin tam bu kadar iki ögeli altkümesi vardır. Her takım her takımla iki maç yaparsa, maç sayısı bunun iki katı olur elbette.

3.100. 100 kişilik bir grupta herkes herkesle el sıkışırsa, toplam

$$\binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2} = 4950$$

el sıkışma olur.

3.101. İçinde 12 farklı renk bulunan bir boya kalemi kutusundan,

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5!7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 11 \times 9 \times 8 = 792$$

farklı biçimde beş kalem seçilebilir.

3.102. 50 kişilik bir sınıftan 11 kişilik bir futbol takımı

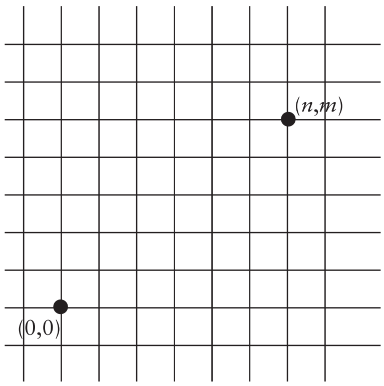
$$\binom{50}{11}$$

farklı biçimde seçilir. Bir de ayrıca geri kalanlardan 6 kişilik bir voleybol takımı seçmek istersek, bu seçimi

$$\binom{50}{11}\binom{39}{6} = \frac{50!}{11!6!33!}$$

farklı biçimde yapabiliriz.

3.103. **Izgarada En Kısa Yol Sayısı.** *Aşağıdaki ızgaranın üstünden giderek ve hep doğuya ya da kuzeye giderek* $(0, 0)$ *noktasından* (n, m) *noktasına kaç farklı biçimde gidebilirsiniz?*



Yanıt: Sorunun, $(0, 0)$ noktasından (n, m) noktasına giden ve ızgaradan şaşmayan en kısa yol sayısını sorduğuna dikkatinizi çekeriz. Toplam $n + m$ hareket yapmamız lazım. Bunlardan m tanesi kuzeye, geri kalan n tanesi doğuya olmalı. Demek ki $n+m$ hareketten m tane kuzey hareketi seçmeliyiz. Dolayısıyla yanıt,

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

olur. □

3.104. $0 < k \leq n$ olsun. n kişilik bir meclisten, biri başkan olmak üzere kaç farklı biçimde k kişilik komite seçebileceğimizi bulalım. Önce k kişilik komiteyi seçelim. Bu seçimi

$$\binom{n}{k}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Şimdi de bu k kişilik komiteden başkanı seçelim. Bu seçimi de k farklı biçimde yapabiliriz. Demek ki cevap

$$\binom{n}{k}k$$

dır. Soruya başka türlü de yaklaşabilirdik. Önce n kişilik meclisten başkanı seçelim. Bunu n farklı biçimde yapabiliriz. Sonra geriye kalan $n-1$ kişiden komitenin başkan olmayacak $k-1$ kişiyi seçelim. Bunu

$$\binom{n-1}{k-1}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Demek cevap

$$n\binom{n-1}{k-1}$$

olur. Buradan da

$$\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$$

eşitliğini buluruz. Aynı eşitliği cebirsel olarak da kanıtlayabilirdik tabii.

3.105. $1 < k \le n$ olsun. n kişilik bir meclisten, biri başkan, biri başkan yardımcısı olmak üzere kaç farklı biçimde k kişilik komite seçebileceğimizi bulalım. Önce k kişilik komiteyi seçelim. Bu seçimi

$$\binom{n}{k}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Şimdi de bu k kişilik komiteden başkanı seçelim. Bu seçimi de k farklı biçimde yapabiliriz. Son olarak komitenin geri kalan $k-1$ üyesinden birini başkan yardımcısı olarak atayalım. Demek ki cevap

$$\binom{n}{k}k(k-1)$$

olur. Soruya başka türlü de yaklaşabilirdik. Önce n kişilik meclisten başkanı seçelim. Bunu n farklı biçimde yapabiliriz. Sonra geriye kalan $n-1$ kişiden başkan yardımcısını seçelim. Ardından mecliste kalan $n-2$ kişiden komitenin başkan olmayacak $k-2$ üyesini seçelim. Demek ki cevap

$$n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

olur. Aynı sonucu bir başka yöntemle de bulabiliriz: Önce başkanı seçelim. Bunu n farklı biçimde yapabiliriz. Sonra, geri kalan $n-1$ kişiden komitenin başkan olmayacak $k-1$ üyesini seçelim. Bunu

$$\binom{n-1}{k-1}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Son olarak $k-1$ kişi arasından başkan yardımcısını seçelim. Cevap bu sefer

$$n\binom{n-1}{k-1}(k-1)$$

çıktı. Tüm cevaplar doğru olduğundan,

$$\binom{n}{k}k(k-1) = n(n-1)\binom{n-2}{k-2} = n\binom{n-1}{k-1}(k-1)$$

eşitliklerini kanıtlamış bulunduk. Bu eşitlikleri tamamen cebirsel yöntemlerle de kanıtlayabilirdik tabii.

3.106. k tane A, ℓ tane B ve m tane C harflerin her birini kullanarak $k+\ell+m$ harfli kaç farklı kelime yazabiliriz? Bu soruyu yanıtlamak için önce harfleri birbirinden ayıralım:

$$A_1,\ \ldots,\ A_k,\ B_1,\ \ldots\ B_\ell,\ C_1,\ \ldots,\ C_m.$$

Bu harflerle $(k+\ell+m)!$ tane kelime yazabileceğimizi biliyoruz. A'lar arasındaki ayrımı kaldırdığımızda bu sayı $k!$ defa azalır, B'ler ve C'ler için de benzer şey olur. Böylece sorumuzun cevabı

$$\frac{(k+\ell+m)!}{k!\,\ell!\,m!}$$

olur. Bu aynen $k+\ell+m$ öğrenciden oluşan bir sınıfı kaç farklı biçimde k, m ve ℓ kişiden oluşan üç ayrık ve **birbirinden farklı** spor takımına ayırabileceğimizin sayısıdır. Örneğin 25 kişilik bir sınıftan 11 kişilik bir futbol takımı ve 6 kişilik bir voleybol takımı çıkarmak istiyorsak ve aynı öğrencinin iki spor yapmasına izin verilmiyorsa, o zaman bunu

$$\frac{25!}{11!\,6!\,8!}$$

farklı biçimde yapabiliriz: 11 futbol takımı için, 6 voleybol takımı için ve geri kalanlar da (toplam 8 kişi) hiçbir takıma girmedikleri için (geri kalanları "moloz takımı" olarak görebilirsiniz). Bu vesileyle, $k!\,\ell!\,m!$ sayısının $(k+\ell+m)!$ sayısını böldüğünü görüyoruz. Bu olguyu genelleştirmek işten bile değil:

Teorem 3.4. *$k_1!\cdots k_r!$ sayısı $(k_1+\cdots+k_r)$ sayısını böler ve $k_1+\cdots+k_r$ öğrencisi olan bir sınıf tam*

$$\frac{(k_1+\cdots+k_r)!}{k_1!\cdots k_r!}$$

farklı biçimde $k_1,\ldots,k_r$ oyuncu gerektiren **farklı** *spor takımlarına ayrılır.* □

Buradan, 100 ögelik bir kümeyi 10, 20, 30 ve 40 ögelik 4 ayrık altkümeye

$$\frac{100!}{10!\,20!\,30!\,40!}$$

farklı biçimde ayırabileceğimiz çıkar. Bu son problemi şöyle de çözebilirdik. 100 ögesi olan kümeden

$$\binom{100}{10}$$

farklı biçimde 10 ögelik altküme seçebiliriz. Her bir seçim için geriye 90 öge kalır. Bu 90 ögelik kümeden

$$\binom{90}{20}$$

farklı biçimde 20 ögelik altküme seçebiliriz. Geriye 70 öge kalır. Bu 70 ögelik kümeden

$$\binom{70}{30}$$

farklı biçimde 30 ögelik altküme seçebiliriz. Geriye 40 öge kalır, ki bu da 40 ögelik son altkümeyi oluşturur. Böylece 100 ögelik bir kümeyi 10, 20, 30 ve 40 ögelik 4 ayrık altkümeye

$$\binom{100}{10}\binom{90}{20}\binom{70}{30}$$

farklı biçimde ayırabileceğimizi görürüz. Yukarıda bulduğumuz yanıttan farklı mı görünüyor? Sadece bir algı! Yanıtlar aynı:

$$\binom{100}{10}\binom{90}{20}\binom{70}{30} = \frac{100!}{10!\,90!}\,\frac{90!}{20!\,70!}\,\frac{70!}{30!\,40!} = \frac{100!}{10!\,20!\,30!\,40!}.$$

3.107. 55 kişilik bir sınıftan 11 kişilik futbol, 11 kişilik voleybol, 11 kişilik basketbol, 11 kişilik hentbol, 11 kişilik atletizm takımı seçmek istiyoruz. Aynı kişinin iki farklı takımda olamayacağını varsayalım. Bunu

$$\frac{55!}{11!\,11!\,11!\,11!\,11!}$$

farklı biçimde yapabileceğimizi biraz önceki örnekte gördük. Şimdi şu problemi ele alalım: 55 kişilik bir sınıfı 11'er kişilik birbirinden ayrık 5 futbol takımına ayırmak isteyelim. Bu sefer takımlara "futbol" ya da "basketbol" gibi adlar vermiyoruz, takımların "aslanlar" ya da "kaplanlar" gibi adları da yok, yani hiçbir takımın bir diğer takımdan farkı yok. Bu yeni problemin yanıtı

$$\frac{55!}{11!\,11!\,11!\,11!\,11!}$$

değildir, yanıt

$$\frac{\frac{55!}{11!\,11!\,11!\,11!\,11!}}{5!} = \frac{55!}{11!\,11!\,11!\,11!\,11!\,5!}$$

olur. Çünkü bu sefer 5 takım arasında bir fark olmadığı için takımları aralarında değiştirebiliriz ve bu değişimi 5! farklı biçimde yapabiliriz.

3.108. 100 kişilik bir sınıfı 5 tane 6 kişilik, 10 tane 7 kişilik 15 ayrık gruba ayırmak istiyoruz. Bu ayrışmayı kaç farklı biçimde yapabiliriz? Cevap

$$\frac{\frac{100!}{6!^5\,7!^{10}}}{5!\,10!} = \frac{100!}{6!^5\,7!^{10}\,5!\,10!}$$

olur.

3.109. Yukarıdaki örneği genelleştirerek bir teoreme dönüştürelim.

Teorem 3.5. *$n_1, \ldots, n_r$ ve $k_1 < \ldots < k_r$ doğal sayılar olsun. O zaman*

$$n_1k_1 + \cdots + n_rk_r$$

ögesi olan bir kümeyi, n_1 tane k_1 ögesi olan, n_2 tane k_2 ögesi olan, …, n_r tane k_r ögesi olan ikişer ikişer ayrık altkümeye

$$\frac{(n_1k_1 + \cdots + n_rk_r)!}{k_1!^{n_1}\cdots k_r!^{n_r}\,n_1!\cdots n_r!}$$

farklı biçimde ayırabiliriz. □

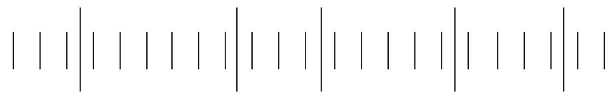
Burada önemli olan kümeler arasında (öge sayısı dışında) bir ayrım olmamasıdır, yani k_1 ögeli iki küme arasında bir ayrım yapmıyoruz. Eğer yapacak olsaydık (örneğin biri futbol diğeri basketbol takımı olsaydı), o zaman bulunan sonuç

$$\frac{(n_1k_1 + \cdots + n_rk_r)!}{k_1!^{n_1} \cdots k_r!^{n_r}}$$

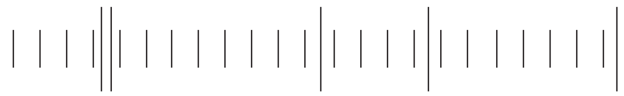
olurdu.

Sonuç 3.6. *$n_1, \ldots, n_r$ ve $k_1 < \ldots < k_r$ doğal sayılar ise $k_1!^{n_1} \cdots k_r!^{n_r} n_1! \cdots n_r!$ sayısı $n_1k_1 + \cdots + n_rk_r$ sayısını böler.* □

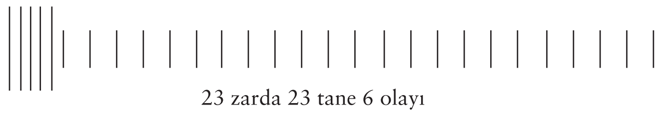
3.110. **Zarda Olay Sayısı 2.** *Birbirinden farkı olmayan n zar attığınızda kaç olay vardır?*
Yanıt: n tane küçük çubuk alıp yanyana dizelim. Aşağıdaki şekilden izleyin. Bu n küçük çubuk arasına (ya da çubukların en başına ya da en sonuna) 5 tane büyük çubuk yerleştirelim.



23 zarda 3 tane 1, 6 tane 2, 3 tane 3, 5 tane 4, 4 tane 5 ve 2 tane 6 olayı



23 zarda 4 tane 1, 0 tane 2, 8 tane 3, 4 tane 4, 7 tane 5 ve 0 tane 6 olayı



23 zarda 23 tane 6 olayı

En soldan başlayarak, birinci büyük çubuğun solunda kalan küçük çubuk sayısı bize n zarda kaç tane 1 geldiğini söylesin. Birinci büyük çubukla ikinci büyük çubuk arasında kalan küçük çubuk sayısı da n zarda kaç tane 2 geldiğini söylesin. İkinci büyük çubukla üçüncü büyük çubuk arasında kalan küçük çubuk sayısı da n zarda kaç tane 3 geldiğini söylesin... Ve son olarak beşinci büyük çubuğun sağındaki küçük çubuk sayısı n zarda kaç tane 6 geldiğini söylesin.

n küçük çubuğun 5 büyük çubukla her ayrımı bize n zarda bir olay verir. Ve n zarda gelebilecek her olay bize n küçük çubuğun 5 büyük çubukla bir ayrımını verir.

Demek ki n tane küçük çubukla 5 tane büyük çubuğu kaç değişik biçimde dizebileceğimizi bulmalıyız. Küçük çubuklara A, büyük çubuklara B dersek, n tane A ve 5 tane B ile $n+5$ harflik kaç değişik sözcük yazabileceğimizi bulmalıyız. Harfler için $n+5$ tane yerimiz var ve bunlardan 5'i B harfine ayrılacak. Böyle bir seçimi,

$$\binom{n+5}{5}$$

farklı biçimde yapabileceğimizi biliyoruz. Yanıtı bulduk.

Eğer $n = 1$ ise, olması gerektiği gibi

$$\binom{1+5}{5} = \binom{6}{5} = 6$$

buluruz. Eğer $n = 2$ ise yanıt 21 çıkmalı; öyle de oluyor:

$$\binom{2+5}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7 \times 6}{2} = 21.$$

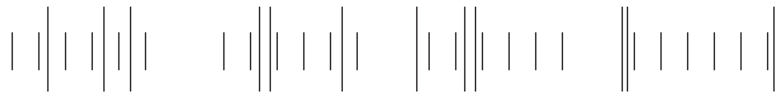
Dikkat: Eğer $n > 1$ ise bu olayların her birinin gelme olasılığı aynı değildir. Örneğin iki zarda 1-1 gelme olasılığı 1/36'dır ama 1-2 gelme olasılığı 1/18'dir. □

3.111. **Denklem Çözümü Sayısı 1.** *x_i doğal sayı olmak üzere,*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

denkleminin kaç farklı (x_1, x_2, x_3, x_4) çözümü vardır?

Yanıt: 6 sayısını altı adet küçük çubukla temsil edelim. Bu altı küçük çubuğu üç büyük çubukla dört parçaya bölelim. Her bölünme denklemin ayrı bir (x_1, x_2, x_3, x_4) çözümünü verir. Örneğin,



2 + 2 + 1 + 1 = 6 2 + 0 + 3 + 1 = 6 0 + 2 + 0 + 4 = 6 0 + 0 + 6 + 0 = 6

Birinci büyük çubuğun solundaki küçük çubuk sayısı x_1, ilk iki büyük çubuk arasındaki küçük çubuk sayısı x_2, ikinciyle üçüncü çubuk arasındaki küçük çubuk sayısı x_3 ve son büyük çubuğun sağındaki küçük çubuk sayısı x_4 sayısını verir. Her çözüm böyle bir bölünmeye yol açtığı gibi, her bölünme de bir çözüme yol açar.

Demek ki problem aslında, 6 küçük ve 3 büyük çubuğun kaç farklı biçimde yerleştirileceği sorusu. Küçük çubuklara K harfi dersek, büyük çubuklara B harfi dersek, problem 6 tane K ve 3 tane B harfiyle 9 harflik kaç değişik sözcük yazabileceğimiz sorusuna dönüşür. Bu problemi biraz önce çözmüştük. Yanıt:

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

olur. □

3.112. **Denklem Çözümü Sayısı 2.** Daha genel olarak,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

denkleminin doğal sayılarda

$$\binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$

tane farklı $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ çözümü vardır.

3.113. **Denklem Çözümü Sayısı 3.** *x_i pozitif doğal sayı olmak üzere, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ denkleminin kaç farklı çözümü vardır?*

Yanıt: Yukarıdaki problemden farklı olarak, bu sefer x_i'ler 0 olamazlar, yani $x_i \geq 1$ olmak zorunda. Çözmemiz istenen denklemi

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 2$$

olarak yazalım ve $y_i = x_i - 1$ tanımını yapalım. Demek ki, $y_i \geq 0$ ve

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2.$$

Bu son eşitliği sağlayan (y_1, y_2, y_3, y_4) doğal sayı dörtlülerinin sayısını bulmalıyız. Bir önceki soruya göre bunlardan,

$$\binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

tane vardır. Okur 10 çözümü teker teker sıralayabilir.
Daha genel olarak, aynı akıl yürütmeyle, $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ denkleminin pozitif doğal sayılarda

$$\binom{n-1}{n-m}$$

tane farklı $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ çözümü olduğunu buluruz. $\square$

3.114. *Rakamları soldan sağa doğru gidildikçe hiç azalmayan* 100 *haneli kaç doğal sayı vardır?*
Yanıt: Sayının içinde 0 olamaz. Dolayısıyla sayı 1'den 9'a kadar olan 9 rakamdan oluşmalı. Sayının içinde bulunan i rakamı sayısına k_i dersek,

$$k_1 + \cdots + k_9 = 100$$

eder ve bu seçimle istenen şekilde tek bir sayı yazabiliriz. Demek ki yanıt, daha önceki örneklerde olduğu gibi

$$\binom{108}{8}$$

olur. $\square$

3.115. *Yukarıda yapılanlardan yararlanarak, her* $1 \leq m \leq n$ *için*

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{m}{0}\binom{n-1}{m-1} + \binom{m}{1}\binom{n-1}{m-2} + \cdots + \binom{m}{m-1}\binom{n-1}{0}$$

eşitliğini kanıtlayın.
Kanıt: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ denkleminin doğal sayılarda kaç farklı $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ çözümü olduğunu iki farklı biçimde sayacağız.
Birinci Sayım: Örnek 3.111'deki soruya verdiğimiz yanıttan dolayı çözüm sayısının kanıtlamak istediğimiz eşitliğin solundaki kadar olduğunu biliyoruz.
İkinci Sayım: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ denkleminin bazı çözümlerinde bazı x_i'ler 0'a eşit olabilirler. Bir $0 \leq k \leq n$ sayısı için, tam k tane x_i'nin 0'a eşit olduğu çözümleri sayalım. Önce m tane x_i arasından 0'a eşit olacak olan k tane x_i terimini seçelim. Bu seçimi

$$\binom{m}{k}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Her bir seçim için,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \text{ ve } x_i \geq 0$$

sisteminin çözüm sayısı,

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-k} = n \text{ ve } y_i \geq 1$$

sisteminin çözüm sayısına eşittir ve Örnek 5.112 ve Sonuç 3.2'den dolayı bunlardan

$$\binom{n-1}{n-(m-k)} = \binom{n-1}{n-m+k} = \binom{n-1}{m-k-1}$$

tane olduğunu biliyoruz. Demek ki

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \text{ ve } x_i \geq 0$$

sisteminin, tam k tane x_i'nin 0'a eşit olduğu toplam çözüm sayısı tam

$$\binom{m}{k}\binom{n-1}{m-k-1}$$

kadardır. Şimdi bunları $k = 0$'dan $k = m-1$'e kadar toplarsak,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \text{ ve } x_i \geq 0$$

sisteminin toplam çözüm sayısını ikinci bir defa bulmuş oluruz. Bu da kanıtlamak istediğimiz eşitliğin sağ tarafındaki ifadedir. □

3.116. **Çoklu Küme.** Bir kümede bir öge en fazla bir kez belirir. Örneğin $\{1,1,2,2,2\}$ kümesi aslında $\{1,2\}$ kümesidir. Ama bazen bir kümede bir ögenin birden fazla kez belirmesini isteyebiliriz. Yukarıdaki örneklerin her birinde aslında bu yapılıyordu. Örneğin 7 zar attığımızda gelen zarlar 1, 1, 3, 4, 4, 4, 6 olabilir; burada 1 iki kez, 4 ise üç kez beliriyor. İçimizden bu zar olayını $\{1,1,3,4,4,4,6\}$ olarak yazmak geçebilir ama bu doğru değil tabii. Bu yüzden bu olayı yazmak için $\langle 1,1,3,4,4,4,6\rangle$ gibi bir başka yazılım kullanmalıyız. Bu tür nesnelere ***çoklu küme*** denir. Bu çoklu kümenin "öge sayısı" 7'dir.

n ögeli bir kümenin k ögeli çoklu altküme sayısını hesaplayalım. Tabii k ve n doğal sayılar olmalı, ama k, n'den büyük ya da küçük olabilir. Yukarıdaki örneklerdeki gibi düşünelim. n ögeli kümenin ögelerini 1'den n'ye kadar olan sayılarla gösterebiliriz. Şimdi k tane noktayı soldan sağa doğru dizelim ve bu noktaların arasına $n-1$ tane paravan koyalım. Her türlü nokta-paravan düzenlemesi bize k ögeli bir çoklu altküme verir; nitekim birinci paravanın solunda kalan nokta sayısı kümemizden seçilen 1 sayısı olsun, birinci paravanla ikinci paravan arasında kalan nokta sayısı kümemizden seçilen 2 sayısı olsun, bu böyle devam etsin ve en sağdaki (yani $n-1$'inci) paravanın sağında kalan nokta sayısını kümemizden seçilen n sayısı olarak algılayalım. Demek ki k nokta arasına kaç farklı biçimde $n-1$ paravan yerleştirebileceğimizi hesaplamalıyız. Sıralanmış nokta ve paravanları "nesne" olarak görelim. Toplam $k+n-1$ tane nesnemiz var. Bunlar arasından hangilerinin paravan olacağına karar vermeliyiz. $k+n-1$ tane nesne arasından paravan olacak $n-1$ tane ya da nokta olacak k tanesini seçmeliyiz. Bunu

$$\binom{k+n-1}{k}$$

farklı biçimde yapabiliriz. Demek ki n ögeli bir kümenin k ögeli çoklu altküme sayısı bu kadardır.

3.5 İlk n Pozitif Doğal Sayının Toplamı

İlk n tane pozitif doğal sayının çarpımını $n!$ olarak tanımladık; peki ilk n pozitif doğal sayının toplamı nedir? Yani

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

toplamı kaça eşit olur? Bu toplam için bir formül bulabilir miyiz? Örneğin,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

toplamı kaça eşittir? (Yukarıdaki toplamda 1'den 100'e kadar tüm doğal sayılar toplanmaktadır, yani yüz tane sayı toplanmaktadır.) Bu toplamın bir formülü vardır. Açıklayalım.

Rivayete göre ünlü Alman matematikçi Gauss'un (1777-1855) ilkokul öğretmeni bir nedenden sınıftan çıkmak zorunda kalmış. Çocukların boş durmamaları, yaramazlık yapmamaları, zamanlarını boşa harcamamaları için de "zor" bir soru sormuş: "1'den 100'e kadar olan sayıların toplamı kaçtır?" Çocukların bu 100 sayıyı altalta yazıp toplamalarını bekliyor... Zalim öğretmen daha sınıftan dışarı adımını atmamış ki, küçük Gauss oturduğu yerden,

– 5050, diye bağırmış.

Öğretmen donakalmış kapının eşiğinde. Olacak iş değil! Küçük Gauss hesapta kuvvetli kuvvetli olmasına ama, gene de... Oysa küçük Gauss'un bir formülü var. İşte formül:

n pozitif bir tamsayıysa, 1*'den* n*'ye kadar olan tamsayıların toplamı*

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

olur. Yani,

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

eşitliği geçerlidir.

Öğretmenin sorduğu soruda $n = 100$. Gauss yukarıdaki formülü uygulayıp,

$$\frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

bulmuş.

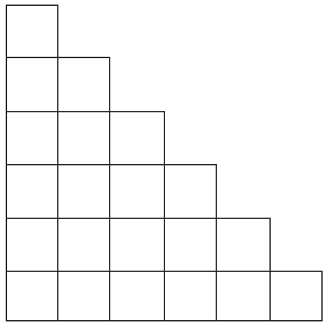
Eğer $n = 1$ alırsak, (1) formülünün sol tarafında 1 buluruz (1'den 1'e kadar olan sayıların toplamı 1'dir), sağ tarafında da $1 \times (1+1)/2$, yani 1 buluruz. Formül her doğal sayı için geçerlidir. Mesela hem $1+2+3+4$ sayısı hem de $4 \times (4+1)/2$ sayısı 10'a eşittir. Formül $n = 0$ için bile doğrudur: $n = 0$ olduğunda sol tarafta 1'den 0'a kadar olan sayılar toplanır, yani hiç tane sayı toplanır, bu toplamı da 0 olarak tanımlamıştık; sağ tarafta da 0 bulunur. (Görüldüğü üzere hiç tane sayının toplamını 0 olarak tanımlamanın yararı var!)

Gauss'un çok küçük yaşlarda bulduğu bu formülü kanıtlayacağız. Her k tamsayısını $1 \times k$ boyutlu bir dikdörtgen olarak gösterelim. Örneğin, 4 tamsayısını aşağıdaki gibi bir dikdörtgen olarak göstereceğiz.

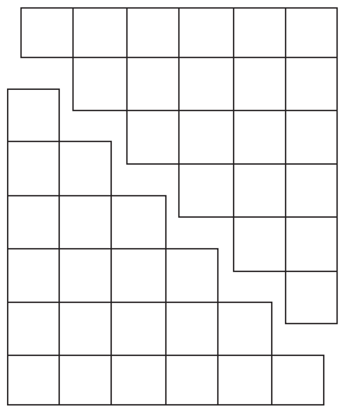
Şimdi,

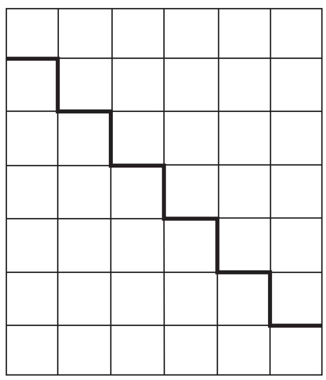
$$1+2+3+\cdots+n$$

sayısını bu dikdörtgenleri üstüste koyarak gösterelim. Örneğin $n = 6$ ise aşağıdaki şekli elde ederiz.



