HAHN-BANACH TEOREMİ VE SONUÇLARI

G.F.Simmons 1963 tarihli " Introduction to Topology and Modern Analysis"' adlı mükemmel kitabında soyut bir matematisel yapıyı anlamanın en iyi yollarından biri olarak "' o matematiksel yapıdan aynı yapıya sahip en basit yapıya giden ve var olan yapıyı koruyan dönüşümlerin çalışılmasının en iyi yollardan biri olduğunu söyler. Bu ilkenin grupların, halkaların, ve cebirlerin yapılarını anlamakta çok etkin olduğunu belirtir".

Nesin Matematik Köyünde 22 Ağustos-2 Eylül 2008 tarihlerinde verdiğim dersin ilk kısmının notları olan bu notlarda bu ilkenin normlu uzaylar için nasıl çalıştığı ile başlıyacağız.

X normlu bir uzay olsun.X üzerindeki tüm gerçel veya karmaşık değerli sürekli (sınırlı) fonksiyoneller,X deki x ve α sayıları için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ve

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

ile tanımlanan toplama ve skalar çarpma altında bir vektör uzayı olur. X in duali olarak adlandıracağımız bu uzayı X' ile göstereceğiz. X',

$$||f|| = \{|f(x)| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$$

normu ile donandığında bir Banach uzayı olur.

Bir örnek vermek amaçı ile, X ölçüm uzayı, bu uzay üzerinde μ ile göstereceğimiz bir ölçüm ve $1 \leq p \leq \infty$ sağlayan bir p gerçel sayısı alalım. L^p ile $|f(x)|^p$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğu ölçülebilir fonksiyonları gösterelim. Eğer g ,$1/p + 1/q = 1$ eşitliğini sağlayan q gerçel sayısı için L^q uzayının bir öğesi ise, g ile L^p üzerinde F_q ile göstereceğimiz bir fonksiyonel tanımlıyabiliriz:

$$F_q(f) = \int f(t)g(t)\mu(t)$$

Integraller için Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$|F_g f(t)| = |\int f(t)g(t)\mu(t)| \leq \int |f(t)g(t)|\mu(t) \leq ||f||_p ||g||_q$$

Buradan F_g fonksiyonelinin L^p uzayı üzerinde $||F_g|| \leq ||g||$ eşitsizliğini sağlayan sınırlı bir fonksiyonel tanımladığını görürüz. Esasında burada $||F|| = ||g||$ eşitliği vardır.

Özetlersek, L^q uzayındaki her g fonksiyonu için L^p uzayında sınırlı(sürekli) fonksiyonel tanımlıyabileceğimizi gördük. Esasında L^p uzayı üzerindeki her sürekli fonksiyonelin L^q daki bir g için F_g biçiminde tanımlanabileceğini biliyoruz. Biraz daha ileri giderek, $g \to F_g$ ilişkisinin doğrusal ve uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğunu söyliyebiliriz.

Yazdıklarımızı $(L^p)' = L^q$ olarak ta özetliyebiliriz. Doğal sayıların alt kümeleri üzerinde sayım ölçümünün alındığı özel durumda dizi uzaylarını elde ederiz. Örneğin, bu durumda L^p uzayının karşılığı $l^p = \{x = (x_n) : \sum |x_n|^p < \infty\}$ uzayı olur. Gerçel analizin konusu da olabilecek bu örneği fazla uzatmadan, $1 \leq p \leq q$ olmak üzere, $(l_p)' = l^q$, $(l^1)' = l^\infty$ ve $(c_0)' = l^1$ şeklinde özetliyebiliriz.

Şimdi dual uzaylarının önemli bir özelliği olan tamlığını ele alalım. Yani X bir norm uzayı ve X', X'in $||f|| = sup\{|f(x)| : x \in X, ||x|| \leq 1\}$ normu ile donanmış duali ise X' bu normda tamdır.İçindeki her Cauch dizisi yine X' nün bir öğesine normda yakınsar.Bu önemli özelliğin kanıtı yerine aynı emeği hercayarak kanıtlayabileceğimiz bir teoremi kanıtlayacağız ve duallerin tamlığını bu teoremin sonucu olarak elde edeceğiz.

TeoremX, Y normlu uzaylarve ve Y tam ise X den Y uzayında değer alan sürekli dönüşümler uzayı $L(X, Y)$ dönüşüm normu

$$||T|| = sup\{|T(x)| : ||x|| \leq 1, x \in X\}$$

ile donandığında, bir Banach uzayıdır.

Kanıt Kuşkusuz önce dönüşüm normunun bir norm olduğunu kanıtlamalıyız ama bunu size bırakıyorum. (T_n), $L(X, Y)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Eğer x, X uzayının keyfi bir öğesi ise

$$||T_m(x) - T_n(x)|| \leq ||(T_m - T_n)x|| \leq ||T_m - T_n||||x||$$

eşitsizlikleri $T_n(x)$ dizisinin Y Banach uzayında Cauchy dizisi olduğunu verir. Dolayısı ile bu dizinin $lim_n T(x)$ ile göstereceğimiz bir limiti vardır.Bu şekilde $x \to T(x)$ ile X uzayından Y uzayına bir dönüşüm tanımlıyabiliyoruz. T dönüşümünün doğrusallığı normlu uzaylarda toplama ve sayılar ile çarpmanın normda sürekliliğinin sonucudur. Kanıt için geriye kalan tek eksik T dönüşümünün sürekliliğidir. Kanıtın bu tarafı düzgün yakınsayan sürekli fonksiyonlar dizisinin limitinin de sürekli olması ile aynıdır.Anımsarsanız bir normlu uzayda Cauchy dizisinin öğeleri sınırlı bir dizidir.Dolayısı ile

$$||T(x)|| = ||lim_n T_n(x)|| = lim||T_n(x)|| \leq sup(||T_n||||x||) = (sup||T_n||)||x||$$

eşitsizliği T dönüşümünün sınırlılığını ve dolayısı ile sürekliliğini verir. Eğer $||T_n - T|| \to 0$ olduğunu da gösterebilirsek $L(X, Y)$ uzayının tamlığını elde edeceğiz. Bu bağlamde (T_n) dizisi dönüşüm normunda Cauchy olduğundan verilen $\epsilon > 0$ pozitif sayısı için kendisinden büyük m, n için $||T_m - T_n|| \leq \epsilon$ sağlayan $n_0(\epsilon)$ sayısı bulabiliriz. n_0 sayısının yukarıdaki seçimi ve $m, n \geq n_0$ ve $||x|| \leq 1$ sağlayan x öğesi için

$$||T_m(x) - T_n(x)|| \leq ||T_m - T_n||||x|| \leq < \epsilon$$

Bu eşitsizlikte m sabit tutulup, n üzerinden limit alır ve normun sürekliliğini hatırlarsak

$$||T_m(x) - T_n(x)|| \to ||T_m(x) - T_n(x)||$$

elde ederizki, bu $m \geq n_0$ ve $||x|| \leq 1$ sağlayan x öğeleri için

$$||T_m - T|| \leq \epsilon$$

verir. Kuşkusuz bu son eşitlik ise $m \geq n_0$ için

$$||T_n - T|| \geq \epsilon$$

vereceğinden, verilen Cauchy dizisi (T_n) nin $L(X, Y)$ uzayında limiti olan T dönüşümünü bulduk.

$\square$

Sonuc X normlu bir uzay ise duali X' dual norm ile donandığında tamdır.

Dual uzaylar hakkında hemen her şey Hahn-Banach Teoremine dayanır dersek fazla abartmış olmayız. Bu teorem bir altuzayda tanımlı bir fonksiyonelin doğrusal ve sürekli olarak, üstelik normunu da koruyacak biçimde, tüm uzaya genişletilebileçeğini söyler.

Bunun için önce verilen bir fonksiyoneli tanımlandığı altuzaydan, boyutu bir fazla olan altuzaya nasıl genişletebileçeğimizi öğrenelim.

Önteorem M , N normlu uzayının bir altuzayı, f, M uzayında sürekli bir fonksiyonel olsun. M nin öğesi olmayan bir x_0 vektörü seçelim ve M_0 ile M

ve x_0 tarafından gerilen uzayı gösterelim. Yani, $M_0 = M + Ger(x_0)$ olsun. f fonksiyoneli M_0 uzayında tanımlı,$||f|| = ||f_0||$ sağlayan bir f_0 fonksiyoneline genişler.

Kanıt Verilen N uzayının gerçel cisim üzerinde tanımlandığını varsayalım. f yerine $f/||f||$ alarak verilen fonksiyonelin boyunu, yani normunu,1 kabul edebiliriz. M_0 uzayından alacağımız, sıfırdan farklı her y vektörünü, $x \in M$ ve α sıfırdan farklı olmak üzere ve tek bir biçimde

$$y = x + \alpha x_0$$

olarak yazabiliriz. Şimdi

$$f_0(\alpha x_0 + x) = f(x) + \alpha r_0$$

ile tanımlanan f_0 fonksiyoneli f fonksiyonelini her r_0 sayısı için M_0 uzayına genişletir. Daha doğrusu r_0 sayısını $f_0(x_0)$ alırsak, bir genişletim elde ettiğimizi görürüz. Ancak yapmak istediğimiz f fonksiyonelinin herhangi bir genişletimi değil, onun normu bir olan bir genişletimini bulmak olduğundan, r_0 sayısını biraz daha özenli seçmek zorundayız. Başka bir deyişle r_0 sayısını, her $x \in M$ ve her α için

$$|f_0(x + \alpha x_0)| \leq ||x + \alpha x_0||$$

sağlayacak biçimde seçmeliyiz. Ancak

$$f_0(x + \alpha x_0) = f(x) + \alpha r_0$$

olduğundan, yukarıdaki eşitsizliği

$$-||x + \alpha x_0|| \leq f(x) + \alpha r_0 \leq ||x + \alpha x_0||$$

veya

$$-f(x) - ||x + \alpha x_0|| \leq \alpha r_0 \leq -f(x) + ||x + \alpha x_0||$$

biçiminde veya $1/\alpha$ ile çarparak

$$-f(x/\alpha) - ||x/\alpha + x_0|| \leq r_0 \leq -f(x/\alpha) + ||x/\alpha + x_0||$$

yazabiliriz. M altuzayından alınacak keyfi x_1 ve x_2 vektörleri için f fonksiyonelinin M uzayı üzerindeki doğrusallığı ve sınırlılığı kullanılarak

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \leq |f(x_2 - x_1)| \leq ||f|| ||x_2 - x_1|| \leq ||x_2 + x_0|| + ||x_0 + x_1||$$

buluruz. Dolayısı ile M altuzayından alınacak her x_1 ve x_2 vektörleri için

$$-f(x_1) - ||x_1 + x_0|| \leq -f(x_2) + ||x_0 + x_2||$$

eşitsizliği vardır. Şimdi a sayısını $sup\{-f(x) - ||x + x_0|| : x \in M\}$,b sayısını $inf\{-f(x) + ||x + x_0||\}$ olarak tanımlarsak $a \leq b$ olacaktır. Artık yapılacak tek şey r_0 sayısını $a \leq r_0 \leq b$ olarak seçmektir. Özetlersek, r_0 sayısının bu seçimi ile tanımlanacak f_0 fonksiyoneli, f fonksiyonelinin boyutu M nin boyutundan bir fazla olan altuzaya genişletimi olacak ve normu f fonksiyonelinin normu ile aynı olacaktır.

