Özdeşleşme ve Direkt Limit

X herhangi bir küme olsun. X'in bazı altkümelerinden oluşan bir aile alalım: $(X_i)_i$. Bu altkümelerin bileşimini alıp X'in bir başka altkümesini bulabiliriz elbet: $\bigcup_i X_i$. Bu yazıda yapacaklarımız işte bu "bileşim alma" işlemini genelleştirecek.

1. Özdeşleştirmek. Matematikte, her şeyi daha basit ve daha kullanışlı kılan "özdeşleştirmek" diye bir şey vardır. Sık sık başvurulur özdeşleştirmeye, MD'de de başvurmuştuk geçmişte. Bir A kümesi, bir başka kümenin A'ya çok benzeyen bir altkümesiyle "özdeşleştirildiği", böylece eşit olamayan elemanlara eşit muamelesi çekildiği olur. Yapılan özdeşleştirme genellikle o kadar doğaldır ki, ortalama bir vatandaş farkına varmaz bile.

Örneğin bir n tamsayısı, $n/1$ kesirli sayısıyla özdeşleştirilir. Kesirli sayıları inşa ederken aynen bunu yapmıştık [MD-2006-IV, sayfa 39] ve böylece her tamsayı bir kesirli sayı olarak görebilmiştik. Oysa tamsayılar kümesiyle kesirli sayılar kümesini en başta birbirinden ayrık kümeler olarak inşa etmiştik.

Bir başka örnek: Her gerçel sayı hemen hemen her zaman sabit bir polinomla özdeşleştirilir. Sabit polinomlarla gerçel sayılar arasında bir ayrım gözetilmez, ki aslında gözetilmesi gerekir, ne de olsa gerçel sayı gerçel sayıdır, polinom da polinom.

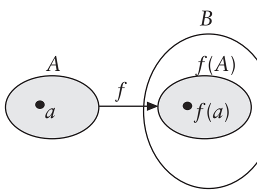
Liselerde her polinom (en azından katsayıları gerçel sayılar kümesindeyse) bir fonksiyon olarak görülür. Burada da aslında (gerçek matematikçiler arasında pek rağbet görmeyen) bir özdeşleştirme sözkonusudur. Bir polinom asla bir fonksiyon değildir. Ama her polinom bir fonksiyon yaratır ve kimi zaman polinomu yarattığı fonksiyon olarak görmekte bir sakınca yoktur.

Bir lise matematik kitabında $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinin altkümesi olduğu yazıyordu. Bu tamamen yanlıştır. Yazarın yaptığı yanlışı anlamak zor değil, yazar muhtemelen gençliğinde karmaşık sayılara biraz fazla odaklanmış (gerçekten de r gerçel sayısı $r + 0i$ karmaşık sayısıyla özdeşleştirilir) ve kimseye haber vermeden, $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin $\mathbb{R} \times \{0\}$ altkümesini özdeşleştirmiş. Oysa $\mathbb{R}$ ile, örneğin,

$$\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

altkümesini de özdeşleştirebilirdi... Dolayısıyla yazar hiç de bariz olmayan bu özel özdeşleştirmeyi yaptığını söylemesi gerekiyordu.

Özdeşleştirmek şöyle bir şeydir: A ve B iki küme olsun ve f, A'dan B'ye giden birebir bir fonksiyon olsun. f, elbette A ile $f(A)$ kümeleri arasında bir eşleme tetikler. Bu eşleme kimi zaman öylesine doğal olabilir ki, A'nın bir a elemanıyla B'nin $f(a)$ elemanı arasında bir ayrım yapmak içimizden gel-



mez, tam tersine ayrım yapmak nerdeyse günah kategorisine girer. Bu durumda, B kümesi yerine

$$(B \setminus f(A)) \cup A$$

kümesi alınır, yani B'den $f(A)$ koparılıp yerine A yapıştırılır. Eskiden $f(a)$ elemanının B'de gördüğü görevi, bu yeni kümede a elemanı görür. Bu işlemi, $f(A)$'yı kesip yerine A'yı dikmek olarak ya da $f(A)$'daki elemanların adlarını değiştirmek olarak görülebilir, hatta bu son yorum daha kullanışlıdır. İşin püf noktası şu: Eski B unutulur ve artık B yerine

$$(B \setminus f(A)) \cup A$$

kümesiyle çalışılır, hem de sanki B eski B imişçesine... Biraz saçma olacak ama, sanki

$$f(a) = a$$

ve

$$B = (B \setminus f(A)) \cup A$$

eşitlikleri geçerliymiş gibi davranılır.

Bu yapılana, "A ile $f(A)$ kümelerini f eşlemesi kullanarak özdeşleştirmek" denir (oysa aslında altkümelerden öte elemanlar özdeşleştiriliyordur).

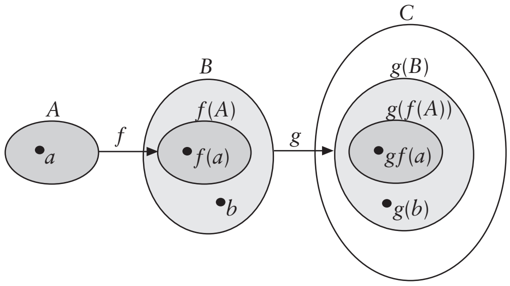
Şimdi bir adım daha gidelim. Aşağıdaki şekilden izleyin. Sadece A ve B kümeleri ve

$$f : A \to B$$

birebir fonksiyonu değil, bir de ayrıca C kümesi ve

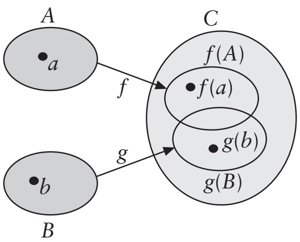
$$g : B \to C$$

birebir fonksiyonu verilmiş olsun. A'yı $f(A)$ ile eşleştirip elde edilen yeni B'yi $g(B)$ ile eşleştirmek işten bile değildir. Yukarda yaptığımızı iki defa yapmak yeterlidir. Böylece C'nin $g(f(a))$ elemanı a elemanıyla özdeşleşir ve $g(B) \setminus g(f(B))$'nin bir $g(b)$ elemanı b ile özdeşleşir.



Eğer üç yerine dört küme olursa, işler belki biraz daha zorlaşır ama her seferinde zorlukla kolayca başa çıkabiliriz.

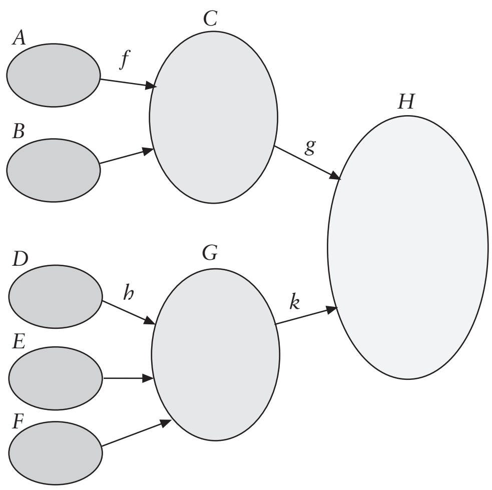
Daha karmaşık özdeşleştirmeler de olabilir. Diyelim A, B ve C diye adlandırılmış üç kümemiz ve $f : A \to C$ ve $g : B \to C$ birebir fonksiyonlarımız var. f'yi kullanarak A ve $f(A)$ kümelerini özdeşleştirebiliriz. g'yi kullanarak B ve $g(B)$ kümelerini de özdeşleştirebiliriz. Ama $f(A) \cap g(B)$'nin elemanlarına ne olacak? Bu elemanlar A'nın mı yoksa B'nin mi elemanıyla özdeşleşecekler? Yanıt: Her ikisiyle birden özdeşleşecekler.



