Ali Nesin

1956'da ...

Nesin Yayıncılık Ltd. Şti.
künye…

Ali Nesin

Analiz IV

İçindekiler

Üçüncü Basıma Önsöz

Mustafa Yağcı kitabı baştan aşağı okuyarak onlarca ifade bozukluğunu düzeltti. Yusuf Ünlü hocam gene değerli katkılarda bulundu. Her iki dostuma da sonsuz teşekkürler.

Ali Nesin, Şubat 2014

İkinci Basıma Önsöz

Hacettepe Üniversitesi'nden Tuna Hatice Yalvaç kitabı baştan sona ve satır satır okuyarak, hem verdiği emekle hem de bulduğu yanlışlarla beni mahcup etti.

Mimar Sinan Üniversitesi'nden David Pierce ve öğrencileri de hatırı sayılır sayıda düzeltme gönderdiler. Bununla yetinmeyip birçok konuda haklı pedagojik ve dille ilgili uyarılarda bulundular. Diğer kitaplarımı da kendilerine öneririm!

En çok, içinde bol yanlış bulunan kitaplardan öğrenilir! Bunun benim için bir avuntu olması doğru olduğu gerçeğini değiştirmiyor!

Birinci basımın önsözünde, Tietze Genişleme Teoremi'ni (Altbölüm 24.3) kaleme alan Selçuk Demir'e teşekkür etmeyi unutmuşum; özür dileyerek şimdi teşekkür ediyorum.

Düzeltmeler ve iyileştirmeler dışında birkaç alıştırma ve örnek ekledim.

Emeği geçen meslektaşlarıma hem kendi hem de kitaptan yararlanacaklar adına çok teşekkür ederim.

Ali Nesin, Nisan 2012

Önsöz

İstanbul Bilgi Üniversitesi'nin Matematik Bölümü'nde, içeriği aşağı yukarı bu kitap olan bir ders dördüncü dönem lisans öğrencilerine verilmektedir. Bunun için de ilk üç dönem aşağı yukarı ilk üç cildin içeriği okutulmaktadır. Öğrenciler zorlanıyorlar elbet, lise eğitimleri gözönüne alınınca konu fazlaca soyut geliyor. Ama sebat edip çalışanlar gerçek birer matematikçi olarak mezun oluyorlar. Bu kitabın içeriğinin matematik bölümlerinin en geç üçüncü sınıfında okutulabileceğini, hatta okutulması gerektiğini düşünüyorum.

Alıştırmalar ve örnekler fazla yer kaplamasın, bu yüzden kitabın fiyatı artmasın diye küçük puntoyla yazdım. Ama bundan alıştırma ve örneklerin önemsiz oldukları anlamı çıkmamalı. Özellikle örnekleri metinde bol bol kullandım.

Ultrametriği ve p-sel sayıları metin boyunca sağa sola ve özellikle bölüm sonlarına serpiştirdim. Böylece okur hem somut olarak hesap yapabileceği bir örnek görmüş olacak hem de matematiğin en ilginç yapılarından biriyle haşır neşir olacak. Doğrusu içimden bu konuya daha fazla eğilmek geçti ama kendimi tuttum.

Bu arada Bölüm 0'ın önemsiz olmadığını, okunması ya da bilinmesi gerektiğini üstüne basa basa söyleyeyim.

Selçuk Demir, Uğur Doğan, Zafer Ercan, Yusuf Ünlü ve Tuna Hatice Yalvaç'ın kitaba çok önemli ve değerli katkıları oldu, kimi yüz kızartıcı pek çok yanlışı düzelttiler. Uğur Doğan, Zafer Ercan, Ali Törün ve Tuna Hatice Yalvaç kitabı nerdeyse satır satır okuyarak sayfalar dolusu hata buldular, çok değerli düzeltmeler ve iyileştirmeler yaptılar. Asistanlarım Aslı Can Korkmaz ve Çiğdem Şahin Quark'ta yazılmış metni sabahlara kadar çalışarak LaTeX'e aktardılar ve bana büyük kolaylık sağladılar. Sonat Süer LaTeX konusunda çok yardımcı oldu. Katkısı olan herkese ve sabırda Eyüp Sultan'ı da aşan eşim Özlem Beyarslan'a teker teker ve tekrar tekrar teşekkürlerimi sunarım.

Hataları, eksikleri, fazlalıkları, ifade bozukluklarını, zor anlaşılan yerleri, alıştırma ve örnek önerilerinizi ve her türlü katkınızı anesin@bilgi.edu.tr adresine yollarsanız çok makbule geçer, gelecek basımlarda düzeltirim.

Ali Nesin, 2011-2012

0. $\mathbb{R}$ Örneği

Belki gereğinden uzun bulunabilecek bu ilk bölümde, bir $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekliliğinin tanımından ϵ ve δ sayılarını atıp yerlerine kümeler kuramını andıran tanımlar vereceğiz. Böylece analiz konusu gerçel sayılardan soyutlanıp, adına ***topoloji*** denilen çok daha genel bir konu haline gelecek. Yani bu bölümde topoloji kavramının nereden kaynaklandığını göstermeye çalışacağız. Topoloji konusuna gerçek anlamda Bölüm 1'de gireceğiz ve kitap esas olarak o zaman başlayacak.

0.1 Bir Noktada Süreklilik ve Komşuluk

0.1.1 Tanımı Dönüştürme

Bir fonksiyonun bir noktada sürekliliğinin tanımını anımsatmakla başlayalım. Basitleştirmek için, şimdilik, $\mathbb{R}$'nin herhangi bir X altkümesinden $\mathbb{R}$'nin herhangi bir Y altkümesine giden bir fonksiyonla değil de, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonla çalışalım.

$a \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. f fonksiyonunun a noktasında sürekliliğin tanımı şöyledir [N5]:

A. *Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki, her $x \in \mathbb{R}$ için,*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olur.

Bu tanımı değiştire değiştire bir başka biçimde yazacağız; buram buram kümeler kuramı kokan bir biçimde. Tanımdaki ϵ ve δ sayılarından ve eşitsizlik işaretlerinden kurtulacağız; bir bedel karşılığında elbette: Tanımdaki ϵ ve δ sayıları yerine $\mathbb{R}$'nin bazı özel altkümeleri yer alacak.

f'nin a'da sürekliliğini şöyle ifade edelim:

B. *Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki, her $x \in \mathbb{R}$ için,*

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

olur.

Ya da şöyle:

C. *Her* $\epsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *var ki*[1]

$$f(a-\delta, a+\delta) \subseteq (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

olur.

Ya da şöyle:

D. *Her* $\epsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *var ki*

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

olur.

Demek ki, f fonksiyonunun a'da sürekli olması demek, $\epsilon > 0$ hangi sayı olursa olsun,

$$(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

aralığının önimgesinin, yani

$$f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

kümesinin $(a-\delta, a+\delta)$ biçiminde bir aralık içermesi demektir. İlk olarak, $(a-\delta, a+\delta)$ yerine I yazıp δ'dan kurtulalım:

E. *Her* $\epsilon > 0$ *için* a*'yı içeren öyle bir* I *açık aralığı var ki*

$$I \subseteq f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

olur.

(D) koşuluyla (E) koşulunun eşdeğer oldukları daha önceki eşdeğerlikler kadar bariz değil, kanıtlayalım: Eğer (D) doğruysa, elbette (E) koşulu da doğrudur. Öte yandan, (E) koşulu doğruysa (D) koşulu da doğrudur. Nitekim eğer verilmiş $\epsilon > 0$ için,

$$a \in I \subseteq f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

içindeliklerini sağlayan açık bir I aralığı varsa, o zaman bir $\delta > 0$ sayısı için

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq I$$

olur. Dolayısıyla

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq I \subseteq f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

olur, yani (D) koşulu doğrudur.

---

[1] Gelenek olduğu üzere, (a, b) aralığının bir f fonksiyonu altındaki imgesini $f((a, b))$ olarak değil, parantezden tasarruf ederek $f(a, b)$ olarak gösteriyoruz.

Sürekliliğin tanımıyla daha fazla oynayabilmek için bir tanıma gereksiniyoruz.

$\mathbb{R}$'nin, a'yı içeren açık bir aralığını içeren altkümelerine a'nın ***komşuluğu*** diyelim. Yani eğer $V \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi, açık bir I aralığı için, $a \in I \subseteq V$ içindeliklerini sağlıyorsa, V'ye a'nın komşuluğu diyelim.

Tanımda V'nin I'ya eşit alınabileceğine dikkat edelim, yani a'yı içeren her I açık aralığı a'nın bir komşuluğudur. Demek ki her açık aralık, içerdiği her noktanın bir komşuluğudur. Eğer V, a'nın bir komşuluğuysa ve $V \subseteq W$ ise, W de a'nın bir komşuluğudur elbette. Bu, birazdan gerekecek.

Komşuluğun tanımından dolayı (E) koşulu şu koşula denktir:

F. *Her $\epsilon > 0$ için $f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ kümesi a'nın bir komşuluğudur.*

Böylece δ'dan tamamıyla kurtulduk. Bu arada eşitsizlik işaretinden de nerdeyse kurtulduk. Daha bitmedi ama, ϵ'dan da kurtulup (F) koşulunun şu koşula denk olduğunu göreceğiz:

G. *$f(a)$'yı içeren her J açık aralığı için $f^{-1}(J)$ kümesi a'nın bir komşuluğudur.*

(F) ve (G) koşullarının eşdeğer koşullar olduklarını dikkatlice kanıtlayalım.

(F $\Rightarrow$ G). J, $f(a)$'yı içeren herhangi bir açık aralık olsun. J açık bir aralık olduğundan, öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki,

$$(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \subseteq J$$

olur. Dolayısıyla

$$f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \subseteq f^{-1}(J)$$

olur. Ama (F) koşulundan dolayı sol taraftaki $f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ kümesi a'nın bir komşuluğudur; dolayısıyla onu içeren $f^{-1}(J)$ kümesi de a'nın bir komşuluğudur.

(G $\Rightarrow$ F). $\epsilon > 0$ olsun. Eğer (G) koşulunda $J = (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ alırsak, $f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ kümesinin a'nın bir komşuluğu olduğunu görürüz.

Demek ki (G) koşulu f'nin a'da sürekliliğine denk. Ama (G) koşulu da şu koşula denk:

H. *$f(a)$'nın her W komşuluğu için $f^{-1}(W)$ kümesi a elemanının bir komşuluğudur.*

(G) ve (H) koşullarının birbirine denk koşullar olduklarını kanıtlayalım.

(G $\Rightarrow$ H). W, $f(a)$'nın bir komşuluğu olsun. Komşuluğun tanımından dolayı, açık bir J aralığı için,

$$f(a) \in J \subseteq W$$

içindelikleri doğrudur. O zaman,

$$f^{-1}(J) \subseteq f^{-1}(W)$$

içindeliği de doğru olur. Ama varsayıma göre, $f^{-1}(J)$, a'nın bir komşuluğu. Dolayısıyla a'nın bu komşuluğunu içeren $f^{-1}(W)$ kümesi de a'nın bir komşuluğudur.

(H $\Rightarrow$ G). $f(a)$'yı içeren her J açık aralığı $f(a)$'nın bir komşuluğu olduğu için (G) elbette doğrudur.

Sonuç olarak şu teoremi kanıtladık.

Teorem 0.1. *$a \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin a'da sürekli olması için,*

$f(a)$'nın her komşuluğunun önimgesi a'nın bir komşuluğudur

koşulu gerek ve yeter koşuldur. □

Bu teoremi biçimsel kanıtlara daha alışkınlar için birazdan bir defa daha ve daha genel bir haliyle kanıtlayacağız.

Alıştırmalar

0.1. a'nın iki komşuluğunun kesişiminin bir komşuluk olduğunu kanıtlayın.

0.2. $a > 0$ ise ve V, a'nın bir komşuluğuysa, $\{v \in V : v > 0\}$ kümesinin de a'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlayın.

0.3. a'nın bir komşuluğunu içeren bir kümenin de a'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlayın.

0.4. a'nın sonlu sayıda komşuluğunun kesişiminin de a'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlayın.

0.5. Eğer $a \neq 0$ ise ve V, a'nın bir komşuluğuysa $\{v^2 : v \in V\}$ kümesinin a^2'nin bir komşuluğu olduğunu kanıtlayın. $a = 0$olduğunda aynı önerme neden yanlış?

0.6. a'nın sonsuz sayıda komşuluğunun kesişiminin bir komşuluk olmayabileceğini gösterin.

0.7. $\mathbb{R}$'nin bir noktasının komşuluğunun sayılamaz sonsuzlukta olduğunu kanıtlayın.

0.8. V, a'nın bir komşuluğuysa, $b + V$'nin $a + b$'nin bir komşuluğu olduğunu kanıtlayın.

0.9. V, a'nın ve W, b'nin birer komşuluğuysa,

$$V + W = \{v + w : v \in V,\, w \in W\}$$

kümesinin $a + b$'nin bir komşuluğu olduğunu kanıtlayın.

0.10. V, a'nın bir komşuluğuysa, $V/2$ kümesinin $a/2$'nin bir komşuluğu olduğunu kanıtlayın.

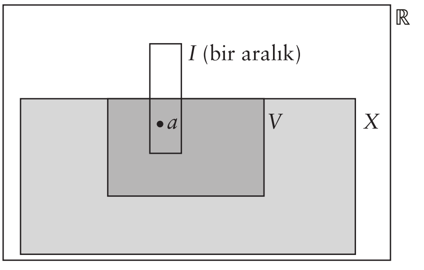
0.11. $\mathbb{R} \setminus \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinin 0'ın komşuluğu olmadığını ama 0 dışında içerdiği her noktanın komşuluğu olduğunu kanıtlayın.

0.12. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesinin hiçbir noktanın komşuluğu olmadığını kanıtlayın.

Yukarda $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir f fonksiyonunun (bir noktada) sürekliliği konusunu ele aldık. Ya fonksiyon $\mathbb{R}$'nin bir X altkümesinden $\mathbb{R}$'ye gitseydi? O zaman ne yapacaktık? Pek değişen bir şey olmazdı, sadece a'nın komşulukları yerine (aşağıda tanımlanacak olan) a'nın X-komşuluklarından sözetmek zorunda kalırdık. Önce X-komşuluğunun tanımını verelim sonra Teorem 0.1'in bir benzerini en genel haliyle kanıtlarız.

0.1.2 Komşuluk

$a \in V \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer a'yı içeren bir I açık aralığı için, $I \cap X \subseteq V$ oluyorsa, V'ye a'nın X***-komşuluğu*** adı verilir.



a'nın bir X-komşuluğunun resmi (V).
ℝ'yi bir doğru olarak göstermedik,
yoksa çizilen şekil pek açıklayıcı olmuyordu.

Örnekler

0.13. Komşuluğun tanımındaki I'yı $\mathbb{R}$'ye eşit almaya hakkımız var, ne de olsa $\mathbb{R}$'nin kendisi açık bir aralıktır. Dolayısıyla X'in kendisi her elemanının bir X-komşuluğudur.

0.14. Eğer $X = [0,3]$ ise, X'in $(1,3]$, $[1,3]$ ve $[0,3]$ altkümeleri, hem 2'nin hem de 3'ün X-komşuluğudur ama,
$$[0,3] \setminus \{3 - 1/n : n = 1,2,3,\ldots\} \cup \{3\}$$
kümesi 3'ün bir X-komşuluğu değildir. $[0,2]$, $(1,2]$, $[1,2]$ ve $[2,3]$ kümelerinin hiçbiri de 2'nin bir X-komşuluğu değildir. $(1,3)$ kümesi 2'nin bir X-komşuluğudur.

0.15. $X = \mathbb{Z}$ ise her $n \in X$ için $\{n\}$, n'nin bir X-komşuluğudur. Hatta X'in her altkümesi içerdiği her elemanın X-komşuluğudur.

0.16. $X = \mathbb{Q}$ ise $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ kümesi 0'ın bir X-komşuluğudur.

Alıştırmalar

0.17. $\mathbb{R} \setminus \{2 - 1/n : n = 1,2,3,\ldots\} \cup \{2\}$ kümesi 2'ün bir komşuluğu mudur? Bu küme 1,99 sayısının bir komşuluğu mudur?

0.18. $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in X$ için $\{x\}$, x'in bir X-komşuluğu olsun. Bu durumda X'in sayılabilir bir küme olduğunu kanıtlayın.

0.19. $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in X$ için x'in sonlu bir X-komşuluğu olduğunu varsayalım. Bu durumda X'in sayılabilir bir küme olduğunu kanıtlayın.

Hemen görüleceği üzere, eğer tanımda $X = \mathbb{R}$ alınırsa, $\mathbb{R}$-komşuluğu ile bir önceki altbölümde tanımladığımız komşuluk aynı kavramlardır.

Bu aşamada bir $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun X'in bir a noktasında sürekliliğinin tanımını verelim. Burada X'i $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olarak alıyoruz. Eğer her $\epsilon > 0$ için,
$$(x \in X \text{ ve } |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$
koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, o zaman f fonksiyonuna a ***noktasında sürekli*** denir. Eğer $X = \mathbb{R}$ alırsak, aynen bir önceki kavramı buluruz. Eğer $Y \subseteq \mathbb{R}$ için $f : X \longrightarrow Y$ ise, süreklilik kavramı aynı şekilde tanımlanır.

Okur dilerse birkaç sayfa ilerde kanıtlayacağımız aşağıdaki teoremi aynen bir önceki altbölümde izlenen yöntemle bu aşamada kanıtlayabilir.

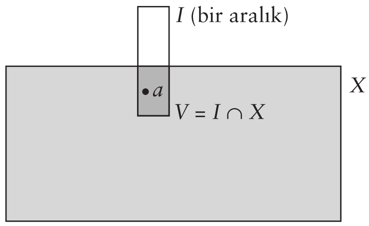
Teorem 0.2. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin a'da sürekli olması için,*

$f(a)$'nın her komşuluğunun önimgesi a'nın bir X-komşuluğudur

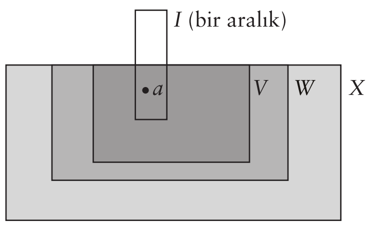
koşulu gerek ve yeter koşuldur.

Bu teoremi kanıtladığımızı varsayarsak, sürekliliğin tanımından ϵ ve δ'yı atıp sürekliliği tamamen komşuluklarla ifade ettik, böylece süreklilik nerdeyse sadece kümeler kuramına ait bir kavrama dönüştü. Bu kavramı ilerde daha da soyutlayarak ($\mathbb{R}$'den de kurtarıp) matematiğin olağanüstü güzel bir dalı olan "topoloji"yi yaratacağız.

Önsav 0.3. *$X \subseteq \mathbb{R}$ olsun.*
i. *a'yı içeren her I açık aralığı için $I \cap X$, a'nın bir X-komşuluğudur.*

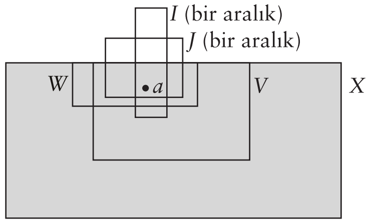


ii. *a'nın bir X-komşuluğunu içeren X'in her altkümesi a'nın bir X-komşuluğudur.*



V, a'nın bir X-komşuluğuysa,
W de a'nın bir X komşuluğudur.

iii. *a'nın iki X-komşuluğunun kesişimi de a'nın bir X-komşuluğudur.*



V ve W, a'nın iki X-komşuluğuysa o zaman
$V \cap W$ de a'nın bir X-komşuluğudur, çünkü
$a \in I \cap X \subseteq V$ ve $a \in J \cap X \subseteq W$ ise,
$a \in (I \cap J) \cap X \subseteq V \cap W$ olur.

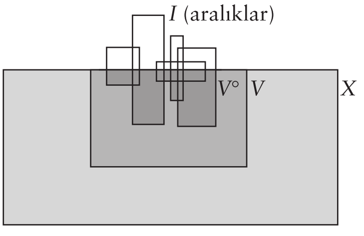
iv. *V, X'in herhangi bir altkümesi olsun. O zaman*

$$V^\circ = \{a \in V : V,\ a\text{'nin bir } X\text{-komşuluğu}\}$$

kümesi, açık aralıkların bileşimi olan bir $U \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi için $U \cap X$ kümesine eşittir.

Kanıt: İlk üç özelliğin kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır. Resimler de zaten yeterince açıklayıcı.

iv. Kanıtı aşağıdaki şekilden izleyebilirsiniz.



$a \in V^\circ$ olsun. V° kümesinin tanımından dolayı, a'yı içeren bir I_a açık aralığı için,

$$I_a \cap X \subseteq V$$

olur. Her $a \in V^\circ$ için, böyle bir I_a açık aralığı seçelim ve

$$U = \bigcup_{a \in V^\circ} I_a$$

tanımını yapalım. O zaman, her $a \in V^\circ$ için, $a \in I_a \subseteq U$ olduğundan, $V^\circ \subseteq U$ olur. Ayrıca $V^\circ \subseteq V \subseteq X$ olduğundan

$$V^\circ \subseteq U \cap X$$

içindeliğini elde ederiz.

Şimdi de son olarak $U \cap X \subseteq V^\circ$ içindeliğini gösterelim.

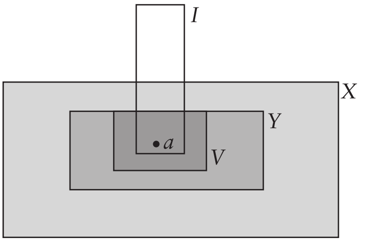
$$U \cap X = \left(\bigcup_{a \in V^\circ} I_a \right) \cap X = \bigcup_{a \in V^\circ} (I_a \cap X)$$

olduğundan, her $a \in V^\circ$ için, $I_a \cap X \subseteq V^\circ$ içindeliğini göstermek yeterli. $b \in I_a \cap X$ olsun. O zaman, $b \in I_a \cap X \subseteq V$ olduğundan, V, b'nin bir X-komşuluğudur. Demek ki, $b \in V^\circ$. $\square$

Bu kitapta, yukarda yapılanları $\mathbb{R}$'den başka kümelere soyutlayarak genelleştireceğiz ve böylece çok geniş bir uygulama sahası olan topolojiye ulaşacağız.

Komşulukların şu özelliği de hayatı kolaylaştırır:

Önsav 0.4. *$a \in Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. a'nın her Y-komşuluğu, a'nın bir X-komşuluğuyla Y'nin kesişimidir. Ayrıca a'nın bir X-komşuluğuyla Y'nin kesişimi a'nın bir Y-komşuluğudur.*



Kanıt: V, a'nın bir Y-komşuluğu olsun. O zaman a'yı içeren bir I açık aralığı için, $I \cap Y \subseteq V$ olur. Elbette $I \cap X$, a'nın bir X-komşuluğudur. Önsav 0.3.ii'ye göre, $W = (I \cap X) \cup V$ de a'nın bir X-komşuluğudur. O zaman,

$$\begin{aligned} V \subseteq W \cap Y &= ((I \cap X) \cup V) \cap Y \\ &= ((I \cap X) \cap Y) \cup (V \cap Y) \\ &= (I \cap Y) \cup (V \cap Y) \subseteq V \end{aligned}$$

olur, yani $V = W \cap Y$ olur.

Şimdi W, a'nın bir X-komşuluğu olsun. O zaman a'yı içeren bir I açık aralığı için, $I \cap X \subseteq W$ olur. Demek ki

$$a \in I \cap Y = (I \cap X) \cap Y \subseteq W \cap Y.$$

Bundan da $W \cap Y$'nin a'nın bir Y-komşuluğu olduğu anlaşılır. □

0.1.3 Süreklilik

Söz verdiğimiz gibi Teorem 0.2'yi kanıtlayarak süreklilik kavramını ϵ ve δ'dan kurtaracağız.

Teorem 0.2'nin Kanıtı: Önce $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun a'da sürekli olduğunu varsayalım. W, $f(a)$'nın bir komşuluğu olsun. Demek ki bir I açık aralığı için,

$$f(a) \in I \subseteq W$$

olur. Ama I açık bir aralık olduğundan ve $f(a)$'yı içerdiğinden, sayfa 5'teki (B) maddesinden dolayı, pozitif bir ϵ sayısı için,

$$(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \subseteq I$$

olur. Öte yandan, f, a'da sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ için, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, yani

$$f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

olur, bir başka deyişle,

$$f(X \cap (a-\delta, a+\delta)) \subseteq (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

olur; demek ki,

$$f(X \cap (a-\delta, a+\delta)) \subseteq I \subseteq W$$

olur. Dolayısıyla,

$$a \in X \cap (a-\delta, a+\delta) \subseteq f^{-1}(W)$$

olur. Bu da, $f^{-1}(W)$ kümesinin a'nın bir X-komşuluğu olduğunu gösterir.

Şimdi de,

$f(a)$'nın $\mathbb{R}$'de her komşuluğunun önimgesi a'nın bir X-komşuluğudur

koşulunu kabul edip f'nin a'da sürekli olduğunu gösterelim. $\epsilon > 0$ olsun. O zaman $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ aralığı $f(a)$'nın bir komşuluğudur. Demek ki, varsaydığımız koşula göre,

$$f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

kümesi, a'nın bir X-komşuluğudur; dolayısıyla a'yı içeren açık bir I aralığı için,

$$a \in I \cap X \subseteq f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

içindelikleri geçerlidir. $a \in I$ ve I açık olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq I$$

olur. Bundan ve bir önceki cümleden,

$$(a-\delta, a+\delta) \cap X \subseteq f^{-1}(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$$

çıkar. Yani

$$f((a-\delta, a+\delta) \cap X) \subseteq (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon),$$

yani her $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X$ için

$$f(x) \in (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon),$$

yani eğer $x \in X$ elemanı $|x-a| < \delta$ eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olur. Bu da f'nin a'da sürekli olduğunu gösterir. □

Eğer $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu değerlerini Y kümesinde alıyorsa, yani $f(X) \subseteq Y$ ise, o zaman f'yi X'ten Y'ye giden bir fonksiyon olarak da görebiliriz. Teorem 0.2'yle aşağıdaki teorem arasında hiçbir ayrım yoktur, ikisi de aynı şeyi söylemektedir:

Teorem 0.5. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin a'da sürekli olması için gerek ve yeter koşul,*

$f(a)$'nın her Y-komşuluğunun önimgesi a'nın bir X-komşuluğudur

koşuludur.

Kanıt: f, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon olarak görüldüğünde de süreklidir (elbette! ama bunun doğruluğunu siz gene de kontrol edin). Eğer I bir aralıksa,

$$f^{-1}(I) = f^{-1}(I \cap Y)$$

eşitliği geçerlidir ve Teorem, bu gözlemlerden ve bir önceki teoremden çıkar. Nitekim, $W \subseteq Y$, $f(a)$'nın bir Y-komşuluğu olsun. I açık aralığı,

$$f(a) \in I \cap Y \subseteq W$$

içindeliklerini sağlasın. O zaman,

$$a \in f^{-1}(I) = f^{-1}(I \cap Y) \subseteq f^{-1}(W)$$

olur. Ama I, $f(a)$'nın bir komşuluğu olduğundan, Teorem 0.2'ye göre $f^{-1}(I)$ kümesi de a'nın bir X-komşuluğudur. Önsav 0.3.ii'ye göre $f^{-1}(W)$ de a'nın bir X-komşuluğudur. □

Bir noktada sürekliliğin kontrol etmesi daha kolay bir koşulu aşağıda:

Sonuç 0.6. *$a \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin a'da sürekli olması için,*

$f(a)$'yı içeren her açık aralığın önimgesi a'nın bir X-komşuluğudur

koşulu gerek ve yeter koşuldur.

Kanıt: Açık aralıklar komşuluk olduklarından, eğer f, a'da sürekliyse koşulun gerekli olduğu Teorem 0.2'den belli. Şimdi, verilen koşulun doğru olduğunu varsayalım. Teorem 0.2'yi kullanarak f'nin a'da sürekli olduğunu kanıtlayacağız. W, $f(a)$'nın bir komşuluğu olsun. I,

$$f(a) \in I \subseteq W$$

içindeliklerini sağlayan bir açık aralık olsun. O zaman, $f^{-1}(I) \subseteq f^{-1}(W)$ olur. Varsayıma göre $f^{-1}(I)$, a'nın bir X-komşuluğudur. Demek ki bunu kapsayan $f^{-1}(W)$ kümesi de a'nın bir X-komşuluğudur. □

Bir fonksiyonun sürekli olması demek fonksiyonun tanım kümesinin her elemanında sürekli olması demek olduğunu anımsayalım. Sürekliliğin uygulamaya daha yatkın eşdeğer koşullarını bulabiliriz:

Sonuç 0.7. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her açık aralığın önimgesi açık aralıksa f süreklidir.*

Kanıt: Sonuç 0.6'dan doğrudan çıkar. □

0.1.4 Uygulamalar

Yukardaki teoremlerde, bir fonksiyonun bir noktada sürekliliğini bambaşka bir dilde, komşuluklar dilinde ifade ettik. Bu dilin avantajları vardır. Örneğin şu teoremin bu dilde kanıtı çok kolaydır:

Sonuç 0.8. *$X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $a \in X$ ve $f : X \to Y$ ve $g : Y \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu a noktasında ve g fonksiyonu $f(a)$ noktasında sürekliyse, o zaman $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında süreklidir.*

Kanıt: W, $g(f(a))$'nın bir komşuluğu olsun. O zaman Teorem 0.2'ye göre $g^{-1}(W)$, $f(a)$'nın bir Y-komşuluğudur. Teorem 0.5'e göre $f^{-1}(g^{-1}(W))$, yani $(g \circ f)^{-1}(W)$ kümesi a'nın bir X-komşuluğudur. □

Sonuç 0.9. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mutlak artan ve örten bir fonksiyonsa f süreklidir. Ayrıca f'nin tersi de süreklidir.*

Kanıt: Sonuç 0.7'den dolayı her açık aralığın önimgesinin bir açık aralık olduğunu kanıtlamak yeterlidir. (a, b) açık aralığını ele alalım. İlk olarak,

$$f^{-1}(a, b)$$

kümesinin bir aralık olduğunu kanıtlayalım. Bunun için,

$$u, v \in f^{-1}(a, b) \text{ ve } u < w < v$$

koşullarını varsayıp,

$$w \in f^{-1}(a, b),$$

içindeliğini kanıtlamalıyız. f artan olduğundan,

$$a < f(u) < f(w) < f(v) < b$$

olur. Demek ki $f(w) \in (a, b)$ ve $w \in f^{-1}(a, b)$.

Şimdi de $f^{-1}(a, b)$ aralığının açık olmak zorunda olduğunu, yani sınırlarını içermediğini kanıtlayalım. Aksine, diyelim $u = \inf f^{-1}(a, b) \in f^{-1}(a, b)$ olsun. O zaman

$$a < f(u) < b$$

olur. $a < c < f(u)$ eşitsizliklerini sağlayan bir c sayısı alalım. f örten olduğundan, bir v için $f(v) = c$ olur. $f(v) = c < f(u)$ olduğundan $v \geq u$ olamaz ve $v < u$ olmak zorunda. Ama bu eşitsizlik de,

$$v \in f^{-1}(a, b) \text{ ve } u = \inf f^{-1}(a, b)$$

olgularıyla çelişir. Benzer nedenden $f^{-1}(a, b)$ kümesi en küçük üstsınırını da içermez. Demek ki $f^{-1}(a, b)$ açık bir aralıktır ve f süreklidir.

f'nin tersi de artan olduğundan f'nin tersi de süreklidir. □

Sonuç 0.10. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ mutlak artan bir fonksiyon olsun. Eğer $f(X)$ açık bir araklıksa, f süreklidir.*

Kanıt: Sonuç 0.6'dan dolayı her açık aralığın önimgesinin X-açık olduğunu kanıtlamalıyız. Kanıt aynen yukardaki gibidir. □

Bunun sonucu olarak, örneğin, exp ve ln fonksiyonlarının sürekli olduklarını hiç hesap kitap yapmadan görürüz.

Yukardaki sonuçlar elbette azalan fonksiyonlar için de geçerlidir.

Alıştırma 0.20. Bu sonuçları kullanarak $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin.

0.2 Süreklilik ve Açık Kümeler

0.2.1 Açık Kümeler

Geçen altbölümde bir fonksiyonun bir noktada sürekliliğinin tanımını ϵ ve δ'dan kurtarıp nerdeyse kümeler kuramı seviyesine indirmiştik. Bu bölümde fonksiyonların sürekliliği kavramını (yani her noktada sürekliliği) aynı düzeye indireceğiz, ya da çıkaracağız.

Bir tanımla başlayalım. ℝ'nin, açık aralıkların bileşimi olarak yazılan altkümelerine ***açık küme*** diyelim.

Örnekler

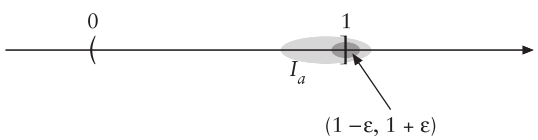
0.21. Açık aralıklar açık kümelerdir. $(0,1) \cup (1,2)$ ve $(0,1) \cup (2,3)$ kümeleri de elbette açıktır. Bunun özel bir durumu olarak, her $a \in \mathbb{R}$ için $(a,a) = \emptyset$ olduğundan, boşküme açık bir aralıktır, dolayısıyla açık bir kümedir. ℝ açık bir kümedir: İster ℝ'yi ilk ciltte yaptığımız gibi açık bir aralık olarak kabul edin, ister $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+2)$ eşitliklerinden birini kullanın.

0.22. Bileşimi alınan açık aralık sayısı sonsuz da olabilir. Örneğin, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ kümesi,

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

eşitliğinden dolayı açıktır.

0.23. Öte yandan $(0,1]$ aralığı açık bir küme değildir. Bunu gösterelim.



Sorun'un 1 sayısından kaynaklandığı belli. Diyelim $(0,1]$ aralığı açık bir küme. O zaman $(0,1]$ aralığı açık aralıkların bileşimi olarak yazılır. Diyelim I_a açık aralıkları için,

$$(0,1] = \bigcup_{a \in A} I_a$$

eşitliği sağlanıyor. O zaman bir $a \in A$ göstergeci için, $1 \in I_a$ olur. Ama I_a açık bir aralık olduğundan dolayı, bundan, çok küçük de olsa, pozitif bir ϵ sayısı için

$$(1-\epsilon, 1+\epsilon) \subseteq I_a$$

içindeliği çıkar ve o zaman da

$$1+\epsilon/2 \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \subseteq I_a \subseteq (0,1]$$

olur ki bu da ($\epsilon > 0$ olduğundan) $1 < 1+\epsilon/2 \leq 1$ çelişkisini verir. Demek ki $(0,1]$ aralığı açık olamaz.
İlerde, $\mathbb{R}$'nin her açık altkümesinin sayılabilir sonsuzlukta açık aralığın bileşimi olarak yazılabileceğini göreceğiz.

Alıştırmalar

0.24. Sonlu bir kümenin ancak boşkümeyse açık olabileceğini kanıtlayın.

0.25. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nün açık küme olmadığını kanıtlayın.

0.26. $\mathbb{Q}$'yü içeren ama $\mathbb{R}$'ye eşit olmayan açık bir kümenin varlığını kanıtlayın.

Açık kümelerin yardımıyla $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonların sürekliliğini ϵ ve δ'sız ifade edebiliriz:

Teorem 0.11. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için $\mathbb{R}$'nin açık kümelerinin önimgelerinin açık olmaları gerek ve yeter koşuldur.*

Daha sonra, açık kümenin tanımıyla hafifçe oynayarak, bu teoremi, $\mathbb{R}$'nin bir X altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlara da genelleştireceğiz (bkz. Teorem 0.14).

Teoremi kanıtlamadan önce açık kümelerin birkaç kolay ve kullanışlı özelliğini görelim.

Önsav 0.12. *$U \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki üç önerme eşdeğerdir:*
a. *U açıktır.*
b. *Her $x \in U$ için, $x \in I \subseteq U$ özelliklerini sağlayan açık bir I aralığı vardır, yani U içerdiği her elemanın bir komşuluğudur.*
c. *Her $x \in U$ için, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq U$ özelliğini sağlayan bir $\epsilon > 0$ vardır.*

Kanıt: ($a \Rightarrow b$). U, açık aralıkların bileşimi olduğundan dolayı... Bu açıklama yeterli görülmediyse biraz daha açalım. U'yu açık aralıkların bileşimi olarak yazalım: $U = \bigcup_{a \in A} I_a$. (Burada A bir göstergeç kümesidir.) Bileşimi alınan her I_a açık bir aralığı temsil ediyor ve her biri U'nun bir altkümesi. Eğer x, U'nun bir elemanıysa, x, bu açık aralıklardan birinin elemanı olmalı.

($b \Rightarrow c$). $x \in U$ olsun. Varsayıma göre,

$$x \in I \subseteq U$$

özelliklerini sağlayan açık bir I aralığı vardır. I bir açık aralık olduğundan ve $x \in I$ olduğundan,

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq I$$

içindeliğini sağlayan bir $\epsilon > 0$ vardır. Demek ki,

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq I \subseteq U$$

olur.

$(c \Rightarrow a)$. Varsayıma göre her $x \in U$ için,

$$(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x) \subseteq U$$

içindeliğini sağlayan bir $\epsilon_x > 0$ vardır. Elbette U bu $(x-\epsilon_x, x+\epsilon_x)$ aralıkların bileşimidir. □

Aşağıdaki özellikler açık kümelerin "karakteristik özellikleri" olarak kabul edilirler. Topoloji konusuna el attığımızda bu özelliklerin önemi gün ışığına çıkacak.

Önsav 0.13. i. *$\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ açık kümelerdir.*
ii. *İki (dolayısıyla sonlu sayıda da) açık kümenin kesişimi açıktır.*
iii. *Açık kümelerin (sonsuz sayıda bile olsa) bileşimi gene açık bir kümedir.*

Kanıt: i. Örnek 21. ii. U ve V iki açık küme olsun. U ve V'yi açık aralıkların bileşimi olarak yazalım:

$$U = \bigcup_{a\in A} I_a,\ V = \bigcup_{b\in B} J_b.$$

Buradaki I_a ve J_b açık aralıkları temsil ediyorlar. O zaman,

$$U \cap V = \left(\bigcup_{a\in A} I_a\right) \cap \left(\bigcup_{b\in B} J_b\right) = \bigcup_{a\in A, b\in B} (I_a \cap I_b)$$

olur. İki açık aralığın kesişimi gene açık bir aralık olduğundan, her $a \in A$ ve $b \in B$ göstergeci için,

$$I_a \cap J_b$$

açık bir aralıktır (boşküme de olabilir); sonuç olarak $U \cap V$, açık aralıkların bileşimi olarak yazılır ve dolayısıyla açık bir kümedir.

iii. Her açık küme bir açık aralıklar bileşimi olduğundan, açık kümelerin bileşimi gene bir açık aralıklar bileşimidir, yani açık bir kümedir. □

Dikkat: Kapalı aralıkların bileşimi olarak yazılan bir küme açık bir küme (hatta açık bir aralık) olabilir; örneğin, $\bigcup_{n=1}^{\infty}[1/n, 1-1/n] = (0,1)$.

0.2.2 Sürekli Fonksiyonlar

Şimdi Teorem 0.11'i kanıtlayalım.

Teorem 0.11'in Kanıtı: Teoremi bir önceki altbölümdeki sonuçları kullanarak kolaylıkla kanıtlayabiliriz (Önsav 0.3.iv bu sonuçlardan biri). Ama işin zoruna kaçıp bunu yapmayacağız.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sürekli bir fonksiyon olsun. U, $\mathbb{R}$'nin bir açık kümesi olsun. U'yu açık aralıkların bileşimi olarak yazalım:

$$U = \bigcup_{a \in A} I_a.$$

$f^{-1}(U)$ kümesinin açık olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(I_a)$$

eşitliğinden dolayı, Önsav 0.13.iii'e göre, $f^{-1}(I_a)$ kümelerinin açık olduğunu kanıtlamak yeterli. Madem öyle, herhangi bir I açık aralığı alalım ve $f^{-1}(I)$ kümesinin açık olduğunu kanıtlayalım. Bunun için Önsav 0.12.c koşulunu kullanacağız.

Rastgele bir $b \in f^{-1}(I)$ noktası alalım. $f(b) \in I$ olduğundan, pozitif bir ϵ sayısı için,

$$(f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon) \subseteq I$$

olur. Ayrıca, f, b'de sürekli olduğundan, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $x \in (b - \delta, b + \delta)$ için,

$$f(x) \in (f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon) \subseteq I$$

olur. Yani

$$f(b - \delta, b + \delta) \subseteq (f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon) \subseteq I$$

olur, yani

$$(b - \delta, b + \delta) \subseteq f^{-1}(I)$$

olur ve böylece $f^{-1}(I)$ kümesinin açık olduğu kanıtlanır.

Şimdi de, tam tersine, $\mathbb{R}$'nin açık kümelerinin önimgelerinin açık olduğunu varsayıp f'nin sürekli olduğunu kanıtlayalım. $b \in \mathbb{R}$ olsun. f'nin b'de sürekli olduğunu kanıtlayalım. $\epsilon > 0$ olsun.

$$(f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$$

açık aralığı açık bir küme olduğundan, varsayıma göre,

$$f^{-1}(f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$$

açık bir kümedir. Ayrıca b noktasını içerir. Demek ki,

$$b \in I \subseteq f^{-1}(f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$$

ilişkilerini sağlayan bir I açık aralığı vardır. I, b noktasını içeren açık bir aralık olduğundan,

$$(b - \delta, b + \delta) \subseteq I$$

ilişkisini sağlayan bir de $\delta > 0$ sayısı vardır. Demek ki,

$$(b - \delta, b + \delta) \subseteq I \subseteq f^{-1}(f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon)$$

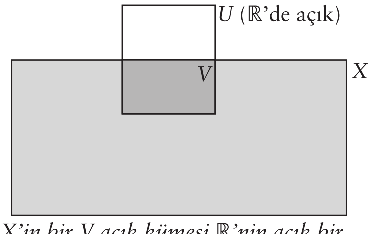
ve

$$f(b - \delta, b + \delta) \subseteq (f(b) - \epsilon, f(b) + \epsilon).$$

Bu da aynen, f'nin b'de sürekli olduğunu söylemektedir. □

Şimdi söz verdiğimiz gibi teoremi $\mathbb{R}$'nin herhangi bir X altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlara genişleteceğiz. Önce teoremi yazabilmek için gereksinilen tanımı verelim.

Tanım. *$V \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\mathbb{R}$'nin bir U açık kümesi için, $V = U \cap X$ oluyorsa, o zaman V'ye X'**in açık altkümesi** denir. Bir kümenin X'te açık olduğunu belirtmek için kimi zaman X-**açık** diyeceğiz.*



X'in bir V açık kümesi ℝ'nin açık bir U kümesi için U ∩ X biçiminde yazılır.

Örnekler

0.27. $X = (0, 3]$ ise $(1, 2)$ ve $(2, 3]$ kümeleri X'te açıktır ama $\{3\}$ kümesi X'te açık değildir.

0.28. Eğer $X = (0, 2] \cup \{3\}$ ise $\{3\}$ kümesi X'te açıktır.

Eğer $X = \mathbb{R}$ ise yukarda tanımlanan "$\mathbb{R}$-açık küme" kavramıyla daha önce tanımladığımız "açık küme" kavramlarının aynı olduklarını gözlemleyin.

Alıştırmalar

0.29. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir kümeyse, X'in her altkümesinin X-açık olduğunu kanıtlayın.

0.30. X, $\mathbb{R}$'nin açık bir altkümesi olsun. X-açık kümelerinin $\mathbb{R}$'de de açık olduklarını kanıtlayın.

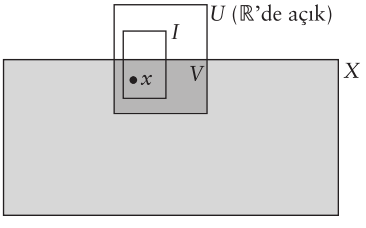
0.31. Eğer X'in bir U altkümesi $\mathbb{R}$'de açıksa, U'nun X-açık olduğunu kanıtlayın.

0.32. $x \in V \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki iki koşulun eşdeğer olduğunu kanıtlayın:
a. V, x'in bir X-komşuluğudur.
b. $x \in U \subseteq V$ özelliklerini sağlayan bir X-açık U kümesi vardır.

Teorem 0.14. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için $\mathbb{R}$'nin tüm açık altkümelerinin önimgelerinin X-açık olması gerek ve yeter koşuldur.*

Teorem 0.14'ü kanıtlamadan önce, aynen Önsav 0.12'de yaptığımız gibi, X'te açık küme olmanın eşdeğer tanımlarını bulalım:

Önsav 0.15. *$V \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki üç önerme eşdeğerdir:*
a. *V, X-açıktır.*
b. *Her $x \in V$ için, $x \in I \cap X \subseteq V$ ilişkilerini sağlayan açık bir I aralığı vardır, yani V, her elemanının bir X-komşuluğudur.*
c. *Her $x \in V$ için, $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap X \subseteq V$ içindeliğini sağlayan bir $\epsilon > 0$ vardır.*



Kanıt: (a $\Rightarrow$ b). $x \in V \subseteq X$ ve V kümesi X-açık olsun. V kümesi X-açık olduğundan, X-açıklığın tanımından dolayı, $\mathbb{R}$'nin, $V = U \cap X$ eşitliğini sağlayan açık bir U altkümesi vardır. Demek ki $x \in U$. Önsav 0.12'ye göre, $x \in I \subseteq U$ özelliklerini sağlayan açık bir I aralığı vardır. Sonuç olarak,

$$x \in I \cap X \subseteq U \cap X = V$$

olur.

(b $\Rightarrow$ c). $x \in V$ olsun. Varsayıma göre,

$$x \in I \cap X \subseteq V$$

ilişkilerini sağlayan açık bir I açık aralığı vardır. I açık bir aralık olduğundan ve x'i içerdiğinden,

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq I$$

içindeliğini sağlayan bir $\epsilon > 0$ vardır. Bu ϵ sayısı için,

$$(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap X \subseteq I \cap X \subseteq V$$

olur.

(c ⇒ a). Her $x \in V$ için,

$$(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \cap X \subseteq V$$

içindeliğini sağlayan bir $\epsilon_x > 0$ seçelim. U, bu

$$(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)$$

aralıklarının bileşimi olsun:

$$U = \bigcup_{x \in X} (x - \epsilon_x, x + \epsilon_x).$$

Açık küme tanımına göre U, $\mathbb{R}$'de açıktır. Bakalım $U \cap X = V$ eşitliği oluyor mu? Eğer $x \in V$ ise,

$$x \in (x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \cap X \subseteq U \cap X$$

olduğundan $V \subseteq U \cap X$ olur. Öte yandan,

$$U \cap X = \left(\bigcup_{x \in X} (x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \right) \cap X = \bigcup_{x \in X} ((x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \cap X) \subseteq V.$$

Demek ki $V = U \cap X$ ve V, X'in açık bir kümesi. □

Teorem 0.14'ün Kanıtı: $f : X \to \mathbb{R}$, sürekli bir fonksiyon olsun. U, $\mathbb{R}$'nin açık bir altkümesi olsun. U'nun önimgesinin X-açık olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Önsav 0.15.b'ye göre, $f^{-1}(U)$ kümesinin, içerdiği her elemanın bir X-komşuluğu olduğunu kanıtlamak yeterli. $x \in f^{-1}(U)$ olsun. $f(x) \in U$ olduğundan, Önsav 0.15.b'ye göre, U, $f(x)$'in bir komşuluğudur. f fonksiyonu x'te sürekli olduğundan, Teorem 0.2'ye göre, $f^{-1}(U)$, x'in bir X-komşuluğudur. Teoremimizin yarısı kanıtlanmıştır.

Şimdi de $\mathbb{R}$'nin açık altkümelerinin önimgelerinin X-açık olduklarını varsayalım. X'ten herhangi bir a elemanı alalım. f'nin a'da sürekli olduğunu göstereceğiz ve bunun için Teorem 0.5'i kullanacağız. V, $f(a)$'nın herhangi bir komşuluğu olsun. $f^{-1}(V)$'nin a'nın bir X-komşuluğu olduğunu göstermemiz gerekiyor. I açık aralığı,

$$f(a) \in I \subseteq V$$

özelliklerini sağlasın. (V, $f(a)$'nın bir komşuluğu olduğundan, komşuluğun tanımından dolayı böyle bir I açık aralığı vardır.) O zaman,

$$a \in f^{-1}(I) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur. Açık aralıklar açık olduklarından, varsayıma göre $f^{-1}(I)$ kümesi X-açıktır. Demek ki Önsav 0.15.b'ye göre,

$$a \in J \cap X \subseteq f^{-1}(I)$$

ilişkilerini sağlayan açık bir J aralığı vardır. Bundan,

$$a \in J \cap X \subseteq f^{-1}(V)$$

bulunur. Demek ki $f^{-1}(V)$, a'nın bir X-komşuluğuymuş. □

Alıştırma 0.33. Teorem 0.14'ü, hiç komşuluklardan sözetmeden, doğrudan açık kümenin tanımına başvurarak kanıtlayın.

Aşağıdaki özellikler X-açık kümelerin "karakteristik özellikleri" olarak kabul edilirler.

Önsav 0.16. i. *$\emptyset$ ve X kümeleri X-açıktır.*
ii. *İki X-açık kümenin kesişimi X-açıktır.*
iii. *X-açık altkümelerin (sonsuz sayıda bile olsa) bileşimi X-açık bir kümedir.*

Kanıt: Kanıt için geniş ölçüde Önsav 0.13'ten yararlanacağız.
i. $\emptyset = \emptyset \cap X$ ve $X = \mathbb{R} \cap X$ olduğundan hem $\emptyset$ hem de X kümesi X-açıktır.
ii. V ve V_1 kümeleri X-açık olsunlar. U ve U_1 altkümeleri, $\mathbb{R}$'nin,

$$V = U \cap X \text{ ve } V_1 = U_1 \cap X$$

eşitliğini sağlayan açık altkümeleri olsunlar. O zaman,

$$V \cap V_1 = (U \cap X) \cap (U_1 \cap X) = (U \cap U_1) \cap X$$

olur. Önsav 0.13.ii'ye göre $U \cap U_1$ kümesi $\mathbb{R}$'nin açık altkümesi olduğundan, bu eşitliğe göre $V \cap V_1$ kümesi X-açıktır.
iii. $(V_a)_{a\in A}$, X-açık kümelerden oluşan bir aile olsun. Her $a \in A$ için, $\mathbb{R}$'nin U_a açık kümesi,

$$V_a = U_a \cap X$$

eşitliğini sağlasın. O zaman,

$$\bigcup_{a\in A} V_a = \bigcup_{a\in A} (U_a \cap X) = \left(\bigcup_{a\in A} U_a\right) \cap X$$

olur. Önsav 0.13.iii'e göre, $\bigcup_{a\in A} U_a$ kümesi $\mathbb{R}$'nin açık altkümesi olduğundan, bulunan eşitliğe göre $\bigcup_{a\in A} V_a$ kümesi X-açıktır. □

Alıştırmalar

0.34. $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Boşkümenin $\mathbb{R}$'de açık olduğunu biliyoruz. Demek ki X'in $\mathbb{R}$-açık altkümeleri var. X'in tüm $\mathbb{R}$-açık altkümelerinin bileşimini alacak olursak, X'in gene $\mathbb{R}$-açık bir altkümesini buluruz. Dolayısıyla bu bileşim X'in $\mathbb{R}$-açık en büyük altkümesidir. Bu kümeyi X° olarak gösterebiliriz. $(0,1]^\circ = (0,1)$, $\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$ ve $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ eşitliklerini kanıtlayın.

0.35. $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $V \subseteq X$ olsun. Önsav 0.3.iv'te sözü edilen

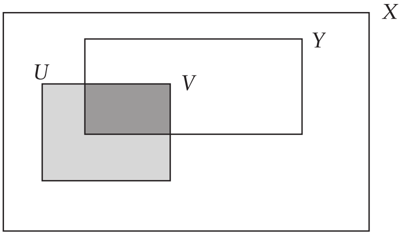
$$V^\circ = \{a \in V : V,\ a\text{'nın bir } X\text{-komşuluğu}\}$$

kümesinin X-açık olduğunu kanıtlayın. V° kümesinin V'nin X-açık olan en büyük altkümesi olduğunu kanıtlayın. (Bkz. bir üstteki alıştırma.)

0.36. $a \in V \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Şu önermelerin eşdeğer olduklarını kanıtlayın:
a. V, a'nın bir X-komşuluğudur.
b. $a \in U \subseteq V \subseteq X$ ilişkilerini sağlayan X-açık bir U kümesi vardır.

Açık aralıklar sayesinde sürekliliği ϵ ve δ'dan kurtardık. Bunca çabanın getirilerini üç vakte kadar göreceğiz. Önce bir önsav.

Önsav 0.17. *$Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Y-açık her küme X-açık bir kümeyle Y'nin kesişimidir.*



Kanıt: V, Y-açık olsun. O zaman $\mathbb{R}$'nin açık bir U altkümesi için $V = U \cap Y$ olur. $U \cap X$, X-açıktır ve

$$V = U \cap Y = (U \cap X) \cap Y$$

eşitliği barizdir.

Şimdi tam tersine V, X-açık olsun. O zaman $\mathbb{R}$'nin açık bir U altkümesi için $V = U \cap X$ olur.

$$V \cap Y = (U \cap X) \cap Y = U \cap (X \cap Y) = U \cap Y$$

olduğundan, $V \cap Y$ kümesi Y-açıktır. $\square$

Eğer $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu değerlerini Y kümesinde alıyorsa, yani $f(X) \subseteq Y$ ise, o zaman f'yi X'ten Y'ye giden bir fonksiyon olarak da görebiliriz. Teorem 0.14'le aşağıdaki teorem arasında hiçbir ayrım yoktur, ikisi de aynı şeyi söylemektedir:

Teorem 0.18. *$X \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul şudur: Her Y-açık kümenin önimgesi X-açıktır.*

Kanıt: Önce f'nin sürekli olduğunu varsayalım. V, Y-açık olsun. Önsav 0.17'ye göre, $\mathbb{R}$'nin,

$$V = U \cap Y$$

eşitliğini sağlayan açık bir U altkümesi vardır. Demek ki,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap Y) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(U)$$

olur. Teorem 0.14'e göre $f^{-1}(U)$, X-açıktır.

Şimdi her Y-açık kümenin önimgesinin X-açık olduğunu varsayalım. U, $\mathbb{R}$'nin bir açık altkümesi olsun.

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cap Y)$$

olur. $U \cap Y$, Y-açık olduğundan, varsayıma göre, $f^{-1}(U \cap Y)$, X-açıktır, yani $f^{-1}(U)$ kümesi X-açıktır. Dolayısıyla f süreklidir. □

Yani süreklilikte fonksiyonun değer kümesinin belirtilmesinin bir önemi yoktur.

Şimdi, daha önce kanıtladığımız bir teoremin bu dilde bir kanıtını verelim. Kanıtın kolaylığı okuru çarpacaktır diye umuyoruz.

Sonuç 0.19. *X, $Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ ve $g : Y \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer f ve g fonksiyonları sürekliyse, o zaman $g \circ f$ fonksiyonu da süreklidir.*

Kanıt: W, $\mathbb{R}$'nin açık bir altkümesi olsun. O zaman Teorem 0.14'e göre $g^{-1}(W)$ kümesi Y-açıktır. Teorem 0.18'e göre

$$f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$$

kümesi X-açıktır. □

Ama dikkat, açık bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında imgesi açık olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sabit a fonksiyonu süreklidir ama $\mathbb{R}$'nin $\{a\}$ kümesi açık değildir.

0.2.3 $\mathbb{R}$'nin Açık Altkümelerinin Sınıflandırılması

Teorem 0.20. *$\mathbb{R}$'nin her açık altkümesi sayılabilir sayıda ayrık açık aralığın bileşimidir.*

Kanıt: $U \subseteq \mathbb{R}$ bir açık küme olsun. Eğer x, $y \in U$ ise şu tanımı yapalım: x, y'ye denktir ancak ve ancak bir I açık aralığı için $x, y \in I \subseteq U$ oluyorsa.

Kolayca görülebileceği üzere bu bir denklik ilişkisidir [N1].

Şimdi her denklik sınıfının bir aralık olduğunu gösterelim. $x \in U$ olsun. x'in sınıfını $[x]$ olarak gösterelim. $[x]$'in bir aralık olduğunu göstermek için her $y, z \in [x]$ ve y ile z arasındaki her t için t'nin de $[x]$ sınıfında olduğunu göstermeliyiz. Bunun kanıtı çok kolaydır.

U, ayrık denklik sınıflarının bileşimi olduğundan, U'nun ayrık aralıkların bileşimi olduğunu göstermiş olduk. $[x]$ bu ayrık aralıklardan biri olsun. $[x]$ aralığının uç noktalarından birini, diyelim a'yı içerdiğini varsayalım. O zaman a ile x denktir ve hem a'yı hem de x'i içeren bir I açık aralığı vardır. Ama bir $\epsilon > 0$ için $a \pm \epsilon \in I$ olduğundan, $a \pm \epsilon \in [x]$ çıkar ve bu da a'nın uç nokta olmasıyla çelişir.

Demek ki U ayrık açık aralıkların bileşimi. Her ayrık açık aralıkta bir kesirli sayı olduğundan ve kesirli sayılar kümesi sayılabilir olduğundan, U ancak sayılabilir sayıda açık aralığın bileşimidir. □

Açık kümelerin tümleyeni için benzer önerme (az buz değil) çok yanlıştır. Örnek için okur daha şimdiden Bölüm 19'daki Cantor kümelerine bakabilir.

Aşağıdaki sonuç da yukardaki teoremin kanıtı gibi $\mathbb{R}$'nin içinde yaşayan $\mathbb{Q}$'nün önemini gösteriyor:

Teorem 0.21 (Lindelöf)**.** *$\mathcal{U}$, $\mathbb{R}$'nin açık kümelerinden oluşan bir küme olsun. O zaman $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$ eşitliğini sağlayan sayılabilir bir $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ altkümesi vardır.*

Kanıt: $x \in \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ olsun. O zaman $x \in I_x \subseteq U$ içindeliklerini sağlayan bir I_x açık aralığı ve bir $U \in \mathcal{U}$ kümesi vardır. Gerekirse biraz daha küçülterek I_x'in uç noktalarının kesirli sayı olduklarını varsayabiliriz. Dolayısıyla bu I_x açık aralıklarından sayılabilir sayıda vardır. Bundan böyle bu I_x açık aralıklarını doğal sayılarla J_n olarak kodlayalım. Her n için J_n'yi kapsayan bir $U_n \in \mathcal{U}$ seçelim. Elbette,

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = \bigcup_x I_x = \bigcup_n J_n = \bigcup_n U_n$$

olur. □

Alıştırma 0.37. X sayılabilir bir küme olsun. X'in altkümelerinden oluşan ve sayılamaz sonsuzlukta olan öyle bir $(U_i)_i$ küme ailesi bulun ki, her $i \neq j$ için ya $U_i \subset U_j$ ya da $U_j \subset U_i$ olsun. İpucu: $X = \mathbb{Q}$ varsayımını yapabilirsiniz.

Kısım I

Topoloji

1. Topolojik Uzay

Geçen bölümde $\mathbb{R}$'nin, adına "açık" dediğimiz bazı altkümelerini tanımladık ve bir fonksiyonun sürekliliğini tamamen açık kümeler yardımıyla (hiç ϵ ve δ kullanmadan) ifade ettik. Böylece bir fonksiyonun sürekliliğini kümeler kuramı seviyesine indirdik. Aynı şeyi bugüne kadar analizde tanımladığımız hemen hemen her kavram için yapabiliriz. Böylece analitik kavramları fiziksel dünya olarak niteleyebileceğimiz $\mathbb{R}$'den kurtarıp, bu kavramları çok daha soyut ve genel bir evrene genelleştirebiliriz. Her ne kadar yapacaklarımız uç seviyede soyutsa da, kanıtları kolaylaştırdığından ve daha genel olduklarından çok daha fazla uygulamaya izin verir. Güzelliği de cabası.

1.1 Tanım ve Örnekler

Geçen bölümde, $\mathbb{R}$'nin bir X altkümesi için, X'in "açık altküme"lerini bir biçimde tanımlamış ve Önsav 0.16'da bu açık altkümelerin şu özellikleri sağladıklarını kanıtlamıştık:

X1. $\emptyset$ ve X kümeleri açıktır.

X2. İki açık kümenin kesişimi açıktır.

X3. Açık kümelerin bileşimi açıktır.

Şimdi, herhangi bir X kümesi verilmiş olsun. X'in yukardaki gibi $\mathbb{R}$'nin bir altkümesi olması filan gerekmiyor, herhangi bir küme olabilir. (Topolojinin güzelliği de işte tam burada.) X'in bazı altkümelerine "açık" adını verelim ve açık dediğimiz bu altkümelerin yukardaki X1, X2, X3 özelliklerini sağladıklarını varsayalım. O zaman X üzerinde bir "***topoloji***" tanımlanmış olur. Eğer τ, elemanları, adına açık adını verdiğimiz kümelerden oluşan kümeyse, (X, τ) çiftine ***topolojik uzay*** denir. Tanımı daha matematiksel verelim:

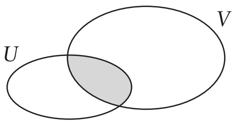
X herhangi bir küme olsun. X'in altkümelerinin kümesini $\wp(X)$ ile simgelediğimizi anımsatalım. $\tau \subseteq \wp(X)$ olsun. Yani τ, elemanları X'in bazı altkümeleri olan bir küme olsun. τ'nun şu özellikleri sağladığını varsayalım:

T1. $\emptyset$, $X \in \tau$.

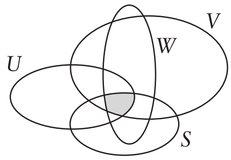
T2. Eğer U, $V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$.

T3. Eğer her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

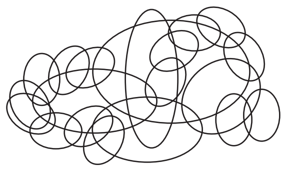
Çoğu zaman τ'nun ne olduğu konunun gelişinden bellidir; o zaman, (X, τ) çifti yerine sadece X'in kendisine ***topolojik uzay*** denir.



U ve *V* açıksa *U* ∩ *V* de açıktır.



Dolayısıyla, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.



Sonlu ya da sonsuz, kaç tane olursa olsun, açık kümelerin bileşimi hep açıktır.

Bir X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlamak demek, X'in açık kümelerini bir biçimde belirlemek demektir. Açık adı verilen bu kümeler X1, X2, X3 özelliklerini sağlamalıdırlar.

Bir önceki bölümde $\mathbb{R}$ üzerinde tanımladığımız topolojiye ***Öklid topolojisi*** adı verilir. O topolojide, açık kümeler açık aralıkların bileşimi olarak tanımlanmıştı. $\mathbb{R}$ üzerinde ya da herhangi bir X kümesi üzerinde çok farklı topolojiler tanımlayabiliriz. Birazdan birçok farklı örnek sunacağız. Eğer $\mathbb{R}$'nin bir X altkümesinden, durduk yerde, topolojik uzay olarak bahsediliyorsa, bu, X üzerine Öklid topolojisi alınmış demektir.

İki açık kümenin kesişimi açık olduğundan, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır. Bu, açık küme sayısı üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. Ama sonsuz sayıda açık kümenin kesişimi açık olmayabilir, örneğin, Öklid topolojisinde

$$\bigcap_{\epsilon>0}(-\epsilon, \epsilon) = \{0\}$$

olur ve tek elemanlı kümeler bu topolojide açık değillerdir (elbette).

Aşağıdaki önsav basit ama son derece kullanışlıdır.

Önsav 1.1. *X bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y'nin açık olması için her $y \in Y$ için, $y \in U_y \subseteq Y$ içindeliklerini sağlayan açık bir U_y altkümesi olması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Eğer U açıksa her $y \in U$ için $U_y = U$ almak yeterli. Diğer istikamet: $U = \bigcup_{y \in Y} U_y$ olduğundan, U açıktır. □

Eğer τ_1 ve τ_2, X üzerine birer topolojiyse ve $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise, τ_1'e τ_2'den daha ***kaba***, τ_2'ye τ_1'den daha ***ince*** topoloji denir.

Şimdi topolojik uzay örneklerine geçelim. Örneklerin çeşitliliği konunun zenginliğine delalettir. Aşağıdaki örneklerde X herhangi bir küme olabilir.

Örnekler

1.1. $\tau = \{\emptyset, X\}$ olsun. Bu, kolayca görüleceği üzere X üzerinde bir topolojidir. Pek fazla açık kümesi olmadığından, hatta T1'den dolayı olabilecek en az sayıda açık kümesi olan bu topolojiye ***en kaba topoloji*** (yani X'in en kaba topolojisi) adı verilir. Eğer X boşkümeyse ya da tek bir elemanı varsa, o zaman X üzerinde bu topolojiden başka topoloji yoktur.

1.2. En kaba topolojiyle zıt konumda olan ve adına ***ayrık topoloji*** denen bir de en ince ya da en zengin topoloji vardır. Bu topolojide X'in her altkümesinin açık olduğuna hükmedilir, yani τ kümesi $\wp(X)$ kümesine eşit alınır. $\wp(X)$'in T1, T2 ve T3 özelliklerini sağladığı çok belli.

1.3. X'in tümleyeni sonlu olan altkümelerine açık adını verelim. Bir de ayrıca boşkümeye açık diyelim. O zaman X üzerinde bir topoloji tanımlamış oluruz. Eğer X sonluysa, bu topoloji aynen bir önceki paragrafta tanımlanan en ince topolojidir. Ama eğer X sonsuzsa (mesela $X = \mathbb{Z}$ ya da $\mathbb{R}$ ise), o zaman bambaşka ve oldukça ilginç bir topoloji elde ederiz. Bu topolojiye ***sonlu tümleyenler topolojisi***, bazen de ***Fréchet topolojisi*** ("freşe" okunur) adı verilir.

1.4. A, X'in herhangi bir altkümesi olsun. $\tau = \{\emptyset, A, X\}$ olsun. Bu da X üzerinde topolojik bir yapı belirler. En fazla üç açık kümesi olduğundan, oldukça fakir bir topoloji olduğunu söyleyebiliriz. Bu topoloji, ayrıca A kümesinin açık olduğu X'in en kaba topolojisidir.

1.5. A ve B, X'in herhangi iki altkümesi olsun. $\tau = \{\emptyset, A, B, A \cap B, A \cup B, X\}$ olsun. Bu da X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji A ve B kümelerinin açık olduğu X'in en kaba topolojisidir.

1.6. A, B ve C, X'in herhangi üç altkümesi olsun. Bu altkümelerin açık olduğu en küçük topolojiyi bulalım. Biraz daha zorlanacağız. τ, tabii ki X'in

$$\emptyset,\ A,\ B,\ C \text{ ve } X$$

altkümelerini içermeli, yani bu kümeler tanımlayacağımız topolojide açık olmalı. Ama, topolojimiz, A, B, C altkümelerinin

$$A \cap B,\ B \cap C,\ C \cap A,\ A \cap B \cap C$$

kesişimlerini de içermeli, çünkü ne de olsa sonlu sayıda açık kümenin kesişimi gene açık olmalı. Topolojimiz bu altkümeleri içerdiği gibi şimdiye kadar bulduğumuz açık kümelerin bileşimlerini de içermeli, yani,

$$\begin{aligned}
&A \cup B,\ B \cup C,\ C \cup A,\\
&A \cup (B \cap C),\ B \cup (C \cap A),\ C \cup (A \cap B),\\
&(A \cap B) \cup (B \cap C),\ (B \cap C) \cup (C \cap A),\ (C \cap A) \cup (A \cap B),\\
&(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\\
&A \cup B \cup C
\end{aligned}$$

altkümelerini de içermeli. Yanlış saymadıysak toplam 20 küme etti. Bu kadarı yetiyor. Yukardaki 20 küme X üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojinin X'in A, B ve C altkümelerinin açık olduğu en kaba topoloji olduğu besbelli.

1.7. $A \subseteq X$ ve $\tau = \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. τ, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojide, boşküme dışında, A ve A'yı içeren altkümeler açıktır, diğerleri değildir.

1.8. $(X, \leq)$ bir tamsıralama olsun [N3]. Yani $\leq$ ikili ilişkisi her $x, y, z \in X$ için, şu özellikleri sağlasın:

$$\begin{aligned}
&x \leq x,\\
&x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y,\\
&x \leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z.
\end{aligned}$$

$$x \leq y \text{ ya da } y \leq x.$$

Örneğin $X = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ olabilir ve sıralama bildiğimiz, ilkokuldan beri aşina olduğumuz sıralama olabilir, ya da X bir ordinal ya da kardinal olabilir. a, $b \in X$ için,

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$
$$(a, \infty) = \{x \in X : a < x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\}$$

ve $(-\infty, \infty) = X$ tanımlarını yapalım. (Burada $x < y$, "$x \leq y$ ve $x \neq y$" anlamına gelmektedir.) Bunlara ***açık aralık*** diyelim. Açık aralıkların bileşimi olarak yazılan kümelere de "açık küme" diyelim. Böylece X üzerinde bir topoloji tanımlanmış olur. Bu topolojiye $\leq$ sıralaması tarafından üretilmiş ***sıralama topolojisi*** denir. $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisiyle bilinen sıralamasıyla üretilen sıralama topolojisi aynı topolojidir.

1.9. (Sayılabilir tümleyenler topolojisi) X herhangi bir küme olsun. (Ama X'i $\mathbb{R}$ gibi sayılamaz sonsuzlukta bir küme alırsak daha iyi ederiz, yoksa ilginç bir örnek elde etmeyiz.) X'in, tümleyeni sayılabilir sonsuzlukta olan altkümelerine açık adını verelim. Bir de boşkümeye açık diyelim. O zaman X üzerinde bir topoloji tanımlamış oluruz ve bu topoloji Örnek 1.3'te tanımlanan sonlu tümleyenler topolojisinden daha incedir, yani sonlu tümleyenler topolojisinde açık olan her küme bu topolojide de açıktır. Bu topolojide sayılabilir sonsuzluktaki açık kümenin kesişimi gene açıktır (ki bu özellik mesela $\mathbb{R}$'de doğru değildir). Bu topolojiyi elbette başka kardinalitelere de genelleştirebiliriz.

1.10. (İndirgenmiş Topoloji) X bir topolojik uzay olsun. $Y \subseteq X$ bir altküme olsun. Y üzerine şöyle bir topoloji tanımlayalım: $V \subseteq Y$ "açık"tır ancak ve ancak X'in açık bir U kümesi için $V = Y \cap U$ oluyorsa. Yani Y'nin açık kümeleri X'in açık kümeleriyle Y'nin kesişimi olsun. Bunun gerçekten bir topoloji tanımladığını ilerde göreceğiz (Bölüm 5) ama okur şimdiden bu tanımın Y üzerine bir topoloji yarattığını kanıtlamalıdır. Eğer $X = \mathbb{R}$ Öklid topolojisiyle donatılmışsa ve $Y \subseteq \mathbb{R}$ ise, Y üzerine böylece elde edilen topolojiye de ***Öklid topolojisi*** diyeceğiz.

1.11. Eğer X bir topolojik uzaysa ve f fonksiyonu X ile bir Y kümesi arasında bir eşlemeyse, o zaman X'in topolojisini f eşlemesini kullanarak Y'ye taşıyabiliriz. Örneğin $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ ve $x \neq 0, 1$ için $f(x) = x$ olarak tanımlanmışsa, bu yöntemle $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisi $\mathbb{R}$'nin bir başka topolojisine dönüşür. Bu yeni topolojide $(-1, 0) \cup (0, 1]$ kümesi ($(-1, 1)$ açık aralığının f altında imgesi olduğundan) açıktır. Ve mesela $(1/n)_n$ dizisi bu topolojide 0'a değil 1'e yakınsar. (Topolojik uzaylarda limit kavramını daha sonra göreceğiz.) (Bu tür patolojik örnekler konuyu daha iyi özümsememizi sağlayacaktır, bu örneklerin bunun dışında bir yararı yoktur.)

Alıştırmalar

1.12. X bir küme olsun. X üzerinde bir topolojinin en ince topoloji olması için, X'in tek elemanlı altkümelerinin açık olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

1.13. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $[x, \infty)$ aralığının $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde açık olmadığını kanıtlayın.

1.14. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $X \subseteq Y$ olsun. $\tau \cup \{Y\}$ kümesinin Y üzerinde bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.

1.15. İki (üç) elemanlı bir küme üzerinde kaç değişik topoloji vardır?

1.16. $X = \mathbb{R}$ olsun. $a \in \mathbb{R}$ için (a, ∞) türünden aralıklara "açık" diyelim. Bir de X açık olsun tabii. Bunun Öklid topolojisinden daha kaba bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.

1.17. $X = \mathbb{R}$ olsun. a, $b \in \mathbb{R}$ sayıları için $[a, b)$ türünden aralıklarının bileşimi olan kümelere "açık" diyelim. Bir de X açık olsun tabii. Bunun bir topoloji tanımladığını ve Öklid topolojisinden daha ince olduğunu kanıtlayın.

1.18. X topolojik bir uzay ve A, X'in herhangi bir altkümesi olsun. X üzerinde yeni bir topoloji tanımlayacağız. Bu yeni topolojide, eski topolojide açık olan bir U kümesi için

$U \cup A$ biçiminde yazılan kümelere açık diyelim. Bir de boşküme açık olsun. Bunun gerçekten bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.

1.19. X topolojik bir uzay ve Y herhangi bir küme olsun. f, X'ten Y'ye giden bir fonksiyon olsun. $V \subseteq Y$ için, eğer $f^{-1}(V)$, X'in açık bir altkümesiyse, V'ye açık diyelim. Böylece Y üzerinde bir topoloji tanımlandığını kanıtlayın.

1.20. $X = \{x, y, z\}$ ve $Y = \{a, b\}$ olsun. $f : X \to Y$ fonksiyonu şöyle tanımlansın:

$$f(x) = a,\ f(y) = b,\ f(z) = b.$$

Y üzerine en kaba topolojiyi alalım. $U = \{x, y\}$ ve $V = \{x, z\}$ olsun. $f(U)$ ve $f(V)$'nin Y'nin açık kümeleri olduklarını ama $f(U \cap V)$'nin açık küme olmadığını gösterin. Demek ki bu örnekte "$f(U)$ açıksa U açıktır" tanımını yapmak X üzerinde bir topoloji vermiyor. (Bir önceki ve bir sonraki soruyla karşılaştırın.) Ama eğer f birebirse bu yöntem X üzerinde bir topoloji verir; kanıtlayın.

1.21. X bir küme, Y bir topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bir $V \subseteq Y$ açık altkümesi için X'in $f^{-1}(V)$ biçiminde yazılan altkümelerine açık diyelim. Bu, X üzerinde bir topoloji tanımlar mı?

1.22. X bir küme olsun. τ_1 ve τ_2, X üzerinde iki topoloji olsun. $\tau_1 \cap \tau_2$'nin de X üzerinde bir topoloji olduğunu kanıtlayın. Aynı sonuç bileşim için yanlıştır elbet.

1.23. X üzerinde verilmiş bir topoloji ailesinin kesişiminin de X üzerinde bir topoloji olduğunu kanıtlayın.

1.24. $\mathbb{R}$ üzerinde yeni bir topoloji tanımlayacağız. Bu topolojinin açık kümeleri, Öklid topolojisinde açık olan bir U kümesi için, $U \cup -U$ biçiminde yazılan kümelerdir. Burada $-U = \{v : -v \in U\}$ anlamına gelmektedir. Bu tanımın Öklid topolojisinden daha kaba bir topoloji verdiğini kanıtlayın.

1.25. X bir küme ve $(\tau_i)_i$, X üzerine bir topoloji ailesi olsun. $\bigcap_i \tau_i$ kesişiminin de X üzerine bir topoloji olduğunu kanıtlayın.

1.2 Altkümelerin İçi

X bir topolojik uzay ve A, X'in bir altkümesi olsun. A'nın, X'in topolojisinde açık olan en az bir altkümesi vardır: $\emptyset$. Başkaları da olabilir. A'nın X'te açık olan tüm altkümelerinin bileşimini alalım. Bu bileşim elbette gene açıktır ve elbette gene A'nın bir altkümesidir, dolayısıyla A'nın (kapsama açısından) en büyük açık altkümesidir. A° olarak yazılan bu bileşime A'nın ***içi*** denir:

$$A^\circ = \bigcup_{U \subseteq B,\, U \text{ açık}} U.$$

Ana teoremi yazmadan önce birkaç örnek verelim. Alıştırmalarda daha çok örnek olacak.

Örnekler

1.26. En kaba topolojide eğer $A \neq X$ ise, $A^\circ = \emptyset$ olur. Ayrık topolojide hep $A^\circ = A$ olur. Her X topolojik uzayında $X^\circ = X$ ve $\emptyset^\circ = \emptyset$ olur.

1.27. $A \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir kümeyse, Öklid topolojisinde $A^\circ = \emptyset$ olur. Ayrıca, $\mathbb{Z}^\circ = \mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$ ve $(0, 1]^\circ = [0, 1)^\circ = [0, 1]^\circ = (0, 1)$ olur.

Teorem 1.2. *X bir topolojik uzay ve A, X'in bir altkümesi olsun. A'nın (X'in topolojisinde) açık olan en büyük bir ve bir tane altkümesi vardır. Eğer bu altkümeyi A° olarak yazarsak, şu özellikler sağlanır:*
i. *$A^\circ \subseteq A$.*
ii. *A° açıktır.*
iii. *Eğer $U \subseteq A$ ise ve U açıksa, o zaman $U \subseteq A^\circ$ olur.*
iv. *A'nın açık olması için, $A^\circ = A$ eşitliği gerek ve yeter koşuldur. Dolayısıyla $A^{\circ\circ} = A^\circ$ olur.*
v. *Eğer $B \subseteq A$ ise $B^\circ \subseteq A^\circ$ olur.*
vi. *$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.*
vii. *$\bigcup_{i\in I} A_i^\circ \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$.*
viii. *$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.*

Kanıt: $A^\circ = \bigcup_{U\subseteq A \text{ ve } U \text{ açık}} U$ olsun. Bu kümenin açık olduğu ve A'nın en büyük açık altkümesi olduğu çok bariz, ne de olsa hepsinin bileşimini aldık. (i, ii, iii) de çok bariz, A°'ın tanımından çıkıyor.

iv. Eğer $A^\circ = A$ ise, (ii)'den dolayı A açıktır. Eğer A açıksa, A'nın en büyük açık altkümesi ancak A olabilir, dolayısıyla $A^\circ = A$ eşitliği doğru olmak zorundadır.

v. $B^\circ \subseteq B \subseteq A$ içindeliklerinden ve (ii)'den dolayı, B°, A'nın açık bir altkümesidir. (iii)'ten dolayı da $B^\circ \subseteq A^\circ$ olur.

vi. $A^\circ \subseteq A$ ve $B^\circ \subseteq B$ olduğundan, $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$ olur. Ama, iki açık kümenin kesişimi olduğundan $A^\circ \cap B^\circ$ açıktır. Demek ki $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. Ters içindeliği kanıtlayalım:

$$A \cap B \subseteq A \text{ ve } A \cap B \subseteq B$$

olduğundan, (v)'e göre

$$(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \text{ ve } (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$$

olur. Demek ki $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$.

vii. $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ$ kümesi, $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesinin açık bir altkümesidir, dolayısıyla iddia edilen içindelik doğrudur.

viii. $\bigcap A_i \subseteq A_i$ olduğundan, (v)'e göre, $\left(\bigcap A_i\right)^\circ \subseteq A_i^\circ$ olur. Şimdi i üzerine kesişim alınırsa istenen içindelik bulunur. □

(vii)'deki içindelik eşitlik olmayabilir. Örneğin $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde $\bigcup_{i\in\mathbb{R}} \{i\}^\circ = \emptyset$ ama $\left(\bigcup_{i\in\mathbb{R}} \{i\}\right)^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$ olur.

Alıştırmalar

1.28. Teorem 1.2.viii'de eşitliğin doğru olmayabileceğini gösterin.

1.29. Sonlu tümleyenler topolojisinde her A altkümesi için $A^\circ = A$ ya da $A^\circ = \emptyset$ eşitliklerinden birinin doğru olduğunu kanıtlayın. Bu önermenin doğru olduğu topolojiler hakkında ne söyleyebilirsiniz?

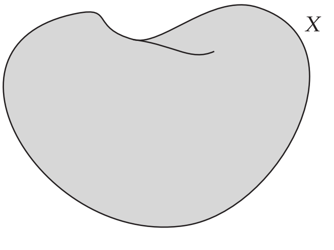
1.30. Her topolojik uzayda, $B^\circ \subseteq A \subseteq B$ ise $A^\circ = B^\circ$ eşitliğini kanıtlayın.

2. Topolojik Uzaylarda Diziler ve Limitleri

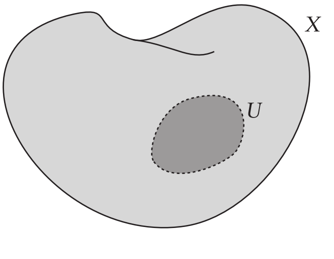
Okur gerçel sayı dizileri ve limitleriyle haşır neşir olmalı. (Aksi halde [N4]'i öneriririz.) Bu bölümde bu kavramları gerçel sayılardan herhangi bir topolojik uzaya genelleyeceğiz ve böylece topoloji kavramıyla biraz daha yakından tanışmış olacağız.

2.1 Topolojik Uzaylarda Dizilerin Limitleri

X, herhangi bir topolojik uzay olsun. Düşüncelerimizi somutlaştırmak için X'i şöyle bir yüzey olarak resmedelim:

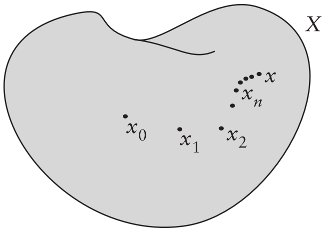


X'in açık altkümelerini de X'in sınırlarını içermeyen (gene yüzeysel) bölgeleri olarak düşünebiliriz.



Bu resmi sadece topolojik bir uzayı somutlaştırmak, daha kolay hayal edebilmek amacıyla yapıyoruz, herhangi bir gerçekliği işaret ettiğinden değil. (Öte yandan bu resimler bir gerçekliği de işaret ederler: İçinde yaşadığımız üç boyutlu Öklid uzayındaki yüzeyler ilerde göreceğimiz üzere topolojik uzaylardır ve açık altkümeleri gerçekten sınırlarını içermeyen kümelerdir; "sınır" kavramını münasip bir biçimde genellersek, bu daha da genel olarak doğrudur; bkz. Alıştırma 8.34.)

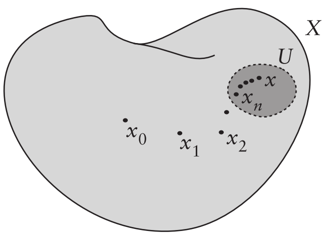
$(x_n)_n$, terimleri X'te olan bir dizi olsun. Ayrıca x, X'in bir elemanı olsun. x'in $(x_n)_n$ dizisinin bir limiti olmasının ne demek olduğunu göreceğiz. Temsilî resim aşağıda.



Tanım. *Eğer X'in x'i içeren **her** açık kümesi için, dizinin terimleri bir zaman sonra **hep** bu açık kümenin içinde oluyorsa, x'in dizinin bir **limiti** olduğu söylenir. Tanımı daha net ifade edelim: Eğer x'i içeren **her** U açık kümesi için,*

$$x_n \in U$$

*içindeliğinin **her** $n > N$ için sağlandığı bir N göstergeci varsa, x'e $(x_n)_n$ dizisinin bir **limiti** denir. Bazen de $(x_n)_n$ dizisinin x'e **yakınsadığı** söylenir.*



Tanımdaki U açık kümesi ne kadar "küçük" olursa, $(x_n)_n$ dizisini U'nun içine sokmak o kadar güçtür elbet. Yani eğer tanımdaki koşul bir U açık kümesi için doğruysa, koşul U'yu içeren her açık küme için de doğrudur (aynı N göstergeci işi görür). Asıl maharet, koşulun "küçük" açık kümeler için doğru olduğunu kanıtlamaktır.

Örnekler

2.1. **Zamanla Sabitleşen Diziler.** X herhangi bir topolojik uzay ve $(x_n)_n$, terimleri bir zaman sonra sabitleşen, yani belli bir $x \in X$ elemanı için $x_n = x$ eşitliğinin her $n > N$ için sağlandığı bir N göstergecinin bulunduğu bir dizi olsun. O zaman $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsar. Elbette!

Dikkat! Topolojik uzaylarda bir dizi birden fazla elemana yakınsayabilir, dizi sabit dizi olsa bile. Böyle bir örneği aşağıda göreceğiz.

2.2. **En Kaba Topolojilerde Yakınsaklık.** X bir küme olsun ve X üzerinde en kaba topolojiyi alalım. O zaman her dizi her elemana yakınsar! Nitekim kaba topolojide, belli bir x elemanını içeren tek bir açık küme vardır: X'in kendisi! Dolayısıyla tanımdaki N göstergecini 0'a eşit alabiliriz!

Okurun daha şimdiden hissedebileceği gibi, bir topoloji ne kadar zenginse ya da inceyse, yani bir topolojinin ne kadar fazla açık kümesi varsa, bir dizinin yakınsaması o kadar zordur. Şimdi, topolojiler yelpazesinde en kaba topolojinin zıt ucunda yer alan en ince topolojide yakınsaklığı irdeleyelim.

2.3. **Ayrık Topolojilerde Yakınsaklık.** X bir küme olsun ve X üzerinde ayrık topolojiyi alalım, yani X'in her altkümesi açık olsun. O zaman bu topolojide sadece zamanla sabitleşen diziler yakınsar ve sadece zamanla yakınsadıkları elemana yakınsarlar. Nitekim, eğer $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsıyorsa, tanımdaki U açık kümesini $\{x\}$ kümesine eşit alalım. $(x_n)_n$ dizisi bir zaman sonra $\{x\}$ kümesinin içine gireceğinden, dizi zorunlu olarak o aşamadan sonra x'e eşit olur.

Görüldüğü gibi en kaba ve en ince (ayrık) topolojiler, en azından yakınsamak açısından bakıldığında, pek o kadar ilginç değiller. Birinde her dizi her elemana yakınsıyor, diğerinde sadece zamanla sabitleşen diziler zamanla sabitleştikleri elemana yakınsıyor.

2.4. **Öklid Topolojisinde Yakınsaklık.** Okur, daha önce gördüğü [N4] gerçel sayı dizilerinin yakınsaklık kavramıyla $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde tanımlanan yakınsaklık kavramının aynı kavramlar olması gerektiğini düşünüyordur haklı olarak. Bu doğrudur ve kanıtı da basittir. Basit kanıtı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

2.5. X bir küme ve A, X'in bir altkümesi olsun. X'in açık kümeleri $\emptyset$, A ve X olsun. Bu topolojide bakalım ne zaman bir $(x_n)_n$ dizisi bir x elemanına yakınsıyor. Yakınsaklık kavramı x'i içeren açık kümelerle ilgili olduğundan, analizini iki şıkka ayırmalıyız: $x \notin A$ ya da $x \in A$. Birinci şıkta x'i içeren tek açık küme X'tir, dolayısıyla dizi x'e yakınsar. İkinci şıkta x'i içeren iki açık küme vardır: A ve X. Ama $A \subseteq X$ olduğundan, yakınsaklığın tanımındaki U açık kümesinin A'ya eşit olduğunu varsayabiliriz. Dizi bir zaman sonra A'nın içine girmeli, yani öyle bir N göstergeci olmalı ki, her $n > N$ için, $x_n \in A$ olmalı. Sonuç: Zamanla A'nın içine düşen diziler X'in her elemanına yakınsarlar. Diğer diziler ise $X \setminus A$'nın her elemanına yakınsarlar. Ve başka da bir yakınsaklık olamaz.

2.6. **Sonlu Tümleyenler Topolojisinde Yakınsaklık.** X sonsuz bir küme olsun ve X üzerinde sonlu tümleyenler topolojisini alalım (yani sadece boşküme ve tümleyeni sonlu olan kümeler açıktır). X'in belli bir x elemanına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. x'i içeren herhangi bir U açık kümesi x'ten değişik $a_1, \ldots, a_m \in X$ elemanları için

$$U = X \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$$

biçiminde yazılabilir. Demek ki, dizi bir zaman sonra bu açık kümede olmak zorundadır, yani bir zaman sonra dizide $a_1, \ldots, a_m$ elemanlarından hiçbiri olamaz. Demek ki x dışında bir eleman sonsuz defa tekrarlanıyorsa, o zaman dizi x'e yakınsayamaz. Sonuç: 1. Eğer dizinin hiçbir elemanı sonsuz kez tekrarlanmıyorsa, o zaman dizi her elemana yakınsar. 2. Eğer dizide tek bir eleman sonsuz kez tekrarlanıyorsa, o zaman dizi sadece sonsuz defa tekrarlanan bu elemana yakınsar. 3. Eğer dizide birden fazla eleman sonsuz kez tekrarlanıyorsa, o zaman dizi hiçbir elemana yakınsamaz.

Alıştırmalar

2.7. X herhangi bir küme ve A ve B, X'in herhangi iki altkümesi olsun.

$$\tau = \{\emptyset, A, B, A \cap B, A \cup B, X\}$$

olsun. τ, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojide hangi dizilerin hangi elemanlara yakınsadığının tam bir analizini yapın.

2.8. Sayılamaz sonsuzlukta bir X kümesi üzerine (örneğin $\mathbb{R}$ üzerine) Örnek 1.9'da tanımlanmış olan sayılabilir tümleyenler topolojisini ele alalım. Bu topolojide açık kümeler boşküme ve tümleyeni sayılabilir olan kümelerdir. Bu topolojide hangi dizilerin hangi elemanlara yakınsadığını inceleyin.

2.2 Hausdorff Uzaylar

Her topolojik uzayda olmasa da, birçok topolojik uzayda, bir dizi bir elemana yakınsadığında bu limit biriciktir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

yazacağız[1]. Herhangi bir karışıklığın mümkün olmadığından eminsek, daha basit olarak

$$\lim x_n = x$$

yazmayı tercih edebiliriz. Bazen sembolizmde aşırıya kaçarak

$$x_n \longrightarrow x$$

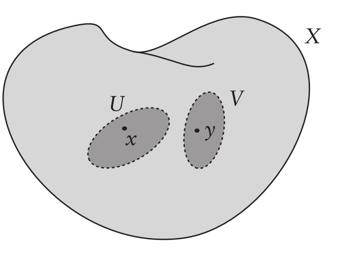
olarak minimalist bir biçimde yazdığımız da olacak.

Eğer $(x_n)_n$ dizisinin birden fazla limiti varsa ve x bu limitlerin biriyse, $x \in \lim_{n\to\infty} x_n$ yazılımı tercih edilebilir; ama bu yazılıma hiç ihtiyacımız olmayacak bu kitapta.

"Hausdorff özelliğini" sağlayan uzaylarda bir dizinin limiti biriciktir. Topolojide çok önemli olan ve sık sık karşımıza çıkacak olan "Hausdorff özelliğini" tanımlayalım. X topolojik bir uzay olsun. Eğer X'in birbirinden farklı her x ve y elemanı için, $x \in U$ ve $y \in V$ özelliklerini sağlayan iki **ayrık** U ve V açık kümeleri varsa, o zaman topolojiye ***Hausdorff*** denir. Yani topolojinin Hausdorff özelliğini sağlaması demek, X'in birbirinden değişik her x ve y elemanları için,

$$x \in U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

özelliklerini sağlayan U ve V açık kümeleri var demektir. (Aşağıdaki şekle bakınız.) Hausdorff özelliğini sağlayan topolojik uzaylara ***Hausdorff uzayları*** denir. Kimi zaman Hausdorff uzayı yerine ***T_2 uzayı*** denir.



[1] Bazı metinlerde limit biricik olsun ya da olmasın gene de bu yazılımın kullanıldığı olur.

Örnekler

2.9. Eğer $|X| > 1$ ise, X'in kaba topolojisi Hausdorff değildir.

2.10. Eğer X sonsuzsa, sonlu tümleyenler topolojisi de Hausdorff değildir.

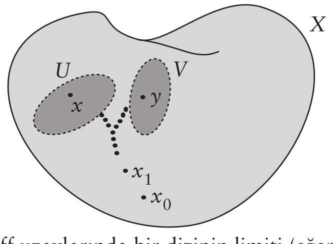
2.11. En ince topoloji her zaman Hausdorff'tur.

2.12. $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisi Hausdorff'tur; nitekim eğer $x \neq y$ iki gerçel sayıysa ve $\epsilon = |x-y|/2$ alırsak, o zaman $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ve $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ aralıkları, sırasıyla, x'i ve y'yi içeren ayrık açık kümelerdir.

2.13. Bir topolojinin ne kadar çok açık kümesi varsa, topolojinin Hausdorff olma ihtimali o kadar yüksektir, az açık kümesi ama çok noktası olan bir topolojik uzaydan Hausdorffluk beklemek insafsızlık olur. Hausdorff topolojilerden daha ince topolojiler de Hausdorff'tur elbette.

Dediğimiz gibi Hausdorff uzaylarında bir dizinin limiti varsa bu limit biriciktir. Bu önemli teoremi kanıtlayalım:

Teorem 2.1. *Hausdorff bir uzayda yakınsak bir dizinin limiti biriciktir.*



Hausdorff uzaylarında bir dizinin limiti (eğer varsa) bir tanedir. Yukardaki şekilde dizi hem U'nun hem de V'nin içine girmeye çalışıyor... Başaramadan elbette...

Kanıt: $(x_n)_n$ yakınsak bir dizi olsun. x ve y dizinin iki limiti olsun. $x = y$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Eşitliğin doğru olmadığını varsayalım. Uzay Hausdorff olduğundan,

$$x \in U,\ y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

özelliklerini sağlayan U ve V açık kümeleri vardır. $(x_n)_n$ dizisi x'e ve y'ye yakınsadığından, yakınsamanın tanımına göre, öyle N ve M göstergeçleri vardır ki,

$$\text{eğer } n > N \text{ ise } x_n \in U$$

ve

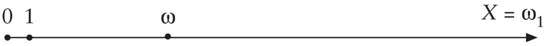
$$\text{eğer } n > M \text{ ise } x_n \in V$$

olur. $n = N + M + 1$ olsun (mesela!) O zaman n sayısı hem N'den hem de M'den büyük olduğundan, x_n elemanı hem U'da hem de V'de olur. Ama bu da $U \cap V = \emptyset$ koşuluyla çelişir. $\square$

Dizilerin limitinin biricik olması için uzayın illa Hausdorff olması gerekmez. Bir sonraki örneğimiz işte böyle bir uzay:

Örnekler

2.14. **Hausdorff Olmayan Ama Limitlerin Biricik Olduğu Bir Uzay.** $X = \omega_1$ olsun (sayılamaz sonsuzluktaki ilk ordinal/kardinal [N3]).

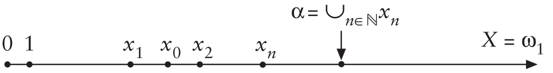


$X = \omega_1$ kümesinin elemanları sayılabilir ordinallerdir.

X'in, belli bir $\alpha \in X$ ordinali için,

$$(\alpha, \infty) = \{\beta \in X : \alpha < \beta\}$$

biçiminde yazılan bir altkümesini içeren kümelere açık diyelim. Bir de kaçınılmaz olarak boşkümeye açık diyelim. Bu bir topolojidir. Bu topolojide sadece zamanla sabitleşen dizilerin yakınsak olduklarını ve sadece zamanla sabitleştikleri elemana yakınsadıklarını iddia ediyoruz. X'in belli bir x elemanına yakınsayan bir $(x_n)_n$ dizisi ele alalım. x_n'lerin her biri sayılabilir ordinal olduklarından ve bunlardan sayılabilir sayıda olduğundan, x_n'lerin bileşimi sayılabilir bir ordinaldir, dolayısıyla X'in bir elemanıdır ve x_n'lerin her birinden büyükeşittir. Bu bileşime α adını verelim.



x herhangi bir ordinal olsun. O zaman $(\alpha, \infty) \cup \{x\}$ kümesi x'i içeren açık bir kümedir. Demek ki x_n'ler bir zaman sonra bu kümede yer almak zorundalar. $x_n \leq \alpha$ olduğundan, bu x_n'ler bir zaman sonra x'e eşit olmak zorundalar. İstediğimizi kanıtladık.

Bu topolojinin Hausdorff olmadığı çok belli çünkü boşküme olmayan herhangi iki açık küme bir $\alpha \in X$ ordinali için, (α, ∞) biçiminde bir altküme içermek zorunda.

2.15. **Sorgenfrey Doğrusunda Yakınsaklık.** $X = \mathbb{R}$ olsun. $[a, b)$ biçiminde yazılan aralıkların bileşimine açık diyelim. Bu, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji tanımlar. Bu topolojik uzaya ***Sorgenfrey doğrusu*** adı verilir. Topolojiye de, birazdan göreceğimiz nedenden dolayı ***üstlimit topolojisi*** denir.

$$(a, b) = \bigcup_{x>a} [x, b)$$

eşitliğinden dolayı her açık aralık Sorgenfrey doğrusunda da açıktır. Dolayısıyla $\mathbb{R}$'nin Öklid anlamında açık olan her altkümesi Sorgenfrey anlamında da açıktır. Ama bunun tersi doğru değildir çünkü $[a, b)$ aralıkları Sorgenfrey anlamında açıktırlar ama Öklid anlamında açık değildirler.

Demek ki eğer bir dizi Sorgenfrey anlamında bir x sayısına yakınsıyorsa, bu dizi Öklid anlamında da aynı sayıya yakınsar. Ancak tersi doğru olmayabilir. Nitekim, bir $(x_n)_n$ dizisinin Sorgenfrey anlamında bir x sayısına yakınsaması için, bu dizinin x'e sağdan yakınsaması gerekmektedir. Örneğin $(1/n)_{n>0}$ dizisi Sorgenfrey anlamında 0'a yakınsar ama $(-1/n)_{n>0}$ dizisi Sorgenfrey anlamında 0'a yakınsamaz. Bunu doğrulamayı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırmalar

2.16. Sonlu bir küme üzerinde verilmiş bir Hausdorff topolojisinin ayrık topoloji olması gerektiğini kanıtlayın.

2.17. Bir Hausdorff topolojisinde, her noktanın tümleyeninin açık bir küme olduğunu kanıtlayın. Bu tür uzaylara $\mathbf{T}_1$ ***uzayı*** denir. T_1 olan ama Hausdorff olmayan topolojik bir uzay bulun. (Bkz. Örnek 2.14.)

2.18. $((-1)^n/n)_{n>0}$ dizisi Sorgenfrey anlamında 0'a yakınsar mı?

2.19. Bir dizinin Sorgenfrey anlamında bir x sayısına yakınsaması için, bu dizinin x'e sağdan yakınsaması gerekmektedir, yani dizinin x'e (Öklid anlamında) yakınsaması ve terimlerinin bir zaman sonra x'ten büyükeşit olması gerekmektedir. Bunu kanıtlayın.

2.20. X topolojik bir uzay ve A, X'in herhangi bir altkümesi olsun. X üzerinde yeni bir topoloji tanımlayacağız. Bu yeni topolojide boşküme ve eski topolojide açık olan bir U kümesi için $U \cup A$ biçiminde yazılan bir kümeye açık diyelim. Eski topolojiyle yeni topolojideki yakınsaklığı karşılaştırın.

2.21. X topolojik bir uzay ve Y herhangi bir küme olsun. f, X'ten Y'ye giden bir fonksiyon olsun. $V \subseteq Y$ için, eğer $f^{-1}(V)$, X'in açık bir altkümesiyse, V'ye açık diyelim. Böylece Y üzerinde bir topoloji tanımlanmış olur. Bu topolojide eğer $x \in X$ elemanı X'in $(x_n)_n$ dizisinin bir limitiyse, o zaman $f(x)$'in $(f(x_n))_n$ dizisinin bir limiti olduğunu kanıtlayın.

2.22. $\mathbb{R}$ üzerinde öyle bir Hausdorff topoloji bulun ki bu topolojide $(1/n)_{n>0}$ dizisi 5'e yakınsasın.

2.23. $\mathbb{R}$ üzerinde, $(1/n)_{n>0}$ dizisinin 0'a yakınsadığı ama $(-1/n)_{n>0}$ dizisinin 5'e yakınsadığı Hausdorff bir topoloji var mıdır?

2.24. $\mathbb{R}$ üzerinde $(n)_{n>0}$ dizisinin 0'a yakınsadığı Hausdorff bir topoloji var mıdır?

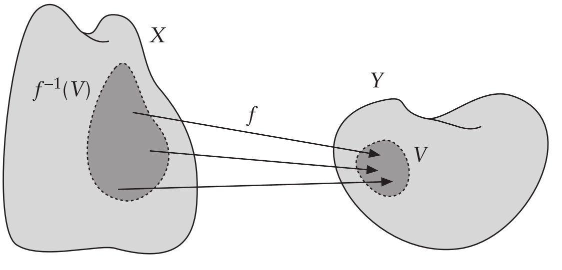
2.25. $a \neq 0$ ve b tamsayıları için $\mathbb{Z}$'nin $a\mathbb{Z}+b$ biçiminde yazılan altkümelerinin bileşimine açık diyelim. Bir de tabii boşküme açık olsun. Bunun bir topoloji olduğunu ve bu topolojinin Hausdorff olduğunu kanıtlayın. Bu topolojide hangi dizilerin limiti vardır?

3. Topolojik Uzaylarda Sürekli Fonksiyonlar

Altbölüm 0.2'de $\mathbb{R}$'nin bir X altkümesinden $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonun sürekliliğini X'in açık altkümeleriyle ifade eden bir teorem kanıtlamıştık: Teorem 0.14. Aynı bölümde bir de Teorem 0.18'i kanıtlamıştık. Bu teoremlerden esinlenerek, topolojik bir uzaydan topolojik bir uzaya giden bir fonksiyonun sürekliliğini tanımlayacağız ve böylece sürekliliğin tanımını korkutucu $\mathbb{R}$'den kurtaracağız; matematik çok daha basit olacak.