Bulmak istediğimiz sayı bu garip üçgendeki kare sayısıdır. (Bu yüzden $1+2+\cdots+n$ biçimindeki sayılara ***üçgensel sayılar*** denir.) Bu üçgendeki kare sayısını bulmak kolay olmayabilir, ama bu üçgenden iki tane alırsak, kare sayısını daha kolay hesaplayabiliriz: Bu üçgenin bir benzerini tepe taklak edip üstüne koyalım ve iki "üçgen"i birleştirip bir dikdörtgen elde edelim (aşağıdaki ikinci şekle bakın).





Bulmak istediğimiz sayı bu dikdörtgendeki kare sayısının yarısı. Dikdörtgendeki kare sayısını hesaplayıp ikiye bölelim. Dikdörtgenimizin eni n, yüksekliği $n+1$ olduğundan, bu dikdörtgende

$$n(n+1)$$

tane kare vardır. Demek ki üçgende

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

tane kare vardır. Dolayısıyla 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

olur.

Bu arada, ilk bakışta kesirli sayı gibi görünen $\frac{n(n+1)}{2}$ sayısının aslında bir doğal sayı olduğu gözden kaçmamalıdır.

n yerine herhangi bir sayı alabileceğimiz gibi, n harfini istersek değiştirebiliriz de, örneğin eğer 1'den k'ya kadar olan sayıları toplamak istiyorsak, yukarıdaki formülde n yerine k almak yeterli:

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

n yerine s alsak da bir şey farketmez:

$$1 + 2 + \cdots + s = \frac{s(s+1)}{2}.$$

n yerine n^2 de alabiliriz, bunun için yukarıdaki formülde n görülen yere (n'lere hiç acımadan!) n^2 koymalıyız:

$$1 + 2 + \cdots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

n yerine $n-1$ de koyabiliriz: 1'den $n-1$'e kadar olan sayıların toplamı

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

olur.

Karelerin toplamı için de bir formül vardır:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Küplerin toplamı için de:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Eşitliğin sağındaki sayıların kesirli sayı gibi göründüğüne aldanmayın, her biri her $n \in \mathbb{N}$ için bir doğal sayıdır, paydalar sadeleşir. Dördüncü kuvvetlerin toplamı için de bir formül var. Bu formülleri ne yazık ki bu aşamada kanıtlayamayız, ileride kanıtlayacağız ama. Bu arada,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

eşitliğine de dikkatinizi çekerim; şaşırtıcı bir eşitlik, küplerin toplamının toplamın karesine eşit olduğunu söylüyor.

Örnekler

3.117. 1'den 100'e kadar olan ve 7'ye bölünen doğal sayıların toplamı kaçtır? Soruda

$$7 + 14 + \cdots + 98$$

toplamı isteniyor. Toplanan sayılar 7×1'den 7×14'e kadar olan sayılar. Demek ki

$$7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + \cdots + 7 \cdot 14$$

toplamını bulmalıyız. Her bir terimde ortak olan 7'yi dışarı çıkaralım:

$$7 \cdot (1 + 2 + \cdots + 14)$$

toplamını bulmalıyız. Parantez içindeki toplamın

$$\frac{14 \cdot 15}{2} = 7 \cdot 15 = 105$$

olduğunu metinde gördük. Demek ki istediğimiz toplam $7 \cdot 105 = 735$.

3.118. 1'den 100'e kadar olan ve 5'e bölünmeyen doğal sayıların toplamı kaçtır? 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamının

$$\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

olduğunu biliyoruz. Bu sayıdan 5'e bölünenlerin toplamını çıkarmalıyız. 5'e bölünenlerin toplamı da bir önceki alıştırmadaki gibi kolaylıkla hesaplanabilir:

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \cdots + 5 \cdot 20 = 5 \cdot (1 + 2 + \cdots + 20) = 5 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 5 \cdot 210 = 1050.$$

Demek ki yanıt $5050 - 1050 = 4000$'dir.

3.119. 1'den 1000'e kadar olan ve 7'ye bölünen ama 5'e bölünmeyen doğal sayıların toplamı kaçtır? 1'den 1000'e kadar olan ve 7'ye bölünen sayıların toplamı bir önceki alıştırmadaki gibi hesaplanabilir:

$$7 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + \cdots + 7 \cdot 142 = 7 \cdot (1 + 2 + \cdots + 142) = 7 \cdot \frac{142 \cdot 143}{2} = 7 \cdot 10.153 = 71.071.$$

Bu 71.071 toplamından 7'ye ve 5'e, yani 35'e bölünen[6] sayıların toplamını çıkarmalıyız:

$$35 \cdot 1 + 35 \cdot 2 + \cdots + 35 \cdot 28 = 35 \cdot (1 + 2 + \cdots + 28) = 35 \cdot \frac{28 \cdot 29}{2} = 35 \cdot 406 = 14.210.$$

Demek ki yanıt $71.071 - 14.210 = 56.861$ imiş. (Bana güvenmeyip hesapları bir de siz yapın. Benim matematiğim pek iyi değildir.)

3.120. 1, 4, 7, 10 gibi 3'ün katlarına 1 eklenerek elde edilen sayılara "$3n + 1$ türünden sayılar" diyelim. 1 ve 100 dahil, 1'den 100'e kadar $3n+1$ türünden sayıların toplamı kaçtır? Eğer $n = 0$ ise $3n + 1 = 1$, eğer $n = 33$ ise $3n + 1 = 100$ olur. Demek ki n en az 0, en fazla 33 olabiliyor. Dolayısıyla $3 \cdot 0 + 1$'den $3 \cdot 33 + 1$'e kadar olan sayıları, yani

$$3 \cdot 0 + 1,\ 3 \cdot 1 + 1,\ 3 \cdot 2 + 1,\ \ldots,\ 3 \cdot 33 + 1$$

sayılarını toplayacağız. Burada tam 34 tane sayı var. 1'leri toplarsak 34 eder. Bu 34'e 3'lerin katlarının toplamını, yani

$$3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \ldots + 3 \cdot 33 + 1 = 3 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 33) = 3 \cdot \frac{33 \cdot 34}{2} = 3 \cdot 33 \cdot 17 = 1683$$

sayısını eklemeliyiz. Sonuç

$$1683 + 34 = 1717$$

çıkar.

3.121. Aşağıdaki toplamları hesaplayalım:

$$\begin{array}{lcrcl} 1 & = & 1 & = & 1^2 \\ 1+3 & = & 4 & = & 2^2 \\ 1+3+5 & = & 9 & = & 3^2 \\ 1+3+5+7 & = & 16 & = & 4^2 \\ 1+3+5+7+9 & = & 25 & = & 5^2 \end{array}$$

Hep bir tamkare elde ediyoruz. Nitekim ilk n tek sayının toplamı her zaman bir karedir. Bir kenarı 4 uzunluğunda olan bir kare alalım ve kareyi aşağıdaki gibi 16 tane küçük kareye bölelim. Şimdi kareleri aşağıdaki şekildeki gibi sayalım.

[6]Henüz asal sayıları görmedik (yakında göreceğiz) ama, okurun da çok iyi bildiği gibi, 5'e ve 7'ye bölünen sayılar tam tamına 35'e bölünen sayılardır.

7	6	5	4
5	4	3	3
3	2	2	2
1	1	1	1

Sol alt köşede 1 (beyaz) kare var. Bu kareye 3 (açık gri) kare dokunur: biri sağından, biri tepesinden, öbürü de sağ üst köşesinden (yani çaprazından.) Bu yeni kareye 5 yeni kare (biraz daha koyu gri) dokunur: ikisi sağından, ikisi tepesinden, biri de çaprazından. Sonra 7 yeni kare (koyu gri)... 1, 3, 5, 7, ... Bunların toplamı küçük karelerin sayısına, yani 4^2'ye eşit. Görüldüğü gibi ilk 4 tek sayının toplamı 4^2'dir.

İlk 5 karenin toplamının gerçekten 25 olduğunu görmek için, yukarıdaki karenin kuzey ve doğu sınırlarına 9 kare daha ekleyelim: 4'ü doğuya, 4'ü kuzeye, 1'i de kuzeydoğuya. Bu sefer 5×5 boyutunda bir kare elde ederiz. Demek ki $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$ olur.

3.122. Yukarıdaki eşitliği biraz daha cebirsel biçimde kanıtlayalım. İlk n tek sayıyı yazalım önce:

$$1, 3, 5, \ldots, (2n-1).$$

Okur bunların gerçekten ilk n tek sayı olduğunu kontrol etmelidir, örneğin $n = 5$ alarak. Daha doğru bir düşünme biçimi şöyledir: Tek sayılar $2k-1$ biçiminde yazılır. En küçük tek sayı $k = 1$ iken elde edilir. Bir sonraki $k = 2$ için elde edilir. $k = n$ olduğunda da n'inci tek sayıyı elde ederiz. k, 1'den n'ye kadar değiştiğinde $2k-1$ sayıları 1'den $2n-1$'e kadar değişir ve alınan k'ların sayısı tam tamına n'dir. Bu sayıları şöyle yazalım:

$$0+1,\ 2+1,\ 4+1,\ \ldots,\ (2n-2)+1.$$

Yukarıdaki listede tam n tane sayı var ve her sayıda bir tane $+1$ var. Bu $+1$'leri ayrı toplayalım. n tane $+1$ tabii ki n eder. Şimdi geri kalan

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ (2n-2)$$

sayılarını toplayalım. En baştaki 0'ı saymayalım,

$$2,\ 4,\ \ldots,\ (2n-2)$$

sayılarını toplamalıyız. Bu sayıların hepsi çift olduğundan, sayıları 2'ye bölüp toplayalım, çıkanı 2'yle çarparız:

$$2+4+\cdots+(2n-2) = 2\cdot(1+2+\cdots+(n-1)) = 2\cdot\frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n.$$

Bu sayıya söz verdiğimiz gibi $+1$'lerin toplamı olan n'yi eklersek n^2 buluruz.

Alıştırmalar

3.123. 20 ve 100 dahil, 20'den 100'e kadar olan sayıların toplamı kaçtır?

3.124. 1'den 100'e kadar olan 3'e bölünen doğal sayıların toplamı kaçtır?

3.125. 1'den 500'e kadar olan 7'ye bölünen doğal sayıların toplamı kaçtır?

3.126. 1'den 500'e kadar olan ama 7'ye bölünmeyen doğal sayıların toplamı kaçtır?

3.127. 1'den 1000'e kadar olan ve 7'ye bölünen ama 3'e bölünmeyen doğal sayıların toplamı kaçtır?

3.128. 20 ve 100 dahil, 20'den 100'e kadar olan ve 5'e bölünen sayıların toplamı kaçtır?

3.129. 1, 5, 9, 13 gibi 4'ün katlarına 1 eklenerek elde edilen sayılara "$4n+1$ türünden sayılar" diyelim. 1 dahil, 1'den 200'e kadar $4n+1$ türünden sayıların toplamı kaçtır?

3.130. 2, 7, 12, 17 gibi 5'in katlarına 2 eklenerek elde edilen sayılara "$5n+2$ türünden sayılar" diyelim. 1 ile 200 arasında olan $5n+2$ türünden sayıların toplamı kaçtır?

3.131. **Sihirli Kare.** $3 \times 3 = 9$ tane küçük kareden oluşmuş 3×3 boyutlu bir karenin içine 1'den 9'a kadar olan doğal sayıları öyle yerleştirin ki, her sıranın, her sütunun ve her iki çaprazın sayılarının toplamı hep eşit çıksın. İşte bir çözüm:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Her sıranın, her sütunun ve her iki çaprazın sayılarının toplamının ancak 15'e eşit olabileceğini kanıtlayın.

$1 \leq x < y < z \leq 15$ eşitsizliklerini ve aynı zamanda $x+y+z = 15$ eşitliğini sağlayan tüm x, y ve z sayılarını bulun. x, y ve z'den birinin 5 olduğu kaç çözüm var? Buradan karenin ortasındaki sayının hep 5 olması gerektiğini çıkarın.

3.132. Bir önceki alıştırmadaki gibi bir sayı karesine sihirli kare adı verilir. Yukarıdaki sihirli kare 3×3 boyutundaydı ve 1'den 9'a kadar sayılar yer alıyordu. 4×4 boyutlu bir sihirli karede 1'den 16'ya kadar sayılar yer alır. $n \times n$ boyutundaki bir sihirli karenin satır, sütun ya da çaprazlarının ortak toplamı (bu toplama sihirli toplam adı verilir) kaçtır? 4×4 boyutunda bir sihirli kare inşa edin. 2×2 boyutunda sihirli kare olmadığını gösterin.

4. Bölme ve Bölünme

Bölme konusunu daha önce işlemiştik. Burada daha etraflıca ele alacağız. En baştan başlayıp tanımları tekrar etmenin bir zararı olamaz.

$\mathbb{N}$ kümesi çıkarma işlemi altında kapalı olmadığı gibi, bölme işlemi altında da kapalı değildir. Bir doğal sayıyı 0'a zaten bölemeyiz, ama 0'dan farklı doğal sayılar da çoğu zaman birbirine (doğal sayılarda) bölünmezler, mesela 48 sayısı 6'ya bölünür (sonuç 8 çıkar) ama 6 sayısı 48'e doğal sayılarda bölünmez, çünkü $6/48 = 1/8$ olur ve $1/8$ bir doğal sayı değildir. Bu yüzden "6, 48'i doğal sayılarda bölmez" diyeceğiz.

Bölmenin matematiksel tanımı şöyle: a ve b iki doğal sayı olsun. Eğer $ax = b$ eşitliğini sağlayan bir x doğal sayısı varsa a'nın b'yi **doğal sayılarda** böldüğü söylenir ve bu

$$a|b$$

olarak gösterilir. Bu durumda a'nın, b'nin bir ***böleni*** ya da bir ***çarpanı*** olduğu söylenir. Örneğin 12'nin tüm bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 12'dir.

Bazen "doğal sayılarda bölmek" yerine kısaca "bölmek" diyeceğiz. Örneğin 2, 3'ü (doğal sayılarda) bölmez, çünkü $2x = 3$ eşitliğini sağlayan bir x doğal sayısı yoktur; 2 sadece çift doğal sayıları böler. Öte yandan 3, 12'yi böler çünkü $3x = 12$ eşitliğini sağlayan bir x doğal sayısı vardır: 4.

Eğer a, b'yi bölüyorsa, bölmenin tanımına göre, bir x doğal sayısı için $b = ax$ olur, dolayısıyla

$$b\mathbb{N} = (ax)\mathbb{N} = a(x\mathbb{N}) \subseteq a\mathbb{N},$$

yani

$$b\mathbb{N} \subseteq a\mathbb{N}$$

olur. Bunun ters istikameti de doğrudur. Nitekim $b\mathbb{N} \subseteq a\mathbb{N}$ varsayımını yapalım. $b = b \cdot 1$ olduğundan, $b \in b\mathbb{N}$ olur; demek ki, $b\mathbb{N} \subseteq a\mathbb{N}$ varsayımından dolayı, b aynı zamanda $a\mathbb{N}$ kümesinin de bir ögesidir, yani b, a'nın bir doğal sayı katıdır, yani bir x doğal sayısı için $b = ax$ olur, yani a, b'yi böler. Özetle,

$$a|b \text{ ile } b\mathbb{N} \subseteq a\mathbb{N}$$

önermeleri matematiksel açıdan "eşdeğerdir", yani biri doğruysa diğeri de doğrudur. Bu matematiksel eşdeğerlik, matematikte simgesel olarak şöyle gösterilir:

$$a|b \iff b\mathbb{N} \subseteq a\mathbb{N}. \tag{1}$$

Aradaki $\iff$ simgesi "ancak ve ancak" olarak okunur. Dikkat ederseniz sol taraftaki ifade a ve b sayılarıyla ilgili, ama sağ taraftaki ifade $a\mathbb{N}$ ve $b\mathbb{N}$ kümeleriyle ilgili. Modern matematikte sayılardan ve ögelerden ziyade kümelere odaklanılır.

Özel Durumlar. Verdiğimiz tanıma göre 1 tüm doğal sayıları böler. Nitekim her b doğal sayısı için $1x = b$ denkleminin bir çözümü vardır: $x = b$.

Ama 2 sayısı tüm doğal sayıları bölmez; 2'nin böldüğü doğal sayılara bilindiği üzere ***çift doğal sayı*** denir. Çift olmayan doğal sayılara da ***tek*** doğal sayı denir. Çift doğal sayılar bir n doğal sayısı için $2n$ biçiminde yazılır. Tek doğal sayılar ise bir n doğal sayısı için $2n+1$ biçiminde yazılır. Bu yüzden çift doğal sayılar kümesi $2\mathbb{N}$, tek doğal sayılar kümesi de $2\mathbb{N}+1$ olarak gösterilir.

Tanıma göre her sayı 0'ı böler. Nitekim a hangi doğal sayı olursa olsun, $ax = 0$ denkleminin bir çözümü vardır, $x = 0$ bir çözümdür. Bunun özel bir durumu olarak, 0'ın 0'ı böldüğünü görüyoruz; gerçekten de $0x = 0$ denkleminin doğal sayılarda bir çözümü vardır, mesela $x = 5$. (Ama aslında her x doğal sayısı $0x = 0$ denkleminin bir çözümüdür.)

Gene tanıma göre 0 sadece 0'ı böler. Nitekim $0x = b$ denkleminin doğal sayılarda sadece $b = 0$ ise çözümü vardır. Her x için $0x = 0$ olduğundan, her sayı $0x = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

1 hangi doğal sayılara bölünür? 1 sadece 1'e bölünür, başka da bir sayıya bölünmez. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. Tabii kanıt, önceki yıllardan bildiklerinize değil, verdiğimiz tanıma dayanmalı, yoksa 1'in sadece 1'e bölündüğünü kreşteki bebeler de biliyor...

Bütün bu söylediklerimizi yukarıdaki (1) eşdeğerliğinden de çıkarabilirdik. Bu eşdeğerlikte $a = 1$ alırsak, 1'in tüm b doğal sayılarını böldüğünü görürüz. Eğer $a = 0$ alırsak, 0'ın sadece 0'a bölündüğünü görürüz. Eğer $b = 1$ alırsak, 1'in sadece 1'e bölündüğünü görürüz. Eğer $b = 0$ alırsak, 0'ın her a doğal sayısına bölündüğünü görürüz.

Her ne kadar 0 doğal sayısı 0'ı böler dediysek de "0 bölü 0 diye bir sayı vardır" demedik! Henüz "b bölü a" diye bir kavram tanımlamadık. İleride (iki sonraki paragrafta!) "b bölü a" kavramını tanımladığımızda a'nın 0 olmamasına özen göstereceğiz.

Okurun burada anlatılanları gayet iyi bildiğini biliyorum. Amacım matematikte tanımın önemine dikkat çekmek. Matematikte her kavram (küme ve ögesi olmak kavramları dışında aslında) net bir biçimde tanımlanmalı.

Özellikler. $x|y$ ilişkisinin birkaç özelliğini aşağıda sıraladık: Her x, y, $z \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&x|x\\
&x|y \text{ ve } y|x \text{ ise } x = y\\
&x|y \text{ ve } y|z \text{ ise } x|z\\
&1|x\\
&x|0\\
&0|x \text{ ise } x = 0
\end{aligned}$$

olur. İkinci özelliğin tamsayılarda geçerli olmadığına dikkatinizi çekeriz, nitekim -5 ve 5 birbirlerini tamsayılarda böler ama eşit değildirler.

Alıştırmalar

4.1. 8'in tam dört tane böleni vardır: 1, 2, 4 ve 8. Tam dört tane böleni olan en küçük sayı 6'dır: 1, 2, 3, 6. Tam dört tane böleni olan on tane daha sayı bulun.

4.2. Tek sayıda böleni olan ilk on sayıyı yazın. Ne farkediyorsunuz? Farkettiğinizin nedenini açıklayabilir misiniz? Yani farkettiğinizi kanıtlayabilir misiniz?

4.3. Ne tür doğal sayıların tüm bölenleri tektir?

4.4. Hangi sayıların 1 dışındaki tüm bölenleri çift sayıdır?

4.5. Eğer n tekse, n sayısının $1 + 2 + \cdots + n$ sayısını böldüğünü kanıtlayın. Ama n çiftse bu hiçbir zaman doğru olmaz.

4.6. Her n doğal sayısı için 3 sayısı $n^3 - n$'yi, 5 sayısı $n^5 - n$'yi, 7 sayısı $n^7 - n$'yi böler. Bu önermelerin doğruluğunu ister kanıtlayın, ister birkaç örnekle doğruluğa ikna olun. (Bkz. Teorem 7.6.) Ama $2^9 - 2$ sayısı 9'a bölünmez.

Bölü. "b bölü a" kavramını matematiksel olarak tanımlayalım. a ve b birer doğal sayı olsun. Diyelim b, a'yı (doğal sayılarda) bölüyor, yani bir x doğal sayısı için $ax = b$ eşitliği sağlanıyor. Eğer $ax = b$ eşitliği **tek** bir x doğal sayısı için sağlanıyorsa, ki hemen hemen her zaman öyle olur, o zaman x sayısına "b bölü a" deriz. Örneğin $3x = 12$ eşitliğinin tek bir çözümü vardır: $x = 4$. Dolayısıyla "12 bölü 3" sayısı 4'e eşit olur. Bir başka örnek: Eğer $a \neq 0$ ise, o zaman da $ax = 0$ eşitliğinin tek bir çözümü vardır: $x = 0$; demek ki bu durumda da "0 bölü a" sayısı 0 olur.

Ama $0x = 0$ eşitliğinin bir değil, sonsuz sayıda çözümü vardır, her doğal sayı bu eşitliğin bir çözümüdür. Demek ki "0 bölü 0" diye bir sayı yok. Görüldüğü üzere "b bölü a" kavramının tanımı "0 bölü 0" diye bir sayının varlığını yasaklıyor. Tanımımız "0 bölü 0" ifadesini tanımlamadığından, bazen "0 bölü 0" ***tanımsızdır*** denir.

İsteseydik, özel bir paragraf ayırarak, "0 bölü 0" ifadesini tanımlayabilirdik, mesela "0 bölü 0, 5 olsun" diyebilirdik, ama istemedik, çünkü "0 bölü 0" ifadesini tanımlamak işimize gelmez, tam tersine işimizi zorlaştırır. "0 bölü 0" ifadesini tanımlayıp tanımlamamak tamamen bizim irademize kalmıştır. Eğer günün birinde "0 bölü 0"ı 5 olarak tanımlamanın işinize geleceğini görürseniz, hiç çekinmeyin!

Eğer $a \neq 0$ ise, "0 bölü a" diye bir sayı vardır, çünkü eğer $a \neq 0$ ise $ax = 0$ denkleminin tek bir çözümü vardır, o da $x = 0$ çözümüdür. Demek ki eğer $a \neq 0$ ise, "0 bölü a" ifadesi tanımlanmıştır ve 0'a eşittir. Bu dediğimiz gerçekle örtüşüyor, mesela 0 lirayı 50 kişi arasında eşit paylaştırırsanız herkese 0 lira düşer! Yani "0 bölü 50" gerçek hayatta da 0'a eşittir. Ama - tekrarlayalım- "0 bölü 0" ifadesi tanımsızdır, daha doğrusu tanımlanmamıştır, özellikle tanımlanmamıştır, bilerek ve isteyerek tanımsız bırakılmıştır.

"a bölü b" diye bir doğal sayı olduğunda bunun

$$a/b \text{ ya da } \frac{a}{b} \text{ ya da } ab^{-1}$$

olarak yazıldığını önceki eğitim yıllarımızdan biliyoruz tabii. Bu konuya kesirli sayılar konusuna geldiğimizde daha fazla yer ayıracağız.

Ortak Bölen. 11, hem 66'yı hem de 77'yi böler. Yani 11 sayısı 66 ve 77'nin ortak bölenidir, daha doğrusu iki ortak böleninden biridir, diğer ortak böleni 1'dir.

6 hem 36'yı hem de 48'i böler. 6 sayısı 36 ve 48'in ortak bölenidir. 12, bu iki sayının bir başka ortak bölenidir. Bu iki sayıyı 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 böler, bu sayılar 36'yla 48'in tüm ortak bölenleridir.

1 her sayıyı böler. 1'den başka ortak böleni olmayan doğal sayılara ***aralarında asal*** denir. Örneğin 15 ve 22 aralarında asaldırlar. 6, 10 ve 15, ikişer ikişer aralarında asal değildir ama hepsi birden aralarında asaldır, hepsini bölen yegâne doğal sayı 1'dir çünkü. Ama 33 ve 77 aralarında asal değildir, her ikisi de 11'e bölünür. 15, 21 ve 33 de aralarında asal değildir.

Eğer bir a sayısı b ve c'yi bölüyorsa, o zaman o a sayısı $b+c$'yi de böler. Nitekim eğer bir $x \in \mathbb{N}$ için $ax = b$ ve bir $y \in \mathbb{N}$ için $ay = c$ oluyorsa,

$$b + c = ax + ay = a(x + y)$$

olur, yani a, $b+c$'yi böler. Aynı şey $b \geq c$ ise $b - c$ için de doğrudur:

$$b - c = ax - ay = a(x - y)$$

olur. Bu söylediklerimizden şu çıkar: $a \geq b$ olsun; a ve b'nin ortak bölenleri $a-b$ ve b'nin ortak bölenleridir. Bu sayede iki sayının ortak bölenlerini kolaylıkla bulabiliriz. Oldukça meşakkatli hesaplar gerektiren bir örnek verelim.