Aşağıdaki şekildeki gibi çok daha karmaşık durumlar da olabilir. Aşağıdaki durumda, imgeleri bir zaman sonra eşit olan elemanlar özdeşleştirilirler. Örneğin $a \in A$ ile $d \in D$ elemanları

$$g(f(a)) = k(h(b))$$

eşitliğini sağlıyorsa, A'nın a elemanıyla D'nin d elemanı eşleştirilmek istenebilir.



Aslında özdeşleştirmenin gerçekleşmesi için fonksiyonların birebir olmalarına gerek yok. Fonksiyonlar birebir olmasalar da özdeşleştirmeleri yapabiliriz. Hatta kümelerin birbirinden değişik olmalarına da gerek yok, kümelerin hepsi aynı bile olabilirler.

Yapmak istediğimiz şu: Bazı kümeler ve bu kümeler arasında bazı fonksiyonlar verilmiş. Verilen tüm kümelerin bileşimini almak istiyoruz, ancak görüntüleri bir zaman aynı olan elemanları bileşim kümesinde sanki tek bir elemanmış gibi görmek, yani matematikte yaygın olarak kullanılan deyimle, bu elemanları birbirleriyle özdeşleştirmek istiyoruz. Özdeşleştirmek yerine büzüştürmek de diyebilirdik.

Ama dikkat, gereğinden fazla eleman özdeşleştirmek istemiyoruz. Örneğin, abartıp, tüm kümelerdeki tüm elemanları tek bir elemana büzüştürebilirdik... Özdeşleşmesi gereken elemanlar özdeşmeli ama özdeşleşmemesi gereken elemanlar da özdeşmemeli. Yani kıvamı tutturmalıyız.

İki örnek alalım. Birincisi uydurma bir örnek, ikincisiyse klasik.

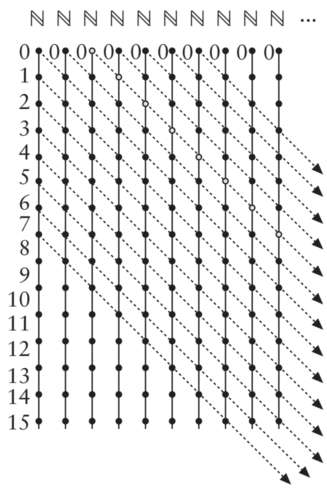
Örnek 1. $I = \mathbb{N}$ olsun ve bildiğimiz sıralamayla sıralanmış olsun. Her $i \in I$ için, $X_i = \mathbb{N}$ ve

$$\varphi_i : X_i \to X_{i+1}$$

fonksiyonu

$$\varphi_i(x) = x + 1$$

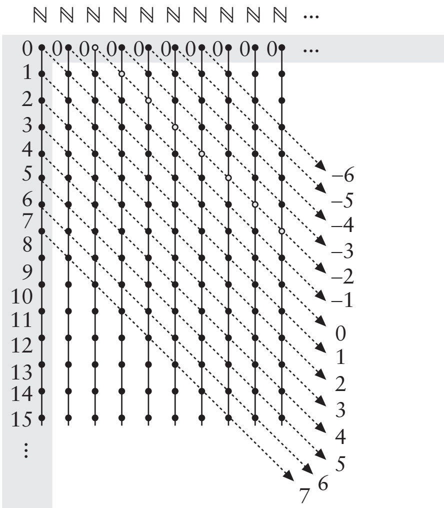
formülüyle tanımlanmış olsun. Kümelerin ve fonksiyonların resimleri aşağıda:



X_0'ın 0 elemanıyla X_1'in 1 elemanı ve X_2'nin 2 elemanı ve X_3'ün 3 elemanı ve genel olarak X_n'in n elemanı özdeşleştirilecekler çünkü φ_0, X_0'ın 0 elemanını X_1'in 1 elemanına götürüyor, φ_1, X_1'ın 1 elemanını X_2'nin 2 elemanına götürüyor vs.

Bunun gibi X_1'in 0 elemanıyla X_2'in 1 elemanı, X_3'ün 2 elemanı, X_4'ün 3 elemanı ve genel olarak X_n'in $n-1$ elemanı özdeşleşecekler.

Şekillerdeki her okun üstünden geçtiği noktalar birbirleriyle özdeşleşip nihai kümede (bileşim kümesinde) tek bir eleman olacaklar. Yani nihai kümede her ok için ayrı bir eleman olacak.



Elde edilecek nihai küme, "artı 1" fonksiyonlarını da kale alınca, belli ki $\mathbb{Z}$'ye benzeyecek. X_0'daki (yani ilk $\mathbb{N}$ kümesindeki) her eleman için nihai kümede bir eleman gerekiyor, çünkü bu elemanlar birbirleriyle özdeşleşemezler. Bir de nihai kümede, her $i > 0$ için, $0 \in X_i$ elemanının özdeşleşeceği ayrı bir eleman gerekiyor, çünkü bunlar ne aralarında ne de daha öncekilerle özdeşleşebilirler. Resmi yukarda.

Örnek 2: Prüfer *p*-Grubu. Teoriye girişmeden önce çok basit olmayan bir örnek verelim. Her $k > 0$ doğal sayısı ve her x tamsayısı için

$$\varphi_k([x]_k) = [px]_{k+1}$$

formülüyle tanımlanmış olan

$$\varphi_k : \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{k+1}\mathbb{Z}$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada $[x]_k$, x'in $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ kümesindeki imgesini temsil etmektedir. φ_k fonksiyonlarının birebir olduklarını kanıtlamak zor değildir.

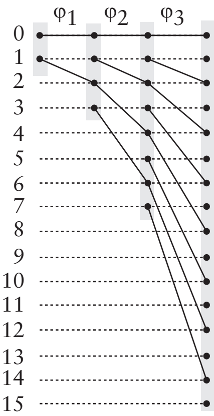
Aşağıdaki şekilde $p = 2$ ve $k = 1, 2, 3$ için φ_k fonksiyonlarını göstermeye çalıştık. Amacımız, örneğin,

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$'nin [1] elemanını
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$'nin [2] elemanını
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$'nin [4] elemanını

birbirleriyle özdeşleştirmek. (Gereksiz göstergeçleri attık.) Bunun gibi,

$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$'nin [3] elemanını
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$'nin [6] elemanını
$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$'nin [12] elemanını
...

birbirleriyle özdeşleştirmek istiyoruz. Bir başka deyişle, $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ kümelerinin tüm k'lar için bileşimini



alıp, bu bileşimdeki her $[a]_k \in \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ elemanını $[2a]_{k+1} \in \mathbb{Z}/2^{k+1}\mathbb{Z}$ elemanıyla özdeşleştirmek istiyoruz. Her maksimum ok silsilesini tek bir eleman olarak görmek de diyebiliriz yapmak istediğimiz şeye; böylece bileşimdeki her eleman, içinde bulunduğu (yegâne) ok silsilesiyle özdeşleştirebiliriz. Örneğin,

$$[24]_6 \in \mathbb{Z}/2^6\mathbb{Z}$$

elemanını

$$[3]_2 \to [6]_4 \to [12]_5 \to [24]_6 \to [48]_7 \to ...$$

maksimal ok silsilesiyle özdeşleştirebiliriz. (Tam bunu yapmayacağız ama yapabilirdik; buna çok benzer bir şey yapacağız.)

Tam ne yapacağımızı çıtlatalım: $0 \le a < 2^k$ için, $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ kümesinin $[a]_k$ elemanını $a/2^k$ kesirli sayısıyla özdeleştireceğiz.

