Tansör Çarpımı vb.

Ali Nesin

1. Temel Problem. A ve B, iki toplamsal (demek ki abelyen) grup olsun[1]. $A \times B$'den bir başka abelyen gruba giden bir u fonksiyonu, eğer her a, a_1, $a_2 \in A$ ve b, b_1, $b_2 \in B$ için,

$$u(a_1 + a_2, b) = u(a_1, b) + u(a_2, b)$$

ve

$$u(a, b_1 + b_2) = u(a, b_1) + u(a, b_2)$$

eşitliklerini sağlıyorsa, u'ya ***çifte toplamsal fonksiyon*** ya da ***çifte $\mathbb{Z}$-doğrusal fonksiyon*** adı verilir. Elbette çifte toplamsal bir u fonksiyonu, her $n, m \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için

$$u(a, 0) = u(0, b) = 0,$$
$$u(na, mb) = nm \cdot u(a, b)$$
$$u(-a, b) = u(a, -b) = -u(a, b)$$

eşitliklerini sağlar.

Örnek 1. $f(a, b) = 0$ olarak tanımlanan sıfır fonksiyonu her zaman çifte toplamsaldır.

Örnek 2. Eğer R herhangi bir halkaysa, $f(a, b) = ab$ kuralıyla tanımlanan $R \times R$'den R'ye giden fonksiyon $R^+ = (R, +, 0)$ grubu için çifte toplamsaldır.

R bir halka, M_R bir sağ R-modül ve $_RN$ bir sol R-modül olsun. (Eğer R değişmeli bir halkaysa sağ ya da sol modülün farketmediğini okura anımsatalım, çünkü her M sol R-modülü için, $mr = rm$ tanımı M'yi doğal olarak bir sağ R-modül yapar; aynı şey değişmeli olmayan halkalar için doğru değildir.) $M \times N$'den bir abelyen gruba giden çifte toplamsal bir f fonksiyonu, her $m \in M$, $n \in N$, ve $r \in R$ için

$$f(mr, n) = f(m, rn)$$

eşitliğini sağlıyorsa, o zaman f'ye ***dengeli fonksiyon*** ya da ***R-dengeli fonksiyon*** adı verilir.

Örnek 1. Eğer R herhangi bir halkaysa, $M = R_R$ ve $N = {}_RR$ olsun. O zaman, $f(a, b) = ab$ kuralıyla tanımlanan $R \times R$'den R'ye giden f fonksiyonu dengelidir.

Örnek 2. Eğer $R = \mathbb{Z}$ ise her çifte toplamsal fonksiyon dengelidir, yukardaki ekstra koşula ayrıca gerek yoktur.

Bu yazıda şu "evrensel" problemi çözmeye çalışacağız:

Problem: *Öyle bir $M \otimes_R N$ abelyen grubu ve dengeli*

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$$

fonksiyonu var mıdır ki, ***her*** A *abelyen grubu ve* ***her*** *dengeli*

$$f : M \times N \to A$$

fonksiyonu için,

$$g \circ \otimes = f$$

eşitliğini sağlayan ***bir ve bir tane*** (*burası önemli*)

$$g : M \otimes_R N \to A$$

grup homomorfizması olsun?

Tanımı açıklayıcı şekil aşağıda.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\forall f"] \arrow[d, "\otimes"'] & A \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dotted, "\exists!\, g"'] & \end{tikzcd}$$

Birazdan böyle bir $M \otimes_R N$ abelyen grubu ve dengeli bir $\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$ fonksiyonu olduğunu kanıtlayacağız. Bu durumda, $m \in M$ ve $n \in N$ için, $\otimes(m, n)$ yerine, daha kullanışlı olan $m \otimes n$ yazılır. $\otimes$ fonksiyonunun dengeli olması demek, her $m \in M$, $n \in N$, $r \in R$ için,

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n,$$
$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2,$$
$$mr \otimes n = m \otimes rn$$

eşitliklerin sağlanması demektir. Ayrıca, bu yazılımla, $\otimes$ dengeli fonksiyonundan tanımda istenen özellik, her dengeli

$$f : M \times N \to A$$

fonksiyonu ve her $m \in M$, $n \in N$ için,

$$g(m \otimes n) = f(m, n) \qquad (1)$$

eşitliğinin sağlanması olarak ifade edilir.

Eğer yukardaki özelliği sağlayan $M \otimes_R N$ abelyen grubu ve dengeli bir

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$$

fonksiyonu varsa (ki olduğunu göreceğiz), bunlardan birazdan açıklayacağımız anlamda bir tanecik vardır. Nitekim, eğer

$$M \otimes'_R N$$

1 Bu yazıdaki tüm abelyen gruplar toplamsal yazılacak. Ayrıca, bu yazıda, abelyen grupların $\mathbb{Z}$-modül olarak algılanması yararlı olabilir.

ve

$$\otimes' : M \times N \to M \otimes'_R N$$

bu özelliği olan ikinci bir $(M \otimes'_R N, \otimes')$ çifti ise, o zaman,

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[d, "\otimes"'] & M \otimes'_R N \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\otimes'"'] & M \otimes_R N \\ M \otimes'_R N \arrow[ur, dashed, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

diagramlarını değişmeli yapan biricik

$$g' : M \otimes'_R N \to M \otimes_R N$$

ve

$$g : M \otimes_R N \to M \otimes'_R N$$

grup homomorfizmaları vardır. O zaman,

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\otimes"'] & M \otimes_R N \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "g' \circ g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[d, "\otimes'"'] & M \otimes'_R N \\ M \otimes'_R N \arrow[ur, dashed, "g \circ g'"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramları da değişmeli olur. Öte yandan, elbette,

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\otimes"'] & M \otimes_R N \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Id}_{M \otimes_R N}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[d, "\otimes'"'] & M \otimes'_R N \\ M \otimes'_R N \arrow[ur, dashed, "\mathrm{Id}_{M \otimes'_R N}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmelidir. Ama tanımdan dolayı bu tür diyagramları değişmeli yapan tek bir grup morfizması olmalı. Demek ki,

$$g \circ g' = \mathrm{Id}_{M \otimes'_R N} \text{ ve } g' \circ g = \mathrm{Id}_{M \otimes_R N}$$

eşitlikleri doğrudur ve demek ki g ve g' birbirinin tersi olan grup homomorfizmalarıdır, yani izomorfizmalardır. Dolayısıyla yukardaki tanımın koşulunu sağlayan bir $(M \otimes_R N, \otimes)$ çifti verilmişse, diğerleri, bir

$$g : M \otimes_R N \to A$$

grup izomorfizması için,

$$(A, g \circ \otimes)$$

çifti tarafından verilmiştir.

Yukardaki tanımı sağlayan ve bir anlamda biricik olduğunu kanıtladığımız

$$(M \otimes_R N, \otimes)$$

çiftine M ve N'nin ***tansör çarpımı*** denir. Çoğu zaman $\otimes$ fonksiyonu yazılmaz ve $M \otimes_R N$ grubunun (yani $\mathbb{Z}$-modülünün) bir tansör çarpımı olduğu söylenir. Ama gene de tansör çarpımının sadece $M \otimes_R N$ abelyen grubundan ibaret olmadığı, bir de ayrıca dengeli bir $\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$ fonksiyonu bulunması gerektiği akıldan çıkmamalı.

Burada R'yi değişmeli bir halka olarak almadık ama en kullanışlı ve ilginç durum, R değişmeli olduğu durumdur. O zaman $M \otimes_R N$ de (çok doğal bir tanımla) bir R-modülü yapısı kazanır. Bunu ilerde göreceğiz. Tansör çarpımının varlığını kanıtlamadan önce birkaç örnek verelim.