Örnekler

4.7. Diyelim 43.725 ile 13.565'in ortak bölenlerini bulmak istiyoruz.

$$43.725 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleri,

$$43.725 - 13.565 = 30.160 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$30.160 - 13.565 = 16.595 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$16.595 - 13.565 = 3.030 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$3.030 \text{ ile } 13.565 - 3.030 = 10.535$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$3.030 \text{ ile } 10.535 - 3.030 = 7.505$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$3.030 \text{ ile } 7.505 - 3.030 = 4.475$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$3.030 \text{ ile } 4.475 - 3.030 = 1.445$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$3.030 - 1.445 = 1.585 \text{ ile } 1.445$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$1.585 - 1.445 = 140 \text{ ile } 1.445$$

sayılarının ortak bölenleridir. Ama bu iki sayının ortak bölenleri

$$140 \text{ ile } 1.445 - 140 = 1.305$$

sayılarının ortak bölenleridir. Bu süreci tabii ki devam ettirebiliriz:

43.725	13.565
30.160	13.565
16.595	13.565
3.030	13.565
3.030	10.535
3.030	7.505
3.030	4.475
3.030	1.445
1.585	1.445
140	1.445
140	1.305
140	1.165
140	1.025

Biraz uzun sürdü, ki daha bitmedi, süreci devam ettirebiliriz. Ne zaman biter bu süreç? Hiç bitmez ama iki sayıdan biri 0 olduğunda bitirebiliriz; çünkü iki sayıdan biri 0 olduğunda büyük sayıdan küçük sayıyı (0'ı) çıkardığımızda aynı sayıları buluruz ve devam etmenin bir anlamı kalmaz. İki sayıdan birinin 0 olması da bir önceki aşamada iki sayının birbirine eşit olması demektir. Eğer yukarıdaki süreci devam ettirirsek, bir zaman sonra 5 ve 5 sayılarına varacağız. Demek ki 43.725 ile 13.565 sayılarının ortak

bölenleri 5 ile 5 sayılarının ortak bölenleri aynıymış, yani 43.725 ile 13.565 sayılarının ortak bölenleri 5'in ortak bölenleriymiş yani sadece 1 ve 5'miş.
Eğer küçük sayıyı büyük sayıdan teker teker çıkarmak yerine tek bir hamlede birkaç defa çıkarırsak süreç kısalır. Örneğin yukarıdaki tabloda 43.725'ten 13.565'i peşpeşe üç defa çıkarmışız. Bunu tek bir hamlede yapsaydık tablomuz daha da kısalır. Bu yeni yöntemle tablo bir kitap sayfasına sığacak kadar kısalabilir:

43.725	13.565
3.030	13.565
3.030	1.445
140	1.445
140	45
5	45
5	5

Bu örnekten sonra yukarıdaki olguyu teorem olarak yazalım:

Teorem 4.1. *a, b ve x üç doğal sayı olsun. a ile b'nin ortak bölenleriyle $a+bx$ ile b'nin ortak bölenleri aynıdır. Ayrıca eğer $a \geq bx$ ise a ile b'nin ortak bölenleriyle $a-bx$ ile b'nin ortak bölenleri aynıdır.*

Kanıt: İkinci önermeyi kanıtlayalım. Eğer bir d sayısı hem a'yı hem b'yi bölüyorsa, elbette bu d sayısı $a-bx$ sayısını da böler. Diğer istikamette: Eğer bir d sayısı hem $a-bx$'i hem de b'yi bölüyorsa, elbette bu d sayısı a'yı da böler çünkü $a = (a-bx)+bx$ eşitliği geçerlidir. Birinci önermenin kanıtı da benzerdir ve okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

$B(a)$, a'nın bölenlerinden oluşan küme olsun. Örneğin

$$B(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

ve $B(0) = \mathbb{N}$ olur. Tanıma göre $B(a) \cap B(b)$ kümesi a ve b'nin ortak bölenleri kümesidir. Bu kümeyi $B(a,b)$ olarak gösterelim:

$$B(a,b) = B(a) \cap B(b) = \{d \in \mathbb{N} : d|a \text{ ve } d|b\}.$$

Teoreme göre eğer $a \geq b$ ise

$$B(a,b) = B(a-b,b)$$

olur. Ayrıca $B(a,b) = B(b,a)$ eşitliği de bariz. Ve her n doğal sayısı için $B(a,an)$ kümesi aynen a'nın bölenlerinden oluşur, yani $B(a,an) = B(a)$ olur. Buradan $B(a,0) = B(a)$ çıkar. Şimdi bu olguları kullanarak 375 ve 105'in ortak bölenlerini bulalım:

$$\begin{aligned} B(375,105) &= B(270,105) = B(165,105) = B(60,105) \\ &= B(60,45) = B(15,45) = B(15) \\ &= \{1, 3, 5, 15\}. \end{aligned}$$

Eğer a ve b sayılarının her ikisi birden 0 değilse, o zaman $B(a,b)$ kümesi sonlu bir sayı kümesidir ve bu durumda en büyük bir ögesi vardır; bu durumda $B(a,b)$ kümesinin en büyük ögesine a ve b'nin ***en büyük ortak böleni*** adı verilir ve bu sayı $\text{obeb}(a,b)$ olarak, bazen de kısaca (a,b) olarak gösterilir. Yukarıda yaptığımız hesaplardan $\text{obeb}(375,105) = 15$ olduğu anlaşılıyor. İki pozitif sayının obeb'i en az 1 olmalıdır elbette. İki sayının aralarında asal olması için de en büyük ortak bölenlerinin 1 olması gerekir.

Bir önceki örnekten de hemen anlaşılacağı üzere eğer $B(a,b) = B(d)$ ise, d sayısı a ve b'nin en büyük ortak bölenidir. Nitekim $B(a,b) = B(d)$ eşitliği, a ve b'nin ortak bölenlerinin aynen d'nin bölenleri olduğunu söylüyor, demek ki bu durumda d sayısı a ve b'nin en büyük ortak böleni olur. Bunu not edelim.

Teorem 4.2. *a ve b her ikisi de 0 olmayan iki doğal sayı ve $d = \text{obeb}(a,b)$ olsun. O zaman a ve b'nin ortak bölenleri tam olarak d'nin bölenleridir.* □

Aşağıdaki kolay sonucu da aradan çıkaralım:

Teorem 4.3. *a ve b her ikisi de 0 olmayan iki doğal sayı ve $d \in \mathbb{N}$ olsun.*
i. *Eğer $d = \text{obeb}(a,b)$ ise, $a = da'$ ve $b = db'$ eşitliklerini sağlayan birbirine asal a' ve b' doğal sayıları vardır.*
ii. *Eğer a ve b birbirine asal iki pozitif doğal sayı ise, her $d > 1$ doğal sayısı için $d = \text{obeb}(da,db)$ olur.*

Kanıt: Önce birinci önermeyi kanıtlayalım. $d = \text{obeb}(a,b)$ olduğundan, d sayısı hem a hem de b sayısını böler. Dolayısıyla $a = da'$ ve $b = db'$ eşitliklerini sağlayan a' ve b' doğal sayıları vardır. Şimdi a' ve b' sayılarının birbirine asal olduklarını kanıtlayalım. Eğer $0 < e$ doğal sayısı a' ve b' doğal sayısını bölüyorsa o zaman, $a = da'$ ve $b = db'$ eşitliklerinden dolayı, de sayısı hem a'yı hem de b'yi böler, yani de sayısı a ve b'nin ortak bölenidir. Ama $d \le de$ olduğundan, bundan $d = de$ ve $e = 1$ çıkar. Demek ki a' ve b' birbirine asal doğal sayılardır.

Sıra ikinci önermeye geldi. Bir an için ikinci önermenin yanlış olabileceğini varsayalım. Önermenin yanlış olduğu doğal sayılar arasından $a+b$ toplamının en küçük olduğu a ve b sayılarını seçelim. Eğer $a = b$ ise, a ile b aralarında asal olduklarından, $a = b = 1$ olmalı ve bu durumda önerme elbette doğru. Bundan böyle $a \neq b$ varsayımını yapalım. Diyelim $b < a$. O zaman b ile $a - b$ de aralarında asal olduğundan ve bu iki sayının toplamı olan $b + (a-b)$ sayısı, yani a sayısı $a + b$ toplamından küçük olduğundan,

$$\text{obeb}(d(a-b), db) = d$$

olur. Ayrıca

$$\text{obeb}(d(a-b), db) = \text{obeb}(da - db, db) = \text{obeb}(da, db)$$

olduğundan istediğimiz kanıtlanmış olur. □

Notlar

4.8. Metinde obeb$(0,0)$'ı tanımsız bıraktık. Bazı durumlarda obeb$(0,0) = 0$ tanımını yapmak yararlı olur. Mesela bu tanımla istisnasız her n doğal sayısı için obeb$(0,n) = n$ olur, yani bu tanım sayesinde, 0, obeb işleminin etkisiz ögesi olur.

4.9. Her n doğal sayısı için obeb$(1,n) = 1$ olduğundan, 1, obeb işleminin yutan ögesidir. (Örneğin 0 da çarpma işleminin yutan ögesidir. Toplama için yutan öge yoktur.)

4.10. obeb$(x,y) =$ obeb(y,x) eşitliği bariz, yani obeb işlemi değişme özelliğini sağlar.

4.11. Yukarıdaki notlarda da fısıldadığımız gibi, obeb, aynen toplama ve çarpma gibi ikili bir işlemdir. Birleşme özelliğini bile sağlar: Her a, b, c doğal sayısı için,

$$\text{obeb}(a,\ \text{obeb}(b,c)) = \text{obeb}(\text{obeb}(a,b),\ c)$$

olur. Bunun kanıtı oldukça kolaydır ve okura alıştırma olarak bırakılmıştır. Dolayısıyla bu ifadeler yerine

$$\text{obeb}(a,\ b,\ c)$$

yazabiliriz. Gelecekte öyle de yapacağız. obeb$(a,\ b,\ c)$ sayısı, a'yı, b'yi ve c'yi bölen en büyük doğal sayıdır; bunun tek istisnası $a = b = c = 0$ olduğu durumdur. Genel olarak, eğer X, hepsi 0 olmayan ve boşküme olmayan bir doğal sayı kümesiyse, obeb X, X'in ortak bölenlerinin en büyüğünü simgeleyecek.

Örnekler

4.12. Eğer d sayısı a'yı bölüyorsa, o zaman a/d sayısı da a'yı böler. Yani her d böleninin bir "arkadaşı" vardır, o arkadaş da a/d bölenidir. Örneğin 2, 42'yi böler, bu yüzden de 21, 42'yi böler. Bu yüzden bölenler genelde ikişer ikişer gelirler. 42'nin tüm bölenlerini arkadaşlarını yanyana yazmak suretiyle yazalım:

1	42
2	21
3	14
6	7

Görüldüğü üzere 42'nin tam 8 tane böleni var. Ama bazen bir bölenin arkadaşı yine kendisidir, yani d böleni arkadaşı olan a/d sayısına eşit olabilir, yani $d = a/d$ olabilir. Bu da ancak $a = d^2$ ise mümkündür. Demek ki *kare sayıların bölen sayısı tektir, kare olmayan sayıların bölen sayısı ise çifttir.* Örneğin 36 sayısının bölenleri şunlardır:

1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

Toplam 7 tane, çünkü 6'nın arkadaşı gene 6; 6 böleni dışında diğer tüm bölenler arkadaşlarıyla birlikte ikişer ikişer geliyor.

4.13. $(5\mathbb{N}+2) \cap (3\mathbb{N}+1) = 15\mathbb{N}+7$ eşitliğini kanıtlayalım.
Önce $15\mathbb{N}+7 \subseteq (5\mathbb{N}+2) \cap (3\mathbb{N}+1)$ içindeliğini kanıtlayalım. Sol taraftaki kümeden herhangi bir sayı alalım, diyelim $15n+7$ sayısını aldık.

$$15n+7 = 3(5n+2)+1 \in 3\mathbb{N}+1$$

ve

$$15n+7 = 5(3n+1)+2 \in 5\mathbb{N}+2$$

olduğundan istediğimiz kanıtlanmıştır. Bu kolay istikametti. Şimdi diğer istikameti kanıtlayalım.
$(5\mathbb{N}+2)\cap(3\mathbb{N}+1)$ kümesinden rastgele bir a seçelim ve bu sayıyı x ve y doğal sayıları için $5x+2$ ve $3y+1$ biçiminde yazalım. Demek ki

$$a = 5x + 2 = 3y + 1.$$

Buradan

$$6a = 30x + 12 \text{ ve } 5a = 15y + 5$$

buluruz. Taraf tarafa çıkarırsak,

$$a = 6a - 5a = (30x + 12) - (15y + 5) = 15(2x - y) + 7 \in 15\mathbb{N} + 7$$

buluruz. (Neden $2x - y$ negatif bir sayı olamaz?)

4.14. Her ne kadar henüz tanımlamamışsak da okurun tamsayılarla aşina olduğunu biliyoruz. Bu örnekte bir ara doğal sayılar yerine tamsayılarda çalışacağız ve tamsayılarda çıkarma yapabileceğimizden her şey çok daha kolay olacak. n herhangi bir doğal sayı olsun. $3n-2$ ile $5n+4$'ün ortak bölenleri kümesini bulalım:

$$\begin{array}{rcl} B(3n-2, 5n+4) & = & B(3n-2, 2n+6) = B(n-8, 2n+6) \\ & = & B(n-8, n+14) = B(-22, n+14) = B(22, n+14) \\ & = & B(22, n-8) \subseteq B(22) = \{1,\ 2,\ 11,\ 22\} \end{array}$$

Her şey $n-8$'in 2'ye ve 11'e bölünüp bölünmemesine bağlı.
$n-8$'in 2'ye bölünmesiyle n'nin çift olması aynı şey.
$n-8$'in 11'e bölünmesi de $n \in 11\mathbb{N}+8$ demek.
Demek ki

$$B(3n-2, 5n+4) = \left\{ \begin{array}{ll} \{1,\ 2,\ 11,\ 22\} & \text{eğer } n \in 2\mathbb{N} \cap (11\mathbb{N}+8) = 22\mathbb{N}+8 \text{ ise} \\ \{1,\ 11\} & \text{eğer } n \in (2\mathbb{N}+1) \cap (11\mathbb{N}+8) = 22\mathbb{N}+19 \text{ ise} \\ \{1,\ 2\} & \text{eğer } n \in 2\mathbb{N} \text{ ama } n \notin 11\mathbb{N}+8 \text{ ise} \\ \{1\} & \text{eğer } n \in 2\mathbb{N}+1 \text{ ama } n \notin 11\mathbb{N}+8 \text{ ise} \end{array} \right.$$

4.15. $n > 0$ bir doğal sayı olsun. n'den küçükeşit ve n'ye asal olan doğal sayı sayısı $\varphi(n)$ olarak gösterilir. φ'ye ***Euler*** φ ***fonksiyonu*** adı verilir[1]. Örneğin $\varphi(6) = 2$ olur çünkü 6'dan küçük sadece 1 ve 5 doğal sayıları 6'ya asaldır. Birkaç örnek aşağıda:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(1) & = & 1 \\ \varphi(2) & = & 1 \\ \varphi(3) & = & 2 \\ \varphi(4) & = & 2 \\ \varphi(5) & = & 4 \\ \varphi(6) & = & 2 \\ \varphi(7) & = & 6 \\ \varphi(8) & = & 4 \end{array}$$

Eğer n ve m sayıları aralarında asalsa $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ olur. Bu olguyu bu kitapta kanıtlamayacağız.

4.16. Herhangi bir doğal sayı alalım, diyelim 12'yi aldık. 12'nin bölenlerini yazalım:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12.$$

[1] φ, Yunan alfabesinin küçük f harfidir ve "fi" olarak okunur. Büyük harf fi, Φ olarak yazılır.

Şimdi bu sayıların φ'lerini (bkz. bir önceki örnek) hesaplayıp toplayalım:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(12) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12.$$

Sonuç 12 çıktı, başladığımız sayıyı bulduk. Başka bir sayıyla aynı deneyi yapalım, mesela 14 ile. 14'ün bölenleri 1, 2, 7 ve 14. Bu sayıların φ'lerini alıp toplayalım:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(7) + \varphi(14) = 1 + 1 + 6 + 6 = 14.$$

Yine başladığımız sayıyı bulduk. Hangi sayıyı alırsanız alın, bölenlerinin φ'lerini toplarsanız hep sayının kendisini bulursunuz! Şaşırtıcı değil mi? Şaşırtıcı ama doğru ve kanıtı da çok çok zor değil. Gene de bu aşamada kanıtı vermeyeceğiz, bkz. [4. Kitap, Örnek 2.7].

Alıştırmalar

4.17. 3.969 ile 15.435'in tüm ortak bölenlerini bulun.

4.18. 13.969 ile 15.435'in tüm ortak bölenlerini bulun.

4.19. n herhangi bir doğal sayı olsun. n ile $n + 1$'in ortak bölenlerini bulun.

4.20. Hangi n doğal sayıları için n ile $n + 2$ aralarında asaldır?

4.21. Hangi n doğal sayıları için n ile $n + 18$ aralarında asaldır?

4.22. Hangi n doğal sayıları için n ile $3n + 15$ aralarında asal değildir?

4.23. Hangi n doğal sayıları için $2n + 7$ ile $3n + 8$ aralarında asaldır?

4.24. Hangi n ve k doğal sayıları için n ile $nk + 3$ aralarında asaldır?

4.25. Hangi n doğal sayıları için n ile $n^2 - n + 3$ aralarında asaldır?

4.26. $2\mathbb{N} \cap (11\mathbb{N} + 8) = 22\mathbb{N} + 8$ eşitliğini kanıtlayın.

4.27. $(2\mathbb{N} + 1) \cap (11\mathbb{N} + 8) = 22\mathbb{N} + 19$ eşitliğini kanıtlayın.

4.28. $(3\mathbb{N} + 1) \cap (4\mathbb{N} + 3) = 12\mathbb{N} + 7$ eşitliğini kanıtlayın.

4.29. $(2\mathbb{N} + 1) \cap (3\mathbb{N} + 1)$ kümesini $a\mathbb{N} + b$ biçiminde yazın.

4.30. $(3\mathbb{N} + 2) \cap (4\mathbb{N} + 3)$ kümesini $a\mathbb{N} + b$ biçiminde yazın.

4.31. $(6\mathbb{N} + 1) \cap (8\mathbb{N} + 1)$ kümesini $a\mathbb{N} + b$ biçiminde yazın.

4.32. $n \geq 1$ bir doğal sayı olsun. $4n - 3$ ile $7n + 2$ sayılarının en fazla iki ortak böleni olabileceğini kanıtlayın. Bu ortak bölenler hangi sayılar olabilir?

4.33. n bir doğal sayı olsun. $n^2 + 2 = (n + 2)(n - 2) + 6$ eşitliğinden hareketle

$$B(n^2 + 2, n + 2) \subseteq \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$$

eşitliğini kanıtlayın. ebob$(n^2 + 2, n + 2)$ hangi değerleri alabilir? obeb$(2002^2 + 2, 2002 + 2) = 6$ eşitliğini kanıtlayın.

Notlar

4.34. $n > 0$ bir doğal sayı olsun. n'yi bölen doğal sayıların toplamı $\sigma(n)$ olarak yazılır[2]. Örneğin

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

olur.

Eğer n ve m aralarında asal iki sayıysa,

$$\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$$

[2] σ, Yunan alfabesinin s harfidir, "sigma" olarak okunur. Bu sigmanın küçük harf şeklidir; büyük harf sigma, Σ olarak yazılır.

eşitliğini kanıtlamak çok zor değildir. (Ama bu kitapta kanıtlamayacağız.) Örneğin

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4 \text{ ve } \sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$$

olduğundan,

$$\sigma(12) = \sigma(3 \cdot 4) = \sigma(3)\sigma(4) = 4 \cdot 7 = 28$$

olur, aynen biraz önce hesapladığımız gibi.

4.35. $n > 0$ doğal sayısı için, $\sigma_0(n)$, n'nin n'den farklı bölenlerinin toplamını simgelesin. Örneğin

$$\sigma_0(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

olur. Eğer

$$\sigma_0(n) = n$$

eşitliği sağlanırsa n'ye ***mükemmel sayı*** denir. Örneğin 6 mükemmel bir sayıdır çünkü

$$\sigma_0(6) = 1 + 2 + 3 = 6$$

olur. 6 ayrıca ilk mükemmel sayıdır. Bir sonraki mükemmel sayı 28'dir:

$$\sigma_0(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Sonraki iki mükemmel sayı 496 ve 8128'dir. Bu ilk dört mükemmel sayıyı M.Ö. 4'üncü yüzyılda yaşamış olan Öklid de biliyordu. Daha sonra başka mükemmel sayılar da bulunmuştur ama hepsi çift sayıdır. Bugün hâlâ daha mükemmel olan bir tek sayının varlığı ya da yokluğu bilinmiyor. Bu soru günümüz matematiğinin en ünlü sorularından biridir. Bu konu hakkında Not 5.29'da daha fazla bilgi bulabilirsiniz.

4.36. **Collatz Sanısı.** 1'den büyük herhangi bir doğal sayı seçin. Sayı çiftse ikiye bölün, tekse üçle çarpıp bir ekleyin. Elde ettiğiniz yeni sayıya tekliğine ve çiftliğine göre yine bu işlemlerden birini uygulayın. Diyelim 7'yi seçtik. 7, tek olduğundan, 7'yi üçle çarpıp 1 ekleyelim. 22 elde ettik. 22 çift olduğundan, 22'yi ikiye bölmeliyiz, 11 elde ettik. 11 tek. Demek ki 11'i üçle çarpıp 1 ekleyeceğiz. 34 elde ederiz. 34'ü ikiye bölelim. 17 bulduk... Bunu böylece sürdürelim. İşte elde edeceğimiz dizi:

$$7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

1'e ulaştığımızda duralım. Başka sayılarla da başlayabiliriz:

3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
9, 28, 14, 7, ... (7'yle başlayan dizideki gibi 1'e ulaşırız.)
15, 36, 18, 9, ... (9'la başlayan bir önceki dizideki gibi 1'e ulaşırız.)
19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, ... (7'yle başlayan dizide 11 var.)
29, 88, 44, 22, 11, 58, 29, ... (7'yle başlayan dizide 11 var.)
51, 154, 77, 232, 116, 58, 29, ... (29'la başlayan dizideki gibi 1'e ulaşırız.)
100, 50, 25, 76, 38, 19, ... (19'la başlayan dizideki gibi 1'e ulaşırız.)
101, 304, 152, 76, ... (100'le başlayan dizide 76 var.)

Deneyin, hangi sayıyla başlarsanız başlayın, bir zaman sonra hep 1'e ulaşacaksınız. Aşağıdaki resim bazı küçük sayıların 1'e ulaşma hızını gösteriyor; bir üst kattan bir alt kata geçiliyor.

$$
\begin{array}{c}
32768, 5461, 5460, 5456, 909, 908, 151, 5440, 906, 1356, 4376, 848, 141, 140, 23, 832, 138, 136, 22, 768 \\
16384, 2730, 2728, 454, 2720, 453, 678, 2688, 424, 70, 416, 69, 68, 11, 384 \\
8192, 1365, 1364, 227, 1360, 339, 1344, 212, 35, 208, 34, 192 \\
4096, 682, 680, 113, 672, 106, 104, 17, 96 \\
2048, 341, 340, 336, 320, 53, 52, 48 \\
1024, 170, 168, 160, 26, 24 \\
512, 85, 84, 80, 13, 12 \\
256, 42, 40, 6 \\
128, 21, 20, 3 \\
64, 10 \\
32, 5 \\
16 \\
8 \\
4 \\
2 \\
1
\end{array}
$$

Nereden biliyoruz hep 1'e ulaşacağımızı? Aslında bilmiyoruz... Ama öyle sanılıyor. Çünkü birçok sayı denenmiş ve hep 1'e ulaşılmış. Her sayı denenmemiş elbet. Ama ilk 1 milyar sayı denenmiş ve hep 1'e ulaşılmış. Tüm sayıları denemeye zaman yetmez! Kanıtlamak lazım.

Her sayıya bu işlemi uyguladığımızda, hep 1'e ulaşacağımızı kanıtlayabilir miyiz? Matematikçiler bugüne değin bunu ne kanıtlayabilmişler ne de 1'e ulaşmayan bir doğal sayı bulabilmişler. Bazıları uğraşıyor... Bu sanıya ***Collatz sanısı*** adı verilir.

5. Asal Sayılar

1 ve kendisinden başka sayıya bölünmeyen sayılara ***asal sayı*** adı verilir, yalnız teknik nedenlerden dolayı 1 asal sayı kabul edilmez.

Örneğin 2 ve 3 asal sayıdır, ama 4 değildir, çünkü 4 sayısı 2'ye bölünür. 5 asaldır ama 6 değildir, çünkü 6 sayısı 2 ve 3'e bölünür. 1 de, sadece 1 olduğundan, başka nedenden değil, asal değildir. İşte ilk birkaç asal sayı:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53.$$

Asal sayılar kümesini $\mathbb{P}$ ile göstereceğiz:

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots\}.$$

0 sayısı asal değildir çünkü örneğin 26'ya bölünür.

Aslında "asal sayı" yerine "indirgenemez sayı" demek daha doğru olurdu ama "asal sayı" o kadar yaygın kullanılıyor ki değiştirmeyi uygun bulmadık[1].

Asal sayılar hem çok önemli hem de çok gizemlidir. Örneğin şifrelemede yoğun olarak kullanılırlar. Özel mesajlarınızın üçüncü kişiler tarafından okunmaması, banka hesaplarınıza başkalarının girememesi, askerî yazışmaların gizlilik içinde yapılabilmesi için çok büyük asal sayılara ihtiyaç vardır. Ama şifrelemeye kadar gitmeye gerek yok, asal sayılar sadece varlıklarıyla önemlidir! İnsanlar asal sayıları sadece teknolojik uygulamalarından dolayı değil, meraklarından da araştırmaktadırlar.

Bugün matematikte asal sayılarla ilgili yanıtı bilinmeyen birçok soru vardır. Bu sorulardan bazılarını bu bölümde ve bu ve sonraki kitaplarda göreceğiz.

Küçük asal sayıları bulmak kolay. Büyük asal sayıları bulmak da teorik olarak zor değil, 2'den başlayarak, asal olup olmadığını anlamaya çalıştığımız sayıyı kendisinden küçük sayılara bölmeye çalışın, sadece 1'e ve kendisine bölünüyorsa asaldır. Örneğin 611.953 sayısı belli ki 2'ye bölünmüyor, 3'e de

[1] Asal sayının matematiksel tanımı aslında şöyledir: "Bir $p \neq 0$, 1 doğal sayısı her ab çarpımını böldüğünde illa a'yı ya da b'yi bölmek zorunda kalıyorsa, p'ye asal sayı denir." Teorem 6.1'de, yukarıdaki metinde verilen tanımla bu dipnotta verilen tanım arasında matematiksel anlamda bir ayrım olmadığını göreceğiz, yani bir sayı bir anlamda asalsa, diğer anlamda da asaldır.

bölünmüyor, 2'ye bölünmediğinden 4'e ve 6'ya da bölünmez, belli ki 5'e de bölünmüyor, denerseniz 7'ye de bölünmediğini anlarsınız. Bunu böyle devam etmek gerekiyor. Tabii 611.954 ve sonrasına da bölünmez. Demek ki 611.952'ye kadar denemek yetiyor. Bayağı bir iş...

Eski Yunanlılar zamanından beri bilinen bu yöntem bir sayının asal olup olmadığını anlamak için en basit ama çok yavaş sonuç veren yöntemdir. Bugün daha hızlı sonuç veren çok daha sofistike yöntemler biliniyor. Örneğimizdeki 611.953 çok büyük bir sayı değil, bu sayının asal olup olmadığını hemen anlayan bilgisayar programları var, ama daha büyük sayıların asal olup olmadığını anlamak yüzlerce makineyi binlerce yıl meşgul edebilir.