3.1 Süreklilik

Tanım. *X ve Y birer topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer Y'nin her açık altkümesinin önimgesi X'te açıksa f fonksiyonuna* ***sürekli*** *denir. Yani, tanım gereği, f'nin sürekli olması için, Y'nin her V açık kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesinin X'te açık olması gerekir.*



Açık kümelerin önimgesi açıksa fonksiyona sürekli denir.

Sürekliliğin sadece fonksiyonun ve X ve Y kümelerinin değil, X ve Y'nin topolojileriyle ilgili bir kavram olduğuna dikkatinizi çekeriz. Aynı fonksiyon değişik topolojilerle sürekli olabilir de olmayabilir de. Örneğin Y'de ne kadar az açık küme varsa ve X'te ne kadar çok açık küme varsa f'nin sürekli olma ihtimali o kadar artar.

Bundan böyle bir $f : X \longrightarrow Y$ sürekli fonksiyonundan sözettiğimizde X ve Y'nin birer topolojik uzay olması gerektiği söylenmeden anlaşılmalı.

Örnekler

3.1. Y bir topolojik uzay olsun. X bir küme olsun. X'i ayrık topolojiyle donatalım, yani X'in her altkümesi açık olsun. O zaman X'ten Y'ye giden her fonksiyon süreklidir. Bu basit önermenin doğruluğunu kontrol etmeyi okura bırakıyoruz. Bu örnek, yukardaki "X'te ne kadar çok açık küme varsa f'nin sürekli olma şansı o kadar artar" yargımızı doğrular nitelikte.

3.2. X bir topolojik uzay olsun. Y bir küme olsun. Y'yi en kaba topolojiyle donatalım, yani Y'de sadece $\emptyset$ ve Y'nin kendisi açık olsun. O zaman X'ten Y'ye giden her fonksiyon süreklidir. Bunun doğruluğunu kontrol etmeyi de okura bırakıyoruz. Bu örnek de, yukardaki "Y'de ne kadar az açık küme varsa f'nin sürekli olma şansı o kadar artar" yargımızı doğrular nitelikte.

3.3. X ve Y birer topolojik uzay ve $b \in Y$ olsun. O zaman X'ten Y'ye giden ve sabit b değerini alan s_b fonksiyonu süreklidir. Nitekim eğer $V \subseteq Y$ açık bir kümeyse,

$$s_b^{-1}(V) = \begin{cases} X & \text{eğer } b \in V \text{ ise} \\ \emptyset & \text{eğer } b \notin V \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

3.4. **Özdeşlik Fonksiyonu.** Eğer X bir topolojik uzaysa, X'ten X'e giden özdeşlik fonksiyonu, yani

$$\mathrm{Id}_X(x) = x$$

kuralıyla tanımlanan

$$\mathrm{Id}_X : X \to X$$

fonksiyonu süreklidir. Yalnız bunun doğru olması için tanım kümesi olan X ile değer kümesi olan X'in aynı topolojilerle donatılmış olmaları gerektiğini söyleyelim. Eğer tanım ve değer kümeleri üzerinde iki değişik topoloji alacak olursak, o zaman özdeşlik fonksiyonu sürekli olmayabilir. Örneğin tanım kümesi üzerinde en kaba topolojiyi ve değer kümesi üzerinde en ayrık topolojiyi alırsak, eğer X'in en az iki elemanı varsa, o zaman Id_X özdeşlik fonksiyonu sürekli olmaz.

Genel olarak, Id_X özdeşlik fonksiyonunun sürekli olması için, değer kümesinin her açık kümesinin önimgesi tanım kümesinde de açık olması gerekmektedir; yani tanım kümesinin topolojisi en az değer kümesinin topolojisi kadar ince olmalıdır, daha kaba olamaz.

3.5. **Öklid Topolojisinde Süreklilik.** Eğer X ve Y, $\mathbb{R}$'nin birer altkümesiyse ve bu altkümeler de Öklid topolojisiyle donatılmışsa (bkz. Alıştırma 1.10), o zaman, [N5]'de gördüğümüz X'ten Y'ye giden bir fonksiyonun sürekliliği bu bölümde verdiğimiz tanımla uzlaşır; yani iki tanım arasında bir fark yoktur.

Alıştırmalar

3.6. $X = \mathbb{R}$ Sorgenfrey doğrusu olsun. Her $a \in \mathbb{R}$ için $x \mapsto x+a$ fonksiyonunun (ötelemesinin) sürekli olduğunu kanıtlayın.

3.7. X yukardaki gibi olsun. $x \mapsto -x$ fonksiyonunun sürekli olmadığını kanıtlayın.

3.8. X yukardaki gibi olsun. Hangi $a \in \mathbb{R}$ için $x \mapsto ax$ fonksiyonu süreklidir?

İlk analiz derslerinde görülen ve [N5]'te verdiğimiz süreklilik tanımı daha sezgiselse ve daha doğal görülüyorsa da, bu bölümde verdiğimiz tanım basitliğinden dolayı çok daha kullanışlı, genelliğinden dolayı da çok daha evrenseldir. İşte kullanışlılığa bir örnek:

Teorem 3.1. *$f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ iki sürekli fonksiyon olsun. O zaman, bu fonksiyonların $g \circ f : X \to Z$ bileşkesi de süreklidir.*

Kanıt: W, Z'nin açık bir altkümesi olsun. g sürekli olduğundan, $g^{-1}(W)$, Y'nin açık bir altkümesidir. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(g^{-1}(W))$, X'in açık bir altkümesidir. Ama $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$. Demek ki $(g \circ f)^{-1}(W)$, X'in açık bir altkümesi. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Ama dikkat, sürekli bir fonksiyon açık kümeleri açık kümelere götürmek zorunda değildir. Örneğin, sürekli olduklarını yukarda gördüğümüz sabit fonksiyonlar, boş olmayan her açık kümeyi tek elemanlı bir kümeye götürürler ve tek elemanlı kümeler de pek ender olarak açık küme olurlar, mesela Öklid topolojisinde tek elemanlı kümeler açık değildirler.

Sürekli fonksiyonlar yakınsaklığa saygı duyan fonksiyonlardır:

Teorem 3.2. *$f : X \to Y$ sürekli olsun. O zaman, X'te yakınsak olan her dizi f ile Y'de yakınsak bir diziye taşınır. Ayrıca eğer x, $(x_n)_n$ dizisinin bir limitiyse, $f(x)$, $(f(x_n))_n$ dizisinin bir limitidir. Dolayısıyla eğer X ve Y'de limitler biricikse, örneğin Hausdorff uzaylarsa,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

olur.

Kanıt: V, $f(x)$'i içeren bir açık küme olsun. O zaman $f^{-1}(V)$, x'i içerir, ve f sürekli olduğundan açık bir kümedir. Dolayısıyla belli bir N göstergecinden sonra x_n'lerin hepsi $f^{-1}(V)$ kümesinin içindedir, dolayısıyla bu aşamadan sonra $f(x_n)$'lerin hepsi $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ kümesinin içindedir. □

Yukardaki teoremin sonucunun doğru olduğu fonksiyonlara ***dizisel sürekli fonksiyon*** adı verilir. Demek ki her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve Öklid topolojisinde dizisel sürekli olan her fonksiyonun sürekli olduğunu da [N5]'ten biliyoruz. Ama ne yazık ki her topolojik uzay için bu geçerli değildir. Birazdan dizisel sürekli olan ama sürekli olmayan bir fonksiyon örneği vereceğiz. Ama ilerde göreceğimiz üzere birçok topolojik uzayda ve özellikle daha sonra tanımlanacak olan metrik uzaylarda dizisel süreklilikle süreklilik denktirler. (Dolayısıyla vereceğimiz örnek pek standart olmayacak.)

Örnek 3.9. X sayılamaz sonsuzlukta bir küme olsun, mesela $X = \mathbb{R}$ olabilir. X üzerine sayılabilir tümleyenler topolojisini alalım, yani

$$\tau = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$$

olsun. Bunun bir topoloji olduğunu Örnek 1.9'dan biliyoruz. Yakınsak dizilerine de Alıştırma 2.8'de bakmıştık: Bunlar sadece zamanla sabitleşen dizilerdir. (X, τ) topolojik uzayından herhangi bir topolojik uzaya giden herhangi bir fonksiyon dizisel süreklidir elbette, ne de olsa zamanla sabitleşen bir dizinin her fonksiyon altında imgesi gene zamanla sabitleşen bir dizidir. Ama (X, τ) topolojik uzayından bir topolojik uzaya giden her fonksiyon sürekli olmak zorunda değildir, mesela (X, τ) topolojik uzayından $(X, \wp(X))$ topolojik uzayına (ayrık topoloji) giden özdeşlik fonksiyonu sürekli değildir.

Sürekli fonksiyonlar topolojinin vazgeçilmez nesneleridir, o kadar ki, kimi topologlar sürekli fonksiyona sadece fonksiyon derler, fonksiyon demek istedikleri zaman da "illa sürekli olmak zorunda olmayan fonksiyon" diye uzun uzun açıklarlar.

Sürekli fonksiyonlar topolojide o kadar önemlidir ki, mesela, bir topologun karşısına bir topolojik uzaydan bir Y kümesine giden bir fonksiyon çıktığında, topolog, fonksiyonun sürekli olması için Y'nin nasıl (daha doğrusu ne kadar ince) bir topolojiyle donatılabileceği konusunu irdeler. Ya da tam tersine bir X kümesinden topolojik bir uzaya giden bir fonksiyonla karşılaştığında, topolog, fonksiyonun sürekli olması için X'e ne kadar kaba bir topoloji koyabileceği konusuyla ilgilenir. Önümüzdeki bölümlerde biz de aynen topologlar gibi düşünüp, karşımıza doğal olarak çıkan fonksiyonların sürekli olmaları için fonksiyonun tanım ya da değer kümesine nasıl bir topoloji vermemiz gerektiğini düşüneceğiz.

Bundan böyle "$f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun" dediğimizde, açıkça söylemeden X ve Y'nin birer topolojik uzay olduklarını varsayacağız. (Zaten bu varsayımdan başka seçeneğimiz de yok!)

Eğer X ve Y'nin üstündeki topolojiler önemliyse, bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunu, topolojileri açıkça belirtmek için

$$f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$$

olarak gösterebiliriz.

Alıştırmalar

3.10. $X = \mathbb{N}$ olsun. X'in açık kümeleri 0'ı içeren kümeler olsun. Bir de tabii mecburen boşküme açık olsun. X'ten $\mathbb{R}$'ye giden her sürekli fonksiyonun sabit bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın.

3.11. Bir X kümesi üzerinde sonlu tümleyenler topolojisini alalım (açık kümeler, tümleyeni sonlu olan kümeler, ve bir de boşküme tabii). X'ten X'e giden bir f fonksiyonunun sürekli olması için

$$\textit{her } x \in X \textit{ için } f^{-1}(x) \textit{ sonludur}$$

koşulunun yeterli ve gerekli olduğunu kanıtlayın.

3.12. X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. $B \subseteq Y$ olsun.

$$f^{-1}(B^\circ) \subseteq f^{-1}(B)^\circ$$

içindeliğini gösterin. (B°'ın tanımı için bkz. sayfa 33.) Eşitliğin (birebir ve örten fonksiyonlar için bile) her zaman doğru olmadığını kanıtlayın.

3.13. $X = \mathbb{R}$ olsun. X'in açık kümeleri (a, ∞) türünden aralıklar, $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ olsun. X'ten X'e giden sürekli fonksiyonları irdeleyin.

3.14. $\tau \subseteq \sigma$, X üzerine iki topolojik uzay olsun. Eğer $f : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ fonksiyonu sürekliyse, f fonskiyonu σ topolojisi için de sürekli olmak zorunda mıdır? Eğer $g : (X, \sigma) \longrightarrow (X, \sigma)$ fonksiyonu sürekliyse, f fonksiyonu τ topolojisi için de sürekli olmak zorunda mıdır?

3.2 Bir Noktada Süreklilik ve Komşuluk

Bir önceki altbölümde, iki topolojik uzay arasındaki bir fonksiyonun sürekliliğinin ne demek olduğunu gördük ve böylece $\mathbb{R}$'den (ya da $\mathbb{R}$'nin bir altkümesinden) $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonun sürekliliği kavramını genelleştirdik. Aynı genelleştirmeyi tek bir noktada süreklilik için de yapabiliriz. Bunun için önce topolojik bir uzayda "bir noktanın komşuluğu" kavramını tanımlayalım.

Tanım. *X bir topolojik uzay, $a \in V \subseteq X$ olsun. Eğer bir U açık kümesi için $a \in U \subseteq V$ oluyorsa, V'ye a* ***'nın komşuluğu*** *denir.*

Örnekler

3.15. Her açık küme içerdiği her elemanın komşuluğudur.

3.16. Her topolojik uzay, tüm noktalarının komşuluğudur. Boşküme hiçbir noktanın komşuluğu değildir.

3.17. $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde $[0, 1]$ aralığı $1/2$ noktasının bir komşuluğudur ama 0 ve 1 noktalarının komşuluğu değildir.

3.18. Sonlu tümleyenler topolojisinde sadece boş olmayan açık kümeler bir noktanın komşuluğu olabilirler, başka da komşuluk yoktur.

Önsav 3.3. *X bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun.*
i. *Eğer V, a'nın bir komşuluğuysa, V'yi içeren X'in her altkümesi de a'nın bir komşuluğudur.*
ii. *a'nın sonlu sayıda komşuluğunun kesişimi de a'nın bir komşuluğudur.*
iii. *Bir kümenin açık olması için, kümenin içerdiği her noktanın komşuluğu olması yeter ve gerek koşuldur.*
iv. *V herhangi bir altkümeyse, $V^\circ = \{a : V,\ a\text{'nın bir komşuluğu}\}$ olur.*

Kanıt: i. $V \subseteq W$ olsun. V, a'nın bir komşuluğu olduğundan, a'yı içeren açık bir U kümesi için $U \subseteq V$ olur. Aynı U açık kümesi W'nin a'nın bir komşuluğu olduğunu gösterir: $a \in U \subseteq V \subseteq W$.

ii. Önermeyi a'nın iki komşuluğu için kanıtlamak yeterli. V_1 ve V_2, a'nın iki komşuluğu olsun. U_1 ve U_2, $a \in U_1 \subseteq V_1$ ve $a \in U_2 \subseteq V_2$ içindeliklerini sağlayan iki açık küme olsun. O zaman $U_1 \cap U_2$ açıktır ve $a \in U_1 \cap U_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ olur. Demek ki $V_1 \cap V_2$, a'nın bir komşuluğudur.

iii. Açık bir kümenin, içerdiği her noktanın komşuluğu olduğu belli. Şimdi V altkümesinin, içerdiği her noktanın bir komşuluğu olduğunu varsayalım. Demek ki her $a \in V$ için, $a \in U_a \subseteq V$ içindeliklerini sağlayan bir U_a açık kümesi vardır. Elbette $V = \bigcup_{a \in V} U_a$ olur. V, açık kümelerin bileşimi olduğundan açıktır.

iv. Sağdaki kümeye U diyelim. V°, tanımı icabı açık bir küme, dolayısıyla (iii)'e göre içerdiği her noktanın bir komşuluğu. $V^\circ \subseteq V$ olduğundan, (i)'e göre V, V°'ın her elemanının bir komşuluğudur. Demek ki $V^\circ \subseteq U$.

Şimdi $a \in U$ olsun. Demek ki V, a'nın bir komşuluğu. Dolayısıyla bir U_a açık kümesi için $a \in U_a \subseteq V$ olur. U_a açık olduğundan, $U_a \subseteq V^\circ$ olur. Demek ki $a \in V^\circ$. □

Alıştırma 3.19. Metinde bir topolojiyi açık kümelerle tanımladık; sonra da açık kümelerden hareketle bir noktanın komşuluğunu tanımladık. Tam tersine, bir noktanın komşuluğu kavramından yola çıkarak bir topolojiyi ve Önsav 3.3'ü kullanarak bu topolojinin açık kümelerini tanımlayabiliriz. Nitekim Hausdorff 1919'da bir topolojik uzayı tanımlamak için bu yolu seçmiştir. Burada Hausdorff'un yöntemini açıklayacağız.

Önce bir topolojik uzayda şu özelliklerin doğru olduğunu gösterin:

V1. Her noktanın en az bir komşuluğu vardır ve her noktanın komşuluğu noktayı içerir.

V2. Eğer V_1 ve V_2, x'in iki komşuluğuysa, $V_1 \cap V_2$'nin bir altkümesi x'in bir komşuluğudur.

V3. Eğer V, x'in bir komşuluğuysa, V'yi içeren X'in her altkümesi x'in bir komşuluğudur.

V4. Eğer V, x'in bir komşuluğuysa, o zaman x'in öyle bir $U \subseteq V$ komşuluğu vardır ki, U içerdiği her noktanın bir komşuluğudur.

Şimdi bu özellikleri bir topolojik uzayın tanımı olarak kabul edelim. Yani her $x \in X$ için şu özelliklerin doğru olduğu $\mathcal{V}_x \subseteq \wp(X)$ verilmiş olsun:

V1. Her $x \in X$ için $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ ve her $V \in \mathcal{V}_x$ için $x \in V$.

V2. Eğer $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$ ise $V_1 \cap V_2$'nin bir altkümesi V_x'tedir.

V3. Eğer $V \in \mathcal{V}_x$ ve $V \subseteq U$ ise, $U \in \mathcal{V}_x$ olur.

V4. Eğer $V \in \mathcal{V}_x$ ise, o zaman öyle bir $U \in \mathcal{V}_x$ vardır ki $U \subseteq V$ ve her $y \in U$ için $U \in \mathcal{V}_y$ olur.

Bu özellikleri sağlayan bir $(\mathcal{V}_x)_{\in X}$ verisini topolojik uzayın tanımı olarak kabul edelim ve her noktasının komşuluğu olan kümelere "açık" diyelim. Böylece tanımlanan açık kümelerin sayfa 29'daki özellikleri sağladığını kanıtlayın.

Şimdi bir noktada sürekliliğin tanımını verelim.

Tanım. *X ve Y iki topolojik uzay, $a \in X$ ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a)$'nın her komşuluğunun f-önimgesi a'nın bir komşuluğuysa, f'ye a* ***noktasında sürekli*** *denir.*

Tahmin edilen sonucu kanıtlayalım.

Teorem 3.4. *$f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için f'nin X'in her noktasında sürekli olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Önce f'nin sürekli olduğunu varsayalım. $a \in X$ ve $W \subseteq Y$, $f(a)$'nın bir komşuluğu olsun. Demek ki $f(a) \in V \subseteq W$ içindeliklerinin sağlandığı bir V açık kümesi vardır. Bu içindeliğin f-önimgesini alarak, $a \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$ buluruz. f sürekli ve V açık olduğundan, $f^{-1}(V)$ açık bir kümedir. Demek ki $f^{-1}(W)$, a'nın bir komşuluğudur.

Şimdi f'nin X'in her noktasında sürekli olduğunu varsayalım. $V \subseteq Y$ açık bir küme olsun. $a \in f^{-1}(V)$ olsun. $f(a) \in V$ ve V açık olduğundan, V, $f(a)$'nın bir komşuluğudur. Ayrıca f, a noktasında sürekli olduğundan, $f^{-1}(V)$, a'nın bir komşuluğudur. Demek ki $f^{-1}(V)$, içerdiği her noktanın komşuluğudur. Önsav 3.3.iii'e göre $f^{-1}(V)$ açık bir kümedir. □

4. Topoloji Üretmek

4.1 Giriş

X, herhangi bir küme olsun. A, B, C ve D de X'in herhangi dört altkümesi olsun. Diyelim X'i bu dört altkümenin de açık olduğu bir topolojiyle donatmak istiyoruz.

Böyle bir topoloji var, örneğin X'in ayrık topolojisi, yani sadece A, B, C, D değil, her altkümenin açık olduğu topoloji. Ne var ki ayrık topoloji çok kalabalık, çok fazla açık kümesi var, oysa biz sadece A, B, C ve D'nin açık olmasını arzu ediyorduk, bütün altkümelerin değil.

Sadece bu dört altkümeyi açık yapmak mümkün olmayabilir elbet, çünkü bu dört küme açıksa, bu dört kümenin kesişimleri, bileşimleri, kesişimlerinin bileşimi filan da açık olmak zorunda.

A, B, C ve D'nin açık olduğu olabildiğince "küçük" bir topoloji üretmek istiyoruz. Bu topolojide A, B, C ve D altkümeleri açık olsun, $A \cap B$ gibi mutlaka açık olmaları gereken başka kümeler de açık olsun, ama kuru kalabalıktan kaçınalım, zorunlu olmadıkça topolojimizin içine küme sokmayalım. Kısaca söylemek gerekirse, gereksiz açık kümelerden kaçınalım.

Madem ki A, B, C ve D altkümeleri açık olmalı, bunların ikişer ikişer kesişimi de açık olmalı, yani

$$A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$$

altkümeleri de açık olmalı. Ayrıca A, B, C ve D altkümelerinin üçer üçer kesişimleri de açık olmalı, yani

$$A \cap B \cap C, A \cap B \cap D, A \cap C \cap D, B \cap C \cap D$$

altkümeleri de açık olmalı. Ayrıca A, B, C ve D altkümelerinin hepsinin kesişimi olan

$$A \cap B \cap C \cap D$$

altkümesi de açık olmalı. Bunlara bir de $\emptyset$ ve X eklemeli elbette. Sonuç olarak, şu altkümeler açık olmalı:

$\emptyset,$
$A, B, C, D,$
$A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D,$
$A \cap B \cap C, A \cap B \cap D, A \cap C \cap D, B \cap C \cap D,$
$A \cap B \cap C \cap D,$
$X.$

Şimdiye kadar 17 açık altküme elde ettik. Madem ki bu kesişimler açık, bu kesişimlerin bileşimleri de açık olmalı. Bunların bir de ikişer ikişer, üçer üçer vs bileşimlerinin de açık olduklarına hükmetmek lazım. Ama daha ileri gitmek gerekmiyor, yukardaki 17 kesişimin her türlü bileşimi alındığında bir topoloji elde ediliyor.

4.2 Topoloji Üretmek

Yukarda yapmak istediğimizi sadece dört altküme için değil, sonlu ya da sonsuz, X'in herhangi bir altküme ailesi için de yapabiliriz: Açık olmalarını istediğimiz altkümelerin sonlu kesişimlerinin sonlu ya da sonsuz her türlü bileşimlerinin kümesine bir de ayrıca X'i eklersek, elde ettiğimiz kümeler kümesi bir topoloji oluşturur[1] ve bu topolojide açık olmalarını istediğimiz altkümeler açık olur. Bunu bir teorem olarak yazıp kanıtlayalım:

Teorem 4.1. *X bir küme ve $\alpha \subseteq \wp(X)$ olsun. α'nın sonlu sayıda elemanlarının kesişimlerinin (sonlu ya da sonsuz) her türlü bileşimlerinden oluşan kümeler kümesi, X kümesiyle birlikte bir topoloji oluşturur. Bir başka deyişle,*

$$\beta = \{A_1 \cap \ldots \cap A_n : n \geq 1,\ A_i \in \alpha\}$$

ve

$$\tau = \{\cup\gamma : \gamma \subseteq \beta\} \cup \{X\}$$

ise[2], o zaman τ, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojide α'nın bütün elemanları açıktır (yani $\alpha \subseteq \tau$ olur) ve τ, α'nın bütün elemanlarının açık olduğu en kaba topolojidir.

Kanıt: Öncelikle τ'nun $\wp(X)$'in bir altkümesi olduğunu, yani τ'nun her elemanının X'in bir altkümesi olduğunu gözlemleyelim. β'nın iki elemanının kesişiminin de β'da olduğunu, yani β'nın sonlu kesişim altında kapalı olduğunu da gözlemleyelim.

[1] Boşkümenin elemanlarının bileşimi boşküme olduğu için [N2], boşkümeyi (X için yaptığımız gibi) ayrıca elde ettiğimiz kümeler kümesine eklemeye gerek yok, boşküme zaten orada. Ama boşkümenin bileşiminin boşküme olmasından rahatsız olan okur sonlu kesişimlerin bileşimine boşkümeyi de (X'i eklediğimiz gibi) ekleyebilir.

[2] $\cup\gamma$, $\cup_{B\in\gamma}B$, yani γ'daki elemanların (ki bu elemanlar birer kümedir) bileşimi anlamına gelmektedir. Eğer $\gamma = \emptyset$ ise $\cup\gamma = \emptyset$ olur.

Herhangi bir $A \in \alpha$ alalım. Eğer β'nın tanımında $n = 1$ ve $A_1 = A$ alırsak o zaman $A \in \beta$ olduğunu görürüz. Ve eğer $\gamma = \{A\} \subseteq \beta$ olursa, o zaman τ'nun tanımına göre, $A = \cup\gamma \in \tau$ olur. Demek ki $\alpha \subseteq \tau$. Şimdi τ'nun bir topoloji olduğunu kanıtlayalım.

τ'nun tanımından dolayı, $X \in \tau$. Ve eğer $\gamma = \emptyset$ ise $\emptyset = \cup\emptyset = \cup\gamma \in \tau$ olur.

τ kümesinin iki elemanını alalım: Diyelim γ_1, $\gamma_2 \subseteq \beta$ için

$$\bigcup \gamma_1 = \bigcup_{B_1 \in \gamma_1} B_1 \text{ ve } \bigcup \gamma_2 = \bigcup_{B_2 \in \gamma_2} B_2$$

elemanlarını aldık. Bunları kesiştirelim:

$$\bigcup \gamma_1 \cap \bigcup \gamma_2 = \left(\bigcup_{B_1 \in \gamma_1} B_1 \right) \cap \left(\bigcup_{B_2 \in \gamma_2} B_2 \right) = \bigcup_{B_1 \in \gamma_1, B_2 \in \gamma_2} (B_1 \cap B_2)$$

buluruz. Eğer

$$\gamma = \{B_1 \cap B_2 : B_1 \in \gamma_1, B_2 \in \gamma_2\}$$

tanımını yaparsak, yukardaki kesişim

$$\bigcup \gamma$$

kümesine eşit olur. Ama β'dan alınan iki elemanın kesişimi gene β'nın bir elemanı olduğundan, $\gamma \subseteq \beta$ olur, yani

$$\bigcup \gamma = \bigcup_{B \in \gamma} B \in \tau$$

olur. Böylece

$$\left(\bigcup_{B_1 \in \gamma_1} B_1 \right) \cap \left(\bigcup_{B_2 \in \gamma_2} B_2 \right) = \bigcup_{B_1 \in \gamma_1, B_2 \in \gamma_2} (B_1 \cap B_2) = \bigcup_{B \in \gamma} B \in \tau$$

olur ve dilediğimiz kanıtlanmış olur.

β'nın bileşim altında kapalı olduğu daha da bariz ama biz gene de biçimsel bir kanıtını verelim. τ kümesinden elemanlar alalım. Diyelim bir I göstergeç kümesi için $(U_i)_{i \in I}$ elemanları aldık. Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ olduğundan, β'nın $\gamma_i \subseteq \beta$ altkümeleri için,

$$U_i = \bigcup_{B \in \gamma_i} B \in \tau$$

olur.

$$\gamma = \bigcup_{i \in I} \gamma_i \subseteq \beta$$

tanımını yapalım. U_i'lerin bileşimini alalım:

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{B\in\gamma_i} B\right) = \bigcup_{B\in\bigcup_{i\in I}\gamma_i} B = \bigcup_{B\in\gamma} B \in \tau$$

buluruz ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

Son olarak, τ'nun α'nın bütün elemanlarını içeren en kaba topoloji olduğunu kanıtlayalım. Nitekim eğer τ', α'yı içeren bir topolojiyse, o zaman τ', β'yı da içerir, dolayısıyla τ'yu da içerir. □

Teorem 4.1'deki τ'ya, α tarafından ***üretilen topoloji*** denir. Analiz literatüründe pek yeri yoktur ne yazık ki ama $\tau = \langle\alpha\rangle$ yazılımı caizdir ve kullanacağız. Örneğin $\langle\emptyset\rangle = \{\emptyset, X\}$ (en kaba topoloji) olur. Eğer $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ ise $\langle\{A_1, \ldots, A_n\}\rangle$ yerine $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ yazmak hem daha ekonomik hem de daha estetiktir.

Teorem 4.1'deki β'yı aklımızda tutalım. Tekrar tekrar gerekecek. Elbette

$$\langle\alpha\rangle = \langle\beta\rangle$$

eşitliği geçerlidir ama, β'dan alınan iki elemanın kesişimi tekrar β'da olduğu için, β, bir topoloji olmaya α'dan daha yakındır.

Şu özellik teoremden çıkıyor: Eğer τ, X üzerinde bir topolojiyse ve

$$\alpha \subseteq \tau \subseteq \langle\alpha\rangle$$

ilişkileri sağlanıyorsa, o zaman $\tau = \langle\alpha\rangle$ olur, çünkü ne de olsa $\langle\alpha\rangle$, X üzerinde α'yı içeren en küçük topolojidir. Bir de şu özellik dikkate şayandır: Eğer α zaten bir topolojiyse, $\alpha = \langle\alpha\rangle$ olur.

Örnekler

4.1. **Kaba Topoloji.** X herhangi bir küme olsun. Teorem 4.1'de $\alpha = \emptyset$ alırsak, $\beta = \emptyset$ ve $\langle\emptyset\rangle = \tau = \{\emptyset, X\}$ olur, yani X üzerinde en kaba topolojiyi buluruz. Eğer α kümesi $\{\emptyset\}$, $\{X\}$, $\{\emptyset, X\}$ kümelerinden biriyse de aynı sonucu buluruz.

4.2. **Ayrık Topoloji.** X herhangi bir küme ve α, X'in tek elemanlı altkümelerinin kümesi olsun. O zaman $\beta = \alpha\cup\{\emptyset\}$ olur ve X üzerinde ayrık topolojiyi buluruz: $\langle\alpha\rangle = \tau = \wp(X)$.

4.3. **Öklid Topolojisi.** $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlanan Öklid topolojisinde, açık kümeler açık aralıkların bileşimiydi. Nitekim yukardaki teoremde α'yı $\mathbb{R}$'nin açık aralıklarından oluşan küme olarak tanımlarsak, $\beta = \alpha$ olur ve τ'nun Öklid topolojisi olduğunu görürüz.
α'yı açık aralıklar kümesi almak yerine açık ve sınırlı aralıklar kümesi olarak alırsak, o zaman gene $\beta = \alpha$ olur ve gene Öklid topolojisini buluruz, çünkü her açık aralık sınırlı açık aralıkların bileşimi olarak yazılabilir.
α'yı uzunluğu en fazla 1 olan açık aralıklar kümesi olarak da alabilirdik (gene $\beta = \alpha$ olur), hatta α'yı uzunluğu 1 olan açık aralıklar kümesi olarak da alabilirdik (bu sefer $\beta = \alpha$ olmaz), sonuç değişmez, her seferinde Öklid topolojisini elde ederdik.
α'yı uç noktaları kesirli sayılar olan açık aralıklar olarak da alabiliriz. Gene $\beta = \alpha$ olur ve gene Öklid topolojisini elde ederiz. Bkz. Alıştırma 4.8.

Alıştırmalar

4.4. X bir küme olsun. X'in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ altkümeleri X'in ayrık altkümeleri olsun. A_i'lerin hiçbirinin boşküme olmadığını varsayalım. $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$ topolojisinin açık küme sayısını bulun.

4.5. X bir küme olsun. A ve B, X'in iki altkümesi olsun. $\langle A, B\rangle$ topolojisinin maksimum açık küme sayısını bulun.

4.6. X bir küme olsun. A, B ve C, X'in üç altkümesi olsun. $\langle A, B, C\rangle$ topolojisinin maksimum açık küme sayısını bulun.

4.7. X bir küme olsun. α, X'in iki elemanlı altkümelerinden oluşan küme olsun. Eğer $|X| \geq 3$ ise α'nın ayrık topolojiyi ürettiğini kanıtlayın.

4.8. $X = \mathbb{R}$ olsun. α, uç noktaları kesirli sayılar olan açık aralıklar kümesi olsun. α tarafından üretilen topolojinin Öklid topolojisi olduğunu kanıtlayın.

4.9. X sonsuz bir küme olsun. α, tümleyeninin çift sayıda elemanı olduğu X'in altkümelerinden oluşsun. α'nın sonlu tümleyenler topolojisini ürettiğini kanıtlayın.

4.3 Öntaban

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\alpha \subseteq \tau$ olsun. Eğer $\langle\alpha\rangle = \tau$ ise, yani X'in X'ten değişik her açık altkümesi (yani τ'nun X'ten değişik her elemanı) α'nın sonlu sayıda elemanının kesişiminin (sonlu ya da sonsuz) bileşimiyse, α'ya τ'nun (bazen de X topolojik uzayının) ***öntabanı*** adı verilir. Her topoloji elbette kendisinin bir öntabanıdır.

Bir topolojinin birden çok öntabanı olabilir. Örneğin eğer α, τ'nun bir öntabanıysa ve $\alpha \subseteq \beta \subseteq \tau$ ise β da τ'nun bir öntabanıdır.

Önsav 4.2. *(X, τ) topolojik bir uzay ve $\alpha \subseteq \tau$ olsun.*
i. *Eğer α, τ'nun bir öntabanıysa, o zaman X'in bir $U \neq X$ altkümesinin açık olması için gerek ve yeter koşul,*

> *Her $x \in U$ elemanı için, $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq U$ içindeliklerini sağlayan $A_1, \ldots, A_n \in \alpha$ vardır*

koşuludur.
ii. *α'nın τ'nun bir öntabanı olması için gerek ve yeter koşul,*

> *Her $U \in \tau \setminus \{X\}$ ve her $x \in U$ için, $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq U$ içindeliklerini sağlayan sonlu sayıda $A_1, \ldots, A_n \in \alpha$ kümesi vardır*

koşuludur.

Kanıt: Öntabanın tanımından hemen çıkar. □

Bu aşamada Teorem 4.1'i anımsayalım. Birçok örnekte $\beta = \alpha \cup \{\emptyset\}$ olur. Eğer bu eşitlik sağlanırsa, belki X dışında, τ'nun elemanları α'nın elemanlarının bileşimi olur sadece ve aracı küme olan β'dan kurtulmuş oluruz. Ama β'ya gerek duyulmaması için illa $\beta = \alpha$ eşitliği gerekmez, eğer α'nın herhangi iki elemanının kesişimi α'nın (sonlu ya da sonsuz) elemanının bileşimi olarak yazılıyorsa da β'ya gerek kalmaz. Bu oldukça önemlidir, yer ayırmaya değer:

Teorem 4.3. *X bir küme ve $\alpha \subseteq \wp(X)$ olsun. α'nın iki elemanının kesişiminin α'nın elemanlarının (sonlu ya da sonsuz) bileşimi olarak yazılabildiğini varsayalım. O zaman*

$$\langle\alpha\rangle = \{\cup\gamma : \gamma \subseteq \alpha\} \cup \{X\} = \{\cup_{A\in\gamma} A : \gamma \subseteq \alpha\} \cup \{X\}$$

olur.

Kanıt: $\theta = \{\cup\gamma : \gamma \subseteq \alpha\} \cup \{X\}$ olsun. $\alpha \subseteq \theta \subseteq \langle\alpha\rangle$ olduğundan, Teorem 4.1'e göre θ'nın bir topoloji olduğunu kanıtlamak yeterli. θ, boşkümeyi (malum nedenden!) ve X'i içeriyor ve bileşim altında kapalı. Demek ki θ'nın iki kümesinin kesişiminin θ'da olduğunu kanıtlamak yeterli. θ'dan iki eleman alalım. Eğer bu elemanlardan biri $\emptyset$ ya da X ise, kesişimin θ'da olduğu bariz. Bu elemanların $\emptyset$ ya da X olmadığını varsayalım. Diyelim γ_1, $\gamma_2 \subseteq \alpha$ için

$$\bigcup \gamma_1 = \bigcup_{A_1\in\gamma_1} A_1 \text{ ve } \bigcup \gamma_2 = \bigcup_{A_2\in\gamma_2} A_2$$

elemanlarını aldık. Bunları kesiştirelim:

$$\bigcup \gamma_1 \cap \bigcup \gamma_2 = \left(\bigcup_{A_1\in\gamma_1} A_1\right) \cap \left(\bigcup_{A_2\in\gamma_2} A_2\right) = \bigcup_{A_1\in\gamma_1, A_2\in\gamma_2} (A_1 \cap A_2)$$

buluruz. θ bileşim altında kapalı olduğundan, bu kümenin θ'da olduğunu kanıtlamak için, $A_1 \in \gamma_1 \subseteq \alpha$ ve $A_2 \in \gamma_2 \subseteq \alpha$ için, $A_1 \cap A_2$ kümesinin θ'da olduğunu kanıtlamak yeterli. Ama teoremin varsayımı da aynen bunu söylüyor. □

4.4 $\mathbb{R}^2$ Üzerine Öklid Topolojisi

Teorem 4.3'ü kullanarak $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ düzleminde klasik topolojiyi tanımlayalım. Her $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ve $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için, $B(A, r)$ kümesi, A merkezli ve r yarıçaplı dairenin **içi** olsun. Daha analitik bir yazılımla,

$$B(A, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\}$$

olsun. Her $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktası için,

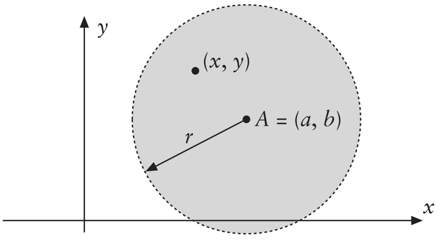
$$d(P, A) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

tanımını yaparsak,

$$B(A, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, A) < r\}$$

olarak yazabiliriz. Bu tür kümelere ***açık top*** ya da ***açık yuvar*** denir. Açık yuvar, dairenin **içindeki** noktalardan oluşur, yani çemberin üstündeki noktalar açık yuvarın dışında kalır.

Elbette $B(A, 0) = \emptyset$ olur, ama eğer $r > 0$ ise, $A \in B(A, r) \neq \emptyset$ olur.



r yarıçaplı $A(a, b)$ merkezli $B(A, r)$ dairesi (sınır dahil değil)

$\mathbb{R}^2$'de açık yuvarlar tarafından üretilen topolojiye ***Öklid topolojisi*** denir. Bu topoloji $\mathbb{R}^2$ üzerinde "en doğal" topolojidir. Ya da şöyle söyleyelim: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımladığımız Öklid topolojisi ne kadar doğalsa, $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan Öklid topolojisi de o kadar doğaldır.

Yukarda tanımladığımız

$$d(P, A) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

sayısına P ile A arasındaki ***Öklid mesafesi*** adı verilir. Her P, Q, $R \in \mathbb{R}^2$ için Öklid mesafesinin şu özellikleri vardır:

1. $d(P, Q) \geq 0$.
2. $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
3. $d(P, Q) = d(Q, P)$.
4. $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$.

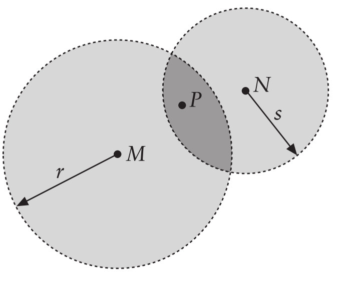
Bunların kanıtını okura bırakıyoruz. En önemlisi (ve kanıtı biraz daha zaman alanı), düzlemde ***üçgen eşitsizliği*** adı verilen son eşitsizliktir.

Tanımlara bakılacak olursa, $\mathbb{R}^2$'nin Öklid topolojisinde, açık bir küme sonlu sayıda yuvarların (sonlu ya da sonsuz) bileşimlerinden oluşur. Bir sonraki teorem, hiç kesişim almaya gerek olmadığını söylüyor:

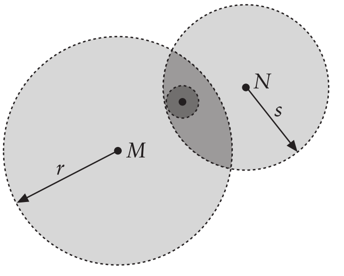
Teorem 4.4. *$\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan Öklid topolojisinde, $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesi ancak açık yuvarların bileşimiyse açıktır.*

Kanıt: Teorem 4.3'ü kullanacağız. Teorem 4.3'ü kullanmak için iki açık yuvarın kesişiminin açık yuvarların bileşimi olarak yazılabildiğini göstereceğiz.

$B(M, r)$ ve $B(N, s)$ iki açık yuvar olsun. Eğer bu açık yuvarların kesişimi boşkümeyse, o zaman sorun yok, kesişim, $B(M, 0)$ açık yuvarına eşittir. Bundan böyle kesişimin boşküme olmadığını varsayalım.



Kesişimden herhangi bir P noktası alalım. Amacımız, $B(M,r)$ ve $B(N,s)$ açık yuvarlarının kesişiminde, P merkezli ve pozitif yarıçaplı bir $B(P,t_P)$ açık yuvarı bulmak.



P, açık yuvarların içinde olduğundan,

$$d(M,P) < r \text{ ve } d(N,P) < s$$

olur.

$$t_P = \min\{r - d(M,P), s - d(N,P)\}$$

olsun. O zaman $t_P > 0$ olur ve $B(P,t_P)$ açık yuvarı tamamıyla $B(M,r)$ ve $B(N,s)$ açık yuvarlarının içinde olur, çünkü eğer $Q \in B(P,t_P)$ ise,

$$\begin{aligned} d(M,Q) &\le d(M,P) + d(P,Q) < d(M,P) + t_P \\ &\le d(M,P) + (r - d(M,P)) = r. \end{aligned}$$

(İlk satırda bir önceki sayfadaki üçgen eşitsizliğini kullandık.) Benzer şekilde $d(N,Q) < s$ eşitsizliği kanıtlanır. Bunu her

$$P \in B(M,r) \cap B(N,s)$$

noktası için yapabileceğimizden,

$$B(M,r) \cap B(N,s) = \bigcup_{P \in B(M,r) \cap B(N,s)} B(P,t_P)$$

olur. Yani iki açık yuvarın kesişimi açık yuvarların bileşimidir. Şimdi Teorem 4.3'ü uygulayabiliriz. □

Alıştırmalar

4.10. $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ve $r \in \mathbb{R}^{\ge 0}$ olsun. $\overline{B}(A,r)$, A merkezli r yarıçaplı dairenin kendisinden ve sınırından oluşsun, yani,

$$\overline{B}(A,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2\}$$

olsun. $\overline{B}(A,r)^c$ kümesinin açık olduğunu kanıtlayın.

4.11. $\bigcap_{n \neq 0} B(A,1/n) = \bigcap_{n \neq 0} \overline{B}(A,1/n) = \{A\}$ eşitliğini kanıtlayın.

4.5 Taban

$(X,\, \tau)$ bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. Eğer τ'nun her elemanı β'nın elemanlarının (sonlu ya da sonsuz) bileşimi oluyorsa, β'ya τ'nun (ya da X topolojik uzayının) ***tabanı*** adı verilir. τ doğal olarak τ topolojsinin bir tabanıdır ama marifet τ'nun τ'dan daha küçük tabanlarını bulmaktır. Mesela Teorem 4.4'e göre açık yuvarlar(dan oluşan küme) $\mathbb{R}^2$'nin Öklid topolojisinin tabanıdır. Her taban bir öntabandır elbette ama örneklerini gördüğümüz gibi bunun tersi doğru değildir. Öte yandan eğer α bir topolojinin öntabanıysa,

$$\beta = \{A_1 \cap \ldots \cap A_n : n > 0,\, A_i \in \alpha\} \cup \{X\}$$

kümesi bu topolojinin bir tabanıdır (bkz. Teorem 4.1).

Önsav 4.5. *X bir küme ve $\beta \subseteq \wp(X)$ olsun. Eğer β kesişim altında kapalıysa, yani β'nın iki elemanının kesişimi gene β'daysa, o zaman $\beta \cup \{X\}$ kümesi β'nın ürettiği topolojinin tabanı olur.*

Kanıt: Alıştırma olarak bırakıyoruz. □

Tabanın karakteristik özelliği şudur:

Önsav 4.6. *(X, τ) topolojik bir uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun.*
i. *Eğer β, X topolojik uzayının bir tabanıysa, o zaman X'in bir U altkümesinin açık olması için,*

Her $x \in U$ için $x \in A \subseteq U$ içindeliklerini sağlayan bir $A \in \beta$ vardır

koşulu yeter ve gerektir.
ii. *β'nın X topolojik uzayının bir tabanı olması için,*

Her $U \in \tau$ ve her $x \in U$ için, $x \in A \subseteq U$ içindeliklerini sağlayan bir $A \in \beta$ vardır

koşulu yeter ve gerektir.

Kanıt: i. Eğer U açıksa, U, β'nın elemanlarının bileşimidir. Demek ki bileşimi U olan bu elemanlar arasında öyle bir $A \in \beta$ vardır ki $x \in A$ olur.

Şimdi koşulu varsayalım. Her $x \in U$ için, $x \in A \subseteq U$ koşulunu sağlayan β'nın elemanlarından birine A_x diyelim. Elbette

$$U = \bigcup_{x \in U} A_x \in \langle \beta \rangle$$

olur. Buradan da U'nun açık olduğu çıkar.

ii. Eğer β, τ topolojisinin bir tabanıysa, τ'nun her elemanı β'nın elemanlarının bileşimidir. Dolayısıyla eğer $U \in \tau$ ise U, β'nın bazı elemanlarının bileşimidir. Demek ki eğer $x \in U$ ise, β'da, x'i içeren ve U tarafından kapsanan bir A elemanı vardır. Yeterliliği okura bırakıyoruz. □

Alıştırmalar

4.12. X bir küme olsun. α, X'in iki elemanlı altkümelerinden oluşan küme olsun. Eğer $|X| \geq 3$ ise α'nın ayrık topolojiyi ürettiğini ama α'nın bir taban olmadığını kanıtlayın.

4.13. X bir küme olsun. α, X'in bir elemanlı altkümelerinin tümleyenlerinden oluşan küme olsun. α'nın sonlu tümleyenler topolojisini ürettiğini ama α'nın bir taban olmadığını kanıtlayın.

4.14. Uzunluğu en fazla 1 olan açık aralıkların $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan Öklid topolojisinin bir tabanı olduğunu kanıtlayın.

4.15. X sonsuz bir küme olsun. β, X'in tümleyeni sonlu olan altkümelerinden oluşsun. β, X üzerine sonlu tümleyenler topolojisinin tabanıdır. β'dan sonlu sayıda eleman atarsak geriye gene sonlu tümleyenler topolojisinin bir tabanının kalacağını kanıtlayın.

4.16. $\mathbb{R}$'nin sayılabilir bir tabanı olduğunu kanıtlayın.

4.6 Üretilen Topoloji

$\wp(X)$'in bir altkümesi (yani $\wp(\wp(X))$'in bir elemanı) tarafından üretilen topolojiye başka bir bakış açısı getireceğiz. Bu bakış açısı zamanına ve yerine göre yararlı olabilir.

Önsav 4.7. *X bir küme olsun. X üzerinde verilmiş boş olmayan bir topoloji ailesinin kesişimi de X üzerinde bir topolojidir*[3].

Kanıt: Topoloji ailesi $(\tau_i)_{i\in I}$ olsun.

$$\tau = \bigcap_{i\in I} \tau_i$$

kümesinin de X üzerine bir topoloji olduğunu kanıtlayacağız. Boşküme ve X, τ_i'lerin herbirinde olduğundan, kesişimlerindedir de. Demek ki $\emptyset$, $X \in \tau$.

τ'dan A ve B kümeleri alalım. Her $i \in I$ için A ve B, τ_i'de olduklarından ve her τ_i de bir topoloji olduğundan, $A \cap B$ kesişimi her τ_i'dedir yani τ'dadır.

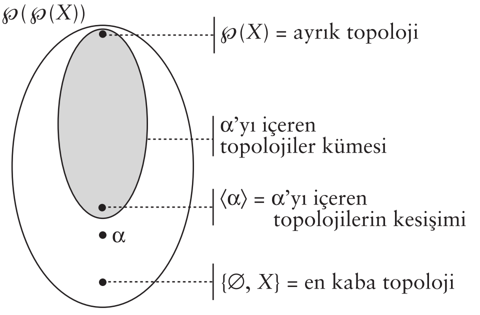
Şimdi τ'dan bir $(A_j)_{j\in J}$ ailesi alalım. Her $i \in I$ için her A_j kümesi τ_i'dedir, yani $(A_j)_{j\in J}$ ailesi τ_i'dedir. τ_i bir topoloji olduğundan, bu ailenin bileşimi olan

$$A = \bigcup_{j\in J} A_j$$

kümesi τ_i'dedir. Bu dediğimiz her $i \in I$ için doğru olduğundan, $A = \bigcup_{j\in J} A_j$ kümesi τ_i'lerin kesişimi olan τ'dadır. □

Sonuç 4.8. *X bir küme ve $\alpha \subseteq \wp(X)$ olsun. X üzerinde, α'yı içeren en az bir topoloji vardır (mesela ayrık topoloji). X'in α'yı içeren tüm topolojilerinin kesişimi α'yla üretilen topolojidir.*

[3] Boş bir ailenin kesişiminin alınamayacağını anımsatırız [N3].



Kanıt: Bir önceki önsava göre α'yı içeren X'in tüm topolojilerinin kesişimi X'in bir topolojisidir. Elbette bu kesişim α'yı içerir. α'yı içeren tüm topolojilerinin kesişimi α'yı içeren bir topoloji olduğuna göre, bu topoloji ancak α'yı içeren en küçük (yani en kaba) topoloji olabilir. Dolayısıyla bu topoloji $\langle\alpha\rangle$'dır. □

Kimi zaman iki değişik α aynı topolojiyi üretebilirler. Aşağıdaki önsav çok kullanışlıdır:

Önsav 4.9. *X bir küme olsun. α_1 ve α_2, X'in iki altkümeler kümesi olsun. Eğer α_1'in her elemanı α_2'nin elemanlarının bileşimi olarak yazılabiliyorsa o zaman $\langle\alpha_1\rangle \subseteq \langle\alpha_2\rangle$ olur, yani $\langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_1\rangle$'den daha incedir.*

Kanıt: Çok bariz! □

Dolayısıyla, iki altkümeler kümesinin aynı topolojiyi ürettiklerini göstermek için her birinin elemanını diğerinin elemanlarının bileşimi olarak yazabilmek yeterlidir (ama illa gerekli değildir).

Daha da kullanışlı bir sonuç aşağıda:

Önsav 4.10. *X bir küme olsun. $\alpha_1, \alpha_2 \subseteq \wp(X)$ olsun. Eğer her $p \in U \in \alpha_1$ için, $p \in V \subseteq U$ özelliklerini sağlayan bir $V \in \alpha_2$ varsa, o zaman $\langle\alpha_1\rangle \subseteq \langle\alpha_2\rangle$ olur.*

Kanıt: $U \in \alpha_1$ olsun. Her $p \in U$ için, $p \in V_p \subseteq U$ özelliklerini sağlayan bir V_p alalım. O zaman U, bu V_p'lerin bileşimi olur ve yukardaki önsava göre sonucumuz kanıtlanmış olur. □

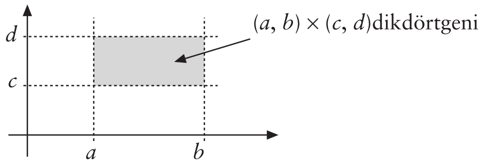
Örnekler

4.17. Bir kümenin bir elemanlı altkümeleri tarafından üretilen topoloji ayrık topolojidir.

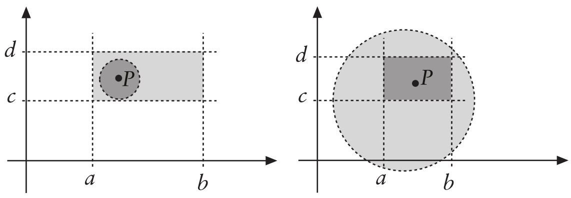
4.18. Eğer kümede en az üç eleman varsa, iki elemanlı altkümeler tarafından üretilen topoloji ayrık topolojidir.

4.19. Tümleyeni bir elemanlı olan kümeler tarafından üretilen topoloji sonlu tümleyenler topolojisidir.

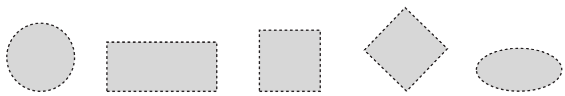
4.20. $\mathbb{R}^2$'nin $(a, b) \times (c, d)$ açık dikdörtgenleriyle üretilen topolojisi aynen Öklid topolojisidir.



Kanıt: Açık bir dikdörtgenin içinde bir P noktası alalım. Yeterince küçük bir $r > 0$ sayısı için, $B(P, r)$ açık yuvarı dikdörtgenin içinde olur. (Ayrıca P'yi içerir elbet. Bkz. aşağıdaki soldaki şekil.)



Şimdi açık bir yuvar ve bu yuvarın içinde bir P noktası alalım. Elbette bu P noktasını yuvarın içinde kalan bir dikdörtgenle örtebiliriz. (Bkz. üstteki sağdaki şekil).
Önsav 4.10'dan dolayı istediğimiz kanıtlanmıştır. □
Bu örneği çoğaltabiliriz: $\mathbb{R}^2$'nin açık dikdörtgenlerle, açık karelerle, açık yuvarlarla, açık elipslerle ya da açık baklavalarla üretilmiş topolojilerinin hepsi Öklid topolojisidir.



Alıştırmalar

4.21. $\mathbb{R}$'de ve $\mathbb{R}^2$'de açık bir kümenin (Öklid topolojisinde) ötelemesinin de açık olduğunu kanıtlayın.

4.22. Bir noktadan oluşan bir kümenin $\mathbb{R}^2$'nin Öklid topolojisinde açık küme olamayacağını kanıtlayın.

4.23. $P \in \mathbb{R}^2$ olsun. $\mathbb{R}\setminus\{P\}$ kümesinin Öklid topolojisinde açık bir küme olduğunu kanıtlayın.

4.24. $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^2$ sonlu bir küme olsun. $\mathbb{R} \setminus X$ kümesinin Öklid topolojisinde açık bir küme olduğunu kanıtlayın.

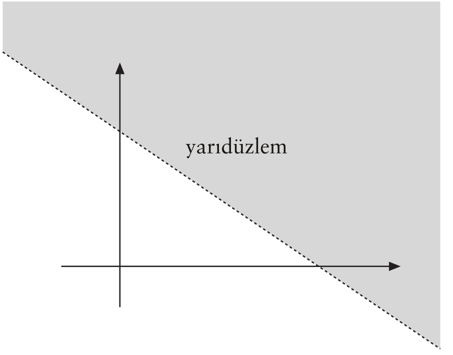
4.25. $\mathbb{R}^2$'nin Öklid topolojisinde sonlu sayıda elemanı olan bir kümenin, ancak boşkümeyse açık olabileceğini kanıtlayın.

4.26. Bir doğrunun $\mathbb{R}^2$'nin Öklid topolojisinde açık küme olmadığını kanıtlayın.

4.27. Boşküme olmayan kapalı (yani sınırlarını içeren) bir yuvarın $\mathbb{R}^2$'nin Öklid topolojisinde açık küme olamayacağını kanıtlayın.

4.28. $\mathbb{R}^2$'nin Öklid topolojisinde sürekli bir fonksiyonun grafiğinin açık olamayacağını kanıtlayın.

4.29. $\mathbb{R}^2$'de bir doğru, düzlemi, doğruyu içermeyen iki ayrık kümeye böler. Bu tür kümelere ***yarıdüzlem*** diyelim. Yarıdüzlemlerin ürettiği topolojinin Öklid topolojisi olduğunu kanıtlayın.



4.30. $\mathbb{R}^2$'de $(0,0)$'dan geçen doğruların belirlediği yarıdüzlemlerle üretilen topolojinin Öklid topolojisinden daha kaba olduğunu kanıtlayın.

4.31. X bir küme ve τ_1 ve τ_2, X üzerinde iki topoloji olsun. $\langle \tau_1 \cup \tau_2 \rangle$ topolojisinin

$$\{U \cap V : U \in \tau_1 \text{ ve } V \in \tau_2\}$$

kümesi tarafından üretildiğini kanıtlayın.

Bir başka kullanışlı sonuç daha: Taban kullanarak bir fonksiyonun sürekliliğini sınamak kolaydır:

Önsav 4.11. *X ve Y iki topolojik uzay, α, Y'nin bir öntabanı ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul α'nın her elemanının önimgesinin açık olmasıdır.*

Kanıt: α'nın elemanları Y'de açık olduklarından, koşul gereklidir. Şimdi α'nın her elemanının önimgesinin açık olduğunu varsayalım. V, Y'nin bir açık altkümesi olsun. Eğer $V = Y$ ise, V'nin önimgesi X olur, dolayısıyla açık olur. Bundan böyle $V \neq Y$ varsayımını yapalım. O zaman V, β'nın elemanlarının sonlu kesişimlerinin bileşimidir[4]. Ama f^{-1}, kesişimlere ve bileşimlere saygı duyar. Demek ki $f^{-1}(V)$ kümesi açıktır. □

Bundan daha da kullanışlı bir sonuç aşağıda.

Önsav 4.12. *X ve Y iki topolojik uzay, α ve β sırasıyla X ve Y'nin birer tabanı ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $a \in X$ ve $f(a)$'yı içeren her $B \in \beta$ için, $f(A) \subseteq B$ kapsamasını sağlayan ve a elemanını içeren bir $A \in \alpha$ olmasıdır.*

Önsavı kanıtlamadan önce hakkında bir iki söz söyleyelim. Önsavdaki B, gerçel sayılardaki

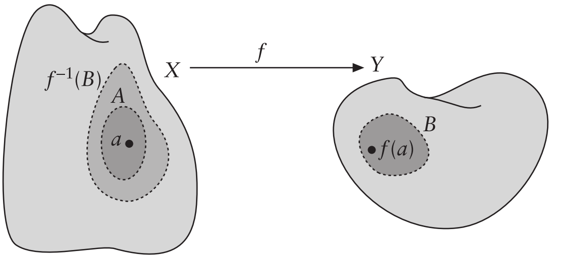
$$(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$$

[4] $V = \emptyset$ olsa bile, çünkü ne de olsa $\emptyset$, $\emptyset$'nin (olmayan!) elemanlarının bileşimidir. Ama mantıksal dile yabancı okur dilerse $V = \emptyset$ durumunu, $V = Y$ durumunda yaptığımız gibi, ayrıca irdeleyebilir.

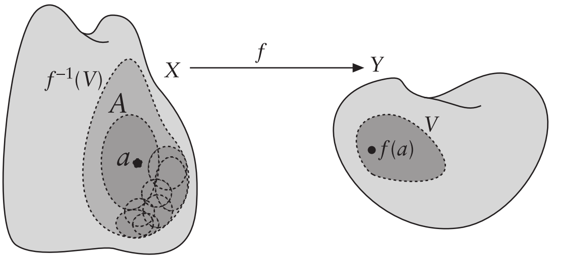
aralığının yerini, A ise
$$(a-\delta, a+\delta)$$
aralığının yerini almıştır. Yani "her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ var ki" yerine "her $B \in \beta$ için öyle bir $A \in \alpha$ var ki" diyoruz ve birdenbire analiz topolojiye dönüşüyor.

Önsav 4.12'nin Kanıtı: Önce f'nin sürekli olduğunu varsayalım. a ve B önsavdaki gibi olsun. B, Y'de açıktır elbette. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(B)$ açıktır ve ayrıca a'yı eleman olarak içerir. Bu açık küme α'nın elemanlarının bileşimidir. Demek ki α'nın, a'yı eleman olarak içeren ve $f^{-1}(B)$'nin altkümesi olan bir A elemanı vardır.

Şimdi de f'nin önsavın koşulunu sağladığını varsayalım. $V \subseteq Y$, herhangi bir açık küme olsun.



$f^{-1}(V)$'nin açık olduğunu kanıtlamalıyız. Topoloji β tarafından üretildiğinden, V, β'nın elemanlarının bileşimidir; dolayısıyla, f^{-1} bileşimle uyumlu olduğundan, V'nin β'nın bir elemanı olduğunu varsayıp $f^{-1}(V)$'nin açık olduğunu kanıtlamak yeterlidir.



$a \in f^{-1}(V)$ herhangi bir eleman olsun. Önermede var olduğu söylenen $f(A) \subseteq B$ ve $a \in A \in \alpha$ özelliklerini sağlayan A'ya A_a adını verelim. O zaman
$$f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in f^{-1}(V)} A_a$$
olur ve önsav kanıtlanır. $\square$

5. İndirgenmiş Topoloji

5.1 Bir Fonksiyonu Sürekli Kılmak

X bir küme, Y topolojik bir uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X kümesini, bu fonksiyonu sürekli kılan bir topolojiyle donatabilir miyiz? Elbette! Örneğin X'i ayrık topolojisiyle birlikte bir topolojik uzay olarak görürsek, o zaman f sürekli olur.

Ama bu, bir fındığı balyozla kırmaya benzedi. Durumu "ben istedim bir Allah verdi bin" diye de ifade edebiliriz. Neden derseniz, f'yi sürekli yapmaya çalışırken tüm fonksiyonları sürekli yaptık. Nitekim, X'i ayrık topolojiyle donatırsak, X'ten herhangi bir topolojik uzaya giden her fonksiyon sürekli olur.

f'nin sürekli olması için, sürekliliğin tanımı gereği, Y'nin her açık kümesinin önimgesi X'te açık olmalı. Demek ki, X'e koymak istediğimiz topoloji,

$$\tau = \{f^{-1}(V) : V \subseteq Y,\ V \text{ açık}\}$$

kümesini içermeli. Ama bu kümeler X üzerinde bir topoloji oluşturmak için zaten yeterli, çünkü

- $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$,
- $X = f^{-1}(Y)$,
- $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2)$,
- $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right)$

eşitlikleri geçerlidir ve bu eşitlikler sırasıyla şunları söylemektedir:

- $\emptyset \in \tau$,
- $X \in \tau$,
- Eğer $U_1, U_2 \in \tau$ ise, o zaman $U_1 \cap U_2 \in \tau$ olur.
- Eğer her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise, o zaman $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$ olur.

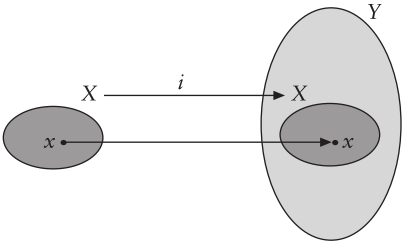
Bu son dört özellik de aynen τ'nun bir topoloji olduğunu söylemektedir. Bu topoloji elbette f'yi sürekli kılan en kaba topolojidir.

X üzerine f'yi sürekli kılan en kaba topolojiyi şu yöntemle de bulabiliriz: 1. X üzerinde topolojilerin kesişimi de X üzerinde bir topolojidir. 2. X üzerinde f'yi sürekli kılan en az bir topoloji vardır: her altkümenin açık olduğu en zengin topoloji. 3. f'yi sürekli kılan topolojilerin kesişimi olan topoloji için de f süreklidir. Bu üç önermenin doğruluğundan hemen emin olamayan okur bu önermeleri kanıtlamalıdır. Şimdi f'yi sürekli kılan X'in **tüm** topolojilerini kesiştirelim. Bu üç özellikten dolayı f'yi sürekli kılan bir topoloji elde ederiz. Dolayısıyla bu kesişim f'yi sürekli kılan en küçük, yani en kaba topolojidir.

Şimdi yukardaki fikirleri matematikte en sık karşımıza çıkan doğal bir fonksiyona uygulayacağız.

5.2 İndirgenmiş/Kısıtlanmış Topoloji

Y bir topolojik uzay ve X, Y'nin bir altkümesi olsun. X'ten Y'ye giden gömme fonksiyonunu ele alalım, yani her $x \in X$ için, $i(x) = x$ formülü tarafından tanımlanan $i : X \to Y$ fonksiyonunu. Bundan daha doğal bir fonksiyon hayal etmek oldukça zor olmalı.

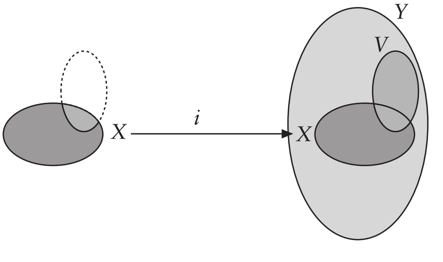


Daha önce de söylemiştik: Topolojide sürekli fonksiyonlar itibar görürler, diğerleri nerdeyse yok sayılırlar. Dolayısıyla sokaktaki topolog gömme fonksiyonlarının sürekli olmalarını ister. Bölümün başındaki yönteme başvurup, X'i bu fonksiyonu sürekli yapan en kaba topolojiyle donatacağız.

Yukardaki tartışmaya göre, X'in açık kümeleri, Y'nin bir V açık kümesi için $i^{-1}(V)$ biçiminde yazılan kümelerdir. $i^{-1}(V)$ kümelerinin neye benzediklerini görelim:

$$i^{-1}(V) = \{x \in X : i(x) \in V\} = \{x \in X : x \in V\} = V \cap X.$$

Demek ki X'in açık kümeleri, Y'nin bir V açık kümesi için, $V \cap X$ biçiminde yazılan kümelerdir. X'in bu topolojisine Y'den ***indirgenmiş topoloji*** denir. Bazen de X'e (Y'den) ***kısıtlanmış topoloji*** denir. X'in de Y'nin bir ***altuzayı*** olduğu söylenir.



Genellikle, bir Y topolojik uzayının bir X altkümesinden topolojik uzay olarak sözedildiğinde, daha fazla açıklamaya gerek görülmeden, X'in Y'den indirgenmiş topolojiyle donatıldığı varsayılır, yani X'in Y'nin bir altuzayı olduğu varsayılır.

İndirgenmiş topolojide X'in açık kümelerini, Y'nin açık kümelerinin X'te bıraktıkları "iz"ler olarak nitelendirebiliriz.

Bölüm 0.2.2'de, $\mathbb{R}$'nin X altkümeleri üzerinde bir topoloji tanımlamıştık. Bu topoloji aynen $\mathbb{R}$'nin X'e indirgenmiş topolojisidir.

Bulduğumuzu bir teorem olarak yazalım:

Teorem 5.1. *Y topolojik bir uzay ve X, Y'nin bir altkümesi olsun. X üzerinde, X'ten Y'ye giden doğal gömme fonksiyonunu sürekli kılan en kaba topoloji*

$$\{V \cap X : V \subseteq Y,\ V \text{ açık}\}$$

tarafından verilen topolojidir.

Örnekler

5.1. $X = (0, 2]$ ise $(1, 2)$ ve $(1, 2]$ kümeleri X'te açıktır ($\mathbb{R}$'den indirgenmiş topolojide elbette) ama $\{2\}$ kümesi X'te açık değildir.
Eğer $X = (0, 1] \cup \{2\}$ ise $\{2\}$, $(1/2, 1] \cup \{2\}$ ve $(1/2, 1]$ kümeleri de X'te açıktır.

5.2. $X \subseteq Y$ olsun. Y, en kaba topolojiyle donatılmış olsun. O zaman X'in Y'den indirgenmiş topolojisi X'in kaba topolojisidir.

5.3. $X \subseteq Y$ ve Y, ayrık topolojiyle donatılmış olsun. O zaman X'in Y'den indirgenmiş topolojisi X'in ayrık topolojisidir.

5.4. $\mathbb{Z}$'nin $\mathbb{R}$'den indirgenmiş topolojisi $\mathbb{Z}$'nin ayrık topolojisidir.

Alıştırmalar

5.5. Bölüm 0.2.2'de, $\mathbb{R}$'nin X altkümeleri üzerine tanımlanan topolojinin $\mathbb{R}$'nin X'e indirgenmiş topolojisi olduğunu kanıtlayın.

5.6. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kümesinin $\mathbb{R}$'den indirgenmiş topolojisinin 0'ı içermeyen açık aralıklar tarafından üretildiğini kanıtlayın.

5.7. $f(x) = x^{-1}$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın. ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üstüne $\mathbb{R}$'den indirgenmiş Öklid topolojisi alınıyor.)

Eğer $X \subseteq Y \subseteq Z$ ise ve Z bir topolojik uzaysa, o zaman topolojiyi önce Z'den Y'ye, sonra da Y'den X'e indirgeyebiliriz. Bir de ayrıca doğrudan Z'den X'e indirgeyebiliriz. Fark etmez. Her iki durumda da X üzerinde aynı topolojiyi buluruz:

Önsav 5.2. *Z topolojik bir uzay olsun. $X \subseteq Y \subseteq Z$ olsun. Y'yi Z'den indirgenmiş topolojiyle donatalım. O zaman X'in Y'den ve Z'den indirgenmiş topolojileri aynıdır. Bir başka deyişle eğer X, Y'nin, Y de Z'nin altuzayıysa, o zaman X, Z'nin altuzayıdır.*

Kanıt: X'in Y'den indirgenmiş topolojisi için açık bir U kümesi alalım. O zaman, Y'nin açık bir V kümesi için $U = V \cap X$ olur. Öte yandan V, Y'de açık olduğu için, Z'nin açık bir W kümesi için $V = W \cap Y$ olur. Demek ki,

$$U = V \cap X = (W \cap Y) \cap X = W \cap (Y \cap X) = W \cap X$$

olur. Dolayısıyla U, Z'nin X'e indirgenmiş topolojisi için de açıktır.

Şimdi X'in Z'den indirgenmiş topolojisi için açık bir U kümesi alalım. O zaman Z'nin açık bir W kümesi için

$$U = W \cap X$$

olur. Bundan da,

$$U = W \cap X = W \cap (X \cap Y) = (W \cap Y) \cap X$$

çıkar. Özetle

$$U = (W \cap Y) \cap X$$

Sonuç olarak, $W \cap Y$, Y'nin Z'den indirgenmiş topolojisinde açık olduğu için, U'nun Z'den indirgenmiş topolojide de açık olduğunu görürüz. □

İndirgenmiş topolojinin bir de şu "karakteristik özelliği" vardır (bkz. Alıştırma 5.16):

Önsav 5.3. *Y ve Z iki topolojik uzay, $X \subseteq Y$ bir altuzay ve $i : X \to Y$ doğal gömme fonksiyonu olsun. Son olarak $f : Z \to X$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için yeter ve gerek koşul, $i \circ f : Z \to Y$ fonksiyonunun sürekli olmasıdır.*

$$\begin{tikzcd} & Y \\ Z \arrow[ur, "i\circ f"] \arrow[r, "f"'] & X \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Kanıt: Eğer f sürekliyse, i de sürekli olduğundan, $i \circ f$ de süreklidir.

Şimdi de $i \circ f$ fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. $U \subseteq X$, X'in açık bir kümesi olsun. X üzerinde indirgenmiş topolojiyi aldığımızdan, Y'nin,

$$U = V \cap X$$

eşitliğini sağlayan açık bir V altkümesi vardır. Demek ki,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(V \cap X) = f^{-1}(i^{-1}(V)) = (i \circ f)^{-1}(V)$$

olur. Ama $i \circ f : Z \to Y$ fonksiyonu sürekli olduğundan ve V, Y'de açık olduğundan, $(i \circ f)^{-1}(V)$ kümesi Z'de açıktır. Demek ki $f^{-1}(U)$ kümesi de Z'de açıktır. □

Bu önsav, sürekliliğin fonksiyonun değer kümesinden bağımsız olduğunu gösteriyor, yeter ki değer kümesi üzerinde orijinal topolojiyle uyumlu bir topoloji alınsın.

Alıştırmalar

5.8. Öyle bir Y topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ altuzay örneği bulun ki Y'nin topolojisi en kaba topoloji olmasın ama X'in topolojisi en kaba topoloji olsun.

5.9. Öyle bir Y topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ altuzayı örneği bulun ki Y'nin topolojisi en ince topoloji olmasın ama X'in topolojisi en ince topoloji olsun.

5.10. X, Y'nin bir altuzayı olsun. X'in açık bir altkümesinin Y'nin açık altkümesi olmayabileceğini gösterin. Ama eğer X, Y'nin açık bir altkümesiyse, X'in bir U altkümesinin X'te ya da Y'de açık olmalarının eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

5.11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış olsun. Değer kümesine Öklid topolojisini verelim. Tanım kümesi üzerinde, bu fonksiyonu sürekli kılan en küçük topolojiyi bulun. Bu topolojide $g(x) = |x|$ fonksiyonunun da sürekli olduğunu kanıtlayın. Bu topolojide sürekli olmayan ama Öklid topolojisinde sürekli olan bir fonksiyon bulun.

5.12. Y topolojik bir uzay ve $X \subseteq Y$ bir altuzay olsun. α, Y'nin bir öntabanı (ya da tabanı) olsun. $\{A \cap X : A \in \alpha\}$ kümesinin X'in öntabanı (ya da tabanı) olduğunu kanıtlayın.

5.13. Y topolojik bir uzay ve $X \subseteq Y$ bir altuzay olsun. Eğer Y Hausdorff ise X'in de Hausdorff olduğunu kanıtlayın.

5.14. $X = \{0\} \cup \{1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. X'i $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinden indirgenmiş topolojiyle donatalım.
i. Eğer $x \in X \setminus \{0\}$ ise $\{x\}$ kümesinin X'te açık olduğunu kanıtlayın.
ii. X'in 0'ı içermeyen her altkümesinin X'te açık olduğunu kanıtlayın.
iii. X'in 0'ı içeren her açık kümesinin X'te tümleyeninin sonlu olduğunu kanıtlayın.

5.15. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. X'i $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinden indirgenmiş topolojiyle donatalım.
i. $(1/n)_{n>0}$ dizisinin X'te bir limiti var mıdır?
ii. X'te bir dizinin limiti olması için $\mathbb{R}$'de yakınsaklığı içeren gerek ve yeter bir koşul bulun. (Bkz. Teorem 5.4.)

5.16. Y bir topolojik uzay ve $X \subseteq Y$, Y'nin bir altkümesi olsun. X üzerinde, Önsav 5.3'ün doğru olduğu yegâne topolojinin Y'den indirgenmiş topoloji olduğunu kanıtlayın.

5.17. X ve Y birer topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Z, Y'nin $f(X)$'i içeren bir altkümesi olsun. $f : X \to Z$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

5.18. Y bir topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ ise, A'nın X'te ve Y'de içi ayrı ayrı irdelenebilir. Bu iki iç birbirine eşit olmak zorunda değildir. X'in bir A altkümesinin X'te içini $\text{Int}_X(A)$, Y'de içini $\text{Int}_Y(A)$ olarak gösterelim. $\text{Int}_Y(A) \subseteq \text{Int}_X(A)$ içindeliğini kanıtlayın. Eşitliğin olmayabileceğini gösterin.

5.19. X bir topolojik uzay ve $a \in Y \subseteq X$ olsun. Y üzerine (elbette!) X'in topolojisinden indirgenmiş topolojiyi alalım. a'nın Y-komşuluklarıyla a'nın X-komşulukları arasında nasıl bir ilişki vardır?

Teorem 5.4. *Y bir topolojik uzay ve $X \subseteq Y$ bir altuzay olsun. $(x_n)_n$, X'ten bir dizi ve $x \in X$ olsun. x'in X'in topolojisinde $(x_n)_n$ dizisinin bir limiti olması için x'in Y'nin topolojisinde $(x_n)_n$ dizisinin bir limiti olması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Çok kolay; tamamen tanımlardan çıkıyor. Okura bırakılmıştır. □

Süreklilik kavramı da indirgenmiş topolojiyle uyumlu davranır.

Teorem 5.5. *Y ve Z birer topolojik uzay, $X \subseteq Y$ ve $f : Y \longrightarrow Z$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f'nin X'e kısıtlanmışı olan $f_{|X} : X \to Z$ fonksiyonu da süreklidir.*

Kanıt: Bunun doğrudan kanıtı kolaydır ama şu kanıt, biraz ukalaca da olsa, daha şıktır: $i : X \to Y$ doğal gömme fonksiyonu olsun. O zaman $f_{|X} = f \circ i$ olur. Hem f hem de i sürekli olduklarından, Teorem 3.1'e göre bileşkeleri de süreklidir. □

İndirgenmiş topoloji için bu kadar çok teoremin doğru olmasının nedeni, indirgenmiş topoloji kavramının çok doğal bir kavram olmasıdır. Matematikte sık sık rastlanır buna: Bir kavram ne kadar doğalsa o kadar çok olumlu özelliği vardır, o kadar çok tüm beklentileri karşılar. Birkaç örnek daha vereceğiz. Ama önce bir tanım.

X bir küme olsun. $(A_i)_{i\in I}$, X'in bir altkümeler ailesi olsun. Eğer

$$\bigcup_{i\in I} A_i = X$$

ise, $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X'in ***örtüsü*** denir. Eğer X bir topolojik uzaysa ve her A_i, X'in açık bir altkümesiyse, o zaman X'in ***açık örtüsünden*** bahsedilir. Bir örtünün bazı elemanları eşit olabilirler, ya da bazıları boşküme olabilir.

Önsav 5.6. *X ve Y birer topolojik uzay ve $(U_i)_{i\in I}$, X'in açık bir örtüsü olsun. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $i \in I$ için, $f_{|U_i} : U_i \to Y$ fonksiyonu sürekliyse f de süreklidir.*

Kanıt: $V \subseteq Y$, herhangi bir açık küme olsun.

$$f^{-1}(V) = \bigcup_i (f^{-1}(V) \cap U_i) = \bigcup_i (f_{|U_i})^{-1}(V)$$

eşitliği bariz. Varsayıma göre sağdaki $(f_{|U_i})^{-1}(V)$ kümeleri U_i'de açıktır. Ama U_i, X'te açık olduğundan, $(f_{|Ui})^{-1}(V)$ kümeleri X'te de açıktır (Alıştırma 5.10). Demek ki bunların bileşimi de açıktır. □

Önsav 5.7. *X, Y'nin bir altuzayı olsun. α, Y'nin bir tabanı (ya da öntabanı) olsun. O zaman, $\{V \cap X : V \in \alpha\}$ kümesi X'in bir tabanıdır (ya da bir öntabanıdır).*

Kanıt: Kolay. Bkz. Alıştırma 5.12. □

Alıştırmalar

5.20. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için,

Her x'i içeren her $U \in \tau$ için, $V_n \subseteq U$ içindeliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ vardır

özelliğini sağlayan ve her biri x'i içeren sayılabilir sonsuzlukta $V_0, V_1, V_2, \ldots$ açık kümeleri varsa, X'e ***birinci sayılabilir*** ya da ***düşük sayılabilir*** topolojik uzay adı verilir.

i. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ topolojik uzaylarının sayılabilir sonsuzlukta olan kesirli sayılar sayesinde, birinci sayılabilir topojik uzaylar olduğunu kanıtlayın.

ii. Sorgenfrey doğrusunun birinci sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

iii. Birinci sayılabilir uzayların altuzaylarının da birinci sayılabilir olduklarını kanıtlayın.

iv. Sayılamaz sonsuzlukta bir küme üzerinde (örneğin $\mathbb{R}$ üzerinde) sonlu tümleyenler topolojisi alalım. Bu topolojinin birinci sayılabilir olmadığını gösterin.

5.21. Sayılabilir bir tabanı olan topolojik uzaylara ***ikinci sayılabilir*** ya da ***yüksek sayılabilir*** adı verilir. İkinci sayılabilir topolojik uzaylar birinci sayılabilir uzaylardır elbet.
i. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^2$ topolojik uzaylarının ikinci sayılabilir topojik uzaylar olduğunu kanıtlayın.
ii. Birinci sayılabilir ama ikinci sayılabilir olmayan bir topolojik uzay örneği bulun. İpucu: ω_1 ya da aşağıdaki iv'üncü kısım.
iii. İkinci sayılabilir uzayların altuzaylarının da ikinci sayılabilir olduklarını kanıtlayın.
iv. Sorgenfrey doğrusunun ikinci sayılabilir bir uzay olmadığını kanıtlayın.

5.3 Değer Kümesinde Topoloji Bulmak

X topolojik bir uzay, Y bir küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Y'nin hangi topolojileri için bu fonksiyon süreklidir? Eğer Y'yi en kaba topolojiyle donatırsak, sadece bu fonksiyon değil her fonksiyon sürekli olur. Öte yandan Y'yi ayrık topolojiyle donatırsak, f muhtemelen sürekli olmaz.

Soru: *Y üzerine f'yi sürekli kılan en zengin (yani en ince) topoloji var mıdır ve varsa hangi topolojidir?*

Önce birinci kısmı yanıtlayalım. $(\alpha_i)_i$, Y üzerine f'yi sürekli kılan bir topoloji ailesi olsun. β, bu ailenin, yani bu ailenin bileşiminin ürettiği topoloji olsun. β'nın da f'yi sürekli kıldığını kanıtlayacağız. Önce β'nın elemanlarını betimleyelim. β, elbette, sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_k \in I$ ve $U_j \in \alpha_{i_j}$ için,

$$U_1 \cap \ldots \cap U_k$$

türünden altkümeleri ve bunların rastgele bileşimlerini içerir. Bu sonlu kesişimlerin rastgele bileşimleri bir topoloji oluşturduğundan, bu sonlu kesişimler β'nın tabanıdır.

$f^{-1} : \wp(Y) \to \wp(X)$ fonksiyonu bileşime ve kesişime saygı duyduğundan, f fonksiyonu Y'nin β topolojisinde de sürekli. Sorumuzu yanıtladık:

Teorem 5.8. *X topolojik bir uzay, Y bir küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'yi sürekli kılan tüm topolojilerin ürettiği topoloji f'yi sürekli kılar ve bu topoloji, Y üzerine f'nin sürekli olduğu en zengin topolojidir.* □

Alıştırmalar

5.22. $X = Y = \mathbb{R}$ ve $f : X \to Y$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ formülüyle verilmiş olsun. X üzerine Öklid topolojisi alalım. Y üzerine f'yi sürekli kılan en zengin topolojiyi bulun.

5.23. $\mathbb{R}$ üzerine şu denklik ilişkisini tanımlayalım: $x \equiv y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}/\equiv$ denklik sınıfları kümesine giden doğal örten fonksiyonu sürekli kılan $\mathbb{R}/\equiv$ üzerine en zengin topolojiyi bulun.

5.24. $X \subset Y$ ve X bir topolojik uzay olsun. $i(x) = x$ formülüyle verilmiş $i : X \longrightarrow Y$ fonksiyonunu sürekli yapan Y üzerine en zengin topoloji nedir?

5.25. X ve Y topolojik uzaylar, Z bir küme ve $f : X \to Z$ ve $g : Y \to Z$ iki fonksiyon olsun.
i. Z üzerine hem f'yi hem de g'yi sürekli kılan en zengin topolojiyi bulun.
ii. X ve Y iki ayrık topolojik uzay olsun. $Z = X \sqcup Y$ olsun[1]. f ve g sırasıyla X ve Y'den Z'ye giden doğal gömmeler olsun. Z üzerine f ve g fonksiyonlarını sürekli kılan en zengin topolojiyi bulun.

[1] $X \sqcup Y$, $X \cup Y$ anlamına gelir ama bunun da ötesinde X ile Y'nin kesişiminin boşküme olduğunu söyler.

6. Çarpım Topolojisi

Bu bölümde topolojik uzayların kartezyen çarpımını “doğal” bir topolojik uzay yapısıyla donatacağız. Eğer X ve Y topolojik uzaylarsa, $X \times Y$ üzerine en doğal topolojik yapı, herhalde, $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ açık altkümeleri için $U \times V$ türünden yazılan altkümelerinin ve bunların bileşimlerinin açık olduklarına hükmederek elde edilir. Nitekim, bu tanımla, $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine doğal ve işlevsel bir topolojik yapı tanımlanmış olur. Aynı düşünce sonsuz sayıda topolojik uzayın çarpımı için de düşünülebilir: $U_i \subseteq X_i$ açık kümeleri için, $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımının $\prod_{i \in I} U_i$ biçiminde yazılan altkümelerine ve bunların bileşimlerine açık dersek, kartezyen çarpım üstüne doğal bir topoloji tanımlamış oluruz; hatta daha doğalı olamaz diye bile düşünülebilir. Ama ne yazık ki eğer I sonsuzsa, bu topoloji pek kullanışlı değildir, çok incedir, biraz fazla açık kümesi vardır. Bu bölümde, sonsuz kartezyen çarpım üzerine gene doğal ama yukardakinden daha kullanışlı (ve daha kaba) bir topoloji tanımlayacağız. Önce, çok daha basit olan iki topolojik uzayın kartezyen çarpımını irdeleyeceğiz, sonra sonsuz sayıda topolojik uzayın kartezyen çarpımına geçeceğiz.

6.1 İki Fonksiyonu Aynı Anda Sürekli Kılmak

Z bir küme ve X ve Y iki topolojik uzay olsun.

$$f : Z \to X \text{ ve } g : Z \to Y$$

iki fonksiyon olsun. Bu sefer, Z üzerinde hem f'yi hem de g'yi sürekli kılan en kaba topolojiyi bulmak istiyoruz.

Z'nin f'yi sürekli kılan en kaba topolojisini biliyoruz; g'yi sürekli yapan en kaba topolojisini de biliyoruz. İstediğimiz topoloji elbette bu iki topolojiyi içeren en küçük topoloji olmalı, yani bu iki topolojiyle üretilen topoloji olmalı.

f'yi sürekli yapan Z'nin en kaba topolojisinin açık kümeleri, X'in açık V kümeleri için,

$$f^{-1}(V)$$

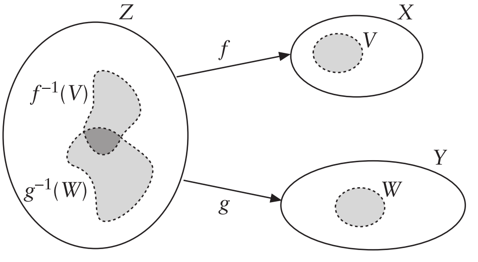
biçiminde yazılan kümelerdir. g'yi sürekli yapan Z'nin en kaba topolojisinin açık kümeleri de Y'nin W açık kümeleri için,

$$g^{-1}(W)$$

biçiminde yazılan kümelerdir. Demek ki Z üzerinde koymak istediğimiz topolojide, X'in V açık kümeleri ve Y'nin W açık kümeleri için,

$$f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$$

biçiminde yazılan kümeler açık olmalı.



Önsav 6.1. *Her şey yukardaki gibi olsun.*

$$\{f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W) : V \subseteq X,\, W \subseteq Y,\, V \textit{ ve } W \textit{ açık}\}$$

kümesinin Z kümesi üzerinde ürettiği topoloji, f ve g fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojidir. Ayrıca yukarda merkezlenen küme bu topolojinin bir tabanıdır.

Kanıt: Kümeye α, gerdiği topolojiye de τ adını verelim. α'nın τ'nun bir tabanı olacağı belli çünkü α kesişim altında kapalı (Sonuç 4.5):

$$\begin{aligned}(f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)) \cap (f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(W_1))&\\ &= f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(W) \cap g^{-1}(W_1)\\ &= f^{-1}(V \cap V_1) \cap g^{-1}(W \cap W_1).\end{aligned}$$

$f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ ifadesinde $W = Y$ alırsak, sadece $f^{-1}(V)$ kalır. Gene aynı ifadede bu sefer $V = X$ alırsak, sadece $g^{-1}(W)$ kalır. Demek ki f ve g'yi sürekli kılan en kaba topolojilerin açık kümeleri α'da. Bundan da τ'nun, hem f hem de g fonksiyonlarını sürekli kıldığı ortaya çıkar. Öte yandan f ve g'yi sürekli kılan her topolojinin α'yı içerdiğini daha önce gördük: Bu topoloji hem $f^{-1}(V)$ kümesini hem de $g^{-1}(W)$ kümesini de içerdiğinden, bu iki kümenin kesişimini de içerir. Önsav kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

6.1. Her şey Önsav 6.1'deki gibi olsun. α ve β bu topolojilerin (sırasıyla) birer tabanı/öntabanı olsun.

$$\{f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W) : V \in \alpha,\, W \in \beta\}$$

kümesinin Önsav 6.1'de Z üzerine inşa edilen topolojinin tabanı/öntabanı olduğunu kanıtlayın.

6.2. Her $n > 0$ doğal sayısı için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ üzerine ayrık topolojiyi alalım. $\phi_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ fonksiyonu, $x - \phi_n(x) \in n\mathbb{Z}$ koşuluyla tanımlanan tahmin edilen "modülo n" fonksiyonu olsun.
i. $\mathbb{Z}$ üzerine ϕ_2'yi sürekli kılan en kaba topolojiyi bulun.
ii. $n > 0$ olsun. $\mathbb{Z}$ üzerine ϕ_n'yi sürekli kılan en kaba topolojiyi bulun.
iii. $\mathbb{Z}$ üzerine ϕ_2 ve ϕ_3'ü sürekli kılan en kaba topolojiyi bulun.
iv. $\mathbb{Z}$ üzerine her n için ϕ_n'yi sürekli kılan en kaba topolojiyi bulun.
v. $\mathbb{Z}$ üzerine her p asalı için ϕ_p'yi sürekli kılan en kaba topolojiyi bulun.

6.2 Çarpım Topolojisi

Yukardaki sonucu özel bir duruma uygulayalım. X ve Y iki topolojik uzay olsun. Daha önceki yazılıma uyup $Z = X \times Y$ tanımını yapalım. pr_1, $X \times Y$'den X'e giden ve

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon olsun. (Buna ***birinci izdüşüm fonksiyonu*** denir.) pr_2, $X \times Y$'den Y'ye giden ve

$$\mathrm{pr}_2(x, y) = y$$

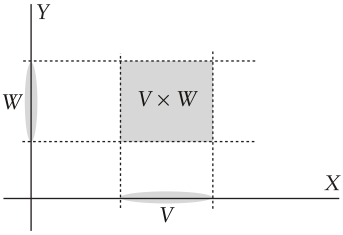
kuralıyla tanımlanmış fonksiyon olsun. (Buna da ***ikinci izdüşüm fonksiyonu*** denir.)

$X \times Y$ kartezyen çarpımını, pr_1 ve pr_2 fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojiyle donatalım. Bu topoloji, yukarda gördüğümüz gibi, X'in bir V açık altkümesi ve Y'nin bir W açık altkümesi için,

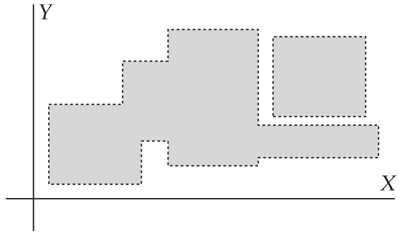
$$\mathrm{pr}_1^{-1}(V) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(W)$$

kümeleri tarafından gerilmiştir ve bu kümeler gerdikleri topolojinin bir tabanını oluştururlar. Gerilen topolojiyi daha iyi anlamak için, tabanı oluşturan kümelerin neye benzediklerini görelim:

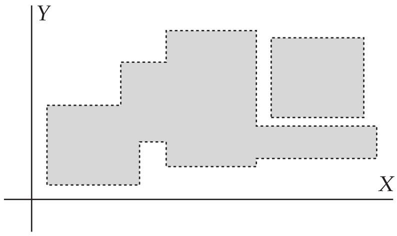
$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_1^{-1}(V) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(W) &= \{(x, y) \in X \times Y : \mathrm{pr}_1(x, y) \in V,\ \mathrm{pr}_2(x, y) \in W\}\\ &= \{(x, y) \in X \times Y : x \in V,\ y \in W\} = V \times W.\end{aligned}$$



Çarpım topolojisini üreten kümeler



Çarpım topolojisinin tipik bir açık kümesi:
"Açık dikdörtgen"lerin bileşimi
(dikdörtgenlerden sonsuz tane olabilir)



Çarpım topolojisinin tipik bir açık kümesi:
"Açık dikdörtgen"lerin bileşimi
(dikdörtgenlerden sonsuz tane olabilir)

Bunu bir teorem olarak yazalım.

Teorem 6.2. *X ve Y iki topolojik uzay olsun. $X \times Y$ üzerinde birinci ve ikinci izdüşüm fonksiyonlarının ikisini birden sürekli kılan en kaba topoloji*

$$\{V \times W : V \subseteq X,\ W \subseteq Y,\ V \text{ ve } W \text{ açık}\}$$

kümesiyle üretilen topolojidir. Bu küme topolojinin bir tabanıdır.

Bu topolojiye ***çarpım topolojisi*** ya da ***Tychnoff topolojisi*** adı verilir. Eğer X ve Y iki topolojik uzaysa, ve $X \times Y$ kartezyen çarpımından herhangi bir açıklama yapılmaksızın topolojik uzay olarak bahsediliyorsa, bilin ki çarpım topolojisi alınmıştır.

Pek sık yapılan bir yanlışa karşı okuru uyaralım, çarpım topolojisinin bir açık kümesi illa $V \times W$ biçiminde yazılmayabilir, ama kesinlikle bu tür kümelerin sonlu ya da sonsuz bileşimidir.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin topolojisi de $(a, b) \times (c, d)$ türünden altkümelerle üretilmiştir, yani $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin (çarpım topolojisinin) açık altkümeleri bu tür kümelerin, "dikdörtgenlerin içi" diyelim, bileşimidir.

Alıştırmalar

6.3. X'in topolojisi inceldikçe $X \times X$'in topolojisinin inceldiğini kanıtlayın. $X \times X$'in topolojisi inceldikçe X'in topolojisinin inceldiğini kanıtlayın.

6.4. X bir küme Y bir topolojik uzay ve $f : X \times X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Şunu kanıtlayın: X üzerinde, ($X \times X$'in çarpım topolojisiyle) f'yi sürekli kılan en kaba topoloji vardır.

6.5. Toplama ve çarpma işlemlerinin, yani $f(x,y) = x+y$ ve $g(x,y) = xy$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden sürekli fonksiyonlar olduğunu kanıtlayın.

6.6. Eğer X ve Y ikinci sayılabilir uzaylarsa, $X\times Y$ topolojik uzayının da ikinci sayılabilir uzay olduğunu kanıtlayın.

6.3 Sürekli Fonksiyonlar

Bir A topolojik uzayından $X\times Y$'ye giden bir fonksiyonun ne zaman sürekli olduğunu anlamak kolaydır. Bu paragrafta bu konuyu ele alacağız.

A, X ve Y şimdilik üç küme olsun.

$$f : A \to X\times Y$$

bir fonksiyon olsun. O zaman her $a \in A$ için, $f(a)$ değeri, biri X'ten biri Y'den olmak üzere, iki koordinat tarafından verilmiştir. Birinci koordinata $f_1(a)$, ikinci koordinata $f_2(a)$ diyelim. Demek ki,

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Buradaki f_1 ve f_2, A'dan, sırasıyla, X'e ve Y'ye giden fonksiyonlardır. Elbette

$$f_1 = \mathrm{pr}_1\circ f \text{ ve } f_2 = \mathrm{pr}_2\circ f$$

eşitlikleri geçerlidir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer f_1 ve f_2, A'dan X'e ve Y'ye giden fonksiyonlarsa o zaman

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$

kuralı bize A'dan $X\times Y$ kartezyen çarpımına giden bir fonksiyon verir. Bu fonksiyonu $f_1\times f_2$ olarak gösterelim:

$$(f_1\times f_2)(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Sonuç olarak, $\mathrm{Fonk}(A, X\times Y)$ kümesiyle[1] $\mathrm{Fonk}(A,X)\times\mathrm{Fonk}(A,Y)$ kümesi arasında

$$f \mapsto (\mathrm{pr}_1\circ f, \mathrm{pr}_2\circ f)$$

formülüyle verilmiş (doğal) bir eşleme vardır. Bu eşlemenin tersi,

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1\times f_2$$

kuralıyla verilmiştir. $f_1\times f_2$ fonksiyonu daha ziyade (f_1, f_2) olarak yazılır.

Eğer S ve T birer topolojik uzaysa,

$$C(S,T)$$

[1] X ve Y iki kümeyse, $\mathrm{Fonk}(X,Y)$, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesini simgeliyor.

yazılımı S'den T'ye giden sürekli fonksiyonlar kümesini simgelesin. O zaman, Fonk$(A, X \times Y)$ kümesiyle Fonk$(A, X) \times$ Fonk(A, Y) kümesi arasında yukarda verdiğimiz eşlemeler, $C(A, X \times Y)$ kümesiyle $C(A, X) \times C(A, Y)$ kümesi arasında eşlemelere yol açarlar:

Teorem 6.3. *A, X ve Y topolojik uzaylar olsun. $f : A \to X \times Y$ bir fonksiyon olsun. O zaman f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul,*

$$f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f \ \textit{ ve } f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$$

fonksiyonlarının sürekli olmasıdır.

Kanıt: Eğer f sürekliyse, izdüşüm fonksiyonları (çarpım topolojisinin tanımından dolayı!) sürekli olduklarından $f_1 = \mathrm{pr}_1 \circ f$ ve $f_2 = \mathrm{pr}_2 \circ f$ fonksiyonları süreklidir. Şimdi

$$f_1 : A \to X \text{ ve } f_2 : A \to Y$$

fonksiyonlarının sürekli olduklarını varsayıp,

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$

formülüyle tanımlanmış

$$f : A \to X \times Y$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlamak yeterli. Bunun için de $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ açık kümeleri için,

$$f^{-1}(U \times V)$$

kümesinin A'da açık olduğunu kanıtlamak yeterli.

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{a \in A : f(a) \in U \times V\} \\ &= \{a \in A : (f_1(a), f_2(a)) \in U \times V\} \\ &= \{a \in A : f_1(a) \in U \text{ ve } f_2(a) \in V\} \\ &= \{a \in A : a \in f_1^{-1}(U) \text{ ve } a \in f_2^{-1}(V)\} \\ &= f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V), \end{aligned}$$

ve bu da, iki açık kümenin kesişimi olduğundan A'da açıktır. □

Aşağıdaki alıştırmalarda X ve Y iki topolojik uzaydır ve $X \times Y$ üzerinde hep çarpım topolojisi alınmıştır.

Alıştırmalar

6.7. $X \times Y$'nin topolojisinin ayrık olması için X ve Y'nin topolojilerinin ayrık olmasının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

6.8. $X \times Y$'nin topolojisinin en kaba topoloji olması için X ve Y'nin topolojilerinin en kaba topoloji olmasının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

6.9. pr_1 ve pr_2 izdüşüm fonksiyonlarının $X \times Y$ kartezyen çarpımının açık kümelerini sırasıyla X'in ve Y'nin açık kümelerine götürdüğünü kanıtlayın. (Açık kümeleri açık kümelere götüren fonksiyonlar enderdir. Bunlara ***açık fonksiyon*** denir.)

6.10. X ve Y topolojik uzaylar ve $y \in Y$ olsun. $g(x) = (x, y)$ kuralıyla tanımlanmış

$$g : X \to X \times \{y\}$$

eşlemesinin X ile $X \times \{y\}$ topolojik uzayları arasında bir homeomorfizma (yani hem g'nin hem de g^{-1}'in sürekli) olduğunu kanıtlayın. (Burada, $X \times \{y\}$'nin topolojisi, $X \times Y$'nin çarpım topolojisinden indirgenmiş topolojidir elbette.)

6.11. $X \times Y$'nin Hausdorff olması için hem X'in hem de Y'nin Hausdorff olmasının gerek ve yeter olduğunu gösterin.

6.12. X ve Y iki topolojik uzay olsun. A ve B sırasıyla X ve Y'nin altuzayları olsun. $A \times B$ kümesini iki değişik topolojiyle görebiliriz: A ve B'nin çarpım topolojisiyle ve $X \times Y$'den indirgenmiş topolojiyle. Bu iki topolojinin aynı topoloji olduğunu kanıtlayın.

6.13. X, Y, Z üç topolojik uzay olsun. $f : X \times Y \longrightarrow Z$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. $f_a : Y \longrightarrow Z$ fonksiyonunu $f_a(y) = f(a, y)$ kuralıyla tanımlayalım.
i. f sürekliyse f_a'nın sürekli olduğunu kanıtlayın.
ii. Her $a \in X$ için f_a sürekliyse, f'nin illa sürekli olmayabileceğini kanıtlayın.

6.14. X ve Y iki topolojik uzay olsun. n bir doğal sayı olsun. $\phi : Y^n = Y \times \ldots \times Y \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $i = 1, \ldots, n$ için, $f_i : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $x \mapsto \phi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ kuralıyla tanımlanmış X'ten Y'ye giden fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.

Eğer X ve Y'nin öntabanları ya da tabanları verilmişse, $X \times Y$'nin de tabanını ya da öntabanını bulmak mümkündür:

Önsav 6.4. *X ve Y iki topolojik uzay olsun. α ve β'nın sırasıyla X ve Y'nin öntabanları (ya da tabanları) olduklarını varsayalım. O zaman*

$$\{A \times B : A \in \alpha,\ B \in \beta\}$$

kümesi $X \times Y$'nin bir öntabanıdır (ya da tabanıdır).

Kanıt: Öntaban için kanıtlayalım. $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ iki açık küme olsun. O zaman, V,

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \alpha$$

olmak üzere,

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

biçiminde yazılan kümelerin bileşimidir. Yazılımda tasarruf sağlamak amacıyla,

$$V = \bigcup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

yazalım. Aynı şekilde,

$$W = \bigcup (B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_m)$$

yazalım. Eğer m ve n eşit değilse, A_n ya da B_m'yi yeterince tekrar ederek $n = m$ varsayımını yapabiliriz. O zaman

$$\begin{aligned} V \times W &= \left(\bigcup (A_1 \cap \ldots \cap A_n)\right) \times \left(\bigcup (B_1 \cap \ldots \cap B_n)\right) \\ &= \bigcup ((A_1 \cap \ldots \cap A_n) \times (B_1 \cap \ldots \cap B_n)) \\ &= \bigcup ((A_1 \times B_1) \cap \ldots \cap (A_n \times B_n)) \end{aligned}$$

olur ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

Örnek 6.15. $\mathbb{R}^2$ Üzerinde Öklid Topolojisi. Önsavda $X = Y = \mathbb{R}$ alalım (elbette Öklid topolojileriyle donatılmış olarak). Önsav 6.4'e göre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin çarpım topolojisi $(a, b) \times (c, d)$ dikdörtgenleri tarafından gerilmiştir, ki bu da Öklid topolojisini verir (Örnek 4.20).