Başlıyoruz: $\mathbb{Z}_{2^\infty}$, [0, 1) aralığındaki, paydası 2'nin bir kuvveti olarak yazılabilen kesirli sayılar kümesi olsun. Bir başka deyişle

$$\mathbb{Z}_{2^\infty} = \{a/2^k : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ ve } a = 0, 1, ..., 2^k-1\}$$

olsun. Şimdi her k ve her $a = 0, 1, 2, ..., 2^k-1$ için $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ kümesinin $[a]_k$ elemanını $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ kümesinin $a/2^k$ elemanıyla özdeşleştirelim. Söylediklerimiz daha iyi anlaşılsın diye,

$$\psi_k : \mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{2^\infty}$$

fonksiyonunu

$$\psi_k([a]_k) = a/2^k$$

kuralıyla tanımlayalım ve $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ kümesinin bir $[a]_k$ elemanını $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ kümesinin $\psi_k([a]_k) = a/2^k$ elemanıyla özdeşleştirelim.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}_{2^\infty} & & \cdots \\
\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[urr, "\psi_1"] \arrow[r, "\varphi_1"] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[ur, "\psi_2"] \arrow[r, "\varphi_2"] & \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \arrow[u, "\psi_3"] \arrow[r, "\varphi_3"] & \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \arrow[ul, "\psi_4"] \arrow[r, "\varphi_4"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}_{2^\infty}$, $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ kümelerinin bir anlamda bileşimidir;
φ_k fonksiyonlarıyla birbirlerine bağlantılanmış elemanlar,
$\mathbb{Z}_{2^\infty}$ kümesinde tek bir elemanmış gibi gösterilmişlerdir
ψ'ler özdeşleştirme fonksiyonlarıdır.
Her k için $\psi_{k+1} \circ \varphi_k = \psi_{k+1}$ eşitliği sağlanır.

Böylece istediğimiz olur çünkü (yukardaki şekilden yaptıklarımızı takip edebilirsiniz),

1) Hem $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ kümesinin $[a]_k$ elemanı, hem de $\mathbb{Z}/2^{k+1}\mathbb{Z}$ kümesinin $[2a]_k$ elemanı, $\mathbb{Z}_{2^\infty}$ kümesinin aynı elemanıyla, $a/2^k$ elemanıyla özdeşleştirilmiştir.

2) $\mathbb{Z}_{2^\infty}$, $\psi_k(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})$ kümelerinin bileşimidir.

Bu yaptıklarımızı 2'den herhangi bir p asalına genelleştirmek işten bile değildir. Hatta p'nin asal olmasına bile gerek yoktur. (Ama uygulamada p hep bir asaldır.)

Birazdan bütün bunları kuramsal olarak yapacağız. Sayfanın en altındaki şekildeki gibi bir durum sözkonusu olacak ve şeklin en sağındaki soru işaretli kümeyi bulmaya çalışacağız. Şekilde aynı küme birçok kez belirebilir, her kümenin değişik olmasına neden yok.

"Özdeşleştirmek" diyen aslında "denklik ilişkisi" der, çünkü a ile b elemanlarının özdeşleştirildiğini $a \equiv b$ simgesiyle gösterirsek, belli ki şu önermeler doğru olur (ya da olmalı):

$$a \equiv a,$$
$$a \equiv b \text{ ise } b \equiv a,$$
$$a \equiv b \text{ ve } b \equiv c \text{ ise } a \equiv c,$$

ki bunlar da bir denklik ilişkisinin tanmının koşullarıdır.

Okura yeterince sezgi kazandırdığımızı düşünerek artık matematiğe geçelim. Elde edeceğimiz nihai kümeye kümeler ve fonksiyonlar sisteminin ***direkt*** ya da ***tümevarımsal limit*** adı verilir.

2. Direkt Limit. Önce verilerimizi toparlayalım. I yarısıralı bir küme olsun, yani I üstünde, her $i, j, k \in I$ için,

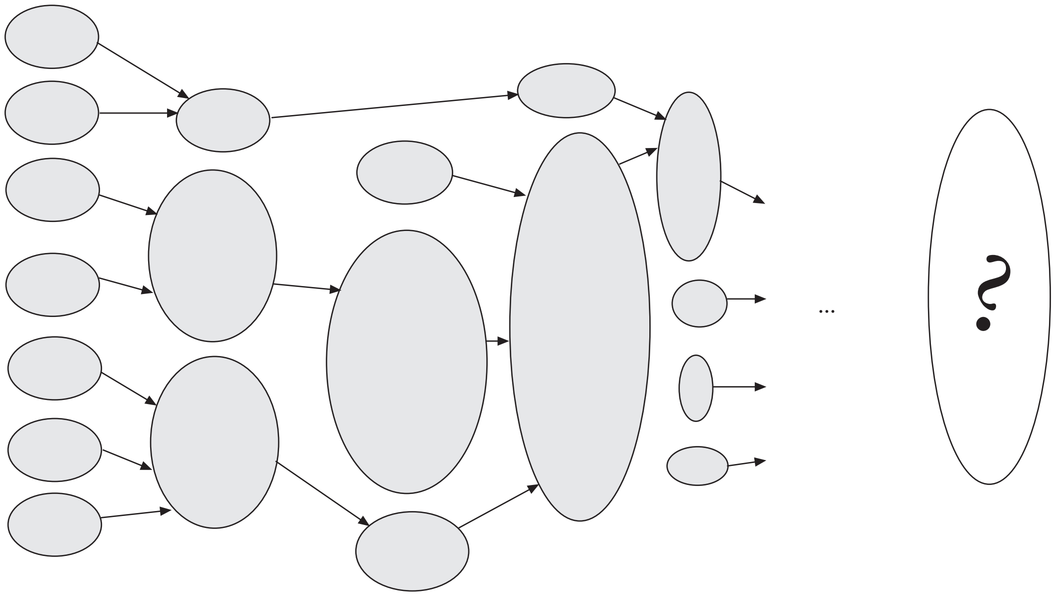
$$i \leq i,$$
$$i \leq j \text{ ve } j \leq i \Rightarrow i = j,$$
$$i \leq j \text{ ve } j \leq k \Rightarrow i \leq k$$

özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ikili ilişkisi olsun. (Yukarda verdiğimiz örnekte $I = \mathbb{N}$ ve sıralama da bildiğimiz sıralamaydı.) Bir de ayrıca I'nın $\leq$ yarısıralamasının ***yönlendirilmiş*** olduğunu, yani her $i, j \in I$ için, $i \leq k$ ve $j \leq k$ eşitsizliklerini sağlayan bir $k \in I$ olduğunu varsayalım. Bu I kümesi göstergeç kümemiz olacak. Şimdi de kümelerimizi ve aralarındaki fonksiyonları belirleyelim.

$(X_i)_{i \in I}$ herhangi bir küme ailesi olsun. Her $i \leq j$ göstergeçi için

$$\varphi_{ij} : X_i \to X_j$$

bir fonksiyon olsun. Ve bu $(\varphi_{ij})_{ij}$ fonksiyon kümesi



üzerine şu varsayımı yapalım: Her $i < j < k$ göstergeci için,

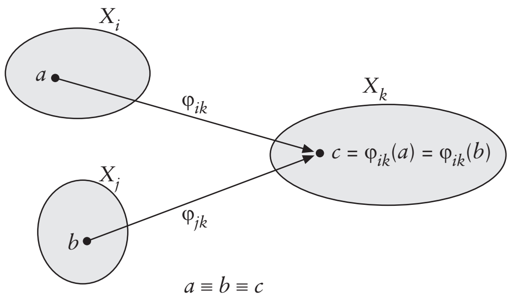
$$\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i} \text{ ve } \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}.$$

Tüm bu veri,

$$(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$$

olarak simgelenir ve adına ***direkt sistem*** denir.