Eski Yunanlılardan beri bilinen küçük asalları bulma yöntemini açıklayalım. Aşağıdaki gibi bir tablo hazırlayalım.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Biz tabloyu 10'a 10 boyutunda hazırladık, daha büyük ya da daha küçük boyutlarda bir tablo yapılabilir. Şimdi bu tablodan asal olmayan sayıları teker teker sileceğiz, geriye sadece asal olanlar kalacak.

İlk olarak 0 ve 1'i silelim, bu iki sayının asal olmadığını biliyoruz. Sonra silinmemiş ilk sayı olan 2'yi ele alalım. 2'nin altını çizelim (ya da 2'yi çember içine alalım) ve 2 dışında 2'ye bölünen 4, 6, 8 gibi tüm çift sayıları silelim. Bu aşamada tablo şu durumdadır:

~~0~~	~~1~~	$\underline{2}$	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49
~~50~~	51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79
~~80~~	81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89
~~90~~	91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99

Sildiklerimizin asal olamayacağını biliyoruz, çünkü bunlar 2'ye bölünen 2'den büyük sayılar. Teker teker asal olmayan sayıları sileceğiz ve geriye sadece asal sayılar kalacak, yani sayıları bir nevi elekten geçireceğiz.

Şimdi dokunmadığımız ilk sayı olan 3'ü ele alalım. 3'ün altını çizip, 3'e bölünen 3 dışındaki diğer tüm sayıları eleyelim. (Daha önce elenmişleri bir daha elemenin anlamı yok!) Tablo şimdi şöyle:

$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$
$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	17	$\cancel{18}$	19
$\cancel{20}$	$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	23	$\cancel{24}$	25	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	29
$\cancel{30}$	31	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	35	$\cancel{36}$	37	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$
$\cancel{40}$	41	$\cancel{42}$	43	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	47	$\cancel{48}$	49
$\cancel{50}$	$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	53	$\cancel{54}$	55	$\cancel{56}$	$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	59
$\cancel{60}$	61	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	65	$\cancel{66}$	67	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$
$\cancel{70}$	71	$\cancel{72}$	73	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	77	$\cancel{78}$	79
$\cancel{80}$	$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	83	$\cancel{84}$	85	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\cancel{88}$	89
$\cancel{90}$	91	$\cancel{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	95	$\cancel{96}$	97	$\cancel{98}$	$\cancel{99}$

Sonra, dokunulmayan ilk sayı olan 5'i ele alalım. 5'in altını çizelim ve 5'e bölünen 5'ten büyük sayıları silelim.

Ardından, dokunulmamış ilk sayı olan 7'yi ele alacağız.

Bu yönteme böyle devam edelim. 50'den sonraki sayıları ele almaya gerek yok, çünkü asal olmayan 100'den küçük bir sayı mutlaka 50'den küçük bir sayıya bölünür. Ama aslında 10'a kadar olan sayıları ele almak yeter, çünkü 100'den küçük asal olmayan bir sayı mutlaka 10'dan küçük bir sayıya bölünür. (Neden?)

En sonunda elimizde şu tablo kalır:

$\cancel{0}$	$\cancel{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\cancel{4}$	$\underline{5}$	$\cancel{6}$	$\underline{7}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$
$\cancel{10}$	$\underline{11}$	$\cancel{12}$	$\underline{13}$	$\cancel{14}$	$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	$\underline{17}$	$\cancel{18}$	$\underline{19}$
$\cancel{20}$	$\cancel{21}$	$\cancel{22}$	$\underline{23}$	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$	$\underline{29}$
$\cancel{30}$	$\underline{31}$	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$	$\cancel{36}$	$\underline{37}$	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$
$\cancel{40}$	$\underline{41}$	$\cancel{42}$	$\underline{43}$	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	$\underline{47}$	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$
$\cancel{50}$	$\cancel{51}$	$\cancel{52}$	$\underline{53}$	$\cancel{54}$	$\cancel{55}$	$\cancel{56}$	$\cancel{57}$	$\cancel{58}$	$\underline{59}$
$\cancel{60}$	$\underline{61}$	$\cancel{62}$	$\cancel{63}$	$\cancel{64}$	$\cancel{65}$	$\cancel{66}$	$\underline{67}$	$\cancel{68}$	$\cancel{69}$
$\cancel{70}$	$\underline{71}$	$\cancel{72}$	$\underline{73}$	$\cancel{74}$	$\cancel{75}$	$\cancel{76}$	$\cancel{77}$	$\cancel{78}$	$\underline{79}$
$\cancel{80}$	$\cancel{81}$	$\cancel{82}$	$\underline{83}$	$\cancel{84}$	$\cancel{85}$	$\cancel{86}$	$\cancel{87}$	$\cancel{88}$	$\underline{89}$
$\cancel{90}$	$\cancel{91}$	$\cancel{92}$	$\cancel{93}$	$\cancel{94}$	$\cancel{95}$	$\cancel{96}$	$\underline{97}$	$\cancel{98}$	$\cancel{99}$

Yukarıdaki tabloya ***Eratosthenes kalburu*** (eleği) adı verilir, yani sayıları kalburdan geçiriyoruz, asal olmayanlar ayıklanıyor, geriye asallar kalıyor. Yukarıdaki tabloda altı çizili sayıların hepsi asaldır ve bunlar, 1'den 100'e kadar olan asalların tümüdür.

Demek ki 100'den küçük 25 asal vardır, yani 100'den küçük sayıların dörtte biri asaldır. Bu oran giderek azalır ve çok daha ileri matematikte asalların oranının giderek azaldığı kanıtlanabilir.

Alıştırmalar

5.1. 101 ve 221 sayıları asal mıdır?

5.2. 200'den küçük tam 46 tane asal sayı vardır. Hepsini bulun.

5.3. 300'den küçük tam 62 tane asal sayı vardır. Boş zamanınız varsa hepsini bulun. Sürecin giderek daha fazla zaman aldığını göreceksiniz.

5.4. $\mathbb{T} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ olsun $\mathbb{P} = \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}\,\mathbb{T}$ eşitliğini gösterin.

5.5. $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}$ kümesinin en küçük on ögesini bulun.

5.6. 2 dışında tüm asal sayılar tek sayıdır elbette. Dolayısıyla $n^2 + 1$ sayısının asal olması için ya $n = 1$ olmalıdır ya da n çift olmalıdır. Nitekim $n = 1, 2, 4, 6$ için $n^2 + 1$ bir asaldır, sırasıyla 2, 5, 17, 37 elde ederiz. Ama $n = 8$ için $n^2 + 1 = 65$ elde edilir ve 65 asal değildir. $n = 18, 28, 38$ gibi son rakamı 8 olan sayılar için de bir asal elde etmeyiz. Neden? Son rakamı 2, 3 ya da 7 olanlar için ne diyebilirsiniz?

5.7. $n^2 - 1$ türünden sayılar sadece $n = 2$ için asal olabilirler. Neden?

5.8. $n^3 - n + 3$ türünden sayılar 3'e bölünürler, dolayısıyla $n = 1$ haricinde asal olamazlar. Bu sayılar neden hep 3'e bölünüyor?

5.9. Eğer $n \in 3\mathbb{N} + 1$ ve $n \neq 1$ ise $n^2 + n + 1$ sayısının asal olamayacağını kanıtlayın.

5.10. $n^2 + n + 1$ sayısının asal olduğu 10 tane n doğal sayısı bulun.

5.11. Eğer $n = 0, 1, 2, \ldots, 39$ ise $n^2 + n + 41$ sayısının asal olduğu biliniyor (Euler, 1772). Eğer $n = 40, 41$ ise $n^2 + n + 41$ sayısının asal olmadığını gösterin.

5.12. [AAZ, sayfa 6] $3n - 4$, $4n - 5$ ve $5n - 3$ sayılarının hepsinin asal olduğu tüm n pozitif doğal sayıları bulun. (İpucu: Önce bu üç sayıdan en az birinin çift olması gerektiğini kanıtlayın.)

5.13. $p \neq 0, 1$ şu özelliği sağlayan bir doğal sayı olsun: Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $p|xy$ ise ya $p|x$ ya da $p|y$. Bu durumda p'nin asal olduğunu kanıtlayın. (Bu önerme ve bu önermenin ters istikameti Teorem 6.1'de kanıtlanacak.)

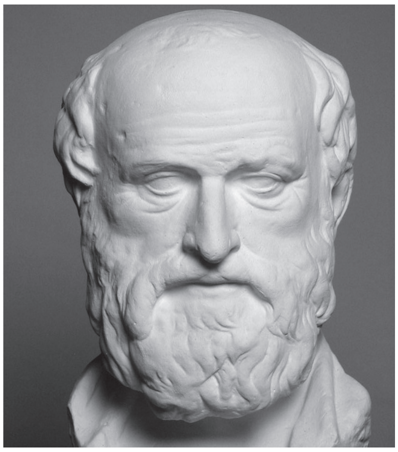
Notlar

5.14. Basında bir iki yılda bir "en büyük asal sayı bulundu" gibi haberler çıkar. Oysa asal sayılar sonsuz sayıdadır ve en büyüğü olamaz. Her asal sayıdan daha büyük bir başka asal sayı daha vardır. Örneğin 100'den büyük bir asal sayı bulmak istiyorsanız, $100! + 1$ sayısını bölen bir asal sayı bulun, illa ki 100'den büyük olmak zorunda olacaktır. Daha iyisini de yapabiliriz: Bildiğiniz tüm asalları çarpıp, çıkan sayıya 1 ekleyin. Elde ettiğiniz sayı yeni bir asala bölünecektir. O haberlerde aslında "bugüne kadar bilinen en büyük asal sayı bulundu" denmek istiyor. Asalların sonsuz sayıda olduğunu daha ileride, Sonuç 7.2'de (burada açıkladığımız yöntemle) kanıtlayacağız.

5.15. Metinde açıklanan asal bulma yöntemini bulan Eski Yunanlı matematikçi, coğrafyacı, şair, astronom ve müzik teorisyeni Eratosthenes M.Ö. 276 ile M.Ö. 194 yılları arasında yaşamıştır. Meşhur İskenderiye kütüphanesinin başkütüphanecisiydi. Coğrafya bilimini bulan kişi olarak anılır. Tarihî olayların tarihlerini saptamak demek olan kronoloji bilimini de yaratmıştır[2]. Dünyanın çevresini ilk hesaplayan kişi olarak da bilinir. Ayrıca

[2] Mesela bugün Eratosthenes'in Milat'tan önce 276'da doğduğu nasıl bilinmektedir? O zamanlar henüz İsa Peygamber doğmadığından Milat'tan önce diye bir kavram yoktu doğal olarak. Bu çok eski tarihleri saptama bilimine kronoloji adı verilir.

dünyanın güneş etrafında dönüş ekseniyle kendi etrafında dönüş ekseni arasındaki açıyı da (23,4 derece) hesaplamıştır. Dünya'nın Güneş'e olan mesafesini de hesapladığı ve "artık gün" kavramını[3] bulduğu da söylenir. Eratosthenes her konuda bilgili ama hiçbir konuda en önde gelen olmadığı için, bir söylentiye göre lakabı bazı çağdaşları arasında (Yunan alfabesinin ikinci harfi olan) "Beta" imiş... Çok önemli bir bilgin olduğundan hiç kuşku yok. Yaşlılığında göz iltihaplanmasından kör olmuştur. Okuyup yazamamanın verdiği ızdıraba dayanamayarak kendini açlığa mahkûm etmiş ve 82 yaşında ölmüştür.



Eratosthenes

5.16. Asal sayılar hakkında bilmediğimiz çok şey vardır. Bunlardan en ünlüsü ***ikiz asallar sanısıdır***. 3 ve 5 gibi, 5 ve 7 gibi, 11 ve 13 gibi, 17 ve 19 gibi farkları 2 olan asal sayılara ***ikiz asallar*** denir. Sonlu ya da sonsuz tane ikiz asal olup olmadığı bilinmiyor. Sonsuz tane asal sayı vardır, bunu kanıtlamak kolay, ta Eski Yunanlılardan beri biliniyor ve bu bölümde de kanıtlayacağız, ama ikiz asallar sanısı hâlâ gizemini koruyor.

1990'da bilinen en büyük ikiz asallar $1.706.595 \times 2^{11235} \pm 1$ asallarıydı, 1990'da Parady, Smith ve Zarantonello tarafından bulunmuşlardı. Ama o günden bugüne teknoloji ve matematik çok ilerledi. 2007'de

$$2.003.663.613 \cdot 2^{195.000} \pm 1$$

sayılarının, 2009'da

$$65.516.468.355 \cdot 2^{333.33} \pm 1$$

sayılarının, 2011'de

$$3.756.801.695.685 \cdot 2^{666.669} \pm 1$$

sayılarının ikiz asallar olduğu gösterildi. Sonuncusu bugüne (17 Eylül 2015) kadar bilinen en büyük ikiz asaldır; 200.700 basamaklı bir sayıdır.

5.17. 1966'da, sonsuz sayıda p asalı için, $p+2$ sayısının ya bir asal ya da iki asalın çarpımı olduğu kanıtlandı.

5.18. Diyelim asalların arasındaki farkın 2 olmasından vazgeçtik, aradaki farkın en fazla belli bir n sayısı olmasını istiyoruz. Acaba aradaki farkın en fazla n olduğu sonsuz sayıda asal çifti var mıdır? 17 Nisan 2013'te Yitang Zhang, pek bilinmeyen, hatta çoğu zaman işsiz kalan Amerikalı bir matematikçi, aralarındaki farkın 70 milyondan az olduğu sonsuz sayıda asal olduğunu kanıtladı. Bu teorem matematik dünyasında bayağı gürültü yaptı. Bizim için sevindirici tarafı, Zhang'ın kanıt yönteminin Cem Yalçın

[3] Her dört yılda bir, yıla bir gün eklenmesi, bugünkü 29 Şubat yani.

Yıldırım meslektaşımızın yazarlarından biri olduğu bir makaleden esinlenmiş olması. Şimdi yeni soru şu: 70 milyonu kaça kadar indirebiliriz? Ünlü matematikçi Terence Tao'nun başını çektiği bir araştırma grubu Zhang'ın yöntemlerini kullanarak ve yeni yöntemler geliştirerek 70 milyonu 264'e indirdi (Şubat 2014). Bildiğim kadarıyla bilinen en düşük aralık şimdilik 264 (Mayıs 2015). Kimse bu yöntemlerle farkın 2'ye kadar ineceğini, yani ikiz asallar sanısının kanıtlanacağını düşünmüyor ama bilgi bilgidir.

5.19. Üçüz asallar var mıdır? $(3, 5, 7)$'den başka yoktur. Okur bunu kolaylıkla kanıtlayabilir. Bir ipucu verelim: eğer n bir tamsayıysa, n, $n+2$, $n+4$ sayılarından biri (ve sadece biri) 3'e bölünür.

5.20. 2 dışında her asal sayı tek sayı olmak zorundadır tabii ki. Dolayısıyla iki asal sayının toplamı "hemen hemen her zaman" bir çift sayı olur. Acaba her çift sayı iki asalın toplamı olarak yazılabilir mi? 2 yazılamaz elbet. Ama 4 yazılır: $4 = 2+2$. Diğer çift sayılara bakalım:

$$\begin{array}{rcr} 6 & = & 3+3 \\ 8 & = & 3+5 \\ 10 & = & 3+7 \\ 12 & = & 5+7 \\ 14 & = & 3+11 \\ 16 & = & 3+13 \\ 18 & = & 7+11 \\ 20 & = & 7+13 \\ 22 & = & 11+11 \\ 24 & = & 11+13 \\ 26 & = & 13+13 \\ 28 & = & 5+23 \\ 30 & = & 7+23 \end{array}$$

Bugüne kadar iki asal sayının toplamı olarak yazılamayan 2'den büyük bir çift sayı bulunamadı, ama 2'den büyük her çift doğal sayının iki asalın toplamı olarak yazılacağı da kanıtlanamadı. Matematiğin kanıtlanamamış ünlü sorularından biridir. ***Goldbach sanısı***, 2'den büyük her çift doğal sayının iki asalın toplamı olarak yazıldığını söyler, ama sadece söyler, yani bir tahmindir, matematiksel jargonla bir sanıdır.

5.21. İleride Sonuç 7.2'de kanıtlayacağımız gibi sonsuz sayıda asal sayı vardır, dolayısıyla en büyük asal sayıyı bulmak gibi bir şey söz konusu olamaz. Ancak çok çok büyük asallar şifrelemede (örneğin haberleşme gizliliğini korumak için, banka hesaplarına başkalarının girmemesi için, askeriyede) çok önemlidir. Çok büyük asal bulmak hiç kolay bir iş değildir, bu amaçla bilgisayarlarda özel programlar yazılmakta ve program yıllarca çalıştırılmaktadır. Şu anda bilinen en büyük 10 asal aşağıdaki tabloda:

sıra	sayı	basamak sayısı	yıl
1	$2^{57.885.161} - 1$	17.425.170	2013
2	$2^{43.112.609} - 1$	12.978.189	2008
3	$2^{42.643.801} - 1$	12.837.064	2009
4	$2^{37.156.667} - 1$	11.185.272	2008
5	$2^{32.582.657} - 1$	9.808.358	2006
6	$2^{30.402.457} - 1$	9.152.052	2005
7	$2^{25.964.951} - 1$	7.816.230	2005
8	$2^{24.036.583} - 1$	7.235.733	2004
9	$2^{20.996.011} - 1$	6.320.430	2003
10	$2^{13.466.917} - 1$	4.053.946	2001

Her yeni rekor matematik dünyasında bir haber olarak duyulur. Çabuk işleyen yeni bilgisayar programları ve hızlı çalışan yeni teknolojiler yararlıdır elbet.

5.22. Yukarıda listelediğimiz asal sayılar hep $2^n - 1$ biçiminde. $2^n - 1$ türünden sayıların asal olabilmeleri için n'nin de asal olması gerekmektedir. Bunu ileride kanıtlayacağız, şimdilik kabul edelim. Asal bir n için $2^n - 1$ biçiminde yazılan sayılara ***Mersenne sayıları*** denir[4]. Peki, n asalsa,

$$M_n = 2^n - 1$$

olarak tanımlanan sayı da asal mıdır? İlk Mersenne sayılarına bakalım:

$$\begin{aligned} M_2 &= 3 \\ M_3 &= 7 \\ M_5 &= 31 \\ M_7 &= 127 \end{aligned}$$

Bu sayıların her biri asal. Ama bundan sonraki ilk Mersenne sayısı, yani M_{11} asal değil: $M_{11} = 23 \times 89$.

Hangi n asalları için M_n asaldır? Yanıt bilinmiyor. Sonlu ya da sonsuz sayıda Mersenne asalının olup olmadığı da bilinmiyor.

1972'de M_{19937}'nin asal olduğunu Bryant Tuckerman bilgisayar yardımıyla keşfetti.

1975'te, on beş yaşında iki lise öğrencisi, Laura Nickel ve Curt Noll, $M_{19.937}$'nin o zamana dek bilinen en büyük asal olduğunu bir gazeteden öğrenince çalışmaya koyuldular ve üç yıl sonra, 1978'te, bilgisayarlarını 350 saat çalıştırdıktan sonra, M_{21701}'in asal olduğunu buldular. Ve birdenbire ünlendiler.

Şubat 1979'da Noll, M_{23209}'un asal olduğunu buldu.

İki ay sonra, Amerikalı David Slowinski M_{44497}'nin asal olduğunu gösterdi.

Mayıs 1983'te gene Slowinski, M_{86243}'ün asal olduğunu bilgisayar yardımıyla tam 1 saat 3 dakika 22 saniyede kanıtladı. Ama 86.243 sihirli sayısını bulmak için aylarca uğraştı. Bilinen klasik yöntemle (yani kendisinden küçük sayılara bölmeye çalışarak) M_{86243}'ün asal olduğunu kanıtlamak, evrenin ömrünü aşardı! M_{86243}'ün tam 25.962 basamağı olduğunu da ayrıca belirtelim. Bu kadar bozuk parayı üstüste yığsanız, para kuleniz evrenin sınırlarını aşar! [De]

Yukarıdaki asalı bulan Slowinski, 19 Eylül 1983 tarihinde M_{132049}'un asal olduğunu bilgisayarlarla anladı. Bundan çok daha önce, Manfred Schroeder adlı bir matematikçi, matematiksel yöntemlerle, sezgisinin de yardımıyla, $2^{130.000}$ civarlarında bir asal olduğunu tahmin etmişti zaten.

Mart 1992'de M_{756839}'un asal olduğu anlaşıldı.

12 Ocak 1994'te, Paul Gage ve yine David Slowinsky bilgisayar ağlarında M_{859433}'ün asal olduğunu kanıtladıklarını duyurdular. Hesaplarını gene bilgisayarla yapmışlardı elbet.

$M_{43.112.609}$ asaldır. 23 Ağustos 2008'de, binlerce gönüllünün bilgisayarlarına, kullanmadıkları zamanlarda (daha çok geceleri tabii) internet yoluyla girip binlerce bilgisayarı eşzamanlı kullanan bir projeyle gösterilmiştir. (Böylece hesaplar daha hızlı yapılmıştır.)

Eylül 2015 tarihine kadar topu toplamı 48 Mersenne asalı bilinmekteydi ve bilinenlerin en büyüğü $M_{57.885.161}$ idi. Bu sayı ayrıca o güne kadar bilinen en büyük asaldı.

Bu sonuçlara, ancak bilgisayarlara güvenebildiğimiz derecede güvenebiliriz elbet. Bilgisayarlar da hata yaparlar!

[4]Marin Mersenne (1588-1648), ünlü matematikçi Fermat'yla çağdaş ve Fermat'nın mektup arkadaşı bir Fransız matematikçisidir.

5.23. Birileri, p asalsa, M_{M_p} sayılarına ***çifte Mersenne sayısı*** demiş. İlk çifte Mersenne sayıları:

$$M_{M_2} = M_3 = 7,$$
$$M_{M_3} = M_7 = 127,$$
$$M_{M_5} = M_{31} = 2.147.483.647.$$

Bunların her biri asal. Bir sonraki çifte Mersenne sayısı olan

$$M_{M_7} = M_{127}$$

sayısı da asal. Acaba çifte Mersenne sayılarının hepsi asal mı? Şansınıza küsün! M_{M_p}'nin asal olması için M_p'nin asal olması gerektiğini biliyoruz, dolayısıyla, M_{11} asal olmadığından, bir sonraki çifte Mersenne sayısı $M_{M_{11}}$ de asal olamaz. Peki, M_p asalsa, M_{M_p} asal mıdır? Yanıt gene olumsuz: $p = 13$, 17, 19 ve 31 ise M_p'nin asal olduğu biliniyor ama M_{M_p}'nin asal olmadığı gösterilmiş. Bir sonraki aday $M_{M_{61}}$. Bu sayının asal olup olmadığı bildiğim kadarıyla bu kitabın yazıldığı tarihte bilinmiyor.

Bu paragraflık, M_p yerine $M(p)$ yazalım. Birkaç örnek:

$$M(2) = 3,$$
$$M(M(2)) = M(3) = 7,$$
$$M(M(M(2))) = M(7) = 127,$$
$$M(M(M(M(2)))) = M(127) = \text{ asal bir sayı.}$$

Bunlara ***Catalan-Mersenne sayıları*** denir. Görüldüğü üzere ilk dört Catalan-Mersenne sayısı asal. Ya bir sonraki Catalan-Mersenne sayısı olan $M(M(127))$? Kimse bilmiyor.

5.24. Büyük sayıların asal olup olmadıklarını anlamak, şifreli mesajlarda (kriptolojide yani) çok önemlidir ve gelişmiş ülkelerin orduları bu yüzden asal sayılarla çok ilgilenirler. Gizli mesaj yollamak isteyen, mesajıyla birlikte iki büyük asal sayının çarpımını da yollar. Şifreyi çözmek için, şifreyle birlikte yollanan sayıyı bölen o iki asalı bilmek gerekir, ki bu da dışarıdan birisi için (sayılar büyük olduğundan) hemen hemen olanaksızdır. İki sayıyı çarpmak kolaydır ama bir sayıyı çarpanlarına ayırmak çok daha zordur. Örneğin, 2011 yılına kadar kimse

25.195.908.475.657.893.494.027.183.240.048.398.571.429.282.126. 204.032.027.777.137.
836.043.662.020.707.595.556.264.018.525.880.784.406.918.290.641. 249.515.082.189.298.
559.149.176.184.502.808.489.120.072.844.992.687.392.807.287.776. 735.971.418.347.270.
261.896.375.014.971.824.691.165.077.613.379.859.095.700.097.330. 459.748.808.428.401.
797.429.100.642.458.691.817.195.118.746.121.515.172.654.632.282. 216.869.987.549.182.
422.433.637.259.085.141.865.462.043.576.798.423.387.184.774.447. 920.739.934.236.584.
823.824.281.198.163.815.010.674.810.451.660.377.306.056.201.619. 676.256.133.844.143.
603.833.904.414.952.634.432.190.114.657.544.454.178.424.020.924. 616.515.723.350.778.
707.749.817.125.772.467.962.926.386.356.373.289.912.154.831.438. 167.899.885.040.445.
364.023.527.381.951.378.636.564.391.212.010.397.122.822.120.720.357

sayısını asallarına ayıramamıştır. Bugün durum ne haldedir bilmiyorum. Ama biri size bu sayıları bölen asalları verse, bu asalları çarparak yukarıdaki sayıyı, elle kolay olmasa da, bilgisayarla birkaç saniye içinde elde edilebilirsiniz. (Asallarla nasıl şifreleme yapılacağını öğrenmek için internetten RSA'yı arayabilirsiniz; RSA, bu şifreleme yöntemini bulan Ron Rivest, Adi Shamir ve Leonard Adleman'ın soyadlarının ilk harflerinden oluşmuştur.)

Şifrelemede Mersenne sayıları kullanılmaz. Çünkü az sayıda (50'den az) asal Mersenne sayısı bilindiğinden, şifreyle birlikte yollanan sayının asal bir Mersenne sayısına bölünüp bölünmediğini anlamak kolaydır.