□

M altuzayında tanımlı f fonksiyonelini M alyuzayını içeren ve boyutu M den bir fazla olan altuzaya normu koruyacak biçimde genişlettik. Kuşkusuz genişleme ile kastımız, daha büyük uzayda tanımlı olan fonksiyonelin M altuzayına kısıtlanışının verilen f fonksiyoneli ile çakışmasıdır.

M normlu uzayı, N normlu uzayının altuzayı ise M'nin kapalı birim yuvarı B_M, N'nin kapalı birim yuvarı B_N içinde kalacaktır. Büyük küme üzerinden alınan supremum daha büyük olacağından, beklenen

$$||f_0|| = sup\{|f_0(x)| : x \in N, ||x|| \leq 1\}$$

sayısının

$$||f|| = sup\{|f(x)| : x \in M, ||x|| \leq 1\}$$

sayısından daha büyük olacağı iken ,şaşırtıcı biçimde $||f|| = ||f_0||$ elde ettik.

Şimdi verilen bir fonksiyoneli boyutu sadece bir fazla olan altuzaya değilde, örneğin tüm uzaya genişletimini elde etmek için Zorn Aksiyomu olarak bilinen aksiyoma gereksinimimiz var.

Bu nedenle bu aksiyomda gereken kimi tanımları ele alalım. Sıralı bir küme X üzerinde yansımalı, simetrik olmayan, ve geçişken bir ikili bağıntının olduğu uzaydır. Bu bağıntıyı $\leq$ ile gösterirsek, şöyle özetliyebiliriz: X uzayındaki her x, y, z için

1) $x \leq x$

2) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ vardır,

3) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ sağlanmalıdır.

Örnek olarak gerçel sayılarda bildiğimiz sıralama bağıntısı $\leq$, bir diğeri içinde bir kümenin tüm alt kümelerinde küme içermesini düşünebilirsiniz.

Zorn Aksiyomu P içindeki her zincirin bir üstsınıra sahip olduğu sıralı bir küme ise, P'nin bir en büyük (maksimal) öğesi vardır.

Burada açıklanması gereken sözçüklerden zincir, içindeki her iki öğenin sıralamada karşılaştırılabileceği bir alt kümedir. Bir zincirdeki iki öğe x, y için ya $x \leq y$ veya $y \leq x$ doğrudur. Bir x öğesinin maksimal olması için $x \leq y$ ise $x = y$ sağlanmasıdır.

Hahn-Banach Teoremi M, normlu N uzayının bir altuzayı olsun.f, M üzerinde sınırlı(sürekli) bir fonksiyonel ise, f normu aynı olacak biçimde tüm N uzayına genişler.

Kanıt Önteoremden f'nin M yi içeren daha büyük olan bir altuzaya ,normu koruyacak biçimde genişletebileceğimizi biliyoruz.Şimdi O, M altuzayını içeren bir altuzay,g, O da tanımlı ancak M ye kısıtlaması f ve $||f|| = ||g||$ olan (O, g) çiftlerini düşünelim. Böylesi çiftlerin varlığını Önteoremden biliyoruz. Böylesi çiftler üzerinde bir sıralama tanımlıyalım: $\leq$ ile göstereceğimiz bu sıralamada

$$(O_1, g_1) \leq (O_2, g_2)$$

demek; O_1,in O_2 uzayının altuzayı, g_2 fonksiyonelinin O_1 'e kısıtlanışının ise g_1 olmasıdır. Bu bağıntının bir sıralama bağıntısı olduğunu sizlere bırakıyorum. Böylesi çiftlerden oluşan bir zincir alalım. Genelde altuzayların birleşiminin altuzay olmamasına karşın, zinçiri oluşturan altuzayların birleşimi yine bir altuzaydır. Bu birleşime O uzayı dersek, O üzerinde f_o ile eğer $x \in O_i$ ise ,$f_0(x) = g_i(x)$ olarak tanımlanan f_0 fonksiyonelinin iyi tanımlı ,üstelik normunun da $||f||$ olduğunu size bırakıyorum. Bu aşamada, her zincirin bir üstsınırı olduğunu gördüğümüzden, Zorn Aksiyomu gereğince bir maksimal öğe (U, f_0) nin varlığına hükmedebiliriz. Eğer bu maksimal öğe'yi betimleyen altuzay U, tüm uzay N'ye eşitse, iş bitmiştir. Ancak U ve N eşit değilse, N de olan ancak U da olmayan bir x_0 vektörü bulabilmemiz gerekir. Ancak Önteoremi U ve x_0 çiftine uygulayarak elde edebileceğimiz yeni çift, tanım gereği,(U, f_0) çiftinden daha büyük olacak ve bu da (U, f_0) çiftinin maksimal olması ile çelişecektir. Bu nedenle $U = N$ olmalıdır.Aradığımız genişletim ise f_0 fonksiyonelinden başkası değildir.

□

Hahn-Banach teoreminin önemi normlu uzayların duallerinin ne kadar zengin olduklarına yanıt verebilmesidir.

Teorem N normlu bir uzay, $x_0 \in N$ sıfırdan farklı bir öğe ise, dualin bir f_0 öğesi için $f_0(x_0) = ||x_0||$ ve $||f_0|| = 1$ sağlanır.

Kanıt M ile x_0 tarafından gerilen uzayı gösterelim. M üzerinde

$$f(\alpha x_0) = \alpha ||x_0||$$

ile tanımlanan f fonksiyonelini düşünelim.Kuşkusuz $f(x_0) = ||x_0||$ ve $||f|| = 1$ sağlanır. f fonksiyonelinin ,Hahn-Banach Teoremince elde edilecek genişletimi aranılan fonksiyoneldir.

□

Bu son teoremden x, y farklı vektörlerinde farklı değerler alan, normu bir olan bir fonksiyonelin varlığına hükmedebiliriz.Yapılacak tek iş $x - y \neq 0$ olduğuna dikkat edip, teoremi uygulamaktır. Dolayısı ile normlu bir uzayın duali, uzayın noktalarını ayıracak kadar zengindir.

Aşağıdaki Teorem dualin biraz daha zengin olduğunu verir.

Teorem M, N uzayının kapalı bir altuzayı olsun. Eğer x_0, M uzayının bir öğesi değilse, $f(x_0) \neq 0$ ve M üzerinde sıfır olan bir f fonksiyoneli vardır.

Kanıt N/M bölüm uzayı, bölüm normu olarak anılan

$$||x + M|| = inf\{||x + m : m \in M\}$$

ile donandığında, normlu bir uzaydır. $\phi : N \to N/M$,bölüm dönüşümü ise, bu dönüşüm sürekli ve $\phi(M) = 0$ ve $\phi(x_0) \neq 0$ sağlar. Hahn-Banach Teoremini bölüm uzayında kullanarak, bölüm uzayının dualinde $f(x_0 + M) \neq 0$ sağlayan bir f fonksiyoneli bulabiliriz.Aradığımız fonksiyonel $f_0(x) = f(\phi(x))$ fonksiyonelidir. Sürekli iki fonksiyonelin bileşimi olan f_0 süreklidir ve istenilen koşulları sağlar.

□

Yukarıdaki teoremi dual uzayının sadece noktaları değil aynı zamanda kapalı bir altuzay ve onun dışındaki noktaları ayıracak denli zengin olduğu biçiminde yorumlıyabiliriz.

X normlu uzayının kendisi de normlu bir uzay olduğundan, onun da dualinin olacağı açıktır. X' uzayının dualini X'' ile göstereceğiz. F, X'' uzayının bir öğesi ise, F nin normu $||F||$,

$$||F|| = \sup\{|F(f)| : ||f|| \leq 1, f \in X'\}$$

olarak tanımlanır. Şimdi X uzayını kendi ikinci duali X'' içine nasıl gömülebileçeğini öğreneceğiz. $x \in X$ ise x ile X' üzerinde sürekli, doğrusal F_x fonksiyonelinin nasıl tanımlanabileceğine bakalım. Doğal olarak bunu

$$F_x(f) = f(x)$$

biçiminde tanımlarız. F_x fonksiyonelinin gerçel değerler aldığına dikkat edip, X' üzerinde doğrusal olduğunu görelim. $f, g \in X'$,α, β gerçel sayılar ise;

$$F_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F_x(f) + \beta F_x(g)$$

Eşitlik X' deki her f, g ve gerçel sayılar α, β ve $x \in X$ için doğru olduğundan F_x,X' üzerinde doğrusaldır. Şimdi F_x'in normunu bulalım.

$$||F_x|| = sup\{|F_x(f)| : ||f|| \leq 1\} = sup\{|f(x)| : ||f|| \leq 1\} \leq ||x||$$

Ancak verilen $x \in X$ için, Hahn-Banach Teoreminden $||x|| = f(x), ||f|| \leq 1$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikte esasında $||F_x|| = ||x||$ eşitliği vardır. Bu nedenle, $x \to F_x$ ilişkisi X uzayından X'' uzayına normu koruyan bir fonksiyon tanımlar. Şimdi bu ilişkinin doğrusal olduğunu görelim: X' içindeki her f için :

$$F_{\{x+y\}}(f) = (F_x + F_y)(f)$$

ve her α gerçel sayısı için ,

$$F_{\{\alpha x\}}(f) = \alpha F_x(f)$$

göstermemiz gerekir. Ancak,

$$F_{\{x+y\}}(f) = f(x) + f(y) = F_x(f) + F_y(f) = (F_x + F_y)(f)$$

sağlandığından $x \to F_x$ ilişkisi toplamsaldır. İkinci eşitliği alıştırma olarak size bırakıyorum. Norm koruyan bir ilişki olan $x \to F_x$ fonksiyonuna X uzayının X'' içine doğal gömülüşü denir. Bu gömme nedeni ile X uzayını X'' uzayının bir altuzayı olarak düşünürüz.