Amacımız bu X_i kümelerinin bileşimini almak ama φ_{ij} fonksiyonları altında aynı elemana giden elemanlar arasında bir ayrım gözetmemek, yani bunları birbirleriyle özdeşleştirmek.



Değişik i'ler için X_i kümeleri kesişebilirler, hatta Örnek 1'de olduğu gibi X_i kümelerinin bazıları aynı küme olabilirler. Bunu engellemek için X_i yerine $X_i \times \{i\}$ kümesini alıp bu ayrık kümelerin bileşimini alalım.

$$X = \bigcup_{i\in I} (X_i \times \{i\})$$

olsun. (Özdeşleştirmek yerine ayrıştırdığımızın farkındayız, özdeşleştirmeye birazdan geçeceğiz. Amacımız değişik göstergeçlerle ifade edilmiş X_i kümelerinde bulunan aynı elemanları özdeşleştirmek değil, bunu yapmak oldukça kolaydır, bunun için X_i'lerin bileşimini almak yeterdir; amacımız φ fonksiyonları altında imgesi aynı olan, ya da imgesi bir zaman sonra aynı olan elemanları özdeşleştirmek.) X kümesi üzerine şu ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$$(x, i) \equiv (y, j)$$

ancak ve ancak i ve j'den büyükeşit bir k için,

$$\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$$

ise. Eğer $i \le j$ ise ($\equiv$ ilişkisinin tanımında $k = j$ alın),

$$(x, i) \equiv (\varphi_{ij}(x), j)$$

ilişkisinin doğru olduğunu dikkatlerinize sunarız.

Tanımladığımız bu ilişki bir denklik ilişkisidir. Nitekim:

- Her $i \in I$ için $\varphi_{ii}(x) = \mathrm{Id}_{X_i}(x) = x$ olduğundan, her $x \in X_i$ için $(x, i) \equiv (x, i)$ olur.
- Eğer $(x, i) \equiv (y, j)$ ise ve $k \ge i$ ve $k \ge j$ eşitsizliklerini sağlayan bir k göstergeci için $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$ oluyorsa, aynı k göstergeci $(y, j) \equiv (x, i)$ denkliğini göstermek için de kullanılabilir.
- $(x, i) \equiv (y, j)$ ve $(y, j) \equiv (z, k)$ olsun. u ve v göstergeçleri

$$\varphi_{iu}(x) = \varphi_{ju}(y) \text{ ve } \varphi_{jv}(y) = \varphi_{kv}(z)$$

eşitliklerini sağlasın. $w \in I$, hem u hem de v'den büyük bir göstergeç olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}\varphi_{iw}(x) &= (\varphi_{uw} \circ \varphi_{iu})(x) = \varphi_{uw}(\varphi_{iu}(x))\\ &= \varphi_{uw}(\varphi_{ju}(y)) = (\varphi_{uw} \circ \varphi_{ju})(y) = \varphi_{jw}(y)\\ &= (\varphi_{vw} \circ \varphi_{jv})(y) = \varphi_{vw}(\varphi_{jv}(y))\\ &= \varphi_{vw}(\varphi_{kv}(z)) = \varphi_{kw}(z)\end{aligned}$$

olur, dolayısıyla $(x, i) \equiv (z, k)$ olur.

Böylece $\equiv$ ilişkisinin bir denklik ilişkisi olduğu kanıtlandı.

$(x, i) \in X_i \times \{i\}$ elemanının denklik sınıfını $[x, i]$ olarak gösterelim:

$$[x, i] = \{(y, j) : y \in X_j \text{ ve } (x, i) \equiv (y, j)\}.$$

Demek ki her $i \le j$ için,

$$[x, i] = [\varphi_{ij}(x), j]$$

olur.

Son olarak $X/\!\equiv$ kümesini alalım:

$$X/\!\equiv\; = \{[x, i] : i \in I, x \in X_i\}$$

İşte bu, tam istediğimiz kümedir! Bu bölümün devamında okuru buna ikna etmeye çalışacağız.

X_i kümesinin bir x elemanını, $X/\!\equiv$ kümesindeki $[x, i]$ elemanıyla özdeşleştireceğiz. Bu özdeşleştirmeyi matematiksel olarak ifade edebilmek amacıyla,

$$\Psi_i : X_i \to X/\!\equiv$$

fonksiyonunu

$$\Psi_i(x) = [x, i]$$

formülüyle tanımlayalım. X_i'nin x elemanının $X/\!\equiv$ kümesinin $\Psi_i(x)$ elemanıyla özdeşleştirilmiş olduğunu hayal edin.

İşte bu $X/\!\equiv$ kümesi aradığımız kümedir.

Yazının başında amaçladığımız hedefe ulaştığımızı göstermek için iki şey kanıtlamalıyız:

A1) *Eğer φ_{ij} fonksiyonları birebirse, Ψ_i fonksiyonu da birebirdir.*

Nitekim $x, y \in X_i$ için $\Psi_i(x) = \Psi_i(y)$ olsun. O zaman $[x, i] = [y, i]$, yani $(x, i) \equiv (y, i)$, yani bir $k \ge i$ için $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{ik}(y)$ olur. Ama φ_{ik} birebir olduğundan, bundan $x = y$ çıkar.

A2) *$X/\!\equiv$ kümesi* (X_i'lerin olmasa da) *$\Psi_i(X_i)$'lerin bileşimidir. Yani*

$$X/\!\equiv\; = \bigcup_{i\in I} \Psi_i(X_i)$$

eşitliği geçerlidir.

Bunun doğruluğu tanımlardan hemen çıkıyor:

$$\begin{aligned} X/\equiv &= \{[x, i] : i \in I, x \in X_i\} \\ &= \{\Psi_i(x) : i \in I, x \in X_i\} \\ &= \textstyle\bigcup_{i \in I} \Psi_i(X_i). \end{aligned}$$

Önemli bir özellik daha:

A3) *Her $i \leq j \in I$ için, $\Psi_j \circ \varphi_{ij} = \Psi_i$.*

$$\begin{tikzcd} & X/\equiv & \\ X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \end{tikzcd}$$

Her $i \leq j$ için $\psi_j \circ \varphi_{ij} = \psi_j$ eşitliği sağlanır.

Nitekim her $x \in X_i$ için,

$$\begin{aligned} (\Psi_j \circ \varphi_{ij})(x) &= \Psi_j(\varphi_{ij}(x)) = [\varphi_{ij}(x), j] \\ &= [x, i] = \Psi_i(x) \end{aligned}$$

olur.

Bu son özellikten şu çıkar: $x \in X_i$ elemanıyla $\varphi_{ij}(x) \in X_j$ elemanı, $X/\equiv$ kümesinin aynı elemanıyla, $\Psi_i(x)$ elemanıyla özdeşleştirilmiştir.

$X/\equiv$ kümesine $(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ direkt sisteminin ***direkt*** ya da ***tümevarımsal limiti*** adı verilir ve $X/\equiv$ yerine

$$\varinjlim\, (X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$$

yazılır. Eğer kolaylık olacaksa ve karışıklığa neden olmayacaksa $\varinjlim\, (X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ yerine

$$\varinjlim X_i$$

yazılır. Biz bir süre - gerçek tanımı verinceye dek - $X/\equiv$ yazılımını kullanacağız. Ψ_j fonksiyonlarına ***özdeşleştirme fonksiyonları*** adı verilebilir.