Örnek 1. R herhangi bir halka olsun. $M = R_R$ ve $N = {}_RR$ olsun. O zaman, $R \otimes_R R$'yi R olarak ve $r \otimes s$ elemanını rs olarak tanımlayabiliriz. Nitekim, A hangi abelyen grup ve $f : R \times R \to A$ hangi dengeli fonksiyon olursa olsun,

$$g(r) = f(r, 1)$$

formülüyle tanımlanan $g : R \to A$ fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır ve

$$g(r \otimes s) = g(rs) = f(rs, 1) = f(r, s)$$

olur. □

Yukardaki örneği genelleştirebiliriz:

Örnek 2. R bir halka, $M = R_R$ ve N, herhangi bir sol R-modül olsun. O zaman, $R \otimes_R N$'yi N olarak ve $r \otimes n$ elemanını rn olarak tanımlayabiliriz. Nitekim, A hangi abelyen grup ve $f : R \times N \to A$ hangi dengeli fonksiyon olursa olsun,

$$g(n) = f(1, n)$$

formülüyle tanımlanan $g : N \to A$ fonksiyonu bir grup homomorfizmasıdır ve

$$g(r \otimes n) = g(rn) = f(1, rn) = f(r, n)$$

olur. □

Bu örnekten şu çıkar: R, S'nin bir althalkasıysa, $R \otimes_R S = S$ ve $r \otimes s = rs$ olur.

Örnek 3. $R = \mathbb{Z}$, n, $m > 0$ bir doğal sayı ve $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ olsun. $d = \text{ebob}(n, m)$ olsun. O zaman $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ tansör çarpımını $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ olarak ve $\bar{a} \otimes \hat{b}$ elemanını $\tilde{a}\tilde{b}$ olarak tanımlayabiliriz. (Harflerin üstündeki $\bar{\ }$, $\hat{\ }$ ve $\tilde{\ }$ işaretleri üstünde bulundukları sayıların sırasıyla modülo n, m ve d alındıklarını söylüyor elbette.) Bunu kanıtlamak için her şeyden önce $\bar{a} \in M$ ve $\hat{b} \in N$ için $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ elemanlarının iyi tanımlı olduklarını görelim, bunu görmek kolay ve okura bırakıyoruz. Sonra, hangi A abelyen grubu ve hangi

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to A$$

dengeli fonksiyon alınırsa alınsın,

$$g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to A$$

fonksiyonunu,

$$g(\tilde{a}) = f(\bar{a}, \hat{1})$$

formülüyle tanımlayalım. Ama önce bu fonksiyonun iyi tanımlı olduğunu göstermek gerekir: Eğer $\tilde{a} = \tilde{b}$ ise, yani d, $a - b$ sayısını bölüyorsa, o zaman

$$a - b = dz = (xn + ym)z$$

eşitliklerini sağlayan x, y, z tamsayıları vardır ve,

$$\begin{aligned} f(\bar{a}, \hat{1}) &= f(\bar{b} + (xn + ym)\bar{z}, \hat{1}) \\ &= f(\bar{b} + ym\bar{z}, \hat{1}) = f(\bar{b}, \hat{1}) + f(ym\bar{z}, \hat{1}) \\ &= f(\bar{b}, \hat{1}) + f(1, ym\hat{z}) = f(\bar{b}, \hat{1}) + f(1, \hat{0}) \\ &= f(\bar{b}, \hat{1}) + \tilde{0} = f(\bar{b}, \hat{1}) \end{aligned}$$

olur. Demek ki g fonksiyonu iyi tanımlanmıştır.

Son olarak,

$$g(\bar{a} \otimes \hat{b}) = f(\bar{a}, \hat{b})$$

eşitliğini kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} g(\bar{a} \otimes \hat{b}) &= g(\tilde{a}\tilde{b}) = f(\tilde{a}\tilde{b}, \hat{1}) \\ &= f(b\tilde{a}, \hat{1}) = f(\tilde{a}, b\hat{1}) = f(\tilde{a}, \hat{b}). \quad \square \end{aligned}$$

Örnek 4. $R = \mathbb{Z}$, $n > 0$ bir doğal sayı, $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Q}$ olsun. O zaman $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$'yü 0 abelyen grubu olarak tanımlamak zorunda kalırız. Elbette bu durumda, $\tilde{a} \otimes q = 0$ olarak tanımlanmak zorundadır. Nitekim,

$$\tilde{a} \otimes q = \tilde{a} \otimes n(q/n) = n\tilde{a} \otimes (q/n) = 0 \otimes (q/n) = 0$$

olur. 0'ın gerçekten tansör çarpım olduğunu kanıtlamak oldukça kolaydır. $\square$

Örnek 5. n ve m iki doğal sayı ve R herhangi bir değişmeli halka olsun. $M_R = R^n$ ve ${}_RN = R^m$ olsun. e_i'ler R^n'nin, f_j'ler R^m'nin bir tabanının elemanları olsun. $P = R^{nm}$ olsun. g_{ij} ($i = 1, \ldots, n$ ve $j = 1, \ldots, m$), P'nin bir tabanı olsun. $M \otimes_R N = P$ ve,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} e_i r_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} s_j f_j\right) = \sum_{i,j} r_i s_j g_{i,j}$$

olur. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. $\square$

Bu aşamada, $M \otimes_R N$ abelyen grubunun

$$\{m \otimes n : m \in M, n \in N\}$$

kümesi tarafından gerildiğini kanıtlayabiliriz ve bu olgu bize $M \otimes_R N$ abelyen grubunun ne olması gerektiği konusunda bir bilgi verir ve dolayısıyla tansör çarpımının varlığının kanıtını kolaylaştırır. Ama bunu yapmayacağız. Bu olgu tansör çarpımının varlığının kanıtından çıkacak.

2. Tansör Çarpımının Varlığı

Teorem 1. *Tansör çarpımı her zaman vardır.*

Kanıt: R bir halka, M_R bir sağ R-modül ve ${}_RN$ bir sol R-modül olsun. $M \times N$ kümesinin elemanları tarafından özgürce gerilen abelyen gruba F diyelim. Yani F'nin elemanları, $a_{(\mu, \nu)} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\sum_{(m,n) \in M \times N} a_{(m,n)}(m,n)$$

türünden yazılan ve sadece sonlu tane $a_{(m, n)}$ katsayısının 0'dan değişik olduğu "biçimsel" sonlu toplamlardır. Buradaki "biçimsel" sıfatı şu anlama gelmektedir:

$$\sum_{(m,n) \in M \times N} a_{(m,n)}(m,n) = \sum_{(m,n) \in M \times N} b_{(m,n)}(m,n)$$

eşitliği ancak ve ancak her $m \in M$, $n \in N$ için,

$$a_{(m, n)} = b_{(m, n)}$$

ise geçerlidir. $M \times N$ kümesinin F'nin bir altkümesi olduğuna da dikkat edelim. Bu içindeliği

$$i : M \times N \to F$$

fonksiyonuyla gösterelim:

$$i(m, n) = (m, n).$$

P, F'nin aşağıdaki elemanları tarafından gerilen altgrubu olsun:

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \\ &(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) + (m, n_2), \\ &(mr, n) - (m, rn). \end{aligned}$$