5.25. Mersenne sayılarına çok benzeyen başka sayılara bakalım. 2^n+1 biçiminde yazılan sayılar asal mıdır? Bu sayıların hangi n'ler için asal olduklarını bilmiyoruz ama hangi n'ler için asal olamayacaklarını biliyoruz: Eğer n, 2'nin bir kuvveti değilse, yani 2^m biçiminde yazılamazsa, bu sayılar asal olamazlar. Bunu ilerideki kitaplarımızda kanıtlayacağız. Ünlü Fransız matematikçisi Pierre de Fermat,

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

biçiminde yazılan bütün sayıların asal olduklarını sanıyordu. Bu yüzden bu sayılara ***Fermat sayıları*** denir; sayı asalsa ***Fermat asalları***. Gerçekten de ilk beş Fermat sayısı,

$$\begin{aligned} F_0 &= 3, \\ F_1 &= 5, \\ F_2 &= 17, \\ F_3 &= 257, \\ F_4 &= 65537 \end{aligned}$$

asaldır. Fermat, bütün Fermat sayılarının asal olduklarını kanıtlamaya uğraştı ama başaramadı. Başarısızlığının nedeni vardı: Sanısı doğru değildi. F_5 asal değildir. F_5 on basamaklı bir sayı olduğundan asallığını kanıtlamak kolay değildi.
Euler (1707-1783), F_5'in 641'e bölündüğünü gösterdi:

$$F_5 = 641 \times 6700417.$$

Demek ki $n = 2^m$ biçiminde yazılabilse bile, $2^n + 1$ asal olmayabiliyor.
Lucas F_6'nın asal olmadığını kanıtladı. Daha sonra, 1880'de, Landry, 80'inci yaşını sürerken,

$$F_6 = 274.177 \times 67.280.421.310.721$$

eşitliğini buldu.
F_7 ve F_8 sayıları da asal değiller. Bu sayıların asal olmadığı çok geç bir tarihte 1970 ve 1981'de anlaşıldı.
W. Keller, 1980'de F_{9448} sayısının asal olmadığını gösterdi. Bu sayı $19 \times 2^{9450} + 1$'e bölünür.
1984'te gene W. Keller, F_{23471} sayısının asal olmadığını gösterdi. Bu sayının 10^{7000}'den fazla basamağı vardır ve

$$5 \times 2^{23473} + 1$$

sayısına bölünür.
$n \geq 5$ için, asal bir F_n'nin olup olmadığı şimdilik (2017'de yazılıyor bu satırlar) bilinmiyor. Asallığı bilinmeyen en küçük Fermat sayıları şunlar: F_{22}, F_{24}, F_{28}.

5.26. Son yıllarda bir sayının asallığına yüzde olarak oldukça çabuk karar verebilen yöntemler geliştirildi. Örneğin, "Şu sayı yüzde 99,978 olasılıkla asaldır" gibi önermeler bilgisayarların yardımıyla oldukça kısa sayılabilecek zamanda kanıtlandı.

5.27. 11, 111, 1111, 11111 gibi her rakamı 1 olan sayılar asal mıdır? İçinde n tane 1 olan sayıya B_n diyelim. Eğer çift sayıda 1 varsa, yani n çiftse, B_n, 11'e bölünür ve B_2 dışında bunlardan hiçbiri asal olamaz. Eğer n üçe bölünüyorsa B_n de üçe bölünür ve asal olamaz.
Hangi n'ler için B_n asaldır? Bu asallardan kaç tane vardır?

$$B_2,\ B_{19},\ B_{23},\ B_{317},\ B_{1031}$$

asal sayılar, bu biliniyor. Bunlardan başka? Bu sayılardan daha büyük bir asal varsa, $n > 10.000$ olması gerektiğini Harvey Dubner kanıtlamış, daha doğrusu hesaplamış [De].

5.28. n^2+1 türünden olan asal sayıların sonlu ya da sonsuz sayıda oldukları (bugün itibariyle, Ekim 2015) bilinmiyor. Asal sayılar hakkında yanıtı bilinmeyen çok soru vardır. Bugün asal sayılar çok aktif bir araştırma konusudur.

5.29. Not 5.35'te $n > 0$ doğal sayısı için, $\sigma_0(n)$, n'nin n'den farklı bölenlerinin toplamını simgelediğini söylemiştik. Örneğin

$$\sigma_0(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

olur. Eğer

$$\sigma_0(n) = n$$

eşitliği sağlanırsa n'ye ***mükemmel sayı*** denir. Örneğin 6 mükemmel bir sayıdır çünkü

$$\sigma_0(6) = 1 + 2 + 3 = 6$$

olur. Öklid, çift olan her mükemmel sayının, bir $2^p - 1$ Mersenne asalı için

$$2^{p-1} \times (2^p - 1)$$

biçiminde olduğunu kanıtlamıştır. Bunun tersi de doğrudur: Eğer $2^p - 1$ bir Mersenne asalıysa $2^{p-1} \times (2^p - 1)$ sayısı çift bir mükemmel sayıdır. Kanıt çok zor değildir, ileride kanıtlarız, şimdilik örnek vermekle yetinelim.

sıra	p	$2^{p-1}(2^p-1)$ mükemmel sayısı	bulunduğu yıl	bulan kişi
1	2	6	M.Ö. 4'üncü yüzyıl	Öklid
2	3	28	M.Ö. 4'üncü yüzyıl	Öklid
3	5	496	M.Ö. 4'üncü yüzyıl	Öklid
4	7	8.128	M.Ö. 4'üncü yüzyıl	Öklid
5	13	33.550.336	1456	Bilinmiyor
6	17	8.589.869.056	1588	Cataldi
7	19	137.438.691.328	1588	Cataldi
8	31	2.305.843.008.139.952.128	1772	Euler

Bugüne kadar bulunan tüm mükemmel sayılar çifttir, yani yukarıdaki biçimdedirler ve tek sayı olan bir mükemmel sayının yokluğu kanıtlanamamıştır.

6. İyisıralama Özelliği ve Birkaç Sonucu

Bu bölümde, doğal sayıların sıralamasının çok önemli bir özelliğinden söz edeceğiz, "iyisıralama özelliği"nden.

6.1 İyisıralama Özelliği

İyisıralama Özelliği. *Boşküme olmayan her doğal sayı kümesinin en küçük ögesi vardır.*

Çok önemli sonuçları olan bu olguyu kitabın ilerleyen safhalarında alabildiğine sömüreceğiz. Şu kadarını söyleyelim: Doğal sayılarla ilgili karşılaşacağınız hemen her önerme iyisıralama özelliği kullanılarak kanıtlanır.

Örnekler

6.1. Asal sayılar kümesinin en küçük ögesi 2'dir.

6.2. Çift olmayan asal sayılar kümesinin en küçük ögesi 3'tür.

6.3. 100'den büyük ve 17'ye bölünen doğal sayı kümesinin en küçük ögesi 102'dir.

6.4. 100'den büyük en küçük tamkare 121'dir.

6.5. 100'den büyükeşit en küçük tamkare 100'dür.

6.6. En küçük doğal sayı da 0'dır.

6.7. En küçük pozitif doğal sayı 1'dir.

6.8. 10'dan büyükeşit en küçük doğal sayı 10'dur.

6.9. Karesi 25 olan en küçük doğal sayı 5'tir. (Karesi 25 olan tek bir doğal sayı vardır zaten: 5; en küçüğü de elbette bu 5 sayısıdır!)

6.10. $x + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan en küçük doğal sayı yoktur, çünkü $x + 1 = 0$ eşitliğini sağlayan bir doğal sayı yoktur! Bir kümenin en küçük ögesinin olması için her şeyden önce o kümede en az bir öge olmalıdır!

6.11. $x^2 + 4x > 20$ eşitsizliğini sağlayan en küçük doğal sayı 3'tür.

6.12. $\{n \in \mathbb{N} : 2^n \geq 1000\}$ kümesinin en küçük ögesi 10'dur çünkü $2^9 = 512 < 1000$ ve $2^{10} = 1024 > 1000$ olur.

6.13. 6 ve 8'e bölünen pozitif doğal sayılar kümesinin en küçük ögesi (adına en küçük ortak kat denen) 24'tür.

6.14. $10^{1.000.000}$'dan büyük en küçük asal sayı vardır (çünkü daha sonra kanıtlayacağımız üzere sonsuz sayıda asal sayı vardır) ama bu asal sayıyı bu kitabın yazıldığı günlerde yeryüzünde herhangi birinin bildiğini sanmıyorum.

6.15. 21, $(5\mathbb{N}+1) \cap (6\mathbb{N}+3)$ kümesinin en küçük ögesidir.

Alıştırmalar

6.16. $\{n \in \mathbb{N} : 7n > 500\}$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.17. $\{n \in \mathbb{N} : 7n + 25 > 500\}$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.18. $\{n \in \mathbb{N} : 3^n > 500\}$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.19. $(3\mathbb{N}+1) \cap 14\mathbb{N}$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.20. Aynı anda hem bir tamkare hem de bir tamküp olan ama 0 ya da 1 olmayan en küçük doğal sayıyı bulun.

6.21. Aynı anda hem bir doğal sayının 5'inci kuvveti hem de bir başka doğal sayının 7'nci kuvveti olan ama 0 ya da 1 olmayan en küçük doğal sayıyı bulun.

6.22. Aynı anda hem bir doğal sayının 4'üncü kuvveti hem de bir başka doğal sayının 6'ncı kuvveti olan ama 0 ya da 1 olmayan en küçük doğal sayıyı bulun.

6.23. $(3\mathbb{N}+1) \cap (7\mathbb{N}+3)$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.24. $(6\mathbb{N}+1) \cap (7\mathbb{N}+1)$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.25. $(6\mathbb{N}+2) \cap (7\mathbb{N}+1)$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.26. $(6\mathbb{N}+2) \cap (14\mathbb{N}+1)$ kümesinin en küçük ögesi var mıdır? Varsa kaçtır? Yoksa neden yoktur?

6.27. $(6\mathbb{N}+1) \cap (7\mathbb{N}+2) \cap (8\mathbb{N}+3)$ kümesinin en küçük ögesini bulun.

6.28. $(6\mathbb{N}+1) \cap (7\mathbb{N}+2)$ kümesinin en küçük tamkaresini bulun.

6.29. Tuhaf biri bazı doğal sayıları güzel buluyor. Hangi doğal sayıları güzel bulduğunu söylemiyor ama 0'ı güzel bulduğunu biliyoruz. Bir de eğer bir n sayısını güzel buluyorsa, $n+1$ sayısını da güzel bulduğunu biliyoruz. Bu kişinin güzel bulmadığı en küçük doğal sayıyı kaçtır?

6.30. Bir başka tuhaf biri bazı doğal sayıları güzel buluyor. Hangi doğal sayıları güzel bulduğunu söylemiyor ama 5'i ve 8'i güzel bulduğunu biliyoruz. Bir de eğer bir n ve m sayılarını güzel buluyorsa, $n+m$ sayısını da güzel bulduğunu biliyoruz. Bu kişinin güzel bulmadığı en büyük doğal sayı var mıdır? Varsa kaçtır, yoksa neden yoktur?

6.31. Bir başka tuhaf biri bazı doğal sayıları çirkin buluyor. Hangi doğal sayıları çirkin bulduğunu söylemiyor ama 2'nin kuvvetlerini çirkin bulduğunu biliyoruz. Bir de eğer bir n sayısını çirkin buluyorsa, $n-1$ sayısını da çirkin bulduğunu biliyoruz. Bu kişinin çirkin bulmadığı en küçük doğal sayıyı kaçtır?

Burada İyisıralama Özelliği'nin basit bir uygulamasını verelim. Bir $m > 0$ doğal sayısı alalım ve m'nin katlarına bakalım:

$$0,\ m,\ 2m,\ 3m,\ 4m,\ 5m,\ \ldots$$

Bu katlar elbette her sayıyı bir zaman sonra aşar, örneğin m'nin $n+1$ katı olan $(n+1)m$, n sayısını aşar çünkü ne de olsa $n < n+1 \leq (n+1)m$. Ama m'nin daha küçük katları da n'yi aşabilir. Örneğin $m = 7$, $n = 100$ ise, m'nin 101 katı n'yi aştığı gibi, m'nin 100 katı da, 50 katı da n'yi aşar, hatta 20 katı da aşar. Genel duruma geri dönüp, bir n sayısı daha sabitleyelim ve A adını verdiğimiz şu kümeye bakalım:

$$A = \{k \in \mathbb{N} : n < km\}.$$

Biraz önce de söylediğimiz gibi $n + 1 \in A$. Demek ki $A \neq \emptyset$. İyisıralama Özelliği'nden dolayı A'nın en küçük bir ögesi vardır, diyelim k. Yani k,

$$n < km$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük doğal sayı, ondan küçükleri bu eşitsizliği sağlamıyor. Eğer $k = 0$ olsaydı, $n < km = 0$ gibi bir saçmalık elde ederdik, demek ki $k > 0$ ve dolayısıyla bir q doğal sayısı için $k = q+1$ olur. $q < k$ olduğundan $q \notin A$ ve $qm \leq n$ olur. Sonuç olarak, bir q doğal sayısı için

$$qm \leq n < (q+1)m$$

eşitsizliklerini elde ettik. Bunu not edelim, ileride gerekecek:

Önsav 6.1. *$m > 0$ ve n birer doğal sayı olsun. O zaman*

$$qm \leq n < (q+1)m$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $q \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. □

Örneğin $m = 7$, $n = 100$ ise, $q = 14$ olur:

$$14 \times 7 \leq 100 < 15 \times 7.$$

Bu bölümün sonuna kadar doğal sayılarla ilgili birkaç önemli teorem kanıtlayacağız. Kanıtlayacağımız hemen her teoremde İyisıralama Özelliği'ni canalıcı bir biçimde kullanacağız. Bu uygulamaların İyisıralama Özelliği'nin önemini göstereceğini umuyoruz.

6.2 Asala Bölünme

Birazdan 1'den büyük her doğal sayının bir asala bölündüğünü kanıtlayacağız. Kanıtın anafikrini bir örnekle anlatalım. Rastgele bir n doğal sayısı alalım ve bu sayının bir asala bölündüğünü göstermeye çalışalım. Eğer sayı 15 filan gibi küçük bir sayıysa, işimiz kolay, 15'in 3'e (ya da 5'e) bölündüğünü ve 3'ün (ve 5'in) asal olduğunu herkes bilir. İşimizi zorlaştırmak için oldukça büyük bir sayı seçelim. Diyelim

$$n = 352.302.911$$

sayısını seçtik. Bu sayının bir asala bölündüğünü kanıtlamak istiyoruz. Denerseniz bulamayacağınıza dair iddiaya girebilirim! Kolay değil çünkü, çok zaman alabilir. Bu sayıyı bölen bir asal bulamayabiliriz ama gene de bu sayının bir asala bölündüğünü kanıtlayabiliriz. Çok daha büyük bir sayının bir asal bölenini sadece siz değil, yeryüzünde kimse bulamayabilir. Her sayının bir asala bölündüğünü **kanıtlamak** başka, sayıyı bölen bir asal **bulmak** başka.

Nasıl yapacağız? Eğer seçtiğimiz bu n sayısı bir asalsa, işimiz zaten bitti demektir, çünkü n asalı elbette n sayısını böler, aynen istediğimiz gibi. Ama ya n bir asal değilse, o zaman ne yapacağız? Eğer n bir asal değilse, n, 1'den büyük iki doğal sayının çarpımı olarak yazılır. Diyelim $a > 1$ ve $b > 1$ doğal sayıları için

$$n = ab.$$

a ve b'nin kaç olduğu hakkında hiçbir fikrimiz yok, ama eğer a ya da b'nin bir asala bölündüğünü gösterebilirsek, o zaman bu asal n'yi de bölmek zorunda. Kaç olduğu hakkında hiçbir fikrimizin olmadığı a ve b sayıları acaba bir asala bölünüyor mu? a ve b'nin kaç olduklarını bilmiyoruz belki ama 1'den büyük olduklarını, dolayısıyla n'den küçük olduklarını biliyoruz, çünkü ne de olsa çarpımları n. Şimdi a'yı ele alalım. Eğer a asalsa, o zaman işimiz iş gerçekten, n sayısının a asalına bölündüğünü göstermiş oluruz. Peki ya a asal değilse? O zaman a'yı 1'den büyük, dolayısıyla a'dan küçük iki doğal sayının çarpımı olarak yazabiliriz. Diyelim $1 < c < a$ ve $1 < d < a$ doğal sayıları için

$$a = cd$$

oluyor. Eğer c ya da d'den en az biri asalsa, işimiz bitti, çünkü bu asal a'yı böler ve a'yı böldüğünden n'yi de böler. Eğer c ve d asal değilse, içlerinden birini seçip aynı süreci işletelim. Hep daha küçük sayılar buluyoruz. Yukarıda

$$n > a > c$$

oldu. Eğer c asal değilse, bunu bir adım daha uzatıp $1 < e < c$ ve $1 < f < c$ doğal sayıları için

$$c = ef$$

biçiminde bir eşitlik buluruz. Bu sefer

$$n > a > c > e$$

olur. Ama doğal sayılarda sürekli daha küçük bir sayı bulmak mümkün değil, ne de olsa en altta 0 var, onun altına inemeyiz. (Doğal sayılarda sürekli daha küçük bir sayı bulamamak biraz önce bahsettiğimiz İyisıralama Özelliği'nden kaynaklanır. Birazdan bu yakın ilişkiyi göreceğiz.) Bu süreç illa ki bir zaman sonra durmalı, yani bir zaman sonra bir asal sayıya toslamalıyız. İşte o asal sayı n'yi böler.

Eğer verdiğimiz $n = 352.302.911$ sayısını bölen bir asal sayıyı merak etmişseniz hemen söyleyeyim: n asal değil, 997, 787 ve 449 sayılarına bölünüyor ve bu üç sayı da asal. Hatta n bu üç asalın çarpımı. Ama mesela yukarıda akıl yürütme sayesinde $10^{1.000.000} + 1$ gibi devasa bir sayının da bir asala bölündüğünü biliyoruz. Hangi asala bölündüğüne dair hiçbir fikrim yok! Ama kesinlikle bir asala bölünüyor!

Yukarıdaki basit fikri aşağıdaki kanıtta biraz farklı bir biçimde (biraz daha matematiksel bir biçimde, İyisıralama Özelliği'ni kullanarak) ele alacağız.

Teorem 6.2. 1 *dışında her doğal sayı bir asala bölünür.*

Kanıt: $n \neq 1$ herhangi bir doğal sayı olsun. n'nin bir asal sayıya bölündüğünü göstereceğiz. 0 sayısı tabii ki her asala bölünür, örneğin 2'ye bölünür. Bundan böyle $n \neq 0$ olsun. Demek ki $n \geq 2$. Bir tanım yapalım:

$$A = \{p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : \ p, n\text{'yi böler}\}$$

olsun. Yani A, n'yi bölen 0 ve 1'den farklı doğal sayılardan oluşan küme. $n \in A$ olduğundan (çünkü, n, n'yi böler ve $n \neq 0, 1$), A boşküme değildir. İyisıralama Özelliği'nden dolayı A'nın en küçük ögesi vardır. A'nın bu en küçük ögesine p adını verelim. p en az 2 tabii ki. p'nin bir asal olduğunu kanıtlarsak istediğimizi kanıtlamış olacağız. Eğer p bir asal olmasaydı[1], 1'den büyük ama p'den küçük a ve b sayıları için $p = ab$ olacaktı. Ama $a|p$ ve $p|n$ olduğundan $a \in A$ olur. Böylece A'da p'den küçük bir öge bulmuş olduk, oysa p, A'nın en küçük ögesiydi, bir çelişki. Demek ki p bir asalmış. □

Görüldüğü üzere İyisıralama Özelliği'ni yukarıdaki kanıtta canalıcı bir biçimde kullandık. Aşağıda aynı özelliği birkaç defa daha kullanacağız.

Bir not: Yukarıdaki teoremin kanıtı, bir sayının 1'den büyük en küçük böleninin bir asal olmak zorunda olduğunu gösteriyor.

6.3 Asal Çarpanlarına Ayırma

Birazdan 1'den büyük her doğal sayının asalların çarpımı olarak yazılacağını göstereceğiz. Küçük sayılar için bunu göstermek kolay:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 2 \\ 3 & = & 3 \\ 4 & = & 2 \times 2 = 2^2 \\ 5 & = & 5 \\ 6 & = & 2 \times 3 \\ 7 & = & 7 \\ 8 & = & 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \\ 9 & = & 3 \times 3 = 3^2 \\ 10 & = & 2 \times 5. \end{array}$$

[1]Şu anda "olmayana ergi" adı verilen kanıt yöntemine başlıyoruz. p'nin asal olduğunu kanıtlamak istiyoruz. p'nin asal olmadığını varsayıp bir saçmalık, bir çelişki, bir absürtlük elde edeceğiz. Buradan da p'nin asal olmadığı varsayımının yanlış olduğu, yani p'nin asal olduğu anlaşılacak.

Küçük sayılar için kolay ama $10^{1.000.000}+1$ gibi bir sayıyı asalların çarpımı olarak nasıl yazacağız? Aslında yazamayacağız, bu sayı başa çıkılamayacak kadar büyük bir sayı. Bu sayıyı asalların çarpımı olarak yazamasak da yazabileceğimizi göstereceğiz! (Yazılacağını bilmekle yazabilmek arasında bayağı bir fark var! Örneğin yüz basamaklı iki sayıyı çarpabilirim, ama çarpmam, işim gücüm var! Bir milyar basamaklı iki sayıyı işim gücüm olmasa da çarpamam, hayat o kadar uzun değil, ama yeterince zamanım olsaydı çarpabileceğimi biliyorum!)

Küçük sayılara geri dönelim. Asal sayıların nasıl asal sayıların çarpımı olarak yazılacağı belli: Bir p asalı, p'nin kendisiyle bir defa çarpımıdır, yani $p = p$ olur! Marifet, asal olmayan doğal sayıları asalların çarpımı olarak yazmakta. Bundan sonraki örneklerde asal olmayan doğal sayılara odaklanalım:

$$\begin{aligned}
&12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \cdot 3\\
&14 = 2 \times 7\\
&15 = 3 \times 5\\
&16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4\\
&18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \cdot 3^2\\
&20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \cdot 5\\
&21 = 3 \times 7\\
&22 = 2 \times 11\\
&24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \cdot 3
\end{aligned}$$

Bu yaptığımıza ***asallara ayrıştırma*** ya da ***asal çarpanlara ayırma*** denir. Bir sonraki teoremde pozitif her doğal sayının asallara ayrıştırılabileceğini kanıtlayacağız. Kanıt yöntemimizi bir örnekle gösterelim. Diyelim 252 sayısını asalların çarpımı olarak yazmak istiyoruz. Önce 252'yi bölen bir asal bulalım. 252'yi bölen birçok asal var, mesela 2 bölüyor, 3 de bölüyor, bunlardan birini seçelim, hangisini seçtiğimiz farketmez. Diyelim kolaylık olsun diye 2 asalını seçtik. 252'yi 2'ye bölelim:

$$252 = 2 \times 126.$$

Eğer 126'yı asalların çarpımı olarak yazarsak, işimiz iş, bu çarpıma bir de 2'yi eklersek 252'yi asalların çarpımı olarak yazarız. 126 gene 2 asalına bölünüyor:

$$252 = 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 63.$$

Aynı süreci 63 için işletelim. 63, 3 asalına bölünüyor: $63 = 3 \times 21$. Yukarıdaki satırdaki eşitlikleri devam ettirelim:

$$252 = 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 63 = 2 \times 2 \times 3 \times 21.$$

21 de 3'e bölünüyor: $21 = 3 \times 7$. Bir önceki satırdaki eşitlikleri devam ettirelim:

$$252 = 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 63 = 2 \times 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7.$$

Sağ tarafta sadece asallar olduğundan işimiz bitmiştir:

$$252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Nihai sonucu bulmak için, sadece asal elde edene kadar yukarıdaki işlemlerin her birini yapmak zorundaydık, ama nihai sonucu elde etmeden nihai sonucu elde edebileceğimizi anlamak için işlemleri sonuna kadar götürmek zorunda değiliz. İlk adımdan sonra her sayıyı asalların çarpımı olarak yazabileceğimiz anlaşılıyor, çünkü ilk adımda

$$252 = 2 \times 126$$

elde ediyoruz. Yeni sayı 126 ve 126'yı asalların çarpımı olarak yazmalıyız. Ama 126, 252'den daha küçük bir sayı. Küçük sayıları asalların çarpımı olarak yazmak kolay! En azından küçük sayılarla başa çıkabileceğimizi varsayabiliriz. Belli ki her adımda daha küçük sayılara aynı prosedürü uyguluyoruz, nitekim yukarıda elde ettiğimiz sayılar şunlar:

$$252,\ 126,\ 63,\ 21,\ 7,\ 1.$$

(7 sayısı 7 asalına bölündüğünden, listenin en sonuna yukarıda olmayan bir 1 ekledik.) Sayılar küçüle küçüle bir zaman sonra 1'e gelecek ve bu aşamada sayıyı asalların çarpımı olarak yazmış olacağız.

Yaptığımız işlemleri altalta yazalım:

$$\begin{array}{rcl} 252 & = & 2 \times 126 \\ 126 & = & 2 \times 63 \\ 63 & = & 3 \times 21 \\ 21 & = & 3 \times 7 \\ 7 & = & 7 \times 1. \end{array}$$

Eşitliğin hemen sağında beliren asalların çarpımı 252'yi verir:

$$242 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Yukarıda izlediğimiz süreç aşağıdaki yöntemle son derece görsel ve kolay bir biçimde görülebilir:

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Sol sütuna sayıyı yazıyoruz, sayının sağına da o sayıyı bölen bir asalı; sonra bir alt satırın sol tarafına sayının asala bölümünü yazıyoruz ve aynı süreci devam ettiriyoruz. 1'e vardığımızda duruyoruz. Aynı şeyi 1500 için yapalım:

$$\begin{array}{r|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Demek ki

$$1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

olur.

Bu sefer 252 ya da 1500'den başlamayalım da, 352.302.911 gibi çok daha büyük bir sayıdan başlayalım. O büyük sayıya n diyelim. n'yi asalların çarpımı olarak yazacağız. Eğer n asalsa işimiz bitti. Eğer n asal değilse, n'yi $1 < a < n$ ve $1 < b < n$ için

$$n = ab$$

biçiminde yazabiliriz. Eğer a ve b'yi asalların çarpımı olarak yazabilirsek, o zaman $n = ab$ eşitliğinden dolayı n de asalların çarpımı olacak. Ama a ve b, n'den daha küçük olduklarından, bu sayıları asalların çarpımı olarak yazmak, n'yi asalların çarpımı olarak yazmaktan daha kolay. Eğer a ve b asalsa işimiz bitti. Aksi halde asal olmayanı 1'den büyük iki doğal sayının çarpımı olarak yazalım. Ve bu süreci asallara toslayana kadar devam ettirelim. $n = 352.302.911$ sayısı da asalların çarpımıdır:

$$352.302.911 = 997 \times 787 \times 449.$$

Bu yöntem aşağıdaki teoremin kanıtındaki fikridir.

Teorem 6.3 (Aritmetiğin Temel Teoremi)**.** *0'dan büyük her doğal sayı sonlu sayıda asalın çarpımıdır.*

Kanıt: Hiç tane sayının çarpımını 1 olarak tanımlandığından (sayfa 21), 1 sonlu sayıda asal sayının çarpımıdır, nitekim 1 sayısı hiç tane asal sayının çarpımıdır. Bundan böyle 1'den büyük sayılara odaklanalım. 1'den büyük her doğal sayının sonlu sayıda asalın çarpımı olarak yazılacağını göstereceğiz. (Tabii bazı asallar çarpımda birkaç defa kullanılabilir.)