Yazının en son bölümünde direkt limitin tanımını hafifçe değiştireceğiz ve yukardaki $X/\equiv$ kümesi direkt limitlerden sadece biri olacak.

Okur, umarız, direkt limitin tanımının ne kadar doğal olduğunu görmüştür. Nerdeyse bileşim kadar doğal. O kadar doğal ki tanım başka türlü yapılamazdı!.. Bu kadar doğal bir tanımın bazı olağanüstü sonuçları olmalı.

3. Evrensel Özellik. Yukardaki gibi bir

$$(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$$

direkt sistemi verilmiş olsun. $X/\equiv$ kümesi ve

$$\Psi_i : X_i \to X/\equiv$$

fonksiyonları da bir önceki bölümde tanımlandıkları gibi olsun. Her $i \leq j \in I$ için, bir önceki bölümde kanıtladığımız

$$\Psi_j \circ \varphi_{ij} = \Psi_i$$

eşitliğini anımsayın.

Bütün bunların dışında herhangi bir Y kümesi ve her $i \leq j \in I$ için

$$\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$$

eşitliklerini sağlayan

$$\theta_i : X_i \to Y$$

fonksiyonları verilmiş olsun. (Bkz. aşağıdaki şekil.)

$$\begin{tikzcd} & X/\equiv & \\ X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\theta_i"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\theta_j"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Öyle bir

$$\theta : X/\equiv \to Y$$

fonksiyonu bulacağız ki, her $i \in I$ için

$$\theta \circ \Psi_i = \theta_i$$

eşitliği sağlanacak. (Bkz. aşağıdaki şekil.)

$$\begin{tikzcd} & X/\equiv \arrow[dd, dotted, bend left=90, "\theta"] & \\ X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\theta_i"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\theta_j"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Bu özellik, direkt limitin ***evrensel özelliği*** olarak bilinir.

Sağlanmasını istediğimiz $\theta \circ \Psi_i = \theta_i$ eşitliği bize aslında $\theta : X/\equiv \to Y$ fonksiyonunun tek bir biçimde tanımlanması gerektiğini söylüyor. Nitekim, madem ki $\theta \circ \Psi_i = \theta_i$ eşitliği sağlanmalı, o zaman her $x \in X_i$ için

$$\theta_i(x) = (\theta \circ \Psi_i)(x) = \theta(\Psi_i(x)) = \theta([x, i])$$

olmalı, yani

$$\theta : X/\equiv \to Y$$

fonksiyonu

$$\theta([x, i]) = \theta_i(x)$$

formülüyle tanımlanmalı. Bunun gerçekten bir tanım olduğunu gösterelim. $x \in X_i$ ve $y \in X_j$ için

$$[x, i] = [y, j]$$

olsun. O zaman

$$(x, i) \equiv (y, j)$$

olur ve tanıma göre i ve j'den büyükeşit bir $k \in I$

için

$$\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$$

olur. Demek ki,

$$\begin{aligned}\theta_i(x) &= (\theta_k \circ \varphi_{ik})(x) = \theta_k(\varphi_{ik}(x))\\ &= \theta_k(\varphi_{jk}(y)) = (\theta_k \circ \varphi_{jk})(y) = \theta_j(y),\end{aligned}$$

yani

$$\theta_i(x) = \theta_j(y).$$

Sonuç olarak,

$$[x, i] = [y, j] \Rightarrow \theta_i(x) = \theta_j(y)$$

önermesini kanıtladık. Bundan da,

$$\theta([x, i]) = \theta_i(x)$$

formülünü yazmaya hakkımız olduğu çıkar. Böylece tanımlanan $\theta : X/\equiv \to Y$ fonksiyonu elbette her $i \in I$ için

$$\theta \circ \Psi_i = \theta_i$$

eşitliğini sağlar.

Direkt limitin dördüncü özelliğini kanıtladık:

A4) *Eğer bir Y kümesi ve $\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$ eşitliklerini sağlayan $\theta_i : X_i \to Y$ fonksiyonları verilmişse, o zaman her $i \in I$ için $\theta \circ \Psi_i = \theta_i$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tane $\theta : X/\equiv \to Y$ fonksiyonu vardır.*

Örnek 3. Yazının ta başında verdiğimiz en basit örneğe geri dönelim. X herhangi bir küme olsun. X'in bazı altkümelerinden oluşan bir aile alalım: $(X_i)_i$. Eğer her $i \le j$ için $X_i \subseteq X_j$ ise,

$$\varphi_{ij} : X_i \to X_j$$

fonksiyonu

$$\varphi_{ij}(x) = x$$

olarak tanımlansın. O zaman $\varinjlim X_i$ aynen X_i kümelerinin bileşimidir ve

$$\Psi_i(x) = x$$

olarak tanımlanır.

Örnek 4. Eğer I'nın en büyük elemanı varsa ve bu elemana m dersek, yukarda bulunan $\varinjlim X_i$ kümesinin bu X_m'den pek bir farkı yoktur ve $\Psi_i = \varphi_{im}$ olarak alınabilir.

Ana Teorem 1. i. *Bir $(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ direkt sistemi verilmiş olsun.*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[loop below, "\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}"] \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_{ik}"] & X_j \arrow[r, "\varphi_{jk}"] & X_k \end{tikzcd}$$

Veri : $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$ ve $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$

Öyle bir L kümesi ve her $i \le j \in I$ için

$$\Psi_j \circ \varphi_{ij} = \Psi_i$$

eşitliklerini sağlayan öyle

$$\Psi_i : X_i \to L$$

fonksiyonları vardır ki,

$$\begin{tikzcd} & L & \\ X_i \arrow[ur, dotted, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] & & X_j \arrow[ul, dotted, "\psi_j"'] \end{tikzcd}$$

$\psi_j \circ \varphi_{ij} = \psi_i$

her M kümesi ve

$$\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$$

eşitliklerini sağlayan her

$$\theta_i : X_i \to M$$

fonksiyon ailesi için,

$$\begin{tikzcd} & L & \\ X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\theta_i"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\theta_j"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Veri : $\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$

$$\theta \circ \Psi_i = \theta_i$$

eşitliklerini sağlayan bir ve bir tane

$$\theta : L \to M$$

fonksiyonu vardır. [Evrensel özellik]

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dd, dotted, bend left=60, "\theta"] & \\ X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\theta_i"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\theta_j"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

ii. *Eğer $(L, \Psi_i : X_i \to L)_i$ ailesi yukardaki evrensel özelliği sağlıyorsa ve*

$$\lambda : L \to L'$$

herhangi bir eşlemeyse, o zaman

$$(L', \lambda \circ \Psi_i : X_i \to L)_i$$

ailesi de evrensel özelliği sağlar.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dd, bend left=60, "\lambda"] & \\ X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, dotted, "\lambda\circ\psi_i"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, dotted, "\lambda\circ\psi_j"] \\ & L' & \end{tikzcd}$$

iii. *Eğer* $(L, \Psi_i : X_i \to L)_i$ *ailesinin sağladığı bu evrensel özelliği bir de ayrıca* $(L', \Psi_i' : X_i \to L')_i$ *ailesi de sağlıyorsa*, *o zaman öyle bir*

$$\lambda : L \to L'$$

eşlemesi vardır ki, *her* $i \in I$ *için*,

$$\Psi_i' = \lambda \circ \Psi_i$$

olur.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dd, dotted, bend left=80, "\lambda"] & \\
X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i'"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\psi_j'"] \\
& L' &
\end{tikzcd}$$

Kanıt: i. Teoremin birinci kısmını zaten kanıtlamıştık: L kümesi $X/\equiv$ olsun ve $\Psi_i : X_i \to L$ fonksiyonlarını daha önce tanımladığımız gibi alın.