Burada, tüm $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ ve $r \in R$ alıyoruz. Şimdi $M \otimes_R N$ abelyen grubunu

$$M \otimes_R N = F/P$$

olarak tanımlayalım. Ve eğer

$$\pi : F \to F/P$$

doğal izdüşümse,

$$\otimes : M \times N \to F/P = M \otimes_R N$$

fonksiyonunu her $(m, n) \in M \times N \subseteq F$ için,

$$m \otimes n = \pi(i(m, n)) = \pi(m, n)$$

olarak tanımlayalım. Böylece, dengeli bir

$$\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$$

fonksiyon tanımlamış oluruz. Resim aşağıda:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, "\otimes = \pi \circ i"] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] & F/P = M \otimes N \\ (m, n) \arrow[r, mapsto] & (m, n) \arrow[r, mapsto] & \overline{(m, n)} = m \otimes n \end{tikzcd}$$

F özgür abelyen grubu $M \times N$ altkümesi tarafından gerildiğinden, $M \otimes_R N$ grubu elbette

$$\pi(M \times N),$$

yani

$$\{m \otimes n : m \in M, n \in N\}$$

altkümesi tarafından gerilir. Bir başka deyişle, bu $M \otimes_R N$ grubunun elemanları, hemen hemen hepsi 0 olan $a_{(m, n)} \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için,

$$\sum_{(m,n) \in M \times N} a_{(m,n)} m \otimes n$$

biçiminde yazılırlar. Yalnız buradaki toplam biçimsel değildir, yani birbirinden tamamen değişik

$a_{(m,\, n)}$, $b_{(m,\, n)} \in \mathbb{Z}$ tamsayıları için,

$$\sum_{(m,n)\in M\times N} a_{(m,n)} m\otimes n = \sum_{(m,n)\in M\times N} b_{(m,n)} m\otimes n$$

eşitliği doğru olabilir.

Birçok öğrenci, $M \otimes_R N$ grubunun elemanlarının hepsinin $m \otimes n$ biçiminde yazıldığını sanır; ama bu genellikle doğru değildir.

Bu tanımların tansör çarpımının tanımının diğer koşullarını yerine getirdiğini iddia ediyor ve hemen iddiamızı kanıtlamaya girişiyoruz. A herhangi bir değişmeli grup ve

$$f : M \times N \to A$$

herhangi bir dengeli fonksiyon olsun. İlk amacımız, her $(m, n) \in M \times N \subseteq F$ için,

$$f(m, n) = g(m \otimes n)$$

eşitliğini sağlayan bir

$$g : M \otimes_R N \to A$$

grup homomorfizması bulmak. Yapmak istediğimizin şekli aşağıda.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\otimes = \pi \circ i"] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] & \overline{F/P} = M \otimes N \\
(m, n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (m, n) \arrow[r, mapsto] & \overline{(m, n)} = m \otimes n \arrow[dll, dotted, "g"] \\
f(m, n) & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} \; A & &
\end{tikzcd}$$

Önce, her $(m, n) \in M \times N$ için,

$$f(m, n) = h(m, n)$$

eşitliğini sağlayan bir

$$h : F \to A$$

grup homomorfizması bulalım.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, "\otimes = \pi \circ i"] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] & \overline{F/P} = M \otimes N \\
(m, n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (m, n) \arrow[r, mapsto] \arrow[dl, dotted, "h"] & \overline{(m, n)} = m \otimes n \\
f(m, n) = h(m, n) & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} \; A & &
\end{tikzcd}$$

Böyle bir grup homomorfizma elbette vardır, çünkü F, $M \times N$ altkümesi tarafından özgürce gerilen abelyen gruptur, bunun için $h(m, n)$ elemanını

$$h(m, n) = f(m, n)$$

eşitliğiyle tanımlamak ve bu tanımı $h : F \to A$ fonksiyonu homomorfizma olacak biçimde, yani,

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{(m,n)\in M\times N} a_{(m,n)}(m,n)\right) &= \sum_{(m,n)\in M\times N} a_{(m,n)} h(m,n) \\ &= \sum_{(m,n)\in M\times N} a_{(m,n)} f(m,n) \end{aligned}$$

eşitliği doğru olacak biçimde genişletmek yeterlidir Bunu, F, $M \times N$ altkümesi tarafından özgürce gerilen abelyen grup olduğundan yapabiliriz.

Yeni şekil aşağıda.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, "\otimes = \pi \circ i"] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] & \overline{F/P} = M \otimes N \\
(m, n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (m, n) \arrow[r, mapsto] \arrow[dl, "h"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"', near start] & \overline{(m, n)} = m \otimes n \\
f(m, n) = h(m, n) & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} \; A & &
\end{tikzcd}$$

$$h \circ i = f$$

Şimdi,

$$P \le \operatorname{Ker} h$$

ilişkisini kanıtlayacağız. Bunu kanıtlamak için P'yi geren,

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n),$$
$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) + (m, n_2),$$
$$(mr, n) - (m, rn)$$

tüm elemanların Ker h'de olduğunu kanıtlamak yeterli. Birinci türden başlayalım:

$$\begin{aligned} &h((m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)) \\ &\quad = h(m_1 + m_2, n) - h(m_1, n) - h(m_2, n)) \\ &\quad = f(m_1 + m_2, n) - f(m_1, n) - f(m_2, n)) \\ &\quad = 0, \end{aligned}$$

çünkü f çifte toplamsal. İkinci türde yazılan elemanların da Ker h'de olduğu benzer biçimde kanıtlanır. Son türe gelelim:

$$\begin{aligned} h((mr, n) - (m, rn)) &= h(mr, n) - h(m, rn) \\ &= f(mr, n) - f(m, rn) = 0, \end{aligned}$$

çünkü f dengeli. Demek ki $P \le \operatorname{Ker} h$. Bundan, her $x \in F$ için,

$$g(\pi(x)) = h(x)$$

eşitliğini sağlayan bir

$$h : F/P \to A$$

homomorfizması olduğu çıkar. Şimdi artık tabloyu tamamlayabiliriz:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, "\otimes = \pi \circ i"] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] & \overline{F/P} = M \otimes N \\
(m, n) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (m, n) \arrow[r, mapsto] \arrow[dl, "h"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"', near start] & \overline{(m, n)} = m \otimes n \arrow[dll, "g"] \arrow[dll, phantom, "\circlearrowright"', near start] \\
f(m, n) = h(m, n) & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} \; A & &
\end{tikzcd}$$

$$h \circ i = f \text{ ve } g \circ \pi = h$$

Hesapları da yapalım:

$$\begin{aligned} g(m \otimes n) &= g(\pi(i(m, n))) = (g \circ \pi)(i(m, n)) \\ &= h(i(m, n)) = (h \circ i)(m, n) \end{aligned}$$

$= f(m, n)$.

Böylece g'nin varlığını göstermiş olduk. Son olarak g'nin biricikliğini kanıtlamalıyız. Bu oldukça kolay: g'nin $M \otimes_R N$'yi geren $\pi(M \times N)$ kümesinin elemanlarında alması gereken değerler

$$g(m \otimes n) = f(m, n)$$

eşitliğinden belli. Demek ki bu eşitliği sağlayan g grup homomorfizmasından iki tane olamaz. Teorem kanıtlanmıştır. □

Sonuç 2. *Eğer M modülü $(m_i)_{i \in I}$ tarafından, N modülü de $(n_j)_{j \in I}$ tarafından geriliyorsa, o zaman $M \otimes_R N$ grubu $(m_i \otimes n_j)_{j \in I}$ tarafından gerilir. Dolayısıyla sonlu sayıda eleman tarafından gerilmiş iki modülün tansöt çarpımı sonlu eleman tarafından gerilir.*

Kanıt: Teoremin kanıtından hemen çıkar. □

Tanımı ve kanıtı pekiştirmek için birkaç örnek daha vereceğiz.