Diyelim teorem doğru değil[2]. O zaman 1'den büyük en az bir doğal sayı sonlu sayıda asalın çarpımı olarak yazılmaz. Bu varsayımdan bir çelişki elde

[2] Burada da "olmayana ergi" kanıt yöntemine başlıyoruz.

edeceğiz ve böylece teorem kanıtlanmış olacak.

$$A = \{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ n \text{ sonlu sayıda asalın çarpımı değil}\}$$

olsun. Varsayımımıza göre $A \neq \emptyset$. Bir önceki paragrafa göre de $1 \notin A$, yani A'nın ögeleri 2'den büyükeşit olmak zorunda. İyisıralama Özelliği'nden dolayı A'nın en küçük bir ögesi vardır, diyelim n. Bir önceki teoreme göre (Teorem 6.2) n bir asala bölünür, diyelim p asalına bölünüyor. Bu durumda bir m doğal sayısı için

$$n = pm \tag{1}$$

olur.

Elbette $m \neq 0$ çünkü aksi halde $n = 0$ olurdu. Eğer $m = 1$ ise $n = pm = p \cdot 1 = p$ olur ve p asal olduğundan n sayısı asalların (tek bir asalın, p'nin) çarpımı olur. Demek ki $m \geq 2$ olmak zorunda.

(1) eşitliğinden dolayı $m < n$ olur. n, A'nın en küçük ögesi olduğundan, $m \notin A$ olmak zorunda, yani m asalların çarpımıdır. Demek ki pm, yani n de asalların çarpımıymış. (m'yi veren asalların çarpımını bir de p ile çarparsak n'yi elde ederiz.) Çelişki. Demek ki $A = \emptyset$. □

İleride, Teorem 7.1'de, her doğal sayının, asalların çarpımı olarak bir anlamda **tek** bir biçimde yazıldığını kanıtlayacağız, yani bir sayıyı asalların çarpımı olarak iki farklı biçimde yazamayız. Ama bunu şu anda kanıtlayamayız, bir sonraki bölümü beklemeliyiz.

Örnekler

6.32. 3.000.000 sayısını asallara ayıralım:

$$3.000.000 = 3 \cdot 10^5 = 3 \cdot (2 \cdot 5)^5 = 3 \cdot 2^4 \cdot 3^5.$$

6.33. $(54^7)^4$ sayısını asallara ayıralım:

$$(54^7)^4 = 54^{28} = (2 \cdot 27)^{28} = (2 \cdot 3^3)^{28} = 2^{28} \cdot 3^{3 \cdot 28} = 2^{28} \cdot 3^{84}$$

6.34. $(27 \cdot 90)^7$ sayısını asallarına ayıralım:

$$(27 \cdot 90)^7 = (3^3 \cdot (3^2 \cdot 2 \cdot 5))^7 = (3^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5)^7 = (3^5 \cdot 2 \cdot 5)^7 = 3^{35} \cdot 2^7 \cdot 5^7.$$

6.35. 10! sayısını asallara ayıralım:

$$\begin{aligned} 10! &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \\ &= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 2^2 \cdot 5^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \\ &= 2^{1+2+1+3} \cdot 3^{1+1+2} \cdot 5^1 \cdot 7^1 \\ &= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1. \end{aligned}$$

6.36. $n!$ sayısı asallarına ayrıldığında, tabii ki beliren asallar n'den küçük olmalı. Örneğin 18! sayısı asallarına ayrıldığında 19, 23 gibi asallar belirmez, ama 18'den küçük tüm asallar belirir.

Alıştırmalar

6.37. 15.000.000 ve ve 160.000.000 sayılarını asallara ayırın.
6.38. 210^6 sayısını asallara ayırın.
6.39. $(2520^6)^5$ sayısını asallara ayırın.
6.40. $((2520^6)^5 \cdot 14^5)^9$ sayısını asallara ayırın.
6.41. 15! sayısını asallarına ayırın.
6.42. $15!^6$ sayısını asallara ayırın.
6.43. $10! + 15!$ sayısını asallarına ayırın.
6.44. $13! - 10!$ sayısını asallarına ayırın.
6.45. $15!/10!$ sayısını asallarına ayırın.
6.46. $(2^{14} + 2^{11}5^2)^8$ sayısını asallarına ayırın.
6.47. 2'nin en büyük kaçıncı kuvveti 100! sayısını böler?
6.48. 3'ün en büyük kaçıncı kuvveti 100! sayısını böler?
6.49. 100! sayısını asallarına ayırın. (Bunun kolay bir yöntemini ileride göreceğiz. Şimdilik acı çekmek zorundasınız.)

6.4 Kalanlı Bölme

Doğal sayılarda her zaman bölme yapılamayacağını biliyoruz, örneğin 26'i 7'ye tam olarak bölemeyiz, çünkü $26/7$ bir doğal sayı değildir, daha doğrusu çünkü $26 = 7x$ denkleminin doğal sayılarda bir çözümü yoktur. Ama gene de doğal sayılarda 26'yı 7'ye ***kalanlı*** bölebiliriz: 26'nın içinde tam 3 tane 7 vardır ve geriye 5 kalır, yani

$$25 = 7 \times 3 + 5$$

eşitliği geçerlidir. Hayattan bir örnekle açıklamak gerekirse, 26 bilyeyi 7 kişi arasında eşit paylaştırmak istiyorsanız herkese 3'er bilye düşer ve geriye ne yapacağınızı bilmediğiniz beş bilye kalır. Bunun gibi, 58'i 13'e tam bölmeye çalışırsak 4 çıkar ama geriye bir de 6 kalır, yani

$$58 = 13 \times 4 + 6$$

eşitliği doğrudur. Kalan sayı (yukarıdaki örneklerde sırasıyla 5 ve 6) her zaman bölen sayıdan (yukarıdaki örneklerde sırasıyla 7 ve 13) küçüktür. Bu genel bir olgudur: Her doğal sayı, 0 dışında her doğal sayıya kalanlı da olsa bölünür. Bunu kanıtlayalım.

Teorem 6.4. *n ve m iki doğal sayı olsun. $m \neq 0$ olsun. O zaman*

$$r < m \text{ ve } n = mq + r$$

önermelerini sağlayan q ve r doğal sayıları vardır. Ayrıca bu q ve r sayıları biriciktir, bir başka deyişle eğer q, q_1 ve r, r_1 doğal sayıları için

$$r_1,\ r < m \text{ ve } mq + r = mq_1 + r_1$$

ise $q = q_1$ ve $r = r_1$ olur.

Kanıt: Önce birinci önermeyi, yani q ve r sayılarının varlığını kanıtlayalım. Önsav 6.1'den dolayı
$$mq \leq n < m(q+1)$$
eşitsizliklerini sağlayan bir q doğal sayısının varlığını biliyoruz. Demek ki
$$0 \leq n - mq < m$$
olur. Eğer $r = n - mq$ tanımını yaparsak, istediğimiz
$$r < m \text{ ve } n = mq + r$$
önermelerine ulaşırız.

Aynı olgunun bir başka kanıtını daha verelim. $n = m \times 0 + n$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki
$$A = \{r \in \mathbb{N} : \text{ bir } q \in \mathbb{N} \text{ doğal sayısı için } n = mq + r\}$$
kümesi n'yi içeriyor, dolayısıyla A kümesi boş küme değil. İyisıralama Özelliği'nden dolayı A'nın en küçük ögesi vardır. Bu en küçük ögeye r diyelim. $r \in A$ olduğundan, bir $q \in \mathbb{N}$ için
$$n = mq + r \tag{1}$$
olur. Geriye $r < m$ eşitsizliğini kanıtlamak kaldı. Diyelim bu eşitsizlik doğru değil. Olmayana ergi yöntemini kullanacağız, yani bu varsayımdan bir çelişki elde edeceğiz. $r < m$ eşitsizliği doğru değilse, $r \geq m$ eşitsizliği doğrudur. Buradan da $r - m \in \mathbb{N}$ çıkar. Öte yandan (1) eşitliğinden hemen
$$n = m(q+1) + (r - m)$$
elde ederiz. Bu da $r - m \in A$ demektir. Ama $m \neq 0$ olduğundan $r - m < r$ olur, ki bu da r'nin A'nın en küçük ögesi olmasıyla çelişir. Demek ki varsayımımız yanlışmış, yani $r < m$ eşitsizliği doğruymuş. Böylece teoremin önermesinde varlığı söylenen q ve r sayılarının varlığı ikinci kez kanıtlandı.

Şimdi q ve r sayılarının biricikliğini kanıtlayalım. Diyelim q, q_1 ve r, r_1 doğal sayıları için
$$r_1,\ r < m \text{ ve } mq + r = mq_1 + r_1$$
oluyor. Bir çelişki elde etmek amacıyla $q_1 > q$ varsayımını yapalım. O zaman
$$m(q_1 - q) = r - r_1$$
ve
$$m \leq m(q_1 - q) = r - r_1 \leq r < m$$

olur, bu da $m < m$ çelişkisini verir. Demek ki q_1, q'dan büyük olamaz. Aynı nedenden q da q_1'den büyük olamaz. Böylece $q = q_1$ eşitliğini göstermiş olduk. Bundan ve $mq + r = mq_1 + r_1$ eşitliğinden $r = r_1$ elde ederiz. □

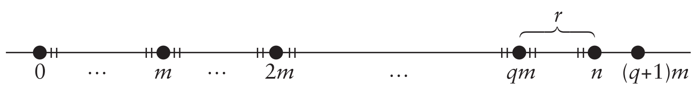
Aslında q ve r'yi bulmak için şunu yapıyoruz: Aynen Önsav 6.1'in kanıtında yaptığımız gibi, m'nin katlarından oluşan

$$0,\ m,\ 2m,\ 3m,\ \ldots$$

dizisine bakıyoruz. Yani 0'dan başlayarak n'ye doğru m uzunlukta adımlar atıyoruz. Bu dizi bir zaman sonra n'yi aşacaktır, mesela n'inci adımda $nm \geq n$ olacaktır. Diyelim qm, n'yi aşmıyor da, bir sonraki adımda $(q+1)m$ aşıyor, yani diyelim

$$qm \leq n < (q+1)m$$

oluyor. Şekil şöyle:



Şimdi r'yi $n - qm$ sayısı olarak alalım. İstediğimize ulaşırız.

Teoremdeki r sayısına ***kalan*** adı verilir. n bölünen sayıdır, m bölen sayıdır. q sayısına da "bölüm" ya da "sonuç" denebilir.

Demek ki bir doğal sayı bir $m > 0$ doğal sayısına bölündüğünde kalan

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$$

sayılarından biri olur. Bir başka deyişle her doğal sayı

$$m\mathbb{N},\ m\mathbb{N}+1,\ m\mathbb{N}+2,\ \ldots,\ m\mathbb{N}+(m-1)$$

kümelerinden birinde olmalı. Ayrıca "kalan" biricik olduğundan bu altkümeler ikişer ikişer kesişemez. Sonuç olarak, $\mathbb{N}$ kümesi, ikişer ikişer ayrık olan yukarıdaki m tane altkümenin birleşimidir.

Sonuç 6.5. *$m > 0$ bir doğal sayı olsun. Eğer $r, s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ iki farklı doğal sayıysa,*

$$(m\mathbb{N}+r) \cap (m\mathbb{N}+s) = \emptyset$$

olur. Dolayısıyla $\mathbb{N}$ kümesi ikişer ikişer ayrık olan

$$m\mathbb{N},\ m\mathbb{N}+1,\ m\mathbb{N}+2,\ \ldots,\ m\mathbb{N}+(m-1)$$

altkümelerinin birleşimidir. □

Eğer $m = 1$ ise kalan ancak 0 olabilir ve bu durumda $\mathbb{N} = \mathbb{N}$ gibi pek ilginç olmayan bir önerme elde ederiz. Ama eğer $m = 2$ ise kalan ya 0 ya da 1 olur; kalanı 0 olanlar çift sayı, kalanı 1 olanlar tek sayılardır. Sonuca göre $2\mathbb{N}$ ve $2\mathbb{N}+1$ kümeleri ayrık olduğundan, bir sayı aynı anda hem çift hem tek olamaz! Böylece herkesin bildiği bir önermeyi daha kanıtlamış olduk...

Eğer $m = 3$ ise kalan 0, 1 ya da 2 olabilir. Kalanı 0 olanlar 3'e tam bölünenlerdir, kalanı 1 olanlar 3'e bölündüğünde kalanı 1 olan sayılardır (elbette!) ve kalanı 2 olanlar 3'e bölündüğünde kalanı 2 olan sayılardır (gene elbette!). Böylece doğal sayıları üç parçaya ayırmış oluruz:

$$\mathbb{N} = 3\mathbb{N} \cup (3\mathbb{N}+1) \cup (3\mathbb{N}+2).$$

Sonuca göre bu üç küme ikişer ikişer ayrıktır yani ikişer ikişer boşkümede kesişirler.

Benzer şey diğer doğal sayılar için de geçerlidir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N}+1) \cup (4\mathbb{N}+2) \cup (4\mathbb{N}+3) \\ \mathbb{N} &= 5\mathbb{N} \cup (5\mathbb{N}+1) \cup (5\mathbb{N}+2) \cup (5\mathbb{N}+3) \cup (5\mathbb{N}+4) \\ \mathbb{N} &= 6\mathbb{N} \cup (6\mathbb{N}+1) \cup (6\mathbb{N}+2) \cup (6\mathbb{N}+3) \cup (6\mathbb{N}+4) \cup (6\mathbb{N}+5) \end{aligned}$$

olur ve her eşitliğin sağında bileşimi alınan altkümeler ikişer ikişer ayrıktır.

Örnekler

6.50. $(5\mathbb{N}+3)(5\mathbb{N}+4)$ kümesindeki sayıları belirlemek pek kolay olmayabilir ama en azından

$$(5\mathbb{N}+3)(5\mathbb{N}+4) \subseteq 5\mathbb{N}+2$$

olduğunu gösterebiliriz çünkü her $x,\ y \in \mathbb{N}$ için

$$(5x+3)(5y+4) = 25xy+15y+20x+12 = 5(5xy+3y+4x)+12 = 5(5xy+3y+4x+2)+2$$

olur ve en sağdaki sayı $5\mathbb{N}+2$ kümesindedir. Tabii $(5\mathbb{N}+3)(5\mathbb{N}+4) \subseteq 5\mathbb{N}+12$ önermesi de doğru.

6.51. Öte yandan $(5\mathbb{N}+2)(7\mathbb{N}+3)$ kümesi çok daha vahşidir, yukarıdaki örnekte olduğu gibi zaptedilemez.

6.52. $2^6 \cdot 3^4$ sayısı 5'e bölündüğünde kalanı bulalım. a ve b doğal sayıları için

$$2^4 = 16 = 1 + 15 = 1 + 5a$$

(burada $a = 3$ ama bunun bir önemi olmayacak) ve

$$2^6 = 2^4 \cdot 2^2 = (1 + 5a) \cdot 4 = 4 + 5b$$

(burada $b = 4a = 12$ ama bunun bir önemi olmayacak) olduğundan ve bir c doğal sayısı için

$$3^4 = 81 = 1 + 80 = 1 + 5c$$

(burada $c = 16$ ama bunun bir önemi olmayacak) olduğundan, bir d doğal sayısı için

$$2^6 \cdot 3^4 = (4 + 5b)(1 + 5c) = 4 + 5d$$

olur. Demek ki yanıt 4'tür.

6.53. $2^6 + 3^4$ sayısı 5'e bölündüğünde kalanı bulalım. Bir önceki alıştırmada olduğu gibi b ve c doğal sayıları için

$$2^6 = 2^4 \cdot 2^2 = (1+5a) \cdot 4 = 4 + 5b$$

ve

$$3^4 = 81 = 1 + 80 = 1 + 5c$$

olduğundan,

$$2^6 + 3^4 = (1+5b) + (4+5c) = 5 \times (1+b+c)$$

olur. Demek ki $2^6 + 3^4$ sayısı 5'e bölünüyormuş, yani 5'e bölündüğünde kalan 0 imiş.

6.54. 2^{12} sayısı 5'e bölündüğünde kalanı bulalım.

$$2^4 = 16 = 1 + 15 = 1 + 5a$$

olduğundan (burada $a = 3$ ama bunun bir önemi olmayacak),

$$2^{12} = \left(2^4\right)^3 = (1+5a)^3$$

olur. En sağdaki parantezi açarsak, o sayının bir b için $1+5b$'ye eşit olduğunu görürüz, yani

$$2^{12} = \left(2^4\right)^3 = (1+5a)^3 = 1 + 5b$$

olur. Dolayısıyla yanıt 1'dir.

6.55. $2^3+3^4+4^5+5^6+6^7$ sayısı 7'ye bölündüğünde kalanı bulalım. Önce toplanan her sayının 7'ye bölündüğünde kalanını bulalım. 2^3 kolay: Bir a sayısı için,

$$2^3 = 8 = 1 + 7a$$

olur. ($a = 1$ elbette, ama kimin umurunda!) Okurun isterse bulabileceği b ve c sayıları için

$$3^4 = 9^2 = (2+7b)^2 = 4 + 7c$$

olur. Benzer şekilde

$$4^5 = (4^2)^2 \cdot 4 = 16^2 \cdot 4 = (2+7d)^2 \cdot 4 = (4+7e) \cdot 4 = 16 + 7f = 2 + 7g$$

ve

$$5^6 = (5^2)^3 = 25^3 = (4+7h)^3 = 4^3 + 7i = 64 + 7i = 1 + 7j$$

ve

$$6^7 = (6^2)^3 \cdot 6 = 36^3 \cdot 6 = (1+7k)^3 \cdot 6 = (1+7\ell) \cdot 6 = 6 + 7m$$

olur. Şimdi bu eşitliklerin hepsini toplayalım:

$$\begin{aligned} 2^3+3^4+4^5+5^6+6^7 &= (1+7a)+(4+7c)+(2+7g)+(1+7j)+(6+7m) \\ &= (1+4+2+1+6) + 7n \\ &= 14 + 7n = 7(2+n) \end{aligned}$$

Meğer sayı 7'ye bölünüyormuş, yani 7'ye bölündüğünde kalanı 0 imiş.

Alıştırmalar

6.56. $(7\mathbb{N}+3)(7\mathbb{N}+4) \subseteq 7\mathbb{N}+5$ önermesini kanıtlayın.

6.57. $(7\mathbb{N}+3)(14\mathbb{N}+4) \subseteq 7\mathbb{N}+5$ önermesini kanıtlayın.

6.58. $(21\mathbb{N}+3)(14\mathbb{N}+4) \subseteq 7\mathbb{N}+5$ önermesini kanıtlayın.

6.59. 2^{12} sayısı 7'ye bölündüğünde kalanını bulun.

6.60. 3^{120} sayısı 7'ye bölündüğünde kalanını bulun.

6.61. $2^{12} + 3^{15}$ sayısı 9'a bölündüğünde kalanı bulun.

6.62. $2^{10} + 3^{15} + 5^{15}$ sayısı 11'e bölündüğünde kalanı bulun.

6.63. $2^{10} \cdot 3^15$ sayısı 11'e bölündüğünde kalanı bulun.

6.64. $2^3 + 3^4 + 4^5 + 5^6 + 6^7$ sayısı 11'e bölündüğünde kalanı bulun.

6.65. Eğer $n > 0$ ise $(2n)!$ sayısının n^2'ye bölündüğünü kanıtlayın.

6.66. Eğer $n > 0$ ve k bir doğal sayıysa $(kn)!$ sayısının n^k'ya bölündüğünü kanıtlayın.

6.67. $4\mathbb{N}+1$ kümesinin çarpma altında kapalı olduğunu kanıtlayın. Buradan hareketle, 5^n+1 ya 9^n+1 türünden yazılan bir sayının 2'ye bölündüğünü ama 4'e bölünmediğini gösterin.

6.5 Bölme Algoritması

Doğal sayılarda kalanlı bölme yapmanın bir yöntemi vardır, yani n ve m sayıları verildiğinde (ama m illa ki 0'dan farklı olacak), Teorem 6.4'teki q ve r sayılarını bulmanın bir "algoritması" vardır. Hiç düşünmeden, verilmiş kurallara uyarak sonuç bulmaya yarayan yöntemlere matematikte ve bilgisayar bilimlerinde ***algoritma*** adı verilir. Bu algoritmayı anlatalım. n ve m iki doğal sayı olsun. $m \neq 0$ varsayımını yapalım. Yukarıdaki teoremi sağlayan q ve r sayılarını bulacağız.

Başlangıçta, teoremin kanıtından esinlenerek $q = 0$ ve $r = n$ tanımlarını yapalım. q ve r'ye verdiğimiz bu değerlerle elbette $n = mq+r$ eşitliği sağlanır. Tabii bunlar henüz aradığımız q ve r sayıları değil, çünkü r yeterince küçük olmayabilir. Bu sayıları yavaş yavaş değiştireceğiz, q teker teker artacak, r de m'şer m'şer azalacak ve r tam kıvamına geldiğinde de duracağız.

Eğer r sayısı (ki en başta n'ye eşit) m'den küçükse duralım. İstediğimizi elde ederiz.

Değilse, q sayısını 1 artıralım (şimdi $q = 1$ oldu) ve r sayısını $r-m$ sayısına dönüştürelim (şimdi $r = n - m$ oldu). $n = mq+r$ eşitliği gene geçerlidir. Eğer yeni r sayısı m'den küçükse duralım. İstediğimizi elde ederiz.

Değilse, q sayısını 1 artıralım (şimdi $q = 2$ oldu) ve r sayısını $r-m$ yapalım (şimdi $r = n-2m$ oldu). $n = mq+r$ eşitliği gene geçerlidir. Eğer r sayısı m'den küçükse duralım. İstediğimizi elde ederiz.

Değilse bu yönteme devam edelim. Küçüle küçüle bir zaman sonra r, m'den daha küçük olacaktır. O aşamada istediğimiz q ve r sayılarını elde etmiş oluruz.

Yukarıdaki yönteme bir örnek verelim. $n = 25$ ve $m = 7$ olsun. İlk aşamada

$$q = 0 \text{ ve } r = n = 25.$$

Sorumuz "$r < m$?" sorusu. Yanıt şimdilik olumsuz, çünkü 25, 7'den küçük değil. Yukarıdaki q ve r'yi değiştirelim:

$$q = 1 \text{ ve } r = 25 - 7 = 18$$

olsun. Gene "$r < m$?" sorusunu soralım. Yanıt gene olumsuz, çünkü 18, 7'den küçük değil. q ve r'yi değiştirelim:

$$q = 2 \text{ ve } r = 18 - 7 = 11$$

olsun. Gene "$r < m$?" sorusunu soralım. Yanıt gene olumsuz, çünkü 11, 7'den küçük değil. q ve r'yi değiştirelim:

$$q = 3 \text{ ve } r = 11 - 7 = 4$$

olsun. Gene "$r < m$?" sorusunu soralım. Yanıt bu sefer olumlu, çünkü 4, 7'den küçük. İstediğimiz q ve r sayılarını bulduk:

$$q = 3 \text{ ve } r = 4.$$

Gerçekten de

$$25 = 7 \times 3 + 4 \text{ ve } 4 < 7$$

oluyor. Dikkat ederseniz bu yöntemde sırasıyla

$$\begin{aligned} 25 &= 7 \times 0 + 25 \\ 25 &= 7 \times 1 + 18 \\ 25 &= 7 \times 2 + 11 \\ 25 &= 7 \times 3 + 4 \end{aligned}$$

eştliklerini kullanıyoruz. q sürekli birer birer büyüyor (0, 1, 2, 3 oluyor), r ise m'den küçük oluncaya kadar m'şer m'şer azalıyor (25, 18, 11, 4 oluyor). Aşağıdaki tabloda q ve r'nin macerasını görüyorsunuz:

n	m	q	r
25	7	0	25
		1	18
		2	11
		3	4

Örnek 5.7'de 43.725 ile 13.565'in ortak bölenlerini bulmanın bir yöntemini bulmuştuk. Örneğin sonunda da uzun sürebilecek bu yöntemi nasıl kısaltabileceğimizi göstermiştik. O örneğin sonunda söylediklerimizi şimdi teorik bir biçimde açıklayabiliriz. Önce şu teoremi kanıtlayalım, sonra aynı örneği tekrar ele alacağız.

Teorem 6.6. *$n > m > 0$ iki doğal sayı olsun. n'yi m'ye bölüp, q ve $r < m$ doğal sayıları için $n = mq + r$ elde edelim. O zaman n ve m sayılarının ortak bölenleriyle m ve r sayılarının ortak bölenleri aynı sayılardır.*

Kanıt: Eğer bir d sayısı hem n'yi hem m'yi bölüyorsa, elbette bu d sayısı $n - mq$, yani r sayısını da böler. Diğer istikamette: Eğer bir d sayısı hem r'yi hem de m'yi bölüyorsa, elbette bu d sayısı n'yi de böler çünkü $n = mq + r$ eşitliği geçerlidir. □

Örnekler

6.68. Örnek 5.7'de ele aldığımız 43.725 ile 13.565'in ortak bölenlerini bulma örneğimize geri dönelim. Büyük sayıyı küçük sayıya bölelim:

$$43.725 = 13.565 \times 3 + 3.030.$$

Böylece, teoremden dolayı, 43.725 ile 13.565'in ortak bölenlerinin 13.565 ile 3.030'un ortak bölenleri olduğunu anlarız. Şimdi 13.565'i 3.030'a bölelim:

$$13.565 = 3.030 \times 4 + 1.445.$$

Böylece, teoremden dolayı, 13.565 ile 3.030'un ortak bölenlerinin 3.030 ile 1.445'in ortak bölenleri olduğunu anlarız. Şimdi 3.030'u 1.445'e bölelim:

$$3.030 = 1.445 \times 2 + 140.$$

Böylece, teoremden dolayı, 3.030 ile 1.445'in ortak bölenlerinin 1.445 ile 140'ın ortak bölenleri olduğunu anlarız. Şimdi 1.445'i 140'a bölelim:

$$1.445 = 140 \times 10 + 45.$$

Böylece, teoremden dolayı, 1.445 ile 140'ın ortak bölenlerinin 140 ile 45'in ortak bölenleri olduğunu anlarız. Şimdi 140'ı 45'e bölelim:

$$140 = 45 \times 3 + 5.$$

Böylece, teoremden dolayı, 140 ile 45'in ortak bölenlerinin 45 ile 5'in ortak bölenleri olduğunu anlarız. Şimdi 45'ı 5'e bölelim:

$$45 = 5 \times 9 + 0.$$

Böylece, teoremden dolayı, 45 ile 5'in ortak bölenlerinin 5 ile 0'ın ortak bölenleri (yani 5'in bölenleri) olduğunu anlarız. Süreci burada tamamlayalım. Ta en baştan ele alacak olursak, 43.725 ile 13.565'in ortak bölenleri 5'in bölenleridir; dolayısıyla 43.725 ile 13.565'in en büyük ortak böleni 5'tir.