İki topolojik uzayın çarpımı alınabildiğine göre sonlu sayıda topolojik uzayın da çarpımı alınabilir. Ama bir şeye dikkat etmek lazım: Böyle bir tanıma girişmeden önce, örneğin, $(X \times Y) \times Z$ topolojik uzayıyla $X \times (Y \times Z)$ topolojik uzaylarının homeomorfik olduklarını göstermek gerekir, yoksa tanım muğlak olur. Telaşa mahal yok, gerçekten de öyledir. Ama bir sonraki altbölümde çok daha genel bir şey yapacağımızdan bunun ayrıntılarına girmiyoruz ve kanıtı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

Alıştırmalar

6.16. X, Y ve Z üç topolojik uzay olsun. $(X \times Y) \times Z$ topolojik uzayıyla $X \times (Y \times Z)$ topolojik uzayları arasında hem kendi hem de tersi sürekli olan bir eşleme olduğunu, yani uzayların homeomorfik olduklarını gösterin.

6.17. $s(x, y) = x + y$ kuralıyla tanımlanmış $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuyla, $m(x, y) = xy$ kuralıyla tanımlanmış $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduklarını kanıtlayın. Bu fonksiyonlar açık mıdırlar?

6.18. X ve Y iki topolojik uzay olsun. A ve B sırasıyla X ve Y'nin altkümeleri olsun.

$$A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$$

eşitliğini kanıtlayın.

6.19. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. $(x_n)_n$ bir X-dizisi ve $(y_n)_n$ bir Y-dizisi olsun. Ayrıca $x \in X$ ve $y \in Y$ olsun. (x_n, y_n) dizisinin (x, y) noktasına (çarpım topolojisinde elbet) yakınsaması için $(x_n)_n$ dizisinin x'e ve $(y_n)_n$ dizisinin y'ye yakınsamasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayın. Bkz. Teorem 6.6.

6.20. Lindelöf Teoremi'nin (Teorem 0.21) bir benzerini $\mathbb{R}^2$ için kanıtlayın.

6.4 Çarpım Topolojisi (sonsuz)

X bir küme, $(X_i)_{i \in I}$ bir topolojik uzay ailesi ve

$$(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$$

bir fonksiyon ailesi olsun. X üzerinde f_i fonksiyonlarının her birini sürekli kılan en kaba topoloji - elbette,

$$\{f_i^{-1}(U) : i \in I,\, U \subseteq X_i,\, U \text{ açık}\}$$

kümesiyle üretilen topolojidir. Bu küme bu topolojinin bir öntabanıdır ama illa bir tabanı olmayabilir. Topolojinin bir tabanını bulmak için, bu öntabanın kümelerinin sonlu kesişimlerini almak gerekir: Her $n \in \mathbb{N}$, her $i_1, \ldots, i_n \in I$, her $j = 1, \ldots, n$ ve X_{i_j}'nin her U_{i_j} açık altkümesi için, X'in

$$f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap f_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \ldots \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

biçiminde yazılan altkümelerinden oluşan küme, bu topolojinin bir tabanıdır.

Bu dediklerimizi,

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

kartezyen çarpımına[2] ve

$$\mathrm{pr}_i : X \to X_i$$

izdüşüm fonksiyonlarına uygulayalım. pr_i izdüşüm fonksiyonlarının,

$$\mathrm{pr}_i((x_i)_{i \in I}) = x_i$$

olarak tanımlandığını anımsatalım. Yukarda açıklanan yöntemle elde edilen topolojiye ***çarpım topolojisi*** ya da ***Tychonoff topolojisi*** denir. Bu topolojinin tabanını daha açık bir biçimde gösterelim.

$$\mathrm{pr}_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : x_{i_j} \in U_{i_j} \right\}$$

olduğundan, çarpım topolojisinin tabanı, her $n \in \mathbb{N}$, her $i_1, \ldots, i_n \in I$ ve X_{i_j}'nin her U_{i_j} açık altkümesi için, $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımının

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : \text{ her } 1 \le j \le n \text{ için } x_{i_j} \in U_{i_j} \right\}$$

türünden yazılan altkümelerinden oluşur. Bunlar da aynen $\prod_{i \in I} X_i$ kümesinin her $j = 1, 2, \ldots, n$ için i_j'inci koordinatı U_{i_j}'de olan altkümeleridir. Daha sade ve şık bir gösterimle, $\prod_{i \in I} X_i$ uzayının tabanı, sadece sonlu sayıda $i \in I$ için $U_i \ne X_i$ olduğu, X_i'nin U_i açık altkümeleri için,

$$\prod_{i \in I} U_i$$

biçiminde yazılan altkümelerden oluşur. Bu tür açık kümelere ***temel açık kümeler*** diyebiliriz.

Örnekler

6.21. $I = \mathbb{N}$ ve her $i \in I$ için, $X_i = \mathbb{R}$ ise,

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

topolojik uzayının

$$\begin{array}{l} (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \\ \mathbb{R} \times (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \\ (0,1) \times (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \end{array}$$

[2]Kartezyen çarpımla aşina olmayan okur için bölüm sonunda konuyla ilgili bir paragraf vardır.

altkümeleri tabanın birer elemanıdır ve dolayısıyla herbiri açıktır ama

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}(0,1) = (0,1)\times(0,1)\times(0,1)\times\ldots$$

altkümesi çarpım topolojisinde açık değildir. (Kanıtlayın.)

6.22. X bir küme olsun. $2 = \{0,1\}$ tanımını anımsatırız [N2]. X'ten 2 kümesine giden her fonksiyon, şu yöntemle X'in bir ve bir tek $\alpha(f)$ altkümesini verir: Eğer $f : X \longrightarrow 2$ ise,

$$\alpha(f) = \{x \in X : f(x) = 1\} \subseteq X$$

olsun. Diğer yandan eğer $Y \subseteq X$ ise,

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in Y \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin Y \text{ ise} \end{cases}$$

formülü bize X'ten 2 kümesine giden bir χ_Y fonksiyonu verir. χ_Y fonksiyonuna Y'nin (X'e göre) ***karakteristik fonksiyonu*** adı verilir. χ ve α fonksiyonları birbirinin tersidir: $\alpha(\chi_Y) = Y$ ve $\chi_{\alpha(f)} = f$. Dolayısıyla her iki fonksiyon da birer eşlemedir. Böylece $\wp(X)$, Fonk$(X,2)$ ve $\prod_X\{0,1\}$ kümeleri birbirleriyle eşleniktir. $\{0,1\}$ üzerine ayrık topolojiyi alırsak, $\prod_X\{0,1\}$ kümesini çarpım topolojisiyle donatabiliriz. Böylece $\wp(X)$ ve Fonk$(X,2)$ kümeleri de bir topolojiyle donatılmış olur (bkz. Alıştırma 1.11). Bu topolojide temel bir açık küme, sonlu A, $B \subseteq X$ altkümeleri için,

$$U(A,B) = \{Y \subseteq X : A \subseteq Y \text{ ve } B \cap Y = \emptyset\}$$

biçimindedir. Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise $U(A,B)$ boşkümedir elbet, aksi halde A'yı eleman olarak içeren bir kümedir. Bir $Y \subseteq X$ altkümesini içeren temel bir açık küme, sonlu $A \subseteq Y$ ve $B \subseteq Y^c$ altkümeleri için $U(A,B)$ biçiminde yazılır.

Alıştırmalar

6.23. $\wp(X)$ üzerine Örnek 6.22'de tanımlanan topolojiyi alalım.

$$(A,B) \mapsto A\cap B,\ (A,B)\mapsto A\cup B\ (A,B)\mapsto A\setminus B$$

formülleriyle tanımlanmış

$$\cup,\ \cap,\ \setminus : \wp(X)\times\wp(X) \longrightarrow \wp(X)$$

fonksiyonlarının ve $A \mapsto A^c$ kuralıyla tanımlanmış $\wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlayın.

6.24. Örnek 6.22'den devam edelim. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow 2$ fonksiyonu, n noktasında 1, diğer noktalarda 0 alan fonksiyon olsun. $f_n \in$ Fonk$(\mathbb{R},2) \simeq \prod_{\mathbb{R}} 2$ olduğundan, $(f_n)_n$ dizisinin çarpım topolojisinde limitinden söz edebiliriz. Bu dizinin sabit 0 fonksiyonuna yakınsadığını kanıtlayın. Her $f : \mathbb{R} \longrightarrow 2$ fonksiyonunun hiçbir terimi f'ye eşit olmayan bir dizinin limiti olduğunu kanıtlayın.

6.25. $(X_i)_{i\in I}$ bir topolojik uzay ailesi olsun. $J \subseteq I$ ve her $i \in I\setminus J$ için $a_i \in X_i$ elemanı sabitlenmiş olsun.

$$Y = \left\{x = (x_i)_i \in \prod_I X_i : i \in I\setminus J \Rightarrow x_i = a_i\right\}$$

olsun. $\prod_J X_j \simeq Y$ önermesini kanıtlayın.

6.26. X topolojik bir uzay olsun. X'in T_1 olduğunu varsayalım. I bir göstergeç kümesi, $J \subseteq I$ ve $a \in X$ olsun. $\prod_I X$ kümesinin $\prod_{J,a} X$ altkümesi şöyle tanımlansın:

$$\prod_{J,a} X = \left\{ x \in \prod_I X : \text{ Eğer } i \notin J \text{ ise } x_i = a \right\}.$$

Bu altkümenin çarpım topolojisinde kapalı olduğunu kanıtlayın. Bu kümenin açık olması için ya X'in tek bir noktadan ibaret olmasının ya da $I \setminus J$'nin sonlu olmasının yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

Teorem 6.5. *A bir topolojik uzay, $(X_i)_{i \in I}$ bir topolojik uzay ailesi ve*

$$f : A \to \prod_{i \in I} X_i$$

bir fonksiyon olsun. O zaman f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $i \in I$ için

$$f_i = \mathrm{pr}_i \circ f : A \to X_i$$

fonksiyonlarının sürekli olmalarıdır.

Kanıt: Aynen Teorem 6.3 gibi. Okura alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Çarpım topolojisinde dizi yakınsaklığı gayet hoştur:

Teorem 6.6. *Her $i \in \mathbb{N}$ için, X_i bir topolojik uzay ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (x_{n,i})_{i \in I} \in X$ olsun. Ayrıca $a = (a_i)_{i \in I} \in X$ olsun. O zaman, a'nın $(x_n)_n$ dizisinin (X'in çarpım topolojisinde) bir limiti olması için, her $i \in I$ için a_i'nin $(x_{n,i})_n$ dizisinin limiti olması gerek ve yeter koşuldur. Yani X topolojik uzayında dizi yakınsaklığı, dizinin koordinatlarının yakınsaklığına eşdeğerdir. Dolayısıyla eğer X_i topolojik uzaylarında limit biricikse, X'te de limit biriciktir ve bu ifadenin ters istikametlisi de doğrudur ve*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (x_{n,i})_{i \in I} = \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n,i} \right)_{i \in I}$$

olur.

Kanıt: İzdüşüm fonksiyonları sürekli olduğundan Teorem 6.2'ye göre, koşul gereklidir. Şimdi her $i \in I$ için a_i'nin $(x_{n,i})_n$ dizisinin limiti olduğunu varsayalım. U, a'yı içeren bir açık küme olsun. Yeterince büyük n göstergeçleri için, x_n elemanlarının U'nun içine düştüğünü göstereceğiz. U temel açık altkümelerin bileşimi olduğundan,

$$a \in V \subseteq U$$

özelliklerini sağlayan bir V temel açık kümesi vardır. V'yi betimleyelim: Diyelim $i_1, \ldots, i_k \in I$ ve $U_{i_1} \subseteq X_{i_1}, \ldots, U_{i_k} \subseteq X_{i_k}$ açık altkümeleri için

$$Y_i = \begin{cases} U_{i_j} & \text{eğer } j = 1, \ldots, k \text{ için } i = i_j \text{ ise} \\ X_i & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

ve
$$a \in V = \prod_{i\in I} Y_i \subseteq U.$$

Her $j = 1,\dots,k$ için, a_{i_j}, $(x_{n,i_j})_n$ dizisinin limiti olduğu için, öyle bir N_j vardır ki her $n > N_j$ için $x_{n,i_j} \in U_{i_j}$ olur. Şimdi $N = \max\{N_1,\dots,N_k\}$ olsun. O zaman $n > N$ için
$$x_n = (x_{n,i})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i = V \subseteq U$$
olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

Örnek 6.27. Kutu Topolojisi. $(X_i)_{i\in I}$ topolojik uzaylarının kartezyen çarpımı üzerinde ilk bakışta çok daha doğal gelebilecek, hatta galiba gerçekten daha doğal olan bir başka topoloji daha tanımlanabilir: Eğer her i için $U_i \subseteq X_i$ açıksa, temel açık kümeler,
$$\prod_{i\in I} U_i$$
türünden yazılan kümeler olsun ve açık kümeler de bu tür kümelerin her türlü bileşimi olsun. Böylece kartezyen çarpım üzerinde bir topoloji elde ederiz. ***Kutu topolojisi*** denilen bu topolojiyle çarpım topolojisi arasında eğer I sonluysa bir ayrım yoktur, ama eğer I sonsuzsa, o zaman kutu topolojisi çarpım topolojisinden kesinlikle daha zengindir. Örneğin $I = \mathbb{N}$ ise, kutu topolojisinde açık olan
$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (0,1)$$
kümesi, kartezyen çarpımda açık değildir.

Alıştırmalar

6.28. X bir Hausdorff uzayıysa, $X \times X \setminus \{(x,x) : x \in X\}$ altkümesinin açık olduğunu kanıtlayın. Eğer bu küme açıksa X'in Hausdorff olması gerektiğini kanıtlayın.

6.29. $\prod_{i\in I} X_i$ topolojik uzayının Hausdorff olması için her X_i'nin Hausdorff olmasının gerek ve yeter olduğunu gösterin.

6.30. İzdüşüm fonksiyonlarının açık fonksiyon olduklarını (yani açık kümeleri açık kümelere götürdüklerini) gösterin.

6.31. $I = J \sqcup K$ olsun.
$$\prod_{i\in I} X_i \approx \prod_{j\in J} X_j \times \prod_{k\in K} X_k$$
topolojik denkliğini kanıtlayın.

Kartezyen Çarpım. Bir $(X_i)_{i\in I}$ küme ailesi verilmiş olsun. (Bir ***küme ailesi*** aslında sadece bir fonksiyondur; $(X_i)_{i\in I}$ küme ailesi de, tanım kümesi I olan ve her $i \in I$ elemanında X_i değerini alan bir fonksiyondur.)

$\prod_{i\in I} X_i$ ***kartezyen çarpımının*** matematiksel tanımı şöyledir:
$$\left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : \text{ her } i \in I \text{ için } x(i) \in X_i \right\}.$$

Eğer $x \in \prod_{i\in I} X_i$ ise, $x(i)$ yerine x_i yazılır ve x_i'ye x'in i'inci ***koordinatı*** adı verilir. x fonksiyonu aldığı değerler tarafından belirlendiğinden, çoğu zaman x yerine $(x_i)_{i\in I}$ yazılır.

Eğer her $i \in I$ için X_i kümesi boş değilse, $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımı da boşküme olmaz. Ama bunu kanıtlamak için Seçim Aksiyomu'na [N1, N3] ihtiyaç vardır: Eğer $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ fonksiyonu $(X_i)_{i \in I}$ ailesinin bir seçim fonksiyonuysa, yani her $i \in I$ için $x(i) \in X_i$ oluyorsa, o zaman $(x(i))_{i \in I}$, $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımının bir elemanıdır.

Alıştırma 6.32. $(X_i)_{i \in I}$ bir küme ailesi ve A sayılabilir bir küme olsun. Her $i \in I$ için,

$$A \cap X_i \neq \emptyset$$

varsayımını yapalım. O zaman Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan $\prod_{i \in I} X_i$ kümesinin boş olmadığını kanıtlayın.

7. Topolojik Eşlemeler (Homeomorfizmalar)

Giriş. Modern matematikte, tanımlanan hemen her matematiksel yapıyla birlikte bir de bu yapıların "izomorfizmaları" ya da Türkçesiyle "eşyapı eşlemeleri" kavramı tanımlanır. İzomorfizmalar, kabaca, yapılar arasında gidip gelen ve "yapıyı yapı yapan unsurları" koruyan birebir ve örten fonksiyonlardır. Örneğin yapıda toplama (+) diye bir işlem varsa, izomorfizmalar, yapının her x ve y elemanları için

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

eşitliğini sağlayan eşlemelerdir. (O zaman aynı eşitlik otomatik olarak f^{-1} fonksiyonu için de sağlanır, okura alıştırma.) Ya da $\leq$ diye bir sıralama varsa, izomorfizmalar her x ve y için

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

özelliğini sağlayan eşlemelerdir. (O zaman aynı özellik elbette otomatik olarak f^{-1} fonksiyonu için de sağlanır.) Örneğin eğer yapıda hem toplama hem de sıralama varsa, o zaman izomorfizmalardan her iki özelliği birden sağlamaları istenir.

Topolojik uzayların da izomorfizmaları vardır, ama bunlara izomorfizma değil, ***homeomorfizma*** (ya da ***homeomorfi***) adı verilir. Biz bunlara ***topolojik eşleme*** adını vereceğiz. Matematiksel tanım şöyle: X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir eşleme olsun. Eğer X'in her açık kümesinin imgesi Y'de açıksa ve Y'nin her açık kümesinin önimgesi X'te açıksa f'ye ***topolojik eşleme*** denir. Bir başka deyişle homeomorfizmalar, topolojik uzaylar arasında açık kümeleri açık kümelere götürüp getiren eşlemelerdir.

Eğer X'ten Y'ye giden bir topolojik eşleme varsa, bu $X \approx Y$ olarak gösterilir. Aralarında topolojik eşleme olan iki topolojik uzaya ***homeomorfik*** ya da ***topolojik olarak denk uzaylar*** denir.

Elbette Id_X özdeşlik fonksiyonu X topolojik uzayıyla kendisi arasında bir topolojik eşlemedir. (Ama dikkat, burada Id_X'in tanım kümesi olan X ile varış kümesi olan X üzerine aynı topoloji alınmalıdır. Yoksa bu sonuç yanlıştır.) Demek ki $X \approx X$.

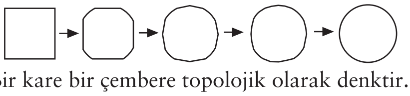
Eğer $f : X \to Y$ bir topolojik eşlemeyse, tanımdan da hemen anlaşılacağı üzere $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu da bir topolojik eşlemedir. Demek ki $X \approx Y$ ise $Y \approx X$ olur.

Eğer $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ birer topolojik eşlemeyse, $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonu da bir topolojik eşlemedir. Bunun da kanıtı kolaydır. Demek ki $X \approx Y$ ve $Y \approx Z$ ise $X \approx Z$ olur.

Özetle:

$$\begin{aligned}
&X \approx X,\\
&X \approx Y \Leftrightarrow Y \approx X,\\
&X \approx Y \text{ ve } Y \approx Z \Leftrightarrow X \approx Z.
\end{aligned}$$

Homeomorfik olan topolojik uzayların topolojik anlamda birbirinden farkları yoktur, olsa olsa elemanlarının adları değişmiştir; biri diğerinin tüm topolojik özelliklerini paylaşır. Örneğin bir kareyle bir daire ya da saplı bir fincanla bir can simidi topolojik olarak denktir.



Bir kare bir çembere topolojik olarak denktir.

Topolojik eşlemenin genel olarak kabul edilen tanımı bu verdiğimiz tanımdan farklı ifade edilir: Kendisinin ve tersinin sürekli olduğu topolojik uzaylar arasındaki eşlemelere topolojik eşleme denir. Ama bu tanımla bir önceki sayfada verdiğimiz tanımın eşdeğer oldukları çok bariz.

Örnekler

7.1. X herhangi bir topolojik uzaysa, Id_X özdeşlik fonksiyonunun X'ten X'e giden bir topolojik eşleme olduğunu daha önce söylemiştik.

7.2. X bir küme olsun. X üzerine en kaba ya da ayrık topolojiyi koyarsak, X'in istisnasız tüm eşleşmeleri X'in bir topolojik eşlemesi olur. Eğer X üzerine sonlu tümleyenler topolojisini koyarsak da gene aynı sonucu elde ederiz.

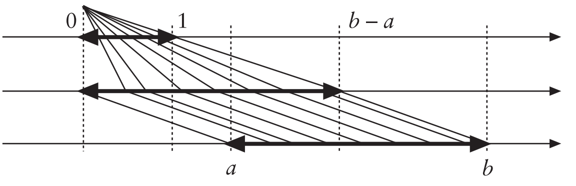
7.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ kuralıyla tanımlanmış olsun. Eğer $a \neq 0$ ise f, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden bir topolojik eşlemedir. (Okura alıştırma. İpucu: Fonksiyonun tersini bulun.)

7.4. $f(x) = -x$ kuralıyla verilmiş fonksiyon $(-\infty, 0)$ ile $(0, \infty)$ arasında topolojik bir eşleme verir. Bu topolojik eşlemenin tersi aynı kuralla verilmiştir: $g(x) = -x$.

7.5. Eğer $a < b$ ise, (a, b) aralığıyla $(0, 1)$ aralığı topolojik olarak denktirler: Eğer x'i $b - a$ ile çarparsak $(0, 1)$ aralığını topolojisini değiştirmeden $(0, b - a)$ aralığına taşırız. Ardından çıkan sonuca a eklersek, $(0, b - a)$ aralığını (a, b) aralığına taşırız. Demek ki

$$f(x) = (b - a)x + a$$

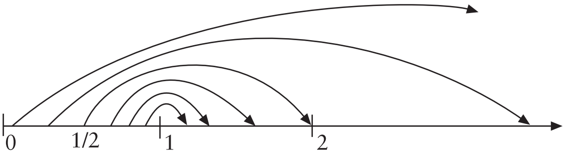
kuralıyla tanımlanan fonksiyon $(0, 1)$ aralığıyla (a, b) aralığı arasında bir topolojik eşlemedir. Resmi aşağıda.



Bundan da tüm boş olmayan, sınırlı ve açık aralıkların topolojik olarak denk oldukları çıkar. Aynı nedenden, boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı aralıklar topolojik olarak birbirlerine denktirler.

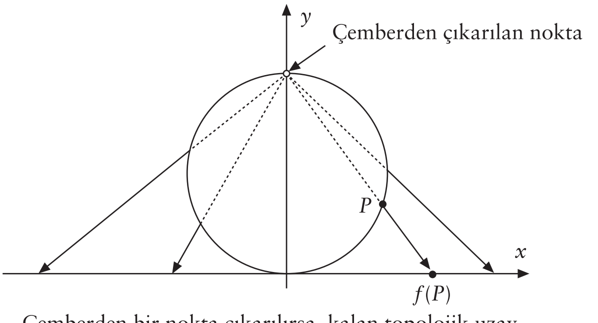
Öte yandan $(0,1)$ aralığıyla $(0,1]$ aralığı topolojik olarak denk değildir. Bunu daha ilerde Alıştırma 9.11'de kanıtlayacağız. Şimdilik kanıt hakkında bir ipucu verelim: $(0,1)$ aralığından herhangi bir noktayı çıkarırsak uzayı iki açık ve ayrık parçaya böleriz. Oysa $(0,1]$ aralığından 1 noktasını çıkarırsa geriye "bağlantılı" bir topolojik uzay kalır.

7.6. $f(x) = 1/x$ formülü, $(0,1)$ aralığıyla $(1,\infty)$ aralığı arasında topolojik bir eşleme verir. Bundan da topolojinin uzunluk gibi bir kavramı kapsam alanı dışında bıraktığı anlaşılır. Bu homeomorfizmanın tersi gene aynı formülle verilmiştir. Buradan (a,∞) türünden aralıkların $(0,1)$'e topolojik olarak denk oldukları anlaşılır. Örnek 7.4'ten de $(-\infty,a)$ türünden aralıkların $(0,1)$'e topolojik olarak denk oldukları çıkar. Aynı şey $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$, $(0,1]$ ve $[0,1)$ aralıkları için de geçerlidir elbette.



7.7. $f(x) = x^3$ kuralıyla verilmiş fonksiyon $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden topolojik bir eşlemedir.

7.8. **[Stereografik İzdüşüm]** Çemberden bir nokta çıkarırsak, kalan topolojik uzay bir doğruya topolojik olarak denktir. Böyle bir topolojik eşleme bulalım. Çember, $(0,1)$ merkezli 1 yarım çaplı çember olsun (mesela) ve diyelim çemberden $(0,2)$ noktasını attık. Aşağıdaki şekilde gösterilen f fonksiyonunu bulalım. $P(a,b)$, çember üstünde bir nokta olsun. Eğer $a \neq 0$ ise, (a,b) ve $(0,2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi,



Çemberden bir nokta çıkarılırsa, kalan topolojik uzay bir doğruya homeomorfiktir.

$$y = \frac{b-2}{a}x + 2$$

dir. Burada $y = 0$ alıp denklemi x için çözersek,

$$x = \frac{2a}{2-b}$$

buluruz, bu da $f(P)$ noktasıdır. Demek ki f topolojik eşlemesi,

$$f(a, b) = \frac{2a}{2-b}$$

formülüyle verilmiştir. (Artık a'yı 0'dan değişik almak zorunda değiliz. Formül $a = 0$ için de geçerlidir.)

Bu topolojik eşlemenin tersini de bulabiliriz. $c \in \mathbb{R}$ olsun. $(c, 0)$ noktasıyla $(0, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$$y = \frac{-2}{c}x + 2$$

dir. Bu doğruyla çemberin kesişim noktasını bulmak için, bu denklemle çemberin denklemi olan

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

denkleminin ortak çözümlerini bulmalıyız. İki çözüm bulunacaktır. Biri $(0, 2)$ noktasına tekabül eden çözümdür. Biz diğerini istiyoruz. Ayrıntıları okura bırakıyoruz.

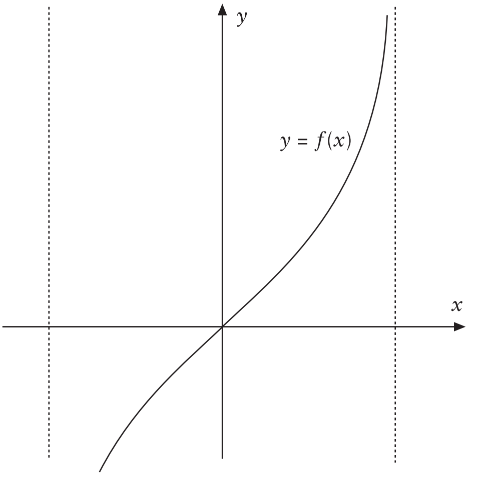
7.9. $(-1, 1)$ ile $\mathbb{R}$ topolojik olarak denk uzaylardır. Örneğin,

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

formülüyle tanımlanmış $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu topolojik bir eşlemedir. Tersi,

$$g(x) = \frac{2x}{1 + (1 + 4x^2)^{1/2}}$$

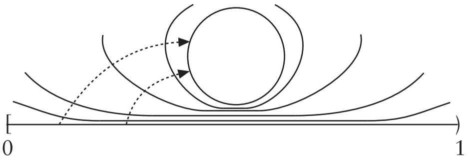
formülüyle verilmiştir. f fonksiyonunun grafiği aşağıda.



7.10. Örnek 7.5, 7.6 ve 7.9'dan $\mathbb{R}$ ile $(0, \infty)$ topolojik uzaylarının topolojik olarak denk oldukları çıkar. Ama $f(x) = \exp x$ ya da $f(x) = 2^x$ fonksiyonları da aynı görevi görürler. Bundan kolaylıkla şu teorem çıkar:

Teorem 7.1. *$\mathbb{R}$'de boş olmayan **tüm** açık aralıklar topolojik olarak birbirlerine denktirler. Aynı şey kapalı (ya da yarı kapalı yarı açık), sonsuz ve sınırlı aralıklar için de geçerlidir.*

Örnek 7.11. *Her sürekli eşleme topolojik bir eşleme değildir.*
Nitekim $[0,1)$ aralığını "yuvarlayarak" çembere götüren dönüşüm bir eşlemedir ama bir topolojik bir eşleme değildir.

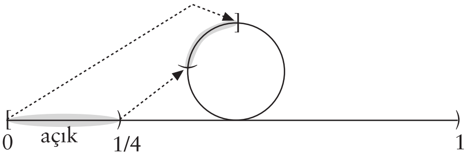


[0, 1) aralığının yuvarlanarak çember olması

Dileyen okur bu "yuvarlama" yerine daha matematiksel bir ifade olan

$$f(x) = (\sin 2x\pi, \cos 2x\pi)$$

fonksiyonunu ele alabilir. Yuvarlama eşlemesi süreklidir elbet ama tersi sürekli değildir, çünkü örneğin $[0, 1/4)$ açık kümesinin çemberdeki önimgesi açık değildir.



[0, 1)'in [0, 1/4) açık altkümesi çemberin açık bir altkümesine gitmiyor.

Çember gerçel sayıların hiçbir aralığına topolojik olarak denk olamaz, çünkü çemberden hangi noktayı atarsak atalım, geriye, biraz ilerde göreceğimiz üzere "bağlantılı" bir uzay kalır, ama aralıkların bu özellikleri yoktur.

Alıştırmalar

7.12. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$'nin homeomorfik olmadıklarını kanıtlayın.

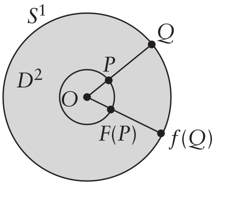
7.13. X sayılabilir sonsuzlukta bir küme olsun. X üzerine, X'in tüm eşleşmelerinin homeomorfizma olduğu tüm topolojileri bulun. (Bkz. Örnek 7.2.)

7.14. Stereografik izdüşümü (Örnek 7.8) bir küreyle yapın: Birim küreyi 3 boyutlu uzayın xy düzleminde $(0,0,0)$ noktasına değecek biçimde konumlandırın ve $(0,0,1)$ noktasından geçen bir doğrunun kürenin yüzeyini ve xy düzlemini hangi noktalarda kestiğini bulun.

7.15. [**Alexander'ın Hilesi**] $O(0,0)$ merkezli 1 yarıçaplı çember S^1 olarak, bu çember ve bu çemberin içindeki daire de D^2 olarak gösterilir. f, S^1'in bir homeomorfizması olsun. f'yi D^2'nin bir homeomorfizmasına genişleteceğiz. P, D^2'nin herhangi bir noktası olsun. Q, resimdeki gibi OP ışınıyla S^1'in kesişimi olsun. $F : D^2 \to D^2$ fonksiyonu,

$$F(P) = |OP| \cdot f(Q)$$

kuralıyla tanımlansın. O zaman F'nin D^2'nin bir homeomorfizması olduğunu ve f homeomorfizmasının bir genişlemesi olduğunu kanıtlayın.



8. Kapalı Kümeler

8.1 Kapalı Kümeler

Bir topolojik uzayda açık bir kümenin tümleyenine ***kapalı küme*** denir.

Örnekler

8.1. $(-\infty, 1)$ aralığı $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde açık olduğundan, bunun tümleyeni olan $[1, \infty)$ aralığı kapalıdır. Öklid topolojisinde $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$, $[a, b]$, $\emptyset$ ve $(-\infty, \infty)$ türünden yazılan aralıklar kapalıdır, diğer aralıklar kapalı değildirler.

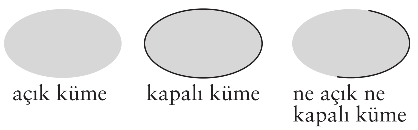
8.2. Eğer $X = (0, 1) \cup [2, 3]$ ise, $\mathbb{R}$'den indirgenmiş topolojiyle, X'in $(0, 1)$ ve $[2, 3]$ altkümeleri X'te hem açık hem de kapalıdırlar. Ama $(0, 1)$ kümesi $\mathbb{R}$'de kapalı değildir.

8.3. Ayrık topolojide her altküme açık olduğundan, her altküme aynı zamanda kapalıdır da. En kaba topolojide sadece $\emptyset$ ve kümenin kendisi kapalıdır.

8.4. Sonlu tümleyenler topolojisinde sadece sonlu kümeler ve uzayın (yani kümenin) kendisi kapalıdır.

8.5. Sorgenfrey doğrusunda $[a, b)$ biçiminde yazılan her açık küme kapalıdır. Ama sınırlı açık aralıklar kapalı değildirler. Öklid topolojisinde her kapalı küme Sorgenfrey doğrusunda da kapalıdır. Genellikle topoloji zenginleştikçe açık küme sayısı ve açık küme sayısıyla birlikte kapalı küme sayısı da artar.

Açık kümeleri "sınırını" içermeyen, kapalı kümeleri de "tüm sınırını" içeren bölgeler olarak gözümüzde canlandırabiliriz. Kapalı kümeleri kabuklu portakal, açık kümeleri ise kabuksuz portakal olarak düşünebilirsiniz.



Dikkat: Kapıların aksine, açık olmayan bir küme kapalı ya da kapalı olmayan bir küme açık olmak zorunda değildir. Örneğin (0, 1] aralığı, Öklid topolojisinde ne açıktır ne de kapalı. Öte yandan her X topolojik uzayında $\emptyset$ ve X hem açıktır hem de kapalıdır. Daha sonra $\mathbb{R}$'de $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$'den başka hem açık hem de kapalı küme olmadığını kanıtlayacağız.

Tanımlarından dolayı, kapalı kümeler, açık kümelerin özelliklerini düal dilde yansıtır:

Teorem 8.1. *X bir topolojik uzay olsun.*
i. *$\emptyset$ ve X kapalı kümelerdir.*
ii. *Kapalı kümelerin kesişimi kapalıdır.*
iii. *Sonlu sayıda kapalı kümenin bileşimi kapalıdır.*

Kanıt: Doğrudan tanımdan ve açık kümelerin sayfa 29'daki T1, T2, T3 özelliklerinden çıkar. □

Ama sonsuz sayıda kapalı kümenin bileşimi kapalı olmayabilir. Örneğin,

$$\bigcup_{\epsilon>0} [\epsilon, 1-\epsilon] = (0,1)$$

ve bu bileşim $\mathbb{R}$'de kapalı değildir.

Kapalı altkümenin tanımından dolayı, X'in kapalı bir altkümesinin X'te tümleyeni X'in açık bir altkümesidir. Bu yüzden açık kümelerle ifade edilen her sonucu ve her tanımı kapalı kümelerle de ifade edebiliriz.

Örneğin, bir X kümesini bir topolojiyle donatmak için, yukardaki teoremdeki özellikleri sağlayan altkümeler bulmak ve bu altkümelerin tümleyenlerine "açık" demek yeterlidir. Yani topolojinin tanımını sayfa 29'daki gibi açık kümelerle yapacağımıza kapalı kümelerle de yapabilirdik.

Bir başka örnek: Sürekliliğin tanımını açık altkümeler yerine kapalı altkümelerle ifade edebiliriz:

Teorem 8.2. *X ve Y birer topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul, Y'nin her kapalı altkümesinin önimgesinin kapalı olmasıdır.*

Kanıt: Önce f'nin sürekli olduğunu varsayalım. F, Y'nin kapalı bir altkümesi olsun. O zaman F^c kümesi Y'nin açık bir altkümesidir. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(F^c)$, X'in açık bir altkümesidir. Dolayısıyla $f^{-1}(F^c)^c$, X'in kapalı bir altkümesidir. Ama $f^{-1}(F^c)^c = f^{-1}(F)$ olduğundan, bundan da $f^{-1}(F)$'nin kapalı olduğu sonucu çıkar.

Diğer yönde kanıt da benzerdir, aynen yukardaki gibi, $f^{-1}(V^c)^c = f^{-1}(V)$ eşitliğini kullanır. □

Alıştırmalar

8.6. Bir topolojik uzayda U açık ve F kapalı bir altküme olsun. $U \setminus F$'nin açık, $F \setminus U$'nun kapalı olduğunu kanıtlayın.

8.7. $f : X \longrightarrow Y$, topolojik uzaylar arasında sürekli bir fonksiyon olsun. Y'nin kapalı altkümelerinin önimgelerinin kapalı olduğunu kanıtlayın.

8.8. $f : X \longrightarrow Y$, topolojik uzaylar arasında bir fonksiyon olsun. Eğer Y'nin her kapalı altkümesinin önimgesi kapalıysa f'nin sürekli olduğunu kanıtlayın.

8.9. Y bir topolojik uzay ve $A \subseteq X \subseteq Y$ olsun. A'nın X'te (X'in Y'den indirgenmiş topolojisiyle) kapalı olmasıyla A'nın Y'de kapalı olması ayrı anlamlara gelebilir. A'nın X'te kapalı olması için, Y'nin kapalı bir F altkümesi için, $A = F \cap X$ eşitliğinin yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın. Ama X, Y'de kapalıysa, A'nın X'te ya da Y'de kapalı olmasının aynı anlama geldiğini kanıtlayın.

8.10. X ve Y iki topolojik uzay olsun. A ve B sırasıyla X ve Y'nin kapalı altkümeleri olsun. $A \times B$'nin kapalı olduğunu kanıtlayın.

8.11. i. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$'de kapalı olduğunu kanıtlayın.
ii. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinin $\mathbb{R}$'de kapalı olmadığını kanıtlayın.
iii. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $X \times Y$'den X'e giden izdüşüm fonksiyonunun kapalı kümeleri illa kapalı kümelere götürmediğini kanıtlayın. (Ama açık kümeleri açık kümelere götürür, yani açık bir fonksiyondur.)

8.12. X bir küme olsun. X'in her tek elemanlı altkümesinin kapalı olduğu en kaba topolojiyi bulun.

8.13. Hausdorff bir uzayda, tek elemanlı her kümenin kapalı olduğunu kanıtlayın. Bunun tersinin doğru olmadığını gösterin.

8.14. Bir X topolojik uzayının Hausdorff olması için $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesinin $X \times X$ topolojik uzayında kapalı olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

8.15. Eğer $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyonsa ve Y Hausdorff ise, f'nin grafiğinin, yani

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

kümesinin kapalı olduğunu kanıtlayın.

8.16. $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\operatorname{Ker} f = \{(x, x') \in X \times X : f(x) = f(x')\}$ olsun.
i. Eğer Y Hausdorff ise $\operatorname{Ker} f$'nin kapalı olduğunu kanıtlayın.
ii. Eğer f örtense ve açık bir fonksiyonsa (yani açık kümeleri açık kümelere götürüyorsa) ve $\operatorname{Ker} f$ kapalıysa Y'nin Hausdorff olduğunu kanıtlayın.

8.17. f ve $g : X \to Y$ iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer Y Hausdorff ise $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösterin.

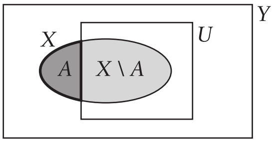
Y bir topolojik uzay olsun ve $X \subseteq Y$ olsun. İndirgenmiş topolojinin tanımına göre, X'in açık altkümeleri Y'nin açık altkümeleriyle X'in kesişimleridir. Aynı şey kapalı kümeler için de geçerlidir:

Önsav 8.3. *Y bir topolojik uzay olsun ve $X \subseteq Y$ olsun. X'in Y'den indirgenmiş topolojiye göre kapalı altkümeleri Y'nin kapalı altkümeleriyle X'in kesişimleridir.*

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi X'in kapalı bir altkümesi olsun. O zaman $X \setminus A$, X'in açık bir altkümesidir. Dolayısıyla Y'nin açık bir U altkümesi için,

$$X \setminus A = U \cap X$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda, $A = X \cap (Y \setminus U)$ olur;

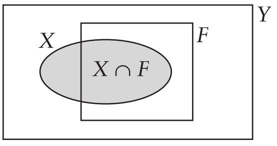


yani A, Y'nin bir kapalı altkümesiyle X'in kesişimidir.

Şimdi $F \subseteq Y$, Y'nin kapalı bir altkümesi olsun. O zaman

$$X \setminus (X \cap F) = X \cap (Y \setminus F)$$

olur, yani $X \setminus (X \cap F)$ kümesi Y'nin açık bir altkümesiyle X'in kesişimidir,



yani X'te açıktır. Dolayısıyla bunun X'te tümleyeni olan $X \cap F$, X'te kapalıdır. Önsav kanıtlanmıştır. □

Örnek 8.18. $\mathbb{Q}$ kümesi Öklid topolojisiyle donatılmış olsun. a, $b \in \mathbb{R}$ için $(a,b)_{\mathbb{Q}} = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ olsun. $[a,b]_{\mathbb{Q}}$ için de benzer bir anlaşma yapalım. $(a,b)_{\mathbb{Q}}$ elbette $\mathbb{Q}$'nün açık bir altkümesidir. Önsav 8.3'e göre $[a,b]_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$'nün kapalı bir altkümesidir. Eğer a, $b \notin \mathbb{Q}$ ise, $[a,b]_{\mathbb{Q}} = (a,b)_{\mathbb{Q}}$ olduğundan, bu durumda $(a,b)_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$'nün hem açık hem de kapalı bir altkümesidir. (Bu tür kümelere ***kapaçık***[1] diyebiliriz.)

8.2 Kapanış

X bir topolojik uzay ve A, X'in bir altkümesi olsun. X'in A'yı içeren en az bir kapalı altkümesi vardır: X'in kendisi mesela. Eğer A'yı içeren bütün kapalı kümeleri kesiştirirsek, Teorem 8.1.ii'ye göre gene kapalı bir küme buluruz. Ayrıca bu kesişim A'yı da içerir. Demek ki A'yı içeren tüm kapalı kümelerin kesişimi gene A'yı içeren kapalı bir kümedir; dolayısıyla A'yı içeren kapalı kümelerin en küçüğüdür. Bu küme $\overline{A}$ olarak yazılır ve adına A'nın ***kapanışı*** denir.

Örnekler

8.19. En kaba topolojide eğer $\emptyset \neq A \subseteq X$ ise, $\overline{A} = X$ olur.

8.20. Ayrık topolojide hep $\overline{A} = A$ olur.

8.21. Her X topolojik uzayında $\overline{X} = X$ ve $\overline{\emptyset} = \emptyset$ olur.

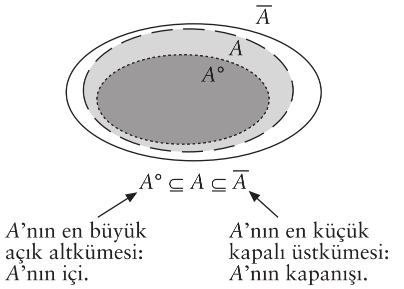
8.22. $X = \mathbb{R}$ ise (Öklid topolojisiyle elbette) ve $A \subseteq \mathbb{R}$ sonlu bir altkümeyse, $\overline{A} = A$ olur. Ayrıca, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{(0,1]} = \overline{[0,1)} = \overline{(0,1)} = [0,1]$ ve $\overline{(0,1) \cup (1,2)} = [0,2]$ olur.

8.23. $\mathbb{R}^2$'de açık yuvarın kapanışı kapalı yuvardır. (Bkz. Alıştırma 4.10.)

A'nın kapanışını, aşağıdaki resimdeki gibi, A'nın üstünü kabuğuyla ya da zarıyla örtmek gibi bir şey olarak düşünün.

---

[1] İngilizcesi *clopen*.



Teorem 8.4. *Bir topolojik uzayın altkümelerinin kapanışı şu özellikleri sağlar:*
i. $A \subseteq \overline{A}$.
ii. $\overline{A}$ *kapalıdır.*
iiii. *Eğer* $A \subseteq B$ *ve* B *kapalıysa, o zaman* $\overline{A} \subseteq B$ *olur.*
iv. *A'nın kapalı olması için,* $\overline{A} = A$ *eşitliği yeter ve gerek koşuldur. Dolayısıyla* $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ *olur.*
v. *Eğer* $B \subseteq A$ *ise* $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ *olur.*
vi. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$
vii. $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.
viii. $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.

Kanıt: Topolojik uzayımız X olsun. Her şey tanımdan çıkıyor. Aşağıdaki Önsav 8.5 ve sözünü ettiğimiz Teorem 1.2 kullanılarak da kanıtlanabilir. □

Örnek 8.24. $(0,1)_\mathbb{Q} = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ kümesi $\mathbb{Q}$'de kapalı değildir. Aksi halde Önsav 8.3'e göre, $\mathbb{R}$'nin kapalı bir $K \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi için $K \cap \mathbb{Q} = (0,1)_\mathbb{Q}$ olur. Ama $(0,1)_\mathbb{Q} \subseteq K$ olduğundan, bu kümelerin $\mathbb{R}$'de kapanışını alırsak, $[0,1] \subseteq K$ buluruz. Bundan da $0 \in K \cap \mathbb{Q} = (0,1)_\mathbb{Q}$ çıkar, bir çelişki.

Tipografi zorladığı zaman $\overline{A}$ yerine $\mathrm{cl}(A)$ yazıldığı olur.

Bir altkümenin kapanışlarıyla altkümelerin içleri arasında çok yakın bir ilişki vardır:

Önsav 8.5. $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ *ve* $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$.

Kanıt: Birinci eşitliğin biçimsel bir kanıtını verebiliriz:

$$A^\circ = \bigcup_{U\subseteq A,\, U \text{ açık}} U = \left(\bigcap_{U\subseteq A,\, U \text{ açık}} U^c\right)^c = \left(\bigcap_{A^c\subseteq F,\, F \text{ kapalı}} F\right)^c = \left(\overline{A^c}\right)^c.$$

Şimdi eşitliğin her iki tarafının da tümleyenini alalım.

İkinci kanıt: $A^\circ \subseteq A$ olduğundan $A^c \subseteq (A^\circ)^c$ olur. Ama $(A^\circ)^c$ kapalı bir küme. Demek ki $\overline{A^c} \subseteq (A^\circ)^c$. Diğer istikamet: $A^c \subseteq \overline{A^c}$ olduğundan, $(\overline{A^c})^c \subseteq A$ olur. Ama $\left(\overline{A^c}\right)^c$ açık bir küme. Demek ki $\left(\overline{A^c}\right)^c \subseteq A^\circ$ olur. Tümleyenleri alarak $(A^\circ)^c \subseteq \overline{A^c}$ buluruz. Böylece birinci eşitlik bir kez daha kanıtlanmış oldu.

İkinci eşitlik için birincide A yerine A^c de alabiliriz. □

Alıştırmalar

8.25. Önsav 8.5'in ikinci eşitliğini aynı önsavın birinci eşitliğinin verilen kanıtlarına öykünerek kanıtlayın.

8.26. Teorem 8.4.vii'deki içindeliğin illa eşitlik olmayabileceğini kanıtlayın.

8.27. Sonlu tümleyenler topolojisinde hangi A altkümeleri için $\overline{A} = X$ olur? Ne zaman $\overline{A} = A$ olur?

8.28. $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ ise $\overline{B} = \overline{A}$ eşitliğini kanıtlayın.

8.29. Y bir topolojik uzay ve $A \subseteq X \subseteq Y$ olsun. $\mathrm{cl}_Y A$, A'nın Y'de kapanışını temsil etsin. A'nın X'te kapanışının $(\mathrm{cl}_Y A) \cap X$ olduğunu kanıtlayın.

8.30. Öyle bir topolojik uzay ve A ve B altkümeleri bulun ki, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ olsun.

8.31. Öyle bir topolojik uzay ve $(A_i)_i$ altküme ailesi bulun ki,

$$\bigcup_i \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_i A_i}$$

olsun.

8.32. X ve Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için, X'in her A altkümesi için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ içindeliğinin yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

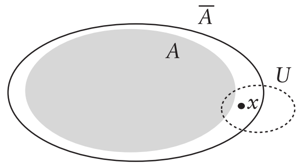
8.33. X bir küme olsun. $\mathrm{cl} : \wp(X) \to \wp(X)$, şu özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.
a. $A \subseteq \mathrm{cl}\, A$,
b. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$,
c. $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}\, B$,
d. $\mathrm{cl}\, \emptyset = \emptyset$.
i. Eğer X'in bir U altkümesi, $\mathrm{cl}(U^c) = U^c$ eşitliğini sağlıyorsa (burada U^c, $X \setminus U$ anlamına geliyor), U'ya "açık küme" diyelim. Bunun bir topoloji tanımladığını kanıtlayın. Bu topolojide $\overline{A} = \mathrm{cl}\, A$ eşitliğinin sağlandığını kanıtlayın.
Yukardaki özellikleri sağlayan bir cl fonksiyonuna ***kapanış operatörü*** denir.
ii. $B \subseteq X$, sabit bir altküme olsun. $\mathrm{cl}\, \emptyset = \emptyset$ ve $A \neq \emptyset$ ise $\mathrm{cl}\, A = A \cup B$ formülleriyle tanımlanmış fonksiyonunun bir kapanış operatörü olduğunu kanıtlayın. Bu operatörün ürettiği topolojinin açık kümelerini betimleyin.

8.34. X bir topolojik uzay olsun. Eğer $A \subseteq X$ ise, A'nın ***sınırını*** şöyle tanımlayalım:

$$\mathrm{Fr}\, A = \partial A = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}(A^c).$$

Burada $\mathrm{cl}\, A$, A'nın kapanışı anlamına gelmektedir. $\mathrm{Fr}\, A$ elbette kapalı bir kümedir. Şu önermeleri kanıtlayın:
i. $\mathrm{cl}\, A = A \cup \mathrm{Fr}\, A$.
ii. $A^\circ = A \setminus \mathrm{Fr}\, A$.
iii. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{cl}(A) \setminus A^\circ$.
iv. $X = A^\circ \cup \mathrm{Fr}\, A \cup (A^c)^\circ$.
v. Eğer $a < b \in \mathbb{R}$ ise, $\mathrm{Fr}\, [a, b] = \{a, b\}$ ve $\mathrm{Fr}\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ üzerine Öklid topolojisini alıyoruz.)
vi. $\mathrm{Fr}\, X = \emptyset$.

Önsav 8.6. *$\overline{A}$, x'i içeren her açık kümenin A'yla kesişiminin boş olmadığı x elemanlarının kümesidir. Yani aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*
a. *$x \in \overline{A}$.*
b. *x'i içeren her açık kümenin A ile kesişimi boşküme değildir.*



$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U\ ((x \in U \wedge U \text{ açık}) \Rightarrow U \cap X \neq \emptyset)$
Buradaki U'yu, "x'i içeren U açık kümesi ne kadar küçük olursa olsun" diye algılamak lazım.

Kanıt: Önce $x \in \overline{A}$ varsayımını yapalım. U, x'i içeren bir açık küme olsun. Diyelim $U \cap A = \emptyset$. O zaman $A \subseteq U^c$ olur. Ama U açık olduğundan, U^c kapalıdır. Demek ki $\overline{A} \subseteq U^c$, yani $x \in \overline{A} \subseteq U^c$ ve $x \notin U$, çelişki.

Şimdi de x'i içeren her açık kümeyle A'nın kesişiminin boş olmadığını varsayalım. Ama $\overline{A}^c$ bir açık kümedir ve A ile kesişimi boşkümedir. Demek ki x, $\overline{A}^c$'de olamaz; x, zorunlu olarak $\overline{A}$'dadır. □

Alıştırmalar

8.35. X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve β, X'in bir tabanı olsun. $x \in \overline{A}$ içindeliğinin,

$$x\text{'i içeren her } B \in \beta \text{ için } B \cap A \neq \emptyset$$

koşuluyla eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

8.36. Alıştırma 8.26 ile çelişen şu "kanıt"taki yanlışı bulun.

$$x \in \overline{\bigcup_i A_i}$$

olsun. U, x'i içeren herhangi bir açık küme olsun. Teorem 8.4'e göre, U, $\bigcup_i A_i$ ile boş olmayan bir kümede kesişir. Demek ki U, A_i'lerden biriyle boş olmayan bir kümede kesişir. Demek ki $x \in \overline{A_i}$.

A'nın kapanışı elbette A'nın içinde bulunduğu topolojik uzayla ilgilidir; yani $A \subseteq X$ ise, X'in topolojisi değiştikçe ya da X değiştikçe, A'nın kapanışı da değişir. Bu yüzden yeri geldiğinde "A'nın kapanışı" yerine "A'nın (X, τ) topolojik uzayında kapanışı" ya da "A'nın (X, τ)-kapanışı" ya da τ-kapanışı" gibi ayrıştırıcı ekler kullanılabilir. Genellikle topolojiler bellidir ve A'nın üstkümesi olan X değişir ve karışıklığa yol açmamak için kimi zaman $\overline{A}$ yerine A'nın içinde bulunduğu X'i de ortaya çıkaran $\mathrm{cl}_X A$ yazılımı kullanmak gerekebilir. Örneğin $(0, 1)$ aralığının $(0, 1)$ aralığındaki kapanışı kendisidir ama $\mathbb{R}$'deki kapanışı $[0, 1]$ kapalı aralığıdır. Neyse ki en doğal durumlarda her şey olması gerektiği gibi olur:

Önsav 8.7. *$A \subseteq X \subseteq Y$ olsun. O zaman $\mathrm{cl}_X A = X \cap \mathrm{cl}_Y A$ olur. (Burada X üzerine Y'den indirgenmiş topoloji alınmaktadır.)*

Kanıt: $A \subseteq X \cap \mathrm{cl}_Y A$ olduğundan ve $X \cap \mathrm{cl}_Y A$ kümesi X'te kapalı olduğundan, $\mathrm{cl}_X A \subseteq X \cap \mathrm{cl}_Y A$ olur.

Ters içindeliği kanıtlayalım. X'in kapalı bir C altkümesi için

$$A \subseteq C \subseteq X$$

olsun. Önsav 8.3'e göre, Y'nin kapalı bir D altkümesi için

$$C = X \cap D$$

olur. Ayrıca $A \subseteq D$ olduğundan,

$$\mathrm{cl}_Y\, A \subseteq D$$

olur. Demek ki,

$$X \cap \mathrm{cl}_Y\, A \subseteq X \cap D = C.$$

Eğer C yerine $\mathrm{cl}_X\, A$ alırsak,

$$X \cap \mathrm{cl}_Y\, A \subseteq \mathrm{cl}_X\, A$$

buluruz. □

8.3 Yoğun Altkümeler

X bir topolojik uzay olsun. Eğer $A \subseteq X$, kapanışı X olan bir altkümeyse yani $\mathrm{cl}_X(A) = X$ ise, A'ya X'te ***yoğun*** denir.

Örnekler

8.37. Bu örneklerde hep Öklid topolojisi ve altkümelere kısıtlamaları geçerli olacak. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümeleri $\mathbb{R}$'de yoğundur. $(0,1)$ aralığının kesirli sayılarının kümesi, $(0,1)$, $(0,1]$, $[0,1)$ ve $[0,1]$ aralıklarının her birinde yoğundur. $(0,1)$ aralığı $(0,1]$, $[0,1)$ ve $[0,1]$ aralıklarının her birinde yoğundur.

8.38. Sonlu tümleyenler topolojisinde sonsuz her küme yoğundur.

8.39. Sorgenfrey doğrusunda $\mathbb{Q}$ yoğundur.

Yukardaki önsava göre, $A \subseteq X \subseteq Y$ ise ve A, Y'de yoğunsa, o zaman A, X'te de yoğundur.

Önsav 8.8. *A'nın X'te yoğun olması için yeter ve gerek koşul, boş olmayan her açık kümenin A'yla kesişiminin boş olmamasıdır.*

Kanıt: Temel ve basit ama önemli olan bu önsavın kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz. □

Önsav 8.9. *X ve Y iki topolojik uzay olsun. Y'nin Hausdorff olduğunu varsayalım. f ve $g : X \longrightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon olsun. O zaman X'in*

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

altkümesi kapalıdır. Bunun özel bir durumu olarak, eğer f ve g sürekli fonksiyonları X'in yoğun bir altkümesinde eşitseler, o zaman $f = g$ olur.

Kanıt: Birinci önermeyi kanıtlamak yeterli. $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ olsun. $x \notin A$ olsun. O zaman $f(x) \neq g(x)$ olur. Y Hausdorff olduğundan, Y'nin,

$$f(x) \in V_{f(x)},\ g(x) \in V_{g(x)} \text{ ve } V_{f(x)} \cap V_{f(x)} = \emptyset$$

önermelerini sağlayan $V_{f(x)}$ ve $V_{g(x)}$ açık altkümeleri vardır. f ve g sürekli olduklarından,

$$f^{-1}(V_{f(x)}) \text{ ve } g^{-1}(V_{g(x)})$$

kümeleri X'in açık altkümeleridir ve ayrıca her ikisi de x'i içerir. Eğer

$$U = f^{-1}(V_{f(x)}) \cap g^{-1}(V_{g(x)}) \subseteq X$$

tanımını yaparsak, U altkümesi x'i içerir, açıktır ve A ile kesişmez. □

Alıştırmalar

8.40. Hausdorff bir uzayda sonlu bir kümenin tümleyeninin yoğun olduğunu kanıtlayın.

8.41. İki yoğun kümenin kesişimi yoğun mudur? kanıtlayın ya da karşıörnek verin.

8.42. Sonlu tümleyenler topolojisinde açık kümeler yoğun mudur?

8.43. A yoğunsa, A'yı kapsayan her kümenin yoğun olduğunu kanıtlayın.

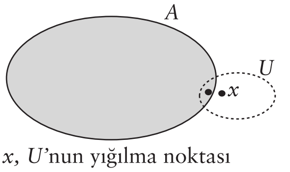
8.44. X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A°, A'da yoğun mudur? (Yani A° kümesinin kapanışı A'yı içerir mi?

8.45. Y Hausdorff değilse, Önsav 8.9'a bir karşıörnek bulun.

8.46. $A \subseteq B \subseteq C \subseteq X$ olsun. A, B'de yoğunsa ve B, C'de yoğunsa, A'nın C'de yoğun olduğunu kanıtlayın. (Tanım için bkz. Alıştırma 8.44.)

8.4 Yığılma Noktası

X topolojik bir uzay, A, X'in bir altkümesi ve $x \in X$ olsun. Eğer x'i içeren her U açık kümesi için, U'da A'nın x'ten değişik bir elemanı varsa, o zaman x'e A'nın ***yığılma noktası*** adı verilir.



x, U'nun yığılma noktası

$\Updownarrow$

$\forall U\ ((x \in U \text{ ve } U \text{ açık}) \Rightarrow U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset)$

Aşağıdaki ilk örnekten de görüleceği üzere A'nın bir yığılma noktası A'nın bir elemanı olabilir de olmayabilir de.

Örnekler

8.47. Eğer $B \subseteq A$ ise, B'nin her yığılma noktası A'nın da bir yığılma noktasıdır.

8.48. 0 elemanı, $A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ kümesinin bir elemanı değildir ama bir yığılma noktasıdır (Öklid topolojisinde), ama 0 elemanı aynı zamanda
$$B = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$
kümesinin de bir yığılma noktasıdır. Bu arada 0 elemanının A ve B'nin biricik yığılma noktası olduğuna dikkatinizi çekeriz.

8.49. $\mathbb{R}$'de Öklid topolojisini alacak olursak, $\mathbb{Z}$'nin hiç yığılma noktası yoktur ama $\mathbb{R}$'nin her elemanı $\mathbb{Q}$'nün bir yığılma noktasıdır. $(0, 1)$ aralığının yığılma noktaları kümesi de $[0, 1]$ kümesidir. $(0, 1) \cup \{2\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesi ise $[0, 1]$ kümesidir.

8.50. Eğer $A \subseteq X$ ise ve $(a_n)_n$, limiti olan ama zamanla sabitleşmeyen bir A-dizisiyse, o zaman dizinin her limiti $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin, dolayısıyla A'nın da bir yoğunlaşma noktasıdır.

8.51. Boşkümenin yığılma noktası olamaz. Öte yandan bir elemanlı bir kümenin yığılma noktası olabilir; örneğin eğer bir X kümesi üzerine en kaba topolojiyi alırsak ve $A = \{a\}$ ise, X'in a dışındaki her noktası A'nın bir yığılma noktasıdır ama a, A'nın bir yığılma noktası değildir.

Yığılma noktası literatürde bazen ***limit noktası*** olarak da geçer. Bunun oldukça bahtsız br terminoloji olduğunu anlamak için bkz. Alıştırma 8.53.

Aşağıdaki teorem, bir kümeyi "kapatmak" için, kümenin yığılma noktalarını kümeye eklemek gerektiğini ve bunun da yeterli olduğunu söylüyor.

Teorem 8.10. *X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A', A'nın yığılma noktaları kümesiyse, $\overline{A} = A \cup A'$ olur. Dolayısıyla bir altkümenin kapalı olması için yeter ve gerek koşul yığılma noktalarını içermesidir. Ve yığılma noktası olmayan bir altküme kapalıdır.*

Kanıt: Teorem 8.4.i ve Önsav 8.6'dan dolayı sağdan sola içindelik belli. Diğer içindeliği kanıtlayalım. $x \in \overline{A} \setminus A$ olsun. U, x'i içeren açık bir küme olsun. Eğer $U \cap A \subseteq \{x\}$ ise o zaman $U \cap A = \emptyset$ olur ve bu da Önsav 8.6'yla çelişir □

Alıştırmalar

8.52. Bir topolojik uzayda herhangi iki x ve y noktası için, x'i içeren ama y'yi içermeyen açık bir küme varsa, o topolojik uzaya T_1 denir. Hausdorff uzaylar T_1'dir ama bunun tersi doğru değildir, örneğin sonlu tümleyenler topolojisi her zaman T_1'dir ama küme sonsuzsa Hausdorff değildir.

Bir X topolojik uzayında aşağıdakilerin denk olduğunu kanıtlayın.

a. X, T_1'dir.

b. Her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalı bir kümedir.

c. X'in her altkümesi, altkümeyi içeren açık altkümelerin kesişimidir.

d. Her sonlu küme kapalıdır.

e. X'in topolojisi sonlu tümleyenler topolojisinden daha incedir.

f. Her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için, x, A'nın bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak x'i içeren her açık küme A'dan sonsuz sayıda eleman içeriyorsa.

8.53. X bir topolojik uzay olsun. $(x_n)_n$, zamanla sabitleşmeyen bir dizi ve $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer x, $(x_n)_n$ dizisinin bir limitiyse x'in A'nın bir yığılma noktası olduğunu kanıtlayın. Bunun tersi yanlıştır. Örneğin kesirli sayılar kümesini $(x_n)_n$ biçiminde tamsıralayalım. Öklid topolojisinde, her gerçel sayı dizinin bir yığılma noktasıdır ama dizinin limiti yoktur.

8.54. $f : X \to Y$ sürekli olsun. Eğer x, X'in bir A altkümesinin bir yığılma noktasıysa, $f(x)$'in $f(A)$'nın bir yığılma noktası olmayabileceğini gösterin.

8.55. X, bir T_1 uzayı olsun, yani tek elemanlı her kümenin kapalı olduğu bir topolojik uzay olsun. A, X'in bir altkümesi ve x, X'in bir elemanı olsun. x'in A'nın bir yığılma noktası olması için, x'i içeren her açık kümenin A'dan sonsuz tane nokta içermesinin yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

8.56. X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A', A'nın yığılma noktaları kümesi olsun. $A^{(0)} = A$ ve $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$ olsun. $\mathbb{R}$'nin çeşitli A altkümeleri için, $A^{(n)}$ kümelerini bulun. Her n için $A^{(n)} \neq A^{(n-1)}$ eşitsizliğini sağlayan bir $A \subseteq \mathbb{R}$ bulun.

8.57. Herhangi bir topolojik uzayda, açık bir U altkümesi için $\operatorname{cl}((\operatorname{cl} U)^\circ) = \operatorname{cl} U$ eşitliğini kanıtlayın.

8.58. (Kuratowski Kapama-Tümleme Problemi) Eğer A bir topolojik uzayın altkümesiyse,

$$A,\ A^c,\ \operatorname{cl} A^c,\ (\operatorname{cl} A^c)^c,\ \operatorname{cl}((\operatorname{cl} A^c)^c),\ \ldots$$
$$A,\ \operatorname{cl} A,\ (\operatorname{cl} A)^c,\ \operatorname{cl}((\operatorname{cl} A)^c),\ (\operatorname{cl}((\operatorname{cl} A)^c))^c,\ \ldots$$

dizilerinde en fazla 14 tane değişik küme olabileceğini kanıtlayacağız [Ke, sayfa 57]. kA, tA ve iA sırasıyla A'nın bir topolojik uzayda kapanışını, tümleyenini ve içini simgelesin.
i. Her X altkümesi için $kkX = X$, $ttX = X$ ve $ktktktkX = ktkX$ eşitliklerini kanıtlayın. (İpucu: Önce $kikiX = kiX$ ve $iX = tktX$ eşitliklerini kanıtlayın.)
ii. Bunu kullanarak dizide en fazla 14 terim olabileceğini kanıtlayın.
iii. $A = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5] \cap \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ ise dizide tam 14 terim olduğunu gösterin.

8.59. X bir topolojik uzay olsun. Sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimine G_δ ***kümesi*** denir. Sayılabilir sayıda kapalı kümenin bileşimine de F_σ ***kümesi*** denir.
i. Bir G_δ kümesinin tümleyeninin bir F_σ kümesi ve bir F_σ kümesinin tümleyeninin bir G_δ kümesi olduğunu kanıtlayın.
ii. $\mathbb{R}$'de her kapalı kümenin G_δ olduğunu kanıtlayın. Aynı önermeyi $\mathbb{R}^2$ için de kanıtlayın. (Bu biraz daha zordur.)
iii. $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde F_σ olduğunu kanıtlayın. $\mathbb{Q}$'nün $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde G_δ olmadığını kanıtlamak daha zordur.

8.5 Limit

Bu altbölümde $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden (o da Öklid metriğinde) fonksiyonlar için (mesela) [N5]'ten bildiğimiz

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

kavramını topolojik uzaylara genelleştireceğiz.

Her ne kadar bu altbölümde yapılanları kullanmayacaksak da bu önemli kavram ve sonuçları bu kitaba almamak olmazdı.

X ve Y birer topolojik uzay, $A \subseteq X$, $a \in X$, $b \in Y$ ve $f : A \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca a'nın A'nın bir yığılma noktası olduğunu varsayalım. Pek gerek yok ama Y'nin de Hausdorff olduğu varsayılır çoğu zaman; biz de öyle yapacağız.

Bildiğimiz limit kavramından yola çıkalım: x, a'ya giderken $f(x)$'in b'ye yakınsaması demek, x'i (a'ya eşit olmaması koşuluyla) a'nın yeterince yakınında alarak, $f(x)$'i dilediğimiz kadar b'ye yaklaştırabiliriz demektir. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ örneğinde $\lim_{x\to a} f(x) = b$ eşitliğinin biçimsel tanımı şöyleydi: $\epsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, eğer $0 < |x-a| < \delta$ ise $|f(x)-b| < \epsilon$ olur. Yani her $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ aralığı için,

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq f^{-1}(b-\epsilon, b+\epsilon) \cup \{a\}$$

içindeliğini sağlayan bir $(a-\delta, a+\delta)$ aralığı bulunur.

Bu tanımı $\mathbb{R}$'den rastgele topolojik uzaylara genelleştirmek için $|x-a| < \delta$ eşitsizliği yerine x'in (a'ya eşit olmaması koşuluyla) a'nın bir komşuluğunda (ya da a'yı içeren bir açık kümede) olduğunu söylemek yeterli. Biçimsel tanım şöyle:

Tanım. *X ve Y birer topolojik uzay, $A \subseteq X$, $a \in X$, $b \in Y$ ve $f : A \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca a'nın A'nın bir yığılma noktası olduğunu varsayalım. Y de Hausdorff olsun. Eğer b'yi içeren her W açık kümesi için*

$$f(U \cap A \setminus \{a\}) \subseteq W$$

içindeliğini sağlayan bir $U \ni a$ açık kümesi varsa, o zaman

x, a'ya giderken $f(x)$'in limiti b'dir

denir ve bu durumda

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

yazılır.

Teorem 8.11. *Her şey tanımdaki gibi olsun. Ayrıca $a \in A$ varsayımını yapalım. O zaman f fonksiyonunun a'da sürekli olması için yeter ve gerek koşul $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ eşitliğidir.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

8.6 Çarpım Topolojisinde İç ve Kapanış

Önsav 8.12. *$(X_i)_{i\in I}$ bir topolojik uzay ailesi ve her $i \in I$ için $A_i \subseteq X_i$ olsun. O zaman çarpım topolojisinde şunlar geçerlidir:*
i. *Ya $(\prod_i A_i)^\circ = \emptyset$ olur ya da $(\prod_i A_i)^\circ = \prod_i A_i^\circ$.*
ii. *Eğer I sonluysa her zaman ikinci eşitlik geçerlidir.*
iii. *$\overline{\prod_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}$ olur.*

Kanıt: Önce (ii)'yi kanıtlayalım. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ altkümelerini alalım. $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$ eşitliğini kanıtlayacağız.

$A^\circ \times B^\circ \subseteq A \times B$ kapsaması elbette geçerlidir. Bundan ve $A^\circ \times B^\circ$ kümesinin çarpım topolojisinin tanımı gereği açık olmasından dolayı, $A^\circ \times B^\circ \subseteq (A \times B)^\circ$ olur.

Diğer istikametteki kapsamayı kanıtlayalım. pr_1 izdüşüm fonksiyonu açık bir fonksiyon olduğundan (Alıştırma 6.30), $\mathrm{pr}_1((A \times B)^\circ)$ açık bir kümedir. Ayrıca

$$\mathrm{pr}_1((A \times B)^\circ) \subseteq \mathrm{pr}_1(A \times B) = A$$

olduğundan,

$$\mathrm{pr}_1((A \times B)^\circ) \subseteq A^\circ$$

olur. Aynı nedenden $\mathrm{pr}_2((A \times B)^\circ) \subseteq B^\circ$ olur. Ama o zaman da

$$(A \times B)^\circ \subseteq \mathrm{pr}_1((A \times B)^\circ) \times \mathrm{pr}_2((A \times B)^\circ) \subseteq A^\circ \times B^\circ$$

olur.

Demek ki iki topolojik uzay için eşitlik geçerlidir. Dolayısıyla eşitlik sonlu sayıda topolojik uzay için de geçerlidir.

Şimdi I'nın sonsuz olduğu durumu ele alalım. Eğer sonsuz sayıda $i \in I$ için $A_i \neq X_i$ ise o zaman, çarpım topolojisinin tanımı gereği, $(\prod_i A_i)^\circ = \emptyset$ olur. Bundan böyle sadece sonlu tane i için $A_i \neq X_i$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu varsayalım. Bu i göstergeçlerine $1, 2, \ldots, n$ adını verelim. $A_i = X_i$ eşitliğinin geçerli olduğu diğer göstergeçler kümesi de J olsun. O zaman, sonlu sayıda topolojik uzay için eşitlik geçerli olduğundan,

$$\begin{aligned}\left(\prod_i A_i\right)^\circ &= \left(A_1 \times \ldots \times A_n \times \prod_{j\in J} X_j\right)^\circ \\ &= (A_1 \times \ldots \times A_n)^\circ \times \left(\prod_{j\in J} X_j\right)^\circ \\ &= A_1^\circ \times \ldots \times A_n^\circ \times \prod_{j\in J} X_j = \prod_{i\in I} A_i^\circ\end{aligned}$$

olur.

İkinci eşitliği kanıtlayalım. $x = (x_i)_i \in \prod_i \overline{A_i}$ olsun. x'i içeren herhangi bir temel açık küme alalım, diyelim $U = \prod_i U_i$. Her U_i açık olup $\overline{A_i}$ kümesinin x_i elemanını içerdiğinden, $U_i \cap A_i$ kümesinde bir y_i elemanı vardır. O zaman

$$y = (y_i)_i \in U \cap \prod_i A_i.$$

olur. Bundan da x'in $\prod_i A_i$ kümesinin kapanışında olduğu çıkar.

Şimdi de $\prod_i A_i$ kümesinin kapanışından bir $x = (x_i)_i$ elemanı alalım. $k \in I$, herhangi bir göstergeç olsun. U_k, x_k'yi içeren X_k'nin herhangi bir açık altkümesi olsun. $j \in I \setminus \{k\}$ için de $U_j = X_j$ olsun. O zaman $U = \prod_i U_i$ kümesi çarpım topolojisinde açıktır; ayrıca x'i de içerir. Demek ki $U \cap (\prod_i A_i)$ kümesinde bir $y = (y_i)_i$ elemanı vardır. Elbette

$$y_k \in U_k \cap A_k$$

olur. Ama U_k rastgele olduğundan, bu da $x_k \in \overline{A_k}$ demektir. Bu dediğimiz her k için geçerli olduğundan, $x = (x_i)_i$ elemanı $\prod_i \overline{A_i}$ kümesindedir. □

Sonuç 8.13. *$(X_i)_{i\in I}$ bir topolojik uzay ailesi ve her $i \in I$ için $A_i \subseteq X_i$ kapalı bir altküme olsun. O zaman $\prod_i A_i$ kapalıdır.* □

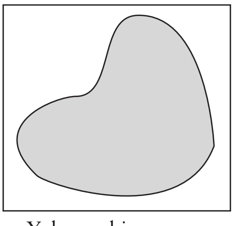
Alıştırmalar

8.60. Sonuç 8.13'ün kutu topolojisi için de geçerli olduğunu kanıtlayın.

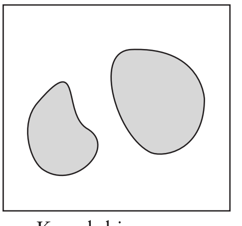
8.61. Önsav 8.12'deki birinci eşitliğin kanıtında, eğer $I = J \sqcup K$ ise, topolojik uzay olarak, $\prod_{i\in I} U_i \approx \prod_{j\in J} U_j \times \prod_{k\in K} U_k$ homeomorfizması kullanılmıştır. Bunun nerede kullanıldığını bulun ve homeomorfizmanın varlığını kanıtlayın.

9. Bağlantılılık

Aşağıdaki iki resme bakın ve aralarındaki farkı bulun! Bunların topolojik uzay olduklarını düşünün, örneğin $\mathbb{R}^2$'nin bir altuzayı olarak görün. Biri bağlantılı (ya da tekparça ya da yekpare), oysa diğeri birbirinden kopuk iki parçadan oluşuyor. Bu iki durumu birbirinden ayrıştıran topolojik kavramlar vardır. Bu bölümün konusu işte bu tür kavramlar.



Yekpare bir uzayın hayali resmi



Kopuk bir uzayın hayali resmi

9.1 Bağlantılılık

X topolojik bir uzay olsun. Eğer X, ayrık ve boş olmayan iki açık altkümenin bileşimi olarak yazılamıyorsa, X'e özel bir ad verilir: ***bağlantılı***[1]. Demek ki X'in bağlantılı olması için yeter ve gerek koşul,

$$X = U \sqcup V,\ U \text{ ve } V \text{ açık}$$

koşullarının ancak $U = \emptyset$ ya da $V = \emptyset$ açık kümeleri için gerçekleşebilmesidir. Bir başka yeter ve gerek koşul, X'in $\emptyset$ ve X'ten başka, tümleyeni de açık olan açık altkümesinin olmamasıdır, yani X'in $\emptyset$ ve X'ten başka hem açık hem de kapalı altkümesinin olmamasıdır.

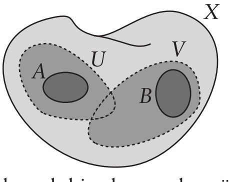
Eğer tam tersine, X, boş olmayan iki ayrık açık kümenin bileşimi olarak yazılabiliyorsa, o zaman X'e ***kopuk uzay***[2] denir.

[1] İngilizcesi *connected.*
[2] İngilizcesi *disconnected*

X topolojik uzayının bir altkümesinin bağlantılı olması demek, altkümenin X'ten indirgenmiş topolojisiyle yukarıdaki anlamda bağlantılı olması demektir. Eğer $A \subseteq X$ ise, A'nın bağlantılı olması için yeter ve gerek koşul, U ve V, X'te açık olmak üzere,

$$A \subseteq U \cup V \text{ ve } U \cap V \cap A = \emptyset$$

koşullarının ancak $U \cap A = \emptyset$ ya da $V \cap A = \emptyset$ olduğunda, yani ancak $A \subseteq U$ ya da $A \subseteq V$ durumunda gerçekleşebilmesidir. Bunu okura alıştırma olarak bırakıyoruz, indirgenmiş topolojinin tanımından hemen çıkar. Tanıma bakılırsa, $A \subseteq X \subseteq Y$ ise, A'nın X'te bağlantılı olmasıyla Y'de (ya da A'da) bağlantılı olması arasında bir fark yoktur.



$A \cup B$, X'in kopuk bir altuzayıdır, çünkü $A \cup B$'de kesişmeyen ve hiçbiri $A \cup B$'yi içermeyen iki açık kümeyle kaplanmıştır.

$\mathbb{R}$'nin $(0,1) \cup (1,2) = (0,2) \setminus \{1\}$ altkümesi elbette bağlantılı değildir. Birazdan $\mathbb{R}$'nin ve $\mathbb{R}$'nin tüm aralıklarının bağlantılı olduklarını ve $\mathbb{R}$'nin başka da bağlantılı altkümesinin olmadığını göstereceğiz. Ama $\mathbb{Q}$'nün ($\mathbb{R}$'den indirgenmiş topolojisiyle) bağlantılı olmadığını hemen görebiliriz, örneğin,

$$\mathbb{Q} \subseteq (-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty).$$

Tek elemanlı altkümeler her zaman bağlantılıdırlar. Hausdorff (hatta sadece T1 olan) bir uzayda birden fazla elemanı olan **sonlu** bir altküme her zaman kopuktur.

Alıştırmalar

9.1. İki bağlantılı kümenin bileşiminin ya da kesişiminin bağlantılı olmayabileceğini gösterin. Yekpare bir kümenin tümleyeninin bağlantılı da kopuk da olabileceğini gösterin.

9.2. X'ten $\{0,1\}$ kümesine giden sadece 2 sürekli fonksiyon olmasının, X'in bağlantılı olması için yeter ve gerek koşul olduğunu gösterin. (Burada $\{0,1\}$ kümesine $\mathbb{R}$'den indirgenmiş topoloji, yani ayrık topoloji verilmiştir.)

9.3. Eğer $A \subseteq X$ ise, A'nın kopuk olması için aşağıdaki koşulun yeter ve gerek koşul olmadığını gösterin: Öyle U ve V açık altkümeler vardır ki, $A \subseteq U \cup V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olur.

9.4. Sorgenfrey doğrusunun kopuk olduğunu gösterin.

9.5. Her sonsuz kümenin sonlu tümleyenler topolojisiyle birlikte bağlantılı olduğunu kanıtlayın.

9.6. $\mathbb{R}$'nin sayılabilir her altkümesinin kopuk olduğunu kanıtlayın.

9.7. Eğer topolojik bir uzayın H ve K altkümeleri

$$\overline{H} \cap K = H \cap \overline{K} = \emptyset$$

eşitliklerini sağlıyorsa, H ve K'ya ***karşılıklı ayrışık kümeler***[3] denir. Bir X topolojik uzayının bağlantılı olması için, boş olmayan ve bileşimi X olan karşılıklı ayrışık iki altkümesinin olmamasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

9.8. X bir topolojik uzay ve H ve K, X'in karşılıklı ayrışık iki altkümesi olsun. Eğer C bağlantılıysa ve $C \subseteq H \cup K$ ise, o zaman C'nin ya H ya da K'nin altkümesi olduğunu kanıtlayın.

Sürekli fonksiyonlar birçok topolojik kavrama olduğu gibi bağlantılılığa da saygı duyarlar:

Teorem 9.1. *Bağlantılı bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında imgesi de bağlantılıdır.*

Kanıt: $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. X'in bağlantılı altkümelerinin imgesinin de bağlantılı olduğunu kanıtlamamız lazım. Teorem 5.5'e göre, X'in bağlantılı olduğunu varsayıp $f(X)$'in bağlantılı olduğunu kanıtlamak yeterlidir. (Teoremi bir de bu varsayımı yapmadan kanıtlamaya çalışırsanız, eğitici olur; ayrıca kanıtın da bayağı zorlaştığını görürsünüz.) V_1 ve V_2, Y'de açık olsunlar ve

$$f(X) \subseteq V_1 \cup V_2 \text{ ve } V_1 \cap V_2 \cap f(X) = \emptyset$$

koşullarını sağlasınlar. O zaman,

$$X = f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$$

ve

$$\begin{aligned}\emptyset = f^{-1}(\emptyset) &= f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap f(X)) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap f^{-1}(f(X)) \\ &= f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap X = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)\end{aligned}$$

olur. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(V_1)$ ve $f^{-1}(V_2)$ kümeleri X'te açıktırlar. Bu olgu, yukarda kanıtlanan

$$X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \text{ ve } \emptyset = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2)$$

eşitlikleri, $f^{-1}(V_1)$'in ya da $f^{-1}(V_2)$'nin boşküme olduğunu gösterir. Örneğin $f^{-1}(V_1)$ boşkümeyse, o zaman

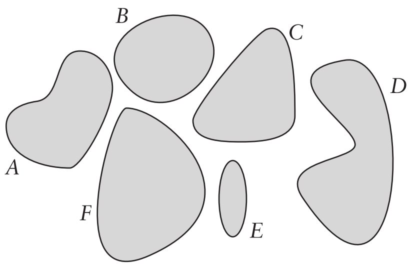
$$X = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_2) \text{ ve } f(X) = f(f^{-1}(V_2)) \subseteq V_2$$

olur. Demek ki $f(X)$ bağlantılıdır. □

Topolojik uzayları, birbirinden ayrık maksimum bağlantılı altkümelerinin bileşimi olarak yazabiliriz. Ayrıca bu yazılım tek bir biçimde yapılır:

[3] İngilizcesi *mutually separated*.

Teorem 9.2. *X topolojik bir uzay olsun. X'in (**bağlantı bileşenleri** denilen) en büyük bağlantılı altkümeleri vardır ve iki bağlantı bileşeni ya eşittir ya da ayrıktır. X, bağlantı bileşenlerinin bileşimidir ve X'in her bağlantılı altkümesi bu bağlantı bileşenlerinden birinin altkümesidir. Ayrıca her bağlantı bileşeni kapalıdır. Eğer sonlu sayıda bağlantı bileşeni varsa, bunların her biri ayrıca açıktır. Her sürekli fonksiyon bir bağlantı bileşenini bir başka bağlantı bileşeninin içine götürür.*



X uzayı, bağlantılı bileşenlerine ayrıştırılmış haliyle.
Bileşenlerden sonlu ya da sonsuz sayıda olabilir.

İlk Kanıt: Eğer X'in iki elemanı X'in bağlantılı bir altkümesinin elemanıysa, bu iki elemana *denk* diyelim. Bunun bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayalım. (Ardından, bağlantı bileşenlerini denklik sınıfları olarak alacağız.) $\{x\}$ bağlantılı bir küme olduğundan, her x kendisine denktir. Eğer x, y'ye denkse, y de x'e denktir elbette. Geçişkenlik daha zor. Kendi başına ayrıca önemi olan aşağıdaki önsavı kanıtlayalım, teoremin kanıtına sonra devam ederiz:

Önsav 9.3. *Bir topolojik uzayın, kesişimleri boş olmayan iki bağlantılı altkümesinin bileşimi de bağlantılıdır.*

Kanıt: Topolojik uzaya X diyelim. A ve B, X'in iki bağlantılı altkümesi olsun; kesişimlerinin de boşküme olmadığını varsayalım. U ve V, şu özellikleri olan iki açık küme olsun:

$$A \cup B \subseteq U \cup V,\ (A \cup B) \cap U \cap V = \emptyset.$$

Birincisinden

$$A \subseteq U \cup V \text{ ve } B \subseteq U \cup V,$$

ikincisinden,

$$A \cap U \cap V = \emptyset \text{ ve } B \cap U \cap V = \emptyset$$

çıkar. Demek ki, A ve B bağlantılı olduklarından,

$$A \subseteq U \text{ ya da } A \subseteq V$$

ve

$$B \subseteq U \text{ ya da } B \subseteq V$$

önermeleri doğrudur. Genelliğe halel getirmeden $A \subseteq U$ varsayımını yapabiliriz. Şimdi önümüzde iki şık var:

$$\text{ya } B \subseteq U \text{ ya da } B \subseteq V.$$

Eğer $B \subseteq V$ ise, o zaman $A \cap B \subseteq V \cap U \cap A = \emptyset$ ve bu da varsayımımızla çelişir. Demek ki $B \subseteq U$. Dolayısıyla $A \cup B \subseteq U$. Önsav kanıtlanmıştır. □

Aslında yukardakinden daha genel bir sonuç doğrudur. Bkz. Önsav 9.4.

Teorem 9.2'nin Kanıtının Devamı: Artık geçişkenliği kanıtlayabiliriz: x, y'ye denkse, y de z'ye denkse, o zaman hem x'i hem y'yi içeren bağlantılı bir küme ve hem y'yi hem z'yi içeren bir başka bağlantılı küme vardır. Ama y bu iki bağlantılı kümenin ortak elemanı. Dolayısıyla yukardaki önsava göre, bu iki bağlantılı kümenin bileşimi de bağlantılıdır, ve bu bileşim hem x'i hem de z'yi içerir. Dolayısıyla x ve z de denktirler.

Şimdi bu denklik ilişkisinin sınıflarının bağlantılı altkümeler olduklarını kanıtlayalım.

A bir denklik sınıfı olsun. U ve V, şu özellikleri olan iki açık küme olsun:

$$A \subseteq U \cup V,\ A \cap U \cap V = \emptyset.$$

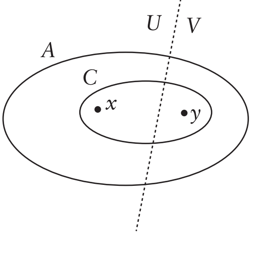
Bir çelişki elde etmek amacıyla

$$A \cap U \neq \emptyset \text{ ve } A \cap V \neq \emptyset$$

eşitsizliklerini varsayalım. Her bir kümeden birer eleman alalım:

$$x \in A \cap U \text{ ve } y \in A \cap V$$

olsun. x ve y aynı denklik sınıfında olduklarından, birbirlerine denktirler, yani her ikisini de içeren bağlantılı bir C altkümesi vardır. C'nin elemanları (C'den dolayı!) elbette birbirlerine ve özellikle x'e denktirler. Dolayısıyla $C \subseteq A$ olmak zorundadır.



Demek ki

$$C \subseteq A \subseteq U \cup V$$

ve

$$C \cap U \cap V \subseteq A \cap U \cap V = \emptyset$$

ilişkileri sağlanır. C bağlantılı olduğundan, bunlardan,

$$\text{ya } C \subseteq U \text{ ya da } C \subseteq V$$

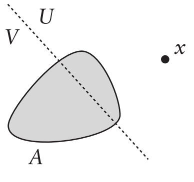
çıkar. Ama hangisi doğru olursa olsun, x ve y'nin varlığıyla bir çelişki elde ederiz.

Demek ki A bağlantılı bir altküme. A bir denklik sınıfı olduğundan A'yı içeren daha büyük bir bağlantılı küme olamaz. Demek ki A, X'in en büyük bağlantılı altkümelerinden biridir.

X'in denklik sınıflarının bileşimi olduğuna dair herhangi bir kuşku olamaz.

Önsav 9.3'e göre, sınıflardan birini kesen bağlantılı bir altküme, o sınıfın içinde olmak zorundadır. Demek ki her bağlantılı altküme bir (ve bir tek) sınıfın içindedir.

A bir sınıf olsun. A'nın kapalı olduğunu, yani A^c'nin açık olduğunu göstermek istiyoruz. A^c'den bir x elemanı alalım. $x \in U \subseteq A^c$ ilişkilerini sağlayan açık bir U altkümesi bulmak yeterli.



Bulalım. $x \notin A$ olduğundan $A \cup \{x\}$ bağlantılı olamaz. Demek ki (yukardaki resme bakın),

$$A \cup \{x\} \subseteq U \cup V,$$
$$(A \cup \{x\}) \cap U \cap V = \emptyset$$

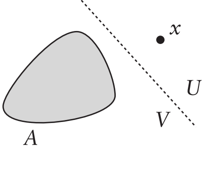
ve

$$A \cup \{x\} \nsubseteq U \text{ ve } A \cup \{x\} \nsubseteq V$$

ilişkilerini sağlayan U ve V açık kümeler vardır. İlk iki satırdan,

$$A \subseteq U \cup V \text{ ve } A \cap U \cap V = \emptyset$$

çıkar. Ama A bağlantılı. Demek ki, ya $A \subseteq U$ ya da $A \subseteq V$. Diyelim ikincisi doğru. O zaman yukardaki üçüncü satıra göre $x \notin V$, yani $x \in U$ olmalı. Demek ki gerçek şekil aşağıdaki gibi. Dolayısıyla U, x'i içeren ve A ile kesişmeyen açık bir kümedir. A'nın kapalı olduğu kanıtlanmıştır.



Bağlantı bileşenlerinin sonlu sayıda olduklarını varsayalım. O zaman A bileşeninin tümleyeni, geri kalan sonlu sayıdaki bileşenin bileşimidir, dolayısıyla kapalı bir kümedir; demek ki A açıktır.

Teorem 9.1'den ve yukarda yaptıklarımızdan dolayı sürekli bir $f : X \to Y$ fonksiyonu, X'in bağlantı bileşenlerini Y'nin bağlantı bileşenlerine götürmek zorundadır. □

Önsav 9.3'ten çok daha genel bir sonuç doğrudur. Herkese her an gerekebilecek bu sonucu kanıtlayalım:

Önsav 9.4. *X topolojik bir uzay olsun. $(C_i)_{i\in I}$, X'in bağlantılı altkümeleri olsun ve her i ve j için $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\bigcup_{i\in I} C_i$ bağlantılıdır.*

Kanıt: U ve V,

$$\bigcup_{i\in I} C_i \subseteq U \cup V \text{ ve } \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) \cap U \cap V = \emptyset$$

önermelerini doğrulayan iki açık küme olsun. O zaman her $i \in I$ için,

$$C_i \subseteq U \cup V \text{ ve } C_i \cap U \cap V = \emptyset$$

olur. Demek ki her $i \in I$ için, C_i ya U'nun ya da V'nin bir altkümesidir. Diyelim, $i, j \in I$ için,

$$C_i \subseteq U \text{ ve } C_j \subseteq V$$

olsun. O zaman,

$$C_i \cap C_j \subseteq U \cap V \cap \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \emptyset$$

olur, ki bu bir çelişkidir. Demek ki tüm C_i'lerin ya hepsi U'dadır ya da hepsi V'dedir. Bu da aynen istediğimizdir. □

Teorem 9.2'nin İkinci Kanıtı: $x \in X$ ise, x'i içeren tüm bağlantılı kümelerin bileşimini alalım. Önsav 9.4'e göre bu bileşim bağlantılıdır. Ve bileşimler X'in bağlantı bileşenleridir. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. □

Bağlantılılık sözkonusu olduğunda, sonlu ya da sayılabilir sonsuzluktaki bileşimlerin bir ayrıcalığı vardır.

Önsav 9.5. *Eğer bağlantılı X_n altkümeleri için,*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

ise ve her $n \in \mathbb{N}$ için $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ ise, o zaman X bağlantılıdır.

Kanıt: Yukardaki ya da bir önceki önsavı kullanarak, her n için,

$$Y_n = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{n+1}$$

kümesinin bağlantılı olduğu kanıtlanabilir.

U ve V, X'i ayrıştıran iki açık küme olsun. (Ne demek istediğimiz anlaşılıyordur herhalde...) Her Y_n ya tamamıyla U'nun ya da tamamıyla V'nin içine düşmek zorunda. Ama $Y_n \subseteq Y_{n+1}$ olduğundan, Y_n, U'nun içine düşerse Y_{n+1}, V'nin içine düşemez. Demek ki $Y_0 = X_0$ hangisinin içindeyse, X de onun içinde olmak zorunda. □

Şu sonuç da hem şıktır hem de zor zamanların dostudur, aklınızın bir köşesinde bulunsun:

Önsav 9.6. *X topolojik bir uzay olsun. Eğer C, X'in bağlantılı bir altkümesiyse, o zaman $\overline{C}$ kapanışı da bağlantılıdır.*

Kanıt: U ve V açık kümeleri için,

$$\overline{C} \subseteq U \cup V \text{ ve } \overline{C} \cap U \cap V = \emptyset$$

olsun. O zaman, elbette,

$$C \subseteq U \cup V \text{ ve } C \cap U \cap V = \emptyset$$

olur. Demek ki

$$\text{ya } C \subseteq U \text{ ya } C \subseteq V.$$

Diyelim $C \subseteq U$. O zaman

$$C \cap V = C \cap U \cap V = \emptyset$$

olur, yani $C \subseteq V^c$ olur. Ama V^c kapalı bir küme olduğundan, bundan $\overline{C} \subseteq V^c$ çıkar. Öte yandan, $\overline{C} \subseteq U \cup V$ olduğundan, $\overline{C} \subseteq U$ olmak zorundadır. □

Ama bu sonucun tersi doğru değildir elbet (okura alıştırma). Bundan daha genel bir sonuç da geçerlidir.

Önsav 9.7. *X topolojik bir uzay olsun. Eğer C, X'in bağlantılı bir altkümesiyse ve $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ ise, A da bağlantılıdır.*

Kanıt: Önsav 8.6'ya göre

$$\mathrm{cl}_A(C) = A \cap \mathrm{cl}_X(C) = A \cap \overline{C} = A$$

olur. C bağlantılı olduğundan, Önsav 9.6'ya göre, C'nin (A'da) kapanışı olan A da bağlantılıdır. □

9.2 Gerçel Sayılar Kümesinde Bağlantılılık

Teorem 9.8. *$\mathbb{R}$'nin bağlantılı altkümeleri aralıklardır.*

Kanıt: Önce $[0,1]$ kapalı aralığının bağlantılı olduğunu gösterelim.

$$[0,1] \subseteq U \cup V \text{ ve } U \cap V \cap [0,1] = \emptyset$$

ilişkilerini sağlayan ve boş olmayan U ve V açık kümelerinin varlığını varsayalım. Diyelim $1 \in V$. Demek ki bir $\epsilon > 0$ için $(1-\epsilon, 1+\epsilon) \subseteq V$, yani 1, $U \cap [0,1]$ kümesinin en küçük üstsınırı olamaz.

$$a = \sup(U \cap [0,1]) < 1$$

olsun. a, U'da olsaydı o zaman bir $\epsilon > 0$ için

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (0,1) \subseteq U$$

olurdu, yani

$$a < a + \epsilon/2 \in U \cap (0,1)$$

olurdu ve bu da a'nın tanımıyla çelişirdi. Ama a, V'de de olamaz, çünkü aksi halde, bir $\epsilon > 0$ için

$$(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (0,1) \subseteq V$$

olurdu, yani

$$(a-\epsilon, a) \cap U \cap (0,1) = \emptyset$$

olurdu ve bu da a'nın tanımıyla çelişirdi. Demek ki $[0,1]$ aralığı bağlantılıdır.

Boş olmayan tüm sınırlı kapalı aralıklar topolojik olarak birbirlerine denk olduklarından (bkz. Teorem 7.1), bunların herbiri bağlantılıdır.

$\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ için $[-n,n]$ aralıklarının bileşimi olduğundan, Önsav 9.5'e göre, $\mathbb{R}$ de bağlantılıdır. Teorem 7.1'e göre tüm açık aralıklar bağlantılıdır. Önsav 9.7'ye göre tüm yarıkapalı aralıklar da bağlantılıdır.

Şimdi bağlantılı her altkümenin bir aralık olduğunu kanıtlayalım. C bağlantılı bir altküme olsun. Eğer C'de 0 ya da 1 eleman varsa, sorun yok. Aksi halde $a < b$, C'nin iki elemanı olsun. Diyelim c, a ile b arasında ama C'de değil. O zaman C'yi $(-\infty, c)$ ve (c, ∞) açık altkümeleriyle ikiye bölebiliriz; bir çelişki. Demek ki $[a,b] \subseteq C$ ve C bir aralık. □

Bu bölümde yapılanları kullanarak [N5]'te kanıtladığımız Bolzano teoremini, dolayısıyla ondan çıkan Aradeğer teoremini de bir kez daha kanıtlayabiliriz.

Sonuç 9.9 (Bolzano Teoremi)**.** *Eğer sürekli bir fonksiyon bir aralıkta hem negatif hem de pozitif değerler alıyorsa* 0 *değerini de alır.* □

Teorem 9.10 (Aradeğer Teoremi)**.** *$a \leq b$ olmak üzere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki tüm değerleri alır.* □

9.3 Kartezyen Çarpımda Bağlantılılık

Bağlantılı topolojik uzayların kartezyen çarpımının bağlantılı olup olmadıkları merak konusu olmalı. Sonucu önce iki bağlantılı uzayın çarpımı için kanıtlayalım, daha sonra genelleştiririz.

Teorem 9.11. *Bağlantılı iki topolojik uzayın kartezyen çarpımı bağlantılıdır.*

Kanıt: X ve Y bağlantılı iki topolojik uzay olsun. U ve V,

$$X \times Y = U \sqcup V$$

eşitliğini sağlayan iki açık küme olsun. Her $x \in X$ için, Y ile $\{x\} \times Y$ topolojik uzayları doğal olarak topolojik olarak denktirler (homeomorfturlar yani). Dolayısıyla $\{x\} \times Y$ topolojik uzayı da Y gibi bağlantılıdır. Bundan ve

$$\{x\} \times Y \subseteq U \sqcup V$$

içindeliğinden,

$$\text{ya } \{x\} \times Y \subseteq U \text{ ya } \{x\} \times Y \subseteq V$$

çıkar.

$$X_U = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq U\}$$

ve

$$X_V = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq V\}$$

olsun. O zaman

$$X = X_U \sqcup X_V$$

olur. Elbette X_U, U'nun ve X_V, V'nin birinci izdüşümleridir:

$$X_U = \mathrm{pr}_1(U) \text{ ve } X_V = \mathrm{pr}_1(V).$$

Ama pr_1 açık fonksiyondur, yani açık kümeleri açık kümelere götürür (Alıştırma 6.9). Demek ki X_U ve X_V, X'in açık kümeleridir. X bağlantılı olduğundan, ikisinden biri mutlaka boşküme olmak zorundadır, diyelim $X_V = \emptyset$. O zaman $X = X_U$ olur, ki bu da $X \times Y = U$ demektir. Teorem kanıtlanmıştır. □

Teorem 9.12. *Topolojik uzayların kartezyen çarpımının bağlantılı olması için yeter ve gerek koşul kartezyen çarpımı alınan her topolojik uzayın bağlantılı olmasıdır.*

Kanıt: Eğer $\prod_{i \in I} X_i$ bağlantılıysa, izdüşüm fonksiyonları sürekli olduklarından, Teorem 9.1'e göre her X_i bağlantılıdır. Bu teoremin kolay kısmı. Şimdi zor olan diğer yönünü kanıtlayalım.

$(X_i)_{i\in I}$, bağlantılı topolojik uzaylar ailesi ve $X = \prod_{i\in I} X_i$ olsun.

$$a = (a_i)_{i\in I} \in X$$

olsun. C, X topolojik uzayının a'yı içeren bağlantılı bileşeni olsun (bkz. Teorem 9.2). Önsav 9.6'ya (ya da bağlantılı bileşenlerin kapalı olduğunu söyleyen Teorem 9.2'ye) göre C'nin X'te yoğun olduğunu, yani $\overline{C} = X$ eşitliğini kanıtlamamız yeterli. Bunun için boş olmayan her açık kümenin, C'yle, boş olmayan bir altkümede kesiştiğini kanıtlamak gerekiyor. Her açık kümeyi deneyeceğimize, sadece tabanın açık kümelerini, yani birbirinden değişik $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeçleri ve boş olmayan

$$U_{i_1} \subseteq X_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \subseteq X_{i_n}$$

açık altkümeleri için,

$$U = \mathrm{pr}_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap \mathrm{pr}_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

biçiminde yazılan açık altkümeleri deneyebiliriz. (Çarpım topolojisinin tanımına göre, boş olmayan her açık küme bu tür açık kümelerin bileşimidir.) Her $j = 1, \ldots, n$ için bir $b_{i_j} \in U_{i_j}$ elemanı alalım ve şu tanımları yapalım:

$$\begin{aligned}
&D_1 = \{x \in X : i \neq i_1 \Rightarrow x_i = a_i\},\\
&D_2 = \{x \in X : x_{i_1} = b_{i_1} \text{ ve } i \neq i_1, i_2 \Rightarrow x_i = a_i\},\\
&D_3 = \{x \in X : x_{i_1} = b_{i_1},\ x_{i_2} = b_{i_2} \text{ ve } i \neq i_1, i_2, i_3 \Rightarrow x_i = a_i\},\\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\\
&D_n = \{x \in X : x_{i_1} = b_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}} = b_{i_{n-1}} \text{ ve } i \neq i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n \Rightarrow x_i = a_i\}.
\end{aligned}$$

Dikkat edilirse her D_j kümesinde i_j'inci koordinat dışında tüm koordinatlar sabit ve i_j'inci koordinat X_{i_j} kümesinde özgürce dolaşabiliyor. Yani $D_j \approx X_{i_j}$. Dolayısıyla D_j bağlantılı bir küme. Ayrıca, kolayca görülebileceği üzere,

$$D_j \cap D_{j+1} \neq \emptyset.$$

Önsav 9.5'e göre

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

bağlantılı bir kümedir. Ama $a \in D_1 \subseteq D$; demek ki

$$D \subseteq C.$$

Öte yandan $D_n \cap U \neq \emptyset$, yani $D \cap U \neq \emptyset$, yani $C \cap U \neq \emptyset$. □

Alıştırmalar

9.9. $\mathbb{Q}$'nün (Öklid topolojisiyle) her bağlantılı bileşeninin tek bir noktadan oluştuğunu kanıtlayın. Bu tür topolojik uzaylara ***tamamen kopuk uzaylar***[4] denir.

---

[4]İngilizcesi *totally disconnected space.*

9.10. Sorgenfrey doğrusunun tamamen kopuk olduğunu kanıtlayın.

9.11. i. $(0, 1)$ aralığıyla $[0, 1]$ aralığının topolojik olarak denk olmadıklarını kanıtlayın.
ii. Bir doğruyla bir çemberin topolojik olarak denk olmadıklarını kanıtlayın.
iii. $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R}^2$'nin homeomorfik olmadıklarını kanıtlayın.