Örnek 7. *R değişmeli bir halkaysa,*

$$R[X] \otimes_R R[Y] = R[X, Y]$$

ve

$$f(X) \otimes g(Y) = f(X)g(Y)$$

olur.

Kanıt: Yukarda tanımlanan

$$\otimes : R[X] \times R[Y] \to R[X, Y]$$

fonksiyonunun çifte toplamsal ve dengeli olduğu belli. Verilen bu tanımlar için tansör çarpımının evrensel özelliğini kanıtlayalım. A herhangi bir abelyen grup ve

$$f : R[X] \times R[Y] \to A$$

dengeli bir fonksiyon olsun. $R[X, Y]$'den A'ya giden ve her $p(X) \in R[X]$ ve her $q(Y) \in R[Y]$ için

$$g(p(X)q(Y)) = f(p(X), q(Y))$$

eşitliğini sağlayan bir (ve bir tane) g grup homomorfizması bulacağız. $R[X, Y]$, toplamsal olarak

$$rX^iY^j \qquad (r \in R,\ i, j \in \mathbb{N})$$

elemanları tarafından gerildiğinden, bu elemanların g-imgelerini tanımlamak yeterli. Zaten tanımın ne olması gerektiği de belli:

$$g(rX^iY^j) = f(rX^i, Y^j).$$

Dolayısıyla, tanım,

$$g\left(\sum\nolimits_{i,j} r_{i,j}X^iY^j\right) = \sum\nolimits_{i,j} f(r_{i,j}X^i, Y^j)$$

biçiminde olmalı. Yani g varsa biriciktir. Önce g'nin bir grup homomorfizması olduğunu kanıtlayalım:

$$\begin{aligned}
&g\left(\sum\nolimits_{i,j} r_{i,j}X^iY^j + \sum\nolimits_{i,j} s_{i,j}X^iY^j\right)\\
&= g\left(\sum\nolimits_{i,j}\left(r_{i,j}+s_{i,j}\right)X^iY^j\right)\\
&= \sum\nolimits_{i,j} f\left(\left(r_{i,j}+s_{i,j}\right)X^i, Y^j\right)\\
&= \sum\nolimits_{i,j} f\left(r_{i,j}X^i + s_{i,j}X^i, Y^j\right)\\
&= \sum\nolimits_{i,j}\left(f\left(r_{i,j}X^i, Y^j\right) + f\left(s_{i,j}X^i, Y^j\right)\right)\\
&= \sum\nolimits_{i,j} f\left(r_{i,j}X^i, Y^j\right) + \sum\nolimits_{i,j} f\left(s_{i,j}X^i, Y^j\right)\\
&= g\left(\sum\nolimits_{i,j} r_{i,j}X^iY^j\right) + g\left(\sum\nolimits_{i,j} s_{i,j}X^iY^j\right).
\end{aligned}$$

Aynı eşitlik + yerine − için de geçerlidir; aynı kanıtla.

Şimdi g'nin her $p(X) \in R[X]$ ve $q(Y) \in R[Y]$ için

$$g(p(X)q(Y)) = f(p(X), q(Y))$$

eşitliğini sağladığını gösterelim. g'nin toplamsal ve f'nin çifte toplamsal olması nedeniyle, bu eşitliği bu genellikte kanıtlamak yerine, her $r \in R$, $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$$g((rX^i)(sY^j)) = f(rX^i, sY^j)$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli. (Bu dediğimizden emin olun.) Kanıtlayalım:

$$g((rX^i)(sY^j)) = g(rsX^iY^j) = f(rsX^i, Y^j) = f(rX^i, sY^j).$$

İstediğimizi kanıtladık. □

Örnek 8. *Her n pozitif doğal sayısı için*

$$\mathbb{Z}^n \otimes_R \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n$$

ve

$$(k_1, ..., k_n) \otimes q = (k_1q, ..., k_nq)$$

olur.

Kanıt: Yukarda tanımlanan

$$\otimes : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^n$$

fonksiyonunun çifte toplamsal ve dengeli olduğu belli. Verilen bu tanımlar için tansör çarpımının evrensel özelliğini kanıtlayalım. A herhangi bir abelyen grup ve

$$f : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Q} \to A$$

dengeli bir fonksiyon olsun. $\mathbb{Q}^n$'den A'ya giden ve her $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ ve $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$g(k_1q, ..., k_nq) = f((k_1, ..., k_n), q)$$

eşitliğini sağlayan bir (ve bir tane) g grup homomorfizması bulacağız.

$a_i, b_i, \in \mathbb{Z}$ için öyle $c_i, \in \mathbb{Z}$ ve $u \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki, $a_i/b_i = c_i/u$ olsun. Şimdi,

$$g\left(\frac{a_1}{b_1}, ..., \frac{a_n}{b_n}\right) = g\left(\frac{c_1}{u}, ..., \frac{c_n}{u}\right) = f\left(\left(c_1, ..., c_n\right), \frac{1}{u}\right)$$

olsun. Bunun iyi bir tanım olduğunu gösterelim. Nitekim, eğer

$$\frac{c_1}{u} = \frac{d_1}{v}, \ldots, \frac{c_n}{u} = \frac{d_n}{v}$$

ise, f dengeli olduğundan,

$$\begin{aligned} f\left((c_1, \ldots, c_n), \frac{1}{u}\right) &= f\left((c_1 v, \ldots, c_n v), \frac{1}{uv}\right) \\ &= f\left((d_1 u, \ldots, d_n u), \frac{1}{uv}\right) \\ &= f\left((d_1, \ldots, d_n), \frac{1}{v}\right) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla g iyi tanımlıdır. Şimdi de g'nin toplamsal olduğunu kanıtlayalım:

$$\begin{aligned} & g\left(\left(\frac{c_1}{u}, \ldots, \frac{c_n}{u}\right) + \left(\frac{d_1}{v}, \ldots, \frac{d_n}{v}\right)\right) \\ &= g\left(\frac{c_1}{u} + \frac{d_1}{v}, \ldots, \frac{c_n}{u} + \frac{d_n}{v}\right) \\ &= g\left(\frac{c_1 v + d_1 u}{uv}, \ldots, \frac{c_n v + d_n u}{uv}\right) \\ &= f\left((c_1 v + d_1 u, \ldots, c_n v + d_n u), \frac{1}{uv}\right) \\ &= f\left((c_1 v, \ldots, c_n v) + (d_1 u, \ldots, d_n u), \frac{1}{uv}\right) \\ &= f\left((c_1 v, \ldots, c_n v), \frac{1}{uv}\right) + f\left((d_1 u, \ldots, d_n u), \frac{1}{uv}\right) \\ &= f\left((c_1, \ldots, c_n), \frac{1}{u}\right) + f\left((d_1, \ldots, d_n), \frac{1}{v}\right) \\ &= g\left(\frac{c_1}{u}, \ldots, \frac{c_n}{u}\right) + g\left(\frac{d_1}{v}, \ldots, \frac{d_n}{v}\right). \end{aligned}$$

Son olarak her $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ ve $q \in \mathbb{Q}$ için,

$$g(k_1 q, \ldots, k_n q) = f((k_1, \ldots, k_n), q)$$

eşitliğini kanıtlayalım. q yerine $a, b \in \mathbb{Z}$ için a/b yazalım ve hesaplayalım:

$$\begin{aligned} g(k_1 q, \ldots, k_n q) &= g\left(\frac{k_1 a}{b}, \ldots, \frac{k_n a}{b}\right) \\ &= f\left((k_1 a, \ldots, k_n a), \frac{1}{b}\right) \\ &= f\left((k_1, \ldots, k_n), \frac{a}{b}\right) \\ &= f\left((k_1, \ldots, k_n), q\right). \end{aligned}$$