Yukarıdaki $x \to F_x$ fonksiyonunun üzerine, yani $X = X''$, olması durumunda X yansımalıdır denir. X'' uzayı normlu bir uzay olarak her zaman tam olduğundan , normlu bir uzayın yansımalı olması için gerekli koşullardan biri, X in tam uzay olmasıdır.

Diğer yandan, yansıma özelliği için uzayın tam olması yeterli değildir. Örneğin, c_0 uzayı tam olmasına karşın yansımalı değildir. Çünkü, $(c_0)' = l^1$, $(l^1)' = l^\infty$ bilinmektedir.

ZAYIF TOPOLOJİLER

X uzayı üzerindeki zayıf topoloji $\sigma(X, X')$, X' ın öğelerini X üzerinde sürekli kılan en zayıf topoloji olarak tanımlanır. X üzerindeki norm topolojisi X' in öğelerini sürekli kıldığından bu topoloji sınıfı boş değildir. Aynı norm topolojide olduğu gibi, zayıf topolojide X deki toplama ve sayılarla çarpmanın sürekli olduğu bir topolojidir. Zayıf topolojiler ile uzayın bir çok özelliği betimlenebilir. Örneğin, X bir Banach uzayı, B_X uzayın $\{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ ile belirlenen kapalı birim yuvarı ise, X in yansımalı olması için gerekli ve yeter koşul B_X in zayıf topoloji $\sigma(X, X')$ ile donandığında kompakt olmasıdır. X uzayı üzerindeki zayıf topolojinin yanısıra X' ve X'' üzerindeki zayıf topolojilerden de bahsedebiliriz. Örneğin, X' üzerindeki zayıf topoloji $\sigma(X', X'')$ dan söze edebileğimiz gibi, X uzayını X'' içinde düşünerek $\sigma(X', X)$ zayıf-yıldız topolojisi olarak bilinen zayıf topolojiden de söz edebiliriz. Bu dersteki amaçlarımız için zayıf-yıldız topoloji daha önemli olacağı için bu topoloji üzerinde biraz daha duralım.

X' uzayının zayıf-yıldız topolojisi $\sigma(X', X)$, X' üzerinde X uzayının öğelerini sürekli kılan en zayıf topolojidir. Diğer bir deyişle $\sigma(X', X)$, X' üzerinde, her $x \in X$ için F_x fonksiyonellerini sürekli kılan en zayıf topolojidir. Hemen görebileceğimiz bir gerçek $\sigma(X', X)$ topolojisinin $\sigma(X', X'')$ topolojisinden daha zayıf olduğudur. X' uzayının zayıf-yıldız topolojisi hakkında daha fazla bilgi edinebilmek amaçı ile X' uzayındaki bir f_0 öğesinin bir $\epsilon > 0$ koşuluğunu anlamaya çalışalım. Bu komşuluğu $S(x, f_0, \epsilon) = S$ ile gösterirsek, tanımdan

$$S = \{f \in X' : |F_x(f) - F_x(f_0)| < \epsilon\} = \{f \in X' : |f(x) - f_0(x)| < \epsilon\}$$

kümesinin f_0 öğesini içeren açık bir küme olması gereği ortaya çıkar. Tüm x, f_0, ϵ lar için elde edilen kümeler zayıf-yıldız topoloji için en temel(subbasic) açık kümelerdir. Böyle kümelerin sonlu arakesitleri ise topolojiyi betimleyen temel(basic) açık kümeleri verir. Zayıf-yıldız açık kümeler ise temel açık kümelerin keyfi birleşimleridirler. Zayıf-yıldız topolojiyi daha iyi tanımak için bu topolojinin X' uzayının noktalarını ayırdığını kanıtlayalım.

f, g X' uzayının farklı öğeleri ise bir $x \in X$ için $f(x) \neq g(x)$ olmak zorundadır. Şimdi ϵ sayısını $|f(x) - g(x)|/3$ olarak seçip $S(x, f, \epsilon)$ ve $S(x, g, \epsilon)$ kümelerini düşünürsek, bunların zayıf-yıldız topolojide açık ve arakesitlerin boş olduğunu görebilmemiz gerek.$B_{X'}$ ile X' uzayının kapalı birim yuvarını gösterelim. Yani $B_{X'} = \{f \in X' : ||f|| \leq 1\}$ olsun. Eğer X ve dolayısı ile X' sonlu boyutlu normlu uzaylar ise $B_{X'}$ Heine-Borel Teoremince, kapalı ve sınırlı olduğundan, kompakt bir kümedir. Bu önermenin tersi de doğrudur. Yani, $B_{X'}$ kümesinin norm topolojide kompakt olması için yeterli ve gerekli koşul X' uzayının sonlu boyutlu olmasıdır. Dolayısı ile X'nün kapalı birim yuvarının norm topolojide kompakt olmasının çok kısıtlayıcı olduğunu görüyoruz. Diğer yandan meşhur bir teorem, $B_{X'}$ nün zayıf topoloji

$\sigma(X', X'')$de kompakt olması için gerekli ve yeterli koşulun X' nün yansımalı bir uzay olduğunu söyler. Başka bir deyişle $B_{X'}$ kümesinin norm veya $\sigma(X', X'')$ topolojilerinde kompakt olması gerçekten çok kısıtlayıcıdır. Alaoğlu Teoremi olarak bilinen aşağıdaki Teorem $B_{X'}$ kümesinin her zaman zayıf-yıldız topolojide kompakt olduğunu verir.

Teorem X normlu uzayının duali X' uzayının kapalı birim yuvarı $B_{X'}$ zayıf-yıldız kompakttır.

Kanıt X uzayındaki her x için C_x ile gerçel sayıların kapalı ve sınırlı $C_x = [-||x||, ||x||]$ kümesini gösterelim. Kompakt kümelerin çarpımlarının da kompakt olduğunu veren Tikonov Teoremi gereğince, $C = \prod C_x$ kümesi de kompakttır. Her x ve dualin birim yuvarı $B_{X'}$ den alınan f için $|f(x)| \leq ||x||$ olduğundan, her x için $f(x) \in C_x$ gözlemini kullanarak, dualin birim yuvarı $B_{X'}$ nı C içine gömebiliriz. Kuşkusuz, herhangi bir fonksiyonel, tamamen X in öğelerinde aldığı değerler ile belirlenir. Dolayısı ile dualin bir öğesi f fonksiyonelini, X in öğelerinde aldığı değerlerden ibaret olan $f(x_\alpha)$ ağı ile özdeşliyebiliriz. Eğer, $f \in B_{X'}$ ise, f fonksiyoneline karşılık gelen ağ $f(x_\alpha)$, C çarpım kümesinin öğesi olacaktır. Bu nedenle, dual X' herhangi bir öğesi f fonksiyonelini C kümesinin öğesi gibi düşüneceğiz. Buradan da $B_{X'}$ üzerindeki zayıf-yıldız topolojisine, C üzerindeki çarpım topolojisinin, $B_{X'}$ kümesine kısıtlanışı gözü ile bakabiliriz. Bu son noktayı görmenin en iyi yollarından biri yakınsayan ağları düşünmektir. Örneğin, $B_{X'}$ deki bir $\{f_\alpha\}$ ağının bir f fonksiyoneline zayıf-yıldız yakınsaması, X uzayındaki her x için $\{f_\alpha(x)\}$ sayılarının $f(x)$ sayısına yakınsamasıdırki, bu C çarpım kümesinde, çarpım topolojisine göre yakınsamasının ta kendisidir. C kümesi kompakt olduğundan, $B_{X'}$ kümesini kompakt olduğunu kanıtlamak için kapalı olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır.