Yukarıda yaptıklarımızı bir tablo halinde gösterelim:

$$\begin{aligned}
43.725 &= 13.565 \times 3 + 3.030\\
13.565 &= 3.030 \times 4 + 1.445\\
3.030 &= 1.445 \times 2 + 140\\
1.445 &= 140 \times 10 + 45\\
140 &= 45 \times 3 + 5\\
45 &= 5 \times 9 + 0
\end{aligned}$$

0'dan önceki ilk kalan 43.725 ile 13.565'in en büyük ortak bölenidir.

Bu örnekte açıkladığımız en büyük ortak bölen bulma algoritmasına ***Öklid algoritması*** adı verilir.

6.69. Öklid algoritmasını şöyle de kullanabiliriz (bu yöntemi Örnek 5.7'de açıklamıştık):

$$43.725 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleriyle

$$43.725 - 13.565 = 30.160 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleri aynıdır.

$$30.160 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleriyle

$$30.160 - 13.565 = 16.595 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleri aynıdır.

$$16.595 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleriyle

$$16.595 - 13.565 = 3.030 \text{ ile } 13.565$$

sayılarının ortak bölenleri aynıdır. 3.030 ile 13.565'in ortak bölenleriyle

$$3.030 \text{ ile } 13.565 - 3.030 = 10.535$$

sayılarının ortak bölenleri aynıdır... Bunu böyle devam ettirerek, ortak bölenlerini bulmak istediğimiz sayıları sürekli küçültürüz ve belli bir zaman sonra ortak bölenlerini kolaylıkla bulabileceğimiz bir sayı çiftine rastlarız.

7. Asallar Üzerine Daha Fazla

Bu bölümde önceki bölümde kanıtladıklarımızı kullanarak asallar üzerine birbirinden ilginç sonuçlar üreteceğiz.

$$2\mathbb{N} \cap (2\mathbb{N}+1) = \emptyset$$

eşitliğini biliyoruz, bir sayı aynı zamanda tek ve çift olamaz. Benzer şekilde

$$(3\mathbb{N}+1) \cap (3\mathbb{N}+2) = \emptyset$$

olur. Örnekleri çoğaltabiliriz:

$$(7\mathbb{N}+3) \cap (7\mathbb{N}+5) = \emptyset$$

olur, çünkü $7\mathbb{N}+3$ kümesi 7'e bölündüğünde kalanın 3 olduğu sayılardan oluşur, oysa $7\mathbb{N}+5$ kümesi 7'ye bölündüğünde kalanın 5 olduğu sayılardan oluşur ve Teorem 6.4 bize kalanın biricik olduğunu söylüyor, kalan hem 3, hem 5 olamaz.

Demek ki, örneğin,

$$\mathbb{N} = 5\mathbb{N} \cup (5\mathbb{N}+1) \cup (5\mathbb{N}+2) \cup (5\mathbb{N}+3) \cup (5\mathbb{N}+4)$$

olur ve bu kümeler ikişer ikişer ayrıktırlar. Bu durumda (kümeler ikişer ikişer ayrık olduklarında), bazen, bileşim için $\cup$ simgesi yerine $\sqcup$ simgesi kullanılır, yani

$$\mathbb{N} = 5\mathbb{N} \sqcup (5\mathbb{N}+1) \sqcup (5\mathbb{N}+2) \sqcup (5\mathbb{N}+3) \sqcup (5\mathbb{N}+4)$$

yazılır. Bunun şekli aşağıda:

$5\mathbb{N}$	$5\mathbb{N}+1$	$5\mathbb{N}+2$	$5\mathbb{N}+3$	$5\mathbb{N}+4$
• 0	• 1	• 2	• 3	• 4
• 5	• 6	• 7	• 8	• 9
• 10	• 11	• 12	• 13	• 14
• 15	• 16	• 17	• 18	• 19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\mathbb{N}$

$2\mathbb{N}+1$ kümesinin ögeleri tek sayılardır, 2'ye bölünmezler, bu sayılar 2'ye böländüğünde kalan 1 olur. Bunun gibi $3\mathbb{N}+1$ ve $3\mathbb{N}+2$ kümesinin ögeleri de 3'e bölünmezler, bu sayılar 3'e bölündüğünde kalan sırasıyla 1 ve 2 olur. Benzer nedenden $4\mathbb{N}+1$, $4\mathbb{N}+2$, $4\mathbb{N}+3$ kümesinin ögeleri 4'e bölünmezler. Tahmin ettiğiniz üzere, bu genel bir olgudur: Eğer bir sayı m'ye bölündüğünde kalan 0 değilse, o sayı m'ye tam bölünmez.

Bundan biraz daha genel bir sonuç kanıtlayabiliriz. Evet, $15\mathbb{N}+1$ kümesindeki sayılar 15'e tam bölünmez, ama 3'e ve 5'e de tam bölünmez. Aynı nedenden $42\mathbb{N}+1$ kümesindeki sayılar 42'ye bölünmez, ama bunun da ötesinde 2'ye, 3'e, 6'ya, 7'ye, 14'e ve 21'e de tam bölünmez. Bu daha genel sonucu not düşüp kanıtlayalım:

Sonuç 7.1. *$k > 1$ ve $m \neq 0$ iki doğal sayı olsun. Eğer $k|m$ ise $m\mathbb{N}+1$ kümesinin ögeleri k'ya tam bölünmezler.*

Kanıt: $k|m$ olduğundan, $m\mathbb{N} \subseteq k\mathbb{N}$ olur. Dolayısıyla

$$k\mathbb{N} \cap (m\mathbb{N}+1) \subseteq k\mathbb{N} \cap (k\mathbb{N}+1) = \emptyset$$

olur. □

Eğer 2'ye, 7'ye, 45'e ve 19'a bölünmeyen bir sayı bulmak istiyorsak, bu sayıları birbirleriyle çarpıp 1 ekleyelim:

$$2 \cdot 7 \cdot 45 \cdot 19 + 1 = 11.971$$

sayısı yukarıdaki sonuca göre 2'ye, 7'ye, 45'e ve 19'a bölünmez.

Bir sonraki sonuçta asal sayıların sonsuzluğunu kanıtlayacağız. Matematiksel kanıtı vermeden önce kanıtı sohbet biçiminde açıklayalım. Diyelim sadece iki tane asal sayı biliyoruz, mesela diyelim sadece 2 ve 3'ün asal olduklarını biliyoruz. Bakalım bu iki asaldan başka asal var mı? Bu iki asalı çarpıp 1 ekleyelim:

$$(2 \times 3) + 1 = 7$$

Her sayı gibi, bulduğumuz bu sayı da bir asala bölünür (7, 7 asalına bölünüyor), ama 2 ve 3 asallarına bölünmez. Bu sayıyı bölen asal (7), üçüncü asalımız olacak. Demek ki şimdi üç asal sayı biliyoruz: 2, 3 ve 7. Bu üç asalı çarpıp 1 ekleyelim:

$$(2 \times 3 \times 7) + 1 = 43$$

Bu sayı da her sayı gibi bir asala bölünmeli, ama 2, 3 ve 7 asallarına bölünemez. Demek ki 43'ü bölen asal daha önceki asal listemizde yok. 43'ü bölen asal da 43'tür. Şimdi dört asalımız oldu: 2, 3, 7 ve 43. Bildiğimiz bu asalları çarpıp 1 ekleyelim:

$$(2 \times 3 \times 7 \times 43) + 1 = 1807$$

elde ederiz. Önceki teoreme göre 1807 sayısı bildiğimiz 2, 3, 7 ve 43 asallarına bölünmez, ama illa ki bir asala bölünür. Nitekim

$$1807 = 13 \times 139$$

olur ve 13 bir asaldır. Yeni bir asal daha keşfettik: 13. (Aslında 139 da bir asal ama bunu bilmediğimizi varsayalım.) Şimdi artık beş asalımız var: 2, 3, 7, 43 ve 13. Bu beş asalı çarpıp 1 ekleyelim:

$$(2 \times 3 \times 7 \times 43 \times 13) + 1 = 23.479$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz 23.479 sayısı bir asala bölünür ama bu asal asla 2, 3, 7, 43 ya da 13 olamaz. Nitekim,

$$23.479 = 53 \times 443$$

olur ve 53 bir asaldır. (443 de bir asal, ama ona ihtiyacımız yok.) Böyle gide gide hep bir asal daha fazla elde ederiz. Bu da sonsuz sayıda asal olduğunu gösterir. Şimdi bu basit düşünceyi matematiksel bir kanıt olarak yazalım.

Sonuç 7.2. *Sonsuz sayıda asal sayı vardır.*

Kanıt: n tane asal sayı alalım, bu asallara $p_1, p_2, \ldots, p_n$ diyelim. Bu asalları çarpıp, çıkan sonuca 1 ekleyelim, yani

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

sayısına bakalım. Teorem 6.2'ye göre N sayısı bir asala bölünür. Sonuç 7.1'e göre N'yi bölen bu asal $p_1, p_2, \ldots, p_n$ asallarından farklı olmalı. Demek ki $p_1, p_2, \ldots, p_n$ asallarından farklı yepyeni bir asal bulduk. Böylece verilmiş her n tane asal için $n + 1$'inci bir asal bulduk. Bu da sonsuz sayıda asal olduğunu gösterir. □

İkinci Kanıt: n herhangi bir doğal sayı olsun. $N = n! + 1$ sayısına bakalım. Teorem 6.2'ye göre N sayısı bir asala bölünür. Sonuç 7.1'ya göre N'yi bölen bu asal $n!$ sayısını bölemez, yani $2, 3, \ldots, n$ olamaz, illa ki n'den büyük olmalı. her n sayısından daha büyük bir asal bulduk. Bu da sonsuz sayıda asal sayının varlığını gösterir. □

İkinci kanıt aslında şu sonucu da kanıtlar:

Sonuç 7.3. *Her n doğal sayısı için $n < p \leq n! + 1$ eşitsizliklerini sağlayan bir p asalı vardır.* □

Örnekler

7.1. Her ne kadar Teorem 6.4'e göre $(5\mathbb{N}+1) \cap (5\mathbb{N}+3) = \emptyset$ ise de $(5\mathbb{N}+1) \cap (6\mathbb{N}+3)$ kümesi boş değildir, örneğin 21 sayısı bu kesişimdedir.

7.2. Acaba ardışık her bin sayıdan en az biri asal mıdır, yani n herhangi bir doğal sayıysa, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $\ldots$, $n + 1000$ sayılarından biri mutlaka asal mıdır? Birçok n sayısı için bu doğrudur tabii, ama her n sayısı için doğru mudur?

Bu soruyu yanıtlamak için yeterli bilgiye sahibiz. Yanıt olumsuzdur. Yanıtın olumsuz olduğunu kanıtlayalım.

Bir örnekle başlayalım. $7! = 5040$ sayısı elbette 2'ye, 3'e, 4'e, 5'e, 6'ya ve 7'ye bölünür. Dolayısıyla bu sayıya 2, 3, 4, 5, 6, 7 eklersek, elde ettiğimiz sayılar sırasıyla 2'ye, 3'e, 4'e, 5'e, 6'ya ve 7'ye bölünürler:

5042, 2'ye,
5043, 3'e,
5044, 4'e
5045, 5'e,
5046, 6'ya,
5047, 7'ye

bölünür. Dolayısıyla bu ardışık 6 sayıdan hiçbiri asal olamaz. Bunun gibi, aşağıdaki 1000 sayı,

$$1001! + 2,\ 1001! + 3,\ \ldots,\ 1001! + 1001$$

sırasıyla 2'ye, 3'e, ..., 1001'e bölünürler ve hiçbiri asal olamaz. Bu yaptığımızı genelleştirmek işten bile değildir:

Teorem 7.4. *Ardışık her n doğal sayıdan birinin mutlaka asal olduğu bir n yoktur.*

Kanıt: $(n+1)!+2$, $(n+1)!+3$, $\ldots$, $(n+1)!+n$, $(n+1)!+(n+1)$ sayıları sırasıyla 2'ye, 3'ye, $\ldots$, n'ye ve $(n+1)$'e bölünürler ve asal olamazlar. Bunlardan da tam n tane var. □

7.3. $4\mathbb{N}+1$ kümesi çarpma altında kapalıdır, yani bu kümeden iki sayı seçersek, bu iki sayının çarpımı da bu kümededir. Bunu kanıtlayalım. Bu kümeden iki sayı alalım. Bu sayıları, $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$4n + 1 \text{ ve } 4m + 1$$

biçiminde yazalım ve çarpımlarını hesaplayalım:

$$(4n + 1)(4m + 1) = 16nm + 4n + 4m + 1 = 4(4nm + n + m) + 1.$$

Görüldüğü üzere $(4n + 1)(4m + 1)$ sayısı da $4\mathbb{N} + 1$ kümesinde (çünkü $4nm + n + m$ sayısı bir doğal sayıdır).

7.4. Doğal sayıları

$$3\mathbb{N},\ 3\mathbb{N} + 1 \text{ ve } 3\mathbb{N} + 2$$

olmak üzere üç ayrık kümeye ayıralım. $3\mathbb{N}$ kümesinin çarpma altında kapalı olduğu belli, yani 3'e bölünen iki sayının çarpımı gene 3'e bölünür. $3\mathbb{N} + 1$ kümesi de çarpma altında kapalıdır. Bu, bir önceki örnekte olduğu gibi kolaylıkla kanıtlanabilir. Bunu kullanarak aşağıdaki teoremi kanıtlayalım:

Teorem 7.5. $3\mathbb{N} + 2$ *kümesinde sonsuz sayıda asal vardır.*

Kanıt: $3\mathbb{N}$ kümesindeki bir sayı $3\mathbb{N} + 2$ kümesindeki bir sayıyı bölemez, çünkü $3\mathbb{N}$ kümesindeki sayılar 3'e bölünüyor, oysa $3\mathbb{N}+2$ kümesindekiler 3'e bölünmüyorlar. Demek ki $3\mathbb{N} + 2$ kümesindeki bir sayıyı bölen sayılar $3\mathbb{N} + 1$ ve $3\mathbb{N} + 2$ kümesinde olmalıdır. Ama hepsi birden $3\mathbb{N}+1$ kümesinde olamaz, çünkü $3\mathbb{N}+1$ kümesinin ögeleri kendileriyle çarpıldığında gene $3\mathbb{N} + 1$ kümesinden bir sayı verir. Demek ki $3\mathbb{N} + 2$ kümesinin her sayısı, gene $3\mathbb{N} + 2$ kümesinden bir asala bölünür.

Şimdi $n \geq 3$ herhangi bir sayı olsun. $3n! + 2$ sayısını ele alalım. Bu sayıya x diyelim. $x \in 3\mathbb{N} + 2$ olur. Demek ki $3\mathbb{N} + 2$ kümesinde x'i bölen bir asal vardır. Öte yandan x'i bölen sayılar n'den büyüktür elbet. Ne kanıtladık? n kaç olursa olsun, $3\mathbb{N}+2$ kümesinde her n'den büyük bir asal vardır. Bundan da $3\mathbb{N}+2$ kümesinde sonsuz sayıda asal olduğu çıkar. □

7.5. Herhangi bir asal sayı alalım, diyelim 5. Şimdi çeşitli a sayıları için $a^5 - a$ sayısını hesaplayalım:

a	$a^5 - a$
0	0
1	0
2	30
3	240
4	1.020
5	3.120
6	7.770
7	16.800

Görüldüğü üzere hepsi 5'e bölünüyor. Aynı şeyi bir başka asal için yapalım, bu sefer asalımızı 7 alalım:

a	$a^7 - a$	$=$	$7 \times n$
0	0	$=$	7×0
1	0	$=$	7×0
2	126	$=$	7×18
3	2184	$=$	7×312
4	16.380	$=$	7×2.340
5	78.120	$=$	7×11.160
6	279.930	$=$	7×39.990
7	823.536	$=$	7×117.648

Bu sefer de sonuçlar 7'ye bölünüyor.

Bu, genel bir olgudur ve Fermat'nın Küçük Teoremi olarak bilinir. Her p asalı ve her a sayısı için, $a^p - a$ sayısı p'ye bölünür. Örneğin $203^{101} - 203$ sayısı 101'e bölünür, çünkü 101 asaldır. Bunu teorem olarak yazalım ve kanıtlayalım.

Teorem 7.6 (Fermat'nın Küçük Teoremi)**.** *Eğer p bir asal ve n bir tamsayıysa $n^p - n$ sayısı p'ye bölünür.*

Kanıt: p bir asal sayı, n herhangi bir doğal sayı olsun. n tane farklı harf alalım, diyelim $h_1, h_2, ..., h_n$ harflerini aldık. Bu harflerle yazılmış p uzunluğundaki sözcükleri ele alalım. Örneğin eğer $p = 5$ ve $n = 3$ ise $h_1h_1h_2h_3h_1$, $h_3h_2h_2h_3h_1$, $h_2h_2h_2h_3h_1$, $h_3h_3h_3h_3h_3$ sözcüklerden dört tanesidir; bunlar gibi toplam 3^5 tane sözcük vardır, çünkü harfleri yerleştirecek 5 yerimiz var ve her yere 3 harften biri gelebilir. Genel durumda, bu tür sözcüklerden tam n^p tane vardır, çünkü p yerimiz var ve her bir yer için n tane harf seçeneğimiz var.

Bu sözcüklerin bazılarında tek bir harf kullanılır: $h_1h_1 \dots h_1$ gibi; bunlardan da tam n tane vardır. Bunları çıkaralım. Geriye

$$n^p - n$$

tane sözcük kalır. Bunlar, n tane harfin en az ikisini kullanan p uzunlukta sözcüklerdir. Bu sözcüklerin kümesine X diyelim. Eğer $n^p - n$ tane ögesi olan X kümesini, her birinde p tane öge bulunan ayrık kümelere ayırabilirsek, o zaman istediğimizi kanıtlamış oluruz.

Şimdi X kümesindeki sözcüklerin harflerini bir çemberin etrafına eşit aralıklarla dizelim. O zaman bazı sözcükler arasında fark kalmaz. Örneğin $p = 5$ ise,

KÜMES, ÜMESK, MESKÜ, ESKÜM, SKÜME

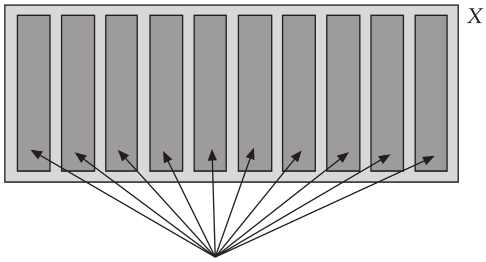
sözcükleri çember etrafına dizildiklerinde aynı sözcük gibi görünürler. Bu tür sözcüklere denk sözcükler diyelim. Her sözcük (kendisi de dahil olmak üzere) tam p tane sözcüğe denktir. Örneğin eğer $p = 5$ ise

$$h_1h_1h_1h_1h_2,\ h_1h_1h_1h_2h_1,\ h_1h_1h_2h_1h_1,\ h_1h_2h_1h_1h_1,\ h_2h_1h_1h_1h_1$$

sözcükleri denktir ya da

$$h_3h_5h_1h_1h_2,\ h_2h_3h_5h_1h_1,\ h_1h_2h_3h_5h_1,\ h_1h_1h_2h_3h_5,\ h_5h_1h_1h_2h_3$$

sözcükleri denktir. Birbirine denk olan sözcükleri bir altkümede toplayalım. Böylece X kümesinin n^p-n tane ögesini her biri p öge içeren altkümelere ayırmış oluruz. Dolayısıyla p, $n^p - n$ sayısını böler. □



X'in $n^p - n$ tane elemanı var ve her biri p elemanı olan ayrık sınıflara ayrılmış. Demek ki p, $n^p - n$'yı böler.

7.6. Bir önceki maddede kanıtladığımız Fermat'nın Küçük Teoremi'ni kullanarak 18^{23} sayısını 7'ye böldüğümüzde kalanı bulalım. $a = 2$ için,

$$18 = 4 + 7a$$

olduğundan kaça eşit olduğunu umursamadığımız bir b doğal sayısı için

$$18^{23} = (4 + 7a)^{23} = 4^{23} + 7b$$

olur. Demek ki 4^{23} sayısını 7'ye böldüğümüzde kalanı bulmak yeterli. Fermat'nın Küçük Teoremi'ne göre, bir c doğal sayısı için

$$4^7 = 4 + 7c$$

olur. Bundan da bir d için

$$4^{23} = (4^7)^3 \cdot 4^2 = (4 + 7c)^3 \cdot 4^2 = (4^3 + 7d) \cdot 4^2$$

bulunur. Demek ki $4^3 \cdot 4^2$ sayısının 7'ye bölümünden kalanı bulmak yeterli. $4^3 = 64 = 1 + 7 \cdot 9$ ve $4^2 = 16 = 2 + 7 \cdot 2$ olduğundan, yanıt 2 çıkar.

Alıştırmalar

7.7. $\mathbb{P} \subseteq \{2, 3\} \cup (6\mathbb{N} + 1) \cup (6\mathbb{N} - 1)$ önermesini kanıtlayın.

7.8. Fermat'nın Küçük Teoremi'ni kullanarak 2015^{15} sayısının 17'ye bölündüğünde kalanı bulun.

7.9. 21'in $(5\mathbb{N} + 1) \cap (6\mathbb{N} + 3)$ kümesinde olduğunu gösterin.

7.10. $4\mathbb{N}+3$ kümesinin iki ögesinin çarpımının her zaman $4\mathbb{N}+1$ kümesinde olduğunu gösterin. $4\mathbb{N} + 3$ kümesinden üç ögesinin çarpımının gene $4\mathbb{N} + 3$ kümesinde olduğunu gösterin.

7.11. Teorem 7.5'ten esinlenerek aşağıdaki teoremi kanıtlayın:

Teorem 7.7. $4\mathbb{N}+3$ *kümesinde sonsuz sayıda asal vardır.*

Notlar

7.12. Sonuç 7.3'te bulduğumuzdan çok daha kuvvetli bir olgu vardır: Her $n > 1$ doğal sayısı için n ile $2n$ arasında bir asal vardır. Bu önerme 1845'te Fransız matematikçi Joseph Bertrand (1822-1900) tarafından ortaya atılmıştır. Bertrand önermenin doğruluğunu 3 milyona kadar elle kontrol etmiş ama önermeyi tüm genelliğiyle kanıtlayamamıştır. Bu yüzden önerme "Bertrand postülası" olarak bilinir. Önerme daha sonra Rus matematikçi Çebişev (1821-1894) tarafından kanıtlanmıştır.

7.13. Bertrand postülasından da kuvvetli bir olgu kanıtlanmıştır: Her $k > 1$ doğal sayısı için k'dan büyük her k ardışık sayıdan en az biri k'dan büyük bir asala bölünür. Örneğin $k = 17$ alalım; o zaman $1001, 1002, \ldots, 1017$ sayılarından biri 17'den büyük bir asala bölünür. Bu olguyu Çebişev'in çağdaşı İngiliz matematikçisi James Joseph Sylvester (1814-1897) kanıtlamıştır.

Sylvester'in bu sonucundan Bertrand postülası kolaylıkla çıkar. $n > 2$ olsun. Sylvester'in teoreminde $k = n$ alalım ve $n+1, n+2, \ldots, n+n = 2n$ sayılarına bakalım. Burada tam n tane sayı vardır. Demek ki Sylvester'in sonucuna göre bu sayılardan biri, diyelim $n+m$ sayısı, n'den büyük bir asala bölünmek zorundadır, bu asala da p diyelim. Burada $m = 1, 2, \ldots, n$. Ama $m = n$ olamaz çünkü aksi halde $p|2n$ olur ve buradan ya $p|2$ ya da $p|n$ çıkar, ama $2 \leq n < p$ olduğundan her iki çıkarım da mümkün değildir. Şimdi bir $t \geq 1$ doğal sayısı için $n+m = tp$ yazalım. Eğer $t = 1$ olmasaydı, yani $t \geq 2$ olsaydı, $n+m < 2n \leq tn < tp = n+m$ olurdu, bir çelişki, demek ki $t = 1$ ve $n+m = p$, yani $n+m$ bir asaldır.

7.14. Yukarıda $n > 2$ ise n ile $2n$ arasında en az bir asal olduğunu gördük. Peki en az iki asal var mıdır? $n = 2, 3$ ise yoktur. Ama yeterince büyük n sayıları için n ile $2n$ arasında mutlaka en az iki asal vardır. Ya üç asal? O da oluyor, yeter ki n'yi belli bir sayıdan büyük alalım. Bu, Hint matematik dâhisi Ramanujan'ın 1919'da ve Macar matematik dâhisi Erdös'ün 1934'te kanıtladığı genel bir teoremdir: Her $k > 0$ doğal sayısı için, her $n > N$ için n ile $2n$ arasında k tane asal sayının olduğu bir N sayı vardır.

7.15. 18'inci yüzyılın sonlarına doğru, Fransız matematikçisi Legendre (1752-1833) Teorem 7.5 ve 7.7'yi genelleştirmek istedi. Şu soruyu sordu:

Soru. *a ve b, 1'den başka ortak böleni olmayan iki sayı olsun. $an+b$ biçiminde yazılan sonsuz sayıda asal var mıdır, yani $a\mathbb{N}+b$ kümesinde sonsuz sayıda asal var mıdır?*

Teorem 7.5'ten $a = 3$, $b = 2$ için, Teorem 7.7'den de $a = 4$, $b = 3$ için yanıtın olumlu olduğu anlaşılıyor. Legendre bu soruyu genel olarak yanıtlamak istedi. Örneğin $25n+6$ biçiminde yazılan sonsuz tane asal var mıdır? Eğer $x = 1$ ise 31 buluruz ki, 31 asaldır. Eğer $n = 2, 3, 4$ ise, sırasıyla 56, 81, 106 buluruz ve bunlardan hiçbiri asal değildir. Ama $n = 5$ olduğunda 131 çıkar ve 131 asaldır.

Legendre sorunun yanıtının olumlu olduğundan hiç kuşku duymadı, ancak kanıtlamakta güçlük çekti. 1785'te defterine "bunu bilimsel olarak kanıtlamalı" diye not düşmüş. On dört yıl sonra, 1798'de, "doğruluğundan kuşku duymamalıyız" diye yazmış. Sonra da kanıtlamaya çalışmış. Başaramadan... İkinci denemesini **Sayılar Kuramı** adlı kitabına aldığını biliyoruz [L]. Ama bu denemesi de yanlış. Kanıtın yanlışlığının ne zaman anlaşıldığını bilmiyorum. 1837'de Alman matematikçi Dirichlet (1805-1859) teoremi kanıtladı [Di]:

a ve b ortak böleni olmayan iki doğal sayıysa, $ax+b$ biçiminde yazılan sonsuz sayıda asal sayı vardır.