ii. $(L, \Psi_i : X_i \to L)_i$ ailesi evrensel özelliği sağlasın ve $\lambda : L \to L'$ bir eşleme olsun.

$$(L', \lambda \circ \Psi_i : X_i \to L)_i$$

ailesinin de evrensel özelliği sağladığını kanıtlamak istiyoruz. Elbette,

$$(\lambda \circ \Psi_i) \circ \varphi_{ij} = \lambda \circ (\Psi_i \circ \varphi_{ij}) = \lambda \circ \Psi_j$$

eşitliği sağlanır. Şimdi M bir küme ve

$$\theta_i : X_i \to M$$

fonksiyonları

$$\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$$

eşitliklerini sağlasın.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dd, bend right=80, "\lambda"'] \arrow[drr, "\theta"] & & \\
X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\lambda\circ\psi_i"'] & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[rr, "\theta_j"] \arrow[dl, "\lambda\circ\psi_j"] & & M \\
& L' \arrow[urr, dotted, "\theta\circ\lambda^{-1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Yukardaki şekilden takip edin.

$$\theta \circ \lambda^{-1} : L' \to M$$

fonksiyonuna bakalım. Her i için,

$$(\theta \circ \lambda^{-1}) \circ (\lambda \circ \Psi_i) = \theta \circ \Psi_i = \theta_i$$

olur. İstediğimiz kanıtlanmıştır.

iii. Şimdi de hem $(L, \Psi_i : X_i \to L)_i$ ailesinin hem de $(L', \Psi_i' : X_i \to L')_i$ ailesinin evrensel özelliği sağladığını varsayalım. Birinci sistem evrensel özelliği sağladığından, evrensel özelliğin tanımında $M = L'$ ve $\theta_i = \Psi_i'$ alarak,

$$\theta \circ \Psi_i = \Psi_i'$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$\theta : L \to L'$$

fonksiyonunun olduğunu buluruz. İkinci sistem de evrensel özelliği sağladığından, evrensel özelliğin tanımında bu sefer $M = L$ ve $\theta_i = \Psi_i$ alarak,

$$\theta' \circ \Psi_i' = \Psi_i$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$\theta' : L' \to L$$

fonksiyonunun olduğunu buluruz.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dd, bend right=80, "\theta"'] & \\
X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i'"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\psi_j'"] \\
& L' \arrow[uu, bend right=80, "\theta'"'] &
\end{tikzcd}$$

Şimdi

$$\theta' \circ \theta : L \to L$$

fonksiyonu, her i için,

$$(\theta' \circ \theta) \circ \Psi_i = \theta' \circ (\theta \circ \Psi_i) = \theta' \circ \Psi_i' = \Psi_i,$$

yani

$$(\theta' \circ \theta) \circ \Psi_i = \Psi_i$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca

$$\mathrm{Id}_L : L \to L$$

fonksiyonu da, her i için,

$$\mathrm{Id}_L \circ \Psi_i = \Psi_i$$

eşitliğini sağlar.

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dd, bend right=80, "\theta'\circ\theta"'] & \\
X_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[dl, "\psi_j"] \\
& L \arrow[uu, bend right=80, "\mathrm{Id}_L"'] &
\end{tikzcd}$$

Ama evrensel özelliğe göre (tanımda $M = L$ ve $\theta_i = \Psi_i$ alın) bu tür eşitlikleri sağlayan fonksiyon biriciktir. Demek ki

$$\theta' \circ \theta = \mathrm{Id}_L$$

olmalı. Aynı nedenden

$$\theta \circ \theta' = \mathrm{Id}_{L'}$$

olur. Demek ki θ ve θ' birbirinin tersi eşlemelerdir. $\lambda = \theta$ alalım. İstenen $\Psi_i' = \lambda \circ \Psi_i$ eşitliği elbette sağlanır. □

Verilmiş bir $(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ direkt sistemi için, bu özelliği sağlayan bir $(L, \Psi_i : X_i \to L)_i$ ailesi ana teoremde görüldüğü gibi çok güçlü bir anlamda biriciktir. Böyle bir aileye $(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ direkt sisteminin ***direkt limiti*** adı verilir. Direkt limiti

$$\varinjlim (X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$$

olarak yazacağız (direkt limitlerden herhangi biri anlamında). Eğer kolaylık olacaksa ve karışıklığa neden olmayacaksa $\varinjlim (X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ yerine

$$\varinjlim X_i$$

yazılır.

Sonuç 2. *Yukardaki varsayım ve yazılımlarla,*

i. *$L = \bigcup_{i\in I} \Psi_i(X_i)$ eşitliği geçerlidir.*

ii. *Eğer φ_{ij} fonksiyonları birebirse, Ψ_i fonksiyonları da birebirdir.*

iii. *$a \in X_i$ ve $b \in X_j$ olsun. $\Psi_i(a) = \Psi_j(b)$ eşitliği için yeter ve gerek koşul, hem i'den hem de j'den büyükeşit bir k için $\varphi_{ik}(a) = \varphi_{jk}(b)$ eşitliğinin geçerli olmasıdır.*

Birinci Kanıt: Tüm söylenenler $L = X/\equiv$ ve $\Psi_i(x) = [x, i]$ fonksiyonları için geçerlidir. Dolayısıyla Ana Teorem'den dolayı aynı özellikler herhangi bir direkt limit için de geçerlidir. Bu kanıtın ayrıntılarını okura bırakıyoruz.

(i)'in bir başka kanıtı: X_i'lerin en az birinin boşküme olmadığını ve L'de 1'den fazla eleman olduğunu varsayabiliriz. $L' = \bigcup_{i\in I} \Psi_i(X_i)$ ve

$$\Psi_i' : X_i \to L'$$

fonksiyonu $\Psi_i'(x) = \Psi_i(x)$ eşitliğiyle verilmiş olsun. Evrensel özelliğe göre, $\theta \circ \Psi_i = \Psi_i'$ eşitliğini sağlayan bir ve bir tane $\theta : L \to L'$ vardır. Eğer $L' \subset L$ olsaydı, o zaman bir $u \in L \setminus L'$ için, diğer değerlere dokunmadan, $\theta(u)$ tanımını değişik biçimlerde yapabilirdik ve $\theta \circ \Psi_i = \Psi_i'$ eşitliği bozulmazdı; ki bu da θ'nın biricikliğiyle çelişir. □

Dileyen okur, direkt limitin kümesini en başta tanımladığımız gibi $X/\equiv$ olarak alabilir; tabii o zaman $\Psi_i(x) = [x, i]$ olarak tanımlanmak zorundadır. Aşağıda direkt limiti $X/\equiv$ olarak almayacağız, bunun yerine Sonuç 2'ye başvuracağız. Doğrusu direkt limiti $X/\equiv$ olarak alsaydık kanıtlarımız birazcık daha somut ve anlaşılır olurdu.

Cebirsel Yapılarda Direkt Limit. Eğer her X_i kümesi üzerinde grup, halka, cisim, R-modül, R-cebiri gibi cebirsel bir yapı varsa ve X_i'ler arasındaki φ_{ij} fonksiyonları söz konusu olan yapıya göre birer morfizmaysa (eşyapı fonksiyonları ise), o zaman $\varinjlim X_i$ direkt limiti üzerine "olabilecek en doğal biçimde" aynı cebirsel yapı tanımlanabilir ve bu yapıya göre bir önceki bölümde bulunan Ψ_i fonksiyonları birer morfizma olur. Ayrıca geçen bölümde sözünü ettiğimiz evrensel özellik bu kapsama da uyum sağlar. Bir başka deyişle, Ana Teorem'deki "küme" yerine "grup, halka, modül" gibi uygun olan cebirsel yapıyı yazarsak ve "fonksiyon" yerine uygun cebirsel yapının morfizmasını yazarsak, teorem geçerliliğini korur. Bu sonucu sadece gruplar için yazıp kanıtlayacağız. Diğer yapılar için kanıt çok benzerdir ve okura bırakılacaktır.