Kanıtımız bitmiştir. □

Bu örneği aynen yukardaki gibi çok basit biçimde genelleştirebiliriz:

Örnek 9. *R bir bölge, K, R'nin bölüm cismi ve n pozitif bir doğal sayı olsun. O zaman $R^n \otimes_R K = K^n$ ve $(r_1, \ldots, r_n) \otimes s = (r_1 s, \ldots, r_n s)X^i$ olur.*

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Örnek 10. *R değişmeli bir halka, n pozitif bir doğal sayı olsun. O zaman $R^n \otimes_R R[X] = R^n[X]$ ve $(r_1, \ldots, r_n) \otimes sX^i = (r_1 s, \ldots, r_n s)X^i$ olur.*

Kanıt: Tansör çarpımı fonksiyonunun tanımını,

$$(r_1, \ldots, r_n) \otimes \sum_i s_i X^i = \sum_i (r_1 s_i, \ldots, r_n s_i) X^i$$

olarak yapalım. Bunun $R^n \times R[X]$'ten $R^n[X]$'e giden dengeli bir fonksiyon olduğu belli. Evrensel özelliği kanıtlayalım. A herhangi bir abelyen grup ve

$$f : R^n \times R[X] \to A$$

herhangi bir dengeli fonksiyon olsun. Her $r \in R^n$ ve her $p \in R[X]$ için

$$g(r \otimes p) = f(r, p)$$

eşitliğini sağlayan bir (ve bir tane)

$$g : R^n[X] \to A$$

grup homomorfizması bulacağız. g'nin tanımının nasıl olması gerektiği belli: $R^n[X]$ grubu

$$(r_1, \ldots, r_n)X^i$$

türünden elemanlar tarafından özgürce gerildiğinden, g'yi tanımlamak için, $g((r_1, \ldots, r_n)X^i)$ elemanlarını belirlemek yeterli. Bu elemanlar da yukardaki eşitlik $p = X^i$ için sağlanacak şekilde tanımlanmalı elbet:

$$g((r_1, \ldots, r_n)X^i) = f((r_1, \ldots, r_n), X^i).$$

f'nin dengeli olduğunu kullanarak, bu tanımın her $r \in R^n$ ve her $p \in R[X]$ için

$$g(r \otimes p) = f(r, p)$$

eşitliğini sağladığını kanıtlamak kolay. □

Örnek 11. *P bir asal sayılar kümesi olsun. Asal bölenleri P kümesinden olan sayılara P-sayı diyelim.*

$$\mathbb{Z}_{(P)} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z},\ 0 \neq b \text{ bir } P\text{-sayı}\}$$

olsun. O zaman $\mathbb{Z}_{(P)}$ bir halkadır ve

$$\mathbb{Z}_{(P)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(Q)} = \mathbb{Z}_{(P \cup Q)}$$

ve $x \otimes y = xy$ olur.

Kanıt: Okura bırakılmıştır. □

Örnek 12. *$I \lhd R$ bir ideal olsun. M ve N iki R-modül olsun. $IM = 0$* ve *$IN = 0$ varsayımlarını yapalım. O zaman, M ve N doğal bir biçimde R/I-modüller olarak görülebilirler ve*

$$M \otimes_R N = M \otimes_{R/I} N$$

olur. (Yani gerçekten eşitlik olur.)

Kanıt: Teorem 1'in kanıtından hemen çıkar. Nitekim F ve P gruplarının tanımı her iki durumda da aynıdır. □

Örnek 13. R ve S birer halka olsun ve

$$\varphi : S \to R$$

bir halka homomorfizması olsun. O zaman her sol R-modül, φ sayesinde,

$$ms = m\varphi(s)$$

formülüyle, bir sol S-modül olarak görülebilir. Aynı şey sağ R-modüller için de geçerlidir elbette. Eğer M_R ve ${}_RN$ birer R-modülse, $M \otimes_S N$'nin $m \otimes n$ elemanını $M \otimes_R N$'nin $m \otimes n$ elemanına götüren bir fonksiyon vardır ve bu fonksiyon örten bir grup homomorfizmasıdır.

Kanıt: Uygun elemanlar için,

$$ms \otimes n = m\varphi(s) \otimes n = m \otimes \varphi(s)n = m \otimes sn$$

olduğundan $(m, n) \mapsto m \otimes n$ fonksiyonu S-dengelidir. Demek ki istenildiği gibi bir grup homomorfizması vardır. Bu fonksiyonun örten olduğu çok bariz. □

Önemli. $M' \leq M_R$ ve ${}_RN$ modüller olsun. O zaman $M' \otimes_R N$'nin özenle ayrıltırılması gereken iki değişik anlamı olabilir. $M' \otimes_R N$ grubunu 1) başlı başına iki modülün bir tansör çarpımı olarak görebiliriz, 2) $M \otimes_R N$ grubunun

$$\{m \otimes n : m \in M', n \in N\}$$

altkümesi tarafından gerilmiş altgrubu olarak görebiliriz. Yani $m \in M'$ ve $n \in N$ için $m \otimes n$ elemanını $M' \otimes_R N$ grubunda ya da $M \otimes_R N$ grubunda hesaplayabiliriz. Her zaman aynı sonuç bulunmayabilir. Örneğin $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $M' = 2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}$-modül olarak $M' \approx M$ olduğundan, birinci yorumda,

$$M' \otimes_R N \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

elde ederiz, oysa ikinci yorumda,

$$M' \otimes_R N = 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0$$

elde ederiz. Arada şuı fark var:

$$2x \otimes y = x \otimes 2y$$

eşitliği $M \otimes_R N$ grubunda anlamlıdır ama eğer x bir tek sayıysa, aynı eşitlik $M' \otimes_R N$ modülünde anlamsızdır

Yararlı. $M \otimes_R N$ tansör çarpımından bir G grubuna bir g homomorfizması tanımlamak için, $g(m \otimes n)$ değerini tanımlamak yeterlidir elbet ama bunun bir iyi tanım olduğunu kanıtlamak kolay olmayabilir çünkü

$$\sum m \otimes n = \sum m' \otimes n'$$

eşitliği olmasına karşın,

$$\sum g(m \otimes n) = \sum g(m' \otimes n')$$

eşitliği sağlanmayabilir. Öte yandan g'yi tanımlamak için illa bunu kanıtlamak gerekmez;

$$f(m, n) = g(m \otimes n)$$

kuralıyla tanımlanan

$$f : M \times N \to G$$

fonksiyonunun çifte lineer olduğunu göstermek yeterlidir.

3. Halka Değişmeliyse

Eğer R değişmeli bir halkaysa, her sol R-modül doğal bir biçimde ($mr = rm$ tanımıyla) bir sağ R-modüldür ve her sağ R-modül doğal bir biçimde bir sol R-modüldür. Dolayısıyla eğer halka komütatifse, her M ve N modülü için hem $M \otimes_R N$ tansör çarpımından hem de $N \otimes_R M$ tansör çarpımından bahsedebiliriz. Ama bu ikisi izomorfturlar:

Teorem 3. *Eğer R komütatif bir halkaysa, o zaman $M \otimes_R N$ ve $N \otimes_R M$ tansör çarpımları doğal bir biçimde izomorfturlar ve izomorfizma*

$$m \otimes n \mapsto n \otimes m$$

fonksiyonunu genişletir.