Dirichlet'nin yönteminden bir başka teorem daha elde edilebilir:
a, b ve c ortak böleni olmayan üç pozitif doğal sayı olsun. $ax^2 + bxy + cy^2$ *biçiminde yazılan sonsuz sayıda asal vardır.*

7.16. Sonsuz sayıda asal olduğunu gördük. Ama ne kadar sonsuz sayıda asal var? Bu sonsuzluğu derecelendirebilir miyiz? 100'den küçük 25 tane asal var. Demek ki 100'den küçük bir sayının asal olma olasılığı %25. Ama örneğin 1 milyardan küçük rastgele bir sayının asal olma olasılığı kaçtır? (%5'ten biraz fazla.) Ya da 100 milyardan küçük rastgele bir sayının? Bu olasılıklar aşağı yukarı (yani yaklaşık değer olarak) biliniyor. n büyüdükçe, 1 ile n arasında rastgele seçilmiş bir sayının asal olma olasılığı giderek azalır, ve eğer n çok çok çok büyükse bu olasılık 0'a çok yakın olur. Yani, evet, sonsuz tane asal sayı var ama o kadar da çok yok! Bir anlamda, rastgele seçilmiş bir doğal sayının asal olma olasılığı 0'dır. (Ama tabii bu dediğimin anlam kazanması için "rastgele seçilmiş doğal sayı"nın ne demek olduğunu bilmek lazım!)

8. Taban

8.1 On Tabanı

Bu bölümde neredeyse doğduğumuzdan beri bildiğimiz bir şeyi yeniden öğreneceğiz: Bir sayı "on tabanında" nasıl yazılır? Gerçekten de ilkokuldan beri, hatta okul öncesi çağlarımızdan beri hepimiz sayıları onluk tabanda yazarak öğrendik. Saymaya belki

$$\text{bir, iki, üç, } \ldots$$

diye sözlü başladık ama tez zamanda sayıları rakamlarla ifade etmeyi öğrendik:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Daha sonra sayının kendisiyle sayının ifadesi arasında bir fark olmadığına inandırıldık, mesela 19.652 sayısı bize sadece "19.652" ifadesi olarak gösterildi, "on dokuz bin altı yüz elli iki" sayısı olarak değil. Daha ilkel çağlarda, mesela taş devrinde filan yaşasaydık, 19.652 sayısını 19.652 tane çubuğu yanyana getirerek şöyle gösterirdik:

$$\underbrace{|||\ldots|||}_{\text{19.652 tane}}$$

19.652 **sayısı** aslında bir satır yukarıda gösterilen (aslında gösterilmeye çalışılan) çubuk sayısıdır ve "19.652" **ifadesi** sadece ve sadece bu çubuk sayısının bir gösterimidir. Yani sayı başka, sayının ifadesi başka.

Şöyle bir benzetme yapmak çok yanlış olmaz: "Masa" kelimesi asla masa değildir! "Masa" kelimesi sadece ve sadece masa adını verdiğimiz nesneyi simgeleyen bir kelimedir. "Masa" kelimesinin gerçek masayla o kadar alakası yoktur ki, Türkçe bilmeyen bir yabancıya "masa" derseniz size aval aval bakar!

19.652 gösterimiyle gerçek 19.652 arasındaki ilişki de buna benzer. Bir önceki cümlede geçen iki 19.652 ifadesini birbirinden ayırdetmek için ikincisine bundan böyle n diyeceğiz. Gerçek sayıya n dedik. Yani biri bize bir n doğal sayısı vermiş olsun. n, yukarıdaki gibi bir kümedeki çubuk sayısı olabilir. Aslında $n = 19.652$ ama biz bunu henüz bilmiyoruz, bulacağız. İşte bize verilen sayı aşağıdaki resimde bulunan çubuk sayısı:

$$\underbrace{|||\ldots|||}_{n \text{ tane çubuk}}$$

(Yer kazanmak amacıyla çubukların hepsini göstermedik, araya noktalar koyduk, ama tam 19.652 tane var; bu bilgi aramızda kalsın!)

Şöyle bir senaryo da düşünebiliriz: Hiç okula gitmemiş, vahşi ormandan çıkmamış birine, bir mağara insanına mesela doğal sayıların on tabanında nasıl yazıldığını öğretmeye çalışalım. Önce bu kişiye

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

rakamlarını ve 10'a kadar saymayı öğretelim.

19.652 çubuğu kişinin önüne yığalım. Bu yığında kaç çubuk olduğunu sorsak bize "çok" der herhalde. Yakın zamanda bu yığındaki çubuk sayısını aynen bizim gibi "19.652" olarak ifade etmesini öğrenecek.

Önce mağara kişisinden çubuklardan 10'arlık gruplar yapmasını isteyelim. Kişi çubukları 1965 adet 10'luk gruba ayıracaktır ve geriye sadece 2 çubuk kalacaktır:

$$\underbrace{\Box\ldots\Box}_{1965 \text{ tane } 10\text{'luk}} \quad + \quad ||$$

Biz, kişinin

$$19.652 = 1965 \times 10 + 2$$

işlemini yaptığını biliyoruz, yani aslında kalanlı bölme yapmıştır. Kişi bu ifadedeki 19.652'yi bilmiyor, 1965'i de bilmiyor, bunun için yeterli matematik bilgisi henüz yok, ama 2'yi biliyor. Bu 2'yi (kalanı yani) bir kâğıda yazmasını isteyelim:

$$2.$$

Bu 2, n sayısının, yani çubuk sayısının, yani 19.65**2** sayısının en sağdaki hanesidir.

19.652 çubuk sayısı, 1965 de onluk çubuk grubu sayısı.

Ardından kişiden, 1965 tane olan 10'luk grupları 10'ar 10'ar gruplamasını isteyelim. Böylece her büyük grupta $10 \times 10 = 100$ tane çubuk olacak ve 100'lük gruplardan 195 tane olacak ama 5 tane onluk grup artacak:

$$1965 = 196 \times 10 + 5.$$

Bu sefer kalan 5 oldu. Daha önce yazdığı 2'nin hemen soluna 5 yazsın:

$$52.$$

Bu 52, n sayısının, yani 19.6**52** sayısının son iki basamağıdır. Ardından aynı şeyi 196 için yapsın, yani bir önceki yüzlük grupları onar onar gruplayıp binlik gruplar elde etsin:

$$196 = 19 \times 10 + 6.$$

Daha önce yazdığı 52'nin soluna 6 yazsın:

$$652.$$

Bu 652, n sayısının, yani 19.**652** sayısının son üç basamağıdır. Sıra 19'da:

$$19 = 1 \times 10 + 9.$$

Daha önce yazdığı 652'nin soluna 9 yazsın:

$$9652.$$

Bu 9652, n sayısının, yani 1**9.652** sayısının son dört basamağıdır. Sonra sıra 1'e geldi:

$$1 = 0 \times 10 + 1.$$

Daha önce yazdığı 9652'nin soluna 1 yazsın:

$$19652.$$

Bu 19652, n sayısının, yani **19.652** sayısının son beş basamağıdır. Sonra sıra 0'a geldi:

$$0 = 0 \times 10 + 0.$$

Daha önce bulunan 19652'nin soluna bir 0 ekleyip 019652 elde ederiz. Bunu böyle sonsuza kadar götürebiliriz, bu aşamadan sonra sola hep 0 gelir:

$$\ldots 00019652.$$

Ama bildiğiniz gibi bu en soldaki 0'lar yazılmaz ve sayı

$$19652$$

olarak gösterilir. Eğer sayının okunmasını kolaylaştırmak istiyorsak rakamları en sağdan başlayarak üçer üçer bir noktayla ayırırız:

$$19.652$$

Aslında yaptığımız iş şu:

$$\begin{aligned}
n &= 1965 \cdot 10 + 2 \\
&= (196 \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 2 \\
&= 196 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \\
&= (19 \cdot 10 + 6) \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \\
&= 19 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \\
&= (1 \cdot 10 + 9) \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \\
&= 1 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2.
\end{aligned}$$

Yani yığındaki çubuk sayısını

$$n = 1 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

olarak ifade ettik. Görüldüğü üzere (eğer 10'u ve kuvvetlerini saymazsak) n sayısı, eşitliğin sağındaki 1, 9, 6, 5 ve 2 rakamlarıyla belirleniyor. Hepimizin bildiği gibi bu rakamlar soldan sağa doğru sıralanır ve böylece $n = 19652$ gösterimini elde ederiz.

Örneğin 65.018 gösterimi

$$n = 6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

sayısının gösterimidir. İstersek

$$n = 0 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

de yazabilirdik ama gereksiz yere en başa 0 eklemenin anlamı yok. Her doğal sayı böylece 0'dan 9'a kadar olan sayılarla (rakamlarla) ifade edilir.

Bu yazılıma ***on tabanında yazılım*** denir, çünkü sayılar hep 10'a bölünür, yani çubuklar 10'luk gruplara ayrılır, sonra bu 10'luk gruplar 10'luk 10'luk (yani 100'lük) gruplara ayrılır vs.

Böylece her n doğal sayısı, $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ sayıları için

$$n = a_k 10^k + \cdots + a_1 10 + a_0$$

olarak ifade edilir. Eğer $n \neq 0$ ise, a_k'yi 0'dan farklı alabiliriz ve bu durumda $k + 1$ sayısına n sayısının (on tabanında) ***basamak sayısı*** denir. Yukarıdaki $n = 19.652$ örneğinde $k = 4$, $a_4 = 1$, $a_3 = 9$, $a_2 = 6$, $a_1 = 5$ ve $a_0 = 2$ ve basamak sayısı $k + 1 = 4 + 1 = 5$.

Basamak sayısı $k + 1$ olan bir doğal sayı

$$10^k \leq n < 10^{k+1}$$

eşitsizliklerini sağlar. Bunun tersi de doğrudur: Bu eşitsizlikleri sağlayan bir doğal sayının basamak sayısı $k + 1$'dir. 0 sayısının basamak sayısının 0 olduğu kabul edilir.

Örnekler

8.1. 3^8 sayısının 10 tabanında yazılımında birler basamağında (yani en sağda) hangi rakam vardır? $3^8 = (3^4)^2 = 81^2$ olduğundan, 3^8'in birler basamağında 1 vardır.

8.2. 16^{17} sayısının 10 tabanında yazılımında birler basamağında hangi rakam vardır? 6'nın bütün kuvvetlerinin son basamağı 6 olduğundan, 16^{17}'nin birler basamağında 6 vardır.

8.3. 42^{43} sayısının birler basamağı kaçtır? Bu örnekte $a \equiv b$ ifadesi, a ve b sayılarının birler basamağı eşit anlamına gelsin.

$$42^{43} \equiv 2^{43} = (2^5)^8 2^3 = 32^8 8 \equiv 2^8 8 = 2^5 2^3 8 = 32 \cdot 64 \equiv 8.$$

Demek ki 42^{43} sayısının birler basamağında 8 varmış.

Alıştırmalar

8.4. 23^{56} sayısının birler basamağında hangi rakam bulunur?

8.5. a, birler basamağı 4 olan bir sayı olsun. a^{47}'nin birler basamağında hangi rakam bulunur?

8.6. Hangi sayıların tüm kuvvetlerinin birler basamağı hep aynıdır?

8.7. Hangi sayıların tüm çift kuvvetlerinin birler basamağı aynıdır?

8.8. Hangi sayıların kuvvetlerinde 1'den 9'a kadar tüm rakamlar bulunabilir?

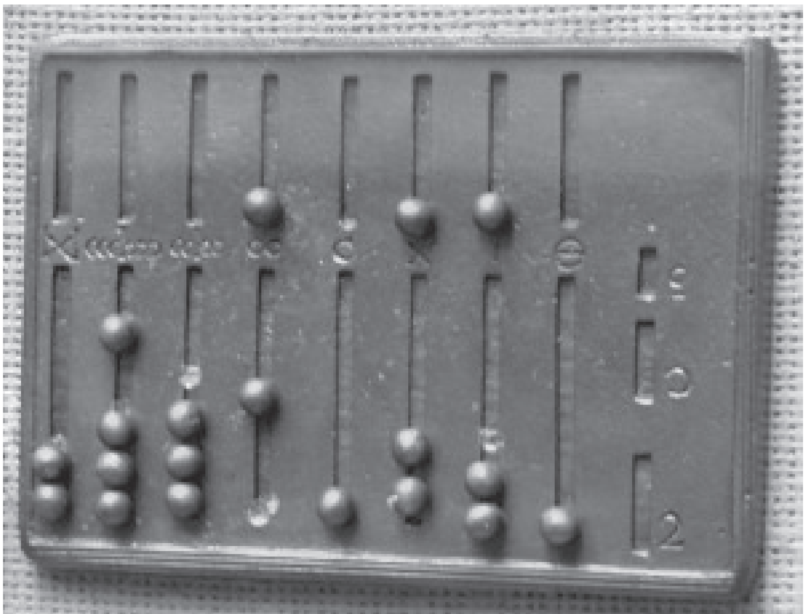
8.9. $a \geq b$ iki doğal sayı olsun. a ve b sayılarının birler basamağı aynı olmasının 10'un $a-b$ sayısını böldüğü anlamına geldiğini kanıtlayın.

8.10. Hangi $n \geq m$ doğal sayıları için $n! - m!$ sayısı 10'a bölünür?

Notlar

8.11. Tabii onluk tabanda yazılım öğrenildikten sonra, bu sayıların toplamını ve çarpımını onluk tabanda ifade etmeyi öğrenmek gerekir. Bunu ilkokulda öğreniriz. 32054 ile 7819'u elle çarpmak, biraz can sıkıcıdır belki ama hiç de zor değildir.

8.12. Eski Romalılar sayıları onluk tabanda ifade edemiyorlardı. Onların Etrüsklerden uyarladıkları kendi özel ifade biçimleri vardı; MCDXVIII gibi ifadeleri görmüşsünüzdür. Onluk tabanda 1418'e eşit olan bu sayının Romen rakamlarıyla ifade edilmiş biçiminin karesini almaya çalışırsanız ifadenin ne denli önemli olduğunu anlarsınız. İfade deyip geçmemek lazım, onluk sistem çok önemlidir. Romalılar bu ifadeleri bizim gibi kalem kâğıtla değil, abaküsle toplayıp çarpıyorlardı. Maalesef günümüze bir Roma abaküsü kalmamıştır. Aşağıda, birkaç boncuğu eksik olsa da, tahminî bir Roma abaküsünün fotoğrafını görüyorsunuz.



8.13. Romen rakamları 14, hatta 15'inci yüzyıla kadar Avrupa'da kullanıldı. 11'inci yüzyıldan itibaren yavaş yavaş "Hint-Arap sistemi" denilen yukarıda açıkladığımız ve bugün bizim de kullandığımız sisteme geçildi. Bugün Romen rakamları Batı kültüründe hâlâ daha geleneksel olarak kullanılır. Saatlerin Romen rakamlarıyla yazıldığı fiyakalı saatleri çok görmüşsünüzdür. Başka çok örnek var: İmparatorlar Roma rakamlarıyla sıralanırlar (Napolyon III gibi), gezegenlerin uyduları Roma rakamlarıyla belirtilirler (Titan'ın bir başka adı Satürn VI'dır), olimpiyatlar ve konferanslar Roma rakamlarıyla sıralanırlar (XX. Münih Olimpiyatları gibi).

8.2 Diğer Tabanlar

Tabanda 10'un kullanılması 10 parmağımız olmasından ileri gelmektedir. Çocukluğunuzda sayıları toplayıp çarparken parmaklarınızı kullandığınızı hatırlıyor musunuz? İşte yukarıda açıkladığımız onluk sistem, parmaklarımızı kullanabilelim, kolaylık olsun, rahat toplayıp çarpalım diye kabul edilmiştir. Eğer bizim de domuzlar gibi ikişer parmağımız (aslında tırnağımız, yani toynağımız) olsaydı, muhtemelen 4'lük tabanı kullanıyor olurduk. 4'lük tabanda yazılmak istenen sayı 10 yerine 4'e bölünür ve kalanlar sağdan sola doğru sıralanarak yazılır. Bir sonraki paragrafta örnek vereceğiz. Bu durumda kalanlar (rakamlar yani) tabii hep 0, 1, 2 ya da 3 olacaktır.

275 sayısını 4 tabanında yazalım. Bunun için 275'i 4'e kalanlı böleceğiz, kalan sayı en sağdaki basamak olacak. Bölmeyi yapalım:

$$275 = 68 \cdot 4 + 3.$$

Demek ki en sağdaki basamak 3 olacak. Şimdi 68'i 4'e bölelim:

$$68 = 17 \cdot 4 + 0.$$

Demek ki sağdan ikinci basamak 0 olacak. Şimdi 17'yi 4'e bölelim:

$$17 = 4 \cdot 4 + 1.$$

Demek ki sağdan üçüncü basamak 1 olacak. Şimdi 4'ü 4'e bölelim:

$$4 = 1 \cdot 4 + 0.$$

Demek ki sağdan dördüncü basamak da 0 olacak. Şimdi 1'i 4'e bölelim:

$$1 = 0 \cdot 4 + 1.$$

Demek ki sağdan beşinci basamak 1 olacak. 0'a kadar geldik burada durabiliriz. Yaptıklarımızı özetleyelim:

$$\begin{aligned} 275 &= 68 \cdot 4 + 3 \\ &= (17 \cdot 4 + 0) \cdot 4 + 3 \\ &= 17 \times 4^2 + 0 \cdot 4 + 3 \\ &= (4 \cdot 4 + 1) \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3 \\ &= 4 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3 \\ &= (1 \cdot 4 + 0) \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3 \\ &= 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4 + 3. \end{aligned}$$

Demek ki 4'lük tabanda 275 sayısı

$$10103$$

olarak yazılıyor. 10103 gösteriminin dörtlük taban gösterimi olduğunu göstermek için 10103 yerine 10103_4 yazalım. Başladığımız 275 de onluk tabanda yazıldığından, 275 yerine 275_{10} yazalım. Demek ki

$$275_{10} = 10103_4.$$

Görüldüğü üzere 4 tabanında rakamlar 0, 1, 2 ya da 3 olur.

275_{10} sayısını 4 tabanında pratikte şöyle yazarız:

$\frac{n-r}{4}$	r
275	3
91	1
30	0
10	1
3	0
1	1
0	

Bu tabloyu açıklayalım. Sol sütunun en üstüne 4'lük tabanda yazmak istediğimiz 275 sayısını yazıyoruz. Sağ sütuna, sol sütun 4'e bölündüğünde kalan yazılıyor. Sağdaki sayıdan soldaki sayı çıkartıp 4'e böldüğümüzde bulduğumuz sonucu bir alt satırın soluna yazıyoruz. Bu yöntemle en sağ sütunda 4 tabanının rakamları belirir: 101013.

Bazı tabanlar diğerlerinden daha önemlidir. En önemli taban 10'dur tabii, günlük işlerimizde 10 tabanını kullanırız. Saatlerde 60 tabanı kullanılır: 1 dakika 60 saniye, 1 saat de 60 dakikadır. Yumurta alıp satarken 12 tabanı dikkati çeker, "5 düzine yumurta attır" cümlesinden de anlaşılacağı üzere! Ama 10 tabanından sonra en önemli taban 2 tabanıdır çünkü bilgisayarlarda ve elektronik aygıtlarda 2 tabanı kullanılır. 2 tabanında rakamlar sadece 0 ve 1'dir. Örnek olarak 275'i iki tabanında yazalım. Yukarıdaki yöntemi kullanacağız:

$\frac{n-r}{2}$	r
275	1
137	1
68	0
34	0
17	1
8	0
4	0
2	0
1	1
0	

Demek ki
$$275_{10} = 100010011_2.$$
Bir başka deyişle,
$$275 = 2^8 + 2^4 + 2^1 + 2^0$$
olur.

3 tabanında sayılar küçükten büyüğe şöyle yazılır:

$$\begin{array}{r}
0\\
1\\
2\\
10\\
11\\
12\\
20\\
21\\
22\\
100\\
101\\
102\\
110\\
111\\
112\\
120\\
121\\
122\\
200\\
201\\
202\\
210\\
211\\
212\\
220\\
221\\
222
\end{array}$$

Aksini söylemediğimiz sürece, bu kitapta kullanılan tüm sayı yazılımları 10 tabanındadır, aklı başında her yazarın kitabında olduğu gibi...

Taban 10'dan büyük olabilir. Örneğin bir sayıyı 12 tabanında yazabiliriz. Bu durumda rakamlarımız
$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

olur. Rakamların 10 ya da 11 olması karışıklığa neden olacağından, 10 yerine $\star$, 11 yerine de ✠ yazalım. Bu durumda 0'dan 23'e kadar olan sayılarımız, küçükten büyüğe doğru şöyle yazılır:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \star,\ ✠,\ \star0,\ \star1,\ \star2,\ \star3,\ \star4,\ \star5,\ \star6,\ \star7,\ \star8,\ \star9,\ \star\star,\ \star✠.$$

Örnek olarak 80.199 sayısını 12 tabanında yazalım. Bunun için önce 80.199 sayısını 12'ye kalanlı böleceğiz:

$$80.199 = 6.683 \times 12 + 3.$$

Bu 3 rakamı, 80.199 sayısının 12 tabanında yazılmış halinin en sağdaki (yani birler basamağındaki) rakamı olacak. Sonra 12'ler basamağını, sonra 12^2'ler, yani 144'ler basamağını bulacağız ve böyle devam edeceğiz. Önce 12'ler basamağını bulalım. Bunun için 6.683'ü 12'ye kalanlı böleceğiz:

$$6.683 = 556 \times 12 + 11.$$

Kalan 11. Demek ki 12'ler basamağı 11 imiş. Ama unutmayalım, 11 yerine ✠ yazacağız:

$$6.683 = 556 \times 12 + ✠.$$

Demek ki sayının son iki basamağı

$$✠3$$

olacak. Şimdi 12^2'ler basamağını bulalım.

$$556 = 46 \times 12 + 4.$$

Buradan da sayının son üç basamağının

$$4✠3$$

olacağı anlaşılır. Devam edelim:

$$46 = 3 \times 12 + 10.$$

Bir sonraki basamak 10 çıktı, yani $\star$. Sayının son dört basamağı belli oldu:

$$\star4✠3.$$

Devam edelim:

$$3 = 0 \times 12 + 3.$$

Demek ki, sayı 12 tabanında

$$3\star4✠3$$

olarak yazılıyor. Yani

$$80.199_{10} = 3 \star 4 \maltese 3_{12}.$$

Son olarak, 12 tabanında

$$510 \star 32 \maltese \maltese 01$$

olarak yazılan sayıyı 10'luk tabanda ifade edelim:

$$5 \cdot 12^9 + 12^8 + 10 \cdot 12^6 + 3 \cdot 12^5 + 2 \cdot 12^4 + 10 \cdot 12^3 + 10 \cdot 12^2 + 12^0.$$

Sayıyı bilgisayarda ya da hesap makinanızla hesaplayabilirsiniz.

Alıştırmalar

8.14. 12 tabanında $1 \star 02 \maltese \star 01$ olarak yazılan sayıyı 10'luk tabanda ifade edin.

8.15. 3 tabanında 4 basamaklı kaç sayı vardır?

8.16. 4 tabanında 3 basamaklı kaç sayı vardır?

8.17. İlk 10 asal sayıyı 4 tabanında yazın.

8.18. 6 tabanında yazılmış bir sayının 6'ya bölünmesi için son basamağının (yani birler basamağının) 0 olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

8.19. n tabanında yazılmış bir sayının n'ye bölünmesi için son basamağının (yani birler basamağının) 0 olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

8.20. 6 tabanında yazılmış bir sayının 3'e bölünmesi için son basamağının (yani birler basamağının) 0 ya da 3 olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

8.21. Her $n \in \mathbb{N}$ için 10^n sayısının 9'a bölündüğünde kalanın 1 olduğunu kanıtlayın. Buradan hareketle, 10 tabanında yazılmış bir sayıyla, bu sayının basamaklarının toplamının 9'a bölündüğünde aynı kalanlar bulunacağını kanıtlayın.

8.22. Her $n \in \mathbb{N}$ için 10^n sayısının 3'e bölündüğünde kalanın 1 olduğunu kanıtlayın. Buradan hareketle, 10 tabanında yazılmış bir sayıyla, bu sayının basamaklarının toplamının 9'a bölündüğünde aynı kalanlar bulunacağını kanıtlayın.

8.23. Eğer $n \in \mathbb{N}$ tekse $10^n + 1$ sayısının, eğer çiftse $10^n - 1$ sayısının 11'e tam bölündüğünü kanıtlayın. Buradan hareketle

$$25382926393853682012$$

sayısıyla

$$2 - 1 + 0 - 2 + 8 - 6 + 3 - 5 + 8 - 3 + 9 - 3 + 6 - 2 + 9 - 2 + 8 - 3 + 5 - 2$$

sayısının 11'e bölündüğünde kalanlarının aynı olduğunu kanıtlayın.

8.24. Önce $7 \times 11 \times 13 = 1001$ eşitliğini gözlemleyin. Ardından, buradan hareketle

$$25.382.926.393.853.682.012$$

ile

$$25 - 382 + 926 - 393 + 853 - 682 + 012$$

sayılarından biri 13'e bölünüyorsa diğerinin de 13'e bölündüğünü kanıtlayın.

8.25. $73 \times 137 = 10.001$ eşitliğinden, bir sayının 73'e ya da 137'ye tam bölünebilme kuralını bulun.

Bu kitapta doğal sayıları ele aldık. Bundan sonraki üç kitapta sırasıyla tamsayıları, kesirli sayıları ve gerçel sayıları ele alacağız. Okur tabii ki önceki yıllardan bu tür sayılara sezgisel olarak aşinadır. Sayıları gene büyük ölçüde sezgisel olarak ele alacağız (yani sayıların tam matematiksel tanımlarını vermeyeceğiz) ama sürekli olarak kümeler kuramına gönderme yaparak daha modern bir dil kullanacağız.

Geçmiş yıllardan zaten bildiğiniz konulara uzun uzun yer ayırmamızın nedeni matematikte (hatta her bilim dalında ve her uğraş alanında) tanımın önemine vurgu yapmaktır.

Kaynakça

[1. Kitap] Ali Nesin, **Fen Liseleri İçin Matematik 1, Kümeler Kuramı 1**, Nesin Yayıcılık, Eylül 2017.

[4. Kitap] Ali Nesin, **Fen Liseleri İçin Matematik 4, Kesirli Sayılar Yapısı**, Nesin Yayıcılık. 2017 ya da 2018'de çıkacak.

[AAZ] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng, **104 Numner Theory Problems**, Birkhäuser 2007.

[De] Keith Devlin, **All the Math That's Fit to Print**, The Mathematical Association of America, 1994.

[Di] G.L. Dirichlet, **Werke 1889-1897**, 1 cilt, editörler: v.L. Kronecker ve L Fuchs, Berlin.

[H] David Hilbert, **Project Gutenberg's The Foundations of Geometry**, `http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf`

[L] A. M. Legendre, **Essai sur la Théorie des Nombres**, Paris, Duprat, An VI.

[N1] Ali Nesin, **Önermeler Mantığı**. Nesin Yayıncılık.

[N2] Ali Nesin, **Sayıların İnşası**. Bkz. TÜBA açık ders notları: `http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2`.

[PTW] George Pólya, Robert E. Tarjan ve Donald R. Wood, **Notes on Introductory Combinatorics**, Modern Birkhäuser Classics 1983.

Dizin

Simgeler Dizini