9.12. Bir X topolojik uzayında şu ilişkileri tanımlayalım:
• $x \sim y$ ancak ve ancak x ve y aynı bağlantılı altkümedeyse. Bunun bir denklik ilişkisi olduğunu ve denklik sınıflarının X'in bağlantılı bileşenleri olduğunu gördük.
• $x \approx y$ ancak ve ancak

$$X = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset,\ x \in U \text{ ve } y \in V$$

ilişkilerini sağlayan U ve V açık kümeleri yoksa.
i. $\approx$ ilişkisinin bir denklik ilişkisi olduğunu kanıtlayın. Bu denklik ilişkisinin sınıflarına X'in ***nerdeyse bağlantılı bileşenleri***[5] adı verilir.
ii. x elemanını içeren bir nerdeyse bağlantılı bileşenin x'i içeren hem açık hem de kapalı tüm altkümelerin kesişimi olduğunu kanıtlayın.
iii. x'i içeren nerdeyse bağlantılı bileşenin, x'i içeren bağlantılı bileşeni içerdiğini kanıtlayın. Demek ki nerdeyse bağlantılı bileşenler (bazı) bağlantılı bileşenlerin bileşimidirler.
iv. Nerdeyse bağlantılı bileşenlerin bağlantılı bileşenlere eşit olmadığı bir topolojik uzay bulun.

9.13. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ topolojik olarak denk midir?

[5] İngilizcesi *quasi-connected components*.

Topoloji Alıştırmaları

1. $a \neq 0$ ve b tamsayıları için, $\mathbb{Z}$'nin $a\mathbb{Z} + b$ biçiminde yazılan altkümelerinin bileşimine açık diyelim. Bir de $\emptyset$ açık olsun.
   i. Bunun $\mathbb{Z}$ üzerine bir topoloji tanımladığını kanıtlayın. İpucu: Eğer ebob(a, c), $d - b$'yi bölmüyorsa $(a\mathbb{Z} + b) \cap (c\mathbb{Z} + d) = \emptyset$ olur. Aksi halde $(a\mathbb{Z} + b) \cap (c\mathbb{Z} + d) \neq \emptyset$ olur ve kesişimdeki herhangi bir w elemanı için kesişim ekok$(a, c)\mathbb{Z} + w$ kümesine eşit olur.
   ii. Bu topolojide sonlu bir kümenin ancak boşkümeyse açık küme olabileceğini kanıtlayın.
   iii. $a\mathbb{Z}+b$ biçiminde yazılan (açık) kümelerin aynı zamanda kapalı olduklarını kanıtlayın.
   iv. $\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \text{ asal}} p\mathbb{Z}$ eşitliğinden $\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ kümesinin açık olduğunu kanıtlayın.
   v. Sonlu sayıda asal olsaydı $\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$ kümesinin ayrıca kapalı olacağını kanıtlayın. Buradan sonlu sayıda asal olamayacağını kanıtlayın. (Asalların sonsuzluğunun bu ilginç kanıtını Hillel Fürstenberg, 1955'te lisans öğrencisiyken bulmuştur.)
2. Yukardaki topolojik uzayı ele alıyoruz.
   i. Topolojinin Hausdorff olduğunu kanıtlayın.
   ii. Her $s \in \mathbb{Z}$ için $x \mapsto x + s$ fonksiyonunun topolojik bir eşleme olduğunu gösterin.
   iii. Her $s \in \mathbb{Z}$ için $x \mapsto sx$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin.
   iv. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden $(x, y) \mapsto x + y$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonun sürekli olduğunu kanıtlayın.
   iv. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye giden $(x, y) \mapsto xy$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyon sürekli midir?
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $a \in \mathbb{R}$ için,
   $$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
   eşitliğini sağlasın (yani "sağdan sürekli" olsun). f'nin $\mathbb{R}$'nin üstlimit topolojisinde sürekli olduğunu kanıtlayın.
4. $\mathbb{R}^2$'nin her kapalı altkümesinin (Öklid topolojisinde elbet) bir altkümenin sınırı olduğunu kanıtlayın.
5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ olsun. Öklid topolojisinde D'nin sınırının
   $$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
   olduğunu kanıtlayın.
6. X bir topolojik uzay olsun. Eğer X'in bir A altkümesi $A = (\mathrm{cl}\, A)^\circ$ eşitliğini sağlıyorsa A'ya ***düzgün açık*** küme denir; eğer $A = \mathrm{cl}(A^\circ)$ eşitliğini sağlıyorsa A'ya ***düzgün kapalı*** küme denir.
   i. Düzgün kapalı bir kümenin tümleyeninin düzgün açık ve düzgün açık bir kümenin tümleyeninin düzgün kapalı olduğunu kanıtlayın.
   ii. $\mathbb{R}$'de düzgün açık olmayan açık kümelerin varlığını gösterin.

iii. $A \subseteq X$ ise, $(\mathrm{cl}\, A)^\circ$ kümesinin düzgün açık olduğunu kanıtlayın.

iv. İki düzgün açık kümenin kesişiminin düzgün açık olduğunu kanıtlayın. Benzer önermenin bileşim için doğru olmadığını gösterin.

7. Topolojik uzayların kartezyen çarpımı üzerine kutu topolojisi alırsak, Teorem 6.6'nın yanlış olduğunu kanıtlayın. Teorem 6.5 kutu topolojisi için doğru mudur?

8. X bir topolojik uzay ve $a \in V \subseteq X$ olsun. Eğer $a \in U \subseteq V$ koşullarını sağlayan bir U açık kümesi varsa, o zaman V'ye a'nın bir ***komşuluğu*** adı verilir. $\mathcal{V}_a$, a'nın komşuluklarının kümesi olsun. Şu özellikleri kanıtlayın:

   i. Her $a \in X$ ve her $V \in \mathcal{V}_a$ için $a \in V$.

   ii. $\mathcal{V}_a$'dan iki elemanın kesişimi gene $\mathcal{V}_a$'dadır.

   iii. $\mathcal{V}_a$'nın bir elemanının üstkümesi de $\mathcal{V}_a$'dadır.

   iv. Eğer $V \in \mathcal{V}_a$ ise, öyle bir $U \in \mathcal{V}_a$ vardır ki, her $x \in U$ için, $V \in \mathcal{V}_x$ olur.

   v. X'in bir altkümesi, ancak ve ancak her elemanının komşuluğuysa açıktır; yani U'nun açık olması için, "her $x \in U$ için, $U \in \mathcal{V}_x$" gerek ve yeter koşuldur.

9. X bir küme olsun. Her $a \in X$ için, yukardaki i, ii, iii ve iv koşullarını sağlayan bir $\emptyset \neq \mathcal{V}_a \subseteq \wp(X)$ verilmiş olsun. Yukardaki v koşulunu X'in açık kümelerini tanımlamak için kullanalım. Bu tanımın X'i topolojik bir uzay yaptığını kanıtlayın. Bu topolojik uzayın bir a noktasının komşuluklarının aynen $\mathcal{V}_a$ kümesinin elemanları olduğunu kanıtlayın.

10. X bir topolojik uzay olsun. X'in ***Borel kümeleri*** kümesi $\mathcal{B}(X)$, $\wp(X)$'in şu koşulları sağlayan en küçük altkümesidir:

   a. Açık kümeler $\mathcal{B}(X)$'tedir.

   b. $\mathcal{B}(X)$'ten sayılabilir sayıda elemanın kesişimi de $\mathcal{B}(X)$'tedir.

   c. $\mathcal{B}(X)$'in bir elemanının X'te tümleyeni de $\mathcal{B}(X)$'tedir.

   $0 < \alpha < \omega_1$ için (yani sayılabilir bir α ordinali için) $\mathcal{B}_\alpha(X)$'i α üzerine tümevarımla şöyle tanımlayalım: $\mathcal{B}_0(X)$, elemanları X'in açık ve kapalı kümelerinden oluşan küme olsun. $\mathcal{B}_\alpha(X)$, $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta(X)$ kümesinden sayılabilir sayıda elemanın kesişimleri ve $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta(X)$ kümesinin elemanlarının tümleyenlerinden oluşsun. $\mathcal{B}_{\omega_1}(X) = \mathcal{B}(X)$ eşitliğini kanıtlayın.

Kısım II

Metrik Uzaylar

10. Metrik Uzaylar

10.1 Tanım

Kitabın sıfırıncı bölümünde $\mathbb{R}$'de analiz konusunu işledikten sonra topolojiye eğilmiştik. Ama daha önceki ciltlerde hep $\mathbb{R}$'de çalışmıştık, hiç $\mathbb{R}$'nin dışına çıkmamıştık. Şimdi $\mathbb{R}$'ye geri dönüp $\mathbb{R}$'de tanımladığımız yakınsaklık, süreklilik gibi kavramların tanımlarına bir kez daha göz atalım. Daha sonra topolojiye geri döneceğiz.

Bir $(x_n)_n$ gerçel sayılar dizisinin bir a gerçel sayısına yakınsaması demek, her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$$

önermesinin sağlandığı bir N sayısının var olması demektir.

Süreklilik için ise şu tanımı vermiştik: Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir a sayısında sürekli olması demek, her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

önermesinin sağlandığı bir $\delta > 0$ sayısının var olması demektir.

Her iki tanımda da kullanılan,

$$|x - y|$$

mutlak değer fonksiyonuna odaklanalım.

Tanımlarda mutlak değerden sözedildiğine göre, yakınsaklığa, limite, sürekliliğe dair teoremlerimizin kanıtlarında zorunlu olarak mutlak değer fonksiyonunu kullandık.

"Mutlak değer fonksiyonunu kullanmak" ne demektir? Matematikte, hiçbir zaman bir nesnenin kendisi ("nesnenin kendisi" her ne demekse!) kullanılmaz. Sadece o nesnenin bazı özellikleri kullanılır.

Botanikte elmanın kendisi, kimyada alkolün kendisi, biyolojide balığın kendisi kullanılabilir ama tamamıyla zihinsel bir uğraş olan matematikte bir nesnenin kendisi değil, nesnenin bazı özellikleri kullanılır. (Nesnenin kendisi kaybolup sadece özellikleri kaldığında, geriye kalana "kavram" adı verilir.)

Nitekim bir bilim dalı ne kadar çok nesneden uzaklaşırsa, o kadar kavramsal olur; bir de simgeleşmeye başladığında o zaman o bilim dalı matematiksel olmaya başlar.

Matematiksel bir kanıt sonlu sayıda sözcükten oluşur ve sonlu sayıda sözcükle matematiksel bir nesnenin ancak sonlu sayıda özelliği sayılabilir. Örneğin eşitsizlik üzerine bir sonucun kanıtında, eşitsizliğin anlamı ya da kendisi değil, eşitsizliğin,

$$\begin{aligned}
&x \leq x,\\
&x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y,\\
&x \leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z,\\
&\text{ya } x \leq y \text{ ya da } y \leq x,\\
&0 \leq x^2
\end{aligned}$$

gibi sonlu sayıda özelliği kullanılmıştır. Eşitsizliklerle ilgili bir teoremin kanıtında sadece yukardaki özellikler kullanılmışsa, o zaman o teorem, adı eşitsizlik olsun ya da olmasın, bu özellikleri sağlayan tüm ilişkiler için geçerlidir. Dolayısıyla, matematiksel bir teorem, kanıtında söz edilen sonlu sayıda özellikleri sağlayan **tüm** matematiksel nesneler için kanıtlanmıştır.

Bu derin sözlerden sonra, yeryüzüne inip bugüne kadar matematik hayatımızda mutlak değerin hangi özelliklerini kullandığımız sorusunu soralım.

Her şeyden önce, mutlak değer adı verilen şey, bir fonksiyondur, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesinden $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesine giden bir fonksiyondur. Bu basit olgu dışında, önceki sayılarımızda mutlak değer fonksiyonu hakkında, her x, y, $z \in \mathbb{R}$ için geçerli olan şu üç özelliği kullandık:

1. $|x - y|$ sayısı ancak ve ancak $x = y$ ise 0 olur (yoksa mutlak değer pozitiftir). Biçimsel yazılımla

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2. $|x - y| = |y - x|$.
3. $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.

Şimdi $|x - y|$ yerine $d(x, y)$ yazalım. Ne farkedecek ki! O zaman yukardaki özellikler şu hale dönüşürler:

1. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ ise.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Gerçel sayılarda analize dair tanımladığımız her kavramı ve kanıtladığımız hemen hemen her sonucu $|x - y|$ yerine $d(x, y)$ yazarak kanıtlayabilirdik (elbette!)

Demek ki aslolan mutlak değer değil, mutlak değerin yukardaki üç özelliği... Demek ki aslında biz sadece gerçel sayılarla ilgili tanımlar/sonuçlar değil, yukardaki özelliklerin doğru olduğu matematiksel yapılarda tanımlar/sonuçlar tanımlıyormuşuz/kanıtlıyormuşuz. Yani, görünenden çok daha genel bir şey yapıyormuşuz.

Bu edebi sözleri matematikselleştirelim. X herhangi bir küme olsun. Analizde bugüne kadar $\mathbb{R}$ için yaptıklarımızı X için yapmaya çalışacağız. X şimdilik sadece bir küme; üstünde illa toplama ya da çarpma gibi işlemler yok.

d, $X \times X$'ten $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesine giden bir fonksiyon olsun. Her x, y, $z \in X$ için, d fonksiyonunun şu özellikleri sağladığını varsayalım:

M1. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ ise.

M2. $d(x, y) = d(y, x)$.

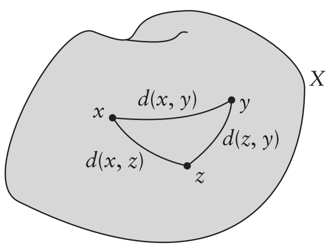
M3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve mutlak değer fonksiyonu $|x - y|$ için yaptığımız hemen hemen her şeyi X kümesi ve $d(x, y)$ fonksiyonu için de yapabiliriz. Böylece $\mathbb{R}$ için tanımladığımız kavramları ve kanıtladığımız sonuçları genelleştirerek, çok daha genel (ve elbette çok daha soyut) kavramlar ve sonuçlar elde ederiz.

Metrik uzayları matematiksel olarak tanımlama zamanı geldi. X bir küme ve X üzerinde, yukardaki M1, M2, M3 özelliklerini sağlayan bir

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

fonksiyonu tanımlanmış olsun. O zaman (X, d) çiftine ***metrik uzay*** adı verilir. d fonksiyonuna ise X üzerinde ***mesafe*** ya da ***metrik*** denir. $d(x, y)$ sayısı x ile y arasındaki ***mesafedir***.



Bir metrik uzayının hayali resmi. $d(x, y)$, x ile y arasındaki en kısa yolun uzunluğu olarak düşünülebilir. Her şey hayali tabii.

Alıştırmalar

10.1. d, $X \times X$'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyon M1, M2, M3 koşullarını sağlıyorsa negatif değerler alamayacağını kanıtlayın.

10.2. d, $X \times X$'ten $\mathbb{R}$ kümesine giden bir fonksiyon olsun ve her x, y, $z \in X$ için,
i. $d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ ise,
ii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ özellikleri doğru olsun. d'nin X üzerinde bir metrik olduğunu kanıtlayın.

10.3. d, X üzerine bir metrikse, her x, y, $z \in X$ için, $d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu kanıtlayın.

Aynı X kümesi üzerinde değişik metrikler tanımlayabiliriz ve her seferinde değişik bir metrik uzay elde ederiz. Mesela bir salyangoz için bir elma üstündeki mesafe yüzeysel mesafedir, ama bir kurtçuk elmayı kemirebileceğinden kurtçuk elmayı salyangozdan değişik bir metrik uzayı olarak görür. Duvarları delip geçen görünmez adam bir şehri bizden değişik bir metrik uzayı olarak algılar. Bir uçakla bir trenin yeryüzündeki metrikleri elbette değişik olmalıdır. Aynı kümeyi değişik biçimlerde metrik uzayı olarak algılamanın yararlarını gördükten sonra M1, M2, M3 özelliklerini dünyamızdan örneklerle yorumlayalım.

İlk olarak, iki nokta arasındaki mesafenin negatif olamayacağına dikkati çekelim, çünkü d fonksiyonu değerlerini $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesinden alır.

M1, iki nokta arasındaki mesafenin ancak noktalar birbirine eşitse 0 olacağını söylüyor. Daha fiziksel bir ifadeyle, bir noktadan bir diğer noktaya gitmek bedava değildir, belli bir yol katetmek gerekir.

M2, A noktasının B noktasına olan uzaklığının B noktasının A noktasına olan uzaklığına eşit olduğunu söylüyor. Tek yön olan trafiklerde bu özellik doğru olmayabilir ama genelde doğrudur. M2 özelliği mesafenin simetrik olduğunu söyler.

M3, bir noktadan bir başka noktaya gitmek için bir başka noktadan geçmek istersek, yolun kısalmayacağını, hatta tam tersine uzayabileceğini söylüyor; daha matematikçesiyle M3, üçgen eşitsizliğinin metrik uzaylarda doğru olduğunu söylüyor.

Görüldüğü gibi, M1, M2, M3 özellikleri bir mesafe kavramından beklediklerimizi özetliyor.

10.2 Örnekler

Bu altbölümde binlerce metrik uzayı örneği vereceğiz ve böylece soyutlamanın yararlarını bir kez daha sergilemiş olacağız. Örneklerimizin her biri matematikte sık sık karşımıza çıkan örneklerdir ve hiçbiri yok sayılamaz.

En doğal demeyelim de, yaşamda karşımıza en sık çıkan örneklerle başlayalım.

Örnekler

10.4. İlk örneğimiz yukarda verdiğimiz ve ilham kaynağımız olan standart $(\mathbb{R}, d)$ çifti. Burada

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Buna $\mathbb{R}$ üzerine ***Öklid metriği*** adı verilir.

10.5. Bir boyuttan çok boyuta geçelim. $X = \mathbb{R}^n$ ve

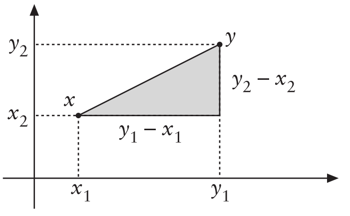
$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

ise

$$d(x, y) = d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

olsun. Böylece $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzayı olur: M1 ve M2 koşullarının doğrulukları bariz. M3 ise Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden [N5] dolayı doğru. $n = 1$ ise, aynen bir önceki örnekteki metrik uzayını buluruz.

Bu metrik uzayına n ***boyutlu Öklid uzayı***, mesafeye de ***Öklid mesafesi/metriği*** adı verilir. Eğer başka bir şey söylenmemişse, $\mathbb{R}^n$'den metrik uzayı olarak sözedildiğinde hep Öklid uzayı anlaşılmalı.



Pisagor Teoremi'ne göre, x ile y arasındaki mesafe $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ dir.

Eğer $n = 1$ ise, bu, bir önceki örneği verir.

Eğer $n = 2$ ise ($n = 3$ ise de), Pisagor Teoremi'nin yardımıyla bulunan "iki nokta arasındaki mesafe" kavramını buluruz.

10.6. $(X_1, e_1), \ldots, (X_n, e_n)$ metrik uzayları ve $X = \prod_i X_i$ kartezyen çarpım olsun. Herhangi bir $p \geq 1$ gerçel sayısı seçelim. Eğer

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$$

ise

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i(x_i, y_i)^p \right)^{1/p}$$

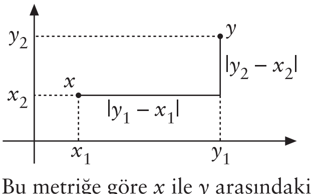
tanımını yapalım. O zaman (X, d_p) çifti bir metrik uzayıdır. M1 ve M2'nin doğruluğu su götürmez. M3 ise, e_i'lerin üçgen eşitsizliğinden ve Minkowski Eşitsizliği'nden [N5] kolaylıkla çıkar.

Eğer (X_i, e_i) metrik uzaylarının herbiri Örnek 10.4'teki 1 boyutlu $\mathbb{R}$ metrik uzayıysa ve $p = 2$ ise o zaman Örnek 10.5'yi buluruz.

(X_i, e_i) metrik uzaylarının herbiri Örnek 10.4'teki 1 boyutlu $\mathbb{R}$ metrik uzayı olsun. $p = 1$ alalım. İşi kolaylaştırmak için n'yi 2 alalım. O zaman,

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

olur. Bu aynen, bir satranç tahtasında kalenin mesafe kavramıdır: Kalenin (x_1, x_2) karesinden (y_1, y_2) karesine gitmek için geçmek zorunda olduğu minimum kare sayısıdır. Ya da New York gibi yolların kuzey-güney ve doğu-batı yönünde olduğu bir şehirde, taksi şoförünün mesafesidir. Nitekim bu metriğe New York ya da Manhattan metriği dendiği de olur.



Bu metriğe göre x ile y arasındaki mesafe $|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$ dir.

Eğer yukardaki tanımla $0 < p < 1$ alırsak üçgen eşitsizliği artık doğru olmaz. Ama bu durumda d'nin tanımını hafifçe değiştirerek bir metrik bulabiliriz. Eğer $0 < p < 1$ ise,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} e_i(x_i, y_i)^p$$

tanımı, kartezyen çarpım üzerine bir metrik verir. Üçgen eşitsizliği Minkowski eşitsizliğinin kolay bir sonucudur, bkz. [N5].

10.7. (X, d) bir metrik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ fonksiyonunu $X \times X$'in $Y \times Y$ altkümesine kısıtlarsak

$$d_{|Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

fonksiyonu elde ederiz. $d_{|Y\times Y}$ fonksiyonu da elbette, aynen d gibi M1, M2, M3 özelliklerini sağlar. Dolayısıyla

$$(Y,\, d_{|Y\times Y})$$

bir metrik uzayıdır. Bu metrik uzayına X'in ***altuzayı*** adı verilir. $d_{|Y\times Y}$ metriğine de (X'ten) Y'ye indirgenmiş metrik adı verilir. X'in bir altuzayında, iki nokta arasındaki mesafe, bu noktalar X'te de görülse, altuzayda da görülse değişmez.

$$(Y,\, d_{|Y\times Y})$$

yerine (Y, d) de yazıldığı olur. Aksi söylenmedikçe, bir metrik uzayının bir altkümesi üzerine bu metrik uzay yapısı verilir.

10.8. Bir metrik uzayının tüm mesafelerini belli bir pozitif sabit sayıyla çarparsak gene bir metrik elde ederiz. Mesela (X, d) bir metrik uzayıysa,

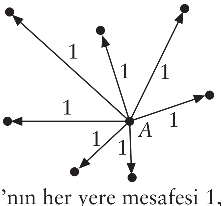
$$d'(x, y) = 5\, d(x, y)$$

tanımını yaparsak, yeni bir metrik uzayı elde ederiz. Bu iki metrik uzayı arasında çok derin farklılıklar olmadığını ileride göreceğiz.

10.9. Şimdi herhangi bir X kümesi üzerinde tuhaf bir metrik tanımlayacağız:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x = y \text{ ise} \end{cases}$$

Yani iki nokta arasındaki mesafe ya 1 ya da 0. Ve elbette, mesafenin tanımı gereği, eğer iki nokta aynı noktalarsa mesafe ancak 0 olabilir, yoksa mesafe 1'dir. Bu, X kümesi üzerine bir metrik tanımlar. Bu metriğe X üzerine ***ayrık metrik*** adı verilir.



A'nın her yere mesafesi 1,
sadece kendisine mesafesi 0

Eğer 1 yerine pozitif olması koşuluyla başka bir sayı alsaydık pek bir şey değişmezdi, gene bir metrik elde ederdik. Bu yeni metrik ayrık metriğin Örnek 10.8'teki anlamıyla sabit bir çarpımıdır elbet.

10.10. $(X_1, e_1), \ldots, (X_n, e_n)$ metrik uzayları ve $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ olsun. Alıştırma 10.6'da $p \geq 1$ için (X, d_p) metrik uzaylarını tanımladık. Burada X üzerine d_∞ olarak göstereceğimiz bir metrik tanımlayacağız. Eğer

$$x = (x_i)_i,\ y = (y_i)_i \in X$$

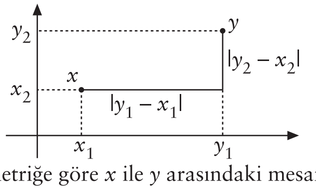
ise

$$d_\infty(x,y) = \max\{e_i(x_i,y_i) : i = 1,\dots,n\}$$

tanımını yapalım. O zaman (X, d_∞) bir metrik uzayı olur. M1 ve M2'nin doğruluğu çok belli. M3'ün doğruluğu biraz daha az belli ama bu da çok da zor değil:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max_{i=1}^{n} e_i(x_i,y_i) \le \max_{i=1}^{n} (e_i(x_i,z_i) + e_i(z_i,y_i)) \\ &\le \max_{i=1}^{n} e_i(x_i,z_i) + \max_{i=1}^{n} e_i(z_i,y_i) = d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

Özellikle $X = \mathbb{R}$ ve $d_1 = d_2$ Öklid mesafesi olduğu duruma dikkat çekeriz.



Bu metriğe göre x ile y arasındaki mesafe
$d_\infty(x, y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$ dir.
Şekle inanacak olursak mesafe $|y_1 - x_1|$ oluyor.

10.11. Yukardaki örnekte kartezyen çarpımın sonlu olmasına da gerek yok, sonlu ya da sonsuz bir I kümesi için $(X_i, e_i)_{i\in I}$ bir metrik uzayı ailesi ve $X = \prod_I X_i$ olsun. Eğer

$$x = (x_i)_i,\ y = (y_i)_i \in X$$

ise

$$d_\infty(x,y) = \sup\{e_i(x_i,y_i) : i \in I\}$$

tanımını yaparsak, I sonsuz olduğunda $d_\infty(x,y) = \infty$ olabilir. Bu durumu engellemek için, tanımı,

$$d_\infty(x,y) = \sup\{\min\{e_i(x_i,y_i), 1\} : i \in I\} = \min\{\sup\{e_i(x_i,y_i) : i \in I\},\ 1\}$$

olarak değiştirelim. O zaman (X, d_∞) bir metrik uzayı olur. Kanıtı okura bırakıyoruz. $\prod_I X = \text{Fonk}(I, X)$ eşitliği bu metrik uzaya bambaşka bir boyut katar. İlerde sık sık sözedeceğiz.

10.12. X bir küme ve d_1 ve d_2, X üzerine herhangi iki metrik olsun. Her $x,\ y \in X$ için,

$$d(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

olsun. O zaman d, X üzerine bir metriktir. M1 ve M2'yle şimdiye kadar hep olduğu gibi kolayca başa çıkarız. M3 de çok büyük bir sorun çıkarmıyor:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\} \\ &\le \max\{d_1(x,z) + d_1(z,y), d_2(x,z) + d_2(z,y)\} \\ &\le \max\{d_1(x,z), d_2(x,z)\} + \max\{d_1(z,y), d_2(z,y)\} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

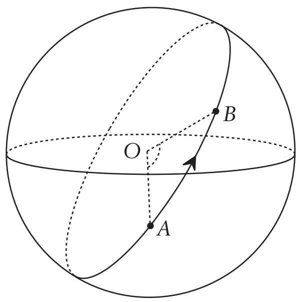
Elbette iki metrik yerine herhangi bir $n \ge 1$ doğal sayısı için, X üzerine n tane metrik alıp yukardaki gibi tüm bu mesafelerin maksimumunu alabilirdik.

10.13. (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. X'in noktaları arasındaki mesafe çok çok büyüyebilir. Örneğin Öklid uzaylarında noktalar arasındaki mesafelerin üstsınırı yoktur. Eğer bu rahatsızlık veriyorsa, mesafeleri üstten sınırlayabiliriz. Örneğin

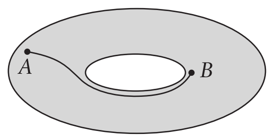
$$d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$$

tanımını yapalım. d', X üzerine bir mesafedir ve bu mesafeye göre noktalar arasındaki mesafe en fazla 1 olur. (1 metreden ötesini 1 metre sanan metrik.) M1 ve M2'nin kanıtları kolay. M3 de çok zor değil. Kanıtı okura bırakıyoruz. Bkz. Örnek 10.17 ve 10.19.

10.14. X, birim kürenin yüzeyi olsun. Kürenin yüzeyinde alınan iki nokta arasındaki kürenin üstünden giden en kısa yol, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, merkezi kürenin merkezinde olan "büyük çember"in üstündedir. Bu iki nokta arasındaki mesafeyi, bu en kısa yolun uzunluğu olarak tanımlayalım. Bu bize kürenin yüzeyi üzerine bir mesafe kavramı verir.



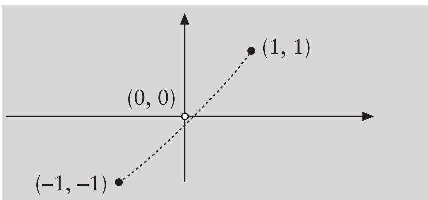
10.15. Yukarda yaptığımızı çoğu zaman $\mathbb{R}^3$ ya da $\mathbb{R}^2$'nin başka altkümeleri için de yapabiliriz. Örneğin X, ***torus*** (simit) adı verilen tekerlek biçimindeki yüzey olsun.



Torus üstünde iki A ve B noktası alalım. A'dan B'ye giden ve torus'un hep üstünde kalan birçok yol vardır. Bu yolların en kısasının uzunluğuna o iki nokta arasındaki "mesafe" diyelim. Bu bize torus üzerine bir metrik verir.

Daha önce işlemediğimiz konulara girdiğimizi farketmişsinizdir, ne "yol" ne de "bir yolun uzunluğu" kavramını tanımladık. Buradaki amacımız tam matematiksel örnekler vermek değil, okura sezgi kazandırmak. Yol ve yolun uzunluğu kavramlarını bildiğimizi varsayarak devam edelim.

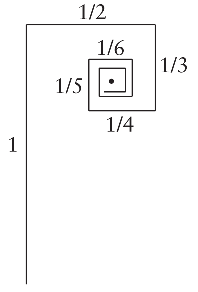
Her zaman en kısa yol olmayabilir. Örneğin $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ise, $(1,1)$ noktasıyla $(-1,-1)$ noktası arasında hep X'te kalan en kısa yol yoktur (olsaydı bu yol $(0,0)$ noktasından geçmek zorunda kalırdı.) Ama en kısa yol olmasa da, hiç olmazsa, yolların uzunluklarının en büyük altsınırını (inf'ini) alabiliriz.



En kısa yolun olmadığı bir uzay : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

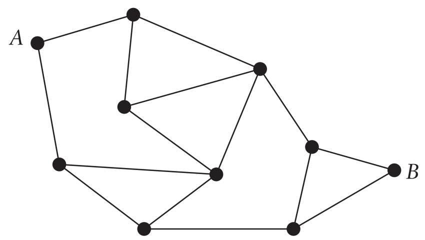
$\mathbb{R}^3$'ün X altkümesinin şu özelliği olsun: "X'in herhangi iki noktası arasında 'uzunluğu' sonlu olan bir yol vardır." Bu durumda X'in iki noktası arasındaki mesafeyi, bu iki nokta arasındaki yolların uzunluklarının en büyük altsınırı olarak belirleyebiliriz. Bu bize bir mesafe kavramı verir.

Ama X'in iki noktası arasında sonlu uzunlukta bir yol olmak zorunda değildir. Bir örneğin resmi aşağıda. X kümesi, uzunlukları $1, 1/2, 173, 1/4, 1/5, \ldots$ olan doğru parçalarının aşağıdaki şekildeki gibi birbirleriyle



birleştirilmesinden oluşsun. X'e bir de bu doğru parçalarının "en ucundaki yoğunlaşma noktasını" ekleyelim. Bu yoğunlaşma noktasından X'in başka bir noktasına giden sonlu uzunlukta bir yol yoktur.

10.16. G bağıntılı (yani her noktadan her noktaya en az bir yolun olduğu) herhangi bir çizge olsun. G'nin iki noktası arasındaki mesafe, bu iki nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğu olsun. Böylece G bir metrik uzayı olur. Aşağıdaki şekilde bir örnek verdik.



Bu çizgede A ile B noktaları arasındaki mesafe 4.
A ile B arasında uzunluğu 4 olan iki değişik yol var.

Bir sonraki örnek için bir önsav ve bir tanım gerekiyor.

Önsav 10.1. (X, d) *bir metrik uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun.* $x_0 \in X$ *olsun. Eğer* A*'nın noktalarının* x_0*'a olan mesafeleri sınırlıysa, o zaman bu özellik* x_0 *yerine* X*'in her noktası için geçerlidir. Ayrıca bu durumda her* a, $b \in A$ *için* $d(a, b) \leq r$ *eşitsizliğini sağlayan bir* r *sayısı vardır.*

Kanıt: A'nın elemanlarının x_0'a olan mesafeleri λ'dan büyük olmasın. x_1, X'in herhangi bir elemanı olsun. O zaman her $a \in A$ için,

$$d(a, x_1) \leq d(a, x_0) + d(x_0, x_1) \leq \lambda + d(x_0, x_1)$$

olur. Demek ki A'nın elemanlarının x'e olan uzaklığı $\lambda + d(x_0, x_1)$ sayısından büyük olamaz.

a ve b, A'nın herhangi iki elemanı olsun. O zaman,

$$d(a, b) \leq d(a, x_0) + d(x_0, b) \leq 2\lambda$$

olur. $r = 2\lambda$ almak yeterli. □

Bir metrik uzayın yukardaki özelliği olan altkümelerine ***sınırlı*** denir. Son önermeyi sağlayan r sayılarının en büyük altsınırına A'nın ***çapı*** adı verilir. A'nın X'e eşit olabileceği gözden kaçmamalı.

Örnekler

10.17. (X, d) herhangi bir metrik uzayı olsun.

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

tanımı bize bir başka metrik verir. (Okura alıştırma.) Bu yeni metrikle iki nokta arasındaki mesafe 1'den kesin küçük olur. Eğer (X, d) metrik uzayı sınırsızsa yeni metrik uzayının çapı 1 olur ama mesafesi 1 olan iki nokta yoktur.

10.18. I herhangi bir küme ve (M, d) herhangi bir metrik uzay olsun. I'dan M'ye giden bir f fonksiyonunun (ya da $\prod_I M$ kümesinin bir elemanının) imgesi sınırlıysa, yani

$$\sup\{d(f(i), f(j)) : i, j \in I\} < \infty$$

ise, f'ye ***sınırlı fonksiyon*** diyelim. $\ell^\infty(I, M)$, I'dan M'ye giden sınırlı fonksiyonlar kümesi olsun. $f, g \in \ell^\infty(I, M)$ için

$$d(f, g) = \sup\{d(f(i), g(i)) : i \in I\}$$

tanımını yapalım. O zaman $d(f, g) \in \mathbb{R}$ olur. Çünkü r ve s sırasıyla $f(I)$ ve $g(I)$ kümelerinin çapıysa ve $j \in I$ sabit bir elemansa, her $i \in I$ için,

$$d(f(i), g(i)) \le d(f(i), f(j)) + d(f(j), g(j)) + d(g(j), g(i)) \le r + d(f(j), g(j)) + s$$

olur. $(\ell^\infty(I, M),\ d)$ bir metrik uzaydır.

10.19. I herhangi bir küme ve $(M,\ d)$ herhangi bir metrik uzay olsun. I'dan M'ye giden fonksiyonlar kümesini $\text{Fonk}(I,\ M)$ ya da $\prod_I M$ ya da M^I (Kartezyen çarpım) olarak gösteriyoruz. $f,\ g \in M^I$ için,

$$d(f, g) = \sup\{\min\{d(f(i), g(i)), 1\} : i \in I\}$$

tanımını yapalım. O zaman her f ve g için $d(f, g) \le 1$ olur. (Ama bu hiç önemli değildir!) $(\text{Fonk}(I, M), d)$ bir metrik uzaydır. Buna ***düzgün metrik*** adı verilir. Çok önemlidir! Yakından göreceğiz.

Alıştırmalar

10.20. (X, d) bir metrik uzay olsun. $f : \mathbb{R}^{\ge 0} \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ içbükey, artan ve $f(0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. (Örneğin $0 < p < 1$ için $f(x) = x^p$ ya da $f(x) = \ln(1 + x)$.) O zaman, $d'(x, y) = f(d(x, y))$ formülü bir metrik tanımlar mı?

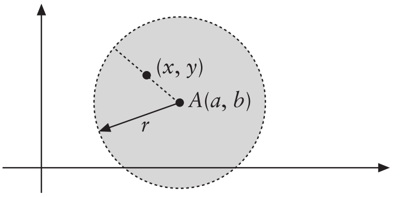
10.21. X bir küme, (Y, d) bir metrik uzay ve f, X'ten Y'ye giden birebir bir fonksiyon olsun. O zaman $d'(x, x') = d(f(x), f(x'))$ formülü X üzerine bir metrik tanımlar. Kanıtlayın.

10.3 Yuvarlar

$\mathbb{R}^2$'de merkezi $A(a, b)$ noktası olan r yarıçaplı açık daire, daha doğrusu dairenin içi, $B(A, r)$ olarak gösterilir; cebirsel olarak da şöyle ifade edilir:

$$B(A, r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r\right\}.$$

Resim aşağıda. Dairenin (noktalı çizilmiş olan) sınırları dairenin içine dahil değildir.



$\mathbb{R}^2$ üzerinde Öklid metriği

$$d((x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

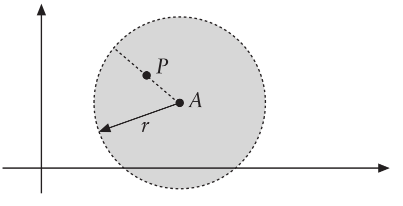
formülü tarafından verildiğinden,

$$B(A,r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(a,b)) < r\}$$

olarak da yazılabilir. (x,y) yerine P, (a,b) yerine A yazarsak,

$$B(A,r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,A) < r\}$$

elde ederiz.

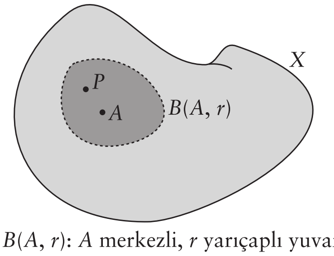


Aynı tanımı herhangi bir metrik uzayda da yapabiliriz. (X,d) herhangi bir metrik uzay olsun. $a \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

kümesine A ***merkezli*** r ***yarıçaplı yuvar*** ya da ***top*** adı verilir. Aşağıda hayali bir metrik uzayda hayali bir yuvarın hayali bir resmini çizdik. Bir yuvar, sınırlarını içermeyen bir bölge olarak hayal edilmeli. Bu yüzden bazen yuvar yerine ***açık yuvar*** denir.

Eğer $r \leq 0$ ise, $B(a,r) = \emptyset$ olur elbette. Ama eğer $r > 0$ ise, a noktası her zaman $B(a,r)$ yuvarının içindedir. Ayrıca, merkez aynı kalır da yarıçap büyürse, yuvarlar büyürler.

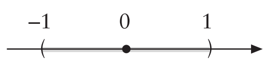


$B(A, r)$: A merkezli, r yarıçaplı yuvar

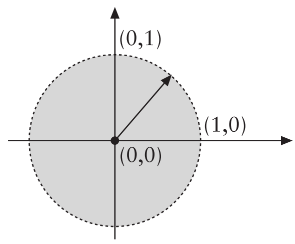
Eğer birden fazla metrik varsa, $B(a, r)$ yerine, d metriğini gösteren $B_d(a, r)$ yazılımı kullanılabilir.

Örnekler

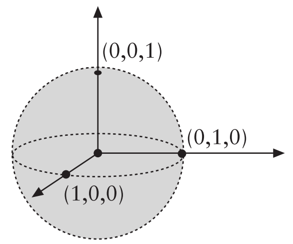
10.22. $\mathbb{R}$ üzerine $d(x, y) = |x - y|$ metriğini (yani Öklid metriğini) alacak olursak, $a \in \mathbb{R}$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı yuvar, $(a - r, a + r)$ açık aralığıdır.
Bu altbölümün girişinde görüldüğü üzere, $\mathbb{R}^2$ üzerine Öklid metriğini alırsak, yuvarlar dairelerin içi olur.



$\mathbb{R}$ Öklid uzayında $B(0, 1)$



$\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında $B((0,0), 1)$



$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında $B((0,0,0), 1)$

$\mathbb{R}^3$ üzerine Öklid metriği alırsak, yuvarlar kürelerin içidir.
Bu üç Öklid uzayındaki yuvarları yukarda çizdik. Bunlar alışık olduğumuz yuvarlardır. Birazdan pek alışık olmadığımız türden yuvarlar göreceğiz.
$\mathbb{R}^4$'ün de yuvarları vardır elbet ama kısıtlı yetilerimizden dolayı resmini çizemeyiz.

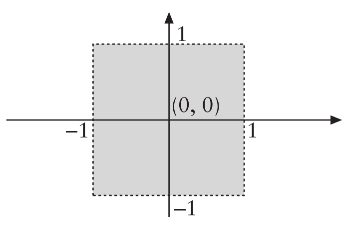
10.23. Bu bölümde $\mathbb{R}^2$ kartezyen çarpımı üzerine birçok değişik metrik tanımladık. Aralarındaki farkı anlamak ve yuvarlarla daha haşır neşir olmak amacıyla, bu metriklerin herbiri için yuvarları iki boyutlu Öklid uzayında gösterelim.
Öklid metriğinde yuvarları biraz önce gösterdik. Şimdi $\mathbb{R}^2$ üzerine Örnek 10.12'da tanımladığımız d_∞ metriğini alalım: $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ise

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

olsun. Bu metrikte, $O(0, 0)$ merkezli 1 yarıçaplı yuvar,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$$

kümesidir. Resmi aşağıda.



$d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$
metriğinde (0, 0) merkezli, 1 yarıçaplı yuvar

Şimdi de $\mathbb{R}^2$ üzerinde Örnek 10.6'te tanımladığımız metriğin özel bir halini alalım:

$$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

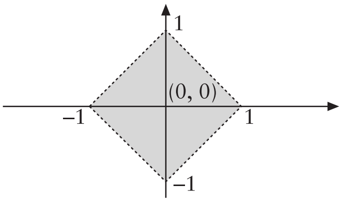
ise

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

olsun. Bu metrikte $O(0, 0)$ merkezli 1 yarıçaplı yuvar,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

kümesidir. Resmi aşağıda.



$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$
metriğinde (0, 0) merkezli, 1 yarıçaplı yuvar (baklava)

Görüldüğü gibi yuvarlar metriğe göre değişiyor, alınan metriğe göre, daire, kare ya da baklava şeklinde olabiliyor.

10.24. Bir X kümesi üzerine ayrık metriği alırsak (Örnek 10.9), üç tür yuvar buluruz:

$$B(a,r) = \begin{cases} X & \text{eğer } r > 1 \text{ ise} \\ \{a\} & \text{eğer } 0 < r \leq 1 \text{ ise} \\ \emptyset & \text{eğer } r \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

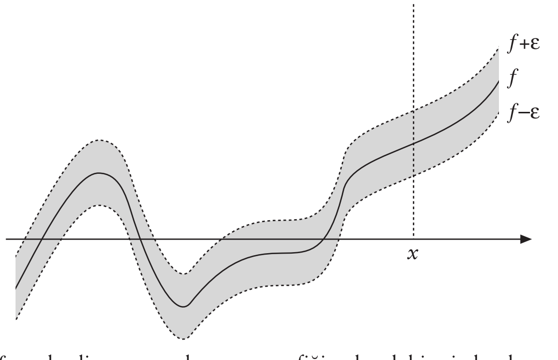
10.25. X herhangi bir küme ve (Y, d) bir metrik uzay olsun. $f,\, g \in \text{Fonk}(X, Y)$ için,

$$d_\infty(f,g) = \sup\{\min\{d(f(x), g(x)), 1\} : x \in X\} = \min\{\sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}, 1\}$$

tanımını yapalım. Bu tanım $\text{Fonk}(X, Y)$ kümesini bir metrik uzayı yapar. (Bkz. Örnek 10.11.) $f \in \text{Fonk}(X, Y)$ ve $\epsilon < 1$ için,

$$B(f, \epsilon) = \{g : X \to Y : \forall x\ d(f(x), g(x)) < \epsilon\}$$

olur. Eğer $X = Y = \mathbb{R}$ ise $B(f, \epsilon)$ grafiği aşağıdaki gri alanda olan fonksiyonlar kümesidir.



f merkezli, ε yarıçaplı yuvar, grafiği yukardaki gri alanda olan fonksiyonlardan, yani her x için
$f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon$
eşitsizliklerini sağlayan g fonksiyonlardan oluşur.

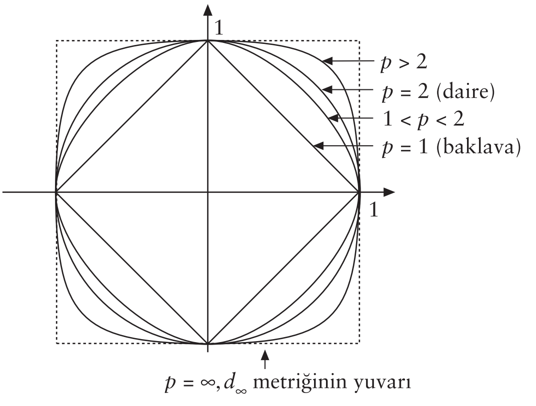
10.26. $p \geq 1$ olsun ve $\mathbb{R}^2$ üzerine, $x = (x_1,\, x_2),\ y = (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için,

$$d_p(x,\, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p}$$

kuralıyla verilmiş metriği ele alalım (bkz. Örnek 10.6.) $p = 1$ için bu, biraz önce gördüğümüz, yuvarları baklava biçiminde olan metrikti.

Birkaç $1 \leq p$ sayısı için d_p metriğinin $(0,0)$ merkezli 1 yarıçaplı yuvarlarını aşağıda çizdik. p, 1'e yaklaştıkça yuvar en içteki baklavaya benzer, limitte de baklava olur. p büyüdükçe yuvar büyür, genişler. Eğer $p < 2$ ise, yuvar, 1 yarıçaplı dairenin içindedir. p, 2'ye yakınsadıkça yuvarlar daireye yakınsarlar. $p > 2$ ise yuvarlar daireyi içerirler.

p büyüdükçe yuvarlar kareye benzemeye başlarlar, p, gerçekten (!) sonsuza gittiğinde de, yuvarların limiti karedir. Bu arada karenin Örnek 10.23'deki d_∞ metriğinin yuvarı olduğuna dikkatinizi çekerim.



Her ne kadar yuvarların biçimleri metriğe göre değişiyorsa da, biz, yaşadığımız dünyayla bir bağlantı kurması için, yuvarları sınırını içermeyen dairemsi ovaller olarak çizeceğiz.

Alıştırmalar

10.27. (X, d) bir metrik uzay ve $a \in X$ olsun. Eğer $(r_n)_n$ pozitif gerçel sayı dizisi 0'a yakınsıyorsa, $a \in \bigcap_n B(a, r_n)$ olur. Bu kesişimin tek elemanlı $\{a\}$ kümesi olduğunu kanıtlayın.

10.28. Öyle bir metrik uzayı ve $B_n = B(a_n, 1/n)$ yuvarları bulun ki $B_{n+1} \subseteq B_n$ ve $\bigcap_n B_n = \emptyset$ olsun.

10.29. Bir önceki örnekteki gibi yuvarların bulunamayacağı bir metrik uzayı bulun.

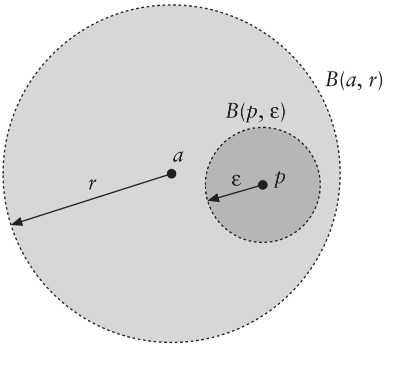
10.30. Herhangi iki yuvarın kesişiminin gene bir yuvar olduğu bir metrik uzayı var mıdır?

10.31. Her yuvarın sayılabilir olduğu bir metrik uzayın sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

10.32. Bir metrik uzayda her yuvarın kardinalitesi en fazla $\kappa \geq \omega$ ise, metrik uzayının kardinalitesinin en fazla κ olduğunu kanıtlayın.

Yuvarların Özellikleri. Bu bölümün sonuna kadar (X, d) bir metrik uzayını simgeleyecek. Basit ama çok kullanışlı bir sonuçla başlayalım.

Önsav 10.2. *$a \in X$ ve $B(a, r)$ bir yuvar olsun. Eğer $p \in B(a, r)$ ise öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki, $B(p, \epsilon) \subseteq B(a, r)$ olur.*



Kanıt: Eğer bir ϵ sayısı önsavdaki koşulu doğruluyorsa, o zaman bu ϵ'dan küçük ϵ'lar da aynı koşulu doğrularlar elbette. Her metrik uzayda koşulu doğrulayan ϵ sayılarının en büyüğünü bularak önsavın bizden istediğinin fazlasını bulacağız.

$p \in B(a, r)$ olduğundan, $\epsilon = r - d(a, p) > 0$ olur. Herhangi bir $x \in B(p, \epsilon)$ alalım. O zaman,

$$d(x, a) \leq d(x, p) + d(p, a) < \epsilon + d(p, a) = r$$

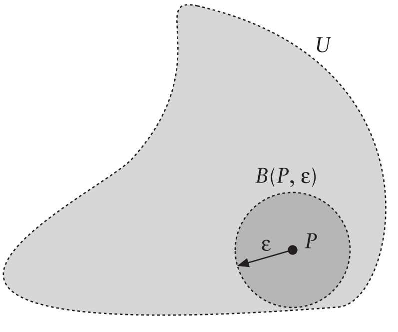
olur. Yani $x \in B(a, r)$ olur ve böylece $B(p, \epsilon) \subseteq B(a, r)$ içindeliği kanıtlanmış olur. $\square$

Yakın gelecekte X'in yuvarların bileşimi olarak yazılabilen altkümelerine yoğunlaşacağız. Aşağıdaki sonuç o aşamada çok yararlı olacak.

Önsav 10.3. *$U \subseteq X$ olsun. U'nun yuvarların bileşimi olması için gerek ve yeter koşul,*

$$U\text{'nun her } p \text{ noktası için öyle bir } \epsilon > 0 \text{ vardır ki } B(p, \epsilon) \subseteq U \text{ olur}$$

koşuludur.



Kanıt: Koşulun yeterli olduğunu kanıtlamak kolay: U'nun her p noktası için koşulu sağlayan bir $\epsilon_p > 0$ sayısı seçelim, o zaman $p \in B(p, \epsilon_p) \subseteq U$ ve

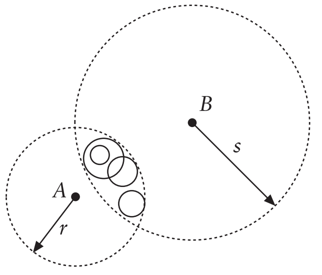
$$U = \bigcup_{p \in A} B(p, \epsilon_p)$$

olur.

Koşulun gerekli olduğu bir önceki önsavdan çıkar. Nitekim, $p \in U$ ise, U, yuvarların bileşimi olduğundan, $p \in B \subseteq U$ özelliklerini sağlayan bir B yuvarı vardır. Önsav 10.2'ye göre, öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki $B(p, \epsilon) \subseteq B$ olur. Demek ki $B(p, \epsilon) \subseteq U$. $\square$

Aşağıdaki sonuç tüm yapacaklarımız için canalıcı önemdedir.

Önsav 10.4. *İki yuvarın kesişimi bir yuvarlar ailesinin bileşimidir.*



İki yuvarın kesişimi, bir yuvarlar ailesinin bileşimi olarak yazılabilir.

Kanıt: B_1 ve B_2 iki yuvar olsun. $B_1 \cap B_2$ kesişiminin Önsav 10.3'ün koşulunu sağladığını göstermemiz gerekiyor. p, bu kesişimden bir nokta olsun. Önsav 10.2'ye göre, öyle bir ϵ_1, $\epsilon_2 > 0$ vardır ki, $B(p, \epsilon_1) \subseteq B_1$ ve $B(p, \epsilon_2) \subseteq B_2$ olur. $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ olsun. O zaman, $B(p, \epsilon) \subseteq B_1 \cap B_2$ olur. □

Bu önsavlar konumuzun en temellerini oluşturduklarından, gelecekte bunların bilindiklerini varsayıp önsavları referans vermeden kullanacağız.

10.4 Ultrametrik

Bazı metrikler, sayfa 123'de verilen M1, M2, M3 koşullarından daha güçlü koşulları sağlarlar. X bir küme ve $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ şu özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

M1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
M2. $d(x, y) = d(y, x)$.
M3′. $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

M3′ eşitsizliği M3 eşitsizliğini gerektirir:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Dolayısıyla M1, M2 ve M3′ koşullarını sağlayan bir d fonksiyonu X'i bir metrik uzay yapar. Bu üç özelliği sağlayan bir d fonksiyonuna ***ultrametrik***, (X, d) metrik uzayına da ***ultrametrik uzay*** adı verilir. Ultrametrik uzaylar doğal olarak bir matematikçinin karşısına pek sık çıkar, özellikle cebirle analizin çakıştığı alanlarda. İlerde bol bol örnek vereceğiz. Şu sonuç ultrametriklerde çok kullanışlıdır:

Önsav 10.5. *Eğer d, X üzerine bir ultrametrikse ve $d(x, z) \neq d(z, y)$ ise, o zaman* M3′ *eşitsizliğinde eşitlik olur, yani*

$$d(x, y) = \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

eşitliği geçerli olur.

Kanıt: $d(x,z) > d(z,y)$ olsun. $d(x,y) = d(x,z)$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Varsayımdan dolayı,

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} = d(x,z) \tag{1}$$

olur. Ayrıca,

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

olur. Demek ki eğer $d(x,y) \geq d(y,z)$ ise

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\} = d(x,y)$$

olur ve (1) ile birlikte istediğimiz kanıtlanır. Bundan böyle $d(x,y) < d(y,z)$ varsayımını yapalım. Buradan,

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\} = d(y,z) < d(x,z)$$

çelişkisini elde ederiz. □

Alıştırmalar

10.33. Bir ultrametrikte her üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu kanıtlayın, yani verilmiş herhangi üç A, B, C noktasından $d(A,B)$, $d(B,C)$, $d(C,A)$ mesafelerinden ikisinin eşit olduğunu kanıtlayın.

10.34. Bir ultrametrikte her yuvarın içindeki her noktanın yuvarın merkezi olduğunu kanıtlayın.

Örnekler

10.35. [**p-sel metrik**]. $p > 0$ bir asal sayı olsun. $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ olsun. O zaman öyle $n \in \mathbb{Z}$ ve p'ye bölünmeyen $a, b \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır ki

$$q = p^n \frac{a}{b}$$

olur. Verilmiş bir q kesirli sayısı için böyle bir n biriciktir. Bu durumda,

$$\mathrm{val}_p(q) = n$$

tanımını yapalım[1]. Örneğin,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{val}_p(1) = \mathrm{val}_p(p+1) = 0,\\
&\mathrm{val}_5(75/7) = 2,\ \mathrm{val}_3(7/27) = -3,\\
&\mathrm{val}_p(p^n) = n,\\
&\mathrm{val}_p(q) = \mathrm{val}_p(-q).
\end{aligned}$$

Bir de ayrıca

$$\mathrm{val}_p(0) = \infty$$

tanımını yapalım. O zaman,

$$\mathrm{val}_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

[1] val_p, "p-değeri" anlamına kullanılmalı; val, İngilizcede ve Fransızcada "değerlendirme" demek olan *valuation* kelimesinin kısaltılmışıdır.

bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun şu özellikleri vardır:

V1. $\mathrm{val}_p(q) = \infty \Leftrightarrow q = 0$,
V2. $\mathrm{val}_p(q) = \mathrm{val}_p(-q)$,
V3. $\mathrm{val}_p(q + q') \geq \min\{\mathrm{val}_p(q),\ \mathrm{val}_p(q')\}$.

(Aslında $\mathrm{val}_p(qq') = \mathrm{val}_p(q) + \mathrm{val}_p(q')$ eşitliği geçerlidir ve bu eşitlik V2'den daha güçlüdür.) Şimdi, q, $q' \in \mathbb{Q}$ için şu tanımı yapalım:

$$d(q, q') = \frac{1}{p^{\mathrm{val}_p(q-q')}} = p^{-\mathrm{val}_p(q-q')}.$$

(Tahmin edileceği üzere $1/p^\infty = p^{-\infty} = 0$ olarak kabul ediliyor. V3'te de, açık açık söylemeden, her $r \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ için $r \leq \infty$ varsayımını yapmıştık.) O zaman $(\mathbb{Q}, d)$ bir ultrametrik uzay olur:

$$d(q, q'') \leq \max\{d(q, q'),\ d(q', q'')\}.$$

Henüz yakınsamayı tanımlamadık ama bilgi için verelim: Bu metrikte

$$1, p, p^2, p^3, \ldots$$

dizisi 0'a yakınsar. Eğer $p = 2$ ise,

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

serisi de -1'e yakınsar. (Bkz. Örnek 11.18.)
Eğer herhangi bir $\lambda \in (0, 1)$ için,

$$d(q, q') = \lambda^{\mathrm{val}_p(q-q')}$$

tanımını yapsaydık, başka bir metrik elde ederdik (elbette!) ama söylediklerimiz aynen geçerli olurdu. λ'nın $1/p$'ye eşit alınması sadece bir alışkanlıktır.
Şimdi bu metriği daha iyi anlamak için biraz soyut cebir yapalım:

$$R = \{q \in \mathbb{Q} : \mathrm{val}_p(q) \geq 0\} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p,\ b\text{'yi bölmez}\}$$

ve

$$M = \{q \in \mathbb{Q} : \mathrm{val}_p(q) \geq 1\} = \{pa/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p,\ b\text{'yi bölmez}\} \subseteq R$$

tanımlarını yapalım. R bir halka ve M, R'nin bir idealidir (yani R, toplama, çıkarma ve çarpma altında kapalıdır ve 1'i içerir ve M toplama ve çıkarma altında kapalıdır, 0'ı içerir ve $RM \subseteq M$ olur). R'nin tersinir elemanları kümesi,

$$R^\star = \{r \in R : \text{ bir } s \in R \text{ için } rs = 1\}$$

kümesi için şu eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} R^\star &= \{r \in R : \mathrm{val}_p(r) = 0\} = R \setminus M \\ &= \{a/b : a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } p \text{ asalı ne } a\text{'yı ne de } b\text{'yi böler}\}, \end{aligned}$$

çünkü $\mathrm{val}_p(q^{-1}) = -\mathrm{val}_p(q)$ olduğundan

$$\mathrm{val}_p(q) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{val}_p(q^{-1}) = 0$$

eşdeğerliliği geçerlidir. (Bir başka deyişle, R'nin M'nin dışındaki her elemanı tersinir olduğundan, M, R'nin biricik maksimal idealidir, yani R yerel bir halkadır.) Eğer $\mathrm{val}_p(q) = n \in \mathbb{Z}$ ise, $\mathrm{val}_p(qp^{-n}) = 0$ olur, yani $qp^{-n} \in R^\star$ olur. Demek ki,

$$\{q \in \mathbb{Q} : \mathrm{val}_p(q) = n\} = p^n R^\star$$

eşitliği geçerlidir. Bundan da

$$\mathbb{Q} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} p^n R^\star \sqcup \{0\},\ R = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} p^n R^\star \sqcup \{0\},\ M = \bigsqcup_{n > 0} p^n R^\star \sqcup \{0\} = pR$$

eşitlikleri çıkar. Ayrıca $M = \bigsqcup_{n>0} p^n R^\star \sqcup \{0\}$ eşitliğinden, R'nin her idealinin bir (ve bir tek) $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $p^n R$ kümesine eşit olduğu çıkar. (Demek ki R bir esas ideal bölgesidir ve p, R'nin biricik asal elemanıdır.)

$$p^n R = \{q \in \mathbb{Q} : \mathrm{val}_p(q) \geq n\} = \{q \in \mathbb{Q} : \mathrm{val}_p(q) > n - 1\}$$

olduğundan, $p^n R$ altkümeleri $\mathbb{Q}$'nün hem açık hem de kapalı altkümeleridir. Elbette $(p^n R)_{n \in \mathbb{Z}}$ ailesi 0 civarında bir ***komşuluk tabanıdır***, yani 0'ı içeren her açık küme bu $p^n R$ kümelerinden birini içermek zorundadır. Buradan $(x + p^n R)_{n \in \mathbb{Z}}$ ailesinin x elemanı civarında bir komşuluk tabanı olduğu kolaylıkla çıkar (neden?) ve her açık küme $x + p^n R$ türünden kümelerin sonlu ya da sonsuz bileşimidir.

10.36. $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gibi herhangi bir cisim olsun. $K[T]$, K üzerine polinomlar halkası olsun. $p = p(T) \in K[T]$, herhangi bir indirgenemez polinom olsun. Genellikle (ama her zaman değil) $p(T) = T$ alınır. Eğer $f = f(T) \in K[T] \setminus \{0\}$ ise öyle bir ve bir tane $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve p ile aralarında asal $g \in K[T]$ polinomu vardır ki,

$$f = p^n g$$

olur. Bu durumda,

$$\mathrm{val}_p(f) = n$$

tanımını yapalım. Ayrıca $\mathrm{val}_p(0) = \infty$ tanımını yapalım. O zaman val_p fonksiyonu bir önceki örneğin val_p fonksiyonunun tüm özelliklerini sağlar ve her $\lambda \in (0, 1)$ için

$$d(f, f') = \lambda^{\mathrm{val}_p(f - f')}$$

fonksiyonu $K[T]$ polinom halkası üzerine bir ultrametriktir.

$$K(T) = \{u/v : u, v \in K[T] \text{ ve } v \neq 0\}$$

olsun. $f \in K(T)$ olsun. Aynen bir önceki örnekte olduğu gibi, g ve h polinomları p'ye asal ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, f'yi

$$f = p^n \frac{g}{h}$$

olarak yazıp,

$$\mathrm{val}_p(f) = n \text{ ve } d(f_1, f_2) = \frac{1}{2^{\mathrm{val}_p(f_1 - f_2)}}$$

tanımını yaparsak, bu sefer $K(T)$ cismi üzerine bir ultrametrik tanımlamış oluruz. Bir önceki alıştırmada yaptığımız cebirsel akıl yürütmelerin her biri bariz değişikliklerle bu durumda da geçerlidir.

10.37. Bir ultrametrik daha tanımlayacağız. X herhangi bir küme olsun. Terimleri X'te olan diziler kümesini $D(X)$, $\mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, X)$ ya da $X^{\mathbb{N}}$ olarak gösteriyoruz. Gerçekten de $D(X)$ aslında doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den X'e giden fonksiyonlar kümesidir: Her $a : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu terimleri X'te olan bir $(a(i))_i$ dizisi verir ve her $(a_i)_i$ dizisi $a(i) = a_i$ kuralıyla $\mathbb{N}$'den X'e giden fonksiyon verir. Eğer $a \in D(X)$ ise, $a = (a_i)_i$ yazacağız.
Birbirinden değişik a, $b \in D(X)$ dizileri için,

$$\mathrm{val}(a, b) = \min\{i : a_i \neq b_i\}$$

olsun. Ayrıca $\mathrm{val}(a, a) = \infty$ olsun. O zaman her a, b, $c \in D(X)$ için,

$$\mathrm{val}(a, b) = \infty \Leftrightarrow a = b,$$

$$\mathrm{val}(a,b) = \mathrm{val}(b,a),$$
$$\mathrm{val}(a,b) \geq \min\{\mathrm{val}(a,c), \mathrm{val}(c,b)\}$$

olur. Şimdi $\lambda \in (0,1)$ (genellikle $\lambda = 1/2$ alınır) ve

$$d(a,b) = \lambda^{\mathrm{val}(a,b)}$$

tanımını yapalım. ($\lambda^\infty = 0$ anlaşmasını yapıyoruz.) d fonksiyonu $D(X)$ üzerine bir ultrametrik verir.

10.38. Örnek 10.37'te $X = \{0,1\}$ alırsak, terimleri $\{0,1\}$ kümesinde olan diziler kümesini elde ederiz. Bu tür dizilere 01-***dizileri*** denir. Herhangi bir 01-dizisi $\mathbb{N}$'nin bir ve bir tane altkümesine tekabül eder. Mesela sabit 0 dizisi boşkümeye, sabit 1 dizisi $\mathbb{N}$'nin kendisine tekabül eder. 0101010101... dizisi çift sayılar kümesine denk düşer. Asal sayılar kümesiyle de

0011010100010100010100010000010100000...

olarak başlayan ve tahmin edildiği gibi devam eden bir dizi eşleşir. Yani 01-dizilerinden oluşan kümeyle $\wp(\mathbb{N})$ arasında bir eşleme vardır.

Örnek 10.37'te verilen metrikte $\lambda = 1/2$ alalım. Bu metriğe göre, iki dizi arasındaki mesafe en fazla 1'dir. Eğer dizilerin ilk terimleri eşitse, mesafe en az 1/2'dir; ikinci terimleri de eşitse mesafe en fazla 1/4'tür; üçüncü terimleri de eşitse mesafe en fazla 1/8'dir vb. Bu mesafeyi yukardaki eşlemeyle dizilerden altkümelere taşırsak şöyle olur: İki altküme arasındaki mesafe en fazla 1'dir; eğer 0 elemanı her iki altkümedeyse ya da her ikisinde de değilse, mesafe en fazla 1/2'dir; eğer 1 elemanı her iki altkümedeyse ya da her ikisinde de değilse, mesafe en fazla 1/4 olur; eğer 2 elemanı her iki altkümedeyse ya da her ikisinde de değilse, mesafe en fazla 1/8 olur vb. Böylece $\mathbb{N}$'nin altkümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})$ üzerine bir (ultra)metrik elde ederiz.

Alıştırmalar

10.39. Örnek 10.35'deki $(\mathbb{Q}, d)$ örneğini alalım ama metriği $\mathbb{Z}$'ye indirgeyelim, yani $(\mathbb{Z}, d)$ ultrametrik uzayına bakalım. $a \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. ($\mathbb{Z}$, d) metrik uzayında $B(a, 1/p^n) = a + p^{n+1}\mathbb{Z}$ eşitliğini kanıtlayın.

10.40. Örnek 10.35'deki ($\mathbb{Q}$, d) örneğini alalım.

$$R = \{x \in \mathbb{Q} : \mathrm{val}_p(x) \geq 0\}$$

ve

$$M = \{x \in \mathbb{Q} : \mathrm{val}_p(x) > 0\}$$

olsun. Hangi kesirli sayıların bu kümelerde olduğunu bulun. R kümesinin toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri altında kapalı olduğunu gösterin. M kümesinin toplama ve çıkarma altında kapalı olduğunu ve $RM \subseteq M$ içindeliğini kanıtlayın. (Yani R bir halkadır ve M, R'nun bir "ideali"dir.) $M = pR$ eşitliğini kanıtlayın. R halkasının çarpma için tersinir elemanlarından oluşan kümenin $R \setminus M$ olduğunu kanıtlayın.

10.41. Örnek 10.35'deki $(\mathbb{Q}, d)$ örneğini alalım. R bir önceki alıştırmadaki gibi olsun. $a \in \mathbb{Q}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $B(a, 1/p^n) = a + p^{n+1}R$ eşitliğini kanıtlayın.

10.42. Yukardaki alıştırmaları Örnek 10.36 için yapın.

10.43. **[Gromov-Hausdorff Metrik]** (M, d) bir metrik uzay ve $a \in M$ bir sabit nokta olsun. $X \neq Y \subseteq M$ için, eğer $n = \max\{n \in \mathbb{N} : X \cap B(a,n) = Y \cap B(a,n)\}$ ise, $g(X,Y) = 1/2^n$ olsun. $X = Y$ için ise $d(X,X) = 0$ tanımını yapalım. Bunun $\wp(M) = 2^M$ üstüne bir ultrametrik tanımladığını kanıtlayın.

10.5 İzometri

Örnek 10.10'deki metrik uzayında, her $i = 1, \ldots, n$ için $X_i = X$ alınırsa, Örnek 10.12'daki metrik uzayın (nerdeyse) bu uzayın bir altuzayı olduğunu görürüz. Bunu açıklamak için bir tanıma gereksiniyoruz.

İzometri. Eğer (X, d) ve (X', d') iki metrik uzaysa, her x, $y \in X$ için,

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

eşitliğini sağlayan, yani metriği koruyan bir $f : X \to X'$ fonksiyonuna ***izometri*** ya da ***uzaklık koruyan fonksiyon*** denir. Bir izometrinin birebir olması gerekir: $f(x) = f(y)$ ise $d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = 0$ ve dolayısıyla $x = y$ olur. Ama örten olmak zorunda değildir, örneğin $f(x) = x+1$ fonksiyonu $[0, \infty)$ metrik uzayının bir izometrisidir ama örten değildir. Eğer f ayrıca örtense, yani f bir eşlemeyse, o zaman bu, (X, d) ve (X', d') metrik uzayları arasında kümelerin elemanlarının adları dışında pek bir farkın olmadığı anlamına gelir.

Örneğin, $X = \mathbb{R}$ Öklid metrik uzayıysa (bkz. Örnek 10.4), o zaman x'i $-x$'e götüren fonksiyon $\mathbb{R}$'nin bir izometrisidir. Bir a sabiti için $x \mapsto x + a$ ötelemesi de $\mathbb{R}$'nin bir izometrisidir.

Eğer $X = \mathbb{R}^2$ Öklid metrik uzayıysa, tüm döndürüler, ötelemeler ve bir doğruya ya da noktaya göre simetriler X'in izometrileridir. (Bir metrik uzayının izometrileri, tanım gereği, kendisinden kendisine giden izometrilerdir.)

Teorem 10.6. *Özdeşlik fonksiyonu* Id_X *her* X *metrik uzayının bir izometrisidir. İzometrilerin bileşkesi de bir izometridir. Ayrıca örten bir izometrinin tersi de bir izometridir.*

Kanıt: Çok kolay. Okura bırakılmıştır. □

Alıştırmalar

10.44. Yukardaki teoremi kanıtlayın.

10.45. Ayrık bir metrik uzayının tüm izometrilerini bulun.

10.46. $\mathbb{R}$'nin her izometrisinin bir $a \in \mathbb{R}$ ve bir $\epsilon = \pm 1$ için $f(x) = \epsilon x + a$ biçiminde olduğunu kanıtlayın. İpucu: $a = -f(0)$ ve $\epsilon = f(1) - f(0)$ olmalı.

10.47. $\mathbb{R}$'nin izometrisinin örten olmak zorunda olduğunu gösterin.

10.48. $\mathbb{R}^2$'den $\mathbb{R}^2$'ye giden (Öklid metriğiyle) tüm izometrilerini bulun.

10.49. Eğer (X, d) bir metrik uzayıysa ve bir $a > 0$ sabiti için

$$d'(x, y) = a \cdot d(x, y)$$

tanımını yaparsak, (X, d) metrik uzayıyla (X, d') metrik uzayı izometrik olmayabilirler. Öte yandan $X = \mathbb{R}^n$ ise ve $d = d_p$, bir $p > 1$ sayısı için Örnek 10.6'teki metrikse, o zaman

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1/a, \ldots, x_n/a)$$

kuralıyla tanımlanmış f fonksiyonu, $(\mathbb{R}^n, d_p)$ metrik uzayından $(\mathbb{R}^n, d')$ metrik uzayına giden bir izometri olduğunu kanıtlayın.

10.50. Bu alıştırmada Örnek 10.10 ile Örnek 10.12'u karşılaştıracağız.
X bir küme ve $n > 0$ bir doğal sayı olsun.

$$\begin{aligned} \Delta(X^n) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \times \ldots \times X : x_1 = \ldots = x_n\} \\ &= \{(x, \ldots, x) \in X^n : x \in X \subseteq X^n \end{aligned}$$

olsun. X'in x elemanını $\Delta(X^n)$'nin $(x, \ldots, x)$ elemanına götüren fonksiyon, X ile $\Delta(X^n)$ kümesi arasında (doğal) bir eşlemedir.
Şimdi X üzerine n metrik alalım: $d_1, \ldots, d_n$. Örnek 10.10'deki gibi

$$X^n = X \times \ldots \times X$$

kümesi üzerine

$$d_\infty(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\}$$

formülüyle tanımlanmış metriği koyalım. $\Delta(X^n)$, X^n'nin bir altkümesi olduğundan, $\Delta(X^n)$ üzerine X^n'den gelen metriği koyup $\Delta(X^n)$ kümesini X^n'nin altuzayı olarak görebiliriz (bkz. Örnek 10.7).
Öte yandan, X üzerine bir de ayrıca Örnek 10.12'daki metriği koyabiliriz

$$d(x, y) = \max\{d_1(x, y), \ldots, d_n(x, y)\}.$$

X'ten $\Delta(X^n)$'ye giden $x \mapsto (x, \ldots, x)$ formülüyle tanımlanmış fonksiyonun, (X, d) metrik uzayıyla, $(\Delta(X^n), d_\infty)$ metrik uzayı arasında bir izometri olduğunu kanıtlayın.

11. Metrik Uzaylarda Dizi Yakınsaklığı

Bu kısmın ilk bölümünün girişinde, metrik uzay kavramının amacının, $\mathbb{R}$ ve mutlak değer fonksiyonu için tanımladığımız yakınsaklık, limit, süreklilik, Cauchy dizisi gibi kavramları ve bu kavramlar üzerine elde ettiğimiz teoremleri genelleştirmek olduğunu söylemiştik. Bu bölümde sözünü ettiğimiz bu genellemelerin bazılarını yapacağız.

$\mathbb{R}$ için tanımlanan bir kavramı bir (X, d) metrik uzayına genelleştirmek için, mutlak değer görünen her yere d koymak hemen hemen her zaman yeterlidir, yani $|x - y|$ gibi bir ifade yerine $d(x, y)$ koymak yeterlidir.

11.1 Yakınsaklık

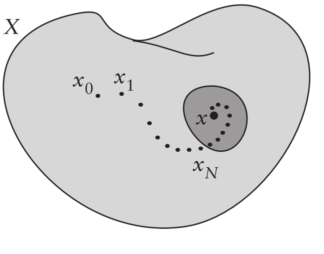
Örneğin, bildiğimiz üzere, $\mathbb{R}$'de bir $(x_n)_n$ dizisinin bir $x \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsaması demek, her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon$$

önermesinin doğru olduğu bir N sayısının var olması demektir. Bu kavram bir (X, d) metrik uzayına şöyle genelleştirilir: $(x_n)_n$, terimleri X'te olan bir dizi olsun. $x \in X$ olsun. $(x_n)_n$ dizisinin x'e ***yakınsaması*** demek, her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

önermesinin doğru olduğu bir N sayısının var olması demektir. Bu durumda x'e $(x_n)_n$ dizisinin ***limiti*** denir. $(x_n)_n$ dizisi x'e ***yakınsar*** da denir.



Eğer koşula daha dikkatli bakacak olursak, $(x_n)_n$ dizisinin x'e ***yakınsamasının***, her $\epsilon > 0$ sayısı için,

$$n > N \Rightarrow x_n \in B(x, \epsilon)$$

önermesinin doğru olduğu bir N sayısının olması demek olduğu anlaşılır. Yani her $\epsilon > 0$ için, $(x_n)_n$ dizisinin hemen hemen her teriminin (yani sonlu sayıdaki birkaçı dışındaki hepsinin) $B(x, \epsilon)$ yuvarında olması gerekir. Dolayısıyla yakınsaklık, dizinin başını değil, "kuyruğunu" ilgilendiren bir özelliktir.

Görüldüğü gibi, yakınsaklık, metrikten öte, aslında metriğin yuvarlarına göre değişen bir kavram. Örneğin $p \geq 1$ olsun ve $\mathbb{R}^2$ üzerine,

$$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

için,

$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p}$$

metriğini ele alalım. (Bkz. Örnek 10.6.) $\mathbb{R}^2$ üzerine bir de

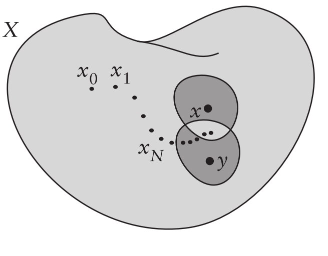
$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

metriğini alalım. Eğer bir dizi bu metriklerden biri için bir noktaya yakınsıyorsa, diğerleri için de aynı noktaya yakınsar. Örnek 11.20'deki yuvar analizinden okur bunu görmeye çalışabilir. Ama bunu zaten birazdan kanıtlayacağız.

Geçmiş sayfalarda gerçel sayılarda mutlak değer (yani Öklid metriği) için kanıtladığımız birçok sonucu herhangi bir metrik uzayına genelleştirebiliriz. Mesela bir dizi en fazla bir limite yakınsayabilir:

Önsav 11.1. *Bir metrik uzayda bir dizi en fazla bir limite yakınsayabilir.*

Kanıt: $(x_n)_n$ dizisinin hem x'e hem de y'ye yakınsadığını varsayalım. $x \neq y$ varsayımını yapıp bir çelişki elde etmeye çalışalım.



x ve y merkezli iki yuvar alalım. $(x_n)_n$ dizisi bir zaman sonra her iki yuvarın da içine, dolayısıyla kesişimlerinin içine girmek zorunda. Demek ki yuvarları ayrık seçersek, arzulanan çelişkiyi elde ederiz. Yuvarları ayrık seçebileceğimiz başlı başına önemli bir sonuçtur. Ayrıca yazmak gerekir. □

Önsav 11.2. *x ve y bir metrik uzayın iki değişik noktası olsun. O zaman*

$$x \in B,\ y \in C \text{ ve } B \cap C = \emptyset$$

özelliklerini sağlayan ayrık B ve C yuvarları vardır.

Kanıt: $x \neq y > 0$ olduğundan,

$$\epsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$$

olur. Şimdi $B = B(x,\epsilon)$, $C = B(y,\epsilon)$ olsun. B ve C'nin kesişiminden bir z alalım. O zaman,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(x,y)$$

olur, yani $d(x,y) < d(x,y)$ olur, bir çelişki. Demek ki $B \cap C = \emptyset$ olur. □

Önsav 11.1'den dolayı, eğer $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsıyorsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

yazmaya hak kazanırız.

Alıştırmalar

11.1. $\alpha, \beta \geq 0$ sayıları $\alpha+\beta \leq d(x,y)$ eşitliğini sağlasın. Her metrik uzayda $B(x,\alpha) \cap B(y,\beta) = \emptyset$ olduğunu kanıtlayın.

11.2. $x_1, \ldots, x_n$ bir metrik uzayın birbirinden değişik noktaları olsun. Öyle bir $\epsilon > 0$ bulun ki her $i \neq j$ için $B(x_i,\epsilon) \cap B(x_j,\epsilon) = \emptyset$ olsun.

11.3. Bir zaman sonra sabitleşen her dizinin sabitleştiği sayıya yakınsadığını kanıtlayın. Ayrık metrikle donatılmış bir kümede, sadece bu dizilerin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Aşağıdaki teorem sayesinde metrik uzaylardaki yakınsaklık, gerçel sayılardaki yakınsaklığa indirgenebilir.

Önsav 11.3. *Bir metrik uzayda*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olur. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ise her a için* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = d(x,a)$ *olur.*

Kanıt: Önce $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ varsayımını yapalım. $\epsilon > 0$ olsun. Yakınsamanın tanımına göre,

$$n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$$

önermesinin doğru olduğu bir N sayısı vardır. Bu da aynen

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

demektir.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

önermesinin doğruluğu da bariz. İkinci kısım, $|d(x_n, a) - d(x, a)| \leq d(x_n, x)$ eşitsizliğinden (Alıştırma 10.3) çıkar. □

Gerçel sayılarda yakınsaklık kavramıyla daha aşina olduğumuzdan, yukardaki önsav yakınsaklığı bilindik bir zemine taşır.

Örnekler

11.4. Bir X kümesi üzerine ayrık metriği alalım, yani iki değişik nokta arasındaki mesafe 1 olsun (Örnek 10.9.) Bu metrik uzayda, sadece bir zaman sonra sabitleşen diziler yakınsaktır ve bu diziler sabitleştikleri elemana yakınsarlar.

11.5. Bir metrik uzayın tüm mesafelerini belli bir pozitif sabit sayıyla çarparsak gene bir metrik elde ederiz. Mesele (X, d) bir metrik uzayıysa,

$$d_1(x, y) = 5d(x, y)$$

tanımını yaparsak, yeni bir metrik uzayı elde ederiz. Önsav 11.3'e göre iki metrik uzayının yakınsak dizileri aynıdır ve yakınsak diziler her iki metrikte de aynı elemana yakınsarlar. Ayrıca bu iki metrik uzayın yuvarları da aynıdır.

11.6. (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ tanımını yapalım. d', X üzerine bir mesafedir (Örnek 10.13). (X, d) ve (X, d') metrik uzaylarının aynı yakınsak dizileri vardır ve yakınsak diziler her iki metrikte de aynı elemana yakınsarlar.

11.7. (X, d) herhangi bir metrik uzayı olsun.

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

tanımı bize bir başka metrik verir. (Örnek 10.17.) (X, d) ve (X, d') metrik uzaylarının aynı yakınsak dizileri vardır ve yakınsak diziler her iki metrikte de aynı elemana yakınsarlar.

Aşağıdaki sonuç sık sık uygulama alanı bulur:

Önsav 11.4. *Yakınsak bir dizinin her altdizisi yakınsaktır ve limit değişmez.*

Kanıt: $(x_n)_n$ dizisi x elemanına yakınsasın ve $(y_n)_n$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi olsun. Altdizinin tanımı gereği, öyle azalmayan bir f fonksiyonu vardır ki, her n göstergeci için

$$y_n = x_{f(n)}$$

olur. f fonksiyonu azalmayan olduğundan, yani her n ve m göstergeci için

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$$

önermesini sağlandığından, tümevarımla kolayca kanıtlanacağı üzere, her n için,

$$n \leq f(n)$$

olur. Şimdi, $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsadığından, öyle bir N vardır ki her $n > N$ için,

$$d(x_n, x) < \epsilon$$

olur. Eğer $n > N$ ise, $N < n \leq f(n)$ olduğundan,

$$d(y_n, x) = d(x_{f(n)}, x) < \epsilon$$

olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Şu da doğrudur: Aynı noktaya yakınsayan iki diziyi rastgele kararsak gene aynı noktaya yakınsayan bir dizi elde ederiz. Örneğin, eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ dizileri a'ya yakınsıyorsa, o zaman

$$x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$$

dizisi de a'ya yakınsar. Bunun kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

11.2 Kartezyen Çarpımda Yakınsaklık

Yukardakiler oldukça kolay ve pek heyecanlı olmayan örneklerdi. (Ama konuyu anlamak açısından çok önemlidirler ve her öğrenci örneklerde ifade edilen savları kendi başına kanıtlamalıdır.) Şimdi daha önemli örneklere geçelim.

$(X_1, e_1), \ldots, (X_k, e_k)$ metrik uzayları olsun. $X = \prod_i X_i$, kartezyen çarpım olsun. Ve $p \in [1, \infty]$ olsun. Eğer

$$x = (x_1,\ \ldots,\ x_k),\ y = (y_1,\ \ldots,\ y_k) \in X$$

ise,

$$d_p(x, y) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^k e_i(x_i, y_i)^p\right)^{1/p} & \text{eğer } 1 \leq p < \infty \text{ ise} \\ \max\{e_i(x_i,\ y_i) : i = 1, \ldots, k\} & \text{eğer } p = \infty \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman $(X,\ d_p)$ çifti bir metrik uzayıdır. (Bkz. Alıştırma 10.6 ve 10.10)

Kartezyen çarpımda bir $(x_n)_n$ dizisi alalım, yani her n için

$$x_n \in X_1 \times \ldots \times X_k$$

olsun. Ayrıca

$$x_n = (x_{n1},\ x_{n2},\ \ldots,\ x_{nk})$$

olsun. Elbette her $i = 1, \ldots, k$ için $x_{ni} \in X_i$. Dolayısıyla $(x_{ni})_n$ dizisi terimleri X_i metrik uzayında olan bir dizidir.

Şimdi $p \in [1, \infty]$ için, $(x_n)_n$ dizisinin $(\prod_i X_i, d_p)$ metrik uzayında yakınsamasıyla, her $i = 1, \ldots, k$ için $(x_{ni})_n$ dizilerinin yakınsamaları arasında çok yakın bir ilişki kuracağız.

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \prod_i X_i$$

olsun.

Teorem 11.5. *Yukardaki tanım ve yazılımlarla,* $(\prod_i X_i, d_p)$ *metrik uzayının* $(x_n)_n$ *dizisinin*

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \prod_i X_i$$

elemanına yakınsaması için, her $i = 1, \ldots, k$ *için* $(x_{ni})_n$ *dizisinin* a_i *elemanına yakınsaması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Önsav 11.3'ü kullanacağız. $p < \infty$ varsayımını yapalım. O zaman, her $i = 1, \ldots, k$ için, $e_i(x_{ni}, a_i) \geq 0$ ve $\lim_{n\to\infty} e_i(x_{ni}, a_i) \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_p(x_n, a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} e_i(x_{ni}, a_i)^p \right)^{1/p} &= 0 \\
\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} e_i(x_{ni}, a_i)^p = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to\infty} e_i(x_{ni}, a_i)^p &= 0 \\
\Leftrightarrow \text{ Her } i = 1, \ldots, k \text{ için, } \lim_{n\to\infty} e_i(x_{ni}, a_i)^p &= 0 \\
\Leftrightarrow \text{ Her } i = 1, \ldots, k \text{ için, } \lim_{n\to\infty} e_i(x_{ni}, a_i) &= 0 \\
\Leftrightarrow \text{ Her } i = 1, \ldots, k \text{ için, } \lim_{n\to\infty} x_{ni} &= a_i.
\end{aligned}$$

olur. $p = \infty$ şıkkını kanıtlamayı okura bırakıyoruz. Benzerdir ve kolaydır. □

Teorem 11.5, limit almayla izdüşüm alma işlemlerinin sıralarının değiştirilebileceğini söylüyor, yani her $i = 1, \ldots, k$ için

$$\mathrm{pr}_i \left(\lim_{n\to\infty} x_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{pr}_i(x_n).$$

Resimle ifade edelim:

$$\begin{array}{rcl}
x_0 & = & (x_{01}, \ldots, x_{0k}) \\
x_1 & = & (x_{11}, \ldots, x_{1k}) \\
x_2 & = & (x_{21}, \ldots, x_{2k}) \\
& \cdots & \\
x_n & = & (x_{n1}, \ldots, x_{nk}) \\
\downarrow & & \;\;\downarrow \;\; \cdots \;\; \downarrow \\
a & = & (\ a_1, \ldots,\ a_k)
\end{array}$$

11.3 Fonksiyon Kümelerinde Yakınsaklık

I herhangi bir küme ve (M, d) herhangi bir metrik uzay olsun. I'dan M'ye giden fonksiyonlar kümesini $\text{Fonk}(I, M)$ ya da $\prod_I M$ olarak gösterelim[1]

Her f, $g \in \text{Fonk}(I, M)$ için,

$$d_\infty(f, g) = \sup\{\min\{d(f(i), g(i)),\ 1\} : i \in I\}$$

tanımını yapalım. O zaman $(\text{Fonk}(I, M),\ d_\infty)$ bir metrik uzayı olur. (Bkz. Örnek 10.11.)

Bu metrikte bir $(f_n)_n$ dizisinin bir f fonksiyonuna yakınsaması biçimsel olarak şöyle yazılır:

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall i \in I\ \ d(f_n(i), f(i)) < \epsilon.$$

d_∞ metriğinde yakınsamaya ***düzgün yakınsama*** denir. Yani düzgün yakınsama olması için, $\epsilon > 0$ ne olursa olsun,

$$(n > N \text{ ve } i \in I) \Rightarrow d(f_n(i), f(i)) < \epsilon$$

önermesinin doğru olduğu bir N sayısı olmalıdır. Bulunan N sayısı elbette ϵ'a göre değişir; ϵ ne kadar küçükse, N sayısının o kadar büyük olması beklenir. Öte yandan, bulunan N sayısı i'den bağımsızdır: Her i için aynı N'yi kullanabiliriz.

Bu durumda, yukardaki formüle bakınca görüleceği üzere, her $i \in I$ için, $(f_n(i))_n$ dizisi $f(i)$ elemanına yakınsar çünkü,

$$\forall \epsilon > 0\ \forall i \in I\ \exists N\ \forall n > N\ \ d(f_n(i), f(i)) < \epsilon$$

olur. Bu son koşul sağlandığında "$(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna ***noktasal yakınsıyor***" denir.

Demek ki eğer bir $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna d_∞ metriğinde yakınsıyorsa, o zaman $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsar.

Bu dediğimizin tersi doğru değildir: $(f_n)_n$ fonksiyonlar dizisi bir fonksiyona noktasal yakınsayabilir ama aynı dizi d_∞ metriğinde yakınsak olmayabilir. Birazdan bir örnek vereceğiz ama bunun neden doğru olmayabileceğini teorik olarak anlamaya çalışalım. Diyelim $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsıyor. O zaman her $i \in I$ ve her $\epsilon > 0$ için,

$$n > N \Rightarrow d(f_n(i), f(i)) < \epsilon$$

[1] Eğer bu küme $\prod_I M$ olarak gösterilirse, o zaman bu kümeden alınan bir f elemanı ve bir $i \in I$ için $f(i)$ yerine f_i yazmak bir alışkanlıktır; ayrıca bu durumda sık sık $f = (f_i)_{i \in I}$ ya da daha sade olarak $f = (f_i)_i$ yazılır. Ama aşağıda $(f_n)_n$ yazılımını bir fonksiyon dizisi için kullanacağımızdan $\prod_I M$ yerine $\text{Fonk}(I, M)$ yazılımını tercih ediyoruz.

önermesinin doğru olduğu bir N vardır. Ancak buradaki N sayısı i'ye göre değişebilir. Bu yüzden N yerine N_i yazmak daha doğru olur. Yani noktasal yakınsama bize,

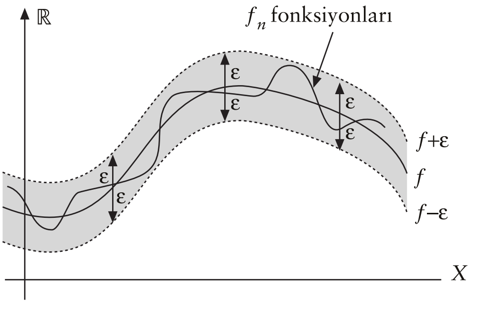
$$\forall i \in I \; \forall \epsilon > 0 \; \exists N_i \; \forall n > N_i \;\; d(f_n(i), f(i)) < \epsilon$$

önermesinin doğru olduğunu söylüyor. Tahmin edilebileceği gibi bu N_i sayılarını i'den bağımsız seçmek mümkün olamayabilir. Bir $(f_n)_n$ dizisinin d_∞ metriğinde f fonksiyonuna yakınsaması için, noktasal yakınsama olmalı, ama bunun da ötesinde, ayrıca, bulunan N_i sayıları i'den bağımsız alınabilmeli.

Basit bir teorem kanıtladık.

Teorem 11.6. *Düzgün yakınsama noktasal yakınsamayı gerektirir. Dolayısıyla bir $(f_n)_n$ dizisi ancak noktasal olarak yakınsadığı bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayabilir.* □

X bir topolojik uzay olsun. X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f'ye düzgün yakınsaması için yeter ve gerek koşul, her $\epsilon > 0$ için, f_n fonksiyonlarının bir zaman sonra $f - \epsilon$ ile $f + \epsilon$ şeridinin içine girmesidir (bkz aşağıdaki temsilî şekil).



Alıştırmalar

11.8. $I = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

11.9. $I = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

11.10. $I = [0, 1)$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

11.11. $I = [0, 0{,}999]$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

11.12. $I = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n/n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

11.13. $I = [1, \infty)$ ve $f_n(x) = 1/x^n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

11.14. $I = (1, \infty)$ ve $f_n(x) = 1/x^n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

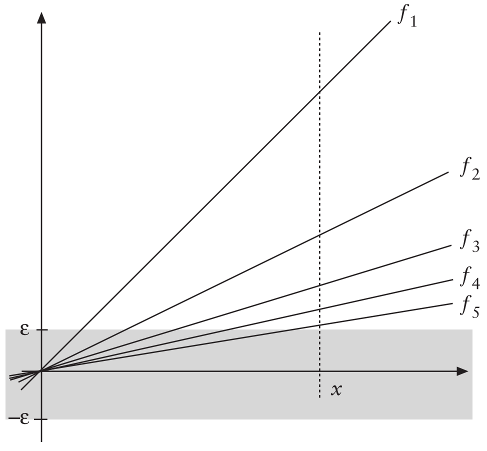
11.15. $I = (1{,}001, \infty)$ ve $f_n(x) = 1/x^n$ olsun. Bu dizi düzgün yakınsak mıdır?

Örnekler

11.16. $I = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x/n$ olsun. Teorem 11.6'ya göre bu dizi ancak 0 dizisine düzgün yakınsayabilir, ama yakınsamıyor. Çünkü

$$\begin{aligned} d_\infty(f_n, 0) &= \sup\{\min\{d(f_n(x), 0),\ 1\} : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup\{\min\{|x|/n,\ 1\} : x \in \mathbb{R}\} = 1 \end{aligned}$$

olur ve sabit 1 dizisi olan $(d_\infty(f_n, 0))_n$ dizisi 0'a yakınsamaz. Zaten eğer f_n fonksiyonlarının aşağıdaki grafiklerine bakarsak düzgün yakınsaklığın olmadığını hissederiz.



Belli ki x büyüdükçe $(f_n(x))_n$ yani $(x/n)_n$ dizisi 0'a yakınsamakta gecikiyor, ya da şöyle açıklayalım: f_n'ler hiçbir zaman sabit 0 fonksiyonunun $(-\epsilon, \epsilon)$ şeridine girmiyorlar. Öte yandan I'yı $\mathbb{R}$'nin herhangi bir sınırlı altkümesi olarak alırsak, o zaman düzgün yakınsaklık olur. Bunu okura alıştırma olarak bırakıyoruz. Ama tanım kümesinin sınırlı olması düzgün yakınsaklığa yetmeyebilir.

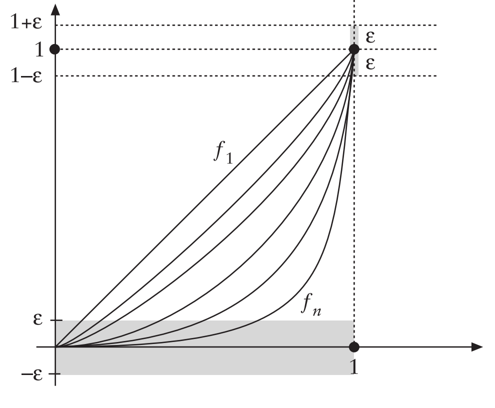
11.17. $I = [0, 1]$ ve $f_n(x) = x^n$ ise,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur. Dolayısıyla $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi ancak bu f fonksiyonuna düzgün yakınsayabilir. Ama düzgün yakınsamıyor (bkz. [N5]). Öte yandan, $0 < \alpha < 1$ ise ve $I = [0, 1-\alpha]$ alırsak, o zaman bu fonksiyon dizisi sabit 0 fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bunu da okura alıştırma olarak bırakıyoruz.



İlerde metrik uzaylarda fonksiyonların sürekliliğini çok daha kapsamlı bir biçimde konu edeceğiz. O zaman düzgün yakınsamayla süreklilik arasında çok önemli bir bağ kuracağız.

11.4 Ultrametriklerde Yakınsaklık

Ultrametriklerde (bkz. Altbölüm 10.4) yakınsaklık oldukça ilginç olabilir. Bir örnek verelim.

Örnek 11.18. [**p-sel metrik**]. p bir asal sayı olsun ve Örnek 10.35'de $\mathbb{Q}$ üzerine verilen p-sel metriği anımsayın. Bu örnekte $d(q, q')$ sayısının küçük olması demek, $\mathrm{val}_p(q - q')$ sayısının büyük olması demektir. Demek ki Önsav 11.3 bu metrikte şöyle yorumlanabilir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{val}_p(x_n - x) = \infty.$$

Örneğin, bu metrikte, şaşırtıcı bir biçimde

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0$$

olur. Bir başka şaşırtıcı örnek:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + p + \cdots + p^n) = \frac{1}{1-p}.$$

Bunu Önsav 11.3'ün yukardaki versiyonunu kullanarak kanıtlayalım:

$$\begin{aligned}(1 + p + \cdots + p^n) - \frac{1}{1-p} &= \frac{(1-p)(1 + p + \cdots + p^n) - 1}{1-p}\\ &= \frac{(1-p^{n+1}) - 1}{1-p} = \frac{-p^{n+1}}{1-p},\end{aligned}$$

eşitliğinden,

$$\mathrm{val}_p\left((1 + p + \cdots + p^n) - \frac{1}{1-p}\right) = \mathrm{val}_p\left(\frac{p^{n+1}}{1-p}\right) = n + 1 \to \infty$$

elde ederiz; ve bu da istediğimiz eşitliği kanıtlar. Eğer $p = 2$ ise, bunun özel bir hali olarak,

$$\lim_{n\to\infty} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = -1$$

elde ederiz. Ayrıca

$$(p-1)(1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}) = p^n - 1 \longrightarrow -1$$

olur. -1'e doğal sayılarla yakınsadığımıza dikkatinizi çekeriz!

Alıştırmalar

11.19. [**Conway ve Sloane**]. $p = 5$ ve $\mathbb{Q}$ üzerine 5-sel metriği alalım.

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 4\\ a_2 & = & 34\\ a_3 & = & 334\\ & \cdots & \\ a_n & = & 33\ldots34\\ & \cdots & \end{array}$$

olsun.
i. $\mathrm{val}_5(3a_n - 2) = n$ eşitliğini kanıtlayın.
ii. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2/3$ eşitliğini kanıtlayın.

11.20. Fonk$(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, $\mathbb{N}$'den $\mathbb{N}$'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. Birbirinden farklı

$$f,\ g \in \mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$$

fonksiyonları için,

$$\mathrm{val}(f, g) = \min\{i \in \mathbb{N} : f(i) \neq g(i)\}$$

olsun. Ayrıca $\mathrm{val}(f, f) = \infty$ olsun.

$$d(f, g) = 2^{-\mathrm{val}(f,g)}$$

tanımını yapalım. d fonksiyonu Fonk$(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ kümesi üzerine (ki bu küme doğal sayı dizileri kümesidir) bir ultrametrik verir.
i. $\mathbb{N}$'nin eşlemelerinden oluşan şu diziyi ele alalım:

$$f_1 = (01)$$
$$f_2 = (012)$$
$$f_3 = (0123)$$
$$\ldots$$

(Örneğin f_3 fonksiyonu 0'ı 1'e, 1'i 2'ye, 2'yi 3'e, 3'ü 0'a gönderir ve diğer doğal sayıları kendilerine götürür.) Bu dizinin limitinin $f(x) = x + 1$ fonksiyonu olduğunu kanıtlayın. Demek ki eşlemelerin ya da örten fonksiyonların limiti eşleme ya da örten olmak zorunda değildir.
ii. g_n fonksiyonu 0'dan n'ye kadar olan sayıları 0'a, n'den büyük sayıları 1'e götürsün. $(g_n)_n$ dizisinin limitinin sabit 0 fonksiyonu olduğunu kanıtlayın.
iii. h_n fonksiyonu $h_n(n) = n+1$, $h_n(n+1) = n$ ve eğer $x \neq n, n+1$ ise $h_n(x) = x$ olarak tanımlansın. $(h_n)_n$ fonksiyonlarının limitinin özdeşlik fonksiyonu, yani $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ olduğunu kanıtlayın.
iv. k_n fonksiyonu $k_n(0) = n$, $k_n(n) = 0$ ve $x \neq 0, n$ için $k_n(x) = x$ olarak tanımlansın. $(k_n)_n$ dizisinin limiti olmadığını kanıtlayın.
v. Bir $(f_n)_n$ dizisinin bu metrikte yakınsak olması için, her $i \in \mathbb{N}$ için $(f_n(i))_n$ dizisinin zamanla sabitleşmesi gerektiğini kanıtlayın. Bu sayıya $f(i)$ dersek, $\lim f_n = f$ eşitliğini kanıtlayın.
vi. Bu metrikte birebir fonksiyonların limitinin birebir olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

11.21. Doğal sayıların altkümeleri kümesi $\wp(\mathbb{N})$, karakteristik fonksiyonlar sayesinde $\mathbb{N}$'den $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar olarak görülebileceğinden (Örnek 6.22), Fonk$(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ultrametrik uzayının (Örnek 10.37) bir altkümesi olarak görülebilir:

$$\wp(\mathbb{N}) \approx \mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \subseteq \mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, \mathbb{N}).$$

i. Fonk$(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ altkümesinin Fonk$(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ uzayının kapalı bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.
ii. $x_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathbb{N}$ eşitliğini kanıtlayın.
iii. $x_n = \{n, \ldots, 2n\}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayın.
iv. $x_n = n\mathbb{N}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = \{0\}$ eşitliğini kanıtlayın.
v. Yakınsak olmayan bir dizi bulun.
vi. $(x_n)_n$ azalan bir altküme dizisi olsun, yani her n için $x_{n+1} \subseteq x_n$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bigcap_n x_n$$

eşitliğini kanıtlayın.
vii. $(x_n)_n$ artan bir altküme dizisi olsun, yani her n için $x_n \subseteq x_{n+1}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bigcup_n x_n$$

eşitliğini kanıtlayın.
viii. $x \in \wp(\mathbb{N})$ olsun.

$$d(x, x \cap \{0, 1, \ldots, n\} < 1/2^n$$

eşitsizliğini kanıtlayın. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} (x \cap \{0, 1, \ldots, n\}) = x$$

eşitliğini çıkarın.

12. Cauchy Dizileri ve Tam Metrik Uzayları

12.1 Cauchy Dizileri

Nasıl yakınsaklık kavramını gerçel sayılardan metrik uzaylarına genelleştirdiysek, benzer genellemeyi Cauchy dizileri için de yapabiliriz.

Anımsayalım: Gerçel sayılarda, bir Cauchy dizisi bir sayıya yakınsamak için elinden gelen her şeyi yapan bir diziydi. Örneğin $(1/n)_n$ dizisi 0'a yakınsamak için elinden geleni yapar. Ama eğer 0 orada yoksa, 0'a yakınsamak için elinden geleni yapan bu dizi 0'a yakınsayamaz. Örneğin $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ kümesinde $(1/n)_n$ dizisi (bildiğimiz metrikte) hiçbir yere yakınsayamaz.