Kanıt: (m, n) elemanını $n \otimes m$ elemanına götüren

$$M \times N \to N \otimes_R M$$

fonksiyonu dengelidir. Dolayısıyla tansör çarpımının tanımına göre, $m \otimes n$ elemanını $n \otimes m$ elemanına götüren bir

$$M \otimes_R N \to N \otimes_R M$$

grup homomorfizması vardır.

Aynı nedenden, $n \otimes m$ elemanını $m \otimes n$ elemanına da götüren bir

$$N \otimes_R M \to M \otimes_R N$$

grup homomorfizması vardır.

Bunlar elbette birbirinin tersi homomorfizmalardır. □

4. Homomorfizma Tansörleri

M_R, M'_R, ${}_RN$, ${}_RN'$ dört R-modül olsun.

$$u : M \to M'$$

ve

$$v : N \to N'$$

iki modül homomorfizması olsun. Bu iki homomorfizmayı kullanarak, bir

$$u \otimes v : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$$

grup homomorfizması tanımlayacağız. Muhtemelen okurun da tahmin edeceği gibi bu homomorfizma, her $m \in M$ ve $n \in N$ için,

$$(u \otimes v)(m \otimes n) = u(m) \otimes v(n)$$

eşitliğini sağlanacak. Her ne kadar $u \otimes v$ fonksiyonu,

$$(u \otimes v)\left(\sum m \otimes n\right) = \sum u(m) \otimes v(n)$$

eşitliğini sağlamak zorundaysa da fonksiyonu bu formülle tanımlayamayız çünkü bunun iyi bir tanım olduğunu bilmiyoruz, yani $\Sigma\, m \otimes n = \Sigma\, m' \otimes n'$ eşitliğine rağmen,

$$\sum u(m) \otimes v(n) = \sum u(m') \otimes v(n')$$

eşitliği doğru olmayabilir ve bu durumda yukardaki (çok istediğimiz) tanımı yapamayız. Bu tanımı yapmaya hak kazanmak için tansör çarpımın evrensel özelliğini kullanmalıyız.

Her $m \in M$ ve $n \in N$ için,

$$(u, v)(m, n) = u(m) \otimes v(n)$$

kuralıyla tanımlanan

$$(u, v) : M \times N \to M' \otimes_R N'$$

fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonun dengeli bir fonksiyon olduğu besbelli. Tansör çarpımının tanımına göre, her $m \in M$ ve $n \in N$ için,

$$(u \otimes v)(m \otimes n) = (u, v)(m, n) = u(m) \otimes v(n)$$

eşitliğini sağlayan bir

$$u \otimes v : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$$

grup homomorfizması vardır.

$(u, v) \mapsto u \otimes v$ kuralı, bize,

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

grubundan

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

grubuna giden bir fonksiyon tanımlar. Bu fonksiyonun çifte toplamsal olduğu çok bariz, yani

$$(u_1 + u_2) \otimes v = (u_1 \otimes v) + (u_2 \otimes v)$$

ve

$$u \otimes (v_1 + v_2) = (u \otimes v_1) + (u \otimes v_2).$$

Kolayca görüleceği üzere,

$$(u \otimes v) \circ (u' \otimes v') = (u \circ u') \otimes (v \circ v')$$

eşitliği her $u, u' \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ve $v, v' \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$ için geçerlidir.

Not. Yukarda tanımlanan

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

grubunun $u \otimes v$ elemanıyla,

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

grubunun $u \otimes v$ elemanı birbirine karıştırılmamalı. Öte yandan, yukarda

$$(u, v) \mapsto u \otimes v$$

kuralıyla tanımlanan

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

grubundan

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

grubuna giden fonksiyon çifte toplamsal olduğundan, tansör çarpımının tanımına göre,

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

grubunun $u \otimes v$ elemanını,

$$\mathrm{Hom}_R\, (M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

grubunun $u \otimes v$ elemanına götüren bir grup homomorfizması vardır.

5. Tansör Üzerine Modül Yapısı

R ve S iki halka ve M hem bir sol S-modül, hem de bir sağ R-modül olsun. Eğer her $s \in S$, $m \in M$, $r \in R$ için, $s(mr) = (sm)r$ oluyorsa o zaman M'ye S-R ***bimodül*** denir. Bu durumda, parantezler atılarak smr yazılabilir. M'nin bir S-R bimodül olduğunu belirtmek için ${}_SM_R$ yazılır.

Eğer R değişmeli bir halkaysa ve M bir sol (ya da sağ) R-modülse, o zaman $rm = mr$ tanımı M'yi bir R-R bimodül yapar.

Bir önceki bölümü kullanarak şu önemli teoremi kanıtlayacağız.

Teorem 4. *Eğer ${}_SM_R$ ve ${}_RN$ modülleri verilmişse, $M \otimes_R N$ doğal olarak bir sol S-modüldür. Çarpım şöyle tanımlanmıştır:*

$$s\left(\sum m \otimes n\right) = \sum sm \otimes n.$$

Kanıt: Verilmiş bir $s \in S$ için, $u(m) = sm$ kuralı, bimodül tanımından dolayı, bir R-modül homomorfizması verir. Şimdi $M \otimes_R N$ üzerine s ile çarpmayı bir önceki bölümde tanımlanan $u \otimes \mathrm{Id}_N$ olarak tanımlayalım. Gerisi kolay. □

Benzer sonuç M_R *ve* ${}_RN_S$ modülleri için de geçerlidir elbet.

Sonuç 5. *Eğer R değişmeliyse, $M \otimes_R N$ doğal olarak bir R-modüldür. Halkanın bir r elemanıyla tansör çarpımının bir elemanının çarpımı şöyle tanımlanmıştır:*

$$r\left(\sum m \otimes n\right) = \sum mr \otimes n = \sum m \otimes rn.$$

Ve $M \times N$'den bir P modülüne giden ve

$$f(rm, n) = f(m, rn) = rf(m, n)$$

eşitliğini sağlayan her dengeli f fonksiyonu için,

$$g(m \otimes n) = f(m, n)$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane

$$g : M \otimes_R N \to P$$

modül homomorfizması vardır.

Ayrıca Teorem 3'teki izomorfizma bir modül izomorfizmasıdır. Dahası, eğer bir önceki bölümdeki u ve v modül homomorfizmalarıysa, o zaman, $u \otimes v$ de bir modül homomorfizması olur.

Kanıt: Birinci kısım Teorem 4'ten hemen çıkar. Gerisi de çok kolay. □

Örnek 14. Örnek 13'e geri dönelim. R ve S birer komütatif halka olsun ve

$$\varphi : S \to R$$

bir halka homomorfizması olsun. Eğer M ve N birer R-modülse, Teorem 4'e ve Örnek 13'e göre, $M \otimes_R N$ ve $M \otimes_S N$ de birer S-modüldür. Bu durumda, Örnek 13'teki örten grup homomorfizması aynı zamanda bir S-modül homomorfizmasıdır.

Örnek 15. Eğer R değişmeli bir halka değilse, $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ grubuna doğal bir (sağ ya da sol) R-modül yapısı veremeyiz. Öte yandan eğer R komütatifse, her $u \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ve her $r \in R$ için,

$$(ur)(m) = u(mr)$$

kuralıyla tanımlanan

$$ur : M \to M'$$

fonksiyonu bir modül homomorfizmasıdır ve bu sayede $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ doğal bir R-modül yapısına kavuşur. Aynı şeyi $\mathrm{Hom}_R(N, N')$ için de yapabiliriz ve $\mathrm{Hom}_R(N, N')$ grubu da bir R-modül olur. Bu durumda,

$$(u, v) \mapsto u \otimes v$$

kuralıyla tanımlanmış olan

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

grubundan

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

grubuna giden fonksiyon dengeli bir fonksiyon olur. Bundan ve tansör çarpımının tanımından,

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

grubunun $u \otimes v$ elemanını,

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

grubunun $u \otimes v$ elemanına götüren bir grup homomorfizması olduğu çıkar. Bu grup homomorfizması aynı zamanda bir R-modül homomorfizmasıdır.