$B_{X'}$ kümesinin kapalı olduğunu kanıtlamak için kapanışından aldığımız her öğenin $B_{X'}$ içinde olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi g fonksiyonelini $B_{X'}$ kümesinin kapanışından alalım. g fonksiyonelini,X uzayının öğeleri ile damgalanmış $g(x_\alpha)$ ağı gibi düşünürsek, önce $g \in C$ olmalıdır. Çünkü, kompakt C kümesi kapalı olmak zorundadır.Bu yüzden, her $x \in X$ için $|g(x)| \leq ||x||$ elde ederiz. Dolayısı ile $g \in B_{X'}$ için göstermemiz gereken tek özellik g nin doğrusallığıdır. g nin toplamsallığı için $x, y \in X$ ve $\epsilon > 0$ sayısı alalım. g,$B_{X'}$ kümesinin zayıf-yıldız kapanışında olduğundan, g'nin her zayıf-yıldız komşuluğu $B_{X'}$ kümesini kesmek zorundadır. Bu nedenle g nin ϵ, x, y ile belirlenen temel komşuluğunda en az bir $f \in B_{X'}$ fonksiyoneli bulunacaktır. Dolayısı ile $f \in B_{X'}$ fonksiyoneli için aşağıdaki eşitsizliklerin tümü sağlanacaktır.

$$|g(x) - f(x)| < \epsilon/3, |g(y) - f(y)| < \epsilon/3, |g(x+y) - f(x+y)| < \epsilon/3$$

Diğer yandan f doğrusal olduğundan

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

sağlanır ve buradan,

$$|g(x+y)-g(x)-g(y)| \leq |g(x+y)-f(x+y)|+|g(x)-f(x)|+|g(y)-f(y)| < \epsilon$$

elde edilirki, ϵ keyfi olduğundan gerçel sayıların Arşimed özelliği, buradan

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

verir. Aynı yöntem ile her α sayısı ve her $x \in X$ için

$$g(\alpha x) = \alpha g(x)$$

olduğunu gösterebilirsiniz, bunu sizlere bırakıyorum.Yapılanlar, kapanışta alınan g fonksiyonelinin $B_{X'}$ kümesinde olduğunu kanıtlar ve kanıtı bitirir. $\square$

Hahn-Banach Teoreminin sonuçlarından birisi de $x \to F_x$ dönüşümünün, her normlu uzay X'i bir kompakt, Hausdorff uzay üzerindeki sürekli fonksiyonların altuzayı gibi düşünmemize olanak sağlayan ve $C(K)$ uzaylarının evrensel olduklarını veren aşağıdaki teoremdir.

Teorem X normlu bir uzay, $B_{X'}$ dual uzay X' nün zayıf-yıldız topoloji ile donanmış kapalı birim yuvarı ise, $x \to F_x$ dönüşümü X ile $C(B_{X'})$ arasımda uzaklık koruyan , içine bir isomorfizmadır. Eğer X bir Banach uzayı ise bu dönüşüm X den $C(B_{X'})$ uzayının kapalı bir altuzayına uzaklık koruyan bir izomorfizmadır.

Son teoreme ek olarak bir $C(K)$ uzayının altuzayları hakkında fazlada bilinen olmadığını belirmek isterim. Buna karşılık $C(K)$ uzaylarının cebirsel ideallerini, maksimal ideallerini ise tamamen bildiğimizi kayda değer bir bilgi olarak eklemek isterim.

Şimdi Hahn-Banach Teoreminin diğer bir sonuçunu öğrenelim.

Tanım Yoğun ve sayılabilir bir alt kümesi olan Banach uzaylarına ayrık'tır denir.

Teorem Normlu bir uzay X in duali X' ayrıksa, kendisi de ayrıktır.

Kanıt(x'_n),X içindeki yoğun dizi olsun.Genellikten kaybetmeksizin bu dizinin öğelerinin normlarını bir olarak kabul edebiliriz.Bir fonksiyonelin normu kapalı birim yuvar üzerinde alınan değerlerin supremumu olduğundan,her n için,

$$|x'_n(x_n)| \geq 3/4$$

sağlayan x_n öğeleri bulabiliriz. M,(x_n) dizisinin gerdiği uzay olsun. Eğer M altuzayı X uzayının tüme değilse M de olmayan bir x_0 vektörü bulabiliriz. Hahn-Banach Teoremi gereğince $||x'|| = 1$, $x'(x_0) \neq 0$ yanısıra M altuzayındaki her x için $x'(x) = 0$ sağlayan $x' \in X'$ bulabiliriz. Dolayısıyle her n için $x'(x_n) = 0$ sağlanacaktır.

$$3/4 \leq |x'(x_n)| = |x'_n(x_n) - x'(x_n)| + |x'(x_n)|$$

ve buradan elde edeceğimiz

$$3/4 \leq ||x'_n - x'||||x_n|| = ||x'_n - x'||$$

bir çelişkidir. Bu çelişki bize $M = X$ olduğunu verir.(x_n) dizisinin rasyonel sayı cismi üzerinde gerdiği altuzay yoğun ve sayılabilirdir.

□

Ancak kendisinin ayrık olduğu halde, dualinin ayrık olmadığı uzaylar vardır.Örneğin l^1 böylesi bir uzaydır.Zira l^1 uzayının duali olan l^∞ ayrık değildir.

ALIŞTIRMALAR

1) X Banach uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşulun duali X' uzayınında yansımalı olduğunu gösteriniz.

2) n-boyutlu normlu bir uzayın dualinin de n- boyutlu olduğunu gösteriniz.

3) X Banach uzayı yansımalı ise kapalı birim yuvarının zayıf topolojide kompakt olduğunu gösteriniz.

4) K n-boyutlu Öklid uzayının kompakt ve Hausdorff bir altkümesi ise $C(K)$ uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşulun K kümesinin sonlu bir küme olduğunu gösteriniz.

5) X normlu bir uzay, Y bir altuzay ise Y nin normda ve zayıf topolojide kapalı olmasının aynı olduğunu gösteriniz.

6) Y normlu X uzayının kapalıaltuzayı ise ve $T(x) = x+Y$ ile tanımlanan $T : X \to X/Y$ bölüm dönüşümü ise

T dönüşümünün sürekli ve normunun $||T|| \leq 1$ olduğunu gösteriniz.

7) $T : X \to Y$ X, Y normlu uzayları arasında sürekli bir dönüşüm $M = T^{-1}$, T dönüşümünün çekirdeği ise T dönüşümün

$X/M \to Y$ arasinda doğrusal ve sürekli, üstelik $||T|| = ||T'||$ sağlayan bir T' dönüşümü tanımladığını kanıtlayınız.

8) Y,X normlu uzayının kapalı altuzayı ve x_0 Y içinde değilse , d x_0 ile Y arasındaki uzaklıksa,X in dualinde $f(Y) = 0, f(x_0) = 1$ ve $||f|| = 1/d$ koşullarını sağlayan f fonksiyoneli olduğunu kanıtlayınız.

Önerme Y, tam metrik uzayı X'in altuzayı olsun.Y nin tamlığı için gerekli ve yeterli koşul Y'nin kapalılığıdır.

Kanıt Y tam ve $y \in X$, Y nin bir limit noktası olsun. Her n tamsayısı için y merkezli,1/n yarıçaplı açık yuvar Y den en az bir y_n öğesini içerir. $d(y_n, y) < 1/n$ sağlandığından $\{y_n\}$ dizisi y noktasına yakınsar. Ancak yakınsayan her dizi Cauchy dizisi olduğundan $\{y_n\}$ dizisi Y metrik uzayında Cauchy dizisi olup, Y nin tam olması nedeni ile bir noktasına yakınsar. Limitlerin tekliğinden bu limit y den bir başkası olamaz.Dolayısı ile kapanışta aldığımız y, Y nin öğesi olur ve Y kapalıdır.

Şimdi Y kapalı alalım ve Y nin tamlığını gösterelim. $\{y_n\}$, Y uzayında bir Cauchy dizisi ise X uzayında da Cauchy dizisidir.X tam varsayıldığından $\{y_n\}$ bir x noktasına yakınsar. $x \in Y$ gösterebilmemiz kanıt için yeterlidir. Eğer $\{y_n\}$ dizisinin sonlu tane farklı öğesi varsa x bu sonsuz kez tekrar etmesi gereken noktadan farklı bir nokta olamaz ve bu nedenle Y de olmalıdır. Yok eğer,$\{y_n\}$ dizisinin sonsuz tane farklı öğesi varsa, x, $\{y_n\}$ dizisinin yığılma noktası olmalıdır.Ancak bu durumda x, kapalı olduğunu varsaydığımız Y kümesinin de yığılma noktası da olacağından ve Y kapalı alındığından $y \in Y$ olacaktır.

□

Bir metrik uzay olan X in altkümesi olarak aldığımız A kümesinin çapı $d(A)$,

$$d(A) = sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$$

olarak tanımlanır.

Çap kullanılarak, bir metrik uzayda sınırlı altküme, çapı sonlu olan küme olarak tanımlanır.

Tanım Bir metrik uzayda $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3$..... koşulunu sağlayan kümeler dizisine azalandır denir.

Azalan bir küme dizisinin arakesitinin boş küme olması beklenirken, eğer dizi tam bir metrik uzayda ise arakesit boş değildir.

Teorem: Cantor Arakesit Teoremi X tam metrik uzayı, (F_n) azalan, kapalı ve $d(F_n) \to 0$ sağlayan bir küme dizisi ise $\bigcap F_n$ sadece bir öğe içerir.

Kanıt $d(F_n) \to 0$ varsayımı arakesitin sadece bir öğeden oluşacağını hemen verir. Zira arakesitte x, y gibi farklı iki öğe varsa, metrik tanımından $0 < d(x, y) \leq d(F_n)$ elde edilirki, bu bir çelişkidir. Kanıtı bitirmek için yapılması gereken tek şey, arakesitin boş olmadığıdır. Eğer F_n kümelerinden gelişigüzel x_n öğeleri seçilirse, $d(F_n) \to 0$ varsayımı, (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu verir. X tam varsayıldığından (x_n) dizisi bir x öğesine yakınsayacaktır. Şimdi, her n için $x \in F_n$ göstereceğiz.

Keyfi bir n tamsayısı alalım. Eğer (x_n) sonlu tane farklı öğe içeren bir dizi ise x, (x_n) dizisinin sonsuz kez tekrar eden öğesi olmalı ve bu nedenle F_n içinde kalmalıdır. Yok eğer, (x_n) sonsuz tane farklı öğeye sahipse x, $\{x_k : k \geq n\}$ kümesinin bir yığılma noktası olmalıdır. Dolayısı ile x, F_n kümesinin de yığılma noktası olacak ve F_n kapalı olduğundan $x \in F_n$ sağlanacaktır.

□

Şimdi bir (X, d) metrik uzayının fazla yer tutmayan kümelerini tanımlamamız gerekiyor.

Tanım. $A \subset X$ kümesinin hiçbir yerde yoğun olması, A'nın kapanışının içinin boş olması demektir. Sembol ile betimlersek, $\overline{A}^0 = \phi$.