Bir dizinin bir sayıya yakınsaması için, her şeyden önce dizinin terimleri birbirlerine yakın olmalı, safları sıklaştırmalıdır. Terimlerin arasındaki mesafelerin giderek küçülmediği, küçülmekten de öte, mesafelerin 0'a yakınsamadığı bir dizi hiçbir yere yakınsayamaz elbette.

Gerçel sayılarda Cauchy dizisinin tanımı şöyleydi: $(x_n)_n$ bir gerçel sayı dizisi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***Cauchy dizisi*** denir.

Bir metrik uzayda Cauchy dizisi de aynen böyle tanımlanır, yalnızca

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

yerine

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

yazılır.

Tanımı verelim: (X, d) bir metrik uzay olsun. $(x_n)_n$, terimleri X'ten olan bir dizi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N sayısı varsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisine ***Cauchy dizisi*** denir.

Bulunan N sayısı ϵ'a göre değişir elbette. ϵ sayısı ne kadar küçük alınmışsa, N'nin o kadar büyük olması beklenir. Öte yandan bir ϵ için N bulunmuşsa, aynı N'yi bu ϵ'dan büyük ϵ'lar için de kullanabiliriz. Dolayısıyla koşulu küçük ϵ'lar için sağlamak yeterlidir.

Örneğin X bir kümeyse ve d ve d', X üzerine birer mesafeyse ve her x, $y \in X$ için,

$$d'(x,y) \le d(x,y)$$

oluyorsa, o zaman (X,d) metrik uzayının her Cauchy dizisi (X,d') metrik uzayının da bir Cauchy dizisi olur. Eğer

$$\forall x \forall y \;\; a \cdot d(x,y) \le d'(x,y) \le b \cdot d(x,y)$$

önermesini sağlayan a, $b > 0$ sayıları varsa, o zaman (X,d) ve (X,d') metrik uzaylarının Cauchy dizileri aynıdır. (Bu dediklerimizin doğruluğunu kontrol etmeyi okura alıştırma olarak bırakıyoruz.)

Örnekler

12.1. (X,d) bir metrik uzay olsun.

$$d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$$

olsun. O zaman (X,d') de bir metrik uzaydır (Örnek 10.13). (X,d) ve (X,d') metrik uzaylarının Cauchy dizileri aynıdır. Bu, tabii ki, 1'den küçük yarıçaplı yuvarların her iki uzayda da aynı olmalarından kaynaklanır.

12.2. Aynı düşünceyi sürdüren bir başka örnek verelim. X bir küme ve d_1 ve d_2, X üzerine herhangi iki metrik olsun. Her x, $y \in X$ için,

$$d(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$$

olsun. O zaman d, X üzerine bir metriktir (Örnek 10.12). (X,d)'nin Cauchy dizileri, tam tamına, hem (X,d_1) uzayında hem de (X,d_2) uzayında Cauchy dizisi olan dizilerdir.

12.3. X, 01-dizileri kümesi olsun. X'in elemanlarını,

$$0100101010001010111101010\ldots$$

örneğinde olduğu gibi sonsuz bir 01-kelimesi olarak gösterebiliriz. Genel olarak X'in α elemanını, $\alpha_n \in \{0,1\}$ için

$$\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\ldots$$

olarak gösterelim. α, $\beta \in X$ olsun.
Eğer $\alpha_0 \ne \beta_0$ ise $d(\alpha,\beta) = 1$ olsun.
Eğer $\alpha_0 = \beta_0$ ama $\alpha_1 \ne \beta_1$ ise, $d(\alpha,\beta) = 1/2$ olsun.
Eğer $\alpha_0 = \beta_0$ ve $\alpha_1 = \beta_1$ ama $\alpha_2 \ne \beta_2$ ise, $d(\alpha,\beta) = 1/4 = 1/2^2$ olsun.
Genel olarak, eğer $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$ ise ama $\alpha_n \ne \beta_n$ ise, $d(\alpha,\beta) = 1/2^n$ olsun ve $d(\alpha,\alpha) = 0$ olsun.
Böylece X kümesi üzerine bir metrik tanımlamış oluruz. (Okura alıştırma.)
$d(\alpha,\beta) \le 1/2^n$ demek, aynen, α ve β'nın en azından ilk n terimi eşittir demektir.

Şimdi X'ten bir $(\alpha_n)_n$ dizisi alalım. Her $\alpha_n \in X$ $\alpha_{n,m} \in \{0,1\}$ için şöyle yazılır:

$$\alpha_n = \alpha_{n,0}\alpha_{n,1}\alpha_{n,2}\alpha_{n,3}\alpha_{n,4}\alpha_{n,5}\ldots$$

Eğer $(\alpha_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse, yeterince büyük n ve m göstergeçleri için, $d(\alpha_n, \alpha_m) < 1/2^k$ olmalı, yani α_n ve α_m dizilerinin en azından ilk k terimi eşit olmalı. Dolayısıyla bir $(\alpha_n)_n$ dizisinin Cauchy dizisi olması, aynen, her k için, α_n dizisinin k'ıncı terimlerinin bir zaman sonra eşitlenmesi demektir. Eğer $(\alpha_{n,k})_n$ dizisinin sabitleştiği sayı $\lambda_k \in \{0,1\}$ ise ve $\lambda \in X$ elemanını

$$\lambda = \lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\ldots$$

olarak tanımlarsak,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lambda$$

olur.

Alıştırma 12.4. X, Örnek 12.3'te olduğu gibi olsun. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ise, A'nın karakteristik fonksiyonu [N1] X'ten bir ve bir tane eleman eleman verir ve X'in her elemanı $\mathbb{N}$'nin bir ve bir tane altkümesini verir. Örneğin, eğer A çift sayılar kümesiyse, A'ya tekabül eden dizi $1010101010\ldots$ dizisidir. Boşküme sabit 0 dizisine tekabül eder. Bkz. Örnek 10.38. Örnek 12.3'te X üzerine tanımlanmış olan metriği, X ile $\wp(\mathbb{N})$ arasındaki bu eşlemeyi kullanarak $\wp(\mathbb{N})$ kümesine taşırsak, $\wp(\mathbb{N})$ üzerine bir metrik elde ederiz. $\mathbb{N}$'nin birbirinden farklı A, $B \subseteq \mathbb{N}$ altkümeleri için,

$$d(A,B) = \frac{1}{2^{\min(A\Delta B)}}$$

eşitliğini kanıtlayın. (Burada $A\Delta B$, simetrik fark anlamına gelmektedir [N1].)

1. $X_n = \{n\}$,
2. $Y_n = \{n, n+1, \ldots, 2n\}$,
3. $Z_n = \{0, 1, \ldots, n\}$

olsun. Bu metrik uzayında, $\lim_{n\to\infty} X_n$, $\lim_{n\to\infty} Y_n$ ve $\lim_{n\to\infty} X_n$ limitlerini hesaplayın.

Bu metrikte, $A_n \in \wp(\mathbb{N})$ için

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_n \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n = \liminf A_n$$

olduğunu kanıtlayın. (lim inf hakkında daha fazla bilgi için [N1].) Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayın.

Tanıma bakınca anlaşılacağı gibi, Cauchy dizisi olmak, dizinin başını değil, kuyruğunu ilgilendiren bir özelliktir. Dizinin başına bir milyon yeni terim eklense ya da diziden ilk bir milyon terim çıkarılsa ya da ilk bir milyon terim değiştirilse, dizinin Cauchy olma ya da olmama özelliği bozulmaz.

Bir Cauchy dizisinin her altdizisi de Cauchy'dir, hatta altdiziler orijinal diziden daha da Cauchy'dirler (!), çünkü ne de olsa altdizinin terimleri birbirine orijinal diziden daha çabuk yaklaşırlar, yani verilmiş $\epsilon > 0$ sayısı için, altdizi için bulunan N, dizi için bulunan N'ye eşit, hatta çoğu zaman ondan küçük bile alınabilir.

Tanımdaki

$$n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$$

koşulu yerine

$$n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

koşulunu da alabilirdik. Kavram değişmezdi. Cauchy dizisi tanımını iyice anlamak isteyen okur bu dediğimizden emin olmalıdır.

Eğer X, ayrık metrikle donatılmışsa, X'in Cauchy dizileri sadece bir zaman sonra sabitleşen dizilerdir. Başka metriklerde işler daha da zordur elbette, hatta çoğu zaman Cauchy dizilerini anlamak için tanıma başvurmaktan başka çare yoktur. Ama kimi uzaylarda da bir dizinin Cauchy olup olmadığı diziye bakılır bakılmaz anlaşılır. Bunlar daha ele avuca sığan uzaylardır. Örneğin Örnek 11.18, 10.36 ve 10.37, Cauchy dizilerinin sınıflandırılması görece kolay olan uzaylardır.

Yukarda çıtlatmıştık: Limiti olan her dizi bir Cauchy dizisidir:

Teorem 12.1. *Bir metrik uzayda, her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.*

Kanıt: Kanıt aynen gerçel sayılardaki gibi [N4]. Metrik uzayımıza (X, d) diyelim. $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsasın. Rastgele bir $\epsilon > 0$ seçelim. O zaman öyle bir N vardır ki, her $n > N$ için,

$$d(x_n, x) < \epsilon/2$$

olur. O zaman her n, $m > N$ için,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olur. □

Alıştırmalar

12.5. X bir metrik uzay ve $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. $(y_n)_n$ dizisi $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi olsun, yani mutlak artan bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu için $y_n = x_{f(n)}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ eşitliğini gösterin.

12.6. Örnek 11.18'de $\mathbb{Q}$ yerine $\mathbb{N}$ alın ve $\mathbb{N}$'deki Cauchy dizilerini sınıflandırın. İpucu: Bir $(x_n)_n$ Cauchy dizisinin x_n terimlerini p tabanında $x_n = \sum_i x_{n,i}p^i$ olarak yazın ve her n için $(x_{n,i})_n$ dizisinin zamanla sabitleştiğini kanıtlayın.

12.7. Örnek 10.36'te $p = p(T) = T$ alın ve uzayın Cauchy dizilerini sınıflandırın. İpucu: $(f_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. $f_n = \sum_i f_{n,i}T^i$ ise her n için $(f_{n,i})_n$ dizisinin zamanla sabitleştiğini kanıtlayın.

12.8. Örnek 10.37'teki metrik uzaylarının Cauchy dizilerini sınıflandırın.

12.2 Tam Metrik Uzaylar

Teorem 12.1'in ters istikameti her metrik uzayda doğru değildir, hatta pek az metrik uzayında doğrudur. Örneğin $\mathbb{Q}$ üzerine Öklid metriğini alırsak, bu metrik uzayda her Cauchy dizisinin yakınsak olmadığını biliyoruz.

Bir başka örnek: $(1/n)_n$ dizisi $\mathbb{R}$'de 0'a yakınsadığından, yukardaki teoreme göre bir Cauchy dizisidir. Ama bu Cauchy dizisinin terimleri aynı zamanda $(0,1]$ aralığında ve 0 bu aralıkta değil. Demek ki $(0,1]$ metrik uzayında her Cauchy dizisinin limiti yoktur, yani bir sonraki tanıma göre $(0,1]$ aralığı bir tam metrik uzayı değildir.

Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu metrik uzaylara ***tam metrik uzay*** adı verilir.

Örnekler

12.9. Ayrık metrikte, sadece zamanla sabitleşen bir dizi Cauchy dizisi olabildiğinden, ayrık metrikle donatılmış her uzay tamdır.

12.10. Ama yukardaki pek ilginç bir örnek değil. $\mathbb{R}$ çok daha ilginç bir örnek. $\mathbb{R}$'nin Öklid metriğiyle birlikte bir tam metrik uzayı olduğunu biliyoruz.

12.11. Örnek 11.20'de tanımlanan $\text{Fonk}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ ultrametrik uzayının tam olduğunu kanıtlayın.

12.12. Örnek 11.21'te tanımlanan $\wp(\mathbb{N})$ ultrametrik uzayının tam olduğunu kanıtlayın.

12.13. $\wp^\omega(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$'nin sonlu altkümelerinden oluşan küme olsun. Bu kümeyi Örnek 11.21'de tanımlanan ultrametrikle donatalım. Bu metrik uzayının tam olmadığını kanıtlayın.

12.14. $\wp^\omega(\mathbb{N}) \subseteq \wp(\mathbb{N})$ metrik uzayları yukardaki alıştırmalardaki gibi tanımlansınlar. Terimleri $\wp^\omega(\mathbb{N})$'de olan her Cauchy dizisinin $\wp(\mathbb{N})$'de bir limiti olduğunu gösterin. Ayrıca $\wp(\mathbb{N})$'nin her elemanının $\wp^\omega(\mathbb{N})$ kümesinden bir dizinin limiti olduğunu gösterin.

12.15. Örnek 10.35'te tanımlanan $(\mathbb{Q}, d)$ ve $(\mathbb{Z}, d)$ ultrametrik uzaylarının tam olmadıklarını kanıtlayın.

Sonlu sayıda tam metrik uzayının kartezyen çarpımının (çarpım üstüne konan doğal metriklerle) bir tam metrik uzayı olduğunu şimdi göreceğiz:

Teorem 12.2. *$(X_1, e_1), \ldots, (X_k, e_k)$ metrik uzayları ve $X = \prod_i X_i$, kartezyen çarpım olsun. Ve $p \in [1, \infty]$ herhangi bir gerçel sayı ya da ∞ olsun. Eğer*

$$x = (x_1, \ldots, x_k),\ y = (y_1, \ldots, y_k) \in X$$

ise,

$$d_p(x,y) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^k e_i(x_i, y_i)^p\right)^{1/p} & \textit{eğer } 1 \le p < \infty \textit{ ise} \\ \max\{e_i(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, k\} & \textit{eğer } p = \infty \textit{ ise} \end{cases}$$

olsun. (X, d_p) bir metrik uzayıdır. Kartezyen çarpımdan bir $(a_n)_n$ dizisi alalım.

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk})$$

olsun. $(a_n)_n$ dizisinin (X, d_p) metrik uzayında Cauchy dizisi olması için, her $i = 1, \ldots, k$ için $(a_{ni})_n$ dizisinin (X_i, e_i) metrik uzayında Cauchy dizisi olması yeter ve gerek koşuldur.

Kanıt: (X, d_p)'nin bir metrik uzayı olduğunu Örnek 10.6'te ve Örnek 10.10'de kanıtlamıştık.

$(a_n)_n$ dizisinin (X, d_p) metrik uzayında Cauchy dizisi olduğunu varsayalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir gerçel sayı olsun. O zaman öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için,

$$d_p(a_n, a_m) < \epsilon$$

olur. Eğer $p = \infty$ ise, her $i = 1, \ldots, k$ için,

$$\epsilon > d_p(a_n, a_m) = \max\{e_i(a_{ni}, a_{mi}) : i = 1, \ldots, k\} \geq e_i(a_{ni}, a_{mi})$$

olur, ki bu da $(a_{ni})_n$ dizisinin (X_i, e_i) metrik uzayında Cauchy dizisi olması demektir. Şimdi $p \in [1, \infty)$ olsun. O zaman,

$$\epsilon^p > d_p(a_n, a_m)^p = \sum_{i=1}^{k} e_i(a_{ni}, a_{mi})^p \geq e_i(a_{ni}, a_{mi})^p,$$

yani $e_i(a_{ni}, a_{mi}) < \epsilon$ olur, ki bu da $(a_{ni})_n$ dizisinin (X_i, e_i) metrik uzayında Cauchy dizisi olması demektir.

Şimdi de her $i = 1, \ldots, k$ göstergeci için $(a_{ni})_n$ dizisinin (X_i, e_i) metrik uzayında Cauchy dizisi olduğunu varsayalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun.

Önce $p = \infty$ olsun. Her $i = 1, \ldots, k$ için öyle bir N_i vardır ki, her n, $m > N_i$ için,

$$e_i(a_{ni}, a_{mi}) < \epsilon$$

olur.

$$N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$$

olsun. O zaman her n, $m > N$ için,

$$d_\infty(a_n, a_m) = \max\{e_i(a_{ni}, a_{mi}) : i = 1, \ldots, k\} < \epsilon$$

olur, ki bu da $(a_n)_n$ dizisinin $(\prod_i X_i, d_\infty)$ metrik uzayında Cauchy dizisi olması demektir.

Şimdi $p < \infty$ varsayımını yapalım. O zaman her $i = 1, \ldots, k$ için öyle bir N_i vardır ki, her n, $m > N_i$ için,

$$e_i(a_{ni}, a_{mi}) < \frac{\epsilon}{k^{1/p}}$$

olur. Gene

$$N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$$

olsun. O zaman her n, $m > N$ için,

$$d_p(a_n, a_m) = \left(\sum_{i=1}^{k} e_i(a_{ni}, a_{mi})^p\right)^{1/p} < \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon^p}{k}\right)^{1/p} = \left(k\frac{\epsilon^p}{k}\right)^{1/p} = \epsilon$$

olur ki bu da $(a_n)_n$ dizisinin $(\prod_i X_i, d_p)$ metrik uzayında Cauchy dizisi olması demektir. $\square$

Sonuç 12.3. *Yukardaki varsayımlarla,* $(\prod_i X_i, d_p)$ *metrik uzayının tam olması için, her* $i = 1, \ldots, k$ *için* (X_i, e_i) *metrik uzayının tam olması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Yukardaki teoremden ve Teorem 11.5'ten çıkar. □

Sonuç 12.4. $\mathbb{R}^n$ *Öklid metrik uzayı tamdır.* □

Örnekler

12.16. Yukarda $\mathbb{R}^n$ Öklid metrik uzayının tam olduğunu gördük. $\mathbb{R}^n$, uzunluğu n olan diziler kümesi olarak görülebilir. n'yi sınırlı almayalım: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, gerçel sayılar dizilerinden oluşan küme olsun. Bu küme üzerine şu metriği alalım:

$$d(x,y) = \sup\left\{\frac{\min\{|x_i - y_i|, 1\}}{i+1} : i \in \mathbb{N}\right\}$$

Bunun bir metrik olduğunun kanıtı oldukça kolaydır ve okura bırakılmıştır. İlerde (Örnek 13.12) bu metrik uzayın da tam olduğunu göreceğiz.

12.17. I herhangi bir küme ve (M, d) herhangi bir metrik uzay olsun. f, $g \in \text{Fonk}(I, M)$ için

$$d_\infty(f, g) = \sup\{\min\{d(f(i), g(i)), 1\} : i \in I\}$$

tanımını yapalım. O zaman $(\text{Fonk}(I, M), d_\infty)$ bir metrik uzaydır ("düzgün metrik", bkz. Örnek 10.19). Eğer (M, d) tamsa bu metrik uzay da tamdır. Bu önemli sonucun kanıtı aşağıda. (Okur bu kanıtı kendi başına yapmaya çalışırsa, kanıtın bir yerindeki zekâ pırıltısının farkına daha kolay varır.)

Şimdi Cauchy dizileriyle ilgili birkaç yararlı sonuç kanıtlayalım.

Teorem 12.5. *Eğer* (M, d) *metrik uzayı tamsa* $\text{Fonk}(I, M)$ *de düzgün metriğe göre tamdır.*

Kanıt: $(f_n)_n$, $\text{Fonk}(I, M)$ metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Demek ki $d_\infty(f_n, f_m)$ sayıları yeterince büyük n ve m sayıları için 1'in altına girer. O andan itibaren, her $i \in I$ için,

$$d(f_n(i), f_m(i)) \le d_\infty(f_n, f_m)$$

olduğundan, $(f_n(i))_n$ bir Cauchy dizisidir. M tam olduğundan, $(f_n(i))_n$ dizisinin bir limiti vardır. Bu limite $f(i)$ diyelim. O zaman $f \in \text{Fonk}(I, M)$ olur ve $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limitidir. f'nin bu dizinin düzgün metriğe göre limiti olduğunu kanıtlayalım.

$\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N seçelim ki, her n, $m > N$ için

$$d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon/2$$

olsun. Elbette her $i \in I$ için,

$$d(f_n(i), f_m(i)) < \epsilon/2$$

olur. n'yi ve i'yi sabitleyelim ve yukardaki eşitsizlikteki ifadeleri m sonsuza giderken limitini alalım.

$$\lim_{m\to\infty} f_m(i) = f(i)$$

olduğundan, Önsav 11.3'e göre,

$$d(f_n(i), f(i)) \le \epsilon/2$$

olur. Bu eşitsizlik her $i \in I$ ve her $n > N$ için geçerlidir. Demek ki her $n > N$ için

$$d_\infty(f_n, f) \le \epsilon/2 < \epsilon$$

olur. Bu da istediğimizi kanıtlar. □

Bölümü biraz daha sıradan ama sıradan olduğu kadar da önemli ve yararlı ve ezbere bilinmesi gereken sonuçlarla bitirelim.

Önsav 12.6. *Eğer $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ ise $(y_n)_n$ de bir Cauchy dizisidir. Ayrıca biri yakınsaksa diğeri de yakınsaktır ve limitleri aynıdır.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N bulmak istiyoruz ki, her n, $m > N$ için,

$$d(y_m, y_n) < \epsilon$$

olsun. Bu eşitsizliğin geçerli olması için n ve m'nin ne kadar büyük olmaları gerektiğini bulalım.

$$d(y_m, y_n) \le d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n)$$

olduğundan, eğer eşitsizliğin sağ tarafındaki terimlerin her birini, yeterince büyük n ve m göstergeçleri için, $\epsilon/3$'ten küçük yaparsak amacımıza ulaşırız. Bu da o kadar zor değil:

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ olduğundan, öyle bir N_1 vardır ki, her $n > N_1$ için

$$d(x_n, y_n) < \epsilon/3$$

olur. Ayrıca $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N_2 vardır ki, her n, $m > N_2$ için

$$d(x_n, x_m) < \epsilon/3$$

olur. Şimdi $N = \max\{N_1, N_2\}$ olsun. Bu N istediğimizi sağlar.

Son olarak, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ eşitliğini varsayalım. O zaman,

$$0 \le d(y_n, a) \le d(y_n, x_n) + d(x_n, a)$$

eşitsizliklerinden ve Sandviç Teoremi'nden [N4] dolayı

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, a) = 0$$

olur. Bu da $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ demektir. □

Bir sonraki sonucumuz için bir tanıma gereksiniyoruz. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A'nın herhangi iki elemanının mesafesi elemanlardan bağımsız seçilmiş belli bir sabiti aşamıyorsa, A'ya ***sınırlı küme*** denir. Örneğin $(0, 1)$ aralığı $\mathbb{R}$'nin Öklid metriğinde sınırlıdır. Bazen X'in kendisi sınırlı bir küme olabilir; örneğin X üzerine ayrık metrik verilmişse X sınırlıdır. Örnek 10.13, 10.14, 10.15, 10.17, 10.19, 10.35, 10.36 ve 10.37'te verilen metrik uzayları da sınırlıdır.

Bir $A \subseteq X$ kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, A'nın elemanlarının X'in verilmiş **herhangi** bir x noktasına mesafelerinin sınırlı olmasıdır. Bunun kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Bir dizinin sınırlı olması demek, dizinin terimlerinden oluşan kümenin sınırlı olması demektir. Elbette, dizinin sınırlı olması, dizinin ilk terimlerini değil, dizinin kuyruğunu ilgilendiren bir kavramdır.

Önsav 12.7. *Her Cauchy dizisi sınırlı bir dizidir.*

Kanıt: $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. Cauchy dizisi tanımında $\epsilon = 1$ alalım. O zaman öyle bir N vardır ki, her $n, m > N$ için,

$$d(x_m, x_n) < 1$$

olur. Demek ki, her $n > N$ için,

$$d(x_{N+1}, x_n) < 1$$

olur. Şimdi,

$$r = \max\{d(x_{N+1}, x_0), \ldots, d(x_{N+1}, x_N), 1\} + 1$$

olsun. O zaman her n için,

$$x_n \in B(x_{N+1}, r)$$

olur, yani $(x_n)_n$ dizisi sınırlıdır. □

Önsav 12.8. *Eğer bir Cauchy dizisinin yakınsak bir altdizisi varsa o zaman dizi de yakınsaktır ve limitler aynıdır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun ve $(x_{f(n)})_n$ bu dizinin yakınsak bir altdizisi olsun. Altdizinin a'ya yakınsadığını varsayalım. Altdizinin tanımından dolayı, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu artandır, dolayısıyla, tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabileceği üzere, her n için $f(n) \geq n$ eşitsizliğini sağlar.

Herhangi bir $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$d(x_n, a) \leq \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için N'nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Her zamanki gibi $d(x_n, a)$ ifadesiyle oynayalım.

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{f(n)}) + d(x_{f(n)}, a)$$

eşitsizliğinden dolayı

$$d(x_n, x_{f(n)}) \text{ ve } d(x_{f(n)}, a)$$

ifadelerinin herbirini $\epsilon/2$'den küçük yapmak yeterli. N_1,

$$n > N_1 \Rightarrow d(x_{f(n)}, a) < \epsilon/2$$

önermesini doğrulayan bir sayı olsun. N_2,

$$n, m > N_2 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon/2$$

önermesini doğrulayan bir sayı olsun. Ve şimdi de $N = \max\{N_1, N_2\}$ ve $n > N$ olsun.

$f(n) \geq n > N \geq N_1$ olduğundan $d(x_{f(n)}, a) < \epsilon/2$ olur.

$f(n) \geq n > N \geq N_2$ olduğundan $d(x_n, x_{f(n)}) < \epsilon/2$ olur. Kanıtımız bitmiştir. □

Alıştırmalar

12.18. Eğer $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ aynı noktaya yakınsayan iki diziyse, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ eşitliğini kanıtlayın.

12.19. Bir metrik uzayın tam olması için her Cauchy dizisinin yakınsak bir altdizisi olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayın.

12.20. $\mathbb{Q}$ üzerine p-sel metriği alalım (Örnek 10.35).
i. Bu metrikle $(1/n)_n$ dizisinin Cauchy olmadığını gösterin.
ii. $(p^n)_n$ dizisinin 0'a yakınsadığını kanıtlayın.
iii. $p = 7$ ise, öyle bir $(x_n)_n$ Cauchy dizisi bulun ki

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 2$$

olsun. Aynı problemin çözümünün $p = 2$ ve 5 için mümkün olmadığını gösterin.

12.3 p-sel Metrikte Cauchy Dizileri

Örnek 10.35'de ve 11.18'de tekrar ele aldığımız metrik uzayını biraz daha ayrıntılı işleyeceğiz, yalnız $\mathbb{Q}$ yerine $\mathbb{Z}$ altuzayını alacağız.

$X = \mathbb{Z}$ ve p bir asal olsun. p-sel metriği $\mathbb{Q}$'den $\mathbb{Z}$'ye kısıtlayalım. Anımsatalım: $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ ise ve p^n, x sayısını bölüyorsa, ama p^{n+1} bölmüyorsa, $\operatorname{val}_p(x) = n$ tanımını yapalım. Bir de ayrıca $\operatorname{val}_p(0) = \infty$ tanımını yapalım. Şimdi, $x, y \in \mathbb{Z}$ için şu tanımı yapalım:

$$d(x,y) = \frac{1}{p^{\operatorname{val}_p(x-y)}} = p^{-\operatorname{val}_p(x-y)}.$$

(Tahmin edileceği üzere $1/p^\infty = p^{-\infty} = 0$ olarak kabul ediliyor.) O zaman $(\mathbb{Z}, d)$ bir ultrametrik uzay olur, yani üçgen eşitsizliğinden daha güçlü olan

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z),\ d(z,y)\}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıda da göreceğimiz üzere bu metrik uzayda d ultrametriği yerine val_p ile çalışmak daha pratiktir. Mesela

$$d(x,0) \leq \frac{1}{p^n} \Leftrightarrow \operatorname{val}_p(x) \geq n \Leftrightarrow p^n | x$$

önermeleri geçerlidir; bir başka deyişle bir sayı ne kadar çok p'ye bölünüyorsa, o kadar 0'a yakındır; p^{1000} sayısı 0'a p^5'ten çok daha yakındır, ve sonsuz defa p'ye bölünen 0 sayısı 0'a en yakın sayıdır!

Bu uzayda bir $(x_n)_n$ dizisinin x'e yakınsamasının ne demek olduğunu anlamak oldukça kolaydır:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{val}_p(x - x_n) = \infty.$$

Yani $(x_n)_n$ dizisinin x'e yakınsaması için p'nin giderek daha büyük kuvvetleri $x_n - x$ sayısını bölmelidir. Örneğin

$$\lim p^n = 0$$

olur, çünkü $\operatorname{val}_p(p^n - 0) = n \longrightarrow \infty$ olur.

Benzer şekilde, bu uzayda bir $(x_n)_n$ dizisinin Cauchy dizisi olması, $x_n - x_m$ sayısının n ve m büyüdükçe p'nin giderek büyüyen kuvvetlerine bölünmesi demektir. Örneğin

$$x_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$$

ise ve $n \geq m$ ise

$$x_n - x_m = p^m + p^{m+1} + \cdots + p^{n-1}$$

ve

$$\mathrm{val}_p(x_n - x_m) = m = \min\{m, n\}$$

olur. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Eğer $p = 2$ ise bu Cauchy dizisi -1'e yakınsar ama eğer $p > 2$ ise bu Cauchy dizisi $\mathbb{Z}$'de yakınsak değildir. Bunu anlamak için,

$$(p-1)x_n = p^n - 1$$

eşitliğini görüp,

$$\lim_{n\to\infty}(p-1)x_n = -1$$

eşitliğini farketmek yeterlidir; nitekim eğer $(x_n)_n$ dizisi bir $x \in \mathbb{Z}$ sayısına yakınsasaydı,

$$(p-1)x = (p-1)\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty}(p-1)x_n = -1$$

olurdu ki eğer $p \neq 2$ ise bu imkânsızdır. (Soru işaretli eşitlik ilginç bir sorudur, kayıtsız kalınmamalı. Bkz. Alıştırma 14.6.)

Bu uzayda yakınsaklığın anlaşılması görece kolay olduğu şu sonuçtan da belli:

Önsav 12.9. *Her n için $x_n \in \mathbb{Z}$ olsun. $s_n = x_0 + \cdots + x_n$ olsun. $(s_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için $\lim_{n\to\infty} \mathrm{val}_p(x_n) = \infty$ eşitliği yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: Eğer $n > m$ ise $s_n - s_m = x_{m+1} + \cdots + x_n$ ve

$$\mathrm{val}_p(s_n - s_m) = \mathrm{val}_p(x_{m+1} + \cdots + x_n) \geq \min\{\mathrm{val}_p(x_{m+1}), \ldots, \mathrm{val}_p(x_n)\}$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \mathrm{val}_p(x_n) = \infty$ ise $(s_n)_n$ dizisi Cauchy'dir. Ters istikamet daha kolay: $s_n - s_{n-1} = x_n$ eşitliğinden hemen çıkar. □

Ama bundan çok daha iyisini kanıtlayabiliriz:

Önsav 12.10. *$(x_n)_n$ bir doğal sayı dizisi olsun. x_n'yi p tabanında yazalım:*

$$x_n = \sum_i x_{n,i} p^i.$$

Burada sonlu bir toplam sözkonusudur tabii ve $x_{n,i}$ katsayıları 0'dan $p-1$'e kadar olan doğal sayılardır. $(x_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için her i için $(x_{n,i})_n$ dizisinin bir zaman sonra sabitleşmesi gerekmektedir.

Kanıt: Önce $(x_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu varsayalım. j göstergeci verilmiş olsun. O zaman bir zaman sonra, diyelim N göstergecinden sonra, $\mathrm{val}_p(x_n - x_m) \geq j + 1$ olur. Ama

$$x_n - x_m = \sum_i (x_{n,i} - x_{m,i}) p^i$$

olduğundan, bu da

$$x_{n,0} = x_{m,0},\ x_{n,1} = x_{m,1},\ \ldots,\ x_{n,j} = x_{m,j}$$

demektir. Yani N göstergecinden sonra

$$x_{n,0},\ x_{n,1},\ \ldots,\ x_{n,j}$$

katsayıları sabitleşir.

Şimdi de tam tersine her i için i'inci katsayılar dizisinin bir zaman sonra sabitleştiğini varsayalım. O zaman tüm ilk i katsayılar, yani

$$(x_{n,0})_n, (x_{n,1})_n, \ldots, (x_{n,i-1})_n$$

dizilerinin tümü birden bir zaman sonra sabitleşirler. İşte o aşamadan sonra p^i, $x_n - x_m$'yi böler, yani $\mathrm{val}_p(x_n - x_m) \geq i$ olur, ki bu da aynen $(x_n)_n$ dizisi Cauchy demektir. □

Yukardaki önsav tüm terimleri negatif olan diziler için de geçerlidir elbette. Eğer bir dizi hem sonsuz sayıda negatif hem de sonsuz sayıda pozitif terim içeriyorsa yapılacak şey, 1. Diziyi negatif ve pozitif dizi olarak ikiye ayırmak, 2. Her iki dizinin de Cauchy olduğunu önsavdaki yöntemle kontrol etmek, 3. İki dizinin farkının 0'a yakınsadığını kontrol etmek. Bu testten geçen dizi (elbette) Cauchy dizisidir.

Örnek 12.21. Eğer $(x_n)_n$ dizisi,

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= 1 + 2\cdot 5\\
x_2 &= 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5^2\\
x_3 &= 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^3\\
x_4 &= 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^3 + 0\cdot 5^4\\
x_5 &= 1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^3 + 0\cdot 5^4 + 4\cdot 5^5
\end{aligned}$$

gibi düzenli ya da düzensiz bir biçimde gidiyorsa, o zaman $(x_n)_n$ dizisi $p = 5$ için bir Cauchy dizisidir. Dizinin nasıl devam ettiğine göre dizi $\mathbb{Z}$ halkasında (ya da $\mathbb{Q}$ cisminde) yakınsayabilir ya da yakınsamayabilir.

Eğer bu aşamada okur, yukardaki örnekteki Cauchy dizisinin bir limiti olarak,

$$1 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^3 + 0\cdot 5^4 + 4\cdot 5^5 + \cdots$$

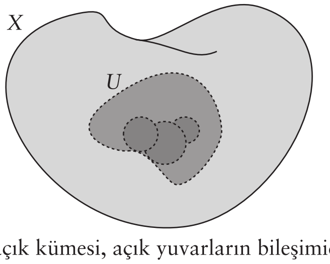
gibi $\sum_i x_i p^i$ sonsuz toplamları tanımlamak için yanıp tutuşuyorsa bu altbölüm amacına ulaşmış demektir. Bölüm 15'da ve özel olarak Altbölüm 15.2'de bunu yapacağız ve böylece her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir uzay inşa edeceğiz.

13. Metrik Uzaylar, Topoloji ve Diziler

Bu sayfaya kadar yazılanları okuyanlar metrik uzaylarla topoloji arasındaki yakın bağlantıyı hissetmiş olmalılar. Nitekim, birazdan göreceğimiz üzere her metrik uzay aynı zamanda bir topolojik uzaydır. Ama bunun tersi doğru değildir: Her topolojik uzay illa bir metrik uzaydan türetilmiş olmak zorunda değildir. Hangi topolojik uzayların bir metrik uzaydan türetildiği konusu başlı başına önemli bir konudur ama bu kitapta bu önemli konuya pek değinmeyeceğiz.

13.1 Açık Kümeler

(X, d) bir metrik uzayı olsun. X'in, (sonlu ya da sonsuz sayıda) açık yuvarların bileşimi olarak yazılan bir altkümesine açık küme denir. Yuvarların kendileri açık kümelerdir elbette.



U açık kümesi, açık yuvarların bileşimidir.

Önsav 13.1. *Açık kümelerin şu özellikleri vardır:*
A1. $\emptyset$ *ve* X *açık kümelerdir.*
A2. *Açık kümelerin her türlü (sonlu ya da sonsuz) bileşimi açıktır.*
A3. *Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi açıktır.*

Kanıt: A1'den başlayalım. $X = \bigcup_{x\in X} B(x, 1)$ olduğundan, X açıktır. $x \in X$ olsun. $B(x, 0) = \emptyset$ olduğundan, boşküme de açıktır[1].

[1] Ama eğer $X = \emptyset$ ise, bu kanıt geçerli değil çünkü bu durumda X'ten alacağımız bir x elemanı yok. Eğer $X = \emptyset$ ise $\bigcup_{x\in\emptyset} B(x, 1) = \emptyset$ eşitliğine başvurulabilir. Eğer bu da okuru

Her açık küme yuvarların bileşimi olduğundan, açık kümelerin bileşimi de yuvarların bileşimidir.

Son olarak A3'ü kanıtlayalım: İki açık kümenin kesişiminin açık olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Eğer U, $(B_i)_{i\in I}$ yuvarlarının, V de, $(C_j)_{j\in J}$ yuvarlarının bileşimiyse, o zaman,

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} C_j\right) = \bigcup_{i\in I, j\in J} (B_i \cap C_j)$$

olduğundan, $A2$'ye göre, $B_i \cap C_j$ kesişiminin açık küme olduğunu göstermek yeterlidir. Ama bu da tam Önsav 10.4'ün söylediği şey. □

Nasıl bir açık yuvarı sınırını içermeyen bir daire olarak imgelemek gerekiyorsa, açık kümeyi de "sınırını" içermeyen ama "içini" içeren bir küme olarak algılamak gerekir.

Bu aşamada okurun gelecek altbölümde çok işimize yarayacak olan Önsav 10.3'e tekrar bakmasında yarar var.

13.2 Topoloji

Önsav 13.1'deki özellikler, topolojik bir uzayda "açık" adı verilen kümelerin sağlamaları gereken özelliklerdir. Demek ki her metrik uzay aynı zamanda bir topolojik uzaydır, yani her (X, d) metrik uzayı, X üzerinde bir topolojik uzay yapısı türetir. Bu topolojik uzayda açık kümeler yuvarların bileşimidir, yani metrik uzayın yuvarları bu topolojik uzayın bir tabanını oluştururlar. Bu durumda, topolojik uzayın metrik tarafından ***üretildiği*** ya da ***indirgendiği*** söylenir.

Ama her topolojik uzay bir metrik tarafından üretilmez. Bu kitapta bir metrik uzay tarafından üretilmeyen birçok topolojik uzay örneği vereceğiz. Örneğin, bir sonraki sonuca göre bir metrik uzay tarafından üretilen topoloji Hausdorff'dur; dolayısıyla Hausdorff olmayan bir topolojik uzay bir metrik tarafından üretilmiş olamaz. Sözgelimi, eğer $|X| > 1$ ise, X'in en kaba topolojisi bir metrik tarafından üretilmiş olamaz. Ama metrikleşebilmesi için bir topolojik uzayın Hausdorff olması da yetmez; örneklerini göreceğiz.

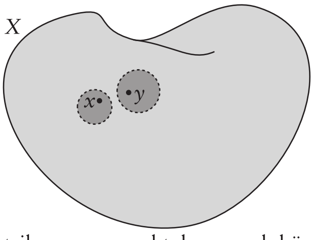
Bir metrik tarafından üretilen topolojilere ***metrikleşebilen*** ya da ***metrikleşen topoloji*** adı verilir. Aksi halde ***metrikleşmeyen topolojiden*** sözedilir. Ne tür topolojik uzayların metrikleşebildiği bu kitapta pek üstünde durmayacağımız önemli ve ilginç bir sorudur.

Önsav 13.2. *Bir metrik uzay tarafından üretilmiş her topoloji Hausdorff'dur, yani metrik uzayın birbirinden değişik her x ve y noktaları için, sırasıyla x'i*

---

ikna etmemişse, en iyisi "açık küme" tanımını boşkümeyi içerecek biçimde genişletmek.

ve y'yi içeren ama kesişmeyen açık kümeler (hatta açık yuvarlar) vardır. Dolayısıyla Hausdorff olmayan bir topolojik uzay metrikleşemez.



Bir metrik uzayının noktalarını açık kümelerle (hatta açık yuvarlarla) ayrıştırabiliriz.

Kanıt: x ve y iki değişik nokta olsun.

$$r = \frac{d(x,y)}{2} > 0$$

olsun. O zaman

$$B(x,r) \text{ ve } B(y,r)$$

açık yuvarları sırasıyla x'i ve y'yi içerirler ama kesişmezler. Nitekim eğer z bu iki yuvardaysa, o zaman,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < r + r = d(x,y)$$

olur ve bu da bariz bir çelişkidir. □

Alıştırmalar

13.1. (X,d) bir metrik uzay olsun. X üzerine d metrik tarafından tanımlanan topolojinin $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu sürekli yapan en kaba topoloji olduğunu kanıtlayın. (Bkz. Alıştırma 6.4.)

13.2. Her metrik uzayın birinci sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

13.3. (X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A'nın X'te yoğun olması için, her $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ için $d(a,x) < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in A$ olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

13.4. Sayılabilir yoğun bir altkümesi olan metrik uzayların (bu tür topolojik uzaylara ***ayrıştırılabilir topolojik uzay*** denir) ikinci sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

13.5. Sorgenfrey doğrusunun ikinci sayılabilir olmadığını, dolayısıyla metrikleşemeyeceğini gösterin. (Bkz. Alıştırma 8.39.)

Örnekler

13.6. **Ayrık Metrik.** Ayrık metrik tarafından üretilen topoloji ayrık topolojidir, yani bu topolojide tek bir noktadan oluşan her küme açıktır: $\{x\} = B(x,1)$. Dolayısıyla her altküme açıktır.

13.7. **Yığılma Noktası.** X bir metrik uzay, $A \subseteq A$ ve x, A'nın bir yığılma noktası olsun. x'i içeren her açık kümenin A'nın sonsuz sayıda noktasını içerdiğini kanıtlayın.

13.8. **Öklid Metriği.** $\mathbb{R}^n$ kartezyen çarpımı üzerine Öklid metriği tarafından üretilen topoloji Öklid topolojisidir (ki bu da çarpım topolojisidir). Ama başka metrikler de $\mathbb{R}^n$ üzerinde aynı topolojiyi üretebilirler. Örneğin,

$$\begin{array}{rcll} d_p(x,y) & = & \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} & (p \in [1,\infty)) \\ d_\infty(x,y) & = & \max_{i=1}^n \{|x_i - y_i|\} & \\ b_p(x,y) & = & \min\{d_p(x,y), 1\} & (p \in [1,\infty)) \end{array}$$

formülleriyle verilmiş her metrik $\mathbb{R}^n$ üzerine aynı topolojiyi üretir. (Bkz. Örnek 10.5 ve 10.6.)

Demek ki herhangi bir kümenin ayrık topolojisi ve $\mathbb{R}^n$'nin Öklid topolojisi metrikleşebilen topolojilerdir.

13.9. **Metrik Uzayların Sonlu Kartezyen Çarpımı.** Eğer $(X_1, e_1) \ldots, (X_n, e_n)$ metrik uzayları metrikleşebiliyorsa, o zaman

$$\prod_i X_i = X_1 \times \ldots \times X_n$$

Kartezyen çarpımı üzerine olan çarpım topolojisi de metrikleşebilir. Nitekim her $p \geq 1$ için,

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n e_i(x_i, y_i)^p\right)^{1/p}$$

metriği Kartezyen çarpım üzerine çarpım topolojisini verir. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Örnek 13.8'teki gibi aynı topolojiyi üreten mesafelere (topolojik) ***denk mesafeler*** denir. Bu ilişki elbette bir küme üzerine verilmiş metrikler kümesi üzerine bir denklik ilişkisidir.

Daha zor örneklere el atmadan önce metrik topolojisini daha iyi anlamamıza yardımcı olacak şu sonucu kanıtlayalım.

Önsav 13.3. *d ve d', bir X kümesi üzerine iki metrik olsun. τ ve τ', sırasıyla, X üzerine d ve d' tarafından üretilen topolojiler olsun. O zaman τ', τ'dan daha incedir, yani $\tau \subseteq \tau'$ içindeliği doğrudur, ancak ve ancak her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için,*

$$B_{d'}(x,\delta) \subseteq B_d(x,\epsilon)$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa.

Kanıt: Önce $\tau \subseteq \tau'$ içindeliğini varsayalım. $B_d(x,\epsilon) \in \tau$ verilmiş olsun. O zaman $x \in B_d(x,\epsilon) \in \tau'$ olur. Demek ki τ' topolojisinde (ya da d' metriğinde) x'i içeren $B_d(x,\epsilon)$ kümesinin içinde açık bir yuvar vardır. Önsav 10.2'ye göre, $B_{d'}(x,\delta) \subseteq B_d(x,\epsilon)$ içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır.

Şimdi her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için,

$$B_{d'}(x,\delta) \subseteq B_d(x,\epsilon)$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısının varlığını varsayalım. $B_d(x,r)$ kümesinin τ' topolojisinde (ya da d' metriğinde) açık olduğunu kanıtlamak yeterli.

Önsav 10.3'ü kullanacağız. $a \in B_d(x,r)$ olsun. Önsav 10.2'ye göre öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki, $B_d(a,\epsilon) \subseteq B_d(x,r)$ olur. Şimdi varsayıma göre $B_{d'}(a,\delta) \subseteq B_d(a,\epsilon)$ içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır. O zaman $a \in B_{d'}(a,\delta) \subseteq B_d(x,r)$ olur. Önsav 10.3'e göre $B_d(x,r)$ kümesi τ' topolojisinde açıktır. □

Alıştırma 13.10. $\mathbb{R}^2$'de açık yarı düzlemlerle (yani bir doğrunun iki yarısından birinde kalan bölgelerle) üretilmiş topolojinin Öklid topolojisi olduğunu kanıtlayın.

Örnekler

13.11. Örnek 10.11 ve daha sonra Örnek 10.19 olarak ele alınan fonksiyonlar uzayını anımsayalım: I herhangi bir küme ve (M,d) herhangi bir metrik uzay olsun. I'dan M'ye giden fonksiyonlar kümesi, bildiğimiz gibi, $\mathrm{Fonk}(I,M)$, $\prod_I M$ ya da M^I (kartezyen çarpım) olarak gösterilir. f, $g \in M^I$ için

$$d_\infty(f,g) = \sup\{\min\{d(f_i,g_i),1\} : i \in I\}$$

tanımını yapalım. O zaman her f ve g için $d_\infty(f,g) \le 1$ olur ve bu tanımla (M^I, d_∞) bir metrik uzayına dönüşür. d_∞ mesafesine ***düzgün metrik*** adı verilir. Düzgün metrikte f merkezli ve s yarıçaplı yuvarı $B_\infty(f,s)$ olarak gösterelim.

Düzgün metriğin topolojisi en az çarpım topolojisi kadar incedir, yani çarpım topolojisinin her açık kümesi düzgün metrikte de açıktır. Bunu kanıtlamak için, sabit bir $j \in I$, $a \in M$ ve $r > 0$ için,

$$T(a,j,r) = \{x \in M^I : d(x_j,a) < r\}$$

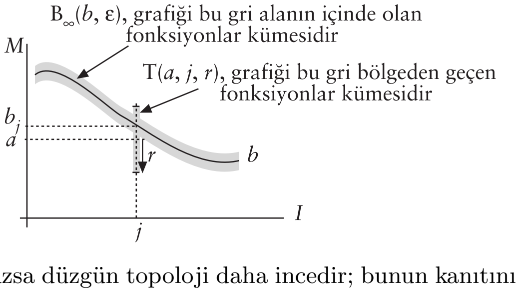
olarak tanımlanan $T(a,j,r)$ kümesinin düzgün metrikte açık olduğunu kanıtlamak yeterli (ve gerekli), çünkü $T(a,j,r)$ kümeleri çarpım topolojisinin öntabanıdır. Kanıtı aşağıdaki şekilden izleyebilirsiniz. $T(a,j,r)$ kümesinden bir $b = (b_i)_i$ noktası alalım ve

$$\epsilon = \frac{r - d(b_j,a)}{2}$$

tanımını yapalım. O zaman,

$$b \in B_\infty(b,\epsilon) \subseteq T(a,j,r)$$

olur. Demek ki $B(a,j,r)$ kümesi düzgün metriğin açık yuvarlarının bileşimi olarak yazılabiliyor, dolayısıyla $T(a,j,r)$ kümesi düzgün metrikte açıktır.



Eğer I kümesi sonsuzsa düzgün topoloji daha incedir; bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

13.12. Örnek 13.8'te $\mathbb{R}^n$ üzerine Öklid metriği tarafından üretilen topolojinin Öklid topolojisi, yani çarpım topolojisi olduğunu gördük. Ya sonsuz bir I kümesi için $\mathbb{R}^I$ üzerine alınan çarpım topolojisi bir metrik tarafından üretilir mi? Eğer I sayılabilir sonsuzluktaysa yanıt olumludur (yoksa olumsuzdur, bkz. Teorem 21.12); bunu gösterelim. $I = \mathbb{N} = \omega$ olsun. $\mathbb{R}^\omega$ (gerçel sayılar dizilerinin kümesi) üzerine şu metriği alalım:

$$d(x,y) = \sup\left\{\frac{\min\{|x_i - y_i|, 1\}}{i+1} : i \in \mathbb{N}\right\}$$

Bunun bir metrik olduğunun kanıtı oldukça kolaydır ve okura bırakılmıştır. Bu metriğin ürettiği topolojinin çarpım topolojisi olduğunu kanıtlayalım.

Önce metrik topolojisinde herhangi bir U açık kümesi ve bu kümeden bir a elemanı alalım. $B(a,r) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ seçelim. N doğal sayısı

$$\frac{1}{N} < s = \frac{r}{2}$$

olacak biçimde seçilsin. O zaman çarpım topolojisinin standart tabanında bulunan $\mathbb{R}^\omega$'nın

$$(a_0 - s, a_0 + s) \times \ldots \times (a_{N-1} - s, a_{N-1} + s) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

altkümesi, hem a'yı içerir hem de $B(a,r)$'nin, dolayısıyla U'nun altkümesidir. Nitekim, eğer $i \geq N$ ise, her $x_i \in \mathbb{R}$ için,

$$\frac{\min\{|x_i - a_i|, 1\}}{i+1} \leq \frac{1}{i+1} < \frac{1}{N} < s$$

olur. Eğer $i < N$ ise her $x_i \in (a_i - s, a_i + s)$ için,

$$\frac{\min\{|x_i - a_i|, 1\}}{i+1} \leq \frac{|x_i - a_i|}{i+1} < \frac{s}{i+1} \leq s$$

olur. Dolayısıyla $d(x,a) \leq s < r$, yani

$$x \in B(a,r) \subseteq U$$

olur.

Şimdi de çarpım topolojisinde bir açık kümenin metrik topolojisinde açık olduğunu göstermeliyiz. Açık kümeyi, bir $i \in \mathbb{N}$ ve bir $U \subseteq \mathbb{R}$ açık altkümesi için,

$$V = \{x \in \mathbb{R}^\omega : x_i \in U\}$$

olacak biçimde seçmemizde bir sakınca yoktur çünkü bu tür kümeler çarpım topolojisinin bir öntabanını oluştururlar. Bu kümeden bir a elemanı alalım. $\epsilon > 0$,

$$(a_i - \epsilon, a_i + \epsilon) \subseteq U$$

içindeliği doğru olacak biçimde seçilsin. Ayrıca ϵ'u 1'den küçük seçelim.

$$\delta = \frac{\epsilon}{i+1}$$

olsun. O zaman $B(a,\delta) \subseteq V$ olur. Nitekim eğer $x \in B(a,\delta)$ ise,

$$\frac{\min\{|x_i - a_i|, 1\}}{i+1} \leq \sup\left\{\frac{\min\{|x_i - a_i|, 1\}}{i+1} : i \in \mathbb{N}\right\} = d(x,a) < \delta = \frac{\epsilon}{i+1}$$

ve $\min\{|x_i - a_i|, 1\} < \epsilon < 1$ olur ve dolayısıyla

$$|x_i - a_i| = \min\{|x_i - a_i|, 1\} < \epsilon$$

olur. Demek ki $x_i \in U$ ve $x \in V$. □

Yakınsaklık, süreklilik gibi tüm topolojik kavramları metrik uzaylarına genelleştirebiliriz, daha doğrusu metrik uzayların diliyle (yani d mesafesini ve yuvarları kullanarak) yazabiliriz çünkü ne de olsa bir metrik uzayda açık kümeler açık yuvarların bileşimidir.

13.3 Yakınsaklık

Yakınsaklık konusunu hem metrik uzaylarda hem de topolojide işledik. Bu iki kavramın aynı kavramlar olduğu bu noktaya kadar anlattıklarımıza vakıf biri için bariz olmalı.

Teorem 13.4. *(X, d) bir metrik uzay olsun. τ, X üzerinde d metriğinin ürettiği topoloji olsun. Terimleri X'te olan bir dizinin (X, d) metrik uzayında yakınsak olmasıyla (X, τ) topolojik uzayda yakınsak olması eşdeğerdir ve limitler aynıdır.* □

Örnek 13.13. Örnek 13.12'da tanımlanan $(\mathbb{R}^\omega, d)$ metrik uzayı tamdır. Nitekim eğer bu uzaydan bir $(x_n)_n$ Cauchy dizisi verilmişse, x_n'yi $x_n = (x_{n0}, x_{n1}, \ldots)$ olarak yazalım. d metriğinin tanımından,

$$d(x_n, x_m) = \sup\left\{\frac{\min\{|x_{ni} - x_{mi}|, 1\}}{i+1} : i \in \mathbb{N}\right\}$$

bulunur. $j \in \mathbb{N}$ verilmiş olsun. $(x_{nj})_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek istiyoruz. Herhangi bir $\epsilon > 0$ alalım. ϵ'u 1'den küçük seçebiliriz; öyle seçelim.

$$\alpha = \frac{\epsilon}{j+1}$$

olsun. O zaman öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için, $d(x_n, x_m) < \alpha$, yani

$$\sup\left\{\frac{\min\{|x_{ni} - x_{mi}|, 1\}}{i+1} : i \in \mathbb{N}\right\} < \alpha,$$

dolayısıyla,

$$\frac{\min\{|x_{nj} - x_{mj}|, 1\}}{j+1} < \alpha = \frac{\epsilon}{j+1}$$

ve

$$\min\{|x_{nj} - x_{mj}|, 1\} < \epsilon < 1$$

ve

$$|x_{nj} - x_{mj}| = \min\{|x_{nj} - x_{mj}|, 1\} < \epsilon$$

olur. Demek ki $(x_{nj})_n$ dizisi $\mathbb{R}$ Öklid uzayında bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla bir a_j gerçel sayısına yakınsar. Şimdi

$$a = (a_j)_j \in \mathbb{R}^\omega$$

olsun. $(x_n)_n$ dizisinin a'ya yakınsadığını gösterelim. Önsav 13.3'e göre $(x_n)_n$ dizisinin a'ya çarpım topolojisinde yakınsadığını göstermek yeterli. Teorem 6.6'ya göre, bunun doğru olması için gereken her şey var: $(x_n)_n$ dizisinin j'inci terimlerinden oluşan $(x_{nj})_n$ dizisi a'nın j'inci terimine yakınsıyor (yani noktasal yakınsama sözkonusu). İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Alıştırma 13.14. Sayılabilir sonsuzlukta metrik uzayın çarpım topolojisinin metrikleşebilir olduğunu kanıtlayın. (Kanıtı aynen Örnek 13.11'deki kanıt gibidir.)

13.4 Kapalı Kümeler

Metrik uzaylarda açık kümelerin açık yuvarların bileşimleri olduklarını biliyoruz. Ya kapalı kümeler, onlar neye tekabül ediyorlar?

Önce, bir (X, d) metrik uzayında, verilmiş bir $a \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ için,

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$$

türünden yazılan kümelerin kapalı olduklarına emin olalım. Nitekim eğer $b \notin \overline{B}(a, r)$ ise, b'yi içeren

$$B(b, d(a, b) - r)$$

açık yuvarıyla $\overline{B}(a, r)$'nin kesişimi boşkümedir. $\overline{B}(a, r)$ kümelerine **kapalı yuvar** diyebiliriz. Yuvar tanımına göre kapalı yuvarlar yuvar değildirler; bir karışıklık olmasın diye yuvarlara bazen – vurgulayarak – açık yuvar denir.

Öte yandan $B(a, r)$ yuvarının kapanışı illa $\overline{B}(a, r)$ olmak zorunda değildir. Nitekim X ayrık metrikle donatılmışsa ve $|X| > 1$ ise, $B(a, 1) = \{a\} = \overline{B}(a, 1/2)$ olur ve kapalı bir kümedir ama $\overline{B}(a, 1) = X$ olur.

Metrik uzaylarda kapalılık en iyi "yığılma noktası" kavramıyla betimlenir. Ta Bölüm 8.4'te tanımladığımız "yığılma noktası" kavramını anımsatalım: A, bir X topolojik uzayının bir altkümesi ve $x \in X$ olsun. Eğer x'i içeren her U açık kümesi için, U'da A'nın x'ten değişik bir elemanı varsa, o zaman x'e A'nın ***yığılma noktası*** adı verilir. Eğer X'in topolojisi bir metrik tarafından üretilmişse, her açık küme açık yuvarların bileşimi olduğundan, yığılma noktasının tanımındaki "açık küme"yi silip yerine "açık yuvar" koyabiliriz:

Önsav 13.5. *(X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*
a. *x, A'nın bir yığılma noktasıdır.*
b. *x'i içeren her açık yuvarın içinde A'da olan ama x'ten değişik bir nokta vardır.*
c. *Her $\epsilon > 0$ için, $B(x, \epsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ olur.*
d. *Her pozitif n doğal sayısı için, $B(x, 1/n) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ olur.*
e. *Terimleri A kümesinde olan ve birbirinden değişik olan x'e yakınsayan bir dizi vardır.*
f. *Terimleri $A \setminus \{x\}$ kümesinde olan x'e yakınsayan bir dizi vardır.*

Kanıt: (a $\Rightarrow$ b). Her açık yuvar bir açık kümedir.

(b $\Rightarrow$ c). $B(x, \epsilon)$, x'i içeren açık bir yuvardır.

(c $\Rightarrow$ d). $\epsilon = 1/n$ almak yeterli.

(d $\Rightarrow$ e). $x_0 \in A \setminus \{x\}$ herhangi bir eleman olsun. Tümevarımla,

$$0 < d(x_{n+1}, x) < d(x_n, x)/2$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_n \in A$ elemanları bulacağız. Bu elemanlardan oluşan dizinin terimleri elbette birbirinden farklıdır ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, yani $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olur. m doğal sayısı, $1/m < d(x_n, x)/2$ eşitsizliğini sağlasın. x_{n+1} elemanını, boş olmadığını bildiğimiz $B(x, 1/m) \cap A \setminus \{x\}$ kümesinden seçelim.

(e ⇒ f). Verilen dizinin en fazla bir terimi x'e eşit olabilir. O terimi atalım.

(f ⇒ a). $(x_n)_n$ varlığı söylenen bir dizi olsun. U, x'i içeren herhangi bir açık küme olsun. $B(x, \epsilon) \subseteq U$ olacak biçimde bir $\epsilon > 0$ seçelim (Önsav 10.3). $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olduğundan, belli bir göstergeçten sonra dizinin x_n terimleri $B(x, \epsilon)$ yuvarının içinde olurlar. Sadece biri yeter bize! □

Önsav 13.6. *X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Şu önermeler eşdeğerdir:*
a. $x \in \overline{A}$.
b. *Her $\epsilon > 0$ için $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.*
c. *Terimleri A'da olan ve x'e yakınsayan bir dizi vardır.*

Kanıt: (c ⇒ a). x, terimleri A'da olan bir dizinin limiti olsun. x'i içeren her açık küme, diziden terimler, dolayısıyla A'dan elemanlar içerir. Önsav 8.6'ya göre x, $\overline{A}$'dadır.

Şimdi X'in bir metrik uzay olduğunu varsayalım.

(a ⇒ b). Eğer bir $\epsilon > 0$ için $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$ olsaydı, o zaman $B(x, \epsilon) \subseteq A^c$ olurdu, demek ki $x \in B(x, \epsilon) \subseteq (A^c)^\circ = (\overline{A})^c$ olurdu (Önsav 8.5), yani x, $\overline{A}$'da olamazdı.

(b ⇒ c). Her $n > 0$ için $a_n \in B(x, 1/n) \cap A$ olsun. O zaman $d(x, a_n) < 1/n$ ve dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} d(x, a_n) = 0$$

ve $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ olur. □

Kapalı bir küme olmanın metrik uzaylarda bazı ayrıcalıkları vardır.

Önsav 13.7. *X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Terimleri A'da olan bir dizi yakınsaksa limiti $\overline{A}$ kapanışındadır. Eğer X metrikleşebilirse bunun tersi de doğrudur. Bir metrik uzayda, şu önermeler eşdeğerdir:*
a. *A kapalı.*
b. *A, terimleri A'dan olan yakınsak dizilerinin limitlerini içerir.*
c. *A, yığılma noktalarını içerir.*

Kanıt: x, terimleri A'da olan bir dizinin limiti olsun. x'i içeren her açık küme, diziden terimler, dolayısıyla A'dan elemanlar içerir. Önsav 13.6'ya göre x, $\overline{A}$'dadır.

Şimdi X'in bir metrik uzay olduğunu varsayalım ve $x \in \overline{A}$ olsun. $n > 0$ bir doğal sayı olsun. Önsav 8.5'e göre, $B(x, 1/n)$ yuvarı A ile kesişmek zorundadır.

Bu kesişimden bir x_n elemanı alalım.

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} 1/n = 0,$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

yani $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olur.

Son üç önermenin eşdeğer olduklarının kanıtı okura bırakılmıştır. $\square$

Alıştırma 13.15. Örnek 10.35'deki $(\mathbb{Q}, d)$ metriğini alalım. Bu uzayda açık yuvarların aynı zamanda kapalı olduklarını kanıtlayın. İpucu: Örnek 10.41. Bu topolojide açık olan ama kapalı olmayan bir altküme bulun.

Altuzay. Eğer (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ ise, o zaman $(A, d_{|A\times A})$ metrik uzayının ürettiği topoloji, X topolojik uzayından A altkümesine kısıtlanmış topolojidir. Kanıtı okura bırakıyoruz.

14. Metrik Uzaylarda Süreklilik

14.1 Süreklilik

Geçen bölümde her metriğin, tanımlandığı metrik uzay üzerine doğal olarak bir topoloji ürettiğini gördük. Anımsarsanız, topoloji, metriğin yuvarları tarafından üretilmişti. Aynı bölümde metrik uzaylardaki dizi yakınsaklığı kavramıyla topolojik uzaylardaki dizi yakınsaklığı kavramının örtüştüğünü gördük, aralarında bir fark yoktu. Bu bölümde, metrik uzayda "fonksiyonların sürekliliği" kavramlarını tanımlayıp, bu kavramın topolojik uzaylar için önceki kısımda tanımladığımız kavramlarla örtüştüğünü göreceğiz.

(X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca $a \in X$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ ve her $x \in X$ için,

$$d(a, x) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa, o zaman f fonksiyonuna a'da ***sürekli*** denir. Bu, x'i a'ya yeterince yakın seçersek, $f(x)$'i $f(a)$'ya istediğimiz kadar yaklaştırabiliriz anlamına gelir. Id_X özdeşlik fonksiyonu elbette her a noktasında süreklidir, bunun için δ'yi ϵ'a eşit almak yeterli. En doğal ve en çok kullanılan fonksiyonların hemen her noktada sürekli olmaları okuru şaşırtmamalı.

Yukardaki koşulun,

$$x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \epsilon)$$

koşuluna eşdeğer olduğuna dikkatinizi çekeriz. Bu da, elbette

$$f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \epsilon)$$

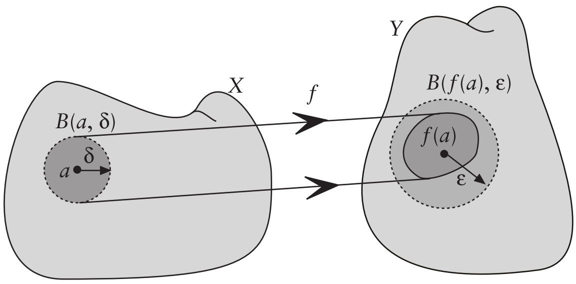
demektir, ve bu son koşul da

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

koşuluna denktir. Böylece bir çırpıda bir noktada sürekliliğin dört değişik tanımını bulduk.

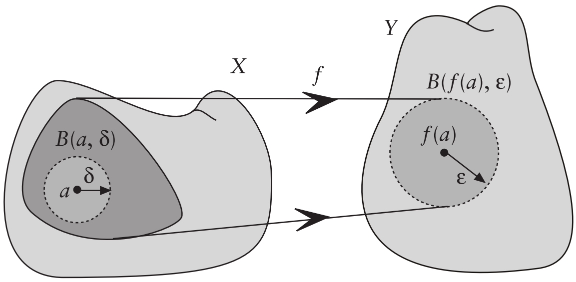
f, a'da sürekliyse

$\varepsilon > 0$ ne olursa olsun, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,



$x \in B(a, \delta)$ ise $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ olur,

yani $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ olur, bir başla deyişle...



$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ olur.

Bu, tek bir noktada sürekliliğin tanımı. Her noktada sürekli olan bir fonksiyona kısaca ***sürekli fonksiyon*** denir.

Alıştırmalar

14.1. Her izometri süreklidir elbette, ne de olsa izometriler için δ'yı ϵ'a eşit almak yeterlidir.

14.2. *Eğer (X, d) bir metrik uzaysa, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mesafe fonksiyonu süreklidir.*
Bu konuda Alıştırma 13.1'e de bakabilirsiniz.
Kanıt: Örnek 13.9'a göre $X \times X$ üzerine

$$d_1((x, y), (a, b)) = d(x, a) + d(y, b)$$

metriğini alabiliriz.
$(a, b) \in X \times X$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulmalıyız ki, her $(x, y) \in X \times X$ için, eğer $d_1((x, y), (a, b)) < \delta$ ise $|d(x, y) - d(a, b)| < \epsilon$ olsun.

$$\begin{aligned} |d_1(x, y) - d_1(a, b)| &\leq |d_1(x, y) - d_1(x, b)| + |d_1(x, b) - d_1(a, b)| \\ &= d(y, b) + d(x, a) = d_1((x, y), (a, b)) \end{aligned}$$

olduğundan $\delta = \epsilon$ almak yeterli. □

Topolojik uzaylarda da fonksiyonların sürekliliğinin tanımını görmüştük. Her metrik uzay bir topolojik uzay ürettiğinden, her iki sürekliliğin de aynı anlama gelip gelmediği sorusunu sorabiliriz. Yanıt olumludur, olması gerektiği üzere...

Teorem 14.1. *(X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin metrik uzaylar anlamında sürekli olmasıyla, metriklerin ürettiği topolojik uzaylar anlamında sürekli olması arasında bir fark yoktur, iki kavram örtüşür.*

Kanıt: Önce f'nin metrik uzaylar anlamında sürekli olduğunu varsayalım. $V \subseteq Y$, Y'nin bir açık kümesi olsun. $f^{-1}(V)$'nin açık olduğunu kanıtlayacağız. Bu amaçla $f^{-1}(V)$'den herhangi bir a elemanı alalım. a merkezli ve 0'dan büyük yarıçaplı bir yuvarın $f^{-1}(V)$'nin altkümesi olduğunu kanıtlayacağız. Böylece $f^{-1}(V)$ kümesinin Y'de açık olduğu kanıtlanmış olacak.

$f(a) \in V$ olduğundan ve V açık olduğundan, topolojinin tanımına göre, öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki, $B(f(a), \epsilon) \subseteq V$ olur. Fonksiyon her yerde olduğu gibi a'da da sürekli. Demek ki öyle bir $\delta > 0$ vardır ki,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur.

Şimdi de f'nin topolojik anlamda sürekli olduğunu varsayalım. X'ten herhangi bir a elemanı alalım. $\epsilon > 0$ herhangi bir eleman olsun. $B(f(a), \epsilon)$ açık bir küme olduğundan ve f sürekli olduğundan,

$$f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

kümesi X'in açık bir altkümesidir. Bu açık küme a'yı içerdiğinden, a merkezli ve 0'dan büyük yarıçaplı bir yuvar içerir. Demek ki bir $\delta > 0$ için,

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

olur, ki bu da f'nin a'da sürekliliği demektir. □

Benzer bir teoremi tek bir noktada süreklilik için de kanıtlayabiliriz.

Teorem 14.2. *(X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $a \in X$ olsun. f'nin metrik uzaylar anlamında a'da sürekli olmasıyla, metriklerin ürettiği topolojik uzaylar anlamında a'da sürekli olması arasında bir fark yoktur, her iki kavram örtüşür.*

Kanıt: Önce f'nin metrik uzaylar anlamında a'da sürekli olduğunu varsayalım. $f(a) \in V \subseteq Y$, $f(a)$'nın Y'de bir komşuluğu olsun. $f^{-1}(V)$'nin a'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlamalıyız. Komşuluğun tanımı gereği,

$$f(a) \in V' \subseteq V$$

ilişkilerini sağlayan bir V' açık kümesi vardır. Topolojinin tanımı gereği, öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki,

$$f(a) \in B(f(a), \epsilon) \subseteq V' \subseteq V$$

ilişkileri sağlanır. f metrik uzaylar anlamında sürekli olduğundan,

$$B(a,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. O zaman,

$$a \in B(a,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a),\epsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

olur ki bu da $f^{-1}(V)$'nin a'nın bir komşuluğu olduğunu kanıtlar.

Şimdi f'nin topolojik anlamda a'da sürekli olduğunu varsayalım. $\epsilon > 0$ olsun. $B(f(a),\epsilon)$ yuvarı, açık bir küme olduğundan $f(a)$'nın bir komşuluğudur. Demek ki $f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$ kümesi de a'nın bir komşuluğudur. Komşuluğun tanımı gereği,

$$a \in U \subseteq f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$$

ilişkilerini sağlayan X'in bir U açık altkümesi vardır. Topolojinin tanımı gereği,

$$B(a,\delta) \subseteq U$$

içindeliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. O zaman,

$$B(a,\delta) \subseteq U \subseteq f^{-1}(B(f(a),\epsilon))$$

olur, ki bu da kanıtlamak istediğimizdi. □

Demek ki Teorem 3.1 ve 3.2'de kanıtladığımız teoremler metrik uzaylar için de geçerlidir. Örneğin, sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir.

Topolojik bir uzayda sürekliliğin çeşitli tanımları verilebilir. Birkaçını daha önce görmüştük. Çok işe yarayanlardan biri de şudur:

Önsav 14.3. *X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $A \subseteq X$ için $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ koşuludur.*

Kanıt: f'nin sürekli olduğunu varsayalım. O zaman kapalı bir kümenin önimgesi kapalı olduğundan (Teorem 8.2),

$$f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$$

kapalı bir kümedir; ayrıca A'yı da içerir. Bu da

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right),$$

yani

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$$

içindeliğini verir.

Şimdi de koşulu varsayalım. B, Y'nin kapalı bir altkümesi olsun. Teorem 8.2'ye göre $f^{-1}(B)$'nin X'te kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$$A = f^{-1}(B)$$

olsun. Elbette $f(A) \subseteq B$. O zaman koşuldan dolayı

$$f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{B} = B$$

olur. Yani

$$\overline{f^{-1}(B)} = \overline{A} \subseteq f^{-1}(B)$$

ve dolayısıyla $f^{-1}(B)$ kapalıdır. □

[N4]'te $\mathbb{R}$ için kanıtladığımız teoremi şimdi genel olarak metrik uzaylar için kanıtlayabiliriz:

Teorem 14.4. *X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve x'e yakınsayan her $(x_n)_n$ dizisi için $(f(x_n))_n$ dizisi $f(x)$'e yakınsar. Eğer X metrik bir uzaysa, bunun tersi de doğrudur, yani bu özelliği sağlayan her fonksiyon süreklidir.*

Kanıt: İlk önerme Teorem 3.2'de kanıtlanmıştı. İkinci önermeye geçelim. X bir metrik uzay olsun. Bir önceki önsavı kullanıp eğer $A \subseteq X$ ise

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

içindeliğini kanıtlayacağız. $x \in \overline{A}$ olsun. O zaman Önsav 13.7'ye göre, A'da limiti x olan bir $(x_n)_n$ dizisi vardır. Varsayıma göre $(f(x_n))_n$ dizisi $f(x)$'e yakınsar. $f(x_n) \in f(A)$ olduğundan, gene Önsav 13.7'ye göre (ama bu kez metriğe gerek yok), $f(x) \in \overline{f(A)}$ olur. □

$C(X, Y)$, X'ten Y'ye giden sürekli fonksiyonların kümesini simgeler. Elbette $C(X, Y)$, $\prod_X Y$ kümesinin bir altkümesidir, ama $\prod_X Y$'yi çarpım topolojisiyle topolojik bir uzay olarak gördüğümüzde, $C(X, Y)$'nin hiçbir özelliği yoktur.

Eğer $Y = \mathbb{R}$ olarak alırsak, $C(X, \mathbb{R})$ üzerine toplama ve çarpma işlemlerini (nokta bazında, yani noktasal olarak) tanımlayabiliriz ya da $C(X, \mathbb{R})$ kümesinin bir elemanını bir r gerçel sayısıyla çarpabiliriz: Eğer f, $g \in C(X, \mathbb{R})$ ise, $f + g$, fg ve rf fonksiyonları, her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\\
(fg)(x) &= f(x)g(x),\\
(rf)(x) &= r \cdot f(x)
\end{aligned}$$

olarak tanımlayabiliriz. Tanımlanan bu üç fonksiyon da $C(X, \mathbb{R})$'dedir. Bunlar çok daha genel bir teoremden çıkar.

Teorem 14.5. *X ve Y iki topolojik uzay olsun. n bir doğal sayı olsun.*

$$\phi : Y^n = Y \times \ldots \times Y \to Y$$

sürekli bir fonksiyon olsun. Her $i = 1, \ldots, n$ için,

$$f_i : X \to Y$$

sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$x \mapsto \phi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

kuralıyla tanımlanmış X'ten Y'ye giden fonksiyon süreklidir.

Kanıt: Teorem 6.3'e göre, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ kuralıyla tanımlanmış X topolojik uzayından Y^n topolojik uzayına giden fonksiyon süreklidir. Dolayısıyla bu fonksiyonun ϕ ile bileşkesini alırsak sürekli bir fonksiyon elde ederiz. □

Sonuç 14.6. *$C(X, \mathbb{R})$, toplama, çarpma ve bir gerçel sayıyla çarpma işlemleri altında kapalıdır.*

Kanıt: Yukardaki teoremde $Y = \mathbb{R}$ ve $n = 2$ olsun ve $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\phi(x, y) = x + y$ ya da $\phi(x, y) = xy$ olarak tanımlansın. ϕ'nin sürekli olduğunu biliyoruz [N5]. □

(X, d) ve (Y, d') iki metrik uzay olsun. $C_b(X, Y)$, X'ten Y'ye giden sürekli ve sınırlı fonksiyonlar kümesi olsun. $C_b(X, Y)$ üzerine şu metriği koyabiliriz:

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Bunun özel bir durumu: $C_b(X, \mathbb{R})$ bir metrik uzaydır.

Alıştırmalar

14.3. Örnek 10.6 ve 10.10'da Öklid metriğiyle donatılmış $X_1 = \ldots = X_n = \mathbb{R}$ metrik uzaylarını alalım. $1 \le p \le \infty$ olsun. Her x, $y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\frac{d_p(x, y)}{n^{1/p}} \le d_\infty(x, y) \le d_p(x, y)$$

eşitsizliklerini kanıtlayın.

14.4. Yukardaki alıştırmadan, $1 \le p$, $q \le \infty$ için, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, d_p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, d_q)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu çıkarın.

14.5. Yukardaki alıştırmadan, $1 \le p$, $q \le \infty$ için, $(\mathbb{R}^n, d_p)$ ve $(\mathbb{R}^n, d_q)$ metrik uzaylarının gerdiği topolojilerin aynı olduklarını kanıtlayın.

14.6. $\mathbb{Q}$ üzerine p-sel metriği alalım (Örnek 10.35). $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$'den $\mathbb{Q}$'ye giden $f(x, y) = x + y$ ve $g(x, y) = xy$ fonksiyonlarının p-sel metrik için sürekli olduğunu kanıtlayın. ($\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ üzerinde çarpım topolojisi alınıyor tabii.) İpucu: Alıştırma 10.41. Buradan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ ise $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ ve $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$ olduğunu kanıtlayın.

Dikkat: Bir fonksiyonun a'da sürekli olup olmadığı sorusunun sorulabilmesi, dolayısıyla sorunun olumlu ya da olumsuz yanıtlanabilmesi için a'nın X'te olması gerekir. Lise öğretmenlerinin ve öğrencilerinin vazgeçilmez sorularından biri de $f(x) = 1/x$ fonksiyonunun 0'da sürekli olup olmadığıdır. Matematikçiler böyle bir soruyu anlamsız bulurlar, çünkü 0 tanım kümesinde değildir. Biraz daha ilginç ama aynı derecede gereksiz bir soru $g(x) = x^2/x$ formülüyle tanımlanmış fonksiyonun 0 noktasında sürekli olup olmadığıdır. Gene matematikçiler sorunun anlamsız olması gerektiğine karar vermişlerdir çünkü sadece tanım kümesinde olan a'lar için bir fonksiyonun sürekli olup olmadığı sorusu sorulabilir. Öte yandan bu son fonksiyon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinde x'e eşittir ve $h(x) = x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de tanımlanabilir, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinde g'ye eşittir ve 0'da süreklidir. Yani $g(0) = 0$ tanımını yaparak g'yi her yerde sürekli hale getirebiliriz. Ama ağzımızla kuş, burnumuzla balık tutsak, f fonksiyonunu her yerde sürekli hale getiremeyiz.

14.2 Dizisel Süreklilik ve Süreklilik

Teorem 3.2'de sürekli bir fonksiyonun dizi limitiyle uyumlu olduğunu gösterdik[1], yani her $(x_n)_n$ dizisi için, eğer x, $(x_n)_n$ dizisinin bir limitiyse, $f(x)$, $(f(x_n))_n$ dizisinin bir limitidir[2]. Bu özelliği sağlayan fonksiyonlara ***dizisel sürekli fonksiyon*** adı verilir. Demek ki her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden ve Öklid topolojisinde dizisel sürekli olan her fonksiyonun sürekli olduğunu da [N5]'ten biliyoruz. Ama her topolojik uzay ve her fonksiyon için dizisel süreklilik sürekliliği gerektirmez. Örnek 3.9'da buna bir örnek verdik. Öte yandan Teorem 14.4'te tanım kümesi bir metrik uzayı olduğunda dizisel sürekliliğin sürekliliği gerektirdiğini kanıtladık. Bu bölümde bu sonucu genelleştireceğiz. Önce bir iki tanım.

Tanım. *X bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için, x'i içeren öyle sayılabilir sayıda $(U_n)_n$ açık kümesi olsun ki, x'i içeren her açık küme bu U_n'lerden birini içersin. Bu durumda X'e **birinci sayılabilir** denir. Tanımda verilen $(U_n)_n$ açık küme ailesine de x'in **yerel tabanı** denir.*

Önsav 14.7. *Bir metrik uzay birinci sayılabilir bir topolojik uzaydır.*

Kanıt: $x \in X$ ise, $(B(x,q))_{q \in \mathbb{Q}}$ ailesi, x'in sayılabilir bir yerel tabanıdır. □

Teorem 14.8. *X ve Y iki topolojik uzay olsun. X birinci sayılabilir olsun (örneğin bir metrik uzay olabilir). Dizisel sürekli her $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir.*

---

[1] Bu altbölümde görülen kavramlar ve sonuçlar her ne kadar temel olsa da bu kitapta kullanılmayacaktır.

[2] Ayrıca eğer uzaylarda limitler biricikse, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ eşitliğini gösterdik.

Kanıt: Tam tersine, f'nin sürekli olmadığını varsayalım. $x \in X$, f'nin sürekli olmadığı bir nokta olsun. V, $f(x)$'i içeren öyle bir açık küme olsun ki, $f^{-1}(V)$, x'i içeren bir açık küme içermesin. $(U_n)_n$, x'in bir yerel tabanı olsun. Gerekirse

$$U_0 \supseteq U_0 \cap U_1 \supseteq U_0 \cap U_1 \cap U_2, \ldots$$

açık kümelerini alarak $(U_n)_n$ yerel tabanının küçüldüğünü varsayabiliriz. Her n için $f(U_n) \not\subseteq V$ olduğundan, $f(x_n)$'nin V'de olmadığı bir $x_n \in U_n$ bulabiliriz. Dolayısıyla $f(x_n)_n$ dizisi $f(x)$'e yakınsayamaz çünkü V, $f(x)$'i içeren bir açık küme ama $f(x_n)$'lerin hiçbirini içermiyor. Öte yandan $(x_n)_n$ dizisi x'e yakınsar. Nitekim U, x'in bir komşuluğuysa o zaman bir N için $U_N \subseteq U$ olur. Dolayısıyla $n \geq N$ için $x_n \in U_n \subseteq U_N \subseteq U$ olur. Bu da dizisel süreklilikle çelişir. □

14.3 Metrik Uzayların Normalliği

(X, d) bir metrik uzay olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq X$, boş olmayan iki altküme olsun. A ve B arasındaki ***mesafe***,

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $A \cap B \neq \emptyset$ ise, $d(A, B) = 0$ olur elbette. Ama bunun tersi yanlıştır. Örneğin, $X = \mathbb{R}$ ise $d((0, 1), (1, 2)) = 0$ olur.

$$\begin{aligned} d(A, B) &\geq 0, \\ d(A, A) &= 0, \\ d(A, B) &= d(B, A), \\ d(A, B) &\leq d(A, C) + d(C, B) \end{aligned}$$

özelliklerinin kanıtlanması kolaydır. Ama

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

önermesi yanlış olduğundan, d, $\wp(X) \setminus \{\emptyset\}$ üzerinde bir mesafe değildir. d, ancak $\wp(X)$'in bazı altkümeleri üzerine bir mesafe olabilir. (X'in birbirinden "uzak" altkümelerinden oluşan bir küme üzerinde örneğin.)

B'yi bir $x \in X$ için $B = \{x\}$ alırsak, bir noktanın boş olmayan bir ***altkümeye mesafesini*** tanımlamış oluruz:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Bu kavramın bazı özelliklerini sıralayalım:

- Eğer $\emptyset \neq A \subseteq B$ ise, $d(x, A) \geq d(x, B)$ olur elbette.

• Eğer $x \in A$ ise $d(x, A) = 0$ olur. Ama bunun tersi yanlıştır: $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ ise, 1, A'da değildir ama A'ya mesafesi 0'dır. Öte yandan eğer $A \neq \emptyset$ kapalıysa,

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$$

eşdeğerliliği geçerlidir. Nitekim, eğer $x \notin A$ ise, A^c açık olduğundan, x'i içeren ve A'yı kesmeyen $\epsilon > 0$ yarıçaplı açık bir yuvar vardır, dolayısıyla

$$d(x, A) \geq \epsilon > 0$$

olur.

• Öte yandan, A ve B kapalı ve ayrık olsalar da $d(A, B) = 0$ olabilir. Örneğin, $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve

$$\begin{aligned} A &= \{(x, 1/x) : x > 0\}, \\ B &= \{(x, -1/x) : x < 0\} \end{aligned}$$

ise, A ve B kapalı ve ayrık kümelerdir ama $d(A, B) = 0$ olur.

$X = \mathbb{R}$'de bir örnek verebiliriz: $A = \mathbb{N}$ ve $B = \{n + 1/n : n = 2, 3, \ldots\}$ ise, A ve B Öklid topolojisinde kapalı kümelerdir ve ayrıca ayrıktırlar ama $d(A, B) = 0$ olur.

Buna karşın $\mathbb{R}^n$'de, mesafeleri 0 olan ayrık, sınırlı ve kapalı A ve B altkümeleri bulamayız; hatta sadece birini bile sınırlı yapamayız. Bunu ilerde Sonuç 17.4 olarak kanıtlayacağız.

• Eğer x, $y \in X$ ve $a \in A$ ise,

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

olduğundan

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

olur. Demek ki

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf_{a \in A} d(y, a) = d(y, A)$$

ve

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

olur. Simetriden dolayı aynı şekilde

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$$

olur. Demek ki,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

olur. Bu da

$$x \mapsto d(x, A)$$

kuralıyla tanımlanmış X'ten $\mathbb{R}$'ye giden bir fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir. Bu bulduklarımızı not edelim, ilerde sık sık gerekecek:

Teorem 14.9. *(X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ herhangi bir altküme olsun. O zaman*

$$x \mapsto d(x, A) \tag{1}$$

kuralıyla tanımlanmış X'ten $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyon süreklidir. Bunun özel bir durumu olarak, $a \in X$ için $A = \{a\}$ alırsak, $x \mapsto d(x, a)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu görürüz. Eğer $A \neq 0$ ise, A'nın kapalı olması için gerek ve yeter koşul

$$d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$$

koşuludur. □

Bu mesafe kavramını kullanarak çok önemli bir teorem kanıtlayabiliriz.

Teorem 14.10. *Metrik uzaylar normaldir, yani eğer (X, d) bir metrik uzaysa ve A ve B, X'in iki kapalı ve ayrık altkümesiyse, o zaman, sırasıyla A ve B'yi içeren ayrık U ve V açık altkümeleri vardır.*

Kanıt: Eğer A ya da B boşkümeyse, sorun yok. İkisinin de boşküme olmadıklarını varsayalım. $a \in A$ ve $b \in B$ için,

$$\epsilon_a = \frac{d(a, B)}{2} \text{ ve } \epsilon_b = \frac{d(b, A)}{2}$$

olsun. Ve

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon_a) \text{ ve } V = \bigcup_{b \in B} B(b, \epsilon_b)$$

olsun. O zaman U ve V açıktırlar ve

$$A \subseteq U \text{ ve } B \subseteq V$$

olur. Ve ayrıca U ve V kesişmezler. Çünkü eğer kesişimde bir x varsa, diyelim $a \in A$ ve $b \in B$ için,

$$x \in B(a, \epsilon_a) \cap B(b, \epsilon_b)$$

ise, o zaman, $\epsilon_b \leq \epsilon_a$ varsayımını yaparak,

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \epsilon_a + \epsilon_b \leq 2\epsilon_a = d(a, B),$$

yani $d(a, b) < d(a, B)$ elde ederiz ki bu da bir çelişkidir. $\epsilon_a \leq \epsilon_b$ varsayımı da benzer şekilde bir çelişki verir.

İkinci Kanıt[3]**:** $f(x) = d(x, A) - d(x, B)$ formülüyle tanımlanmış $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $V = f^{-1}(0, \infty)$ ve $U = f^{-1}(-\infty, 0)$ kümeleri istenen özelliktedir. □

[3]Literatürde bilinen bu zarif kanıtı sunan Zafer Ercan'a teşekkürler.

15. Metrik Uzayların Tamlaması

15.1 Metrik Uzay Tamlaması

Bir Cauchy dizisinin, yakınsamak için elinden geleni ardına koymayan bir dizi olduğunu bir zamanlar, Cauchy dizilerini konu ettiğimizde söylemiştik. Bir Cauchy dizisi yakınsamak için elinden geleni yapar belki ama, eğer yakınsaması gereken nokta uzayda yoksa, ne yaparsa yapsın yakınsayamaz.

Örneğin, $(1/n)_{n=1,2,3,\ldots}$ dizisi, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ metrik uzayında yakınsak değildir, çünkü yakınsaması gereken 0 noktası uzayda değildir (0'ın olması gerektiği yerde bir delik vardır!); bu eksikliğin sorumlusu da herhalde dizi değildir.

Öte yandan $((-1)^n)$ dizisi, $\mathbb{R}$ üzerine konulan metrik ne olursa olsun yakınsayamaz; bu örnekte metrik uzayın yapabileceği bir şey yoktur, dizinin kendisi defoludur.

Bu bölümde, $(1/n)_{n=1,2,3,\ldots}$ dizisi gibi, yakınsamaya meyilli olan ama uzaydaki delikler yüzünden yakınsaması gereken noktaya yakınsayamayan dizilerin bulunduğu metrik uzaylarda deliklerinin tıkanmasını konu edeceğiz.

Yakınsamayan Cauchy dizilerine sahip olan bir metrik uzayını, "delikleri olan" bir uzay olarak yorumlamak çok yanlış bir yorum olmaz. Bu delikleri tıkarsak, muhtemelen, deliksiz, yani her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu bir metrik uzay elde ederiz; nitekim bu bölümde göreceğimiz üzere öyle de olur. Ana konumuza başlamadan önce ilk olarak, kesirli sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ile gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'yi karşılaştıralım:

a. Her şeyden önce, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin bir altuzayıdır.

b. Sonra, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin içinde yoğundur.

c. Ve son olarak $\mathbb{R}$ tamdır.

d. Ve en son olarak - bunu kanıtlamadık henüz, ama doğruluğu bu bölümden anlaşılacak (diye umuyoruz...): $\mathbb{R}$, yukardaki özellikleri sağlayan metrik uzayların bir anlamda en küçüğüdür. Yani $\mathbb{R}$, her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu ve $\mathbb{Q}$'yü altuzay olarak içeren her metrik uzayının içine bir izometriyle gömülür, ve üstelik tek bir biçimde gömülür; yani tam metrik uzaylarda $\mathbb{Q}$'nün bir kopyası varsa zorunlu olarak $\mathbb{R}$'nin de bir kopyası vardır.

Bir de $\mathbb{R}$'nin $\mathbb{Q}$'den hareketle nasıl inşa edildiğini anımsayalım [N2]. En azından anımsayanlar anımsasınlar, anımsamayanlar okumaya devam etsinler. $\mathbb{Q}$'den hareketle nasıl $\mathbb{R}$'yi elde etmişsek, $\mathbb{Q}$ için yaptığımız benzer şeyi herhangi bir (X, d) metrik uzayı için de yapabiliriz. Açıklayalım:

(X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. X'in her Cauchy dizisinin bir limiti olmayabilir, yani X metrik uzayı tam olmayabilir. Öyle bir (Y, e) metrik uzayı inşa edeceğiz ki,

1. (X, d), (Y, e)'nin bir altuzayı olacak, yani hem $X \subseteq Y$ olacak, hem de her x_1, $x_2 \in X$ için

$$d(x_1, x_2) = e(x_1, x_2)$$

eşitliği geçerli olacak.

2. X, Y'nin yoğun bir altuzayı olacak. Yani her $y \in Y$ ve her $\epsilon > 0$ için, $e(y, x) < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $x \in X$ noktası olacak.

3. Y tam bir uzay olacak, yani Y'nin her Cauchy dizisinin gene Y'de bir limiti olacak.

Ayrıca, böyle bir Y metrik uzayının bir anlamda biricik olduğunu, daha doğru ve daha matematiksel bir deyişle bu özellikleri sağlayan herhangi iki metrik uzayın izometrik olduklarını, üstelik bu izometrinin X üzerine özdeşlik fonksiyonu olacak biçimde alınabileceğini kanıtlayacağız.

Bu üç özelliği sağlayan bir Y metrik uzayına X'in ***tamlaması*** adı verilir.

Not: Eğer Y, X metrik uzayının bir tamlamasıysa ve $f : Z \longrightarrow X$ örten bir izometriyse, o zaman Z ile X'i özdeşleştirip, Y'nin Z'nin bir tamlaması olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 15.1. i. *Her metrik uzayın bir tamlaması vardır.*
ii. *Eğer Y ve Z metrik uzayları X'in birer tamlamasıysa, her $x \in X$ için $\phi(x) = x$ özelliğini sağlayan bir ve bir tek $\phi : Y \to Z$ izometrisi vardır ve bu izometri örtendir.*
iii. *Eğer Y, X'in bir tamlamasıysa, Z herhangi bir tam metrik uzaysa ve*

$$\phi : X \times \ldots \times X \to Z$$

herhangi bir sürekli fonksiyonsa, o zaman ϕ fonksiyonu sürekli bir

$$\psi : Y \times \ldots \times Y \to Z$$

fonksiyonuna en fazla bir biçimde genişletilebilir.

Kanıtın Planı: Teoremin kanıtı oldukça uzun sürecek ama her şey son derece doğal seyredecek. Çoğu zaman yaptığımız gibi, birinci aşamada Y'yi, X'i altküme olarak içerecek biçimde inşa etmeyeceğiz. Başlangıçta X'ten Y'ye giden bir izometri (yani bir metrik uzayı gömmesi) bulacağız sadece. Bu izometriyi kullanarak X'i Y'nin bir altkümesiyle özdeşleştireceğiz ve böylece Y'yi hafifçe değiştirerek $X \subseteq Y$ içindeliğini elde edeceğiz [N2].

İlk Yanlış Deneme. X'in yakınsak olmayan her Cauchy dizisi için, Y, bu Cauchy dizisinin yakınsadığı bir nokta içermeli. Bu düşünce Y'nin inşası için ilk kaba düşünceyi verir: Y, X'in Cauchy dizileri kümesi olsun! Amacımız X'in bir $(x_n)_n$ Cauchy dizisinin Y'nin $(x_n)_n$ elemanına yakınsamasını sağlamak! (Bu konuyu ilk defa gören biri için paragrafın gerisini anlamak zor olabilir. Bu okura okumaya devam etmesini ve daha sonra bu satırlara geri dönmesini öneririz.) X'i de Y'nin içine sabit diziler olarak gömelim, yani X'in bir x elemanını, her terimi x'e eşit olan $s(x) = (x)_n \in Y$ sabit dizisine gönderelim. Y üzerine öyle bir e metriği koyalım ki s bir izometri olsun. Zaten böyle bir metrik varsa biriciktir ve

$$e((x_n)_n, (y_n)_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

olarak tanımlanmak zorundadır. Sonra da X'in bir x elemanını Y'nin $s(x)$ elemanıyla özdeşleştirelim... Ve son olarak Y'nin istenen özellikleri sağladığını umalım; örneğin terimleri X'te olan bir $(x_n)_n$ Cauchy dizisinin Y'nin $(x_n)_n$ elemanına yakınsayacağını umalım.

Ancak bu zekice yaklaşım doğru sonucu vermez, çünkü bu yaklaşımla, X'in, aynı noktaya yakınsamaya meyilli iki değişik Cauchy dizisinin iki değişik limiti olur. Mesela $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise, o zaman Y'de $(1/n)_n$ ve $(1/n^2)_n$ Cauchy dizilerinin iki değişik limiti olur!

Doğru Fikir. Bu yüzden Cauchy dizileri kümesini, $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ Cauchy dizileri için

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \text{ ve } y \text{ dizileri aynı noktaya yakınsamaya meyilli}$$

türünden bir denklik ilişkisine bölmeliyiz. Tabii bunu yapmadan önce "aynı noktaya yakınsamaya meyilliler" terimini matematiksel olarak ifade edebilmeliyiz. Bu da oldukça kolay: $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ Cauchy dizileri için, $\equiv$ ilişkisini,

$$x \equiv y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

olarak tanımlayalım. Kanıtın bu aşamasında bu ilişkinin gerçekten bir denklik ilişkisi olduğu kanıtlanmalı elbette. Bu da pek zor değildir.

Eğer $C(X)$, X'in Cauchy dizileri kümesiyse ve $\equiv$, yukarda tanımlanan denklik ilişkisiyse,

$$Y = C(X)/\equiv$$

olsun. Eğer $x = (x_n)_n$ bir Cauchy dizisiyse, x'in sınıfını $[x]$ olarak gösterelim. Y şimdilik sadece bir küme. Y üzerine bir metrik uzayı yapısı tanımlamalıyız.

Bunu da şöyle yapalım:

$$e([x],[y]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

olsun. Ama daha önce bunun **iyi bir tanım** olduğunu, yani her x, y, x', y' Cauchy dizileri için, öncelikle

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

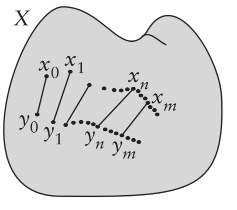
limitinin olduğunu ve ayrıca eğer

$$x \equiv y \text{ ve } x' \equiv y'$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$$

eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlamalıyız.



$e(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

Ardından da (Y, e) çiftinin bir metrik uzay olduğunu kanıtlamalıyız.

Bunlar yapıldıktan sonra X'i Y'nin içine gömmeli. Bu gömmeyi şöyle yapacağız (başka da bir yolu yoktur!): Eğer $x \in X$ ise $s(x)$, sabit x dizisi olsun. O zaman

$$i(x) = [s(x)]$$

tanımını yapalım. Bu bir izometridir, yani

$$i : X \to Y$$

fonksiyonu, her x, $x' \in X$ için,

$$d(x, x') = e(i(x), i(x'))$$

eşitliğini sağlar. Bu izometriyi kullanarak, $x \in X$ için, Y'nin $[s(x)]$ elemanıyla x'i özdeşleştirelim [N1], yani bundan böyle $[s(x)]$ yerine x yazalım. Böylece $X \subseteq Y$ içindeliğini elde etmiş oluruz. Y'yi bu plana uyarak inşa ettikten sonra teoremin geri kalan kısmını kanıtlayacağız.

Planımızı yeterince açıkladık. Şimdi ayrıntılara geçelim.

Teorem 15.1.i'in Kanıtı: $C(X)$, X'in Cauchy dizileri kümesi olsun. $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in C(X)$ için, $\equiv$ ilişkisini,

$$x \equiv y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

olarak tanımlayalım ve bu ilişkiyi sağlayan Cauchy dizilerine ***birbirine denk diziler*** diyelim. (Bu aşamada Alıştırma 12.5'e bir göz atmakta yarar olabilir.)

Sav 1. $\equiv$ *ilişkisi* $C(X)$ *üzerine bir denklik ilişkisidir.*
Kanıt: İlişkinin yansımalı ve simetrik olduğu çok bariz. Eğer

$$x = (x_n)_n,\ y = (y_n)_n,\ z = (z_n)_n \in C(X)$$

ise, $x \equiv y$ ve $y \equiv z$ ilişkilerini varsayıp $x \equiv z$ ilişkisini kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} 0 \le \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) &\le \lim_{n\to\infty} (d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Demek ki $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) = 0$ ve $x \equiv z$. □

$Y = C(X)/\equiv$ tanımını yapalım ve eğer x bir Cauchy dizisiyse, x'in denklik sınıfını $[x]$ olarak gösterelim:

Sav 2. *Eğer* $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in C(X)$ *ise* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ *limiti vardır.*
Kanıt: $\mathbb{R}$ metrik uzayı tam olduğundan, yani her Cauchy dizisi yakınsadığından $(d(x_n, y_n))_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterli. Şu basit hesabı yapalım:

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

eşitsizliğinden,

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \le d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

çıkar. n ile m'nin rollerini değiştirirsek,

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \le d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m)$$

buluruz. Bu son iki eşitsizliklerde sol taraflar birbirinin toplamsal tersi, sağ taraflar ise eşit. Demek ki,

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \le d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m)$$

olur. Bu eşitsizlikten $(d(x_n, y_n))_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu kolaylıkla çıkar. □

Yukardaki sava göre, $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in C(X)$ ise

$$e(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

tanımını yapabiliriz. Ama biz e'yi $C(X)$ üzerinde değil, daha ziyade $Y = C(X)/\equiv$ üzerine tanımlamak istiyoruz, yani

$$e([x], [y]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

tanımını yapmak istiyoruz. Bu tanıma hakkımız olduğunu kanıtlamak için şu sava ihtiyacımız var:

Sav 3. *Eğer* $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(x'_n)_n$, $(y'_n)_n \in C(X)$ *ise ve* $x \equiv x'$ *ve* $y \equiv y'$ *ise o zaman*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$$

olur.

Kanıt: Aynen yukardaki savın kanıtında olduğu gibi

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \le d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Sağ taraf 0'a yakınsadığından, sol taraf da mecburen 0'a yakınsar. □

Bu sav sayesinde, x, $y \in C(X)$ için,

$$e([x], [y]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

tanımını yapabiliriz.

Sav 4. (Y, e) *bir metrik uzayıdır.*

Kanıt: e'nin tanımından, (X, d)'nin bir metrik uzay olmasından ve limitin eşitsizliği koruma özelliğinden hemen çıkar. Okura basit bir alıştırma olarak bırakılmıştır. □

Sav 5. *X'in bir x elemanı için, $s(x)$, sabit x dizisi olsun. O zaman, $x \mapsto [s(x)]$ kuralıyla tanımlanan fonksiyonla, X, izometrik olarak Y metrik uzayının içine gömülür.*

Kanıt: Her n göstergeci ve her $x \in X$ için, $s(x)_n = x$ olsun.

$$s(x) = (s(x)_n)_n = (x)_n$$

sabit x dizisidir. Şimdi her x, $y \in X$ için,

$$e([s(x)], [s(y)]) = \lim_{n\to\infty} d(s(x)_n, s(y)_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

olur. Demek ki

$$x \mapsto [s(x)]$$

kuralıyla tanımlanmış fonksiyon X'ten Y'ye giden bir izometridir. Her izometri gibi bu fonksiyon da birebirdir. □

Yukardaki fonksiyona i diyelim: $i(x) = [s(x)]$.

Sav 6. *$i(X)$, Y'de yoğundur.*
Kanıt: $\alpha \in Y$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Bir $a = (a_n)_n \in C(X)$ Cauchy dizisi için $\alpha = [(a_n)_n]$ olsun. $(a_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, öyle bir N vardır ki, her n, $m > N$ için $d(a_n, a_m) < \epsilon$ olur. Şimdi $e(\alpha, i(a_{N+1}))$ mesafesini hesaplayalım:

$$e(\alpha, i(a_{N+1})) = e([(a_n)_n], [s(a_{N+1})_n]) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{N+1}) \leq \epsilon$$

olur çünkü $n > N$ için $d(a_n, a_{N+1}) < \epsilon$ eşitsizliği geçerlidir. □

Zamanı gelince Y'de her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayacağız. Şimdilik en azından Y'nin bazı Cauchy dizilerinin yakınsak olduğunu kanıtlayabiliriz.

Sav 7. *$x = (x_n)_n$, X'in bir Cauchy dizisi olsun. O zaman*

$$\lim_{n\to\infty} i(x_n) = [x]$$

olur.
Kanıt: Bakalım $e(i(x_n), [x])$ sayısını istediğimiz kadar küçültebiliyor muyuz? Her bir $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olan

$$e(i(x_n), [x]) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m)$$

eşitliğinden dolayı, yeterince büyük m sayıları için

$$|e(i(x_n), [x]) - d(x_n, x_m)|$$

sayısını dilediğimiz kadar küçültebiliriz. Ama $x = (x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olduğundan, m'yi gerekirse daha da büyülterek ve $m < n$ seçerek $d(x_n, x_m)$ sayısını istediğimiz kadar küçük seçebiliriz. Böylece $e(i(x_m), [x])$ sayısını dilediğimiz kadar küçültebileceğimizi görürüz. Biçimsel kanıtı okura bırakıyoruz. □

Şimdi Y'nin her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayalım.