Örnek 2'deki $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ (ki aslında bir gruptur, ***Prüfer p-grubu*** olarak bilinir) aslında yapacaklarımıza verilebilecek en standart örnektir.

Teorem 3. *$(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ bir direkt sistem olsun. Ayrıca her X_i'nin bir grup olduğunu ve her*

$$\varphi_{ij} : X_i \to X_j$$

fonksiyonunun bir grup homomorfizması olduğunu varsayalım. $(L, \Psi_i : X_i \to L)_i$ ailesi bu sistemin bir direkt limiti olsun. O zaman L üzerine öyle bir ve bir tek grup yapısı konulabilir ki

$$\Psi_i : X_i \to L$$

fonksiyonları grup morfizmaları olur. Ayrıca her M grubu ve

$$\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$$

eşitliklerini sağlayan her $(\theta_i : X_i \to M)_i$ grup morfizması ailesi için öyle bir ve bir tane

$$\theta : L \to M$$

grup morfizması vardır ki her $i \in I$ için

$$\theta \circ \Psi_i = \theta_i$$

olur. Ayrıca eğer $(L', \Psi_i' : X_i \to L')_i$ bu özelliği sağlayan bir başka sistemse, Ana Teorem iii'te bulunan λ bir grup izomorfizması olur.

Kanıt: L üzerinde bir grup yapısı tanımlayacağız ve daha sonra Ψ_i'lerin bir grup homomorfizması olduklarını göstereceğiz. Grup yapısı tanımlamak biraz zaman alacak.

$\alpha, \beta \in L$ olsun. $\alpha\beta$ diye bir eleman tanımlamak istiyoruz, ki L üzerine bir grup yapısından bahsedebilelim. Önce bir sav:

Sav 1. *$\alpha, \beta \in L$ ise öyle bir $i \in I$ göstergeci ve $a, b \in X_i$ elemanları vardır ki,*

$$\Psi_i(a) = \alpha \text{ ve } \Psi_i(b) = \beta$$

olur.

$$\begin{tikzcd} \alpha, \beta \in L \\ a, b \in X_i \arrow[u, "\Psi_i"'] \end{tikzcd}$$

Kanıt: $L = \bigcup_{i\in I} \Psi_i(X_i)$ eşitliğini anımsayalım (A2 özelliği). Bu eşitlikten dolayı öyle $i, j \in I$ ve $a_i \in X_i$, $b_j \in X_j$ vardır ki,

$$\Psi_i(a_i) = \alpha \text{ ve } \Psi_j(b_j) = \beta$$

olur. Eğer $i = j$ olsaydı ve kanıtımız biterdi, ama öyle olmayabilir. Hem i'den hem de j'den büyük

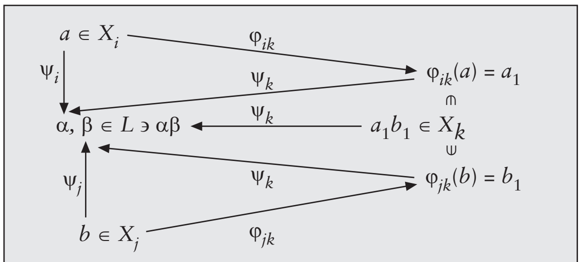
bir $k \in I$ bulalım. O zaman,
$$\Psi_k(\varphi_{ik}(a_i)) = \Psi_i(a_i) = \alpha$$
ve
$$\Psi_k(\varphi_{jk}(b_j)) = \Psi_j(b_j) = \beta$$
olur. Şimdi $\varphi_{ik}(a_i)$, $\varphi_{jk}(b_j) \in X_k$ ve bu elemanların Ψ_k imgeleri sırasıyla α ve β'ya eşit. Demek ki,
$$\Psi_k(a) = \alpha \text{ ve } \Psi_k(b) = \beta$$
eşitliklerini sağlayan
$$a = \varphi_{ik}(a_i) \in X_k \text{ ve } b = \varphi_{jk}(b_j) \in X_k$$
elemanları bulduk. Savımız kanıtlanmıştır. □

Sav'ın Kanıtına Dair Not: Burada önemli olan a ve b'nin aynı X_k kümesinde seçilmiş olmaları. (Daha önceki a_i ve b_j'nin biri X_i'de öbürü X_j'deydi.)

Sav 1'in varsayımlarından devam edelim.

X_i bir grup olduğundan, a ve b elemanlarını çarpıp gene X_i grubunda bir eleman elde edebiliriz ve bu çarpımın Ψ_i imgesini alarak L'den bir eleman bulabiliriz.

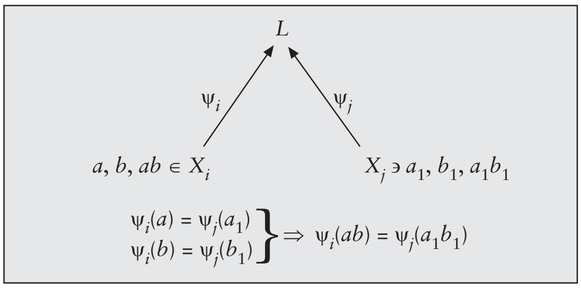
Niyetimiz
$$\alpha\beta = \Psi_i(ab)$$
tanımını yapmak ama önce böyle bir tanıma hak kazandığımızı kanıtlamalıyız, $\Psi_i(ab)$'nin sadece α ve β'ya göre değiştiğini, seçilen a, b ve i'den bağımsız olduğunu kanıtlamalıyız.



$\alpha, \beta \in L$ olsun. $a \in X_i$ ve $b \in X_j$ elemanları
$\psi_i(a) = \alpha$ ve $\psi_j(b) = \beta$ eşitliklerini sağlasın. $k \geq i, j$ olsun.
$a_1 = \varphi_{ik}(a)$ ve $b_1 = \varphi_{jk}(b)$ olsun.
O zaman $\psi_k(a_1) = \alpha$ ve $\psi_k(b_1) = \beta$ olur.
$\alpha\beta$ çarpımını $\psi_k(a_1b_1)$ olarak tanımlamak istiyoruz.

Sav 2. *$a, b \in X_i$ ve $a_1, b_1 \in X_j$ elemanları,*
$$\Psi_i(a) = \Psi_j(a_1),\ \Psi_i(b) = \Psi_j(b_1)$$
eşitliklerini sağlasınlar. O zaman
$$\Psi_i(ab) = \Psi_j(a_1b_1)$$
olur.