Tam bir metrik uzayı böylesi kümelerin bir dizisi ile örtülemez. Ancak bu önemli sonuçtan önce hiçbir yerde yoğun olma kavramını daha iyi anlamamıza yardımcı olabilecek bir sonuçu öğrenelim :

Önerme.Aşağıdakiler önermeler denktir:

1) A hiçbir yerde yoğundur.

2) $\overline{A}$ kümesi boş olmayan hiçbir açık küme içermez.

3) Boş olmayan her açık küme, $\overline{A}$ kümesini kesmeyen ve boş olmayan açık bir küme içerir.

4) Açık her küme, A kümesini kesmeyen ve boş olmayan açık bir altkümeye sahiptir.

5) Açık her küme, A kümesini kesmeyen açık bir yuvara sahiptir.

Kanıt Pek zor olmayan kanıtı sizlere bırakıyorum.

□

Önerme (A_n) dizisi, tam metrik uzay X de hiçbir yerde yoğun kümeler dizisi ise, hiçbir A_n kümesine ait olmayan bir $x \in X$ öğesi vardır. Başka bir deyişle, $\bigcup A_n \neq X$ dir.

Kanıt X açık ve A_1 hiçbir yerde yoğun olduğundan, tanım ile, yarıçapı r_1 sayısını birden küçük alabileceğimiz bir S_1 açık yuvarı A_1 kümesini kesmeyecek biçimde seçebiliriz. Şimdi F_1, S_1 ile aynı merkeze sahip ancak yarıçapı $r_{1/2}$ olarak alınan kapalı yuvar olsun. iç (F_1) ile F_1 kapalı yuvarının içini gösterelim. Her kümenin içinin de açık ve A_2 kümesi hiçbir yerde yoğun olduğundan, iç (F_1) içinde yarıçapı r_2, $r_2 < 1/2$ olacak biçimde ve üstelik A_2 kümesini de kesmeyen S_2 açık yuvarı bulabiliriz. F_2, S_2 ile aynı merkezli ve yarıçapı $r_2/2$ olan kapalı yuvar ise F_2 nin iç (F_2) ie göstereceğimiz içini düşünelim. Tanımı bir kez daha kullanarak, A_3 kümesi hiçbir yerde yoğun olduğundan, iç (F_2) içinde yarıçapı r_3, $r_3 < 1/4$ olacak biçimde ve yine A_3 kümesini kesmeyen bir S_3 açık yuvarı bulabiliriz. F_3, S_3 ile aynı merkezli ancak yarıçapı, S_3 ün yarıçapının yarısı, yani $r_3/2$ olan kapalı yuvar olarak alınsın.

Bu şekilde devam ederek $d(F_n) \to 0$ sağlayan ve azalan kapalı kümeler dizisi (F_n) elde ederiz. X tam varsayıldığından (F_n) dizisinin arakesitinde bir x öğesi bulalım. $x \in F_n$ olduğundan ve $F_n \subset S_n$ sağlandığından x aynı zamanda her n için S_n kümesinin de öğesi olacaktır. Öte yandan S_n ile A_n kümeleri kesişmediklerinden x hiçbir A_n kümesine ait olamaz.

$\square$

Yukarıdaki Teoremi başka bir şekilde ifade edersek;

Önerme X tam metrik uzay ve $X = \bigcup_n A_n$ ise bir n için A_n kümesinin kapanışının içi boş değildir.

Tanım Hiçbir yerde yoğun olmayan sayılabilir tane kümenin birleşimi olarak yazılabilen kümelere *birinci*-sınıftandır(veya birinci kategoridendir) denir. Birinci sınıftan olmayan kümeler *ikinçi*-sınıftan (veya ikinci kategoridendir)olarak adlandırılırlar.

Baire Teoremi Tam metrik uzaylar ikinci sınıftandır.

Şimdi dikkatinize sunmak istedğim bir nokta var. Anımsarsanız X metrik uzayının heryerde yoğun altkümesi A, $\overline{A} = X$ sağlayan bir kümedir. Hiçbir yerde yoğun olma heryerde yoğun olmanın zıttı değildir. Yani bir küme hiçbir yerde yoğun değilse bu o kümenin heryerde yoğun olduğunu gerektirmez. Ancak kapalı bir F kümesinin hiçbir yerde yoğunluğu için gerekli ve yeterli koşul tümleyeni olan $X - F$ kümesinin yoğunluğudur.

Diğer yandan bir küme bu her iki özelliğe de sahip olmayabilir. Gerçel sayılarda (0,1) kümesinin kapanışı boş olmadığı gibi kapanışının içi de boş değildir.

Aşağıdaki teorem Banach-Steinhaus Teoremi olarak da bilinir.

Düzgün Sınırlılık İlkesi X Banach uzayı, Y normlu bir uzay, $T_n : X \to Y$ sürekli(sınırlı) bir doğrusal dönüşüm dizisi ve her $x \in X$ için $\{T_n(x)\}$, Y uzayında sınırlı ise (T_n) dizisi düzgün sınırlıdır. Yani, bir K sayısı ve her n için $||T_n|| \leq K$ sağlanır.

Kanıt Her n tamsayısı için

$$F_n = \{x \in X : \quad \text{her} \quad i \quad \text{tamsayısı} \quad \text{için} \quad ||T_i(x)|| \leq n\}$$

ile tanımlanan F_n kümeleri,normun sürekli olması ve kapalı kümelerin arakesitlerinin de kapalı olması nedeni ile, X uzayının kapalı kümeleridir. Varsayım gereği

$$X = \bigcup_n F_n$$

sağlanır. X tam metrik uzay olduğundan Baire Teoremi gereğince F_n lerden birinin içi boş olamaz. Buna F_{n_0} diyelim. F_{n_o}, x_0 merkezli, $0 < r$ yarıçaplı bir S_0 kapalı yuvarı içerir. Başka bir deyişle S_0 kapalı yuvarındaki her x öğesi ve her n tamsayısı için $||T_n(x)|| \leq r$ sağlanır. Normlu uzaylara toplama(veya çıkartma) bir homeomorfizma olduğundan $S_0 - x_0$ kümesi 0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvardır. Çapına bölerek elde ettiğimiz $1/r(S_0 - x_0)$ kümesi X uzayının kapalı birim yuvarından başkası değildir. Kuşkusuz, $x_0 \in S_0$ olduğundan, S_0 yuvarındaki her x için

$$||T_n(x - x_0)|| \leq ||T_n(x)|| + ||T_n(x_0)|| \leq 2n_0$$

eşitsizliği

$$||T_n(x)|| \leq 2n_0/r$$

verirki, burada sol tarafta supremum alarak her n için doğru olan

$$||T_n|| \leq 2n_0/r$$

elde ederiz.

□

Şimdi X normlu uzayını ikinci duali içinde düşünerek aşağıdaki sonucu buluruz.

Sonuç A, normlu X uzayının boş olmayan bir altkümesi ise A kümesinin norm'da sınırlı olması için gerekli ve yeter koşul bir K sayısı ve dual uzayının her f öğesi için

$$|f(a)| \leq K$$

sağlamasıdır.

Kanıt Dual uzay X' daki her f için

$$|f(x)| \leq ||f||||x||$$

sağlandığından, eğer A normda sınırlı ise $f(A)$ nın gerçel sayılarda sınırlılığını elde ederiz. Ters yönü görmek için, Alaoğlu Teoreminin kanıtında yaptığımız gibi X uzayının öğelerini $\{x_\alpha\}$ ağı gibi düşüneceğiz ve X uzayının X'' içine gömen: $x_\alpha \to F_{x_\alpha}$ dönüşümünü düşüneceğiz. Anımsarsanız buradaki $F_{x_\alpha} \in X''$ fonksiyoneli X' deki her f için $F_{x_\alpha}(f) = f(x_\alpha)$ olarak tanımlanmıştı. Şimdi varsayım olan her $f \in X'$ için $f(A)$ kümesinin sınırlılığı ve X' uzayının tamlığını Düzgün Sınırlılık İlkesinde kullanarak (F_{x_α}) kümesinin X'' içinde sınırlılığına hükmederiz. Artık anımsamamız gereken tek şey X uzayının X'' içine gömen dönüşümün norm koruyan olmasıdır.

$\square$

Bir metrik uzayda (dolayısı ile normlu uzaylarda da) yakınsayan her dizi sınırlıdır. Bu gözlem bize aşağıdaki sonuçu verir.

Sonuç X Banach uzayı, $(T_n) \subset L(X,Y)$ uzayı içinde her $x \in X$ için noktasal yakınsayan bir dönüşüm dizisi ise bir K sayısı için $||T_n|| \leq K$ sağlanır.

Y uzayının tam olması durumunda X uzayından Y uzayına giden sürekli dönüşümlerin uzayı $L(X,Y)$ nin norm topolojide tam olduğunu ilk kısımdan biliyoruz. Şimdi bu uzayın daha zayıf olan kuvvetli yakınsama topolojisine göre de tam olduğunu kanıtlıyacağız.

Bu topolojide bir (T_n) dizisinin T dönüşümüne yakınsaması her $x \in X$ için $T_n(x) \to T(x)$ olarak betimlenir.

Sonuç X, Y Banach uzayları ise $L(X,Y)$ uzayında kuvvetli (noktasal yakınsama) topolojide her Cauchy dizisi yakınsar.

Kanıt (T_n), noktasal yakınsama topolojisinde bir Cauchy dizisi ise, Y tam olduğundan her $x \in X$ için $limT_n(x)$ vardır. Dolayısı ile

$$T(x) = lim_n(T_n(x))$$

ile tanımlanan T dönüşümü X uzayından Y uzayına doğrusal bir dönüşüm tanımlar. Geriye kalan tek şey, tanımlanan T dönüşümünün sürekliliğidir. Düzgün Sınırlılık İlkesinden, bir K sayısı ve her n için

$$||T_n|| \leq K$$

elde ederiz. Şimdi her n tamsayısı ve her $x \in X$ için

$$||T_n(x)|| \leq ||T_n||||x|| \leq K||x||$$

doğru olduğundan, sol tarafta n üzerinden limit alarak, her $x \in X$ için

$$lim_n||T_n(x)|| \leq K||x||$$

buluruz. Normlu her uzayda norm sürekli olduğundan, limiti yukarıdaki eşitsizlikte içeri alarak elde edeceğimiz

$$||T(x)|| \leq K||x||$$

eşitsizliği her $x \in X$ için doğru olduğundan, T dönüşümü süreklidir.