Sav 8. *Y tamdır.*
Kanıt: $(\alpha_n)_n$, Y'den bir Cauchy dizisi olsun. Sav 6'ya göre, her $n > 0$ için,

$$e(\alpha_n, i(x_n)) < 1/n$$

eşitsizliğini sağlayan bir $x_n \in X$ vardır. Önsav 12.6'ya göre $(i(x_n))_n$ dizisi Y'de bir Cauchy dizisidir. Sav 5'e göre $(x_n)_n$ dizisi X'te bir Cauchy dizisidir.

$$x = (x_n)_n$$

olsun. Sav 7'ye göre,

$$\lim_{n\to\infty} i(x_n) = [x]$$

dir. Gene Önsav 12.6'ya göre $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = [x]$ olur. □

Teoremin birinci kısmı böylece kanıtlanmış oldu. İkinci kısmına geçmeden önce başka durumlarda gerekecek birkaç önsav kanıtlayalım:

Önsav 15.2. *Y bir metrik uzay ve X, Y'nin yoğun bir altuzayı olsun. O zaman Y'nin her elemanı, terimleri X'te olan bir dizinin limitidir.*

Kanıt: $y \in Y$ olsun. Her $n > 0$ doğal sayı için, $x_n \in X$,

$$d(x_n, y) \leq 1/n$$

eşitsizliğini sağlayan bir eleman olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$ olduğundan, $(x_n)_n$ dizisinin limiti y'dir. □

Önsav 15.3. *X bir metrik uzay olsun. x, $y \in X$ ve $(x_n)_n$ ve $(y_n)_n$ limitleri sırasıyla x ve y olan iki dizi olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$ olur.*

Kanıt: Şu basit hesabı yapalım:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

eşitsizliğinden,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \tag{1}$$

çıkar. Öte yandan

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$

eşitsizliğinden,

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) + d(y_n, y) \tag{2}$$

çıkar. (1) ve (2) eşitsizliklerinden

$$|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq d(x, x_n) + d(y_n, y)$$

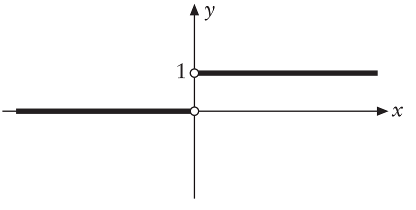
eşitsizliği bulunur. Her iki tarafın da limitini alırsak istediğimizi kanıtlamış oluruz. □

Dikkat: Y ve Z birer metrik uzayı olsun. X, Y'nin yoğun bir altkümesi olsun, yani $\overline{X} = Y$ olsun. Z'nin de tam olduğunu varsaysak bile, her $f : X \to Z$ sürekli fonksiyonunun bir $g : Y \to Z$ sürekli fonksiyonuna genişletilebileceği doğru değildir ama Önsav 8.9'a göre genişletilebilirse tek bir biçimde genişletilir.

Örnek 15.1. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Y = Z = \mathbb{R}$ ve

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x > 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. O zaman f sürekli bir fonksiyondur ama sürekli bir biçimde $\mathbb{R}$'ye genişletilemez.



Bu örnekteki sorun Cauchy dizilerinin f fonksiyonu altında Cauchy dizilerine gitmemeleridir. Örneğin $((-1)^n/n)_n$ dizisi X'in (yakınsak olmayan) bir Cauchy dizisidir ama imgesi olan $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ dizisi Cauchy değildir.

Teorem 15.1.ii'nin Kanıtı: (Y, e) ve (Z, f) metrik uzayları (X, d) metrik uzayının birer tamlaması olsunlar. X, hem Y'nin hem de Z'nin yoğun bir altuzayıdır. $y \in Y$ olsun. Önsav 15.2'ye göre, y, terimleri X'te olan bir dizinin limitidir. Bu diziye $(x_n)_n$ diyelim. $(x_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla $(x_n)_n$ dizisi Z metrik uzayında da bir elemana yakınsar; diyelim z'ye. Karışıklık olmasın diye,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Y}{=} y \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Z}{=} z$$

yazacağız. $\phi(y) = z$ formülüyle tanımlanmış fonksiyondan söz etmek istiyoruz ama önce

$$\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Y}{=} \lim_{n\to\infty} x'_n$$

eşitliği geçerliyse

$$\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Z}{=} \lim_{n\to\infty} x'_n$$

eşitliğinin de geçerli olduğunu kanıtlamalıyız. Gerçekten de, eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Y}{=} \lim_{n\to\infty} x'_n$$

eşitliği geçerliyse, elbette

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$$

eşitliği de geçerlidir, dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Z}{=} \lim_{n\to\infty} x'_n$$

eşitliği de geçerlidir. Böylece, $\phi : Y \to Z$ fonksiyonunu $\phi(y) = z$ formülüyle tanımlayabileceğimizi göstermiş olduk.

Şimdi ϕ'nin bir izometri olduğunu kanıtlayalım. y, $y' \in Y$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Y}{=} y \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x'_n \stackrel{Y}{=} y'$$

eşitliklerini sağlayan ve terimleri X'te olan iki $(x_n)_n$ ve $(x'_n)_n$ dizisi bulalım. $\phi(y) = z$ ve $\phi(y') = z'$ olsun. O zaman, ϕ'nin tanımı gereği,

$$\lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{Z}{=} z \text{ ve } \lim_{n\to\infty} x'_n \stackrel{Z}{=} z'$$

eşitlikleri geçerlidir. Önsav 15.3'ü iki kez uygularsak,

$$f(z, z') = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = e(y, y')$$

buluruz. Böylece ϕ'nin bir izometri olduğu çıkar.

Eğer $y \in X$ ise, $(x_n)_n$ dizisini sabit x dizisi olarak alırsak $\phi(x) = x$ eşitliğini görürüz.

Şimdi ϕ'nin örten olduğunu gösterelim. Bunun kanıtı ϕ'nin varlığının kanıtı gibidir: $z \in Z$ olsun. Yukardaki önsava göre, z, terimleri X'te olan bir dizinin limitidir. Bu diziye $(x_n)_n$ diyelim. $(x_n)_n$ dizisi yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir; dolayısıyla Y metrik uzayında bir elemana yakınsar. Diyelim y'ye yakınsar. Elbette $\phi(y) = z$ olur.

ϕ'nin biricikliği, Önsav 8.9'un bir sonucudur. □

Teorem 15.1.iii'ün Kanıtı: $X \times \ldots \times X$ metrik uzayının $Y \times \ldots \times Y$ metrik uzayında yoğun olduğunu gösterirsek, sonuç Önsav 8.9'dan çıkar. Yoğunluğu da Önsav 8.12.iii'ten biliyoruz. □

15.2 Bir Tamlama Örneği: p-sel Tamsayılar Halkası

Bir önceki altbölümü iyi anlayan okur, bir metrik uzayının tamlamasıyla pratikte çalışmanın ne kadar zor olduğunu görmüş olmalı. Tamlamanın her elemanı, orijinal uzayın bir Cauchy dizisinin sınıfı, yani bir Cauchy dizisi kümesi. Bunlarla çalışmak hiç de kolay değildir.

Öte yandan $\mathbb{R}$ de bir metrik uzayın tamlaması ($\mathbb{Q}$'nün tamlaması) ama $\mathbb{R}$ ile çalışmak o kadar da zor değil. Örneğin $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sayısının 3,14 sayısından küçük mü yoksa büyük mü olduğunu oldukça kolay bir biçimde anlayabiliriz. Demek ki bazı durumlarda tamlamayla çalışmak o kadar da zor değil.

$\mathbb{R}$'de olan bitene bakalım. $\mathbb{R}$'yi inşa ettikten sonra [N2], örneğin π sayısını, (henüz tanımlanmamış) π sayısına yakınsayacak olan ve terimleri kesirli sayılar olan Cauchy dizilerinin kümesi olarak tanımlamıştık. Ama

$$3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}141,\ 3{,}1415,\ 3{,}141,\ 3{,}14159,\ \ldots$$

dizisi de aynen böyle bir dizidir. π'ye yakınsayan ve terimleri kesirli sayılar olan sonsuz sayıda Cauchy dizisi vardır; sunduğumuz bu dizi bunlardan sadece biridir, ama çok özel biridir. π sayısını bir Cauchy dizisi kümesi olarak tanımlamak yerine, bu özel dizinin sınıfı olarak, hatta bu özel diziye eşit olarak alabiliriz. Bu özel diziyi de

$$3{,}14159\ldots$$

olarak yazmak doğru bir karardır. Böylece gerçel sayılarla pratikte çok daha basit bir biçimde toplayıp çarpabiliriz.

Dolayısıyla bir metrik uzay tamlanırken, metrik uzayın her Cauchy dizisinin denklik sınıfından bir ve bir tek temsilci bulmanın çok büyük yararları vardır, özellikle temsilciyi bulmanın özel ve basit yöntemleri varsa. Böylece eğer her sınıftan bir ve bir tek "temsilci" seçebilirsek ve bu seçimi oldukça kolay bir biçimde yapabilirsek, o zaman bir önceki altbölümde yaptığımız gibi metrik uzayın tamlamasını denklik sınıfları kümesi olarak almak yerine, seçilen temsilcilerden oluşan küme olarak alabiliriz ve her şey daha kolay olur. Böylece tamlanmış metrik uzayının her elemanı bir denklik sınıfı olacağına özel bir Cauchy dizisi (seçilen temsilci) olur.

Bu altbölümde böyle bir seçimin mümkün olduğu bir başka metrik uzay göreceğiz: p-sel metriğiyle tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$.

$X = \mathbb{Z}$ ve p bir asal olsun ve $\mathbb{Z}$ üzerine p-sel metriği alalım (Örnek 11.18, Altbölüm 12.3). Yani

$$d(x, x') = \frac{1}{p^{\mathrm{val}_p(x-x')}}$$

olsun. $(x_n)_n$ bu uzaydan herhangi bir Cauchy dizisi olsun. $(x_n)_n$ Cauchy dizisine sayfa 193'deki anlamıyla denk, yani

$$\lim d_p(x_n,\, z_n) = 0$$

eşitliğini sağlayan çok daha sade ve çok daha anlaşılır bir $(z_n)_n$ Cauchy dizisi belirleyeceğiz.

Eğer $(x_n)_n$ dizisinin sonsuz sayıda doğal sayı terimi varsa, $(x_n)_n$ dizisi yerine doğal sayı terimlerden oluşan altdiziyi alarak dizinin tamamen doğal sayılardan oluştuğunu varsayabiliriz. Eğer dizide sonlu sayıda doğal sayı varsa, doğal sayı olan terimleri atarak, dizinin tamamen negatif tamsayılardan oluştuğunu varsayabiliriz; ama bu durumda da terimleri $(1-p^n)x_n$ olan dizi doğal sayılardan oluşmuş olur ve bu dizi orijinal $(x_n)_n$ dizisine denk bir dizi olur.

Demek ki her durumda dizimizin terimlerinin doğal sayılardan oluştuğunu varsayabiliriz. Önsav 12.10'da bu metrik uzayın, terimleri doğal sayılardan oluşan Cauchy dizilerini betimlemiştik. Anımsayalım:

Olgu 15.4. *$(x_n)_n$ bir doğal sayı dizisi olsun. x_n'yi p tabanında yazalım:*

$$x_n = \sum_i x_{n,i} p^i.$$

Burada sonlu bir toplam sözkonusudur tabii ve $x_{n,i}$ katsayıları 0'dan $p-1$'e kadar olan doğal sayılardır. $(x_n)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için her i için $(x_{n,i})_n$ dizisinin bir zaman sonra sabitleşmesi gerekmektedir.

Böyle bir $x = (x_n)_n$ Cauchy dizisi alalım. Yukardaki olguya göre bir zaman sonra $(x_{n,0})_n$ dizisi sabitleşmektedir. Diyelim n_0'ıncı teriminden sonra bu dizinin terimleri hep a_0'a eşit oluyor: $a_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ve eğer $n \geq n_0$ ise

$$x_n = a_0 + (p\text{'ye bölünen terimler}).$$

Şimdi $(x_{n,0})_n$ dizisine bakalım. Bu dizi de bir zaman sonra sabitleşmektedir. Diyelim n_1'inci teriminden sonra bu dizinin terimleri hep a_1'e eşit oluyor. Bir de ayrıca n_1'i n_0'dan büyükeşit seçelim: Demek ki $a_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $n_0 \leq n_1$ ve eğer $n \geq n_1$ ise

$$x_n = a_0 + a_1 p + (p^2\text{'ye bölünen terimler}).$$

Bu süreci istediğimiz kadar devam ettirebiliriz. Bir $a_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ve $n_2 \geq n_1 \geq n_0$ için, eğer $n \geq n_2$ ise

$$x_n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + (p^3\text{'e bölünen terimler})$$

olur. Şimdi

$$y_i = x_{n_i}$$

olsun:

$$y_i = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_i p^i + (p^{i+1}\text{'e bölünen terimler}).$$

Böylece oldukça vahşi olabilecek $(x_n)_n$ dizisinin çok daha evcil $(y_i)_i$ altdizisini bulduk. Elbette $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_i)_i$ dizisi sayfa 193'deki anlamıyla birbirine denktir (bkz. Alıştırma 12.5).

Şimdi $y = (y_i)_i$ dizisinden bizi pek ilgilendirmeyen kuyruğu atalım:

$$z_i = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_i p^i$$

olsun. Elbette $\mathrm{val}_p(y_i - z_i) \geq i + 1 \longrightarrow \infty$ olduğundan, $y = (y_i)_i$ dizisiyle $z = (z_i)_i$ dizisi birbirine denktir. Demek ki x dizisiyle z dizisi de birbirine denktir.

z dizisi gibi olan bir diziye ***evcil*** dizi diyelim. Yani bir $(z_i)_i$ dizisinin evcil olması için, terimleri $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ kümesinde olan bir $(a_i)_i$ dizisi için

$$z_i = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_i p^i \tag{1}$$

olmalıdır. İki evcil dizi ancak eşitlerse denk olabilirler. Ne bulduk? Herhangi bir Cauchy dizisinin bir ve bir tek evcil diziye denk olduğunu bulduk. Böylece her denklik sınıfından özel bir eleman (özel bir dizi, evcil dizi) seçmiş olduk.

Bundan böyle terimleri (1) eşitlikleriyle verilmiş bir $(z_i)_i$ evcil dizisini

$$\sum_i a_i p^i$$

olarak gösterelim. $\mathbb{Z}_p$ kümesi evcil diziler kümesi olsun.

$\mathbb{Z}_p$ üzerinde oldukça doğal biçimde toplama ve çarpma işlemleri tanımlanabilir ve bu işlemlerle birlikte $\mathbb{Z}_p$ bir halka olur (bkz. Alıştırma 15.2). $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}$'nin p-sel metrik için tamlamasıdır. $\mathbb{Z}_p$'ye ***p-sel tamsayılar halkası*** denir. $\mathbb{Z}_p$'nin bölüm cismi $\mathbb{Q}_p$ olarak yazılır ve bu cisme ***p-sel sayılar cismi*** adı verilir. Bu sayıların teorisi çok ilginçtir ama bu kitabın (seviyesini değil) amacını aşmaktadır.

Alıştırmalar

15.2. **[Cebir bilenlere]** $\mathcal{C}_p(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}$'nin p-sel metriğinde Cauchy dizileri kümesi olsun. $\mathcal{C}_p(\mathbb{Z})$'nin doğal olarak (noktasal ya da terim terim çarpmayla) bir halka olduğunu kanıtlayın ($\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$'nin althalkası). I, $\mathcal{C}_p(\mathbb{Z})$'nin 0'a yakınsayan diziler kümesi olsun. $\mathcal{C}_p(\mathbb{Z})$'nin $x = (x_n)_n$ ve $y = (y_n)_n$ elemanları için

$$\lim_{n\to\infty} d_p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in I$$

önermesini kanıtlayın. Altbölüm 15.1'de tanımlanan $(\mathbb{Z}, d_p)$ metrik uzayının tamlamasının aslında $\mathcal{C}_p(\mathbb{Z})/I$ bölüm halkası olduğunu gösterin. $(\mathbb{Z}, d_p)$ metrik uzayının tamlamasının, yani $\mathbb{Z}_p$'nin doğal olarak bir halka olduğunu gösterin. İki evcil dizi örneği alarak, bu dizileri $\mathbb{Z}_p$'de toplayın ve çarpın.

15.3. $\mathbb{Z}_p$'nin tersinir elemanlarının $a_0 \neq 0$ için $\sum_i a_i p^i$ biçiminde yazılan elemanlar olduğunu gösterin. Tersinir olmayan elemanlar kümesinin $p\mathbb{Z}_p$ olduğunu kanıtlayın. Bundan $\mathbb{Z}_p$'nin $p\,\mathbb{Z}_p$ idealinin maksimal olduğunu çıkarın.

15.4. Yukarda yapılanları Örnek 10.36'da tanımlanan $(K[T], d)$ metrik uzayı için yapın. Sonuç biçimsel kuvvet serileri halkası $K[[T]]$ çıkmalı. İpucu: Bkz. Alıştırma 12.7.

15.5. Örnek 10.37'de verilen $(D(X), d)$ metrik uzayının tam olduğunu kanıtlayın. Bir zaman sonra sabitleşen X-dizileri kümesini $D_0(X)$ olarak gösterelim. $D_0(X)$ metrik uzayının tam olmadığını ve tamlamasının $D(X)$ olduğunu kanıtlayın.

Kısım III

Tıkızlık

16. Tıkız Topolojik Uzaylar

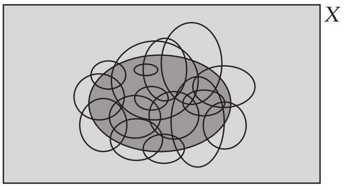
Bölümün uzunluğundan da anlaşılacağı üzere, bir topolojik uzayın tıkız altkümeleri çok önemlidir. (Bu giriş yazısı daha ilginç bir cümleyle başlayabilirdi ama ne yapalım ki bu dediğimiz çok doğru! Topologların azımsanamayacak bir bölümü yıllarını topolojik uzayların tıkız altkümelerini bulmaya ya da betimlemeye harcarlar.) Çünkü birazdan tanımlayacağımız tıkız altkümeler - çoğu zaman sonsuz olmalarına karşın - birçok anlamda sonlu altkümelerin oynadığı rolü oynarlar. Analiz de büyük ölçüde tıkız kümeler, bu da olmadı yerel tıkız topolojik uzaylar üzerinde yapılır. Tıkız kümeler sadece matematikte değil, (en azından diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığında oynadıkları rolden dolayı) fizikte de çok önemlidir. Ayrıca topolojiyi anlayıp anlamadığınızı bu bölümdeki teoremlerin hepsini kendi kendinize hiç yardım görmeden kanıtlayıp kanıtlayamadığınıza göre sınayabilirsiniz.

16.1 Örtü

Bir tanımla başlayalım. X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A'nın bir ***örtüsü***,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

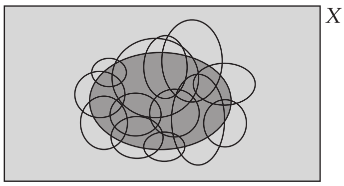
içindeliğini sağlayan, X'in U_i altkümelerinden oluşan bir $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ailesidir. Temsili resim aşağıda.



A koyu gri alan, U_i'ler küçük oval alanlar.

$\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ailesi, $\bigcup_{i \in I} U_i$ bileşiminin her altkümesinin bir örtüsüdür elbette. Her ne kadar bir $\mathcal{U}$ ancak **bir kümenin** örtüsü olabiliyorsa, yani kendi başına bir örtü olması anlamsızsa da biz sık sık kümenin bilindiğini varsayıp $\mathcal{U}$ örtüsünden sözedeceğiz.

Eğer $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün her U_i kümesi açıksa, o zaman $(U_i)_{i\in I}$ örtüsüne ***açık örtü*** denir.



Yukardaki $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün bir altörtüsü
(Yukardaki U_i'lerden üçü eksik.)

Eğer bir $J \subseteq I$ altkümesi için $\mathcal{V} = (U_j)_{j\in J}$ ailesi de A'nın bir örtüsü oluyorsa, o zaman $\mathcal{V}$ örtüsüne $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ örtüsünün ***altörtüsü*** denir.

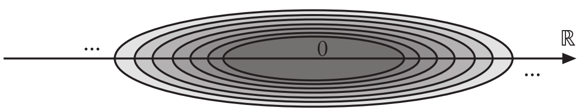
Eğer I göstergeç kümesi sonluysa A'nın $(U_i)_{i\in I}$ örtüsüne ***sonlu örtü*** adı verilir. "Sonlu altörtü" deyiminin ne demek olduğu belli olmalı: Altörtü tanımındaki J sonluysa, A'nın $\mathcal{V} = (U_j)_{j\in J}$ örtüsüne $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ örtüsünün ***sonlu altörtüsü*** adı verilir.

$(U_i)_{i\in I}$ ailesi, A'nın bir örtüsüyse ve $B \subseteq A$ ise, aynı aile B'nin de bir örtüsüdür. Elbette. Ve eğer $A \subseteq B$ ise $(U_i \cup (B\setminus A))_{i\in I}$ ailesi de, $(U_i)_{i\in I} \cup \{B\setminus A\}$ ailesi de B'nin birer örtüsüdür; bu da elbette.

Birkaç basit örnek verelim.

Örnekler

16.1. $((-n,n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$'nin, aralıklardan oluşan bir açık örtüsüdür. Eğer bu örtüden sonlu sayıda aralık atarsak gene $\mathbb{R}$'nin bir örtüsünü (dolayısıyla orijinal örtünün bir altörtüsünü) elde ederiz. $((-n,n))_{n\in 2\mathbb{N}}$ de bu örtünün bir altörtüsüdür.

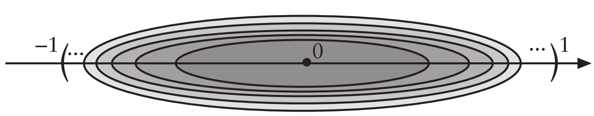


Daha genel olarak, eğer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sınırlı olmayan bir fonksiyonsa, $((-f(n), f(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ de bu örtünün bir altörtüsüdür. Bu ailenin sonlu bir altörtüsü yoktur.

16.2. $((-1+1/n, 1-1/n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ailesi $(-1,1)$ açık aralığının açık bir örtüsüdür:

$$(-1,1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (-1+1/n, 1-1/n).$$

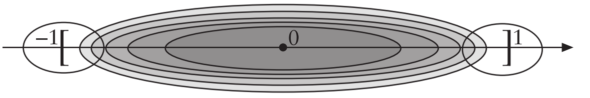
(Aslında eşitlik geçerli.) Bu aileden sonlu sayıda aralık silersek, gene $(-1,1)$ aralığının bir örtüsünü elde ederiz, yani orijinal örtünün bir altörtüsünü buluruz. Bu ailenin de sonlu bir altörtüsü yoktur.



16.3. $((-1+1/n, 1-1/n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ailesi $[-1,1]$ kapalı aralığının bir örtüsü değildir (bkz. aşağıdaki şekil), çünkü örtü 1 ve -1 elemanlarını örtmez, ama bu örtüye $(-8/7, -7/8)$ ve $(7/8, 8/7)$ aralıklarını eklersek $[-1,1]$ kapalı aralığının açık bir örtüsünü elde ederiz.

$$(-8/7, -7/8), (-8/9, 8/9), (7/8, 8/7)$$

aralıkları yukardaki örtünün sonlu bir altörtüsüdür.



Örnek 16.1 ve 16.2'yle Örnek 16.3 arasındaki ayrımı gözler önüne serelim: Örnek 16.1 ve 16.2'deki örtülerin sonlu altörtüleri yoktur, ama Örnek 16.3'teki örtünün vardır. İşte bu yüzden Örnek 16.1'deki $\mathbb{R}$ ve Örnek 16.2'deki $(-1,1)$ açık aralığı "tıkız" değildir. Öte yandan Örnek 16.3'teki $[-1,1]$ kapalı aralığı "tıkız"dır. Tıkız kümenin matematiksel tanımı bir sonraki altbölümde verilecek.

Alıştırmalar

16.4. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ ailesi Y'nin bir örtüsüyse, $\mathcal{U} = (f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ ailesinin X'in bir örtüsü olduğunu kanıtlayın. Eğer f sürekliyse ve $\mathcal{V}$, Y'nin bir açık örtüsüyse, $\mathcal{U}$'nun X'in bir açık örtüsü olduğunu kanıtlayın.

16.5. Kesirli sayıları pozitif doğal sayılarla numaralandırıp $(q_n)_n$ biçiminde bir dizi elde edelim. $(B(q_n, 1/2^n))_n$ ailesinin $\mathbb{R}$'yi örtmediğini kanıtlayın.

16.6. $(q_n)_n$ yukardaki alıştırmadaki gibi olsun. $(B(q_n, 1/n))_n$ ailesi $\mathbb{R}$'yi örter mi?

16.2 Tıkız Küme

X bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. Eğer K'nın **her** açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa K'ya ***tıkız*** küme denir. (Tıkışık ya da kompakt dendiği de olur.) Yani K'nın tıkız olması için,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan X'in **her** $U_i \subseteq X$ açık altkümeleri için,

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci olmalıdır.

"Tıkız" yerine "X topolojik uzayında tıkız" demek daha doğru olurdu diye düşünebilirsiniz, çünkü K'nın tıkız olup olmadığı X'e ve topolojisine göre değişebilir. Öte yandan Önsav 16.1'de, X ve Y topolojik uzayları için $K \subseteq X$ ve $K \subseteq Y$ ise ve X ve Y'nin topolojilerinin K'ya kısıtlanmaları aynıysa, K'nın X'te tıkız olmasıyla Y'de tıkız olması arasında bir ayrım olmadığını, yani tıkızlığın sadece K'nın topolojisine göre değişen bir kavram olduğunu göreceğiz: K'yı altuzay olarak içeren herhangi bir topolojik uzayda K'nın tıkız olması için, K'nın bunlardan birinde tıkız olması yeter ve gerek koşuldur, dolayısıyla K'nın K topolojik uzayında tıkız olması yeter ve gerek koşuldur.

Tıkızlığın tanımındaki "her" sözcüğünün altını çizeriz; tanımın kilit sözcüğüdür. Bulunan sonlu örtü de orijinal örtünün **altörtüsü** olmak zorundadır...

Bazı yazarlar, örneğin Bourbaki ve Fransız ekolü tıkızlığı sadece Hausdorff uzaylar için tanımlarlar. Biz daha genel olan akıma uyup öyle yapmayacağız.

Eğer X topolojik uzayında X kümesi tıkızsa, X'e **tıkız topolojik uzay** denir. Önsav 16.1 bu tanımdan rahatsızlık duyanları yatıştıracaktır.

Hemen birkaç örnek ve karşıörnek verelim.

Örnekler

16.7. Her topolojik uzayın her sonlu altkümesi (dolayısıyla boşküme de) tıkızdır. Elbette!

16.8. Eğer X kümesi ayrık metrikle donatılmışsa, o zaman bu topolojik uzayın sadece sonlu altkümeleri tıkız olabilirler. Nitekim her A altkümesi için $(\{a\})_{a\in A}$ ailesi A'nın açık bir örtüsüdür.

16.9. Sadece sonlu sayıda açık kümesi olan bir topolojik uzayın her altkümesi tıkızdır. Örneğin en kaba topolojiyle donatılmış her küme tıkızdır.

16.10. Örnek 16.2'den $(-1, 1)$ açık aralığının (Öklid topolojisinde) tıkız olmadığı anlaşılıyor. Bu örnekten yola çıkarak, boş olmayan açık bir aralığın Öklid topolojisinde tıkız olmadığı kolaylıkla anlaşılır. Örnek 16.1'den de $\mathbb{R}$'nin (Öklid topolojisiyle) tıkız olmadığı anlaşılıyor.

16.11. Sorgenfrey doğrusunda $[a, b]$ biçiminde yazılan sonsuz bir aralık tıkız değildir. (Oysa bu kapalı aralıkların Öklid topolojisinde tıkız olduğunu bu bölümde göreceğiz, bkz. Heine-Borel Teoremi.)

16.12. X, Fréchet topolojisiyle donatılmış olsun. X'in her altkümesi tıkızdır. Nitekim eğer $\emptyset \neq K \subseteq X$ açık bir $(U_i)_i$ örtüsü tarafından kaplanmışsa, o zaman bu U_i'lerden biri boşküme değildir, dolayısıyla tümleyeni sonludur, dolayısıyla sonlu sayıda eleman dışında K'yı kaplar; K'nın geriye kalan sonlu sayıda elemanı da elbette sonlu sayıda U_i'lerle kaplayabiliriz.

Çok daha önemli örnekler ileride verilecektir. Örneğin $\mathbb{R}$'nin tüm tıkız altkümelerini kolay bir biçimde betimleyeceğiz (bkz. Heine-Borel Teoremi, Teorem 16.12, ama hayat her zaman $\mathbb{R}$'de olduğu kadar basit değildir) ve ilerde tıkız kümelerden başka tıkız kümeler yaratmanın çeşitli reçetelerini göreceğiz.

Sezgi kazandırması açısından $\mathbb{R}$'nin tıkız altkümelerinin neler olduğunu kanıtlamadan söyleyelim: $\mathbb{R}$'nin tıkız altkümeleri aynen $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı altkümeleridir. Bu, meşhur Heine-Borel teoremidir ve bu bölümde kanıtlanacaktır. Belki bu olgu "tıkız"ın menşeine dair bir bilgi verir: Tıkız altkümeler uzayıp gitmeyen, kendi içine kapalı altkümeler olarak algılanmalıdır. Tabii bu sadece bir algı olarak kalmalı, matematiksel bir olgu yatmıyor bu dediğimizin temelinde.

Okur $[0, 1)$ aralığının tıkız olmadığını kanıtlayabilir. Sorunun 1'de olduğu hissediliyordur umarım. İlerde $[0, 1]$ kapalı aralığının tıkız olduğunu göreceğiz. Demek ki tıkızlık tek bir nokta çıkarılınca bozulabiliyor, yani oldukça narin bir kavram.

Altbölüm 18.3'te, herhangi bir X topolojik uzayına tek bir nokta ekleyerek ve elde edilen kümeyi münasip bir topolojiyle donatarak (ama X'in topolojisine dokunmayarak), nokta eklenmiş kümeyi tıkız bir topolojik uzaya dönüştürebileceğimizi göreceğiz.

Alıştırmalar

16.13. X bir küme olsun. X üzerine τ_1 ve τ_2 topolojilerini alalım. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ olsun. X'in bir altkümesi τ_2 için tıkızsa τ_1 için de tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.14. $\mathbb{R}$'nin sınırsız bir altkümesinin (Öklid topolojisinde) tıkız olamayacağını kanıtlayın. Genel olarak, tıkız bir metrik uzayın sınırlı olduğunu kanıtlayın.

16.15. $[0,1)$ aralığının $\mathbb{R}$'de (Öklid topolojisinde elbet) tıkız olmadığını kanıtlayın.

16.16. Sonlu sayıda tıkız altkümenin bileşiminin de tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.17. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'de tıkız olmadığını kanıtlayın. (İpucu: Alıştırma 8.18.)

16.18. $\{1/2,\ 1/3,\ 1/4, \ldots\} \cup \{0\}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'nün tıkız bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.

16.19. $\mathbb{Z}$'yi p'sel metrikle donatırsak tıkız bir metrik uzay elde eder miyiz?

16.20. Tıkız bir kümenin kapalı altkümelerinin de tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.21. Tıkız bir kümenin her altkümesi tıkız olmak zoruda mıdır?

16.3 Basit ve Temel Özellikler

İlk olarak tıkızlığın mutlak bir kavram olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 16.1. *X bir topolojik uzay ve $K \subseteq Y \subseteq X$ olsun. Y, X'ten indirgenmiş topolojiyle donatılsın. K'nın X'te tıkız olmasıyla Y'de tıkız olması arasında hiçbir fark yoktur, biri doğruysa diğeri de doğrudur.* ($Y = K$ *durumu gözden kaçırılmaması gereken ilginç bir özel durumdur.*)

Kanıt: Önce K'nın X'te tıkız olduğunu varsayalım. $(V_i)_{i \in I}$, K'nın Y-açık (yani Y'nin topolojisine göre açık) bir örtüsü olsun. Her $i \in I$ için, V_i kümesi Y'de açık olduğundan, indirgenmiş topolojinin tanımına göre,

$$V_i = U_i \cap Y$$

eşitliğini sağlayan bir $U_i \subseteq X$ açık kümesi vardır. (U_i, X'in topolojisinde açıktır.)

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

olduğundan, ve K, X'te tıkız olduğundan, ve $(U_i)_{i \in I}$, K'nın X-açık bir örtüsü olduğundan,

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Ama $K \subseteq Y$ olduğundan, bundan,

$$K \subseteq (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}) \cap Y = (U_{i_1} \cap Y) \cup \ldots \cup (U_{i_n} \cap Y) = V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n}$$

çıkar. Demek ki K, Y'de tıkızdır.

Şimdi de K'nın Y'de tıkız olduğunu varsayalım. $(U_i)_{i\in I}$, K'nın X-açık bir örtüsü olsun:

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

$K \subseteq Y$ olduğundan, bundan,

$$K \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \cap Y = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap Y)$$

çıkar. İndirgenmiş topolojinin tanımına göre $U_i \cap Y$ kümesi Y-açıktır. Demek ki $(U_i \cap Y)_{i\in I}$, K'nın Y-açık bir örtüsüdür. K, Y'de tıkız olduğundan,

$$K \subseteq (U_{i_1} \cap Y) \cup \ldots \cup (U_{i_n} \cap Y) = (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}) \cap Y$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Demek ki

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}.$$

Bu da K'nın X'te tıkız olduğunu gösterir. □

"Tıkızlıktan kaçış yok" olarak nitelendirilebilecek aşağıdaki teorem çok önemlidir ve sık sık kullanılır.

Teorem 16.2. *Tıkız bir topolojik uzayın sürekli bir fonksiyon altında imgesi de tıkızdır.*

Bu teorem bariz bir biçimde aşağıdaki teoremin bir sonucu olduğu gibi, yukardaki önsav sayesinde ona denktir de. (Denkliği görmek için bir de ayrıca kanıtlanan Önsav 5.3 gerekiyor.)

Teorem 16.2 tekrar. *X ve Y iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $K \subseteq X$ tıkız bir kümeyse $f(K)$ da tıkızdır.*

Kanıt: $(V_i)_{i\in I}$, $f(K)$'nın açık bir örtüsü olsun:

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i.$$

Demek ki

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i),$$

ve $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ ailesi K'nın bir örtüsü. f sürekli olduğundan, her i için $f^{-1}(V_i)$ açık bir küme. Yani bu aile K'nın açık bir örtüsü. K tıkız olduğundan,

$$K \subseteq f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Her iki tarafın da f-imgesini alalım:

$$\begin{aligned} f(K) &\subseteq f(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})) \\ &= f(f^{-1}(V_{i_1})) \cup \ldots \cup f(f^{-1}(V_{i_n})) \\ &\subseteq V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n} \end{aligned}$$

olur. □

Alıştırmalar

16.22. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin tıkız olmadığını kanıtlayın.

16.23. Topolojik uzayların kartezyen çarpımı tıkızsa, kartezyen çarpımı alınan her uzayın tıkız olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

16.24. X ve Y iki topolojik uzay olsun. K, $X \times Y$ kartezyen çarpımının tıkız bir altkümesi olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ tıkız altkümeleri için $K \subseteq A \times B$ içindeliğini kanıtlayın.

Ama dikkat, tıkız bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında **önimgesi** tıkız olmak zorunda değildir; çünkü o zaman her topolojik uzay tıkız olurdu, ne de olsa sabit fonksiyonlar süreklidir ve bir elemanlı altkümeler tıkızdır.

Örnek 16.2 ve 16.3'ten tıkız bir kümenin bir altkümesinin illa tıkız olmak zorunda olmadığı görülüyor. Ama tıkız bir kümenin kapalı altkümeleri her zaman tıkız olur:

Teorem 16.3. *Tıkız bir topolojik uzayın her kapalı altkümesi tıkızdır.*

Kanıt: X, tıkız bir topolojik uzay olsun. K, X'in kapalı bir altkümesi olsun. $(U_i)_{i \in I}$, K'nın açık bir örtüsü olsun. Bu açık örtüye $X \setminus K$ açık kümesini eklersek X'in açık bir örtüsünü elde ederiz. X tıkız olduğundan, X'in bu açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır. Bu sonlu altörtüye gerekiyorsa $X \setminus K$ altkümesini ekleyerek, $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeçleri için,

$$X = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \cup (X \setminus K)$$

eşitliğini varsayabiliriz. Şimdi bu eşitliğin her iki tarafını da K ile kesiştirelim.

$$K = (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}) \cap K$$

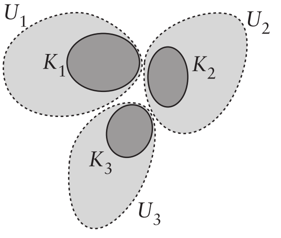
eşitliğini buluruz. Demek ki

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Hausdorff bir uzayda, tanım gereği, iki noktayı açık kümelerle ayrıştırabiliriz. Bir sonraki teorem, Hausdorff bir uzayda iki ayrık tıkız kümeyi açık kümelerle ayrıştırabileceğimizi gösterecek. Teoremin kanıtı, neden tıkız kümelerin bir anlamda sonlu kümelerin genelleşmesi olduğunu da gösterecek.

Teorem 16.4. *X, Hausdorff bir uzay olsun. K ve L, X'in ayrık ve tıkız iki altkümesi olsun. O zaman $K \subseteq U$ ve $L \subseteq V$ özelliklerini sağlayan ayrık U ve V açık kümeleri vardır.*



Kanıt: Önce L'nin tek bir noktadan oluştuğunu varsayalım. Diyelim $L = \{y\}$. X uzayı Hausdorff olduğundan her $x \in K$ için,

$$x \in U_x,\ y \in V_x,\ U_x \cap V_x = \emptyset$$

ilişkilerini sağlayan U_x ve V_x açık kümeleri vardır. $(U_x)_{x \in K}$ ailesi K'nın bir açık örtüsü olduğundan, öyle $x_1, \ldots, x_n \in K$ vardır ki,

$$K \subseteq U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$$

olur. Şimdi

$$U_y = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} \text{ ve } V_y = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$$

tanımlarını yapalım. O zaman, U_y ve V_y açık kümelerdir; ayrıca $K \subseteq U_y$ ve $y \in V_y$ olur ve son olarak,

$$U_y \cap V_y = \emptyset$$

olur. Böylece $L = \{y\}$ ise teoremi kanıtladık.

Şimdi genel duruma geçelim. Her $y \in L$ için,

$$K \subseteq U_y,\ y \in V_y \text{ ve } U_y \cap V_y = \emptyset$$

ilişkilerini sağlayan U_y ve V_y açık kümeleri seçelim. $(V_y)_{y \in L}$ ailesi L'nin bir açık örtüsü olduğundan, öyle $y_1, \ldots, y_n \in L$ vardır ki,

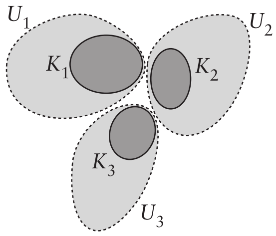
$$L \subseteq V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$$

olur. Şimdi

$$V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n} \text{ ve } U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$$

tanımlarını yapalım. O zaman, U ve V açık kümelerdir; ayrıca $K \subseteq U$ ve $L \subseteq V$ olur ve son olarak, $U \cap V = \emptyset$ olur. Böylece teoremin de kanıtı bitmiş oldu. □

Alıştırma 16.25. Bir Hausdorff topolojik uzayda, sonlu sayıda ayrık tıkız kümenin açık kümeler tarafından ayrıştırılabileceğini kanıtlayın.



Sonuç 16.5. *Hausdorff bir uzayda (dolayısıyla bir metrik uzayda da) tıkız kümeler kapalıdırlar.*

Kanıt: X Hausdorff uzay ve $K \subseteq X$ tıkız bir altküme olsun. $x \in X \setminus K$ olsun. Bir önceki teoreme göre x'i içeren ama K ile kesişmeyen bir açık küme vardır. Demek ki $X \setminus K$ açık bir kümedir, dolayısıyla K kapalıdır. □

Alıştırmalar

16.26. Yukardaki sonucun Hausdorff olmayan uzaylar için doğru olmadığını gösterin.

16.27. Tıkız bir topolojik uzaydan Hausdorff bir uzaya giden her sürekli fonksiyonun kapalı bir fonksiyon olduğunu, yani kapalı kümeleri kapalı kümelere götürdüğünü kanıtlayın.

16.28. $f : X \to Y$, iki topolojik uzay arasında sürekli bir eşleme olsun. Eğer X tıkız ve Y Hausdorff ise f'nin topolojik bir eşleme (yani bir homeomorfizma) olduğunu kanıtlayın.

16.29. Hausdorff bir uzayda tıkız kümelerin kesişiminin tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.30. X bir küme olsun. X üzerine τ_1 ve τ_2 topolojilerini alalım. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ olsun. Eğer X her iki topoloji için hem Hausdorff hem de tıkızsa $\tau_1 = \tau_2$ eşitliğini kanıtlayın.

16.4 Tıkızlığın Bir Başka Eşdeğer Koşulu

Tıkızlığın çok yararlı bir başka tanımı daha vardır. Bu kısa bölümde okurun her an karşısına çıkabilecek bu tanımdan söz edeyim.

X bir küme ve $\mathcal{E}$, X'in bir altkümeler kümesi olsun. Eğer $\mathcal{E}$ kümesinin sonlu sayıda (ama en az bir) elemanının kesişimi hiçbir zaman boşküme olmuyorsa, $\mathcal{E}$ kümesinin ***sonlu kesişim özelliği*** olduğu söylenir[1]. Örneğin,

$$\mathcal{E} = \{[a, b] \cap \mathbb{Q} : a < \sqrt{2} < b\}$$

kümesi, sonlu kesişim özelliği olan bir kümedir. Ama $\mathcal{E}$'nin tüm altkümelerinin kesişimi boşkümedir.

Teorem 16.6. *Bir topolojik uzayın tıkız olması için gerek ve yeter koşul, sonlu kesişim özelliği olan her kapalı kümeler ailesinin kesişiminin boşküme olmamasıdır.*

[1] İngilizcesi *finite intersection property* ya da kısaca *FIP*, Türkçesi SKÖ olabilir.

Kanıt: X tıkız bir küme ve $\mathcal{E}$, X'in kapalı kümelerinden oluşan ve sonlu kesişim özelliği olan bir küme olsun. $\mathcal{E}$'nin tüm altkümelerinin kesişiminin boşküme olduğunu varsayalım. Demek ki,

$$\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F = \emptyset;$$

yani

$$\bigcup_{F\in\mathcal{E}} F^c = X.$$

Ama F^c kümeleri açık. X tıkız olduğundan, sonlu sayıda $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{E}$ için

$$F_1^c \cup \ldots \cup F_n^c = X$$

olmalı. Ama o zaman da

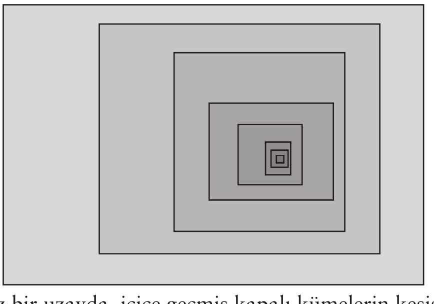
$$F_1 \cap \ldots \cap F_n = \emptyset$$

olur ki bu da $\mathcal{E}$'nin sonlu kesişim özelliğini sağlamasıyla çelişir.

Şimdi X'in sonlu kesişim özelliği olan her kapalı kümeler ailesinin kesişiminin boş olmadığını, ama X'in tıkız olmadığını varsayalım. Natıkızlığa tanık olarak, X'in sonlu altörtüsü olmayan bir $(U_i)_{i\in I}$ açık örtüsünü ele alalım. Sonlu sayıda U_i, X'i örtmeye yetmediğine göre, sonlu sayıda U_i^c kümesinin kesişimi boş olamaz. Varsayıma göre, U_i^c kümelerinin kesişimi de boş olamaz, yani tüm U_i kümelerinin bileşimi X olamaz. Bir çelişki. □

Bu teoremi kullanarak [N4]'te kanıtlanan Kapalı Kutular Teoremi'ni genelleştirebiliriz.

Sonuç 16.7. *Tıkız bir uzayda $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ bir kapalı kümeler zinciri olsun. Eğer hiçbir C_n boş değilse, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ de boş değildir.* □



Tıkız bir uzayda, içiçe geçmiş kapalı kümelerin kesişimi (eğer biri boş değilse) boş olamaz.

Sonuç 16.8. *Hausdorff bir uzayda, $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ bir tıkız kümeler zinciri olsun. Eğer hiçbir C_n boş değilse, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ de boş değildir.*

Kanıt: Yukardaki sonuçtan ve Sonuç 16.5'ten çıkar. □

Tanım. *Topolojik bir uzayın bir x elemanı için, eğer $\{x\}$ açık bir kümeyse, x'e **ayrık** ya da **tecrit edilmiş nokta**[2] adı verilir.*

Her ne kadar tıkız kümeleri sonsuza kadar yayılamayan kümeler olarak hayal etmemiz gerektiğini söylediysek de, bu hayalimiz bizi yanıltmasın, bir sonraki sonucun göstereceği üzere tıkız kümelerde bol bol eleman vardır.

Sonuç 16.9. *Ayrık noktası olmayan, boşkümeden farklı, tıkız ve Hausdorff bir topolojik uzay sayılamaz sonsuzluktadır.*

Kanıt: Uzaya X diyelim. Önce kolay bir sav kanıtlayalım.

Sav. *$\emptyset \neq U \subseteq X$ açık bir küme ve $x \in X$ olsun. O zaman öyle bir $\emptyset \neq V \subseteq U$ açık kümesi vardır ki, $x \notin \overline{V}$ olur.*
Savın Kanıtı: U'da x'ten değişik bir y noktası seçelim. (x, U'nun bir elemanı olsa da olmasa da böyle bir nokta vardır çünkü x ayrık bir nokta değildir ve $\emptyset \neq U$.) X, Hausdorff bir uzay olduğundan,

$$x \in U_x,\ y \in U_y,\ U_x \cap U_y = \emptyset$$

özelliklerini sağlayan U_x ve U_y açık kümeleri vardır. $V = U_y \cap U$ istenen özellikleri sağlar. Böylece savımız kanıtlanmış oldu.

Şimdi Sonuç 16.9'u kanıtlayabiliriz. $f : \mathbb{N} \to X$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin örten olamayacağını kanıtlayacağız.

Yukardaki savı kullanarak X'in öyle bir $(V_n)_n$ açık kümeler dizisini bulacağız ki,

$$f(n) \notin \overline{V_n} \text{ ve } \emptyset \neq V_{n+1} \subseteq V_n$$

olacak. Yukardaki savda $U = X$ alırsak, istediğimiz gibi bir V_0 açık kümesi olduğu belli. Şimdi istenildiği gibi $V_0 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_n$ açık kümelerinin seçildiğini varsayalım. Savda $U = V_n$ ve $x = f(n+1)$ alarak, istediğimiz gibi bir V_{n+1} açık kümesi buluruz.

V_n açık kümelerinin kapanışını alırsak

$$\overline{V_0} \supseteq \overline{V_1} \supseteq \ldots \supseteq \overline{V_n} \supseteq \ldots$$

zincirini buluruz. Sonuç 16.7'ye göre bu dizinin kesişimi boşküme olamaz. Kesişimden bir x alalım. Bu x hiçbir $f(n)$'ye eşit olamaz çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n) \notin \overline{V_n} \text{ ve } x \in \overline{V_n}.$$

Sonuç kanıtlanmıştır. □

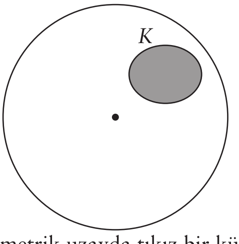
[2] İngilizcesi *isolated point*.

16.5 Metrik Uzaylarda Tıkız Altkümeler

Tıkızlık topolojik bir özellik olduğuna göre, iki ayrı metrik aynı topolojiyi veriyorsa, bir metriğe göre tıkız olan diğer metriğe göre de tıkızdır.

Kaba topoloji örneği de gösteriyor ki, herhangi bir topolojik uzayın tıkız altkümeleri hakkında fazla bir şey söylemek mümkün değil. Metrik uzaylarda ise tıkız kümeler hakkında daha fazla bilgiye sahibiz.

Teorem 16.10. *Metrik bir uzayda tıkız kümeler sınırlı ve kapalıdır.*



Bir metrik uzayda tıkız bir küme fazla uzağa gidemez!

Kanıt: (X, d) bir metrik uzay ve K, X'in tıkız bir altkümesi olsun. Bir metrik uzay Hausdorff olduğundan, Sonuç 16.5'e göre K kapalıdır.

Şimdi K'nın sınırlı olduğunu kanıtlayalım. X'ten herhangi bir $a \in X$ noktası seçelim.

$$(B(a, n))_{n \in \mathbb{N}}$$

ailesi K'nın açık bir örtüsüdür elbette. Demek ki K sonlu sayıda $B(a, n)$ yuvarı tarafından kaplanır. Eğer n bu sonlu sayıdaki yuvarların yarıçaplarının en büyüğüyse, $K \subseteq B(a, n)$ olur. Demek ki K sınırlıdır. □

Bu teoremin tersi doğru değildir. Örneğin ayrık metrikle donatılmış her küme sınırlıdır (ve elbette kapalıdır) ama uzay sonlu değilse tıkız olamaz.

16.6 Tıkız Kümelerin Sonlu Kartezyen Çarpımı

Tıkız uzayların kartezyen çarpımının (çarpım topolojisinde) tıkız olup olmayacağı merak konusu olmalı.

İki tıkız kümenin kartezyen çarpımının tıkız olduğunu kanıtlayacağız. Dolayısıyla sonlu sayıda tıkız kümenin de kartezyen çarpımı tıkız olur. Aynı sonuç sonsuz sayıda tıkız kümenin kartezyen çarpımı için de geçerlidir ama bu çok daha zor bir teoremdir. Bu sonucu da Altbölüm 16.8'de kanıtlayacağız.

Önce bazı genel kelamlarda bulunalım.

Bir kümenin tıkız olup olmadığını kanıtlamak için, önce kümenin rastgele bir $(U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü seçilir ve sonra bu açık örtünün **sonlu** bir **altörtüsü** bulunur. Elbette, eğer her $i \in I$ için $V_i \subseteq U_i$ ise ve $(V_i)_{i \in I}$ de aynı kümenin bir örtüsüyse, $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak için $(V_i)_{i\in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak yeterlidir, çünkü o zaman bu sayede $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün de sonlu bir altörtüsü bulunmuş olur. Ya da diyelim her U_i açık kümesini V_{ij} türünden kümelerin bileşimi olarak yazdık; o zaman $(V_{ij})_{ij}$ de aynı kümenin bir örtüsü olur ve $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak için $(V_{ij})_{ij}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak yeterlidir.

Bu söylediklerimizden de anlaşılıyor ki, eğer bir topolojik uzayın bir tabanı verilmişse, bir kümenin tıkız olup olmadığını kanıtlamak için, kümenin, **tabanın elemanlarından oluşan** rastgele bir $(U_i)_{i\in I}$ açık örtüsü seçmek ve sonra bu örtünün sonlu bir altörtüsünün olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Yani tabanın elemanlarından oluşan örtülerle yetinebiliriz. Bu, çoğu zaman bize hatırı sayılır bir kolaylık sağlar. Örneğin $\mathbb{R}$'de açık aralıklardan oluşan örtüleri almak yeterlidir; burada da yapacağımız gibi kartezyen çarpımda $U\times V$ türünden yazılan açık kümelerden oluşan örtüleri almak yeterlidir; bir metrik uzayda ise her U_i'nin bir yuvar olduğunu, yani $B(x_i, r_i)$ türünden bir küme olduğunu varsayabiliriz.

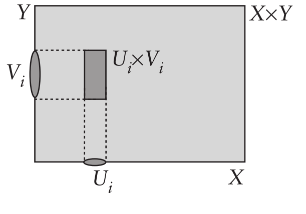
İlerde, bir öntabanın elemanlarından oluşan rastgele bir $(U_i)_{i\in I}$ açık örtüsü seçmek ve sonra bu örtünün sonlu bir altörtüsünün olduğunu kanıtlamanın yeterli olduğunu göreceğiz (Teorem 16.15, Alexander'ın Öntaban Teoremi).

Teorem 16.11. *İki (dolayısıyla sonlu sayıda) tıkız topolojik uzayın kartezyen çarpımı tıkızdır.*

Kanıt: X ve Y herhangi iki tıkız topolojik uzay olsun. $X\times Y$ kartezyen çarpımının herhangi bir açık örtüsünü alalım. Yukarda söylenenlerden, açık örtünün, X'in $(U_i)_{i\in I}$ açık kümeleri ve Y'nin $(V_i)_{i\in I}$ açık kümeleri için,

$$(U_i \times V_i)_{i\in I}$$

türünden bir örtü (yani açık dikdörtgenlerden oluşan bir örtü) olduğunu varsayabiliriz.

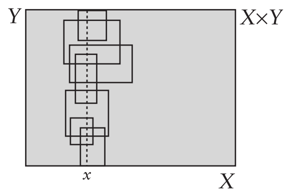


Elbette, $(U_i)_{i\in I}$ ailesi X'in ve $(V_i)_{i\in I}$ ailesi Y'nin örtüleridir. (Bu aşamada kanıtın gerisini tahmin ettiğinizi sanıyorsanız, muhtemelen hemen her öğrencinin yaptığı ilk yanlışı yapıyorsunuzdur: Bulduğunuz bir **alt**örtü değildir.)

Her $x\in X$ için, $\{x\}\times Y$, Y'ye topolojik olarak denktir (yani homeomorftur, bkz. Alıştırma 6.10), demek ki tıkızdır. Ayrıca $(U_i\times V_i)_{i\in I}$ ailesi $X\times Y$'nin olduğu gibi $\{x\} \times Y$'nin de bir açık örtüsüdür. Dolayısıyla $\{x\} \times Y$'yi sonlu sayıda $U_i \times V_i$'lerle örtebiliriz. Diyelim sonlu bir $I(x) \subseteq I$ göstergeç kümesi için,

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I(x)} (U_i \times V_i)$$

oluyor.



Açık örtümüzden gereksiz $U_i \times V_i$'leri atarak, her $i \in I(x)$ için,

$$x \in U_i$$

varsayımını yapabiliriz. $I(x)$ sonlu olduğu için,

$$U(x) = \bigcap_{i \in I(x)} U_i$$

kümesi, X'in x'i içeren açık bir altkümesidir. Bu arada,

$$\left(\bigcap_{i \in I(x)} U_i\right) \times Y = \left(\bigcap_{i \in I(x)} U_i\right) \times \left(\bigcup_{i \in I(x)} V_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I(x)} (U_i \times V_i)$$

içindeliğini aklımızda tutalım, gerekecek birazdan. Bu $U(x)$ kümeleri X'in bir açık örtüsünü oluştururlar. X tıkız olduğundan, sonlu sayıda $x_1, \ldots, x_n \in X$ için,

$$X = U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_n)$$

olur. Şimdi $(U_i \times V_i)_{i \in I}$ örtüsünün,

$$(U_i \times V_i)_{j=1,\ldots,n \text{ ve } i \in I(x_j)}$$

altailesinin $X \times Y$'nin sonlu bir altörtüsü olduğunu göstereceğiz. $X \times Y$'den rastgele bir $(x,\, y)$ elemanı alalım. Bir $j = 1, \ldots, n$ için,

$$x \in U(x_j) = \bigcap_{i \in I(x_j)} U_i$$

olur.

$$(x, y) \in U(x_j) \times Y \subseteq \bigcup_{i \in I(x_j)} (U_i \times V_i)$$

olduğundan, bir $i \in I(x_j)$ için $(x, y) \in U_i \times V_i$ olur. □

Alıştırmalar

16.31. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $K \subseteq X \times Y$ kapalı bir altküme olsun. Eğer $\text{pr}_1(K)$ ve $\text{pr}_2(K)$ kümeleri tıkızsa K'nın da tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.32. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ iki tıkız küme olsun. $W \subseteq X \times Y$ altkümesi $A \times B$'yi içeren açık bir küme olsun. $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$ içindeliklerini sağlayan $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ açık altkümelerinin olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Teorem 16.11'in kanıtından esinlenebilirsiniz.

16.33. X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer Y tıkızsa, $\text{pr}_1 : X \times Y \to X$ birinci izdüşüm fonksiyonunun kapalı bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın. (Yani kapalı kümelerin izdüşümleri kapalıdır.)

16.34. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Y'nin tıkız ve Hausdorff olduğunu varsayalım. f'nin sürekli olmasıyla f'nin grafiğinin $X \times Y$ uzayında kapalı olmasının eşdeğer koşullar olduklarını gösterin.

16.35. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X'in tıkız, Y'nin Hausdorff olduğunu varsayalım. f'nin sürekli olmasıyla f'nin grafiğinin tıkız olmasının eşdeğer koşullar olduklarını gösterin.

16.36. $(x_n)_n$ yakınsak bir gerçel sayı dizisi olsun. x bu dizinin limiti olsun. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kümesinin tıkız olduğunu kanıtlayın.

16.37. $\mathbb{Q}$'nün tıkız ve sonsuz bir altkümesini bulun.

16.7 $\mathbb{R}^n$'nin Tıkız Altkümeleri

Aşağıdaki teorem, "keşke her uzayda böyle olsaydı" anlamına, rüya teorem olarak addedilebilir:

Teorem 16.12 (Heine-Borel). *$\mathbb{R}^n$'nin bir altkümesinin tıkız olması için yeter ve gerek koşul altkümenin sınırlı ve kapalı olmasıdır.*

Kanıt: Teoremin soldan sağa kısmı her metrik uzayda doğrudur (Teorem 16.10). Teoremin diğer yönünü $\mathbb{R}$ için kanıtlamak yeterli. Nitekim teoremi $\mathbb{R}$ için bildiğimizi varsayalım. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, sınırlı ve kapalı bir küme olsun. O zaman öyle $a < b$ vardır ki, $K \subseteq [a, b]^n$ olur. Teoremi $\mathbb{R}$ için bildiğimizi varsaydığımızdan, $[a, b]$, $\mathbb{R}$'nin tıkız bir altkümesidir. Teorem 16.11'e göre $[a, b]^n$ de tıkızdır. Teorem 16.3'e göre K da tıkızdır. Demek ki teoremi $\mathbb{R}$ için kanıtlamak yeterli.

Şimdi $\mathbb{R}$'nin sınırlı ve kapalı bir K altkümesi verilmiş olsun. K sınırlı olduğundan, belli $a < b$ sayıları için, $K \subseteq [a, b]$ olur. K kapalı olduğundan, Teorem 16.3'e göre $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığının tıkız olduğunu kanıtlamak yeterli. Eğer $a = b$ ise her şey çok açık olduğundan, $a < b$ varsayımını yapalım.

$(U_i)_{i \in I}$, $[a, b]$ aralığının açık bir örtüsü olsun. Bir $c \in [a, b]$ için, $(U_i)_{i \in I}$ aynı zamanda $[a, c]$ aralığının örtüsüdür. Eğer bu örtünün sonlu sayıda elemanı $[a, c]$ kapalı aralığını örtüyorsa, c'ye bu kanıtlık "güzel sayı" diyelim. a elbette güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi boş değildir. Dahası, $a \in U_i$ ise ve bir $\alpha > 0$ için $(a - \alpha, a + \alpha) \subseteq U_i$ ise o zaman elbette $a + \alpha/2$ de güzel bir sayıdır. Amacımız b'nin güzel bir sayı olduğunu kanıtlamak. Eğer c güzel bir sayıysa ve c_1 sayısı $a \leq c_1 \leq c$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman c_1 sayısı da güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi G, $\mathbb{R}$'nin bir aralığıdır. G, b tarafından üstten sınırlı olduğundan G'nin en küçük üstsınırı vardır. Bu en küçük üstsınıra g diyelim. Yukarda $a < a + \alpha/2 \leq g$ olduğunu gördük. U_i'ler arasından g'yi içeren bir U_i alalım. U_i açık olduğundan ve g'yi içerdiğinden, öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki,

$$(g - \epsilon, g + \epsilon) \subseteq U_i$$

olur. Bu ϵ sayısını $a \leq g - \epsilon$ eşitsizliği sağlanacak kadar küçük seçebiliriz, öyle yapalım. Ayrıca $g - \epsilon < g$ olduğundan ve $g = \sup G$ üstsınır olduğundan, $g - \epsilon$ güzel bir sayıdır. Demek ki sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci için $[a, g - \epsilon]$ aralığı

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$$

açık kümeleri tarafından kaplanır. Ama o zaman, $[a, g + \epsilon/2]$ aralığı

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}, U_i$$

açık kümeleri tarafından kaplanır. Bundan, her şeyden önce g'nin güzel bir sayı olduğu çıkar. Sonra g'nin b'den küçük olmayacağı çıkar, çünkü aksi halde bir $0 < \beta \leq \epsilon/2$ için $g < g + \beta < b$ olur ve $g + \beta$, g'den büyük bir güzel sayı olur. Demek ki $g = b$ ve b güzel bir sayı. Dolayısıyla $[a, b]$ aralığı $(U_i)_{i \in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsü tarafından örtülür. □

Yukarda verilen kanıt şık, zarif, zekice ve (sanırım) son derece anlaşılır. Ama standart kanıtlardan değil. Ortalama bir matematikçinin hemen aklına gelmeyecek kadar zekice bu yazarın zevkine göre. Bu teoremin daha standart kanıtı topolojinin yöntemleri açısından daha eğitici olduğunu düşünüyoruz. Daha standart kanıtı verelim:

Teorem 16.12'nin İkinci Kanıtı: $[a, b]$ aralığının tıkız olmadığını varsayalım. O zaman $[a, b]$ aralığının sonlu altörtüsü olmayan bir $(U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü vardır. c_1 noktası, a ve b noktalarının tam ortası olsun. Ya $[a, c_1]$ aralığı ya da $[c_1, b]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Diyelim $[a, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_2 noktası a ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[a, c_2]$ ya da $[c_2, c_1]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Diyelim $[c_2, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_3 noktası c_2 ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[c_2, c_3]$ ya da $[c_3, c_1]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez... Bunu böyle devam ettirerek, öyle

$$[a, b] = [d_0, e_0] \supseteq [d_1, e_1] \supseteq [d_2, e_2] \supseteq \ldots$$

aralıkları bulabiliriz ki, hem

$$(d_n - e_n) = (b - a)/2^n$$

olur hem de $[d_n, e_n]$ aralıkları sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Kapalı Kutular Teoremi'ne göre [N4], bütün bu $[d_n, e_n]$ aralıkları tek bir noktada kesişir, diyelim

$$f = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n \tag{1}$$

noktasında kesişiyorlar. $f \in [a, b]$ olduğundan, bir $i \in I$ için $f \in U_i$ olur. U_i açık olduğundan, bir $\epsilon > 0$ için, $(f - \epsilon, f + \epsilon) \subseteq U_i$ olur. (1)'den dolayı, bir n göstergeci için,

$$[d_n, e_n] \subseteq (f - \epsilon, f + \epsilon) \subseteq U_i$$

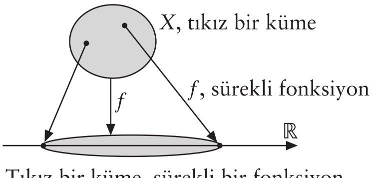
olur. Ama o zaman da $[d_n, e_n]$ tek bir (dolayısıyla sonlu sayıda) U_i tarafından kaplanır. Bir çelişki. Demek ki $[a, b]$ aralığı tıkız bir kümedir. □

Bu ikinci kanıtın $\mathbb{R}^n$'ye kolaylıkla genelleştiğine dikkatinizi çekeriz. Aralıkların yerini alan n boyutlu kutuları bu sefer 2 yerine 2^n parçaya böleriz. Ayrıca kanıtı genel olarak $[a, b]$ aralığı için yapacağımıza sadece $[0, 1]$ aralığı için yapabilirdik, ne de olsa $[0, 1]$ aralığıyla $[a, b]$ aralığı arasında topolojik olarak bir fark yoktur.

Sonuç 16.13 (Uç Değerler Teoremi)**.** *X tıkız bir topolojik uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu X üzerine minimum ve maksimum değerini alır; yani öyle a, $b \in X$ vardır ki her $x \in X$ için*

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

olur.



Tıkız bir küme, sürekli bir fonksiyon altında uç değerlerini alır.

Kanıt: X tıkız ve f sürekli olduğundan, Teorem 16.2'den dolayı $f(X)$ de tıkızdır. Teorem 16.12'ye göre $f(X)$ kapalı ve sınırlıdır. $f(X)$ sınırlı olduğundan $\sup f(X)$ bir gerçel sayıdır. $f(X)$ kapalı olduğundan $\sup f(X) \in f(X)$ olur; çünkü terimleri $f(X)$'te olan ve $\sup f(X)$'e yakınsayan bir dizi vardır (okura alıştırma), ve Önsav 13.7'ye göre bu dizinin limiti olan $\sup f(X)$ sayısı $f(X)$ kümesindedir. Benzer bir kanıt $\inf f(X)$ için de yapılabilir. □

Sonuç 16.14. *$\mathbb{R}$'nin birden fazla elemanı olan her aralığı sayılamaz sonsuzluktadır. $\mathbb{R}$ sayılamaz sonsuzluktadır.*

Kanıt: Birden fazla elemanı olan her aralık kapalı ve sınırlı bir aralık içerdiğinden, sonucu kapalı ve sınırlı aralıklar için kanıtlamak yeterli. Bu durumda sonuç Heine-Borel teoreminden ve Sonuç 16.9'dan çıkar. □

Örnekler

16.38. **Teorem.** *$a, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer a noktası $\{a_1, \ldots, a_k\}$ kümesinin dışbükey zarfına*[3] *ait değilse öyle bir $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ vardır ki her $i = 1, \ldots, k$ için*

$$\langle a, b\rangle < \alpha < \langle a_i, b\rangle$$

olur[4]. Bir altkümenin dışbükey zarfı, altkümeyi içeren en küçük dışbükey kümedir, yani altkümeyi içeren tüm dışbükey kümelerin kesişimidir. (Bkz. [N4].) Burada, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x,\, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

olarak tanımlanmıştır. Elbette, $\langle x,\, y\rangle$ değeri x ve y'ye göre doğrusal ve simetriktir ve $\langle x,\, x\rangle = ||x||^2$ olur.

Kanıt: $a, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ olsun. C ile $\{a_1, \ldots, a_k\}$ kümesinin dışbükey zarfını gösterelim. C kapalı, dışbükey ve sınırlıdır. Dolayısıyla C tıkızdır. Teorem 14.9 ve 16.13'e göre bir $c \in C$ için $d(a, C) = |c - a|$ olur. Eğer $x \in C$ ve $0 < t < 1$ ise, $(1-t)x + tc \in C$ olduğundan,

$$\begin{aligned} ||c-a||^2 &\leq ||(1-t)x + tc - a||^2 \\ &= ||(1-t)(x-a) + t(c-a)||^2 \\ &= \langle (1-t)(x-a) + t(c-a),\, (1-t)(x-a) + t(c-a)\rangle \\ &= (1-t)^2||x-a||^2 + 2t(1-t)\langle x-a,\, c-a\rangle + t^2||c-a||^2 \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$(1-t)||x-a||^2 + 2t\langle x-a,\, c-a\rangle \geq (1+t)||c-a||^2$$

olur. Şimdi t'yi 1'e götürürsek,

$$\langle x-a,\, c-a\rangle \geq ||c-a||^2$$

ve

$$\langle x,\, c-a\rangle \geq \langle a,\, c-a\rangle + ||c-a||^2$$

elde ederiz. O halde $b = c - a$ ve

$$\alpha = \langle a,\, c-a\rangle + \frac{||c-a||^2}{2}$$

olarak alınabilir.

Alıştırmalar

16.39. $a < b$ kesirli sayıları için $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'de tıkız olmadığını kanıtlayın. **İpucu:** a ile b arasında kesirli olmayan bir sayı vardır. Bu kesirli olmayan sayıyı kullanarak $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin sonlu altörtüsü olmayan bir altörtüsünü bulun.

[3] Dışbükey zarfının tanımı için bkz. [N5].

[4] Bu örnek için Yusuf Ünlü'ye teşekkürler.

16.40. X tamsıralı bir küme olsun. X'in aralıklarıyla üretilen topolojisine ***sıra topolojisi*** adı verilir. X'in bir de ayrıca sup ve inf özelliğini sağladığını varsayalım, yani üstten (alttan) sınırlı ve boş olmayan her altkümesinin bir en küçük üstsınırı (en büyük altsınırı) olsun. X'in her $[a, b]$ kapalı aralığının tıkız olduğunu kanıtlayın. İpucu: Teorem 16.12'ün ikinci kanıtı.

16.41. **[Uç Değerler Teoremi].** X yukardaki gibi olsun. K tıkız bir küme olsun. $f : K \to X$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu K üzerine minimum ve maksimum değerini alır; yani öyle a, $b \in K$ vardır ki her $x \in K$ için $f(a) \le f(x) \le f(b)$ olur. Bunu kanıtlayın.

16.8 Tychonoff Teoremi

İki (dolayısıyla sonlu sayıda) tıkız topolojik uzayın kartezyen çarpımının tıkız olduğunu gördük. Aynı sonuç sonsuz sayıda topolojik uzay için de geçerlidir ama kanıtı çok daha zordur. Şimdi Tychonoff Teoremi adı altında bilinen bu teoremi kanıtlayalım. Ama önce kendi başına değerli bir sonuç kanıtlayalım.

Teorem 16.15 (Alexander'ın Öntaban Teoremi)**.** *X bir topolojik uzay ve β, bu topolojik uzayın bir öntabanı olsun. X'in tıkız olması için yeter ve gerek koşul, β'nın elemanlarından oluşan X'in her örtüsünün sonlu bir altörtüsü olmasıdır.*

Kanıt: Gereklilik bariz. Yeterliliği kanıtlayalım. X'in tıkız olmadığını varsayalım. $\mathcal{P}$, X'in, sonlu altörtüsü olmayan açık örtülerinden oluşan küme olsun. $\mathcal{P}$'yi "altküme" olma ilişkisine göre sıralayalım. $\mathcal{P}$'ye Zorn Önsavı'nı [N3] uygulayacağız. Bu amaçla $\mathcal{P}$'den bir $\mathcal{Z}$ zinciri alalım. $\bigcup \mathcal{Z}$'nin de $\mathcal{P}$'de olduğunu kanıtlayacağız. $\bigcup \mathcal{Z}$'nin bir örtü olduğu besbelli. $\bigcup \mathcal{Z}$'nin sonlu bir altörtüsü olduğunu varsayalım. Diyelim

$$U_1, \ldots, U_n \in \bigcup \mathcal{Z}$$

elemanları X'i örtüyor. Her $i = 1, \ldots, n$ için

$$U_i \in \mathcal{U}_i$$

içindeliğini sağlayan bir $\mathcal{U}_i \in \mathcal{Z}$ örtüsü seçelim. $\mathcal{Z}$ bir zincir olduğundan, $\mathcal{U}_i$ örtülerinden biri, diyelim $\mathcal{U}_j$ diğerlerini kapsar. Demek ki her $i = 1, \ldots, n$ için

$$U_i \in \mathcal{U}_j$$

olur. Ama bu da $\mathcal{U}_j$'nin sonlu bir altörtüsü var demektir. Çelişki. Dolayısıyla $\bigcup \mathcal{Z} \in \mathcal{P}$ olur ve $\mathcal{P}$'ye Zorn Önsavı'nı uygulayabiliriz. Bir başka deyişle, X'in, sonlu altörtüsü olmayan maksimal bir açık örtüsü vardır. Bu açık örtüye $\mathcal{U}$ diyelim.

Şimdi $\mathcal{U} \cap \beta$'nın X'in bir örtüsü olduğunu kanıtlayacağız.

Diyelim $\mathcal{U} \cap \beta$, X'in bir örtüsü değil. Ve diyelim bir $x \in X$ noktası $\mathcal{U} \cap \beta$'nın elemanları tarafından örtülmüyor. x elbette $\mathcal{U}$'nun elemanlarından birindedir, diyelim U'da. U, x'i içeren açık bir küme olduğundan, β da topolojinin bir öntabanı olduğundan,

$$x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n \subseteq U$$

ilişkilerini sağlayan $V_1, \ldots, V_n \in \beta$ vardır. Demek ki her $i = 1, \ldots, n$ için $x \in V_i$. Ama $x \in X$ noktası $\mathcal{U} \cap \beta$'nın elemanları tarafından örtülmediğinden hiçbir V_i kümesi $\mathcal{U}$'da olamaz. Şimdi her bir $i = 1, \ldots, n$ için, $\mathcal{U} \cup \{V_i\}$ örtüsüne bakalım. $\mathcal{U}$, sonlu örtüsü olmayan en büyük açık örtü olduğundan, $\mathcal{U} \cup \{V_i\}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır. Demek ki $\mathcal{U}$'dan sonlu sayıda açık kümenin bileşimi olan bir Y_i için,

$$X = Y_i \cup V_i$$

olur. O zaman, elbette,

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right)$$

olur. Buradan da

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right) \cup U,$$

yani

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i\right) \cup U$$

olur. Ama bu da X'in $\mathcal{U}$'nun sonlu sayıda elemanı tarafından örtüldüğü anlamına gelir. Çelişki. Demek ki $\mathcal{U} \cap \beta$, X'in bir örtüsü.

Ama bu örtü aynı zamanda β'nın elemanlarından oluşuyor. Teoremin varsayımına göre $\mathcal{U} \cap \beta$ örtüsünün sonlu bir altörtüsü var. Bu altörtü elbette aynı zamanda $\mathcal{U}$'nun sonlu bir altörtüsüdür. Önsav kanıtlanmıştır. □

Kanıtta Zorn Önsavı'nı, dolayısıyla Seçim Aksiyomu'nu kullandığımıza dikkatinizi çekeriz. Ne bu önsav ne de bir sonraki Tychonoff Teoremi Seçim Aksiyomu olmadan kanıtlanabilir.

Teorem 16.16 (Tychonoff). *$(X_i)_i$ bir topolojik uzay ailesi olsun. $\prod_i X_i$'nin tıkız olması için her X_i'nin tıkız olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: $X = \prod_i X_i$ olsun. İzdüşüm fonksiyonları sürekli olduklarından gereklilik belli. Yeterliliği kanıtlayalım.

Bir j göstergeci ve bir $U \subseteq X_j$ açık kümesi için,

$$\mathrm{pr}_j^{-1}(U) = \{x = (x_i)_i \in X : x_j \in U\}$$

olsun. Bu tür kümeler X'in bir öntabanını oluşturur. Bir önceki önsavı bu öntabana uygulayacağız.

$\mathcal{U}$, X'in $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ türünden altkümelerinden oluşan herhangi bir örtüsü olsun. $\mathcal{U}$'nun sonlu bir altörtüsünü bulacağız. $\mathcal{U}$'da $X = \mathrm{pr}_i^{-1}(X_i)$'nin olmadığını varsayabiliriz.

Bir i göstergeci için,

$$\mathcal{U}_i = \{\mathrm{pr}_i^{-1}(U) \in \mathcal{U} : U \subset X_i\}$$

olsun. $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_i$'lerin (ayrık) bileşimidir.

Bu $\mathcal{U}_i$'lerden biri X'in bir örtüsü olmalı: Çünkü aksi halde her i göstergeci için $\mathcal{U}_i$ tarafından örtülmeyen bir $x(i) \in X$ buluruz. Eğer

$$y_i = \mathrm{pr}_i(x(i)) \in X_i$$

tanımını yaparsak, o zaman X'in $(y_i)_i$ elemanı $\mathcal{U}_i$'lerin hiçbiri tarafından örtülmez, dolayısıyla bunların bileşimi olan $\mathcal{U}$ tarafından da örtülmez.

$\mathcal{U}_i$, X'in örtüsü olsun. O zaman,

$$\mathcal{A} = \{U \subseteq X_i : \mathrm{pr}_i^{-1}(U) \in \mathcal{U}_i\}$$

ailesi X_i'nin bir açık örtüsü olur. X_i tıkız olduğundan, $\mathcal{A}$'nın sonlu bir altörtüsü X_i'yi örter, diyelim

$$U_1, \ldots, U_n$$

X_i'yi örter. O zaman $\mathcal{U}_i$'nin (dolayısıyla $\mathcal{U}$'nun)

$$\mathrm{pr}_i^{-1}(U_1), \ldots, \mathrm{pr}_i^{-1}(U_n)$$

elemanları X'i örter. □

Alıştırmalar

16.42. Öyle X, Y topolojik uzay örnekleri ve $A \subseteq X \times Y$ bulun ki, $\mathrm{pr}_1(A)$ ve $\mathrm{pr}_2(A)$ tıkız olmalarına karşın A tıkız olmasın.

16.43. **[Tıkız-Açık Topoloji.]** X ve Y iki topolojik uzay olsun. $C(X, Y)$, X'ten Y'ye giden sürekli fonksiyonlar kümesi olsun. Tıkız bir $K \subset X$ ve açık bir $V \subseteq Y$ için,

$$U(K, V) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subseteq U\}$$

olsun. $C(X, Y)$ üzerine bu tür kümelerle üretilen topolojiye ***tıkız-açık topoloji*** adı verilir.

i. Eğer Y uzayı T1'se ya da Hausdorff'sa $C(X, Y)$ uzayının da aynı özelliği olduğunu kanıtlayın.

ii. Eğer X Hausdorff ise ve β, Y'nin topolojisinin bir öntabanıysa,

$$\{U(K, V) : K \text{ tıkız}, V \in \beta\}$$

kümesinin $C(X, Y)$ uzayının bir öntabanı olduğunu kanıtlayın.

Buraya kadar yaptıklarımız tıkızlık üzerine bilinmesi gerekenin minimumudur. Gelecek bölümde tıkızlık konusunda biraz daha ileri gideceğiz. Çeşitli tıkızlık kavramları göreceğiz ve bu kavramların aralarındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

17. Çeşitli Tıkızlık Kavramları

Metrik uzaylarda birbirine denk olan, ama genel olarak topolojik uzaylar için birbirine denk olmayan, gördüğümüz standart ve klasik tıkızlık kavramı dışında değişik "tıkızlık" kavramları vardır. Bunların en önemlilerinden birkaçını bu bölümde irdeleyeceğiz.

Metrik uzaylarda bu kavramların eşdeğer oldukları çok yararlı bir bilgidir ve sık sık kullanılır.

17.1 Yığılma Noktası Tıkızlık

X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in X$ olsun. Eğer a'yı içeren her açık küme A'nın a'dan farklı bir elemanını içeriyorsa, a'ya A'nın ***yığılma noktası*** ya da ***limit noktası*** dendiğini görmüştük (Altbölüm 8.4). Tüm yığılma noktalarını içeren altkümelerin kapalı olduğunu da görmüştük (Teorem 8.10). Demek ki yığılma noktası olmayan altkümeler kapalıdır.

Eğer bir topolojik uzayın her sonsuz altkümesinin bir yığılma noktası varsa o topolojik uzaya ***yığılma noktası tıkız***[1] denir.

Teorem 17.1. *Tıkız bir topolojik uzay yığılma noktası tıkızdır.*

Kanıt: X, tıkız topolojik uzay olsun. A, X'in sonsuz bir altkümesi olsun. A'nın bir yığılma noktasını bulacağız. Gerekirse A yerine A'nın sayılabilir bir altkümesini alarak A'nın sayılabilir sonsuzlukta olduğunu varsayabiliriz. Diyelim

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

A'nın yığılma noktası olmadığını varsayalım. O zaman A (tüm yığılma noktalarını içerdiğinden!) kapalıdır. Her n için, A'dan sadece a_n elemanını içeren bir U_n açık kümesi vardır. Bu U_n açık kümelerine bir de $X \setminus A$ açık kümesini eklersek, o zaman X'in bir açık örtüsünü elde ederiz. Bu açık örtünün sonlu bir altörtüsü X'i, dolayısıyla A'yı da örtmeli. A'yı örten bir örtüde $X \setminus A$ gereksizdir elbette. Demek ki A sonlu sayıda U_n'nin bileşiminin altkümesidir; ama her U_n, A'dan tek bir eleman içerdiğinden bu bir çelişkidir. $\square$

[1] İngilizcesi *limit point compact*

Yukardaki teorem, tıkız kelimesinin tıkız kümelere neden yakıştırıldığını bir kez daha söylüyor.

Yığılma noktası tıkız bir topolojik uzay tıkız olmak zorunda değildir. Aşağıda iki örnek var.

Örnekler

17.1. X herhangi bir topolojik uzay olsun. $\{0,1\}$ üzerine en kaba topolojiyi alalım ve $X \times \{0,1\}$ kartezyen çarpımını çarpım topolojisiyle ele alalım. Bu topolojik uzayın açık kümeleri ya boşkümedir ya da bir $U \subseteq X$ açık kümesi için $U \times \{0,1\}$ biçimindedir; dolayısıyla (x,i)'nin her komşuluğu $(x, 1-i)$ noktasını da içerir; bu iki nokta bir anlamda birbirinin yapışık ikizidir. Dolayısıyla bir altküme bir noktayı içeriyorsa, bu noktanın ikizi altkümenin bir yığılma noktasıdır. Dolayısıyla $X \times \{0,1\}$ yığılma noktası tıkızdır. Ama X tıkız değilse, izdüşüm fonksiyonları sürekli olduğundan, Teorem 16.2'ye göre $X \times Y$ de tıkız olamaz.

17.2. Eğer X herhangi bir tamsıralı kümeyse, X üzerine açık aralıklarla, yani $a, b \in X$ için,

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{x \in X : a < x < b\},\\ (a,\infty) &= \{x \in X : a < x\},\\ (-\infty,b) &= \{x \in X : x < b\}\end{aligned}$$

ve $(-\infty,\infty) = X$ altkümeleriyle üretilen topolojiye ***sıralama topolojisi*** denir. Eğer $X = \mathbb{N}$ $(= \omega$, sayılabilir ilk ordinal) ise, bu X üzerine ayrık topolojiyi verir elbet, pek ilginç sayılmaz.

Bundan böyle $X = \omega_1$ (sayılamaz ilk ordinal) olsun. ω_1, sayılabilir ordinaller kümesidir. Limit ordinal olmayan her $\gamma \in \omega_1$ için, $\{\gamma\}$ bu topolojide hem açık hem de kapalı bir kümedir ama eğer $\gamma \neq 0$ bir limit ordinalse, $\{\gamma\}$ açık bir küme değildir. (Neden?)

ω_1'i sıralama topolojisiyle donatırsak tıkız olmayan ama yığılma noktası tıkız bir uzay elde ederiz. Bunu gösterelim.

ω_1'in tıkız olmadığını göstermek kolay, ne de olsa ω_1, elemanlarının bileşimidir ve her α ordinali için $\alpha = (-\infty, \alpha) = [0, \alpha)$ olur (yani açıktır) ama ω_1, sayılamaz olduğundan, sonlu sayıda elemanının bileşimi olamaz. (Hatta ω_1 sayılabilir sonsuzlukta elemanının bile bileşimi olamaz; yani ω_1 tıkız olmadığı gibi hiç ama hiç tıkız değildir!)

Şimdi ω_1'in yığılma noktası tıkız olduğunu gösterelim. $A \subseteq \omega_1$ sonsuz bir altküme olsun. A'nın sayılabilir sonsuzlukta bir B altkümesi vardır. B'nin elemanlarını küçükten büyüğe doğru $(\beta_n)_n$ olarak yazalım. O zaman $\beta = \bigcup_n \beta_n = \sup_n \beta_n$ elemanı sayılabilirdir, dolayısıyla ω_1'in bir elemanıdır. β'nın A'nın bir yığılma noktası olduğunu, hatta $(\beta_n)_n$ dizisinin bir limiti olduğunu kanıtlamak zor değildir. (Bkz. Alıştırma 17.4.)

Bir Uyarı. Bir metrik uzayda bir a elemanının bir A altkümesinin yoğunlaşma noktası olması demek, a'nın, terimleri A'nın birbirinden değişik elemanlarından oluşan bir dizinin limiti olması demektir. (Çok bariz.) Ama topolojik uzaylarda böyle bir denklik yoktur. Örnek aşağıda:

Örnek 17.3. $X = \omega_1^+ = \omega_1 + 1 = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$ olsun. X, ω_1'den sonraki ilk ordinaldir. X üzerine sıralama topolojisini alalım. ω_1'in tıkız olmadığını yukarda Örnek 17.2'de gördük. Ama X tıkızdır. Ordinalleri biraz bilen biri için bunun kanıtı oldukça kolaydır ve okura bırakılmıştır (Alıştırma 17.5). ω_1, kolayca görüleceği üzere X'in ω_1 altkümesinin bir yığılma noktasıdır ama terimleri ω_1'de olan bir dizi ω_1'e yakınsayamaz. Demek ki Önsav 13.5'e göre

X topolojik uzayı metrikleşemez. Dolayısıyla ω_1 de metrikleşemez. İlerde (Alıştırma 17.33) bunun bir başka kanıtını göreceğiz.

Alıştırmalar

17.4. ω_1'in her dizisinin, ya sabit ya da kesin artan bir altdizisi olduğunu kanıtlayın. (İpucu: ω_1'in boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır; bu, her ordinaller kümesinin bir özelliğidir, bkz. [N3].) ω_1'in kesin artan bir $(\alpha_n)_n$ altdizisinin terimlerinin bileşiminin sayılabilir bir limit ordinal olması gerektiğini ve bu limit ordinalin dizinin limiti olduğunu kanıtlayın.

17.5. $X = \omega_1^+ = \omega_1 + 1 = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$ olsun. X, ω_1'den hemen sonraki ilk ordinaldir. X üzerine sıralama topolojisini alalım. ω_1'in tıkız olmadığını Örnek 17.2'de gördük. Ama X tıkızdır. Bunu kanıtlayın.

17.2 Dizisel Tıkızlık

Tanım. *Eğer topolojik bir uzayın her dizisinin yakınsak bir altdizisi varsa, o zaman bu topolojik uzaya* ***dizisel tıkız***[2] *denir.*

Her tıkız topolojik uzay dizisel tıkız değildir ve her dizisel tıkız uzay tıkız değildir. Karşıörnekler hemen aşağıda. Öte yandan birazdan kanıtlayacağımız üzere her tıkız metrik uzay dizisel tıkızdır.

Örnekler

17.6. Örnek 17.2'de ele aldığımız ω_1 uzayı dizisel tıkızdır (okura alıştırma) ama gördüğümüz üzere tıkız değildir.

17.7. Yığılma noktası tıkız bir uzay dizisel tıkız olmak zorunda değildir. Nitekim Örnek 17.1'de X dizisel tıkız değilse, $X \times \{0, 1\}$ uzayı da dizisel tıkız olamaz ama sözü edilen örnekte gösterdiğimiz üzere bu uzay yığılma noktası tıkızdır. Öte yandan dizisel tıkız topolojik uzaylar yığılma noktası tıkızdır. Bkz. Alıştırma 17.15.

17.8. A bir küme, $2 = \{0, 1\}$ ve

$$X = 2^A = \prod_A 2 = \{f : A \to \{0, 1\}\} \simeq \wp(A)$$

olsun. Yani X, A kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun. (X, A'nın altkümeler kümesiyle eşleniktir, bkz. Örnek 6.21.) 2'yi ayrık topolojiyle ve X'i de çarpım topolojisiyle donatalım. Tychonoff Teoremi'ne (Teorem 16.16) göre X tıkızdır. X'in, Örnek 6.21'de de gördüğümüz topolojisini anımsatalım; yararlı olacağına inanıyoruz. Bir $a \in A$ için,

$$U_{a,0} = \{f \in X : f(a) = 0\}$$

ve

$$U_{a,1} = \{f \in X : f(a) = 1\}$$

olsun. Bu $U_{a,\epsilon}$ altkümeleri X'in topolojisinin bir öntabanını oluşur, yani X'in açık kümeleri, $\alpha = 0, 1$ için $U_{a,\alpha}$ türünden kümelerin sonlu sayıda kesişimlerinin herhangi bir bileşimidir; yani X'in açık kümeleri, sonlu sayıda $a_1, \ldots, a_n \in A$ için,

$$f(a_1), \ldots, f(a_n)$$

[2] İngilizcesi *sequentially compact*.

değerlerinin (0 ya da 1 olarak) belirlendiği fonksiyon kümelerinin bileşimidir. Dolayısıyla bir $f \in X$ fonksiyonunu içeren bir açık küme, sonlu sayıda $a_1, \ldots, a_n \in A$ için

$$\{g \in X : g(a_1) = f(a_1), \ldots, g(a_n) = f(a_n)\}$$

kümesini de içerir. Bunlara temel açık kümeler diyelim.
Eğer X'i $\wp(A)$ olarak görmek istersek, temel açık kümeler, sonlu sayıda noktayı içeren ve sonlu sayıda başka noktayı içermeyen altkümeler kümesidir:

$$\{B \subseteq A : b_1, \ldots, b_n \in B \text{ ve } a_1, \ldots, a_m \notin B\}.$$

Elbette X'in topolojik yapısı A'nın kardinalitesine göre değişir. Aşağıda A'yı sayılabilir sonsuzlukta (mesela $\mathbb{N}$'ye eşit) ve $\mathbb{R}$ sonsuzluğunda (mesela $(0,1)$ ya da 2^ω) alarak, X'in dizisel tıkızlığını inceleyeceğiz. Birinci durumda X dizisel tıkız olacak, ikinci durumda olmayacak. Daha büyük kardinaliteler için bkz. Alıştırma 17.13. (ω ie 2^ω arasında olabilecek olası ordinallerin durumu, aksiyomatik kümeler kuramını ilgilendiren çok daha karmaşık bir konudur.)

17.9. Örnek 17.8'de $A = \mathbb{N}$ alalım. X'in dizisel tıkız olduğunu kanıtlayacağız. $(f_n)_n \in X$, herhangi bir dizi olsun. $\epsilon = 0, 1$ için

$$I_{0,\epsilon} = \{n \in \mathbb{N} : f_n(0) = \epsilon\}$$

olsun. Eğer $I_{0,0}$ sonsuz ise, $I_0 = I_{0,0}$ olsun. Aksi halde $I_{0,1}$ sonsuzdur ve bu durumda $I_0 = I_{0,1}$ olsun. Diyelim $I_0 = I_{0,\epsilon_0}$. Dizinin diğer terimlerini atıp $(f_n)_{n \in I_0}$ altdizisini tutalım ve f_{n_0} bu altdizinin ilk terimi olsun. Bu birinci aşamaydı.
İkinci aşamada, $\epsilon = 0, 1$ için,

$$I_{1,\epsilon} = \{n \in I_0 : n > n_0 \text{ ve } f_n(1) = \epsilon\}$$

olsun. Eğer $I_{1,0}$ sonsuz ise, $I_1 = I_{1,0}$ olsun. Aksi halde $I_{1,1}$ sonsuzdur ve bu durumda $I_1 = I_{1,1}$ olsun. Diyelim $I_1 = I_{1,\epsilon_1}$. Dizinin diğer terimlerini atıp $(f_n)_{n \in I_1}$ altdizisini tutalım ve f_{n_1} bu altdizinin ilk terimi olsun.
Bir sonraki aşamada, $\epsilon = 0, 1$ için,

$$I_{2,\epsilon} = \{n \in I_1 : n > n_1 \text{ ve } f_n(2) = \epsilon\}$$

olsun. Eğer $I_{2,0}$ sonsuz ise, $I_2 = I_{2,0}$ olsun. Aksi halde $I_{2,1}$ sonsuzdur ve bu durumda $I_2 = I_{2,1}$ olsun. Diyelim $I_2 = I_{2,\epsilon_2}$. Dizinin diğer terimlerini atıp $(f_n)_{n \in I_2}$ altdizisini tutalım ve f_{n_2} bu altdizinin ilk terimi olsun.
Bu prosedürü böylece devam ettirirsek $(f_{n_k})_k$ altdizisini buluruz. Bu altdizideki f_{n_k} fonksiyonları 0'da hep aynı değeri, ϵ_0 değerini alır. Ama 1'deki değerleri farklı olabilir, öte yandan eğer $k \geq 1$ ise f_{n_k} fonksiyonları 1'de hep ϵ_1 değerini alır. 2'deki değerleri de farklı olabilir, ama eğer $k \geq 2$ ise f_{n_k} fonksiyonları 2'de hep ϵ_2 değerini alır. ve genel olarak, eğer $k \geq \ell$ ise, $f_{n_k}(\ell) = \epsilon_\ell$ olur. Demek ki eğer $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2$ fonksiyonu $f(\ell) = \epsilon_\ell$ olarak tanımlanmışsa,

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f$$

olur. Söylenen her şeyin doğruluğunu kontrol etmeyi okura bırakıyoruz. □

17.10. Örnek 17.8'de $A = [0, 1]$ alalım. X'in dizisel tıkız olmadığını kanıtlayacağız. Bunun için hiçbir yakınsak altdizisi olmayan bir $(f_n : A \longrightarrow 2)_n$ dizisi bulacağız.
f_0, sabit 0 fonksiyonu olsun. f_1 fonksiyonu $[0, 1/2]$ aralığında 0 olarak, $(1/2, 1]$ aralığında 1 olarak tanımlansın. f_2'yi tanımlamak için, $[0,\ 1]$ aralığını $[0,\ 1/4]$, $(1/4,\ 1/2]$, $(1/2,\ 3/4]$ ve $(3/4,\ 1]$ olarak dört parçaya bölelim ve f_2'yi birinci ve üçüncü aralıklarda 0 olarak,

diğer aralıklarda 1 olarak tanımlayalım. Ve bunu böyle devam edelim. Genel tanım şöyle: $n \geq 1$ için,

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{eğer bir } k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1 \text{ için } x \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right] \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer bir } k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1 \text{ için } x \in \left(\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right] \text{ ise} \end{cases}$$

$(f_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi olmadığını gösterelim. Diyelim $(f_n)_n$ dizisinin bir $(f_{m_k})_k$ altdizisi f fonksiyonuna yakınsıyor. $x \in [0, 1]$ olsun. Çarpım topolojisinin tanımına göre

$$U_{f,x} = \{g \in X : g(x) = f(x)\}$$

kümesi açık bir kümedir; ayrıca f'yi içerir. Demek ki, f_{m_k} fonksiyonları yeterince büyük k göstergeçleri için bu açık kümededirler, yani yeterince büyük k göstergeçleri için $f_{m_k}(x) = f(x)$ eşitliğini sağlarlar. Bundan da şu çıkar: Her $x \in [0, 1]$ için $(f_{m_k}(x))_k$ dizisi zamanla sabit $f(x)$ dizisi olur. Mesela

$$f_{m_k}(x) = 0 \Leftrightarrow k \text{ çift} \tag{1}$$

özelliğini sağlayan bir $x \in [0, 1]$ elemanı olamaz. Ama kapalı kutular teoremini [N4] kullanarak (1) sağlayan bir nokta bulmak çok kolay. □

Alıştırmalar

17.11. Tıkız ve dizisel tıkız bir uzayın bir altuzayının dizisel tıkız olmak zorunda olmadığını görterin.

17.12. Dizisel tıkız bir uzayın kapalı bir altkümesinin dizisel tıkız olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Örnek 8.50 ve Teorem 8.10.)

17.13. $\kappa \geq 2^\omega$ bir kardinal olsun. $\{0, 1\}$ üzerine ayrık topolojiyi, $X = \prod_\kappa \{0, 1\}$ üzerine çarpım topolojisini alalım. X'in dizisel tıkız olmadığını kanıtlayın. İpucu: $|[0, 1]| = |\mathbb{R}| = 2^\omega$, Alıştırma 17.12, 6.26 ve 6.25.

17.14. Örnek 17.8'i ayrıntılı bir biçimde kanıtlayın.

17.15. Dizisel tıkız topolojik uzayların yığılma noktası tıkız olduğunu kanıtlayın.

Bu altbölümde metrik uzaylarda dizisel tıkızlıkla tıkızlığın eşdeğer kavramlar olduğunu ve daha fazlasını kanıtlayacağız.

Teorem 17.2. *Tıkız metrik uzaylar dizisel tıkızdır.*

Kanıt: X tıkız bir metrik uzay ve $(x_n)_n$ bu uzayda bir dizi olsun. Diyelim dizinin yakınsak bir altdizisi yok.

$y \in X$ olsun. Her $m > 0$ doğal sayısı için $x_n \in B(y, 1/m)$ içindeliğini sağlayan sonsuz sayıda n göstergeci olsaydı, o zaman kolaylıkla y'ye yakınsayan bir altdizi bulabilirdik. Demek ki

$$I(y) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U(y)\}$$

göstergeç kümesinin sonlu olduğu y'yi içeren bir $U(y)$ açık kümesi vardır. Her $y \in X$ için $y \in U(y)$ olduğundan, $(U(y))_{y \in X}$ ailesi X'in bir açık örtüsüdür. X tıkız olduğundan,

$$X = U(y_1) \cup \ldots \cup U(y_k)$$

eşitliğini sağlayan $y_1, \ldots, y_k \in X$ vardır. Ama o zaman da

$$I(y_1) \cup \ldots \cup I(y_k)$$

göstergeç kümesi hem sonludur hem de $\mathbb{N}$'ye eşittir. Bir çelişki. □

Sonuç 17.3. *Tıkız bir metrik uzay tamdır, yani tıkız bir metrik uzayın Cauchy dizileri yakınsaktır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. Yukardaki teoreme göre $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. Demek ki $(x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır [N4]. □

Sonuç 17.4. *X bir metrik uzay, $\emptyset \neq A$, $B \subseteq X$ iki tıkız küme olsun. Eğer $d(A, B) = 0$ ise $A \cap B \neq \emptyset$ olur. Eğer $X = \mathbb{R}^n$ ise sonucun doğru olması için A'nın tıkız, B'nin kapalı olması yeterlidir.*

Kanıt: $d(a_n, b_n) < 1/n$ eşitsizliğini sağlayan $a_n \in A$ ve $b_n \in B$ elemanları bulalım. A dizisel tıkız olduğundan $(a_n)_n$'nin yakınsak bir $(a_{n_k})_k$ altdizisi vardır. $(a_n)_n$ yerine $(a_{n_k})_k$, $(b_n)_n$ yerine $(b_{n_k})_k$ alarak, $(a_n)_n$ dizisinin bir $a \in A$ noktasına yakınsadığını varsayabiliriz. Sonra ,$(b_n)_n$'nin yakınsak bir $(b_{n_k})_k$ altdizisini bularak ve $(a_n)_n$ yerine $(a_{n_k})_k$ ve $(b_n)_n$ yerine $(b_{n_k})_k$ dizisini alarak, $(b_n)_n$ dizisinin de bir $b \in B$ noktasına yakınsadığını varsayabiliriz. Elbette

$$d(a, b) = \lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = 0$$

olur (Alıştırma 14.2). Demek ki $a = b \in A \cap B$ olur.

Şimdi $X = \mathbb{R}^n$ varsayımını yapalım. Heine-Borel teoremini kullanacağız. Yukardaki gibi $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ dizilerini seçelim. Önceki paragraftaki gibi $(a_n)_n$ dizisinin $a \in A$ noktasına yakınsak olduğunu varsayabiliriz. $B_1 = \overline{B}(a, 1) \cap B$ kümesinin sonsuz sayıda n için b_n elemanını içerdiğini göstermek zor değil. Ayrıca $d(A, B_1) = 0$ olur. Ama Heine-Borel teoreminden dolayı B_1 kümesi tıkızdır. Demek ki $A \cap B_1 \neq \emptyset$; bundan da $A \cap B \neq 0$ çıkar. □

Şimdi metrik uzaylarda Teorem 17.2'nin tersinin de doğru olduğunu kanıtlayacağız. Ama bu teorem metrik uzaylardan daha genel topolojik uzaylarda doğru olduğundan, biz daha genel bir sonuç kanıtlayacağız.

Tanım. *Eğer bir topolojik uzayda sayılabilir bir yoğun altküme varsa, o uzaya* ***ayrıştırılabilir uzay*** *ya da* ***ayrılabilir uzay***[3] *adı verilir.*

Örnekler

17.16. Her sayılabilir topolojik uzay ayrıştırılabilirdir elbette. Önemli ve zor olan sayılamaz topolojik uzayların ayrıştırılabilir olmasıdır. Örneğin $\mathbb{R}$ ve hatta $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}$'nün varlığından dolayı ayrıştırılabilir bir uzaydır.

---

[3] İngilizcesi *separable space.*

17.17. Sorgenfrey doğrusu da $\mathbb{Q}$ sayesinde ayrıştırılabilir bir uzaydır.
17.18. ω_1^+ tıkızdır ama ayrıştırılamaz. (Okura alıştırma; bkz. Alıştıma 17.5.)

Önsav 17.5. *Dizisel tıkız bir metrik uzay ayrıştırılabilir bir uzaydır.*

Kanıt: (X, d) dizisel tıkız bir metrik uzayı olsun. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. (Daha sonra çeşitli $n > 0$ tamsayıları için $\epsilon = 1/n$ alacağız.) $x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. Eğer varsa, $B(x_0, \epsilon)$ dışından bir x_1 noktası seçelim. Eğer varsa, $B(x_0, \epsilon) \cup B(x_1, \epsilon)$ dışından bir x_2 noktası seçelim. Eğer varsa,

$$B(x_0, \epsilon) \cup B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$$

dışından bir x_3 noktası seçelim. Bu prosedür bir zaman sonra bitmeli yoksa herhangi ikisi arasındaki mesafenin ϵ'dan büyük olduğu bir dizi elde ederiz ki böyle bir dizinin yakınsak bir altdizisi olamaz.