Teorem 6. *R değişmeli bir halka olsun. M, N ve P birer R-modül olsun. O zaman $M \times N$'den P'ye giden ve her $m \in M$, $n \in M$, $r \in R$ için*

$$f(rm, n) = f(m, rn) = rf(m, n)$$

eşitliğini sağlayan fonksiyonlara çifte R-toplamsal denir ve bu fonksiyonların kümesinin doğal bir R-modül yapısı vardır. $\mathscr{L}_2(M, N; P)$ olarak yazılan bu R-modül doğal olarak $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P)$ modülüne izomorftur.

Kanıt: Bu nerdeyse Sonuç 5'in bir tekrarı.

$\mathscr{L}_2(M, N; P)$ üzerine R-modül yapısının nasıl tanımlandığı bariz olmalı:

$$(u + v)(m, n) = u(m, n) + v(m, n),$$
$$(ru)(m, n) = r{\cdot}u(m, n).$$

$\mathscr{L}_2(M, N; P)$ modülünün her u elemanı için,

$$u'(m \otimes n) = u(m, n)$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane

$$u' \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P)$$

elemanı vardır çünkü u elbette dengelidir. $u \mapsto u'$ fonksiyonunun bir R-modül homomorfizması olduğu belli. Ayrıca birebir de. Örten olduğu bariz çünkü eğer $u' \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P)$ verilmişse, $u \in \mathscr{L}_2(M, N; P)$ elemanını,

$$u(m, n) = u'(m \otimes n)$$

olarak tanımlamak yeterli. □

6. Tansörle Kusursuz Dizilerin İlişkisi

Teorem 7. *M, M', M'', sol R-modüller ve N bir sağ R-modül olsun.*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

kusursuz (exact) *bir dizi olsun. O zaman*

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{u \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{v \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_R N \to 0$$

dizisi de kusursuz.

Kanıt: $v \otimes \mathrm{Id}_N$ fonksiyonu, $M'' \otimes_R N$ grubunu geren tüm $m'' \otimes n$ elemanlarına dokunduğundan (çünkü v örten), örtendir. Ayrıca $v \circ u = 0$ olduğundan,

$$(v \otimes \mathrm{Id}_N) \circ (u \otimes \mathrm{Id}_N) = (v \circ u) \otimes \mathrm{Id}_N = 0$$

olur. Demek ki geriye sadece

$$\mathrm{Ker}(v \otimes \mathrm{Id}_N) \le \mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{Id}_N)$$

önermesini kanıtlamak kalıyor.

$$B = \mathrm{Ker}(v \otimes \mathrm{Id}_N)$$

ve

$$A = \mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{Id}_N)$$

olsun. $A \le B$ olduğundan, $v \otimes \mathrm{Id}_N$ fonksiyonunu $(M \otimes_R N)/A$ grubundan $M'' \otimes_R N$ grubuna giden bir $\underline{v}$ homomorfizması olarak görebiliriz: $\underline{v}$ homomorfizması, $(M \otimes_R N)/A$ grubunu geren $\underline{m \otimes n}$ elemanları üzerine

$$\underline{v}(\underline{m \otimes n}) = v(m) \otimes n.$$

olarak tanımlanmıştır. $\underline{v}$ homomorfizmasının çekirdeği B/A olduğundan, $A = B$ eşitliğini kanıtlamak için, $\underline{v}$ homomorfizmasının birebir olduğunu kanıtlamak yeterli. Bunun için,

$$f \circ \underline{v} = \mathrm{Id}_{(M \otimes_R N)/A}$$

eşitliğinin sağlandığı bir

$$f : M'' \otimes_R N \to (M \otimes_R N)/A$$

grup homomorfizması bulmak yeterli. f homomorfizması,

$$\underline{m \otimes n} = f(\underline{v}(\underline{m \otimes n})) = f(v(m) \otimes n)$$

eşitliğini sağlamalı. Demek ki $m'' \in M''$ verilmişse, $v(m) = m''$ eşitliğini sağlayan her $m \in M$ elemanı için, $f(m'' \otimes n) = \underline{m \otimes n}$ olmalı.

$$g : M'' \times N \to (M \otimes_R N)/A$$

fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: $m'' \in M''$ ve $n \in N$ ise, $v(m) = m''$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $m \in M$ alalım ve

$$g(m'', n) = \underline{m \otimes n}$$

olarak tanımlayalım. $g(m'', n)$ değerinin tanımı seçilen m'ye göre değişmez, çünkü $v(m_1) = m''$ eşitliğini sağlayan başka bir $m_1 \in M$ alırsak,

$$v(m - m_1) = v(m) - v(m_1) = m'' - m'' = 0$$

olur, yani $m - m_1 \in \mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Im}\, u$ olur, yani bir $m' \in M'$ için, $u(m') = m - m_1$ olur, demek ki,

$$u(m') \otimes n \in \mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{Id}_N) = A$$

olur ve dolayısıyla

$$\underline{m \otimes n} - \underline{m_1 \otimes n} = \underline{(m - m_1) \otimes n} = \underline{u(m') \otimes n} = 0$$

olur. Demek ki g iyi tanımlıdır. Ayrıca g'nin dengeli olduğu belli. Tansör çarpımının tanımına göre,

$$f(m'' \otimes n) = g(m'', n) = \underline{m \otimes n}$$

eşitliğini sağlayan bir $f : M'' \otimes_R N \to (M \otimes_R N)/A$ grup homomorfizması vardır. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 8. *M bir sol R-modül, N, N', N'', sağ R-modüller olsun.*

$$N' \xrightarrow{s} N \xrightarrow{t} N'' \longrightarrow 0$$

kusursuz bir dizi olsun. O zaman

$$M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes s} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes t} M \otimes_R N'' \to 0$$

dizisi de kusursuzdur.

Kanıt: Aynen yukardaki gibi. □

Karşıörnek. Eğer u birebirse, $u \otimes \mathrm{Id}_N$ birebir olmayabilir. Örneğin $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $M' = 2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ olsun ve $u : M' \to M$, $u(x) = x$ olarak tanımlansın. O zaman $u \otimes \mathrm{Id}_M = 0$ olur. Bir başka deyişle,

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

dizisi kusursuzsa, her N sağ modülü için,

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \xrightarrow{u \otimes \mathrm{Id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{v \otimes \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

dizisi kusursuz olmayabilir. Tensörünün ksuursuzluğu koruduğu R-modüllere ***yassı modüller*** adı verilir.

Sonuç 9. *Eğer*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

ve

$$N' \xrightarrow{s} N \xrightarrow{t} N'' \longrightarrow 0$$

dizileri kusursuzsa, o zaman

$$v \otimes t : M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N''$$

homomorfizması örtendir ve çekirdeği

$$\mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{Id}_N) + \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes s)$$

altgrubuna eşittir.