$\square$

Önerme X, Y Banach uzayları $T : X \to Y$ sürekli ve üzerine doğrusal bir dönüşüm ise X uzayında 0 merkezli her açık yuvarın T altında görüntüsü, Y uzayında sıfır merkezli açık bir yuvar içerir.

Kanıt S_r ve S'_r, sırası ile X ve Y uzaylarında 0 merkezli r yarıçaplı açık yuvarlar olsunlar.T nin doğrusallığından

$$T(S_r) = rT(S_1) = T(rS_1)$$

olduğundan, $T(S_1)$ kümesinin bir S'_r açık yuvarını içerdiğini göstermek yeterli olacaktır. Bu amaçla önce $\overline{T(S_1)}$ kümesinin bir S'_r açık yuvarını içerdiğini kanıtlamaya çalışalım.

T üzerine olduğundan

$$Y = \bigcup_n T(S_n)$$

eşitliğinde Baire Teoremi kullanarak bir n tamsayısı için $\overline{T(S_n)}$ kümesinin içinin boş küme olmadığına hükmederiz. Böylelikle bulduğumuz iç noktaya y_0 adını takalım. Genellikten kaybetmeden y_0 noktasını $T(S_n)$ kümesinden alabiliriz.

$y \to (y - y_0)$ dönüşümü Y uzayından yine Y uzayına örten bir dönüşümdür. y_0 öğesi $T(S_n)$ kümesinin bir öğesi olduğundan $\overline{T(S_n)} - y_0$ kümesi orijin noktasını bir iç nokta olarak içerir. Diğer yandan $y_0 \in T(S_n)$ alındığından

$$T(S_n) - y_0 \subseteq T(S_{2n})$$

ve buradan da

$$\overline{T(S_n) - y_0} = \overline{T(S_n) - y_0} \subseteq \overline{T(S_(2n))}$$

elde ederizki, bu orijin noktasının $\overline{T(S_{2n})}$ kümesinin bir iç noktası olmasını verir. Bir sayı ile çarpma normlu uzaylarda homomorfizma olduğundan

$$\overline{T(S_{2n})} = 2n\overline{T(S_1)} = 2n\overline{T(S_1)}$$

ve buradan da orijinin $\overline{T(S_1)}$ kümesinin bir iç noktası olduğuna hükmederiz. Bu ise bir $\epsilon > 0$ sayısı için

$$S_\epsilon \subseteq \overline{T(S_1)}$$

demektir. Kanıtı

$$S_\epsilon \subseteq T(S_3)$$

olduğunu veya buna denk olan

$$S_{\epsilon/3} \subseteq T(S_1)$$

olduğunu göstererek bitireceğiz. Bu bağlamda $||y|| < \epsilon$ sağlayan $y \in Y$ alalım. $S_\epsilon \subseteq \overline{T(S_1)}$ sağlandığından $y \in \overline{T(S_1)}$ olacaktır. Bu nedenle $||x_1|| < 1$, $||y - y_1|| < \epsilon/2$ ve $T(x_1) = y_1$ özelliklerini sağlayan $x_1 \in X$ seçebiliriz. $S_\epsilon \subseteq \overline{T(S_1)}$ içermesini bir kez daha kullanarak elde edilen

$$S_{\epsilon/2} \subseteq \overline{T(S_{1/2})}$$

içermesini kullanarak $||x_2|| < 1/2$, $||(y - y_1) - y_2|| < 3/4$ ve $T(x_2) = y_2$ sağlayan $x_2 \in X$ buluruz. Bu şekilde devamla her n tamsayısı için

$$||x_n|| < 1/2^{n-1}$$

$$||y - (y_1 + y_2 + ... + y_n)|| < \epsilon/2^n$$

ve

$$y_n = T(x_n)$$

koşullarını sağlayan (x_n) dizisi buluruz. Eğer s_n ile $x_1 + x_2 + ... + x_n$ toplamını gösterirsek, $||x_n|| < 1/2^{n-1}$ olmasından ve

$$||s_n|| \leq \sum ||x_i|| \leq 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/2^{n-1} < 2$$

eşitsizliğinden (s_n) dizisinin X uzayı içinde Cauchy dizisi olduğunu ve bu uzayın tam olmasından da (s_n) dizisinin bir x limitine yakınsadığını elde ederiz. Şimdi normun sürekliliğini kullanarak

$$||x|| = ||lim_n s_n|| = lim_n ||s_n|| \leq 2 < 3$$

buluruzki, bu $x \in S_3$ demektir. Şimdi de T dönüşümünün sürekliliğini kullanarak

$$T(x) = T(\lim_{ns_n}) = \lim_n T(s_n) = \lim_n (y_1 + y_2 + ... + y_n) = y$$

ve dolayısı ile istenildiği gibi $y \in T(S_3)$ elde ederiz.

$\square$

Teorem (Açık Dönüşüm Teoremi) X, Y Banach uzayları, $T : X \to Y$ sürekli ve üzerine bir dönüşüm ise T açık, yani açık kümeleri açık kümelere gönderen bir dönüşümdür.

Kanıt U, X uzayının açık bir kümesi olsun. Kanıtlanması gereken $T(U)$ kümesinin Y uzayında açık küme olduğudur. $y \in T(U)$ alalım ve $T(x) = y$ olacak biçimde $x \in U$ seçelim. U açık ve toplama homomorfizma olduğundan orijin etrafındaki r yarıçaplı bir S_r açık yuvarı için $x + S_r \subseteq U$ sağlanacaktır. Bir önceki Önermeyi kullanarak

$$S_{r_1} \subset T(S_r)$$

sağlayan S_{r_1} açık yuvarını bulabiliriz. Şimdi $y + S_{r_1}$, y öğesini içeren açık bir yuvar olduğu gibi

$$y + S_{r_1} \subseteq y + T(S_r) = T(x) + T(S_r) = T(x + S_r) \subseteq T(U)$$

eşitsizliği de sağlanır.

$\square$

Sonuç İki Banach uzayı arasında bire-bir ve üzerine sürekli doğrusal bir dönüşüm homomorfizmadır.

Dolayısıyla bir Banach uzayı üzerinde bire-bir ve üzerine sürekli dönüşümün tersi otomatik olarak süreklidir. Açık Dönüşüm Teoreminin uygulaması olarak bir Banach uzayı üzerindeki projeksiyonları ele alacağız.

Tanım Bir X Banach uzayı üzerinde tanımlı ve $P^2 = P$ eşitliğini sağlayan doğrusal dönüşüme projeksiyon denir.

X uzayı üzerindeki P projeksiyonu doğal olarak iki altuzay betimler. Bunlardan biri P nin görüntü uzayı $M = P(X) = \{x : P(x) = x\}$, diğeri ise P nin çekirdeği olarak isimlendirilen $N = P^{-1}(0) = \{x : P(x) = 0\}$ altuzaylarıdır. M, N altuzayları birbirlerini kesmedikleri gibi $X = M + N$ vardır.

Ancak yukarıda ifade edilmeye çalışılan hususun tersi de doğrudur. Yani, M ve N toplamları X olan ve birbirlerini sadece o'da kesen iki altuzay ise görüntü uzayı M, çekirdeği N olan bir P projeksiyonı tanımlanabilir. Yapılacak şey : eğer $x = y + z$, $y \in M$ ise $P(x) = y$ olarak tanımlamaktır. Böylece M P projeksiyonunun görüntü uzayı, N de çekirdeği olacaktır.

Bu nedenle bir X Banach uzayı üzerindeki projeksiyonlar ile birbirlerini sadece 0 da kesen ve toplamları X olan altuzay çiftleri aynı şeylerdir. Banach uzayları üzerindeki projeksiyonların ayrıca sürekli olmaları da istenen bir özelliktir.

Teorem P, Banach uzayı X üzerinde $P^2 = P$ sağlayan sürekli dönüşüm, M görüntü, N çekirdek uzayları ise M, N kapalı altuzaylardır ve, $M \cap N = 0$ ve $M + N = X$ sağlanır.

Kanıt P nin sürekliliği ve $P^{-1}(0) = N$, N altuzayının kapalılığını hemen verir. Görüntü kümesi M nin kapalılığı ise

$$M = \{P(x) : x \in X\} = \{x : P(x = x\} = \{x : (I - P)x = o\}$$

ve $I - P$ dönüşümünün sürekliliğinden elde edilir.

$\square$

Tanım Eğer X uzayı birbirlerini sadece sıfırda kesen M, N altuzaylarının toplamı ise, başka bir deyişle her $x = m + n$, $m \in M$ ve $n \in N$ olacak biçimde yazılabilirsa X uzayı M ve N altuzaylarının direk toplamıdır denir ve $X = M \oplus N$ yazılır.

Teorem X Banach uzayı M, N kapalı altuzaylar ve $X = M \oplus N$ ise $x = y + z$ $y \in M, z \in N$ olmak üzere $P(x) = y$ ile tanımlanan dönüşüm görüntü uzayının M, çekirdeğin N olduğu sürekli bir projeksiyondur.

Kanıt X uzayı üzerinde

$$||x||_0 = ||y|| + ||z||$$

ile yeni bir norm tanımlıyalım. Bu yeni normla donanmış X uzayını X_0 ile gösterelim. X_0 uzayı bir Banach uzayıdır. Her $x \in X$ için ;

$$||P(x)|| = ||x|| \leq ||y|| + ||z|| = ||x||_0$$

sağlandığından $P : X_0 \to X$ dönüşümü süreklidir. Şimdi geriye kalan tek şey X ve X_0 Banach uzaylarının aynı, yani aralarında bir homomorfizma olduğudur. Aradığımız homomorfizmayı bulmak için X ve X_0 arasındaki özdeşlik operatörü (birim operatörü) I dönüşümünü düşünelim: Yani;

$$I : X_0 \to X, I(x) = x$$

ise

$$||I(x)|| = ||y + z|| \leq ||y|| + ||z|| = ||x||_0$$

dolayısı ile I bire-bir, üzerine, sürekli ve Açık Dönüşüm Teoremin bir sonuçu olarak, tersinin de sürekli olduğu bir dönüşüm olduğundan, aranılan homomorfizmadır.