$n > 0$ herhangi bir tamsayı olsun. Yukarda yapılandan dolayı öyle

$$x_{n,0}, \ldots, x_{n,k(n)} \in X$$

noktaları vardır ki,

$$X = B(x_{n,0}, 1/n) \cup \ldots \cup B(x_{n,k(n)}, 1/n)$$

olur. Y, bütün bu $x_{n,i}$ noktalarından oluşan küme olsun:

$$Y = \{x_{n,i} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i = 0, \ldots, k(n)\}.$$

Y elbette sayılabilir bir kümedir. Y'nin X'te yoğun olduğunu kanıtlayalım. $x \in X$ herhangi bir nokta ve $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. $n > 1$ doğal sayısı $1/n < \epsilon$ eşitsizliğini sağlasın.

$$X = B(x_{n,0}, 1/n) \cup \ldots \cup B(x_{n,k(n)}, 1/n)$$

olduğundan, bir $i = 0, \ldots, k(n)$ için,

$$x \in B(x_{n,i}, 1/n)$$

olur. Demek ki,

$$d(x, x_{n,i}) < 1/n < \epsilon.$$

$x_{n,i} \in Y$ olduğundan, önsavımız kanıtlanmıştır. □

İlerde metrik uzaylarda dizisel tıkızlıkla tıkızlığın aynı anlama geldiğini göreceğiz (Teorem 17.7). Dolayısıyla yukardaki önsav tıkız metrik uzayları için de geçerli olacak. Önsavın tıkız metrik uzaylar için biraz daha hoş bir kanıtı vardır. Her $n \geq 1$ tamsayısı için X metrik uzayının $(B(x, 1/n))_{x \in X}$ açık örtüsünü alalım. Bu açık örtünün sonlu bir altörtüsünü seçelim ve bu altörtünün yuvarlarının merkezlerinden oluşan kümeye Y_n diyelim ve $Y = \bigcup_{n\geq 1} Y_n$ olsun. Y elbette sayılabilir bir kümedir. Şimdi Y'nin X'te yoğun olduğunu kanıtlayalım. $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ olsun. $B(x, \epsilon)$ ile Y'nin kesiştiğini göstermemiz lazım. Her $n \geq 1$ için $x \in B(y_n, 1/n)$ içindeliğini sağlayan bir $y_n \in Y_n$ vardır. Demek ki $y_n \in B(x, 1/n)$. Dolayısıyla n'yi $1/n < \epsilon$ olacak biçimde seçersek, $y_n \in B(x, 1/n) \subseteq B(x, \epsilon)$ olur. □

Örnek 17.19. Ayrıştırılabilir bir metrik uzay illa dizisel tıkız olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Q}$ sayılabilirdir, dolayısıyla ayrıştırılabilirdir ama tıkız değildir elbette.

Önsav 17.6. *Bir metrik uzayın ayrıştırılabilir olması için sayılabilir bir tabanı olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Eğer metrik uzayın sayılabilir bir tabanı varsa, tabanın her açık kümesinden rastgele bir eleman seçelim. Bu elemanlardan oluşan küme elbette yoğun bir altküme oluşturur.

Şimdi $(X,\ d)$ ayrıştırılabilir bir metrik uzay olsun. $Y \subseteq X$ sayılabilir ve yoğun bir altküme olsun.

$$\mathcal{T} = \{B(y, q) : y \in Y,\ q \in \mathbb{Q}\}$$

kümesinin bir taban olduğunu savlayıp kanıtlıyoruz. (Y ve $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduklarından, $\mathcal{T}$'nin sayılabilir olduğu bariz.) U herhangi bir açık küme ve $x \in U$ herhangi bir eleman olsun. Bir $\epsilon > 0$ sayısı için $B(x, \epsilon) \subseteq U$ olur. q kesirli sayısı $0 < q < \epsilon/2$ eşitsizliklerini sağlasın. Y yoğun olduğundan, $B(x, q)$ yuvarının içinde Y'den bir eleman vardır, diyelim y. Şimdi

$$B(y, q) \subseteq B(x, \epsilon)$$

içindeliğini kanıtlayalım. $z \in B(y, q)$ ise,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < q + q = 2q < \epsilon$$

olur. Demek ki,

$$x \in B(y, q) \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq U,$$

yani

$$x \in B(y, q) \subseteq U.$$

Bu da $\mathcal{T}$'nin bir taban olduğunu kanıtlar. □

Teorem 17.7. *Metrik uzaylarda dizisel tıkızlıkla tıkızlık eşdeğer kavramlardır.*

Kanıt: Teorem 17.2'den tıkız metrik uzayların dizisel tıkız olduklarını biliyoruz. X dizisel tıkız bir metrik uzay olsun. Önsav 17.5'e göre X ayrıştırılabilirdir. Önsav 17.6'e göre X'in sayılabilir bir tabanı vardır.

$(U_i)_{i\in I}$, X'in açık bir örtüsü olsun. Bu örtünün sonlu bir altörtüsü olduğunu kanıtlayacağız. U_i'leri daha da incelterek U_i'ler yerine sayılabilir tabanın elemanlarını alıp I'nin en fazla sayılabilir sonsuzlukta olduğunu varsayabiliriz. Artık $I = \mathbb{N}$ varsayımını yapabiliriz. Eğer $i \in \mathbb{N}$ için,

$$U_i \subseteq \bigcup_{j<i} U_j$$

ise U_i'yi örtüden silebiliriz. Geriye hâlâ daha sonsuz sayıda U_i kaldığını varsayalım ve U_i'leri yeniden numaralandırıp her $i \in \mathbb{N}$ için,

$$U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j \neq \emptyset$$

varsayımını yapalım.

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j$$

olsun. $(x_i)_i$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. x bu altdizinin bir limiti olsun. $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, X'in bir örtüsü olduğundan, bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$x \in U_i$$

olur. Demek ki sonsuz sayıda $j \in \mathbb{N}$ için

$$x_j \in U_i$$

olur. Ama o zaman da $x_j \in U_i$ özelliğini sağlayan bir $j > i$ bulunur ki bu da $(x_i)_i$ dizisinin tanımıyla çelişir. $\square$

Sonuç 17.8. *Sayılabilir tabanı olan dizisel tıkız bir metrik uzay tıkızdır.*

Kanıt: Teorem 17.7'nın kanıtını ikinci paragraftan itibaren okumaya başlayın. $\square$

Not. Tıkız bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında imgesi tıkız olduğundan (Teorem 16.2), eğer değer kümesi bir metrik uzaysa, o zaman tıkız bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında imgesi sınırlıdır. Bu son olgunun basit bir kanıtını verebiliriz: K tıkız bir topolojik uzay, (Y, d) bir metrik uzay ve $f : K \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. $f(K)$'nın sınırlı olmadığını varsayalım. Bir $b \in Y$ sabitleyelim. Her n doğal sayısı için öyle bir $x_n \in K$ elemanı bulalım ki, $d(f(x_n), b) \geq n$ olsun. K tıkız bir metrik uzay olduğundan, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. (Eğer $Y = \mathbb{R}$ ise Bolzano-Weierstrass Teoremi yeter.) Bu yakınsak altdiziye $(x_{n_k})_k$ diyelim. Limitine de x diyelim. O zaman, f ve d fonksiyonları sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} d(f(x), b) &= d\left(f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right), b\right) \\ &= d\left(\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right), b\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} d\left(f\left(x_{n_k}\right), b\right) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} n_k = \infty. \end{aligned}$$

Bir çelişki. □

Aşağıdaki sonuç da bu altbölümde yapılanlardan çıkar:

Sonuç 17.9. *X bir metrik uzay, $K \subseteq X$ tıkız bir altküme ve $C \subseteq X$ kapalı bir altküme olsun. Eğer $K \cap C = \emptyset$ ise, o zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, her $u \in K$ ve her $c \in C$ için $d(u, c) \geq \delta$ olur.*

Kanıt: Öyle bir δ'nın olmadığını varsayalım. O zaman K'nın öyle bir $(x_n)_n$ ve C'nin öyle $(c_n)_n$ dizisini bulabiliriz ki, $d(x_n, c_n) < 1/n$ olur. K tıkız olduğundan ve bir metrik uzayda yaşadığından, $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır, diyelim $(x_{n_k})_k$. Bu altdizinin limitine x diyelim. K kapalı olduğundan (Teorem 16.10), x, K'dadır. Öte yandan,

$$d(x, c_{n_k}) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, c_{n_k})$$

olduğundan, $(c_{n_k})_k$ dizisi de x'e yakınsar. C kapalı olduğundan $x \in C$ olur. Demek ki $x \in K \cap C = \emptyset$; bir çelişki. □

Örnekler

17.20. Altbölüm 15.2'de tanımlanmış olan p-sel tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}_p$'nin p-sel metrikle dizisel tıkız (dolayısıyla tıkız, bkz. Teorem 17.7) olduğunu gösterelim. $(x_n)_n$, bu metrik uzaydan bir dizi olsun. $x_{n,k} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ olmak üzere, $x_n \in \mathbb{Z}_p$ elemanını

$$x_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_{n,k} p^k$$

olarak yazalım. Önce $(x_{n,0})_n$ dizisine bakalım, yani dizinin ilk terimlerinden oluşan diziye. Bu bir $\{0, 1, \ldots, p-1\}$-dizisidir. Demek ki bir $y_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ için

$$I_0 = \{n : x_{n,0} = y_0\}$$

sonsuz bir kümedir. Geri kalan x_n'leri atıp sadece $(x_n)_{n \in I_0}$ altdizisine bakalım ve ayrıca bir $n_0 \in I_0$ seçelim. Ardından, $(x_{n,1})_{n \in I_0}$ dizisine bakalım. Bu da bir $\{0, 1, \ldots, p-1\}$-dizisidir. Demek ki bir $y_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ için

$$I_1 = \{n \in I_0 : x_{n,1} = y_1\}$$

sonsuz bir kümedir. Geri kalan x_n'leri atıp sadece $(x_n)_{n\in I_1}$ altdizisine bakalım ve ayrıca bir $n_0 < n_1 \in I_1$ seçelim. Ardından, $(x_{n,1})_{n\in I_1}$ altdizisine bakalım. Bu da elbette bir $\{0, 1, \ldots, p-1\}$-dizisidir. Demek ki bir $y_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ için

$$I_2 = \{n \in I_1 : x_{n,2} = y_2\}$$

sonsuz bir kümedir. Geri kalan x_n'leri atıp sadece $(x_n)_{n\in I_2}$ altdizisine bakalım. Bir $n_0 < n_1 < n_2 \in I_2$ seçelim. Bunu böylece devam ettirelim. Böylece elde edilen $(x_{n_i})_i$ dizisi yakınsak bir dizidir çünkü $\sum_{i=0}^{\infty} y_i p^i \in \mathbb{Z}_p$ elemanına yakınsar.

17.21. Örnek 17.20'de $\mathbb{Z}_p$'nin dizisel tıkız, dolayısıyla tıkız olduğunu kanıtladık. Burada $\mathbb{Z}_p$'nin tıkız olduğunu daha doğrudan bir yöntemle kanıtlayacağız: $\mathbb{Z}_p$'nin her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü olduğunu göstereceğiz. Yöntemimiz Heine-Borel Teoremi'nin birinci kanıtına benzeyecek (Teorem 16.12).

$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ merkezli, $1/p^n$ yarıçaplı yuvarlar,

$$a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n\mathbb{Z}_p$$

kümeleridir ve bunlar elbette topolojinin bir tabanını oluştururlar.

Yuvarlardan oluşan ve sonlu altörtüsü olmayan bir $\mathcal{U}$ örtüsü alalım. Bu örtünün yuvarlardan oluştuğunu varsayabiliriz.

$\mathbb{Z}_p$, p ayrık kümenin bileşimidir: Bir $i = 0, 1, \ldots, p-1$ için, i ile başlayan elemanların, yani p'ye bölündüğünde i kalanların kümelerinin, yani $i + p\mathbb{Z}_p$ yuvarlarının ayrık bileşimidir:

$$\mathbb{Z}_p = p\mathbb{Z}_p \sqcup (1 + p\mathbb{Z}_p) \sqcup \ldots \sqcup (p - 1 + p\mathbb{Z}_p).$$

Bu p kümeden en az biri örtümüzün sonlu bir altörtüsü tarafından örtülmez. Diyelim $i_0 + p\mathbb{Z}_p$ kümesi sonlu bir altörtü tarafından örtülmüyor. (Örtülmeyen en küçük i_1'i seç, böylece Seçim Aksiyomu'nu kullanmamış oluruz.)

$i_0 + p\mathbb{Z}_p$ kümesi de p ayrık kümenin bileşimidir:

$$\begin{aligned} i_0 + p\mathbb{Z}_p &= i_0 + p\,(p\mathbb{Z}_p \sqcup (1 + p\mathbb{Z}_p) \sqcup \ldots \sqcup (p - 1 + p\mathbb{Z}_p)) \\ &= (i_0 + p^2\mathbb{Z}_p) \sqcup (i_0 + p + p^2\mathbb{Z}_p) \sqcup \ldots \sqcup (i_0 + (p-1)p + p^2\mathbb{Z}_p). \end{aligned}$$

Bu p kümeden en az biri örtümüzün sonlu bir altörtüsü tarafından örtülmez. Diyelim $i_0 + i_1 p + p^2\mathbb{Z}_p$ kümesi sonlu bir altörtü tarafından örtülmüyor. (Örtülmeyen en küçük i_1'i seç.)

Böyle gide gide, öyle $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ sayıları buluruz ki,

$$i_0 + i_1 p + \cdots + i_{n-1}p^{n-1} + p^n\mathbb{Z}_p$$

kümesi, örtümüzün sonlu bir altörtüsü tarafından kaplanmaz.

Şimdi

$$a = \sum_k i_k p^k \in \mathbb{Z}_p$$

elemanını ele alalım. Örtümüzün bir yuvarı bu elemanı barındırır. Diyelim örtünün

$$i_0 + i_1 p + \cdots + i_{n-1}p^{n-1} + p^n\mathbb{Z}_p$$

yuvarı a'yı içeriyor. Ama o zaman

$$i_0 + i_1 p + \cdots + i_{n-1}p^{n-1} + p^n\mathbb{Z}_p$$

kümesi örtünün (tek bir yuvarı) tarafından kaplanır, ki bu kümeler örtünün sonlu sayıda yukarı tarafından kaplanmasın diye itinayla seçilmişlerdi. Çelişki. (Kanıtın ne kadar çok Heine-Borel Teoremi'nin kanıtına benzediğini farkedin lütfen.)

17.3 Tümden Sınırlılık

Heine-Borel Teoremi (Teorem 16.12) bir anlamda tam metrik uzaylara genelleştirilebilir. Önce bir tanım verelim.

Her $\epsilon > 0$ için sonlu sayıda ϵ yarıçaplı yuvarlarla kaplanabilen bir metrik uzaya ***tümden sınırlı***[4] adı verilir.

Bunun eşdeğer bir tanımı şöyledir: (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$\sup\{d(x, F) : x \in X\} < \epsilon$$

(ya da $\leq \epsilon$) eşitsizliğini sağlayan sonlu bir $F \subseteq X$ altkümesi varsa, o zaman X'e ***tümden sınırlı*** denir.

Bir başka eşdeğer tanım da şöyledir: Her $\epsilon > 0$ için, metrik uzay, çapı en fazla ϵ olan kümelerle kaplanabiliyorsa metrik uzaya ***tümden sınırlı*** denir.

Bu tanımların eşdeğer olduklarının kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır. Son koşuldan, tümden sınırlı metrik uzaylarının altuzaylarının da tümden sınırlı olduğu çıkar.

Tümden sınırlı metrik uzaylar sınırlıdır elbette ama bunun tersi doğru değildir, örneğin ayrık metrikle donatılmış sonsuz bir küme sınırlıdır ama tümden sınırlı değildir. Öte yandan $\mathbb{R}^n$'nin bir altkümesinin tümden sınırlı olmasıyla sınırlı olması arasında bir ayrım yoktur. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Tıkız metrik uzaylar tümden sınırlıdır elbette. Öte yandan tıkız olmayan tümden sınırlı metrik uzaylar vardır, örneğin $(0, 1)$ açık aralığı.

Aşağıdaki sonuç yararlı olabilir:

Önsav 17.10. *Eğer bir metrik uzayın bir A altkümesi tümden sınırlıysa, A'nın kapanışı da tümden sınırlıdır.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ ve $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon/2)$ olsun. O zaman, Teorem 8.4.vi ve sayfa 176'da yapılanlara göre,

$$\operatorname{cl} A = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon/2)\right) = \bigcup_{i=1}^n \operatorname{cl}(B(a_i, \epsilon/2)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{B}(a_i, \epsilon/2)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon))$$

olur. □

Alıştırmalar

17.22. Tümden sınırlı bir metrik uzayının sınırlı olduğunu kanıtlayın.

17.23. Tümden sınırlılığın yukarda verilen üç tanımının eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

17.24. Tümden sınırlı bir metrik uzayın altuzaylarının da tümden sınırlı olduğunu kanıtlayın.

17.25. Bir altkümenin tümden sınırlı olması için kapanışının da tümden sınırlı olmasının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

---

[4] İngilizcesi *totally bounded.*

17.26. $\mathbb{R}^n$'nin bir altkümesinin tümden sınırlı olmasıyla sınırlı olması arasında bir ayrım olmadığını kanıtlayın.

17.27. Sayılabilir sayıda X_n ($n \in \mathbb{N}$) metrik uzayı alalım. $X = \prod_n X_n$ uzayının metrikleşebileceğini Alıştırma 13.12'de gördük. Eğer her X_n tümden sınırlıysa, X'in de (bu metrikle) tümden sınırlı olduğunu kanıtlayın.

17.28. Alıştırma 17.27'yı kullanarak Tychonoff Teoremi'ni sayılabilir sayıda metrik uzay için Seçim Aksiyomu'nu kullanmadan kanıtlayın [Mu].

Örnekler

17.29. Alıştırma 11.21'deki $\wp(\mathbb{N})$ metrik uzayının tümden sınırlı olduğunu, dolayısıyla birazdan kanıtlayacağımız Teorem 17.12'e göre tıkız olduğunu gösterelim. $\wp(\mathbb{N})$ metrik uzayını $1/2^n$ yarıçaplı sonlu sayıda yuvarla kaplamak yeterli. Nitekim bunun için tam 2^{n+1} tane yuvar yetiyor: Yuvarların merkezleri $\{0, 1, \ldots, n\}$ kümesinin altkümeleri olsun. Eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ise, A'nın $A \cap \{0, 1, \ldots, n\}$ kümesine olan mesafesi en fazla $1/2^{n+1}$'dir, dolayısıyla $1/2^n$'den küçüktür. Demek ki

$$\wp(X) = \bigcup_{a \subseteq \{0,1,\ldots,n\}} B(a, 1/2^n).$$

olur.

Teorem 17.11. *Bir metrik uzayın tıkız olması için gerek ve yeter koşul tam ve tümden sınırlı olmasıdır.*

Kanıt: Gereklilik bu aşamada oldukça kolay: Tümden sınırlılık bariz ve tamlık Sonuç 17.3'ten çıkıyor.

Şimdi (X, d) tam ve tümden sınırlı bir metrik uzay olsun. Teorem 17.7'ya göre, X'in dizisel tıkız olduğunu kanıtlamak yeterli; dolayısıyla, X tam olduğundan, X'in her dizisinin bir Cauchy altdizisi olduğunu kanıtlamak yeterli.

$(x_n)_n$, bir dizi olsun. X'i 1 yarıçaplı sonlu sayıda yuvarla kaplayalım. Sonsuz sayıda n göstergeci için, dizinin x_n terimi bu yuvarlardan birinin, diyelim B_1'in içine düşer. Dizinin diğer terimlerini unutup, tüm terimlerin B_1'de olduğunu varsayalım. B_1'den dizide olan herhangi bir x_{n_1} terimi seçelim. (Aslında n_1 göstergecini seçiyoruz.) Bu x_{n_1} bulacağımız Cauchy dizisinin birinci terimi olacak. Sonra B_1'i $1/2$ yarıçaplı sonlu sayıda yuvarla kaplayalım (bu mümkündür çünkü B_1 de tümden sınırlıdır.) Sonsuz sayıda n göstergeci için, dizinin x_n terimi bu $1/2$ yarıçaplı sonlu sayıdaki yuvardan birinin içine düşer, diyelim B_2'nin içine düştü. Dizinin diğer terimlerini unutup, bundan böyle tüm terimlerin B_2'de olduğunu varsayalım. Öyle bir $n_2 > n_1$ bulalım ki $x_{n_2} \in B_2$ olsun. Biraz önce yaptığımız varsayımdan dolayı x_{n_2} terimi (ve bundan sonra bulacağımız terimler de) sadece B_2'de değil, ayrıca B_1'dedir de. (Hatta B_1'i B_1 metrik uzayının yuvarlarıyla kapladığımızdan, $B_2 \subseteq B_1$ olur; ama bunun pek önemi olmayacak.) Bu x_{n_2}, bulacağımız Cauchy dizisinin ikinci terimidir. Sonra B_2'yi $1/3$ yarıçaplı sonlu sayıda yuvarla kaplayalım ve buna yukardaki prosedürü uygulayalım. Sonuç olarak, her biri $1/k$ yarıçaplı öyle B_k

yuvarları ve öyle $n_1 < n_2 < \ldots$ göstergeçleri buluruz ki, her k için

$$x_{n_k} \in B_k \cap B_{k-1} \cap \ldots \cap B_1$$

olur. (Aslında sadece $x_{n_k} \in B_k$ demek yeterliydi.) Eğer $k \geq \ell$ ise $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq 2/k$ olur. Dolayısıyla $(x_{n_k})_k$ bir Cauchy dizisidir. Teorem kanıtlanmıştır. □

Sonuç 17.12. *Tam bir metrik uzayın bir altkümesinin tıkız olması için kapalı ve tümden sınırlı olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Önce gerekliliği kanıtlayalım. Tümden sınırlılık bariz. Teorem 16.10 de tıkız bir altkümenin kapalı olması gerektiğini söylüyor.

Aksi istikamette, (X, d) tam bir metrik uzay olsun. X tam olduğundan, X'in her kapalı altkümesi de tamdır. Bu aşamada sonuç yukardaki teoremden çıkar. □

Alıştırma 17.30. Bir (X, d) metrik uzayında, yukarıdaki kanıtlarda kullanılan

$$\overline{B(a,r)} \subseteq \overline{B}(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}$$

içindeliğini kanıtlayın. Eşitliğin doğru olmayabileceğini gösterin.

Sonuç 17.13. *Tam bir metrik uzayın bir altkümesi ancak ve ancak kapanışı tıkızsa tümden sınırlıdır.*

Kanıt: Altkümenin kapanışı tıkızsa, o zaman kapanış tümden sınırlıdır elbette, dolayısıyla altküme de tümden sınırlıdır.

Şimdi altkümenin tümden sınırlı olduğunu varsayalım. Önsav 17.10'a göre altkümenin kapanışı da tümden sınırlıdır. Teorem 17.12'e göre de kapanış tıkızdır. □

17.4 Sayılabilir Tıkızlık

Eğer bir topolojik uzayın sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa o uzaya ***sayılabilir tıkız***[5] denir.

Örnek 17.31. Her tıkız uzay sayılabilir tıkızdır elbet ama bunun tersi doğru değildir. Tersinin doğru olmadığına standart örnek ω_1 (sayılamaz ilk ordinal) üzerine kurulan "sıra topolojisi"dir (bkz. Örnek 17.2). Bu uzay sayılabilir tıkızdır (okura alıştırma) ama bildiğimiz üzere tıkız değildir.

Teorem 17.14. *Dizisel tıkız bir topolojik uzay sayılabilir tıkızdır.*

[5] İngilizcesi *countably compact.*

Kanıt: X, dizisel tıkız bir topolojik uzay olsun. $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, X'in sonlu bir altörtüsü olmayan sayılabilir bir açık örtüsü olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in X \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_{n-1})$$

olsun. Demek ki U_n, ancak sonlu sayıda $i \in \mathbb{N}$ için x_i'yi içerir. $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi yakınsaktır. x, $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisinin bir limiti olsun. $x \in U_n$ olsun. O zaman sonsuz sayıda $i \in \mathbb{N}$ için $x_i \in U_n$ olur ki bu da $(x_n)_n$ dizisinin seçimiyle çelişir. □

Teorem 17.15. *Sayılabilir tıkız bir topolojik uzay* (*dolayısıyla tıkız bir topolojik uzay da*) *yığılma noktası tıkızdır.*

Kanıt: Teorem 17.1'in kanıtına dikkatlice bakarsanız, aslında bu (daha güçlü) teoremin kanıtlandığını görürsünüz. □

17.5 Metrik Uzaylarda Tıkızlık Kavramları

Şimdiye kadar birçok tıkızlık kavramı gördük:

1. Tıkızlık,
2. Dizisel tıkızlık,
3. Sayılabilir tıkızlık,
4. Yığılma noktası tıkızlık.

$2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ ve $1 \Rightarrow 3$ çıkarımlarının doğru olduğunu (Teorem 17.14, 17.15) ama ters çıkarımların genelde doğru olmadığını (Örnek 16.1, 16.2, 16.6, 16.19, 16.31), öte yandan bunlardan bazılarının metrik uzaylarda denk kavramlar olduklarını gördük. Aslında metrik uzaylarda tüm bu tıkızlık kavramları birbirine denktir.

Teorem 17.16. *Bir metrik uzayın* (1) *tıkız,* (2) *dizisel tıkız,* (3) *sayılabilir tıkız ya da* (4) *yığılma noktası tıkız olması arasında ayrım yoktur, biri doğruysa diğerleri de doğrudur.*

Kanıt: Teorem 17.7'ya göre, metrik uzaylarda dizisel tıkızlıkla tıkızlık eşdeğerdir. Demek ki $1 \Leftrightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. Dolayısıyla yığılma noktası tıkız bir metrik uzayın dizisel tıkız olduğunu kanıtlamalıyız.

(X, d), yığılma noktası tıkız bir metrik uzay olsun. $(x_n)_n$, bu uzaydan bir dizi olsun.

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Eğer A sonluysa, elbette $(x_n)_n$ dizisinin sabit, dolayısıyla yakınsak bir altdizisi vardır. Eğer A sonsuzsa, varsayıma göre A'nın bir yığılma noktası vardır. Diyelim x. Şimdi x'e yakınsayan bir altdizi bulmak zor değildir: Her $k > 0$ doğal sayısı için,

$$B(x, 1/k) \cap A$$

kümesi sonsuzdur. Bu olguyu kullanarak, öyle

$$n_1 < \ldots < n_k < \ldots$$

göstergeçleri bulunabilir ki, $x_{n_k} \in B(x, 1/k)$ olur. □

Son olarak bu teoremin ilginç bir sonucunu görelim.

(X, d) tıkız bir metrik uzaysa, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden her sürekli fonksiyonun imgesinin tıkız, dolayısıyla sınırlı olduğunu biliyoruz. Şimdi bu sonucun ters istikametini kanıtlayacağız:

Önerme 17.17. (X, d) *bir metrik uzaysa ve* X*'ten* $\mathbb{R}$*'ye giden her sürekli fonksiyon sınırlıysa, o zaman* X *tıkızdır*[6].

Kanıt: (X, d) bu varsayımları sağlayan bir metrik uzay olsun. Diyelim X tıkız değil. O zaman Teorem 17.16'e göre X sayılabilir tıkız olamaz. $(U_n)_n$ sonlu altörtüsü olmayan X'in sayılabilir bir açık örtüsü olsun. $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F_n = \bigcap_{i=0}^{n} U_i^c \neq \emptyset$$

olsun. F_n'ler giderek küçülen kapalı kümelerdir ve ayrıca $\bigcap_n F_n = \emptyset$ olur. Şimdi $x \in X$ için

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(x, F_n)}{1 + d(x, F_n)}$$

tanımını yapalım. (Sağdaki seri elbette yakınsaktır.) Ayrıca Weierstrass M-Testi [N4] ve Teorem 14.9 sayesinde g'nin sürekli olduğunu anlarız. $\bigcap_n F_n = \emptyset$ olduğundan, her x'in içinde olmadığı bir F_n vardır, dolayısıyla $g(x) > 0$ olur. Demek ki $f(x) = 1/g(x)$ kuralıyla belirlenmiş fonksiyon da süreklidir. Şimdi bir

$$x \in F_n \subseteq F_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq F_0$$

alalım. O zaman,

$$g(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(x, F_n)}{1 + d(x, F_n)} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

ve $f(x) \geq 2^n$ olur. Demek ki f sınırsızdır. Çelişki. □

Alıştırmalar

[6]Bu önermeyi ve kanıtını sunan Zafer Ercan ve Yusuf Ünlü'ye teşekkürler. Tüm sürekli fonksiyonların sınırlı olduğu topolojik uzaylara ***yalancıktan tıkız*** denir. İngilizcesi *pseudo-compact*.

17.32. Alıştırma 3.10'teki örnek tıkız değildir (Hausdorff da değildir) ama bu topolojik uzaydan $\mathbb{R}$'ye giden her sürekli fonksiyon sabit bir fonksiyon olduğundan, her sürekli fonksiyon sınırlıdır.

17.33. Tüm sürekli fonksiyonların sınırlı olduğu, Hausdorff olan ama tıkız olmayan (dolayısıyla metrikleşemeyen, bkz Önsav 17.17) bir topolojik uzay örneği ω_1'dir. İpucu: $\alpha_n \in \omega_1$ olmak üzere sınırsız ve mutlak artan bir $(f(\alpha_n))_n$ dizisi bulalım (gerekirse f yerine $-f$ alarak). Her tamsıralı kümede olduğu gibi $(\alpha_n)_n$ dizisinin de ya mutlak artan ya da mutlak azalan bir altdizisi vardır [N4]. Ama ordinallerde mutlak azalan dizi olamaz [N3]. Demek ki hem $(\alpha_n)_n$ hem de $f(\alpha_n)$ dizisinin mutlak artan olduğunu varsayabiliriz. $\alpha = \bigcup_n \alpha_n \in \omega_1$ olsun. (α, $(\alpha_n)_n$ dizisinin limitidir.) f'nin α'da sürekliliği arzu edilen çelişkiyi verecektir. Böylece ω_1'in metrikleşemeyeceği bir kez daha kanıtlanmış olur.

18. Tıkızlık Üzerine Daha Fazla

18.1 Lebesgue Sayısı

Bir $(X,\, d)$ metrik uzayının sınırlı ve boş olmayan bir A altkümesinin ***çapı***,

$$d(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır. $B(a,r)$ yuvarının çapı en fazla $2r$'dir. ($2r$'den de küçük olabilir!)

Aşağıdaki oldukça teknik önsav tıkız kümelerin açık örtülerinin çok küçük çaplı elemanlarının gereksiz olduğunu söylüyor.

Önsav 18.1 (Lebesgue Sayısı)**.** *(X,d) tıkız bir metrik uzay ve $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ ailesi, X'in açık bir örtüsü olsun. O zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki X'in çapı en fazla δ olan her altkümesi $\mathcal{U}$ ailesinin bir elemanının (yani U_i'lerden birinin) altkümesidir.*

Kanıt: Eğer U_i'lerden biri X'e eşitse, kanıtlayacak bir şey yok. Bundan böyle hiçbir U_i'nin X'e eşit olmadığını varsayalım. $\mathcal{U}$ ailesinin sonlu bir $\mathcal{V}$ altörtüsünü seçelim. Diyelim,

$$\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_n\}.$$

$C_i = U_i^c$ olsun. C_i kapalıdır. $d(x, C_i)$, x'in C_i'ye olan uzaklığı olsun. (Bkz. Bölüm 14.3.)

$$U_1 \cup \ldots \cup U_n = X$$

olduğundan,

$$C_1 \cap \ldots \cap C_n = \emptyset$$

olur. Demek ki X'in her x elemanı C_i kümelerinden en az birinin elemanı değildir ve, C_i kapalı olduğundan, $d(x, C_i)$ sayılarından en az biri pozitiftir (bkz. sayfa 187) ve

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) > 0$$

olur.

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$$

formülüyle tanımlanan

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu da biliyoruz (Teorem 14.9). X tıkız olduğundan, f minimum değerini alır. Bu minimum değer x_0'da alınmış olsun ve

$$\delta = f(x_0) > 0$$

olsun. B, çapı δ'dan küçük bir altküme olsun. $x \in B$ olsun. Demek ki

$$B \subseteq B(x, \delta).$$

Ve $d(x, C_1), \ldots, d(x, C_n)$ sayılarının en büyüğü $d(x, C_i)$ olsun. O zaman,

$$\delta \le f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) \le d(x, C_i)$$

olur. Demek ki

$$B(x, \delta) \cap C_i = \emptyset,$$

yani

$$B(x, \delta) \subseteq U_i.$$

Ama $B \subseteq B(x, \delta)$ olduğundan, bu son içindelik istediğimizi kanıtlar. □

X'in verilmiş bir $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü için, yukardaki önsavdaki gibi bir $\delta > 0$ sayısına $\mathcal{U}$'nun ***Lebesgue sayısı*** adı verilir. Elbette bir Lebesgue sayısından daha küçük sayılar da Lebesgue sayılarıdır. Lebesgue sayılarının varlığını bir sonraki altbölümde kullanacağız.

18.2 Düzgün Süreklilik

Düzgün süreklilik, sürekliliğin çok özel bir halidir. Tanım, genel topolojik uzaylarda değil, metrik uzaylarda geçerlidir. Daha önce de gördüğümüz tanımı anımsayalım: (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Önce f'nin sürekli olduğunun ne demek olduğunu anımsatalım. f'nin sürekli olması için f'nin X'in her a noktasında sürekli olması gerekmektedir; yani her $a \in X$ için şu özellik doğru olmalıdır:

Her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ olmalıdır ki, her $x \in X$ için

$$d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$$

Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, süreklilik,

$$\forall a\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon)$$

önermesine denktir. Buradaki δ sayısı verilmiş olan ϵ'a göre değişir elbette, ama a'ya göre de değişebilir, hatta çoğu zaman a'ya göre değişir. Bu yüzden kimi zaman δ yerine $\delta_{a,\epsilon}$ yazılır. Ama kimi zaman da δ sayısını a'dan bağımsız (sadece ϵ'a bağımlı) seçebiliriz. O zaman çok özel, çok daha güçlü bir süreklilik söz konusu olur. Bu durumda f'nin ***düzgün sürekli*** olduğu söylenir. Yani eğer

Her $\epsilon > 0$ ve X'in her a ve x elemanları için

$$d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ varsa

o zaman f fonksiyonuna ***düzgün sürekli*** denir. Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, düzgün süreklilik,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a\ \forall x\ (d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon)$$

önermesine denktir. Burada "$\forall a$" ifadesinin en baştan ortalara, "$\exists \delta > 0$" ifadesinden sonraya gittiğine dikkatinizi çekerim: Verilmiş bir $\epsilon > 0$ için **tüm** a ve x'ler için geçerli olan bir $\delta > 0$ bulunuyor. Ama artık a ile x arasında büyük bir ayrım yok, dolayısıyla a ve x yerine x ve y kullanırsak daha şık bir tanıma ulaşmış oluruz: Düzgün süreklilik

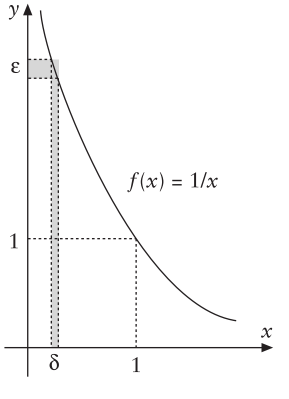
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \forall y\ (d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon)$$

önermesine denktir.

Eğer $A \subseteq X$ ise ve $f_{|A}$ fonksiyonu düzgün sürekliyse, o zaman f'nin A ***üzerinde düzgün sürekli*** olduğu söylenir.

Örnekler

18.1. $(0, \infty)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanan fonksiyon düzgün sürekli değildir çünkü a küçüldükçe δ sayısı küçülür.



Öte yandan (sınırlı ya da sınırsız) kapalı bir aralığa kısıtlarsak bu fonksiyon düzgün sürekli olur. Yani $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanmış fonksiyon kapalı aralıklar üzerine düzgün süreklidir.

Düzgün sürekliliğin yararlarını daha ilerde göreceğiz ama tıkız kümelerden sözederken düzgün süreklilikten sözetmemek olmazdı.

Teorem 18.2. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay olsun. Eğer X tıkızsa, X'ten Y'ye giden her sürekli fonksiyon düzgün süreklidir.*

Kanıt: $f : X \to Y$ herhangi bir sürekli fonksiyon olsun. $\epsilon > 0$ olsun.

$$(B(y, \epsilon/2))_{y\in Y}$$

yuvarlar ailesi Y'nin açık bir örtüsüdür. f sürekli olduğundan,

$$(f^{-1}(B(y, \epsilon/2)))_{y\in Y}$$

ailesi de X'in bir açık örtüsüdür. $\delta > 0$ bu açık örtünün Lebesgue sayısı olsun. Şimdi $x_1,\ x_2 \in X$ olsun ve $d_X(x_1, x_2) < \delta$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x_1,\ x_2\}$ kümesinin çapı δ'dan küçüktür. Demek ki bir $y \in Y$ için,

$$\{x_1,\ x_2\} \subseteq f^{-1}(B(y, \epsilon/2)),$$

yani

$$x_1,\ x_2 \in f^{-1}(B(y, \epsilon/2)),$$

yani

$$f(x_1),\ f(x_2) \in B(y, \epsilon/2),$$

yani

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

olur. Bu da f'nin düzgün sürekliliğini kanıtlar. $\square$

Alıştırmalar

18.2. $f(x) = x^2$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığını kanıtlayın.

18.3. Gerçel değerli iki düzgün fonksiyonun toplamının düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın. Çarpma için bunun doğru olmadığını gösterin.

18.4. $f(x) = \sqrt{x}$ kuralıyla tanımlanmış $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın.

18.5. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu düzgün sürekli midir?

18.6. $\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığını ama sınırlı ya da sınırsız kapalı aralıklar üzerine düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın. Sonucu artan içbükey fonksiyonlar için genelleştirin.

18.3 Alexandroff Tek Nokta Tıkızlaması

Bir topolojik uzay tıkız değilse tıkız değildir, yapacak bir şey yok. Ama uzayı tıkız bir topolojik uzay içine (altuzay olarak) gömebiliriz. Ya da başka bir dille söyleyelim: Tıkız olmayan topolojik uzayı genişletip ve bu genişlemiş küme üstüne uygun bir topoloji koyarak, genişlemiş kümeyı tıkız bir topolojik uzaya dönüştürebiliriz. Hatta bunu orijinal uzayımız genişletilmiş kümenin yoğun bir altkümesi olacak biçimde bile yapabiliriz.

Bu dediklerimizi yapmanın, yani bir uzayı ***tıkızlaştırmanın*** değişik yöntemleri vardır. Değişik tıkızlaştırma yöntemleri birbirinden tamamen değişik sonuçlar verebilirler. Her biri önemlidir.

En kolay tıkızlaştırma yöntemi, uzaya, "sonsuza" diye betimlenen bir yere, genellikle ∞ diye gösterilen yeni bir eleman eklemektir. Eleman eklemek yetmez tabii, bir de bu yeni küme üzerine (eski kümenin topolojisiyle uyumlu) bir topoloji koymak gerekir. Bu topoloji, eski uzayda "sonsuza gittiği hissedilen" dizilerin yeni uzayda artık ∞ elemanına yakınsayacak biçimde yapılır.

Alexandroff Tek Nokta Tıkızlaması. X herhangi bir topolojik bir uzay olsun. ∞, X'te olmayan yepyeni bir eleman olsun.

$$Y = X \cup \{\infty\}$$

tanımını yapalım. Y üzerine bir topoloji tanımlayacağız. Y'nin açık altkümeleri ya X'in açık altkümeleri (birinci türden kümeler) ya da X'in tıkız ve kapalı bir K altkümesi için

$$(X \setminus K) \cup \{\infty\}$$

biçiminde yazılan altkümeleri (ikinci türden kümeler) olsun. (Buradaki $X \setminus K$ kümesinin X'te açık olduğuna dikkatinizi çekeriz. Bundan böyle X'in bir A altkümesi için $X \setminus A$ yerine A^c yazacağız.)

Teorem 18.3. *Yukarda betimlenen kümeler Y üzerine bir topoloji tanımlarlar ve Y böylece tıkız bir topolojik uzay olur. Ayrıca*

a. *X, Y'nin açık bir altkümesidir; dolayısıyla X'in topolojisi Y'den X'e indirgenmiş topolojidir.*

b. *Eğer X tıkız değilse, X, Y'de yoğundur.*

c. *Y'nin Hausdorff olması için X'in Hausdorff ve yerel tıkız[1] olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Önce betimlenen kümelerin bir topolojide açık altkümelerin uyması gereken kurallara uyduklarını gösterelim.

---

[1] Eğer bir topolojik uzayın her noktasının, kapanışı tıkız olan bir komşuluğu varsa, o zaman o topolojik uzaya ***yerel tıkız*** denir. Örneğin $\mathbb{R}$ yerel tıkızdır, ama $\mathbb{Q}$ değildir.

$\emptyset$, X'te açık olduğundan Y'de de açıktır. İkinci türden kümelerde $K = \emptyset$ alırsak, Y'nin de Y'de açık olduğunu görürüz.

Birinci türden iki açık kümenin kesişiminin açık olduğu belli.

Şimdi birinci türden bir $U \subseteq X$ açık kümesiyle, ikinci türden bir $K^c \cup \{\infty\}$ açık kümesi alıp bu ikisini kesiştirelim:

$$U \cap (K^c \cup \{\infty\}) = U \cap K^c = (U^c)^c \cap K^c = (U^c \cup K)^c.$$

Ama $U^c \cup K$, X'te kapalı olduğundan, bu kesişim birinci türden bir açık kümedir.

Şimdi de ikinci türden iki

$$K^c \cup \{\infty\} \text{ ve } L^c \cup \{\infty\}$$

açık kümesi alıp bu ikisini kesiştirelim. Bu kesişimin ikinci türden bir küme olduğunu kanıtlamak için

$$K^c \cap L^c = (K \cup L)^c$$

kümesinin X'teki tümleyeninin, yani $K \cup L$ kümesinin X'te kapalı ve tıkız olduğunu kanıtlamalıyız, ki bu da bariz.

Şimdi bileşime geçelim. Birinci türden kümelerin bileşiminin gene birinci türden küme olduğu belli. İkinci türden kümelerin bileşimine bakalım.

$$K_i^c \cup \{\infty\}$$

ikinci türden kümeler olsun (ve bunlardan en az bir tane olsun). Bunların bileşiminin gene ikinci türden olduğunu kanıtlamak için

$$\bigcup_i K_i^c = \left(\bigcap_i K_i\right)^c$$

kümesinin X'teki tümleyeninin, yani

$$\bigcap_i K_i$$

kümesinin X'te kapalı ve tıkız olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Teorem 16.3'e göre kapalı olduğunu kanıtlamak yeterli. Ama K_i'ler X'te kapalı, dolayısıyla kesişimleri de X'te kapalı.

Son olarak birinci türden açık bir kümeyle ikinci türden açık bir kümenin bileşiminin ikinci türden açık bir küme olduğunu kanıtlamalıyız. Bu da oldukça kolay: Okurun tahmin edeceği notasyonla, bu, $U \cup K^c = (U^c \cap K)^c$ eşitliğinden ve $U^c \cap K$ kümesinin kapalı ve K'nın (dolayısıyla $U^c \cap K$ kümesinin de) tıkız olmasından çıkar.

Böylece Y'nin bir topolojik uzay olduğu kanıtlanmış oldu. X elbette Y'nin (birinci türden) açık bir kümesi. X'in bir altuzay olduğu da çok bariz. Böylece (a) kanıtlandı.

Eğer X kapalı olsaydı, $\{\infty\}$ açık olurdu ve o zaman da X tıkız olurdu. Demek ki X tıkız değilse, X'in kapanışı X'ten büyük olmalı ama bu durumda da X'in kapanışının Y'ye eşit olmaktan başka şansı yok. Bu da (b)'yi kanıtlar.

Şimdi Y'nin tıkız bir uzay olduğunu kanıtlayalım. Y'nin bir $\mathcal{V}$ açık örtüsünü alalım.

$$\mathcal{U} = \{V \cap X : V \in \mathcal{V}\}$$

kümesi elbette X'in X-açık bir örtüsüdür. $\mathcal{V}$ örtüsünün elemanlarından biri ∞ elemanını içermeli, diyelim tıkız bir $K \subseteq X$ için, $V = K^c \cup \{\infty\} \in \mathcal{V}$. Ayrıca $\mathcal{U}$, K'yı örter. K tıkız olduğundan, $\mathcal{U}$'nun K'yı örten sonlu bir altörtüsü vardır. Son iki cümleden $\mathcal{V}$'nin sonlu bir altörtüsü kolaylıkla bulunur.

Şimdi (c)'yi kanıtlayalım. Eğer Y Hausdorff ise, X, Y'de açık olduğundan, X de Hausdorff olmak zorunda. $x \in X$ olsun. Y Hausdorff olduğundan x ile ∞ elemanını Y'nin açık kümeleriyle ayırabiliriz. Gerisi kolay ve okura alıştırma olarak bırakılmıştır (bkz. Alıştırma 18.13). □

Bu topolojiye X'in ***Alexandroff Tek Nokta Tıkızlaması*** adı verilir.

Alıştırmalar

18.7. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ olsun. $\mathbb{R}$'nin Alexandroff tek nokta tıkızlamasının S^1'e topolojik olarak denk olduğunu kanıtlayın.

18.8. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ olsun. $\mathbb{R}^2$'nin Alexandroff tek nokta tıkızlamasının S^2'ye topolojik olarak denk olduğunu kanıtlayın.

18.9. $X = \{1/n : n = 1, 2, \ldots\}$ olsun. X'in Alexandroff tek nokta tıkızlamasını somut olarak bulun.

18.10. $\mathbb{R}$'ye iki farklı nokta ekleyerek, $\mathbb{R}$'nin içinde yoğun olduğu tıkız ve Hausdorff bir uzay bulabilir misiniz?

18.11. **[Dini Teoremi]** X tıkız bir topolojik uzay ve $(f_n : X \to \mathbb{R})_n$ bir sürekli fonksiyonlar dizisi olsun. $(f_n)_n$ dizisinin noktasal olarak bir f fonksiyonuna yakınsadığını varsayalım, yani her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

olsun. Ayrıca $(f_n)_n$ artan bir dizi olsun, yani her n ve her x için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ olsun. Bir de ayrıca f'nin sürekli olduğunu varsayalım. $(f_n)_n$ dizisinin f'ye düzgün yakınsadığını kanıtlayın. (İpucu: $\epsilon > 0$ ve $g_n = f - f_n$ olsun. $(g_n)_n$ noktasal olarak azalarak 0'a yakınsayan bir dizidir. $V_n = \{x \in X : g_n(x) < \epsilon\}$ olsun. $(V_n)_n$, X'in açık bir örtüsüdür.) İkinci İpucu: Bkz. [N5, Bölüm 15].

Eğer X tıkız değilse ya da $(f_n)_n$ artan değilse düzgün yakınsaklığın her zaman doğru olmadığını gösterin.

18.12. $\mathbb{R}$'nin yerel tıkız olduğunu ama $\mathbb{Q}$'nün olmadığını gösterin.

18.13. X, tıkız ve Hausdorff bir uzay olsun. $\mathcal{A}$, X'in bir kapalı ve bağlantılı altkümeler zinciri olsun (yani her $A, B \in \mathcal{A}$ için ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$ olsun). $\bigcup \mathcal{A}$'nın bağlantılı olduğunu kanıtlayın. (İpucu: C ve D, bileşimi $\bigcup \mathcal{A}$ olan $\bigcup \mathcal{A}$'nın ayrık iki açık altkümesi olsun. U ve V, sırasıyla, C ve D'yi içeren X'in ayrık iki açık altkümesi olsun. $\bigcup_{A\in\mathcal{A}}(A \setminus (U \cup V))$ kümesinin boş olmadığını gösterin.)

X Hausdorff değilse bir karşıörnek bulun.

18.14. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ kapalı, sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ tıkızsa X ve Y'nin tıkızlığının eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

19. Cantor Kümesi

Kümeler arasında bir ünlüler ya da ilginçlikler geçidi yapılacak olsa Cantor kümesi kesinlikle en fazla alkışı alan küme olur.

$[0, 1]$ kapalı aralığıyla başlayalım. Bu kapalı aralıktan başlangıçta yavaş yavaş, ama giderek hızlanarak açık aralıklar atacağız. O kadar hızlanacağız ki, okur bir ara geriye bir şey kalmadığını sanacak. Nitekim geriye hiç uzunluğunda (!) bir küme kalır ama gene de bir şeyler kalır. Geriye, şaşırtıcı bir biçimde, sayılamaz sonsuzlukta elemanı olan ve her noktası yığılma noktası olan ama hiçbir yerde yoğun olmayan (seyrek) bir küme kalır...

19.1 Cantor Kümesi'nin İnşası

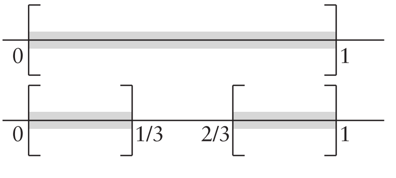
İlk olarak

$$[0, 1]$$

aralığını eşit aralıklarla 3'e bölelim ve ortadaki $(1/3, 2/3)$ açık aralığını atalım. Geriye

$$[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

kümesi kalır. İki kapalı aralığın bileşimi olduğundan, ya da kapalı bir kümeden açık bir küme attığımızdan (Alıştırma 8.6), kalan küme kapalıdır.



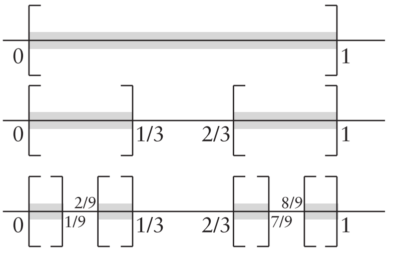
İkinci olarak, yukarda elde ettiğimiz $[0, 1/3]$ ve $[2/3, 1]$ aralıklarının her birini eşit 3 parçaya bölüp, ortadaki $(1/9, 2/9)$ ve $(7/9, 8/9)$ açık aralıklarını atalım. Geriye

$$[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

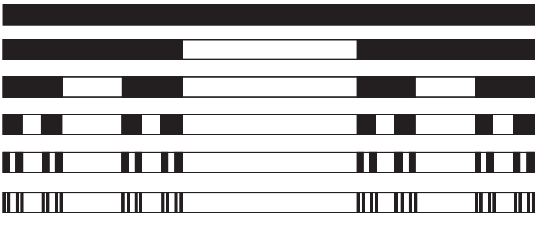
yani

$$[0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 9/9]$$

kümesi kalır. Bu da kapalı bir kümedir, çünkü ne de olsa kapalı dört aralığın bileşimidir.



Bu yöntemle devam edelim. Yukardaki dört kapalı aralığın her birini eşit üç parçaya ayıralım ve ortalarda bulunan açık aralıkları atalım. Bunu böyle sonsuza kadar devam ettirelim ve sonsuzda elimizde kalan noktalara bakalım.



"Bunu sonsuza kadar devam ettirelim" garabetinin matematikçesi şöyledir:

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= [0,1/3] \cup [2/3,1] \\ C_2 &= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1] \\ &\dots \end{aligned}$$

olsun ve bütün bu kümelerin kesişimini alalım.

$$C = \bigcap_n C_n$$

olsun. Bu C kümesine ***Cantor kümesi*** adı verilir. İlerde tümevarım yöntemiyle daha matematiksel bir tanım vereceğiz, şimdilik bu tanımla yetinelim.

19.2 Aritmetik Yaklaşım

Cantor kümesinin elemanlarını somutlaştıralım. $C_0 = [0,1]$ kümesinin elemanları onluk tabanda 0,... diye yazılan gerçel sayılar kümesidir; nitekim 1'i bile 0,9999... olarak yazabiliriz. Onluk değil de üçlük tabanda yazacak olsaydık da $C_0 = [0,1]$ kümesinin elemanları onluk tabanda 0,... diye yazılan gerçel sayılar kümesi olurdu; örneğin bu durumda

$$1 = 0{,}2222\ldots = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$$

olur.

Şimdi C_1 kümesinin elemanları, üçlük tabanda, $0{,}0\ldots$ ya da $0{,}2\ldots$ diye yazılan, yani virgülden sonraki ilk rakamı 1 olmayan gerçel sayılardır. $0{,}0\ldots$ diye yazılanlar 1/3'ten küçükeşit olanlar, $0{,}2\ldots$ diye yazılanlar da 2/3'ten büyükeşit olanlardır.

C_2 kümesinin elemanları da, üçlük tabanda,

$$\begin{aligned} &0{,}00\ldots\\ &0{,}02\ldots\\ &0{,}20\ldots\\ &0{,}22\ldots \end{aligned}$$

olarak yazılan gerçel sayılardır. Yani C_2 kümesinin elemanları, virgülden sonraki ilk iki hanede 1 rakamı kullanılmadan yazılan $[0,1]$ aralığındaki gerçel sayılardır.

Tüm C_n kümelerinin kesişimi alındığında, üçlük tabanda hiç 1 rakamı kullanılmadan, yani sadece ve sadece 0 ve 2 rakamı kullanılarak yazılabilen gerçel sayılar bulunur. Ama dikkat, her ne kadar (üçlük tabanda) $0,1$ olarak yazılan sayıda 1 rakamı varsa da aynı sayıyı 1'siz de yazabiliriz:

$$0{,}1 = 0{,}02222\ldots$$

Yani 0,1 sayısı da Cantor kümesindedir.

C **Sayılamaz Sonsuzluktadır.** Demek ki Cantor kümesi, 0 ve 2 rakamlarından oluşmuş bir $(a_n)_n$ dizisi için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

biçiminde yazılan sayılardan oluşmuştur. Dolayısıyla ne kadar çok $0-2$ dizisi varsa Cantor kümesinde de o kadar çok eleman vardır, dolayısıyla C kümesi sayılamaz sonsuzluktadır, hatta $\mathbb{R}$ ile aynı kardinaliteye sahiptir [N1, N3].

Cantor kümesinden $[0,1]$ aralığına giden örten bir fonksiyon bulmak pek zor değildir: Cantor kümesinden alınan bir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

($a_n = 0{,}2$) sayısındaki 2'ye eşit olan a_n rakamlarını 1'e çevirelim ve paydadaki 3^n'leri 2^n yapalım. Yani fonksiyon şu kural(lar)la tanımlansın:

$$f : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{a_n, 1\}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

Bu kuralla tanımlanan f fonksiyonu Cantor kümesinden $[0, 1]$ aralığına giden örten bir fonksiyondur.

Öte yandan bu fonksiyon birebir değildir. Nitekim, üçlük tabanda

$$7/9 = 0{,}20222222\ldots$$
$$8/9 = 0{,}22000000\ldots$$

olur ve $f(7/9)$ ve $f(8/9)$ sayıları ikilik tabanda

$$0{,}1100000\ldots$$

olarak yazılır, yani $1/2 + 1/8 = 5/8$'e eşittirler. f fonksiyonu Cantor kümesini inşa etmek için atılan açık aralıkların uçlarını hep aynı sayıya götürür.

C'nin Her Noktası Bir Yığılma Noktasıdır. Cantor kümesinin her elemanının, her terimi değişik olan ve gene Cantor kümesinden olan bir dizinin limiti olduğunu kanıtlayabiliriz. Örneğin,

$$0{,}2002022020\ldots$$

gibi kuyruğu hiçbir zaman salt 0'lardan oluşmayan bir sayı,

$$0,\ 0{,}2,\ 0{,}20,\ 0{,}200,\ 0{,}2002,\ 0{,}20020,\ 0{,}200202,\ \ldots$$

dizisinin limitidir; öte yandan, 0,202 sayısı,

$$0{,}2022,\ 0{,}20202,\ 0{,}202002,\ 0{,}2020002,\ \ldots$$

dizisinin limitidir. Bir başka deyişle Cantor kümesinin her elemanı bir yoğunlaşma noktasıdır, yani Cantor kümesinin "ayrık elemanı" yoktur.

Topolojiden söz açılmışken: Kapalı kümelerin kesişimi olduğundan, C kapalı bir kümedir. Yukarda kanıtladığımızla birlikte, bu bize $C' = C = \overline{C}$ eşitliklerini verir. (C', C'nin limit noktaları kümesidir.)

Bir topolojik uzayda, her noktası yığılma noktası olan kapalı bir altkümeye ***mükemmel küme*** denir. Demek ki Cantor kümesi mükemmel bir kümedir.

C Aralık İçermez. Cantor kümesi, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan hiçbir aralığını içeremez. Çünkü $\mathbb{R}$'nin boş olmayan her aralığı üçlük tabanda sadece 0 ve 2 kullanılarak **yazılamayan** bir sayı içerir. Bir aralıktan seçilmiş iki sayı, 0 ya da 2'ye eşit olan x_i'ler için, örneğin,

$$0{,}x_1x_2\dots x_k0\dots \text{ ve } 0{,}x_1x_2\dots x_k2\dots$$

olarak yazılıyorsa, o zaman,

$$0{,}x_1x_2\dots x_k11$$

sayısı da bu aralıktadır ama sadece 0 ve 2 kullanılarak yazılamaz.

Topolojik Özellikler. Demek ki Cantor kümesinin içi, yani C° kümesi boşkümedir, bir başka deyişle Cantor kümesi boşkümeden başka açık küme içermez. Gene bir başka deyişle, Cantor kümesi sınır noktalarının kümesidir:

$$C = C \setminus C^\circ = \partial C.$$

Bir topolojik uzayın bir altkümesinin kapanışının içi boşsa o altkümeye ***seyrek altküme*** denir. C'nin kendisi kapalı olduğundan, C, $\mathbb{R}$'nin seyrek bir altkümesidir.

Yukardaki bakış açısı aritmetiksel ve oldukça pratik ve somut. Ama Cantor kümesi aynı zamanda geometrik bir nesnedir ve geometrik önemi vardır. Örneğin Cantor kümesi bir "fraktal"dır da.

Altbölümün süreğinde, Cantor kümelerine geometrik olarak yaklaşacağız ve her şeyi yeni baştan kanıtlayacağız. Hatta Cantor kümesinin de değişik bir tanımını vereceğiz.

Alıştırmalar

19.1. $x \in [0,1]$ olsun. x'i 3 tabanında

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

olarak yazalım. Burada $a_i \in \{0,1,2\}$'dir. Eğer her $a_i \neq 1$ ise $N_x = \infty$ olsun. Aksi halde, N_x, $a_i = 1$ eşitliğini sağlayan en küçük i olsun. Eğer $i < N_x$ ise $b_i = a_i/2 \in \{0,1\}$ olsun. $b_N = 1$ olsun. Ve son olarak

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_x} \frac{b_i}{3^i}$$

olsun.
i. $f(x)$'in x'in 3 tabanında yazılışından bağımsız olduğunu gösterin. Yani $x = q/3^n$ biçiminde olup da 3 tabanında iki değişik yazılımı olduğunda $f(x)$'in x'in yazılımlarından bağımsız olduğunu gösterin.
ii. f'nin Cantor kümesiyle kesişmeyen her aralıkta sabit olduğunu kanıtlayın.
iii. $f(C) = [0,1]$ eşitliğini kanıtlayın.

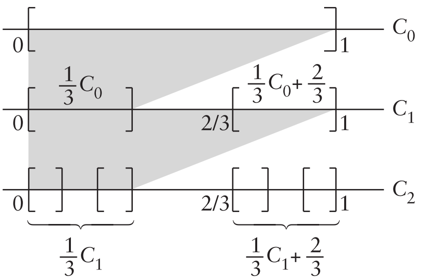
19.3 Geometrik Yaklaşım

Cantor kümesinin inşasında yapılan şey aslında şu: Her aşamada elde edilen küme 1/3 oranında küçültülüyor, sonra bu küçültülmüş kümenin bir kopyası 2/3 kadar ötelenip bu iki kümenin bileşimi alınıyor; yani,

$$C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$$

eşitliği geçerli.

Aslında matematiksel tanım aynen böyle olmalı: $C_0 = [0,1]$ alınmalı ve C_n'ler yukardaki formülle tümevarımsal bir biçimde tanımlanmalı. Eğer bu tanım esas alınırsa, girişte ve geçen bölümde söylediklerimizin hepsi ve çok daha fazlası tümevarımla teker teker kanıtlanabilir. Böyle yapalım. Bu tümevarımsal tanımı esas kabul edip her şeyi matematiksel olarak kanıtlayalım.



Sav 1. *Cantor kümesi C, yani C_n'lerin kesişimi kapalıdır.*

Kanıt: Kapalı kümelerin kesişimi kapalı olduğundan her C_n'nin kapalı olduğunu kanıtlamak yeterli. $C_0 = [0,1]$ olduğundan, C_0 kapalıdır. Eğer C_n kapalıysa, $x \mapsto x/3$ ve $x \mapsto x + 2/3$ kurallarıyla verilmiş fonksiyonlar $\mathbb{R}$'nin birer homeomorfizması olduklarından,

$$\frac{1}{3}C_n \text{ ve } \frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}$$

kümeleri de kapalıdır, dolayısıyla

$$C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$$

formülüyle tanımlanmış olan C_{n+1} de kapalıdır. □

Sav 2. *Cantor kümesi tıkızdır.*

Kanıt: C_0 kapalı ve sınırlı olduğundan, Heine-Borel Teoremi'ne (Teorem 16.12) göre tıkızdır. C de, bu tıkız C_0 kümesinin kapalı bir altkümesidir. Demek ki C de tıkızdır (bkz. Teorem 16.3). □

Sav 3. *Her n için, $C_n \subseteq [0,1]$ olur.*

Kanıt: $n = 0$ için sav elbette doğru, hatta eşitlik bile var. $C_n \subseteq [0,1]$ içindeliğini varsayarsak,

$$\frac{1}{3}C_n \subseteq \frac{1}{3}[0,1] \subseteq \left[0, \frac{1}{3}\right] \subseteq [0,1]$$

ve

$$\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3} \subseteq \left[0, \frac{1}{3}\right] + \frac{2}{3} = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \subseteq [0,1]$$

olur. Tanımdan dolayı $C_{n+1} \subseteq [0,1]$ içindeliği çıkar. □

Sav 4. $\frac{1}{3}C_n$ ve $\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}$ *kümeleri ayrıktır.*
Kanıt: Elbette

$$\frac{1}{3}C_n \subseteq \frac{1}{3}[0,1] \subseteq \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

ve

$$\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3} \subseteq \left[0, \frac{1}{3}\right] + \frac{2}{3} \subseteq \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

olur. Bunlardan da bu iki kümenin ayrık olduğu çıkar. □

Sav 5. C_n, *her biri* $1/3^n$ *uzunluğunda* 2^n *tane ayrık kapalı aralığın bileşimidir.*
Kanıt: $n = 0$ için savın doğru olduğu belli. Eğer savı n için doğru varsayarsak, savın $n+1$ için doğru olduğu Sav 4'ten hemen çıkar. □

Görüldüğü gibi aralık sayısı her seferinde ikiyle çarpılıyor, ama toplam uzunluk 3'e bölünüyor.

Yukardaki savdan, C_n'nin toplam uzunluğunun $(2/3)^n$ olduğu çıkar.

Sav 6. *Her* n *için* $C_n \supseteq C_{n+1}$ *olur.*
Kanıt: $n = 0$ için kanıt kolay. Şimdi $n \geq 1$ için $C_{n-1} \supseteq C_n$ içindeliğini varsayalım. O zaman,

$$C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right) \subseteq \left(\frac{1}{3}C_{n-1}\right) \cup \left(\frac{1}{3}C_{n-1} + \frac{2}{3}\right) = C_n$$

olur ve böylece savımız da tümevarımla kanıtlanmış olur. □

Sav 5 ve 6'dan dolayı, C'nin uzunluğunun C_n'nin uzunluklarının limiti, yani

$$\lim_{n\to\infty} (2/3)^n = 0$$

olduğunu söylemek içimizden geçiyor ama $\mathbb{R}$'de bir altkümenin uzunluğunu henüz tanımlamadığımız için bunu söylemekten şimdilik kaçınıyoruz. Ama şurası kesin ki, eğer $\mathbb{R}$'de bir altkümenin uzunluğunu "doğal" bir biçimde tanımlamış olsaydık, C'nin uzunluğu herhalde 0 olurdu. Nitekim öyle olur!

C sanki boşkümeymiş gibi bir his doğabilir. Ama bu doğru değil, 0'ın C_n'lerin hepsinde birden olduğu çok belli (mesela tümevarımla), dolayısıyla

0, C'de. Zaten boş olmayan tıkız kümelerden oluşan bir zincirin kesişiminin boşküme olamayacağını biliyoruz (Teorem 16.6).

C'nin aslında bayağı kalabalık bir küme olduğunu kanıtlayacağız. Önce C_n'leri oluşturan kapalı aralıkların uç noktalarını bulalım.

Sav 7. *$a_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ olsun. $n \geq 1$ ve $0 \leq k < 2^n$ için,*

$$a_{2^n+k} = a_k + 2 \cdot 3^{n-1}$$

olsun. Böylece mutlak artan bir $(a_n)_n$ doğal sayı dizisi belirlenmiş olur. $0 \leq k < 2^n$ için,

$$\left[\frac{a_{2k}}{3^n}, \frac{a_{2k+1}}{3^n}\right]$$

kapalı aralıkları ayrıktır, sayı doğrusu üzerine k'nın değerine göre soldan sağa doğru dizilirler ve C_n bu kapalı aralıkların bileşimidir:

$$C_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_{2k}}{3^n}, \frac{a_{2k+1}}{3^n}\right].$$

Ayrıca $n \geq 1$ için,

$$a_{2^n} = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ ve } a_{2^n-1} = 3^{n-1}$$

olur.

Kanıt: Önce dizinin verilen formülle belirlendiğini kanıtlayalım. $m > 1$ bir doğal sayı olsun. n doğal sayısı,

$$2^n \leq m < 2^{n+1}$$

eşitsizliklerini sağlayan (yegâne) doğal sayı olsun. Dizinin belirlendiğini n üzerine tümevarımla kanıtlayabiliriz. Nitekim $k = m - 2^n$ ise, o zaman,

$$0 \leq k < 2^n$$

olur ve a_k'nin belirlendiğini varsayarak,

$$a_m = a_{2^n+k} = a_k + 2 \cdot 3^{n-1}$$

formülüyle a_m'nin belirlenmiş olduğunu görürüz. Ayrıca formül a_m'nin başka bir tanımına izin vermediğinden a_m için iki değişik yanıt bulamayız. Demek ki formül a_m sayısını kuşkuya yer vermeyecek biçimde tanımlıyor.

En sondaki eşitlikleri kanıtlayalım:

$$a_{2^n} = a_0 + 2 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

eşitliği bariz. $a_{2n-1} = 3^{n-1}$ eşitliğini tümevarımla kanıtlayalım:

$$a_{2^{n+1}-1} = a_{(2^n-1)+2^n} = a_{2^n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n.$$

Formülden, n üzerine tümevarımla, kolaylıkla,

$$a_{2^n} < a_{2^n+1} < a_{2^n+2} < \ldots < a_{2^{n+1}-1}$$

eşitsizlikleri kanıtlanabilir. Dizinin artan olduğunu kanıtlamak için,

$$a_{2^n-1} < a_{2^n}$$

eşitsizliğini kanıtlamak gerekiyor. Bunun doğruluğu da yukarda kanıtladığımız

$$a_{2^n} = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ ve } a_{2^n-1} = 3^{n-1}$$

formüllerinden hemen çıkar.

Aralıkların ayrık oldukları dizinin mutlak artan olmasından çıkar.

Sıra C_n'nin söylenen aralıkların bileşimi olduğunu kanıtlamakta. $n = 0$ için bunun kontrolü kolay. Eşitliğin n için doğru olduğunu varsayıp $n+1$ için kanıtlamaya çalışalım.

$$C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)$$

eşitliğinden ve tümevarım varsayımından dolayı, C_{n+1} kümesi,

$$\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_{2k}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k+1}}{3^{n+1}}\right]$$

kümesinin ve

$$\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_{2k}}{3^{n+1}} + \frac{2}{3}, \frac{a_{2k+1}}{3^{n+1}} + \frac{2}{3}\right] = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_{2k} + 2 \cdot 3^n}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k+1} + 2 \cdot 3^n}{3^{n+1}}\right]$$

kümesinin bileşimidir. Birinci bileşimdeki aralıklar tam istediğimiz gibi. İkinci bileşimdeki aralıklara yoğunlaşalım. Dizinin tanımına bakılırsa,

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_{2k} + 2 \cdot 3^n}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k+1} + 2 \cdot 3^n}{3^{n+1}}\right] &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_{2^{n+1}+2k}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2^{n+1}+2k+1}}{3^{n+1}}\right] \\ &= \bigcup_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left[\frac{a_{2k}}{3^{n+1}}, \frac{a_{2k+1}}{3^{n+1}}\right]\end{aligned}$$

eşitliği görülecektir. Bunlar da tam istediğimiz gibi aralıklardır, birinci tipten geri kalanlardır. $\square$

∂C_n, C_n'nin sınır noktalarının kümesini simgelesin. Yani eğer $n \geq 0$ ve $0 \leq k < 2^{n+1}$ için,

$$b_{n,k} = \frac{a_k}{3^n}$$

ise, ∂C_n, elemanları bu $b_{n,k}$'lardan oluşan 2^{n+1} elemanlı küme olsun. ∂C_n gerçekten C_n'nin topolojik anlamda sınırıdır yani (Alıştırma 8.34),

$$\partial C_n = \mathrm{Fr}(C_n) = C_n \setminus C_n^\circ$$

eşitliği geçerlidir. 3'e bölmek ve 2/3 eklemek $\mathbb{R}$'nin homeomorfizmaları olduğundan,

$$\partial C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\partial C_n\right) \cup \left(\frac{1}{3}\partial C_n + \frac{2}{3}\right)$$

olur.

Tanımdan, bir önceki Sav'ın kanıtından ve herşeyden belli ki, ∂C_n'nin 1/3'ten küçükeşit elemanları, bir $0 \leq k < 2^n$ sayısı için $b_{n,k}$ olarak yazılan elemanlar. Diğerleri, yani bir $2^n \leq k < 2^{n+1}$ için $b_{n,k}$ olarak yazılan elemanlar, ∂C_n'nin 2/3'ten büyükeşit elemanlarıdır.

Sav 8. *Her $n \geq 0$ için, $\partial C_n \subseteq C$ olur.*
Kanıt: $\partial C_n \subseteq \partial C_{n+1}$ içindeliğini kanıtlamak yeterli. Bunu tümevarımla yapacağız. $n = 0$ için kanıt kolay. Şimdi $n \geq 1$ olsun ve $\partial C_{n-1} \subseteq \partial C_n$ tümevarım varsayımı kabul edelim.

∂C_n'den herhangi bir $b_{n,k}$ elemanı alalım. Burada $0 \leq k < 2^{n+1}$ olmak zorundadır. Kanıtı iki şıkka ayıracağız.

Birinci Şık: $0 \leq k < 2^n$ şıkkı. Bu durumda tümevarımla

$$3b_{n,k} = 3\frac{a_k}{3^n} = \frac{a_k}{3^{n-1}} \in \partial C_{n-1} \subseteq \partial C_n$$

olur ve istediğimiz

$$b_{n,k} \in \frac{1}{3}\partial C_n \subseteq \partial C_{n+1}$$

ilişkisini elde ederiz.

İkinci Şık: $2^n \leq k < 2^{n+1}$ şıkkı. Önce tümevarımla, $n \geq 1$ için

$$\partial C_n \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] \subseteq \frac{1}{3}\partial C_n$$

içindeliğini kanıtlayalım ($\partial C_{n-1} \subseteq \partial C_n$ tümevarım varsayımı hâlâ geçerli):

$$\begin{aligned}\partial C_n \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] &= \left(\frac{1}{3}\partial C_{n-1} \cup \left(\frac{1}{3}\partial C_{n-1} + \frac{2}{3}\right)\right) \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]\\ &= \frac{1}{3}\partial C_{n-1} \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] \subseteq \frac{1}{3}\partial C_{n-1} \subseteq \frac{1}{3}\partial C_n.\end{aligned}$$

Şimdi $\ell = k - 2^n$ olsun. O zaman $0 \leq \ell < 2^n$ olur. Yukardaki kanıtladığımız içindeliği kullanarak hesap yapalım:

$$b_{n,k} = \frac{a_k}{3^n} = \frac{a_\ell + 2 \cdot 3^{n-1}}{3^n} = \frac{a_\ell}{3^n} + \frac{2}{3} = b_{n,\ell} + \frac{2}{3}$$

elemanı

$$\left(\partial C_n \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) + \frac{2}{3} \subseteq \frac{1}{3}\partial C_n + \frac{2}{3} \subseteq \partial C_{n+1}$$

kümesindedir. Savımız kanıtlanmıştır. □

Bu son savdan C'nin en az sayılabilir sonsuz olduğu çıkar. Ama Sonuç 16.9'dan dolayı C sayılamaz sonsuzluktadır.

Cantor kümesi bir fraktaldir, yani kendi içinde kendisinin bir (dolayısıyla sonsuz tane) parçası bulunur. Buna daha matematiksel bir anlam verelim.

Sav 9. *$x \mapsto x/3$ ve $x \mapsto x/3 + 2/3$ kuralıyla tanımlanmış fonksiyonlar C ile C'nin $C/3$ ve $C/3 + 2/3$ altkümeleri arasında birer homeomorfizmadır ve C bu iki imgenin ayrık bileşimidir.*

Kanıt: Bir hesap yapalım:

$$\begin{aligned} C = \bigcap_{n\geq 0} C_n = \bigcap_{n\geq 1} C_n &= \bigcap_{n\geq 1}\left(\frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{1}{3}C_{n-1} + \frac{2}{3}\right)\right) \\ &= \left(\bigcap_{n\geq 0}\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\bigcap_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3}C_n + \frac{2}{3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\bigcap_{n\geq 0} C_n \cup \left(\frac{1}{3}\bigcap_{n\geq 0} C_n + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Yukardaki dördüncü eşitliğin pek o kadar bariz olmadığına dikkatinizi çekeriz. Dördüncü eşitlik şundan kaynaklanır: Eğer her n doğal sayısı için, $A_{n+1} \subseteq A_n$ ve $B_{n+1} \subseteq B_n$ ise,

$$\bigcap_n (A_n \cup B_n) = \left(\bigcap_n A_n\right) \cup \left(\bigcap_n B_n\right)$$

olur (bkz. Alıştırma 19.2). Beşinci eşitlik de Sav 9'da verilen her iki fonksiyonun birebir olmasından kaynaklanır.

$C/3 \subseteq [0, 1/3]$ ve $C/3 + 2/3 \subseteq [2/3, 1]$ olduğundan, bu iki küme ayrıktır. Fonksiyonların homeomorfizma oldukları bariz. □

Alıştırmalar

19.2. Eğer her n doğal sayısı için, $A_{n+1} \subseteq A_n$ ve $B_{n+1} \subseteq B_n$ ise,

$$\bigcap_n (A_n \cup B_n) = \left(\bigcap_n A_n\right) \cup \left(\bigcap_n B_n\right)$$

eşitliğini kanıtlayın. Varsayım doğru değilse, hangi yönde içindelik doğrudur?

19.3. Değişik m ve $k = 0, 1, \ldots, 3^{m-1} - 1$ için,

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right)$$

aralıklarının ayrık olduklarını kanıtlayın.

19.4. Aşağıdaki eşitliği kanıtlayın.

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{m-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right).$$

19.5. Değişik m ve $k = 0, 1, \ldots, 3^{m-1} - 1$ için,

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right)$$

aralıklarının uzunluklarının toplamının 1 olduğunu kanıtlayın.

19.6. 3/10 sayısının hiçbir n için ∂C_n kümesinde olmadığını ama C'de olduğunu kanıtlayın.

Seyrek Kümeler

19.7. $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$ kümesinin seyrek olduğunu kanıtlayın.

19.8. Seyrek bir kümenin herhangi bir altkümesinin de seyrek olduğunu kanıtlayın.

19.9. Bir topolojik uzayın seyrek bir altkümesinin tümleyeninin topolojik uzayda yoğun olduğunu kanıtlayın. Bundan Cantor kümesinin tümleyeninin $\mathbb{R}$'de yoğun bir küme olduğunu çıkarın.

19.10. $[0,1]$ aralığının, bir a doğal sayısı için, $a/2^n$ biçiminde yazılan sayılarına 2-paydalı sayı diyelim. $[0,1]$ aralığından 2-paydalı sayıları atalım. Geriye kalan kümenin seyrek olduğunu kanıtlayın. (Bu kümenin uzunluğu/ölçümü 1'dir.)

19.11. $[0,1]$ aralığından, bir a tek doğal sayısı için $a/2^n$ biçiminde yazılan her sayı için

$$\left[\frac{a}{2^n} + \frac{1}{2^n}, \frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right]$$

aralıklarını çıkaralım. Geri kalan kümenin seyrek olduğunu kanıtlayın. (Bu kümenin uzunluğu/ölçümü 0'dır.)

19.12. $[0,1]$ aralığından, bir a tek doğal sayısı için $a/2^n$ biçiminde yazılan her sayı ve $0 \le r \le 2$ gerçel sayısı için

$$\left[\frac{a}{2^n} + \frac{r}{2^{n+1}}, \frac{a}{2^n} - \frac{r}{2^{n+1}}\right]$$

aralıklarını çıkaralım. (Yukardaki son iki alıştırmada $r = 0$ ve 2 idi.) Geri kalan kümenin seyrek olduğunu kanıtlayın.

Bilinmeyen Bir Soru. Cantor kümesinde cebirsel olan (yani 0'a eşit olmayan bir polinomun kökü olan) ama kesirli olmayan bir sayının olup olmadığı bilinmemektedir.

Kısım IV

Fonksiyonel Analizin Temelleri

20. Baire Kategori Teoremi

Baire Kategori Teoremi, fonksiyonel analiz ve topolojide önemli bir yere sahiptir. 1899'da René-Louis Baire tarafından doktora tezinde sunulmuştur. Fonksiyonel analizde Açık Fonksiyon Teoremi, Kapalı Grafik Teoremi ve Düzgün Sınırlılık Teoremi genelde bu teoremin yardımıyla kanıtlanır. Topolojide ise yoğun altkümeler hakkında önemli bilgiler sağlar[1].

20.1 Biraz Temel Topoloji

Eğer X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ ise, $\mathrm{cl}_X(A)$ ya da $\overline{A}$ yazılımı A'nın kapanışını, $\mathrm{int}_X(A)$ ya da A° yazılımı ise A'nın içini simgelesin. A^c, her zamanki gibi A'nın X'teki tümleyenini simgeliyor. $\mathrm{cl}\, A^c$, A^c'nin kapanışı anlamına gelecek.

$$(A^\circ)^c = \mathrm{cl}\, A^c \text{ ve } (A^c)^\circ = (\mathrm{cl}\, A)^c$$

eşitlikleri Önsav 8.5'te kanıtlanmıştı. Bu eşitlikleri sık sık referans vermeden kullanacağız.

A'nın sınırı olan $\mathrm{Fr}\, A$ ya da ∂A kümesi

$$\mathrm{Fr}\, A = \partial A = \mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}\, A^c$$

olarak tanımlanır. ∂A, iki kapalı kümenin kesişimi olduğundan elbette kapalı bir kümedir.

$$\overline{A} = A \cup \partial A,$$
$$A^\circ = A \setminus \partial A$$

eşitlikleri Alıştırma 8.34.i ve ii olarak sorulmuştu.

Önsav 20.1. *Eğer F bir topolojik uzayın kapalı bir altkümesiyse, $(\partial F)^c$ yoğun ve açık bir altkümedir.*

Kanıt: $(\partial F)^\circ = (\mathrm{cl}\, F \cap \mathrm{cl}\, F^c)^\circ = (F \cap \mathrm{cl}\, F^c)^\circ \stackrel{1.2}{=} F^\circ \cap (\mathrm{cl}\, F^c)^\circ = F^\circ \cap ((F^\circ)^c)^\circ \subseteq F^\circ \cap (F^\circ)^c = \emptyset$ olduğundan, $\mathrm{cl}((\partial F)^c) = ((\partial F)^\circ)^c = \emptyset^c = X$ olur. Açıklık ise bariz. □

[1] Bu bölüm Uğur Doğan ile birlikte yazılmıştır.

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A'nın kapanışının iç noktası yoksa, yani $(\operatorname{cl} A)^\circ = \emptyset$ ise, A'ya X'in ***seyrek***[2] altkümesi denir.

A seyrekse, A'nın kapanışı da, kapanışının altkümeleri de seyrektir. Eğer X boşküme değilse, X'in yoğun altkümeleri seyrek olamazlar. Kaba ve en ince topolojilerde sadece boşküme seyrektir.

Önsav 20.2. *Y bir topolojik uzay ve $A \subset X \subset Y$ olsun. Eğer A, X'te seyrekse Y'de de seyrektir.*

Kanıt: A yerine daha büyük bir küme olan $\operatorname{cl}_X(A)$ kümesini alıp A'nın X'te kapalı olduğunu varsayabiliriz. $B = \operatorname{cl}_Y(A)$ olsun. $\operatorname{Int}_Y(B) = \emptyset$ eşitliğini göstermek istiyoruz. Önsav 8.7'ye göre $A = B \cap X$ olur. Y'nin açık bir U altkümesi için $U \subseteq B$ olsun. U'nun boşküme olduğunu göstereceğiz. $U \cap X$, X'te açık olduğundan ve A'nın bir altkümesi olduğundan, $U \cap X = \emptyset$ olmalı. Demek ki $A \subseteq B \setminus U$. Ama B kapalı ve U açık olduğundan $B \setminus U$ kümesi kapalıdır. Demek ki $B = \operatorname{cl}_Y(A) \subseteq B \setminus U$, yani $U = \emptyset$. □

Öte yandan $\emptyset \neq X \subset Y$ ise ve X, Y'nin seyrek bir altkümesi bile olsa, X hiçbir zaman X'in seyrek bir altkümesi olmaz.

Örnekler

20.1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$'de seyrektir.

20.2. $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'de seyrektir.

20.3. Eğer A seyrekse, A'nın her altkümesi de seyrektir. Ayrıca A'nın kapanışı da, kapanışının altkümeleri de seyrektir.

20.4. Cantor kümesinin seyrek olduğunu sayfa 256'da görmüştük.

Alıştırmalar

20.5. Sonlu sayıda seyrek kümenin bileşiminin de seyrek olduğunu kanıtlayın.

20.6. Kanıtlayın: $A \subseteq X$ için, A'nın seyrek bir altküme olması için gerek ve yeter koşul $(A^c)^\circ$, yani $(\operatorname{cl} A)^c$ kümesinin (bkz. Önsav 8.5) X'te yoğun olması koşuludur.

20.7. X'in her A altkumesi için, $(A \setminus A^\circ)^\circ = \emptyset$ ve $(\operatorname{cl} A \setminus A)^\circ = \emptyset$ olduğunu gösterin. Bunu kullanarak, kapalı ya da açık bir altkümenin sınırının içinin boşkume olduğunu gösterin.

20.8. X'in kapalı bir A altkümesi için, aşağıdaki koşulların eşdeğer olduklarını kanıtlayın:
i. A seyrek bir altkümedir.
ii. $A^\circ = \emptyset$,
iii. $\operatorname{cl} A^c = X$.

20.9. Eğer $U \subseteq X$ açıksa, ∂U kümesinin seyrek olduğunu kanıtlayın.

X bir topolojik uzay ve $M \subseteq X$ olsun. Eğer M, X'in sayılabilir sayıda seyrek altkümesinin bileşimiyse (ki bu seyrek altkümeler M'de kapalı alınabilir), M'nin X'in ***birinci kategoriden*** ya da ***zayıf***[3] ***altkümesi*** olduğu söylenir.

[2] İngilizcesi *nowhere dense* ya da *rare*

[3] İngilizcesi *meager*

Eğer M birinci kategoriden değilse M'nin X'in ***ikinci kategoriden altkümesi*** olduğu söylenir.

Alıştırmalar

20.10. X bir topolojik uzay olsun. Sayılabilir çoklukta birinci kategoriden altkümenin bileşiminin de birinci kategoriden olduğunu kanıtlayın.

20.11. Ayrık noktası olmayan bir metrik uzayın sayılabilir her M altkümesinin birinci kategoriden olduğunu kanıtlayın.

20.12. $A \subseteq X \subseteq Y$ olsun. Eğer A, X'te birinci kategoridense, A'nın Y'de de birinci kategoriden olduğunu gösterin.

20.2 Baire Uzayı

Aşağıdaki birbirine denk özelliklerden birini sağlayan bir topolojik uzaya ***Baire uzayı*** adı verilir.

Teorem 20.3. *Boş olmayan bir X topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir, yani biri doğruysa diğerleri de doğrudur:*
a. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *her biri X'te yoğun olan bir açık altküme ailesi olsun. O zaman $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ kümesi de X'te yoğundur.*
b. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *bir kapalı ve içi boş kümeler ailesiyse (yani her F_n seyrekse), F_n'lerin bileşiminin de içi boştur.*
c. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *bileşimi X olan bir kapalı kümeler ailesi olsun. O zaman $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$ bileşimi X'te yoğundur.*
d. *X'in boş olmayan her açık altkümesi (dolayısıyla X de) X'in ikinci kategoriden altkümesidir, yani X'in sayılabilir sayıda seyrek altkümesinin bileşimi değildir.*

Kanıt: (a $\Rightarrow$ b). $\operatorname{cl} F_n^c = (F_n^\circ)^c = \emptyset^c = X$ olduğundan, F_n^c kümeleri açık ve yoğun kümelerdir. Dolayısıyla kesişimleri olan $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c$ kümesi de yoğundur. Demek ki,

$$X = \operatorname{cl}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c\right) = \operatorname{cl}\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^c\right) = \left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^\circ\right)^c$$

ve $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^\circ = \emptyset$.

(b $\Rightarrow$ a). Yukardaki kanıta benzerdir ve okura bırakılmıştır.

(a $\Rightarrow$ c). Her $n \in \mathbb{N}$ için, $U_n = (\partial F_n)^c$ olsun. U_n elbette açık bir altkümedir. Önsav 20.1'e göre yoğundur da. Varsayımdan dolayı

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

kümesi X'te yoğundur.

Herhangi bir $x \in U$ alalım. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ olduğundan, bir n göstergeci için

$$x \in F_n$$

olur. Öte yandan $x \in U$ olduğundan aynı zamanda

$$x \in U_n = (\partial F_n)^c$$

olur. Dolayısıyla

$$x \in F_n \setminus \partial F_n = F_n^\circ$$

ve $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$. Sonuç: $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$.

U, X'de yoğun olduğundan, bu son içindelikten $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^\circ$ kümesinin X'te yoğun olduğu çıkar.

(c $\Rightarrow$ d). $\emptyset \neq U \subseteq X$ açık olsun. U'nun ikinci kategoriden olmadığını, yani sayılabilir sayıda X'in seyrek olan altkümelerinin bileşimi şeklinde yazıldığını varsayalım. Diyelim X'in A_n seyrek altkümeleri için,

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

eşitliği sağlanıyor. Demek ki

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} A_n$$

ve dolayısıyla

$$X = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} A_n\right) \cup U^c.$$

Varsayıma göre,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\operatorname{cl} A_n)^\circ \cup (U^c)^\circ$$

kümesi X'te yoğundur. Ama $(\operatorname{cl} A_n)^\circ = \emptyset$. Demek ki, $(U^c)^\circ$, dolayısıyla U^c de X'te yoğun. Ama $U \cap U^c = \emptyset$, çelişki.

(d $\Rightarrow$ a). $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, her bir terimi X'te yoğun olan açık altkümeler ailesi olsun. İlk olarak U_n^c kapalı altkümesinin seyrek olduğunu, yani içinin boş olduğunu gösterelim:

$$(U_n^c)^\circ = (\operatorname{cl} U_n)^c = X^c = \emptyset.$$

Şimdi,

$$\left(\operatorname{cl}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)\right)^c = \left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)^c\right)^\circ = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^c\right)^\circ$$

olduğundan, eğer, $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^c\right)^\circ$ kümesinin boşküme olduğunu gösterirsek, o zaman

$$\left(\mathrm{cl}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)\right)^c = \emptyset$$

ve dolayısıyla

$$\mathrm{cl}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = X$$

olacak ve kanıtımız bitecek. Diyelim $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^c\right)^\circ \neq \emptyset$. O zaman bir U açık kümesi için,

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^c$$

olur. Demek ki U, sayılabilir sayıda seyrek kümenin bileşimi olarak yazılabiliyor:

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n^c \cap U).$$

Bir çelişki. □

Teorem 20.4 (Baire)**.** *Boş olmayan bir tam metrik uzay Baire uzayıdır, yani sayılabilir sayıda açık ve yoğun kümenin kesişimi yoğundur.*

Bu teoremin değerini anlamak için, her biri yoğun olan bir açık altküme ailesinin kesişimin boşküme olmadığının bile bariz olmadığına dikkat çekelim.

Örnekler

20.13. X'in Baire olmadığı bir örnek verelim. $X = \mathbb{Q}$ olsun. Sayılabilir sonsuzlukta kesirli sayı olduğundan, kesirli sayıları

$$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

olarak numaralandırabiliriz.

$$U_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$$

olsun. O zaman her U_n hem açık hem de yoğundur ama,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

kesişimi, bırakın yoğun olmayı, boşküme olur. Tabii $\mathbb{Q}$, bir tam metrik uzayı değil.

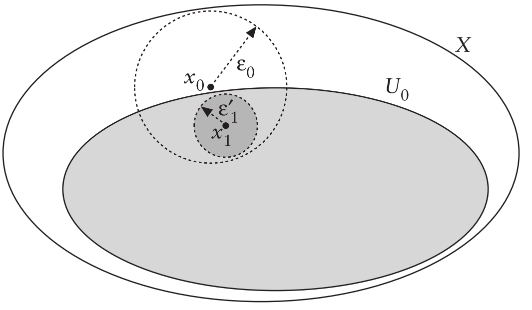
20.14. Yukardaki örnekten de anlaşılacağı üzere ayrık noktası olmayan sayılabilir metrik uzayları tam olamazlar. Dolayısıyla yukardaki teoremden ayrık noktası olmayan tam metrik uzayların sayılamaz sonsuzlukta oldukları anlaşılır. Örneğin $\mathbb{R}$.

Teorem 20.4'ün Kanıtı: Açık ve yoğun bir $(U_n)_n$ kümeler dizisi alalım. Herhangi bir $\epsilon > 0$ ve $x \in X$ seçelim.

$$B(x, \epsilon) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)$$

kümesinin boş olmadığını göstermemiz gerekiyor.

X boşküme olmadığından U_n'lerden hiçbiri boşküme olamaz. $x_0 = x$ ve $\epsilon_0 = \epsilon$ olsun. Aşağıdaki şekilden takip edin.



U_0, X'te yoğun olduğundan, $B(x_0, \epsilon_0) \cap U_0$ boşküme olamaz. Bir

$$x_1 \in B(x_0, \epsilon_0) \cap U_0$$

noktası seçelim. $B(x_0, \epsilon_0) \cap U_0$ açık bir küme olduğundan öyle bir

$$0 < \epsilon'_1 < \epsilon_0$$

vardır ki,

$$B(x_1, \epsilon'_1) \subseteq B(x_0, \epsilon_0) \cap U_0.$$

Şimdi

$$\epsilon_1 = \epsilon'_1/2$$

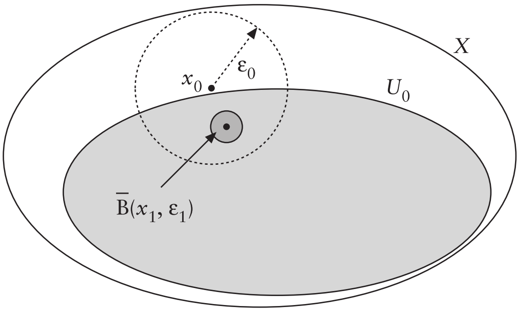
olsun. O zaman,

$$\overline{B}(x_1, \epsilon_1) \subseteq B(x_1, \epsilon'_1) \subseteq B(x_0, \epsilon_0) \cap U_0$$

olur. Özetlersek, öyle x_1 ve ϵ_1 bulduk ki

$$\overline{B}(x_1, \epsilon_1) \subseteq B(x_0, \epsilon_0) \cap U_0 \text{ ve } 0 < \epsilon_1 < \epsilon_0/2.$$

Bu özeti aşağıdaki şekilde resmettik.



Şimdi aynı akıl yürütmeyi x_0 yerine x_1, ϵ_0 yerine ϵ_1 ve U_0 yerine U_1 koyarak yapabiliriz: Öyle x_2 ve ϵ_2 buluruz ki,

$$\overline{B}(x_2, \epsilon_2) \subseteq B(x_1, \epsilon_1) \cap U_1 \text{ ve } 0 < \epsilon_2 < \epsilon_1/2 < \epsilon_0/2^2$$

olur.

Böyle gide gide, X'in öyle bir $(x_n)_n$ dizisi ve terimlerinin her biri pozitif olan öyle bir $(\epsilon_n)_n$ sayı dizisi bulunur ki, her n doğal sayısı için,

$$\overline{B}(x_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \subseteq B(x_n, \epsilon_n) \cap U_n \text{ ve } 0 < \epsilon_{n+1} < \epsilon_n/2$$

olur. Bu son eşitsizlik,

$$\epsilon_n < \epsilon_0/2^n$$

eşitsizliğini verir. Dolayısıyla, her $n > m$ için,

$$x_n \in B(x_m, \epsilon_m) \text{ ve } d(x_n, x_m) < \epsilon_m < \epsilon_0/2^m$$

olur. Bu da $(x_n)_n$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X metrik uzayı tam olduğundan $(x_n)_n$ dizisi yakınsar. x_n dizisinin limitine a diyelim.

Her m için $(x_n)_{n\geq m}$ dizisi $\overline{B}(x_m, \epsilon_m)$ kapalı yuvarının içindedir. Dolayısıyla dizinin limiti olan a da bu kapalı yuvardadır. Yani her $m \geq 1$ için,

$$a \in \overline{B}(x_m, \epsilon_m) \subseteq B(x_{m-1}, \epsilon_{m-1}) \cap U_m$$

olur, yani

$$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Ayrıca $a \in B(x_0, \epsilon_0)$ içindeliğini de biliyoruz. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Sonuç 20.5 (Baire Kategori Teoremi)**.** *X tam bir metrik uzay olsun. O zaman X'in boş olmayan açık bir U altkümesi birinci kategoriden değildir, yani sayılabilir sayıda X'te (ya da U'da, bkz. Önsav* 20.2*) seyrek kümenin bileşimi değildir.*

Kanıt: Tam tersine U açık kümesinin sayılabilir sayıda A_n seyrek kümesinin bileşimi olduğunu varsayalım. Alıştırma 20.6'ye göre $(\mathrm{cl}\, A_n)^c$ yoğun ve açık bir kümedir. Teorem 20.4'e göre U kümesi $(\mathrm{cl}\, A_n)^c$ kümelerinin kesişimiyle kesişir. x bu kesişimde olsun. Ama o zaman da U'nun x elemanı A_n'lerin bileşiminde olamaz, çelişki. □

Alıştırmalar

20.15. $(0, \infty)$ aralığı Baire Kategori Teoremi'ne göre ikinci kategoridendir ama tam değildir. Demek ki Teorem 20.4'ün diğer istikameti doğru değil.

20.16. Tam bir metrik uzayının kapalı bir altkümesinin de Baire olduğunu kanıtlayın. (Açık altkümelerinin Baire olduklarını Önsav 20.7'de göreceğiz.)

20.17. $\mathbb{N}$'nin bir Baire uzayı olduğunu kanıtlayın.

20.18. $\mathbb{Q}$'nün bir Baire uzayı olmadığını gösterin.

X bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için, $\operatorname{cl} U$ kümesinin tıkız olduğu x'i içeren bir U açık kümesi varsa X'e ***yerel tıkız*** adı verilir. Her tıkız küme yerel tıkızdır elbette. Öte yandan örneğin $\mathbb{R}^n$ tıkız değildir ama yerel tıkızdır.

Yerel tıkız uzayların altuzayları yerel tıkız olmak zorunda değildirler. Örneğin $X = \mathbb{R}$ yerel tıkızdır ama $Y = \mathbb{Q}$ (Öklid topolojisinde) yerel tıkız değildir. Bkz. Alıştırma 16.22.

Bir sonraki teoremin kanıtı aynen Teorem 20.4'ün kanıtı gibidir. Limit almak yerine tıkız topolojik uzaylardaki sonlu kesişim özelliği (Teorem 16.6) kullanılır.

Teorem 20.6. *Yerel tıkız ve Hausdorff topolojik uzaylar Baire uzaylarıdır.*

Kanıtın Eskizi: Eğer X tıkızsa, kanıt aynen Teorem 20.4'ün kanıtı gibi: Kanıttaki $B(x_i, \epsilon_i)$ yuvarları yerine V_i açık kümeleri seçilsin; bunların kapanışları tıkız olur; tıkız kümelerde sonlu kesişim özelliğiyle kanıt kolaylıkla tamamlanır. Eğer X tıkız değil de sadece yerel tıkızsa, o zaman V_i açık kümelerini, kapanışları tıkız olacak kadar küçük seçelim ve yukardaki programa devam edelim. □

İlginç uygulamalara geçmeden önce yararlı olabilecek bir önsav sunalım.

Önsav 20.7. *Bir Baire uzayının açık bir altkümesi de bir Baire uzayıdır.*

Kanıt: X bir Baire uzayı ve U, X'in bir açık altkümesi olsun. Teorem 20.3'ün birinci maddesinin U için doğrulandığını kanıtlayacağız. Her n doğal sayısı için, $U_n \subseteq U$, U'da yoğun olan U'nun açık bir altkümesi olsun. U_n, X'te de açıktır. U'nun her A altkümesi için $\operatorname{cl}_U A = (\operatorname{cl}_X A) \cap U$ olduğundan (Önsav 8.6),

$$\operatorname{cl}_U \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) = \left(\operatorname{cl}_X \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \right) \cap U.$$

olur. Bu kümenin U'ya eşit olduğunu kanıtlayacağız.

Şu tanımı yapalım:

$$V_n = U_n \cup (\operatorname{cl}_X U)^c.$$

V_n, X'in açık bir altkümesidir. Ayrıca X'te yoğundur çünkü, $U \subseteq \operatorname{cl}_X U_n$ olduğundan, $\operatorname{cl}_X U \subseteq \operatorname{cl}_X U_n$ olur, dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \operatorname{cl}_X V_n &= \operatorname{cl}_X (U_n \cup (\operatorname{cl}_X U)^c) = \operatorname{cl}_X U_n \cup \operatorname{cl}_X ((\operatorname{cl}_X U)^c) \\ &\supseteq \operatorname{cl}_X U \cup (\operatorname{cl}_X U)^c = X. \end{aligned}$$

X bir Baire uzayı olduğundan, bundan,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

kümesinin de X'te yoğun olduğu çıkar. Ama,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cup (\mathrm{cl}_X\, U)^c) = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cup (\mathrm{cl}_X\, U)^c,$$

dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) &= \mathrm{cl}_X\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cup (\mathrm{cl}_X\, U)^c\right)\\ &= \mathrm{cl}_X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cup \mathrm{cl}_X((\mathrm{cl}_X\, U)^c).\end{aligned}$$

Ama $(\mathrm{cl}_X\, U)^c \subseteq U^c$ ve U^c kapalı olduğundan,

$$\mathrm{cl}_X((\mathrm{cl}_X\, U)^c) \subseteq U^c$$

olur, yani

$$\mathrm{cl}_X((\mathrm{cl}_X\, U)^c) \cap U = \emptyset$$

olur. Bunu kale alarak yukardaki eşitlikten devam edelim:

$$\begin{aligned}U = X \cap U &= \mathrm{cl}_X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n\right) \cap U\\ &= \left(\mathrm{cl}_X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cup \mathrm{cl}_X((\mathrm{cl}_X\, U)^c)\right) \cap U\\ &= \mathrm{cl}_X\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap U = \mathrm{cl}_U\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right).\end{aligned}$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Bu bölümü birkaç ilginç sonuçla bitirelim.

Aşağıdaki sonucu kendi imkanlarınızla kanıtlamaya kalkışırsanız, Baire'in teoreminin değerini daha iyi algılarsınız.

Sonuç 20.8. *$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'nin sayılabilir sayıda açık altkümesinin kesişimi değildir.*

Kanıt: Her $n \in \mathbb{N}$ için, $U_n \subseteq \mathbb{R}$ açık olmak üzere, $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ olsun. Her $q \in \mathbb{Q}$ için de $V_q = \mathbb{R} \setminus \{q\}$ olsun. V_q'ler $\mathbb{R}$'de açık ve yoğundurlar. Ama $\mathbb{Q}$'yü içerdiklerinden, U_n'ler de $\mathbb{R}$'de yoğundurlar. U_n ve V_q'lerden sayılabilir sayıda olduğundan, Teorem 20.4'e göre, bunların kesişimi olan

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap \left(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} V_q\right)$$

kümesi de $\mathbb{R}$'de yoğundur. Ama sol taraftaki kesişim $\mathbb{Q}$'ye, sağ taraftaki kesişim $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'ye eşit. Çelişki. □

Bir topolojik uzayda sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimine G_δ ***kümesi*** adı verilir (bkz. Alıştırma 8.59). Demek ki bir önceki sonuca göre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$'de bir G_δ kümesi değildir.

Alıştırma 20.19. X bir metrik uzayı ve $A \subseteq X$ kapalı bir altküme olsun. A'nın bir G_δ kümesi olduğunu kanıtlayın.

Sonuç 20.9. *Sadece kesirli sayılarda sürekli olan bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yoktur.*

Kanıt: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. U_n,

$$\{U : U \text{ açık ve } f(U)\text{'nun çapı } 1/n\text{'den küçük}\}$$

kümesinin elemanlarının bileşimi olsun. U_n, açık kümelerin bileşimi olduğundan, elbette açık bir kümedir.

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

olsun. C tam tamına f'nin sürekli olduğu elemanlar kümesidir. Bunun kanıtı basittir ve okura bırakılmıştır. Sonuç 20.8'e göre $C = \mathbb{Q}$ olamaz. □

Yukardaki kanıttan da anlaşılacağı üzere, eğer f, bir topolojik uzaydan bir metrik uzaya giden bir fonksiyonsa, o zaman f'nin sürekli olduğu noktalardan oluşan küme bir G_δ kümesidir.

Öte yandan sadece irrasyonellerde sürekli olan bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır: Kesirli sayıları doğal sayılarla $(q_n)_n$ olarak numaralandıralım ve

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{eğer } x = q_n \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin \mathbb{Q} \text{ ise} \end{cases}$$

tanımını yapalım. Bu fonksiyonun sadece irrasyonel sayılarda sürekli olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Eğer Y, bir tam metrik uzayın ya da bir yerel tıkız Hausdorff uzayın G_δ altkümesiyse, o zaman Y'nin indirgenmiş topolojiyle Baire uzayı olduğu gösterilebilir.