Kanıt: $v \otimes t = (v \otimes \mathrm{Id}_{N''}) \circ (\mathrm{Id}_M \otimes t)$ olduğundan, $v \otimes t$ homomorfizmasının örten olduğu daha önceki iki sonuçtan çıkar. Gene bu eşitliği kullanarak $v \otimes t$ homomorfizmasının çekirdeğini hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} z \in \mathrm{Ker}(v \otimes t) &\Leftrightarrow (\mathrm{Id}_M \otimes t)(z) \in \mathrm{Ker}(v \otimes \mathrm{Id}_{N''}) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{Id}_M \otimes t)(z) \in \mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{Id}_{N''}). \end{aligned}$$

Öte yandan, $u \otimes \mathrm{Id}_{N''}$ fonksiyonunun tanım kümesi $M' \otimes_R N''$ grubudur ve

$$\mathrm{Id}_{M'} \otimes t : M' \otimes_R N \to M' \otimes_R N''$$

örtendir. Demek ki

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{Id}_{N''}) &= \mathrm{Im}((u \otimes \mathrm{Id}_{N''}) \circ (\mathrm{Id}_{M'} \otimes t)) \\ &= \mathrm{Im}(u \otimes t) \end{aligned}$$

olur ve "$z \in \mathrm{Ker}(v \otimes t)$" koşuluyla "öyle bir $a \in M' \otimes_R N$ var ki, $(\mathrm{Id}_M \otimes t)(z) = (u \otimes t)(a)$" koşullarının eşdeğer oldukları görülür.

$$b = z - (u \otimes \mathrm{Id}_N)(a)$$

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_M \otimes t)(b) &= (\mathrm{Id}_M \otimes t)(z) - (\mathrm{Id}_M \otimes t)(u \otimes \mathrm{Id}_N)(a) \\ &= (\mathrm{Id}_M \otimes t)(z) - (u \otimes t)(a) = 0 \end{aligned}$$

olur, yani $b \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes t) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes s)$ olur. Dolayısıyla,

$$z = b + (u \otimes \mathrm{Id}_N)(a) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes s) + \mathrm{Im}(u \otimes \mathrm{Id}_N)$$

bulunur. □

7. Direkt Toplam ve Tansör Çarpımı

$(M_i)_{i \in I}$ bir sağ R-modül ailesi ve $(N_j)_{j \in J}$ bir sol R-modül ailesi olsun. O zaman,

$$((m_i)_{i \in I}, (n_j)_{j \in J}) \mapsto (m_i \otimes n_j)_{j \in J,\, i \in I}$$

kuralıyla tanımlanmış

$$f : (\Pi_{i\in I}\, M_i) \times (\Pi_{j\in J}\, N_j) \to \Pi_{i\in I,\, j\in J}\, (M_i \otimes_R N_j)$$

fonksiyonu, elbette, dengeli bir fonksiyondur. Dolayısıyla, tansör çarpımının tanımından dolayı,

$$(m_i)_{i\in I} \otimes (n_j)_{j\in J} \mapsto (m_i \otimes n_j)_{j\in J,\, i\in I}$$

kuralıyla tanımlanmış bir

$$(\Pi_{i\in I}\, M_i) \otimes_R (\Pi_{j\in J}\, N_j) \to \Pi_{i\in I,\, j\in J}\, (M_i \otimes_R N_j)$$

grup homomorfizması vardır.

Bu grup homomorfizması, her ne kadar en doğal biçimde tanımlanmışsa da, birebir ya da örten olmayabilir. (Alıştırma. Bourbaki, Algèbre, AII sayfa 189, ex. 2.)

Şimdi, $\Pi_{i\in I}\, M_i$ ve $\Pi_{j\in J}\, N_j$ modüllerinin,

$$\oplus_{i\in I}\, M_i \text{ ve } \oplus_{j\in J}\, N_j$$

altmodüllerini ele alalım. O zaman,

$$(\oplus_{i\in I}\, M_i) \otimes_R (\oplus_{j\in J}\, N_j) \to (\Pi_{i\in I}\, M_i) \otimes_R (\Pi_{j\in J}\, N_j)$$

doğal grup homomorfizmasını elde ederiz. Bunun yukardaki grup homomorfizmasıyla bileşimini alırsak,

$$(\oplus_{i\in I}\, M_i) \otimes_R (\oplus_{j\in J}\, N_j) \to \Pi_{i\in I,\, j\in J}\, (M_i \otimes_R N_j)$$

homomorfizmasını elde ederiz. Ama bariz bir biçimde bu homomorfizmanın imgesi,

$$\oplus_{i\in I,\, j\in J}\, (M_i \otimes_R N_j)$$

altmodülünün içinde olur. Demek ki

$$g : (\oplus_{i\in I}\, M_i) \otimes_R (\oplus_{j\in J}\, N_j) \to \oplus_{i\in I,\, j\in J}\, (M_i \otimes_R N_j)$$

homomorfizmasını bulduk. g, yukarda tanımlanan f'nin kısıtlanmasıdır:

$$g((m_i)_{i\in I} \otimes (n_j)_{j\in J}) = (m_i \otimes n_j)_{j\in J, i\in I}$$

Teorem 10. *Yukarda tanımlanan*

$$g : (\oplus_{i\in I}\, M_i) \otimes_R (\oplus_{j\in J}\, N_j) \to \oplus_{i\in I,\, j\in J}\, (M_i \otimes_R N_j)$$

homomorfizması bir izomorfizmadır.

Kanıt: $G = \oplus_{i\in I,\, j\in J}\, (M_i \otimes_R N_j)$,

$$M = \oplus_{i\in I}\, M_i \text{ ve } N = \oplus_{i\in I}\, N_i$$

olsun. G'den $M \otimes_R N$'ye giden ve

$$g \circ h = \mathrm{Id}_G \text{ ve } h \circ g = \mathrm{Id}_{M\otimes_R N}$$

eşitliklerini sağlayan bir

$$h : G \to M \otimes_R N$$

fonksiyonu tanımlayacağız. h'yi tanımlamak için, her $i \in I$ ve her $j \in J$ için,

$$h_{i,j} : M_i \otimes_R N_j \to M \otimes_R N$$

fonksiyonlarını tanımlamak yeterli. $h_{i,j}$'yi tahmin edildiği gibi en doğal biçimde tanımlayalım:

$$\mu_i : M_i \to M \text{ ve } \nu_i : N_i \to N$$

doğal gömmelerse,

$$h_{i,j} = \mu_i \otimes \nu_j$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
(h \circ g)((m_i)_i \otimes (n_j)_j) &= h(g((m_i)_i \otimes (n_j)_j)) \\
&= h((m_i \otimes n_j)_{i,j}) \\
&= (h_{i,j}(m_i \otimes n_j))_{i,j} \\
&= ((\mu_i \otimes \nu_j)(m_i \otimes n_j))_{i,j} \\
&= (\mu_i(m_i) \otimes \nu_j(n_j))_{i,j} \\
&= (m_i \otimes n_j)_{i,j}.
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(g \circ h)((m_i \otimes n_j)_{i,j}) &= g(h((m_i \otimes n_j)_{i,j})) \\
&= g(\Sigma_{i,j}\, h_{i,j}(m_i \otimes n_j)) \\
&= g(\Sigma_{i,j}\, (\mu_i \otimes \nu_j)(m_i \otimes n_j)) \\
&= g(\Sigma_{i,j}\, (\mu_i(m_i) \otimes \nu_j(n_j))) \\
&= g(\Sigma_{i,j}\, (m_i \otimes n_j)) \\
&= g((\Sigma_i\, m_i) \otimes (\Sigma_j\, n_j)) \\
&= g((m_i)_{i\in I} \otimes (n_j)_{j\in J}) \\
&= (m_i \otimes n_j)_{j\in J, i\in I}
\end{aligned}$$

olur. Kanıtımız bitmiştir. □

8. Tansör Çarpımının Birleşme Özelliği

9. Homomorfizmalarla Tansör Çarpımları

10. Tansör Cebiri

11. Simetrik Çarpım

12. Alterne Çarpım