□

Açık Dönüşüm Teoreminin uygulaması olarak bazı çok özel projeksşyonları ele alaçağız.

Tanım Eğer bir Banach uzayı X de her $x \in X$, bir (x_n) dizisin $x = Schauderbaz$ı yazımı sağlayan ve her x için tek (a_n) gercel sayılar dizisi varsa (x_n) dizisine Schauder bazı denir.

Şimdi (x_n) Schauder bazına sahip $X, ||.||$ Banach uzayı alalım. Her x için tanımlıyabileceğimiz $|||x||| = sup_n || \sum_{i=1}^{n} ||$ sonlu bir sayıdır. Hatta $|||.|||$, X üzerinde bir norm olup $||x|| \leq |||x|||$ her $x \in X$ için sağlanır.Bir alıştırma olarak sizlere bırakacağım gerçeğe göre X,$|||.|||$ normunda da tamdır. Dolayısı ile Açık Dönüşüm Teoreminden $||.||ve|||.|||$ normları X üzerinde denk normlerdır. Buradan Classical Banach Spaces I,Lindenstrauss ve Tzafriri,kitabının ilk Teoremini elde etmiş sayılırız.

Teorem X Schauder bazı (x_n) sahip Banach uzayı olsun. Her n tamsayısı için $P_n : X \to X$ile göstereceğimiz ve $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n}$ dönüşümleri sürekli doğrusal projeksiyonlar olup $sup_n||P_n|| < \infty$.

M Banach uzayı X in kapalı bir altuzayı olsun. Süreklilik koşulunu kaldırırsak görüntü uzayı M olan bir projeksiyon her zaman bulunabilir. Hatta bazen birden fazlada projeksiyon bulunabilir. Ancak bu projeksiyonların hiçbiri sürekli olmayabilir. Yukarıdaki gözlemlerin ışığında, bu

$$X = M \oplus N$$

koşulunu sağlayan kapalı altuzay N nin var olmayabileceğini söyler. Ancak Hilbert uzayları olarak anılan uzaylarda kapalı her altuzay üzerine sürekli projeksiyon dönüşümü vardır.

X ve Y Banach uzayları olsun. $X \times Y$ uzayı $x \in X, y \in Y$ olmak üzere (x, y) çiftlerinin uzayıdır. $X \times Y$ uzayının bir vektör uzayı yapısı taşıdığını doğrusal cebirden biliyoruz. Şimdi $X \times Y$ uzayına metrik koymaya çalışaçağız.

$$d\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = maksimum\{||x_1 - x_2||, ||y_1 - y_2||\}$$

Buradaki maksimumu "maks" diye kısaltacağız. Yukarıda tanımlanan d gerçekten bir metriktir ve bu metriğin $X \times Y$ uzayında doğurduğu topoloji çarpım topolojisidir. Üstelik bu metrikte yakınsama koordinatlarda yakınsamadır. Bu kocaman kocaman cümleleri hemen geçiyoruz ama gerekli donanıma sahipseniz lütfen kanıtlamayı ihmal etmeyin!

Şimdi $T : X \to Y$ dönüşümü doğrusal olsun. T nin grafiği $X \times Y$ uzayının $(x, T(x))$ çiftlerinden oluşan altuzayıdır. T dönüşümü sürekli ise T nin grafiği $X \times Y$ uzayının kapalı bir altuzayıdır.

Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu veren teoremi öğreneceğiz.

Teorem(Kapalı Grafik Teoremi) X, Y Banach uzayları, $T : X \to Y$ doğrusal bir dönüşüm ise T nin sürekliliği için gerekli ve yeterli koşul T nin grafiğinin $X \times Y$ içindeki kapalılığıdır.

Kanıt X üzerinde $||x||_1$ ile göstereceğimiz ve

$$||x||_1 = ||x|| + ||T(x)||$$

ile tanımlanan yeni normu ele alalım. X nin $||.||_1$ ile donanmış halini X' ile gösterelim. Kuşkusuz

$$||T(x)|| \leq ||x|| + ||T(x)|| = ||x||_1$$

olduğundan $T : X' \to Y$ dönüşümü süreklidir. Dolayısı ile teoremin bir yönünü kanıtlamak için yapılması gereken X ve X' uzaylarının "aynı" olduklarını göstermektir. Vektör uzayı olarak aynı olduklarından, topolojilerinin de aynı olduklarını göstermek yeterli olacaktır. Şimdi özdeşlik operatörü $I : X' \to X$ düşünelim. Ancak

$$||x|| \leq ||x|| + ||T(x)|| \leq ||x||_1$$

sağlandığından I süreklidir. X' uzayının tam olduğunu gösterebilirsek Açık Dönüşüm Teoremini kullanarak I dönüşümünün tersinin de sürekli olduğunu elde edebiliriz. Kullanacağımız teknik bu olacak. X' uzayının tam olduğunu göstermek için yapmamız gereken belli. Buradan alacağımız (x_n) dizisinin yakınsadığını gösterebilmemiz yeter. Ancak (x_n) dizisi X' uzayında Cauchy dizisi ise T nin sürekliliği ve X' uzayındaki normun tanımından, (x_n) ve (Tx_n) dizilerinin X ve Y uzaylarında Cauchy olduğunu elde ederiz. Bu uzayların her ikisi de tam olduklarından (x_n) bir x, $(T(x_n))$ de bir y öğesine yakınsayacaklardır. Varsayım gereği T nin grafiği $X \times Y$ uzayında kapalı olduğundan (x, y) çifti T nin grafiğinde olacak, bu ise $y = T(x)$ gerektirecektir.

$$||x_n - x||_1 = ||x_n - x|| + ||T(x_n - x)|| = ||x_n - x|| + ||Tx_n - Tx|| = ||x_n - x|| + ||Tx_n - y||$$

eşitliğinden (x_n) dizisinin limitinin x olduğunu görüyoruz.

$\square$

Grafiğin kapalı olması her zaman süreklilik gerektirmez. Başka bir deyişle Kapalı Grafik Teoremindeki Tanım ve değer uzaylarının Banach uzayları olmaları vazgeçilemezdir. Bunu vurgulamak için aşağıdaki klasik örneği vereceğim.

Örnek X, Y uzayları alışılagelmiş norm ve vektör uzayı yapıları ile $[0, 1]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı $C[0, 1]$ olsun. D ile sürekli fonksiyonlar içinde türevlerinin de sürekli olduğu fonksiyonları gösterelim. D sürekli fonksiyonların indirgediği yapı ile bir vektör uzayıdır. Aynı şekilde sürekli fonksiyonlar üzerindeki normu D ye kısıtladığımızda D normlu bir uzay olur. T ise türev dönüşümü olsun. Göstereceğimiz şey türev dönüşümünün grafiğinin kapalı olmasına karşın sürekli(sınırlı)olmadığıdır.

$f_n(t) = t^n$ fonksiyonları her n için türevlenebilirlerdir ve türevleri olan $T(f_n)(t) = nt^{n-1}$ de bir polinom olup sürekli olduğundan (f_n) dizisi D altuzayındadır. Diğer yandan f_n fonksiyonlarının normunu hesaplarsak bunların $||f_n|| = 1$, türevlerinin normlarını ise, her n tamsayısı için $||Tf_n|| = n$ olarak buluruz. Şimdi T dönüşümünün dönüşüm normu normu bir olan öğeler üzerinde aldığı norm değerlerin supremumu olduğundan

$$||T|| \geq sup||T(f_n)|| = n$$

ve bu eşitsizlik her n tamsayısı için doğru olduğundan $||T||$ sınırlı değildir. Şimdi T dönüşümünün grafiğinin kapalı olduğunu göreceğiz. Ancak bundan önce $C[0, 1]$ uzayında normda yakınsamanın düzgün yakınsama olduğunu hatırlatmak isterim. Eğer (g_n) fonksiyon dizisi D altuzayında bir dizi ve

$$g_n \to g, T(g_n) \to h$$

ise düzgün yakınsayan sürekli türevlenebilir bir fonksiyon dizisinin limiti de sürekli ve türevlenebilir olduğundan $T(g) = h$, başka bir deyişle, T türev dönüşümünün grafiği kapalıdır elde ederiz. Bu da istediğimiz grafiği kapalı ancak sürekli(sınırlı) olmayan bir dönüşüm örneği olur.

$\square$

Şimdi Kapalı Grafik Teoreminin farklı bir uygulaması olarak l^p dizi uzaylarından değerlerini l_∞ sınırlı diziler uzayında alan kimi dönüşümleri betimlemeye çalışacağız. Hemen hatırlayalım l^p uzayları

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty, 1 \leq p < \infty$$

başka bir deyişle p-inci kuvvetleri mutlak yakınsayan gerçel veya karmaşık $x = (x_i)$ dizilerinin uzaylarıdır. l^p uzayında vektör uzayı işlemleri kordinatlarda yapılır, norm ise

$$||x||_p = \{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\}^{1/p}$$

olarak tanımlanır. Çözmeye çalışacağımız problem tam olarak şudur ; l^p deki her $x = (x_n)$ dizisi için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \alpha_k| < \infty$$

koşulunu sağlayan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ dizilerinin q sayısı, $1/p+1/q = 1$ sağlamak üzere l^q uzayında olduklarını kanıtlayacağız.
l^p uzayındaki her x ve her i tamsayısı için,yakınsayan bir serinin kismi toplamları olarak tanımlanan

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k x_k \qquad i = 1, 2, ...$$

$(\eta_i)_i$ dizisi sınırlıdır. Bu nedenle

$$(x_k) \to (\eta_k)$$

ilişkisine l^p uzayı ile l_∞ uzayı arasında doğrusal bir dönüşüm olarak bakabiliriz. Şimdi yapmak istediğimiz şey bu doğrusal dönüşümün, ki artık bu dönüşümü T ile göstereceğiz, grafiğinin kapalı olduğudur. Bunun için l^p uzayındaki (x_n) dizisinin yine l^p uzayındaki x vektörüne yakınsadığını , $T(x_n)$ dizisinin ise l_∞ uzayında bir $z = (\xi_i)_i$ vektörüne yakınsadığını varsayalım. l^p de olduğunu varsaydığımız her x_n nin ise $x_n = (\zeta_k^n)_k$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $(Tx_n)_n$ dizisinin z vektörüne l_∞ uzayında yakınsaması demek n

büyürken $(\sum_{k=1}^{i}\alpha_k\zeta_k^n)_i$ toplamlarının düzgün olarak ξ_i ye yakınsaması demektir.

Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$|\sum_{k=1}^{i}\alpha_k\zeta_k^n-\sum_{k=1}^{i}\alpha_k\xi_k^n| \le (\sum_{k=1}^{i}|\zeta_k^n-\xi_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^{i}|\alpha_k|^q)^{1/q} \le ||x_n-x||(\sum_{k=1}^{i}|\alpha_k|^q)^{1/q}$$

(x_n) dizisi x e yakınsadığından ve limitlerin tekliğinden

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{i}\alpha_k\zeta_k$$

elde edilir ve bu da $Tx=z$ verir. T nin grafiğinin kapalı olmasından Kapalı Grafik Teoremi ile T nin sürekliliği elde edilir. T nin sürekliliğinden de l^p deki her x ve her i tamsayısı için

$$|\sum_{k=1}^{i}\alpha_k\zeta_k^n| \le ||T||(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k^n|^p)^{1/p} \quad (*)$$

Elde ettiğimiz bu eşitsizliği l^p uzayındaki bazı özel x vektörleri için kullanalım. Örneğin $x=(\zeta_k)$ vektörünü ,i tamsayısına kadar

$$\zeta_k=\overline{\alpha_k}|\alpha_k|^{q-2} \quad \alpha_k\neq 0$$

i tamsayısından sonra ise

$$\zeta_k=0$$

olarak seçersek, k tamsayısının $1\le k\le i$ değerleri için

$$\alpha_k\zeta_k=|\zeta_k|^p=|\alpha_k|^q$$

elde ederiz. $(q-1)p=q$ olduğunu anımsayıp, bunları yukarıdaki (*) eşitliğinde yerine koyarsak

$$\sum_{k=1}^{i}|\alpha_k|^q \le ||T||(\sum_{k=1}^{i}|\alpha_k|^q)^{1/p}$$

ve buradan da her i tamsayısı için doğru olan

$$(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q)^{1/q} \leq ||T||$$

edelirki, bu (α_k) dizisinin l^q uzayında olması demektir.

□

Sürekli türevlenebilir fonksiyonlara ilişkin ilginç bir ornek daha vermek istiyorum.

Örnek E, $C[0,1]$ uzayının öğeleri birinci türevlerinin sürekli olduğu kapalı bir altuzayı olsun. Bu durumda E sonlu boyutludur. Daha öncede sözü geçmişti, normlu bir uzay E nin sonlu boyutlu olması için gerekli ve yeterli koşul kapalı birim yuvarı B_E nin norm topolojide kompakt olmasıdır. Bizde bunu kullanacağız. Yine $T(f) = f'$ ile göstereceğimiz türev dönüşümünü;

$$T : E \to C[0,1]$$

arasında düşüneceğiz.f_n ve f fonksiyonları E altuzayının öğeleri, $g \in C[0,1]$ ve $f_n \to f$, $T(f_n) = f'_n \to g$ ise ve buradaki yakınsama düzgün yakınsama olduğundan $g = f'$ elde ederizki bu T türev dönüşümünün grafiğinin $E \times C[0,1]$ uzayında kapalı olduğunu verir. E ve $C[0,1]$ Banach uzayı olduklarından,Kapalı Grafik Teoremi gereğince T, E ve $C[0,1]$ uzayları arasında sürekli bir dönüşümdür. E uzayının kapalı birim yuvarı B_E kuşkusuz sınırlı bir kümedir. B_E nin kompakt olduğunu göstermek için $C[0,1]$ uzayının kompakt kümelerini betimleyen ünlü Ascoli-Arzela teoremine göre B_E nin bir de eşsürekli olduğunu kanıtlamamız gerekir. Burada da yardımımıza Ortalama-Değer Teoremi koşuyor. f fonksiyonu B_E nin keyfi bir öğesi ,x, y ise $[0,1]$ aralığının keyfi öğeleri ise ; Ortalama-Değer Teoremi gereğince bulunabilecek $c \in [0,1]$ için ;

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq ||f'|||x-y|| \leq ||T(f)|||x-y| \leq ||T||||f|||x-y| \leq ||T|||x-y|$$

bize B_E nin eşsürekli ve sınırlı yani kompakt olduğunu verir.B_E kompakt olduğundan E sonlu boyutludur.

□

Notlarımızı Kapalı Grafik Teoreminin bir uygulaması ile bitireceğiz. Schauder bazı kavramını Açık Dönüşüm Teoreminden heman sonra tanımlamıştık. Artık Schauder bazı yerine sadece baz kullanaçağız.

Tanım Eğer bir (x_n) dizisi gerdiği kapalı altuzay için baz ise (x_n) dizisine temel dizidir denir.

Şimdi (x_n) dizisi X Banach uzayında temel bir dizi olsun.Başka bir Banach uzayı Y nin (y_n) dizisinin (x_n) dizisine denk olması demek her sonlu sayı kümesi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ için

$$K||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i|| \leq M \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

eşitsizliğini sağlayan K, M sayılarının varolmasıdır. (y_n) dizisi temel dizi (x_n) dizisine denk ise (y_n) dizisi de temel bir dizidir. Kapalı Grafik Teoremi uygulanarak

$$T(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

formülü ile tanımlanan T dönüşümünün (x_n) dizisinin gerdiği kapalı altuzay ile (y_n) dizisinin gerdiği kapalı altuzay arasında sürekli,tersinir ve tersinin de sürekli olduğu üzerine bir dönüşümolduğu görülür.

ALIŞTIRMALAR

1)X Banach ,Y normlu uzaylar,$(T_n) \subset L(X,Y)$, X deki her x için $lim_n T_n(x) = T(x)$ varsa bu şekilde tanımlanan T dönüşümünün sürekli olduğunu gösteriniz.

2)l_1 uzayı üzerinde $f(x) = (\sum x_n)$ ile tanımlanan fonksiyonelin doğrusal olduğunu ancak l_1 üzrinde $||x|| = sup_n |x_n|$ ile tanımlanan norma göre sürekli olmadığını gösteriniz.

3)Sup normu ile donanmış süreli fonksiyonlar $C[a,b]$ uzayında sabit bir sürekli $x = x(t)$ fonksiyonu için

$$F(y) = \int_a^b y(t)x(t)dt$$

ile tanımlanan fonksiyonelin sınırlı ve normunu bulunuz.

4) Normlu bir uzayın dualindeki her f fonksiyoneli için $f(x) = f(y)$ ise $x = y$olduğunu gösteriniz.

5)f, X vektör uzayının dualinde sıfırdan farklı bir fonksiyonel, N bu fonksşyonelin çekirdeği ise X uzayındaki her x vektörünün $z \in N$ olmak üzere bir α sayısı için $x = \alpha y + z$ biçiminde yazılabileceğini gösteriniz.

6) X normlu bir uzay, $\{x_1, ...x_n\}$ sonlu tane öğe ise bir y vektörünün sonlu tane öğe tarafından gerilen altuzayda olması için gerek ve yeter koşulun $\{x_1, ...x_n\}$ tarafından gereilen uzay üzerinde sıfır olan her fonksiyonelin y üzerinde de sıfır olmasıdır.

7) Bir vektör uzayı üzerinde aynı çekirdeğe sahip iki fonksiyonel f, g için $f = \alpha g$ olması gerektiğini gösteriniz.

8) Yansımalı birBanach uzayının kapalı altuzaylarının da yansımalı olduğunu gösyteriniz.

9) yakınsıyan dizilerin c uzayının Banach uzayı olduğunu gösteriniz.

10) c ve c_0 uzaylarının yansımalı olmadıklarını gösteriniz.

11) l_1 uzayının dualinin l_∞ olduğunu gösteriniz.

12) l_p, $1 < p < \infty$ uzaylarının yansımalı olduklarını gösteriniz.

13)X normlu uzayında x_n dizisi zayıf topolojide x öğesine yakınsıyorsa

$$||x|| \leq lim_k sup_{n \geq k} ||x_k||$$

gösteriniz. 14)X, Y normlu uzaylar $T : X \to Y$ T ve T^{-1} dönüşümlerinin sürekli olduğu üzerine bir izomorfizma ise

$||T^{-1}|| \geq ||T||^{-1}$ gösteriniz.

15)X normlu,Y Banach uzayı $T : X \to Y$ T ve T^{-1} dönüşümlerinin sürekli olduğu üzerine bir dönüşüm ise X uzayının da Banach uzayı olduğunu gösteriniz.

16)X, Y normlu uzaylar,$X \neq 0$ ve $L(X, Y)$ tam ise Y uzayının da tam olduğunu gösteriniz.

17) l_1 uzayında zayıf topolojide ve norm topolojide yakınsamanın aynı olduğunu gösteriniz.

18) X, Y normlu uzaylar $x \neq 0$ ve bir λ sayısı için $T(x) = \lambda x$ sağlanan T dönüşümü için $||T|| \geq |\lambda|$ olduğunu gösteriniz.

19) Banach-Steinhaus teoreminin X uzayının tam olmaması durumunda doğru olmadığını örnekleyiniz.

20)$(X, ||.||)$ bir Banach uzayı ,$||.||_0$ bu uzay üzerinde X uzayını tam kılan başka bir norm ve bu iki normdan biri diğerinden daha kuvvetli ise iki normun denk olduğunu gösteriniz.