Kanıt: $\Psi_i(a) = \Psi_j(a_1)$ olduğundan, Sonuç 2'ye göre, bir $k \geq i, j$ göstergeci için,
$$\varphi_{ik}(a) = \varphi_{jk}(a_1)$$
olur. Aynı nedenden, bir $\ell \geq i, j$ göstergeci için,
$$\varphi_{i\ell}(b) = \varphi_{j\ell}(b_1)$$



olur. Şimdi $m \geq k, \ell$ olsun. Yukardaki iki eşitlikteki terimlerin sırasıyla φ_{km} ve $\varphi_{\ell m}$ morfizmaları altında imgelerini alalım. Örneğin birincisinden,
$$\varphi_{im}(a) = \varphi_{km}(\varphi_{ik}(a)) = \varphi_{km}(\varphi_{jk}(a_1)) = \varphi_{jm}(a_1)$$
elde ederiz. Benzer şekilde, ikinci eşitlik bize
$$\varphi_{im}(b) = \varphi_{jm}(b_1)$$
verir. Şimdi, $\varphi_{im}(a)$, $\varphi_{jm}(a_1)$, $\varphi_{im}(b)$, $\varphi_{jm}(b_1)$ elemanlarının hepsi X_m grubunda. Dolayısıyla
$$\varphi_{im}(ab) = \varphi_{im}(a)\varphi_{im}(b) = \varphi_{jm}(a_1)\varphi_{jm}(b_1) = \varphi_{im}(a_1b_1)$$
bulunur. Bundan da - gene Sonuç'a göre
$$\Psi_i(ab) = \Psi_j(a_1b_1)$$
çıkar. Savımız kanıtlanmıştır. □

Şimdi α, $\beta \in L$ için, Sav 1'e göre
$$\Psi_i(a) = \alpha \text{ ve } \Psi_i(b) = \beta$$
eşitliklerini sağlayan herhangi bir $i \in I$ göstergeci ve a, $b \in X_i$ elemanları seçelim ve $\alpha\beta$ çarpımını
$$\alpha\beta = \Psi_i(ab)$$
olarak tanımlayalım. Sav 2'ye göre tanım i'nin ve a ve b'nin seçimlerinden bağımsızdır.

Bu işlemin L üzerine bir grup yapısı tanımladığı çok belli. Ayrıca çarpımın tanımından dolayı
$$\Psi_i(a)\Psi_i(a) = \alpha\beta = \Psi_i(ab)$$
olur, yani $\Psi_i : X_i \to L$ fonksiyonları artık birer grup homomorfizması olurlar.

Böylece teoremin birinci kısmı kanıtlandı. Gelelim ikinci kısmına. M bir grup ve
$$\theta_i : X_i \to M$$
grup morfizmaları ve her $i \leq j \in I$ için
$$\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$$
eşitliklerini sağlasınlar. Öyle bir
$$\theta : L \to M$$
grup morfizması bulacağız ki her $i \in I$ için
$$\theta \circ \Psi_i = \theta_i$$
olacak. $\theta \circ \Psi_i = \theta_i$ koşulundan dolayı, eğer θ, varsa, her $x \in X_i$ için
$$\theta \circ \Psi_i(x) = \theta_i(x),$$
yani
$$\theta(\Psi_i(x)) = \theta_i(x)$$
eşitliğini sağlamalı. Dolayısıyla, Sonuç'a göre, θ'yı tanımlamanın tek bir yolu vardır: Verilmiş bir $\alpha \in$

L için önce

$$\alpha = \Psi_i(x)$$

eşitliğini sağlayan bir $x \in X_i$ seçilir; sonra

$$\theta(\alpha) = \theta_i(x)$$

olarak alınır. Demek ki, θ varsa ancak böyle tanımlanabilir. Şimdi yukardaki tanımın caiz olduğunu, $\Psi_i(x) = \Psi_j(y)$ için $\theta_i(x) = \theta_j(y)$ olduğunu kanıtlayalım. Nitekim,

$$\Psi_i(x) = \Psi_j(y)$$

olduğundan, Sonuç'a göre, i ve j'den büyük bir k için

$$\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$$

olur. Her iki tarafa da θ_k uygulayalım:

$$\theta_k(\varphi_{ik}(x)) = \theta_k(\varphi_{jk}(x))$$

buluruz. θ_j'ler üzerine yapılan varsayımdan dolayı, bundan da

$$\theta_i(x) = \theta_j(y)$$

çıkar. Teorem tamamen kanıtlanmıştır. □ □

Yukardakinin nerdeyse aynısının tıpkısı hemen hemen her türlü cebirsel yapıda yapılabilir: Halkalarda, cisimlerde, modüllerde (aynı halka üzerine)... Direkt limit de doğal olarak aynı yapıya sahiptir. Hatta nesnelerimiz sıralı kümeler, morfizmalarımız da sıralamayı koruyan fonksiyonlar olabilir. Birinci örneğimiz bu türden zaten. Dikkat ederseniz, o örnekte sıralı bir küme olan $\mathbb{Z}$'yi elde ettik.

Alıştırma. Her i doğal sayısı için $X_i = \mathbb{R}^{\geq 0}$ olsun. Her $i < j$ için, $f_{ij}(x) = x^{2^{j-i}}$ olsun. Bu verilerin bir direkt sistem tanımladığını kanıtlayın. Direkt limiti bulun. Direkt limit üzerine Ana Teorem'de kanıtlanan doğal grup yapısı nedir? Direkt limit üzerine bir sıralama bulun. Göstergeçleri $\mathbb{N}$ yerine $\mathbb{Z}$'de alsaydık ne değişirdi?

Topolojik Yapılarda Direkt Limit. Şimdi her X_i kümesinin bir topolojik uzay ve her

$$\varphi_{ij} : X_i \to X_j$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. Teorem 1'in ya da 3'ün bir benzerini topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar için kanıtlamak istiyoruz. Direkt limitin kümesi ve Ψ_i fonksiyonları zorunlu olarak eskileri olacak

Teorem 4. *$(X_i, \varphi_{ij})_{i<j\in I}$ bir direkt sistem olsun. Ayrıca her X_i'nin topolojik bir uzay olduğunu ve her*

$$\varphi_{ij} : X_i \to X_j$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım.

$$(L, \Psi_i : X_i \to L)_i$$

ailesi bu sistemin bir direkt limiti olsun. O zaman L üzerine öyle bir ve bir tek topoloji yapısı konulabilir ki

$$\Psi_i : X_i \to L$$

fonksiyonları sürekli olur ve ayrıca her M topolojik uzayı ve

$$\theta_j \circ \varphi_{ij} = \theta_i$$

eşitliklerini sağlayan her $(\theta_i : X_i \to M)_i$ sürekli fonksiyon ailesi için öyle bir ve bir tane

$$\theta : L \to M$$

sürekli fonksiyon vardır ki her $i \in I$ için

$$\theta \circ \Psi_i = \theta_i$$

olur. Ayrıca eğer $(L', \Psi_i' : X_i \to L')_i$ bu özelliği sağlayan bir başka sistemse, Ana Teorem iii'te bulunan λ bir homeomorfizmadır.

Bu teoremin kanıtını ayrıntılı vermeyeceğiz. L'nin topolojisini açıklamakla yetineceğiz.

Aslında L'nin topolojisinin ne olması gerektiği belli. Her şeyden önce tüm Ψ_i fonksiyonlarını sürekli kılan bir topoloji olmalı. Öte yandan bu koşulun yeterli olmayacağı da belli çünkü L üzerine en kaba topolojiyi alırsak sadece Ψ_i fonksiyonları değil, L'ye giden tüm fonksiyonlar sürekli olur; ayrıca bu topoloji X_i'lerin topolojisinden bağımsızdır; ki bu da kaba topolojinin koşulları sağlayamayacağının bir göstergesidir.

L'nin evrensel özelliği (sürekli bir $\theta : L \to M$ fonksiyonun bulunması gerekliliği) L'nin topolosinin çok kaba olmaması gerektiğini, hatta olabilecek en ince topoloji olması gerektiğini kulağımıza fısıldıyor olmalı. Nitekim bu fikir problemi çözüyor.

L üzerine tüm Ψ_i fonksiyonlarını sürekli kılan en ince (yani en zengin) topolojiyi alalım. Daha net olarak L'nin bir V altkümesi, ancak ve ancak her $i \in I$ için $\Psi_i^{-1}(V)$ kümesi X_i'de açıksa açık olsun.

Teoremde yazan her şeyin doğru olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. Meraklı okur mutlaka yapmalı. ♦