Örnek 20.20. (Yusuf Ünlü) *$X \neq \emptyset$ bir topolojik uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki iki özelliği sağlayan $\mathcal{A}_n \subseteq \wp(X)$ olduğunu varsayalım:*
a. X'in her $U \neq \emptyset$ açık kümesi için ve her $n \in \mathbb{N}$ için öyle bir $A \in \mathcal{A}_n$ vardır ki,

$$\emptyset \neq A^\circ \subseteq A \subseteq U$$

olur.
b. Eğer her n için $\emptyset \neq A_n \in \mathcal{A}_n$ ve $A_{n+1} \subseteq A_n$ ise $\cap_n A_n \neq \emptyset$ olur.

Bu durumda X bir Baire uzayıdır.

Kanıt: $G_n \subseteq X$ yoğun ve açık kümeler olsun. $x \in X$ xxxxxxxxxxxxx bunu yarım bırakmışım.

21. Fonksiyon Kümeleri ve Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık

[N5]'te gerçel sayılarda değer alan fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün yakınsaklıkları kavramlarını tanımladık ve fonksiyonlardan oluşan kümeler üzerine teoremler kanıtladık. Bu bölümde geçmişte yaptıklarımızı toparlayacağız ve tanımları ve teoremleri $\mathbb{R}$'den herhangi bir metrik uzayına genelleştireceğiz. Amacımız daha sonra kanıtlanacak olan Arzela-Ascoli ve Stone-Weierstrass gibi önemli teoremler için altyapı hazırlamak.

21.1 Fonksiyonlar Kümesi

X ve Y birer küme olsun. (İlerde Y'yi bir topolojik ya da metrik uzay, hatta daha da özelleşerek $\mathbb{R}$ olarak alacağız.) $\text{Fonk}(X, Y)$, X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. $\text{Fonk}(X, Y)$ kümesinin aynı zamanda, X göstergeç kümesi olmak üzere, Y'nin kartezyen çarpımı olduğunu (kartezyen çarpım öyle tanımlanmıştır çünkü) anımsatırız:

$$\prod_{x \in X} Y = \text{Fonk}(X, Y)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki kümenin bir elemanı olan

$$f : X \to Y$$

fonksiyonunu sol taraftaki kartezyen çarpımının bir elemanı olarak alışık olduğumuz biçimde görmek için,

$$f = (f(x))_{x \in X}$$

yazılır. Ya da daha da alışık olduğumuz bir yazılımla, her $x \in X$ için,

$$f_x = f(x)$$

tanımı yapılarak,

$$f = (f_x)_{x \in X}$$

yazılır. Her iki bakış açısı da (bir fonksiyon olarak ya da kartezyen çarpımın bir elemanı olarak) yerine göre yararlıdır. Bu yarar, matematiksel değil, psikolojiktir elbette. Örneğin bir gerçel sayı dizisi de

$$\mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$$

kümesinin bir elemanı olarak tanımlanmıştır ama bir gerçel sayı dizisini

$$\mathrm{Fonk}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$$

kümesinin değil de $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ kartezyen çarpımının bir elemanı olarak görmek ve gerçel sayı dizileri için $(x_n)_n$ yazılımını kullanmak artık vazgeçemeyeceğimiz bir alışkanlık ve gelenek haline gelmiştir.

21.2 Noktasal Yakınsaklık

X bir küme ve Y bir topolojik uzay olsun. Y'de yakınsak dizilerin tek bir limiti olduğunu varsayalım, örneğin Y'yi Hausdorff bir uzay, hatta bir metrik uzay olarak alabiliriz. Her n doğal sayısı için bir

$$f_n : X \to Y$$

fonksiyonu verilmiş olsun. Bir başka deyişle, $\mathrm{Fonk}(X, Y)$ kümesinden bir

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

dizisi verilmiş olsun. Böylece her $x \in X$ için, terimleri Y topolojik uzayından olan bir

$$(f_n(x))_n$$

dizisi elde ederiz. Bu $(f_n(x))_n$ dizisinin bir limiti olabilir ya da olmayabilir. Yanıt x'e göre değişir elbette. Diyelim her $x \in X$ için $(f_n(x))_n$ sayı dizisinin bir limiti var. Bu limit biricik olduğundan, ama x'e göre de değişebileceğinden,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

yazalım. Böylece, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinden bir

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu elde ederiz. f fonksiyonunun bu $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin "limiti" olduğunu söylemek herhalde kabul edilir bir tanım olur. Öyle yapacağız. Tek farkla ki, "limit" yerine "noktasal limit" sözünü kullanmayı yeğleyeceğiz çünkü ilerde fonksiyon dizileri için çok daha doğal, çok daha güçlü ve çok daha kullanışlı bir limit kavramı bulacağız.

Biçimsel tanımı verelim: X herhangi bir küme olsun. Y, yakınsak dizilerin limitinin biricik olduğu bir topolojik uzay olsun, örneğin Y bir metrik uzay olabilir. Son olarak, X'ten Y'ye giden bir

$$(f_n)_n$$

fonksiyon dizisi verilmiş olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$(f_n(x))_n$$

dizisinin bir limiti varsa, o zaman, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

kuralıyla tanımlanan

$$f : X \to Y$$

fonksiyonuna ***noktasal yakınsadığı*** ve f'nin $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin ***noktasal limiti*** olduğu söylenir. Bu durumda,

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

ya da

$$f \stackrel{p}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$$

yazılır[1]. Bir başka deyişle, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti olan

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

fonksiyonu, her $x \in X$ için,

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

olarak tanımlanmıştır.

Bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin noktasal limiti varsa, bu limit elbette biriciktir, ne de olsa, daha tartışmaya başlamadan önce Y üzerine yaptığımız varsayıma göre, her $x \in X$ için, $(f_n(x))_n$ dizisinin limiti (olduğunda) biriciktir.

Bu aşamada önemli bir soru akla gelmeli: Yakınsaklık kavramından bir topolojik uzayda sözedilir. Oysa yukarda $\mathrm{Fonk}(X, Y)$ üzerine bir topolojik uzay

[1] Eşitliğin üstündeki p, İngilizce "noktasal" anlamına gelen *pointwise* sözcüğünün p'sidir.

yapısı vermeden yaptık bu işi. Acaba Fonk(X, Y) kümesi üzerine, noktasal yakınsaklığın topolojik yakınsaklık olduğu bir topoloji tanımlayabilir miyiz? Evet! Açıklayalım.

Fonk(X, Y)'yi $\prod_{x\in X} Y$ olarak algılayalım. Bölüm 6'de topolojik uzayların kartezyen çarpımı üzerine, adına çarpım topolojisi ya da Tychonoff topolojisi denilen bir topoloji tanımlamıştık. Bu topolojiye göre $\prod_{x\in X} Y$ kartezyen çarpımının açık kümeleri, bir n doğal sayısı, X'in $x_1, \ldots, x_n$ elemanları ve Y'nin $U_1, \ldots, U_n$ açık altkümeleri için,

$$\{(y_x)_{x\in X} : y_{x_1} \in U_1, \ldots, y_{x_n} \in U_n\}$$

biçiminde yazılan kümelerin bileşimidir. Fonksiyon diline çevirirsek,

$$\mathrm{Fonk}(X, Y)$$

topolojik uzayının açık kümeleri, bir n doğal sayısı, X'in $x_1, \ldots, x_n$ elemanları ve Y'nin $U_1, \ldots, U_n$ açık altkümeleri için,

$$\{f \in \mathrm{Fonk}(X, Y) : f(x_1) \in U_1, \ldots, f(x_1) \in U_n\}$$

biçiminde yazılan kümelerin bileşimidir.

Şimdi, kanıtladığımız Teorem 6.6'yı aşağıdaki gibi okuyalım:

Teorem 21.1 (Teorem 6.6)**.** *X bir küme olsun. Y, dizilerin limitlerinin biricik olduğu bir topolojik uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $f_n \in$ Fonk(X, Y) olsun. Ayrıca $f \in$ Fonk(X, Y) olsun. O zaman,* Fonk$(X, Y) = \prod_{x\in X} Y$ *kümesinin çarpım topolojisinde*

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

olması için, her $x \in X$ için,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

olması gerek ve yeter koşuldur. Yani Fonk(X, Y) *topolojik uzayında dizi yakınsaklığı, yukarda açıklanan noktasal yakınsaklığa eşdeğerdir.*

Eğer Y üzerinde toplama ya da çarpma gibi herhangi bir ikili işlem varsa, bu ikili işlemin bir benzerini Fonk(X, Y) üzerine en doğal biçimde tanımlayabiliriz. Nitekim, ikili işleme $*$ adını verirsek ve $f, g \in$ Fonk(X, Y) ise,

$$f * g \in \mathrm{Fonk}(X, Y)$$

fonksiyonunu, her $x \in X$ için

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

olarak tanımlayalım, yani fonksiyonların bu işleme göre çarpımını, her noktada aldıkları değerleri gene bu işleme göre çarparak tanımlayalım. Buna, anlaşılır nedenlerden, fonksiyonların ***noktasal işlemi*** (toplamı, çarpımı vs) adı verilir.

Yukardaki tanımın özel bir hali olarak, Y'yi $\mathbb{R}$ alırsak, o zaman $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ kümesinde toplama ve çarpma tanımlayabiliriz[2]. Ayrıca eğer $r \in \mathbb{R}$ ve $f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ ise, $rf \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ fonksiyonunu, benzer şekilde,

$$(rf)(x) = r \cdot f(x)$$

olarak tanımlayabiliriz[3]. Bir f fonksiyonu bir g fonksiyonuna, ancak g hiçbir zaman 0 değerini almıyorsa bölünebilir, yani $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ halkasının tersinir elemanlarının kümesi,

$$\{f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R}) : \text{ her } x \in X \text{ için } f(x) \neq 0\}$$

kümesine eşittir.

Aşağıdaki teorem, noktasal yakınsaklığın bu işlemlerle tam bir uyum içinde olduğunu söylüyor.

Teorem 21.2. *X, herhangi bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden iki fonksiyon dizisi ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{p}{=} f \text{ ve } \lim_{n\to\infty} g_n \overset{p}{=} g$$

ise, $(f_n + g_n)_n$, $(rf_n)_n$ ve $(f_n g_n)_n$ fonksiyon dizilerinin de noktasal limitleri vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) \overset{p}{=} f + g,$$
$$\lim_{n\to\infty} rf_n \overset{p}{=} rf$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} (f_n g_n) \overset{p}{=} fg$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca eğer her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ve $g_n(x) \neq 0$ ise, $(f_n/g_n)_n$ fonksiyon dizisinin de noktasal limiti vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} f_n/g_n \overset{p}{=} f/g$$

eşitliği sağlanır.

[2]Bilenlere: $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$, bu toplama ve çarpma işlemleriyle bir ***halka*** olur.

[3]Bilenlere: $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$, bu toplama ve bir sayıyla çarpma işlemleriyle bir ***vektör uzayı*** olur. $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ kümesini hem halka hem de vektör uzayı olarak (birlikte) görürsek, o zaman $\text{Fonk}(X, \mathbb{R})$ bir ***cebir*** olur.

Yukarda gördüğümüz noktasal yakınsaklık iyi hoş da, rahatsızlık veren bir kusuru var: Sürekli fonksiyonların limiti (X tıkız bile olsa) sürekli olmayabilir. Buna hemen bir örnek verelim.

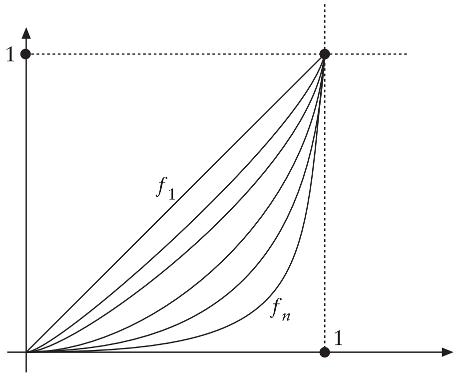
Örnek 21.1. $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x^n$ olsun. O zaman,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin limiti,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \neq 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

formülüyle tanımlanan f fonksiyonudur. Fonksiyonların grafiklerini aşağıda çizdik.



Bu örnekte, f_n fonksiyonlarının her birinin sürekli ama f fonksiyonunun (1 noktasında) süreksiz olduğuna dikkatinizi çekeriz. Demek ki sürekli bir fonksiyon dizisinin noktasal limiti sürekli olmayabilir. Bu da oldukça rahatsız edici bir durum[4].

21.3 Düzgün Yakınsaklık

Bu altbölümde (Y, d) bir metrik uzayı olacak.

Noktasal yakınsaklığın tanımını biraz daha açarsak, tanım şu hale dönüşür: Bir

$$(f_n : X \to Y)_n$$

fonksiyon dizisinin bir

$$f : X \to Y$$

[4]Çok hızlı makale yazan ve dolayısıyla yeterince dikkatli olmayan Cauchy, 1821 yılında yayımladığı **Analyse** adlı kitabında sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizinin noktasal limitinin de yakınsak olduğunu kanıtlamıştır! Hata ilk defa Weierstrass'ın tez hocası Christoph Gudermann tarafından 1838'de farkedilmiş ve düzgün yakınsaklığın tanımını bulan Weierstrass tarafından düzeltilmiştir.

fonksiyonuna yakınsaması için, her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için öyle bir N sayısı olmalı ki, her $n > N$ için,

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

olsun.

Bunu simgesel olarak yazalım:

$$f \stackrel{p}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$$

eşitliği, aynen,

$$(\forall x \in X)\,(\forall \epsilon > 0)\,\exists N\,(\forall n > N)\; d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

anlamına gelir.

Buradaki N sayısı x'e ve ϵ'a göre değişir. Zaten yukardaki matematiksel formüldeki sıralamada da, N sayısının varlığı "$(\forall x \in X)(\forall \epsilon > 0)$" simgelerinden sonra yazılıyor. Yani her $x \in X$ ve her $\epsilon > 0$ için, istenen koşulu sağlayan ayrı bir N olabilir. Bu bağımlılığı göstermek için bazen N yerine $N_{\epsilon,x}$ yazılır.

N'nin ϵ'a göre değişmesi olağan çünkü ne de olsa ϵ küçüldükçe

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlamak, yani $f_n(x)$'nin $f(x)$'e en fazla ϵ kadar yakın olmasını sağlamak güçleşmeli: Genelde ϵ küçüldükçe bu eşitsizliğin sağlandığı N sayılarını büyütmek gerekir; sadece pek ender durumlarda N, ϵ'dan bağımsızdır.

N'nin x'e göre değişmesi de olağan bulunabilir. Gerçekten de pek sık durumda x değiştikçe

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması gecikebilir. Öte yandan bazen de gecikmez, bazı durumlarda, hatta oldukça sık rastlanan bazı durumlarda, belli bir N'den büyük n sayıları için

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

eşitsizliği **her** $x \in X$ için sağlanır. Bu durumda,

$$(f_n : X \to \mathbb{R})_n$$

fonksiyon dizisinin

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir[5] ve

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$$

[5]Eşitliğin üstündeki u harfi, İngilizce "düzgün" demek olan *uniform* sözcüğünün u'sudur.

yazılır.

Düzgün yakınsaklığın biçimsel tanımı şöyle:

$$(\forall \epsilon > 0)\, \exists N\, (\forall x \in X)\, (\forall n > N)\ d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Bu formülü bir önceki formülle karşılaştırıp "$\forall x \in X$" simgelerinin nerden nereye geçtiğini gözlemlemekte yarar vardır.

Düzgün yakınsaklığı sözle ifade edelim: Eğer her $\epsilon > 0$ için, her $n > N$ ve her $x \in X$ için,

$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı x'ten bağımsız bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir.

Düzgün yakınsaklığın noktasal yakınsaklıktan şu önemli ayrımı var. Düzgün yakınsaklıkta, $(f_n(x))_n$ dizileri $f(x)$ sayılarına **aynı hızla** yakınsarlar. Oysa noktasal yakınsaklıkta yakınsama hızı x'e göre değişebilir. Dolayısıyla düzgün yakınsaklık, noktasal yakınsaklıktan çok daha hoş ve çok daha yararlı bir kavramdır. Yararlarını yakın zamanda göreceğiz.

Noktasal yakınsaklık kavramı düzgün yakınsaklıktan çok daha zayıf bir kavramdır[6], yani noktasal yakınsaklığın gerçekleşmesi düzgün yakınsaklığın gerçekleşmesinden çok daha kolaydır: Bir fonksiyon dizisi düzgün yakınsaksa aynı zamanda noktasal yakınsaktır:

Teorem 21.3. *Eğer $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa noktasal da yakınsar.*

Kanıt: Bu kadar açıklamadan sonra bu teoremin ayrıca bir kanıta ihtiyacı olduğunu sanmıyoruz: Eğer bir N her x için işimize yarıyorsa, elbette her x için bu N işimize yarar! □

Ama yukardaki teoremin tersi doğru değildir. Örneğin, biraz önce verdiğimiz $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$ ve $f_n(x) = x^n$ örneğinde $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi noktasal yakınsaktır ama düzgün yakınsak değildir.

Eğer $Y = \mathbb{R}$ ise, düzgün yakınsaklık kavramını geometrik olarak da ifade edebiliriz ve böylece kavram sezgilerimize daha yatkın bir hale gelir. $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi f'ye düzgün yakınsasın. $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. O zaman yeterince büyük n'ler ve her x için,

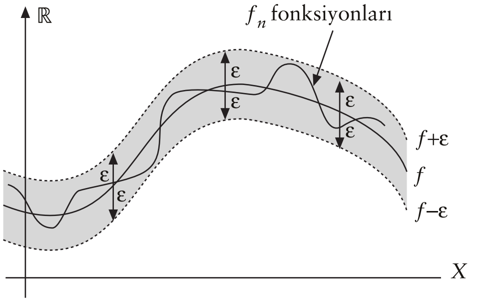
$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

eştsizliği sağlanır. Yani

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$$

[6]Düzgün yakınsaklık kavramı, modern analizin kurucusu sayılan Karl Weierstrass tarafından bulunmuştur.

eşitsizliği sağlanır. Bir başka deyişle, yeterince büyük n'ler için f_n fonksiyonları $f - \epsilon$ ile $f + \epsilon$ arasındadır. (Buradaki ϵ, sabit ϵ fonksiyonunu temsil ediyor.) Şekil aşağıda.



Demek ki $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f'ye düzgün yakınsaması için yeter ve gerek koşul, her $\epsilon > 0$ için, f_n fonksiyonlarının "bir zaman sonra", yani belli bir N göstergecinden sonra, yukardaki şekildeki gibi, $f - \epsilon$ ile $f + \epsilon$ şeridinin içine girmesidir.

Biraz daha formalizmle, düzgün yakınsaklığın çok daha kullanışlı bir tanımını verebiliriz: X'ten Y'ye giden f ve g fonksiyonları için,

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

tanımını yapalım. $d_\infty(f, g)$, bir gerçel sayı olabileceği gibi ∞ da olabilir.

Örneğin, $X = Y = \mathbb{R}$ ve $f(x) = x$ ise, $d_\infty(f, 0) = \infty$ olur. İlerde daha fazla örnek göreceğiz.

d_∞, $\mathrm{Fonk}(X, Y) \times \mathrm{Fonk}(X, Y)$ kartezyen çarpımından $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ kümesine giden bir fonksiyondur.

$d_\infty(f, g)$'nin, her $x \in X$ elemanı için,

$$d(f(x), g(x)) \leq M$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ elemanlarının en küçüğü olduğuna dikkatinizi çekeriz.

Bu tanımla, düzgün yakınsaklığın tanımı şu şekle dönüşür: Eğer her $\epsilon > 0$ için,

$$n > N \Rightarrow d_\infty(f_n, f) < \epsilon$$

önermesini sağlayan bir N sayısı varsa, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** söylenir. Bu son koşul aynen,

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$$

diyor! Tek bir farkla ki $d_\infty(f_n, f)$'ler illa sayı olmak zorunda değiller, ∞ da olabilirler. Eğer sonsuz tane n için $d_\infty(f_n, f)$'ler ∞ oluyorsa, o zaman bunların limiti 0 olamaz ve düzgün yakınsaklık yoktur. Eğer en fazla sonlu tane n için $d_\infty(f_n, f)$'ler ∞ oluyorsa, o zaman $d_\infty(f_n, f)$'ler arasından ∞ olanlarını atıp geri kalan sayı dizisinin aşina olduğumuz yakınsaklığına bakabiliriz.

Şimdi tanımın son halini yazabiliriz:

Tanım. *Herhangi bir X kümesi, bir (Y, d) metrik uzayı, X'ten Y'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi ve bir f fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$$

ise, $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ***düzgün yakınsadığı*** *söylenir ve bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$$

yazılır. Eğer $A \subseteq X$ ise ve $\lim_{n\to\infty} f_n|_A \stackrel{u}{=} f|_A$ ise $(f_n)_n$ dizisinin A üzerinde f'ye düzgün yakınsadığı söylenir.

Basit Özellikler: Eğer $(f_n)_n$ dizisi A ve B üzerine düzgün yakınsaksa $A \cup B$ üzerine de düzgün yakınsar elbette. Ayrıca eğer $(f_n)_n$ dizisi yakınsaksa her sonlu altküme üzerine düzgün yakınsar. Eğer

$$g : Z \to X$$

herhangi fonksiyonsa ve $(f_n : X \to Y)_n$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, o zaman $(f_n \circ g)_n$ dizisi $f \circ g$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

d_∞'nin $\text{Fonk}(X, Y)$ üzerine bir metrik (mesafe) olmasına ramak kalmıştır. Tek kusur $d(f, g)$'nin ∞ olabilme sorunudur. Şimdi $d_\infty(f, g)$'nin ne kadar mesafeye benzediğini göreceğiz ama önce bir anımsatma: [N4]'te, $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ kümesi üzerine, $\mathbb{R}^{\geq 0}$ kümesinin bildiğimiz toplamayı, sıralamayı ve çarpmayı şöyle genişletmiştik:

- Her $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için, $r + \infty = \infty + r = \infty + \infty = \infty$,
- Her $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ için, $r < \infty$,
- Her $r \in \mathbb{R}^{>0}$ için, $r\infty = \infty r = \infty\infty = \infty$.

(0∞ ve $\infty 0$ çarpımlarını tanımlamıyoruz.)

Önsav 21.4. *X bir küme, Y bir metrik uzay olsun. Her f, g, $h \in \text{Fonk}(X, Y)$ ve $0 \neq r \in \mathbb{R}$ için şu önermeler geçerlidir:*
i. *$d_\infty(f, g) \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$.*
ii. *$d_\infty(f, g) = 0$ ve $f = g$ eşitliklerinden biri geçerliyse, diğeri de geçerlidir.*
iii. *$d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$.*
iv. *$d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$.*
v. *Eğer $Y = \mathbb{R}^n$ ise $d_\infty(rf, rg) \leq |r| \cdot d_\infty(f, g)$.*

Kanıt: Çok kolaydır ve okura bırakılmıştır. □

Bir metrik olmasa da d_∞, Fonk(X,Y) üzerine aynen bir metrik gibi bir topoloji tanımlar. ***Düzgün yakınsaklık topolojisi*** denilen bu topoloji, tanım gereği, $f \in$ Fonk(X,Y) ve $r \in \mathbb{R}$ için

$$B(f,r) = \{g \in \text{Fonk}(X,Y) : d_\infty(f,g) < r\}$$

"yuvarları" tarafından gerilir. Alıştırma olarak bu yuvarların topolojinin bir tabanı olduğunu kanıtlayabilirsiniz.

21.4 Sınırlı Fonksiyonlar Kümesi $\ell^\infty(X,Y)$

Eğer f ve g fonksiyonları sınırlıysa, $d_\infty(f,g)$ bir gerçel sayı olur. Dolayısıyla Önsav 21.4'e göre, d_∞, sınırlı fonksiyonlar kümesini bir metrik uzayı yapar.

$\ell^\infty(X,Y)$, X'ten Y'ye giden sınırlı fonksiyonlar kümesi olsun.

Teorem 21.5. *X bir küme, (Y,d) tam bir metrik uzay olsun. $\ell^\infty(X,Y)$, d_∞ metriği için tam bir metrik uzaydır.*

Kanıt: $\ell^\infty(X,Y)$'nin d_∞ için bir metrik uzay olduğu belli. Tamlığı kanıtlayalım. $\ell^\infty(X,Y)$ metrik uzayından bir $(f_n)_n$ Cauchy dizisi seçelim. Herhangi bir $\epsilon > 0$ seçelim. N, her n, $m > N$ için,

$$d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon$$

eşitsizliğini sağlanacak biçimde seçilsin. O zaman her $x \in X$ için,

$$d(f_n(x), f_m(x)) \le d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon$$

olur. Demek ki $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi Y'nin bir Cauchy dizisidir. Y tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Bu dizinin limitine $f(x)$ diyelim. Böylece X'ten Y'ye giden bir f fonksiyonu elde ederiz. f, elbette $(f_n)_n$ dizisinin noktasal limitidir. İki şey kanıtlamalıyız: f'nin sınırlı olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$$

eşitliğini.

f'nin sınırlı olduğunun kanıtı kolay: Düzgün yakınsamanın tanımında $\epsilon = 1$ alalım. O zaman bir n için $d_\infty(f_n, f) < 1$ olur, dolayısıyla her $x \in X$ için,

$$d(f_n(x), f(x)) < 1$$

olur. Böyle bir n'yi sabitleyelim. $x_0 \in X$ sabit bir eleman olsun. B sayısı, her $x \in X$ için,

$$d(f_n(x), f_n(x_0)) \le B$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde seçilsin. (f_n sınırlı bir fonksiyon olduğundan, böyle bir B vardır.) Şimdi her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\le d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)) \\ &\le d(f(x), f_n(x)) + B + d(f_n(x_0), f(x_0)) \le 1 + B + 1 = B + 2 \end{aligned}$$

olur. Bu da f'nin sınırlı bir fonksiyon olduğunu gösterir.

Şimdi sıra $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ eşitliğini kanıtlamaya geldi. Herhangi bir $\epsilon > 0$ seçelim. Her n, $m > N$ için

$$d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir N vardır. Böyle bir N seçelim. $m > N$ göstergeci de sabitlensin. Her $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi bu eşitsizlikte n'yi sonsuza götürelim (m ve x sabit kalacaklar). Y'den $\mathbb{R}$'ye giden

$$y \mapsto d(y, f_m(x))$$

fonksiyonu sürekli olduğundan (Teorem 14.9), Sandviç Teoremi'nden,

$$\epsilon \ge \lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_m(x)) = d(\lim_{n\to\infty} f_n(x), f_m(x)) = d(f(x), f_m(x))$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik her $x \in X$ için doğru olduğundan,

$$\epsilon \ge d_\infty(f, f_m)$$

elde ederiz. Demek ki her $\epsilon > 0$ için,

$$m > N \text{ ise } d_\infty(f, f_m) \le \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir N sayısı bulduk. Ama bu aynen,

$$\lim_{m\to\infty} d_\infty(f, f_m) = 0$$

demektir, yani gerçekten de $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} f$ olur. Kanıtımız bitmiştir. □

21.5 Fonk(X, Y) Üzerine Mesafe

X bir küme ve (Y, d) bir metrik uzayı olsun. X'ten Y'ye giden $\ell^\infty(X, Y)$ sınırlı fonksiyonlar kümesini yukarda ele aldık ve bu kümenin d_∞ ile (tam) bir metrik uzayı olduğunu gördük. Öte yandan Fonk(X, Y) kümesi üzerinde sonsuz değeri alması yüzünden mesafe olamayan d_∞ fonksiyonunu hafifçe değiştirerek bir mesafeye dönüştürebiliriz.

Eğer f ve g, $\mathrm{Fonk}(X, Y)$ kümesinden iki eleman ise, f ve g arasındaki mesafeyi

$$d(f, g) = \min\{1, d_\infty(f, g)\}$$

olarak tanımlayalım. $\mathrm{Fonk}(X, Y)$ ile Y metrik uzaylarının mesafesinin aynı simgeyle gösterilmesi bir karışıklığa neden olmasın lütfen.

Böylece $d(f, g)$ hiçbir f ve g fonksiyonları için sonsuz olmaz, hatta hiçbir zaman 1'i aşamaz. Ama bizim için $d(f, g)$'nin 1'i aşmaması değil, birazdan Teorem 21.6'da kanıtlayacağımız özellikleri önemli olacak.

Daha ileri gitmeden,

$$d(f, g) < 1 \Leftrightarrow d_\infty < 1$$

denkliğini ve bu durumda $d(f, g) = d_\infty(f, g)$ eşitliğinin olduğunu farkedelim. Bu arada şunu da aradan çıkaralım: Herhangi bir $a > 0$ için

$$d(f, g) = \min\{a, d_\infty(f, g)\}$$

olarak tanımlanmış olsaydı da herhangi bir şey değişmezdi, yapacaklarımızın hepsi bu yeni d için de geçerli olurdu. $d(f, g)$'nin tek görevi, f ile g arasındaki mesafenin sonsuz olmasını engellemek.

Teorem 21.6. $d(f, g) = \min\{1, d_\infty(f, g)\}$ *kuralıyla tanımlanmış*

$$d : \mathrm{Fonk}(X, Y) \times \mathrm{Fonk}(X, Y) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\mathrm{Fonk}(X, Y)$ *kümesi üzerine bir mesafe fonksiyonudur. Ayrıca eğer* Y *tam bir metrik uzaysa,* $(\mathrm{Fonk}(X, Y), d)$ *de tam bir metrik uzaydır.*

Kanıt: $d(f, g)$, elbette negatif olmayan bir gerçel sayıdır. Ayrıca

$$d(f, f) = \min\{1, d_\infty(f, f)\} = \min\{1, 0\} = 0$$

olur. Öte yandan $d(f, g) = 0$ ise, o zaman,

$$0 = d(f, g) = \min\{1, d_\infty(f, g)\}$$

olduğundan $d_\infty(f, g) = 0$ buluruz; bundan da Önsav 21.4.ii'ye göre

$$f = g$$

çıkar.

d'nin simetrik olduğunun kanıtı: Önsav 21.4.iii'ten dolayı,

$$d(f, g) = \min\{1, d_\infty(f, g)\} = \min\{1, d_\infty(g, f)\} = d(g, f)$$

olur.

Üçgen eşitsizliğinin kanıtı: Eğer $d(f,h)$ ya da $d(h,g)$ mesafelerinden biri 1 ise,

$$d(f,g) \le 1 \le d(f,h) + d(h,g)$$

eşitsizliği elbette geçerli olur. İkisinin de 1'den küçük olduklarını varsayalım. O zaman,

$$d(f,h) = d_\infty(f,h) \text{ ve } d(h,g) = d_\infty(h,g)$$

olmak zorunda. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \min\{1, d_\infty(f,g)\} \le d_\infty(f,g) \\ &\le d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) = d(f,h) + d(h,g). \end{aligned}$$

Böylece d'nin $\text{Fonk}(X,Y)$ üzerine bir metrik olduğunu kanıtlamış olduk.

Şimdi Y'nin bir tam metrik uzay olduğunu varsayalım. Teorem 21.5'teki kanıtın son kısmını kelimesi kelimesine tekrarlayabiliriz, çünkü ne de olsa $d(f,g) \le 1$ olduğunda $d(f,g)$ ile $d_\infty(f,g)$ arasında bir fark yoktur. □

Ne Yaptık? Nasıl Bölüm 21.2'de (dizilerin en fazla tek bir limiti olduğu) bir Y topolojik uzayında, $\text{Fonk}(X,Y)$ kümesi üzerine noktasal yakınsaklığı veren bir topoloji bulmuşsak, Y bir metrik uzay olduğunda, $\text{Fonk}(X,Y)$ kümesi üzerine düzgün yakınsaklığı veren bir metrik bulduk. Ayrıca Y tam olduğunda bu metrik uzayın tam olduğunu kanıtladık:

Sonuç 21.7. *X herhangi bir küme ve (Y,d) bir metrik uzay olsun. Ayrıca X'ten Y'ye giden bir $(f_n)_n$ fonksiyon dizisi ve bir f fonksiyonu verilmiş olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$$

eşitliği, yani $(\text{Fonk}(X,Y),\ d)$ *metrik uzayında $(f_n)_n$ dizisinin f fonksiyonuna yakınsaması $(f_n)_n$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsamasına eşdeğerdir.*

Bu metriğe ***düzgün yakınsaklık metriği*** adı verilir. Bu metrikte Cauchy dizisi olan dizilere de ***düzgün Cauchy dizisi*** adı verilir. Demek ki bir $(f_n)_n$ dizisinin düzgün Cauchy dizisi olması için, her $\epsilon > 0$ için öyle bir N sayısı olmalı ki, her $n, m > N$ için

$$d(f_n, f_m) < \epsilon$$

olmalı. Bu tanımda elbette d yerine d_∞ de alabilirdik.

Alıştırma 21.2. X bir küme, Y bir metrik uzay olsun. $\text{Fonk}(X,Y)$'nin $\ell^\infty(X,Y)$ altkümesinin $(\text{Fonk}(X,Y), d)$ metrik uzayında hem açık hem kapalı olduğunu kanıtlayın.

21.6 Sürekli Fonksiyonlar Kümesi $C(X, Y)$

X bir topolojik uzay ve (Y, d) bir metrik uzayı olsun. X'ten Y'ye giden sürekli fonksiyonlar kümesi $C(X, Y)$ olarak gösterilir.

$$C(X, Y) \subseteq \text{Fonk}(X, Y)$$

olduğundan, $C(X,Y)$'yi d altında bir metrik uzay (Fonk(X,Y)'nin altuzayı) olarak algılayabiliriz. (d'nin tanımı için bkz. sayfa 291.)

Eğer X tıkızsa, tanım kümesi X olan her sürekli fonksiyon sınırlı olduğundan,

$$C(X,Y) \subseteq \ell^\infty(X,Y)$$

olur ama X tıkız değilse böyle bir zorunluluk yoktur elbette. X tıkız olmadığında da istenirse

$$C(X,Y) \cap \ell^\infty(X,Y)$$

altuzayına bakılabilir.

Bu bölümde $C(X,Y)$ metrik uzayını irdeleyeceğiz. Akla ilk gelen soru bunun Fonk(X,Y) kapalı (dolayısıyla tam) bir altuzayı olup olmadığı sorusu. Yanıt olumlu:

Teorem 21.8. *Sürekli fonksiyonlardan oluşan dizilerin düzgün limiti de süreklidir. Yani $C(X,Y)$, Fonk(X,Y)'nin kapalı bir altuzaydır.*

Bu teorem aşağıdaki sonuçtan çıkar.

Teorem 21.9. *Eğer $(f_n : X \to Y)_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve f_n fonksiyonlarının her biri bir $a \in X$ noktasında sürekliyse, o zaman f fonksiyonu da a noktasında süreklidir.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ olsun. Öyle bir N seçelim ki, her $n \geq N$ için,

$$d(f, f_n) < \epsilon/3$$

olsun. $n = N + 1$ olsun. O zaman her $x \in X$ için,

$$d(f(x), f_n(x)) < \epsilon/3$$

olur. f_n fonksiyonu a'da sürekli olduğundan a'yı içeren öyle bir $U \subseteq X$ açık kümesi vardır ki, her $x \in U$ için,

$$d(f_n(x), f_n(a)) < \epsilon/3$$

olur. Şimdi $x \in U$ için hesaplayalım:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f_n(x)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu a noktasında süreklidir. □

Sonuç 21.10. *Eğer Y tam metrik uzaysa, $C(X,Y)$ ve $C(X,Y) \cap \ell^\infty(X,Y)$ metrik uzayları tamdır.* □

Sonuç 21.11. *Eğer Y tam metrik uzaysa, $C(X,Y)$ ya da $C(X,Y) \cap \ell^\infty(X,Y)$ uzaylarındaki düzgün Cauchy dizileri yakınsaktırlar.* □

Alıştırmalar

21.3. $[0,1]$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden öyle bir sürekli fonksiyon dizisi bulun ki, dizinin noktasal limiti olsun ama limit fonksiyonu sınırsız olsun.

21.4. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden

$$f_n(x) = \frac{1}{n(1+x^2)}$$

fonksiyonlarının 0 fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

21.5.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } |x| \geq 1/n \text{ ise} \\ n|x| & \text{eğer } |x| < 1/n \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır?

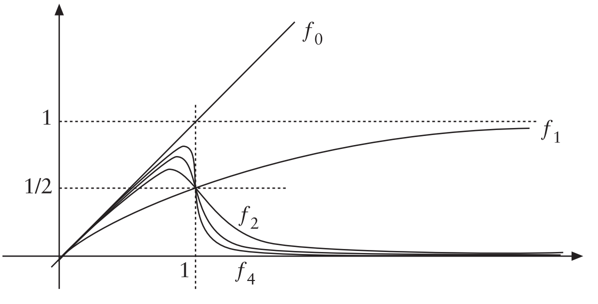
21.6. X tıkız bile olsa, sürekli bir fonksiyona noktasal yakınsayan her sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsak olmayabileceğini gösterin.

21.7. Her f_n sınırlıysa $(f_n)_n$ düzgün yakınsaksa $(f_n)_n$ dizisinin sınırlı bir dizi olduğunu gösterin.

21.8. $[0,\infty)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye giden

$$f_n(x) = \frac{x}{1+x^n}$$

fonksiyon dizisinin noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın. Bu fonksiyon dizisinin düzgün yakınsadığı bir altküme bulun. (f_n fonksiyonlarını sizin için aşağıda çizdik.)



21.9. $x \in \mathbb{R}$ için

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

olsun. β fonksiyonu irrasyonellerde 0 değerini alsın ve birbirine asal a ve b tamsayıları için

$$\beta(a/b) = |b|$$

olsun.

$$g_n(x) = \beta(x) + 1/n$$

olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$ dizilerinin her sonlu aralıkta düzgün yakınsadığını ama $(f_n g_n)_n$ dizisinin hiçbir sonlu aralıkta düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

21.10. $x \in (0,\, 1)$ için
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$$
olsun. $(f_n)_n$ dizisinin $(0,1)$ üzerinde noktasal yakınsadığını ama düzgün yakınsamadığını kanıtlayın.

21.11. Eğer X tıkızsa ve $(f_n : X \to \mathbb{R})_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ve
$$g : X \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
fonksiyonu sürekliyse, $(f_n/g)_n$ dizisinin f/g fonksiyonuna düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

21.12. $Y = \mathbb{R}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ ise ve $\lim_{n\to\infty} f_n \stackrel{u}{=} 0$ ise
$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n f_n(x)$$
serisinin düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

21.13. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli olsun. f_n fonksiyonu $f_n(x) = f(x + 1/n)$ kuralıyla tanımlanmış olsun. $(f_n)_n$ dizisinin f'ye düzgün yakınsadığını kanıtlayın. Eğer f düzgün sürekli değilse bunun doğru olmayabileceğini gösterin.

21.14. f_n fonksiyonları bir X metrik uzayından bir Y metrik uzayına gitsin ve $(f_n)_n$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. X'in $(x_n)_n$ dizisi x noktasına yakınsasın. $(f_n(x_n))_n$ dizisinin $f(x)$'e yakınsadığını kanıtlayın.

21.15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} \sin\left(\frac{x}{3^k}\right)$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsadığını kanıtlayın.

21.16. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^k}$ serisi $\mathbb{R}$'nin hangi altkümeleri üzerine düzgün yakınsak olabilir?

21.17. Eğer X tıkız bir topolojik uzaysa ve Y bir metrik uzayıysa, $C(X, Y)$ kümesinin tıkız-açık topolojisinin bu bölümde tanımlanan $d = d_\infty$ metriğiyle metrikleştiğini kanıtlayın.

21.7 Fonk(X, Y)'nin Metrikleşmesi

Eğer Y bir metrik uzaysa, Fonk(X, Y) üzerine çarpım topolojisi veren bir metrik koyabilir miyiz? Eğer X sayılabilirse, bunun doğru olduğunu Örnek 13.12'te gördük. Ama eğer X sayılamaz sonsuzlukta ve $|Y| \geq 2$ ise Fonk(X, Y) topolojik uzayı metrikleşemez.

Teorem 21.12. *Eğer X sayılamaz sonsuzlukta bir kümeyse ve Y en az iki elemanlı bir metrik uzaysa,* Fonk(X, Y) *topolojik uzayı metrikleşemez. Dolayısıyla X sayılamaz sonsuzluktaysa $\wp(X) = 2^X$ topolojik uzayı (çarpım topolojisiyle) metrikleşemez.*

Kanıt: Tersini varsayalım ve Y'nin iki elemanlı bir altkümesini alalım, diyelim $\{0, 1\}$ altkümesini aldık. O zaman, altuzay olduğundan,
$$M = \text{Fonk}(X, \{0,1\}) = \prod_{x\in X} \{0, 1\}$$
altuzayı da metrikleşebilirdi (Örnek 10.7 ve sayfa 178, son paragraf). Tychonoff Teoremi'ne göre M tıkızdır. Dolayısıyla Teorem 17.2'ye göre M dizisel

tıkızdır ve Önsav 17.5 ve 17.6'e göre M'nin sayılabilir bir tabanı vardır; diyelim $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Çarpım topolojisinin tanımına bakıldığında, her $\emptyset \neq U \subseteq M$ açık kümesi için,

$$X_0(U) = \{x \in X : \text{ her } u \in U \text{ için } u_x = 0\}$$

kümesinin sonlu olduğu görülecektir. Demek ki,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_0(V_n)$$

kümesi en fazla sayılabilir sonsuzluktadır. Şimdi $x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_0(V_n)$ ve

$$U = \{u \in M : u_x = 0\}$$

olsun. U açık bir küme ama hiçbir V_n, U'nun bir altkümesi olamaz. Bir çelişki. Teorem kanıtlanmıştır. □

21.8 $Y = \mathbb{R}^n$ Özel Durumu

Bu altbölümde $Y = \mathbb{R}^n$ alacağız. X ise herhangi bir küme olacak. Bir $f \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R}^n)$ için,

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

tanımını yapalım. Her $x \in X$ için,

$$\|f(x)\| \leq \|f\|_\infty$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca $\|f\|_\infty$,

$$\|f(x)\| \leq M$$

eşitsizliğinin her $x \in X$ için sağlandığı en küçük $M \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ elemanıdır.

X'ten $\mathbb{R}^n$'ye giden f ve g fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) &= \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} \\ &= \sup\{\|f(x) - g(x)\| : x \in X\} = \|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

olur. Ayrıca eğer 0, sabit 0 fonksiyonunu simgeliyorsa $\|f\|_\infty = d_\infty(f, 0)$ olur.

Şu sonucun kanıtı çok kolaydır:

Teorem 21.13. *Her $f, g \in \text{Fonk}(X, \mathbb{R}^n)$ ve her $r \in \mathbb{R}$ için, şu önermeler doğrudur.*

i. $\|f\|_\infty = 0$ *ve* $f = 0$ *eşitliklerinden biri doğruysa diğeri de doğrudur.*

ii. $\|rf\|_\infty = |r| \cdot \|f\|_\infty$.

iii. $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

iv. *Eğer* $n = 1$ *ise* $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

Kanıt: İlk iki önerme, tanımdan dolayı bariz; aslında üçüncüsü de:

$$\begin{aligned}\|f+g\|_\infty &= \sup\{\|f(x)+g(x)\| : x \in X\}\\ &\le \sup\{\|f(x)\| + \|g(x)\| : x \in X\}\\ &\le \sup\{\|f(x)\| : x \in X\} + \sup\{\|g(x)\| : x \in X\}\\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Son eşitsizliği okura alıştırma olarak bırakıyoruz. (iv'te eşitliğin olmayabileceğini gösterin.) □

Bu özel durumda, düzgün yakınsaklık toplama ve sabit bir sayıyla çarpmayla uyumludur:

Teorem 21.14. *X bir küme olsun. $(f_n)_n$ ve $(g_n)_n$, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar dizisi ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f \text{ ve } \lim_{n\to\infty} g_n \overset{u}{=} g$$

ise, $(f_n+g_n)_n$ ve $(rf_n)_n$ fonksiyon dizileri de düzgün yakınsarlar ve

$$\lim_{n\to\infty} (f_n+g_n) \overset{u}{=} f+g \text{ ve } \lim_{n\to\infty} rf_n \overset{u}{=} rf$$

olur.

Kanıt: Birinci eşitliğin kanıtı tamamen,

$$\|(f_n+g_n)-(f+g)\|_\infty = \|(f_n-f)+(g_n-g)\|_\infty \le \|f_n-f\|_\infty + \|g_n-g\|_\infty$$

eşitsizliğine dayanır ve Sandviç Teoremi sayesinde hemen çıkar. İkincisini okura bırakıyoruz. □

Örnek 21.18. Çarpma için yukardakine benzer sonuç doğru değildir. Hemen bir örnek verelim. $X = \mathbb{R}$ olsun.

$$f_n(x) = 1/n \text{ ve } g_n(x) = g(x) = x$$

olsun. O zaman

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} g_n \overset{u}{=} g$$

olur. Teorem 21.3 ve 21.2'ye göre

$$\lim_{n\to\infty} f_n g_n \overset{p}{=} 0$$

olur elbette ama

$$\lim_{n\to\infty} f_n g_n \overset{u}{=} 0$$

olmaz (Örnek 11.16).

Eğer $Y = \mathbb{R}$ ise, $\ell^\infty(X,Y)$ yerine $\ell^\infty(X)$ yazılır.

Sonuç 21.15. Fonk(X) *ve* $\ell^\infty(X)$ *birer cebirdir. Yani f ve g bu kümelerdeyse ve $r \in \mathbb{R}$ ise, $f+g$, $f \cdot g$ ve rf de bu kümededirler. Ayrıca d metriğine göre tamdırlar.*

Kanıt: Teorem 21.6 ve 21.5'ten çıkar. □

Sonuç 21.16. *Eğer* $A \leq \mathrm{Fonk}(X)$ *bir altcebirse, yani her* f, $g \in A$ *ve* $r \in \mathbb{R}$ *için,* $f + g$, $f \cdot g$ *ve* rf *de* A*'dalarsa, o zaman* A*'nın topolojik kapanışı* $\overline{A}$ *da bir altcebirdir. Ayrıca eğer* $A \leq \ell^\infty(X)$ *ise* $\overline{A} \leq \ell^\infty(X)$ *olur.* □

22. Stone-Weierstrass Teoremi

Bölüm 21'de bir metrik uzayda değer alan fonksiyonların iki türlü limitini gördük: noktasal ve düzgün limit. Her iki kavram da oldukça doğal biçimde tanımlanmıştı.

Bu bölümde noktasal yakınsaklıktan çok daha güçlü bir kavram olan düzgün yakınsaklık kavramıyla daha yakından ilgileneceğiz. Kanıtlayacağımız teoremin en önemli uygulamalarından birini çıtlatalım: $[a, b]$ kapalı aralığı üzerine tanımlanmış her sürekli fonksiyon, polinomlardan (aslında polinomiyal fonksiyonlardan demek lazım) oluşan bir dizinin düzgün limitidir. Bir başka deyişle sürekli fonksiyonların yaklaşık değerlerini, münasip polinomların değerlerini hesaplayarak bulabiliriz. ***Weierstrass Yoğunluk Teoremi*** denilen bu sonucun benzerlerine aslında okur bir nebze aşina olmalı. Örneğin, exp fonksiyonu,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

polinomlarının her kapalı ve sınırlı aralık üzerinde düzgün limitidir [N4]. Aynı şey, sin ve cos fonksiyonları için de geçerlidir:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$
$$\cos x = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

eşitlikleri (sin ve cos fonksiyonlarının tanımından dolayı) geçerlidir ve limitler her kapalı ve sınırlı aralık üzerinde düzgündür. (Bkz. [N5].

Taylor serilerini bilen okur da bu fikirle aşinadır. Ama bir fonksiyonun Taylor serisi olması için, fonksiyonun sonsuz kez türevlenebilir olması gerekir ki birçok sürekli fonksiyon tek bir kez bile türevlenemez. Ayrıca fonksiyon sonsuz kez türevlenebilir olduğu zaman bile fonksiyonun Taylor serisi fonksiyona eşit olmayabilir. Örneğin $x \mapsto \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerine süreklidir ama 0'da türevi yoktur, öte yandan bu fonksiyon Weierstrass Yoğunlaşma Teoremi'ne göre polinomların düzgün limitidir, nitekim [N5]'te (bkz. *Dini Teoremi ve Bir uygulaması* başlıklı bölüm) $\sqrt{x}$'e $[0, 1]$ üstünde düzgün yakınsayan polinomlar gördük.

Yukardaki tartışmadan da anlaşılacağı üzere son derece genel bir teorem sözkonusu. Nitekim bu bölümde genelleştireceğimiz aşağıdaki teoremi [N5]'te kanıtlamıştık.

Olgu 22.1 (Weierstrass, 1885)**.** $[a, b]$ *kapalı aralığında tanımlanmış her sürekli fonksiyona polinomiyal fonksiyonlarla düzgün yakınsanabilir; yani eğer*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyonsa ve $\epsilon > 0$ *ise, öyle bir* P *polinomu vardır ki*

$$\|f - P\|_\infty < \epsilon$$

olur. Bir başka deyişle, polinomiyal fonksiyonlar kümesi $(C([a, b]), d_\infty)$ *metrik uzayında yoğundur.*

Bu arada $C([a, b])$'nin $[a, b]$ üzerine tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi olduğunu anımsatırız. Bu bir cebirdir, yani f ve g sürekli fonksiyonlarsa ve $r \in \mathbb{R}$ ise, $f + g$, fg ve rf de süreklidirler. Polinomiyal fonksiyonlar kümesi $C([a, b])$'nin bir altcebiridir.

Eğer $[a, b]$ yerine herhangi bir X topolojik uzayı alırsak, $C(X)$ gene bir cebir olur. Ayrıca

$$d(f, g) = \min\{1, d_\infty(f, g)\}$$

olarak tanımlanan d, $C(X)$ üzerine bir metriktir ve bu metrikle $C(X)$ bir tam metrik uzay olur. Bütün bunları geçmişte görmüştük.

1937 yılında, Stone, Weierstrass Teoremi'ni, $[a, b]$ aralığı yerine herhangi bir tıkız ve Hausdorff topolojik uzayı ve polinomlardan oluşan altcebir yerine bazı özel altcebirler alarak genelleştirmiştir. Stone-Weierstrass adıyla bilinen bu teoremi açıklamak için biraz terminoloji geliştirelim.

$A \leq C(X)$ bir altcebir olsun. Eğer her $x \in X$ için, x'te 0 değeri almayan bir $f \in A$ varsa (örneğin sabit 1 fonksiyonu A'daysa), "A, X'in hiçbir noktasında ***sıfırlanmaz***" denir. Eğer her $x \neq y \in X$ için, $f(x) \neq f(y)$ eşitsizliğini sağlayan bir $f \in A$ varsa, A'nın ***noktaları ayırdığı*** söylenir. Örneğin eğer $X = \mathbb{R}$ ise, polinomiyal fonksiyonlardan oluşan cebir noktaları ayırır.

Teorem 22.2 (Stone-Weierstrass, 1937)**.** *K tıkız ve Hausdorff bir uzay olsun. $A \leq C(K)$ noktaları ayıran ve X'in hiçbir noktasında sıfırlanmayan bir altcebirse*[1]*, o zaman A, $C(K)$'da (düzgün metrik için) yoğundur.*

Kanıt: $\overline{A} = C(K)$ eşitliğini kanıtlamamız lazım. A bir cebir olduğundan $\overline{A}$ da bir cebirdir. A noktaları ayırdığından ve X'in hiçbir noktasında sıfırlanmadığından, $\overline{A}$ da bu iki özelliğe sahiptir. (Çünkü $A \subseteq \overline{A}$.) Dolayısıyla A yerine $\overline{A}$ alıp A'nın kapalı olduğunu varsayabiliriz.

$f : K \to \mathbb{R}$ herhangi bir sürekli fonksiyon olsun.

[1] Yani toplama, çarpma ve bir skalerle (yani bir gerçel sayıyla) çarpma altında kapalıysa.

Sav 1. *Eğer $f \in A$ ise, $|f| \in A$ olur.*
Kanıt: $\epsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. $f(K)$ tıkız olduğundan, $f(K)$ sınırlıdır.

$$f(K) \subseteq (-B, B)$$

olsun. [N5]'in *Dini Teoremi ve Bir Uygulaması* adlı bölümünün 2'nci notuna göre öyle bir q polinomu vardır ki, her $t \in (-1,1)$ için,

$$\big||t| - q(t)\big| < \epsilon/B$$

olur. Demek ki her $t \in f(K)$ için

$$\big||t/B| - q(t/B)\big| < \epsilon/B$$

olur. Ayrıca aynı referansın 1'inci notuna göre q polinomunu $q(0) = 0$ olacak biçimde, yani sabit terimi 0 olacak biçimde seçebiliriz. A bir cebir olduğundan, bundan da $q \circ f \in A$ çıkar.

$p(t) = B \cdot q(t/B)$ olsun. O zaman her $t \in f(K)$ için

$$\big||t| - p(t)\big| < \epsilon$$

olur. Ve gene $p \circ f \in A$ olur. Her $x \in K$ için,

$$\big||f(x)| - p(f(x))\big| < \epsilon$$

olduğundan, $|f|$'ye A'nın elemanları tarafından istediğimiz kadar yaklaşabildiğimizi anlarız. A kapalı olduğundan, bundan $|f| \in A$ çıkar. □

Sav 2. *Eğer f, $g \in A$ ise,*

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ ve } (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

tarafından tanımlanmış $f \vee g$ ve $f \wedge g$ fonksiyonları A'dadır.
Kanıt: Bu sonuç, belki biraz şaşırtıcı ama kanıtı çok kolay olan

$$\begin{aligned} f \vee g &= \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|), \\ f \wedge g &= \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|) \end{aligned}$$

eşitliklerinden çıkar. □

Sav 3. *u, $v \in K$ iki farklı eleman olsun. a, $b \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman öyle bir $f \in A$ vardır ki,*

$$f(u) = a \text{ ve } f(v) = b$$

olur.

Kanıt: A üzerine varsayıma göre, öyle bir $g \in A$ vardır ki $g(u) \neq g(v)$ olur. Ayrıca öyle h, $k \in A$ vardır ki $h(u) \neq 0$, $k(v) \neq 0$ olur.

$$f(x) = a\frac{g(x)h(x) - g(v)h(x)}{(g(u) - g(v))h(u)} + b\frac{g(x)k(x) - g(u)k(x)}{k(v)(g(v) - g(u))}$$

olarak tanımlanmış fonksiyon işimizi görür. □

Sav 4. $f \in C(K)$, $\epsilon > 0$ *ve* $a \in K$ *rastgele olsunlar. O zaman öyle bir* $g \in A$ *vardır ki, hem* $g(a) = f(a)$ *hem de her* $x \in K$ *için* $f(x) < g(x) + \epsilon$ olur.
Kanıt: $b \in K$ olsun. Sav 3'e göre öyle bir $g_b \in A$ vardır ki,

$$g_b(b) = f(b) \text{ ve } g_b(a) = f(a)$$

olur. g_b sürekli olduğundan, $f - g_b$ de süreklidir, dolayısıyla b'yi içeren öyle bir U_b açık kümesi vardır ki, her $x \in I_b$ için

$$g_b(x) > f(x) - \epsilon$$

olur. $(U_b)_{b\in K}$, K'nın açık bir örtüsüdür. K tıkız olduğundan, sonlu sayıda $b_1, \ldots, b_k \in K$ için

$$K = U_{b_1} \cup \ldots \cup U_{b_k}$$

olur.

$$g = \max\{g_{b_1}, \ldots, g_{b_k}\} = g_{b_1} \vee \ldots \vee g_{b_k}$$

olsun. Sav 2'ye göre $g \in A$ olur. g'nin istenen özellikleri olduğu barizdir. □

Finale: $f \in C(K)$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Sav 4'e göre, her $a \in K$ için, öyle bir $g_a \in A$ vardır ki, hem $g_a(a) = f(a)$ hem de her $x \in K$ için

$$f(x) < g_a(x) + \epsilon$$

olur. g_a sürekli olduğundan, a'yı içeren öyle bir J_a açık aralığı vardır ki her $x \in J_a$ için,

$$g_a(x) < f(x) + \epsilon$$

olur. $(J_a)_{a\in K}$, K'nın açık bir örtüsüdür. K tıkız olduğundan, sonlu sayıda $a_1, \ldots, a_\ell \in K$ için

$$K = J_{a_1} \cup \ldots \cup J_{a_\ell}$$

olur.

$$h = \min\{g_{a_1}, \ldots, g_{a_\ell}\} = g_{a_1} \wedge \ldots \wedge g_{a_\ell}$$

olsun. Sav 2'ye göre $h \in A$ olur. h'nin istenen özellikleri olduğu barizdir. Elbette hem

$$f(x) < h(x) + \epsilon$$

hem de

$$h(x) < f(x) + \epsilon$$

olur. Yani $\|h - f\|_\infty < \epsilon$ olur. Stone-Weierstrass Teoremi kanıtlanmıştır. □

23. Arzelà ve Ascoli Teoremleri

23.1 Giriş

Bir topolojik uzayın tıkız altkümelerini betimlemek topolojinin ve fonksiyonel analizin en önemli uğraşlarından biridir. Örneğin meşhur Heine-Borel Teoremi (Teorem 16.12) $\mathbb{R}$'nin ve hatta $\mathbb{R}^n$'nin tıkız altkümelerini kapalı ve sınırlı altkümeler olarak betimler. Bu bölümde tıkız bir X kümesi için, X'ten $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına giden sürekli fonksiyonlar kümesi $C(X)$'in tıkız altkümelerini betimleyeceğiz. Bu teorem matematik literatüründe ***Ascoli Teoremi*** olarak bilinir ve differansiyel denklemlerden fonksiyonel analize kadar çok geniş bir alanda uygulamaları bulunur.

Bir sonraki paragrafta tanımları gözden geçireceğiz.

$C(X,Y)$ **Metrik Uzayı.** X tıkız bir topolojik uzay ve (Y,d) bir metrik uzayı olsun. $C(X,Y)$, X'ten Y'ye giden sürekli fonksiyonlar kümesini simgelesin.

Tıkız kümelerin sürekli fonksiyonlar altında imgeleri tıkız olduğundan (Teorem 16.2), her $f \in C(X,Y)$ için $f(X)$ tıkızdır, dolayısıyla kapalı ve sınırlıdır (Teorem 16.10). (Demek ki $C(X,Y) \subseteq \ell^\infty(X,Y)$ olur.) Aynı nedenlerden, eğer $g \in C(X,Y)$ ise, $x \mapsto d(f(x),g(x))$ kuralıyla belirlenen X'ten $\mathbb{R}$'ye giden sürekli fonksiyonun imgesi de kapalı ve sınırlıdır. Demek ki

$$\sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\} < \infty.$$

olur, yani $\mathbb{R}$'nin bir elemanıdır. Bu sayıyı geçmişte $d_\infty(f,g)$ olarak göstermiştik:

$$d_\infty(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}.$$

Aslında $d_\infty(f,g)$'nin tanımında sup yerine max da yazabilirdik çünkü sürekli gerçel değerli fonksiyonlar tıkız kümeler üzerine uç değerlerini alırlar (Sonuç 16.13).

$(C(X,Y), d_\infty)$ bir metrik uzaydır. Bu metrik uzayda yakınsamaya düzgün yakınsaklık denir. $Y = \mathbb{R}^n$ (Öklid uzayı) olduğunda,

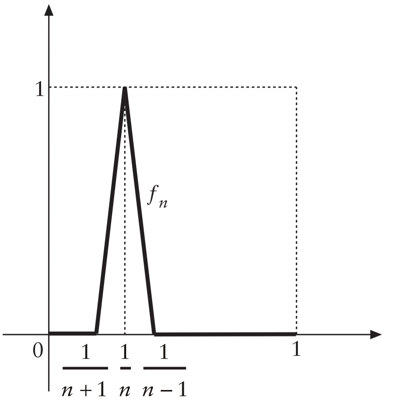
$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup\{\|f(x)-g(x)\| : x \in X\}$$

olduğunu anımsayalım. Eğer (Y,d) bir tam metrik uzaysa, örneğin $Y = \mathbb{R}^n$ Öklid uzayıysa, $(C(X,Y), d_\infty)$ metrik uzayı da tamdır (Sonuç 21.10).

Bu bölümde amacımız $C(X,\mathbb{R}^n)$ tam metrik uzayının tıkız altkümelerini tıkız olmayan altkümelerinden kolayca ayrıştıracak koşullar bulmak, yani tıkız altkümeleri betimlemek.

Kapalılık ve Sınırlılık Tıkızlık İçin Yeterli Değil. Elbette tıkız kümeler kapalı ve sınırlı olmalılar. $\mathbb{R}^n$'de tıkızlık için yeterli olan bu iki koşul (Heine-Borel Teoremi), birçok topolojik uzayda yeterli değildir, örneğin eğer X sonsuzsa $C(X,\mathbb{R}^n)$ durumunda yeterli değildir (X'in sonlu olduğu durum için bkz. Alıştırma 23.6). Hemen bu yetersizliğe bir örnek verelim.

Örnek 23.1. $X = [0,1]$ olsun. $n \geq 2$ için f_n grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyon olsun.



Elbette $f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$ (çünkü öyle tanımlanmıştır). Belli ki $(f_n)_n$ dizisi noktasal olarak sabit 0 fonksiyonuna yakınsar ama bu yakınsama düzgün değildir çünkü grafiklerden de görüleceği üzere her n için

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

olur. Dizi düzgün yakınsamadığı gibi, dizinin düzgün yakınsak bir altdizisi de yoktur çünkü her $n \neq m$ için

$$\|f_n - f_m\|_\infty = 1$$

olur. Şimdi

$$K = \{f_n : n \geq 2\}$$

olsun. K elbette sınırlı bir kümedir. Ayrıca, yığılma noktası olmadığından kapalı bir kümedir (Teorem 8.10). Ama bir önceki paragrafa göre f_n'lerin arasındaki mesafe 1'in altına girmediğinden, K dizisel tıkız değildir, demek ki tıkız da değildir (Teorem 17.2).

23.2 Sınırlılık

Bir sonraki önsavla problemimize yeni bir boyut katacağız.

Önsav 23.1. *X tıkız bir topolojik uzay olsun. Eğer $K \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ sınırlı bir altkümeyse, o zaman*

$$K(X) = \{f(x) : f \in K,\ x \in X\}$$

kümesi, $\mathbb{R}^n$'nin tıkız bir Y altkümesinin altkümesidir. Dolayısıyla

$$K \subseteq C(X, Y)$$

olur.

Kanıt: K'dan bir f_0 elemanı seçelim. Varsayıma göre, her $f \in K$ için

$$\|f - f_0\|_\infty < M$$

eşitsizliğini sağlayan bir M sayısı vardır. Öte yandan X tıkız olduğundan, $f_0(X)$ de tıkızdır, dolayısıyla sınırlıdır. Demek ki bir A sayısı için

$$f_0(X) \subseteq B(\overrightarrow{0}, A)$$

olur. Şimdi eğer $x \in X$ ise,

$$\|f(x)\| = \|(f(x) - f_0(x)) + f_0(x)\| \leq \|f(x) - f_0(x)\| + \|f_0(x)\| < M + A$$

olur ve bu eşitsizlik her $f \in K$ için geçerlidir. Demek ki her $f \in K$ için

$$f(X) \subseteq B(\overrightarrow{0}, M + A).$$

Şimdi $Y = \overline{B}(\overrightarrow{0}, M + A)$, bu yuvarın kapanışı olsun. Heine-Borel Teoremi'ne göre Y tıkızdır ve $K(X) \subseteq Y$ olur. □

Bu önsava göre, problemimizi $C(X, \mathbb{R}^n)$'den, $\mathbb{R}^n$'nin tıkız bir Y altkümesi için, $C(X, Y)$ topolojik uzayına taşıyabiliriz. Şimdi $C(X, Y)$ uzayında tümden sınırlılığın ne anlama geldiğini anlamaya çalışalım.

23.3 Tümden Sınırlılık ve Eşsüreklilik

Her $\epsilon > 0$ için sonlu sayıda ϵ yarıçaplı yuvarlarla kaplanabilen bir metrik uzaya ***tümden sınırlı*** adı verildiğini anımsatalım. Elbette her tıkız metrik uzay tümden sınırlıdır. Ama bir metrik uzayın tümden sınırlı olması tıkızlığa yetmeyebilir, örneğin $(0, 1)$ aralığı tümden sınırlıdır ama tıkız değidir. Öte yandan bir tam metrik uzayının kapalı bir altkümesi için tümden sınırlılıkla tıkızlık aynı şeydir (Teorem 17.12). Demek ki eğer X herhangi bir topolojik uzay ve Y bir tam metrik uzaysa, o zaman $C(X, Y)$'nin tıkız altkümeleri aynen kapalı ve tümden sınırlı altkümeleridir. Ama problemimizin çözümünü böyle sunmak birçok açıdan doğru değil. Problemin daha kabul edilir ve kullanışlı çözümünü bulacağız. Bunun için $C(X, Y)$ uzayında tümden sınırlılığın bir başka ifadesini bulmaya çalışacağız ve eğer Y tümden sınırlı bir metrik uzaysa başarıya ulaşacağız.

X bir topolojik uzay ve (Y, d) bir metrik uzay olsun. Rastgele bir $x_0 \in X$ noktası sabitleyelim. $f \in C(X, Y)$ olsun. f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan, her $\epsilon > 0$ için, öyle bir $x_0 \in U_f \subseteq X$ açık kümesi vardır ki, her $x \in U_f$ için

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

olur.

Yukardaki U_f açık kümesi f'ye göre değişir elbette. Öte yandan bu özelliği sonlu sayıda $f_1, \ldots, f_n \in C(X, Y)$ fonksiyonuna genelleştirebiliriz; nitekim

$$U_{f_1,\ldots,f_n} = U_{f_1} \cap \ldots \cap U_{f_n}$$

ise, $U_{f_1,\ldots,f_n} \subseteq X$ altkümesi x_0'ı içeren açık bir kümedir ve her $x \in U_{f_1,\ldots,f_n}$ için

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) < \epsilon$$

olur. Dolayısıyla eğer bir $f \in C(X, Y)$ fonksiyonunun bu f_i'lerden birine d_∞-mesafesi ϵ'dan küçükse, her $x \in X$ için,

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) < 3\epsilon$$

olur.

Şimdi $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ tümden sınırlı bir altküme olsun ve bir $\epsilon > 0$ seçelim. Yukarda ϵ ile yaptıklarımızı $\epsilon/3$ ile yapalım. Önce $\mathcal{F}$'yi $\epsilon/3$ yarıçaplı sonlu sayıda yuvarla kaplayalım:

$$\mathcal{F} \subseteq B(f_1, \epsilon/3) \cup \ldots \cup B(f_n, \epsilon/3)$$

olsun. Her $i = 1, \ldots, n$ için,

$$x \in U_i \Rightarrow d(f_i(x), f_i(x_0)) < \epsilon/3$$

önermesini sağlayan ve x_0'ı içeren bir U_i açık kümesi bulalım.

$$U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$$

olsun. O zaman U, x_0'ı içeren açık bir kümedir ve her $f \in \mathcal{F}$ ve $x \in U$ için, (eğer $f \in B(f_i, \epsilon/3)$ ise),

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) < \epsilon$$

olur. Görüldüğü gibi tek bir U altkümesi $\mathcal{F}$'nin tüm f elemanları için x_0'da sürekliliği ifade etmeye yetiyor. Buna eşsüreklilik denir.

Eşsüreklilik. X bir topolojik uzay, (Y, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ olsun. Bir $x_0 \in X$ noktası sabitleyelim. Eğer her $\epsilon > 0$ için

$$\forall f \in \mathcal{F}\ (x \in U \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon)$$

önermesinin sağlandığı bir $x_0 \in U \subseteq X$ açık kümesi varsa, $\mathcal{F}$'ye x_0***'da eşsürekli*** denir. Eğer $\mathcal{F}$ her x_0'da eşsürekliyse, o zaman $\mathcal{F}$'ye ***eşsürekli***[1] denir. Bir önceki paragrafta aşağıdaki önsavı kanıtladık.

Önsav 23.2. *X bir topolojik uzay, (Y, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$ tümden sınırlıysa eşsüreklidir.* □

Örnekler

23.2. Sonlu sayıda sürekli fonksiyondan oluşan her küme eşsüreklidir.

23.3. $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f_n(x) = x^n$ kuralıyla tanımlanmış olsun. O zaman

$$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi 1 noktasında eşsürekli değildir. Nitekim U, 1'i içeren herhangi bir açık küme olsun. $\delta > 0$ sayısı $x = 1 - \delta \in U$ olacak biçimde seçilsin. O zaman yeterince büyük n için,

$$|f_n(x) - f_n(1)| = 1 - (1 - \delta)^n > 1/2$$

olur.

Hipotezlerini biraz güçlendirsek, bu önsavın ters istikametlisini elde edebiliriz:

Önsav 23.3. *X tıkız bir topolojik uzay, (Y, d) tümden sınırlı bir metrik uzay ve $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ olsun. Eğer $\mathcal{F}$ eşsürekliyse tümden sınırlıdır.*

Kanıt: $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. $\mathcal{F}$'yi ϵ yarıçaplı yuvarlarla kaplayacağız.

Her $x_0 \in X$ için $\mathcal{F}$'nin eşsürekliliğine $\epsilon/3$ için şahitlik yapan bir $x_0 \in U_{x_0} \subseteq X$ açık kümesi vardır: Her $f \in \mathcal{F}$ ve her $x \in U_{x_0}$ için

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/3$$

olur. X tıkız olduğundan, X'i bu U_{x_0} açık kümelerinin sonlu tanesiyle kaplayabiliriz. Diyelim $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ açık kümeleriyle kapladık. Demek ki

1. Her $i = 1, \ldots, n$ için $x_i \in U_{x_i}$,
2. $X = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$.
3. Her $f \in \mathcal{F}$ için $x \in U_{x_i}$ ise $d(f(x), f(x_i)) < \epsilon/3$.

[1] İngilizcesi *equicontinuous*.

Y tümden sınırlı olduğundan, Y'yi de çapı en fazla $\epsilon/3$ olan $V_1, \ldots, V_m$ açık kümeleriyle kaplayabiliriz.

$f \in \mathcal{F}$ olsun. Her $i = 1, \ldots, n$ için, $f(x_i)$ elemanı V_j açık kümelerin birindedir. Eğer bir

$$\alpha : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$$

fonksiyonu için,

$$\forall i \; f(x_i) \in V_{\alpha(i)} \tag{1}$$

içindeliğini sağlayan bir $f \in \mathcal{F}$ fonksiyonu varsa, α'ya güzel diyelim ve her güzel α için (1)'i sağlayan bir $f_\alpha \in \mathcal{F}$ fonksiyonu sabitleyelim. Demek ki

$$\forall i \; f_\alpha(x_i) \in V_{\alpha(i)}. \tag{2}$$

$\mathcal{F}$'nin güzel α'lar için $B_{d_\infty}(f_\alpha, \epsilon)$ yuvarlarıyla örtüldüğünü iddia ediyorum ve hemen kanıtlıyorum.

Rastgele bir $f \in \mathcal{F}$ alalım. (1)'i sağlayan bir güzel α seçelim. $x \in X$ rastgele olsun. Diyelim $x \in U_{x_i}$. O zaman, $f(x_i)$, $f_\alpha(x_i) \in V_{\alpha(i)}$ olur ve böylece

$$d(f(x), f_\alpha(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f_\alpha(x_i)) + d(f_\alpha(x_i), f_\alpha(x)) < \epsilon$$

elde ederiz. □

Son iki önsavdan şu sonuç elde edilir:

Sonuç 23.4. *X tıkız bir topolojik uzay ve (Y, d) tümden sınırlı bir metrik uzaysa $C(X, Y)$'nin altkümeleri için eşsüreklilik ve tümden sınırlık eşanlamlıdır.* □

23.4 Arzelà ve Ascoli Teoremleri

Yukarda yaptıklarımızın ürününü toplamaya başlayalım.

Sonuç 23.5 (Arzelà)**.** *X tıkız topolojik bir uzay olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in C(X, \mathbb{R}^m)$ olsun ve $(f_n)_n$ dizisinin (yani f_n'lerden oluşan kümenin) sınırlı ve eşsürekli olduğunu varsayalım. O zaman bu dizinin düzgün yakınsak bir altdizisi vardır.*

Kanıt: Önsav 23.1'e göre tıkız bir $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ kümesi için her f_n'nin $C(X, Y)$'de olduğunu varsayabiliriz. Önsav 23.3'e göre $(f_n)_n$ dizisi tümden sınırlıdır. Bir metrik uzayda, tümden sınırlı bir kümenin kapanışı da tümden sınırlıdır (Önsav 17.10). Dolayısıyla $(f_n)_n$ dizisinin kapanışı olan $\mathcal{F}$ kümesi tümden sınırlıdır. $C(X, Y)$ tam bir metrik uzay olduğundan $\mathcal{F}$ tıkızdır (Teorem 17.12), dolayısıyla dizisel tıkızdır (Teorem 17.7). Demek ki $(f_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. □

Örnekler

23.4. $(f_n)_n$ dizisi, kapalı ve sınırlı bir I aralığından $\mathbb{R}$'ye giden türevlenebilir fonksiyonlardan oluşsun. Ayrıca $(f_n')_n$ dizisi düzgün sınırlı olsun, yani bir M ve her n için $\|f_n'\|_\infty < M$ olsun. O zaman Ortalama Değer Teoremi'ne [N6] göre, her f_n ve her $x, x_0 \in I$ için

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < M|x - x_0|$$

olur. Demek ki $\epsilon > 0$ verilmişse, $\delta = \epsilon/M$ sayısının eşsürekliliği sağladığını görürüz: $|x - x_0| < \delta$ ise $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ olur. Arzelà Teoremi'nden dolayı $(f_n)_n$ dizisinin düzgün yakınsak bir altdizisi vardır.

23.5. Yukardaki örneği kolaylıkla genelleştirebiliriz. Her f_n aynı M sabiti için Lipschitz sürekli olsun, yani öyle bir M sabiti olsun ki, her n ve her $x, y \in I$ için,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < M|x - y|$$

olsun. O zaman $(f_n)_n$ dizisinin düzgün yakınsak bir altdizisi vardır.

Şimdi de meşhur Ascoli Teoremi'ni kanıtlayalım.

Sonuç 23.6 (Ascoli)**.** *X tıkız bir topolojik uzay olsun. $C(X, \mathbb{R}^n)$ metrik uzayının bir altkümesinin tıkız olması için altkümenin kapalı, sınırlı ve eşsürekli olması yeter ve gerek koşuldur.*

Kanıt: $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ tıkız olsun. Metrik uzayın her tıkız altkümesi gibi $\mathcal{F}$ sınırlı ve kapalıdır. Önsav 23.1'e göre, tıkız bir $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ için, $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ olur. Her tıkız metrik uzay gibi $\mathcal{F}$ tümden sınırlıdır. Demek ki Önsav 23.4'e göre $\mathcal{F}$ eşsüreklidir.

Şimdi $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ kapalı, sınırlı ve eşsürekli olsun. Önsav 23.1'e göre, tıkız bir $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ için, $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ olur. Demek ki Önsav 23.4'e göre $\mathcal{F}$ tümden sınırlıdır. Ama $C(X, Y)$ tam bir metrik uzayıdır ve tam metrik uzaylarda tıkız altkümeler aynen kapalı ve tümden sınırlı altkümelerdir (Teorem 17.12). Teorem kanıtlanmıştır. □

Alıştırma 23.6. Eğer $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ ise ve ayrık topolojiyle donatılmış ise, $C(X, \mathbb{R})$'yi $\mathbb{R}^n$ olarak görebiliriz. $C(X, \mathbb{R})$'nin her sınırlı altkümesinin eşsürekli olduğunu kanıtlayın. X tıkız olduğundan, Arzelà Teoremi $\mathbb{R}^n$ için bir şey söylemektedir, bu şey de aynen Bolzano-Weierstrass Teoremi'dir: $\mathbb{R}^n$'nin her sınırlı dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır [N4]. Ascoli Teoremi ise Heine-Borel Teoremini vermektedir: $\mathbb{R}^n$'nin tıkız kümeleri aynen sınırlı ve kapalı altkümeleridir.

Arzelà Teoremi'nin Metrik Uzaylarda Bir Başka Kanıtı

Arzelà Teoremi'nin, X bir metrik uzay olduğunda, kanıtlama yöntemi açısından ilginç ve son derece zenginleştirici olan bir başka kanıtını sunacağız.

Birinci Adım. *Tıkız bir metrik uzay ayrıştırılabilir bir uzaydır, yani X'in yoğun ve sayılabilir bir S altkümesi vardır.*

Kanıt: Her $n \geq 1$ tamsayısı için X metrik uzayının $(B(x, 1/n))_{x \in X}$ açık örtüsünü alalım. Bu açık örtünün sonlu bir altörtüsünü seçelim ve bu altöltünün yuvarlarının merkezlerinden oluşan kümeye S_n diyelim ve $S = \bigcup_{n \geq 1} S_n$ olsun. S elbette sayılabilir bir kümedir. Şimdi S'nin X'te yoğun olduğunu kanıtlayalım. $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ olsun. $B(x, \epsilon)$ ile S'nin kesiştiğini göstermemiz lazım. Her $n \geq 1$ için $x \in B(s_n, 1/n)$ içindeliğini sağlayan bir $s_n \in S_n$ vardır. Demek ki $s_n \in B(x, 1/n)$. Dolayısıyla n'yi $1/n < \epsilon$ olacak biçimde seçersek, $s_n \in B(x, 1/n) \subseteq B(x, \epsilon)$ olur. □

İkinci Adım. *$(f_n)_n$ dizisinin S üzerinde noktasal yakınsayan bir altdizisi vardır.*

Kanıt: S'nin elemanlarını $(s_n)_n$ olarak bir dizi halinde yazalım. O zaman $(f_n(s_0))_n$ dizisi sınırlıdır. Demek ki yakınsak bir altdizisi vardır. Bu altdiziyi $(f_{0,n}(s_0))_n$ olarak gösterelim. Demek ki $(f_{0,n})_n$ dizisi s_0'da yakınsıyor. Şimdi $(f_{0,n}(s_1))_n$ dizisine bakalım. Bu dizi de sınırlıdır. Demek ki yakınsak bir altdizisi vardır. Diyelim $(f_{1,n}(s_1))_n$. Şimdi $(f_{1,n})_n$ dizisi hem s_0'da hem de s_1'de yakınsaktır. Bu prosedüre böyle devam edelim. Öyle

$$(f_{0,n})_n \supseteq (f_{1,n})_n \supseteq \ldots \supseteq (f_{k,n})_n \supseteq \ldots$$

diziler dizisi buluruz ki, her k için

$$(f_{k,n}(s_0))_n, \ldots, (f_{k,n}(s_k))_n$$

dizileri yakınsaktır. Şimdi

$$(f_{n,n})_n$$

dizisine bakalım. Bu dizinin her x_k noktasında yakınsak olduğunu iddia ediyoruz. $k \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman $(f_{n,n}(x_k))_n$ dizisinin kuyruğu olan $(f_{n,n}(x_k))_{n \geq k}$ dizisi, $(f_{k,n}(x_k))_{n \geq k}$ dizisinin bir altdizisidir ve bu son dizi de yakınsaktır. Demek ki $(f_{n,n}(x_k))_n$ dizisi yakınsaktır. □

Üçüncü Adım. Yukarda bulduğumuz $(f_{n,n})_n$ altdizisine $(g_n)_n$ diyelim. Bu dizinin düzgün yakınsak olduğunu kanıtlayacağız. $\epsilon > 0$ olsun.

Eşsürekliliği kullanarak, her n ve her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \|g_n(x) - g_n(y)\| < \epsilon/3 \tag{3}$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ bulalım.

Ardından $1/M < \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir M doğal sayısı seçelim. Birinci adımda seçtiğimiz S_M'yi anımsayın. X'in her noktası S_M'nin (sonlu sayıdaki) noktalarından birine olan uzaklığı $1/M$'den dolayısıyla δ'dan küçüktür.

$(g_n)_n$ dizisi S'nin, dolayısıyla S_M'nin her noktasında yakınsak olduğundan, her $s \in S_M$ için, $(g_n(s))_n$ dizisi Cauchy'dir. Demek ki öyle bir N vardır ki, her $s \in S_M$ ve her $n, m > N$ için,

$$\|g_n(s) - g_m(s)\| < \epsilon/3$$

olur. (Burada S_M'nin sonlu olduğunu kullandık.)

Şimdi $x \in X$ rastgele seçilmiş olsun. $d(x, s) < 1/M < \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $s \in S_M$ vardır. Böyle bir s seçelim. Demek ki (3)'ten dolayı her n için,

$$\|g_n(x) - g_n(s)\| < \epsilon/3$$

olur.

Şimdi bütün bunları kale alarak hesaplayalım: Eğer $n, m > N$ ise,

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(s)\| + \|g_n(s) - g_m(s)\| + \|g_m(s) - g_m(x)\| < \epsilon$$

olur. Bu hesabın sonucu olan

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| < \epsilon$$

her $x \in X$ için geçerli olduğundan, her $n, m > N$ için

$$\|g_n - g_m\|_\infty < \epsilon$$

olur, yani $(g_n)_n$ dizisi düzgün Cauchy'dir. $C(X, \mathbb{R}^m)$ metrik uzayı tam olduğundan, bundan da $(g_n)_n$ dizisinin yakınsak olduğu çıkar. $\square$

24. Urysohn Önsavı ve Tietze Genişleme Teoremi

Urysohn Önsavı, birçok uygulamaları olan önemli bir sonuçtur. Kabaca, bazı basit özellikleri olan bir topolojik uzayda (normal bir uzayda), örneğin bir metrik uzayda, birbirinden ayrık iki kapalı altkümenin sürekli bir fonksiyonla "ayrıştırılabileceğini" söyler.

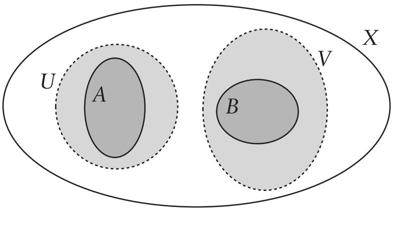
Önsavın sadece kendisi değil, kanıtı da ilginçtir, topolojide bugüne dek gördüğümüz kanıtlara pek benzemez.

24.1 Normal Uzaylar

X, T1 bir topolojik uzay olsun, yani tek bir noktadan oluşan altkümelerin kapalı olduğu bir topolojik uzay olsun. Eğer her ayrık A ve B kapalı altkümesi için,

$$A \subseteq U,\ B \subseteq V \text{ ve } U \cap V = 0$$

ilişkilerini sağlayan U ve V açık altkümeleri varsa, X'e ***normal uzay*** denir. Bu durumda "U ve V açık altkümeleri A ve B'yi ayrıştırır" jargonu kullanılır.



Birazdan yazıp kanıtlayacağımız Urysohn Önsavı, normal uzaylarda, kapalı ayrık kümeleri - birazdan tanımlayacağımız anlamıyla - sürekli fonksiyonlarla da "ayrıştırabileceğimizi", yani açık kümelerle ayrıştırabiliyorsak, sürekli fonksiyonlarla da ayrıştırabileceğimizi söyler.

Eğer 1'den fazla nokta varsa en kaba topolojiyle donatılmış uzay normal değildir, çünkü tek noktadan oluşan altkümeler kapalı değildir. Dikkat edilirse, normal uzayların zorunlu olarak Hausdorff oldukları görülecektir. Sonlu tümleyenler topolojisiyle donatılmış sonsuz bir küme de normal değildir, çünkü bu topolojide tek noktadan oluşan kümeler kapalı da olsa, boş olmayan iki açık altküme zorunlu olarak kesişir, yani topoloji Hausdorff bile değildir. Öte yandan ayrık topolojiyle donatılmış bir küme normaldir. Daha zor ve daha ilginç örnekler de var neyse ki: Metrik uzaylar (Teorem 14.10) ve tıkız Hausdorff uzayları (Teorem 16.4) normaldir.

Normallik oldukça nazik bir kavramdır: Normal bir uzayın altuzayı ya da normal uzayların kartezyen çarpımları normal olmayabilirler. (Bkz. aşağıdaki alıştırma.)

Hausdorff olan ama normal olmayan bir topolojik uzay örneği verelim:

Örnek 24.1. $X = \mathbb{R}$ ve $A = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ olsun. X üzerine her a, $b \in \mathbb{R}$ için

$$(a, b) \text{ ve } (a, b) \setminus A$$

türünden altkümelerle üretilen topolojiyi alalım. Bu topoloji Öklid topolojisinden daha zengindir, dolayısıyla Hausdorff'tur. A altkümesi Öklid topolojisinde kapalı değildir ama bu topolojide kapalıdır; nitekim, $(-1, 2)$ ve $(-1, 2) \setminus A$ altkümeleri bu topolojide açık olduğundan, A kümesi bu topolojide kapalıdır. Her ikisi de kapalı olan $\{0\}$ ve A altkümelerini bu topolojide açık kümelerle ayrıştıramayız çünkü A'yı içeren her açık küme, 0'ı içeren bir açık kümeyle (boş olmayan bir kümede) kesişmek zorundadır. Yani bu topolojik uzay Hausdorff'tur ama normal değildir.

Alıştırma 24.2. α bir ordinal olsun. α üzerine, $\beta, \gamma \in \alpha \cup \{\infty, -\infty\}$ için (β, γ) aralıkları tarafından gerilen topolojiye ***sıralama topolojisi*** adı verilir. α bu topolojiyle normal (dolayısıyla Hausdorff) bir uzaydır. Şimdi ω_1, ilk sayılamaz ordinal olsun [N3]. $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ kümesinin çarpım topolojisi altında (Hausdorff'tur ama) normal olmadığını kanıtlayın.

24.2 Urysohn Önsavı

Teorem 24.1 (Urysohn Önsavı)**.** *X, normal bir topolojik uzay olsun. $\emptyset \neq A$ ve $\emptyset \neq B$, X'in birbirinden ayrık iki kapalı altkümesi olsun. O zaman sürekli bir $f : X \to [0, 1]$ fonksiyonu için $f(A) = \{0\}$ ve $f(B) = \{1\}$ olur.*

Kanıta başlamadan önce, teoremin sadece

$$A \subseteq f^{-1}(0) \text{ ve } B \subseteq f^{-1}(1)$$

içindeliklerini söylediğini, eşitliğin illa doğru olmak zorunda olduğunu söylemediğine dikkatinizi çekeriz. Nitekim bu eşitliklerin hiçbir sürekli f fonksiyonu için doğru olmadığı normal uzaylar vardır; gerçekten de eğer $A = f^{-1}(0)$ ise, elbette

$$A = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^{>0}} f^{-1}[0, r)$$

olur ve A sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimi, yani bir G_δ kümesi olmak zorundadır (tanım için bkz. sayfa 101), ama G_δ kümesi olmayan kapalı kümelerin olduğu normal uzaylar vardır.

Bir de şuna dikkat edelim: Diyelim böyle bir f fonksiyonu var. O zaman $(0, 1]$ aralığındaki her p sayısı için,

$$U_p = f^{-1}([0, p))$$

tanımını yaparsak, U_p açık bir küme olur ve her $0 < p < q \leq 1$ sayıları için,

$$A \subseteq U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq f^{-1}([0, p]) \subseteq U_q \subseteq X \setminus B$$

olur. Urysohn Önsavı'nın kanıtı aynen bu fikri kullanır ama (elbette) önce U_p açık kümelerini bulur ve f'yi daha sonra tanımlar.

Urysohn Önsavı'nın Kanıtı:
Birinci Adım. $[0, 1]$ aralığındaki kesirli sayılar kümesine P diyelim. P kümesinin elemanlarını bir biçimde doğal sayılarla numaralandıralım:

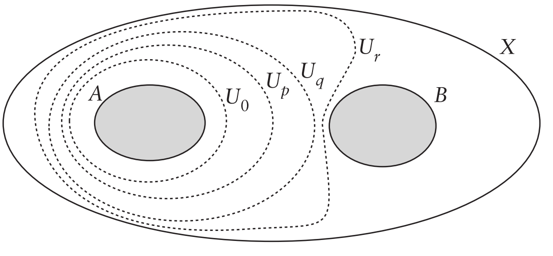
$$P = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\}.$$

$p_0 = 0$, $p_1 = 1$ varsayımını yapabiliriz. Yapalım.

Her $p \in P$ için, X'in öyle U_p açık altkümelerini tanımlayacağız ki, her $p < q$ için

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_p} \subseteq U_q \subseteq X \setminus B$$

olacak. (Bkz. aşağıdaki şekil.)



Önce U_0 ile U_1'i seçelim. Geri kalan U_{p_n}'leri n üzerine tümevarımla tanımlayacağız.

$$U_1 = X \setminus B$$

olsun. U_0 ve V, sırasıyla A ve B'yi içeren ayrık açık kümeler olsun. O zaman, $U_0 \subseteq X \setminus V$ olur, ve $X \setminus V$ kapalı olduğundan,

$$\overline{U_0} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus B = U_1$$

olur. Böylece U_0 ve U_1 istenen koşulları sağlayacak biçimde seçilmiş oldu.

Şimdi diyelim $n \geq 1$ için,

$$U_{p_0}, U_{p_1}, \ldots, U_{p_n}$$

açık kümeleri yukardaki koşulları sağlayacak biçimde seçtik. Bir "sonraki" kesirli sayı olan p_{n+1}'i ele alalım. Kolaylık olsun diye,

$$p_{n+1} = r$$

yazalım. $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ arasından r'den bir önce gelen elemana p, bir sonra gelen elemana q diyelim:

$$p < r < q.$$

Tümevarım varsayımından dolayı

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_p} \subseteq U_q \subseteq X \setminus B$$

içindelikleri doğrudur.

$$\overline{U_p} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_q$$

içindelikleri sağlayacak bir U_r açık altkümesi bulmak istiyoruz.

$\overline{U_p} \subseteq U_q$ olduğundan, $\overline{U_p}$ ve U_q^c kapalı kümeleri ayrıktır. Demek ki sırasıyla bunları içeren ayrık U_r ve V açık kümeleri vardır. O zaman,

$$\overline{U_p} \subseteq U_r \subseteq X \setminus V$$

olur, dolayısıyla

$$\overline{U_r} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus U_q^c = U_q$$

olur. Böylece tümevarım adımı da atılmış oldu ve dilediğimiz U_p açık altkümelerini tanımladık.

İkinci Adım. $q \in \mathbb{Q}^{<0}$ için $U_q = \emptyset$ ve $q \in \mathbb{Q}^{>1}$ için $U_q = X$ tanımını yaparak yukarda yaptığımız U_q aralıklarının tanımını genişletelim. Hâlâ daha her $p < q$ için

$$\overline{U_p} \subseteq U_q$$

içindelikleri doğrudur.

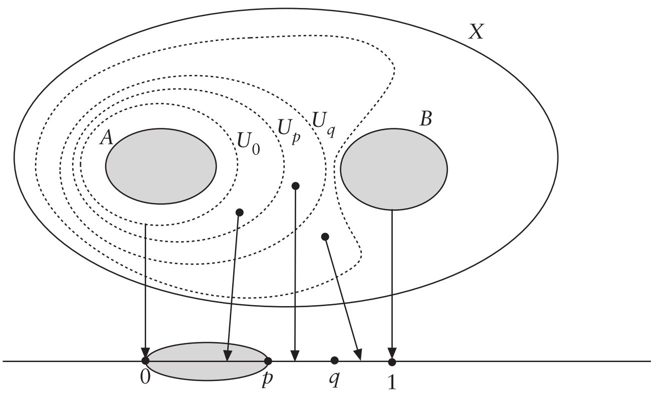
Üçüncü Adım. $x \in X$ ise, şu tanımı yapalım:

$$Q(x) = \{p \in \mathbb{Q} : x \in U_p\}.$$

0'dan küçük kesirli sayı barındırmadığından $Q(x)$ alttan sınırlıdır ve

$$\inf Q(x)$$

diye bir gerçel sayı vardır. Ama $Q(x)$ kümesinde 1'den büyük tüm kesirli sayılar vardır. Demek ki
$$\inf Q(x) \in [0,1].$$
Bu arada, eğer $x \in A$ ise, $Q(x) = \mathbb{Q}^{\geq 0}$ olduğundan
$$\inf Q(x) = 0$$
ve eğer $x \in B$ ise, $Q(x) = \mathbb{Q}^{>1}$ olduğundan
$$\inf Q(x) = 1$$
olur. Anlaşılan o ki fonksiyonumuzu bulduk:
$$f(x) = \inf Q(x).$$
İş, f'nin gerçekten sürekli olduğunu kanıtlamaya kaldı.



Eğer $x \in \overline{U_p}$ ise, her $q > p$ için $x \in \overline{U_p} \subseteq U_q$ ve $q \in Q(x)$ olur. Demek ki,
$$(p, \infty) \cap \mathbb{Q} \subseteq Q(x)$$
ve $f(x) \leq p$ olur. Yani
$$f(\overline{U_p}) \subseteq [0, p].$$
Benzer şekilde, eğer $x \notin U_p$ ise $f(x) \geq p$ olur. Yani,
$$f(U_p^c) \subseteq [p, 1].$$
Demek ki, $p < q$ kesirli sayıları için,
$$f(Uq \setminus \overline{U_p}) = f(U_q \cap \overline{U_p}^c) \subseteq f(U_q) \cap f(\overline{U_p}^c) \subseteq [0, q] \cap [p, 1] = [p, q].$$

Şimdi $a \in X$ herhangi bir nokta olsun. $f(a)$'yı içeren herhangi bir $U \subseteq \mathbb{R}$ açık kümesi alalım. r ve s gerçel sayıları ve p ve q kesirli sayıları

$$f(a) \subseteq (p,q) \subseteq (r,s) \subseteq U$$

içindeliklerini sağlayacak biçimde seçilsin. O zaman, kolaylıkla kanıtlanabileceği üzere,

$$a \in U_q \setminus \overline{U_p}$$

ve

$$f(U_q \setminus \overline{U_p}) \subseteq [p,q] \subseteq (r,s) \subseteq U$$

olur. Demek ki f süreklidir. □

24.3 Tietze Genişleme Teoremi - *Selçuk Demir*

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x$ formülüyle tanımlanmış olsun. Bu fonksiyonu $\mathbb{R}$'ye sürekli olacak biçimde genişletebiliriz; bunun için aynı kuralı korumak yeterli. Öte yandan, eğer $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 1/x$ kuralıyla tanımlanmışsa, bu fonksiyonu $\mathbb{R}$'ye sürekli bir biçimde genişletmenin imkânı yoktur, çünkü ne yaparsak yapalım 0'daki sorunu aşamayız. Ama aynı fonksiyonu $\mathbb{R}^{>0}$ kümesine (aynı formülle) sürekli olacak biçimde genişletebiliriz. Birazdan göreceğimiz üzere bunu, $(0,1]$ kümesinin $\mathbb{R}^{>0}$ topolojik uzayında kapalı olmasına borçluyuz.

Genel problemi şöyle ifade edilebiliriz: X bir topolojik uzay olsun. $A \subseteq X$ ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonu hangi koşullarda X'ten $\mathbb{R}$'ye giden sürekli bir fonksiyona genişletebiliriz?

Urysohn Önsavı'nın önemli sonuçlarından biri, bu soruya büyük ölçüde yanıt veren Tietze Genişleme Teoremi'dir:

Teorem 24.2 (Tietze Genişleme Teoremi[1]). *Eğer X normal bir uzaysa ve A, X'in bir kapalı altkümesiyse, o zaman, A'dan $\mathbb{R}$'nin (sınırlı ya da sınırsız) bir aralığına giden sürekli herhangi bir f fonksiyonu X'ten aynı aralığın kapanışına giden sürekli bir h fonksiyonuna genişletilebilir. Ayrıca*

$$\sup_{x \in A} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| = \|h\|_\infty$$

olur.

Kanıt: A üstüne tanımlı ve X'e genişletmek istediğimiz sürekli fonksiyona f diyelim. Önce f'nin sınırlı olduğu varsayımını yapalım.

$$a_0 = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

[1] Teoremin kanıtı Selçuk Demir tarafından yazılmıştır.

olsun. Eğer $a_0 = 0$ ise $f = 0$ olur ve $h = 0$ fonksiyonu işimizi görüyor. Bundan böyle $a_0 \neq 0$ olsun.

$$A_0 = \left\{x \in A : f(x) \leq -\frac{a_0}{3}\right\}$$

ve

$$B_0 = \left\{x \in A : f(x) \geq \frac{a_0}{3}\right\}$$

kümelerini alalım. f sürekli ve A kapalı olduğundan bu kümeler X'te kapalıdır. Ayrıca ayrıklar. Urysohn Önsavı'nı kullanarak A_0 üzerinde $-a_0/3$ değerini ve B_0 üzerinde $a_0/3$ değerini alan sürekli bir

$$g_0 : X \longrightarrow \left[-\frac{a_0}{3}, \frac{a_0}{3}\right]$$

fonksiyonu bulabiliriz. Bu fonksiyon için

$$\|g_0\|_\infty \leq \frac{a_0}{3}$$

ve A üzerinde

$$\|f - g_0\|_\infty \leq \frac{2a_0}{3}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

Tümevarımla,

$$\|g_n\|_\infty \leq \frac{2^n a_0}{3^{n+1}}$$

ve A üzerinde

$$\|f - g_0 - g_1 - \cdots - g_n\|_\infty \leq \frac{2^{n+1} a_0}{3^{n+1}}$$

eşitsizliklerini sağlayan sürekli $(g_n)_n$ fonksiyonlar dizisi inşa edeceğiz.

$g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ seçilmiş olsun. Yukarıda yaptığımız gibi a_n sayısını

$$a_n = \sup_{x \in A} |f(x) - g_0(x) - g_1(x) - \cdots - g_{n-1}(x)|$$

olarak tanımlayalım ve

$$A_n = \left\{x \in A : f(x) - g_0(x) - g_1(x) - \ldots - g_{n-1}(x) \leq -\frac{a_n}{3}\right\}$$

ve

$$B_n = \left\{x \in A : f(x) - g_0(x) - g_1(x) - \cdots - g_{n-1}(x) \geq \frac{a_n}{3}\right\}$$

kümelerini ele alalım. Bu kümeler de kapalı ve ayrık kümelerdir.

Gene yukarıda olduğu gibi

$$\|g_n\|_\infty \leq \frac{a_n}{3}$$

ve A üzerinde
$$\|f - g_0 - g_1 - \cdots - g_n\|_\infty \leq \frac{2a_n}{3}$$
koşullarını sağlayan bir Urysohn fonksiyonu vardır.
$$a_n \leq \frac{2^n a_0}{3^n}$$
eşitsizliğini dikkate alırsak inşamızın bitmiş olduğunu görürüz.

Şimdi $h_n = g_0 + g_1 + \cdots + g_n$ olsun. Eğer $n \geq m$ ise
$$\begin{aligned}\|h_n - h_m\|_\infty &= \|g_{m+1} + \cdots + g_n\|_\infty \\ &\leq \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\frac{a_0}{3} \\ &< \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^k + \cdots\right)\frac{a_0}{3} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} a_0\end{aligned}$$
olduğundan $(h_n)_n$ dizisi düzgün bir Cauchy dizisidir. Sınırlı sürekli fonksiyonların uzayı $\ell^\infty(X)$ tam olduğundan (Teorem 21.5 ve 21.10) bu dizinin bir limiti vardır. Bu limite h diyelim.
$$\|h\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_\infty \leq a_0$$
ve A üzerinde
$$\|f - h_n\|_\infty \leq \frac{2a_n}{3}$$
olduğundan, A üzerinde $h = f$ eşitliği geçerlidir.

Ayrıca
$$\|h\|_\infty = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=0}^{n} g_i\right\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\|g_i\|_\infty \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{2^i}{3^{i+1}}a_0 = a_0.$$
Diğer yandan
$$a_0 = \sup_{x\in A}|f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|h(x)| = \|h\|_\infty$$
eşitsizliği bariz.

f sınırlı olduğu durumda teorem kanıtlanmıştır.

$x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ fonksiyonuyla f fonksiyonunun bileşkesini alırsak, teoremi sınırsız fonksiyonlar için de kanıtlamış oluruz. □

Kaynakça

[Ap] Tom M. Apostol, **Calculus I** ve **II**, John Wiley and Sons 1967.

[Be] Sterling K. Berberian, **A First Course in Real Analysis**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 1994.

[Bo] Nicholas Bourbaki, **Topologie Générale**, Hermann 1974.

[G] Roger Godement, **Analysis I** ve **II**, Sringer, Universitext 2003. (Fransızcadan İngilizceye çeviren Philip Spain).

[Ka] Timur Karaçay, **Genel Topoloji**, Başkent Üniversitesi 2009.

[Ke] John L. Kelley, **General Topology**, Van Nostrand 1955. Sonraki basım Springer 1975.

[Kı] Seyit Ahmet Kılıç, **Genel Topoloji**, Vipaş Bursa 2002.

[MD] Matematik Dünyası dergisi, TMD, 2007-2011.

[Mu] James R. Munkres, **Topology, a first course**, Prentice-Hall Inc. 1975.

[N1] Ali Nesin, **Sezgisel Kümeler Kuramı**, 3'üncü basım, Nesin Yayıncılık 2011.

[N2] Ali Nesin, **Sayıların İnşası**, Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N3] Ali Nesin, **Aksiyomatik Kümeler Kuramı**, Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N4] Ali Nesin, **Analiz I**, Nesin Yayıncılık 2011, üçüncü basım 2014.

[N5] Ali Nesin, **Analiz II** (süreklilik), Nesin Yayıncılık tarafından 2012'de yayımlanacak. Bkz. TÜBA açık ders notları: http://www.acikders.org.tr/course/category.php?id=2.

[N6] Ali Nesin, **Analiz III** (türev ve integral), Nesin Yayıncılık tarafından 2013'te yayımlanacak.

[Sc] Laurent Schwarz, **Cours d'Analyse I ve II** (Ecole Polytechnique ders notları), Hermann 1967.

[Sp] Murray R. Spiegel, **Théorie et Applications de l'Analyse**, Serie Schaum, McGraw-Hill 1974.

[TT] Tosun Terzioğlu, **An Introduction to Real Analysis**, Matematik Vakfı 2000.

Dizin